

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AĞIRLIKLI VE DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA
HARDY OPERATÖRÜNÜN KOMPAKTLIĞI**

LÜTFİ AKIN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. YUSUF ZEREN**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**AĞIRLIKLI VE DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA
HARDY OPERATÖRÜNÜN KOMPAKTLIĞI**

Lütfi AKIN tarafından hazırlanan tez çalışması/....../.... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İsmail TOK
İstanbul Aydın Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK
İ. Ticaret Üniversitesi

Doç. Dr. Erdal GÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu alışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün
2014-01-03-DOP01 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Hardy operatörü üzerindeki çalışmalarda son zamanlarda önemli derecede artış görülmektedir. Bir çok yazar Hardy operatörünün sınırlılığı, limit durumu, kompaktlığı vs. konusunda çok sayıda makale yayınlamıştır. Tabi bu çalışmaları matematiğin farklı uzaylarında ele almışlardır. Örneğin, Orlicz uzayı, Değişken üslü Lebesgue uzayı, Lebesgue uzayı, Lorentz uzayı, Ağırlıklı Lebesgue uzayı vs. Bizde bu çalışmalardan farklı olarak Ağırlıklı ve Değişken üslü Lebesgue uzayında Hardy Operatörünün Kompaktlığını inceledik. Bu uzayda ki çalışmamız farklı alanlar ile de bağlantılıdır. Örneğin, esneklik problemleri, elektoreolojik sıvıların matematiksel modellerinin yazılması, varyasyon hesapları, diferansiyel denklemler vs.

Çalışmalarımda her zaman yanımda olan, beni anlayan ve değerli katkılarını esirgemeyen muhterem hocam **Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN**'e şükranlarımı sunuyorum. Yine benim bu konuda ilerlememi sağlayan ve beni katkıları ile teşvik eden değerli hocam **Prof. Dr. Farman MAMEDOV**'a teşekkürü bir borç bilirim. Yine tez izleme komitemde bulunan değerli hocalarım **Prof. Dr. İsmail TOK** ve **Prof. Dr. Ömer GÖK** 'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu çalışmalarımda büyük bir özveri ile beni destekleyen başta annem, babam, eşim ve sabırla beni bekleyen çocuklarıma her şeyin gönüllerince olmasını diliyorum.

Haziran, 2014

Lütfi AKIN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	7
1.3 Hipotez	7
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	8
2.1 Metrik Uzay	8
2.2 Vektör Uzay	12
2.3 Normlu Uzay	13
2.4 Hilbert Uzayı	16
2.5 Lineer Operatörler	18
2.6 Ölçü Kavramı ve Lebesgue Ölçüsü	22
BÖLÜM 3	
AĞIRLIKLILIK VE DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA HARDY OPERATÖRÜNÜN KOMPAKTLIĞI	30
3.1 Ağırlıklı ve Değişken Üslü Lebesgue Uzayı	30
3.2 Araştırma Bulguları	35

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	48

**AĞIRLIKLI VE DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA
HARDY OPERATÖRÜNÜN KOMPAKTLIĞI**

Lütfi AKIN

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez için gerekli literatür özeti, tezin amacı ve hipotez kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde tez için gerekli temel tanım ve teoremler ile Hardy operatörünün başlangıcı, tarihsel gelişimi ve kompaktlığına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Ağırlıklı ve Değişken Üslü Lebesgue Uzayında Hardy operatörünün kompaktlığı gösterilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hardy Operatör, Ağırlıklı Uzay, Değişken Üslü, Lebesgue Uzayı, Kompaktlık

**COMPACTNESS OF HARDY OPERATOR IN THE WEIGHTED VARIABLE
EXPONENT LEBESGUE SPACES**

Lütfi AKIN

Department of Mathematic

PhD. Thesis

Adviser: Asist. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis consist of four chapter. In the first chapter, there are literature summary for the thesis, aim of the thesis and hypothesis part. In the second chapter, there are the basic descriptions and theorem for the thesis and the beginning of the Hardy operator, historical development of it and the study of compactness problems. In the third chapter Hardy's operator compactness is showed in the weighted and variable exponent in Lebesgue space. In the last chapter, there is conclusions and advices.

Keywords: Hardy operator, Weighted Space, Variable exponent, Lebesgue Space, Compactness

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

1.1 Literatür Özeti

1920 de Godfrey Harold Hardy [1] tarafından (ispatı verilmeksizin) $a > 0$, $f(x) \geq 0$, $p > 1$ ve

$\int_a^\infty f^p(x)dx < \infty$ (yakınsak) iken;

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x} \int_a^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^\infty f^p(x)dx \quad (1.1)$$

eşitsizliği elde edilmiştir. G. H. Hardy nin aslında temel amacı $\{a_n\}$ negatif olmayan reel terimli bir dizi olmak üzere,

$$\sum_{m,n=1}^\infty \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \left(\sum_{m=1}^\infty a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^\infty b_n^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde ki Hilbert eşitsizliğinin yeni ve daha basit bir ispatını bulmaktı. 1925 yılındaki [2] makalesinde $p > 1$ ve $a_n \geq 0$ için,

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^\infty a_n^p \quad (1.2)$$

şeklinde ki eşitsizliğini ortaya koymuştur. Aynı zamanda (1.1) eşitsizliğinin gerçekte f , herhangi sınırlı $(0, x)$ aralığında integrallenebilir $p > 1$ ve f^p , $(0, \infty)$ aralığında integrallenebilir ise,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) dx \quad (1.3)$$

şeklinde eşitsizliğinin sağlandığını ispatlamıştır. Bu eşitsizlik Hardy eşitsizliği olarak bilinir.

G. H. Hardy (1.3) eşitsizliğinden sonraki ağırlık fonksiyonları ile ilgili ilk ünlü eşitsizliğini,

$$p > 1, \varepsilon < p-1 \text{ ve } f \text{ ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonlar için, } \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon} \right)^p$$

mümkün olan en iyi sabit olmak üzere,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) x^\varepsilon dx \quad (1.4)$$

şeklinde ifade etmiştir.

Son on yıla kadar (1.4) ile verilen eşitsizlik $-\infty < a < b < \infty$, $u, v, (a, b)$ aralığında

tanımlı ölçülebilir pozitif ağırlık fonksiyonları p ve q , $0 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ eşitsizlikleri ile uygun parametreler olsun.

$$\sup_{a < x < b} \left(\int_x^b u(t) dt \right)^{1/q} \cdot \left(\int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p}-1} < \infty, \quad \left(\frac{p}{p-1} = p' \right)$$

ancak ve ancak

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t) dt \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \leq c \cdot \left(\int_a^b f^p(x) v(x) dx \right)^{1/p} \quad (1.5)$$

şeklinde ki eşitsizlik sağlanır.

Bazı yazarlar $\int_a^x f(t)dt$ operatörünün yerine daha genel olan

$$(H_{u,v} f)(x) = u(x) \int_a^x v(t) f(t) dt$$

operatörünü tanımlamıştır. Burada u, v pozitif fonksiyonlardır.

Örneğin, Levinson [3] de ; Eğer $u, (0, \infty)$ da ağırlık fonksiyonu, bazı $p > 1, \lambda > 0$ ve tüm $x > 0$ için,

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{xu'(x)}{u(x)} \geq \frac{1}{\lambda}$$

ise H_u operatörünün,

$$H_u f(x) = \frac{1}{xu(x)} \int_0^x u(t) f(t) dt$$

şeklinde yazılabildiğini ispatlamıştır. Ve buradan,

$$\int_0^\infty |H_u f(x)|^p dx \leq \lambda^p \int_0^\infty |f(x)|^p dx$$

yazabiliriz.

Bununla ilgili bir çok sonuç Kantorovich-Akilov, Korotkov, Szeptyeki ve Genebashvili-Gogatishvili-Kokilashvili-Krbec makalelerinde vardır.

Muhtemeldir ki ilk sonuçlar L^2 de ağırlıklı Hardy eşitsizliği ile ilgilidir. Gerçekten Kac Krein [4] de aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 1.1 $0 < b \leq \infty$ alalım. O zaman tüm $f \in L^2(0, b)$ için,

$$\int_0^b \left| \int_0^x f(t) dt \right|^2 u(x) dx \leq C \int_0^b f(x)^2 dx$$

eşitsizliği sağlanır ancak ve ancak

$$A = \sup_{r \in (0, b)} r \int_r^b u(x) dx < \infty$$

dır. Üstelik burada $A \leq C \leq 4A$ eşitsizliği söz konusudur.

