T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ÖN ŞEKİL DEĞİŞTİRMESİ OLAN ÇOK KATLI DAİRESEL BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ DİSPERSİYONU

MAHMUT MERT EĞİLMEZ

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE KONTROL PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMAİL YÜKSEK

İSTANBUL, 2013

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ÖN ŞEKİL DEĞİŞTİRMESİ OLAN ÇOK KATLI DAİRESEL BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ DİSPERSİYONU

Mahmut Mert EĞİLMEZ tarafından hazırlanan tez çalışması 22.03.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İsmail YÜKSEK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPCELER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İsmail YÜKSEK

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Surkay AKBAROV

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Ata MUĞAN

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Rahmi GÜÇLÜ

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Ünal ALDEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Tüm Yüksek Lisans ve Doktora öğrenimim boyunca değerli bilgilerini ve desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. İsmail YÜKSEK'e teşekkürlerimi sunarım. Doktora çalışmam boyunca değerli bilgilerini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, tez konumdaki öncü çalışmalarından ve bilgisinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Surkay AKBAROV'a teşekkürlerimi sunarım. Bu çalışma sırasında karşılaştığım her türlü problemin çözümünde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen ikinci danışman hocam Sayın Tamer KEPCELER'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Yüksek Lisans ve Doktora öğrenimim süresince üzerimde emeği bulununan Y.T.Ü., İ.T.Ü. ve G.Y.T.E.'deki bütün hocalarıma teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hayatım boyunca bana her konuda maddi, manevi destek olan anneme, babama ve kardeşime sonsuz teşekkürler.

Mart, 2013

Mahmut Mert EĞİLMEZ

İÇİNDEKİLER

sayfa

SİMGE LİSTESİ

c Dalga yayılım faz hızı

h İçi dolu iki katlı bileşik silindirde dış silindir et kalınlığı

$h^{(1)}$ İçi boş bileşik silindirde en içteki katmanın doğal durumdaki et kalınlığı

$h^{(2)}$ İçi boş bileşik silindirde ikinci katmanın doğal durumdaki et kalınlığı

$h^{(3)}$ İçi boş bileşik silindirde üçüncü katmanın doğal durumdaki et kalınlığı

k Dalga sayısı

kR Boyutsuz dalga sayısı

R Doğal durumda iç silindir yarıçapı

$s_{(ij)}$ Lagrange gerilme tensörü fiziksel bileşenleri

$Oy_1y_2y_3$ Doğal durumdaki Kartezyen koordinatlar

$Or\theta z$ Doğal durumdaki Lagrange koordinatları

$O'r'\theta'z'$ Öngerilmeli durumdaki Lagrange koordinatları

$Q'^{(k)}_{ij}$ Gerilme tensörü bileşenlerinin pertürbasyonları

$u_m^{(k),0}$ Yerdeğiştirme vektörü bileşenleri

$I_0(x)$ Sıfırıncı mertebeden modifiye edilmiş Bessel Fonksiyonu

$J_0(x)$ Sıfırıncı mertebeden birinci tip Bessel Fonksiyonu

$K_0(x)$ Sıfırıncı mertebeden Macdonald Fonksiyonu

$Y_0(x)$ Sıfırıncı mertebeden ikinci tip Bessel Fonksiyonu

ω Açısal frekans

$\omega'^{(k)}_{iijj}$ Mekanik sabitler

$\varepsilon_{(ij)}$ Green şekildeğiştirme tensörü fiziksel bileşenleri

$\lambda_m^{(k)}$ Birim uzama katsayısı

Φ Şekil değiştirme enerjisi

$\mu^{(k)}$ Malzeme sabiti

$\lambda^{(k)}$ Malzeme sabiti

$\rho'^{(k)}$ k. malzemenin yoğunluğu

α_{ij} Determinant bileşenleri

KISALTMA LİSTESİ

ÖCÜDEDYT Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

SONLU ÖN ŞEKİL DEĞİŞTİRMESİ OLAN ÇOK KATLI DAİRESEL BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ DİSPERSİYONU

Mahmut Mert EĞİLMEZ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmail YÜKSEK

Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPCELER

Günümüzde bilim ve mühendislik problemlerinin çözümlerinin araştırılmasında doğrusal olmayan dinamik etkilerin göz önüne alınması gerekliliği doğmuştur ve bunların en önemlilerinden biri de öngerilmelerdir. Bu öngerilmeler (ön şekil değiştirmeler), yapısal elemanların üretimi sırasında veya sıcaklık ve benzeri çevresel etkilerden dolayı ortaya çıkmaktadır. Petrol, gaz ve su iletimi, enerji üretimi, kimyasal üretim tesisleri gibi çağdaş endüstrinin birçok alanında kullanılan öngerilmeli çok katmanlı silindirlerin dinamik burulma yüklemelerine maruz kalmaları, bu silindirlerdeki dalga yayılım probleminin incelenmesini hem teorik hem de uygulama açısından önemli kılmaktadır. Tez kapsamında yapılan araştırmalar, sonlu ön şekil değiştirmesi olan çok katlı dairesel bileşik silindirlerde, ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılımına etkilerinin incelenmesine yöneliktir.

Çalışmada ele alınan problemlerin formülasyonları parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖCÜDEDYT) uygulanarak, ön şekil değiştirmesi olan iki katlı bileşik silindir, içi boş iki katlı bileşik silindir ve içi boş üç katlı (sandviç) silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonu incelenmiştir. Silindir katmanlarının mekanik ilişkileri harmonik potansiyel ile verilmiştir. Silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin burulma dalga dispersiyonuna etkisini gösteren sayısal sonuçlar elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

Bu sayısal sonuçları elde etmek ve söz konusu problemleri çözmek için gerek duyulan algoritma ve programlar MATLAB programı aracılığıyla tarafımızdan yazılmıştır. Aynı zamanda kullanılan bu algoritmaların doğruluğu, konuyla ilgili önceden yapılmış çalışmalardaki koşullar altında test edilmiştir.

Şimdiye kadar sonlu ön şekil değiştirmesi olan çok katlı bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımına ön şekil değiştirmelerin etkisi incelenmemiştir. Burulma dalga yayılımına öngerilmelerin etkisinin incelendiği önceki çalışmalarda, öngerilmelere karşı gelen ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılmaktadır ve bu durum elde edilen sonuçların uygulama alanlarını hem teorik hem de pratik açıdan önemli bir biçimde kısıtlamaktadır. Özet olarak tez kapsamında yapılan araştırmalar, bu alandaki ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: burulma dalga dispersiyonu, dalga yayılımı, ön şekil değiştirmeler, dalga yayılımı kontrolü, dispersiyon eğrileri, hiperelastik malzemeler, çok katlı silindirler, içi boş bileşik silindir, içi boş üç katlı (sandviç) silindir

ABSTRACT

TORSIONAL WAVE DISPERSION IN MULTI-LAYERED CIRCULAR CYLINDERS WITH THE FINITE INITIAL STRAINS

Mahmut Mert EĞİLMEZ

Department of Mechanical Engineering

PhD Thesis

Adviser: Prof. Dr. İsmail YÜKSEK

Co-Adviser: Assist. Prof. Dr. Tamer KEPCELER

Nowadays for the investigation of solutions to problems in science and engineering, nonlinear dynamic effects should be taken into consideration and initial stresses (strains) are one of those most important dynamic effects. The initial strains in construction materials may arise as a result of corresponding manufacturing procedures or as a result of the change in the environmental impacts like temperature. Multi-layered cylinders which are used in many areas of modern industry like power generation, chemical production facilities, to transfer various types of liquids (oil, gas, water), exposed to dynamic torsional loadings makes investigating the wave dispersion problem important in terms of both theoretical and application. The research presented in this thesis is intented to examine the effect of initial strains on torsional wave dispersion in multi-layered circular cylinders.

In the present study, within the framework of the piecewise homogenous body model with the use of the Three-dimensional Theory of Elastic Waves in Initially Stressed Bodies (TLTEWISB) the torsional wave dispersion in the initially strained bi-material compound, hollow bi-material compound and hollow three-layered (sandwich) cylinders are investigated. The mechanical relations of the materials of the cylinders' components are described through their harmonic potential. Numerical results showing the effect of the initial strains on torsional wave dispersion were obtained and interpreted.

The algorithms and programs which are needed to solve these problems and obtain those numerical results through MATLAB program are written by us. At the same time the accuracy of these algorithms are tested under the conditions of the relevant studies.

So far, the effect of initial strains on the torsional wave dispersion in multi-layered circular cylinders with the finite initial strains is not investigated. In the previous studies which investigate the effect of the initial strains on the torsional wave dispersion in circular cylinders it was assumed that the initial strains were small and that significantly restricts both the theoretical and practical point of the application areas of the results obtained. In conclusion, the research in the present study is the first attempt in this field.

Key words: torsional wave dispersion, wave propagation, initial strains, wave propagation control, dispersion curves, hyperelastic materials, multi-layered cylinders, hollow compound cylinder, hollow three-layered (sandwich) cylinder

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışması, sonlu ön şekil değiştirmesi olan çok katlı dairesel bileşik silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonunu incelemektedir. Çalışmada ele alınan problemlerin formülasyonları parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖCÜDEDYT) uygulanarak yapılmaktadır. Silindir katmanlarının mekanik ilişkileri harmonik potansiyel ile verilmiştir. Silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin burulma dalga dispersiyonuna etkisini gösteren sayısal sonuçlar elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

1.1 Literatür Özeti

Elastisite teorisinin en önemli problemlerinden biri elastik ortamlarda dalga yayılımıdır. [1] ve [2]'de belirtildiği üzere 1821'de Navier tarafından yayınlanan elastik cisimlerin titreşim ve denge denklemlerinin türetildiği çalışma, elastik ortamlarda dalga yayılımı çalışmalarının başlangıcı olarak kabul edilmektedir. Bahsi geçen çalışmada, maddesel noktalar olarak göz önüne alınan moleküllerin birbirlerine elastik yaylar aracılığıyla bağlı oldukları ve iki molekül arasındaki kuvvetin aradaki uzaklığın değişimi ile orantılı olduğu kabul edilmiştir (Love [1]). Cauchy ise 1822'de elastik bir ortamın hareket denklemlerini yerdeğiştirmeler cinsinden elde ederek gerilme ve şekil değiştirme kavramlarını ortaya atmış ve matematiksel elastisite teorisinin temellerini atmıştır (Graff [2]). 1828'de Poisson, denge denklemlerini gerilme bileşenleri cinsinden elde ederek, elastik dalgaların izotrop bir ortamda yayılmalarını incelemiş, enine ve boyuna dalgaların varlığını göstermiştir (Love [1]). Sonraları 1837'de elastisite denklemleri, Green tarafından enerjinin korunumu kullanarak türetilmiştir. Pochammer ise 1876'da dalga yayılımını silindirik bir çubukta incelemiş, Chree de 1889'da Pochammer'ın bulduğu sonuçları elde etmiştir ([2], [3]). 1887'de de yine başka bir gelişme olmuş; Rayleigh yüzey dalgalarının, homojen izotrop elastik yarım-uzayın serbest yüzünde yayılabileceğini göstermiştir. Elastisite teorisinin temellerinin atıldığı çalışmaların özetleri [1], [3], [4] ve [5] kaynaklarında mevcuttur.

Tez kapsamında yapılan çalışmaların amacı sonlu, elastik ön şekil değiştirmeye (yani tek eksen yönünde sonlu ön-uzamaya veya ön-kısalmaya) maruz kalmış çok katlı dairesel bileşik silindirlerde, burulma dalgalarının dispersiyonunun teoriksel olarak incelenmesidir. Burada sonlu ön şekil değiştirmesi olan, çok katlı sonsuz uzunluklu dairesel bileşik silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonu konusu, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde ÖCÜDEDYT uygulanarak incelenmektedir. Tezde yapılan araştırmaların literatürdeki yerinin daha iyi anlaşılabilmesi için, tez konusuna ilişkin yapılan diğer çalışmaların kısa özetinin verilmesi yerinde olacaktır.

Tez konusuna ait araştırmaları iki ana kısımda inceleyecek olursak bunlar öngerilmelerin göz önüne alınmadığı çalışmalar ve öngerilmeli ortamlarda dalga yayılımını inceleyen güncel çalışmalar şeklinde karşımıza çıkmaktadır. Öngerilmelerin göz önüne alınmadığı çalışmalarda sonsuz uzunlukta dairesel silindirdeki dalga yayılımı, Pochhamer ve Chree tarafından incelenmiştir [2], [5]. Armenakas [6], [7], [8], [9], Armenakas ve Keck [10], Keck ve Armenakas [11] yayınlarında ise üç boyutlu doğrusal elastisite teorisi çerçevesinde, sonsuz uzunluklu, homojen, izotrop malzemelerden oluşan bileşik ve içi boş bileşik silindirler için geometrik ve fiziksel parametrelere bağlı olarak dalga yayılımı incelenmiştir. Armenakas [6] makalesinde içi dolu ve iç boş silindirlerde dispersif olmayan burulma dalgalarının birinci modunun, bileşik silindirde dispersif hale geldiğini belirtmiştir. Armenakas [8] makalesinde boyuna dalgaların bileşik silindirlerde yayılımı ele alınmış; Armenakas ve Keck [10] makalesinde ise bileşik silindirlerdeki dalga yayılımı konusu, kısa dalgaboyu yaklaşımında simetrik olmayan dalgalar için analitik olarak incelenmiştir. Armenakas [7] ve [9] makalelerinde, üç boyutlu doğrusal elastisite teorisi çerçevesinde içi boş silindirde dalga yayılımı konusu araştırılmış; Keck ve Armenakas [11] ise bu çalışmaların devamı niteliğinde olan üç farklı malzemeden oluşan içi boş bileşik silindirdeki dalga yayılımını incelemiştir. Reuter [12] çalışmasında, bileşik silindirdeki burulma dalgalarının dispersiyon denklemini, üç boyutlu doğrusal elastisite teorisi çerçevesinde elde etmiş ve faz hızının birinci mod için fiziksel ve geometrik parametrelere bağlı olarak değişimini incelemiştir. Haines ve Lee [13] ve [14] yayınlarında ise fiziksel ve geometrik parametrelerin, bileşik silindirdeki burulma dalgalarının dispersiyonuna etkileri incelenmiştir. Thurston çalışmasında geometrik parametrelere bağlı olarak doğrusal elastisite teorisi çerçevesinde, bileşik silindirde burulma dalga yayılımını araştırmıştır [15]. Kaul v.d. [16] makalesinde, grup hızı ve enerji akısı problemlerini de ele alarak, yaklaşık dalga teorileri çerçevesinde bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımını incelemiştir. Kleczewski ve Parnes [17] makalesinde sonsuz elastik ortam içindeki silindirde, burulma dalgalarının yayılımı konusunu araştırmış; Berger vd. [18] ise bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımını temas koşullarına bağlı olarak incelemiş, ideal temas durumunda elde edilen sonuçların Armenakas'ın [6] çalışmasında elde ettiği sonuçlarla aynı olduğunu göstermiştir.

Buraya kadar özeti verilen çalışmalarda öngerilmeler göz önüne alınmamış ve bahsi geçen çalışmaların hepsi doğrusal elastisite teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Öngerilmelerin göz önüne alındığı problemlerin ise klasik elastisite teorisi çerçevesinde incelenmesi mümkün olmamakla birlikte, buradaki öngerilmelerin, dalga yayılımından dolayı oluşan gerilmelerden değerce çok büyük olması koşulu aranmaktadır. Bu koşul doğrusal olmayan elastodinamik alan denklemlerinin doğrusallaştırılmasına imkan vermektedir. Buradaki doğrusallaştırma iki şekilde yapılmaktadır. Birinci yöntem iki ve üç boyutlu problemlerin tek ve iki boyutlu problemlere dönüştürülmesi yöntemidir ve buradaki uygulamada problem boyutlarının küçültülmesi için Kirchoff-Love ve Timoshenko teorileri gibi yaklaşık teoriler kullanılır. İkinci yöntemde ise problemler incelenirken üç boyutlu doğrusallaştırılmış kesin teoriler kullanılmaktadır. Öngerilmeli cisimlerin dinamiğine ilişkin bu teori ise, Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teroisi (ÖCÜDEDYT) şeklinde adlandırılmaktadır.

Tez çalışmasına ait araştırmalar, öngerilmeli elastik ortamlardaki dinamik olaylara ilişkin olduğundan; öngerilmeli ortamlardaki dalga yayılımı konusunu içeren yayınların özetlerinin incelenmesi ayrıca bir önem taşımaktadır. Ön şekil değiştirmeli (öngerilmeli), parçalı homojen, elastik katı cisimlerdeki dalga yayılım problemi, jeofizik, deprem mühendisliği, kompozit malzemeler, elektrikli cihazlar, ultrasonik tahribatsız gerilme analizi gibi fiziki ve mekanik çalışma alanlarının ilgisi dahilindedir. Dolayısıyla bu alanda yapılmış birçok araştırma mevcuttur. Bu çalışmalardan bazılarının, Rayleigh yüzey dalgalarının öngerilmeli yarı uzayda incelendiği [19] yayınla başladığı kabul edilmektedir. Burada bir dalganın asal yönlerden biri doğrultusunda yayıldığı kabul edilmiş ve tıpkı elastodinamiğin klasik doğrusal teorisindeki gibi öngerilmeli yarı uzaydaki Rayleigh yüzey dalgalarının dispersif olmadığı kanıtlanmıştır. Yine o dönemde başka bir yayında [20] öngerilmeli dairesel katı silindirde burulma dalga yayılımı çalışılmıştır. Birkaç yıl sonra yayınlanan başka bir makalede [21] ise öngerilme altındaki elastik malzemenin dinamiği ile ilgili, yer çekiminin Rayleigh dalgalarına etkisini de kapsayan bazı problemler ve öngerilme altında dalga yayılımının temel özellikleri gibi konular işlenmiştir.

Yine başka bir çalışmada [22] önburulmalı dairesel silindirde aksisimetrik dalga yayılımı incelenmiştir. Öngerilmeli dairesel homojen silindirlerde boyuna dalga yayılımı da birçok araştırmaya konu olmuştur [23], [24], [25]. Ön şekil değiştirmeli cisimlerde yüzeyler arası Stoneley dalgaları da önemli çalışmalara konu olmuştur [26], [27], [28]. Sıkıştırılabilir, elastik yarı-uzayda öngerilmenin, yüzey dalgalarının yayılımı ve yansıması üzerindeki etkisi incelenmiştir [29]. Sıkıştırılamayan malzemelerden yapılmış, ön şekil değiştirmeli sandviç plaklarda Lamb Dalgalarının yayılımı incelenmiştir [30]. Başka bir yayında [31] öngerilmeli elastik yarı-uzaylarda yüzey dalgalarının hızının hesaplanması için etkin bir yöntem sunulmuştur. [32] ve [33] makalelerinde piezoelektrik malzemelerden oluşan kompozit yapılarda, öngerilmelerin dalgaların dispersiyonu üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Öngerilmeli viskoelastik ortamda dalga yayılımına yönelik araştırmaların analizleri [34]'de verilmiştir. Dairesel olmayan, enine kesitli, doğal titreşimli kirişin önburulması sonucu ortaya çıkan çeşitli tipte öngerilmelerin etkisi [35] çalışmasında verilmiştir.

Doğrusal olmayan elastik dalgaların ve öngerilmeli elastik cisimlerde elastik dalgaların genel teorilerinin [36], [37], [38] yayınlarında ayrıntılı bir şekilde incelendiği göz önünde bulundurulmalıdır. Öngerilmeli cisimlerin dinamiğine ilişkin teori ÖCÜDEDYT şeklinde adlandırılmaktadır ve bu ifadenin açık şekli yukarıda belirtilmiştir. ÖCÜDEDYT'nin ilişki ve denklemleri, elastodinamiğin doğrusal olmayan teorisinin karşılık gelen ilişki ve denklemlerinin küçük dinamik perturbasyonlarının, doğrusallaştırılmasıyla elde edilir.

Öngerilmelerin küçük olduğu varsayılan; öngerilmeli, iki malzemeli bileşik silindirde, eksenel simetrik boyuna dalga yayılımının incelendiği çalışmalar makale [39] ile başlamıştır. Bu makalenin daha geniş bir özeti ve bununla ilişkili diğer çalışmalar yine başka bir makalede verilmiştir [40].

[41] makalesi, [39]'da sunulan ön şekil değiştirmelerin sonlu, malzemelerin elastisite ilişkilerinin sıkışabilir kabul edildiği ve harmonik tipte potansiyel ile ifade edildiği çalışmayı genişletmiştir. Başka bir makalede [42] yine aynı kabullerle, sıkıştırılabilir elastik bir ortama gömülmüş dairesel bir silindirde, sonlu ön şekil değiştirmelerin aksisimetrik dalga dispersiyonuna etkisi üzerinde çalışılmıştır. [43] makalesinde, [42]'de göz önüne alınan problem, sistem bileşenlerinin malzemelerinin sıkıştırılamaz olduğu ve bunların gerilme-şekil değiştirme ilişkilerinin Treloar Potansiyeli ile verildiği durum için incelenmiştir. Ön şekil değiştirmelerin silindirde ve gömülü olduğu ortamdaki dalga yayılımına etkisine ilişkin sayısal sonuçlar verilmiş ve yorumlanmıştır. Diğer bir makalede ise [44] önburulmalı iki malzemeli bileşik silindirlerde aksisimetrik dalga yayılımının dispersiyon ilişkileri araştırılmıştır. Bileşik silindirin bileşenlerinin izotropik ve homojen olduğu kabul edilmiş ve özellikle önburulmanın olması sebebiyle, silindir bileşenlerinden en az birinde aksisimetrik boyuna ve burulma dalgalarının tek başlarına yayılamayacakları belirlenmiştir; bu durumda aksisimetrik burulma ve boyuna dalgalardan ayrılan, yeni tip aksisimetrik dalgalar ortaya çıkmalıdır.

[45], [46], [47] makalelerinde tek yönlü öngerilmeli, iki malzemeli bileşik silindirdeki aksisimetrik burulma dalga yayılımı incelenmiştir. Bileşik silindir bileşenlerinin elastisite ilişkileri Murnaghan Potansiyeli'nden elde edilmiştir. Aynı zamanda bu çalışmalarda ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu kabul edilmiştir ve öngerilme-şekil değiştirme durumu klasik doğrusal elastisite teorisi kapsamında belirlenmiştir. Yukarıda verilen öngerilmeli çift katlı bileşik silindire ait araştırmalarda iç ve dış silindirler arasındaki temas yüzeyine bağlı olarak ideal temas koşullarının sağlandığı varsayılmıştır. [48] makalesinde ise [45], [46] ve [47]'de göz önüne alınan problemler, belirli ideal olmayan

temas koşullarına göre ve bu koşulların etkisinde elde edilen sayısal sonuçlarla, öngerilmelerin dalga yayılım hızına etkisi sunulmuş ve tartışılmıştır.

Son dönemde yayınlanan bir makalede [49], yukarıda adı geçen yayınlardaki ([45], [46], [47]) kabuller kullanılarak, öngerilmeli çok katlı bir silindirde burulma dalga yayılımı konusu çalışılmıştır.

Buraya kadar bahsi geçen yayınlarla beraber konuyla ilgili önemli araştırmaların özeti tamamlanmaktadır. Özeti tez konusu kapsamında daraltacak olursak; öngerilmeli bileşik silindirlerde dalga yayılımı hakkındaki ilk makale Akbarov ve Guz'un [39] makalesidir. Ayhan Öztürk'ün 2007'deki doktora tezi [50] kapsamında yapılan çalışmalara kadar, öngerilmeli bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımına öngerilmenin etkisi incelenmemiştir. Bu tez çalışmasına ek olarak, Öztürk ve Akbarov'un [45], [46], [47] öngerilmeli bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımını inceleyen makaleleri ve yine öngerilmeli bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımı ilişkilerini inceleyen Tamer Kepceler'in [48] makalesi bulunmaktadır. Fakat bu çalışmalarda öngerilmelere karşı gelen ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılmaktadır.

Temelde öngerilmeli iki malzemeli bileşik silindirlerde dalga yayılımı üzerine yapılan bu araştırmalar, aşağıdaki kabullere göre yapılmıştır:

i) iki malzemeli bileşik silindir, çift katlı bir silindirdir ([49] hariç)

ii) burulma dalga yayılımına ilişkin araştırmalarda, ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılmıştır.

(i) kabulüne göre [39] ve [41-49] makalelerindeki sonuçlar çok katlı içi boş silindirler için kullanılamaz; örneğin modern endüstrinin birçok dalında uygulama alanı bulan üç katlı (sandviç) içi boş silindirler için bahsi geçen sonuçlar geçersizdir. Buna ek olarak (ii) kabulüne göre [45-49] yapılmış çalışmaların burulma dalga yayılımına ilişkin sonuçları, sadece sert malzemelerden yapılmış (çelik, bakır, vb.) bileşik silindirlerde geçerli olmaktadır. Bu sonuçlar, hiperelastik malzemelerden (elastomer, çeşitli polimerler vb.) yapılmış bileşik silindirler için uygun değildir.

Yukarıdaki açıklamalar göz önüne alındığında [45], [46], [47] ve [49]'da burulma dalga yayılımı için yapılmış araştırmalar, bu tez kapsamında hiperelastik malzemelerden yapılmış üç katlı (sandviç) içi boş silindirler için de geçerli olmak üzere genişletilmiştir. Öyle ki burada silindir bileşenlerindeki ön şekil değiştirmelerin sonlu ve bunların boyutlarının da sınırlandırılmadığı durumlar söz konusudur. Silindir malzemelerinin mekanik özellikleri, harmonik potansiyel ile ifade edilmektedir.

Buraya kadar özetlenen araştırmaların içeriklerinden de anlaşıldığı gibi şimdiye kadar sonlu ön şekil değiştirmesi olan çok katlı bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımına öngerilmelerin etkisi incelenmemiştir. Burulma dalga yayılımına öngerilmelerin etkisinin incelendiği önceki çalışmalarda, öngerilmelere karşı gelen ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılmaktadır ve bu durum elde edilen sonuçların uygulama alanlarını hem teorik hem de pratik açıdan önemli bir biçimde kısıtlamaktadır. Bunun yanında, üç katlı (sandviç) bileşik silindirlerde öngerilmelere karşı gelen ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu durum da sadece [49]’da ele alınmıştır. Özet olarak tez kapsamında yapılan araştırmalar, bahsi geçen yönlerdeki ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Günümüzde bilim ve mühendislik problemlerinin çözümlerinin araştırılmasında doğrusal olmayan dinamik etkilerin göz önüne alınması gerekliliği doğmuştur ve öngerilmeli (ön şekil değiştirmeli) ortamların dinamiği bu doğrusal olmayan problemlerdendir. Yapı elemanlarındaki öngerilmeler bu elemanların imalatı sırasında veya sıcaklık gibi çevresel etkilerin sonucunda, kompozit malzemelerdeki öngerilmeler yine bu malzemelerin üretimi esnasında oluşmaktadır. Ayrıca jeolojik etkiler nedeniyle ortaya çıkan öngerilmeler de mühendislik problemlerinin ilgi alanına girmektedir. Birçok alanda karşımıza çıkan bu öngerilmelerin etkilerinin mühendislik açısından göz önüne alınması gerekliliği ortadadır. İşte bu öngerilmelerin karşımıza en çok çıktığı alanlardan biri olan çok katlı silindirlerde, dalga yayılımı problemlerinin çözümlerinin araştırılması güncelliğini önemle korumaktadır.

Tez kapsamında yapılan araştırmaların amaçları temel olarak:

1. Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖCÜDEDYT) uygulanarak; öngerilmelerin, geometrik ve mekanik parametrelerin, sonlu ön şekil değiştirmesi olan çok katlı silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonuna olan etkilerinin incelenmesi,

2. İki katlı bileşik silindir, içi boş iki katlı bileşik silindir ve içi boş üç katlı (sandviç) silindirler için dispersiyon denklemlerinin elde edilmesi ve bu denklemlerin çözülebilmesi için gerekli algoritmaların yazılması,

3. Yapılan araştırmalarda elde edilen algoritmaların öngerilmesiz durum için çalıştırılarak, elde edilen sonuçların konuyla ilgili önceden yapılmış yayınlardaki sonuçlarla karşılaştırılması yoluyla algoritmaların test edilmesi,

4. Burulma dalga yayılım hızının limit değerleri için analitik ifadelerin elde edilmesi,

5. Sonlu ön şekil değiştirmesi olan çok katlı bileşik silindirlerde, burulma dalgalarının dispersiyonuna ait sayısal sonuç ve grafiklerin elde edilmesi ve yorumlanmasıdır.

1.3 Orijinal Katkı

Günümüzde bilim ve mühendislik problemlerinin çözümlerinin araştırılmasında doğrusal olmayan dinamik etkilerin göz önüne alınması gerekliliği doğmuştur ve bu etkilerin en önemlilerinden biri de silindirlerdeki öngerilmelerdir. Bu öngerilmeler (ön şekil değiştirmeler) kompozit malzemelerin üretiminde, yapı elemanlarının üretiminde ve kurulumunda, jeostatik kuvvete maruz kalmış yer katmanlarında, sıcaklık v.b. çevresel etkenlerin değişiminde gibi birçok kritik durumda karşımıza çıktığından, öngerilmeye maruz kalmış malzemelerde dalga yayılımının incelenmesi hem teorik hem de pratik açıdan oldukça önemlidir.

Petrol, gaz ve su iletimi, enerji üretimi, kimyasal işleme endüstrisi gibi çağdaş endüstrinin birçok alanında kullanılan öngerilmeli, çok katmanlı silindirlerin (örneğin korozyondan korunmak için viskoelastik katmanlarla kaplanmış boruların) dinamik burulma yüklenmelerine maruz kalmaları, silindirlerdeki dalga yayılım probleminin incelenmesinin gerekliliğini ve güncelliğini ortaya koymaktadır.

Şimdiye kadar öngerilmeli bileşik dairesel silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonunu inceleyen araştırmalarda, öngerilmelere karşı gelen ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılmaktadır. Bu durum elde edilen sonuçların uygulama alanlarını hem teorik hem de pratik açıdan önemli bir biçimde kısıtlamaktadır.

Önerilen tez konusu kapsamında yapılacak araştırmalardan elde edilecek sonuçlar, uygulama açısından söz konusu kısıtlamaları ortadan kaldırmakla birlikte, daha birçok yeni teorik bilgiler içerecek ve uygulama alanları bulacaktır. Bundan başka tez kapsamında ele alınacak problemlerin teoriksel inceleme yöntemleri geliştirilecek ve uygulanacaktır. Tezin bir başka önemi de, çalışmada yapılacak problem formülasyonlarının, önceden yapılmış uygun çalışmalardaki formülasyonları da kapsaması ve genişletmesidir.

Bu alanda yapılan teorik araştırmaların ÖCÜDEDYT çerçevesinde, elastisite teorisinin doğrusal olmayan genel teorisinin doğrusallaştırılması prensibiyle yapıldığı göz önünde bulundurulmalıdır.

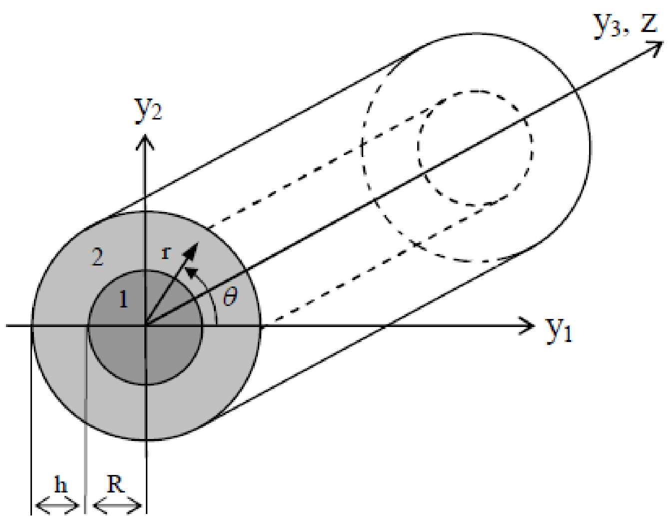
BÖLÜM 2

SONLU ÖNŞEKİLDEĞİŞTİRMESİ OLAN İKİ KATLI BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ DİSPERSİYONU

Sonlu ön şekil değiştirmesi olan iki katlı içi dolu ve içi boş bileşik silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonu probleminin işlendiği bu bölümde, doğrusal olmayan elastik silindir malzemelerinin mekanik özellikleri, harmonik potansiyel ile ifade edilmektedir. Burada içteki silindire ait büyüklükler (1) üst indisi, dıştaki silindire ait büyüklükler ise (2) üst indisi ile gösterilirken, (0) indisi öngerilme durumunu ifade etmektedir. Problemin matematiksel formülasyonu, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, ÖCÜDEDYT uygulanarak oluşturulmaktadır. Öngerilmelerin (ön şekil değiştirmelerin) dispersiyon eğrilerine etkisini gösteren sonuçlar grafikler halinde verilip yorumlanmaktadır.

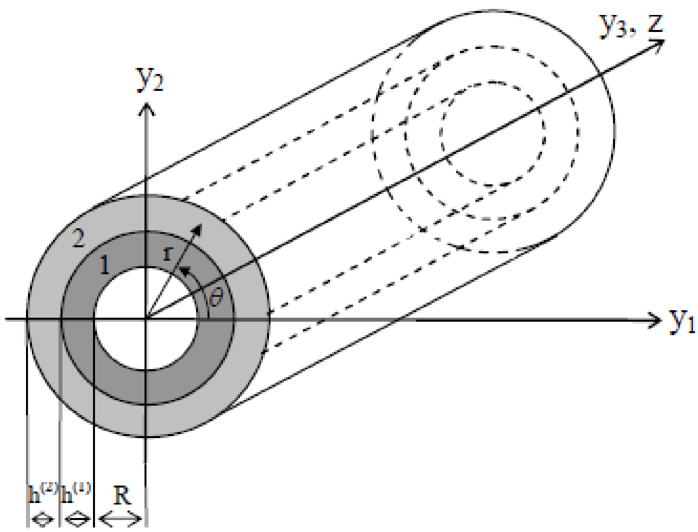
2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Tez kapsamında ele alınan iki katlı içi dolu silindir modeli, yarıçapı R olan ve içteki silindirinin üzeri h kalınlığında diğer bir silindirle çevrili olan silindir modelidir (Şekil 2.1).



Şekil 2. 1 Bileşik silindir

İçindeki boşluğun yarıçapı R ve et kalınlığı $h^{(1)}$ olan bir silindir üzerine yerleştirilmiş, kalınlığı $h^{(2)}$ olan bir silindirden oluşan silindir de içi boş iki katlı bileşik silindir modeli olarak ele alınmıştır (Şekil 2.2).



