

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK ROBOT KOLLARDA OPTİMUM
HAREKET SENTEZİ

Mak.Yük. Müh. Tamer KEPÇELER

F.B.E. Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 19 Nisan 1999

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Faris KAYA (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Aybars ÇAKIR (İTÜ)

Prof.Dr. Osman S. TŪRKAY (BŪ)

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ.....	ix
TEŞEKKÜR	x
ÖZET.....	xi
ABSTRACT.....	xii

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1	Problemin Tanımı.....	1
1.2	Esnek Robot Kol Titreşimleri.....	3
1.3	Esnek Robot Kollarda Oluşan Titreşimlerin Olumsuz Etkileri.....	4
1.4	Esnek Robot Kolların Titreşim Kontrolü.....	5
1.5	Esnek Robot Kol Titreşimlerini Azaltmaya İlişkin Çalışmalar.....	7
1.5.1	Esnek Robot Kolların Modellenmesi ve Denklemlerin Çözümü Üzerine Yapılan Bazı Çalışmalar.....	8
1.5.2	Esnek Robot Kol Uç Titreşimleri Üzerine Yapılan Bazı Çalışmalar.....	11
1.5.3	Esnek Robot Kol Uç Titreşimlerinin Kontrolü Üzerine Yapılan Bazı Çalışmalar...	13
1.6	Bu Çalışmanın Yeri, Amacı ve Katkısı.....	17

BÖLÜM 2

ROBOT KİNEMATİĞİ

2.1	Giriş.....	20
2.2	Geometrik Esaslı Düz Kinematik Analiz Yöntemi.....	21
2.3	Homojen Dönüşüm Matris Yöntemi.....	22
2.3.1	Dönme Matrisi.....	23
2.3.2	Öteleme Matrisi.....	24
2.3.3	Yerdeğiştirme Matrisi.....	25
2.3.4	Vektör Dönüşümü.....	25
2.3.5	Nokta Koordinat Dönüşümü.....	25
2.4	Denavit-Hartenberg Yöntemi.....	26

2.4.1	D-H Yerdeğiştirme Matrisinin Bulunması.....	30
2.5	Quaternion ve Döner Vektör Gösterimi.....	30
2.5.1	Quaternion'un Tanımı.....	31
2.5.2	Vektör Dönüşümünde Quaternionun Kullanımı.....	32
2.5.3	Ardışık Dönmeler.....	32
2.5.4	Dönme Vektörü.....	32

BÖLÜM 3

ROBOT DİNAMİĞİ

3.1	Giriş.....	34
3.2	Robot Kolların Modellenmesi.....	34
3.2.1	Robot Kolların Rijit Modellenmesi.....	34
3.2.1.1	Lagrange-Euler Formülasyonu.....	35
3.2.1.1.1	Robot Kol Mafsal Hızı.....	36
3.2.1.1.2	Robot Kolun Kinetik Enerjisi.....	40
3.2.1.1.3	Robot Kolun Potansiyel Enerjisi.....	42
3.2.1.1.4	Bir Robotun Hareket Denklemleri.....	42
3.2.1.2	Newton-Euler Formülasyonu.....	44
3.2.1.2.1	Robot Kol Kinematığı.....	45
3.2.1.2.2	Robot Kol Hareketinin Ardışık Denklemleri.....	48
3.2.1.3	Genelleştirilmiş d'Alembert Yöntemi.....	51
3.2.2	Robot Kolların Esnek Modellenmesi.....	55
3.3	Robot Kollarda Düz ve Ters Dinamik Problem.....	56

BÖLÜM 4

ESNEK ROBOT KOL MODELLEMESİ

4.1	Giriş.....	58
4.2	Koordinat Sistemleri.....	59
4.3	Hareket Denklemlerinin Çıkarılması.....	61
4.4	Tangent Koordinat Takımından VLCS Takımına Dönüşüm.....	66
4.5	Servomotor Momentleri ve Genelleştirilmiş Kuvvetler.....	69

BÖLÜM 5

OPTİMİZASYON PROBLEMİ FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

5.1	Geometrik Sınırlamalar.....	73
5.2	Dinamik Sınırlamalar.....	73
5.2.1	Nokta Sınırlamalar.....	74
5.2.2	Ortalama Sınırlamalar.....	74
5.3	Optimum Hareketin Sınır Şartları.....	75

SİMGE LİSTESİ

L	Uzuv boyu
P	Robot kol uç noktası
O	Koordinat takımının orijini
X,Y,Z	Ana koordinat takımının doğrultuları
x,y,z	Hareketli koordinat takımının doğrultuları
C	3×3 Homojen dönüşüm matrisi
T	4×4 Homojen dönüşüm matrisi
K	Kinetik enerji
P	Potansiyel enerji
L	Lagrange fonksiyonu
R	Esnek robot kol üzerindeki herhangi bir noktanın yervektörü
r	Esnek robot kol üzerindeki herhangi bir noktanın bağlı bulunduğu hareketli eksen takımına göre yervektörü
x	Tangent koordinatlarında, esnek uzuv üzerindeki bir noktanın bağlı bulunduğu hareketli koordinat takımının orijinine olan uzaklığı
$\hat{x}$	VLCS'de esnek uzuv üzerindeki bir noktanın bağlı bulunduğu hareketli koordinat takımının orijinine olan uzaklığı
v	Esnek uzuv üzerindeki herhangi bir noktanın tangent koordinatlarındaki elastik yerdeğiştirmesi
$\hat{v}$	Esnek uzuv üzerindeki herhangi bir noktanın VLCS koordinatlarındaki elastik yerdeğiştirmesi
α	Tangent koordinat takımıyla VLCS arasındaki açı
θ	Robot kolun tangent koordinatlarında yatayla yaptığı açı
$\hat{\theta}$	Robot kolun VLCS'de yatayla yaptığı açı
m	Mafsal noktalarındaki servomotor kütleleri ve robot kolun taşıdığı yük
D	Skew matris
ρ	Özgül ağırlık
E	Elastisite modülü
I	Kesit atalet momenti

ϕ	Tangent koordinatlarında şekil fonksiyonu
$\hat{\phi}$	VLCS' de şekil fonksiyonu
θ, q	Tangent koordinatlarında genelleştirilmiş koordinatlar
$\dot{\theta}, \dot{q}$	Tangent koordinatlarında genelleştirilmiş hızlar
$\ddot{\theta}, \ddot{q}$	Tangent koordinatlarında genelleştirilmiş ivmeler
$\hat{\theta}, \hat{q}$	VLCS' de genelleştirilmiş koordinatlar
$\dot{\hat{\theta}}, \dot{\hat{q}}$	VLCS' de genelleştirilmiş hızlar
$\ddot{\hat{\theta}}, \ddot{\hat{q}}$	VLCS' de genelleştirilmiş ivmeler
$\hat{\theta}', \hat{q}'$	VLCS' de boyutsuz zamanda genelleştirilmiş hızlar
$\hat{\theta}'', \hat{q}''$	VLCS' de boyutsuz zamanda genelleştirilmiş ivmeler
f_{θ}, f_q	Tangent koordinatlarında genelleştirilmiş kuvvetler
$\hat{f}_{\theta}, \hat{f}_q$	VLCS' de genelleştirilmiş kuvvetler
$\hat{f}_{\theta}^*, \hat{f}_q^*$	VLCS' de boyutsuz zamanda genelleştirilmiş kuvvetler
τ^*	Mafsal momenti
J	Optimizasyon ölçütü
E_{Top}	Harcanan toplam enerji
τ	Boyutsuz zaman değişkeni
t	Zaman
T	Hareket süresi
a, b	Optimizasyon parametreleri
n	Esnek uzuv sayısı
m_i, m_j	Mod sayısı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	İki kollu düzlemsel bir robot modeli	21
Şekil 2.2	İki koordinat takımının birbirine göre ötelenmesinin gösterimi.....	24
Şekil 2.3	Bir PUMA robotunun uzuv koordinat takımlarının yerleştirilmesi.....	27
Şekil 3.1	Bir noktanın homojen koordinatlarının gösterimi.....	36
Şekil 3.2	O, O* ve O' koordinat takımları arasındaki ilişki.....	46
Şekil 3.3	i. uzuv üzerindeki kuvvet ve momentlerin gösterimi.....	50
Şekil 3.4	Genelleştirilmiş d'Alembert denklemlerinin çıkarımında kullanılan konum vektörü.....	53
Şekil 4.1	Esnek bir robot uzvuna tangent koordinat takımının yerleştirilmesi.....	60
Şekil 4.2	Esnek bir robot uzvuna VLCS 'in yerleştirilmesi.....	60
Şekil 4.3	n adet esnek uzva sahip düzlemsel bir robot kolun şematik gösterimi.....	61
Şekil 4.4	VLCS ile tangent koordinat takımları arasındaki geometrik ilişki.....	66
Şekil 4.5	VLCS' de esnek bir uzva etkiyen servomotor momentlerinin gösterimi....	70
Şekil 6.1	İki serbestlik dereceli düzlemsel bir robotun elastik yerdeğiştirmesinin gösterimi	85
Şekil 7.1	Uzuv uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2$ kg ve $m_2=0.5, 1, 1.5$ kg yük taşıyan elastik ve rijit modellenmiş, çelikten yapılmış $L_1 = 0.8$ m ve $L_2 = 0.7$ m boyundaki uzuvların, optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsallarda hareketlerinde servomotorların harcadığı toplam enerjinin T hareket süresi ile değişimi.....	106
Şekil 7.2	Uzuv uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2$ kg ve $m_2=0.5, 1, 1.5$ kg yük taşıyan elastik ve rijit modellenmiş, alüminyumdan yapılmış $L_1 = 0.8$ m ve $L_2 = 0.7$ m boyundaki uzuvların, optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsallarda hareketlerinde servomotorların harcadığı toplam enerjinin T hareket süresi ile değişimi.....	107
Şekil 7.3	T=0.15 saniye için mafsallarda konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsallarda hareketleri altında değişimi.....	110
Şekil 7.4	T=0.25 saniye için mafsallarda konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsallarda hareketleri altında değişimi.....	111

Şekil 7.5	T=0.4 saniye için mafsalsal konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsalsal hareketleri altında değişimi.....	112
Şekil 7.6	T=0.6 saniye için mafsalsal konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsalsal hareketleri altında değişimi.....	114
Şekil 7.7	Uzuv uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsalsal hareketleri altında, T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4 saniye hareket süreleri için birinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.....	115
Şekil 7.8	Uzuv uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsalsal hareketleri altında, T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4 saniye hareket süreleri için ikinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.....	116
Şekil 7.9	Uzuv uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsalsal hareketleri altında, T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4 saniye hareket süreleri için birinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.....	117
Şekil 7.10	Uzuv uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsalsal hareketleri altında, T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4 saniye hareket süreleri için ikinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.....	118
Şekil 7.11	Uzuv uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2$ kg ve $m_2=0.5, 1, 1.5$ kg yük taşıyan çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsalsal hareketleri altında, birinci ve ikinci uzvun uç noktasının artık titreşim genliklerinin hareket süresiyle değişimi.....	121
Şekil 7.12	Uzuv uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2$ kg ve $m_2=0.5, 1, 1.5$ kg yük taşıyan alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsalsal hareketleri altında, birinci ve	

	ikinci uzvun uç noktasının artık titreşim genliklerinin hareket süresiyle değişimi.....	122
Şekil 7.13	Farklı uç kütleleri için, çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorlara uygulanan maksimum gerilimin hareket süresi ile değişimi.....	125
Şekil 7.14	Farklı uç kütleleri için, alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorlara uygulanan maksimum gerilimin hareket süresi ile değişimi.....	126
Şekil 7.15	Farklı uç kütleleri için, çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorların çektiği akımın karesel ortalamasının hareket süresi ile değişimi.....	127
Şekil 7.16	Farklı uç kütleleri için, alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorların çektiği akımın karesel ortalamasının hareket süresi ile değişimi.....	128

TABLO LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 1 Robot uzuvlarının fiziki değerleri.....	104
Tablo 2 Mafsal motorlarının karakteristik değerleri.....	104
Tablo 3 Mafsal sınır şartları.....	104
Tablo 4 Uzuvların uç noktalarının sınır şartları	105



TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince, beni yönlendiren tez danışmanım Sayın, **Prof. Dr. Faris KAYA**'ya teşekkür ederim. Teşvik ve yardımlarından dolayı, **Prof. Necati TAHRALI** ve **Prof. Dr. Surkay AKBAROV**'a, tez yazımında yardımlarını esirgemeyen anabilim dalı arkadaşlarıma ayrıca teşekkür ederim.

İstanbul
Şubat, 1999

Tamer Kepçeler
Mak.Yük. Mühendisi

ÖZET

Gelişen teknolojiye paralel olarak artan yüksek hız talebi daha hızlı hareket edebilen robot dizaynını gündeme getirmiştir. Hızlı hareket eden robot gerek uzuv ataletleri ve gerekse mafsallı motorları bakımından daha hafif elemanların kullanımını gerektirmiştir. Dolayısıyla, zayıf kesitli elastik uzuvların kullanımı kaçınılmaz olmuştur. Zayıf kesitli, narin yapılı robot uzuvları titreşime müsait elemanlardır.

Bir çok elastik uzvun uç uca eklenmesinden oluşan bir robot, özellikle, yük taşıyan eli itibarıyla iyi titreşen bir sistemdir. Elastik uzuvlu robotlar hafiflik, enerji tasarrufu ve imalatlarının ucuz olması gibi avantajlarının yanı sıra TİTREŞİM gibi önemli bir problemi de, bünyelerinde barındırırlar.

Yeni kuşak bu robotlarda çözüm bekleyen en önemli problem titreşimlerin kontrolüdür. Esnek uzuvlu robotların titreşimlerini kontrol için iki önemli yaklaşım uygulanmaktadır.

Bunlar,

- a- Geri besleme esasına dayanan klasik kontrol yöntemi
- b- Hareket sentezine dayanan yöntemdir. Bu yöntem titreşim oluşmasını engelleyecek optimum mafsallı hareketlerinin bulunmasına dayanır.

Bu çalışmada, elastik uzuvlu bir robotun ikinci yöntemle artık titreşimlerinin (residual vibration) nasıl en aza indirilebileceği incelenmiştir. Açık çevrim kontrol yöntemi olarak da adlandırılabilen bu yöntemle elde edilen optimum mafsallı hareketleri yardımıyla artık titreşimler kontrol edildi. Bu işlem minimum hareket süresi, servomotor dinamik üst sınır değerleri ve minimum enerji sarfıyatı kısıtları altında gerçekleştirildi.

Bu yaklaşımın özü, noktadan noktaya hareket planlamasına dayanır. Bu ise gerçekte bir varyasyon problemidir. Daha önce yapılmış çalışmalarda rijit uzuvlu robotların optimum mafsallı hareketleri bir seriye açılarak yukarıda verilen kısıtlar altında optimize edildi. Bu çalışmada esnek uzuvların uç titreşimleri de, mafsallı hareketleri gibi bir seriye açılmak suretiyle optimizasyona ilave edildi. Böylece, problem, verilen sınır şartlarında optimizasyon ölçütünü sağlayacak bir dizi parametrenin bulunmasına indirildi. Problem bir bakıma parametre optimizasyonuna dönüştürüldü.

Optimizasyon problemi, esnek robot kolun başlangıç ve son şartlarına bağlı olarak optimum mafsallı hareketlerini iteratif yöntemle bulan MATLAB programlama dilinde yazılmış bir programla çözüldü.

ABSTRACT

The high speed demand parallel to the advancing technology, resulted in designing speedy robots. Speedy robot means lighter robotic links and joint motor. Hence, the robotic links are smaller in cross section. Weakness in cross section means the elasticity, the elasticity of links means vibrational ability.

A flexible armed robot consists of the chain of elastic links, especially, in case of having a load at the tip, is a good example of vibrating system. Robots with elastic arms have the advantageous of weight, energy consumption and lower manufacturing cost in spite of having a VIBRATORY type problem.

Vibration is one of the important problem of this type new generation robot to be solved. There are two basic approaches for vibration control of flexible armed robots.

These are;

- a- The classical control theory based on feedback
- b- Motions synthesis method. This approach depends on finding optimum joint motion. In this thesis how to minimize residual vibration of elastic armed robot by the second method is studied.

The essence of this theory depends on the point to point trajectory planning. This is in reality a variational problem. In the previous works the joint motions were optimized under the above mentioned constraints by series expansion.

In this work the residual vibrations of flexible arms were expanded in series in the similar way and added to the optimization formulation. Then the problem received a new form to find a set of parameters under optimization constraints. Then the problem is converted into the parameter optimization.

A programme is developed to optimize joint motions by iteration, on the initial and final conditions of flexible arm tip, based on the MATLAB programming.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Problemin Tanımı

Son yıllarda endüstride artan rekabet, üretimde otomasyona geçişi zorunlu hale getirdi. Bunun doğal bir sonucu olarak da, otomasyonun vazgeçilmez bir unsuru olan robotlar büyük önem kazandı.

Otomasyonda kullanılan ve robot olarak adlandırılan farklı konstrüksiyonlara sahip ve değişik görevleri yerine getiren birimler vardır. Bu birimlerin hepsi Robotik adı verilen bir bilim dalının inceleme sahasına girmektedir. Bununla birlikte robot denilince ilk akla gelen insan kolu benzeri mekanik sistemlerdir. Daha açık bir tanımlama ile robot, bir çalışma uzayında bir cismin konum ve duruşunu değiştirebilen yeniden programlanabilir açık kinematik zincire sahip otomatik makinedir. Otomasyonda kullanılan mekanizmaların robot olarak adlandırılabilmesi için aşağıdaki üç temel özelliğe sahip olması gerekir.

- Manipülasyon: Çalışma uzayı içinde, bir cismin konum ve duruşunu değiştirebilmesi,
- Yeniden programlanabilirlik: Çalışma uzayı içinde olmak şartıyla, istendiğinde bir cismi farklı konum ve duruşa, bir program değişikliğiyle getirebilme özelliği,
- Algılama: Robotun hareketi esnasında, çalışma uzayı içinde program harici meydana gelebilecek çevre koşullarındaki değişikliklerde, düşük seviyede de olsa, robotun kendi kendine karar verebilme yeteneğine sahip olmalıdır. Bu özellik, daha ziyade akıllı robotlar olarak adlandırılan ve üzerinde yoğun çalışma yapılan üçüncü nesil robotlarda vardır.

Piyasaların rekabetçi yapılarından dolayı firmalar, varlıklarını sürdürebilmeleri için ürün çeşitlemesine gitmeye ve bu ürünlerin çok kısa periyodlarla yeni modellerini yüksek kaliteden taviz vermeden tüketicilere sunmak durumundadır. Tüketici talebine ayak uydurabilmek için

Üretim ve yönetim tekniklerinde köklü değişiklikler yapılmıştır. Fabrikalarda, ürünün tasarımından üretim aşamasına kadar esnek sistemler olarak adlandırılan, bilgisayar destekli sistemlerin kullanılması, esnek otomasyona geçişi mümkün kılmıştır.

Otomasyonda temel amaç, insandan kaynaklanan hata ve aksamaları en aza indirmektir. Esnek retimde ise en kısa sürede yeni modellere geçişi sağlamak esastır. Bu retim biçiminde insan, sadece tasarım safhasında ve ana proses planlamasıyla, alt sistemler arasında bağlantıyı sağlayan robotların programlanması sürecinde görev almaktadır.