1966 da Talenti [4]; Eğer u ağırlık fonksiyonu öyle ki $\int_0^b u(x) dx < \infty$; $0 < b < \infty$;

$\frac{1}{u}, (0, b)$ de lokal integrallenebilir ve

$$\lambda_0 = \sup_{0 < r \leq b} \int_r^b u(x) dx \int_0^r \frac{1}{u(x)} dx < \infty$$

ise o zaman $f(x) \geq 0$ için,

$$\int_0^b \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 u(x) dx \leq 4\lambda_0 \int_0^b f(x)^2 u(x) dx$$

sağlanır.

1969 da Talenti ve Tomaselli [4] $f \geq 0$, $0 < b \leq \infty$ şartları ile

$$\int_0^b \left(\int_0^x f(t) dt \right)^p u(x) dx \leq C \int_0^b f(x)^p v(x) dx$$

eşitsizliği için gerekli ve yeterli şartları elde etmiş ve $1 < p < \infty$ için

$$B = \sup_{r \in (0, b)} \left(\int_r^b u(x) dx \right) \left(\int_0^r v^{1-p'}(x) dx \right)^{p-1} < \infty$$

doğruluğunu görmüştür. Üstelik $B \leq C \leq \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} B$ eşitsizliği geçerlidir.

2012 de Mamedov, F. I. ve Zeren, Y. [5] ; $L^{p(\cdot)}(0,1)$ de Hardy operatörü için gerekli ve yeterli şartları elde etmişlerdir.

Kompaktlık sürekliliğin bir sonucudur. Ve biz biliyoruz ki H operatörünün sınırlılığı, $q \geq p$ olduğunda

$$A_M(x) = \left(\int_x^b u(t) dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{1/p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

fonksiyonunun sınırlılığı ile karakterize edilir.

Muhtemelen kompaktlık ile ilgili ilk sonuç 1958 de Kac-Krein [6] tarafından türetilmiştir ($v=1, (0,b)$ de $p=q=2, 0 < b \leq \infty$).

İkinci kişi 1973 de Stuart [6] ($p=q=2, (a,b)=(0,\infty)$ ve bazı u, v , ağırlık fonksiyonları için) dır.

Daha genel olarak kompaktlık problemi 1974 de Juberg [7] ($p=q$ ve $p \leq q$) tarafından incelenmiştir.

$J = J_a + J_b$ olmak üzere,

$$J_a = \lim_{\alpha \rightarrow a} \sup_{a < x \leq \alpha} \left(\int_x^\alpha u(t) dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{1/p'}$$

$$J_b = \lim_{\beta \rightarrow b} \sup_{\beta \leq x < b} \left(\int_x^b u(t) dt \right)^{1/q} \left(\int_\beta^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{1/p'}$$

olsun.

Özel olarak, $H_{u,v}$ kompakttır ancak ve ancak $J = 0$ dir. Üstelik eğer, $1 < p \leq q < \infty$ ise o zaman $H_{u,v}$ kompakttır ancak ve ancak a, b noktalarında

$$A(x) = \left(\int_x^b |u(t)|^q dt \right)^{1/q} \cdot \left(\int_a^x |v^{p'}(t)| dt \right)^{1/p'}$$

fonksiyonunun limiti sıfırdır. Bu sonuç genelde $p=1$ ve $q=\infty$ için sağlamaz.

Gerçekten eğer $u = \chi_{(0,\infty)}$ ve $v = \chi_{(-\infty,1)}$ ile $H_{u,v} : L^1(R) \rightarrow L^\infty(R)$ operatörünü alırsak $J=0$ olur fakat $H_{u,v}$ kompakt olmaz.

Yine 1987 de bağımsız olarak Opic-Kufner [8] tarafından Hardy operatörünün kompaktlık kriteri tamamen farklı bir ispat ile gösterilmiştir.

1990 da Stepanov [9] tarafından, daha genel olan Riemann-Liouville operatörünün kompaktlığı $1 < p \leq q < \infty$ ve $1 < q < p < \infty$ durumlarında gösterilmiştir.

1994 yılında David E. Edmunds, Petr Gurka, Lubos Pick [10] tarafından ağırlıklı Banach fonksiyon uzaylarında Hardy tipi integral operatörünün kompaktlığı incelenmiştir.

2005 yılında David E. Edmunds, Vakhtang Kokilashvili, Alexander Meskhi [11] tarafından $L^{p(x)}$ uzaylarında ağırlıklı Hardy operatörünün kompaktlığı ve sınırlılığı incelenmiştir.

2006 yılında Amiran Gogatishvili, Alois Kufner, Lars-Eric Persson ve Anna Wedestig [12] tarafından Hardy operatörünün kompaktlığı ve sınırlılığı için değişik denklik şartları incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Ağırlıklı ve Değişken Üslü fonksiyonlar için (gerekli ve yeterli şartlar olabilir) kesin şartları, Hardy operatörünün Ağırlıklı ve Değişken Üslü Lebesgue uzaylarında kompaktlığını araştıracağız.

1.3 Hipotez

Değişken üslü Lebesgue uzayında, temel integral operatörünün kompaktlık problemi son zamanlarda bir çok yazar tarafından ele alındı. Fakat Hardy operatörünün sınırlılığı ve kompaktlığı problemi ile çok az kişi ilgilendi. Bununla birlikte Hardy operatörünün kompaktlığı için gerek ve yeter şartlar konusunda herhangi bir çalışma şimdiye kadar yapılmadı.

Bizde bu eksikliğe binaen, $p(x)$ ve $q(x)$ sonlu $(0,l)$ aralığında ölçülebilir fonksiyonlar , $v(.)$ ve $w(.)$ ağırlık fonksiyonları olmak üzere, $L^{p(x)}(0,l) \rightarrow L^{q(x)}(0,l)$ 'ya ;

$$H_{v,w} f(x) = v(x) \int_0^x f(t) w(t) dt$$

Hardy operatörünün kompaktlığı için gerekli ve yeterli şartları kurmaya çalışacağız.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Metrik Uzay

Tanım 2.1 X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli $d: X \times X \rightarrow R$ fonksiyonu

$$M1) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$M2) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

özelliklerini sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik fonksiyonu denir. (X, d) ikilisine bir metrik uzay ve M1-M4 aksiyomlarınada metrik aksiyomları denir. Bir küme üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir.

Örnek 2.2 $X = R$ olmak üzere $d: R \times R \rightarrow R$, $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in R$ dönüşümü R üzerinde bir metriktir. Bu metriğe adi metrik (euclid metriği) denir.

Örnek 2.3 X boştan farklı bir küme olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe X üzerindeki ayrık metrik denir.

Örnek 2.4 ℓ^p , $(1 \leq p < \infty)$ terimlerinin p . kuvvetten toplamları olan dizi uzayı olmak üzere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \ell^p$ ve $d: \ell^p \times \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü ℓ^p üzerinde bir metriktir. Bu metrik özel olarak $p=2$ için (ℓ^2, d) şeklindeki Hilbert uzayını oluşturur.

Tanım 2.5 (X, d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar,

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar,

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.6 (X, d) metrik uzay ve $G \subseteq X$ olmak üzere,

(i) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < d(c, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $c \in X$ sayısına G kümesinin bir yığılma noktası denir.

(ii) Eğer bir $c \in G$ noktası G 'nin bir yığılma noktası değilse c elemanına G 'nin bir izole noktası denir.

Teorem 2.7 (X, d) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(i) $c \in X$ noktası E kümesinin bir yığılma noktasıdır.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $B(c, \varepsilon)$ açık yuvarı E kümesinin sonsuz çoklukta elemanını kapsar.

(iii) E kümesinde bir (x_n) dizisi vardır ki $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \neq c$ ve $x_n \rightarrow c$ dir.

Tanım 2.8 (X, d) bir metrik uzay olsun. $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin.

Eğer $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın bir limit noktası denir.

Tanım 2.9 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunu alalım.

Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x, c) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesindeki her noktada sürekli ise f fonksiyonu X uzayında süreklidir denir.

Tanım 2.10 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsunlar. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunu alalım.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x_1, x_2) < \delta$ iken $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu X 'de düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 2.11 (X, d) bir metrik uzay ve $(x_n) \in X$ bir dizi olsun

$\forall \varepsilon > 0$ için $m > n \geq N$ olmak üzere $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.12 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X 'de yakınsak bir dizi ise (x_n) aynı zamanda bir Cauchy dizisidir.

Bu teoremin tersi R ve C de adi metriğe göre doğru olmakla birlikte genel olarak doğru değildir.

Tanım 2.13 (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X deki bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Örnek 2.14 $\emptyset$, R ve C adi metriğe göre tamdır.

Teorem 2.15 (X, d) bir metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun.

(i) Eğer E kümesi tam ise kapalıdır.

(ii) Eğer X kümesi tam ve E kümesi kapalı ise E kümesi tamdır.

