

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE
BULUNAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ ÜZERİNE**

Mat.Yük.Müh.Fatma AYDIN AKGÜN

**FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi :05/06/2008

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Mehmet BAYRAMOĞLU (Y.T.Ü.)

Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Akın Taşdizen (KÜLTÜR Ü.)

: Prof.Dr. Elimhan MAHMUDOV (İTÜ)

: Prof. Dr. Ömer GÖK (YTÜ)

: Doç.Dr. Ayşe KARA (YTÜ)

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ.....	1
2. SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN MATRİS KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE.....	8
2.1 Probleme Giriş.....	8
2.2 Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonları	11
2.3 Problemin Uygun Bir Hilbert Uzayında Bir Kendine-Eş Operatöre İndirgeyerek Spektral Özelliklerinin İncelenmesi	14
2.4 Özfonksiyonlara Göre Açılım	21
2.5 A Operatörünün Spektral Fonksiyonu ve Rezolventi.....	28
3. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN GECİKEN ARGUMANLI SÜREKLİ OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI ÜZERİNE.....	32
3.1 Problem Giriş.....	32
3.2 Varlık Teoremi.....	36
3.3 Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimptotik Formülleri.....	39
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	59
KAYNAKLAR.....	60
ÖZGEÇMİŞ.....	64

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bana desteklerini esirgemeyen ve bana çok şey öğreten hocalarım başta Sayın Prof.Dr.Mehmet BAYRAMOĞLU'na ve Sayın Doç.Dr.Azad BAYRAMOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aldığım eğitim ve öğretimin yanında hayatım boyunca daima ilgi, destek, yardım ve fedakarlıklarını esirgemeyen, benim için çok değerli olan babam Vedat AYDIN ve annem Neriman AYDIN'a emeklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Aynı zamanda bu uzun çalışma sürecinde beni destekleyen ve tüm zor zamanlarımda yanımda olan eşime, oğluma, kardeşlerime ve dostlarıma çok teşekkür ederim .

Beni bu mesleği seçmem, bu alanda ilerlemem için teşvik eden çok sevgili hocam merhum Prof. Tahir ŞİŞMAN'ı saygıyla anıyorum.

SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Fatma AYDIN AKGÜN
Matematik Mühendisliği, Doktora Tezi

Sınır koşulunda spektral parametre bulunan sınır değer problemleri fizik problemlerinin çözümünde ortaya çıkmış ve günümüze kadar bu tür problemlerin birçok özelliği değişik çalışmalarda incelenmiştir. Bu tezde sınır koşulunda spektral parametre bulunan iki tip problem ele alınmıştır. İlk olarak sınır koşulunda spektral parametre bulunan matris katsayılı ikinci dereceden sınır değer probleminin spektrumu incelenmiş ve özfonksiyonlara göre açılım formülü elde edilmiştir. Bunun yanı sıra bu sınır değer problemi ile tanımlanan kendine eş operatörün bir alt uzayda spektral fonksiyonunun ve rezolventinin matris çekirdekli integral operatörler olduğu gösterilmiştir. İkinci olarak süreksizlik noktasında dönüşüm koşullarına sahip, sınır koşullarında spektral parametre bulunan, geciken argümanlı sürekli olmayan sınır değer problemi incelenmiş, özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kendine-eş operatör, spektral parametre, özdeğer, geç kalan argümanlı diferansiyel denklem

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS WHICH HAVE SPECTRAL PARAMETERS IN BOUNDARY CONDITIONS

Fatma AYDIN AKGUN
Mathematical Engineering, Doctorate Thesis

Boundary value problems which have spectral parameter in boundary conditions are encountered while solving physics problems and until now various properties of this kind of problems are examined in several studies. In this thesis two types of problems which have spectral parameters in boundary conditions are handled. Firstly, the spectrum of second order boundary value problem with matrix coefficients, which has spectral parameter in boundary condition, is examined and expansion formulas according to eigenfunctions are obtained. Besides it is shown that spectral function and resolvent of self adjoint operator which is defined by this boundary value problem in a subspace are integral operators with matrix kernel. Second, discontinuous boundary value problem with retarded argument which has spectral parameter in boundary conditions and transmission conditions in discontinuity is examined, the asymptotic expressions of eigenvalues and eigenfunctions of this boundary value problem are obtained.

Keywords: Self-adjoint operator, spectral parameter, eigenvalue, differential equation with retarded argument

1. GİRİŞ

Sınır koşulunda spektral parametre bulunan Sınır Değer Problemleri bazı fizik ve mekanik problemlerin çözümünde ortaya çıkmıştır.

İlk olarak Poisson (1820) bir mekanik problemini sınır koşulunda spektral parametre bulunan

$$-y'' = \lambda y, \quad a < x < b$$

$$y(0) = 0, \quad y'(b) = \lambda y(b)$$

şeklinde sınır değer probleminin incelenmesine indirgemıştır. Bu çalışmadan günümüze kadar sınır koşulunda spektral parametre bulunan birçok sınır değer problemi incelenmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak sırasıyla Walter (1973), Poisson(1820), Fulton (1977, 1980), Russakovskii (1975, 1996), Binding, Browne, Seddighi (1993), Amara (2004), Binding, Browne ve Watson (2006) çalışmaları gösterilebilir. Özet kısmında da belirtildiği gibi bu tez çalışması iki bölümden oluşmuştur.

Tezin birinci bölümünde

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda R(x)y, \quad a < x < b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x)y'(x) = 0$$

$$\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = -\lambda \alpha_1 y(b)$$

sınır değer probleminin spektrumu ve özfonksiyonlara göre açılım formülleri incelenmiştir. Bunun yanı sıra bu sınır değer problemine karşılık gelen kendine eş operatörün spektral fonksiyonunun ve rezolventinin matris çekirdekli integral operatörler olduğu gösterilmiştir. Katsayıları $n \times n$ boyutlu matrisler olmak üzere, ek koşullarla, göz önüne alınan bu problem katsayıları adi fonksiyonlar olan Walter (1973) çalışmasının genelleştirilmesidir.

Çalışmanın ikinci bölümünde

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) + q(x)y(x - \Delta(x)) = 0$$

denklemini,

$$\lambda y(0) + y'(0) = 0, \quad ,$$

$$\lambda^2 y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

sınır koşulları

ve

$$y\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0$$

dönüşüm koşullarıyla verilen geciken argumanlı, denklemde ve sınır koşullarında özdeğer bulunan süreksiz sınır değer problemi göz önüne alınmış, problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri bulunmuştur.

Belirtelim ki, ilk olarak ikinci mertebeden geç kalan argumanlı diferansiyel denklem için Sturm-Liouville tipli sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri Norkin (1958) tarafından bulunmuştur. Bizim çalışmamızdaki problemin süreklilik hali Bayramoglu, Özden Köklü, Baykal (2001, 2002) çalışmalarında incelenmiştir.

Sınır koşulunda spektral parametre bulunmayan ikinci mertebeden geç kalan argumanlı süreksiz diferansiyel denklemin spektral özellikleri Bayramov, Öztürk Uslu, Kızılbudak (2007) çalışmasında incelenmiştir.

Geç kalan argumanlı diferansiyel denklem yardımıyla oluşturulan farklı sınır değer problemlerinin farklı özellikleri (örneğin; özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik ifadeleri, özfonksiyonlara göre açılım formülleri, özdeğerlerin dağılımı, özdeğerler için iz formülleri vs.) birçok makalede incelenmiştir. Örneğin Bayramoglu, Özden Köklü, Baykal (2001, 2002), Deminko, Matveeva, (2005), Demidenko, Likhoshvai (2005), Jablonski, Twardowska (1987), Kamenskii (1954), Nersesjan (1961), Norkin (1958,1972) çalışmalarında. Bellman, Cook (1963), Norkin (1972) çalışmaları bu tür problemlerin çeşitli fizik uygulamalarının listesini vermektedir.

Tezin kolay şekilde anlaşılması için gereken bazı önbilgiler aşağıda verilmiştir..

H herhangi bir Hilbert uzayı , $T : H \rightarrow H$ ise tanım kümesi $D(T)$ olan bir lineer operatör olsun. Eğer $x_n \in D(T)$ dizisi için $x_n \rightarrow x, Tx_n \rightarrow y$ iken $x \in D(T)$ ve $y = Tx$ sağlanıyorsa o zaman T 'ye **kapalı operatör** denir.

Eğer $x_n \in D(T), x_n' \in D(T)$ için $x_n \rightarrow x, x_n' \rightarrow x'$ ve $Tx_n \rightarrow y, Tx_n' \rightarrow y'$ iken $y = y'$ olursa o zaman T 'ye **kapanışa sahip operatör** denir. T lineer operatör olduğundan bu tanım aşağıdaki tanıma denktir.

$x_n \in D(T)$, $x_n \rightarrow 0$ ve $Tx_n \rightarrow y$ iken $y=0$ olursa o zaman T 'ye **kapanışa sahip operatör** denir. T kapanışa sahip operatör olsun. D' ise $x_n \in D(T)$, $x_n \rightarrow x$, $Tx_n \rightarrow y$ olacak şekilde $x \in H$ elemanlarının kümesi olsun. Buradan D' de $\overline{Tx} = y$ olacak şekilde $\overline{T}$ operatörünün tanımlandığı açıktır. $\overline{T}$ lineer kapalı operatördür ve T 'nin genişletilmesidir. $\overline{T}$ operatörüne T 'nin **kapanışı** denir.

Eğer $\lambda \in C$ (C kompleks sayılar cisimidir) için $(T - \lambda I)^{-1}$ (I birim operatör) ters operatörü bütün H 'da tanımlı, sınırlı operatör ise o zaman λ sayısına T 'nin **regular noktası** denir. Regular noktalar kümesi $\rho(T)$ sembolü ile gösterilir. $C \setminus \rho(T)$ kümesine T operatörünün **spektrumu** denir ve $\sigma(T)$ sembolü ile gösterilir. $\rho(T)$ kümesine T 'nin **rezolvent kümesi** de denir. $\rho(T)$ 'de tanımlı , $(T - \lambda I)^{-1}$ operatör değerli fonksiyona T 'nin **rezolventi** denir. Tanımdan görüldüğü gibi T 'nin özdeğerleri $\sigma(T)$ 'ye aittir. H uzayı sonlu boyutlu olduğunda $\sigma(T)$ sadece özdeğerlerden ibarettir fakat H sonsuz boyutlu uzay olduğunda bu söylenemez. T 'nin özdeğerler kümesi σ_d ile gösterilir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x_n = 0$ olacak şekilde sınırlı, kompakt olmayan $x_n \in D(T)$ dizisi varsa o zaman λ sayısı T operatörünün bir **esaslı (essential) spektrum noktasıdır** denir. T 'nin esaslı spektrum noktalar kümesi $\sigma_e(T)$ sembolü ile gösterilir. Tanımdan görüldüğü gibi

$$\sigma_e(T) \subset \sigma(T)$$

sağlanır.

Yine T 'nin sonsuz katlı özdeğerlerinin $\sigma_e(T)$ 'ye ait olduğu açıktır. Eğer $(T - \lambda I)^{-1}$ varsa ve H 'da her yerde yoğun olmayan kümede tanımlanmışsa $(\overline{D(T - \lambda I)})^{-1}, D(T - \lambda I)^{-1}$ 'in kapanışı iken $\overline{D(T - \lambda I)}^{-1} \neq H$ ise bu koşulu sağlayan λ 'lara T 'nin **residüal (kalan) spektrum noktaları** denir. Bu küme $\sigma_r(T)$ ile gösterilir.

T, H 'da her yerde yoğun $D(T)$ kümesinde $(\overline{D(T)} = H)$ tanımlı lineer operatör olsun. Her $x \in D(T)$ için

$$(Tx, y) = (x, y^*)$$

koşulunu sağlayan y elemanlar kümesini D^* ile gösterelim. $y \in D^*$ elemanına bir tek $y^* \in H$ elemanı karşılık gelir. Bu karşılık getirmeyi gerçekleştiren operatöre T 'nin **eşleniği** denir ve T^* ile gösterilir. T^* lineer operatördür.

Böylece

$$x \in D(T), y \in D(T^*); D(T^*) = D^* \text{ iken}$$

$$(Tx, y) = (x, T^*y)$$

olur. $T : D(T) \subset H \rightarrow H, (\overline{D(T)} = H)$ lineer operatörü $\forall x, y \in D(T)$ için

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

eşitliğini sağlıyorsa T 'ye **simetrik operatör** denir. Eşlenik operatörün tanımına göre T 'nin simetrik operatör olması için $T \subset T^*$ olması gerek ve yeterdir. T simetrik operatör iken $(Tx, x) (x \in D(T))$

kuadratik formu reel değerlidir. $T : H \rightarrow H$ simetrik operatörü

$$\forall x \in D(T) \text{ için}$$

$$(Tx, x) \geq \alpha(x, x) \quad ((Tx, x) \leq \beta(x, x))$$

olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R} (\beta \in \mathbb{R})$ varsa o zaman T 'ye **alttan sınırlı (üstten sınırlı) operatör** denir. $\alpha > 0 (\alpha \geq 0)$ iken T simetrik operatörüne **pozitif (negatif olmayan) operatör** denir.

Eğer $T = T^*$ ise T 'ye **kendine eş operatör** denir. Tanımdan görüldüğü gibi her kendine eş operatör simetriktir fakat bunun tersi söylenemez.

Simetrik operatörün özdeğerleri reeldir. Reel olmayan sayılar kümesi kendine eş operatörün regular noktalar(rezolvent) kümesine aittir. Yani $T^* = T$ iken $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ koşulunu sağlayan $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\rho(T)$ 'ye aittir. Bunun yanı sıra $T^* = T$ iken $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ dir.

Eğer T simetrik operatörünün kapanışı kendine eş operatör ise yani

$$(\overline{T})^* = \overline{T}$$

ise o zaman T 'ye **esash (essential) kendine eş operatör** denir.

Belirtelim ki her yerde yoğun kümede tanımlı ve kapanışa sahip T operatörü için

$$T^{**} = \overline{T}$$

sağlanır.

T simetrik operatör iken her λ için $(T - \lambda I)$ 'nin değer kümesi $R(T - \lambda I)$ ve $R(T - \bar{\lambda} I)$ kümesi bütün H uzayı ile çakışırsa yani

$$R(T - \lambda I) = R(T - \bar{\lambda} I) = H$$

ise o zaman T kendine eş operatördür. Burada $\bar{\lambda}$ sayısı, λ 'nın kompleks eşleniğini gösterir.