Robotların sanayide kullanılmasının temel nedenleri, verilen farklı görevleri bir program değişikliğiyle yapabilmeleri, otomasyondan beklenen yüksek hız ve kaliteyi birlikte sağlayabilmeleri, insanlar için büyük risk taşıyan çalışma alanlarında, insan yerine başarıyla kullanılabilmeleridir. Sanayide kullanılan robotların, yüksek çalışma hızı, düşük enerji tüketimi ve yüksek işlem hassasiyeti gibi temel özelliklere sahip olaması istenir. Halen kullanılan robotlarda, yüksek konumlama hassasiyeti istenildiğinde, robotlardan beklenen diğer özellikleri olumsuz yönde etkilese bile, robot tasarımlarında rijitliği yüksek konstrüksiyonlara başvurulmaktadır. Bugün için, uzuv kesitlerini byltrek rijitliğin artırılması yöntemi, konum hassasiyetinin iyileştirilmesi işlemi için, gerçekçi bir çözüm değildir. Rijit uzuvlar, yüksek işlem hızlarında büyük atalet kuvvetlerinin oluşmasına neden olur. Dolayısıyla oluşan atalet kuvvetlerini dengeleyerek, kolların hareketini daha hızlı yapmasını sağlamak için mafsallardaki momentleri/kuvvetleri üretecek, servomotor kapasitelerinin artırılması gerekecektir. Servomotor kapasitelerinin yükseltilmesi, robotun yatırım maliyetini ve enerji tüketimini arttıracaktır. Bu ise, robotlardan beklenen niteliklerle uyışmamaktadır. Bugünkü endüstriyel uygulamalarda belki, belli bir ölçüde servomotor kapasitelerinin yüksek tutularak, konum hassasiyetinin sağlanabilmesine müsaade edilebiliyorsa da, enerji kaynağının sınırlı veya robot ağırlığının önem kazandığı denizaltı ve uzay çalışmaları gibi uygulama alanlarında, yüksek operasyon hızı ve konum hassasiyeti gibi temel nitelikler, rijit robot konstrksiyonlarıyla başarılamaz. Rijit yapılı robotların, bu olumsuz yönlerini iyileştirmek amacıyla, daha hafif robot kol konstrksiyonlarına geçmek gerekmiştir. Hafif kol beraberinde, doğal olarak, esnekliği de getireceğinden, yüksek çalışma hızlarında, robot kollarda titreşimin oluşması kaçınılmazdır. Artık titreşim (residual

vibration) genliğinin, konum hassasiyeti üzerindeki olumsuz etkilerini ortadan kaldırmak için bir çok araştırmacı, kol-parametre değişimlerinin robot kolu titreşimlerine etkileri ve bu titreşimlerin azaltılması için değişik kontrol yöntem ve teknikleri üzerinde çalışmaktadır.

1.2 Esnek Robot Kol Titreşimleri

Cisimlerin denge konumu civarında yapmış oldukları salınım hareketine titreşim denir. Rijit cisimlerde titreşimin meydana gelmesinde, kütle, yay, sönüm ve zorlayıcı kuvvet bileşenlerine, ihtiyaç vardır. Esnek cisimlerde ise, cismin esnekliğinden kaynaklanan yay ve malzeme içi sönüm etkileri de, rijit cisimlerdeki, yay ve sönüm bileşenlerine ilave edilir. Cisimlerin rijitliği, geometrik şekillerine ve yapıldıkları maddenin elastisite modülüne bağlıdır. Aynı zamanda, cisimlerin kesit boy oranları ile rijitlikleri doğru orantılıdır. Esnek robot kollar, uç uca eklenmiş esnek cisimler topluluğudur. Esnek cisimler maruz kaldıkları zorlayıcı kuvvet ile rijitlikleri oranında elastik yerdeğiştirmeye uğrarlar. Esnek robot kolları da, aşağıda belirtilen üç temel zorlayıcı kuvvete maruzdur.

- Esnek robot kollar, görevleri gereği hızlı hareket etmeleri durumunda ani yön değiştiren mafsallı kuvvet/momentlerine,
- Özellikle rijit robot konstrüksiyonlarında etkili olan, uzuv kütlelerinden kaynaklanan büyük atalet kuvvetlerine,
- Tutucularda meydana gelen ani yük değişiminden kaynaklanan kuvvetlere,

Yukarıdaki zorlayıcı kuvvetler nedeniyle oluşan titreşimlere ilave olarak, aşağıda belirtilen etkiler de, titreşim genliklerinin artmasında dolaylı olarak rol oynar.

- Robot kolların çalışma hızı ve yeteneklerinin artırılabilmesi, kol kütlelerinin azaltılmasıyla mümkündür. Kütle azaltılması ise doğal olarak uzuv kesitlerinin düşürülmesini, dolayısıyla narin ve daha elastik kol yapısı demektir.
- Yerçekimi etkisinden dolayı, kollar elastik yerdeğiştirmeye uğrarlar.
- Robot uzuvlarının, harmonik bir sürücü redüksiyonuyla yüksek hızda, hareket ettirilmesi durumunda, moment titreşimlerinden kaynaklanan rezonans titreşimleri.
- Esnek tahrik sistemlerinden kaynaklanan, robot kol titreşimleri.

Robot kollarda, yukarıda açıklanan nedenlerden kaynaklanan üç tip titreşim meydana gelir, bunlar:

- Uzun eksenine dik meydana gelen eğilme titreşimleri,
- Uzun eksenini doğrultusunda oluşan aksel titreşimler,
- Uzun eksenini boyunca ve mafsallarda oluşan burulma titreşimleri,

Bu üç tip titreşimden, aksel titreşimlerin uzuvlarda oluşturduğu aksel yöndeki elastik yer değiştirmelerin miktarı, robotlarda konum hassasiyetini önemli derecede etkileyecek bir değere sahip değildir. Robot kollarda, konum hassasiyetini bozan yer değiştirmeler ağırlıklı olarak, eğilme titreşimleri ve mafsallarda oluşan burulma titreşimlerinden kaynaklanır.

1.3 Esnek Robot Kollarda Oluşan Titreşimlerin Olumsuz Etkileri

Uygulamada robot kolların titreşim yapması arzu edilmez. Fakat bütün sistemler, değişik nedenlerle az veya çok titreşim yapar. Mekanik sistemler, mümkün olduğu kadar az titreşim yapacak şekilde tasarlanır. Buna rağmen oluşan titreşimler, sistemin kendisine ve çevresine zarar vermemesi için değişik kontrol veya izolasyon yöntemleriyle azaltılması yoluna gidilir.

Esnek robot kollar, uç uca eklenmiş esnek uzuvlardan oluşan, açık kinematik zincirlere sahip mekanizmalar olduğundan, titreşime müsait sistemlerdir. Robot kolların uç noktalarının izlediği yola yörünge denir. Sürekli ve noktadan noktaya olmak üzere robotik uygulamalarında iki tip yörünge vardır. Sürekli yörünge takibine, dikiş kaynağı, boyama gibi uygulamalar, noktadan noktaya yörüngeye ise nokta kaynağı, parça transferi, montaj gibi uygulamalar örnek verilebilir.

Robot kolunun uç noktası, bölüm 1.2’de anlatılan nedenlerden dolayı, hesaplanan yörünge civarından sapmalar yaparak hareket eder. Bu sapmalar, robotun yapmakta olduğu işi etkilemeyecek veya iş kalitesini bozmayacak değerde olmalıdır. Örneğin, dikiş kaynağı

işleminde robot kolun ucunda bulunan kaynak penci, kaynak edilecek iki parçanın birleştiği bölgeyi belirli bir yakınlıkta takip etmelidir. Bu takip işlemi sırasında oluşacak titreşimler, kaynak pensini ya kaynak parçasına yaklaştırarak yapışmasına veya uzaklaştırarak kaynak arkının kopmasına neden olmamalıdır. Montaj işlerinde kullanılan robotlarda, son nokta civarında robot kolun ucunda oluşan titreşimlerden dolayı montajı yapılan parçanın takılacağı yere takılamaması gibi sorunlar, noktadan noktaya harekette titreşimlerin sebep olduğu problemlere güzel bir örnektir. Titreşimlerin sebep olduğu benzer problemlere, diğer robotik uygulamalarında da rastlanır.

Yukarıda verilen örneklerdekinin aksine, uç noktanın yörüngeyi belirli bir mesafeden takip etmesi yerine direkt olarak izlemesi gereken uygulamalarda, örneğin, yörünge cam gibi bir yüzey üzerinde olması durumunda, robot kol ucunun yörünge üzerinde çok hassas hareket ederek, yüzeyde aşırı bir zorlanma meydana getirmemesi gereken uygulamalarda, titreşimle beraber robot kolun uç noktasıyla yüzey arasında oluşacak kuvvetin kontrolü da ayrı bir araştırma konusudur.

1.4 Esnek Robot Kolların Titreşim Kontrolü

Esnek robot kollarında, hareketesnasında ve hareket sonunda elastik yerdeğiştirmeler meydana gelir. Sürekli yörünge izleyen robotlarda, hareket boyunca meydana gelen elastik yerdeğiştirmeler daha önemlidir. Noktadan noktaya hareket edilen uygulamalarda ise hareket sonunda son nokta civarında oluşan ve artık titreşim olarak adlandırılan elastik yerdeğiştirmeler önem kazanır. Yörünge boyunca ve son nokta civarında oluşan titreşimlerin, ortadan tamamen kaldırılması mümkün değildir. Ancak oluşan elastik yerdeğiştirmelerin değişik kontrol yöntemleriyle azaltılması mümkündür.

Robot kolların titreşim hareketinin kontrolü çalışmalarında iki temel yaklaşım mevcuttur.

Bunlar,

- Kapalı Çevrimli Kontrol,
- Açık Çevrimli Kontrol,

Kapalı çevrimli kontrol ile yapılan titreşim kontrolü veya diğer bir deyişle titreşim genliklerinin azaltılması çalışmalarında, hareket boyunca ve hareket sonundaki elastik yerdeğiştirmeleri en aza indirmek için uygulanan yöntemler lineer olmayan kontrol veya ‘hesaplanmış moment’ olarak adlandırılan, klasik kontrol tekniklerine dayanır. Bu tip kontrol yönteminde, çok esnek bir yapı için doğru bir dinamik model elde etmek, esnek ve rijit gövde hareketleri arasındaki bütün bağlı terimlerin (coupling term) sağlanması ile mümkündür. Bu bağlama işlemi referans konum ve elastik şekil değiştirme modelleri kullanılarak yapılır.

Esnek robot kolların, açık çevrim yöntemiyle yapılan titreşim kontrolünde, iki tip uygulama vardır. Birincisi, esnek robot kolunun hareket süresince, ikincisi ise hareket sonunda uç titreşimlerinin kontrolü işlemidir.

Birinci tip uygulama, esnek bir robot kolun uç noktasının verilen bir yörüngeyi, arzu edilen hassasiyette takip etmesini sağlayacak mafsallık momentlerinin bulunması esasına dayanır. Bu işlem, robot kolun titreşim enerjisini minimize edecek, yörünge üzerindeki optimum hız dağılımının elde edilmesi ile yapılır.

İkinci tip uygulamada ise, bu çalışmada da üzerinde durulan noktadan noktaya harekette son nokta civarında oluşan ve artık titreşim olarak adlandırılan titreşimlerin kontrolü incelenir. Artık titreşim genliklerinin azaltılması için de farklı yöntemler izlenir. İlk yöntemde, optimizasyon ölçütü olarak enerji veya zaman alınarak elde edilen optimum yörünge üzerinde, yeniden bir hız optimizasyonuna gidilir. İkinci yöntemde ise, optimizasyon ölçütü olarak sadece titreşim enerjisi alınarak, optimum mafsallık yörüngeleri tesbit edilir.

Esnek robot kollarında uç titreşimleri azaltmak için kullanılan açık çevrim yaklaşımındaki temel prensip, esnek robot kolların hareket sırasında veya sonunda uç noktalarındaki elastik yerdeğiştirmeleri minimum yapacak mafsallık açılarının değişiminin bulunmasına dayanır.

1.5 Esnek Robot Kol Titreşimlerini Azaltmaya İlişkin Çalışmalar

Önceki kısımlarda, esnek robot kollarda meydana gelen titreşim ve bu titreşimlerin kontrolü yöntemleri kısaca özetlendi. Bu çalışmada da, üzerinde durulan ve açık çevrimli kontrol yöntemi olarak anlatılan noktadan noktaya ‘PTP’ hareket planlaması veya esnek robot kollarda optimum hareket sentezi probleminin üzerinde biraz daha durmakta fayda var. Esnek robot kolun, verilen iki nokta arasında keyfi bir yörünge izleyerek son nokta civarında uç noktanın artık titreşimlerinin genliğini minimum yapacak mafsallık hareketlerinin bulunması bir optimizasyon problemidir. Bu optimizasyon işlemi tamamen serbest olmayıp bazı sınırlamalar altında olacağı muhakkaktır. Bütün robotlar çalışma esnasında iki türlü sınırlamaya maruzdur. İleride anlatılacak olmasına rağmen bu sınırlamalara kısaca değinmekte fayda vardır. Bunlar;

Geometrik Sınırlamalar: Robot kolun takip edeceği yörünge, çalışma uzayı içinde kalmalı ve hareket esnasında herhangi bir engelle çarpmamalıdır. Bu robot kolun yörüngesine getirilen bir sınırlamadır.

Dinamik Sınırlamalar: Geometrik sınırlamaların müsaade ettiği her bir yörüngenin izlenmesi, robotun mafsallarına yerleştirilen servomotorlar yardımıyla yapılır. Hesaplanan yörüngenin izlenebilmesi için gerekli olan mafsallık konum, hız ve ivmeleri servomotorlarca sağlanabilir olmalıdır. Bu özellikler, servomotor kapasitelerine getirilen bir sınırlamadır ve dinamik sınırlama olarak adlandırılır.

Bu iki tür sınırlama haricinde, esnek robot kolların noktadan noktaya optimum hareket sentezi probleminde, optimizasyon kavramından gelen bazı sınırlamalarda söz konusudur. Robot kolun noktadan noktaya keyfi hareketi, değişik optimizasyon ölçütleri altında (zaman, enerji tüketimi ve maksimum titreşim genliği gibi) elde edilir.

Robotlar, bu geometrik ve dinamik sınırlamalar ile bir veya birkaç optimizasyon ölçütüne bağlı olarak, iki nokta arasında keyfi bir yörünge izlemelidir. Esnek robot kol dinamik denklemleri, genelleştirilmiş koordinatları arasında lineer olmayan bağlı (coupling term)

ifadelere sahip diferansiyel denklemlerdir. Elastik yerdeğiştirmenin genelleştirilmiş koordinatlarının bulunmasından önce ters dinamik problemin çözümleri zorunludur. Bu açıklamalardan görüldüğü gibi, esnek robot kollarında minimum artık titreşimi meydana getirecek optimum mafsall hareketlerinin bulunması probleminin ne kadar karmaşık ve hesaplama zamanı alan bir çalışma olduğunu görölür.

Esnek robot kollar konusunda birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar, rijit robot kollar için ihmal edilen uzuv ve mafsall esnekliğinin kol dinamiğine katılması ile oluşan ve robot kolların uç noktasında kendini hissettiren titreşim problemini gidermeye yöneliktir. Ayrıca, robot performansını yükseltmeye yönelik çalışmalar da vardır. Bu çalışmalar genel olarak aşağıdaki konu başlıkları altında toplanabilir.

- Esnek robot kolların, dinamik modellerinin oluşturulup, hareket denklemlerinin çıkarılması ve çözümleri.
- Uç titreşimlerini etkileyen faktörler.
- Uç titreşimlerinin kontrolü.
 - a)- Hareket boyunca oluşan titreşimlerin kontrolü.
 - Kapalı çevrimli kontrol.
 - Açık çevrimli kontrol.
 - b)- Son nokta civarında oluşan titreşimlerin kontrolü.
 - Kapalı çevrimli kontrol.
 - Açık çevrimli kontrol.

1.5.1 Esnek Robot Kolların Modellenmesi ve Denklemlerin Çözümleri Üzerine Yapılan Bazı Çalışmalar

Robot kolların dinamik modelleri mümkün olduğu kadar gerçeğe yakın olmalıdır. Gerçekçi bir modelleme yaklaşımı, kapalı çevrimli kontrol yöntemlerinde, etkili bir kontrol organı tasarımıyla yardımcı olur. Açık çevrimli kontrol yöntemlerinde ise mafsall moment/kuvvetlerinin doğru hesaplanmasını sağlar. Bu ise, robotların performanslarının yükseltilmesi açısından oldukça önemlidir. Esnek robot kolları üzerine yapılan çalışmaların

temelini teşkil eden modelleme konusu üzerine, araştırmacılar tarafından yapılan değişik çalışmalarda, ayrık ve sürekli ortam kabulleri kullanılmıştır. Aşağıda farklı esnek modelleme yaklaşımları kullanılarak yapılan bazı önemli çalışmalar özetlenecektir.

W.J.Book (1984), kontrol algoritmaları ve gerçek zaman yörünge planlaması için esnek robot kolların dinamik davranışlarını simüle edecek dinamik modelleri 4×4 transformasyon matrisleri yardımıyla oluşturmuştur. Denklemlerin çözümünü 4×4 matris operasyonları biçiminde sayısal olarak programlama için hazır olarak sunduğu çalışmasında, önerdiği formülasyonun etkinliğini literatürde gösterilen rijit kol durumu için mukayese etmiştir.

P.Tomei and A.Tornambe (1988), esnek kollu robotların, simülasyon ve kontrol açısından pek kullanışlı olmayan ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere götüren dinamik modeller yerine, Lagrange yaklaşımı kullanarak adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen yaklaşık bir dinamik model çıkarmak için yeni bir yöntem geliştirdiler. Geliştirdikleri dinamik modeli bilgisayar yardımıyla çözmek suretiyle, tek ve iki uzuvlu esnek robotlar için, modelin doğruluğunu araştırmışlardır.

C-J.Li (1989), rijit robot kollarında, kontrol sistemi tasarımı ve geliştirilmiş moment/kuvvetlerin hesaplaması için kullanılabilen ikinci dereceden daha yüksek lineer olmayan terimlere ve bağlı terimlere sahip diferansiyel denklemleri, kapalı formda elde edilmesini sağlayan Lagrangian formülasyonunu önermiştir. Formülasyon sayesinde, robot kolların dinamiğinin hesaplanması bir mini bilgisayarla mümkün olmaktadır. Araştırmanın sonunda, önerilen yaklaşımın ters ve düz dinamik analiz yapılabilmesi ve hesaplama sırasında yapmış olduğu işlem miktarını, benzer çalışmalarla mukayese ederek üstünlüğü gösterilmiştir.

L.W.Chang and J.F.Hamilton, (1991) çalışmalarında, esnek kollu robotlar için sonlu elemanlar metodu (FEM) ve Lagrange formülasyonu yardımıyla bir dinamik model sunmuşlardır. Eşdeğer rijit link sistemi (ERLS) fikri yardımı ile geliştirilmiş koordinatlar, toplam hareketin bir büyük ve bir küçük hareketten oluştuğu kabul edilmiştir. Birleştirilmiş lineer olmayan denklemler, büyük ve küçük hareketi tanımlayan denklemler, iki denklem

takımı halinde verilerek, küçük hareketi gösteren denklemlerin küçük hareket değişimlerine nisbeten lineer olduğu gösterilmiştir.