Tanım 2.16 (X, d) bir metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. Eğer E deki her dizi limiti E de olan yakınsak bir alt diziye sahip ise E kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt ise (X, d) metrik uzayı kompakt olur.

Bir $E \subseteq X$ alt kümesinin kompaktlığı X uzayında tanımlanan metriğe bağlıdır. Örneğin $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $\mathbb{R}$ deki adi metriğe göre kompakttır ancak ayrık metriğe göre kompakt değildir. Bir tam metrik uzayın aynı zamanda kompakt olması gerekmez.

Teorem 2.17 Bir metrik uzaydaki kompakt bir küme aynı zamanda tamdır.

Teorem 2.18 (X, d) bir metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun.

- (i) Eğer E kümesi kompakt ise E kümesi kapalı ve sınırlıdır.
- (ii) Eğer X kümesi kompakt ve E kümesi kapalı ise E kümesi kompakttır.

Tanım 2.19 (X, d) bir metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. $X = \bar{E}$ ise E kümesine X de yoğun küme denir.

Örnek 2.20 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur. Fakat $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun değildir.

Tanım 2.21 Bir (X, d) metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya ayrılabilir metrik uzay denir.

Örnek 2.22 $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^p$ için

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlı $d: \ell^p \times \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ metriği ile (ℓ^p, d) ayrılabilir metrik uzaydır.

2.2 Vektör Uzay

Tanım 2.23 V boştan farklı bir küme ve F bir cisim olmak üzere

$$+: V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\bullet: F \times V \rightarrow V, (a, x) \rightarrow ax$$

dönüşümleri ile sırası ile vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\forall x, y, z \in V$ ve $a, b \in F$ için aşağıdaki koşullar sağlansın.

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\forall x \in V$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $\forall x \in V$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $\forall x \in V$ için $1 \cdot x = x$
6. $a(x + y) = ax + ay$
7. $(a + b)x = ax + bx$
8. $(ab)x = a(bx)$

Bu durumda V 'ye F cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay), elemanlarına ise vektör yada nokta denir. $V = R$ alınırsa V 'ye reel vektör uzayı, $V = C$ alınırsa V 'ye kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.24 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve W, V 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer W, V vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W 'ye V 'nin bir (lineer) alt uzayı denir.

Teorem 2.25 $\emptyset \neq W \subset V$ kümesinin V 'nin bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in W$ ve $\forall a, b \in F$ için $ax + by \in W$ olmasıdır.

Tanım 2.26 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subset V$ olsun. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in F$ olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ eşitliği ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsız, aksi halde en az bir $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ise lineer bağımlıdır denir.

Tanım 2.27 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq M \subset V$ olmak üzere

(i) M lineer bağımsızdır.

(ii) $V = \text{Span } M$ ise M 'ye V 'nin bir tabanı veya bazı denir.

Eğer $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, V 'nin bir tabanı ise $\forall x \in V$ vektörü $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ olmak üzere $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ şeklinde tek bir gösterime sahiptir. Eğer V vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa V 'ye sonlu boyutlu vektör uzayı, aksi halde sonsuz boyutlu vektör uzayı denir. Sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir tabanındaki vektörlerinin sayısına V 'nin boyutu denir ve $\text{Boy } V$ şeklinde gösterilir.

2.3 Normlu Uzay

Tanım 2.28 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall a \in F$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N3) \|ax\| = |a| \|x\|$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa V üzerinde bir norm olur ve $(V, \|\cdot\|)$ ikilisinde normlu vektör uzay denir. Bu uzay $V = \mathbb{R}$ için reel normlu uzay, $V = \mathbb{C}$ için kompleks normlu uzay olarak adlandırılır.

Örnek 2.29 $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ euclid vektör uzayını düşünelim.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile birlikte bir normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $\mathbb{R}^n$ deki adi norm veya euclid normu denir.

Teorem 2.30 F cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her norm V üzerinde süreklidir.

Tanım 2.31 V, F cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in V$ için

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

olacak biçimde $a, b \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa V üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 2.32 $(x_m), (V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in V$ olsun. Eğer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_0\| = 0$$

oluyorsa (x_m) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir. $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0$ veya $x_m \rightarrow x_0$ şeklinde gösterilir. Bu ifadeye nördaki yakınsama denir.

Tanım 2.33 $(x_n), (V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'na bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.34 Bir $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi V deki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına Banach uzayı denir.

Örnek 2.35 ℓ^∞ normlu vektör uzayı $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.36 $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayını alalım. V sayılabilir yoğun bir alt kümeyi kapsıyorsa $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına ayrılabilir normlu uzay denir. Örneğin Q rasyonel sayılar kümesi R içinde sayılabilir yoğun bir küme olduğundan $(R, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir normlu uzaydır.

Tanım 2.37 $(V, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve W, V 'nin bir lineer alt uzayı ise $(W, \|\cdot\|)$ de bir normlu uzaydır. Bu uzaya $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir alt uzayı denir. Eğer W kapalı ise $(W, \|\cdot\|)$ uzayı kapalı alt uzay olur.

Teorem 2.38 Bir Banach uzayının her kapalı alt uzayı yine bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.39 $(V, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve W, V 'nin bir lineer alt uzayı ise $(W, \|\cdot\|)$ 'nin bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter şart W 'nin kapalı olmasıdır.

Tanım 2.40 $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $A \subset V$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine V de kompakt küme denir. Eğer A kümesinin kapanışı $(\bar{A}, A$ 'nin kapanışı) V de kompakt A kümesine X de ön-kompakt küme denir. Ve $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına kompakt uzay denir.

Tanım 2.41 $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $A \subset V$ olsun. A kümesindeki her dizinin A da bir limit noktası varsa A kümesine V de dizisel kompakt küme denir.

2.4 Hilbert Uzayı

Tanım 2.42 $V=R$ (veya $V=C$) ve V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere,

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ dönüşümü

$$i1) \forall x, y \in V \text{ için } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$i2) \forall x, y, z \in V \text{ için } \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$i3) \forall x, y \in V \text{ ve } a \in F \text{ için } \langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$$

$$i4) \forall x \in V \text{ için } \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

koşullarını sağlıyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne V üzerinde bir iç çarpım, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

Örnek 2.43 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ için

$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ şeklinde tanımlı iç çarpıma göre R^n bir iç çarpım uzayıdır.

Önerme 2.44 (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı ise $\forall x, y \in V$ için

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

dir.

Tanım 2.45 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı ve $x \in V$ olmak üzere bir x vektörünün normu

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan Cauchy-Schwartz eşitsizliğini

$$\sqrt{|\langle x, y \rangle|^2} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

şeklindedeyazabiliriz.

Önerme 2.46 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı ve $\forall x, y \in V$ için

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliği paralel kenar kuralını ifade eder.

Paralel kenar kuralı bir normlu uzayın iç çarpım uzayı olup olmadığını gösterir.

Tanım 2.47 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı ve $\forall x, y \in V$ için

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}$$

şeklindeki iç çarpım uzayı bir normlu uzaydır, yani her iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır.

Teorem 2.48 $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in V$ vektörleri için Paralel kenar kuralını sağlamasıdır.

Teorem 2.49 Bir $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ normuna göre tam ise, yani $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ içindeki her Cauchy dizisi V içinde yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 2.50 $\langle \cdot, \cdot \rangle: \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow F$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü ℓ_2 üzerinde bir iç çarpımdır.

Bu iç çarpıma göre ℓ_2 iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Bir F cismi üzerinde tanımlı her Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır, ancak bir Banach uzayının Hilbert uzayı olması gerekmez. Örneğin, ℓ^∞ uzayı bir Banach uzayı olduğu halde aynı norm altında Hilbert uzayı değildir.

2.5 Lineer Operatörler

Tanım 2.51 X ve Y , K cismi üzerinde iki vektör uzay olsun ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren $T: D \rightarrow Y$ kuralına D 'den Y 'ye bir operatör denir.

Tanım 2.52 X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzay olsun. $T: X \rightarrow Y$ operatörü,

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) \quad a, b \in K ; x, y \in X$$

koşulunu sağlıyorsa T 'ye lineer operatör denir.

Örnek 2.53 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $L^2[a, b]$ uzayı

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

normuna göre karesi $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonların normlu vektör uzayı olsun.

$\forall f \in L^2[a, b]$ ve $\forall t \in [a, b]$ için $T(f)(t) = \phi(t)f(t)$ şeklinde tanımlı $T: L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ operatörü lineerdir.