$T : H \rightarrow H$ simetrik operatör iken aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem (Weidman,1980) T simetrik operatörünün kendine eş olması için her λ ($\text{im}\lambda \neq 0$) sayısı için

$$R(T^* - \lambda I) = R(T^* - \bar{\lambda} I) = H$$

olması gerek ve yeter koşuldur.

Not Eğer T kapalı simetrik operatör ise o zaman her λ ($\text{im}\lambda \neq 0$) için $R(T^* - \lambda I)$ kapalı kümedir, yani

$$\overline{R(T^* - \lambda I)} = R(T^* - \lambda I)$$

$R(T^* - \lambda I)$ lineer manifoldunun H 'ya tümleyeni $(R(T^* - \lambda I))^\perp = \eta_\lambda$ 'nın boyutuna T 'nin λ noktasında **defekt sayısı** denir. Eğer $\text{im}\lambda > 0$ ($\text{im}\lambda < 0$) koşunu sağlayan herhangi bir λ noktasında

$$\dim \eta_\lambda = m \quad (\dim \eta_\lambda = n)$$

ise o zaman keyfi $\text{im}\lambda > 0$ ($\text{im}\lambda < 0$) koşulunu sağlayan **her** λ için

$$\dim \eta_\lambda = m \quad (\dim \eta_\lambda = n)$$

dir. Yani $\dim \eta_\lambda$, λ üst yarı düzlemde (alt yarı düzlemde) iken λ noktasının seçiminden bağımsızdır.

$$(m, n)$$

çiftine T operatörünün **defekt indisi** denir. Belirtelim ki m ve n sayıları sonlu veya sonsuz olabilirler. Eğer T operatörünün defekt indisi (n, n) şeklinde ise o zaman T operatörü kendine eş genişlemeye sahiptir. Belirtelim ki

$$\eta_\lambda = \{x \in D(T^*) : T^*x = \bar{\lambda}x\} \text{ ve } \eta_{\bar{\lambda}} = \{x \in D(T^*) : T^*x = \lambda x\}$$

şeklindedir.

Teorem (Weidman, 1980) Kapalı T simetrik operatörünün defekt indisinin

$$(0,0)$$

olması için T 'nin kendine eş olması gerek ve yeterlidir.

İfade ettiğimiz teoremde T keyfi simetrik operatör ise o zaman T 'nin defekt indisinin $(0,0)$ olması için T 'nin esaslı kendine eş operatör olması gerek ve yeterlidir.

Eğer T simetrik operatörünün defekt indisi $n < \infty$ ve (n, n) şeklinde ise o zaman T 'nin her simetrik genişletilmesi olan S operatörü T 'nin sonlu boyutlu bir genişlemesidir. Yani M bir lineer manifold ve $\dim M \leq n$ olmak üzere

$$D(S) = D(T) + M, \quad D(T) \cap M = \{0\},$$

şeklinde gösterilebilir. Burada

$$D(T) + M = \{x + y : x \in D(T), y \in M\}$$

şeklindedir.

Teorem (Weidmann, 1980) T defekt indisi (n, n) , $n < \infty$ olan bir operatör iken, bunun her simetrik genişletilmesi $\tilde{T}$ ile T 'nin esaslı spektrumu çakışır. Yani $\sigma_e(\tilde{T}) = \sigma_e(T)$ dir.

$A = A^*$ kendine eş operatörü için aşağıdaki özelliklere sahip bir E_λ ($\lambda \in \mathfrak{R}$) **spektral fonksiyonu (veya birim açılımı)** vardır. (Akhiezer, Glazman, 1987; Weidmann, 1980; Smirnov, 1964)

1. E_λ , her $\lambda \in \mathfrak{R}$ için bütün H 'da tanımlı bir iz düşüm operatörüdür. Yani

$$E_\lambda = E_\lambda^* \text{ ve } E_\lambda^2 = E_\lambda \text{ dır.}$$

2. Her $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$ için

$$E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda, \mu)}.$$

$$3. E_{\lambda-0} = E_{\lambda}.$$

4. Her $x \in H$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_{\lambda} x = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_{\lambda} x = x$$

E_{λ} 'nin yardımıyla I birim operatörü ve A operatörü sırasıyla

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dE_{\lambda}, \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$$

formülleri ile ifade edilir.

Geç kalan argümanlı 2. mertebeden lineer diferansiyel denklem genel olarak

$$x''(t) = \sum_{i=0}^n \left(a_i(t)x(t - \Delta_i(t)) + b_i(t)x'(t - \Delta_i(t)) \right) + c(t)$$

formundadır. Burada $\Delta_i(t) \geq 0$, $a_i(t)$, $b_i(t)$ ve $c(t)$ 'ler bilinen fonksiyonlar ve $x'(t - \Delta_i(t))$, $x(z)$ fonksiyonunun $z = t - \Delta_i(t)$ noktasındaki türevidir.

2. SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN MATRİS KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE

2.1 Probleme Giriş

Aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$l(y) = -(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda R(x)y, \quad a < x < b \quad (2.1.1)$$

$$y^{[1]}(a) = 0 \quad \left(y^{[1]}(a) = \lim_{x \rightarrow a} P(x)y'(x) \right) \quad (2.1.2)$$

$$-U_\beta(y) = \lambda(U_\alpha)y \quad (2.1.3)$$

Burada

$$U_\alpha(y) = \alpha_1 y(b)$$

$$U_\beta(y) = \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)$$

şeklindedir, ayrıca

$$P(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & \cdot & p_{1n}(x) \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ p_{n1}(x) & \cdot & p_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & \cdot & q_{1n}(x) \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ q_{n1}(x) & \cdot & q_{nn}(x) \end{pmatrix} \text{ ve } R(x) = \begin{pmatrix} r_{11}(x) & \cdot & r_{1n}(x) \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ r_{n1}(x) & \cdot & r_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

elemanları reel değerli sürekli fonksiyon olan kendine-eş $n \times n$ boyutlu matrisler, $P(x)$,

$P(b) > 0$ olmak üzere negatif olmayan matris, $\int_a^b \|P^{-1}(x)\| dx < \infty$ ve $R(x)$ pozitif tanımlı

matristir. Ayrıca $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ ise $\alpha_1 \beta_1 < 0$ ve $\alpha_1 \beta_2 = 1$ koşullarını sağlayan reel sayılar, λ

kompleks parametre ve $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \cdot \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in L_{2,R}[a, b]$ elemanları $[a, b]$ de tanımlı kompleks

değerli fonksiyon olan n bileşenli vektör fonksiyonudur. $\|P^{-1}(x)\|$, $P^{-1}(x)$ 'in normunu gösterir. Belirtelim ki $P(x)$ ve $Q(x)$ 'in sürekliliği basitlik için kabul edilmiştir.

Genelde $Q(x)$ 'in elemanlarının ölçülebilirliği ve $\int_a^b \|Q(x)\|dx < \infty$ olması, $P(x)$ 'in negatif olmaması, $\int_a^b \|P^{-1}(x)\|dx < \infty$ koşulunu sağlaması ve elemanlarının ölçülebilirliği yeterlidir.

Bu bölümde (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer probleminin spektrumunu ve özfonksiyonlara göre açılım formülünü inceleyeceğiz. Bunun yanı sıra bu sınır değer problemine karşılık gelen kendine eş operatörün spektral fonksiyonunun ve rezolventinin matris çekirdekli integral operatörler olduğunu göstereceğiz.

$L_{2,R}[a,b]$ ile her bileşeni ölçülebilir, kompleks değerli ve

$$\int_a^b (R(x)y(x), y(x))dx < \infty,$$

koşulunu sağlayan $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ vektörlerinin kümesini gösterelim.

Bu kümede iki vektörün toplamını

$$y(x) + z(x) = (y_1(x) + z_1(x), y_2(x) + z_2(x), \dots, y_n(x) + z_n(x)) \text{ ile}$$

bir vektörün skalerle çarpımını

$$\alpha y(x) = (\alpha y_1(x), \alpha y_2(x), \dots, \alpha y_n(x))$$

şeklinde tanımlarsak $L_{2,R}[a,b]$ kümesi lineer uzay oluşturur. Eğer iki vektörün iç çarpımını

$$(y, z) = \int_a^b (R(x)y(x), z(x))dx$$

şeklinde tanımlarsak $L_{2,R}[a,b]$ uzayı aşağıdaki norma göre tam iç-çarpım uzayı yani Hilbert uzayı oluşturur.

$$\|y\| = \sqrt{\int_a^b (R(x)y(x), y(x))dx}$$

Tanımladığımız iç-çarpım ve normla oluşturulan Hilbert uzayını da $L_{2,R}[a,b]$ sembolüyle göstereceğiz. $n=1$ iken, (a,b) de tanımlı fonksiyonlar için, $L_{2,R}[a,b]$ bilinen Hilbert uzayıdır.

Öncelikle (2.1.1) ifadesiyle oluşturulan maksimal ve minimal operatörlerin tanımlarını verelim.

D_1 , (a, b) açık aralığının her kapalı alt aralığında kendisi ve $y^{[1]}(x) = P(x)y'(x)$ 'in her bileşeni mutlak sürekli olan $y(x)$ vektör fonksiyonlarının kümesi olsun. $R^{-1}(x)l(y)$, D_1 'e ait her $y(x)$ vektör fonksiyonu için tanımlı olduğu kolayca görülür. D_1 , $L_{2,R}[a, b]$ de her yerde yoğun olan bir lineer manifolddur. $y(x)$ elemanlarının (vektör fonksiyonlarının) kümesini

$$y(x) \in D_1 \cap L_{2,R}[a, b] \text{ ve } l(y) \in L_{2,R}[a, b]$$

iken D ile gösterelim. Tanım kümesi D olan L operatörünü $\forall y(x) \in D$ ve iken

$$Ly = R^{-1}(x)l(y)$$

şeklinde tanımlayalım.

$L : L_{2,R}[a, b] \rightarrow L_{2,R}[a, b]$ operatörüne $L_{2,R}[a, b]$ de $R^{-1}(x)l(y)$ ile oluşturulan **maksimal operatör** denir (Weidman, 1980). Burada L 'nin bir lineer operatör olduğu açıktır. (a, b) aralığında sonlu desteye sahip ve D 'ye ait fonksiyonların kümesini D_0' ile gösterelim. D_0' , $L_{2,R}[a, b]$ 'de hemen her yerde yoğundur (Weidman, 1980). Tanım kümesi D_0' olan L_0' operatörünü tanımlayalım, öyleki her $y \in D_0'$ için

$$L_0'y = R^{-1}(x)l(y) ,$$

şeklindedir. L_0' 'in bir simetrik operatör olduğu kolayca görülür.

L_0' 'in kapanışını L_0 ile gösterelim. Bu durumda L_0 operatörü $L_{2,R}[a, b]$ 'de

$$R^{-1}(x)l(y)$$

ile oluşturulan **minimal (kapalı) operatördür**.

$\int_a^b \|P^{-1}(x)\| dx < \infty$ koşulundan $y(x) \in D(L)$ için $y(a), y^{[1]}(a), y(b), y^{[1]}(b)$ vardır ve L_0 'in tanım kümesi

$$D(L_0) = \{y(x) \in D(L) : y(a) = y^{[1]}(a) = y(b) = y^{[1]}(b) = 0\}$$

şeklindedir.

$L_0^* = L$ olduğu ve L_0 'ın defekt indisinin $(2n, 2n)$ olduğu bilinmektedir (Weidman, 1980).

$L_{2,R}[a, b]$ 'de T operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$D(T) = \{y(x) \in L_{2,R}[a, b], y(x) \text{ ve } y^{[1]}(x), [a, b] \text{ 'de mutlak sürekli } R(x)^{-1}l(y) \in L_{2,R}[a, b]$$

$$y^{[1]}(a) = 0, U_\beta(y) = 0\}$$

ve

$$\forall y(x) \in D(T) \text{ için}$$

$$Ty = R^{-1}(x)l(y)$$

olsun. Böyle tanımlanmış $T : L_{2,R}[a, b] \rightarrow L_{2,R}[a, b]$ operatörü kendine eş operatördür (Weidman, 1980). Tanımladığımız T operatörünü daha sonra kullanacağız.

(2.1.1)-(2.1.3) probleminde görüldüğü gibi λ özdeğeri (kompleks spektral parametre) (2.1.3) koşulunda bulunmaktadır. Buna göre lineer operatörler teorisinin yöntemleri direkt olarak uygulanamıyor, fakat (2.1.1)-(2.1.3) problemi daha geniş uzayda göz önüne alınırsa, problem olağan sınır değer problemine indirgenebilir.

2.2 Problemin Özdeğer ve Özfonksiyonları

(2.1.1)-(2.1.3) probleminin özfonksiyonu denildiğinde ; $[a, b]$ aralığında birinci türevi ve $y^{[1]}(x)$ fonksiyonu mutlak sürekli, (2.1.1) denklemini ve (2.1.2)-(2.1.3) koşullarını sağlayan, özdeş olarak sıfır olmayan $\forall y(x)$ fonksiyonu anlaşılır, ve burada λ sayısı da $y(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen özdeğerdir. $y(x) \equiv 0$ fonksiyonu λ keyfi sayı iken sınır değer probleminin çözümüdür. (Bu fonksiyon (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonu sayılmıyor). Biz bazen $P(b)y'(b)$ ifadesini $y^{[1]}(b)$ ile göstereceğiz.