C.Sufur and G.D.Tanguy (1992), esnek kollu robotları modellemede kullanılan sonlu elemanlar ve assumed mode metod yaklaşımlarından farklı bir yöntem olarak bond-graf modelleme yöntemini kullanmışlardır. Büyük düzlemsel yerdeğiştirmelere sahip, esnek ince bir çubuk için değişik bond-graf modelleme prosedürleri sunmuşlardır.

A.M.Sharan et al (1992), robotik alanındaki dinamik problemleri çözmek için etkili nümerik metodları araştırdıkları çalışmalarında, esnek bir robot kolun lineer olmayan dinamik modelini elde edip, lineerleştirmişlerdir. Daha sonra lineerleştirmenin doğruluğunu araştırmışlardır. Zorlanmış dinamik problemi LDT^T with skyline, LDL^T without skyline, QR decomposition ve Cholesy Factorization gibi dört farklı etkili nümerik yöntemle çözmüşler. Zorlanmış dinamik problem Revised Simplex ve Karmarkar's algoritmaları ile çözüp bunların hesaplama zamanı açısından mukayesesini yapmışlardır.

Y-J.Lin and H-Y.Zhang (1993), rijit robot kolların dinamik denklemlerini basitleştirmek için yeni bir boyutsuzlaştırma yaklaşımı geliştirdiler. Bu işlemi boyutsuz bir koordinat sistemi kullanarak yaptılar. Robot kolun karakteristik parametrelerini, seçilen uygun fiziksel nicelikler yardımıyla boyutsuzlaştırmak için temel birimler kullanmışlardır. Böylece, boyutsuz uzayda Lagrange yöntemi uygulayarak hareket denklemlerini boyutsuz olarak elde ettiler. PUMA 500 robotunun basitleştirilmiş versiyonunun dinamik modeli, önerilen yaklaşım ile modellenmiş ve ters dinamiğin hesaplama zamanının oldukça düştüğü görülmüştür.

B.O.Al-Bedoor and Y.A.Khulief, (1995) ilerleyen ve dönen bir çubuğun dinamik modellemesini sonlu eleman yöntemi ile formüle etmişlerdir. Modelde, belirli sayıda ve sabit boyda elemanlar kabul edilmiştir. Prizmatik mafsallardan sınırlanmış, zamana bağlı sınır şartları açık olarak gösterilmiştir. İlerleyen mafsallın değişen katılığı dönen mafsallın içine ilave edilmiştir. Bu sonlu eleman formülasyonunda, bütün atalet terimleri ile referans hareket ve yerel elastik yerdeğiştirmeler gözönüne alınmıştır. Bundan başka, kol ucundaki

kütlenin, modelin dinamiği üzerine olan etkileri hesaba katılarak, geliştirilen modelin hassasiyeti ve geçerliliği diğer metodların neticeleri yardımıyla gösterilmiştir.

A.S.Morris and A.Madani (1996), çalışmalarında yüksek performanslı kontrol organı tasarımı için, sistemin doğru olarak modellenmesi gerektiğini vurgulamışlar. Bu amaçla ilk önce tek esnek uzuvlu bir sistemi kayma etkisini de ihmal etmeden, sürekli ortam kabulüyle modellemişler. Daha sonra kolların rijit ve elastik hareketlerini ayrı olarak hesaplayıp bunları süperpozisyon prensibine göre birleştirmişlerdir. Çalışmalarını iki esnek uzuvlu robot için uygun bir biçime getirmiş ve elde ettikleri modellerin simülasyonunu yapmışlardır.

1.5.2 Esnek Robot Kol Uç Titreşimleri Üzerine Yapılan Bazı Çalışmalar

Robot kollarda özellikle, iş yapan elemanın bulunduğu kolun ucunda meydana gelen titreşimin, esas kaynağı uzuvların ince ve narin yapılı olmalarıdır. Robot kollardan beklenen düşük enerji tüketimi ve yüksek işlem hızı gibi performans ölçütleri, zorunlu olarak robot konstrüksiyonlarının hafif ve narin yapılı tasarlanmasını gerektirir. Titreşim genliklerinin artması sadece hafif ve narin yapılılıktan kaynaklanıyormuş gibi görünse de, tek neden bu değildir. Buna ilave olarak, kol esnekliğinin veya kolun ivmelenme momentinin artması da, titreşimi etkiler. Elastik yerdeğiştirmeyi doğuran sebeplerle ilgili çalışmalar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

H.Yamaura and K.Ono (1989), eğilme titreşim periyodlarının çok küçük bir aralığında, yüksek dönme hızlarına çıkan esnek kolun lineer olmayan titreşimleri için sayısal bir analiz metodu geliştirmişlerdir. Hareketin diferansiyel denklemleri sonlu eleman metodu ile çıkarılmış olup, mafsala açısal hızının lineer olmayan etkisi ilave edilmiştir. Yazarlar, esnek kolun hızlı bir yol alma prosesinde, eğilme titreşimlerinin zaman cevabını nümerik olarak hesaplamışlar ve lineer olmayan davranışa sebep olan kritik dönme hızını araştırmışlardır. Deneysel çalışmalar ile geliştirdikleri analiz metodunun uygunluğunu ispatlamışlardır.

F.Gordannejad et al (1991), dönen ve prizmatik mafsala sahip düzlemsel esnek robotun hareketini incelemek için lineer olmayan bir model oluşturmuşlardır. Uzuvların her

ikisinde, izotropik geleneksel metal malzemelerden veya izotropik olmayan (tabaka tabaka üst üste bindirilmiş lamine) fiber esaslı kompozit malzemeler olduğu kabul edilmiş ve esneklik gözönüne alınmıştır. Dönme ataleti ve kayma deformasyonunu açıklamak için model Timoshenko çubuk teorisi üzerine bina edilerek çıkarılmıştır. Bundan başka, kolun büyük hareketi hesaba katılarak lineer olmayan gerilme yerdeğiştirme alanı tanımlanmıştır. Uzunluk, kayma deformasyonu yapabilen sonlu bir eleman kullanarak parçalanmıştır. Hareketi yöneten denklemler Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Sayısal simülasyon çalışmalarıyla geometrik düzgünsüzlüğün, döner atalet ve kayma deformasyonunun birleştirilmiş etkilerinin, uzunlukların uç yerdeğiştirmelerine etkisini araştırmışlardır. Daha sonra, fiberlerin açısı ve malzeme ortotropisinin, uç titreşimleri üzerine etkisi ve maksimum normal eğilme gerilmelerini incelemişlerdir.

T-S.Lee and Y-J.Lin (1993), esnek robot kolların dinamiğinde kayma deformasyonunun etkisini inceledikleri çalışmalarında, içi boş daire, kare ve dikdörtgen kesitlere sahip uzunlukların, kayma gerilmelerinin etkisini araştırmışlardır. Kol tasarımı açısından uzun boylarının değişimi önem arz etmektedir. Bunun için, uzun boylarının esnek dinamik üzerine etkisini incelemişler. Uzun boyu sabit ise, kayma deformasyon etkisi kol kesit alanını önemsemeyen, kalınlıkla yaklaşık ters orantılı olduğu, aynı zamanda daha uzun olan uzunlukların kayma etkisi daha az olacağından, uzun sapması değişiminin frekansının da azalacağını simülasyon sonuçları göstermiştir. Simülasyon sonuçlarına göre, esnek robot kol tasarımında kayma etkisini azaltmak için, kısa ve ince uzunlukların içi boş daire kesitli, uzun ve kalın uzunlukların ise, içi boş daire veya dikdörtgen kesitli tasarlanması gerektiğini göstermişlerdir.

Yukarıdaki çalışmalarda, esnek robot kolları yalnız yapısal esneklikten kaynaklanan uç titreşimleri incelenmiştir. Titreşimlere kaynaklık eden diğer önemli bir faktör de, tahrik sistemlerinin esnekliğidir. Tahrik sistemlerindeki düzensizlik, tıpkı yapısal esneklik gibi kolları titreşime yol açarak, işlem etkinliğini ve kalitesini düşürür. Esnek kollar üzerine yapılan çalışmalarda, modellemede genellikle yapısal esneklik yanında mafsallık esnekliği ihmal edilmiştir. Fakat mafsallık esnekliğinin uç titreşimlere olan etkisinin büyük olduğu durumlarda,

operasyon etkinliği açısından modellemeye ilave edilmesi gereklidir. Aşağıda bu konuda yapılmış bazı çalışmalar anlatılmıştır

J.Furusho et al (1992), tahrik sistemlerindeki yani servomotorların ürettiği moment/kuvvetlerin dzgnszlğnden kaynaklanan uç titreşimlerini azaltmada çok değişkenli root loci kontrol teorisinin (multivariable root loci theory) kullanılabileceğini göstermişlerdir.

S.Gogate and Y-J.Lin (1993), uzuv ve mafsalları esnekliğinin neden olduğu büyük hareket hatalarını anında giderecek etkili bir kontrol şeması önerdikleri çalışmalarında, kol dinamiğini formüle etmek için mafsalları burulma yayı ve uzuvlarında assumed modes titreşim modeli ile süperpoze ederek ayrıntılı olarak modellemişlerdir. Mafsalları ve uzuv esnekliğinden kaynaklanan büyük hareket hatalarını azaltacak bir lineer olmayan geri beslemeli kontrol sistemi geliştirmişlerdir. Önerdikleri kontrol organı sayesinde, robotun doğru bir büyük hareket izlediği ve uç noktanın titreşim hareketini tatmin edici bir şekilde azaldığını göstermişlerdir.

1.5.3 Esnek Robot Kol Uç Titreşimlerinin Kontrolü zerine Yapılan Bazı alışmalar

Esnek robot kol uç titreşimleri, hareket boyunca ve hareket sonunda meydana gelmelerine bağlı olarak iki grupta incelenir. Uç titreşimlerinin azaltılması veya literatürdeki ifadesiyle konum kontrolü çalışmaları daha ziyade kapalı çevrimli kontrol yöntemleri kullanılarak yapılmaktadır. Bunun haricinde açık çevrimli kontrol yöntemi olan hesaplanmış moment tekniği olarak adlandırılan ve titreşimleri önleyecek uygun mafsalları yörüngelerinin hesaplanmasına dayanan diğer çalışmalar da mevcuttur. Aşağıda, bu iki tip kontrol yöntemi kullanılarak, titreşimleri azaltmak için yapılan çalışmalar kısaca anlatılacaktır.

H.Sakuta et al (1988), robotların yüksek hızlı sürülmelerinden dolayı sürücülerde karşılaşılan burulma titreşimlerini incelemişler. Genelde, sabit bir dış zorlayıcı kuvvet altında, titreşim yapan mekanik sistemlerin, titreşim genliklerinin düşürülmesi maksadıyla kullanılan dinamik damper yöntemini, rezonans titreşimlerini ve geçici titreşimlerin azaltılması için

kullanmışlardır. Titreşim sönümleyici kontrol sistemi olarak, bir yazılım servomekanizma kullanmışlardır.

Ö. Turhan (1989), üç serbestlik dereceli insan kolu yapısında bir rijit robot kolun, noktadan noktaya hareketini incelemiştir. Mafsal hareketlerini, uzuvların başlangıç ve son durumdaki şartları sağlayacak tarzda polinom formunda tanımlanmıştır. Başlangıç ve son durumda mafsal ivmelerinin sıfır alınması ile hareketin yumuşak geçişli olması sağlanmıştır. Dinamik denklemler boyutsuzlaştırılarak, optimizasyon ölçütünün içine servomotorların etkisi de, ilave edilmiştir. Optimum mafsal hareketleri, zaman enerji ve servomotor kapasite üst sınırları altında hesap edilmiştir.

Y.Morimoto et al (1990), esnek bir robot kol için deneysel modal analiz tekniğini kullanarak yeni bir kontrol tekniği geliştirmiştir. Uç noktanın hareketi ile bir kontrol komutu arasındaki ilişki, robot konumuna bağlı olarak parça parça lineerleştirilmiş bir formda, birleştirilmiş transfer fonksiyonu yardımıyla tanımlanmıştır. Bu metod kullanılarak, robotun titreşim hareketinin hatırı sayılır derecede azaltılması ve uç noktanın, arzu edilen yumuşak hareketi hesaplanan bir kontrol komutu ile gerçekleştirmesi sağlanmıştır.

J.Wu and K.Yoshimoto (1991), esnek bir kolun harekete başlarken hızlanması ve hareket sonunda da, kolun artık titreşimleri minimum yapacak zaman optimal kontrole dayanan bir metod önermişler. Kontrol girişinin açıp kapama zamanının çözümü bir grup denklemden modal analiz kullanarak elde etmişler. Zaman optimal kontrolün etkinliğini iyileştirecek parametre değişimleri için, bir öğrenme kontrol şeması geliştirilmiştir. Bu şemayla hesaplanmış model ve güncel sistemin farkı çıkarılıp durum değişkenlerinin geri beslenmesi kullanılarak açık çevrimli kontrole ilave edilmiş ve geri beslemenin katsayıları, öğrenme prosesi vasıtası ile belirlenmiştir. Bu öğrenme kontrolünün yakınsaması simulasyonda dikkate alınmış ve bir elastik uzva sahip robot için deneysel geçerliliği kanıtlanmıştır.

K-J. Park and Y-S. Park (1993), artık titreşimleri, uygun robot mafsal hareketleri ile önemli ölçüde azaltacak bir metod önermişler. Artık titreşimleri minimum yapmak için gerekli mafsal hareketleri optimum seçilmiş. Dinamik model ve optimum mafsal hareketleri, özel

hareket koordinatları kullanılarak formüle edilip hesaplanmıştır. Kol esnekliği, VLCS (Virtual Link Coordinat System) yardımıyla tanımlanmış ve mafsalsal esnekliği de modelin içine katılmıştır. Hareketin lineerleştirilmiş denklemlerinden, artık titreşimin zaman cevabı incelenmiştir. Artık titreşimleri azaltmak için kullanılan performans ölçütünde, artık titreşim esnasında uç noktanın maksimum hatası minimize edilmeye çalışılmıştır. Mafsalsal hareketleri, fourier serisi ve polinomal fonksiyonların birleşimi şeklinde bir bileşke fonksiyon olarak kabul edilmiştir. Kabul edilen fonksiyonların, mafsalsal hareketlerini her iki sınır şartında da, yeterli yakınsaklıkta sağladığı varsayımıyla problem bir sınır değer problemi olarak düşünülmüş. Dizayn değişkenlerinin sayısını minimum seçmek için korolasyon katsayıları kavramı geliştirilmiştir. Simülasyon sonuçları, uygun mafsalsal hareketleri seçilmesiyle artık titreşimlerin azaltılabileceğini göstermiştir.

C-M. Yao and W-H. Cheng (1995), esnek kolların kontrolü için eklem uzayında yörünge planlaması yapmışlar. Mafsalsal hareketlerini sonlu sayıda terimden oluşan fourier serisi ile beşinci dereceden polinomların birleşimi kabul ederek, hareketin parametrelendirilmesi sağlanmıştır. Optimal yörünge planlama problemi lineer olmayan programlama problemine dönüştürülmüş ve lineer olmayan programlamanın bilinen hesaplama gücü kullanılarak parametre optimizasyon problemi çözülmüştür. Optimizasyon ölçütü olarak enerji-mafsalsal momenti ve enerji-mafsalsal ivmelenmeleri biçiminde iki ölçüt alınmıştır. Simülasyon sonuçları, uygun yörünge planlaması ile uç titreşimlerinin hareket boyunca da, verimli bir şekilde azaltılabileceğini göstermiştir.

W.Yim and S.N.Singh (1996), esnek robot kolların son nokta yörünge kontrolünü, tahmini kontrol teorisine (predictive control theory) dayanarak yapmışlar. Tahmini kontrol teorisi yardımı ile, herbir uzvun uç noktasının yörüngeden sapmasının azaltılması, elastik modların ve kontrol momentlerinin fonksiyonu olan quadratik amaç fonksiyonunun minimizasyonu ile gerçekleştirilmiştir. Son nokta kontrolü için, değişken yapı kontrol ve lineerleştirilmiş geri besleme tekniği kullanılmıştır. Kontrol organının sistem parametrelerinden etkilenmediği görülmüştür.

S-B.Choi and H-C.Shin (1996), çok esnek bir robot kolun, uç noktasının konum kontrolu için, alışılmışın dışında birleşik bir eyleyici şeması önermişler. Kontrol sistemi, biri robotun mafsahına yerleştirilmiş servomotor diğeri elastik uzvun üzerine piezoseramik malzemeden yapılmış iki eyleyiciden oluşturulmuş. Rijit kolun hareket denklemleri kullanılıp, kayan kipli kontrol tekniğinden yararlanarak robot kolun arzu edilen hareketi yapması sağlanmıştır. Kontrolde, rijit kol dinamiğinin kullanılmasından kaynaklanan uç titreşimleri, geri besleme kontrol voltajı yardımıyla piezoceramic eyleyiciye uygulanmış ve böylece uç nokta titreşimleri aktif olarak azaltılmıştır. Önerilen yöntem deneysel olarak gerçekleştirilmiş ve yüksek performans gösterdiği tesbit edilmiştir.

S.S. Ge et al (1997), ucunda yük taşıyan elastik kolun lineer olmayan dinamik modelini, sonlu eleman metodu ile Lagrange yaklaşımını kullanarak elde etmişler. Uç noktanın konum kontrolunu, geliştirdikleri bir lineer olmayan geri besleme kontrol organı ile gerçekleştirmişler. Kontrol işleminin etkinliğini, sistemin atalet matrisinin tersini gerçek zamanda hesaplayabilen bir algoritma ile sağlamışlar. Yaptıkları deneysel çalışmalarında, kullandıkları kontrol organının hareket boyunca elastik kolun titreşimlerini, uç noktada bulunan değişken yüklere rağmen asimptotik olarak azaltmayı başardığını göstermişler.

M. Moallem et al (1997), esnek yapılı çok uzuvlu robotların, küçük yörünge hataları ile çalışabilmeleri için ters dinamik kontrol stratejisi geliştirmişler. Bu işlem belirli şartlar altında, kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağlayacak kontrol girişini hesaplama esasına dayanır. Kontrol organı tasarımı iki etaplı procesten oluşturulmuş. Birinci aşamada, orjinal sistemin sıfır dinamiği yeni çıkış olarak tanımlanıp sistem kararlı hale getirilmiş. İkinci aşamada ise, kararlı asimptotik yörüngeyi sağlayacak kontrol girişi hesaplanmış. Bu işlem tek ve çift esnek uzuvlu robotlar için gerçekleştirilmiştir.

1.6 Bu Çalışmanın Yeri, Amacı ve Katkısı

Robotik sistemleride kontrol problemi, genel olarak üç temel başlık altında incelenmektedir.