Tanım 2.54 $T: D_T \subset X \rightarrow Y$ operatörüne belli bir $c \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_T(X)$ için,

$$\|T(x)\| \leq c\|x\| \text{ olacak şekilde } c \geq 0 \text{ var ise } T \text{ operatörüne sınırlı operatör denir.}$$

$\|T(x)\| \leq c\|x\|$ ifadesini $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = c$ şeklinde de yazabiliriz ki bu da c sabitinin en az

$D_T - \{0\}$ kümesi üzerinde alınan supremum kadar büyük olabileceğini gösterir.

Daha açıkçası,

$$c = \sup_{x \in D_T(X)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

şeklindedir.

Teorem 2.55 X, K cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Her $T: X \rightarrow K$ lineer dönüşümü için aşağıdakiler denktir.

(i) T, X üzerinde süreklidir.

(ii) $T, x=0$ noktasında süreklidir.

(iii) $\{T(x) : x \in X \text{ ve } \|x\| \leq 1\}$ kümesi sınırlıdır.

Tanım 2.56 X ve Y Banach uzayları ve $T: X \rightarrow Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer T operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön-kompakt kümesine götürüyorsa T operatörüne kompakt lineer operatör (sürekli lineer operatör) denir.

Teorem 2.57 X ve Y normlu vektör uzayları verilsin ve $T: D_T \subset X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer D_T kümesi X normlu uzayının sınırlı bir al kümesi iken $T(X)$ 'e Y normu üzerinde ön-kompakt ise, bu durumda $T(X)$ operatörüne kompakt, eğer T sürekli ve kompakt ise tamamen (total) sürekli operatör denir.

Tanım 2.58 X ve Y normlu uzaylar ve $T: D_T \subset X \rightarrow Y$ bir operatör, eğer T kompakt operatör ise sınırlıdır.

Teorem 2.59 X ve Y normlu uzaylar ve $T: D_T \subset X \rightarrow Y$ şeklindeki her sınırlı operatör süreklidir. Böylece her kompakt lineer operatör tamamen süreklidir.

Tanım 2.60 X ve Y birer Banach uzayı, $(T_n) \in L(X, Y)$ operatörler dizisi ve $T \in L(X, Y)$ olmak üzere;

(i) (T_n) dizisi düzgün sınırlıdır $\Leftrightarrow \exists k > 0$ öyle ki $\forall n \in N$ için $\|T_n\| \leq k$.

(ii) (T_n) dizisi düzgün Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in N$ öyle ki $\forall n, m > n_\varepsilon$ için

$$\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon.$$

(iii) (T_n) dizisi T operatörüne düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in N$ öyle ki

$$\forall n > n_\varepsilon \text{ için } \|T_n - T\| \leq \varepsilon.$$

(iv) (T_n) dizisi T operatörüne kuvvetli yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\exists n_0 = n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall n > n_0 \text{ için } \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Tanım 2.61 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) dizisi, $x \in X$ elemanı için eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ şeklinde gösterilir. Bu yakınsaklığa kuvvetli yakınsaklık denir ve bu durum $x_n \xrightarrow{k} x$ ile ifade edilir. Buradaki x noktasına (x_n) dizisinin kuvvetli limiti denir.

Tanım 2.62 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. $\forall f \in X'$ (X' , X uzayının duali) için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x noktasına zayıf yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow{z} x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.63 X , K cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonlardan oluşan $L(X, K)$ Banach uzayına X uzayının dual uzayı denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.64 X , K cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. $X'' = X$ ise (X'' , X uzayının ikinci duali) X uzayına reflexive (yansımalı) uzay denir.

Teorem 2.65 Yansımalı bir X Banach uzayının her alt uzayıda yansımalıdır.

Tanım 2.66 f , (a, b) de tanımlı, pozitif ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$(Hf)(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.1)$$

şeklindeki operatöre Hardy operatörü denir.

Tanım 2.67 $f(x) \geq 0$ için $(Hf)(x) = \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt$ şeklindeki operatöre Ortalama Hardy operatörü denir.

Tanım 2.68 k çekirdek fonksiyonu,

(i) $k(x,t) \geq 0$, $0 < t < x$ ve k , x için artan t için azalan

(ii) $k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t)$, $0 < t < z < x$

özelliklerini sağlasın. Buna göre $x > 0$ olmak üzere,

$$(Kf)(x) = \int_a^x k(x,t)f(t)dt$$

şeklinde verilen K dönüşümüne Genel Hardy tipli operatör denir.

Tanım 2.69 $a=a(x)$ ve $b=b(x)$ fonksiyonları,

(i) $a(0)=b(0)=0$

(ii) $a(x) < b(x)$, $0 < x < \infty$

(iii) $a(\infty)=b(\infty)$

özelliklerini sağlayan ve $[0,\infty]$ üzerinde kesin artan diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun.

$\forall f(t) \geq 0$, $0 < t < \infty$ fonksiyonu için

$$(Tf)(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümüne Hardy-Steklov operatörü denir.

Bu Hardy-Steklov operatörünün,

$$(S_a^b f)(x) = \frac{1}{b(x)-a(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

düzenlenmiş hali borsadaki ekonomik hareketlerin davranışı hakkında kestirim yapabilmek için kullanılmaktadır. [13]

Örneğin, f fonksiyonu t zamanındaki fiyatı $f(t)$ olan bir hisse senedinin fiyatını göstermek üzere, borsa analistlerine göre bu hisse senedi için en iyi alış fiyatı $(S_{t-200}^t f)(t) \leq f(t)$, en iyi satış fiyatı ise bu eşitsizliğin tersi olduğu zamandır.

2.6 Ölçü Kavramı ve Lebesgue Ölçüsü

Tanım 2.70 X bir küme ve Σ X kümesinin bir Σ sınıfı için

$$(i) X \in \Sigma$$

$$(ii) \forall E \in \Sigma \text{ için } E^c = (X - E) \in \Sigma$$

$$(iii) k=1,2,\dots,n \text{ için } E_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n E_k \in \Sigma$$

özellikleri sağlanıyorsa bu Σ sınıfına X üzerinde bir cebir denir. Eğer (iii) yerine,

$$(iv) \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } E_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma \text{ özelliği sağlanırsa bu takdirde } \Sigma \text{ cebirine bir}$$

σ -cebir denir. Bu tanıma göre X üzerinde tanımlı bir Σ σ -cebiri aşağıdaki özelliklerini sağlar.

$$(i) \emptyset \in \Sigma$$

$$(ii) k=1,2,\dots,n \text{ için } E_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n E_k \in \Sigma$$

$$(iii) k \in \mathbb{N} \text{ için } E_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma$$

$$(iv) \forall E, F \in \Sigma \text{ için } (E - F) \in \Sigma$$

Örnek 2.71 X bir küme ve $\Sigma = \{X, \emptyset\}$, X üzerinde bir σ -cebirdir.

Teorem 2.72 X üzerindeki σ -cebirlerinin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ -cebirdir.

Tanım 2.73 Bir Σ sınıfını kapsayan σ -cebirlerinin en küçüğüne Σ 'nin ürettiği σ -cebiri denir.

Tanım 2.74 X bir küme ve Σ, X üzerinde bir σ -cebiri olsun. (X, Σ) ikilisine ölçülebilir uzay, Σ daki her kümeye ise Σ -ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme denir.

Teorem 2.75 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu;

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$
3. Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü denir.

$\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ şeklinde gösterilir. Eğer $\forall A \in \Sigma$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ fonksiyonuna bir sonlu ölçü denir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ -sonludur denir.

Tanım 2.76 X bir küme ve $P(X)$ de X 'in kuvvet kümesi olsun. $\lambda^*: P(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ şeklinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir λ^* fonksiyonu için,

- (i) $\lambda^*(\emptyset) = 0$
- (ii) $\forall A \in P(X)$ için $\lambda^*(A) \geq 0$
- (iii) $\forall A \subset B \subset X$ için $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$
- (iv) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$

özellikleri sağlanırsa λ^* fonksiyonuna bir dış ölçü denir.

Bu tanımlardan ne ölçü bir dış ölçü ne de dış ölçü bir ölçü olması gerekmez. Bir ölçünün dış ölçü olabilmesi için tanım kümesinin kuvvet kümesi olması gerekir.

Tanım 2.77 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay ve $(E_n) \in \Sigma$ koleksiyonu $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset A$ olacak şekilde alınsın. Buna göre $A \subset X$ kümesinin dış ölçüsü

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

şeklinde tanımlanır. μ^* ölçüsü bir dış ölçüdür ve bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir.

Tanım 2.78 X bir küme ve μ^* de X üzerinde Lebesgue dış ölçüsü olsun. $\forall A \subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

oluyorsa $E \subset X$ alt kümesine μ^* –ölçülebilir (Lebesgue ölçülebilir) küme denir.

Tanım 2.79 (X, Σ) ölçülebilir uzay ve f , genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun.