(2.1.1)-(2.1.3) probleminin kompleks özdeğerleri λ_1 ve λ_2 , sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen kompleks özfonksiyonlar ise $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ olsun. Bu durumda

$$-(P(x)y_1')' + Q(x)y_1 = \lambda_1 R(x)y_1, \quad a < x < b \quad (2.2.1)$$

$$-U_\beta(y_1) = \lambda_1 U_\alpha(y_1) \quad (2.2.2)$$

$$y_1^{[1]}(a) = 0 \quad (2.2.3)$$

ve

$$-\left(P(x)y_2'\right)' + Q(x)y_2 = \lambda_2 R(x)y_2 \quad , \quad a < x < b \quad (2.2.4)$$

$$-U_\beta(y_2) = \lambda_2 U_\alpha(y_2) \quad (2.2.5)$$

$$y_2^{[1]}(a) = 0 \quad (2.2.6)$$

olur. (2.2.1) in her iki yanını sağdan $\overline{y_2}$ ile (2.2.4)' ün ise her iki yanını soldan $\overline{y_1}$ ile skaler çarpalım (C^n uzayı anlamında)(Burada $\overline{y}$ ile bilşenleri y 'nin bileşenlerinin kompleks eşleniği olan vektör gösterilmiştir). Böylece

$$-\left(\left(P(x)y_1'\right)', \overline{y_2}\right) + \left(Q(x)y_1, \overline{y_2}\right) = \lambda_1 \left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right)$$

$$-\left(\left(P(x)y_2'\right)', \overline{y_1}\right) + \left(Q(x)y_2, \overline{y_1}\right) = \lambda_2 \left(R(x)y_2, \overline{y_1}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki ifade birbirinden çıkarıldığında, $R(x)$ kendine eş matris olduğundan

$$\begin{aligned} & -\left(\left(P(x)y_1'\right)', \overline{y_2}\right) + \left(\left(P(x)y_2'\right)', \overline{y_1}\right) = \\ & -\left(\left(P(x)y_1'\right)', \overline{y_2}\right) + \left(\left(P(x)y_2'\right)', \overline{y_1}\right) = (\lambda_1 - \lambda_2) \left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanının integrali alınırsa;

$$-\left(P(x)y_1', \overline{y_2}\right)_a^b + \left(P(x)y_2', \overline{y_1}\right)_a^b = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) \left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right) dx \quad (2.2.7)$$

olur. (2.1.2) koşulundan dolayı $y_1^{[1]}(a) = 0$ ve $y_2^{[1]}(a) = 0$ olduğundan (2.2.7) eşitliği

$$-\left(P(b)y_1'(b), \overline{y_2(b)}\right) + \left(P(b)y_2'(b), \overline{y_1(b)}\right) = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) \left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right) dx \quad (2.2.8)$$

şeklini alır.

$$U_\alpha(y) = \alpha_1 y(b)$$

ve

$$U_\beta(y) = \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)$$

eşitliklerinden $y(b)$ ve $y'(b)$ sırasıyla

$$y(b) = \frac{U_\alpha(y)}{\alpha_1} \quad (2.2.9)$$

$$y'(b) = \beta_1 U_\alpha(y) - \alpha_1 U_\beta(y) \quad (2.2.10)$$

şeklinde bulunur. (2.2.9) ve (2.2.10) eşitlikleri (2.2.8) de kullanıldığında (2.2.8) eşitliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned} & - \left[\left(P(b) (\beta_1 U_\alpha(y_1) - \alpha_1 U_\beta(y_1)) \frac{U_\alpha(\overline{y_2})}{\alpha_1} \right) - \left(P(b) (\beta_1 U_\alpha(y_2) - \alpha_1 U_\beta(y_2)) \frac{U_\alpha(\overline{y_1})}{\alpha_1} \right) \right] \\ & = - \left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} (P(b) U_\alpha(y_1), U_\alpha(\overline{y_2})) - (P(b) U_\beta(y_1), U_\alpha(\overline{y_2})) - \frac{\beta_1}{\alpha_1} (P(b) U_\alpha(y_2), U_\alpha(\overline{y_1})) + (P(b) U_\beta(y_2), U_\alpha(\overline{y_1})) \right] \\ & = (P(b) U_\beta(y_1), U_\alpha(\overline{y_2})) - (P(b) U_\beta(y_2), U_\alpha(\overline{y_1})) \\ & = -\lambda_1 (P(b) U_\alpha(y_1), U_\alpha(\overline{y_2})) + \lambda_2 (P(b) U_\alpha(y_2), U_\alpha(\overline{y_1})) \end{aligned}$$

olur. Buradan (2.2.8)

$$-(\lambda_1 - \lambda_2) (P(b) U_\alpha(y_1), U_\alpha(\overline{y_2})) = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) (R(x) y_1, \overline{y_2}) dx$$

şeklini alır ve böylece

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left[\int_a^b (R(x) y_1, \overline{y_2}) dx + (P(b) U_\alpha(y_1), U_\alpha(\overline{y_2})) \right] = 0 \quad (2.2.11)$$

bulunur. (2.1.1) denkleminin katsayıları, elemanları reel değerli sürekli fonksiyon olan matrisler olduğundan $\overline{y_1}(x)$ fonksiyonunda $\overline{\lambda_1}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olacaktır.

Buna göre (2.2.11) da y_2 yerine $\overline{y_1}(x)$ konulursa

$$(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}) \left[\int_a^b (R(x) y_1, y_1) dx + (P(b) U_\alpha(y_1), U_\alpha(y_1)) \right] = 0 \quad (2.2.12)$$

elde edilir. Burada $y_1(x) \neq 0$, $P(b) > 0$ ve $R(x)$ pozitif matris olduğundan (2.2.12) eşitliğinin sağlanması için $(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}) = 0$ olması gerektiği açıktır.

Dolayısıyla

$$\operatorname{Im} \lambda_1 = 0 \quad (2.2.13)$$

bulunur. Böylece (2.2.13) denkleminde λ_1 özdeğerinin reel olduğu görülür ve λ_1 keyfi özdeğer olduğundan (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin reel sayılardan oluştuğu sonucuna varılır. Ele aldığımız problemin katsayıları ve özdeğerleri reel olduğundan dolayı özfonksiyonları da reel değerli alınabilir. Bu sonuca göre bundan sonraki hesaplarda (2.1.1)-(2.1.3) probleminin özfonksiyonlarının $\Re^n$ değerli olduklarını varsayacağız.

2.3 Problemin Uygun Bir Hilbert Uzayında Bir Kendine-Eş Operatöre İndirgeyerek Spektral Özelliklerinin İncelenmesi

Öncelikle $[a, b]$ aralığında aşağıdaki şekilde bir “ μ ölçümü” tanımlayalım

$$\mu(m) = \begin{cases} \int_m R(x) dx & m \subset [a, b) \\ P(b) & m = \{b\} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

μ ’nün tanımından görüldüğü gibi $m \subset [a, b)$ kümesinin ölçümü m ’nin Lebesgue ölçümüne eşittir. $L_{2,R}([a, b], \mu)$ ile $[a, b]$ de tanımlı μ ölçülebilir ve

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 d\mu = \int_a^b (R(x)f, f) dx + (P(b)f(b), f(b)) < \infty$$

koşulunu sağlayan her $x \in [a, b]$ için C^n değerli fonksiyonlar kümesini gösterelim.

Burada iç çarpım

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_a^b (R(x)f(x), g(x)) dx + (P(b)f(b), g(b)) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (r_{ij}(x) f_j(x) \overline{g_i(x)}) \right) dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_{ij}(b) f_j(b) \overline{g_i(b)}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımladığımız iç çarpımı μ ölçümüne göre tanımlanmış iç-çarpım olarak adlandıracaktır. Bu küme de vektörlerin toplamı ve sayı ile çarpımı işlemlerine göre, bir lineer uzaydır. $L_{2,R}([a, b], \mu)$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur (Weidman, 1980).

Uyarı: μ ölçümünün tanımından görüldüğü gibi u ve $v \in C^n$ iken iç-çarpım

$$(u, v) = (P(b).u, v)$$

şeklinde tanımlanırsa, $L_{2,R}([a, b], \mu)$ uzayı

$$L_{2,R}[a, b] \oplus C^n$$

uzayı ile çakışır. Buradaki $L_{2,R}[a, b]$ daha önce tanımladığımız n bileşenli fonksiyonlardan oluşan Lebesgue uzayı ve C^n ise n boyutlu kompleks vektör uzayıdır. Bir başka deyişle $\forall f(x) \in L_{2,R}([a, b], \mu)$ vektörü

$$f(x) = \{f(x), U_\alpha(f)\} = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(b) \\ f_2(b) \\ \vdots \\ f_n(b) \end{pmatrix} \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Sağ taraftaki $f(x)$ $[a, b]$ aralığının hemen her noktasında (Lebesgue ölçümüne göre) tanımlıdır. $L_{2,R}([a, b], \mu)$ uzayını H harfi ile gösterelim.

(2.1.1)-(2.1.3) sınır değer problemini olağan operatör denkleme indirgemek için aşağıdaki şekilde bir A operatörü tanımlayalım.

A 'nın tanım kümesi

$$D(A) = \{y(x) \in H, y(x) \text{ ve } y'(x), (a, b) \text{ açık aralığında mutlak sürekli ve}$$

$$y^{[1]}(a) = 0, \alpha_1 y(b) = U_\alpha(y)\}$$

ve $y(x) \in D(A)$ iken

$$A \begin{pmatrix} y(x) \\ \alpha_1 y(b) \end{pmatrix} = \begin{cases} R^{-1}(x)l(y) & x \in [a, b) \\ -U_\beta(y) & x = \{b\} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

olsun. A operatörünün tanımından görüldüğü gibi (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer probleminin özdeğer ve özvektörleri A 'nın özdeğer ve özvektörleridir.

Böylece (2.1.1)-(2.1.3) problemi $A: H \rightarrow H$ operatörünün spektral özelliklerinin incelenmesi problemine indirgenmiş olur. Bu nedenle (2.1.1)-(2.1.3) problemi yerine A operatörünü inceleyeceğiz.

A operatörü simetrik, alttan sınırlı, üstten sınırsız ve esaslı (essential) kendine eş operatördür.

A Operatörünün Simetrik Olduğunun Gösterilmesi

Bir A operatörü simetrik bir operatör ise

$$(Af, g) = (f, Ag) \quad (2.3.3)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Burada

$$Af = \begin{pmatrix} R^{-1}(x) \left(- (Pf')' + Q(x)f \right) \\ -U_{\beta}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}(x)l(y) \\ -U_{\beta}(f) \end{pmatrix}$$

ve $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ olmak üzere

$$g = \begin{pmatrix} g(x) \\ U_{\alpha}(g) \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece

$$(Af, g) = \int_a^b (R(x)R^{-1}(x)l(y), g) dx - (P(b)U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g)) \quad (2.3.5)$$

olur. $l(y)$ yerine konularak

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_a^b \left(- (Pf')' + Q(x)f, g \right) dx - (P(b)U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g)) \\ &= \int_a^b \left(- (Pf')', g \right) dx + \int_a^b (Q(x)f, g) dx - (P(b)U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g)) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

elde edilir. $(f, g)' = (f', g) + (f, g')$ olduğu göz önüne alındığında (2.3.6) denklemi

$$(Af, g) = \left(-Pf', g \right) \Big|_a^b + \int_a^b (Pf', g') dx + \int_a^b (Q(x)f, g) dx - (P(b)U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g))$$

şeklinde yazılır. $f^{[1]}(a) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitlikten

$$(Af, g) = \left(-P(b)f'(b), g(b) \right) + \int_a^b (f', Pg') dx + \int_a^b (f, Q(x)g) dx - (P(b)U_{\beta}(f), U_{\alpha}(g))$$

$$= (-P(b)f'(b), g(b)) + (f, Pg') \Big|_a^b - \int_a^b (f, (Pg')') dx + \int_a^b (f, Q(x)g) dx - (P(b)U_\beta(f), U_\alpha(g)) \quad (2.3.7)$$

elde edilir. Başlangıç koşulu (2.1.2) den , $(f(a), g^{[1]}(a)) = 0$ olduğundan (2.3.7) denklemi

$$(Af, g) = (-P(b)f'(b), g(b)) + (f(b), P(b)g'(b)) - \int_a^b (f, (Pg')') dx + \int_a^b (f, Q(x)g) dx - (P(b)U_\beta(f), U_\alpha(g))$$

şeklinde bulunur. (2.2.10) denkleminden $y'(b)$ yerine konularak

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \left(-P(b)[\beta_1 U_\alpha(f) - \alpha_1 U_\beta(f)], \frac{U_\alpha(g)}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{U_\alpha(f)}{\alpha_1}, P(b)[\beta_1 U_\alpha(g) - \alpha_1 U_\beta(g)] \right) \\ &\quad + \int_a^b (f, (-(Pg')' + Q(x)g)) dx - (P(b)U_\beta(f), U_\alpha(g)) \\ &= -\frac{\beta_1}{\alpha_1} (P(b)U_\alpha(f), U_\alpha(g)) + (P(b)U_\beta(f), U_\alpha(g)) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} (P(b)U_\alpha(f), U_\alpha(g)) \\ &\quad - (P(b)U_\alpha(f), U_\beta(g)) + \int_a^b (f(x), (-(Pg')' + Q(x)g)) dx - (P(b)U_\beta(f), U_\alpha(g)) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

elde edilir. (2.3.8)'i düzenlediğimizde

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_a^b (f(x), (-(Pg')' + Q(x)g)) dx + (P(b)U_\alpha(f), -U_\beta(g)) \\ &= \int_a^b (f(x), R(x)R^{-1}(x)(-(Pg')' + Q(x)g)) dx + (P(b)U_\alpha(f), -U_\beta(g)) \\ &= \int_a^b (R(x)f(x), R^{-1}(x)(-(Pg')' + Q(x)g)) dx + (P(b)U_\alpha(f), -U_\beta(g)) \end{aligned}$$

buluruz. Buradan

$$(Af, g) = \int_a^b (f(x), Ag(x)) d\mu = (f, Ag)$$

olduğu görülür. Böylece (2.3.3) denklemi sağlanmış ve A operatörünün simetrik operatör olduğu gösterilmiş olur .

A'nın alttan sınırlı olduğunun gösterilmesi

$l(y)$ diferansiyel ifadesinin katsayıları ve sınır koşulundaki sayılar reel olduğundan dolayı

$A: H \rightarrow H$ operatörü reeldir (Naimark, 1968). Yani;

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix} \in D(A) \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} \overline{A \begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix}} &= \overline{\begin{pmatrix} -R^{-1}(x)((Py'(x))' + Q(x)y) \\ -U_\beta(y) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -R^{-1}(x)((P\bar{y}'(x))' + Q(x)\bar{y}) \\ -U_\beta(\bar{y}) \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} \bar{y}(x) \\ U_\alpha(\bar{y}) \end{pmatrix} = A \overline{\begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

ve

$$\overline{\begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{y}(x) \\ U_\alpha(\bar{y}) \end{pmatrix} \in D(A)$$

olur. Böylece A 'nın alttan sınırlı olduğunu göstermek için, bu operatörün $D(A)$ ye ait olan bileşenleri reel değerli fonksiyonlar olan vektörleri için göstermemiz yeterlidir.