1. Optimum yol planlanması,

2. Optimum mafsal yörünge planlaması,
3. Verilen bir yörünge veya yolun izlenmesi problemidir.

Bu çalışma, ikinci bölümde incelenen optimum yörünge planlaması problemi grubuna girmektedir. Bugüne kadar yapılmış çalışmalar, genellikle rijit robot kollar üzerine yapılmış olup kinematik sınırlamaların elverdiği ölçülerde optimum mafsal hareketlerinin hesaplanması gibi konular incelenmiştir. Robot performansının artırılması istekleri zorunlu olarak dinamik sınırlamaların da, gözönüne alınmasını gerektirmiştir. Robotların hafif yapılar tasarlanması, performans isteklerini olumlu yönde arttırmasına karşın, hafif yapıların doğasından kaynaklanan esneklik problemi, robotlarda performans ölçütünün içinde titreşimin de, gözönüne alınmasını gerektirmiştir. Rijit robotlarda optimum hareket sentezi veya diğer adıyla optimum yörünge planlaması konusunda bugüne kadar yapılan çalışmalarda, optimizasyon ölçütü olarak genellikle iki ölçüt kullanılmıştır. Birincisi, mekanik hareketlerin doğasına en uygun olan enerji optimizasyonu, ikincisi ise en kısa hareket süresi optimizasyonudur.

Enerji, üretim maliyetlerinin düşürülmesine, en kısa hareket süresi ise üretkenliğin arttırılmasına yönelik ölçütler olduğundan tek başına kullanıldıklarında istenen verimlilik elde edilememektedir. Robot kollar yapıları gereği çok serbestlik dereceli sistemlerdir. En kısa hareket süresinin, optimizasyon ölçütü olarak tek başına kullanılması durumunda yüksek miktarda enerji tüketimine neden olacağından, üretkenliğin artmasına karşılık üretim maliyetlerinin yükselmesine yolaçacaktır. En az enerji tüketimi ölçütüne göre yapılacak olan bir optimizasyonda ise, gereğinden uzun hareket sürelerine ihtiyaç duyulacağından, üretim maliyetlerinin iyileşmesine rağmen üretkenliğin düşmesine neden olacaktır. Görülüyor ki, optimizasyon ölçütlerinin tek başına kullanılmaları bir yandan iyileşme sağlarken diğer yandan kötüleşmeye neden olmaktadır. Bu çelişkinin ortadan kaldırılması ve robotun verimli çalıştırılmasını sağlamak ancak iki ölçütün birleştirilmesi ile elde edilecek yeni bir optimizasyon ölçütünün tanımlanması ile mümkün olacaktır.

Öteyandan robotların hareket sentezi problemi çözümünden iki farklı türdeki niteliklerin iyileşmesi beklenir. Bunlardan birincisi, ekonomik nitelikli özellikler olan zaman ve enerji

diğeri ise daha ziyade teknolojik özellik diyebileceğimiz esnek robot kolların hareketi sırasında veya sonunda ortaya çıkan titreşimlerdir.

Esnek robot kolların uç noktasında ortaya çıkan bu titreşimlere neden olan moment/kuvvet fonksiyonları, sürekli tipte fonksiyonlar olup ani olarak değişen, süreksizliklere veya aşırı hızlı biçimde yön değiştiren formda moment/kuvvet olmamalıdır. Servomotorların moment/kuvvet üst sınırları dahilinde uygulanması gereken moment/kuvvetlerin kolay elde edilebilir ve hareket mekanizmalarını aşırı zorlanmalara maruz bırakmayacak nitelikte olmaları istenir. Ayrıca kalkışta ve duruşta son nokta civarında konum hassasiyetini bozacak titreşimlere neden olmaması için moment/kuvvet fonksiyonlarının başlangıç ve duruşta yumuşak geçişli olması gerekir.

Bugüne kadarki yapılan çalışmalarda, optimum hareket sentezi problemi, rijit ve esnek robot kolları için farklı optimizasyon ölçütleri gözönüne alınarak incelenmiştir. Rijit robot kolları için daha ziyade ekonomik nitelikler gözönüne alındığından optimizasyon ölçütü olarak ağırlıklı zaman-moment karma ölçütü, ağırlıklı zaman-enerji karma ölçütü, ağırlıklı zaman-tutucu hızı-moment karma ölçütü, zaman ve enerjiyi aynı anda minimize etmeyi isteyen ölçütlerde kullanılmıştır. Esnek robot kollarda, yukarıdaki ölçütlere ilave olarak teknolojik niteliklerden dolayı titreşimlerin minimize edilmesi için ağırlıklı enerji-moment ve enerji-kol ivmelenmesi ölçütleri kullanılmıştır. (Buradaki enerji, sistemin toplam enerjisini ifade eder. Rijit kollardaki enerjiye ilave olarak elastik enerjide toplam enerjinin içine katılmıştır).

Esnek robot kollar yukarıda belirtilen niteliklere sahip hareket edebilmeleri için iki önemli engel aşılmalıdır. Birincisi, enerji-zamanın optimizasyon ölçütü olarak kabul edilmesi durumunda çözümün ancak dinamik programlama ile yapılabilmesi zorunluluğudur. Burada problemin boyutunun büyüklüğü önemlidir. Optimizasyon ölçütü olarak en kısa hareket süresinin seçilmesi durumunda ise, optimum mafsal momentlerinin bang-bang tipi değişimini gerektirecektir, bu da ikinci bir engeldir. Böyle ani yön değiştiren momentler, kolların titreşim enerjisini artıracığından, hareket boyunca ve son nokta civarında arzu edilmeyen artık titreşimlerin oluşmasına neden olacaktır.

Bu çalışmada, daha önceki benzer çalışmalarda yapılanlardan farklı olarak, optimizasyon ölçütlerinde kol esnekliğinden kaynaklanan etkiler ihmal edilmemiştir. Böylece problem daha gerçekçi bir yaklaşımla çözülmüştür. Optimizasyona katılan bu esneklikten kaynaklanan terimler aynen mafsallı değişkenlerinde olduğu gibi bir fonksiyonla temsil edilerek optimizasyona ilave edilmiştir. Bu ilave yeni optimizasyon parametrelerinden ve optimizasyon ölçütü olarak enerji-zamanın seçilmesinin getirdiği, problemin boyutuyla ilgili engel, VLCS (Virtual Link Coordinate System) dönüşümü kullanılarak aşıldı. Minimum hareket süresi engeli ise, hareket süresi sonunda titreşimlerin belirli bir değeri aşmayacak şekilde ve servomotor moment/kuvvet üst sınırının müsaade ettiği minimum süreyle sınırlandı. Arzu edilen yumuşak geçişli moment/kuvvet fonksiyonlarını elde etmek için, optimum mafsallı hareketleri ve optimum uç titreşimleri, sonlu terime sahip fourier serisi ile kuvvet serisinin toplamı biçiminde bir fonksiyonla parametrik hale getirildi. Böylece problem, bir sınır değer probleminden, bir parametre optimizasyon problemine dönüştürüldü.

BÖLÜM 2

ROBOT KİNEMATİĞİ

2.1 Giriş

Kinematik, mekanik sistemlerin, geometrik boyutlarına bağlı olarak elamanların konum, hız ve ivmelerini inceler. Robot kolları, birbirlerine mafsallarla bağlı uzuvlardan oluşan açık zincirli mekanizmalardır. Robot kinematiği, bu elemanların mafsal değişkenlerinin konum, hız ve ivmelerinin robot kolun uç noktasının (end effector) konum, hız ve ivmesinin değişimi arasındaki bağıntıların çıkarılmasıyla ilgilenir. Bu bağıntılar ana koordinat takımı (base coordinate) olarak adlandırılan bir temel koordinat takımına bağlı olarak, her bir mafsala yerleştirilen mafsal koordinat takımlarının arasındaki bağıntıların çıkarılmasıyla elde edilir.

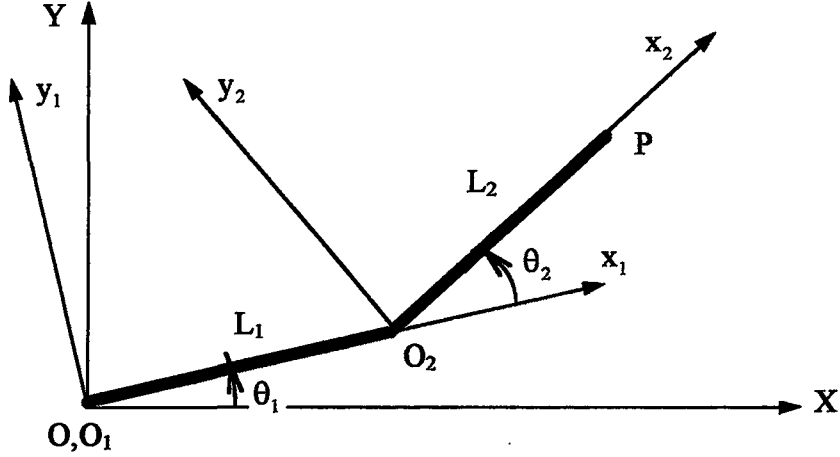
Araştırmacılar, bir sistemi modellemek için değişik kinematik analiz yöntemlerinden faydalanır. Aşağıda literatürde geçen belli başlı kinematik analiz yöntemleri kısaca açıklanmıştır.

- Geometrik esaslı düz kinematik analiz yöntemi.
- Homojen dönüşüm matris yöntemi.
- Denavit - Hartenberg yöntemi.
- Quaternion ve Dönen vektör gösterimi yöntemi.

Bu yöntemlerden, geometrik esaslı düz kinematik analiz, basit kinematik yapılar için uygun bir yöntemdir. Fakat, çok serbestlik dereceli mekanizmalarda uygulanması zordur. Homojen dönüşüm matris yöntemi ile Denavit-Hartenberg yöntemi ise, çok serbestlik dereceli mekanizmaların analizi ve özellikle robot kollarının dinamik analizi ve bazı ters kinematik teknikler için uygundur. Dönen vektör gösterimi yöntemi ise, ters kinematik problemin çözümünde uygulanması tercih edilir.

2.2 Geometrik Esaslı Düz Kinematik Analiz Yöntemi

İki serbestlik dereceli döner mafsallı düzlemsel bir robot kolu gözönüne alalım.



Şekil 2.1 İki kollu düzlemsel bir robot modeli.

Burada, (X, Y) koordinat takımı ana koordinat takımı olarak adlandırılır. O_1 ve O_2 noktaları uzuvların mafsallı noktaları olup (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) koordinat takımları da θ_1 ve θ_2 mafsallı değişkenlerinin koordinat takımlarıdır. Eğer, robot kolun mafsallı değişkenleri biliniyorsa, uç noktanın (X, Y) 'e göre konumu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} X &= L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ Y &= L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \varphi &= \theta_1 + \theta_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

P, uç noktasının (X, Y) koordinat takımındaki konum vektörü,

$$P = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \varphi \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

olarak bulunur.

P noktasının hızı ise, yukarıdaki ifadenin türevi alınarak

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} -L_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2\dot{\phi} \sin\phi \\ L_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + L_2\dot{\phi} \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

elde edilir.

2.3 Homojen Dönüşüm Matris Yöntemi

Uzayda, üç boyutlu bir vektörün homojen gösterimi aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

4×4 boyutundaki homojen dönme, öteleme ve yerdeğiştirme matrisleri, üç boyutlu homojen dönüşüm matrislerini kapsar. Aşağıda, 4×4 homojen dönüşüm matrislerinin oluşturulmasında kullanılan üç eksene göre 3×3 homojen dönme matrisleri verilmiştir.

$$[C_{i-1}^i]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[C_{i-1}^i]_y = \begin{bmatrix} \cos\beta_i & 0 & \sin\beta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta_i & 0 & \cos\beta_i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[C_{i-1}^i]_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.3.1 Dönme Matrisi

O_i ve O_{i-1} koordinat sistemleri arasındaki 4×4 homojen dönme matrisi,

$$T_{R_{i-1}}^i = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & C_{i-1}^i & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

dir. Burada O_i koordinat takımı, O_{i-1} koordinat takımına göre relatif dönmektedir. O_i koordinat takımının, X_{i-1} , Y_{i-1} , Z_{i-1} eksenlerine göre dönmelerinin tarifi için aşağıdaki üç adet homojen dönme matrisi verilmiştir. O_i 'nin X_{i-1} eksenine etrafındaki dönmesi α_i açısıyla gösterilirse, x eksenindeki homojen dönme matrisi gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\left[T_{R_{i-1}}^i \right]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

benzer şekilde O_i koordinat takımının Y_{i-1} eksenine etrafındaki dönmesi β_i ise y eksenindeki homojen dönme matrisi,

$$\left[T_{R_{i-1}}^i \right]_y = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & 0 & \sin \beta_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta_i & 0 & \cos \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

ve O_i koordinat takımının Z_{i-1} eksenine etrafında θ_i açısıyla dönmesi durumunda z eksenindeki homojen dönme matrisi,

$$\begin{bmatrix} T_{R_{i-1}}^i \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

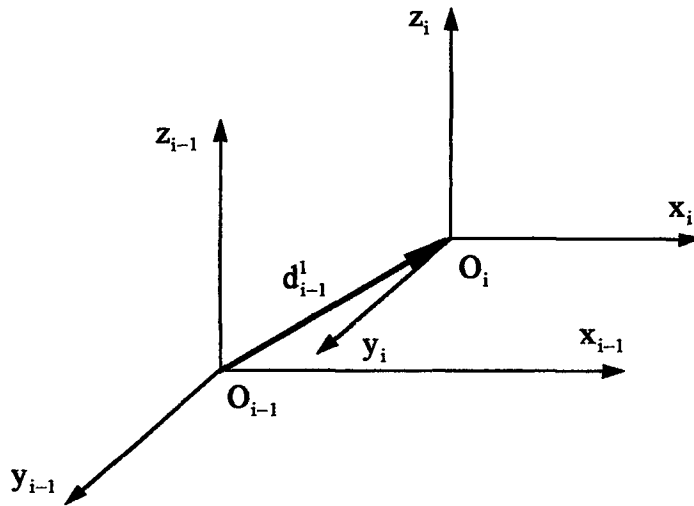
2.3.2 Öteleme Matrisi

Üç boyutlu koordinat takımında homojen öteleme matrisi aşağıdaki şekildedir.

$$T_{T_{i-1}}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

burada, d_{i-1}^i O_{i-1} koordinat takımında, O_i koordinat takımının merkezini gösteren vektördür ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$d_{i-1}^i = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$



Şekil 2.2 İki koordinat takımının birbirine göre ötelenmesinin gösterimi.

2.3.3 Yerdeğiştirme Matrisi

O_i koordinat takımının ardışık dönme ve ötelenmesiyle, O_{i-1} koordinat takımına göre homojen yerdeğiştirme matrisi aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$T_{i-1}^i = T_{T_{i-1}}^i T_{R_{i-1}}^i \quad (2.14)$$

(2.9), (2.10), (2.11) ve (2.12) nolu ifadeler (2.14) ifadesinde yerine konulursa, homojen yerdeğiştirme matrisi

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

elde edilir. T_{i-1}^i herhangi iki koordinat takımı için homojen yerdeğiştirme matrisidir.

2.3.4 Vektör Dönüşümü

Bir koordinat takımında tanımlı vektörün diğer koordinat takımındaki ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$v^{i-1} = T_{R_{i-1}}^i v^i \quad (2.16)$$

Burada v^i vektörü $T_{R_{i-1}}^i$ homojen dönüşüm matrisiyle dönüştürülerek v^{i-1} elde edilir.

2.3.5 Nokta Koordinat Dönüşümü

O_i koordinat takımındaki bir nokta, bir p^i konum vektörü yardımıyla tanımlanır ve bu noktanın O_{i-1} koordinat takımına göre yeni konum vektörü, homojen yerdeğiştirme matrisi kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$p^{i-1} = T_{i-1}^i p^i \quad (2.17)$$

buradaki T_{i-1}^i (2.15) ifadesinde tanımlanmıştır. (2.17) ifadesiyle verilen dönüşüme koordinat dönüşümü adı verilir.

2.4 Denavit-Hartenberg Yöntemi

Bir mekanizmanın her bir komşu elemanının yerdeğiştirme matrisinin oluşturulması için, Denavit- Hartenberg (1955) sistematik bir teknik geliştirmiştir.

Bu teknikte, Şekil 2.3’de görüldüğü gibi her bir mafsala bir koordinat takımı atanır. Birbirini takip eden koordinat takımları homojen dönüşüm matrisleri yardımıyla, robot kolun ucuna yerleştirilen el koordinat takımını, referans koordinat takımı olan temel koordinatlarda tanımlar.

Koordinat takımları mafsallara aşağıdaki üç kurala göre atanır.

1. z_{i-1} eksenini, i . mafsala hareket eksenini ile çakıştır.
2. x_i eksenini, z_{i-1} ekseninden ileriye doğru normal doğrultudadır.
3. y_i eksenini, sağ el kuralına göre oluşturulan eksen sistemini tamamlar.

Koordinat sisteminin başlangıcı olan O_0 , ilk mafsala hareket eksenini boyunca uzanan x_0 eksenini doğrultusunda gövde üzerinde herhangi bir yerde seçilebilir. Son koordinat sistemi (x_n, y_n, z_n) , x_n eksenini, z_{n-1} ekseninin normali doğrultusunda olmak üzere herhangi bir yere yerleştirilebilir.

Bir robotun eklemlerinin D-H (Denavit-Hartenberg) gösterimi, her ekleme ait dört geometrik büyüklükle tanımlanır. Bu dört büyüklük herhangi bir dönel veya prizmatik mafsala tam olarak tanımlar. Bu dört parametre aşağıdaki şekilde belirlenir.

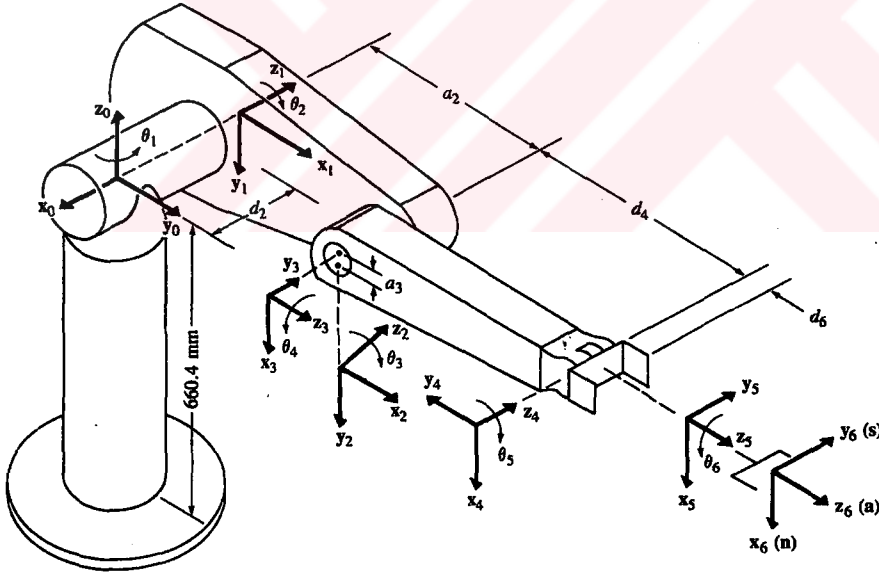
θ_i : z_{i-1} eksenini etrafında sağ el kuralı kullanarak x_{i-1} ekseninden x_i eksenine olan mafsalsal açısı.

d_i : $(i - 1)$. koordinat takımının orijininden z_{i-1} eksenini boyunca x_i eksenini ile z_{i-1} ekseninin kesiştiği noktaya olan mesafe.

a_i : z_{i-1} eksenini ile x_i ekseninin kesişim noktasından x_i eksenini boyunca i . koordinat takımına olan uzaklığıdır. (z_{i-1} ve z_i eksenleri arasındaki en kısa mesafe olarak da tanımlanabilir.)