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) > a\}$ kümesi ölçülebilir ise f 'ye ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 2.80 (X, Σ) ölçülebilir uzay ve f , genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) > a\}$ kümesi ölçülebilirdir.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) \geq a\}$ kümesi ölçülebilirdir.

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) < a\}$ kümesi ölçülebilirdir.

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) \leq a\}$ kümesi ölçülebilirdir.

Teorem 2.81 f ve g ölçülebilir fonksiyonlar, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) kf

(ii) $f + g$

(iii) $f.g$

$$(iv) \frac{f}{g}, (g \neq 0)$$

$$(v) \max\{f, g\}$$

$$(vi) \min\{f, g\}$$

fonksiyonları ölçülebilirdir.

Teorem 2.82 (X, Σ) ölçülebilir uzay ve (f_n) , ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(i) \inf_n f_n(x)$$

$$(ii) \sup_n f_n(x)$$

$$(iii) \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$(iv) \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

fonksiyonları ölçülebilirdir.

Tanım 2.83 Σ , X 'in alt kümelerinden oluşan bir σ -cebiri ve μ de Σ üzerinde bir ölçü olmak üzere, (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

Tanım 2.84 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $A \in \Sigma$ olsun. Eğer $\mu(A) = 0$ ise A kümesinin ölçümü sıfırdır denir.

Tanım 2.85 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer $N = \{x: f(x) \neq g(x)\}$ kümesinin ölçümü sıfır ise hemen hemen her yerde (h.h.y) $f = g$ dir denir.

Tanım 2.86 $\bar{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ olmak üzere, $f: X \rightarrow \bar{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$f^+ = \max\{f(x), 0\} \quad ; \quad f^- = \min\{-f(x), 0\}$$

şeklinde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı negatif olmayan fonksiyonlardır. Burada

$$f = f^+ - f^- \text{ ve } |f| = f^+ + f^-$$

şeklindedir.

Tanım 2.87 E ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ de bu E kümesinde tanımlı ve gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her K gerçel sayıları için, $f(x) > K$ olan $x \in E$ değerlerinin kümesi ölçülebilirse, f fonksiyonu E kümesinde Lebesgue anlamında ölçülebilirdir yada kısaca ölçülebilirdir denir.

Bir fonksiyonun ölçülebilirliği $\{x \in E : f(x) > K\}$, $E[f(x) > K]$ şekillerinden biri ile ifade edilir.

Tanım 2.88 Bir E kümesi için;

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \text{ ise} \\ 0 & x \notin E \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_E(x)$ fonksiyonuna E kümesinin Karakteristik fonksiyonu denir. E ölçülebilir olduğundan $\chi_E(x)$ fonksiyonunda ölçülebilirdir.

Örnek 2.89 $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in Q, x \in (0,1) \\ 0 & ; x \notin Q^c, x \notin (0,1) \end{cases}$

şeklinde tanımlı Dirichlet fonksiyonu tanımlanan aralıkta ölçülebilirdir.

Tanım 2.90 Görüntü kümesi sonlu elemandan oluşan fonksiyona basit fonksiyon denir.

(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $E_i = \{x : k(x) = a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, $a_i \in R$ birbirinden farklı ve

$\bigcup_{i=1}^n E_i = X$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$) olmak üzere $k : X \rightarrow R$ ölçülebilir basit fonksiyonu

$$k(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x)$$

şeklinde gösterilir. Burada k 'nın ölçülebilir olması için ancak ve ancak $E_1, E_2, \dots, E_n$ kümelerinin ölçülebilir olmasıdır.

Tanım 2.91 $k(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x)$ negatif olmayan, ölçülebilir basit fonksiyon olmak üzere, k 'nın Lebesgue integrali

$$I(k) = \int_E k d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.92 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Lebesgue integrali

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int k d\mu : 0 \leq k \leq f, k \text{ basit fonksiyon} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.93 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve f fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

ifadesinde $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisinde sonlu ise f fonksiyonuna X üzerinde μ ölçüsüne göre Lebesgue integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.94 $\int_X |f| d\mu < \infty$ ise f fonksiyonuna X üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir denir.

Lebesgue integrali için aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i) Eğer f fonksiyonu, X üzerinde ölçülebilir, sınırlı ve $\mu(X) < \infty$ ise X de integrallenebilirdir.

(ii) Eğer f fonksiyonu, X üzerinde ölçülebilir, $\mu(X) < \infty$ ve $\forall x$ için $a \leq f(x) \leq b$ ise

$$a\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq b\mu(X) \text{ dir.}$$

(iii) $\forall x$ için $f(x) \leq g(x)$ ve f, g fonksiyonları ölçülebilir ve integrallenebilir ise

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \text{ dir.}$$

(iv) Eğer f integrallenebilir ise $\forall c \in \mathbb{R}$ için $\int_X cf d\mu \leq c \int_X f d\mu$ dir.

(v) Eğer f ölçülebilir ve $\mu(X) = 0$ ise $\int_X f d\mu = 0$ dır.

Teorem 2.95 Eğer $f \in L^1(X)$ ise $|f| \in L^1(X)$ dir. Bu durumda

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

dır.

Teorem 2.96 (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi)

(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $E \in \Sigma$ ve $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ olacak biçimde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Buna göre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

olur.

Teorem 2.97 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $E \in \Sigma$ ve $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Buna göre,

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

olur.

Teorem 2.98 (Fatou Lemma) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $E \in \Sigma$ ve $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Buna göre

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

olur.

Teorem 2.99 (Lebesgue Temel Yakınsaklık Teoremi)

(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $E \in \Sigma$ ve $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve $x \in E$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olsun. Eğer, $n=1,2,3,\dots$ ve $x \in E$ olmak üzere, $|f_n(x)| \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir $g(x)$ fonksiyonu E üzerinde $g(x) \in L^1(X)$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

olur.

**AĞIRLIKLI VE DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA HARDY
OPERATÖRÜNÜN KOMPAKTLIĞI****3.1 Ağırlıklı ve Değişken Üslü Lebesgue Uzayı**

Tanım 3.1 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; $\Omega \subset X$, R^n de bir bölge ve Ω bölgesinde tanımlı

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı denir. $L^p(\Omega)$ uzayındaki norm aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

Ω bölgesinde $f(x) \leq K$ olacak biçimde bir K sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Bu K sabitlerinin en büyük alt sınırında $|f(x)|$ 'nin Ω bölgesindeki esas supremumu (esaslı sınırı) denir ve $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ olarak ifade edilir.

Ω bölgesindeki hemen hemen sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ şeklinde gösterilir.

Buna göre bir f fonksiyonunun L^∞ daki normu $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ şeklindedir.

Tanım 3.2 v fonksiyonu hemen hemen her $x \in R^n$ için $v(x) > 0$ olacak şekilde R^n de lokal integrallenebilir olsun. Bu v fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Özel olarak $x \in \Omega \subset R^n$ için $d(x) = \inf_{y \in \Omega} |x - y|$ ve $a \in R$ olmak üzere $v(x) = (d(x))^a$ ağırlık fonksiyonuna a mertebeden ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 3.3 v fonksiyonu ağırlık fonksiyonu, $0 < p \leq \infty$ ve Ω, R^n de açık bir bölge olsun.

$$\int_{\Omega} |f|^p v d\mu < \infty$$

özellğine sahip ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu uzaya Ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L_v^p(\Omega) = L^p(v)$ ile gösterilir. $L_v^p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_{\Omega} |f|^p v dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty, \quad \|f\|_{p,v} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.4 (Ω, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $\Omega \times [0, \infty)$ da tanımlı bir φ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa Φ -sınıfındandır denir.

(i) $\varphi(t, v)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için $v \geq 0$ değişkenli bir φ fonksiyonudur, yani v 'nin

azalmayan, sürekli öyle bir fonksiyonudur ki $\varphi(t, 0) = 0$, $v > 0$ için $\varphi(t, v) > 0$ ve

$v \rightarrow \infty$ için $\varphi(t, v) \rightarrow \infty$ dır.

(ii) $\forall v \geq 0$ için $\varphi(t, v)$ fonksiyonu t 'nin Σ -ölçülebilir bir fonksiyonudur.

Konveks sol-yarı sürekl bir $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$ fonksiyonuna Φ fonksiyonu veya Orlicz fonksiyonu denir. Orlicz fonksiyonu kısaca sürekli, artan ve sınırsız bir $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ fonksiyonudur. Konveks Orlicz fonksiyonlarına Young fonksiyonu denir.

Tanım 3.5 (Ω, Σ, μ) bir δ -sonlu, tam ölçüm uzayı olsun. $p: \Omega \rightarrow [1, \infty)$ şeklinde tanımlı tüm μ ölçülebilir fonksiyonlar kümesini $P(\Omega, \mu)$ ile tanımlayalım. $p \in P(\Omega, \mu)$ fonksiyonlarına Ω 'da değişken üst denir.