A 'nın alttan sınırlı olduğunu, yani $\forall y \in D(A)$ için $(Ay, y) \geq -\gamma(y, y)$ olacak şekilde sabit γ sayısının varlığını gösterelim.

(2.3.2) denkleminde

$$y = \begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix} \in D(A) \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= \left(\begin{pmatrix} R^{-1}(x)((Py'(x))' + Q(x)y) \\ -U_\beta(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix} \right) \\ &= \int_a^b \left(R(x)R^{-1}(x)((Py'(x))' + Q(x)y), y(x) \right) dx - (P(b)U_\beta(y), U_\alpha(y)) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

şeklinde yazılır.

$$U_\beta(y) = \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)$$

ve

$$U_\alpha(y) = \alpha_1 y(b)$$

olduğu (2.3.9) da göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
(Ay, y) = & -\left(P(x)y(x)', y(x)\right)_a^b + \int_a^b \left(P(x)y(x)', y(x)'\right) dx + \int_a^b \left(Q(x)y(x), y(x)\right) dx \\
& - \left(P(b)[\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)], \alpha_1 y(b)\right)
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

bulunur. (2.1.2) koşulundan, $(y^{[1]}(a), y(a)) = 0$ olur. Böylece (2.3.10) denklemi

$$\begin{aligned}
(Ay, y) = & -\left(P(b)y'(b), y(b)\right) + \int_a^b \left(P(x)y(x)', y(x)'\right) dx + \int_a^b \left(Q(x)y(x), y(x)\right) dx \\
& - \alpha_1 \beta_1 \left(P(b)y(b), y(b)\right) + \alpha_1 \beta_2 \left(P(b)y'(b), y(b)\right)
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

şeklinde olur. $\alpha_1 \beta_2 = 1$ olduğundan dolayı (2.3.11) denklemi

$$(Ay, y) = \int_a^b \left(P(x)y(x)', y(x)'\right) dx + \int_a^b \left(Q(x)y(x), y(x)\right) dx - \alpha_1 \beta_1 \left(P(b)y(b), y(b)\right) \tag{2.3.12}$$

şeklinde bulunur. $\forall y$ için $(P(x)y, y) \geq 0$ ve $\alpha_1 \beta_1 < 0$ olduğundan (2.3.12) denklemi

$$\begin{aligned}
(Ay, y) & \geq \int_a^b \left(Q(x)y(x), y(x)\right) dx \\
& \geq -\gamma \|y\|_{L_2[a,b]}^2 \geq -\gamma \|y\|_H^2
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\gamma = \max_{a \leq x \leq b} \|Q(x)\|$. Böylece

$$(Ay, y) \geq -\gamma (y, y)$$

bulunmuştur. Yani A'nın alttan $-\gamma$ sayısı ile sınırlı olduğu gösterilmiştir.

A Operatörünün Esaslı (essential) Kendine-eş Operatör Olduğunun Gösterilmesi

A operatörünün esaslı (essential) kendine-eş operatör olduğunu göstermek için A'nın her yerde yoğun olduğunu göstermeliyiz.

λ , A'nın alt sınırından küçük T'nin özdeğeri olmayan, herhangi bir reel sayı olsun. Bu durumda $(A - \lambda I)D(A)$ 'nin kapanışının $\overline{(A - \lambda I)D(A)} = H$ olduğunu gösterelim.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ olmak üzere } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H \text{ sabit tutulmuş herhangi bir eleman olsun.}$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ U_\alpha(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha_1 f(b) \end{pmatrix} \in D(A) \text{ keyfi eleman iken,}$$

$$\begin{aligned} \left((A - \lambda I) \begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha_1 f(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} (R^{-1}(x)T - \lambda)f \\ -(\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b)) - \lambda \alpha_1 f(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \\ &= \int_a^b (R(x)(R^{-1}(x)T - \lambda)f, u) dx + (-P(b)(\beta_1 f(b) - \beta_2 f'(b) + \lambda \alpha_1 f(b)), v) \\ &= \int_a^b ((T - \lambda R(x))f, u) dx + (-P(b)(U_\beta(f) + \lambda U_\alpha(f)), v) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Keyfi $f \in D(T)$ iken (2.3.13) de

$$(-P(b)(U_\beta(f) + \lambda U_\alpha(f)), v) = 0 \quad (2.3.14)$$

koşulu sağlandığında

$$\int_a^b ((T - \lambda R(x))f, u) dx = 0 \quad (2.3.15)$$

elde edilir. $T = T^*$ olduğundan

$$(T - \lambda R(x))D(L) = L_{2,R}[a, b]$$

şeklindedir. Böylece (2.3.15)'e göre

$$u(x) = 0$$

bulunur. Bunu (2.3.13) te göz önüne alırsak

$$(-P(b)(U_\beta(f) + \lambda U_\alpha(f)), v) = 0$$

olur. $\begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha_1 f(b) \end{pmatrix} \in D(A)$ keyfi eleman olduğundan

$$(U_\beta(f) + \lambda U_\alpha(f)) \neq 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu vardır. Bundan dolayı (2.3.14) den $v = 0$ bulunur. Buradan

$$\overline{(A - \lambda I)D(A)} = H$$

olduğu görülür.

$\lambda < -\gamma$ iken $(A - \lambda I)^{-1}$ simetrik operatörünün sınırlı, H 'da her yerde yoğun kümede tanımlı olduğunu dikkate alalım. Bilinen *Rellich Teoremine* (Hellwig, 1967) göre $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörünün kapanışı kendine eş operatördür. Bu ise A 'nın kapanışının kendine eş olduğunu kanıtlar. Yani A esaslı (essential) kendine eş operatördür.

2.4 Özfonksiyonlara Göre Açılım

Önce A 'nın kendine eş operatör olduğunu gösterelim. Bunun için Weidman (1987) çalışmasında olduğu gibi aşağıdaki şekilde A_1 operatörünü tanımlayalım

$$D(A_1) = \{y \in D(T) \mid y^{[1]}(b) = 0\} \text{ iken her } \forall y \in D(A_1) \text{ için}$$

$$A_1 y = l(y)$$

olsun. Daha önce tanımladığımız kendine-eş T operatörünün spektrumunun sadece aşağıdaki forma sahip özdeğerlerden oluştuğu bilinmektedir.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Bu ise T 'nin esaslı(essential) spektrumunun yani $\sigma_e(T)$ 'nin boş küme olduğunu gösterir.

A ve T operatörleri A_1 operatörünün sonlu boyutlu genişlemeleridir. Yani $D(A)$ ve $D(T)$ kümeleri $D(A_1)$ modülüne göre sonlu boyutludurlar. Başka bir deyişle M_1 ve M_2 sonlu boyutlu alt uzaylar olmak üzere $D(A)$ ve $D(T)$ sırasıyla

$$D(A) = D(A_1) + M_1$$

$$D(T) = D(A_1) + M_2$$

şeklinde gösterilebilir. Burada

$$D(A_1) \cap M_1 = D(A_1) \cap M_2 = \emptyset \text{ (boş küme)}$$

şeklindedir. Aşağıdaki bilinen teoremi ifade edelim.

Teorem 2.1 Kapalı operatörün her sonlu boyutlu genişlemeleri de kapalı operatördür.

İfade ettiğimiz teoreme göre A kapalı operatördür. A 'nın kapanışının kendine eş olduğunu yani esaslı (essential) kendine eş olduğunu göstermiştik.

Bilinen teoreme göre (Birman and Solonyak, 1987, Glazman, 1965), kapalı operatörün esas spektrumu ile bu operatörün her sonlu boyutlu genişletilmesinin esas spektrumu çakışır. Buna göre

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(T)$$

olur. $\sigma_e(T) = \emptyset$ olduğundan $\sigma_e(A) = \emptyset$ olur.

Esas spektrumu boş küme olan her kendine eş operatörün spektrumu saf ayrıktır (Akhiezer, Glazman, 1987). Buna göre alttan sınırlı A operatörünün spektrumu, yığılma noktası sadece artı sonsuz olan, özdeğerlerden ibarettir. Bu özdeğerleri aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty$$

Bu aynı zamanda A'nın üstten sınırsız olduğunu gösterir. μ_i ($i = 1, 2, \dots, n..$) özdeğerlerine karşılık gelen n bileşenli ortonormal özvektörleri

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (2.4.1)$$

ile gösterelim. Burada $\forall \varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{i1}(x) \\ \varphi_{i2}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{in}(x) \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanır. Belli teoreme göre (Akhiezer,

Glazman, 1987; Kato, 1980) (2.4.1) vektörler sistemi H uzayının bir bazıdır. Bununla biz aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 2.2 $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in H$ keyfi bir vektör olsun. Bu taktirde

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \quad (2.4.2)$$

eşitliği doğrudur. Burada

$$a_k = \int_a^b (R(x)f(x), \varphi_k(x)) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. (2.4.2) eşitliğindeki seri $f(x)$ ' e $\mu(x)$ ölçümüne göre ortakuadratik anlamda yakınsadığından

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2 d\mu(x) = 0$$

olur. Gelenekliğe dayanarak (Friedman, 1956; Hochstad, 1989; Walter, 1973) Teorem 2.2'nin özel halini ifade edelim.

Teorem 2.3 $u \in L_{2,R}[a,b]$ herhangi bir vektör, $\tilde{\varphi}_k$ ise φ_k 'nın $[a,b]$ 'ye kısıtlaması olsun. Bu takdirde

$$b_k = \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{\varphi}_k \tag{2.4.3}$$

ve

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(x) (P(b).1, U_{\alpha}(\varphi_k)) \tag{2.4.4}$$

eşitlikleri sağlanır. (2.4.3) serisi $u(x)$ 'e $L_{2,R}[a,b]$ anlamında yakınsaktır. Ek olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{\alpha}(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_{\alpha}(\varphi_k)) = 1 \tag{2.4.5}$$

sağlanır. Burada 1, n bileşenli birim vektördür.

İspat Teoremi ispatlamak için

$$u = \begin{cases} u(x) & a \leq x < b \\ U_{\alpha}(u) & x = \{b\} \end{cases}$$

ve

$$\int_M d\mu = \begin{cases} \int_M R(x) dx & M \subset [a, b) \\ P(b) & M = \{b\} \end{cases}$$

iken $u \in L_{2,R}[a,b]$ elemanına ek olarak $u(b) = 0$ kabul ederek $L_{2,R}([a,b], \mu)$ olduğunu varsayacağız ve $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x)$ serisinin $u(x)$ 'e $\mu(x)$ ölçümüne göre ortakuadratik yakınsamasını yani;

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right\|^2 d\mu(x) = 0 \quad (2.4.6)$$

olmasını kullanacağız. (2.4.6) denklemini

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right\|^2 d\mu(x) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right\|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \left(P(b) \left(U_\alpha(u) - \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right), \left(U_\alpha(u) - \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right) \right) \right\} \\ & (2.4.7) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right\|^2 dx + (P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(u)) \right. \\ & \quad \left. - 2 \left(P(b)U_\alpha(u), \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right) \right. \\ & \quad \left. \left(P(b) \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x), \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (u(x), \varphi_k(x)) d\mu(x) \right) \right\} = 0 \quad (2.4.8) \end{aligned}$$

bulunur. (2.4.8) denkleminde aşağıda yapılan ara işlemlerden sonra (2.4.9) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left(R(x) \left[u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left[u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right] \right) dx + (P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(u)) \\
&\quad - 2 \left(P(b)U_\alpha(u), \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right) + \\
&\quad \left(P(b) \left[\sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right] \right. \\
&\quad \left. \left[\sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right] \right) \Big\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left(R(x) \left[u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left[u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx + \sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right] \right) dx + (P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(u)) \Big\} \\
&\quad - 2 \left(P(b)U_\alpha(u), \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b R(x)(u(x), \varphi_k(x)) dx \right) - 2 \left(P(b)U_\alpha(u), \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right) \\
&\quad + 2 \left(P(b) \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx, \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right) \\
&\quad + \left(P(b) \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx, \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \right) \\
&\quad + \left(P(b) \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)), \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b)U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)) \right) = 0 \tag{2.4.9}
\end{aligned}$$

Eğer (2.4.6)'dan

$$u = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

alırsak, o zaman $U_\alpha(u) = 0$ olur .Böylece (2.4.6)'dan

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left(R(x) \left[u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left[u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \right] \right) dx \\
&\quad + \left(P(b) \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx, \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx \right) = 0 \tag{2.4.10}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$B_N = u(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx$$

ve

$$A_N = \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx$$

kabul edersek (2.4.10) denklemi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b (R(x)B_N, B_N) dx + (P(b)A_N, A_N) \right\} = 0$$

şeklinde yazılabilir. $P(b) > 0$ ve $R(x)$ pozitif matris olduğundan, (2.4.10) eşitliğinden;

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx = 0$$

ve

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx$$

bulunur. Böylece

$$b_k = \int_a^b (R(x)u(x), \varphi_k(x)) dx$$

olmak üzere

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{\varphi}_k$$

yani (2.4.3) gösterilmiştir. (2.4.9) da

$$u(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ U_\alpha(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alındığında (2.4.9) eşitliği

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left(R(x) \left(\sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right), \left(\sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right) \right) dx \right. \\
& + (P(b).1, 1) - 2 \left(P(b).1, \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right) \\
& \left. + \left(P(b) \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)), \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right) \right\} = 0
\end{aligned}$$

şeklini alır. Bu ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b \left(R(x) \left(\sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right), \left(\sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right) \right) dx \right. \\
& \left. + \left(\left(P(b).1 - P(b) \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right), \left(1 - \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right) \right) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Burada

$$\left(1 - \sum_{k=1}^N U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right) = A_N$$

ve

$$\left(\sum_{k=1}^N (\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) \right) = B_N$$

dersek (2.4.11) eşitliği

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b (R(x) B_N, B_N) dx + (P(b) A_N, A_N) \right\} = 0 \tag{2.4.12}$$

şeklinde yazılabilir. $R(x)$ pozitif matris ve $P(b) > 0$ olduğundan (2.4.12)'den

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(x)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) = 0$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)(P(b).1, U_\alpha(\varphi_k)) = 1$$

bulunur.