Şekil 2. 2 İçi boş bileşik silindir

Silindirlerdeki bir noktanın konumu $Oy_1y_2y_3$ kartezyen koordinat veya $Or\theta z$ silindirik koordinat sisteminde tanımlanan Lagrange koordinatları ile verilmektedir. Silindirlerin Oy_3 ekseni doğrultusunda sonsuz uzunlukta ve silindirde gözönüne alınan her bileşen için öngerilmelerin eksenel simetrik ve homojen olduğu varsayılmaktadır. Gerilmenin silindirlerin birleştirilmeden önce verildiğini göz önüne alabileceğimiz gibi; bulduğumuz sonuçlar, silindirlerin birleştirildikten sonra gerilmeye birlikte maruz kaldığı durumlarda da geçerlidir. Silindirlerin öngerilmeli durumu için kartezyen koordinatlar $O'y'_1y'_2y'_3$, Lagrange koordinatları ise $O'r'\theta'z'$ ile ilişkilendirilmektedir. İç ve dış silindirlerdeki ön şekil değiştirme durumu aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$u_m^{(k),0}=(\lambda_m^{(k)}-1)y_m\,,\quad \lambda_1^{(k)}=\lambda_2^{(k)}\neq\lambda_3^{(k)}\,,\ \lambda_m^{(k)}=sabit\,,\quad m=1,2,3;\ k=1,2\,, \tag{2.1}$$

Burada, $u_m^{(k),0}$ yerdeğiştirme vektörü, $\lambda_m^{(k)}$ ise Oy_m ekseni doğrultusundaki uzamadır. Buradan:

$$y'_i=\lambda_i^{(k)}y_i\,,\quad r'=\lambda_1^{(k)}r\,,\quad R'=\lambda_1^{(1)}R\,. \tag{2.2}$$

Hareket denklemi:

$$\frac{\partial}{\partial r'}Q'^{(k)}_{r'\theta}+\frac{\partial}{\partial z'}Q'^{(k)}_{z\theta}+\frac{1}{r'}\left(Q'^{(k)}_{r'\theta}+Q'^{(k)}_{\theta r'}\right)=\rho'^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u'^{(k)}_{\theta} \tag{2.3}$$

Mekanik ilişkiler:

$$Q'^{(k)}_{z'\theta'}=\omega'^{(k)}_{1331}\frac{\partial u'^{(k)}_{\theta}}{\partial z'}\,,\quad Q'^{(k)}_{r'\theta}=\omega'^{(k)}_{1221}\frac{\partial u'^{(k)}_{\theta}}{\partial r'}-\omega'^{(k)}_{1212}\frac{u'^{(k)}_{\theta}}{r'}\,,$$

$$Q'^{(k)}_{\theta r'}=\omega'^{(k)}_{2121}\frac{\partial u'^{(k)}_{\theta}}{\partial r'}-\omega'^{(k)}_{2112}\frac{u'^{(k)}_{\theta}}{r'}\,. \tag{2.4}$$

Burada $Q'^{(k)}_{\theta r'}$, $Q'^{(k)}_{r'\theta}$, ve $Q'^{(k)}_{z'\theta}$, kayma gerilmelerinin pertürbasyonları, $u'^{(k)}_{\theta}$ ise yerdeğiştirmedir. $\omega'^{(k)}_{2121}$, $\omega'^{(k)}_{1221}$, $\omega'^{(k)}_{2112}$, $\omega'^{(k)}_{1212}$ ve $\omega'^{(k)}_{1331}$ mekanik sabitleri ise iç ve dış silindirlerin malzemeleri ve öngerilmelerin durumuna göre belirlenir. $\rho'^{(k)}$ ise k. malzemenin yoğunluğudur.

Şimdi (2.3) ve (2.4) için ÖCÜDEDYT'nin denklem ve ifadelerinin elde edilmesini ele alalım.

Doğrusal olmayan elastisite teorisinin, hiperelastik cisimler için bazı ilişkileri:

Burada $\tilde{\mathbf{q}}$ ve $\tilde{\mathbf{s}}$ ile belirtilen iki ayrı tip gerilme tensörü göz önüne alınmaktadır.

$\tilde{\mathbf{s}}$ gerilme tensörünün fiziksel bileşenleri, şekil değiştirme enerjisi potansiyelinden aşağıdaki ifade kullanılarak belirlenir:

$$s_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ij)}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ji)}}\right)\Phi, \qquad (ij) = rr, \theta\theta, zz, r\theta, rz, z\theta. \tag{2.5}$$

$\tilde{\mathbf{q}}$ gerilme tensörünün fiziksel bileşenleri, (2.6) kullanılarak $\tilde{\mathbf{s}}$ gerilme tensörü ve u yer değiştirme vektöründen elde edilmektedir. (2.6) kullanılarak elde edilen $\tilde{\mathbf{q}}$ gerilme tensörü Kirchhoff gerilme tensörü iken, $\tilde{\mathbf{s}}$ gerilme tensörü Lagrange gerilme tensörü şeklinde adlandırılır. (2.6) ve (2.7)'ye göre $\tilde{\mathbf{s}}$ gerilme tensörü simektrik iken, $\tilde{\mathbf{q}}$ gerilme tensörü simetrik değildir.

$$q_{rr} = s_{rr}(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}) + s_{r\theta}(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}) + s_{rz}\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$q_{r\theta} = s_{rr}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + s_{r\theta}\left(1+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) + s_{rz}\frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$q_{rz} = s_{rr}\frac{\partial u_z}{\partial r} + s_{r\theta}\frac{\partial u_z}{r\partial\theta} + s_{rz}\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$q_{\theta r} = s_{\theta r}\left(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + s_{\theta\theta}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + s_{\theta z}\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$q_{\theta\theta} = s_{\theta r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + s_{\theta\theta}\left(1+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) + s_{\theta z}\frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$q_{\theta z} = s_{\theta r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + s_{\theta\theta}\frac{\partial u_z}{r\partial\theta} + s_{\theta z}\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$q_{zr} = s_{zr}\left(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + s_{z\theta}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + s_{zz}\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$q_{z\theta} = s_{zr}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + s_{z\theta}\left(1+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right) + s_{zz}\frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$q_{zz} = s_{zr}\frac{\partial u_z}{\partial r} + s_{z\theta}\frac{\partial u_z}{r\partial\theta} + s_{zz}\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \quad (2.6)$$

Hareket denklemleri ise aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial q_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial q_{\theta r}}{r\partial\theta} + \frac{\partial q_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(q_{rr} - q_{\theta\theta}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial q_{\theta\theta}}{r\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(q_{r\theta} + q_{\theta r}\right) + \frac{\partial q_{z\theta}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial q_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial q_{\theta z}}{r\partial\theta} + \frac{1}{r}q_{rz} + \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

Silindir malzemelerinin elastisite ilişkileri, harmonik potansiyel ile ifade edilir [32]. Buna göre (2.5)'de verilen şekil değiştirme enerjisi potansiyeli Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda e_1^2 + \mu e_2 \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir.

$$e_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1} + \sqrt{1+2\varepsilon_2} + \sqrt{1+2\varepsilon_3} - 3,$$

$$e_2 = \left(\sqrt{1+2\varepsilon_1}-1\right)^2 + \left(\sqrt{1+2\varepsilon_2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{1+2\varepsilon_3}-1\right)^2 \text{ 'dir.} \quad (2.9)$$

Burada λ, μ malzemeye bağlı sabitlerken, $\varepsilon_i\,(i=1,2,3)$ ise Green şekil değiştirme tensörünün asal değerleridir.

Ön şekil değiştirme ve öngerilmelerin hesaplanması:

Green şekil değiştirme tensörünün fiziksel bileşenleri ile yer değiştirme vektörü u'nun fiziksel bileşenleri arasındaki ilişki:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right\},$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}\right\},$$

$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right\},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)^2\right\},$$

$$\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right\},$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right\}. \tag{2.10}$$

(2.1) ve (2.10) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\varepsilon_{rr}^{(k),0}=\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0}=\frac{1}{2}\left(\left(\lambda_1^{(k)}\right)^2-1\right),\ \varepsilon_{zz}^{(k),0}=\frac{1}{2}\left(\left(\lambda_3^{(k)}\right)^2-1\right),$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(k),0}=\varepsilon_{rz}^{(k),0}=\varepsilon_{\theta z}^{(k),0}=0. \tag{2.11}$$

(2.8) ve (2.9)’daki ilişkiler kullanılarak, (2.12) elde edilir:

$$\Phi^{(k),0}=\frac{1}{2}\lambda^{(k)}\left(2\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}-3\right)^2+\mu^{(k)}\left(2\left(\lambda_1^{(k)}-1\right)^2+\left(\lambda_3^{(k)}-1\right)^2\right). \tag{2.12}$$

(2.11) ifadesine göre aşağıdaki ilişkiler yazılır:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{rr}^{(k),0}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0}}=\frac{1}{\lambda_1^{(k)}}\frac{\partial}{\partial\lambda_1^{(k)}},\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{zz}^{(k),0}}=\frac{1}{\lambda_3^{(k)}}\frac{\partial}{\partial\lambda_3^{(k)}}. \tag{2.13}$$

(2.12) ve (2.13) kullanılarak öngerilmeli durum için şu gerilme ifadeleri elde edilir:

$$s_{zz}^{(k),0}=\left[\lambda^{(k)}\left(2\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}-3\right)+2\mu^{(k)}\left(\lambda_3^{(k)}-1\right)\right]\left(\lambda_3^{(k)}\right)^{-1},\ s_{r\theta}^{(k),0}=s_{rz}^{(k),0}=s_{z\theta}^{(k),0}=0,$$

$$s_{rr}^{(k),0}=s_{\theta\theta}^{(k),0}=\left[\lambda^{(k)}\left(2\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}-3\right)+2\mu^{(k)}\left(\lambda_1^{(k)}-1\right)\right]\left(\lambda_1^{(k)}\right)^{-1}. \tag{2.14}$$

Ele alınan probleme için:

$$s_{rr}^{(k),0}=s_{\theta\theta}^{(k),0}=\left[\lambda^{(k)}\left(2\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}-3\right)+2\mu^{(k)}\left(\lambda_1^{(k)}-1\right)\right]\left(\lambda_1^{(k)}\right)^{-1}=0\,,$$

Buradan;

$$\lambda_1^{(k)}=\lambda_2^{(k)}=\left[2-\frac{\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}}\left(\lambda_3^{(k)}-3\right)\right]\left[2\left(\frac{\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}}+1\right)\right]^{-1}. \qquad (2.15)$$

Lagrange gerilme ve yerdeğiştirme tensörünün fiziksel bileşenleri:

(2.1) ve (2.6) ve (2.14) ifadelerinden öngerilmeli durumda Kirchhoff gerilme tensörü için:

$$q_{zz}^{(k),0}=\lambda_3^{(k)}s_{zz}^{(k),0}\,,\quad q_{rr}^{(k),0}=\lambda_1^{(k)}s_{rr}^{(k),0}=0\,,\quad q_{\theta\theta}^{(k),0}=\lambda_1^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k),0}=0\,,$$

$$q_{\theta r}^{(k),0}=q_{r\theta}^{(k),0}=q_{rz}^{(k),0}=q_{zr}^{(k),0}=q_{z\theta}^{(k),0}=q_{\theta z}^{(k),0}=0\,. \qquad (2.16)$$

Ele alınan durum için, doğrusallaştırmanın bir sonucu olarak Green şekil değiştirme tensör bileşenlerinin pertürbasyonları için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\varepsilon_{r\theta}^{(k)}=\frac{1}{2}\lambda_1^{(k)}\left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r}-\frac{u_\theta^{(k)}}{r}\right),\quad \varepsilon_{z\theta}^{(k)}=\frac{1}{2}\lambda_1^{(k)}\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z}\,,$$

$$\varepsilon_{rr}^{(k)}=\varepsilon_{\theta\theta}^{(k)}=\varepsilon_{zz}^{(k)}=\varepsilon_{zr}^{(k)}=0\,. \qquad (2.17)$$

$\tilde{\mathbf{s}}^{(k)}$ Lagrange gerilme tensör bileşenlerinin pertürbasyonları, (2.5) ifadesinin doğrusallaştırılmasından elde edilir. Bu doğrusallaştırmanın bir sonucu olarak:

$$S_{r\theta}^{(k)}=\mu^{(k)}\left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r}-\frac{u_\theta^{(k)}}{r}\right),\quad S_{z\theta}^{(k)}=\mu^{(k)}\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z}\,,$$

$$S_{rr}^{(k)}=S_{\theta\theta}^{(k)}=S_{zz}^{(k)}=S_{rz}^{(k)}=0\,. \qquad (2.18)$$

(2.18) ifadesi dikkate alınarak, Kirchhoff gerilme tensörü $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$ bileşenlerinin pertürbasyonu için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$Q_{r\theta}^{(k)}=Q_{\theta r}^{(k)}=\lambda_1^{(k)}S_{r\theta}^{(k)}\,,\quad Q_{z\theta}^{(k)}=\lambda_1^{(k)}S_{z\theta}^{(k)}+s_{zz}^{(k),0}\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z}\,,\quad Q_{\theta z}^{(k)}=\lambda_3^{(k)}S_{z\theta}^{(k)}\,. \qquad (2.19)$$

(2.7) denkleminden:

$$\frac{\partial}{\partial r}Q_{r\theta}^{(k)}+\frac{\partial}{\partial z}Q_{z\theta}^{(k)}+\frac{1}{r}\left(Q_{r'\theta}^{(k)}+Q_{\theta r'}^{(k)}\right)=\rho^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{\theta}^{(k)}. \tag{2.20}$$

(2.20) denklemini $\left(\left(\lambda_1^{(k)}\right)^2\lambda_3^{(k)}\right)^{-1}$ ile çarparak;

$$\rho'^{(k)}=\rho^{(k)}\left(\left(\lambda_1^{(k)}\right)^2\lambda_3^{(k)}\right)^{-1},\; Q'^{(k)}_{r'\theta}=Q_{r\theta}^{(k)}\left(\lambda_1^{(k)}\lambda_3^{(k)}\right)^{-1},\; Q'^{(k)}_{z'\theta}=Q_{z\theta}^{(k)}\left(\lambda_1^{(k)}\right)^{-2},$$

$$u'^{(k)}_{\theta}=u_{\theta}^{(k)},\; r'=\lambda_1^{(k)}r,\; z'=\lambda_3^{(k)}z. \tag{2.21}$$

(2.18), (2.19) ve (2.21) ilişkileri kullanılarak, $\omega'^{(k)}_{1221}$, $\omega'^{(k)}_{1212}$ ve $\omega'^{(k)}_{1331}$ bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\omega'^{(k)}_{2121}=\omega'^{(k)}_{1221}=\omega'^{(k)}_{2112}=\omega'^{(k)}_{1212}=\frac{\mu^{(k)}}{\lambda_3^{(k)}},$$

$$\omega'^{(k)}_{1331}=\frac{\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}}2\mu^{(k)}\lambda_1^{(k)}+\frac{1}{\lambda_3^{(k)}}S_{33}^{(k),0}. \tag{2.22}$$

Ele alınan problemin çözümü için şu ana kadar elde edilen denklemlere aşağıdaki temas ve sınır koşullarını eklemek gereklidir:

İçi dolu silindir için;

$$u'^{(1)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R}=u'^{(2)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}R},\; Q'^{(1)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R}=Q'^{(2)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}R},\; Q'^{(2)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}R(1+h/R)}=0. \tag{2.23}$$

İçi boş silindir için;

$$Q'^{(1)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R}=0,\qquad Q'^{(1)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}=Q'^{(2)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)},$$

$$u'^{(1)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}=u'^{(2)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)},\; Q'^{(2)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(\lambda_2^{(1)}R\right)\right)}=0. \tag{2.24}$$

Bu sayede ele alınan dalga yayılım problemimiz bir özdeğer problemine dönüşmektedir. Burada $\lambda_1^{(k)}=\lambda_2^{(k)}=\lambda_3^{(k)}=1.0$ halinin uygun klasik elastodinamik problemine karşılık geldiğine dikkat edilmelidir.

2.2 Çözüm Yöntemi

Guz'un [38] makalesine göre (2.3) ve (2.4) denklemlerinin çözümü için aşağıdaki ifade kullanılır:

$n = 1, 2$,

$$u'^{(n)}_{\theta}(r', z', t) = -\frac{\partial}{\partial r'} \Psi^{(n)}(r', z', t) \tag{2.25}$$

(2.25)'deki $\Psi^{(n)}$ aşağıdaki dalga denklemini sağlayacaktır:

$$\left[\Delta' + \left(\xi'^{(n)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\rho'}{\omega'_{1221}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi = 0 , \tag{2.26}$$

Burada:

$$\Delta' = \frac{d^2}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'}, \quad \left(\xi'^{(n)} \right)^2 = \frac{2\left(\lambda_3^{(n)} \right)^3}{\left(\lambda_2^{(n)} \right)^2 \left(\lambda_2^{(n)} + \lambda_3^{(n)} \right)} . \tag{2.27}$$

Problem ifadesine göre:

$$\Psi^{(n)}(r', z', t) = \psi^{(n)}\left(r' \right) \exp i(kz' - \omega t) \tag{2.28}$$

Buradan bilinmeyen fonksiyon $\psi^{(n)}\left(r' \right)$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left[\frac{d^2}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} - \left(k^2 \left(\xi'^{(n)} \right)^2 - \frac{\rho'^{(n)} \omega^2}{\omega'^{(n)}_{1221}} \right) \right] \psi^{(n)}\left(r' \right) = 0 . \tag{2.29}$$

Bu notasyona göre (2.29)'da parantez içindeki ifade:

$$\left(s^{(n)} \right)^2 = \left(k^2 \left(\xi'^{(n)} \right)^2 - \frac{\rho'^{(n)} \omega^2}{\omega'^{(n)}_{1221}} \right) \tag{2.30}$$

İçi dolu ve içi boş silindirler için (2.29)'un çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

İçi dolu silindir için;

$$\psi'^{(1)}(r') = \begin{cases} A^{(1)} J_0\left(s^{(1)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(1)}\right)^2 > 0 \\ A^{(1)} I_0\left(s^{(1)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(1)}\right)^2 < 0 \end{cases}, \tag{2.31}$$

$$\psi'^{(2)}(r') = \begin{cases} A^{(2)} J_0\left(s^{(2)} kr'\right) + B^{(2)} Y_0\left(s^{(2)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(2)}\right)^2 > 0 \\ A^{(2)} I_0\left(s^{(2)} kr'\right) + K^{(2)} K_0\left(s^{(2)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(2)}\right)^2 < 0 \end{cases}. \tag{2.32}$$

İçi boş silindir için;

$$\psi'^{(1)}(r') = \begin{cases} A^{(1)} J_0\left(s^{(1)} kr'\right) + B^{(1)} Y_0\left(s^{(1)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(1)}\right)^2 > 0 \\ A^{(1)} I_0\left(s^{(1)} kr'\right) + B^{(1)} K_0\left(s^{(1)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(1)}\right)^2 < 0 \end{cases}, \tag{2.33}$$

$$\psi'^{(2)}(r') = \begin{cases} A^{(2)} J_0\left(s^{(2)} kr'\right) + B^{(2)} Y_0\left(s^{(2)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(2)}\right)^2 > 0 \\ A^{(2)} I_0\left(s^{(2)} kr'\right) + B^{(2)} K_0\left(s^{(2)} kr'\right) & \text{eğer} \quad \left(s^{(2)}\right)^2 < 0 \end{cases}. \tag{2.34}$$

Burada $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ sıfırıncı mertebeden birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonları $I_0(x)$ ve $K_0(x)$ ise sırasıyla, sıfırıncı mertebeden modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu ve Macdonald fonksiyonlardır.

2.3 İki Katlı Bileşik Silindirin Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

(2.4), (2.25), (2.28), (2.31) ve (2.32) ifadeleri ile temas ve sınır koşullarının verildiği (2.23) kullanarak oluşturulan denklem takımının katsayılar determinantının sıfıra eşit olması, dispersiyon denklemini oluşturmaktadır. Bu sayede (2.35)'de verilen dispersiyon denklemi elde edilmektedir. İki katlı bileşik silindir için söz konusu determinant 3x3 boyutundadır:

$$\det\left\|\alpha_{ij}\right\| = 0\,,\quad i;\, j = 1,2,3\,, \tag{2.35}$$

(2.35)'deki determinantın bileşenleri, α_{ij}'ler aşağıdaki biçimde belirlenmektedir.

$$\alpha_{11} = \begin{cases} \mathrm{J}_1\left(s^{(1)}kr'\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2 > 0 \\ -\mathrm{I}_1\left(s^{(1)}kr'\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2 < 0 \end{cases}, \quad \alpha_{12} = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\mathrm{J}_1\left(s^{(2)}kr'\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 > 0 \\ \dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\mathrm{I}_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{13} = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\mathrm{Y}_1\left(s^{(2)}kr'\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 > 0 \\ -\dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\mathrm{K}_1\left(s^{(2)}kr'\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 < 0 \end{cases},$$

$$\alpha_{21} = \begin{cases} \dfrac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(s^{(1)}kr'\right) - J_2\left(s^{(1)}kr'\right)\right] - \dfrac{\mathrm{J}_1(\mathrm{s}^{(1)}\kappa r')}{\mathrm{s}^{(1)}\kappa r'}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2 > 0 \\ \dfrac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(s^{(1)}kr'\right) + I_2\left(s^{(1)}kr'\right)\right] + \dfrac{\mathrm{I}_1(\mathrm{s}^{(1)}kr')}{\mathrm{s}^{(1)}kr'}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{22} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\right)^2\left[\mathrm{J}_0\left(s^{(2)}kr'\right) - J_2\left(s^{(2)}kr'\right)\right] - \dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\dfrac{\mathrm{J}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(1)}kr'}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 > 0 \\ -\dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\right)^2\left[\mathrm{I}_0\left(s^{(2)}kr'\right) + I_2\left(s^{(2)}kr'\right)\right] + \dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\dfrac{\mathrm{I}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(1)}kr'}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{23} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\right)^2\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(2)}kr'\right) - Y_2\left(s^{(2)}kr'\right)\right] - \dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\dfrac{\mathrm{Y}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(1)}kr'}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 > 0 \\ -\dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\right)^2\left[\mathrm{K}_0\left(s^{(2)}kr'\right) + K_2\left(s^{(2)}kr'\right)\right] - \dfrac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\dfrac{\mathrm{K}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(1)}kr'}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{31} = 0$$

$$\alpha_{32}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)-J_2\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)\right]-\dfrac{\mathrm{J}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(2)}kr'}\right\} & ,\ \text{eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0\\ \dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)+I_2\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)\right]+\dfrac{\mathrm{I}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(2)}kr'}\right\} & ,\ \text{eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2<0\end{cases}$$

$$\alpha_{33}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)-Y_2\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)\right]-\dfrac{\mathrm{Y}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(2)}kr'}\right\} & ,\ \text{eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0\\ \dfrac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{K}_0\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)+K_2\left(\mathrm{s}^{(2)}kr'\right)\right]-\dfrac{\mathrm{K}_1(\mathrm{s}^{(2)}kr')}{\mathrm{s}^{(2)}kr'}\right\} & ,\ \text{eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2<0\end{cases}. \qquad (2.36)$$

2.3.1 Asimptotik Yaklaşım

İki katlı bileşik silindir için burulma dalgalarının birinci modunun, dalga boyunun çok büyük olduğu, $kR\to 0$ durumunda, limit değerini veren analitik ifadenin elde edilmesi için, (2.35) determinantı Bessel fonksiyonlarının seri açılımlarından yararlanılarak ($kR\to 0$ koşulu altında) seriye açılmalıdır.

Bunun için ilk önce (2.35)'in

$$\alpha_{11}\ \alpha_{22}\ \alpha_{33}+\alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \alpha_{31}+\alpha_{13}\ \alpha_{21}\ \alpha_{32}-\alpha_{13}\ \alpha_{22}\ \alpha_{31}-\alpha_{12}\ \alpha_{21}\ \alpha_{33}-\alpha_{11}\ \alpha_{23}\ \alpha_{32}=0$$

$$\alpha_{11}\left(\alpha_{22}\ \alpha_{33}-\alpha_{23}\ \alpha_{32}\right)+\alpha_{12}\left(\alpha_{23}\ \alpha_{31}-\alpha_{21}\ \alpha_{33}\right)+\alpha_{13}\left(\alpha_{21}\ \alpha_{32}-\alpha_{22}\ \alpha_{31}\right)=0$$

$$(2.37)$$

biçiminde verilen açık ifadesinde (2.37), aşağıda verilen α_{ij} eşitlikleri yerine koyulur.

$$\alpha_{11}=\mathrm{J}_1\left(x_1\right),\qquad \alpha_{12}=-\frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\mathrm{J}_1\left(x_2\right)$$

$$\alpha_{13}=-\frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\mathrm{Y}_1\left(x_2\right),\quad \alpha_{21}=\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(x_1\right)-J_2\left(x_1\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1(x_1)}{x_1}\right\}$$

$$\alpha_{22}=-\frac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\right)^2\left[\mathrm{J}_0\left(x_2\right)-J_2\left(x_2\right)\right]-\frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}}\frac{\mathrm{J}_1(x_2)}{x_1}\right\}$$

$$\alpha_{23}=-\frac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2\left[\,Y_0\left(x_2\right)-Y_2\left(x_2\right)\right]-\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\frac{Y_1(x_2)}{x_1}\right\},\quad \alpha_{31}=0$$

$$\alpha_{32}=\frac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\,J_0\left(x_3\right)-J_2\left(x_3\right)\right]-\frac{J_1(x_3)}{x_3}\right\},\quad \alpha_{33}=\frac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\,Y_0\left(x_3\right)-Y_2\left(x_3\right)\right]-\frac{Y_1(x_3)}{x_3}\right\}$$

(2.38)

$$x_1=\lambda_2^{(1)}\kappa R\sqrt{s^{(1)}}\qquad x_2=\lambda_2^{(1)}\kappa R\sqrt{s^{(2)}}\qquad x_3=\lambda_2^{(2)}\kappa R\sqrt{s^{(2)}}\left(1+\frac{h}{R}\right)\tag{2.39}$$

(2.37) ve (2.38) ile belirlenen dispersiyon denkleminde Bessel Fonksiyonları'nın

$$J_v\left(x\right)\rightarrow\frac{1}{\Gamma\left(v+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^v$$

$$\Gamma\left(v+1\right)=v!$$

$$Y_v\left(x\right)\rightarrow-\frac{\Gamma\left(v\right)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^v$$

(2.40)

$$J_0\left(x\right)\rightarrow1\qquad J_1\left(x\right)\rightarrow\frac{x}{2}\qquad J_2\left(x\right)\rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{8}$$

$$Y_0\left(x\right)\rightarrow\frac{2}{\pi}\ln\left(x\right)\qquad Y_1\left(x\right)\rightarrow-\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{2}{\pi\ x}\qquad Y_2\left(x\right)\rightarrow-\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^2=-\frac{4}{\pi\ x^2}$$

(2.41)

biçiminde olan $x\rightarrow0$ durumundaki asimptotik ifadeleri göz önüne alınır ve bunlar denklemde yerlerine koyulursa, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\alpha_{11}\approx\frac{x_1}{2},\qquad \alpha_{12}\approx-\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\frac{x_2}{2}$$

$$\alpha_{13}\approx\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\frac{2}{\pi\ x_2},\quad \alpha_{21}\approx-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}}\frac{x_1^2}{16}$$

$$\alpha_{22} \approx \frac{1}{2\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\frac{x_2}{x_1}+\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2\frac{\chi_2^2}{8}-\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2\right\}$$

$$\alpha_{23} \approx -\frac{1}{\pi\lambda_3^{(2)}}\left\{\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \ln\chi_2+\frac{2}{x_2^2}\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2+\frac{2}{x_1 x_2}\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right\}$$

$$\alpha_{31}=0, \quad \alpha_{32} \approx -\frac{1}{\lambda_3^{(2)}}\frac{x_3^2}{16}, \quad \alpha_{33} \approx \frac{1}{\pi\lambda_3^{(2)}}\left\{\ln x_3+\frac{4}{\chi_3^2}\right\} \tag{2.42}$$

$kR \to 0$ **düşük dalga sayısı limit değerleri:**

(2.42), (2.37)’de yerine yazılıp, uygun matematiksel dönüşüm ve sadeleştirmeler yapılırsa iki katlı bileşik silindir için, burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \to 0$ limitinde) elde edilir.

$$c=\frac{\omega}{k}=\left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left(\xi'^{(1)}\right)^2+\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left(\xi'^{(2)}\right)^2\left(\zeta_1^4-1\right)}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}\left(\zeta_1^4-1\right)}\right]^{1/2} \tag{2.43}$$

$$\zeta_1=\frac{\lambda_2^{(2)}}{\lambda_2^{(1)}}\zeta, \qquad \zeta=1+\frac{h}{R} \tag{2.44}$$

$\lambda_3^{(n)}=\lambda_2^{(n)}=1.0$, durumunda (2.43)’den:

$$c=\frac{\omega}{k}=\left[\frac{\mu^{(1)}+\mu^{(2)}\left(\zeta^4-1\right)}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}\left(\zeta^4-1\right)}\right]^{1/2} \tag{2.45}$$

elde ederiz.

Denklem (2.45) , Armenakas [6] ve [8], Reuter [12] ve Haines ve Lee’nin [13] çalışmalarında elde edilen uygun sonuçlarla örtüşmektedir. Ek olarak denklem (2.43), Ozturk ve Akbarov [46] çalışmasının ilgili kısmının, sonlu ön şekil değiştirmeli durum için genelleştirilmiş haldir. Ozturk ve Akbarov’un [46] çalışmasında bu ifadenin küçük ön şekil değiştirmeler için elde edildiğine dikkat edilmelidir. Denklem (2.43)’e göre

$c_2^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)} / \rho^{(1)}}$ iken $c / c_2^{(1)}$'in limit değeri $\mu^{(1)} / \mu^{(2)}$ ile azalırken $\lambda \left(= \lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} \right)$ ile artmaktadır. Sonuç olarak bileşik silindirin önçekilmesi (önbasıncı) $kR \to 0$ iken dalganın limit hızının artmasına (azalmasına) neden olur.

Fiziksel öngörülerle çakıştığı ve direkt olarak sayısal hesaplamalardan da görüldüğü üzere;

$kR \to \infty$ **yüksek dalga sayısı limit değerleri:**

$$c \to \min\left(c_2^{(1)}(\lambda_3^{(1)}), c_2^{(2)}(\lambda_3^{(2)}) \right) \quad , \tag{2.46}$$

biçiminde belirlenmektedir. Burada $c_2^{(k)}(\lambda_3^{(k)})$'in değerleri;

$$c_2^{(k)}(\lambda_3^{(k)}) = \left\{ \frac{2\mu^{(k)}}{\rho^{(k)}} \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-2} \left(\lambda_3^{(k)} \right)^2 \left(\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} \right)^{-1} \right\}^{-1/2} . \tag{2.47}$$

formülünden elde edilir.

(2.43) – (2.47)'de aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir; $\mu^{(k)}$ kayma modülünü, $\lambda_m^{(k)}$ uzama katsayısını, $\rho^{(k)}$ malzeme yoğunluğunu göstermektedir. $c_2^{(k)} = \sqrt{\mu^{(k)} / \rho^{(k)}}$ doğrusal elastik ortamda enine dalga yayılım hızıdır.

Denklem (2.47) öngerilmeli elastik cisimler için "akusto-elastik" ilişki şeklinde adlandırılır ve aşağıdaki denklemden elde edilir:

$$\left(c_2^{(k)}(\lambda_3^{(k)}) \right)^2 = \left[\rho'^{(k)} \Big/ \left(\left(\xi'^{(k)} \right)^2 \omega'^{(k)}_{1221} \right) \right]^{-1/2}, \quad \rho'^{(k)} = \rho^{(k)} \lambda_1^{(k)} \lambda_2^{(k)} \lambda_3^{(k)} \tag{2.48}$$

Buradaki $\xi'^{(k)}$ ve $\omega'^{(k)}_{1221}$ ifadeleri sırasıyla (2.27) ve (2.22)'de verilmiştir.

Bu sonuçlardan burulma dalga yayılım hızı limit değerlerinin sadece ön şekil değiştirme durumu ve $\mu^{(k)} / \rho^{(k)}$ oranına değil, aynı zamanda $\lambda^{(k)} / \mu^{(k)}$ oranına da bağlı olduğu görülmüştür. Zira (2.15) ifadesindeki $\lambda_1^{(k)} (= \lambda_2^{(k)})$ değerleri hesaplanırken söz konusu oran da kullanılmaktadır.

2.3.2 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

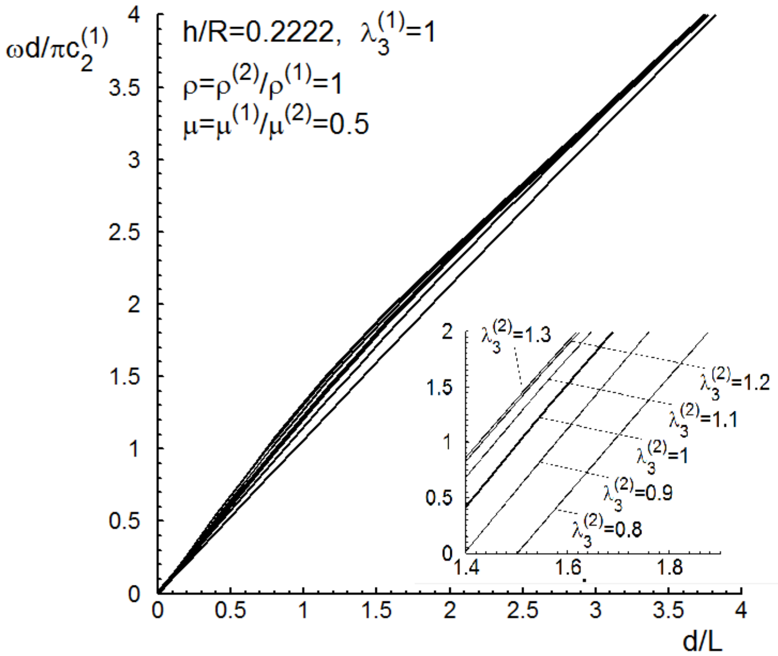
İçi dolu iki katlı bileşik silindir modeli çerçevesinde ilk olarak ön şekil değiştirmelerin sadece dıştaki silindirde olması durumu ele alınmış ve sayısal çözümler elde edilmiştir. İki katlı bileşik silindirde burulma dalgalarının dispersiyonunu incelemek için elde edilen (2.35) dispersiyon denkleminin kR'ye bağımlı olarak c'ye göre çözülmesi gereklidir.

(2.37) denklemi için $kR \to 0$ ve $kR \to \infty$ limitleri dışında analitik çözüm elde etmek mümkün olmadığından sayısal çözüm yapmak gereklidir. (2.35) dispersiyon denkleminin sayısal olarak çözülebilmesi, determinantın terimleri olan ve (2.36)'da verilen α_{ij} lere bağlıdır. (2.36) ifadelerinde görüldüğü üzere bu terimler de kR, $c = \omega/k$, h/R, $\mu^{(k)}$, $\lambda_m^{(k)}$, $\rho^{(k)}$ parametrelerine bağlıdır. Dispersiyon denklemi bu parametreler göz önüne alınarak incelendiğinde, denklemdeki parametrelerden kR ve c harici hepsinin önceden verildiği gözlemlenir. Burada c burulma dalgalarının faz hızı göstermekte iken, kR boyutsuz dalga sayısıdır.