α_i : sağ el kuralına göre x_i eksenini etrafında z_{i-1} eksenini ile z_i eksenini arasındaki açı.

Bir robot kolunda döner mafsallar için, d_i , a_i ve α_i mafsalsal parametreleri sabit kalırken, mafsalsal değişkeni θ_i , $(i - 1)$. elemanı ile i . elemanı birlikte hareket ederken değişir. Prizmatik mafsallarda ise θ_i , a_i ve α_i sabit kalırken d_i mafsalsal parametresi değişkendir. Dolayısıyla mafsalsal değişkenleri, θ_i veya d_i dir. Sabit mafsalsal parametreleri, döner mafsallar için (d_i, a_i, α_i) , prizmatik mafsallar için $(\theta_i, a_i, \alpha_i)$ dir.



PUMA robot kolun uzuv parametreleri					
Mafsalsal	θ_i	α_i	a_i	d_i	Hareket Sahası
1	90	-90	0	0	-160 to +160
2	0	0	431.8 mm	149.09 mm	-225 to 45
3	90	90	-20.32 mm	0	-45 to 225
4	0	-90	0	433.07 mm	-110 to 170
5	0	90	0	0	-100 to 100
6	0	0	0	56.25 mm	-266 to 266

Şekil 2.3 Bir PUMA robotunun uzuv koordinat takımlarının yerleştirilmesi.

Yukarıda verilen üç kural yardımıyla kolların herbiri için ortonormal koordinat takımı oluşturulur. Kolların, mafsalları ve uzuv parametrelerinin bulunmasında aşağıdaki adımlar takip edilir.

n serbestlik dereceli bir robot kolunun, her bir elemanına bir ortonormal koordinat takımı atanır. Koordinat takımlarının atanması taşıyıcı gövdeden başlar ve robot kolunun uç noktasına kadar devam eder. Birbirine bağlı uzuvlar arasındaki ilişki 4×4 homojen dönüşüm matrisi ile belirlenir. Bu belirleme aşağıdaki şekilde yapılır.

1. adım: (Temel koordinat takımının oluşturulması): Mafsalları hareket eksenini boyunca uzanan ve robot kolu omuzuna yönelmiş eksenini z_0 olan, taşıyıcı gövde üzerinde sağ el kuralına göre bir (x_0, y_0, z_0) normal koordinat takımı oluşturulur.

2. adım: (Başlama ve çevrim): Her eleman (i) için $(i = 1, \dots, n)$, 3. ile 6. adıma kadar olan işlemler uygulanır.

3. adım: (Mafsalları ekseninin belirlenmesi): $(i + 1)$. mafsalları hareket eksenini (dönen veya kayan) ile z_i eksenini çakıştırılır. Sağ - sol kol konfigürasyonuna sahip robotlar için z_1 ve z_2 eksenleri, omuzdan ve robot kolu gövdesinden dışa doğru yönlendirilir.

4. adım: (i . Koordinat takımı orijini belirlenmesi): i . koordinat takımının orijini z_i ve z_{i-1} eksenlerinin ortak normali ile z_i ekseninin kesişme noktasına yerleştirilir.

5. adım: (x_i ekseninin belirlenmesi): $x_i = \pm \frac{(z_{i-1} \times z_i)}{\|z_{i-1} \times z_i\|}$ veya z_{i-1} ve z_i eksenleri paralel iken bunların ortak normalleri doğrultusunda x_i eksenini yerleştirilir.

6. adım: (y_i ekseninin belirlenmesi): $y_i = + \frac{(z_i \times x_i)}{\|z_i \times x_i\|}$ veya koordinat takımını tamamlamak için sağ el kuralına göre y_i eksenini oluşturulur.

7. adım: (Mafsalları ve eleman parametrelerinin bulunması) Her eleman (i) için $(i=1, \dots, n)$, 8. adımdan 11. adıma kadar olan adımlar uygulanır.

8. adım: (d_i 'nin bulunması): d_i , $(i-1)$. koordinat takımı orijini ile, x_i eksenini ile z_{i-1} ekseninin kesişme noktası arasındaki z_{i-1} eksenini doğrultusundaki mesafedir.

9. adım: (a_i 'nin bulunması): a_i , i . koordinat takımının orijini ile z_{i-1} ve x_i eksenlerinin kesişim noktası arasında kalan x_i eksenine doğrultusundaki mesafedir.

10. adım: (θ_i 'nin bulunması): θ_i , z_{i-1} eksenine etrafında, x_{i-1} ekseninden x_i eksenine kadar olan dönme açısıdır.

11. adım: (α_i 'nin bulunması): α_i , x_i eksenine etrafında, z_{i-1} ekseninden z_i eksenine kadar olan dönme açısıdır.

D-H koordinat takımı her bir eleman için belirledikten sonra, i . koordinat takımını $(i-1)$. koordinat takımına bağlayan bir homojen dönüşüm matrisi kolaylıkla yazılabilir. Bazı kol konfigürasyonları için yukarıda tanımlanan eklem parametrelerinin uygulanması mümkün değildir. Böyle durumlarda diğer metodlardan yararlanma yoluna gidilir.

Yukarıda verilen bilgiler ışığında, (2.15) ifadesinde verilen bir koordinat takımının homojen yer değiştirme matrisi, aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Burada C_{i-1}^i 3×3 boyutunda matris i . uzvun homojen dönme matrisidir, ve aşağıdaki matrisle hesaplanır.

$$C_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Dönme matrisi aynı zamanda $(i-1)$. uzuv ile i . uzuv arasındaki DCM (doğrultu cosinüsleri matrisi) ile temsil edilebilir. Prensip olarak, üç bağımsız parametre ile herhangi iki koordinat takımı arasındaki ilişki belirlenebilir. Bununla beraber (2.19) ifadesiyle verilen C_{i-1}^i , yalnız θ_i ve α_i gibi iki bağımsız parametreden oluşur. Bu dönüşüm, biri diğeri etrafında dönebilen

koordinat takımları için kullanılır. Bu dönme işlemi basit mafsallara uygulanır. Eğer uzuv koordinat takımları, D-H düşüncesine göre uyumlu ise, daima (2.19) ifadesine göre dönme matrisini hesaplamak mümkündür.

(2.18) ifadesinin sağ üst kolonunu öteleme vektörü olup, d_{i-1}^i vektörü ile gösterilir.

$$d_{i-1}^i = \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

d_{i-1}^i vektörü, O_i orijinin O_{i-1} orijinine göre konumunu tanımlar.

2.4.1 D-H Yerdeğiştirme Matrisinin Bulunması

(2.18)'de tanımlanan homojen yerdeğiştirme matrisindeki, (2.19) ve (2.20) ifadeleri O_i koordinat takımının O_{i-1} koordinat takımına göre ardışık öteleme ve dönmesiyle elde edilir. Bu işlem aşağıdaki adımlar halinde yapılır.

1. O_{i-1} koordinat takımı, z_{i-1} ekseninde θ_i kadar döndürülür.
2. Döndürülen O_{i-1} koordinat takımı, x_{i-1} doğrultusunda a_i , z_{i-1} doğrultusunda d_i birim kadar ötelenir.
3. Ötelenen O_{i-1} koordinat takımı, x_{i-1} ekseninde α_i kadar döndürülerek O_i elde edilir.

(2.9), (2.11) ve (2.12) ifadeleriyle verilen, homojen dönme ve öteleme matrisleri aşağıdaki gibi yerleştirilip çarpılırsa, D-H homojen yerdeğiştirme matrisi T_{i-1}^i elde edilir.

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.5 Quaternion ve Döner Vektör Gösterimi

Yukarıda, iki koordinat takımının birbirine göre bağıl dönmelerinin tanımlanmasında DCM (Doğrultu cosinüs matrisi veya dönme matrisi)'den yararlanıldı. Koordinat dönüşümlerini yapmak ve bunlar arasındaki ilişkileri tanımlamak için, alternatif bir metod olarak, bir quaternion ve dönme vektöründen yararlanılır. Bu metodun avantajı, DCM tanımlamasında 3×3 matris kullanımında olduğu gibi dokuz parametre yerine üç veya dört parametreye ihtiyaç göstermesidir. Ayrıca bu metod, robot kollarının kinematik çözümleri için gerekli olan aritmetik işlem sayısını da azaltır.

2.5.1 Quaternion'un Tanımı

Quaternion q ile gösterilir ve dört elemandan oluşur. Bunlar, dönmenin miktarı ile dönme ekseninin doğrultularını tanımlar. Bir quaternionun bir skaler elemanı q_0 ve bir $\vec{q}$ vektöründen ibarettir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$q = q_0 + \vec{q} = q_0 + q_1 \vec{i} + q_2 \vec{j} + q_3 \vec{k} \quad (2.22)$$

veya,

$$q = (q_0, \vec{q}) \quad (2.23)$$

Burada, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ X,Y,Z doğrultularındaki birim vektörlerdir. q_0 skaler elemanın sıfır alınması ile bir quaternion bir vektör olarak gösterilebilir. Bir eksen etrafındaki θ açısal dönmesinin tanımlanmasında quaternion aşağıdaki gibi kullanılır.

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{e} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.24)$$

veya,

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + (\mathbf{e}_1 \vec{i} + \mathbf{e}_2 \vec{j} + \mathbf{e}_3 \vec{k}) \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.25)$$

Burada, $\vec{e}$ quaternionun doğrultusunun tanımlanmasında kullanıldı. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$ ise $\vec{e}$ 'nin doğrultu cosinüsleridir. Alternatif olarak, quaternion aşındaki şekilde de, yazılabilir.

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.26)$$

2.5.2 Vektör Dönüşümünde Quaternionun Kullanımı

Bir koordinat takımında tanımlanan bir $\mathbf{v}$ vektörü, eğer aynı koordinat takımında bir q quaternionuyla tanımlanan bir dönmeye maruz kalırsa, yeni vektör $\mathbf{v}'$ aşağıdaki bağıntıyla bulunur.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + 2 q_0 (\vec{q} \times \mathbf{v}) + 2 \vec{q} \times (\vec{q} \times \mathbf{v}) \quad (2.27)$$

2.5.3 Ardışık Dönmeler

Bir vektörün g ve g' gibi iki quaternion ile tanımlanan dönmesi, tek bir quaternion ile gösterilebilir. Bu quaternion aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} q = g g' &= (g_0, \mathbf{g})(g'_0, \mathbf{g}') \\ &= (g_0 g'_0 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}', g_0 \mathbf{g}' + g'_0 \mathbf{g} + \mathbf{g} \times \mathbf{g}') \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.5.4 Dönme Vektörü

Dört elemanlı bir quaternion yerine üç boyutlu bir vektör kullanılarak bir dönme tanımlanabilir. Bu dönme vektörü için aşağıdaki tanımlama yapılır.

$$\mathbf{R} = \vec{e} \tan \frac{\theta}{2} = \vec{e} f \quad (2.29)$$

burada,

$\vec{e}$: dönme eksenini doğrultusundaki birim vektör.

θ : $\vec{e}$ dönmesinin açısı.

$f = \tan \frac{\theta}{2}$: dönme vektörünün genliği.

Dönme vektöründe aynı quaternion gibi vektör dönüşümlerinde kullanılır. Ardışık dönmeler tek bir dönme gösterimiyle yapılabilir. Bir $\mathbf{v}$ vektörü bir $\mathbf{R}$ dönmesine maruz kalması durumunda yeni $\mathbf{v}'$ vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \frac{2 \mathbf{R} \times (\mathbf{v} + \mathbf{R} \times \mathbf{v})}{1 + f^2} \quad (2.30)$$

burada, ardışık $\mathbf{R}_1$ ve $\mathbf{R}_2$ dönmelerini tek bir dönme vektörüyle temsil eden birleştirilmiş dönme vektörü,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 = \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{1 - \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2} \quad (2.31)$$

dir.

BÖLÜM 3

ROBOT DİNAMİĞİ

3.1 Giriş

Robot kol dinamiği, robot kol hareketinin denklemlerinin elde edilmesi ile ilgilenir. Bir robot kolun hareketinin dinamik denklemleri, o kolun dinamik davranışını tanımlayan bir matematiksel denklem takımıdır. Bu denklem takımı, robot kolun yapısı ile kinematik tasarımının simülasyonunda ve kolun kontrolunda kullanılacak olan uygun kontrol denklemlerinin elde edilmesinde kullanılır. Genelde, bir robot kolun dinamik performansı doğrudan, kol dinamik modeli ve kontrol algoritmasının etkinliğine bağlıdır.

3.2 Robot Kolların Modellenmesi

Robot kolların dinamik analizinde kullanılan hareket denklemlerinin çıkarılması için, sistemin dinamik modeline ihtiyaç vardır. Dinamik modelin, gerçek sisteme olan yakınlığı doğrudan doğruya dinamik analizin doğruluğunu etkiler. Robot kolların dinamik modellerinin elde edilmesi için iki farklı yöntem kullanılır. Birinci yöntemde, kollar rijit kabul edilir. İkinci yöntemde ise, birinci kabulün tersine daha gerçekçi bir yaklaşım olarak kolların elastikliği de, hesaba katılır. Robot kolların elastik modellenmesinde de, farklı yaklaşımlar mevcut olmasına rağmen, hepsinde de, temel prensip rijit modelleme ile aynıdır. Elastik modellemede, rijit modellemede kullanılan konum vektörüne, sadece elastik yerdeğiştirme vektörü ilave edilir. Bu nedenle, aşağıda robotik kitaplarında da, incelenen rijit modelleme konusuna kısaca değinilmekle yetinilecektir.

3.2.1 Robot Kolların Rijit Modellenmesi

Rijit bir robot kolun dinamik modeli, Newton mekaniği ve Lagrange mekaniği gibi bilinen fiziksel kanunlar yardımıyla elde edilir. Lagrange-Euler (L-E) ve Newton-Euler (N-E) formülasyonları gibi geleneksel yaklaşımlar, robot kolun hareket denklemlerini sistematik

olarak çıkarmakta kullanılır. Robot kol dinamiğini tanımlamakta kullanılan denklemler farklı yaklaşımlarla elde edilir. Bunlar,

- Lagrange-Euler formülasyonu.
- Newton-Euler formülasyonu.
- Genelleştirilmiş d'Alembert formülasyonu.

Bu formülasyonların hepsi gerçekte birbirine benzerdir. Fiziksel olarak aynı dinamik davranışı tanımlar. Bununla beraber bu denklemler, değişik sebep ve amaçlar için oluşturulduklarından dolayı yapılarında da farklılık vardır. Bunlardan bazıları hızlı hesaplama zamanı avantajlarından dolayı servomotorlar tarafından robot kolların mafsallarına uygulanacak nominal kuvvet/momentlerin hesaplanmasında, diğerleri ise, genelde kontrol analizi ve sentezi ile robot kolun hareketinin bilgisayar simülasyonlarının gerçekleştirilmesinde kullanılır.

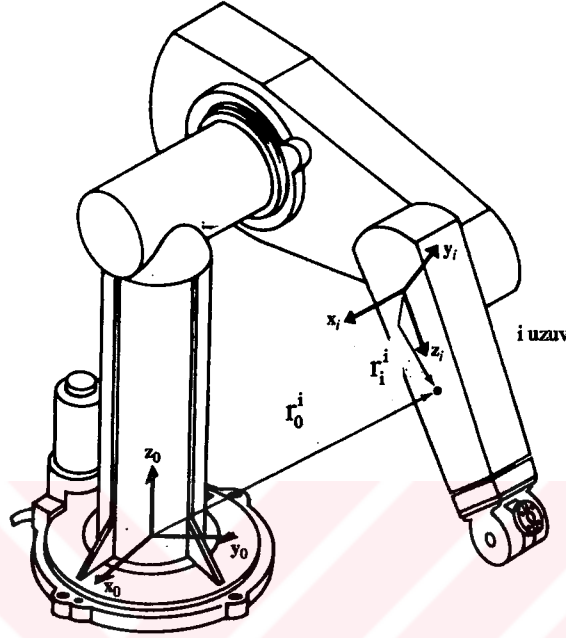
Rijit bir robot kolun dinamik modelinin L-E formülasyonuna dayanılarak çıkarılması basit ve sistematik olmasından dolayı geniş kullanım alanı bulmuştur. Dişli sürtünmesi ve boşluk etkisi ile elektronik kontrol ünitelerinin dinamiği hariç tutulursa, rijit gövde hareketi ikinci dereceden bağlı lineer olmayan bir diferansiyel denklem takımının çözümünden elde edilir.

3.2.1.1 Lagrange-Euler Formülasyonu

Bir robot kolun hareket denklemlerinin Lagrange-Euler formülasyonu yardımıyla çıkarımı yoğun bir matris hesaplama işlemi gerektirir. Bu amaçla, her bir kola yerleştirilen koordinat sistemleri ile bunların yerdeğiştirmeleri ve birbirine göre konumlarını belirleyen Denavit-Hartenberg matris gösteriminden yararlanır. Robot kolunun hareket denklemlerinin çıkarılmasında Denavit-Hartenberg gösterimi kullanılarak sistematik olarak oluşturulan matrisler bilgisayarla hesaplamada kolaylık sağlar.

3.2.1.1.1 Robot Kol Mafsal Hızı

Lagrange-Euler formülasyonunda kinetik enerji ifadesinin çıkarılmasında, robotun kolu üzerindeki herhangi bir noktanın hızının bilinmesi gerekir.



Şekil 3.1 Bir noktanın homojen koordinatlarının gösterimi.

Şekil 3.1’de i. uzvun üzerindeki bir noktanın i. koordinat takımına göre homojen koordinatları,

$$r_i^i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = [x_i, y_i, z_i, 1]^T \quad (3.1)$$

i. koordinat takımı (i-1). koordinat takımına göre yerleştirilirse, i. uzuv üzerindeki herhangi bir noktanın ana koordinat takımına göre konumunu veren r_0^i yervektörü T_0^i homojen dönüşüm matrisi yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$r_0^i = T_0^i r_i^i \quad (3.2)$$

burada,

$$T_0^i = T_0^1 T_1^2 \dots T_{i-1}^i \quad (3.3)$$

dir.

Birbirine komşu iki koordinat takımı arasındaki homojen dönüşüm matrisi olan T_{i-1}^i eğer kollar birbirine göre izafi dönme yapıyorsa,

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

veya izafi bir öteleme yapıyorsa,

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \cos\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

dir.