Özel olarak 1 vektörünü $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ şeklinde alırsak bu durumda (2.4.4) eşitliği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \left(\sum_{i=1}^n p_{i1}(b) U_{\alpha}(\varphi_{ki}) \right) = 0$$

ve (2.4.5) eşitliği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n U_{\alpha}(\varphi_{kj}) p_{i1}(b) U_{\alpha}(\varphi_{ki}) \right) = 1$$

şeklinde yazılabilir. Burada 1 sabit sayıdır.

n boyutlu birim vektörün a . elemanı 1 diğer elemanları sıfır olmak üzere (2.4.4) ve (2.4.5) denklemlerinin en genel halleri sırasıyla

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \left(\sum_{i=1}^n p_{ia}(b) U_{\alpha}(\varphi_{ki}) \right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n U_{\alpha}(\varphi_{kj}) p_{ia}(b) U_{\alpha}(\varphi_{ki}) \right) = 1$$

şeklindedir. Burada 1 sabit sayıdır.

2.5 A Operatörünün Spektral Fonksiyonu ve Rezolventi

Kendine eş A operatörünün alttan $-\gamma$ sayısı ile sınırlı olduğu biliniyor. A 'nın spektral fonksiyonunu E_{λ} ($-\infty < \lambda < \infty$) ile gösterelim. $A \in D(A)$ iken

$$A(x, x) \geq -\gamma(x, x)$$

olduğundan $\lambda < -\gamma$ iken

$$E_{\lambda} = 0$$

şeklindedir. Yine basitlik için E_{λ} fonksiyonunu $L_{2,R}[a, b]$ uzayında göz önüne alacağız. Daha önce belirttiğimiz gibi $L_{2,R}[a, b]$ uzayı H 'nin $f(b) = 0$ koşulunu sağlayan elemanlarının oluşturduğu alt uzaydır.

$f(x);$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in L_{2,R}[a,b]$$

şeklinde verilen herhangi bir vektör fonksiyon olsun. Her reel λ için;

$$E_\lambda f = \sum_{\lambda_k < \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k$$

şeklindedir. Burada

$$\varphi_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{k1}(x) \\ \varphi_{k2}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{kn}(x) \end{pmatrix} \in L_{2,R}[a,b]$$

fonksiyonu A^{-1} operatörünün λ_k özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonunun $[a,b]$ aralığına kısıtlamasıdır. Burada amacımız E_λ 'nın, çekirdeği matris fonksiyon olan, integral operatör olduğunu göstermektir.

$f(x)$ ve $\varphi_k(x)$ fonksiyonlarının bileşenleri cinsinden $E_\lambda f$

$$\begin{aligned} E_\lambda f &= \sum_{\lambda_k < \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{\lambda_k < \lambda} \left(\int_a^b (R(y) f(y), \varphi_k(y)) dy \right) \varphi_k(x) \\ &= \int_a^b \left\{ \sum_{\lambda_k < \lambda} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (r_{ij}(y) f_j(y) \varphi_{ki}(y)) \right) \begin{pmatrix} \varphi_{k1}(x) \\ \varphi_{k2}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{kn}(x) \end{pmatrix} \right\} dy \\ &= \int_a^b K(x, y, \lambda) R(y) f(y) dy \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$K(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} \begin{pmatrix} \varphi_{k1}(x) \varphi_{k1}(y) & \varphi_{k1}(x) \varphi_{k2}(y) & \cdot & \varphi_{k1}(x) \varphi_{kn}(y) \\ \varphi_{k2}(x) \varphi_{k1}(y) & \varphi_{k2}(x) \varphi_{k2}(y) & \cdot & \varphi_{k2}(x) \varphi_{kn}(y) \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ \varphi_{kn}(x) \varphi_{k1}(y) & \varphi_{kn}(x) \varphi_{k2}(y) & \cdot & \varphi_{kn}(x) \varphi_{kn}(y) \end{pmatrix} \tag{2.5.2}$$

şeklindedir. (2.5.2) den görüldüğü gibi $K(x, y, \lambda)$ simetrik matristir. Böylece

$$E_\lambda f = \int_a^b K(x, y, \lambda) R(y) f(y) dy$$

yani E_λ çekirdeği simetrik matris olan integral operatördür. $\mu \leq \lambda$ iken

$$E_\mu E_\lambda = E_\lambda$$

olduğundan $\forall f(x) \in L_{2,R}[a, b]$ iken

$$\begin{aligned} E_\mu E_\lambda f(x) &= E_\mu \int_a^b K(x, t, \lambda) R(t) f(t) dt \\ &= \int_a^b K(x, s, \mu) R(s) \left\{ \int_a^b K(s, t, \lambda) R(t) f(t) dt \right\} ds \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x, s, \mu) R(s) K(s, t, \lambda) ds \right\} R(t) f(t) dt \\ &= E_\lambda f(x) \\ &= \int_a^b K(x, t, \lambda) R(t) f(t) dt \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

bulunur. Burada $f(x)$ keyfi olduğundan

$$\int_a^b K(x, s, \mu) R(s) K(s, t, \lambda) ds = K(x, t, \lambda)$$

olduğu bulunur. $l \in \rho(A)$ için (Smirnov, 1964)

$$R_l f(x) = \int_{-\gamma}^{\infty} \frac{dE_\lambda f}{\lambda - l}$$

ifadesinden $A \geq -\gamma I$ (I birim operator) olduğundan A 'nın $l \in \rho(A)$ noktasında R_l rezolventinin değeri

$$R_l f(x) = \int_{-\gamma}^{\infty} \frac{d_\lambda \int_a^b K(x, y, \lambda) R(y) f(y) dy}{\lambda - l} \tag{2.5.4}$$

formülü ile ifade edilir.

$K(x, y, \lambda)$ matris fonksiyonu yardımıyla $\forall f(x) \in L_{2,R}[a, b]$ için

$$f(x) = \int_{-\gamma}^{\infty} d_{\lambda} \int_a^b K(x, y, \lambda) R(y) f(y) dy \quad (2.5.5)$$

ve $\forall f(x) \in D(A)$ için $Af(x)$;

$$Af(x) = \int_{-\gamma}^{\infty} \lambda d_{\lambda} \int_a^b K(x, y, \lambda) R(y) f(y) dy \quad (2.5.6)$$

şeklinde yazılır. Böylece A operatörünün spektral fonksiyonunun ve rezolventinin çekirdeği matris fonksiyon olan integral operatörler olduğunu göstermiş olduk.

3. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN GECİKEN ARGUMANLI SÜREKLİ OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI ÜZERİNE

3.1 Probleme Giriş

Bu bölümde $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) + q(x)y(x - \Delta(x)) = 0 \quad (3.1.1)$$

denklemini ve

$$\lambda y(0) + y'(0) = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\lambda^2 y(\pi) + y'(\pi) = 0 \quad (3.1.3)$$

sınır koşulları ,

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0 \quad (3.1.5)$$

dönüşüm koşullarıyla verilen sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $q(x)$ ve

$\Delta(x) \geq 0$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında reel değerli sürekli, sırasıyla $q\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} q(x)$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta(x)$ sonlu limitlerine sahip fonksiyonlar, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ iken

$x - \Delta(x) \geq 0$ ve $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ iken $x - \Delta(x) \geq \frac{\pi}{2}$ şeklindedir. Ayrıca $\lambda > 0$ reel parametre ve

$\delta \neq 0$ keyfi reel sayıdır. $w_1(x, \lambda)$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında (3.1.1) denkleminin

$$w_1(0, \lambda) = 1, \quad w_1'(0, \lambda) = -\lambda \quad (3.1.6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

(3.1.6) başlangıç koşulları $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında (3.1.1) denkleminin tek çözüm tanımlar (Norkin (1972), Teorem 1.2.1). $w_1(x, \lambda)$ çözümünden sonra $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında (3.1.1) denkleminin $w_2(x, \lambda)$ çözümü $w_1(x, \lambda)$ cinsinden

$$w_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \delta^{-1} w_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \quad , \quad w_2'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \delta^{-1} w_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \quad (3.1.7)$$

dönüşüm koşulları yardımıyla tanımlanabilir. (3.1.7) dönüşüm koşulları $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında (3.1.1) denkleminin tek çözüm tanımlar. Sonuç olarak $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında tanımlanan

$$w(x, \lambda) = \begin{cases} w_1(x, \lambda) & , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ w_2(x, \lambda) & , \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

fonksiyonu (3.1.1) denkleminin (3.1.2) ve (3.1.3) sınır koşulları ile (3.1.4) ve (3.1.5) dönüşüm koşullarını sağlayan çözümdür.

Lemma 3.1 $w(x, \lambda)$, (3.1.1) denkleminin çözümü olsun. $\lambda > 0$ için aşağıdaki integral denklemler doğrudur.

$$w_1(x, \lambda) = -\sin \lambda x + \cos \lambda x - \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - \tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.1.8)$$

$$w_2(x, \lambda) = \frac{1}{\delta \lambda} w_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\delta} w_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \cos \lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \sin \lambda(x - \tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (3.1.9)$$

İspat $w_1(x, \lambda)$, (3.1.1) denklemini sağladığından aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_0^x w_1''(\tau, \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau + \int_0^x \lambda^2 w_1(\tau, \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau + \int_0^x q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau = 0$$

Yukarıdaki ifadede birinci integrale iki defa kısmi integrasyon uygulandıktan sonra (3.1.6) başlangıç koşulları yardımıyla

$$w_1(x, \lambda) = -\sin \lambda x + \cos \lambda x - \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau$$

elde edilir. Böylece (3.1.8)'in doğruluğu gösterilmiş olur. Aynı şekilde $w_2(x, \lambda)$, (3.1.1) denklemini sağladığından aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_{\pi/2}^x w_2''(\tau, \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau + \int_{\pi/2}^x \lambda^2 w_2(\tau, \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau + \int_{\pi/2}^x q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau = 0$$

Son eşitlikte birinci integrale iki defa kısmi integrasyon uygulandıktan sonra (3.1.4) ve (3.1.5) dönüşüm koşulları yardımıyla

$$w_2(x, \lambda) = \frac{1}{\delta \lambda} w_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\delta} w_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \cos \lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau,$$

şeklinde bulunur. Böylece (3.1.9)'un doğruluğu gösterilmiş olur. Böylece Lemma ispatlanmıştır.

Teorem 3.1 (3.1.1)-(3.1.5) problemi sadece basit özdeğerlere sahip olabilir.

İspat $\tilde{\lambda}$, (3.1.1)-(3.1.5) probleminin özdeğeri,

$$\tilde{u}(x, \tilde{\lambda}) = \begin{cases} \tilde{u}_1(x, \tilde{\lambda}) & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tilde{u}_2(x, \tilde{\lambda}) & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

ise $\tilde{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olsun. (3.1.2) ve (3.1.6) dan

$$\begin{aligned} W[\tilde{u}_1(0, \tilde{\lambda}), w_1(0, \tilde{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \tilde{u}_1(0, \tilde{\lambda}) & 1 \\ \tilde{u}_1'(0, \tilde{\lambda}) & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \tilde{u}_1(0, \tilde{\lambda}) - \tilde{u}_1'(0, \tilde{\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Norkin (1972)'deki Teorem 2.2.2'den $\tilde{u}_1(x, \tilde{\lambda})$ ve $w_1(x, \tilde{\lambda})$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $\tilde{u}_1 = k_1 w_1$ şeklindedir. Aynı şekilde $\tilde{u}_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right)$ ve $w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right)$ 'nında $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında lineer bağımlı olduğunu gösterelim. (3.1.2), (3.1.7) eşitlikleri ve $\tilde{u}_1(x, \tilde{\lambda})$ ile $w_1(x, \tilde{\lambda})$ nın lineer bağımlı olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} W\left[\tilde{u}_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right), w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right)\right] &= \begin{vmatrix} \tilde{u}_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) & w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) \\ \tilde{u}_2'\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) & w_2'\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\delta} \tilde{u}_1\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) & \frac{1}{\delta} w_1\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) \\ \frac{1}{\delta} \tilde{u}_1'\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) & \frac{1}{\delta} w_1'\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta^2} W\left[\frac{1}{\delta} u_1\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right), w_1\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\tilde{u}_2 = k_2 w_2$ olur. Böylece

$$\tilde{u}_i(x, \tilde{\lambda}) = k_i w_i(x, \tilde{\lambda}) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.1.10)$$

şeklinde yazılabilir. $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ iken $k_1 = k_2$ olduğu gösterilmelidir. $k_1 \neq k_2$ olduğunu varsayalım. (3.1.4) ve (3.1.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{u}\left(\frac{\pi}{2} - 0, \tilde{\lambda}\right) - \delta \tilde{u}\left(\frac{\pi}{2} + 0, \tilde{\lambda}\right) &= \tilde{u}_1\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) - \delta \tilde{u}_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) \\ &= k_1 w_1\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) - \delta k_2 w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) \\ &= k_1 \delta w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) - \delta k_2 w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) \\ &= \delta(k_1 - k_2) w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\delta \neq 0$ olduğundan ve $k_1 \neq k_2$ varsaydığımızdan eşitliğin sıfıra eşit olması için

$$w_2\left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda}\right) = 0 \quad (3.1.11)$$

olmalıdır.

Aynı işlemlerle (3.1.5)'den

$$w_2' \left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda} \right) = 0 \quad (3.1.12)$$

bulunur. $w_2(x, \tilde{\lambda})$ (3.1.1) probleminin $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ aralığında (3.1.11) ve (3.1.12) başlangıç

koşullarını sağlayan çözümü olduğundan tüm $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ aralığında

$$w_2(x, \tilde{\lambda}) = 0$$

şeklindedir. (Norkin (1972), Teorem 1.2.1). Ayrıca (3.1.7), (3.1.11) ve (3.1.12) den

$$w_1 \left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda} \right) = w_1' \left(\frac{\pi}{2}, \tilde{\lambda} \right) = 0$$

bulunur. Böylece tüm $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ aralığında $w_1(x, \tilde{\lambda}) = 0$ bulunur (Norkin(1972), Theorem 1.2.1)

Ama bu (3.1.6) başlangıç koşuluyla çelişir. Böylece $k_1 = k_2$ olduğu görülür ve teorem ispatlanmış olur.