$p^- = p_{\Omega}^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x)$ ve $p^+ = p_{\Omega}^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$ olarak tanımlarız. Eğer $p^+ < \infty$ ise bu

durumda p 'ye sınırlı değişken üst denir.

$p \in P(\Omega, \mu)$ olmak üzere $p' \in P(\Omega, \mu)$ değişken üstü $\frac{1}{\infty} = 0$ ile $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ şeklinde

tanımlanır. (p') 'ne p 'nin dual değişken üstü denir. Ayrıca μ 'nün n -boyutlu Lebesgue ölçümü ve Ω 'nın R^n de açık bir alt küme olması durumunda $P(\Omega) = P(\Omega, \mu)$ eşitliğini kullanabiliriz.

Değişken üstlü Lebesgue uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$ veya kısaca $L^{p(\cdot)}$ ile gösterilir. Özel olarak değişken üstlü Lebesgue uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \text{ normu ile}$$

$$L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) = \left\{ f \in L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(\lambda f) = 0 \right\} \text{ şeklinde veya buna paralel olarak}$$

$$L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) = \left\{ f \in L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) : \rho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(\lambda f) < \infty \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ için} \right\} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$L^{p(\cdot)}$ uzayı ilk olarak 1931 yılında $1 \leq p^- \leq p \leq p^+ < \infty$ durumunda $\varphi_{p(\cdot)} = \overline{\varphi}_{p(\cdot)}$ ile W. Orlicz [14] tarafından tanımlanmıştır. $L^{p(\cdot)}$ nin $p^+ < \infty$ durumundaki tanımı ilk olarak I. Sharapudinov [15] tarafından ve sonra çok boyutlu durum için O. Kovacik ve J. Rakosnik [16] tarafından yapılmıştır. Ayrıca O. Kovacik ve J. Rakosnik [16] ölçülebilir f fonksiyonu için

$$\rho_{KR}(f) = \overline{\rho}_{p(\cdot)}(f \chi_{\{p \neq \infty\}}) + \|f \chi_{\{p = \infty\}}\|_{\infty}$$

tanımını yapmış ve buna paralel olarak Luksemburg normunu

$$\|f\|_{KR} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{KR}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Teorem 3.6 $L^{p(\cdot)}$ uzayı tamdır.

Teorem 3.7 (Hölder Eşitsizliği) p ve p' , $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı

olsun. $f(x) \in L^p(\Omega)$, $g(x) \in L^{p'}(\Omega)$ ise $f(x)g(x) \in L^1(\Omega)$ olur. Yani,

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \quad \text{veya} \quad \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f(x)\|_p \|g(x)\|_{p'}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.8 (Ters Hölder Eşitsizliği) $0 < p < 1$ için $p' = \frac{p}{p-1} < 0$ ve $f(x) \in L^p(\Omega)$ olmak üzere;

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \geq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

olur.

Teorem 3.9 $p \in P(\Omega, \mu)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. O zaman $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$ uzayı refleksif'tir.

Lemma 3.10 Eğer $p \in P(\Omega)$ ve $p^+ < \infty$ ise bu durumda Ω 'daki tüm sınırlı fonksiyonlar kümesi $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ de yoğundur.

Teorem 3.11 $p \in P(\Omega)$ ve $p^+ < \infty$ ise $C_0^\infty(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ de yoğundur.

Teorem 3.12 $p \in P(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda $C(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ kümesi $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ de yoğundur.

Teorem 3.13 $p \in P(\Omega, \mu)$ sınırlı bir üst ve μ ayrılabilir olsun. O zaman $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$ ayrılabilir.

3.2 Araştırma Bulguları

Araştırmalarımızda bize yardımcı olacak bazı notasyonları verelim.

$\rho : (0, l) \rightarrow (1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyon,

$L^{p(x)}(0, l)$; $f : (0, l) \rightarrow R$ türünde ki tüm ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzay,

f , (a, b) de tanımlı pozitif bir fonksiyon olmak üzere $L^p(a, b, w) = L^p(w)$

şeklindeki ağırlıklı Lebesgue uzayındaki norm,

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_a^b |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty$$

şeklindedir.

$$\rho_{p(x)}(f) = \int_0^l |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \quad \text{modüler fonksiyon (sonlu),}$$

Eğer $\text{ess sup}_{x \in (0, l)} p(x) < \infty$ ise o zaman f 'nin modülü,

$$\|f\|_{L^{p(x)}(0, l)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(x)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) < \infty \right\}$$

şeklindedir. $L^{p(x)}$ uzayı genelleştirilmiş Orlicz uzayının özel bir halidir.

$a > 0$ için,

$$w(x)^{p'(x)} \in L^1(B(0, a)) \quad , \quad v(x)^{q(x)} \in L^1(a, l)$$

$$V(x) = \int_x^l v(y)^{q(y)} dy \quad W(x) = \int_0^x w(y)^{p'(y)} dy$$

π , $(0, l)$ deki değerleri sonlu $f : (0, l) \rightarrow R$ şeklindeki ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı,

Λ_0 , $f : (0, l) \rightarrow R$ şeklindeki ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı ki,

$$\limsup_{x \rightarrow 0} |f(x) - f(0)| \ln \frac{1}{W(x)} < \infty \quad (3.1)$$

Lemma 3.14 p, q ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere; $0 < s < x < t$ için,

$$W(t)^{-\frac{1}{p(s)}} \geq \frac{1}{C} W(t)^{-\frac{1}{p(x)}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (3.1) şartı ve $W(x) = \int_0^x w(y)^{p'(y)} dy$ eşitliğinden $W(t) \leq C$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} W(t)^{\frac{1}{p(s)}} &= W(t)^{\frac{1}{p(x)}} \cdot W(t)^{\frac{1}{p(s)} - \frac{1}{p(x)}} \\ &= W(t)^{\frac{1}{p(x)}} \cdot W(t)^{\frac{1}{p(s)} - \frac{1}{p(0)}} \cdot W(t)^{\frac{1}{p(0)} - \frac{1}{p(x)}} \\ &\leq W(t)^{\frac{1}{p(x)}} \left(\frac{1}{W(t)} \right)^{\ln \frac{1}{W(s)}} \cdot \left(\frac{1}{W(t)} \right)^{\ln \frac{1}{W(x)}} \\ &\leq W(t)^{\frac{1}{p(x)}} \cdot \left(\frac{1}{W(t)} \right)^{\frac{2C}{\ln \frac{1}{W(t)}}} \\ &\leq 2CW(t)^{\frac{1}{p(x)}} \end{aligned}$$

Lemma 3.15 p, q ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere; $0 < x < t < l$ için,

$$W(t)^{-\frac{q(x)}{p(x)}} \geq \frac{1}{C} W(t)^{-\frac{q(0)}{p(0)}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (3.1) şartı ve $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ fonksiyonları için,

$$\begin{aligned}
 W(t)^{\frac{q(x)}{p(x)}} &= W(t)^{\frac{q(0)}{p(0)}} \cdot W(t)^{\frac{q(x)-q(0)}{p(x)-p(0)}} \\
 &\leq W(t)^{\frac{q(0)}{p(0)}} \cdot \left(\frac{1}{W(t)} \right)^{\frac{\frac{q(0)-q(x)}{p(0)-p(x)}}{1}} \\
 &\leq W(t)^{\frac{q(0)}{p(0)}} \left(\frac{1}{W(t)} \right)^{\frac{C}{\log \frac{1}{W(x)}}} \\
 &\leq W(t)^{\frac{q(0)}{p(0)}} \left(\frac{1}{W(t)} \right)^{\frac{C}{\log \frac{1}{W(t)}}} \\
 &\leq C W(t)^{\frac{q(0)}{p(0)}}
 \end{aligned}$$

Lemma 3.16 p, q ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$W(x)^{q(x)} \geq \frac{1}{C} \cdot W(x)^{q(0)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (3.1) şartı ve $q(\cdot)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
 W(x)^{q(x)} &= W(x)^{q(0)} \cdot W(x)^{q(x)-q(0)} \\
 &\geq W(x)^{q(0)} \cdot W(x)^{\frac{C}{\log \frac{1}{W(x)}}} \\
 &= \frac{1}{C} W(x)^{q(0)}
 \end{aligned}$$

Teorem 3.17 $p, q \in \Lambda_0 \cap \pi$ ve $f(x) \geq 0$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$p^- > 1$, $q(0) \geq p(0)$ alalım. O zaman

$$\|v(\cdot) H_{v,w} f(\cdot)\|_{L^{q(\cdot)}(0,I)} \leq C \|f(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(0,I)} \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlanır ancak ve ancak

$$B = \sup_{0 < t < I} B(t) = \sup_{0 < t < I} V(t)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{\frac{1}{p'(0)}} < \infty.$$

Uyarı 3.18 $B \rightarrow 0$ olmak üzere $C = O(B)$ dir.