Dispersiyon denkleminin çözülmesi için MATLAB programında tarafımızdan yazılan algoritmalar uygulanmıştır. Buradaki durum için kR'ye başlangıç değeri verilerek denklemi sağlayan c değeri aranmaktadır. Bu değeri bulmak için c'ye sınırdan başlayarak değerler verilir ve determinantın işareti bulunur. Seçilen c değerleri belirlenen aralıklarla artırılırken, c'nin ardışık iki değerindeki determinant işareti farklı ise bu aralıkta bir kök var denir. Adımlar küçültülerek belirlenen hassasiyet çerçevesinde, yarılama yöntemi ile kök bulunur. Daha sonra bu kök değerinden daha büyük değerlerdeki kökler bulunur ve kR değeri artırılıp işlemler yinelenir. Bu sayede kR'ye bağlı olarak faz hızı c bulunur.

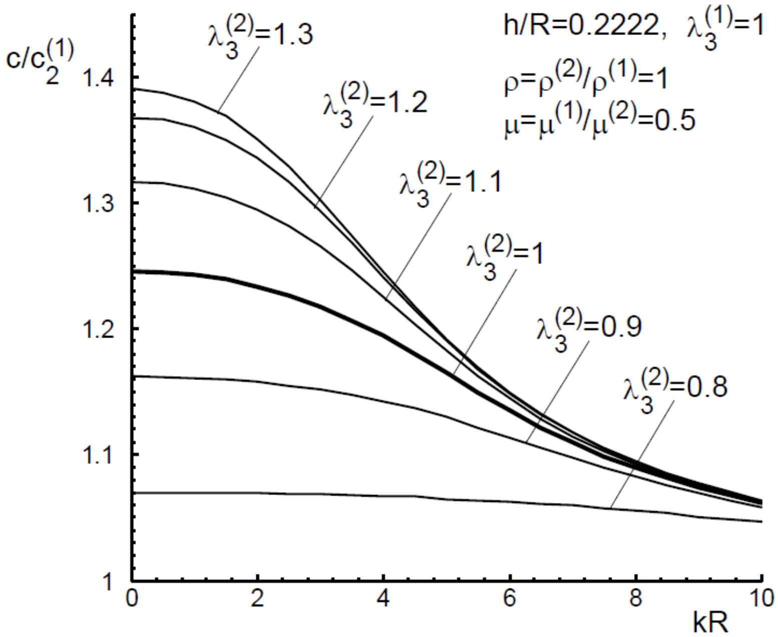
Tez çalışmasında öncelikle sayısal analizlerde kullanılan algoritma ve programların doğruluğunu kanıtlamak için ele alınan değerlerin, Armenakas [8] makalesindeki değerlerle aynı olması sağlanmış ($\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = 0.5$, $\rho^{(1)}/\rho^{(2)} = 1$) daha sonra $\omega d/\left(\pi c_2^{(1)}\right)$ ile $d/L\left(=2d/\ell\right)$ arasındaki ilişkiye bakılarak uygun sonuçların ($\lambda_3^{(2)} = 1.0$) örtüştüğü görülmüştür (ℓ dalga boyu, $d = R + h$, $c_2^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$).

(2.37) denkleminin sayısal olarak $\omega d/\left(\pi c_2^{(1)}\right)$ ve $c/c_2^{(1)}$'e göre çözülmesinden elde edilen grafikler Şekil 2. 3 ve Şekil 2. 4'te verilmiştir. Buna göre 1. modda $h/R = 0.2222$, $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)} = \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = 1.5$ ve $\lambda_3^{(1)} = 1.0$ durumunda $\lambda_3^{(2)}$'ün çeşitli değerleri için oluşturulan eğriler Şekil 2. 3'te görülmektedir.



Şekil 2. 3 1. mod için [8] göz önüne alınarak oluşturulan dispersiyon eğrileri (frekans, dalga sayısı ilişkisi)

Yine Şekil 2. 3'teki koşullar altında $c/c_2^{(1)}$ ve boyutsuz dalga sayısı kR ilişkisi Şekil 2. 4'te verilmiştir. Yukarıda bahsedilen [8] makalesindeki koşullar altında $\lambda_3^{(2)} = 1.0$ durumunda oluşan dispersiyon eğrilerinin bu makaledeki uygun sonuçlar ile örtüştüğü dikkate alınmalıdır.



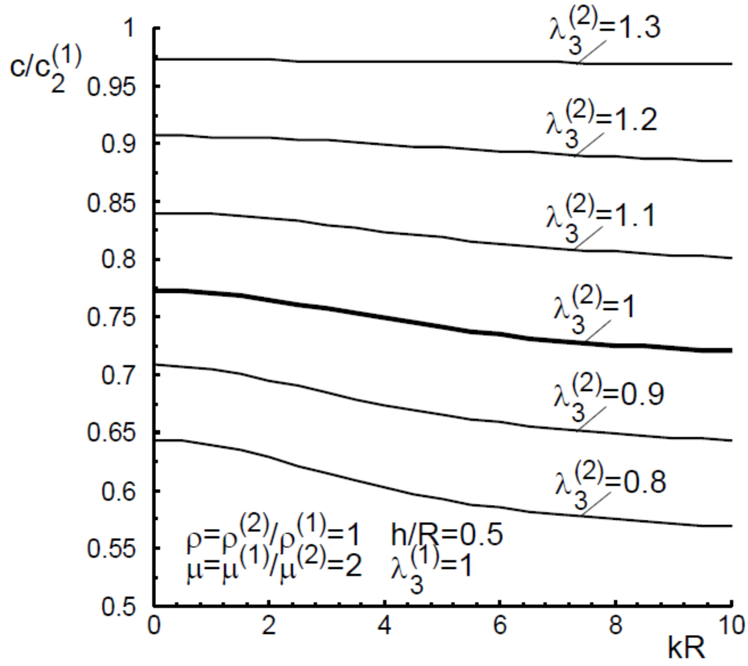
Şekil 2. 4 1. mod için [8] göz önüne alınarak oluşturulan dispersiyon eğrileri (hız, dalga sayısı ilişkisi)

Şekil 2. 3 ve Şekil 2. 4'e göre iki katlı bileşik silindirin dış katmanındaki önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılım hızında artmaya (azalmaya) sebep olmaktadır.

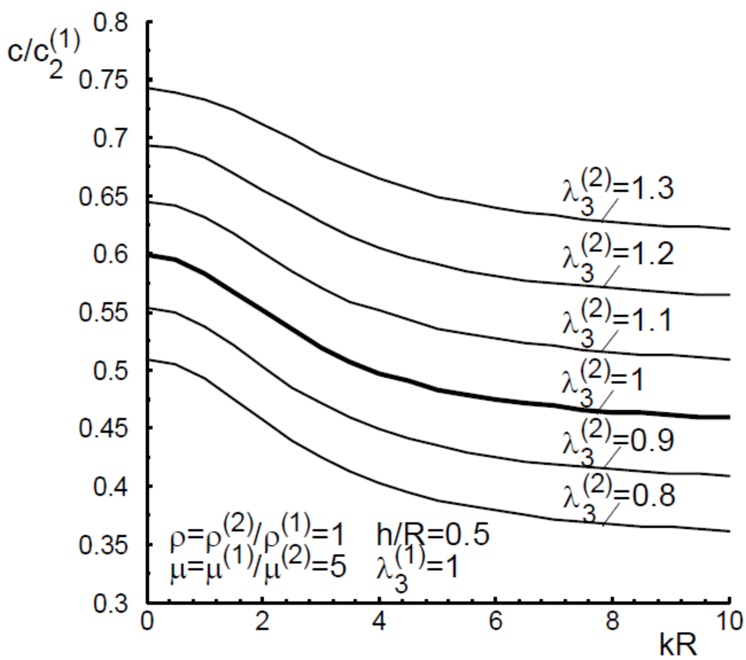
Yukarıdaki sonuçlar, bu çalışmada uygulanan analitik ve nümerik çözüm yollarının doğruluğunu göstermektedir.

Kullanılan algoritmaların doğruluğu ispatlandıktan sonra $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisinden, çeşitli $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ ve $\lambda_3^{(2)}$ değerleri için elde edilen sayısal sonuçlara bakılmıştır ($h/R=0.5$, $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}=\lambda^{(2)}/\mu^{(2)}=1.5$, $\lambda_3^{(1)}=1.0$).

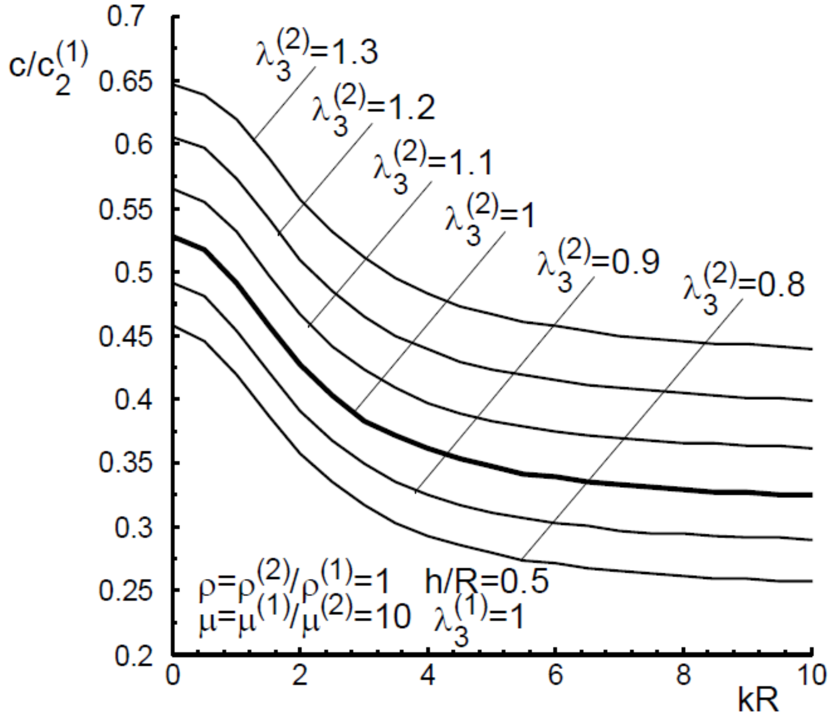
Burada (2.43) ve (2.46) analitik ifadelerinden elde edilen sayısal sonuçların, $kR\to 0$ ve $kR\to\infty$ durumlarında elde edilen sayısal sonuçlarla çakıştığı görülmüştür.



Şekil 2. 5 1. modda, dış katmandaki öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2\right)$



Şekil 2. 6 1. modda, dış katmandaki öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5\right)$



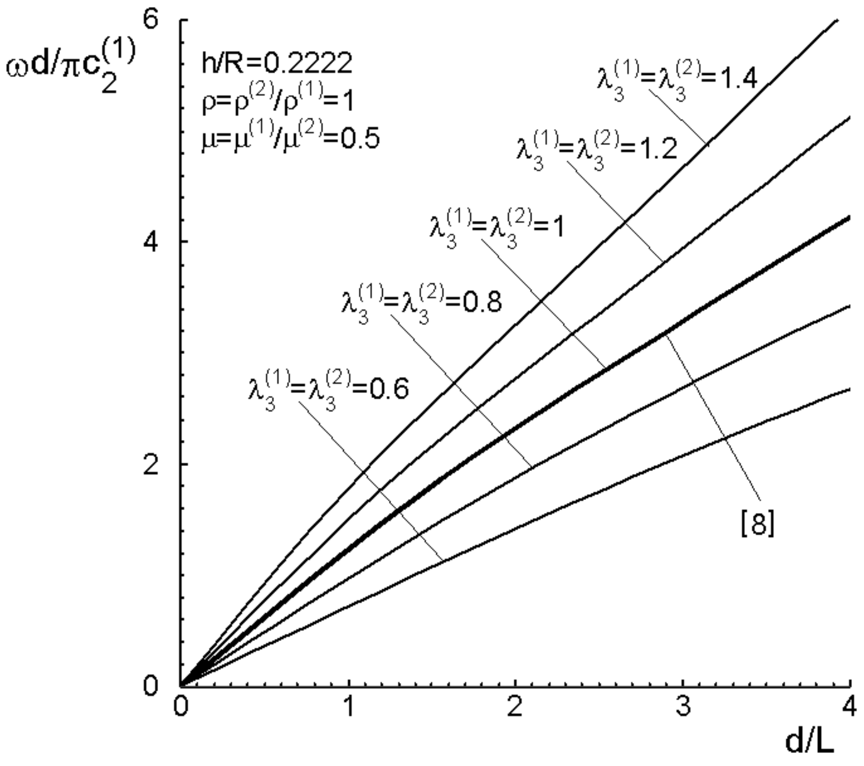
Şekil 2. 7 1. modda, dış katmandaki ön şekil değiştirmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=10\right)$

Buraya kadar iki katlı bileşik silindir için yapılan analizlerde ön şekil değiştirmelerin sadece dıştaki silindirde olduğu varsayılmış, içteki silindire herhangi bir ön şekil değiştirme değeri verilmemiştir. Konuyla ilgili önceki çalışmalarda elde edilen sonuçların karşılaştırılması durumları haricinde, içteki silindir malzemesinin dıştaki silindir malzemesinden daha sert olduğu düşünülerek bazı nümerik analizler yapılmıştır ($\mu^{(1)}/\mu^{(2)}>1$). Bütün bunlar göz önüne alınarak elde edilen Şekil 2.3-2.7'ye göre:

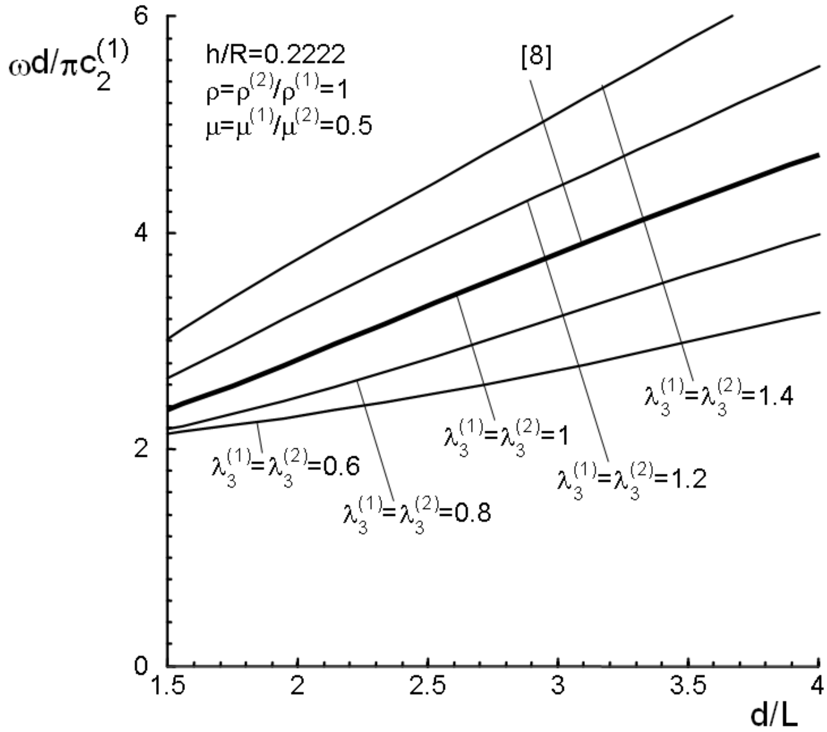
- Söz konusu silindir için burulma dalga yayılım hızı $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ oranı ile azalmaktadır,
- İki katlı bileşik silindirin dış katmanındaki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- Bu artma ve azalmaların büyüklükleri problem parametreleri kR ve $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$'ye bağlıdır. Aynı zamanda bu büyüklükler ön şekil değiştirmeler ile artmaktadır,
- $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ oranındaki artış, $c/c_2^{(1)}$ oranında, kR ile birlikte daha belirgin bir düşüşe neden olmaktadır.

İçi dolu iki katlı silindir modeli çerçevesinde ikinci olarak ön şekil değiştirmelerin hem içteki hem de dıştaki katmanlarda aynı anda olması durumu ele alınmış ve bu duruma ilişkin sayısal çözümler elde edilmiştir.

Yine öncelikle analizlerde kullanılan algoritma ve programların doğruluğunu kanıtlamak için ele alınan değerlerin, Armenakas [8] makalesindeki değerlerle aynı olması sağlanmış ($\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=0.5$, $\rho^{(1)}/\rho^{(2)}=1$) ve daha sonra $\omega d/\left(\pi c_2^{(1)}\right)$ ile $d/L\left(=2d/\ell\right)$ arasındaki ilişkiye bakılarak uygun sonuçların ($\lambda_3=1.0$), referans çalışma olan [8] makalesindeki sonuçlarla örtüştüğü görülmüştür (ℓ dalga boyu, $d=R+h$, $c_2^{(1)}=\sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$).



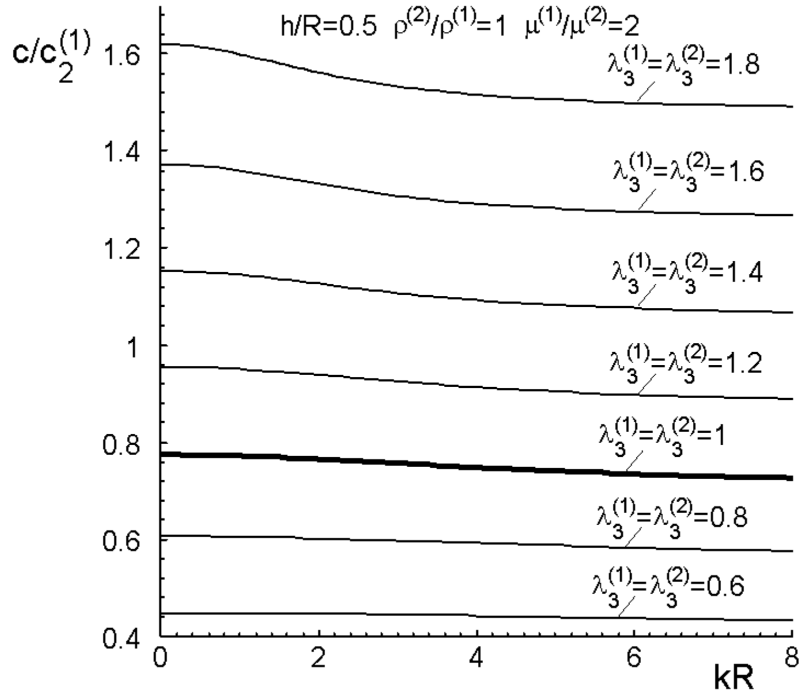
Şekil 2. 8 1. mod için [8] göz önüne alınarak oluşturulan dispersiyon eğrileri



Şekil 2. 9 2. mod için [8] göz önüne alınarak oluşturulan dispersiyon eğrileri

Yukarıda belirtilen kabuller eşliğinde 1. mod için Şekil 2. 8 ve 2. mod için Şekil 2.9 grafikleri oluşturulmuştur. Buna göre $h/R = 0.2222$, $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)} = \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = 1.5$ ve $\lambda_3 (= \lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)})$'ün çeşitli değerleri için oluşturulan dispersiyon eğrileriyle $\lambda_3 = 1.0$ durumlarında [8] çalışmasındaki sonuçların çakıştığı göz önüne alınmalıdır. Bu sonuçlar, söz konusu analizlerde uygulanan analitik ve nümerik çözüm yollarının doğruluğunu göstermektedir.

Aynı zamanda Şekil 2. 8 ve Şekil 2. 9, iki katlı bileşik silindirde önçekmenin (önbasıncın) burulma dalga yayılım hızında artmaya (azalmaya) sebep olduğunu göstermektedir.

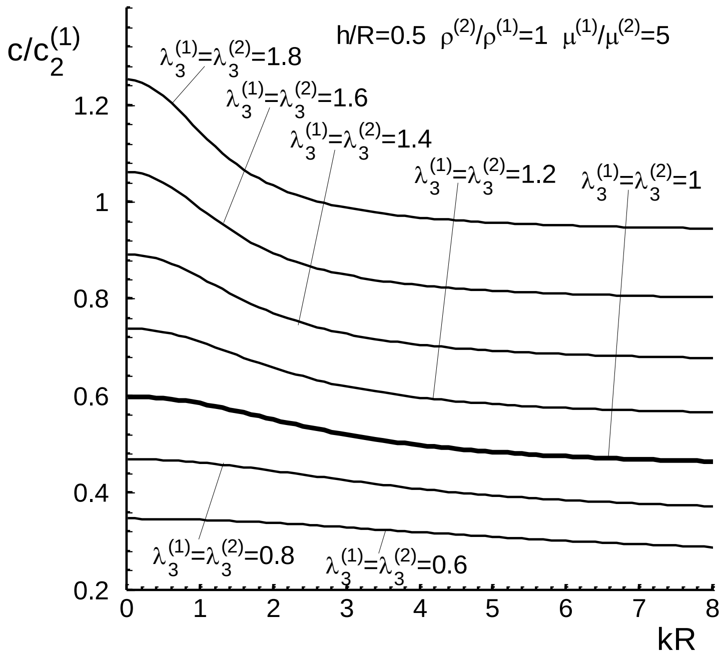


Şekil 2. 10 1. modda, öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2\right)$

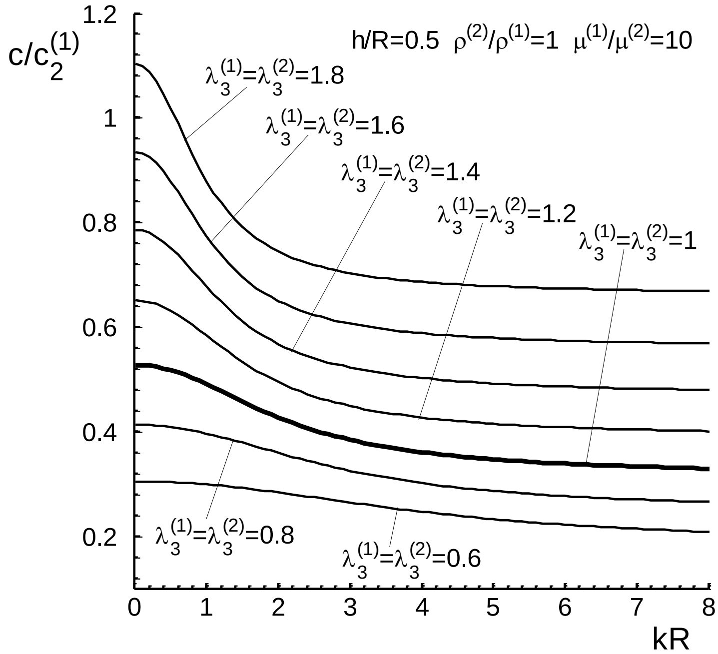
İki katlı bileşik silindirde ön şekil değiştirmelerin her iki katmanda da olduğu durumlar için kullanılan algoritmaların doğruluğu ispatlandıktan sonra çeşitli $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ ve $\lambda_3(=\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(2)})$ değerleri için $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisine, bakılmıştır ($h/R=0.5$, $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}=\lambda^{(2)}/\mu^{(2)}=1.5$).

Burada $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$'nin 1. modda sırasıyla 2, 5 ve 10'a eşit olduğu grafikler Şekil 2. 10, Şekil 2. 11 ve Şekil 2. 12 iken, benzer değerler için 2. mod grafikleri 2. 13, Şekil 2. 14 ve Şekil 2. 15'tir.

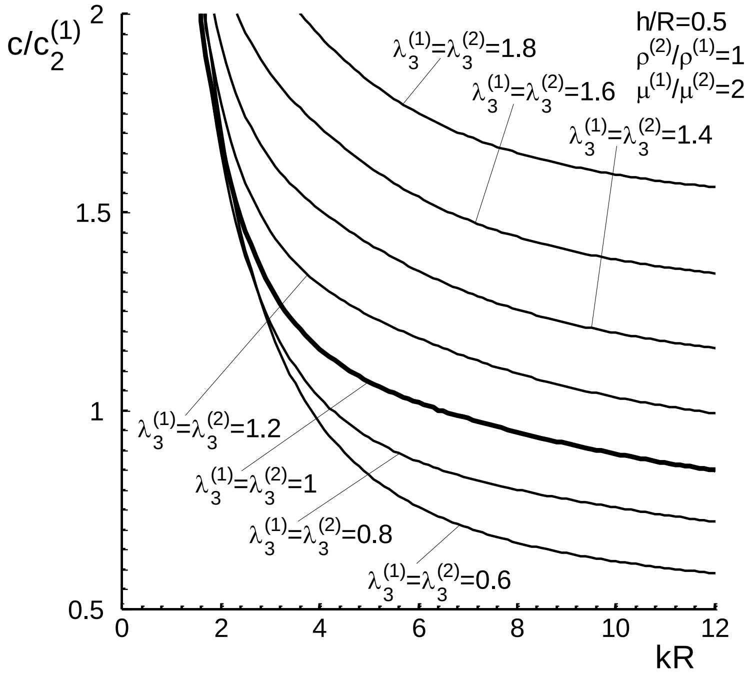
Ayrıca elde edilen sonuçların ışığında, (2.43) ve (2.46) analitik ifadelerinden elde edilen sayısal sonuçların, $kR\to 0$ ve $kR\to\infty$ durumlarında elde edilen sayısal sonuçlarla çakıştığı görülmüştür.



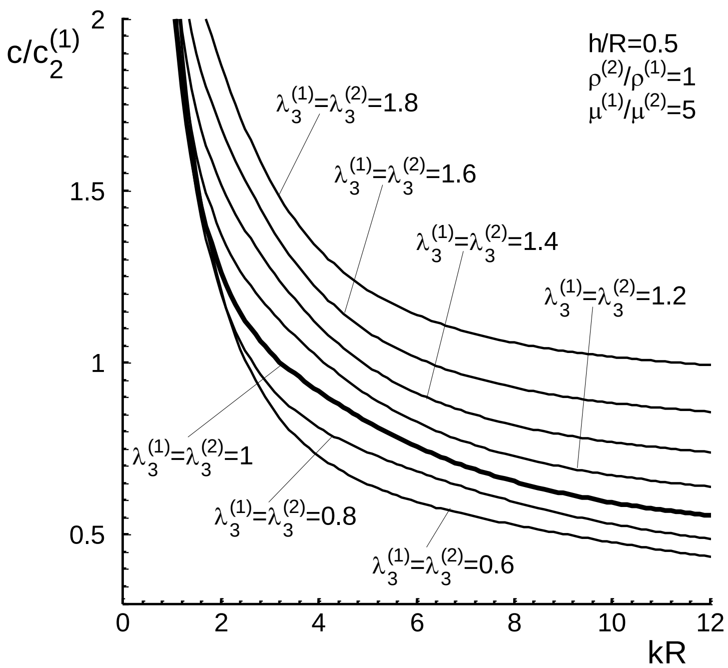
Şekil 2. 11 1. modda, öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5\right)$



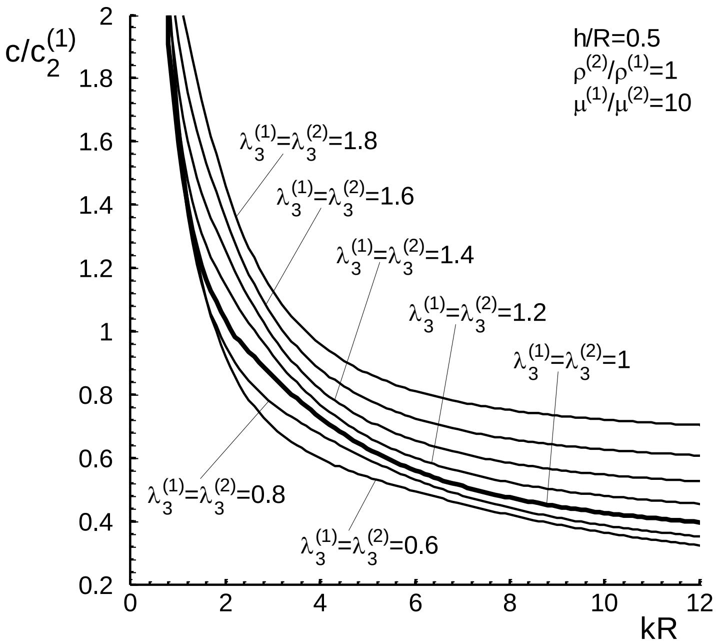
Şekil 2. 12 1. modda, öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=10\right)$



Şekil 2. 13 2. modda, öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2\right)$



Şekil 2. 14 2. modda, öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5\right)$



Şekil 2. 15 2. modda, öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\left(\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=10\right)$

İki katlı bileşik silindir için ön şekil değiştirmelerin hem iç hem de dıştaki silindirde olduğu varsayılmış, konuyla ilgili önceki çalışmalarda elde edilen sonuçların karşılaştırılması durumları haricinde, içteki silindir malzemesinin dıştaki silindir malzemesinden daha sert olduğu düşünülerek bazı nümerik analizler yapılmıştır ($\mu^{(1)}/\mu^{(2)}>1$). Bütün bunlar göz önüne alınarak elde edilen Şekil 2. 8-2. 15'e göre:

- İki katlı silindirde burulma dalga yayılımı hızı $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ ile azalmaktadır,
- İki katlı bileşik silindirin dış katmanındaki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- Bu artma ve azalmaların büyüklükleri problem parametreleri kR ve $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$'ye bağlıdır. Aynı zamanda bu büyüklükler ön şekil değiştirmeler ile artmaktadır,
- $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ oranındaki artış, $c/c_2^{(1)}$ oranında, kR ile birlikte daha belirgin bir düşüşe neden olmaktadır.

2.4 İçi Boş İki Katlı Bileşik Silindirin Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

İçi dolu iki katlı bileşik silindir için uygulanan yönteme benzer şekilde içi boş bileşik silindirin dispersiyon denklemi de (2.33), (2.34), (2.28), (2.25) ve (2.4) ifadeleri ile temas ve sınır koşulları (2.24) kullanılarak oluşturulan denklem takımının katsayılar determinantının sıfıra eşit olması, dispersiyon denklemini oluşturmaktadır. Bu sayede (2.49)'da verilen dispersiyon denklemi elde edilmektedir. İçi boş iki katlı bileşik silindir için söz konusu determinant 4x4 boyutundadır:

$$\det\left\|\alpha_{ij}\right\|=0\,,\;\; i;\, j=1,2,3,4 \tag{2.49}$$

(2.49)'daki determinantın bileşenleri, yani α_{ij}'ler aşağıdaki biçimde belirlenmektedir.

$$\alpha_{11}=\begin{cases}\dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\right)-J_2\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\right)\right]-\dfrac{\mathrm{J}_1(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R)}{s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2>0\\[2ex] \dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\right)+I_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\right)\right]+\dfrac{\mathrm{I}_1(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2<0\end{cases}$$

$$\alpha_{12}=\begin{cases}\dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\right)-Y_2\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\right)\right]-\dfrac{\mathrm{J}_1(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R)}{s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R}\right\} & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2>0\\[2ex] \dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{K}_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\right)+K_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\right)\right]+\dfrac{\mathrm{K}_1(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R}\right\} & \text{,eğer} \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2<0\end{cases}$$

$\alpha_{13}=0\,,\; \alpha_{14}=0\,,$

$$\alpha_{21}=\begin{cases}\mathrm{J}_1\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2>0\\ -\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2<0\end{cases},$$

$$\alpha_{22}=\begin{cases}\mathrm{Y}_1\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2>0\\ -\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2<0\end{cases},$$

$$\alpha_{23}=\begin{cases}-\dfrac{s^{(2)}}{s^{(1)}}J_1\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(s^{(2)}\right)^2>0\\ \dfrac{\left|s^{(2)}\right|}{\left|s^{(1)}\right|}I_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(s^{(2)}\right)^2<0\end{cases},$$

$$\alpha_{24}=\begin{cases}-\dfrac{s^{(2)}}{s^{(1)}}Y_1\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(s^{(2)}\right)^2>0\\ \dfrac{\left|s^{(2)}\right|}{\left|s^{(1)}\right|}K_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right) & \text{, eğer } \left(s^{(2)}\right)^2<0\end{cases},$$

$$\alpha_{31}=\begin{cases}\dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[J_0\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)-J_2\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]-\right.\\ \dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[I_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)+I_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]+\right.\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\left.\dfrac{J_1\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\}, \text{ eğer } \left(s^{(1)}\right)^2>0\\ \left.\dfrac{I_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\} \text{ ,eğer } \left(s^{(1)}\right)^2<0\end{matrix},$$

$$\alpha_{32}=\begin{cases}\dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[Y_0\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)-Y_2\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]-\right.\\ \dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[K_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)+K_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]+\right.\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\left.\dfrac{Y_1\left(s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{s^{(1)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\}, \text{ eğer } \left(s^{(1)}\right)^2>0\\ \left.\dfrac{K_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\} \text{ , eğer } \left(s^{(1)}\right)^2<0\end{matrix},$$

$$\alpha_{33}=\begin{cases}-\dfrac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[J_0\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)-J_2\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]-\right.\\ -\dfrac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\left[I_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)+I_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_2^{(1)}kR\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]+\right.\end{cases}$$

$$\left.\frac{\mathrm{J}_1\left(\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\}, \text{eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0$$

$$\left.\frac{\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\} \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2<0 \quad ,$$

$$\alpha_{34}=\begin{cases}-\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)-Y_2\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]-\right.\\ -\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{K}_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)+K_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_2^{(1)}kR\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)\right]+\right.\end{cases}$$

$$\left.\frac{\mathrm{Y}_1\left(\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\}, \text{eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0$$

$$\left.\frac{\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\} \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2<0 \quad ,$$

$$\alpha_{41}=0, \quad \alpha_{42}=0,$$

$$\alpha_{43}=\begin{cases}\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\right)-\right.\right.\\ \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\right)+\right.\right.\end{cases}$$

$$J_2\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\right)\Big]-$$

$$I_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_2^{(1)}kR\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\right)\Big]+$$

$$\left.\frac{\mathrm{J}_1\left(\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\right)}{\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)}\right\}, \text{eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0$$

$$\left.\frac{\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}h^{(2)}/\left(R\lambda_2^{(1)}\right)\right)}\right\} \text{, eğer } \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2<0 \quad ,$$

$$\alpha_{44}=\begin{cases}\dfrac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)\right)-\right.\right.\\ \dfrac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\dfrac{1}{2}\ \left[\mathrm{K}_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)\right)+\right.\right.\end{cases}$$

$$Y_2\left(s^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\Big]+$$

$$K_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_2^{(1)}kR\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)\right)\Big]+$$

$$\left.\frac{\mathrm{Y}_1\left(\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)\right)}{\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)}\right\},\ \text{eğer}\ \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0$$

$$\left.\frac{\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_2^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R+\lambda_2^{(2)}\,h^{(2)}/R\lambda_2^{(1)}\right)}\right\}\ ,\ \text{eğer}\ \left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2<0 \quad . \qquad (2.50)$$

2.4.1 Asimptotik Yaklaşım

İçi boş iki katlı bileşik silindir için burulma dalgalarının birinci modunun, dalga boyunun çok büyük olduğu, $kR\to 0$ durumunda limit değerini veren analitik ifadenin elde edilmesi için, (2.49) determinantı Bessel fonksiyonlarının seri açılımlarından yararlanılarak $kR\to 0$ koşulu altında seriye açılmalıdır.