3.2 Varlık Teoremi

3.1 bölümünde tanımlanan $w(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin (3.1.2) ve (3.1.3) sınır koşulları ile (3.1.4) ve (3.1.5) dönüşüm koşullarını sağlayan çözümüdür. $w(x, \lambda)$ (3.1.3) sınır koşulunda yerine konulursa

$$F(\lambda) = \lambda^2 w(\pi, \lambda) + w'(\pi, \lambda) = 0 \quad (3.2.1)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Teorem 3.1' den , (3.1.1)-(3.1.5) sınır değer probleminin özdeğerlerinin (3.2.1) denkleminin reel kökleriyle çakıştığı görülür.

$$q_1 = \int_0^{\pi/2} |q(\tau)| d\tau$$

ve

$$q_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} |q(\tau)| d\tau$$

olsun.

Lemma 3.2

1) $\lambda \geq 2q_1$ iken (3.1.8) denkleminin $w_1(x, \lambda)$ çözümü için

$$|w_1(x, \lambda)| \leq 2\sqrt{2} \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.2.2)$$

2) $\lambda \geq \max\{2q_1, 2q_2\}$ iken (3.1.9) denkleminin $w_2(x, \tilde{\lambda})$ çözümü için

$$|w_2(x, \lambda)| \leq \frac{8\sqrt{2}}{|\delta|} \quad , \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (3.2.3)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat $B_{1\lambda} = \max_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |w_1(x, \lambda)|$ olsun . Böylece (3.1.8) den $\forall \lambda > 0$ iken

$$B_{1\lambda} \leq \sqrt{2} + \frac{1}{\lambda} B_{1\lambda} q_1 \quad (3.2.4)$$

olur. $\lambda \geq 2q_1$ iken

$$B_{1\lambda} \leq 2\sqrt{2}$$

eşitsizliği yani (3.2.2) bulunur. (3.1.8) in x 'e göre türevi alınır

$$w_1'(x, \lambda) = -\lambda \cos \lambda x - \lambda \sin \lambda x - \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - \tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau$$

bulunur. (3.2.2) yukarıdaki eşitlikte göz önünde bulundurulursa

$$|w_1'(x, \lambda)| \leq \sqrt{2}|\lambda| + 2q_1\sqrt{2}$$

şeklini alır. Buradan $\lambda \geq 2q_1$ ve $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ iken

$$\frac{|w_1'(x, \lambda)|}{|\lambda|} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad (3.2.5)$$

elde edilir.

$B_{2\lambda} = \max_{\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]} |w_2(x, \lambda)|$ olsun. (3.1.9), (3.2.2) ve (3.2.5) den $\lambda > 2q_1$ iken

$$B_{2\lambda} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\delta} + \frac{2\sqrt{2}}{\delta} + \frac{1}{\lambda} B_{2\lambda} q_2$$

bulunur. $\lambda \geq \max\{2q_1, 2q_2\}$ olduğunda

$$B_{2\lambda} \leq \frac{8\sqrt{2}}{\delta}$$

eşitsizliği yani (3.2.3) elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.2 Problem (3.1.1)-(3.1.5) pozitif özdeğerlerin bir sonsuz kümesine sahiptir.

İspat (3.1.9)'un x 'e göre türevini alırsak,

$$\begin{aligned} w_2'(x, \lambda) = & -\frac{\lambda}{\delta} w_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\delta} w_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ & - \int_{\pi/2}^x q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda (x - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

bulunur. (3.1.8), (3.1.9), (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.6)'dan

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \frac{\lambda}{\delta} \sin \lambda \frac{\pi}{2} \left[-\lambda \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \lambda \sin \lambda \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) d\tau \right] \\ & + \frac{\lambda^2}{\delta} \cos \lambda \frac{\pi}{2} \left[-\sin \lambda \frac{\pi}{2} + \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) d\tau \right] \\ & - \lambda \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda (\pi - \tau) d\tau \\ & - \frac{\lambda}{\delta} \sin \lambda \frac{\pi}{2} \left[-\sin \lambda \frac{\pi}{2} + \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) d\tau \right] \\ & + \frac{1}{\delta} \cos \lambda \frac{\pi}{2} \left[-\lambda \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \lambda \sin \lambda \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) d\tau \right] \\ & - \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda (\pi - \tau) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

elde edilir. λ 'yı yeterince büyük alalım. (3.2.2) ve (3.2.3)'den (3.2.7) denklemi

$$-\lambda^2 \sin \lambda \frac{\pi}{2} \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \lambda^2 \sin^2 \lambda \frac{\pi}{2} - \lambda^2 \cos \lambda \frac{\pi}{2} \sin \lambda \frac{\pi}{2} + \lambda^2 \cos^2 \lambda \frac{\pi}{2} + O(\lambda) = 0$$

$$-\lambda^2 [\sin \lambda \pi - \cos \lambda \pi] + O(\lambda) = 0$$

formunu alır. $\lambda \neq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitliği λ 'ya bölersek

$$-\lambda [\sin \lambda \pi - \cos \lambda \pi] + O(1) = 0$$

veya

$$\lambda \sin \left(\lambda \pi - \frac{\pi}{4} \right) + O(1) = 0 \quad (3.2.8)$$

elde edilir. Buradan da açıktır ki λ 'nın büyük değerleri için köklerin sonsuz kümesi vardır. Teorem ispatlandı.

3.3 Özdeğerlerin ve Özfonksiyonların Asimptotik İfadeleri

Şimdi problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadelerini bulalım. λ 'yı yeterince büyük varsayalım. (3.1.8) ve (3.2.2)'den $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ de

$$w_1(x, \lambda) = O(1) \quad (3.3.1)$$

ayrıca (3.1.9) ve (3.2.3)'den $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ de

$$w_2(x, \lambda) = O(1) \quad (3.3.2)$$

olur. $w'_{1\lambda}(x, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $|\lambda| < \infty$ için) ve $w'_{2\lambda}(x, \lambda)$ 'nın ($\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, $|\lambda| < \infty$ için)

varlık ve sürekliliği Norkin (1972) çalışmasındaki Teorem 1.4.1' den çıkar.

Lemma 3.3 $w'_{1\lambda}(x, \lambda)$ ve $w'_{2\lambda}(x, \lambda)$ sırasıyla $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ ve $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ aralıklarında

$$w'_{1\lambda}(x, \lambda) = O(1) \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad (3.3.3)$$

$$w'_{2\lambda}(x, \lambda) = O(1) \quad , \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]. \quad (3.3.4)$$

şeklindedir.

İspat (3.1.8) in λ 'ya göre türevini alırsak (3.3.1)'den

$$w'_{1\lambda}(x, \lambda) = -x \cos \lambda x - x \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau)(x - \tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(x - \tau) d\tau \\ - \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - \tau) w'_{1\lambda}(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau .$$

bulunur.

$$K_1(x, \lambda) = -x \cos \lambda x - x \sin \lambda x + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau \\ - \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau)(x - \tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(x - \tau) d\tau$$

olmak üzere $w'_{1\lambda}(x, \lambda)$

$$w'_{1\lambda}(x, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau) w'_{1\lambda}(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(x - \tau) d\tau + K(x, \lambda) , \quad |K_1(x, \lambda)| \leq K_0^1 \quad (K_0^1 > 0)$$

(3.3.5)

şeklinde yazılabilir. $C_{1\lambda} = \max_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |w'_{1\lambda}(x, \lambda)|$ olsun. $C_{1\lambda}$ 'nın varlığı $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de $C_{1\lambda}$ 'nın

sürekliliğinden görülür.(3.3.5)'den

$$C_{1\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} q_1 C_{1\lambda} + K_0^1$$

olur. Şimdi $\lambda \geq 2q_1$ olsun. Böylece

$$C_{1\lambda} \leq 2K_0^1$$

olur ki bu da (3.3.3)'ün doğruluğunu gösterir.

(3.3.4)'üde aynı şekilde gösterelim. (3.1.9)'un λ 'ya göre türevini (3.3.2)'de göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
w'_{2\lambda}(x, \lambda) = & -\frac{1}{\lambda^2 \delta} w'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\lambda \delta} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) w'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
& + \frac{1}{\lambda \delta} w''_{1\lambda}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\delta} w_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
& + \frac{1}{\delta} w'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\pi/2}^x q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda (x - \tau) d\tau \\
& - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) (x - \tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda (x - \tau) d\tau \\
& - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) w'_{2\lambda}(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda (x - \tau) d\tau
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
K_2(x, \lambda) = & -\frac{1}{\lambda^2 \delta} w'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\lambda \delta} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) w'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
& + \frac{1}{\lambda \delta} w''_{1\lambda}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\delta} w_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
& + \frac{1}{\delta} w'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\pi/2}^x q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda (x - \tau) d\tau \\
& - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) (x - \tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda (x - \tau) d\tau
\end{aligned}$$

olmak üzere $w'_{2\lambda}(x, \lambda)$

$$w'_{2\lambda}(x, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) w'_{2\lambda}(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda (x - \tau) d\tau + K(x, \lambda) \quad |K_2(x, \lambda)| \leq K_0^2 \quad (K_0^2 > 0)$$

şeklinde yazılabilir. $C_{2\lambda} = \max_{\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]} |w'_{2\lambda}(x, \lambda)|$ olsun, bu durumda yukarıdaki eşitlikten

$$C_{2\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} q_1 C_{2\lambda} + K_0^2$$

olur. $\lambda \geq \max\{2q_1, 2q_2\}$ iken

$$C_{2\lambda} \leq 2K_0^2$$

olur. Böylece (3.3.4)'ün doğruluğu gösterilmiş ve Lemma ispatlanmış olur.

n bir doğal sayı olmak üzere $\left|n + \frac{1}{4} - \lambda\right| < \frac{1}{4}$ iken λ^2 sayısı $\left(n + \frac{1}{4}\right)^2$ sayısının yakın

komşuluğunda yer almaktadır.

Teorem 3.3 n bir doğal sayı olmak üzere n 'nin büyük değerleri için, $\left(n + \frac{1}{4}\right)^2$ civarında

(3.1.1)-(3.1.5)'in sadece bir özdeğeri vardır.

İspat (3.2.8) eşitliğinde $O(1)$ ile gösterilen ifade

$$\begin{aligned} O(1) = & -\frac{1}{\delta} \int_0^{\pi/2} q(\tau) \sin \lambda(\pi - \tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) d\tau - \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(\pi - \tau) d\tau \\ & - \frac{1}{\delta} (\cos \lambda \pi + \sin \lambda \pi) - \frac{1}{\delta \lambda} \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifadenin λ 'ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\delta} \int_0^{\pi/2} q(\tau) (\pi - \tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau - \frac{1}{\delta} \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1'(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(\pi - \tau) d\tau \\ & - \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) (\pi - \tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau - \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) w_2'(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(\pi - \tau) d\tau \\ & + \frac{\pi}{\delta} \sin \lambda \pi - \frac{\pi}{\delta} \cos \lambda \pi + \frac{1}{\delta \lambda^2} \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau \\ & - \frac{1}{\delta \lambda} \int_0^{\pi/2} q(\tau) w_1'(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau + \frac{1}{\delta \lambda} \int_0^{\pi/2} q(\tau) (\pi - \tau) w_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(\pi - \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) (\pi - \tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda(\pi - \tau) d\tau \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) w_2'(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \cos \lambda(\pi - \tau) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.3.1) ve (3.3.4) ifadelerini göz önüne aldığımızda, λ 'nın büyük değerleri için yukarıdaki ifade sınırlıdır. Şimdi (3.2.8)'in n 'nin büyük değerlerinde basit köke sahip olduğunu göstereceğiz.

$$\varphi(\lambda) = \lambda \sin \left(\lambda \pi - \frac{\pi}{4} \right) + O(1) = 0$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Basitlik için

$$\lambda \pi - \frac{\pi}{4} = \mu \pi \text{ dersek, } \lambda - \frac{1}{4} = \mu \text{ iken yukarıdaki ifade aşağıdaki formu alır.}$$

$$\left(\mu + \frac{1}{4}\right) \sin \mu \pi + O(1) = 0$$

veya

$$\mu \sin \mu \pi + O(1) = 0$$

$\varphi(\lambda)$ 'nın türevini alırsak;

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(\lambda) &= \sin\left(\lambda\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \lambda\pi \cos\left(\lambda\pi - \frac{\pi}{4}\right) + O(1) \\ &= \sin \mu \pi + \left(\frac{1}{4} + \mu\right) \pi \cos \mu \pi + O(1) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\varphi'_\mu(\mu) = \sin \mu \pi + \mu \pi \cos \mu \pi + O(1)$$

ifadesi n 'nin büyük değerlerinde ve μ 'nün n 'ye dolayısıyla λ 'nın $n + \frac{1}{4}$ 'e yakın değerlerinde sıfıra eşit değildir.

Bu durumda Rolle teoremine göre (3.2.8) denklemi n 'nin büyük değerlerinde n 'nin civarında tek(basit) köke sahiptir. (3.2.8), (3.1.1)-(3.1.5) probleminin özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini elde etmemizi sağlar.

n yeterince büyük olsun. (3.1.1)-(3.1.5) probleminin özdeğerlerini $\mu_n = n + \delta_n$ iken

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{4} + \mu_n\right)$$

ile ifade edelim. Bu ifadeyi

$$\mu \sin \mu \pi + O(1) = 0$$

denkleminde yerine koyarsak

$$(n + \delta_n) \sin(n + \delta_n) \pi = (n + \delta_n) \sin(\delta_n \pi) = O(1)$$

elde edilir. Buradan

$$\sin(\delta_n \pi) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dolayısıyla

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\mu_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ve} \quad \lambda_n = n + \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.3.6)$$

şeklinde bulunur. (3.3.6) formülü (3.1.1)-(3.1.5) problemlerinin özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini bulmayı mümkün kılar.

(3.1.8), (3.2.4) ve (3.3.1) den

$$w_1(x, \lambda) = \cos \lambda x - \sin \lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

veya

$$w_1(x, \lambda) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda x\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (3.3.7)$$

ve

$$w_1'(x, \lambda) = -\lambda \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \lambda x\right) + O(1) \quad (3.3.8)$$

bulunur. Ayrıca (3.1.9), (3.3.2), (3.3.7) ve (3.3.8)'den

$$\begin{aligned} w_2(x, \lambda) &= \frac{1}{\lambda \delta} \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left[(-\lambda \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \lambda \frac{\pi}{2}\right) + O(1)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) w_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) \sin \lambda (x - \tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{\delta} \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left[\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \lambda \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{1}{\delta} \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda \frac{\pi}{2}\right) \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda x\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

bulunur.