Teorem 3.19 $E \subset X$, $T \in L(X, Y)$ kompakt bir operatör ve (u_n) , E' 'de bir dizi olsun.

$T \in L(X, Y)$ kompakt operatörü her zayıf yakınsak bir (u_n) dizisini kuvvetli yakınsak bir diziye dönüştürür.

Sonuç 3.20 $(0, l)$ 'de tanımlı ölçülebilir pozitif f, g fonksiyonlar ve s, α, β pozitif sayılarını alalım.

$$F(x) = \int_x^l f(t)dt, \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt \quad \text{ve} \quad B_1(x) = F^\alpha(x)G^\beta(x), \quad B_4(x, s) = \left(\int_0^x f(t)G^{\frac{\beta+s}{\alpha}}(t)dt \right)^\alpha G^{-s}(x)$$

ifadelerini alalım. O zaman $B_1 = \sup_{0 < x < l} B_1(x)$ ve $B_4 = \sup_{0 < x < l} B_4(x)$ sayıları karşılıklı denktir.

Teorem 3.21 X, Y Banach uzayları olsun. Eğer $\{T_n\}: X \rightarrow Y$, $L(X, Y)$ 'deki kompakt operatörlerinin bir dizisi ve bazı $T \in L(X, Y)$ için $\|T_n - T\|_{X \rightarrow Y} \rightarrow 0$ ise T kompakttır.

Teorem 3.22 $p, q \in \Lambda_0 \cap \pi$ ve $f(x) \geq 0$ ölçülebilir fonksiyonlar öyle ki $p^- > 1$, $q(0) \geq p(0) > 1$. O zaman $L^{p(\cdot)}(0, l) \rightarrow L^{q(\cdot)}(0, l)$ 'ye $H_{v,w}$ operatörü kompakttır ancak ve ancak

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup V(t)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{\frac{1}{p'(0)}} = 0 \quad \text{ve} \quad \sup_{t \in (0, \infty)} V(t)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{\frac{1}{p'(0)}} < \infty$$

dır.

İspat "Yeterlilik"

$$H_{v,w}f(x) = \sum_{i=1}^3 P_i f(x) = P_1 f(x) + P_2 f(x) + P_3 f(x)$$

şeklinde alalım. $P_1 f(x), P_2 f(x), P_3 f(x)$ 'leri aşağıdaki gibi ifade edelim.

$$a \in (0, 1) \quad \text{ve} \quad B(t) = V(t)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{\frac{1}{p'(0)}} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$P_1 f(x) = \chi_{(0,a)}(x) v(x) \int_0^x f(t) w(t) dt ,$$

$$P_2 f(x) = \chi_{(a,1)}(x) v(x) \int_0^a f(t) w(t) dt ,$$

$$P_3 f(x) = \chi_{(a,1)}(x) v(x) \int_a^x f(t) w(t) dt .$$

Burada P_2 , sonlu rank operatörü olması halinde P_3 , sonlu rank operatör dizisinin norm limitidir.

Şimdi yukarıdaki Teorem 3.17, Uyarı 3.18 ve $\lim_{t \rightarrow 0} B(t) = 0$ şartından

$$\|P_1 f(x)\|_{q(\cdot), (0, I)} = \left\| v(x) \int_0^x f(t) w(t) dt \right\|_{q(\cdot), (0, I)} \leq C \|f\|_{p(\cdot), (0, I)}$$

yazılabilir. Böylece $t \rightarrow 0$ iken,

$$\|H_{v,w} f - P_2 - P_3\|_{L^{p(\cdot)} \rightarrow L^{q(\cdot)}} = \|P_1\|_{L^{p(\cdot)} \rightarrow L^{q(\cdot)}} = O\left(\sup_{0 < t < a} B(t)\right) \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan yeterlik ispatlanmış olur.

“Gereklilik”

$$f_t(x) = \left(\int_0^t w(\tau)^{p'(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{p'(x)}} \chi_{(0,t)}(x) w(x)^{p'(x)-1}$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonu (3.2)’de yerine yazarsak aşağıdakini elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\rho_p(f_t) &= \int_0^1 \left(\int_0^t w(\tau)^{p'(\tau)} d\tau \right)^{-\frac{1}{p(x)}} \chi_{(0,t)}(x) w(x)^{p'(x)-1} dx \\
&\leq \left(\int_0^t w(x)^{p'(x)} dx \right) \left(\int_0^t w(\tau)^{p'(\tau)} d\tau \right)^{-1} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Böylece $\rho_p(f_t) \leq 1$ olur.

Değişken üslü normların elementer özelliklerinden,

$$\|f_t(x)\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)} \leq 1$$

diyebiliriz.

Hölder eşitsizliğinden ve tüm $\varphi \in L^{p'(\cdot)}(0,1)$ için $t \rightarrow 0$ iken,

$$\left| \int_0^1 f_t(x) \varphi(x) dx \right| \leq k(p) \|f_t(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)} \|\chi_{(0,t)}(\cdot) \varphi(\cdot)\|_{L^{p'(\cdot)}(0,1)} \rightarrow 0$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Böylece $f_t \rightarrow 0$ 'a zayıf yakınsar. Buradan $H_{v,w}$ 'nun kompaktlık hipotezinden ve Teorem 3.19 dan $L^{q(\cdot)}(0,1)$ normunda $\{H_{v,w} f_t\} \rightarrow 0$ 'a yakınsar.

Böylece $t \rightarrow 0$ iken,

$$\rho_p(H_{v,w} f_t) \rightarrow 0 \tag{3.3}$$

olur.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\rho_p(H_{v,w}f_t) &= \int_0^1 \left(v(x) \int_0^x \left(\int_0^t w(\tau)^{p'(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{p(s)}} \chi_{(0,t)}(s) w(s)^{p'(s)-1} w(s) ds \right)^{q(x)} dx \\
&\geq \int_0^t v(x)^{q(x)} \left(\int_0^x \left(\int_0^t w(\tau)^{p'(\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{p(s)}} w(s)^{p'(s)} ds \right)^{q(x)} dx
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Lemma 3.14' den,

$$\geq (2C)^{-q^+} \int_0^t v(x)^{q(x)} W(x)^{q(x)} W(t)^{\frac{q(x)}{p(x)}} dx$$

Lemma 3.15' den,

$$\geq \frac{2^{-q^+}}{C_1} W(t)^{\frac{q(0)}{p(0)}} \int_0^t v(x)^{q(x)} W(x)^{q(x)} dx$$

Lemma 3.16' den,

$$\geq \frac{1}{C_2} \left[W(t)^{\frac{1}{p(0)}} \left(\int_0^t v(x)^{q(x)} W(x)^{q(0)} dx \right)^{\frac{1}{q(0)}} \right]^{q(0)}$$

Sonuç 3.20' den,

$$\geq C_3 \left[V(t)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{\frac{1}{p'(0)}} \right]^{q(0)} \tag{3.5}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikten ve (3.3)' den $t \rightarrow 0$ için,

$$V(t)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{\frac{1}{p'(0)}} \rightarrow 0$$

olur. Buradan gereklilik ispat edilmiş olur.

Dikkat edilirse (3.5) eşitsizliğinin ispatında aşağıdaki şartlar altında Sonuç 3.20' ye başvurduk.

$$F(t)=V(t)=\int_t^1 v(x)^{q(x)} dx, \quad G(t)=W(t)=\int_0^t w(x)^{p'(x)} dx$$

ve

$$\alpha = \frac{1}{q(0)}, \quad \beta = \frac{1}{p'(0)}, \quad s = \frac{1}{p(0)}, \quad f(t) = v(x)^{q(x)}, \quad g(t) = w(x)^{p'(x)}.$$

O zaman,

$$\left(\int_0^t f(x) G(x)^{\frac{\beta+s}{\alpha}} dx \right)^{\alpha} G(t)^{-s} = \left(\int_0^t v(x)^{q(x)} W(x)^{q(0)} dx \right)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{-\frac{1}{p(0)}}$$

Sonuç 3.20' den,

$$\geq CF(t)^{\alpha} G(t)^{\beta} = CV(t)^{\frac{1}{q(0)}} W(t)^{\frac{1}{p'(0)}}$$

olur ki bu ise Teorem 3.22' un ispatını tamamlar.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Hardy eşitsizlikleri ve Hardy operatörleri, kompaktlık teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Özellikle günümüzde sabit veya değişken üslü Lebesgue ve Sobolev Uzayları teorisinin, elastik mekanik, akışkanlar dinamiği ve varyasyonel hesap ile ilgili problemlerle yoğun bir ilişki içerisinde olması ve sözü edilen uzayların Hardy eşitsizlikleri ve Hardy operatörleri ile olan yakın ilişkisi düşünüldüğünde konunun önemi daha iyi anlaşılmaktadır.