İlk önce (2.49)'un,

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}\ (\alpha_{22}\ \alpha_{33}\ \alpha_{44}+\alpha_{32}\ \alpha_{43}\ \alpha_{24}+\alpha_{42}\ \alpha_{23}\ \alpha_{34}-\alpha_{22}\ \alpha_{43}\ \alpha_{34}-\alpha_{32}\ \alpha_{23}\ \alpha_{44}\\&-\alpha_{42}\ \alpha_{33}\ \alpha_{24})+\alpha_{21}\ (\alpha_{12}\ \alpha_{43}\ \alpha_{34}+\alpha_{32}\ \alpha_{13}\ \alpha_{44}+\alpha_{42}\ \alpha_{33}\ \alpha_{14}-\alpha_{12}\ \alpha_{33}\ \alpha_{44}\\&-\alpha_{32}\ \alpha_{43}\ \alpha_{14}-\alpha_{42}\ \alpha_{13}\ \alpha_{34})+\alpha_{31}\ (\alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \alpha_{44}+\alpha_{22}\ \alpha_{43}\ \alpha_{14}+\alpha_{42}\ \alpha_{13}\ \alpha_{24}\\&-\alpha_{12}\ \alpha_{43}\ \alpha_{24}-\alpha_{22}\ \alpha_{13}\ \alpha_{44}-\alpha_{42}\ \alpha_{23}\ \alpha_{14})+\alpha_{41}\ (\alpha_{12}\ \alpha_{33}\ \alpha_{24}+\alpha_{22}\ \alpha_{13}\ \alpha_{34}\\&+\alpha_{32}\ \alpha_{23}\ \alpha_{14}-\alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \alpha_{34}-\alpha_{22}\ \alpha_{33}\ \alpha_{14}-\alpha_{32}\ \alpha_{13}\ \alpha_{24})=0\end{aligned} \qquad (2.51)$$

biçiminde verilen açık ifadesinde α_{ij}'lerin aşağıda verilen ifadeleri, (2.51)'de yerine koyulur.

Burada, α_{ij}'ler aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_{11}=\mathrm{J}_2\left(\mathrm{s}^{(1)}x_1\right),$$

$$\alpha_{12}=Y_2\left(\mathrm{s}^{(1)}x_1\right)\ ,$$

$\alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{14} = 0,$

$\alpha_{21} = \alpha\left(s^{(1)}\right)^2 J_2\left(s^{(1)}x_2\right),$

$\alpha_{22} = \alpha\left(s^{(1)}\right)^2 Y_2\left(s^{(1)}x_2\right)$

$\alpha_{23} = \beta\left(s^{(2)}\right)^2 J_2\left(s^{(2)}x_2\right),$

$\alpha_{24} = \beta\left(s^{(2)}\right)^2 Y_2\left(s^{(2)}x_2\right)$

$\alpha_{31} = s^{(1)} J_1\left(s^{(1)}x_2\right),$

$\alpha_{32} = s^{(1)} Y_1\left(s^{(1)}x_2\right)$

$\alpha_{33} = -s^{(2)} J_1\left(s^{(2)}x_2\right),$

$\alpha_{34} = -s^{(2)} Y_1\left(s^{(2)}x_2\right)$

$\alpha_{41} = 0, \ \alpha_{42} = 0,$

$\alpha_{43} = J_2\left(s^{(2)}x_3\right),$

$\alpha_{44} = Y_2\left(s^{(2)}x_3\right)$

(2.52)

$$\alpha = -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \qquad \beta = \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}$$

(2.53)

$$x_1 = \kappa R \qquad x_2 = \kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right) \qquad x_3 = \kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)$$

Bu denklemi $\kappa R \to 0$’da seriye açmak için, Bessel fonksiyonlarının $x << 1$ için değerleri (2.40) ve (2.41)’de verilmiştir.

(2.41) numaralı eşitlikleri, (2.52) ifadelerinin içine koyup α_{ij}'leri doğrusallaştırırsak:

$$\alpha_{11} \approx \frac{\left(s^{(1)}\right)^2 x_1^2}{8}$$

$$\alpha_{12} \approx -\frac{4}{\pi\left(s^{(1)}\right)^2 x_1^2}$$

$$\alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{41} = 0, \quad \alpha_{42} = 0$$

$$\alpha_{21} \approx \alpha \frac{\left(s^{(1)}\right)^4 x_2^2}{8}$$

$$\alpha_{22} \approx -\alpha \frac{4}{\pi x_2^2}$$

$$\alpha_{23} \approx \beta \frac{\left(s^{(2)}\right)^4 x_2^2}{8}$$

$$\alpha_{24} \approx -\beta \frac{4}{\pi x_2^2}$$

$$\alpha_{31} \approx \frac{\left(s^{(1)}\right)^2 x_2}{2}$$

$$\alpha_{32} \approx -\frac{2}{\pi x_2}$$

$$\alpha_{33} \approx -\frac{\left(s^{(2)}\right)^2 x_2}{2}$$

$$\alpha_{34} \approx \frac{2}{\pi x_2}$$

$$\alpha_{43} \approx \frac{\left(s^{(2)}\right)^2 x_3^2}{8}$$

$$\alpha_{44} \approx -\frac{4}{\pi\left(s^{(2)}\right)^2 x_3^2} \tag{2.54}$$

$kR \to 0$ **düşük dalga sayısı limit değerleri:**

(2.54) ifadeleri, (2.51)'de yerine yazılıp, uygun matematiksel dönüşüm ve sadeleştirmeler yapıldıktan sonra, içi boş iki katlı bileşik silindirde düşük dalga sayısı limit değerleri için ($kR \to 0$) aşağıdaki hız formülü elde edilir.

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left(\xi'^{(1)}\right)^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\alpha\left(\xi'^{(2)}\right)^2}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha\left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{\eta_2^4 - \eta_1^4}{\eta_1^4 - 1}, \tag{2.55}$$

$$\eta_2 = 1 + \frac{h^{(1)}}{R} + \frac{\lambda_2^{(2)} h^{(2)}}{\lambda_2^{(1)} R}, \quad \eta_1 = 1 + \frac{h^{(1)}}{R}, \quad c_2^{(1)} = \sqrt{\frac{\mu^{(1)}}{\rho^{(1)}}}, \quad c_2^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu^{(2)}}{\rho^{(2)}}} \tag{2.56}$$

$\lambda_3^{(m)} = \lambda_2^{(m)} = 1.0$, değerleri için denklem (2.55) aşağıdakine dönmektedir:

$$\left(\frac{c}{c_2^{(1)}}\right)^2 = \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha\left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}}\right)^2}. \tag{2.57}$$

Homojen içi boş silindir için non-dispersif olan en düşük modun, bileşik silindir için dispersif olduğu bulunmuştur. Ayrıca denklem (2.57) , Armenakas [9] referans çalışmasının ilgili kısımlarıyla örtüşmektedir. Ek olarak denklem (2.55), Ozturk ve Akbarov [45] çalışmasının ilgili kısmının, sonlu ön şekil değiştirmeli durumu da kapsayan genelleştirilmiş halidir. Ozturk ve Akbarov'un [45] çalışmasında bu ifadenin sadece küçük ön şekil değiştirmeler için elde edildiğine dikkat edilmelidir.

Denklem (2.55)'e göre $c_2^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$ iken $c/c_2^{(1)}$'in limit değeri $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ ile azalırken, $\lambda\left(=\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)}\right)$ ile artmaktadır. Sonuç olarak bileşik silindirde önçekme (önbasınç) $kR \to 0$ iken dalganın limit hızının artmasına (azalmasına) neden olur.

$kR \to \infty$ **yüksek dalga sayısı limit değerleri:**

$$c \to \min\left\{c_2^{(1)}\left(\lambda_3^{(1)}\right), c_2^{(2)}\left(\lambda_3^{(2)}\right)\right\} \tag{2.58}$$

$$c_2^{(\kappa)}\left(\lambda_3^{(\kappa)}\right) = \left\{\frac{2\mu^{(\kappa)}}{\rho^{(\kappa)}}\left(\lambda_1^{(\kappa)}\right)^{-2}\left(\lambda_3^{(\kappa)}\right)^2\left(\lambda_3^{(\kappa)} + \lambda_3^{(\kappa)}\right)^{-1}\right\}^{-1/2}. \tag{2.59}$$

Denklem (2.59) öngerilmeli elastik cisimler için "akusto-elastik" ilişki şeklinde adlandırılır ve aşağıdaki denklemden elde edilir:

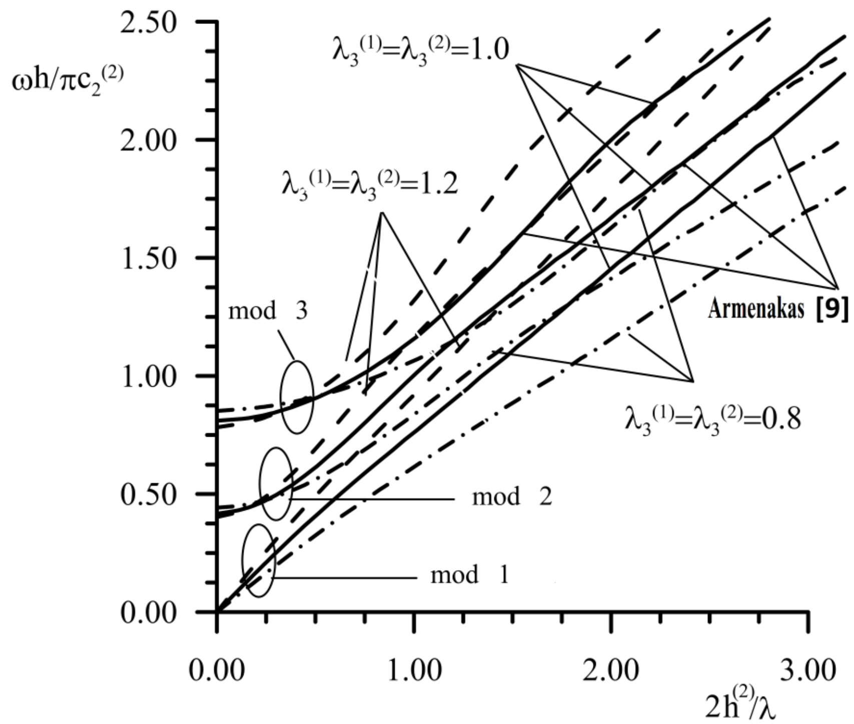
$$\left(c_2^{(\kappa)}\left(\lambda_3^{(\kappa)}\right)\right)^2 = \left[\rho'^{(\kappa)} \Big/ \left(\left(\xi'^{(\kappa)}\right)^2 \omega_{1221}'^{(\kappa)}\right)\right]^{-1/2}, \quad \rho'^{(\kappa)} = \rho^{(\kappa)} \lambda_1^{(\kappa)} \lambda_2^{(\kappa)} \lambda_3^{(\kappa)} \tag{2.60}$$

Buradaki $\xi'^{(k)}$ ve $\omega_{1221}'^{(k)}$ ifadeleri sırasıyla (2.27) ve (2.22)'de verilmiştir.

2.4.2 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

İki katlı bileşik silindirde burulma dalgalarının yayılımı incelenirken, ikinci olarak içindeki boşluğun yarıçapı R ve et kalınlığı $h^{(1)}$ olan bir silindir üzerine yerleştirilmiş, kalınlığı $h^{(2)}$ olan bir silindirden oluşan bileşik silindir göz önüne alınmıştır.

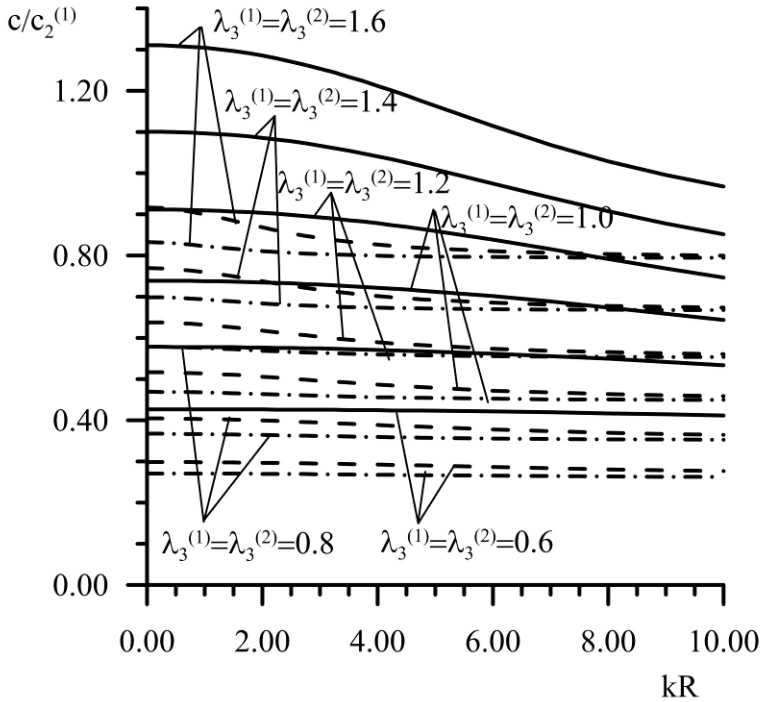
Bu bileşik silindir için bulduğumuz dispersiyon denkleminin sağlamasını yapmak için ele alınan değerlerin, Armenakas [9] makalesindeki değerlerle aynı olmasını sağlanmış ($\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = 1$, $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0.5$, $h^{(1)}/R = 0.2$, $h^{(2)}/R = 0.2$) ve daha sonra $\omega h^{(2)}/\left(\pi c_2^{(2)}\right)$ ile $2h^{(2)}/\lambda$ arasındaki ilişkiye bakılarak sonuçların, $\lambda_3^{(2)} = 1.0$ durumunda referans çalışma olan [9] makalesindekilerle örtüştüğü görülmüştür (λ dalga boyu).



Şekil 2. 16 İlk 3 mod ve $\lambda_3^{(1)}\left(=\lambda_3^{(2)}\right)$'in farklı değerleri için dispersiyon diyagramı

Yukarıda belirtilen kabuller eşliğinde ilk 3 mod için Şekil 2. 16'daki dispersiyon eğrileri oluşturulmuştur. Buna göre $\lambda_3(=\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(2)})$'ün çeşitli değerleri için oluşturulan dispersiyon eğrileriyle $\lambda_3=1.0$ durumlarında Armenakas [9] çalışmasındaki sonuçların çakıştığı göz önüne alınmalıdır. Bu sonuçlar, söz konusu analizlerde uygulanan analitik ve nümerik çözüm yollarının doğruluğunu göstermektedir.

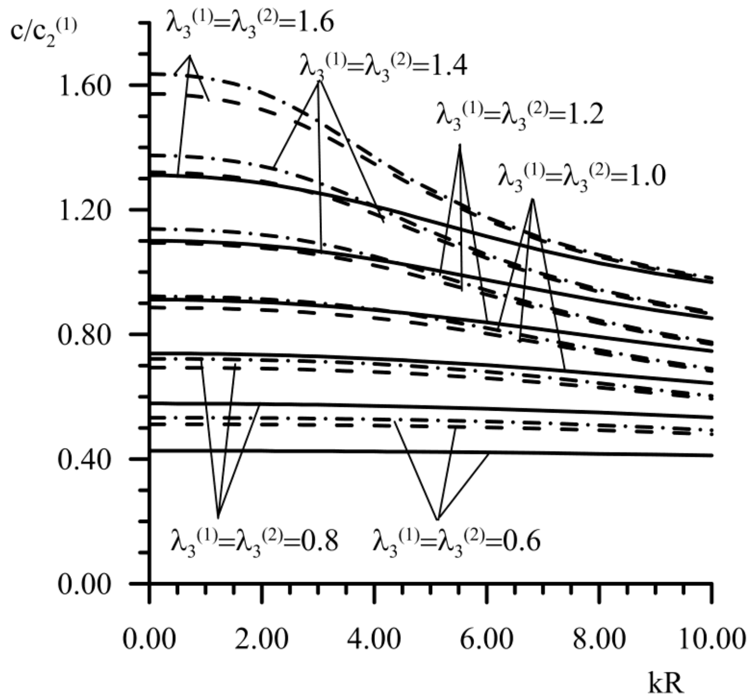
Şekil 2. 16 aynı zamanda iki katlı içi boş bileşik silindirde önçekmenin (önbasıncın) burulma dalga yayılım hızında artmaya (azalmaya) sebep olduğunu göstermektedir.



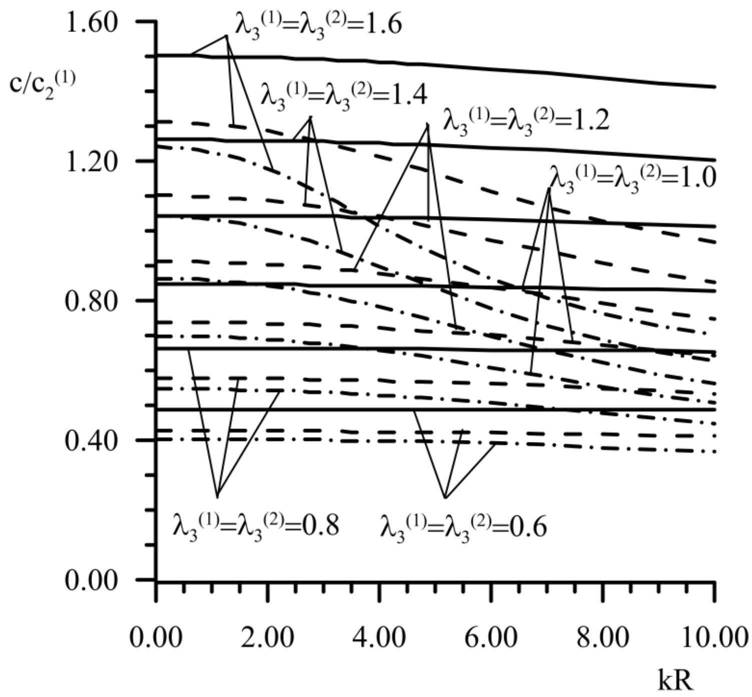
Şekil 2. 17 Farklı $h^{(2)}/R$ değerleri için öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5,\ \ h^{(1)}/R=0.1;$ ——— $h^{(2)}/R=0.1;$ – – – $h^{(2)}/R=0.5;$ – · – · $h^{(2)}/R=1.0$

İçi boş iki katlı bileşik silindirde ön şekil değiştirmelerin her iki katmanda da olduğu durumlar için kullanılan algoritmaların doğruluğu ispatlandıktan sonra $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisine bakılmıştır.

Şekil 2. 17, $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5$ ve $h^{(1)}/R=0.1$ durumunda çeşitli $h^{(2)}/R$ değerleri için; Şekil 2. 18 ise $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5$ ve $h^{(2)}/R=0.1$ durumunda çeşitli $h^{(1)}/R$ değerleri için $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisini göstermektedir. Şekil 2. 19'da ise $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ oranınındaki değişimin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi gösterilmiştir.



Şekil 2. 18 Farklı $h^{(1)}/R$ değerleri için öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5,\quad h^{(2)}/R=0.1;$ ——— $h^{(1)}/R=0.1;$ – – – $h^{(1)}/R=0.5;$ – · – · $h^{(1)}/R=1.0$



Şekil 2. 19 Farklı $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ değerleri için oluşturulmuş dispersiyon eğrileri $h^{(1)}/R=h^{(2)}/R=0.1,$ ——— $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2;$ – – – $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5;$ – · – · $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=10$

İçi boş iki katlı bileşik silindir için ön şekil değiştirmelerin hem iç hem de dıştaki silindirde olduğu durumlarda, konuyla ilgili önceki çalışmalarda elde edilen sonuçların karşılaştırılması durumları haricinde, içteki silindir malzemesinin dıştaki silindir malzemesinden daha sert olduğu düşünülerek çeşitli sayısal analizler yapılmıştır ($\mu^{(1)}/\mu^{(2)} > 1$). Bütün bu durumlar göz önüne alınarak elde edilen Şekil 2. 16-2. 19'a göre:

- İçi boş iki katlı bileşik silindirde burulma dalga yayılımı hızı $c/c_2^{(1)}$, $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ ile azalmaktadır,
- Silindir bileşenlerindeki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılım hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- İçteki silindir malzemesi dıştakine göre daha sert olduğundan dolayı, silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkileri $h^{(2)}/R(h^{(1)}/R)$ oranı ile azalmaktadır (artmaktadır).

Şekil 2.16-2.19'da ortaya konulan ve yorumlanan sayısal sonuçlar [51] makalesinde de verilmiştir.

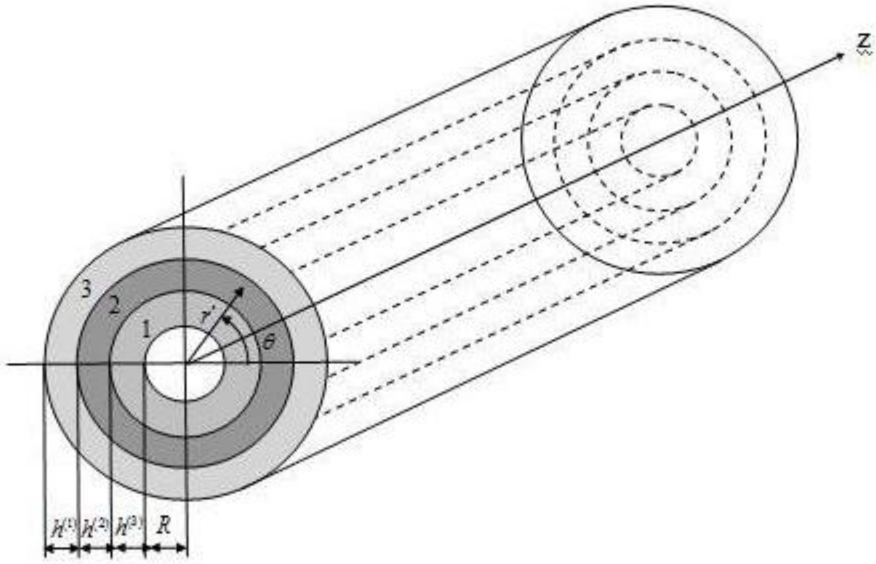
BÖLÜM 3

SONLU ÖNŞEKİLDEĞİŞTİRMESİ OLAN İÇİ BOŞ ÜÇ KATLI (SANDVİÇ) BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ DİSPERSİYONU

Bu bölümde içi boş çok (3) katlı silindir için algoritma ve programların oluşturularak sayısal çözümlerin ve grafiklerin elde edilmesi verilmektedir. Burada en içteki silindire ait büyüklükler (1) üst indisi, ortadaki silindire ait büyüklükler (2) üst indisi, dıştaki silindire ait büyüklükler ise (3) üst indisi ile gösterilmiştir. Problemin matematiksel formülasyonu, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde ÖCÜDEDYT uygulanarak oluşturulmaktadır. Öngerilmelerin dispersiyon eğrilerine etkisini gösteren sonuçlar grafikler halinde verilip yorumlanmaktadır.

3.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Yeni durumda içindeki boşluğun yarıçapı R ve sırasıyla iç, orta, dış olmak üzere et kalınlıkları $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ ve $h^{(3)}$ olan silindir katmanlarından oluşan bileşik silindir göz önüne alınmaktadır (Şekil 3.1).



Şekil 3. 1 İçi boş üç katlı (sandviç) bileşik silindir

Doğal durumda silindirlerdeki noktaların konumu $Or\theta z$ silindirik koordinat sisteminde tanımlanan Lagrange koordinatları ile verilmektedir. Silindirlere ait değerler sırasıyla iç, orta ve dış olacak şekilde (1), (2) ve (3) üst indisleriyle ifade edilmiştir. Bir önceki bölümde de olduğu gibi, öngerilmeli durumun ifade edildiği yerlerde ayrıca bir (0) üst indisi kullanılmıştır.

Silindirlerin Oz ekseni doğrultusunda sonsuz uzunlukta ve silindirde gözönüne alınan her bileşen için öngerilmelerin Oz eksenine göre simetrik ve homojen olduğu varsayılmaktadır. İç, orta ve dış silindirlerdeki ön şekil değiştirme durumları aşağıdaki yerdeğiştirmelerle tanımlanmaktadır:

$$u_r^{(k),0} = (\lambda_1^{(k)} - 1)r\,,\; u_\theta^{(k),0} = 0\,,\; u_z^{(k),0} = (\lambda_3^{(k)} - 1)z\,,\quad \lambda_1^{(k)} \neq \lambda_3^{(k)}\,,\; k = 1,2,3\,, \tag{3.1}$$

Burada, $u_r^{(k),0}$ ($u_z^{(k),0}$) radyal yöndeki (Oz ekseni yönündeki) yerdeğiştirme, $\lambda_1^{(k)}$ ve $\lambda_3^{(k)}$ ise sırası ile radyal ve Oz eksenleri yönündeki uzama parametreleridir.

Söz konusu olan ön şekil değiştirme Oz ekseni doğrultusundaki çekme veya basma nedeniyle meydana gelebilir. Burada gerilmelerin silindirlerin birleştirilmeden önce verildiğini göz önüne alabileceğimiz gibi; elde ettiğimiz sonuçlar, silindirlerin birleştirildikten sonra gerilmeye birlikte maruz kaldığı durumda da mümkün olmaktadır. Silindirlerin öngerilmeli durumu için Lagrange koordinatları $O'r'\theta'z'$ ile ilişkilendirilmektedir. Buradan:

$r' = \lambda_1^{(k)} r,\ z' = \lambda_3^{(k)} z,\ R' = \lambda_1^{(1)} R,$

$k = 1$ için $R \le r \le R + h^{(1)}$,

$k = 2$ için $R + h^{(1)} < r \le R + h^{(1)} + h^{(2)}$,

$k = 3$ için $R + h^{(1)} + h^{(2)} < r \le R + h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)}$. (3.2)

Hareket denklemi:

$$\frac{\partial}{\partial r'} Q'^{(k)}_{r'\theta} + \frac{\partial}{\partial z'} Q'^{(k)}_{z\theta} + \frac{1}{r'}\left(Q'^{(k)}_{r'\theta} + Q'^{(k)}_{\theta r'}\right) = \rho'^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u'^{(k)}_{\theta}. \tag{3.3}$$

Mekanik ilişkiler:

$$Q'^{(k)}_{z'\theta'} = \omega'^{(k)}_{1331} \frac{\partial u'^{(k)}_{\theta}}{\partial z'}, \quad Q'^{(k)}_{r'\theta} = \omega'^{(k)}_{1221} \frac{\partial u'^{(k)}_{\theta}}{\partial r'} - \omega'^{(k)}_{1212} \frac{u'^{(k)}_{\theta}}{r'},$$

$$Q'^{(k)}_{\theta r'} = \omega'^{(k)}_{2121} \frac{\partial u'^{(k)}_{\theta}}{\partial r'} - \omega'^{(k)}_{2112} \frac{u'^{(k)}_{\theta}}{r'}. \tag{3.4}$$

Burada $Q'^{(k)}_{\theta r'}$, $Q'^{(k)}_{r'\theta}$, ve $Q'^{(k)}_{z'\theta}$, kayma gerilmesi, $u'^{(k)}_{\theta}$ ise yerdeğiştirmedir. $\omega'^{(k)}_{2121}$, $\omega'^{(k)}_{1221}$, $\omega'^{(k)}_{2112}$, $\omega'^{(k)}_{1212}$ ve $\omega'^{(k)}_{1331}$ mekanik sabitleri ise iç ve dış silindirlerin malzemeleri ve öngerilmelerin durumlarına göre (2.22) formülleri aracılığıyla belirlenir. $\rho'^{(k)}$ ise k. malzemenin yoğunluğudur.

Doğrusal olmayan elastisite teorisinin, hiperelastik cisimler için önemli ilişkileri Bölüm 2. 1'de verilmiştir. Burada silindir malzemelerinin elastisite ilişkileri, (2.8) ve (2.9)'la verilen harmonik potansiyel ile ifade edilir.

Ön şekil değiştirme ve öngerilmelerin hesaplanması:

Green şekil değiştirme tensörü bileşenleri (2.10) ifadesi ile elde edilmektedir.

(3.1) ve (2.10) kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\varepsilon_{rr}^{(k),0}=\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0}=\frac{1}{2}\left(\left(\lambda_1^{(k)}\right)^2-1\right),\ \varepsilon_{zz}^{(k),0}=\frac{1}{2}\left(\left(\lambda_3^{(k)}\right)^2-1\right),\qquad k=1,2,3$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(k),0}=\varepsilon_{rz}^{(k),0}=\varepsilon_{\theta z}^{(k),0}=0. \tag{3.5}$$

(2.12) ve (2.13) ifadeleri kullanılarak ön şekil değiştirmeli durum için şu gerilme ifadeleri elde edilir:

$$s_{zz}^{(k),0}=\left[\lambda^{(k)}\left(2\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}-3\right)+2\mu^{(k)}\left(\lambda_3^{(k)}-1\right)\right]\left(\lambda_3^{(k)}\right)^{-1},\ s_{r\theta}^{(k),0}=s_{rz}^{(k),0}=s_{z\theta}^{(k),0}=0,$$

$$s_{rr}^{(k),0}=s_{\theta\theta}^{(k),0}=\left[\lambda^{(k)}\left(2\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}-3\right)+2\mu^{(k)}\left(\lambda_1^{(k)}-1\right)\right]\left(\lambda_1^{(k)}\right)^{-1}.\quad k=1,2,3 \tag{3.6}$$

Bölüm 2.1'de olduğu gibi ele alınan probleme göre (3.1) yardımı ile:

$$s_{rr}^{(k),0}=s_{\theta\theta}^{(k),0}=\left[\lambda^{(k)}\left(2\lambda_1^{(k)}+\lambda_3^{(k)}-3\right)+2\mu^{(k)}\left(\lambda_1^{(k)}-1\right)\right]\left(\lambda_1^{(k)}\right)^{-1}=0,\qquad k=1,2,3$$

yazılabilir ve buradan;

$$\lambda_1^{(k)}=\left[2-\frac{\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}}\left(\lambda_3^{(k)}-3\right)\right]\left[2\left(\frac{\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}}+1\right)\right]^{-1}. \tag{3.7}$$

elde edilir.

Lagrange gerilme ve yerdeğiştirme tensörünün fiziksel bileşenleri:

(3.1), (2.6) ve (3.6) ifadelerinden öngerilmeli durumda Kirchhoff gerilme tensörü için:

$$q_{zz}^{(k),0}=\lambda_3^{(k)}s_{zz}^{(k),0},\ q_{rr}^{(k),0}=\lambda_1^{(k)}s_{rr}^{(k),0}=0,\ q_{\theta\theta}^{(k),0}=\lambda_1^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k),0}=0,$$

$$q_{\theta r}^{(k),0}=q_{r\theta}^{(k),0}=q_{rz}^{(k),0}=q_{zr}^{(k),0}=q_{z\theta}^{(k),0}=q_{\theta z}^{(k),0}=0.\qquad k=1,2,3 \tag{3.8}$$

bulunur.

Ele alınan durum için, doğrusallaştırmanın bir sonucu olarak Green gerilme tensör bileşenlerinin pertürbasyonları için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\varepsilon_{r\theta}^{(k)}=\frac{1}{2}\lambda_1^{(k)}\left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r}-\frac{u_\theta^{(k)}}{r}\right),\qquad \varepsilon_{z\theta}^{(k)}=\frac{1}{2}\lambda_1^{(k)}\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{rr}^{(k)}=\varepsilon_{\theta\theta}^{(k)}=\varepsilon_{zz}^{(k)}=\varepsilon_{zr}^{(k)}=0.\qquad k=1,2,3 \tag{3.9}$$

$\tilde{\mathbf{s}}^{(k)}$ Lagrange gerilme tensör bileşenlerinin pertürbasyonları, (2.5) ifadesinin doğrusallaştırılmasından elde edilir. Bu doğrusallaştırılmanın bir sonucu olarak:

$$S_{r\theta}^{(k)} = \mu^{(k)} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(k)}}{r} \right), \quad S_{z\theta}^{(k)} = \mu^{(k)} \frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial z}, \quad S_{rr}^{(k)} = S_{\theta\theta}^{(k)} = S_{zz}^{(k)} = S_{rz}^{(k)} = 0. \tag{3.10}$$

(3.10) ifadesi dikkate alınarak, Kirchhoff gerilme tensörü $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$ bileşenlerinin pertürbasyonu için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$Q_{r\theta}^{(k)} = Q_{\theta r}^{(k)} = \lambda_1^{(k)} S_{r\theta}^{(k)}, \quad Q_{z\theta}^{(k)} = \lambda_1^{(k)} S_{z\theta}^{(k)} + s_{zz}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k)}}{\partial z}, \quad Q_{\theta z}^{(k)} = \lambda_3^{(k)} S_{z\theta}^{(k)}. \tag{3.11}$$

(2.7) denkleminden:

$$\frac{\partial}{\partial r} Q_{r\theta}^{(k)} + \frac{\partial}{\partial z} Q_{z\theta}^{(k)} + \frac{1}{r}\left(Q_{r'\theta}^{(k)} + Q_{\theta r'}^{(k)} \right) = \rho^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{\theta}^{(k)}. \tag{3.12}$$

(3.12) denklemini $\left(\left(\lambda_1^{(k)} \right)^2 \lambda_3^{(k)} \right)^{-1}$ ile çarparak ve

$$\rho'^{(k)} = \rho^{(k)} \left(\left(\lambda_1^{(k)} \right)^2 \lambda_3^{(k)} \right)^{-1}, \; Q'^{(k)}_{r'\theta} = Q_{r\theta}^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} \lambda_3^{(k)} \right)^{-1}, \; Q'^{(k)}_{z'\theta} = Q_{z\theta}^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-2},$$

$$u'^{(k)}_{\theta} = u_{\theta}^{(k)}, \; r' = \lambda_1^{(k)} r, \; z' = \lambda_3^{(k)} z. \tag{3.13}$$

işaretlemelerini göz önüne alarak, (3.12) denkleminden (3.3) denklemini elde etmiş oluruz.