(3.3.6) formülünü (3.3.7) ve (3.3.9) da yerine koyarsak

$$U_{1n}(x) = w_1(x, \lambda_n) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \left(n + \frac{1}{4}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$U_{2n}(x) = w_2(x, \lambda_n) = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \left(n + \frac{1}{4}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Böylece $U_n(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki asimptotik ifadeye sahip olur.

$$U_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \left(n + \frac{1}{4}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \left(n + \frac{1}{4}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Ek koşullar altında gecikmeye bağlı daha kesin asimptotik ifadeler bulunabilir. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim;

a) $q'(x)$ ve $\Delta''(x)$ türevleri vardır ve sınırlıdır. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de

$$q'\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} q'(x) \text{ ve } \Delta''\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta''(x).$$

b) $\Delta'(x) \leq 1$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de $\Delta(0) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \Delta(x) = 0$.

b'deki koşullardan

$$x - \Delta(x) \geq 0 \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.3.10)$$

$$x - \Delta(x) \geq \frac{\pi}{2} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (3.3.11)$$

ifadelerinin sağlandığı kolayca görülür.

(3.3.7), (3.3.9), (3.3.10) ve (3.3.11)'den $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralıklarında sırasıyla

$$\omega_1(\tau - \Delta(\tau), \lambda) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau)) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad (3.3.12)$$

$$\omega_2(\tau - \Delta(\tau), \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau)) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad (3.3.13)$$

bulunur. Bu ifadeler (3.2.7)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda^2}{\delta} \sin \lambda \pi + \frac{\lambda^2}{\delta} \cos \lambda \pi - \frac{\lambda}{\delta} \cos \lambda \pi - \frac{\lambda}{\delta} \sin \lambda \pi \\ & -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\delta} \int_0^{\pi/2} q(\tau) \sin \lambda \frac{\pi}{2} \cos \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\delta} \int_0^{\pi/2} q(\tau) \cos \lambda \frac{\pi}{2} \sin \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & +\frac{\sqrt{2}}{\delta} \int_0^{\pi/2} q(\tau) \sin \lambda \frac{\pi}{2} \sin \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & -\frac{\sqrt{2}}{\delta} \int_0^{\pi/2} q(\tau) \cos \lambda \frac{\pi}{2} \cos \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\delta} \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) \sin \lambda (\pi - \tau) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & -\frac{\sqrt{2}}{\delta} \int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau) \cos \lambda (\pi - \tau) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau + O(1) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\delta} \int_0^{\pi} q(\tau) \sin \lambda (\pi - \tau) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & -\frac{\sqrt{2}}{\delta} \int_0^{\pi} q(\tau) \cos \lambda (\pi - \tau) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & +\frac{\lambda^2\sqrt{2}}{\delta} \cos\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda\sqrt{2}}{\delta} \sin\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{4}\right) + O(1) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeyi $\frac{\lambda}{\delta}$ 'ya bölersek

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2} \int_0^{\pi} q(\tau) \sin \lambda (\pi - \tau) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau \\ & +\lambda\sqrt{2} \cos\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\delta} \sin\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0 \end{aligned}$$

veya daha açık halde

$$-\left[\int_0^{\pi} q(\tau) \sin \lambda(\pi - \tau) \cos \lambda(\tau - \Delta(\tau)) d\tau - \int_0^{\pi} q(\tau) \sin \lambda(\pi - \tau) \sin \lambda(\tau - \Delta(\tau)) d\tau \right] \\ + \lambda (\cos \lambda \pi - \sin \lambda \pi) - (\cos \lambda \pi + \sin \lambda \pi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$$

bulunur. $K = \lambda (\cos \lambda \pi - \sin \lambda \pi) - (\cos \lambda \pi + \sin \lambda \pi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ olsun. Böylece son eşitlik

$$-\left\{ \int_0^{\pi} q(\tau) \frac{\sin \lambda(\pi - \Delta(\tau)) + \sin \lambda(\pi - (2\tau - \Delta(\tau)))}{2} d\tau - \int_0^{\pi} q(\tau) \frac{\cos \lambda(\pi - \Delta(\tau)) - \cos \lambda(\pi - (2\tau - \Delta(\tau)))}{2} d\tau \right\} + K = 0$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki ifade açık olarak

$$-\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\pi} q(\tau) \sin \lambda \pi \cos \lambda \Delta(\tau) - \cos \lambda \pi \sin \lambda \Delta(\tau) + \sin \lambda \pi \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) - \cos \lambda \pi \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) - \cos \lambda \pi \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) - \sin \lambda \pi \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) + \cos \lambda \pi \cos \lambda \Delta(\tau) + \sin \lambda \pi \sin \lambda \Delta(\tau) d\tau \right\} + K = 0$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlikteki integralin içindeki ifadeler ortak paranteze alınarak düzenlenirse

$$-\frac{1}{2} \left\{ \sin \lambda \pi \int_0^{\pi} q(\tau) (\cos \lambda \Delta(\tau) + \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) - \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) + \sin \lambda \Delta(\tau)) d\tau + \cos \lambda \pi \int_0^{\pi} q(\tau) (\sin \lambda \Delta(\tau) + \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) + \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) - \cos \lambda \Delta(\tau)) d\tau \right\} + K$$

$$= -\frac{1}{2} (\cos \lambda \pi + \sin \lambda \pi) \int_0^{\pi} q(\tau) (\cos \lambda \Delta(\tau) - \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau))) d\tau \\ - \frac{1}{2} (\sin \lambda \pi - \cos \lambda \pi) \int_0^{\pi} q(\tau) (\cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) + \sin \lambda \Delta(\tau)) d\tau$$

$$+ \lambda (\cos \lambda \pi - \sin \lambda \pi) - (\cos \lambda \pi + \sin \lambda \pi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0 \quad (3.3.14)$$

bulunur.

Aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım.

$$\left. \begin{aligned} A(x, \lambda, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda \Delta(\tau) d\tau \\ B(x, \lambda, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda \Delta(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.3.15)$$

Bu fonksiyonlar $0 \leq x \leq \pi$ ve $0 < \lambda < \infty$ için sınırlı olduğu açıktır.

a) ve b) koşulları altında

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) d\tau &= O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ \int_0^x q(\tau) \sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) d\tau &= O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.16)$$

formülleri Norkin(1972) çalışmasındaki Lemma 3.3.3'ün ispatında kullanılan teknikler yardımıyla ispatlanabilir. (3.3.15) ve (3.3.16) , (3.3.14) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} & -(\cos \lambda \pi + \sin \lambda \pi) \left[B(\pi, \lambda, \Delta(\tau)) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + 1 \right] \\ & -(\sin \lambda \pi - \cos \lambda \pi) \left[A(\pi, \lambda, \Delta(\tau)) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \lambda \right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik aşağıdaki eşitliğe denktir.

$$-\cos \left(\lambda \pi - \frac{\pi}{4} \right) \left[B(\pi, \lambda, \Delta(\tau)) + 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] = \sin \left(\lambda \pi - \frac{\pi}{4} \right) \left[A\left(\pi, \lambda, \Delta(\tau) + \lambda + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \right]$$

Buradan

$$\tan \pi \left(\lambda - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{\lambda} [B(\pi, \lambda, \Delta(\tau)) + 1] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

elde edilir. Bu ifadede λ yerine

$$\lambda_n = \mu_n + \frac{1}{4} = n + \frac{1}{4} + \delta_n$$

konulursa

$$\tan \pi \left(n + \delta_n \right) = \tan \delta_n \pi = -\frac{1}{\left(n + \frac{1}{4} \right)} \left[B\left(\pi, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau) \right) + 1 \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde bulunur ve buradan

$$\delta_n = -\frac{1}{\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)} \left[B\left(\pi, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) + 1 \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir. Böylece n 'nin büyük değerlerinde

$$\lambda_n = n + \frac{1}{4} - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi} \left[B\left(\pi, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) + 1 \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.3.17)$$

bulunmuş olur.

Teorem 3.4 a) ve b) koşulları altında (3.1.1)-(3.1.5) probleminin özdeğerleri (3.3.17) deki asimptotik ifadeye sahiptir.

Şimdi (3.1.1)-(3.1.5) probleminin özfonksiyonları için daha kesin asimptotik formüller elde edebiliriz. (3.1.8) ve (3.3.12)'den

$$\omega_1(x, \lambda) = -\sin \lambda x + \cos \lambda x - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - \tau) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau)) \right) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \sin \lambda(x - \tau) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau)) \right) &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\lambda x - \lambda \Delta(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\lambda x - 2\lambda \tau + \lambda \Delta(\tau) - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\lambda(x - \Delta(\tau)) + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\lambda(x - (2\tau - \Delta(\tau))) - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \omega_1(x, \lambda) &= -\sin \lambda x + \cos \lambda x - \frac{1}{\lambda \sqrt{2}} \int_0^x q(\tau) \left[\sin \left(\lambda(x - \Delta(\tau)) + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\lambda(x - (2\tau - \Delta(\tau))) - \frac{\pi}{4} \right) \right] d\tau \\ &= -\sin \lambda x + \cos \lambda x - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \left[\sin \lambda(x - \Delta(\tau)) + \cos \lambda(x - \Delta(\tau)) + \sin \lambda(x - (2\tau - \Delta(\tau))) \right. \\ &\quad \left. - \cos \lambda(x - (2\tau - \Delta(\tau))) \right] d\tau \end{aligned}$$

bulunur.

İntegralin içindeki trigonometrik ifadeler açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
 w_1(x, \lambda) = & -\sin \lambda x + \cos \lambda x - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) (\sin \lambda x \cos \lambda \Delta(\tau) - \sin \lambda \Delta(\tau) \cos \lambda x) d\tau \\
 & - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) (\cos \lambda x \cos \lambda \Delta(\tau) + \sin \lambda x \sin \lambda \Delta(\tau)) d\tau \\
 & - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) [\sin \lambda x \cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) - \cos \lambda x \sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau))] d\tau \\
 & + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) [\cos \lambda x \cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) + \sin \lambda x \sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau))] d\tau
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade ortak parantezlere alarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
 w_1(x, \lambda) = & \cos \lambda x \left[1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin(\lambda \Delta(\tau)) d\tau - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \cos(\lambda \Delta(\tau)) d\tau \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) d\tau + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) d\tau \right] \\
 & + \sin \lambda x \left[-1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin(\lambda \Delta(\tau)) d\tau - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \cos(\lambda \Delta(\tau)) d\tau \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) d\tau - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) d\tau \right]
 \end{aligned}$$

şeklini alır. (3.3.15) ve (3.3.16) yukarıdaki eşitlikte yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}
 w_1(x, \lambda) = & \cos \lambda x \left[1 + \frac{A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - B(x, \lambda, \Delta(\tau))}{\lambda} \right] \\
 & - \sin \lambda x \left[1 + \frac{A(x, \lambda, \Delta(\tau)) + B(x, \lambda, \Delta(\tau))}{\lambda} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

elde edilir. Burada λ yerine (3.3.17)de verilen λ_n alınırsa

$$\begin{aligned}
U_{1n}(x) &= w_1(x, \lambda_n) \\
&= \cos\left(\left(n + \frac{1}{4}\right)x\right) \left[1 + \frac{A\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) - B\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right)}{n} + \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi} \left[1 + B\left(\pi, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) \right] \right] x \\
&\quad - \sin\left(\left(n + \frac{1}{4}\right)x\right) \left[1 + \frac{A\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) + B\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right)}{n} - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi} \left[1 + B\left(\pi, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) \right] \right] x \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

elde edilir. $w_1(x, \lambda)$ 'nin (3.1.8) deki ifadesinin türevi alınıp λ 'ya bölüldükten sonra (3.3.12) eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\frac{w_1'(x, \lambda)}{\lambda} &= -\cos \lambda x - \sin \lambda x - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - \tau) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau))\right) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
&= -\cos \lambda x - \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - \tau) \cos \lambda(\tau - \Delta(\tau)) d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - \tau) \sin \lambda(\tau - \Delta(\tau)) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
&= -\cos \lambda x - \sin \lambda x - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) [\cos \lambda(x - \Delta(\tau)) + \cos \lambda(x - (2\tau - \Delta(\tau)))] \\
&\quad - \sin \lambda(x - \Delta(\tau)) - \sin \lambda((2\tau - \Delta(\tau)) - x) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte trigonometrik ifadeler açık olarak yazıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{w_1'(x, \lambda)}{\lambda} &= \cos \lambda x \left[-1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) [\cos \lambda \Delta(\tau) + \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) + \sin \lambda \Delta(\tau) - \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau))] d\tau \right] \\
&\quad + \sin \lambda x \left[-1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) [\sin \lambda \Delta(\tau) + \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) - \cos \lambda \Delta(\tau) + \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau))] d\tau \right] \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.15) deki eşitlikler bulduğumuz denklem de yerine konulursa

$$\begin{aligned}
\frac{w_1'(x, \lambda)}{\lambda} &= \cos \lambda x \left[-1 - \frac{A(x, \lambda, \Delta(\tau)) + B(x, \lambda, \Delta(\tau))}{\lambda} \right] \\
&\quad + \sin \lambda x \left[-1 - \frac{(A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - B(x, \lambda, \Delta(\tau)))}{\lambda} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