Eşitsizliklerin sınırlılıkla ve sınırlılığında kompaktlık ile olan ilişkisini biliyoruz. Kompaktlığın sınırlılığı gerektirdiğinden bu tez çalışmasında ağırlıklı ve değişken üslü Lebesgue uzayında Hardy operatörü incelenmiş ve verilen şartlarda kompaktlığı gösterilmiştir.

İleri bir çalışma olarak benzer ya da aynı koşullarda ağırlıklı ve değişken üslü Lebesgue uzayında Hardy operatörünün kompaktlığı için daha kolay, uygulanabilir, gerekli ve yeterli koşullar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hardy, G. H. (1920). "Notes on a theorem of Hilbert", Math. Z. 314-317.
- [2] Hardy, G. H. (1925). "Note on a theorem of Hilbert concerning series of positive terms". Proc. London Math. Soc. 23, 45-46.
- [3] Levinson, N. (1964). "Generalizations of an inequality of Hardy", Duke Math. J. 31, 389-394.
- [4] Kufner, A., Maligranda, L. and Persson, L.E., (2007). The Hardy Inequality About Its History and Some Related Results, Vydavatelsky Series, Czech Republic.
- [5] Mamedov, F.I. and Zeren, Y., (2012). "On equivalent conditions for the general weighted Hardy type inequality in space $L_p(\cdot)$ ", Zeitsch. Anal.Anw. 31(1), 55-74.
- [6] Stuart, C. A. (1973). "The measure of non-compactness of some linear integral operators", Proc. R. Soc. Edinburgh A71 , 167–179.
- [7] Juberg, R.K. (1974). "Measure of non-compactness and interpolation of compactness for a class of integral transformations", Duke Math. J., 41, 511-525.
- [8] Opic, B. and Kufner, A. (1987). "Remark on compactness of imbeddings in weighted spaces", Math. Nachr. 133, 63 - 70. MR 88m:46041
- [9] Stepanov V. D. (1990). "Weighted inequalities of Hardy type for Riemann-Liouville integrals", Sibirsk. Math. Zh. 31, No. 3, 186-197.
- [10] Edmunds, D.E., Gurka, P. and Pick, L., (1994). "Compactness of Hardy-type integral operators in weighted Banach function spaces", Studia Math. 109, No.1, 73–90.

- [11] Edmunds, D.E., Kokilashvili, V. and Meskhi, A.,(2005). "On the boundedness and compactness of the weighted Hardy operators in spaces", Georgian Math. J.,12(1), 27-44.
- [12] Gogatishvili, A., Kufner, A., Persson, L.E. and Wedestig, A.,(2006). "Compactness of the Hardy operator and its Limiting Case", SoochowJournal of Mathematics Volume 32, No. 1, pp. 21-35.
- [13] Avcı, M., (2007). Hardy Eşitsizlikleri ve Hardy Tipli Operatörler, Yüksek Lisans Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.
- [14] Orlicz, W., (1931). "Über konjugierte Exponentenfolgen". Studia Math., 3:200–211.
- [15] Sharapudinov, I., (1979). "On the topology of the space $L_p(t)([0; 1])$ ". Math. Notes, 26(3–4):796–806
- [16] Kovacik, O. and Rakosnik, J., (1991). "On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ ". Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 41, No. 4, 592—61.
- [17] Keleş, M. Ö., (2011). Değişken Üslü Lebesgue Uzayında Hardy Operatörünün Sınırlılığı, Yüksek Lisans Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.
- [18] Mamedov, F.I. and Zeren, Y., (2011). "On a two-weighted estimation of maximal operator in the Lebesgue space with variable exponent", Ann. Mat. Pura Appl. (4) 190, No: 2, 263–275.
- [19] Mamedov, F.I. and Zeren, Y., (2011). "Two-weight inequalities for the maximal operator in a Lebesgue space with variable exponent", J. Math. Sci. 173, 701–716
- [20] Harman, A. and Mamedov, F.I., (2010). "On boundedness of weighted Hardy operator in $L_p(\cdot)$ and regularity condition", Journal Ineq. Appl., vol. (1), ArticleID 837951, 14 pages.
- [21] Cruz-Urbe, D., and Mamedov, F.I., (2012). "On a general weighted Hardy type inequality in the variable exponent Lebesgue spaces", Revista Mat.Comp.DOI:10.1007/s13163-011-0076-5.
- [22] Edmunds, D.E. and Meskhi, A.,(2002). "Potential-type operators in $L_p(x)$ spaces", Z. Anal. Anwendungen 21, No. 3, 681–690.

- [23] Samko, S.,(2010). "On compactness of operators in variable exponent Lebesgue spaces", Operator theory: Adv. And Appl., 202, 497-508.
- [24] Edmunds, D.E., Kokilashvili, V. and Meskhi, A.,(2002). "Bounded and compact integral operators", Mathematics and its Applications, 543. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002
- [25] Edmunds, D.E. and Nekvinda, A.,(2002). "Averaging operators on $L_p(n)$ and $L_p(x)$ ", Math. Inequal. Appl. 5, No. 2, 235–246.
- [26] Mamedov, F.I.,(2012). "On Hardy type inequality in variable exponent Lebesgue space $L_p(\cdot)(0; 1)$ ", Azerbaijan J. Math., 2(1), 90-99.
- [27] Mamedov, F.I. and Harman, A.,(2010). "On a Hardy type general weighted inequality in spaces $L_p(\cdot)$ ", Integral Equat.and Oper. Theor., 66(4), 565-592
- [28] Hudzik, H.,(1980). "The problems of separability, duality, reflexivity and of comparison for generalized Orlicz–Sobolev spaces $W_k M(-)$ ", Comment. Math. Prace Mat. 21, No. 2, 315–324.
- [29] Bradley, J.,(1978). "Hardy inequality with mixed norms", Canad. Math. Bull. 2, No. 4, 405–408.
- [30] Diening, L. and Samko, S.,(2007). "Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces", Fract. Calc. and Appl. Anal., 10(1), 1-17
- [31] Diening, L., "Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ " Math.Inequal. Appl. (to appear)
- [32] Mamedov F.I. and Harman, A.,(2009). "On a weighted inequality of Hardy type in spaces $L^{p(\cdot)}$ ", J. Math. Anal. Appl., 353(2), 521-530.
- [33] Krbeć, M., Opic, B., Pick, L. and Rakosnik, J.,(1993). "Some recent results on Hardy type operators in weighted function spaces and related topics", Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Friedrichroda, 1992), 158–184, Teubner-Texte Math., 133, Teubner, Stuttgart.
- [34] Kokilashvili, V.,(1979). "On Hardy's inequalities in weighted spaces", Russian Soobsch. Akad.Nauk Gruz. SSR 96, 37–40.
- [35] Kufner, A. and Persson, L.,(2002). "Integral inequalities with weights", World Scientific, Singapore.

- [36] Edmunds, D.E., Lang, J. and Nekvinda, A.,(1999). "On $L_p(x)$ norms", R. Soc. Lond. Proc.Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 455, No. 1981, 219–225.
- [37] Opic, B. and Kufner, A.,(1990). "Hardy-type inequalities", Pitman Research Notes in Mathematics Series, 219. Longman Scientific & Technical, Harlow.
- [38] Muckenhoupt, B.,(1972). "Hardy's inequality with weights", Studia Math. 44, 31–38

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Lütfi AKIN

Doğum Tarihi ve Yeri : 28/02/1978 Viranşehir

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : lutfiakin@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Harran Üniversitesi	2008
Lisans	Matematik	Pamukkale Üniversitesi	2003
Lise	Fen Bilimleri	Ceylanpınar Lisesi	1995

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2003-...	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

YAYINLARI

Makale

1.Mamedov, F. I., Zeren, Y. and Akin, L., (2013).”On compactnes of weighted Hardy operator in $L^{p(\cdot)}$ spaces”. AMS 2010 Mathematics Subject Classification. (Baskıda).

Bildiri

1. Mamedov, F., Zeren, Y. and Akin, L., (2013).”On compactness criterion for the Hardy operator in weighted space $L^{p(\cdot)}(0,1)$ ”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 Haziran 2013, İstanbul.

Proje

1. Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü
2014-01-03-DOP01 numaralı proje.

ÖDÜLLERİ

1.Takdir Belgesi, T.C. Mardin Valiliği, 2011, Mardin