Buradan hareketle içi boş 3 katlı bileşik silindirde burulma dalgalarının yayılımı problemi (3.3), (3.4) ve (2.22) denklemleri kullanılarak incelenecektir. Bu aşamada ele alınan problemin çözümü için aşağıdaki temas ve sınır koşullarının sağlanması gereklidir:

$$Q'^{(1)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R} = 0, \; u'^{(1)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)} = u'^{(2)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}$$

$$Q'^{(1)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)} = Q'^{(2)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)},$$

$$Q'^{(2)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)+\lambda_1^{(2)}h^{(2)}} = Q'^{(3)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)+\lambda_1^{(2)}h^{(2)}},$$

$$u'^{(2)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)+\lambda_1^{(2)}h^{(2)}} = u'^{(3)}_{\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)+\lambda_1^{(2)}h^{(2)}},$$

$$Q'^{(3)}_{r\theta}\Big|_{r'=\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)+\lambda_1^{(2)}h^{(2)}+\lambda_1^{(3)}h^{(3)}} = 0\,. \tag{3.14}$$

Bu sayede ele alınan dalga yayılım problemimiz (3.3), (3.4), (2.22) denklemleri ve (3.14) koşulları ile belirlenen bir özdeğer problemine dönüşmektedir. Bu arada $\lambda_1^{(k)} = \lambda_3^{(k)} = 1.0$ durumunda, silindirin bileşenleri için ön şekil değiştirmelerin olmadığı ve bu durumun klasik doğrusal elastodinamik teorisi ile çakıştığı dikkate alınmalıdır.

3.2 Çözüm Yöntemi

Guz'a [38] göre, (3.3) ve (3.4) denklemlerinin çözümü için aşağıdaki ifade kullanılır:

$m = 1, 2, 3,$

$$u'^{(m)}_{\theta}(r', z', t) = -\frac{\partial}{\partial r'}\Psi^{(m)}(r', z', t) \tag{3.15}$$

(3.15)'deki $\Psi^{(m)}$ aşağıdaki denklemi sağlayacaktır:

$$\left[\Delta' + \left(\xi'^{(m)}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\rho'}{\omega'_{1221}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Psi = 0\,, \tag{3.16}$$

Burada:

$$\Delta' = \frac{d^2}{dr'^2} + \frac{1}{r'}\frac{d}{dr'}, \quad \left(\xi'^{(m)}\right)^2 = \frac{2\left(\lambda_3^{(m)}\right)^3}{\left(\lambda_1^{(m)}\right)^2\left(\lambda_1^{(m)} + \lambda_3^{(m)}\right)}\,. \tag{3.17}$$

Problem ifadesine göre:

$$\Psi^{(m)}(r', z', t) = \psi^{(m)}\left(r'\right)\exp(i(kz' - \omega t)) \tag{3.18}$$

Buradan bilinmeyen fonksiyon $\psi^{(m)}\left(r'\right)$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left[\frac{d^2}{dr'^2} + \frac{1}{r'}\frac{d}{dr'} - \left(k^2\left(\xi'^{(m)}\right)^2 - \frac{\rho'^{(m)}\omega^2}{\omega'^{(m)}_{1221}}\right)\right]\psi^{(m)}\left(r'\right) = 0\,. \tag{3.19}$$

Bu notasyona göre:

$$\left(s^{(m)}\right)^2=\left(k^2\left(\xi'^{(m)}\right)^2-\frac{\rho'^{(m)}\,\omega^2}{\omega'^{(m)}_{1221}}\right) \tag{3.20}$$

(3.18)'in çözümü aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\psi'^{(m)}(r')=A^{(m)}J_0\left(s^{(m)}kr'\right)+B^{(m)}Y_0\left(s^{(m)}kr'\right)\ \text{ eğer }\left(s^{(m)}\right)^2>0;\ m=1,2,3$$

$$\psi'^{(m)}(r')=A^{(m)}I_0\left(s^{(m)}kr'\right)+B^{(m)}K_0\left(s^{(m)}kr'\right),\ \text{ eğer }\left(s^{(m)}\right)^2<0, \tag{3.21}$$

Burada $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ sıfırıncı mertebeden birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonları, $I_0(x)$ ve $K_0(x)$ ise sırasıyla, sıfırıncı mertebeden modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu ve Macdonald fonksiyonlardır.

3.3 İçi Boş Üç Katlı Bileşik Silindirin Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

(3.4), (2.22), (3.15), (3.18) ve (3.21) ifadeleri ile temas ve sınır koşulları (3.14) kullanılarak oluşturulan denklem takımının katsayılar determinantının sıfıra eşit olması, dispersiyon denklemini oluşturmaktadır. Bu sayede (3.22)'de verilen dispersiyon denklemi elde edilmektedir. İçi boş üç katlı bileşik silindir için söz konusu determinant 6x6 boyutundadır:

$$\det\left\|\alpha_{ij}\right\|=0,\ \ i;j=1,2,3,4,5,6 \tag{3.22}$$

(3.22)'deki determinantın bileşenleri, yani α_{ij}'ler aşağıdaki biçimde belirlenmektedir.

$$\alpha_{11}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\right)-J_2\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R)}{s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R}\right\}\ ,\text{ eğer }\left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2>0,$$

$$\alpha_{11}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\right)+I_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\right)\right]+\frac{\mathrm{I}_1(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R}\right\},\text{ eğer }\left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2<0,$$

$$\alpha_{12}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\right)-Y_2\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R)}{s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R}\right\},\text{ eğer }\left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2>0,$$

$$\alpha_{12}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\frac{1}{2}\ \left[\ \mathrm{K}_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\right)+K_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\right)\right]+\frac{\mathrm{K}_1(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R}\right\}, \text{ eğer } \left(\mathrm{s}^{(1)}\right)^2<0,$$

$\alpha_{13}=0$, $\alpha_{14}=0$, $\alpha_{15}=0$, $\alpha_{16}=0$, $\alpha_{25}=0$, $\alpha_{26}=0$,

$\alpha_{21}=\ s^{(1)}\mathrm{J}_1\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(1)}\right)^2>0$;

$\alpha_{21}=-\left|s^{(1)}\right|\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(1)}\right)^2<0$,

$\alpha_{22}=\ s^{(1)}\mathrm{Y}_1\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(1)}\right)^2>0$;

$\alpha_{22}=-\left|s^{(1)}\right|\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(1)}\right)^2<0$,

$\alpha_{23}=-s^{(2)}\mathrm{J}_1\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(2)}\right)^2>0$;

$\alpha_{23}=\left|s^{(2)}\right|\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(2)}\right)^2<0$,

$\alpha_{24}=-s^{(2)}\mathrm{Y}_1\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(2)}\right)^2>0$;

$\alpha_{24}=\left|s^{(2)}\right|\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)$, eğer $\left(s^{(2)}\right)^2<0$,

$$\alpha_{31}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\ \mathrm{J}_0\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)-J_2\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)}{s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(1)}\right)^2>0$;

$$\alpha_{31}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\frac{1}{2}\ \left[\ \mathrm{I}_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)+I_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)\right]+\frac{\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(1)}\right)^2<0$,

$$\alpha_{32}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\ \mathrm{Y}_0\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)-Y_2\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)\right]-\frac{\mathrm{Y}_1\left(s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)}{s^{(1)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(1)}\right)^2>0$;

$$\alpha_{32}=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}}\left\{-\frac{1}{2}\;\left[\;\mathrm{K}_0\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)+K_2\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{K_1\left(\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\left|s^{(1)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\}$$, eğer $\left(s^{(1)}\right)^2<0$,

$$\alpha_{33}=-\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\;\mathrm{J}_0\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)-J_2\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1\left(\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)}{\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}}\right\},$$

eğer $\left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0$;

$$\alpha_{33}=-\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\frac{1}{2}\;\left[\;\mathrm{I}_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)+I_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(1)}\right)\right]+\frac{\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(1)}\right)^2<0$;

$$\alpha_{34}=-\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\;\mathrm{Y}_0\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)-Y_2\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)\right]-\frac{\mathrm{Y}_1\left(\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)}{\mathrm{s}^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}}\right\},$$

eğer $\left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2>0$;

$$\alpha_{34}=-\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\frac{1}{2}\;\left[\;\mathrm{K}_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(1)}\right)+K_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(1)}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\left(1+h^{(1)}/R\right)}\right\},$$

eğer $\left(\mathrm{s}^{(2)}\right)^2<0$,

$\alpha_{35}=0$, $\alpha_{36}=0$, $\alpha_{41}=0$, $\alpha_{42}=0$,

$$\alpha_{43}=\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\;\mathrm{J}_0\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)-J_2\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(2)}\right)^2>0$;

$$\alpha_{43} = \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)+I_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(2)}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},\ \text{eğer } \left(s^{(2)}\right)^2 < 0,$$

$$\alpha_{44} = \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)-Y_2\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)\right]-\frac{\mathrm{Y}_1\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(2)}\right)^2 > 0$;

$$\alpha_{44} = \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{K}_0\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)+K_2\left(\left|s^{(2)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(2)}\right)\right]+\frac{\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(2)}\right)^2 < 0$,

$$\alpha_{45} = -\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)-J_2\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(3)}\right)^2 > 0$;

$$\alpha_{45} = -\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)+I_2\left(\left|s^{(3)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(2)}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},\ \text{eğer } \left(s^{(3)}\right)^2 < 0,$$

$$\alpha_{46} = -\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)-Y_2\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)\right]-\frac{\mathrm{Y}_1\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(3)}\right)^2 > 0$;

$$\alpha_{46} = -\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{K}_0\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)+K_2\left(\left|s^{(3)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(2)}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\}\ \text{, eğer } \left(s^{(3)}\right)^2<0,$$

$\alpha_{51}=0$, $\alpha_{52}=0$,

$\alpha_{53}=s^{(2)}\mathrm{J}_1\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$, eğer $\left(s^{(2)}\right)^2>0$;

$\alpha_{53}=-\left|s^{(2)}\right|\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$, eğer $\left(s^{(2)}\right)^2<0$,

$\alpha_{54}=s^{(2)}\mathrm{Y}_1\left(s^{(2)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$ eğer $\left(s^{(2)}\right)^2>0$;

$\alpha_{54}=-\left|s^{(2)}\right|\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(2)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$, eğer $\left(s^{(2)}\right)^2<0$,

$\alpha_{55}=-s^{(3)}\mathrm{J}_1\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$ eğer $\left(s^{(3)}\right)^2>0$;

$\alpha_{55}=\left|s^{(3)}\right|\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$, eğer $\left(s^{(3)}\right)^2<0$,

$\alpha_{56}=-s^{(3)}\mathrm{Y}_1\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$ eğer $\left(s^{(3)}\right)^2>0$;

$\alpha_{56}=-\left|s^{(3)}\right|\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)$, eğer $\left(s^{(3)}\right)^2<0$,

$\alpha_{61}=0$, $\alpha_{62}=0$, $\alpha_{63}=0$, $\alpha_{64}=0$,

$$\alpha_{65}=\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)-J_2\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)\right]-\frac{\mathrm{J}_1\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)}{s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(3)}\right)^2>0$;

$$\alpha_{65}=\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_0\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)+I_2\left(\left|s^{(3)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(3)}\right)\right]+\frac{\mathrm{I}_1\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(3)}\right)^2<0$,

$$\alpha_{66}=\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_0\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)-Y_2\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)\right]-\frac{\mathrm{Y}_1\left(s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)}{s^{(3)}k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(3)}\right)^2 > 0$;

$$\alpha_{66} = \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathrm{K}_2\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(3)}\right)+K_2\left(\left|s^{(3)}\right|\lambda_1^{(1)}kR\eta^{(3)}\right)\right]+\frac{\mathrm{K}_1\left(\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}\right)}{\left|s^{(3)}\right|k\lambda_1^{(1)}R\eta^{(2)}}\right\},$$

eğer $\left(s^{(3)}\right)^2 < 0$, (3.23)

3.3.1 Asimptotik Yaklaşım

İçi boş üç katlı bileşik silindir için burulma dalgalarının birinci modunun, dalga boyunun çok büyük olduğu, $kR \to 0$ durumunda limit değerini veren analitik ifadenin elde edilmesi için, (3.22) determinantı Bessel fonksiyonlarının seri açılımlarından yararlanılarak $kR \to 0$ koşulu altında seriye açılmalıdır.

Bunun için ilk olarak (3.22)'nin açık ifadesinde, α_{ij}'lerin aşağıda verilen ifadeleri yerlerine koyulmalıdır.

$$\alpha_{11} = -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} J_2\left(x_5\right),$$

$$\alpha_{12} = -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} Y_2\left(x_5\right),$$

$$\alpha_{13} = 0,\ \alpha_{14} = 0\ ,\alpha_{15} = 0,\ \alpha_{16} = 0,$$

$$\alpha_{21} = \mathrm{J}_1\left(x_1\right),$$

$$\alpha_{22} = Y_1\left(x_1\right),$$

$$\alpha_{23} = -\frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}} J_1\left(x_2\right),$$

$$\alpha_{24} = -\frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}} Y_1\left(x_2\right),$$

$$\alpha_{25} = 0,\ \alpha_{26} = 0,$$

$$\alpha_{31} = -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} J_2\left(x_1\right),$$

$$\alpha_{32} = -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} Y_2\left(x_1\right),$$

$$\alpha_{33} = -\frac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2\left[-J_2\left(x_2\right)+\frac{J_1(x_2)}{x_2}\right]-\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\frac{J_1(x_2)}{x_1}\right\},$$

$$\alpha_{34} = -\frac{1}{\lambda_3^{(2)}}\left\{\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2\left[-Y_2\left(x_2\right)+\frac{Y_1(x_2)}{x_2}\right]-\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\frac{Y_1(x_2)}{x_1}\right\},$$

$\alpha_{35} = 0$， $\alpha_{36} = 0$， $\alpha_{41} = 0$， $\alpha_{42} = 0$

$$\alpha_{43} = -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} J_2\left(x_3\right),$$

$$\alpha_{44} = -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} Y_2\left(x_3\right),$$

$$\alpha_{45} = -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}}\left\{\left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\right)^2\left[-J_2\left(x_4\right)+\frac{J_1(x_4)}{x_4}\right]-\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\frac{J_1(x_4)}{x_3}\right\},$$

$$\alpha_{46} = -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}}\left\{\left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\right)^2\left[-Y_2\left(x_4\right)+\frac{Y_1(x_4)}{x_4}\right]-\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\frac{Y_1(x_4)}{x_3}\right\},$$

$\alpha_{51} = 0$， $\alpha_{52} = 0$

$$\alpha_{53} = J_1\left(x_3\right),$$

$$\alpha_{54} = Y_1\left(x_3\right),$$

$$\alpha_{55} = -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} J_1\left(x_4\right),$$

$$\alpha_{56} = -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} Y_1\left(x_4\right),$$

$\alpha_{61} = 0$， $\alpha_{62} = 0$， $\alpha_{63} = 0$， $\alpha_{64} = 0$

$$\alpha_{65} = -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} J_2\left(x_6\right),$$

$$\alpha_{66} = -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} Y_2\left(x_6\right) \quad , \tag{3.24}$$

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{s}^{(1)} \kappa R \lambda_2^{(1)} \left(1 + \frac{h_1}{R}\right), \qquad \mathrm{x}_2 = \mathrm{s}^{(2)} \kappa R \lambda_2^{(1)} \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)$$

$$\mathrm{x}_3 = \mathrm{s}^{(2)} \kappa R \lambda_2^{(2)} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R}\right), \qquad \mathrm{x}_4 = \mathrm{s}^{(3)} \kappa R \lambda_2^{(2)} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R}\right)$$

$$\mathrm{x}_5 = \mathrm{s}^{(1)} \kappa R \lambda_2^{(1)}, \qquad \mathrm{x}_6 = \mathrm{s}^{(3)} \kappa R \lambda_2^{(3)} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R}\right) \tag{3.25}$$

Bu denklemi $\kappa R \to 0$’da seriye açmak için, Bessel fonksiyonlarının $x << 1$ için değerleri (2.40) ve (2.41)’de verilmiştir.

(2.41) numaralı eşitlikler, (3.24) ifadelerinin içine koyulup sadece α_{ij}’lerin seri açılımlarındaki ilk terimleri göz önüne alınırsa, aşağıdaki yaklaşık ifadeler elde edilir.

$$\alpha_{11} \approx -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \frac{x_5^2}{8}$$

$$\alpha_{12} \approx \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \frac{4}{\pi x_5^2}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \alpha_{16} = 0,$$

$$\alpha_{21} \approx \frac{\mathrm{x}_1}{2}$$

$$\alpha_{22} \approx -\frac{2}{\pi \mathrm{x}_1}$$

$$\alpha_{23} \approx -\frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}} \frac{\mathrm{x}_2}{2}$$

$$\alpha_{24} \approx \frac{\mathrm{s}^{(2)}}{\mathrm{s}^{(1)}} \frac{2}{\pi \mathrm{x}_2}$$

$$\alpha_{25} = \alpha_{26} = 0,$$

$$\alpha_{31} \approx -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \frac{x_1^2}{8}$$

$$\alpha_{32} \approx \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \frac{4}{\pi x_1^2}$$

$$\alpha_{33} \approx -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \left[-\frac{x_2^{\ 2}}{8} + \frac{1}{2} \right] - \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \frac{x_2}{2x1} \right\}$$

$$\alpha_{34} \approx -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \left[-\frac{2}{\pi x_2^{\ 2}} \right] + \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \frac{2}{2\pi x1 x_2} \right\}$$

$$\alpha_{35} = \alpha_{36} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0$$

$$\alpha_{43} \approx -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \frac{x_3^2}{8}$$

$$\alpha_{44} \approx \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \frac{4}{\pi x_3^2}$$

$$\alpha_{45} \approx -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[-\frac{x_4^{\ 2}}{8} + \frac{1}{2} \right] - \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \frac{x_4}{2x_3} \right\}$$

$$\alpha_{46} \approx -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{2}{\pi x_4^{\ 2}} \right] + \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \frac{2}{\pi x_3 x_4} \right\}$$

$$\alpha_{53} \approx \frac{x_3}{2}$$

$$\alpha_{54} \approx -\frac{2}{\pi x_3}$$

$$\alpha_{55} \approx -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \frac{x_4}{2}$$

$$\alpha_{56} \approx \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \frac{2}{\pi x_4}$$

$$\alpha_{51} = \alpha_{52} = \alpha_{61} = \alpha_{62} = \alpha_{63} = \alpha_{64} = 0$$

$$\alpha_{65} \approx \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \frac{x_6^2}{8}$$

$$\alpha_{66} \approx \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \frac{4}{\pi x_6^2} \tag{3.26}$$

(3.6) ve (3.7)'ye göre çok katlı bileşik silindirin her bileşeni için gerilme-şekil değiştirme durumu $\lambda_3^{(k)}$ ve $\lambda^{(k)}/\mu^{(k)}$ parametrelerinden elde edilmektedir. Eğer bileşik silindirdeki öngerilmelerin, her bir katı birleştirdikten sonra oluştuğu göz önüne alınırsa:

$$\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)}, \; \lambda^{(1)}/\mu^{(1)} = \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)} = 1.5 \tag{3.27}$$

Koşulları çerçevesinde de bu gerilmeler homojen, yani koordinatlardan bağımsız olacaklardır. Dalga yayılım hızını $c\left(=\omega/k\right)$ ile işaret edelim; burada k dalga sayısını, ω frekansı göstermektedir. Bunlardan başka,

$$c_{20}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu^{(m)}}{\rho^{(m)}}}, \quad c_2^{(m)} = c_2^{(m)}\left(\lambda_3^{(m)}\right) = c_{20}^{(m)}\left[\frac{2\lambda_3^{(m)}}{\left(\lambda_2^{m}\right)^3 \lambda_1^{(m)}\left(\lambda_3^{(m)} + \lambda_2^{(m)}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.28}$$

İşaretlemeleri de kabul edilir.

Burada $c_2^{(m)}\left(\lambda_3^{(m)}\right)$ aşağıdaki ilişkiden elde edilmektedir:

$$c_2^{(m)}\left(\lambda_3^{(m)}\right) = \left[\frac{\left(\xi'^{(m)}\right)^2 \omega'^{(m)}_{1221}}{\rho'^{(m)}}\right]^{\frac{1}{2}} \text{'dir.} \tag{3.29}$$

$kR \to 0$ **düşük dalga sayısı limit değerleri:**

Burada (3.26) yaklaşık ifadelerini (3.22) dispersiyon denkleminde yerine yazıp, (3.22)'deki determinantın açık biçimde yaklaşık ifadesini elde ettikten, bu ifadeden $kR \to 0$ limitine geçtikten ve bir sıra matematiksel işlemler yapıldıktan sonra, düşük dalga sayısı limit değerleri için aşağıdaki hız formülü elde edilir:

$$\frac{c}{c_{20}^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}}\left(\xi'^{(1)}\right)^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}}\alpha\left(\xi'^{(2)}\right)^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_2^{(3)}}\beta\left(\xi'^{(3)}\right)^2}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha\left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}}\right)^2 + \mu^{(3)}\beta\left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(3)}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.30}$$

$$\alpha=\frac{\left(\lambda_2^{(2)}\right)^4\left(\eta^{(2)}\right)^4-\left(\lambda_2^{(1)}\right)^4\left(\eta^{(1)}\right)^4}{\left(\lambda_2^{(1)}\right)^4\left(\left(\eta^{(1)}\right)^4-1\right)},\ \beta=\frac{\left(\lambda_2^{(3)}\right)^4\left(\eta^{(3)}\right)^4-\left(\lambda_2^{(2)}\right)^4\left(\eta^{(2)}\right)^4}{\left(\lambda_2^{(1)}\right)^4\left(\left(\eta^{(1)}\right)^4-1\right)}. \tag{3.31}$$

(3.29) ve (3.30)'daki $\xi'^{(m)}$, (3.17) ifadesi yardımıyla hesaplanmaktadır.

$\eta^{(k)}$ ($k=1,2,3$) ifadeleri ise:

$$\eta^{(1)}=1+\frac{h^{(1)}}{R},\ \eta^{(2)}=1+\frac{h^{(1)}}{R}+\frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_1^{(1)}}\frac{h^{(2)}}{R},\ \eta^{(3)}=1+\frac{h^{(1)}}{R}+\frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_1^{(1)}}\frac{h^{(2)}}{R}+\frac{\lambda_1^{(3)}}{\lambda_1^{(1)}}\frac{h^{(3)}}{R}. \tag{3.32}$$

$\mu^{(3)}=0$ durumunda (3.30) ifadesi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\frac{c}{c_{20}^{(1)}}=\left[\frac{\dfrac{\mu^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}}\left(\xi'^{(1)}\right)^2+\dfrac{\mu^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}}\alpha\left(\xi'^{(2)}\right)^2}{\mu^{(1)}+\mu^{(2)}\alpha\left(\dfrac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.33}$$

$\lambda_3^{(k)}=\lambda_1^{(k)}=1.0\ \left(k=1,2,3\right)$ olduğu durumda, örneğin öngerilmeler bileşik silindirde olmadığı zaman (3.33) ifadesi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\frac{c}{c_{20}^{(1)}}=\left[\frac{\mu^{(1)}+\mu^{(2)}\alpha_1}{\mu^{(1)}+\mu^{(2)}\alpha_1\left(\dfrac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}},\ \alpha_1=\alpha\Big|_{\lambda_1^{(2)}=\lambda_1^{(1)}=1.0}. \tag{3.34}$$

Elde edilen (3.33) ifadesi ilgili makaledekiyle [9] örtüşmektedir. Ayrıca (3.33) asimptotik ifadesi, [45] makalesindeki uygun ifadenin sonlu ön şekil değiştirme durumu için bir genellemedir.

$kR\to\infty$ yüksek dalga sayısı limit değerleri:

Dispersiyon denklemlerinin (3.22) $kR\to\infty$ için asimptotik analizleri;

$$c\to\min\left\{c_2^{(1)}\left(\lambda_3^{(1)}\right);c_2^{(2)}\left(\lambda_3^{(2)}\right);c_2^{(3)}\left(\lambda_3^{(3)}\right)\right\} \tag{3.35}$$

olduğunu göstermektedir. Bu sonuç sayısal hesaplamalarla da doğrulanmaktadır.

$c_2^{(m)}\left(\lambda_3^{(m)}\right)\ \left(k=1,2,3\right)$ değerleri, (3.29) ifadesinden elde edilmektedir.

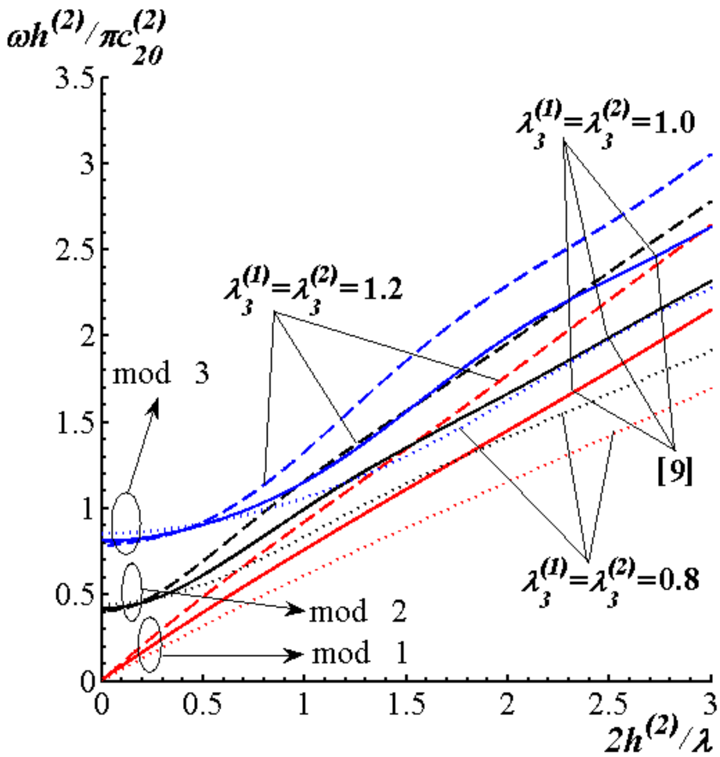
3.3.2 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

İçi boş üç katlı bileşik silindirde burulma dalgalarının yayılımı için dispersiyon denklemlerinin (3.22) çözümünden elde edilen sayısal sonuçları karşılaştırabileceğimiz, önceden hesaplanmış veriler yoktur. Bu konuda genel olarak, klasik doğrusal elastodinamik teorisi ışığı altında yapılmış çok az çalışma [52,53] mevcuttur. Ancak bu yayınlarda silindir katmanlarını oluşturan maddeler ortotropik ve bizim çalışmamızda isotropik olduğu için elde edilen algoritmanın sağlamasını bahsi geçen yayınlardaki sonuçlara göre yapamıyoruz. Buna karşın biz bu çalışmadaki algoritmamızı [9,49] makalelerindeki sonuçlarla karşılaştırabiliyoruz ([49]'daki sonuçların, çok katlı bileşik silindirlerde küçük ön şekil değiştirmeler olması durumunda elde edildiğine dikkat edilmelidir).

Bulduğumuz dispersiyon denkleminin sağlamasını yapmak için ele alınan değerlerin, [9] makalesindeki değerlerle aynı olması sağlanmış ($\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=1$, $\rho^{(2)}/\rho^{(1)}=0.5$, $h^{(1)}/R=0.2$, $(h^{(2)}+h^{(3)})/R=0.2$) ve $\omega h^{(2)}/\left(\pi c_{20}^{(2)}\right)$ ile $2h^{(2)}/\lambda$ arasındaki ilişkiye bakılarak sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır (λ dalga boyu). Bulduğumuz dispersiyon denkleminin çözümünden elde edilen dispersiyon eğrileri, çeşitli uzama katsayısı $\lambda_3(=\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(2)}=\lambda_3^{(3)})$ değerleri ve en düşük 3 mod için Şekil 3.2'de çizdirilmiş ve silindir katmanlarında ön şekil değiştirmelerin olmadığı $\lambda_3^{(1)}=1$ durumunda bahsi geçen [9] makale ile sonuçların birebir örtüştüğü görülmüştür ([9]'daki uygun sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek için 3 katlı modelde $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=1$ seçilerek modelin, içi boş 2 katlı silindir gibi davranması sağlanmıştır).

Ek olarak yine Şekil 3.2.'de görüldüğü gibi genel olarak önçekme (önbasınç) içi boş çok katlı bileşik silindirlerde dalga yayılım hızını artırmaktadır (azaltmaktadır). Bu sonuç içi boş iki katlı silindirde 1. mod için her durumda geçerliyken, 2. ve 3. modlarda $kR\to 0$ durumu için bozulmaktadır. 2. ve 3. modlarda silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkisi boyutsuz dalga sayısı olan kR'ye bağlıdır. Burada kR'nin özel bir değeri vardır $\left((kR)_*\right)$ ve $kR<(kR)_*$ $\left(kR>(kR)_*\right)$ durumlarında öncekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını azaltırken (artırmaktadır).

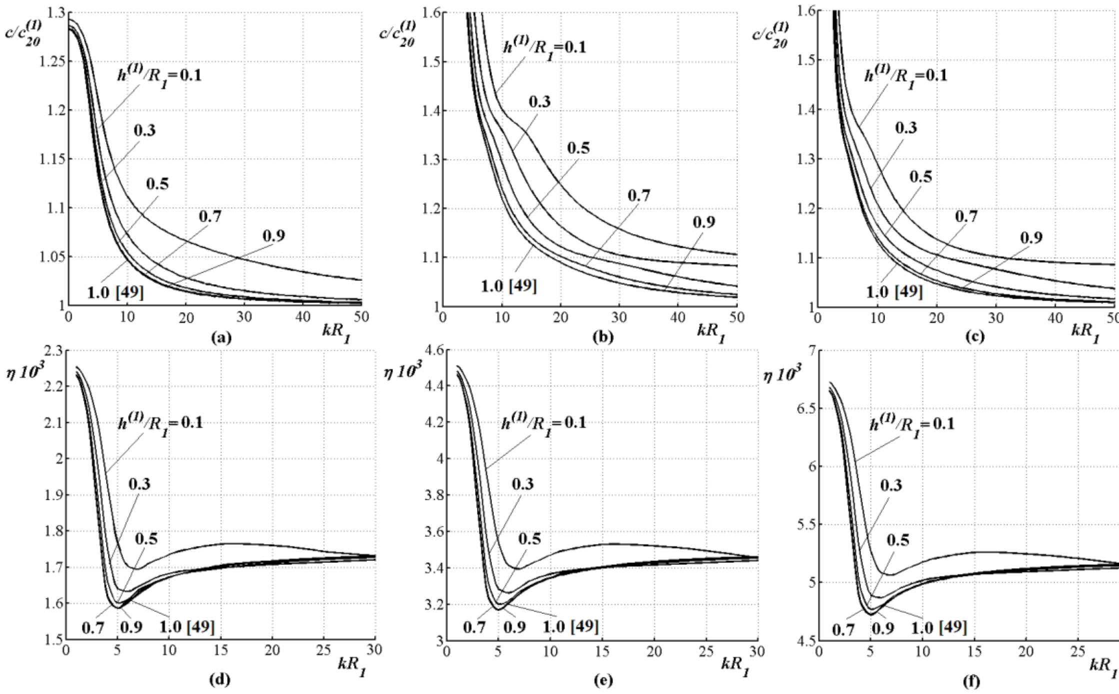
İkinci olarak, dispersiyon denkleminin çözülmesinden ortaya çıkan sonuçlarla [49] makalesinde karşılık gelen uygun sonuçlar karşılaştırılmıştır. Burada [49]'da olduğu gibi $R_1 = R + h^{(1)}$ ve $\rho^{(1)} = 7.20\, g/cm^3$, $\mu^{(1)} = 3.38\, MPa$, $\rho^{(2)} = 7.20\, g/cm^3$, $\mu^{(2)} = 4.47\, MPa$, $\rho^{(3)} = 7.795\, g/cm^3$, $\mu^{(3)} = 7.75\, MPa$, $h^{(2)}/R_1 = h^{(3)}/R_1 = 0.5$'dir.



Şekil 3. 2 Mevcut çalışmada kullanılan algoritmanın sonuçları ile [9]'daki sonuçların karşılaştırılması

Şekil 3.3'de verilen a (mod 1), b (mod 2), c (mod 3), silindir katmanlarında ön şekil değiştirmelerin olmadığı durumda çeşitli $h^{(1)}/R_1$ değerleri için oluşturulmuş dispersiyon eğrileridir. Şekil 3.3(a-c) dispersiyon eğrilerini karşılaştırdığımız [49] makalesindeki silindir, "içi dolu silindir + kalınlığı $h^{(2)}$ olan içi boş silindir + kalınlığı $h^{(3)}$ olan içi boş silindir" şeklindeki bir çok katlı bileşik silindirdir. Ayrıca bu çalışmada elde edilen sonuçlarla, [49] makalesinde silindir bileşenlerindeki ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu durumda elde edilen uygun sonuçların karşılatırıldığı göz önünde bulunudurulmalıdır. Burada $\psi^{(k)} = s_{zz}^{(k),0} / \mu^{(k)}$ ($\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \psi^{(3)} (= \psi)$) ve küçük ön şekil değiştirmelerin dalga yayılım hızı üzerindeki etkilerini ifade ettiğimiz

$\eta = (c|_{\psi>0} - c|_{\psi=0}) / c_{20}^{(1)}$ parametreleri verilmektedir. Çeşitli $h^{(1)}/R_1$ değerleri için η ve kR arasındaki ilişki de Şekil 3.3 (d-f)'de verilmiştir. Bilinen mekanik yaklaşıma göre, mevcut çalışmada $h^{(1)}/R_1$ ile elde edilmiş sonuçların, [49]'da incelenen ve 3 katmandan oluşan sistem için elde edilen sonuçlara yaklaşması gereklidir. Şekil 3.3'de verilen grafiklerde, elde edilen sayısal sonuçların bu mekanik önermeyi sağladığı görülmüştür. Ayrıca bu durum kullanılan algoritmanın doğruluğunu da kanıtlamaktadır.



Şekil 3. 3 Mevcut çalışmada kullanılan algoritma ile elde edilmiş sonuçlar ile [49]'daki uygun sonuçların karşılaştırılması; mod 1 (a), mod 2 (b), mod 3 (c) dispersiyon eğrileri ve ψ = 0.004 (d), 0.008 (e) ve 0.012 (f) iken küçük şekil değiştirmelerin 1. modda dalga yayılım hızına etkileri.