Hareket denklemlerinin çıkarılmasında, döner veya kayar mafsallı değişkenleri olan θ_i ve d_i yerine, genelleştirilmiş koordinat olarak q_i değişkeni kullanılacaktır. i . uzuv üzerindeki bir noktanın ana koordinat takımına göre hızı ise,

$$\begin{aligned} v_0^i \equiv v_i &= \frac{d}{dt}(r_0^i) = \frac{d}{dt}(T_0^i r_i^i) \\ &= \dot{T}_0^1 T_1^2 \dots T_{i-1}^i r_i^i + T_0^1 \dot{T}_1^2 \dots T_{i-1}^i r_i^i + \dots \\ &\quad + T_0^1 \dots \dot{T}_{i-1}^i r_i^i + T_0^1 r_i^i = \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] r_i^i \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır. i . uzuv üzerindeki herhangi bir noktanın bağlı bulunduğu hareketli koordinat takımına göre yerdeğiştirmesi, uzvun rijit olmasından dolayı mümkün olamayacağından $\dot{r}_i^i = 0$ olacaktır. T_0^i 'nin q_j 'ye göre kısmi türevini kolayca hesaplamak için Q_i gibi bir yardımcı matrise ihtiyaç vardır. Döner mafsalsal için,

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

kayar mafsalsal için ise,

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece,

$$\frac{\partial T_{i-1}^i}{\partial q_i} \equiv Q_i T_{i-1}^i \quad (3.9)$$

özdeşliği yazılabilir. Buradan, $i = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} = \begin{cases} T_0^1 T_1^2 \dots T_{j-2}^{j-1} Q_j T_{j-1}^j \dots T_{i-1}^i & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} \quad (3.10)$$

dır. (3.10) eşitliği j mafsalsalının hareketinin, i . uzvun üzerindeki noktalara olan etkisini gösterir. Basitleştirmek amacıyla şöyle bir tanımlama yapılırsa,

$$U_{ij} = \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \quad (3.11)$$

(3.10) eşitliği aşağıdaki şekilde yeniden yazabilir.

$$U_{ij} = \begin{cases} T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^i & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} \quad (3.12)$$

Buradan, (3.6) bağıntısıyla gösterilen i. uzvun üzerindeki herhangi bir noktanın hızını veren ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v_i = \left[\sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right] r_i^i \quad (3.13)$$

Daha sonra mafsallar arasındaki karşılıklı etkilerin bulunması gerekir.

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = U_{ijk} = \begin{cases} T_0^{j-1} Q_j T_{j-1}^{k-1} Q_k T_{k-1}^i & i \geq k \geq j \\ T_0^{k-1} Q_k T_{k-1}^{j-1} Q_j T_{j-1}^i & i \geq j \geq k \\ 0 & i < j \text{ veya } i < k \end{cases} \quad (3.14)$$

(3.14) eşitliği, j ve k mafsallarının karşılıklı hareketlerinin i. uzuv üzerindeki noktalara olan etkisi olarak açıklanabilir.

3.2.1.1.2 Robot Kolun Kinetik Enerjisi

n adet uzva sahip bir robot kolunun kinetik enerjisini bulmak için, robot uzuvları üzerindeki herbir noktanın hızının bilinmesi gerekir. K_i , i. uzvun kinetik enerjisini göstermek üzere i. uzuv üzerindeki dm parçacığından kaynaklanan kinetik enerji aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(v_i v_i^T) dm \end{aligned} \quad (3.15)$$

Burada, x_i , y_i ve z_i i. uzuv üzerindeki dm kütlesinin ana koordinat takımına göre x , y ve z doğrultusundaki hız bileşenlerini göstermektedir. (3.13) denklemiyle verilen v_i hız ifadesi (3.15) eşitliğiyle tanımlanan dm parçacığından kaynaklanan kinetik enerji ifadesinde yerine konursa,

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i U_{ip} \dot{q}_p r_i^i \left[\sum_{r=1}^i U_{ir} \dot{q}_r r_i^i \right]^T \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} r_i^i r_i^{iT} U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left(r_i^i dm r_i^{iT} \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

dm parçacığının sahip olduğu kinetik enerji ifadesi elde edilir.

Eğer i. uzvun tamamının sahip olduğu kinetik enerji ifadesi bulunmak istenirse, (3.16) ifadesinin integralinin alınması gerekir.

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left(\int r_i^i r_i^{iT} dm \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (3.17)$$

Burada, küçük parantez içindeki integral ifadesi i. uzuv üzerindeki bütün noktaların ataletini temsil eder, ve J_i ile gösterilir.

$$J_i = \int r_i^i r_i^{iT} dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Burada, r_i^i vektörü daha önce tanımlanmıştı. I_{ij} atalet tensörü olarak aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$I_{ij} = \int \left[\delta_{ij} \left[\sum_k x_k^2 \right] - x_i x_j \right] dm \quad (3.19)$$

burada, i, j, k indisleri i . koordinat takımının eksenlerini gösterir, δ_{ij} Kronecker deltası olarak adlandırılır. Böylece, J_i aşağıdaki gibi daha açık şekilde gösterilebilir.

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

veya rijit gövde m_i 'nin (x_i, y_i, z_i) koordinat sistemindeki jirasyon yarıçapı kullanılarak J_i yeniden düzenlenirse,

$$J_i = m_i \begin{bmatrix} \frac{-k_{i11}^2 + k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i12}^2 & k_{i13}^2 & \bar{x}_i \\ k_{i12}^2 & \frac{k_{i11}^2 - k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i23}^2 & \bar{y}_i \\ k_{i13}^2 & k_{i23}^2 & \frac{k_{i11}^2 + k_{i22}^2 - k_{i33}^2}{2} & \bar{z}_i \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Burada, k_{i23} i . uzvun yz eksenleri etrafındaki jirasyon yarıçapıdır. $\bar{r}_i^i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$ i . uzvun i . koordinat takımına göre kütle merkezinin vektörüdür. Böylece, bir uzvun toplam kinetik enerji ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} J_i U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr}(U_{ip} J_i U_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dikkat edilirse, J_i i. uzvun kütle dağılımından ve hareketin şeklinden bağımsızdır. Bu nedenle bir robotun kinetik enerjisinin bulunmasında J_i 'nin bir kez hesaplanması yeterli olacaktır.

3.2.1.1.3 Robot Kolun Potansiyel Enerjisi

Bir robot kolunun toplam potansiyel enerjisi P ile ve i. uzvun potansiyel enerjisi de, P_i ile gösterilsin,

$$P_i = -m_i g \bar{r}_0^i = -m_i g \left(T_0^i \bar{r}_i^i \right) \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.23)$$

burada, robot kolunun toplam potansiyel enerjisi herbir uzvun potansiyel enerjileri toplamına eşittir.

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n -m_i g \left(T_0^i \bar{r}_i^i \right) \quad (3.24)$$

burada, robot kolunun $g = (g_x, g_y, g_z, 0)$ temel koordinat takımındaki x, y ve z doğrultusundaki yerçekim ivme vektörünü gösterir. Ancak yatay bir sistem için $g = (0, 0, -|g|, 0)$ alınır. Burada, g yerçekimi ivmesidir.

3.2.1.1.4 Bir Robotun Hareket Denklemleri

Lagrange fonksiyonu $L=K-P$ olup, (3.22) ve (3.24) ifadelerini yerine koyarsak, bir robot kolu için Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(U_{ij} J_i U_{ik}^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \sum_{i=1}^n m_i g \left(T_0^i \bar{r}_i^i \right) \quad (3.25)$$

Robot kolun Lagrange fonksiyonuna (3.25) Lagrange-Euler formülasyonu uygulanarak, i. kolu hareket ettirecek servomotora ait genelleştirilmiş moment τ_i bulunur.

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1,2, \dots, n \quad (3.26)$$

$$\tau_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr}(U_{jk} J_i U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr}(U_{jkm} J_i U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j g U_{ji}^T \vec{r}_i$$

Yukarıdaki denklem daha basit şekilde indis notasyonunda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\tau_i = \sum_{k=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + c_i \quad i=1,2, \dots, n \quad (3.27)$$

veya matris formunda yazılırsa,

$$\tau(t) = D(q(t)) \ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) + c(q(t)) \quad (3.28)$$

Burada,

$\tau(t)$: $n \times 1$ boyutunda genelleştirilmiş moment vektörüdür. $i=1,2, \dots, n$

$$\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t), \dots, \tau_n(t))^T$$

$q(t)$: $n \times 1$ boyutunda robot kol mafsalları değişkenleri vektörüdür.

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots, q_n(t))^T$$

$\dot{q}(t)$: $n \times 1$ boyutunda robot kol mafsalları hız vektörüdür.

$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), \dots, \dot{q}_n(t))^T$$

$\ddot{q}(t)$: $n \times 1$ boyutunda robot kol mafsalları ivme vektörüdür.

$$\ddot{q}(t) = (\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \ddot{q}_3(t), \dots, \ddot{q}_n(t))^T$$

$D(q)$: $n \times n$ boyutunda ivmelenme ile ilişkili simetrik atalet matrisi.

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \quad i,k=1,2,\dots,n \quad (3.29)$$

$h(q, \dot{q})$: $n \times 1$ boyutunda Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörüdür.

$$h(q, \dot{q}) = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_n)^T$$

burada,

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.30)$$

ve,

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \quad i,k,m=1,2,\dots,n \quad (3.31)$$

$c(q)$: $n \times 1$ boyutunda yerçekimi etkisinden kaynaklanan kuvvet vektörüdür.

$$c(q) = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)^T$$

burada,

$$c_i = \sum_{j=i}^n (-m_j g U_{ji} \bar{r}_i^i) \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.32)$$

3.2.1.2 Newton-Euler Formülasyonu

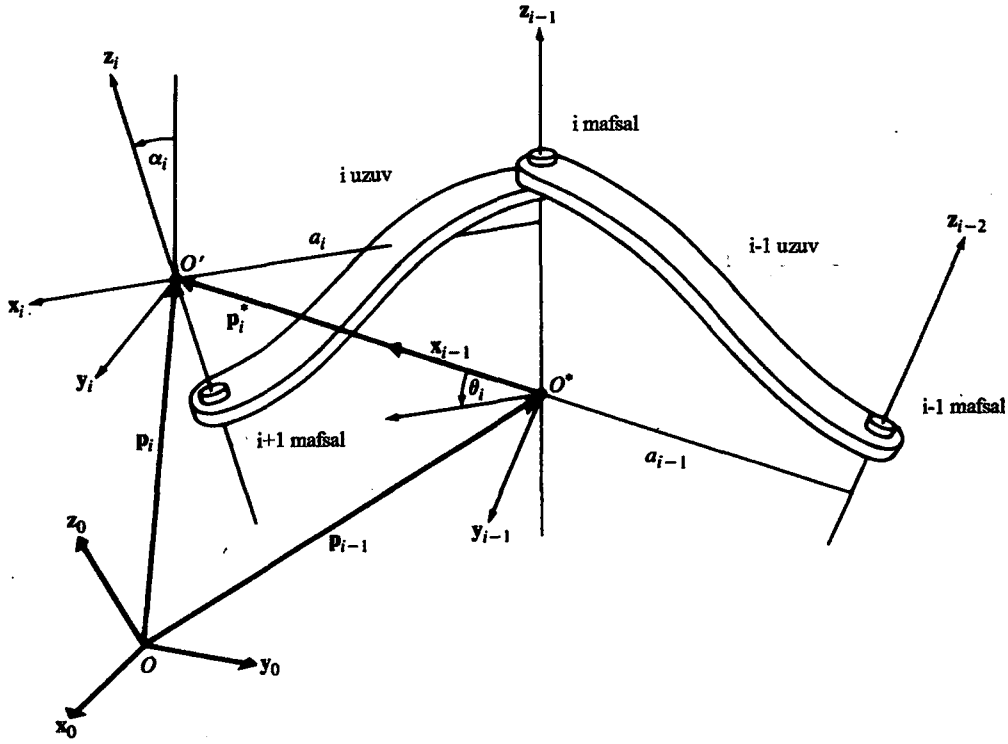
Yukarıda, Lagrange-Euler formülasyonu kullanılarak bir robotun hareket denklemleri ikinci dereceden lineer olmayan bir diferansiyel denklem takımı şeklinde çıkarıldı. Bu denklemler kullanılarak, yörünge üzerindeki her bir nokta için mafsalların konum, hız ve ivmeleri bilinirse nominal mafsal momentleri gerçek zamanda bulunabilir. Ancak bu işlem açık çevrimli kontrolde, problem olmaktadır. Çünkü Lagrange-Euler denklemlerinin

çıkarılmasında 4×4 homojen dönüşüm matrislerinin kullanılması hesaplama zamanını arttırmaktadır. Hesaplama zamanını azaltmanın bir yolu, Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerinin ihmal edilmesidir. Böylece basitleştirilmiş dinamik denklemler kullanılarak mafsal momentleri daha hızlı bir şekilde hesaplanabilir. Ancak basitleştirilmiş model kullanımı yüksek hızlı robot hareketlerinde, arzu edilen mafsal moment değerinden önemli sapmalar meydana getirdiğinden pek kullanışlı bir yöntem değildir. Kapalı çevrimli kontrolde düzeltici momentlerin bulunmasında basit model kullanılması durumunda hızlı robot hareketlerinde aşırı düzeltici moment ihtiyacına neden olmaktadır. Bu nedenle özellikle kontrolde kullanılacak robot kolu dinamik denklemlerinin çıkarılmasında, Newton'un ikinci kanunundan faydalanılarak, açık kinematik zincir mekanizmalarının dinamiği için Newton-Euler denkleminin değişik formları geliştirilmiştir. Newton-Euler formülasyonu uygulanarak bir robot kola ait neticeler vektörel çarpımlı terimlerden oluşan ileri ve geri ardışık tekrarlı denklemler takımı olarak elde edilir. Bu formülasyonun, gerçek zamanlı kontrolde uygulanacak momentlerin, hesaplama zamanını önemli ölçüde azaltması çok önemli bir yönüdür. Robot kolun temel koordinat takımına göre hareketinin kinematik ilişkileri, d'Alembert prensibine dayanılarak matematik modeli elde edilir.

3.2.1.2.1 Robot Kol Kinematiği

Şekil 3.2'da görüldüğü gibi $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımı i . mafsala yerleştirilsin. (x_0, y_0, z_0) temel koordinat takımı olarak adlandırılır. $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımı $(i-1)$. uzvun O^* ve (x_i, y_i, z_i) koordinat takımı ise i . uzvun O' orijinine yerleştirilmiştir. p_i , O' orijininin O orijinine göre, p^* ise O' orijininin O^* ve p_{i-1} ise O^* orijininin temel koordinat takımının O orijinine göre konum vektörüdür.

v_{i-1} ve ω_{i-1} $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımının (x_0, y_0, z_0) temel koordinat takımına göre çizgisel ve açısal hızlarını gösterebilir. ω_i ve ω_i^* ise O' orijininin (x_0, y_0, z_0) ve $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımına göre açısal hızlarını gösterebilir. Böylece, (x_i, y_i, z_i) koordinat takımının, temel koordinat takımına göre v_i çizgisel hızı ve ω_i açısal hızı aşağıdaki gibi hesaplanır.



Şekil 3.2 O, O* ve O' koordinat takımları arasındaki ilişki.

$$\mathbf{v}_i = \frac{d^* \mathbf{p}_i^*}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* + \mathbf{v}_{i-1} \quad (3.33)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i^* \quad (3.34)$$

Burada, $d^*(\cdot)/dt$, $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ hareketli koordinat takımına göre zaman türevini tanımlar. (x_i, y_i, z_i) koordinat takımının temel koordinat takımına göre çizgisel ivmesi $\dot{\mathbf{v}}_i$ ve açısal ivmesi $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \frac{d^{*2} \mathbf{p}_i^*}{dt^2} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* + 2 \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \frac{d^* \mathbf{p}_i^*}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} \quad (3.35)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^* \quad (3.36)$$

(x_i, y_i, z_i) koordinat takımının $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımına göre açısal ivmesi,

$$\dot{\omega}_i^* = \frac{d^* \omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_i^* \quad (3.37)$$

dir. Buradan,

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \frac{d^* \omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_i^* \quad (3.38)$$

bulunur.

Eğer i . uzuv $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımında z_{i-1} doğrultusunda $\dot{q}_i$ mafsali hızıyla $(i-1)$. uzva göre ötelenirse, ve eğer i . uzuv $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımında z_{i-1} eksenini etrafında ω_i^* açısal hızıyla hareket ederse, bu durumda,

$$\omega_i^* = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i & \text{eğer } i. \text{ uzuv döner mafsalli ise} \\ 0 & \text{eğer } i. \text{ uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.39)$$

dır. Burada, $\dot{q}_i$ 'i $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımına göre i . uzvun açısal hız değeridir. Benzer şekilde,

$$\frac{d^* \omega_i^*}{dt} = \begin{cases} z_{i-1} \ddot{q}_i & \text{eğer } i. \text{ uzuv döner mafsalli ise} \\ 0 & \text{eğer } i. \text{ uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.40)$$

(3.39) ve (3.40) eşitlikleri (3.34) ve (3.38) eşitliklerinde yerine konursa,

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i & \text{eğer } i. \text{ uzuv döner mafsalli ise} \\ \omega_{i-1} & \text{eğer } i. \text{ uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1} \ddot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{q}_i) & \text{eğer } i. \text{ uzuv döner mafsalli ise} \\ \dot{\omega}_{i-1} & \text{eğer } i. \text{ uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.42)$$

i. uzvun (i-1). uzva göre lineer hız ve ivmeside aşağıdaki şekilde verilir.

$$\frac{d^* \mathbf{p}_i^*}{dt} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i^* \times \mathbf{p}_i^* & \text{eger i. uzuv döner mafsalli ise} \\ \mathbf{z}_{i-1} \dot{\mathbf{q}}_i & \text{eger i. uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\frac{d^{*2} \mathbf{p}_i^*}{dt^2} = \begin{cases} \frac{d^* \boldsymbol{\omega}_i^*}{dt} \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i^* \times (\boldsymbol{\omega}_i^* \times \mathbf{p}_i^*) & \text{eger i. uzuv döner mafsalli ise} \\ \mathbf{z}_{i-1} \ddot{\mathbf{q}}_i & \text{eger i. uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.44)$$

(3.43) ve (3.44) eşitlikleri (3.33) denkleminde yerine konursa, i. uzvun (x_0, y_0, z_0) temel koordinat takımına göre çizgisel hızı,

$$\mathbf{v}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \mathbf{v}_{i-1} & \text{eger i. uzuv döner mafsalli ise} \\ \mathbf{z}_{i-1} \dot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \mathbf{v}_{i-1} & \text{eger i. uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.45)$$

(3.39) ile (3.44) arasındaki denklemler (3.35) denkleminde yerine konulursa i. uzvun (x_0, y_0, z_0) temel koordinat takımına göre çizgisel ivmesi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{eger i. uzuv döner mafsalli ise} \\ \mathbf{z}_{i-1} \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* + 2 \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{z}_{i-1} \dot{\mathbf{q}}_i) + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{eger i. uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.46)$$

Eğer, (3.45) denkleminde i. uzuv kayar mafsallı ise $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Burada, (3.41), (3.42), (3.45) ve (3.46) eşitlikleri robotun hareket denklemlerinin elde edilmesinde kullanılan i. uzva ait kinematik bağıntılardır.

3.2.1.2.2 Robot Kol Hareketinin Ardışık Denklemleri

Yukarıda elde edilen bağıntılar kullanılarak robotun herbir uzvuna d'Alembert prensibi uygulanarak robot kolun hareketi tanımlanabilir. d'Alembert prensibi bir dinamik problemde,

statik olarak denge konumundaki bir mekanik elemana etkiyen harici kuvvetlerle reaksiyon kuvvetlerinin toplamının hareketin bütün anlarında eşit olduğunu söyler. d'Alembert prensibi Newton'un ikinci hareket kanununun biraz değiştirilmiş şeklidir.

m_i : i. uzvun toplam kütlesi.

$\bar{r}_i$: i. uzvun kütle merkezinin temel koordinat takımının orijinine olan mesafesi.