elde edilir. (3.1.9), (3.3.13), (3.3.16), (3.3.18) ve (3.3.20)'den

$$\begin{aligned}
 w_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\delta} \sin \lambda \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left[-\cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
 & \left. - \sin \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) \right)}{\lambda} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{\delta} \cos \lambda \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left[\cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
 & \left. - \sin \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) \right)}{\lambda} \right) \right] \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{\delta \lambda} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \sin \lambda (x - \tau) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \lambda(\tau - \Delta(\tau)) \right) \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2} \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 w_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\delta} \left[\sin \lambda x \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \cos \lambda x \sin \lambda \frac{\pi}{2} \right] \left[-\cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
 & \left. - \sin \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau) \right) \right)}{\lambda} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\delta} \left[\cos \lambda x \cos \lambda \frac{\pi}{2} + \sin \lambda x \sin \lambda \frac{\pi}{2} \right] \left[\cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
& \left. - \sin \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right] \\
& - \frac{1}{\lambda \delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \sin \lambda (x - \tau) [\cos \lambda (\tau - \Delta(\tau))] d\tau + \frac{1}{\lambda \delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \sin \lambda (x - \tau) [\sin \lambda (\tau - \Delta(\tau))] d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ara işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
w_2(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \left[-\sin \lambda x \cos^2 \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
& + \cos \lambda x \sin \lambda \frac{\pi}{2} \cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \\
& - \sin \lambda x \sin \lambda \frac{\pi}{2} \cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \\
& + \cos \lambda x \sin^2 \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \\
& \left. + \cos \lambda x \cos^2 \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \lambda x \sin \lambda \frac{\pi}{2} \cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \\
& - \cos \lambda x \sin \lambda \frac{\pi}{2} \cos \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \\
& - \sin \lambda x \sin^2 \lambda \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \Bigg] \\
& - \frac{1}{\lambda \delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \sin \lambda(x - \tau) [\cos \lambda(\tau - \Delta(\tau))] d\tau + \frac{1}{\lambda \delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \sin \lambda(x - \tau) [\sin \lambda(\tau - \Delta(\tau))] d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
& = \frac{1}{\delta} \left[-\sin \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) + \cos \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right] \\
& - \frac{1}{\lambda \delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{1}{2} [\sin \lambda(x - \Delta(\tau)) + \sin \lambda(x - (2\tau - \Delta(\tau)))] d\tau \\
& + \frac{1}{\lambda \delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{1}{2} [\cos \lambda(x - (2\tau - \Delta(\tau))) - \cos \lambda(x - \Delta(\tau))] d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. İntegralin içindeki trigonometrik ifadeler açılırsa

$$\begin{aligned}
w_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\delta} \left[-\sin \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
& \left. + \cos \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right] - \frac{1}{2\lambda\delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) [(\sin \lambda x \cos \lambda \Delta(\tau) \\
& - \cos \lambda x \sin \lambda \Delta(\tau)) + \sin \lambda x \cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) - \sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) \cos \lambda x] d\tau \\
& + \frac{1}{2\lambda\delta} \int_{\pi/2}^x q(\tau) [(\cos \lambda x \cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau)) + \sin \lambda x \sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau))) \\
& - (\cos \lambda x \cos \lambda \Delta(\tau) + \sin \lambda x \sin \lambda \Delta(\tau))] d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegralli ifadeler $A(x, \lambda, \Delta \tau)$ ve $B(x, \lambda, \Delta \tau)$ ifadeleri kullanılabilecek şekilde düzenlenirse son eşitlikten

$$\begin{aligned}
w_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\delta} \left[-\sin \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
& \left. + \cos \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right] \\
& - \frac{1}{\lambda\delta} \left\{ \sin \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\cos \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau - \cos \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\sin \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau \right. \\
& \left. + \sin \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau))}{2} d\tau - \cos \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau))}{2} d\tau \right\} \\
& + \frac{1}{\lambda\delta} \left\{ \cos \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\cos \lambda (2\tau - \Delta(\tau))}{2} d\tau + \sin \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\sin \lambda (2\tau - \Delta(\tau))}{2} d\tau \right. \\
& \left. - \cos \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\cos \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau - \sin \lambda x \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\sin \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{3.3.21}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\int_0^x q(\tau) \frac{\cos \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau = \int_0^{\pi/2} q(\tau) \frac{\cos \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau + \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\cos \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau$$

olduğundan

$$B(x, \lambda, \Delta(\tau)) = B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + \int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\cos \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau$$

olur ve bu eşitlik

$$\int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\cos \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau = B(x, \lambda, \Delta(\tau)) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \quad (3.3.22)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı şekilde

$$\int_{\pi/2}^x q(\tau) \frac{\sin \lambda \Delta(\tau)}{2} d\tau = A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \quad (3.3.23)$$

olur. (3.3.16), (3.3.22) ve (3.3.23)'ü (3.3.21)'de göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} w_2(x, \lambda) = & \frac{1}{\delta} \left[-\sin \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\ & + \cos \lambda x \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \left. \right] - \frac{1}{\lambda \delta} \left\{ \sin \lambda x \left[B(x, \lambda, \Delta(\tau)) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right] \right. \\ & - \cos \lambda x \left[A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right] \left. \right\} + \frac{1}{\lambda \delta} \left\{ -\cos \lambda x \left[B(x, \lambda, \Delta(\tau)) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right] \right. \\ & - \sin \lambda x \left[A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right] \left. \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (3.3.24) \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ iken

$$\begin{aligned}
w_2(x, \lambda) = & \sin \lambda x \left[-\frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
& - \frac{1}{\lambda \delta} \left[B(x, \lambda, \Delta(\tau)) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right] \\
& + \cos \lambda x \left[\frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right)}{\lambda} \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\lambda \delta} \left[A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B(x, \lambda, \Delta(\tau)) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) \right] \right] \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (3.3.25)
\end{aligned}$$

elde edilir.(3.3.25)'i düzenlersek

$$\begin{aligned}
w_2(x, \lambda) = & -\frac{1}{\delta} \sin \lambda x \left(1 + \frac{A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + B(x, \lambda, \Delta(\tau))}{\lambda} \right) \\
& - \frac{1}{\delta} \sin \lambda x \left(\frac{-B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right)}{\lambda} \right) \\
& + \frac{1}{\delta} \cos \lambda x \left(1 + \frac{A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) + A(x, \lambda, \Delta(\tau))}{\lambda} \right) \\
& + \frac{1}{\delta} \cos \lambda x \left(\frac{-A\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right) - B(x, \lambda, \Delta(\tau)) + B\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, \Delta(\tau)\right)}{\lambda} \right) \\
& + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Buradan $w_2(x, \lambda)$ 'nin son hali

$$w_2(x, \lambda) = \frac{1}{\delta} \left\{ -\sin \lambda x \left(1 + \frac{B(x, \lambda, \Delta(\tau)) + A(x, \lambda, \Delta(\tau))}{\lambda} \right) \right. \\ \left. + \cos \lambda x \left(1 + \frac{A(x, \lambda, \Delta(\tau)) - B(x, \lambda, \Delta(\tau))}{\lambda} \right) \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (3.3.26)$$

şeklinde elde edilir. λ yerine λ_n 'nin (3.3.17) deki ifadesi konulursa

$$w_2(x, \lambda_n) = U_{2n}(x) = \left\{ \frac{1}{\delta} \cos \left(n + \frac{1}{4} \right) x \left[1 + \frac{A\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) - B\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right)}{n} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi} \left(B\left(\pi, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) + 1 \right) x \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta} \sin \left(n + \frac{1}{4} \right) x \left[1 + \frac{B\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) + A\left(x, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right)}{n} \right] \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi} \left(B\left(\pi, n + \frac{1}{4}, \Delta(\tau)\right) + 1 \right) x \right] \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.3.27)$$

bulunur.

Teorem 3.5 Eğer a) ve b) koşulları sağlanırsa, (3.1.1)-(3.1.5) probleminin $U_n(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki asimptotik ifadeye sahiptir.

$$U_n(x) = \begin{cases} U_{1n}(x) & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ U_{2n}(x) & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Burada $U_{1n}(x), U_{2n}(x)$ sırasıyla (3.3.19) ve (3.3.27) de verilmiştir.

4. SONUÇ

Bu tezde sınır koşulunda spektral parametre bulunan iki tip problem ele alınmıştır. İlk olarak

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda R(x)y, \quad a < x < b$$

$$y^{[1]}(a) = 0 \quad \left(y^{[1]}(a) = \lim_{x \rightarrow a} P(x)y'(x) \right)$$

$$\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = -\lambda \alpha_1 y(b)$$

matris katsayılı sınır değer probleminin spektrumu incelenmiş ve özfonksiyonlara göre açılım formülü elde edilmiştir. Bunun yanı sıra bu sınır değer problemine karşılık gelen kendine eş operatörün spektral fonksiyonunun ve rezolventinin matris çekirdekli integral operatör olduğu gösterilmiştir. Gelecekte bu çalışmanın $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayılarının tam sürekli operatör değerli fonksiyonlar olması durumunun incelenmesiyle devam ettirilmesi öngörülmüştür.

İkinci olarak $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) + q(x)y(x - \Delta x) = 0$$

denklemini,

$$\lambda y(0) + y'(0) = 0$$

$$\lambda^2 y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

sınır koşulları ve

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \delta y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0$$

dönüşüm koşullarıyla verilen geciken argümanlı, sınır koşullarında özdeğer bulunan süresiz sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadesi bulunmuştur.

KAYNAKLAR

Akhiezer N.I., Glazman I.M., (1987), Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, INC, New York.

Amara J.B., (2004), Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions, Functional Analysis and its Applications.

Bayramoglu M., Özden Köklü K., Baykal O., (2001), Sınır Koşularında Spektral Parametre Olan Geç Kalan Bağımsız Değişkenli Sturm-Liouville Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonları Üzerine, International Conference On Functional Analysis, Kyiv, Ukraine, August 22-26.

Bayramoglu M., Özden Köklü K., Baykal O., (2002), On the Spectral Properties of the Regular Sturm-Liouville Problem with the Lag Argument for which its Boundary Conditions Depends on the Spectral Parameter. Turk J.Math. V.26, N:4(2002).421-431.

Bayramov A., Öztürk Uslu S., Kızılbudak S., (2007), Computation of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Discontinuous Boundary Value Problem with Retarded Argument, Applied Mathematics and Computation, V.191, issue 2, p.592-600

Bellman R., Cook K.L., (1963), Differential-difference equations. New York Academic Press, London.

Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K., (1993), Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc. 37 (1993), 57-72.

Binding P.A., Browne P.J. and Watson B.A., (2006), Sturm-Liouville Problems with Reducible Boundary Conditions, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (2006) 49, 593-608.

Binding P.A., Browne P.J and Watson B.A., (2004), Equivalence of Inverse Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter, J.Math. Analysis Applic.291, 246-261.

Birman M.S. and Solonyak M.Z., (1987), Spectral Theory of Self Adjoint Operators, DRedidel Published co Drdrecht.

Collatz L., (1963), Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen, Akademische Verlag, Leipzig.

Deminko G.V., Matveeva I.I., (2005), Asymptotic properties of solutions of delay differential equations. Vestnik MGU.Ser.:Matematika,Mechanika,Informatika 5 .(2005). iss.3,20-28.

Demidenko G.V., Likhoshvai V.A., (2005), On differential equations with retarded argument .Sib.Mat.,Zh..46(2005) n.3. 417-430.

Friedman B., (1956), Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, London.

Fulton C.T., (1977), Two-Point Boundary Value Problems with Eigenparameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. R. Soc. Edinburg A77, 293-308.

Fulton C.T., (1980), Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue-parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. R. Soc. Edinburg A87, 1-34.

Glazman I.M., (1965), Direct Methods of Qualitative Spectrum Analysis of Singular Differential Operators, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.

Hellwig G., (1967), Differential Operators of Mathematical Physics,London.

Hochstad H., (1989) Integral Equations, John Wiley & Sons, New York.

Jablonski M., Twardowska K., (1987), On boundary value problems for differential equations with retarded argument.Universitatis I agellonce Acta Mathematica iss.26(1987)29-36.

Kamenskii G.A., (1954), On the asymptotic behaviour of solutions of linear differential equations of the second order with retarded argument, Moskov.Gos.Unic.Uc.Zap.165.Mat.7 (1954) .195-2004 (Russian).

Kato T., (1980), Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag,Berlin,New-York.

Muhtarov O.SH. Kadakal M., and Altinisik N., (2005), Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions. Indian J.Pure Appl.Math.34(3) .501-516.

Naimark M.A., (1968), Linear Differential Operators, George G.Harrap&Company, LTD, London.

Nersesjan A.B., (1961), Expansion in eigenfunctions of some non-selfadjoint boundary Problems, Sibirsk.Mat Z.2(1961), 428-453(Rusça).

Norkin S.B., (1958), On boundary problem of Sturm-Liouville type for second order differential equation with retarded argument. Izv.Vyss.Ucebn.Zaved.Matematika,No:6(7), 203-214 (Rusça).

Norkin S.B., (1972), Differential equations of second order with retarded argument. Translations of Mathematical Monographs. Vol.31. (AMS,Providence,RI,1972).

Poisson S.D., (1820), Memoire sur la Maniere d'exprimer hes Fonctions par des Series de Quantites Periodiques, estur l'usage de cette ,Transformation dans La Resolution de Differens Problems, Journal de l'Ecole Polytechnique, Cah. 18, pp.417-489.

Russakovskii E.M., (1975), Operator Treatment of Boundary Value Problems with Spectral Parameters Entering via Polynomials in the Boundary Conditions, Functional Analysis Applications 9, 358-359.

Russakovskii E.M., (1996), The Matrix Sturm-Liouville Problem with Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Algebraic and Operator Aspects, Trans.Moscow.Math.Soc., 159-184.

Smirnov V.I.,(1964), A Course of Higher Mathematics, New York.

Shkalikov A.A., (1986), Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with Parameter in the Boundary Conditions, J. Soviet Math. 33, 1311-1342.

Tychonov A.N. and Samarskii I.I. ,(1956), Equations of Mathematical Physics, New York.

Tychonov A.N. and Samarskii I.I., (1963), Equations of Mathematical Physics.Pergamon, Oxford.

Walter J., (1973), Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, Math.Z.133, Page:301-312.

Weidmann J., (1980), Linear Operators in Hilbert Spaces, Graduate Texts in Mathematics, Vol.68, Springer Verlag, New York.

Weidmann J., (1987), Spectral Theory of Ordinary Differential Operator, Springer Verlag, London.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 20.04.1978

Doğum yeri İstanbul

Lise 1992 –1995 F.M.V.Özel Ayazağa Işık Lisesi

Lisans 1995 –1999 Yıldız Teknik Üniversitesi
Kimya Metalurji Fakültesi
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2000 – 2002 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Müh. Anabilim Dalı,
Matematik Müh. Programı

Doktora 2002- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Müh. Anabilim Dalı,
Matematik Müh. Programı

Çalıştığı kurumlar

2000-Devam ediyor Yıldız Teknik Üniversitesi
Kimya Metalurji Fakültesi
Matematik Mühendisliği Bölümü
Araştırma Görevlisi