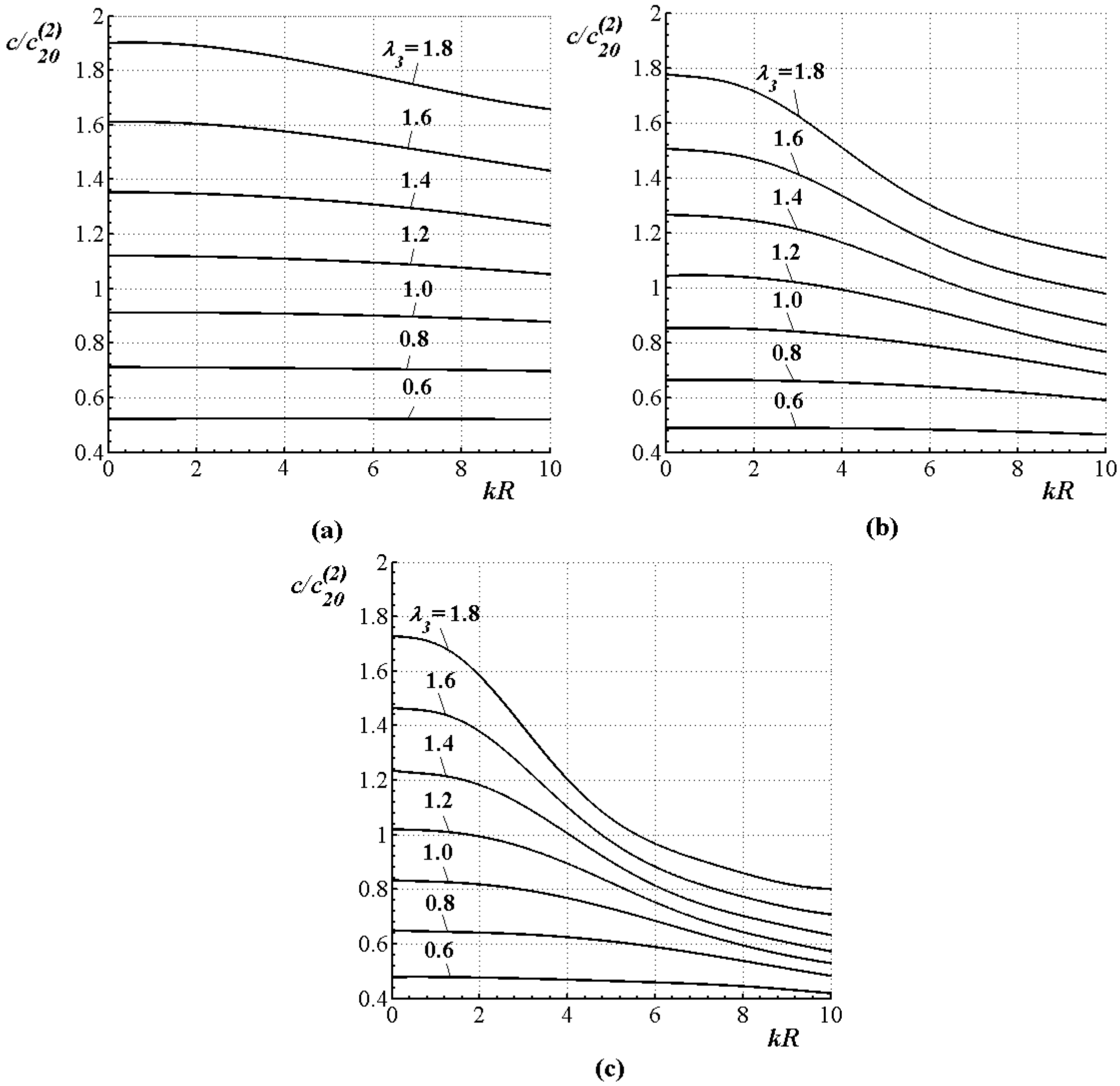
Yukarıda verilen karşılaştırmalar, bu çalışmada kullanılan analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinin doğruluğunu kanıtlamaktadır. Bundan sonraki aşamada bu çalışmadaki çok katlı bileşik silindir için elde edilen $c/c_{20}^{(2)}$ ve kR değerlerinin arasındaki ilişkiye bakılacaktır.

$h^{(1)} = h^{(3)}$, $\rho^{(1)} = \rho^{(3)}$, $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = \rho^{(2)}/\rho^{(3)} = 1$, $\mu^{(1)} = \mu^{(3)}$ ve $\mu^{(2)} > \mu^{(1)} \left(= \mu^{(3)}\right)$ olan durum ele alınırken, aksi belirtilmedikçe $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)} = \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)} = 1.5$'dir.

Üç katlı bileşik silindirde orta katman malzemesinin, dıştaki katman malzemelerine oranla daha sert olması durumu:

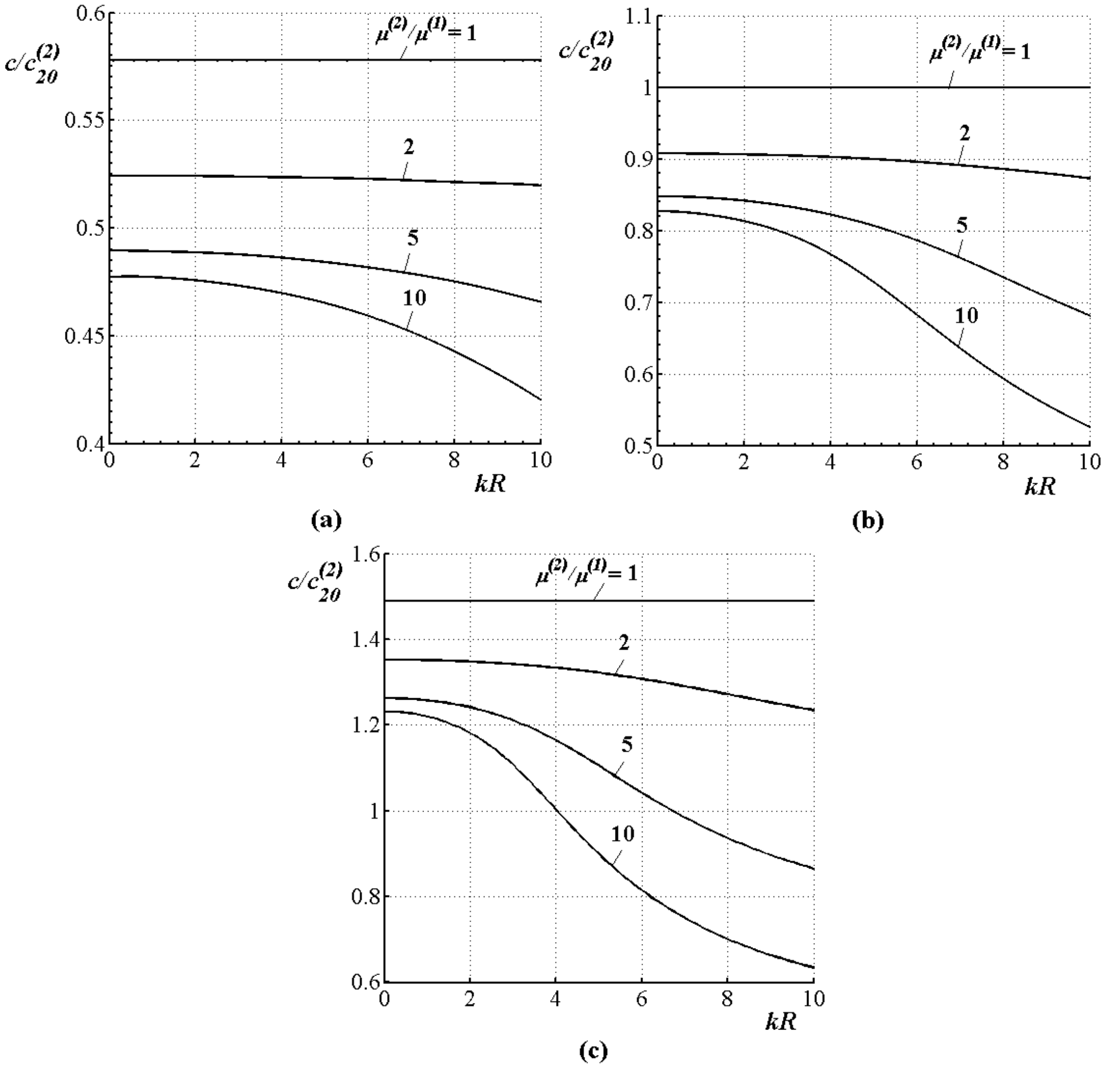
Burada öncelikle silindir bileşenlerindeki ön şekil değiştirmeleri karakterize eden λ_3'ün tüm bileşenlerde ve eşit olduğu $\lambda_3 (= \lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)})$ durumu incelenmiştir. Şekil 3.4 çeşitli λ_3 değerleri için $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 2$ (a), 5 (b) ve 10 (c) durumlarında elde edilen 1. mod dispersiyon egrilerini göstermektedir. Bu sonuçlara göre bileşik silindirin katmanlarındaki öncekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır). Şekil 3.4'teki değerlerin, $kR \to 0$ için (3.30) denkleminden elde edilen $c/c_{20}^{(2)}$ değerlerle örtüşmesi, elde edilen verileri doğrulamaktadır. Bu sonuçlar aynı zamanda $c/c_{20}^{(2)}$ değerlerinin, $kR \to \infty$ iken (3.28) denkleminden hesaplanan $c_2^{(1)}(\lambda_3)\left(= c_2^{(3)}(\lambda_3)\right)$ değerleri ile örtüştüğünü de göstermektedir.

Şekil 3.4'te verilen grafiklere göre kR'ye bağlı olarak $c/c_{20}^{(2)}$ hız değerlerinde olan değişiklikler, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ ile $d\left(c/c_{20}^{(2)}\right)/d\left(kR\right)$ değerlerinde belirgin artımlara sebep olmaktadır. Bu durum Şekil 3.5'te $\lambda_3 = 0.6$ (a), $\lambda_3 = 1.0$ (b) ve $\lambda_3 = 1.4$ (c) iken $h^{(2)}/R = 0.4$, $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$ durumunda 1. mod için oluşturulan grafiklerde açıkça görülmektedir. Burada $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 1$ durumunda (silindir katmanlarının malzemelerinin aynı olması durumu), burulma dalgası için ilk modun dispersif olmadığı dikkate alınmalıdır. Bu durum elastodinamiğin klasik doğrusal teorisiyle açıklandığı gibi, Şekil 3.5'te de görülmektedir.



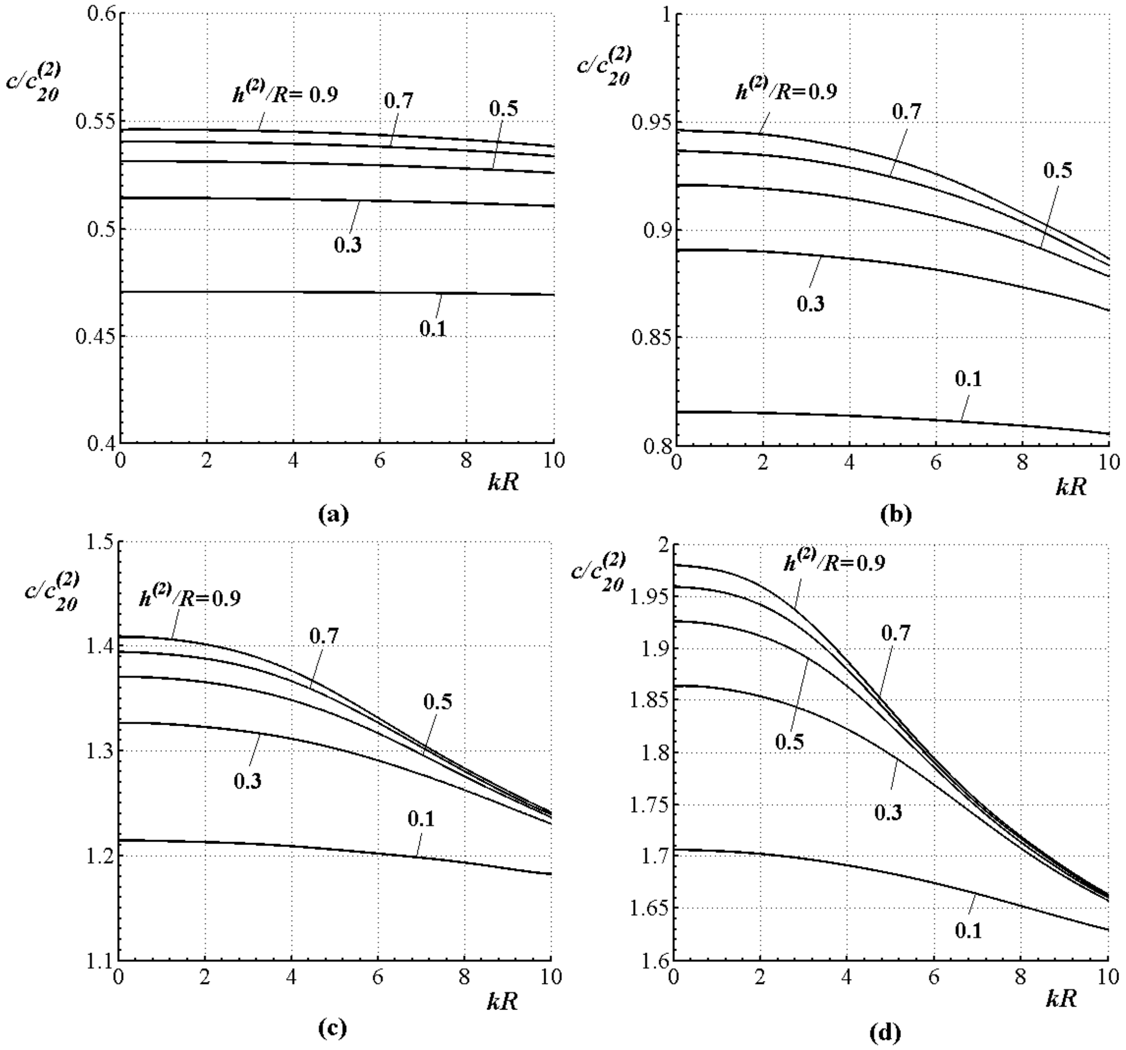
Şekil 3. 4 1. mod ve $(\mu^{(2)}/\mu^{(1)})=(\mu^{(2)}/\mu^{(3)})=2(a),5(b),10(c)$, $h^{(2)}/R=0.4$, $h^{(1)}/R=$ $h^{(3)}/R=0.1$ koşulları altında, ön şekil değiştirmelerin dispersiyon eğrilerine etkisi.

Şekil 3.5 aynı zamanda $c_{20}^{(2)}>c_{20}^{(1)}$ durumunda $c/c_{20}^{(2)}$ değerleri $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ ile azaldığını göstermektedir. Bilinen mekanik kabule göre $c/c_{20}^{(2)}$ değerleri $h^{(2)}/R$ ile artmalıdır (örneğin silindirin orta katmanının kalınlığının artması ile). Bu önerme de $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$ iken $h^{(2)}/R$'nin farklı değerleri için Şekil 3.6 $\lambda_3=0.6$(a), $\lambda_3=1.0$(b), $\lambda_3=1.4$(6c) ve $\lambda_3=1.8$(d) grafiklerinde verilmiştir.



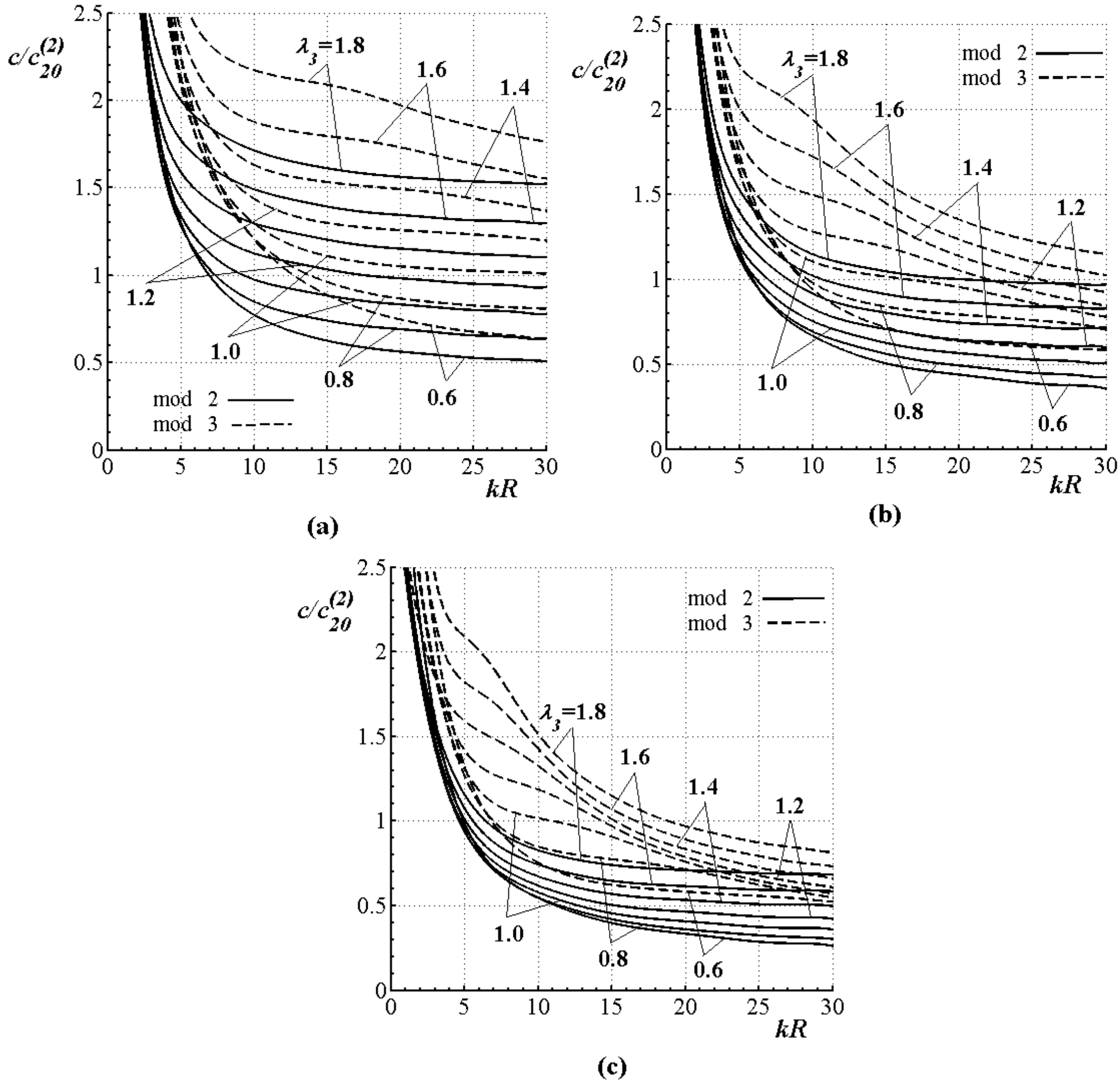
Şekil 3. 5 $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = (\mu^{(2)}/\mu^{(3)})$ oranının 1. modda dispersiyon eğrilerine etkisi ($\lambda_3 = 0.6$(a), $\lambda_3 = 1.0$(b), $\lambda_3 = 1.4$(c) ve $h^{(2)}/R = 0.4$, $h^{(1)}/R =$ $h^{(3)}/R = 0.1$).

Bu sonuçlardan sonra 2. ve 3. modlardaki sonuçlar göz önüne alınmıştır. Şekil 3.7 bu modlardaki değerleri λ_3'ün çeşitli değerlerinde $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2$ (a), 5 (b) ve 10 (c) ve $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$ $h^{(2)}/R = 0.4$ koşullarında göstermektedir.

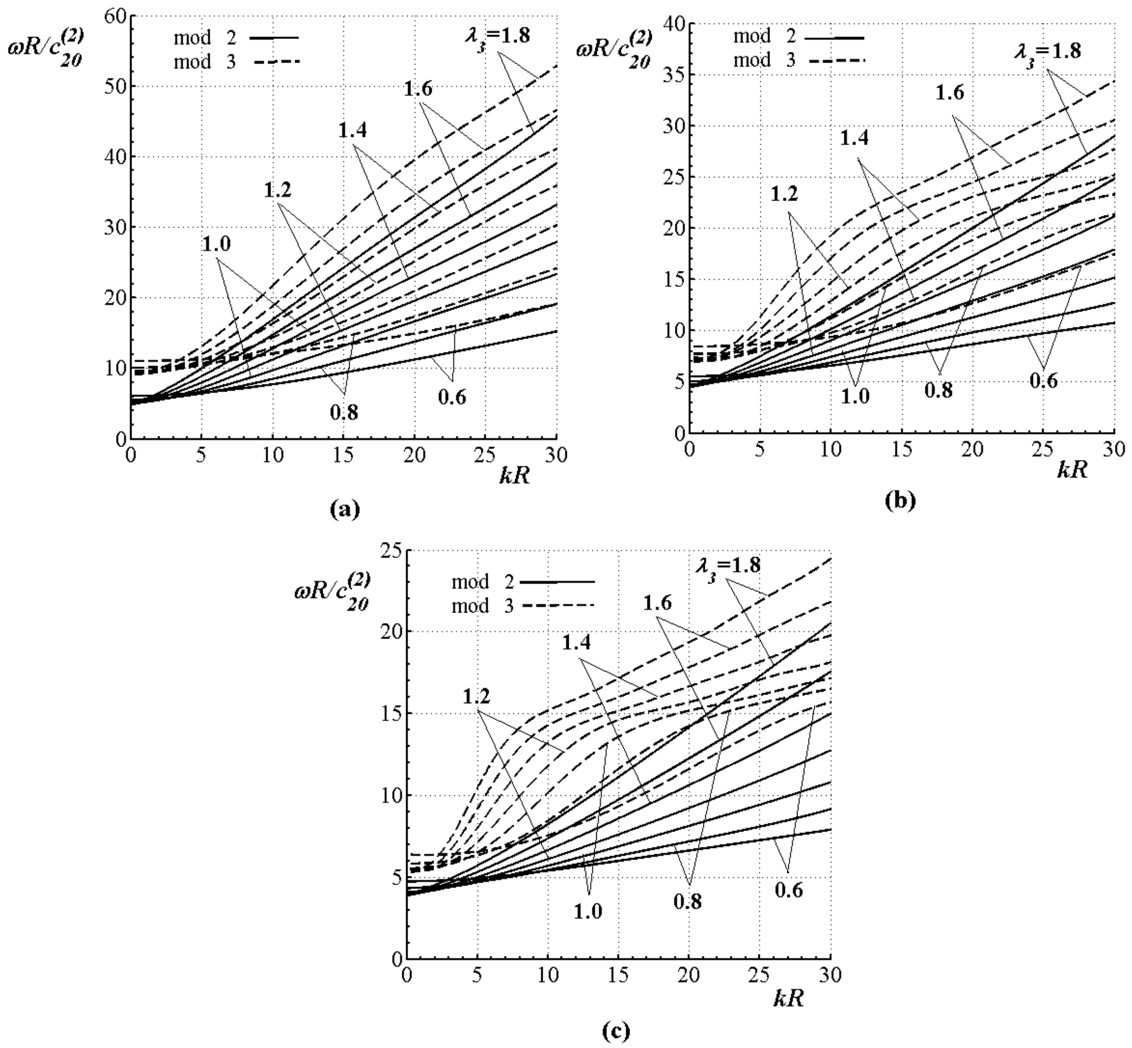


Şekil 3. 6 $h^{(2)}/R$'nin çeşitli değerleri için 1. mod dispersiyon eğrileri ($\lambda_3 = 0.6$(a), $\lambda_3 = 1.0$(b), $\lambda_3 = 1.4$(c), $\lambda_3 = 1.8$ (d) ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 2$, $h^{(1)}/R =$ $h^{(3)}/R = 0.1$).

Bu sonuçlara göre, Şekil 3.2'de olduğu gibi, içi boş 3 katlı bileşik silindirde de 2. ve 3. modlarda ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkisi, boyutsuz dalga sayısı kR'ye bağlıdır. 1. mod için, önçekme (önbasınç) içi boş çok katlı bileşik silindirlerde dalga yayılım hızını artırmaktadır (azaltmaktadır). Fakat 2. ve 3. modlarda kR'nin özel değeri için $\left((kR)_*\right)$, $kR < (kR)_*$ $\left(kR > (kR)_*\right)$ durumlarında önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını azaltmaktadır (artırmaktadır). Bu önermenin daha açık şekilde gösterilebilmesi için 2. ve 3. modlar için $\omega R/c_{20}^{(2)}$ ve kR'ye bağlı dispersiyon diyagramları verilmiştir. Bu diyagramlar Şekil 3.7(a-c)'deki durumlar geçerli olmak üzere Şekil 3.8(a-c)’de sırasıyla verilmiştir. Ek olarak bahsi geçen bu şekillerin $0 < kR < 0.2 < (kR)_*$ değerlerine karşılık gelen ve yine Şekil 3.7(a-c)’deki problem parametreleri için oluşturulan büyütülmüş kısımları, Şekil 3.9(a-c)’de verilmiştir.



Şekil 3. 7 Ön şekil değiştirmelerin 2. ve 3. modda dispersiyon eğrilerine etkisi ($\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 2$ (a), 5(b), 10(c) ve $h^{(2)}/R = 0.4$, $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$).

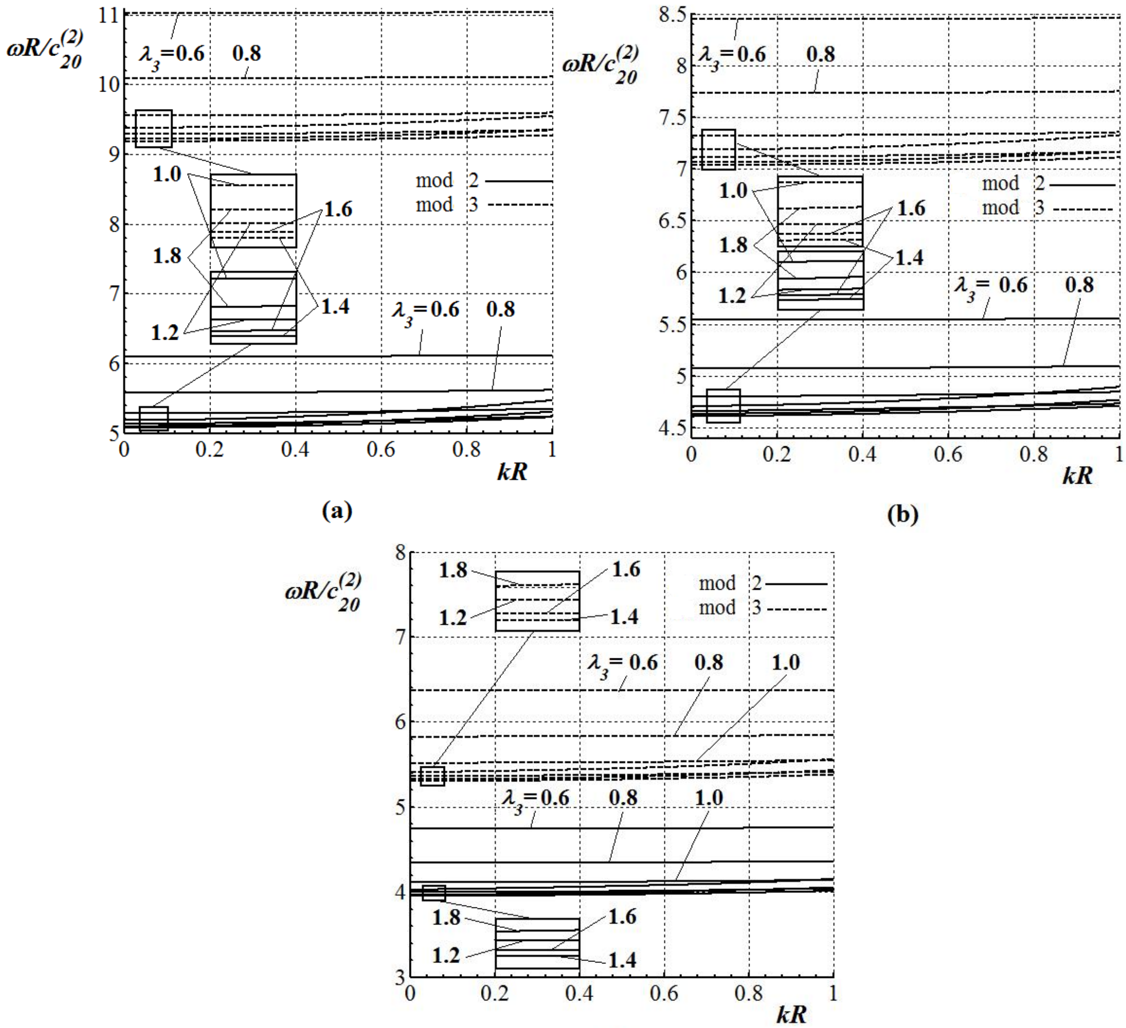


Şekil 3. 8   2. ve 3. modlarda Şekil 3.7 (a), (b) ve (c)'deki durumlar için oluşturulmuş dispersiyon eğrileri

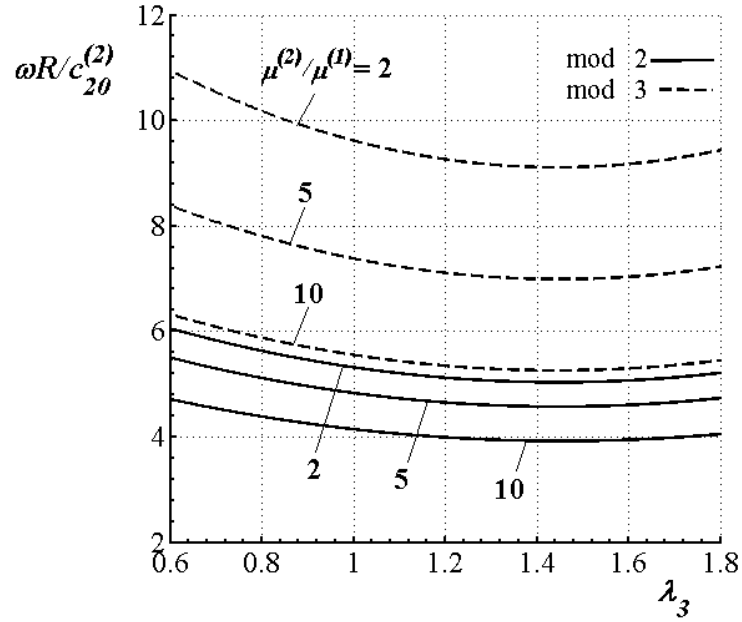
Şekil 3.9'da verilen sonuçların, silindir bileşenlerindeki ön şekil değiştirmelerin kesme frekansı değerlerindeki etkisini de gösterdiği dikkate alınmalıdır. $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$'nin çeşitli değerleri için kesme frekansı ve λ_3'e bağlı grafik Şekil 3.10'da verilmiştir ($h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.4$).

Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'daki sonuçlara göre $kR < (kR)_*$ durumunda 2. ve 3. modların dalga yayılım hızları λ_3 değerlerinin azalmasıyla (önbasınçlı durumda) düzgün olarak artmaktadır. Aynı zamanda $kR < (kR)_*$ durumunda önçekme, dalga yayılım hızlarında azalmaya sebep olurken $c/c_{20}^{(2)}$ ve λ_3 arasındaki ilişki düzgün (monoton) değildir.

Burada $(kR)_*$ değerlerinin moda ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$, $h^{(1)}/R\left(=h^{(3)}/R\right)$, $h^{(2)}/R$ gibi problem parametrelerine bağlı olduğu dikkate alınmalıdır. Bu nedenle 2. ve 3. modlar ve belirli problem parametreleri için $kR=(kR)_*$ durumunda ön şekil değiştirmelerin dalga yayılım hızına etkileri yoktur.

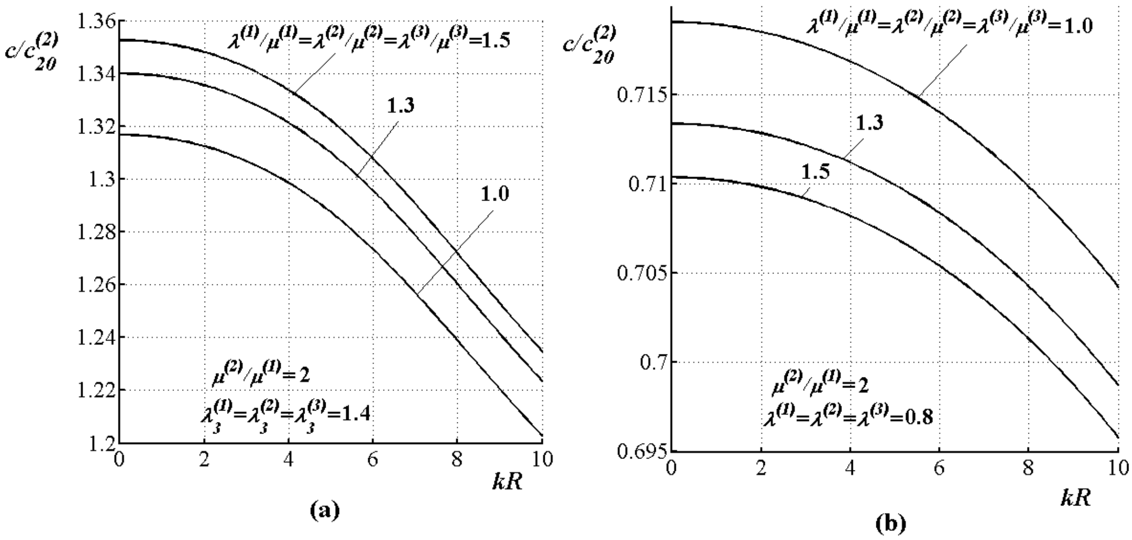


Şekil 3. 9 $kR \rightarrow 0$ Şekil 3.8 (a), (b) ve (c) için büyütülmüş limit değer grafikleri



Şekil 3. 10 Ön şekil değiştirmelerin 2. ve 3. modlarda kesme frekansına etkisi

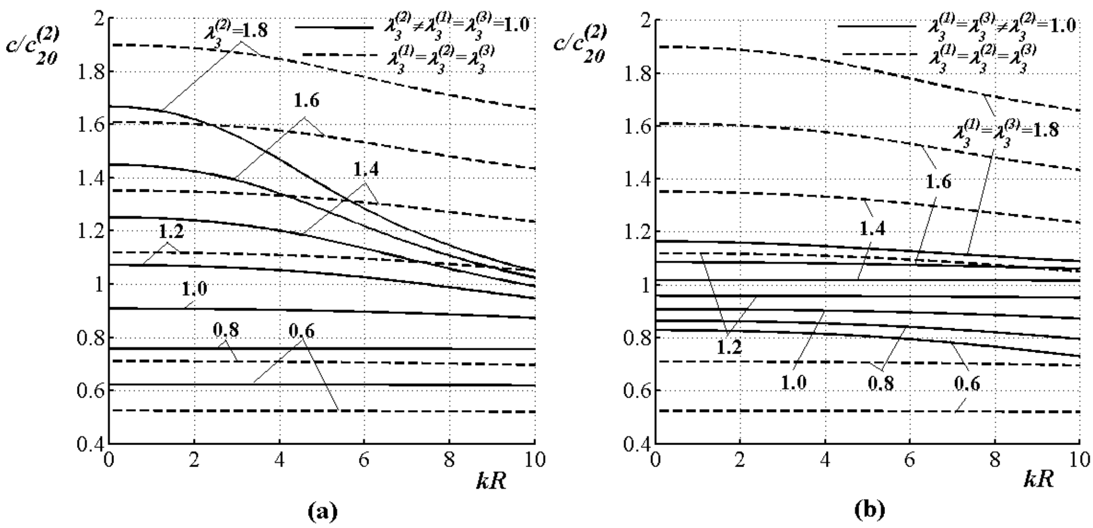
Şekil 3.10 $\lambda_3 < 1$ durumunda 2. ve 3. modların kesme frekans değerlerinin λ_3 değerlerinin azalması ile (önbasınçlı durumda) arttığını göstermektedir. Bununla birlikte $\lambda_3 > 1$ durumundaki kesme frekans değerleri, $\lambda_3 = 1$ durumunda elde edilenden daha az olmaktadır.