$\bar{s}_i$: i. uzvun kütle merkezinin (x_i, y_i, z_i) koordinat takımının orijinine olan mesafesi.

p_i^* : i. koordinat takımının orijininin (i-1). koordinat takımına göre konum vektörü.

$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt}$, i. uzvun kütle merkezinin çizgisel hızı.

$\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt}$, i. uzvun kütle merkezinin çizgisel ivmesi.

F_i : i. uzvun kütle merkezine etkiyen toplam dış kuvvet.

N_i : i. uzvun kütle merkezine etkiyen toplam dış moment.

I_i : i. uzvun (x_0, y_0, z_0) koordinat takımında, kütle merkezine göre atalet matrisi.

f_i : $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımında (i-1). uzuv yardımıyla i. uzva uygulanan kuvvet.

n_i : $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımında (i-1). uzuv yardımıyla i. uzva uygulanan moment.

Bütün mafsalların viskoz sönüm etkisi ihmal edilerek her bir uzva d'Alembert prensibi uygulanırsa,

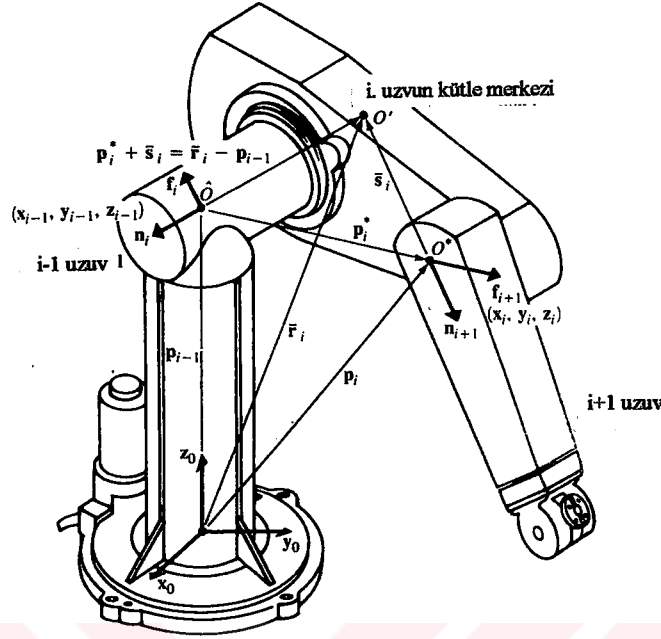
$$F_i = \frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} = m_i \bar{a}_i \quad (3.47)$$

$$N_i = \frac{d(I_i \omega_i)}{dt} = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i) \quad (3.48)$$

(3.45) ve (3.46) eşitliklerinden i. uzvun kütle merkezinin çizgisel hız ve ivmesi,

$$\bar{v}_i = \omega_i \times \bar{s}_i + v_i \quad (3.49)$$

$$\bar{a}_i = \dot{\omega}_i \times \bar{s}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \bar{s}_i) + \dot{v}_i \quad (3.50)$$



Şekil 3.3 i. uzvu üzerindeki kuvvet ve momentlerin gösterimi.

olarak bulunur. Şekil 3.3' de görüldüğü gibi, i. uzva etkiyen toplam dış kuvvet F_i ve moment N_i dir. Bunlar i. uzvu civarındaki (i-1) ve (i+1). uzvlar ile yerçekiminden dolayı oluşan kuvvetlerin etkisinden meydana gelir. Dış kuvvet,

$$F_i = f_i - f_{i+1} \quad (3.51)$$

ve moment,

$$\begin{aligned} N_i &= n_i - n_{i+1} + (p_{i-1} - \bar{r}_i) \times f_i - (p_i - \bar{r}_i) \times f_{i+1} \\ &= n_i - n_{i+1} + (p_{i-1} - \bar{r}_i) \times f_i - p_i^* \times f_{i+1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

dir. $\bar{r}_i - p_{i-1} = p_i^* + \bar{s}_i$ eşitliği kullanarak yukarıdaki ardışık denklemler yeniden düzenlenirse,

$$f_i = F_i + f_{i+1} = m_i \bar{a}_i + f_{i+1} \quad (3.53)$$

$$n_i = n_{i+1} + p_i^* \times f_{i+1} + (p_i^* + \bar{s}_i) \times F_i + N_i \quad (3.54)$$

bulunur. Bu denklemler, ($i=1,2,\dots,n$) uzuvlardaki kuvvet ve momentlerin bulunmasında kullanılan ardışık denklemlerdir.

Eğer, i . mafsal $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımında z_{i-1} eksenini etrafında q_i açısıyla döner ise, i mafsalındaki giriş momenti, $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımındaki viskoz sönüm momenti ile n_i 'nin z_{i-1} eksenini üzerindeki izdüşümünün toplamıdır. Aynı şekilde i . mafsal $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımında z_{i-1} eksenini doğrultusunda q_i relatif ötelemesini yapıyor ise, bu durumda giriş momenti τ_i , $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordinat takımında viskoz sönüm kuvveti ile f_i 'nin z_{i-1} eksenini üzerindeki izdüşümünün toplamıdır.

$$\tau_i = \begin{cases} n_i^T z_{i-1} + b_i \dot{q}_i & i. \text{ uzuv döner mafsalli ise} \\ f_i^T z_{i-1} + b_i \dot{q}_i & i. \text{ uzuv kayar mafsalli ise} \end{cases} \quad (3.55)$$

Burada, b_i i . uzuvdaki viskoz sönüm katsayısıdır.

3.2.1.3 Genelleştirilmiş d'Alembert Yöntemi

L-E formülasyonu ile hareket denklemlerinin elde edilmesinde, 4×4 homojen matris dönüşümlerinin kullanılması hesaplama etkinliğini azaltır. Buna karşın, N-E formülasyonunda hesaplama etkinliği, vektör formülasyonundan ve bu formülasyonun ardışık yapısından kaynaklanır. Hareketin kapalı formdaki denklemlerini elde etmek için, relatif konum vektörü ve dönme matrisi gösterimleri kullanılarak herbir uzvun kinematik bilgileri elde edilir. Robot kolun kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinden Lagrange fonksiyonu elde edilerek, hareket denklemleri çıkarılır.

Denklemlerin çıkarılmasında, uzuvlar rijit ve mafsallar da döner kabul edilecek. ω_s s. uzvun temel koordinat takımına göre açısal hızını gösterir, ve kendisine bağlı önceki uzuvların relatif hızlarının bir toplamı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\omega_s = \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j z_{j-1} \quad (3.56)$$

Burada, z_{j-1} , j. mafsalının temel koordinat takımına göre dönme eksenini ifade eder. Yukarıdaki ifadenin her iki yanı, s uzvunun temel koordinat takımına göre dönmesini tarif eden C_s^0 matrisiyle çarpılırsa,

$$C_s^0 \omega_s = \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j C_s^0 z_{j-1} \quad (3.57)$$

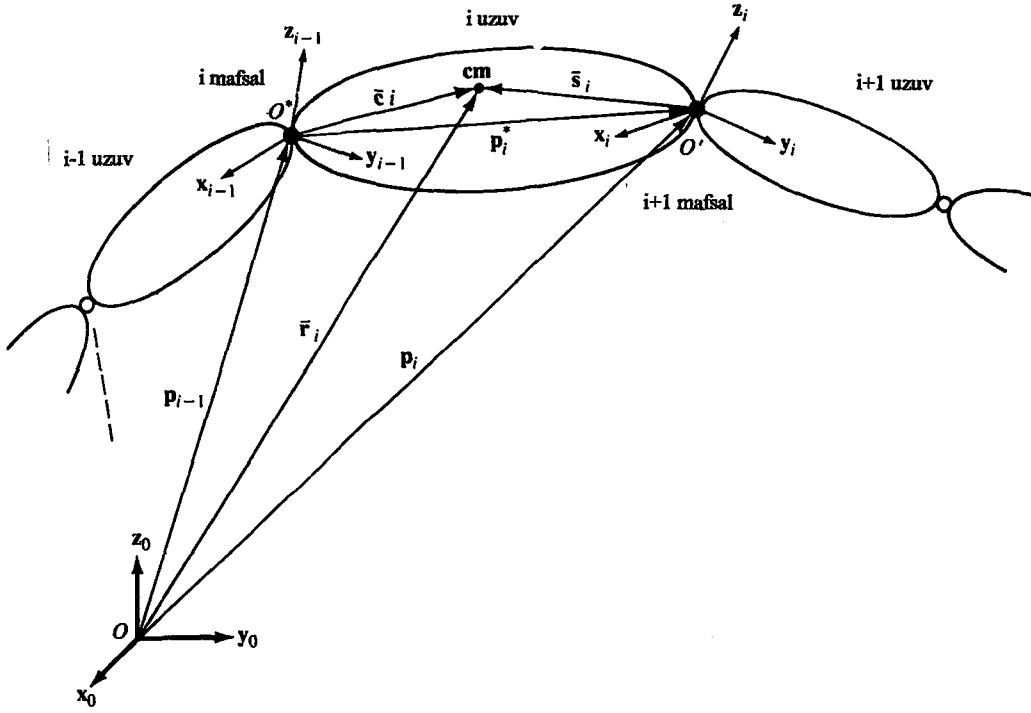
elde edilir. Burada $C_s^0 = [C_0^s]^{-1}$ dir.

Şekil 3.4'de görüldüğü gibi $\bar{r}_s$, s uzvunun kütle merkezinin temel koordinat takımına göre konum vektörüdür. Bu konum vektörü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\bar{r}_s = \sum_{j=1}^{s-1} p_j^* + \bar{c}_s \quad (3.58)$$

Burada, $\bar{c}_s$ s uzvunun kütle merkezinin (s-1). koordinat takımından temel koordinat takımına göre konum vektörüdür. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak s uzvunun temel koordinat takımına göre çizgisel hızı v_s , aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$v_s = \sum_{k=1}^{s-1} \left[\left(\sum_{j=1}^k \dot{\theta}_j z_{j-1} \right) \times p_k^* \right] + \left(\sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j z_{j-1} \right) \times \bar{c}_s \quad (3.59)$$



Şekil 3.4 Genelleştirilmiş d'Alembert denklemlerinin çıkarımında kullanılan konum vektörü.

m_s kütesine sahip s uzvunun ($1 \leq s \leq n$) toplam kinetik enerjisi, kütle merkezinin dönme ve ötelemesinden kaynaklanan kinetik enerjilerinin toplamına eşittir.

$$K_s = (K_s)_{\text{trans}} + (K_s)_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_s (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s) + \frac{1}{2} (\mathbf{C}_s^0 \boldsymbol{\omega}_s)^T \mathbf{I}_s (\mathbf{C}_s^0 \boldsymbol{\omega}_s) \quad (3.60)$$

burada, $\mathbf{I}_s$ s uzvunun s . koordinat takımında, kütle merkezine göre atalet tensörüdür. Uzuvların ötelenmesi, dönmesi ve yerçekiminden kaynaklanan etkileri ayrı ayrı gözönüne alınarak hareketin denklemleri çıkarılacaktır.

s uzvunun ($s \geq i$), genelleştirilmiş koordinatı θ_i 'ye göre ötelemeden doğan kinetik enerji ifadesine Lagrange-Euler formülasyonu uygulanır ve bütün uzuvların ötelemeden kaynaklanan reaksiyon momentlerinin toplamı,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_{trans}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial K_{trans}}{\partial \theta_i} &= \sum_{s=i}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (K_s)_{trans}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial (K_s)_{trans}}{\partial \theta_i} \right] \\ &= \sum_{s=i}^n m_s \dot{v}_s [z_{i-1} \times (\bar{r}_s - p_{i-1})] \end{aligned} \quad (3.61)$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde, s uzvunun dönmeden kaynaklanan kinetik enerji ifadesinede, Lagrange-Euler formülasyonu uygulanırsa, dönmeden kaynaklanan reaksiyon momentlerinin toplamı,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K_{rot}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial K_{rot}}{\partial \theta_i} &= \sum_{s=i}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (K_s)_{rot}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial (K_s)_{rot}}{\partial \theta_i} \right] \\ &= \sum_{s=i}^n \left[(C_s^0 z_{i-1})^T I_s \left(\sum_{j=1}^s \ddot{\theta}_j C_s^0 z_{j-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + (C_s^0 z_{j-1})^T I_s \left\{ \sum_{j=1}^s \left[\dot{\theta}_j C_s^0 z_{j-1} \times \left(\sum_{k=j+1}^s \dot{\theta}_k C_s^0 z_{k-1} \right) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left[C_s^0 z_{i-1} \times \left(\sum_{k=1}^s \dot{\theta}_k C_s^0 z_{k-1} \right) \right]^T I_s \left(\sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j C_s^0 z_{j-1} \right) \right] \\ &\quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (3.62)$$

Robotun toplam potansiyel enerjisi, herbir uzvun potansiyel enerjilerinin toplamıdır.

$$P = \sum_{s=1}^n P_s \quad (3.63)$$

Burada, P_s herbir uzvun potansiyel enerjisidir.

$$P_s = -g m_s \bar{r}_s \quad (3.64)$$

Yerçekiminden kaynaklanan potansiyel enerji ifadesine de, Lagrange-Euler formülasyonu uygulanıp reaksiyon momentini veren ifade aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial P}{\partial \theta_i} = - \sum_{s=i}^n \frac{\partial P_s}{\partial \theta_i} = \sum_{s=i}^n g m_s \left[z_{i-1} \times (\bar{r}_s - p_{i-1}) \right] \quad (3.65)$$

Burada p_{i-1} , $\dot{\theta}$ 'nin fonksiyonu olmadığından (3.65) eşitliğinin ilk terimi sıfırdır. i . mafsalsındaki i . uzvu hareket ettirecek genelleştirilmiş moment (3.61), (3.62) ve (3.65) denkleminin toplamıdır.

$$\tau_i = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_{trans}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial K_{trans}}{\partial \theta_i} \right\} + \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_{rot}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial K_{rot}}{\partial \theta_i} \right\} + \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \quad (3.66)$$

3.2.2 Robot Kolların Esnek Modellenmesi

Robot kollarının, dinamik modellerinin elde edilmesinde, lineer olmayan ve elastik etkilerin ihmal edilmesi görünürde, robot kol hareketlerinin kontrol işleminde kullanılan kontrol organının tasarımında büyük kolaylık sağlar. Fakat, yüksek çalışma hızlarında ihmal edilen bu lineer olmayan ve elastik etkiler, kontrol işleminin hassasiyetini azaltır. Bu nedenle, yüksek hızla tahrik edilen ve özellikle hafif yapıları tasarlanmış robot kolların kontrolünde esnekliği de gözönüne alan modellerin kullanımı büyük önem taşır.

Bu çalışmaya, esas oluşturan esnek uzuvlu robotların modellenmesi değişik kabuller altında incelenmiştir. Esnek robot kolların modellenmesinde, ilk yaklaşımda uzuvlar rijit kabul edilmiş fakat mafsalların esnekliği gözönüne alınmıştır (Spong, 1987; Streit vd., 1989). Mafsalların yay ve/veya sönüm elemanı ile temsil edildiği bu yaklaşım mafsal titreşimlerinin önem kazandığı hızlı sürülen robot kol uygulamalarında kullanılır. İkinci ve en gerçekçi yaklaşım ise, uzuvları elastik kabul eden yaklaşımdır. Bu yaklaşımda, iki farklı uygulama vardır. Birinci uygulamada, uzuv yapıları sürekli ortam kabul edilerek, Euler-Bernoulli veya Euler-Timeshenko çubuk teorisi yardımıyla robot kolu servomotor miline bağlanmış esnek bir çubuk olarak düşünülür ve sınır şartları belirlenerek problem bir sınır değer problemine dönüştürülür. Bu yaklaşım genellikle, tek esnek uzuvlu robot kolların modellenerek esnek robot kolların kontrol problemlerinin araştırılmasında ve kontrol sistemi etkinliğinin

incelenmesinde tercih edilmiştir (Fukuda vd., 1987; Tahara vd., 1988; Yamaura vd., 1989; Morris vd., 1996; Choi vd., 1996). İkinci tip uygulama ise, iki veya daha çok esnek uzva sahip robot kolların modellenmesinde kullanılan sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yönteminde, elastik kollar sonlu sayıda parçalara ayrılır. Her bir parça için elemanter kütle, rijitlik ve sönüm matrisleri yazılarak elemanter matrislerden esnek sistemin toplam sistem matrisleri oluşturulur. Bu yaklaşımda, elde edilen hareket denklemlerinin boyutu düğüm noktası sayısı ile orantılıdır (Wu vd., 1991; Bayo vd., 1989; Al-Bedoor vd., 1995). Elastik modellemede diğer bir yöntem ise bu çalışmada da, izlenilen iki ve daha çok esnek uzva sahip robot kolların modellenmesinde kullanılan bir yöntemdir. Bu modelleme yönteminde, esnek kolun üzerindeki herhangi bir noktanın yerdeğiştirmesi, rijit gövde hareketi ile elastik yerdeğiştirmenin toplamı olan bir konum vektörü ile tanımlanır. Elastik yerdeğiştirme, Rayleigh-Ritz, Assumed-Modes, Galerkin's v.b yaklaşık çözüm metodları kullanılarak genelleştirilmiş koordinatların bir serisine açılarak tanımlanır. (Book vd., 1975; Singh vd., 1986; Pham vd., 1992; Yao vd., 1995; Yim vd., 1996).

3.3 Robot Kollarda Düz ve Ters Dinamik Problem

Robot kol dinamiğinde iki önemli problemden bahsedilir. Bunlar düz ve ters dinamik problemidir. Teorik olarak bu problemlerin çözümünde bir sorun yoktur. Fakat pratik uygulamalarda değişik problemlerle karşılaşılır. Düz dinamik problem, robot kolun istenilen bir hareketi yapması için gerekli mafsallık kuvvet/momentlerin hesaplanması problemidir. Ters dinamik problem ise, robot kolların mafsallarına uygulanan kuvvet/momentlerin bilinmesi halinde robot kolun mafsallık değişkenlerinin, şayet kol esnek ise genelleştirilmiş koordinatlarının bulunması problemidir. Pratikte robot simülasyonları ve robot kolu uç titreşimleri hakkında bilgi edinilmesi istendiğinde çözülmesi gerekli önemli bir problemidir. Taşınacak kütlenin bilinmemesi, kola yapılan ani yükleme ve boşalmalar, robot dinamik modelinin çıkarılması esnasında yapılan kabuller ve ihmallerden doğan etkilerden dolayı, ters dinamik problemin pratik uygulamalarında güçlüklerle karşılaşılabilir. Ters dinamik problemin çözümü gerçekte on-line yapılabilir. Bunun için hesaplama zamanını azaltacak hızlı bilgisayar sistemlerine ihtiyaç vardır. Bu amaçla, değişik metodlar ve algoritmalar geliştirilmiştir. Bilgisayar hızlarının yeterli olamadığı zamanlarda, yüksek

bilgisayar belleği gerektiren tablolama yöntemi geliştirilmiştir (Raibert ve Horn, 1987). Bununla beraber bilgisayar hızlarının artmasıyla Newton-Euler ve Recursive-Lagrange formülasyonları bu amaçla efektif biçimde kullanılmaya başlanmıştır. Problemin daha da hızlı çözümü için alternatif yöntemler üzerinde de çalışmalar yapılmıştır (Wang ve Kohl, 1985; Li, 1988).