Şekil 3. 11 $\lambda^{(k)}/\mu^{(k)}$ oranının 1. modda dispersiyon eğrilerine etkisi

($\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 2$ ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4\,(a)$, $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.8\,(b)$)

Daha önce yapılan tüm araştırmalarda $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)} = \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)} = 1.5$ kabul edilmiştir. Burada ise $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}$ $(= \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)})$ oranındaki değişimin dispersiyon eğrilerine etkileri de incelenmektedir. Bu amaçla 1. moddaki davranış incelenmiş ve öncelikle üç katlı silindirin bileşenlerinde ön şekil değiştirme olmaması durumunda $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}$ $(= \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)})$ oranındaki değişimin, $c/c_{20}^{(2)}$ ve kR arasındaki ilişkiyi etkilemediği görülmüştür. Bu sonuç daha önce verilen ilgili bağıntılardan da çıkarılabilir zira $\lambda_3^{(k)} = 1.0$ $(k = 1, 2, 3)$ durumunda söz konusu bağıntılar $\lambda^{(k)}/\mu^{(k)}$ oranını içermemektedir. $\lambda_3^{(k)} \neq 1.0$ durumlarında ise $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}$ $(= \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)})$ oranının 1. moddaki etkisi $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ için, $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$ (Şekil 11a) ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.8$ (Şekil 11b) olmak üzere Şekil 11'de verilmiştir. Şekil 11'e göre silindir bileşenlerinde önçekme (önbasınç) olması durumunda, burulma dalga yayılımı hızı $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}$ $(= \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)})$ oranı ile artmaktadır (azalmaktadır). Bahsi geçen oranın dispersiyon eğrilerine etkisi, silindirin Oz ekseni doğrultusunda çekme ya da basmaya maruz kalması durumunda ortaya çıkan iç, orta ve dış silindir malzemelerinin radyal deformansyonlarının genliklerinin etkisi gibi alınabilir (bu deformasyonlar klasik elastisite teorisinde Poisson Sayısı'ndan hesaplanan deformasyonlara benzerdir).



Şekil 3. 12 Silindir bileşenlerindeki farklı ön şekil değiştirmelerin 1. modda dispersiyon eğrilerine etkisi ($\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 2$, $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(3)} = 1.0,\ \lambda_3^{(2)} \neq 1.0\,(a)$ ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(3)} \neq 1.0,\ \lambda_3^{(2)} = 1.0\,(b)$)

Silindir katmanlarının ön şekil değiştirmelerinin farklı olması durumunda dispersiyon eğrilerine yaptıkları etkinin incelenmesi amacıyla $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(3)} = 1.0$, $\lambda_3^{(2)} \neq 1.0$ (1. durum) ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(3)} \neq 1.0$, $\lambda_3^{(2)} = 1.0$ (2. durum) durumları göz önüne alınmıştır. Şekil 12'de $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)} = \lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(3)}/\mu^{(3)} = 1.5$ ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ olmak üzere, 1. mod için 1. durum (Şekil 12a) ve 2. durumdaki (Şekil 12b) dispersiyon eğrileri verilmiştir. Şekil 12'de ayrıca $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} \neq 1.0$ durumu için dispersiyon eğrilerinin kesikli çizgiler halinde verildiği de dikkate alınmalıdır.

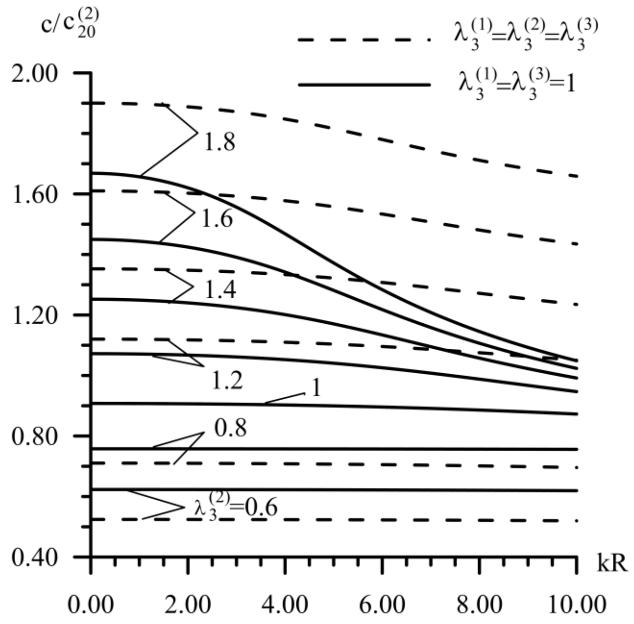
Özetlemek gerekirse Şekil 12 ile ortaya konan sonuçlara göre dalga yayılım hızı $\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}, \lambda_3^{(3)}$'ün bir fonksiyonu gibi ifade edilmektedir $\left(c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}, \lambda_3^{(3)})\right)$. Buradan aşağıdaki ilişkiler ortaya çıkmaktadır:

$$c(1, \lambda_3^{(2)}, 1) \leq c(\lambda_3^{(1)}, 1, \lambda_3^{(3)}) \leq c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}, \lambda_3^{(3)}) \text{ eğer } \lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} \geq 1.0,$$

$$c(1, \lambda_3^{(2)}, 1) \geq c(\lambda_3^{(1)}, 1, \lambda_3^{(3)}) \geq c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}, \lambda_3^{(3)}) \text{ eğer } \lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} \leq 1.0.$$

Üç katlı içi boş silindirde dış katmanların malzemelerinin aynı sertlikte, orta katman malzemesinin ise onlardan daha sert olduğu kabul edilerek yapılan nümerik analizler sonucu elde edilen şekiller olan Şekil 3.2-3.12'ye göre:

- 1. mod için bileşik silindirin katmanlarındaki önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- 2. ve 3. modlarda ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkisi, boyutsuz dalga sayısı kR'ye bağlıdır. 2. ve 3. modlarda kR'nin özel değeri için $\left((kR)_*\right)$, $kR < (kR)_*$ $\left(kR > (kR)_*\right)$ durumlarında önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını azaltmaktadır (artırmaktadır).
- $\lambda_3 < 1$ durumlarında, yani silindir başlangıçta eksenel basmaya maruz kalmışsa, 2. ve 3. Modlardaki kesme frekanslarının değeri λ_3'ün küçülmesiyle büyümektedir. $\lambda_3 > 1$ durumlarında ise belirtilen kesme frekansları onların $\lambda_3 = 1$ değerlerinden (ön şekil değiştirmelerin olmadı durumda) küçük olmaktadır.

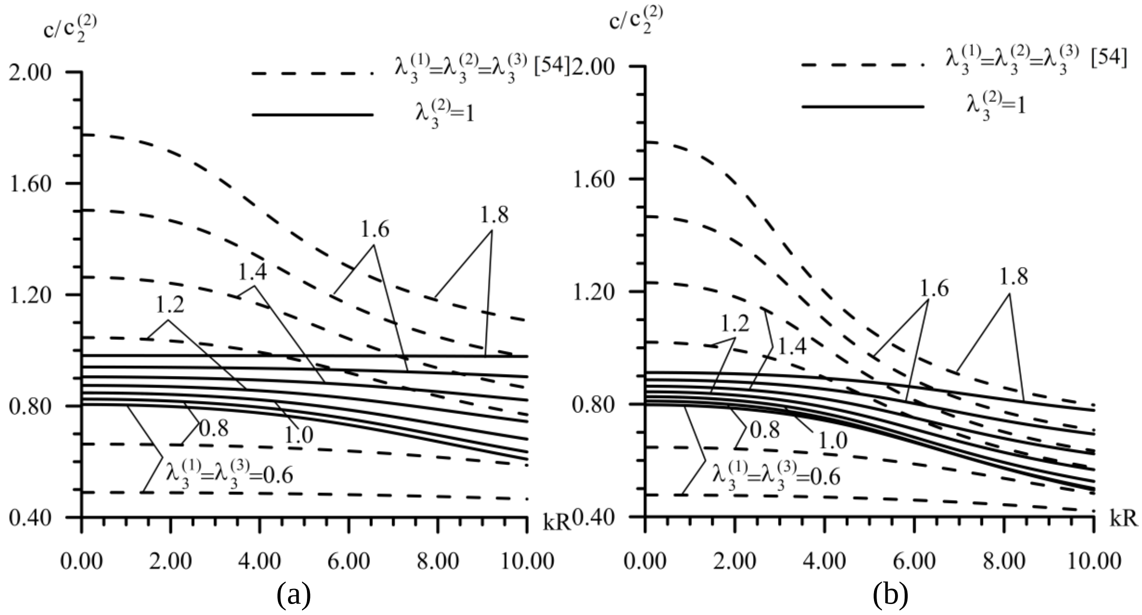


Şekil 3. 13 1. mod ve $(\mu^{(2)}/\mu^{(1)})=(\mu^{(2)}/\mu^{(3)})=2$, $h^{(2)}/R=0.4$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$ koşulları altında oluşturulmuş dispersiyon eğrileri

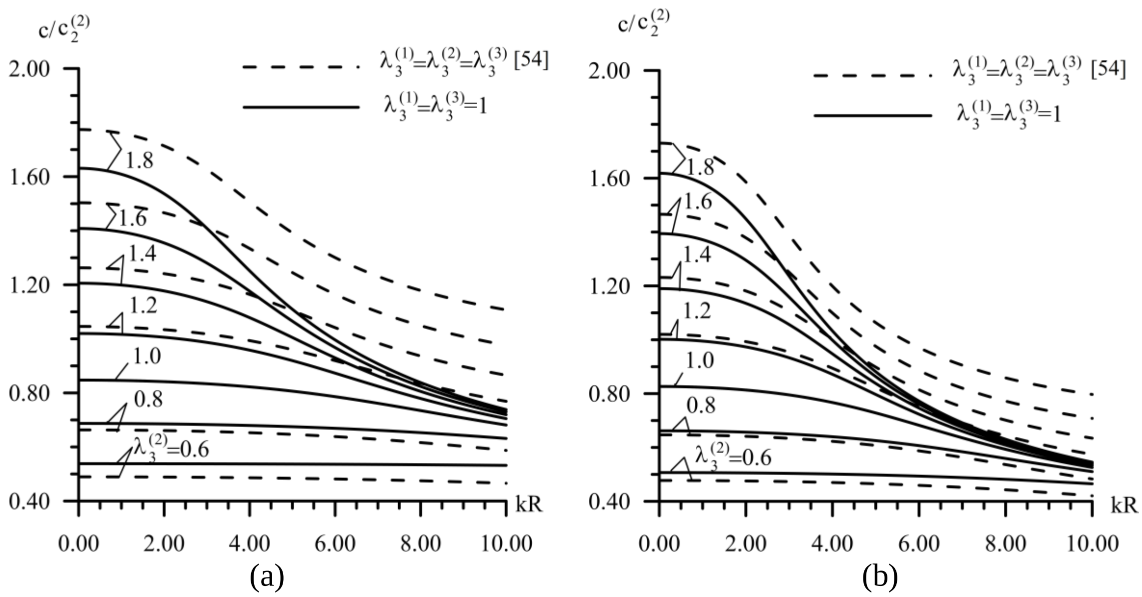
Şekil 3.13'te $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2$, $h^{(2)}/R=0.4$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$ iken elde edilmiş dispersiyon eğrileri görülmektedir. Şekilde silindir katmanlarındaki öngerilme durumuna göre iki farklı durum söz konusudur; 1. durumda ön şekil değiştirmeler silindir katmanlarının hepsinde bulunurken $\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(2)}=\lambda_3^{(3)}$, 2. durumda ön şekil değiştirme sadece silindirin orta katmanındadır.

Üç katlı içi boş silindirde dış katmanların malzemelerinin aynı sertlikte, orta katman malzemesinin ise onlardan daha sert olduğu kabul edilerek yapılan nümerik analizler sonucu elde edilen Şekil 3.13'e göre:

- 1. mod için bileşik silindirin katmanlarındaki önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- Ön şekil değiştirmelerin her üç katmanda da bulunduğu durumda burulma dalga yayılım hızındaki artma (azalma) etkilerinin, ön şekil değiştirmelerin sadece tek katmanda bulunması durumundan daha fazla olduğu görülmüştür.



Şekil 3. 14 1. mod ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 5$(a) ve 10(b), $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.4$ koşulları altında oluşturulmuş dispersiyon eğrileri



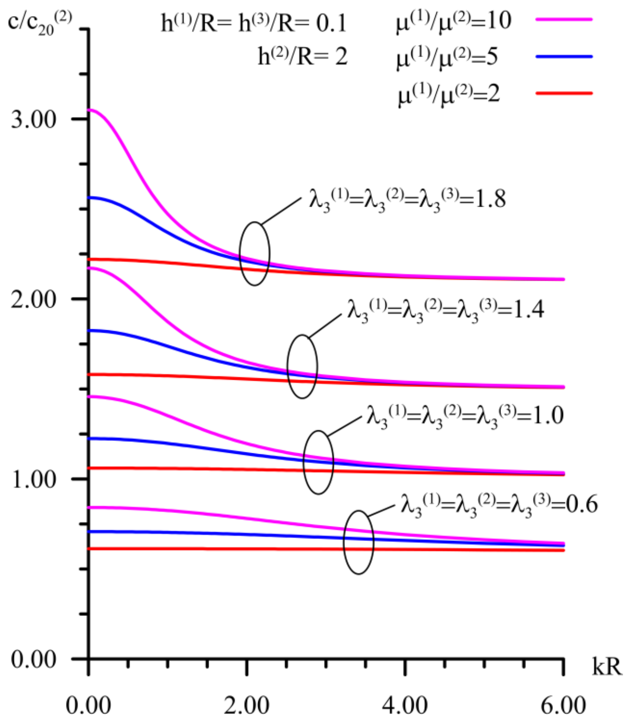
Şekil 3. 15 1. mod ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 5$(a) ve 10(b), $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.4$ koşulları altında oluşturulmuş dispersiyon eğrileri

Şekil 3.14’te ön şekil değiştirmelerin sadece dıştaki silindir katmanlarında olduğu 1.durum, Şekil 3.15’te de ön şekil değiştirmelerin sadece orta katmanda olduğu 2. durum ve bahsi geçen bu durumların [54]’de incelenen, ön şekil değiştirmelerin her katmanda olduğu durumla karşılaştırılması gösterilmektedir.

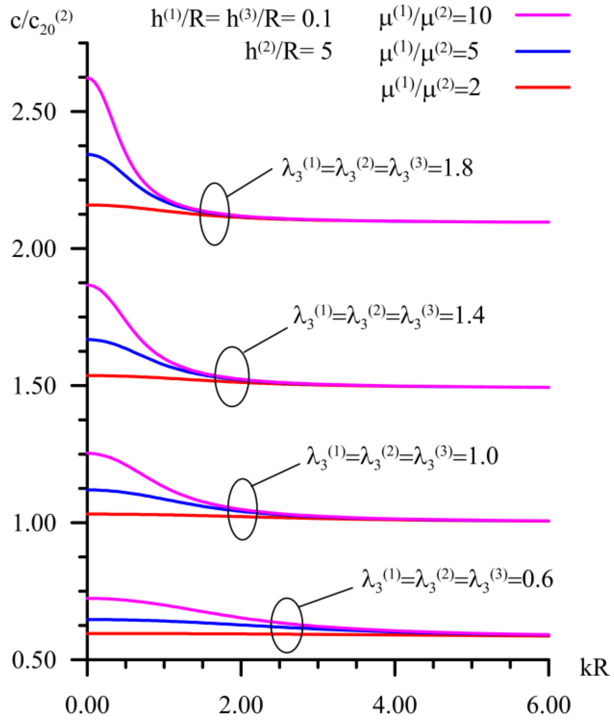
En içteki ve dıştaki silindir katmanlarının malzemelerinin aynı sertlikte, orta katman malzemesinin ise onlardan daha sert olduğu kabul edilerek yapılan bu nümerik analizler sonucu elde edilen Şekil 3.14 ve Şekil 15'e göre:

- 1. mod için bileşik silindirin dış katmanlarındaki (orta katmanındaki) öncekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- Önçekmenin (önbasıncın) söz konusu hızı artırıcı (azaltıcı) etkisi 1. durumda, 2. duruma göre dikkate değer derecede belirgindir.

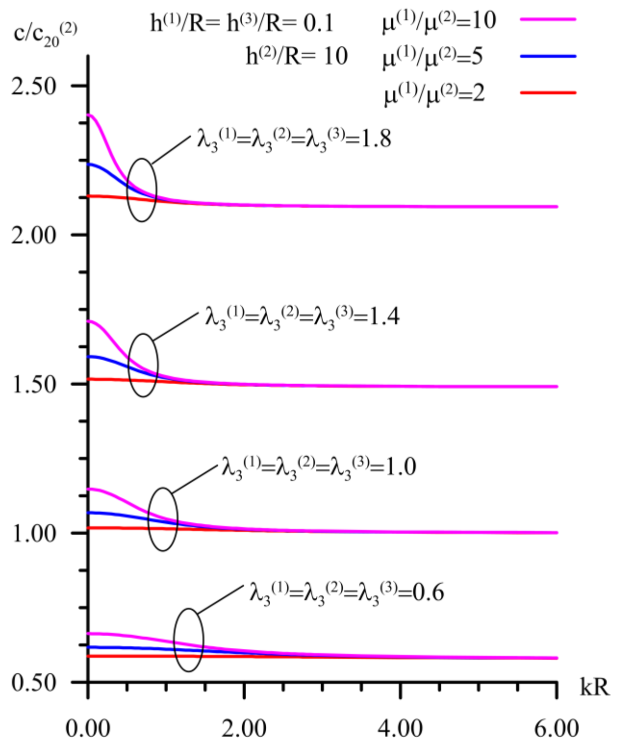
Üç katlı bileşik silindirde orta katman malzemesinin, dıştaki katman malzemelerine oranla daha yumuşak olması durumu:



Şekil 3. 16 Ön şekil değiştirmelerin çeşitli $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ değerleri için $h^{(2)}/R=2$ koşulu altında, burulma dalga yayılım hızına etkisi

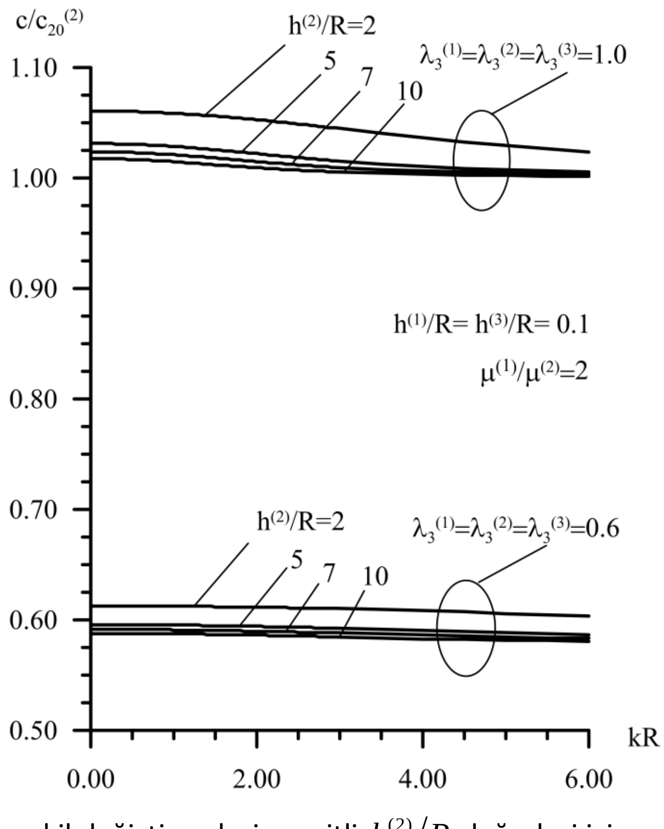


Şekil 3. 17 Ön şekil değiştirmelerin çeşitli $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ değerleri için $h^{(2)}/R=5$ koşulu altında, burulma dalga yayılım hızına etkisi

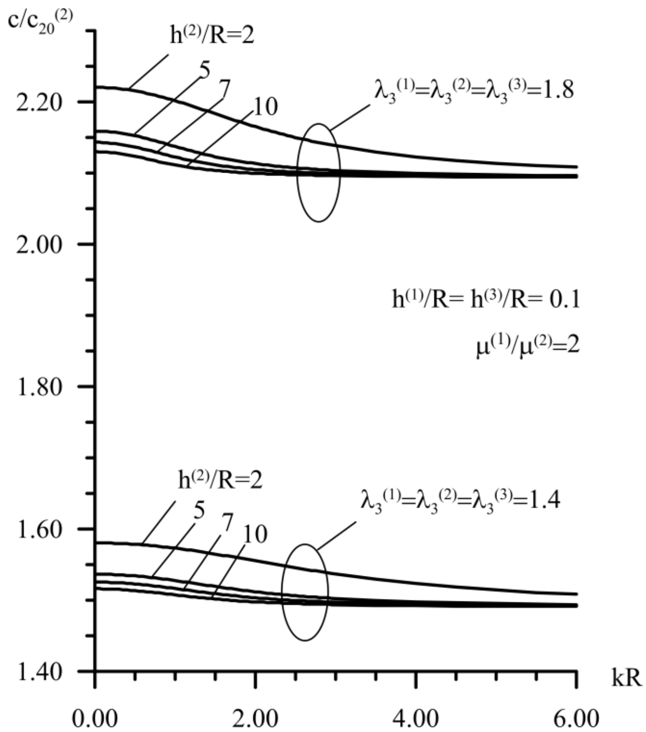


Şekil 3. 18 Ön şekil değiştirmelerin çeşitli $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ değerleri için $h^{(2)}/R=10$ koşulu altında, burulma dalga yayılım hızına etkisi

Şekil 3.16, 3.17 ve 3.18’de ön şekil değiştirmelerin, çeşitli $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ $(=\mu^{(3)}/\mu^{(2)})$ değerleri için $h^{(2)}/R=2$ (şekil 3.16), 5 (şekil 3.17) ve 10 (şekil 3.18) koşulları altında, burulma dalga yayılım hızına etkisi gösterilmiştir. Bu eğrilerle elde edilen sonuçlara göre bileşik silindirin katmanlarındaki önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır). Yukarıdaki şekillerde ele alınan durumda $c/c_{20}^{(2)}$ değerleri silindirin dış katmanlarının (silindirin orta katmanının) sertliğinin artmasıyla artmaktadır (azalmaktadır).



Şekil 3. 19 Ön şekil değiştirmelerin çeşitli $h^{(2)}/R$ değerleri için $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2$ ve $\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(2)}=\lambda_3^{(3)}=0.6 ve 1.0$ koşulu altında, burulma dalga yayılım hızına etkisi



Şekil 3. 20 Ön şekil değiştirmelerin çeşitli $h^{(2)}/R$ değerleri için $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2$ ve $\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(2)}=\lambda_3^{(3)}=1.4\ ve\ 1.8$ koşulu altında, burulma dalga yayılım hızına etkisi

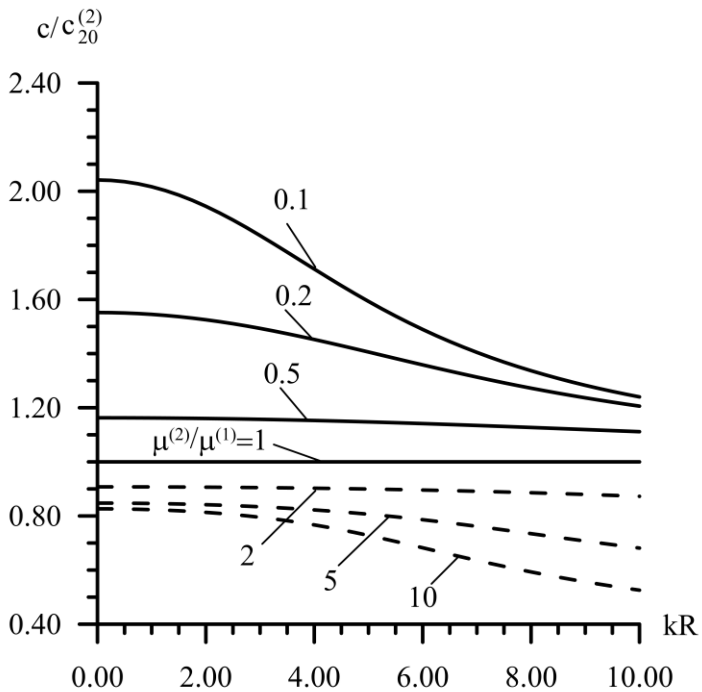
Silindirin orta katmanının kalınlığındaki değişimin, burulma dalga yayılım hızına etkisini göz önüne alacak olursak; dalga yayılım hızının, orta katmanın kalınlığının artması ile azalacağı şeklinde bir yorumda bulunabiliriz ($\mu^{(2)} < \mu^{(1)} (= \mu^{(3)})$). İşte bu yorumu ispatlayan dispersiyon eğrileri de, çeşitli durumlar için Şekil 3.19 ve 3.20'de gösterilmiştir.

3.16-3.20 şekillerinde silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin eşit olduğu durumda, 1. mod için elde edilen sayısal sonuçlara göre:

- 1. mod için silindir katmanlarındaki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılım hızında artışa (azalmaya) sebep olmaktadır,
- Orta katmanın kalınlığının artması, dalga yayılım hızında azalmaya sebep olmaktadır,
- Orta katmanın yumuşaması, dalga yayılım hızında azalmaya sebep olmaktadır,

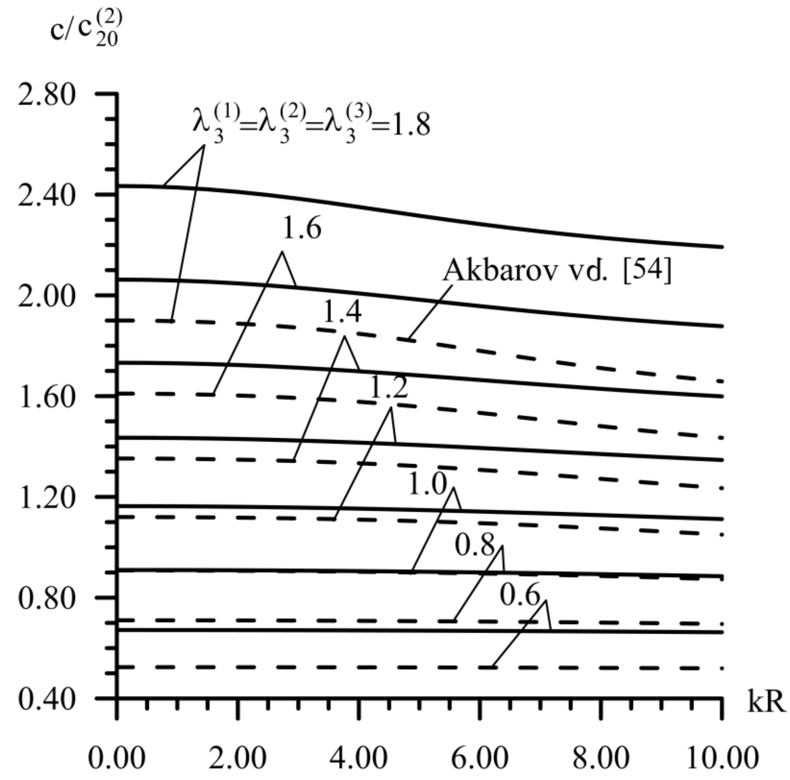
- Söz konusu şekillerde incelenen 1. dispersif modun içi boş homojen silindir için anlamı yoktur zira bu mod, içi boş homojen silindir için dispersif olmayan hale gelmektedir.

Şekil 3.21, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ oranının $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.4$ ve $\lambda_3 = 1$ koşulları altında, 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisini göstermektedir. Bu şekilden görüldüğü üzere burulma dalga yayılım hızı, 3 katlı bileşik silindirin dış katmanlarının, iç katmana göre sertleşmesi ile artmaktadır.



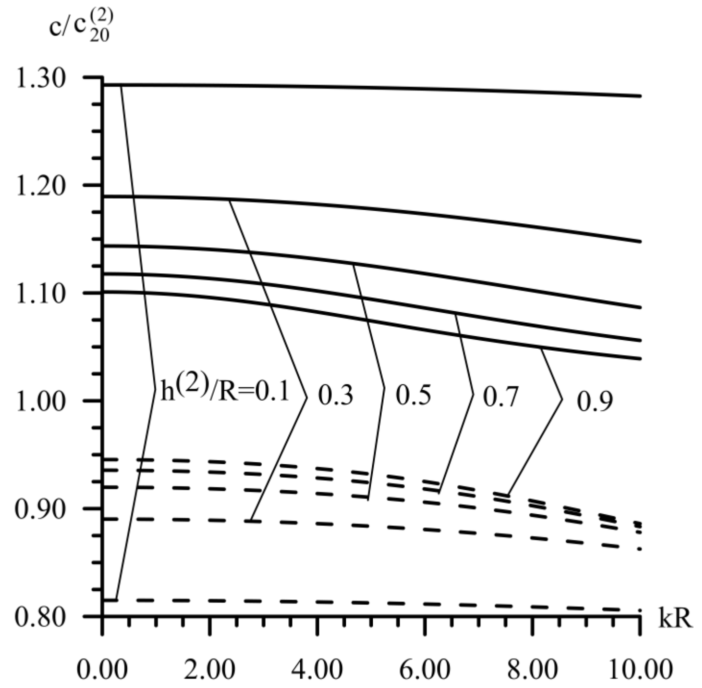
Şekil 3. 21 $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ oranının $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.4$ ve $\lambda_3 = 1$ koşulları altında, 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi

Şekil 3.22, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = \mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 0.5$ (sürekli çizgiler) ve 2 (kesik çizgiler) durumlarında ve $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.4$ koşulları altında, λ_3'ün çeşitli değerleri için elde edilmiş dispersiyon eğrilerini göstermektedir. Ayrıca $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ durumunun [54] makalesinde de incelendiği göz önünde bulundurulmalıdır. Bu şekile göre, silindir katmanlarındaki önçekmenin (önbasıncın) burulma dalga yayılım hızını artırdığı (azalttığı) gözlemlenmektedir. Direkt olarak doğrulama yapılmak istenirse, şekil 3.22'de verilen sonuçların, $kR \to 0$ durumunda $c/c_{20}^{(2)}$'nin uygun değerleriyle örtüştüğü görülmektedir.

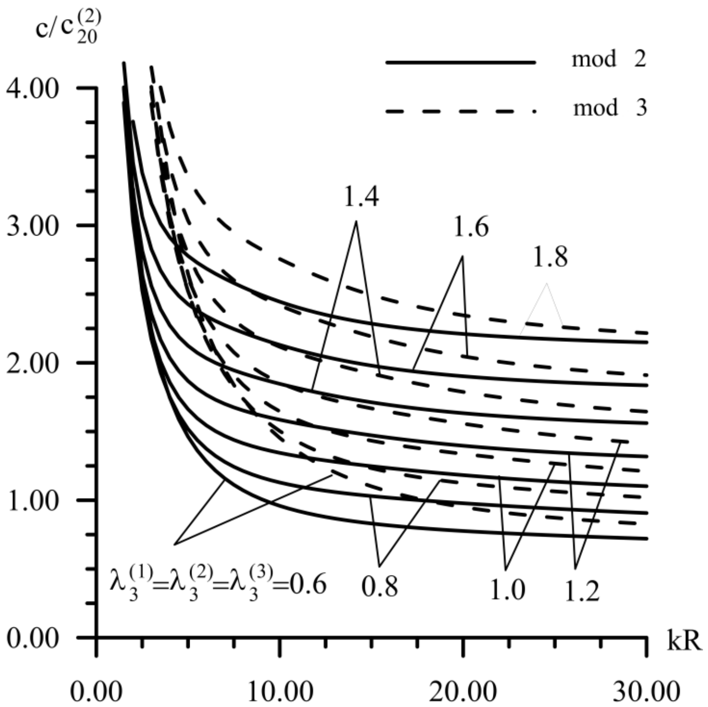


Şekil 3. 22 $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ (sürekli çizgiler), $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2$ (kesik çizgiler) durumlarında ve $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi

Şekil 3.23'te, çeşitli $h^{(2)}/R$ değerleri için oluşturulmuş 1. mod dispersiyon eğrilerine, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ (sürekli çizgiler), $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2$ (kesik çizgiler) durumlarında ve $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $\lambda_3 = 1.0$ koşulları altında, silindir orta katman kalınlığının etkisi görülmektedir. Şekilden de anlaşıldığı üzere, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ ($\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2$) durumunda $h^{(2)}/R$ değerlerindeki artışlar, burulma dalga yayılım hızını azaltmaktadır (artırmaktadır).

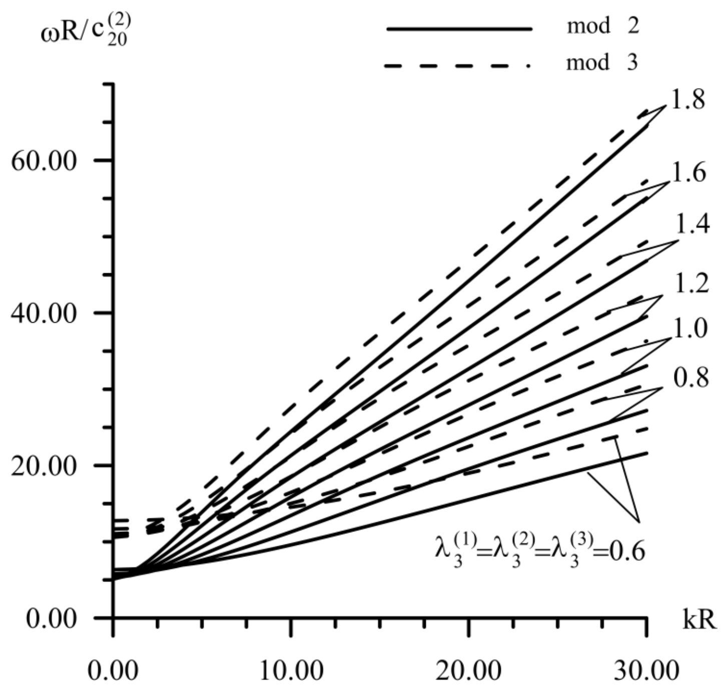


Şekil 3. 23 $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.5$ (sürekli çizgiler), $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=2$ (kesik çizgiler) durumlarında ve $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$ koşulu altında, silindir orta katman kalınlığının 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi



Şekil 3. 24 $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=\mu^{(2)}/\mu^{(3)}=0.5$ durumunda ve $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 2. ve 3. modların dispersiyon eğrilerine etkisi

Şekil 3.24, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.5$ durumunda ve $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$, $\lambda_3=1.0$ koşulları altında çeşitli λ_3 değerleri için oluşturulmuş 2. ve 3. mod dispersiyon eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3. 25 $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=\mu^{(2)}/\mu^{(3)}=0.5$ durumunda ve $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 2. ve 3. modların dispersiyon eğrilerine etkisi

Yine Şekil 3.25'de benzer nitelikte dispersiyon eğrileri verilmektedir. Buna göre 2. ve 3. modlarda silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkisi boyutsuz dalga numarası olan kR'ye bağlıdır. Burada kR'nin özel bir değeri vardır$\left((kR)_*\right)$ ve $kR<(kR)_*$ için önçekme burulma dalga yayılımı hızını azaltırken, önbasınç artırmaktadır; bu durum $kR>(kR)_*$ için tam tersidir. Dolayısıyla, $kR=(kR)_*$ durumunda ön şekil değiştirmeler, bahsedilen dalga yayılım hızına etki etmemektedir. Yine de Şekil 3.22'de görüldüğü gibi 1. moddaki dalga yayılım hızı, kR'nin göz önüne alınan bütün değerleri için, katmanlardaki önçekmenin (önbasıncın) artmasıyla artmaktadır (azalmaktadır).

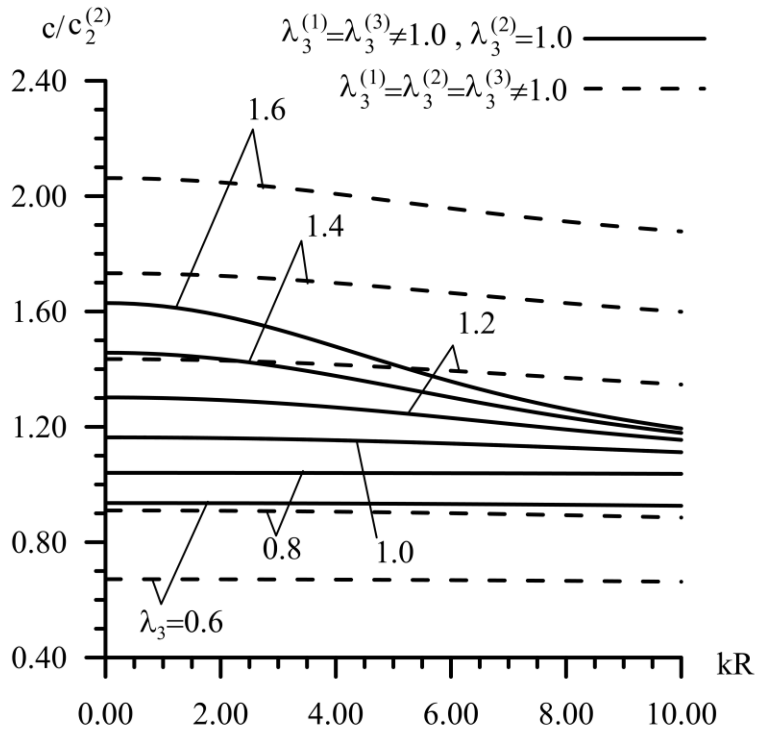
3.21-3.25 şekilleriyle ortaya konulan ve yorumlanan sayısal sonuçlar [55] makalesinde de verilmiştir. Burada tüm silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin eşit olduğu varsayılarak elde edilen sayısal sonuçlara göre:

- 1. modda silindir katmanlarındaki önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılım hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- 2. ve 3. modlarda silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkisi boyutsuz dalga numarası olan kR'ye bağlıdır. Burada kR'nin özel bir değeri vardır$\left((kR)_*\right)$ ve $kR<(kR)_*$ için önçekme burulma dalga yayılımı hızını azaltırken, önbasınç artırmaktadır; bu durum $kR>(kR)_*$ için tam tersidir.
- Ortadaki silindir katmanının kalınlığındaki bir artış, burulma dalga yayılım hızında azalmaya sebep olmaktadır.

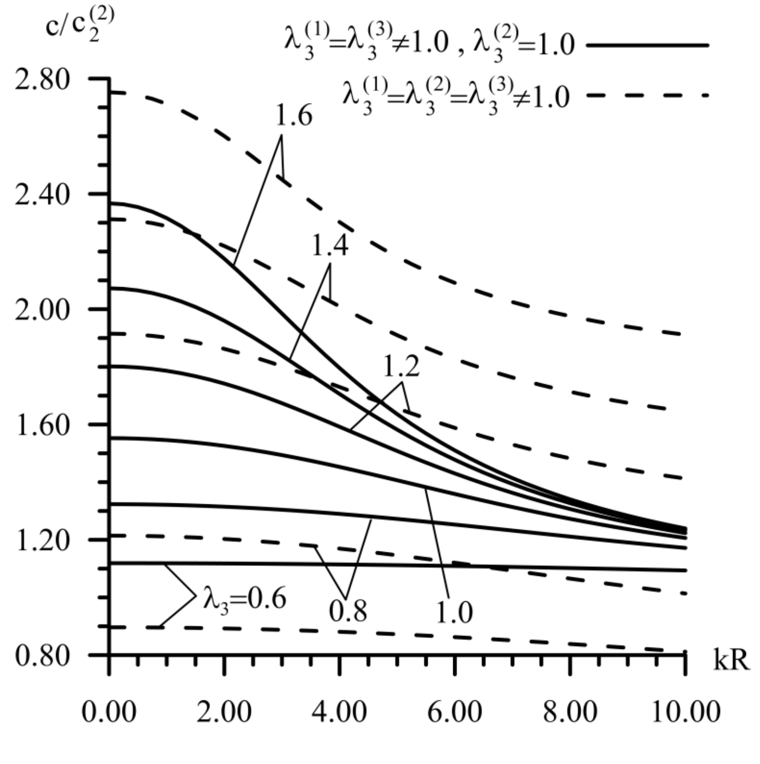
Yine bileşik silindirin dıştaki katmanlarının malzemelerinin, içteki katman malzemesine göre daha sert olduğu durum için yapılan analizler sonucu oluşturulan grafiklerden biri olan Şekil 3.26, silindirdeki burulma dalgalarının 1. moddaki dispersiyon eğrilerini göstermektedir.

Şekil 3.26'nın $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.4$ koşulları altında oluşturulduğu dikkate alınmalıdır. Ayrıca Şekil 3.26-3.30 şekillerindeki sürekli çizgiler öngerilmelerin sadece dıştaki katmanlarda olduğu 1. durumu, kesikli çizgiler ise öngerilmelerin bütün katmanlarda olduğu 2. durumu göstermektedir.

Şekil 3.27'de de Şekil 3.26 oluşturulurken göz önüne alınan koşullar kullanılmış fakat grafik, $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5$ olması durumu için çizilmiştir. Şekil 3.26 ve Şekil 3.27'deki sonuçlar kıyaslanacak olursa $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ değeri arttıkça, $c/c_{20}^{(2)}$ boyutsuz dalga yayılım hızının arttığı söylenebilir.

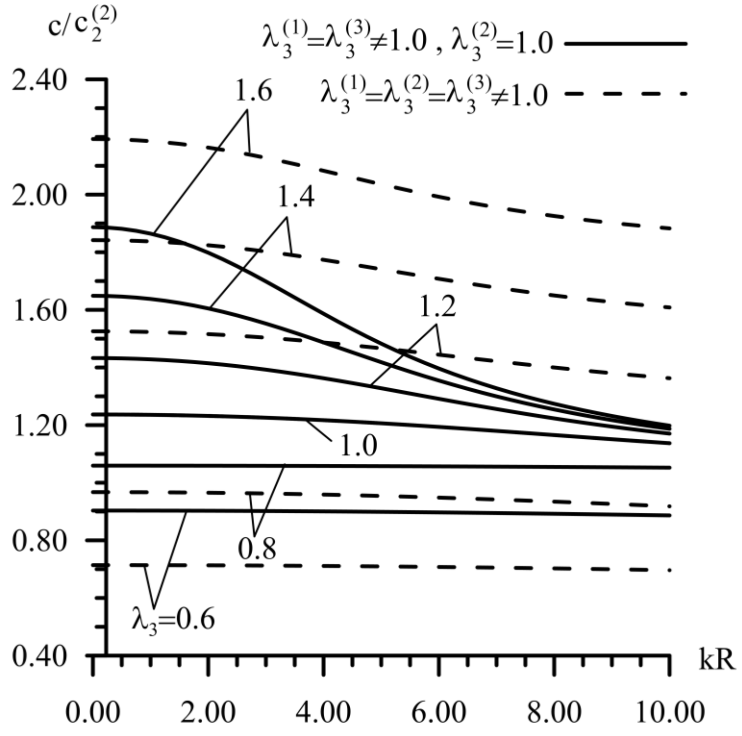


Şekil 3. 26 $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi

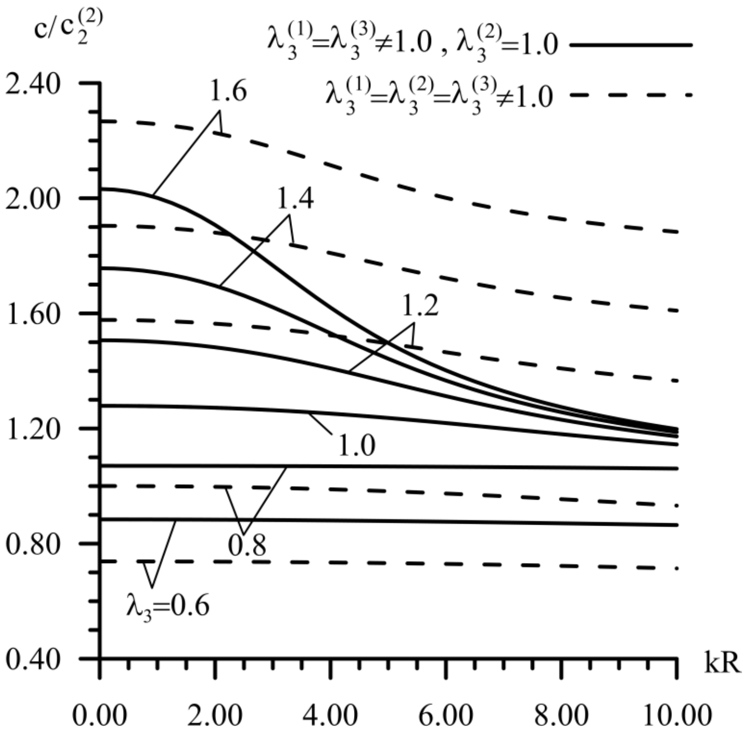


Şekil 3. 27 $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=5$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi

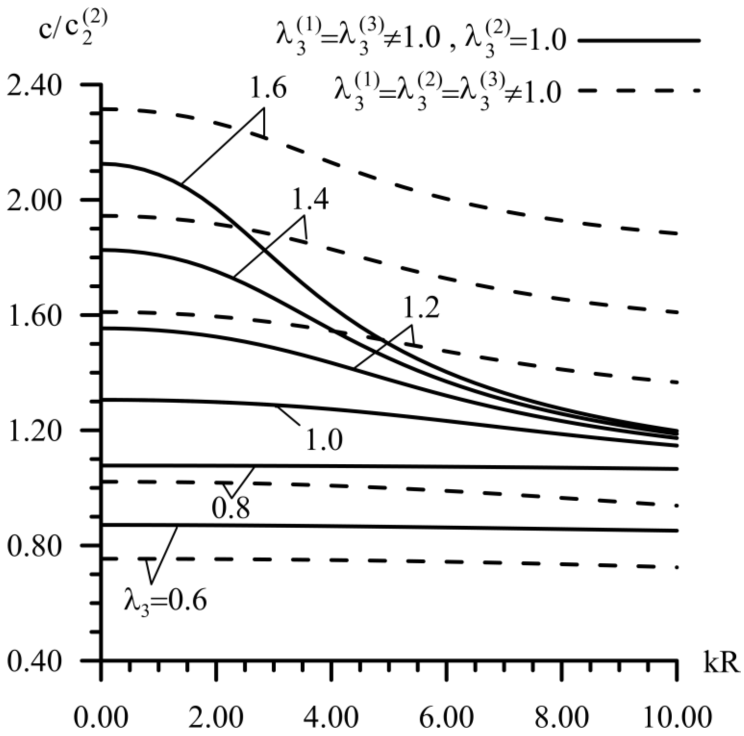
Şekil 3.28, Şekil 3.29, Şekil 3.30 grafikleri ise sırasıyla $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.2$, $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.3$ ve $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.4$ değerleri için, $\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = 2$ ve $h^{(2)}/R = 0.4$ koşulları altında oluşturulmuştur. Farklı katman kalınlıklarına göre elde edilen sonuçlara bakılarak Şekil 3.26, 3.28, 3.29 ve 3.30'u kendi aralarında kıyaslarsak; dış katmanların kalınlıklarındaki artışların, ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkilerini artırdığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3. 28 $\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = 2$, $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.2$, $h^{(2)}/R = 0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi



Şekil 3. 29 $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.3$, $h^{(2)}/R=0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi



Şekil 3. 30 $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}=2$, $h^{(1)}/R=h^{(3)}/R=0.4$, $h^{(2)}/R=0.4$ koşulları altında, silindir katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin 1. mod dispersiyon eğrilerine etkisi

Öngerilmelerin sadece dıştaki katmanlarda olduğu 1. durum ve öngerilmelerin bütün katmanlarda eşit olduğu 2. duruma göre elde edilen ve Şekil 3.26-3.30 ile ortaya koyulan sonuçlara göre:

- Silindir katmanlarındaki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılım hızının artmasına (azalmasına) sebep olmaktadır,
- Dıştaki silindir katmanlarının sertliğinin artması, ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılımı hızındaki etkilerini artırmaktadır,
- Dıştaki silindir katmanlarının kalınlıklarının artması, ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılımı hızındaki etkilerini artırmaktadır.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, hiperelastik malzemelerden üretilmiş ve sonlu ön şekil değiştirmesi olan iki katlı bileşik silindir, içi boş iki katlı bileşik silindir ve içi boş üç katlı (sandviç) bileşik silindirlerde burulma dalgalarının yayılımı ve geometrik, mekanik parametrelerin bu dalga yayılımına etkileri incelenmiştir. Tez çalışmasında yapılan bu incelemelere göre:

- Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖCÜDEDYT) uygulanarak, harmonik potansiyel ile belirlenen hiperelastik malzemelerden üretilmiş, ön şekil değiştirmeli çok katlı bileşik silindirlerde burulma dalgalarının yayılımı problemi için matematiksel formülasyonlar yapılmış ve dispersiyon denklemleri elde edilmiştir,
- Belirtilen koşullar çerçevesinde burulma dalga yayılım hızının limit değerleri için analitik ifadeler elde edilmiştir,
- Dispersiyon denklemlerinin sayısal analizleri için özel algoritmalar geliştirilmiş ve MATLAB kullanılarak bilgisayar yardımıyla sonuçlar elde edilmiştir,
- Geliştirilen algoritmaları test etmek amacıyla içi boş ve içi dolu bileşik silindirler için sırasıyla [8] ve [9] makalelerindeki mekanik ve geometrik parametreler göz önüne alınarak; uygun sonuçların karşılaştırılması yoluyla sağlama yapılmıştır.

Yukarıda belirtilen koşullar çerçevesinde, $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$ ($\rho^{(k)}$ k. Malzemenin yoğunluğu) durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir;

İki katlı bileşik silindir için:

- $c/c_{20}^{(1)}$, $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ ile azalmaktadır ($c_{20}^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$),
- İki katlı bileşik silindirin dış katmanındaki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- Bu artma ve azalmaların büyüklükleri, problem parametreleri kR ve $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ 'ye bağlıdır. Aynı zamanda bu büyüklükler ön şekil değiştirmeler ile artmaktadır,
- $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ oranındaki artış, $c/c_{20}^{(1)}$ oranında, kR ile birlikte daha belirgin bir düşüşe neden olmaktadır.

İçi boş iki katlı bileşik silindir için ($\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$):

- İçi boş iki katlı bileşik silindirde burulma dalga yayılımı hızı $c/c_{20}^{(1)}$, $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ ile azalmaktadır,
- Silindir bileşenlerindeki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılım hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- İçteki silindir malzemesi dıştakine göre daha sert olduğundan, silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkileri $h^{(2)}/R$ $(h^{(1)}/R)$ oranı ile azalmaktadır (artmaktadır).

İçi boş üç katlı (sandviç) bileşik silindir için:

Üç katlı içi boş bileşik silindirlerde, dış katmanların malzemelerinin aynı sertlikte, orta katman malzemesinin onlardan daha sert olduğu $\mu^{(2)} > \mu^{(1)}$ durumda ($\mu^{(k)}$, k. malzemenin kayma modülü) elde edilen sonuçlara göre:

- 1. mod için bileşik silindirin katmanlarındaki önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını artırmaktadır (azaltmaktadır),
- 2. ve 3. modlarda ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkisi, boyutsuz dalga sayısı kR'ye bağlıdır. 2. ve 3. modlarda kR'nin özel değeri için

$\left((kR)_*\right)$, $kR<(kR)_*$ $\left(kR>(kR)_*\right)$ durumlarında öngerilme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını azaltmaktadır (artırmaktadır).

- $\lambda_3<1$ durumlarında, yani silindir başlangıçta eksenel basmaya maruz kalmışsa, 2. ve 3. Modlardaki kesme frekanslarının değeri λ_3'ün küçülmesiyle büyümektedir. $\lambda_3>1$ durumlarında ise belirtilen kesme frekansları onların $\lambda_3=1$ değerlerinden (ön şekil değiştirmelerin olmadığı durumda) küçük olmaktadır,
- Ön şekil değiştirmelerin sadece dıştaki silindir katmanlarında olduğu durumda, önçekmenin (önbasıncın) söz konusu hızı artırıcı (azaltıcı) etkisi, ön şekil değiştirmelerin sadece orta katmanda olduğu duruma göre dikkate değer derecede belirgindir,
- Ön şekil değiştirmelerin her üç katmanda da bulunduğu durumda burulma dalga yayılım hızındaki artma (azalma) etkilerinin, ön şekil değiştirmelerin sadece tek katmanda bulunması durumundan daha fazla olduğu görülmüştür.

Üç katlı içi boş bileşik silindirlerde, orta katman malzemesinin, dış katmanların malzemelerinden daha yumuşak olduğu ($\mu^{(1)}>\mu^{(2)}$) durumda elde edilen sonuçlara göre:

- 1. mod için silindir katmanlarındaki önçekme (önbasınç), burulma dalga yayılım hızında artışa (azalmaya) sebep olmaktadır,
- Orta katmanın kalınlığının artması, dalga yayılım hızında azalmaya sebep olmaktadır,
- Orta katmanın yumuşaması, dalga yayılım hızında azalmaya sebep olmaktadır,
- Söz konusu şekillerde incelenen 1. dispersif modun içi boş homojen silindir için anlamı yoktur zira bu mod, içi boş homojen silindir için dispersif olmayan hale gelmektedir.
- $\lambda_3<1$ durumlarında, yani silindir başlangıçta eksenel basmaya maruz kalmışsa, 2. ve 3. Modlardaki kesme frekanslarının değeri λ_3'ün küçülmesiyle büyümektedir.

$\lambda_3 > 1$ durumlarında ise belirtilen kesme frekansları onların $\lambda_3 = 1$ değerlerinden (ön şekil değiştirmelerin olmadı durumda) küçük olmaktadır,

- 2. ve 3. modlarda ön şekil değiştirmelerin burulma dalga yayılım hızına etkisi, boyutsuz dalga sayısı kR'ye bağlıdır. 2. ve 3. modlarda kR'nin özel değeri için $\left((kR)_*\right)$, $kR < (kR)_*$ $\left(kR > (kR)_*\right)$ durumlarında önçekme (önbasınç) burulma dalga yayılımı hızını azaltmaktadır (artırmaktadır).
- Ortadaki silindir katmanının kalınlığındaki bir artış, burulma dalga yayılım hızında azalmaya sebep olmaktadır.

Elde edilen sonuçlardan görüldüğü üzere ele alınan silindir, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ değerleri bu silindirin $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ değerlerinden düşük olan bir malzeme ile kaplanırsa, bu silindirde burulma dalga yayılım hızını düşürebiliriz. Ayrıca bu hız düşürmenin boyutu hakkında da bilgi elde edebiliriz.

Elde edilen bilgiler ışığında, önçekme ve önbasınç aracılığı ile hiperelastik malzemelerden oluşturulmuş çok katlı bileşik silindirlerde, burulma dalga yayılım hızını kontrol edebiliriz.

Bu sonuçlar ve tez kapsamında ele alınan araştırma yöntemi petrol, gaz ve su iletimi, enerji üretimi, kimyasal madde üretim tesisleri ve benzeri alanlarda kullanılan çelik, bakır gibi sert malzemelerden veya hiperelastik malzemelerden oluşan çok katlı silindir yapılarda gürültü tespiti, iletim sırasında ortaya çıkan gürültünün minimize edilmesi ve kontrolünde; aynı şekilde elastik malzemelerden oluşan çok katlı bileşik silindirlerde tahribatsız gerilme analizinde kullanılabilir.

Sonuç olarak tez kapsamında kullanılan yöntem ve elde edilen algoritmalar, öngerilmelere karşılık gelen ön şekil değiştirmelerin hem küçük hem de sonlu olduğu durumlarda geçerli olduğundan, bu alanda elde edilen sonuçların uygulama alanlarını önemli bir biçimde genişletmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Love, A.E.H., (1944). Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publication, New York.

[2] Graff, K.F., (1991). Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publication, New York.

[3] Miklowitz, J., (1960). "Recent Developments in Elastic Wave Propagation", ASME Applied Mechanics Review, 13 (12): 865-878.

[4] Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1975). Elastodynamics, Volume I, Finite Motions, Academic Press, New York.

[5] Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1975). Elastodynamics, Volume II, Linear Theory, Academic Press, New York.

[6] Armenakas, A.E., (1965). "Torsional Wave in Composite Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 38:439-446.

[7] Armenakas, A.E., (1967). "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Shells Part I: Theoretical Investigation", AIAA Journal, 5: 740-744.

[8] Armenakas, A.E., (1970). "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 47:822-837.

[9] Armenakas, A.E., (1971). "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Shells Part II: Numerical Investigation", AIAA Journal, 9: 599-605.

[10] Armenakas, A.E. ve Keck, H.E., (1970). "Harmonic Nonaxisymmetric Waves with Short Wavelenghts Propagating in Composite Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 48:1160-1169.

[11] Keck, H.E. ve Armenakas, A.E., (1971). " Dispersion of Axially Symmetric Waves in Three-Layered Elastic Shells", The Journal of the Acoustical Society of America, 49:1511-1520.

[12] Reuter, R.C., (1969). "First-branch Dispersion of Torsional Waves in Bimaterial Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 46:821-823.

[13] Haines D.W. ve Lee, P.C.Y., (1971). "Axially Symmetric Torsional Waves in Circular Composite Cylinders", Journal of Applied Mechanics, 38:1042-1044.

[14] Haines D.W. ve Lee, P.C.Y., (1971). "Approximate Theory of Torsional Wave Propagation in Elastic Circular Composite Cylinders", The Journal of the Acoustical Society of America, 49 (1):211-219.

[15] Thurston, R.N., (1976). "Torsional Acoustic Modes in Clad Rods", IEEE Transaction on Sonics and Ultrasonics, SU-23 (3):154-161.

[16] Kaul, R.K., Shaw, R.P. ve Muller, W., (1981). "Torsional Waves in an Axially Homogenous Bimetalic Cylinder", International Journal of Solids and Structures, 17:379-394.

[17] Kleczewski, D. ve Parnes, R., (1987). "Torsional Dispersion Relation in a Radially Elastic Medium", The Journal of the Acoustical Society of America, 81 (1):30-36.

[18] Berger, J.R., Martin, P.A. ve Mc Caffery, S.J., (2000). "Time-harmonic Torsional Waves in a Composite Cylinder with an Imperfect Interface", The Journal of the Acoustical Society of America, 107 (3):1161-1167.

[19] Hayes, M. ve Rivlin, R.S. (1961). “Surface Waves in Deformed Materials”, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 8 (5):358–380.

[20] Green, A.E., (1961). “Torsional Vibration of an Initially Stressed Circular Cylinder”, Problems of Continuum Mechanics (Muskhelishvili Anniversary volume), Society for Industrial and AppliedMathematics, Philadelphia, PA:148–154.

[21] Biot, M.A., (1965). Mechanics of Incremental Deformations, Wiley, NewYork.

[22] Demiray, H., Suhubi, E.S., (1970). “Small torsional oscillation in initially twisted circular rubber cylinder”, International Journal of Engineering Science 8:19–30.

[23] Belward, I.A., (1976). “The propagation of small amplitude waves in prestressed incompressible elastic cylinders”, International Journal of Engineering Science 14 (8):647–659.

[24] Guz, A.N., Kushnir, V.P. ve Makhort, F.G., (1975). “On the wave propagation in a cylinder with initial Stresses”, Izvestiya ANSSSR, Seriya Mekhanika Tverdogo Tela 5:67–74 (in Russian).

[25] Kushnir, V.P., (1979). “Longitudinal waves in the field of a transversally isotropic cylinder with initial stress”, International Applied Mechanics 15 (9): 884–886.

[26] Chadwick, P. ve Jarvis, D.A., (1979). “Interfacial waves in a pre-strained neo-Hooken body. I: Biaxial states of strain”, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 32:387–399.

[27] Chadwick, P. ve Jarvis, D.A., (1979). “Interfacial waves in a pre-strained neo-Hooken body. II: Triaxial states of strain”, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 32:401–418.

[28] Dowaik, M.A. ve Ogden, R.W., (1991). “Interfacial waves and deformations in pre-stressed elastic media”, Proceedings of the Royal Society of London, A 433:313–328.

[29] Ogden, R.W. ve Sotiropoulos, D.A., (1998). “Reflection of plane waves from the boundary of a pre-stressed compressible elastic half-space”, IMA Journal of Applied Mathematics, 61:61–90.

[30] Rogerson, G.A. ve Sandiford, K.J., (2000). “The effect of finite primary deformations on harmonic waves in layered elastic media”, International Journal of Solids and Structures, 37:2059–2087.

[31] Fu, Y.B. ve Mielke, A., (2002). “A new identity for the surface impedance matrix and its application to the determination of surface-wavespeeds”, Proceedings of the Royal Society of London, A 458:2523–2543.

[32] Qian, Z., Jin, F., Kishimoto, K. ve Wang, Z., (2004). “Effect of initial stress on the propagation behavior of SH-waves in multilayered piezoelectric composite structures”, Sensors and Actuators, A 112:368–375.

[33] Su, J., Kuang, Z.B. ve Liu, H., (2005). ”Love wave in ZnO/SiO2/Si structure with initial stresses”, Journal of Sound and Vibration, 286:981–999.

[34] Garg, N., (2007). “Effect of initial stress on harmonic homogeneous waves in viscoelastic anisotropic media”, Journal of Sound and Vibration, 303:515–525.

[35] Leung, A.Y.T. ve Fan, J., (2010). “Natural vibration of pre-twisted shear deformable beam systems subject to multiple kinds of initial stresses”, Journal of Sound and Vibration, 329:1901–1923.

[36] Truestell, C., (1961). “General and exact theory of waves in finite elastic strain”, Archive for Rational Mechanics and Analyses 8 (1):263–296.

[37] Suhubi, E.S. ve Eringen, A.C., (1975). Elastodynamics, Vol. I. Finite Motions, Academic Press, New York.

[38] Guz, A.N., (2002). “Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses”, International Applied Mechanics, 38 (1):23-59.

[39] Akbarov, S.D., Guz, A.N., (2004). “Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders”, International Journal of Engineering Science, 42:769–791.

[40] Akbarov, S.D., (2007). “Recent investigations on the dynamical problems of the elastic body with initial (residual) stresses (review)”, International Applied Mechanics, 43 (12):3–27.

[41] Akbarov, S.D. ve Guliev, M.S., (2009). “Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials”, CMES: Computer Modelingin Engineering and Science, 39 (2):155–177.

[42] Akbarov, S.D. ve Guliev, M.S., (2010). “The influence of the finite initial strains on the axisymmetric wave dispersion in a circular cylinder embedded in a compressible elastic medium”, International Journal of Mechanical Sciences 52:89–95.

[43] Akbarov, S.D. ve Guliev, M.S., (2008). “Propagation of axisymmetric longitudinal waves in a finitely pre-strained circular cylinder imbedded in a finitely pre-strained infinite elastic body”, Mechanics of Composite Materials, 44 (5):465–478.

[44] Akbarov, S.D., Guliev, M.S. ve Kepceler, T., (2011). “Dispersion relations of axisymmetric wave propagation in initially twisted bi-material compounded cylinders”, Journal of Sound and Vibration, 330:1644–1664.

[45] Ozturk, A. ve Akbarov, S.D., (2008). “Propagation of torsional waves in a pre-stretched compound circular cylinder”, Mechanics of Composite Materials, 44 (1):77–86.

[46] Ozturk, A. ve Akbarov, S.D., (2009). “Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder”, ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics /Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 89 (9):754–766.

[47] Ozturk, A. ve Akbarov, S.D., (2009). “Torsional wave propagation in a pre-stressed circular cylinder embedded in a pre-stressed elastic medium”, Applied Mathematical Modelling, 33:3636–3649.

[48] Kepceler, T., (2010). “Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compound cylinder with an imperfect interface”, Applied Mathematical Modelling, 34:4058–4073.

[49] Cilli, A. ve Ozturk, A., (2010). “Dispersion of torsional waves in initially stressed multilayered circular cylinders”, Mechanics of Composite Materials, 13(2):39–296.

[50] Öztürk A., (2007). Öngerilmeli Dairesel Bileşik Silindirlerde Burulma Dalga Yayılımı, Doktora Tezi.

[51] Akbarov, S.D., Kepceler, T., Egilmez, M.M. ve Dikmen, F., (2011). “Torsional Wave Propagation in the Finitely Pre-Stretched Hollow Bi-Material Compound Circular Cylinder”, Computers Materials & Continua (CMC), vol. 26 (2):91-109.

[52] Markus, S. ve Mead, D.J., (1995). “Wave motion in a three-layered, orthotropic–isotropic–orthotropic composite shell”, Journal of Sound and Vibration, 181:149–167.

[53] Kudlicka, J., (2004). “Energy flow of axisymmetric elastic waves in a three-layered, transtropic–isotropic–transtropic composite cylinder” , Journal of Sound and Vibration, 277:1093–1100.

[54] Akbarov, S.D., Kepceler, T. ve Egilmez, M.M. (2011). “Torsional wave dispersion in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder”, Journal of Sound and Vibration, 330:4519-4537.

[55] Akbarov, S.D., Kepceler, T. ve Egilmez, M.M. (2012). “On the Some Particularities of the Torsional Wave Dispersion in a Finitely Pre-Deformed Hollow Sandwich Cylinder”, Computers Materials & Continua (CMC), 30(1): 83-97.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Mahmut Mert EĞİLMEZ
Doğum Tarihi ve Yeri	: 23.05.1980 Gümüşhane
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: megilmez@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Mak. Teo. ve Kont.	Y.T.Ü.	2005
Lisans	Makine Müh.	Y.T.Ü.	2003
Lise	Fen Bilimleri	Vatan Anadolu Lisesi	1998

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2007- Halen	Yıldız Teknik Üniversitesi	Arş. Gör.
2006-2007	Medica Tıbbi Cihazlar San. Tic. Ltd.	Ar-Ge Müh.
2002-2006	OtoYedekParca.com	Proje Geliştirme ve Yönetim

YAYINLARI

Makale

1. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, "Torsional Wave Dispersion in a Finitely Pre-strained Hollow Sandwich Circular Cylinder", *JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION*, 330 (18-19):4519-4537, 2011.

2. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, Ferhat Dikmen, "Torsional Wave Propagation in the Finitely Pre-Stretched Hollow Bi-Material Compound Circular Cylinder", *COMPUTERS MATERIALS & CONTINUA (CMC)*, 26 (2):91-109, 2011.

3. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, "On the Some Particularities of the Torsional Wave Dispersion in a Finitely Pre-Deformed Hollow Sandwich Cylinder", *COMPUTERS MATERIALS & CONTINUA (CMC)*, 30(1):83-97, 2012.

4. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, F. Dikmen, "Torsional Wave Propagation in Sandwich Hollow Cylinder With Pre-Strained Face (Core) Layers (Layer)", Advanced Materials Research, 445:1094-1099, 2012.

Bildiri

1. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, "The Effect of the Finite Pre-straining of the Covering Cylindrical Layer on the Torsional Wave Dispersion in the Bi-material Compound Circular Cylinder", International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences (ICCES'10), March 2010, Las Vegas, Nevada, USA.

2. T.Kepceler, F. Dikmen ve **M. Mert Egilmez**, “The Axisymmetric Torsional Wave Dispersion in the Finitely Pre-Stretched Hollow Bi-Material Compound Circular Cylinder”, XVI. International Conference on “Mechanics of Composite Materials” (MCM 2010), May 2010, Riga, Latvia.

3. T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, “On the Axisymmetric Torsional Wave Dispersion and Its Controlling in the Finitely Pre-stretched Bi-material Compound Circular Cylinder”, ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering System Design and Analysis (ESDA 2010), July 2010, Istanbul, Turkey.

4. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, “Torsional Wave Propagation in a Pre-Strained Hollow Three-Layered Circular Cylinder”, The 10th International Conference on Vibration Problems (ICOVP 2011), September 2011, Prague, Czech Republic.

5. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, “Torsional Wave Dispersion in a Pre-Strained Hollow Sandwich Cylinder with Soft Core”, International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE 2011), November 2011, Denver, Colorado, USA.

6. S.D. Akbarov, T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, “The Influence of the Initial Strains of Face Layers on the Torsional Wave Propagation in a Hollow Sandwich Cylinder (Soft Core and Stiff Face Layers)”, XVII. International Conference on “Mechanics of Composite Materials” (MCM 2012), May 2012, Riga, Latvia.

7. T. Kepceler ve **M.Mert Egilmez**, “Sonlu Önşekildeğiştirmesi Olan İçi Boş Çift Katmanlı Dairesel Bileşik Silindirde Aksisimetrik Burulma Dalga Dispersiyonu”, 17. Ulusal Mekanik Kongresi (TUMTMK 2011), Fırat Üniversitesi, Elazığ, 5-9 Eylül 2011.

Proje

1. “Milli Rüzgar Enerji Sistemleri Geliştirilmesi ve Prototip Türbin Üretimi (MİLRES)”, TÜBİTAK 1007, Doç. Dr. Mahmut Faruk AKŞİT yürütücülüğünde, “Mekanik Sistemler Ana İş Paketi”ne bağlı alt iş paketi “Dişli Kutusu” tasarımı ve imalatında Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPCELER’in ekibinde yer alıyorum, Proje No: 110G010, Ocak 2011-… (Bursiyer).