Lagrange formülasyonunun ters dinamik problemin çözümünde kullanılmasında, robot kolun hareket denklemlerinin lineer olmayan kısımları ile merkezkaç etkisi ve Coriolis ivmesi etkileri, hesaplama zamanının azaltılması amacıyla, ihmal edilir. Bu ihmal, dinamik denklemlerin basitleşmesine neden olurken diğer yandan kapalı çevrimli moment kontrolünde hassasiyetin düşmesine yolaçar. Bu olumsuzluklara neden olan ihmallerin Newton-Euler ve Recursive Lagrange yöntemlerinde yapılmaması kapalı çevrimli moment kontrolünde bu yöntemlerin kullanılmasını yaygınlaştırmıştır.

Bu çalışmada, esnek robot kolun hareket sonunda uç noktasında oluşan artık titreşimleri minimum yapacak mafsallık momentlerinin bulunmasında kullanılan dinamik denklemler sistematik olması açısından Lagrange denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Optimum mafsallık değişkenlerinin bulunması için zorunlu olarak yapılması gereken ters dinamik analizde de, hareket denklemlerindeki elastik yerdeğiştirmeden ve Coriolis ivmesinden kaynaklanan etkiler, yukarıda anlatılan nedenlerden dolayı ihmal edilmiştir.

BÖLÜM 4

ESNEK ROBOT KOL MODELLEMESİ

4.1 Giriş

Bir robotun çalışma uzayında herhangi bir cismin konum ve duruşunu değiştirebilmesi için en az altı serbestlik derecesine sahip olması gerekir. Özellikle, montaj ve taşıma işlerinde kullanılan robot kolların uç noktasında bulunan elemanlarının tutma ve bırakma hareketleri de, bir serbestlik derecesi olarak kabul edilirse, pratikte robotların genel olarak yedi serbestlik dereceli mekanizmalar olduğu söylenebilir. Fakat, değişik amaçlar için yediden fazla serbestlik derecesine sahip robotlarda yapılmıştır ve bu tip robotlara aşırı serbestlik dereceli robotlar denir.

Döner mafsallara sahip bir robot, genel olarak kendi ekseninde dönen bir gövde ve bu gövdeye dik bir düzlem içinde birbirine bağlı olarak hareket eden iki uzva sahiptir. Gövde ve iki uzuv robotun uç noktasının istenen bir konuma gelmesini sağlar. Uç noktada bulunan ve uzuvlara nisbeten küçük bir hacim kaplayan tutucu ise, sahip olduğu üç dönme eksenleriyle cismin duruşunu belirler. Yapılan çalışmalarda, robot kolların modellenmesinde kolaylık olması amacıyla tutucu, uzuvların ucuna yerleştirilmiş yığılmış bir kütle gibi düşünülerek serbestlik derecesi altıdan üçe indirilir. Aynı yığılmış kütle yaklaşımı, servomotor kütleleri içinde de uygulanır. Böylece herbir servomotor tahrik ettiği uzvun bağlı bulunduğu bir önceki uzvun ucuna yerleştirilmiş yığılı bir kütle gibi düşünülür.

Bu çalışmadaki örnek problem, yukarıda belirtilen kabuller altında modellenecek ve hareket ettirilen cismin duruşunu belirleyen uç noktadaki üç dönme ile gövdenin kendi eksenindeki dönme hareketi, robotun dinamik denklemlerinin sadeliği açısından hesaba katılmayacaktır. Böylece robot kol iki serbestlik dereceli olarak modellenecek ve esnek robot kolun sadece düşey bir düzlem içinde çalıştığı kabul edilecektir. Bütün bu basitleştirme ve ihmallere rağmen, esnek robot kolun hareket denklemleri oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir.

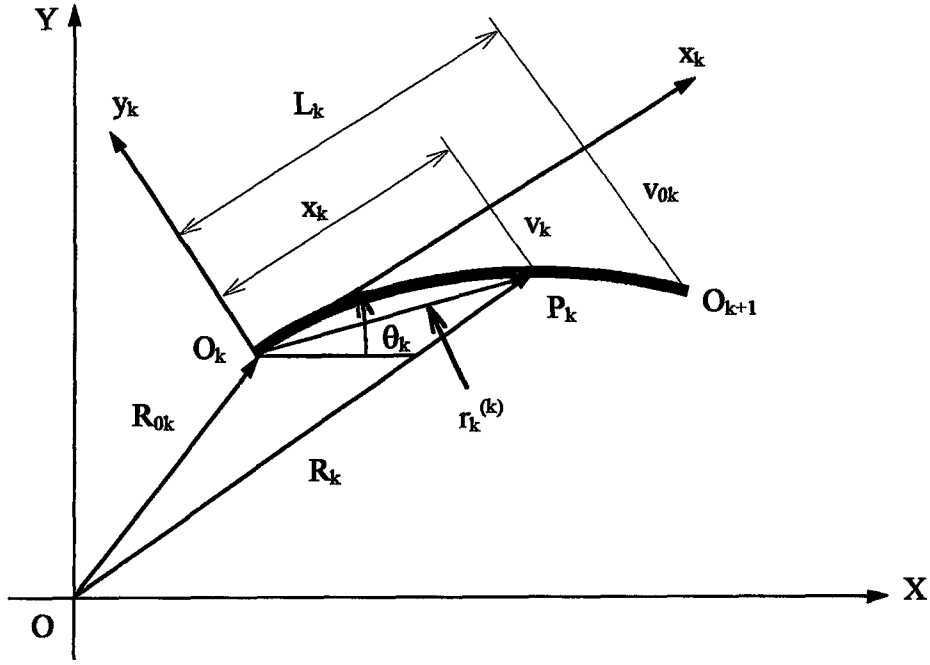
Dolayısıyla yapılan basitleştirme ve ihmallerin ne kadar gerekli olduğu, ileriki bölümlerde daha iyi anlaşılacaktır.

4.2 Koordinat Sistemleri

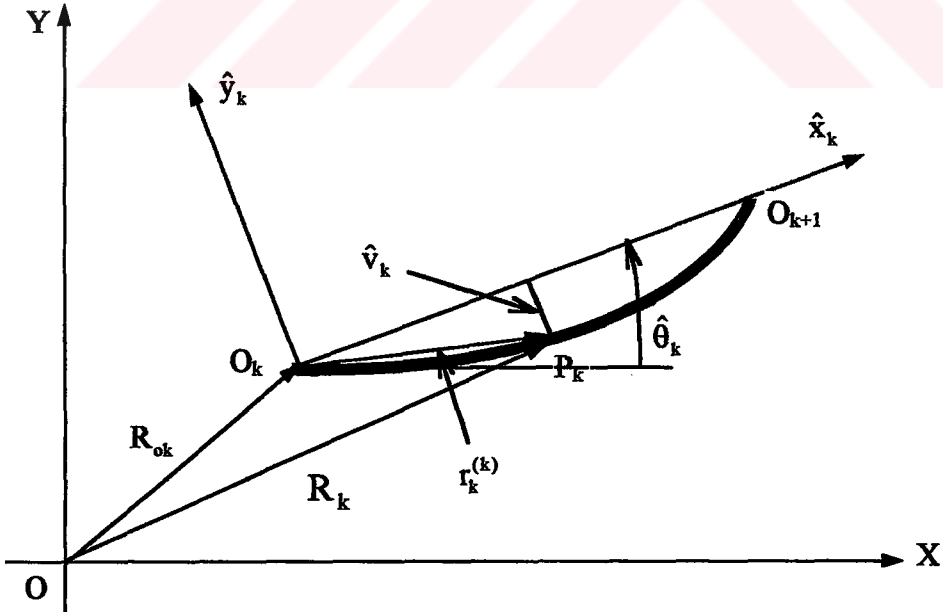
Robotun herhangi bir noktasının konum ve duruşunu belirlemeye yarayan sistemlere koordinat sistemi veya koordinat takımı denir. Robot uygulamalarında sabit ve hareketli olmak üzere iki tip koordinat takımı vardır. Sabit koordinat takımı robotun dışında referans teşkil edecek bir noktaya yerleştirilen koordinat takımına denir. Hareketli koordinat takımı ise, robot uzuvlarının herbir mafsala, dönme eksenini veya öteleme doğrultusu z yönünde olacak şekilde sağ el kuralına göre atanan koordinat takımlarına denir.

Rijit robot kolların referans koordinat takımlarına göre konum ve duruşları, mafsallara atanan hareketli koordinat takımlarının birbirine göre Bölüm 2’ de anlatılan dönme ve öteleme bağıntıları kullanılarak, kolayca bulunabilir. Esnek robot kollarında ise, herhangi bir noktanın konum ve duruşunu, referans veya temel koordinat takımı olarak adlandırılan koordinat takımlarına göre belirlemek için, tangent ve VLCS (Virtual Link Coordinate System) olarak adlandırılan iki koordinat takımı kullanılır. Bu koordinat takımları esnek uzuvlardaki elastik yerdeğiştirmelerin tanımlanmasında kullanılır.

Şekil 4.1’ de görüldüğü gibi, tangent koordinat takımının z eksenini dönme doğrultusunda, x eksenini ise robot uzvu boyunca ve mafsallara teğet olacak şekilde yerleştirilir. VLCS’ de ise, Şekil 4.2’ deki gibi koordinat takımının yerleştirilmesi, tangent koordinat takımındaki düşünceyle yapılır. Ancak x ekseninin doğrultusu, esnek uzvun şekil değiştirmiş durumdaki uç noktasından geçecek şekilde yerleştirilir. x ekseninin esnek uzvun uç noktasından geçecek şekilde yerleştirilmesi hareket denklemlerindeki şekil fonksiyonlarının uç noktadaki değerlerinin sıfır alınmasını sağlayacaktır. Böylece denklemler çok büyük ölçüde basitleşecektir. İleriki bölümlerde, anlatılacağı gibi bu basitleştirme VLCS’ nin esnek robot kolların modellenmesinde tercih edilmesinin en önemli sebebidir.



Şekil 4.1 Esnek bir robot uzvuna tangent koordinat takımının yerleştirilmesi.

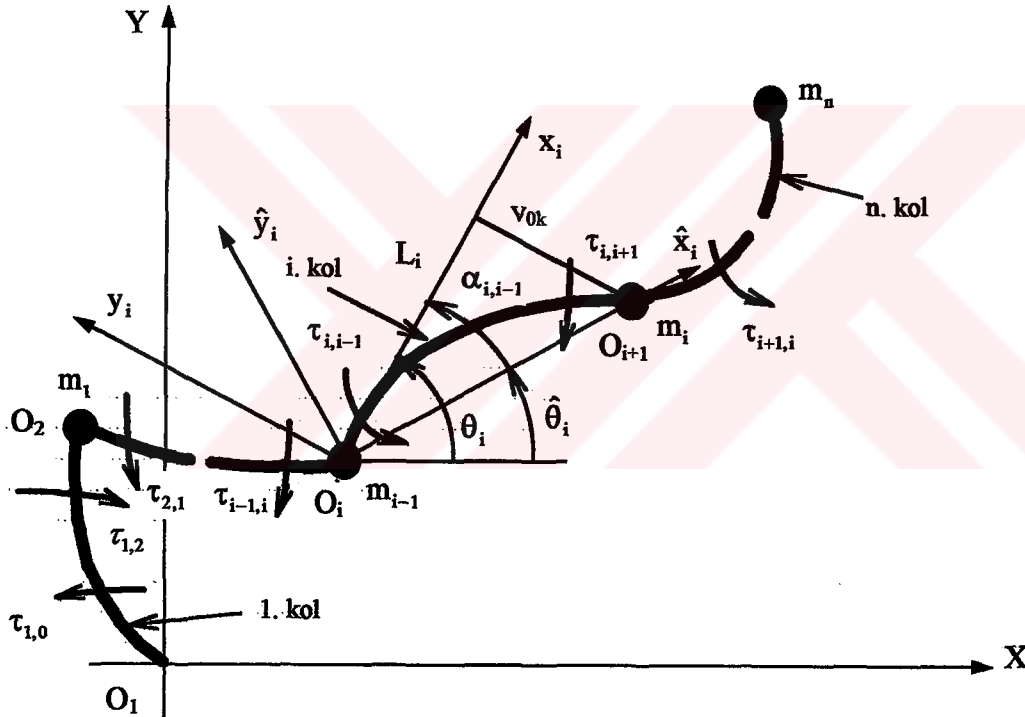


Şekil 4.2 Esnek bir robot uzvuna VLCS 'in yerleştirilmesi.

4.3 Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Yukarıda anlatıldığı üzere, esnek kolun düşey bir düzlem içinde hareket ettiği kabul edildiğinden, esnek uzuvda sadece düşey yönde yer değiştirmeler meydana gelecektir. n adet esnek uzva sahip bir robotun dinamik denklemleri Asada'nın (1990) izlediği yöntem kullanılarak kapalı bir formda çıkarılacaktır. Fakat örnek optimizasyon problemi için iki esnek uzvu robotun dinamik denklemleri Bölüm 6'de elde edilecektir.

Formülasyona esas alınacak n adet esnek uzvu düzlemsel hareket yapan robot Şekil 4.3'de gösterildiği gibidir.



Şekil 4.3 n adet esnek uzva sahip düzlemsel bir robot kolun şematik gösterimi.

Şekil 4.1'de herhangi bir k . esnek uzvun şekil değiştirmiş serbest cisim diyagramından yararlanarak, hareket denklemleri şu şekilde çıkarılır. İlk önce k . esnek uzvun O_k mafsall noktasına, (x_k, y_k) koordinat takımı atanır. (x_k, y_k) koordinat takımının, x_k eksenini doğrultusu

O_k noktasında esnek uzva teğet olacak şekilde yerleştirilir. Bu (x_k, y_k) koordinat takımı tangent koordinat takımı olarak adlandırılır. Tangent koordinat takımının (X, Y) referans koordinat takımına göre yapmış olduğu dönme θ_k ile gösterilsin.

Şekil 4.1'deki k . esnek uzuv üzerinde bir P_k noktası alalım. Bu P_k noktası ile referans koordinat takımının orijini birleştiren R_k 'ya, konum vektörü denir. Aynı P_k noktasının bağlı bulunduğu tangent koordinat takımına göre konumu $r_k^{(k)} = [x_k, v_k]^T$ ile gösterilir. Burada, x_k bileşeni P_k noktasının (x_k, y_k) koordinat takımındaki x_k eksenini doğrultusundaki, v_k ise y_k eksenini doğrultusundaki izdüşümüdür. Bu açıklamalar ışığında aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$R_k = R_{ok} + C_{k-1}^k r_k^{(k)} \quad (4.1)$$

Burada,

$$C_{k-1}^k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

dir. i . tangent koordinat takımından $(i+1)$. mafsallın koordinatı $(i < k)$ olmak şartı ile $r_i^{(k)} = [L_i, v_{oi}]^T$ şeklinde yazılır. Buradan, R_{ok} konum vektörü aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$R_{ok} = \sum_{i=1}^{k-1} C_{i-1}^i r_i^{(k)} \quad (4.3)$$

(4.1) ifadesiyle verilen R_k zamana göre bir kez türetilirse

$$\dot{R}_k = \sum_{i=1}^k C_{i-1}^i [\dot{r}_i^{(k)} + D r_i^{(k)} \dot{\theta}_i] \quad (4.4)$$

Böylece, P_k noktasının referans koordinat takımına göre hız vektörü elde edilir. Burada, D , 2×2 boyutunda bir matristir. Öyleki,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Yeteri kadar ince n adet esnek uzva sahip bir robotun kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\int_0^{L_k} \rho_k A_k \dot{R}_k^T \dot{R}_k dx + m_k \dot{R}_k^T \dot{R}_k \right] \quad (4.6)$$

Burada, ρ_k ve A_k sırasıyla k. uzvun yoğunluğu ve kesit alanıdır. Kinetik enerji ifadesi görüldüğü gibi iki parçadan oluşmuştur. Birinci parça kolların yayılmış kütlelerinden ikinci parça ise mafsallara yerleştirilmiş servomotor kütleleri ile robot kounl ucunda taşınan yükten kaynaklanan kinetik enerji ifadesini kapsar.

Benzer şekilde, n adet esnek uzvun sahip olduğu potansiyel enerji ifadeside şu şekilde yazılabilir.

$$P = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_0^{L_k} E_k I_k \left[\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} \right]^2 dx_k \right\} \quad (4.7)$$

v_k k. esnek uzvun üzerindeki herhangi bir noktanın yerdeğiştirmesini ifade eder. v_k yerdeğiştirmesi, Rayleigh-Ritz metodu kullanılarak q_{kp} genelleştirilmiş koordinatın serisine açılırsa, aşağıdaki formu alır.

$$v_k = \sum_{p=1}^{m_k} \phi_{kp} q_{kp} \quad (4.8)$$

Burada, $\phi_{kp}(x_k)$ 'ya şekil fonksiyonu denir ve $p=1, \dots, m_k$ dir. Bu k. esnek uzvun geometrik sınır şartlarını sağlayan bir fonksiyondur.

Lagrange fonksiyonu $L = K - P$, (4.6) ve (4.7) denklemlerinden aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{p=1}^{m_i} \sum_{r=1}^{m_j} \left[\Pi_{ijpr} (\dot{q}_{ip} \dot{q}_{jr} \cos \theta_{ij} - 2 q_{ip} \dot{q}_{jr} \dot{\theta}_i \sin \theta_{ij}) + (\Pi_{ijpr} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos \theta_{ij} - k_{ipr} \delta_{ij}) q_{ip} q_{jr} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sum_{p=1}^{m_j} T_{ijp} (\dot{\theta}_j \dot{q}_{ip} \cos \theta_{ij} - \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j q_{ip} \sin \theta_{ij}) + X_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos \theta_{ij} \right\} \right\} \quad (4.9)$$

Burada,

$$\Pi_{ijpr} = \begin{cases} e_{ip} + M_i \phi_{ip}(L_i) \phi_{jr}(L_j) & i > j \\ m_{ipr} + M_i \phi_{ip}(L_i) \phi_{ir}(L_i) & i = j \\ \phi_{ip}(L_i) (e_{jr} + M_j \phi_{jr}(L_j)) & i < j \end{cases} \quad (4.10)$$

$$T_{ijp} = \begin{cases} (e_{ip} + M_i \phi_{ip}(L_i)) L_j & i > j \\ s_{ip} + M_i L_i \phi_{ip}(L_i) & i = j \\ \phi_{ip}(L_i) (a_j + M_j L_j) & i < j \end{cases} \quad (4.11)$$

$$X_{ij} = \begin{cases} (a_i + M_i L_i) L_j & i > j \\ I_i + M_i L_i^2 & i = j \\ L_i (a_j + M_j L_j) & i < j \end{cases} \quad (4.12)$$

$$m_{ipr} = \int_0^{L_i} \rho_i A_i \phi_{ip} \phi_{ir} dx_i + m_i \phi_{ip} \phi_{ir}$$

$$k_{ipr} = \int_0^{L_i} E_i I_i \frac{d^2 \phi_{ip}}{dx_i^2} \frac{d^2 \phi_{ir}}{dx_i^2} dx_i$$

$$s_{ip} = \int_0^{L_i} \rho_i A_i x_i \phi_{ip} dx_i + m_i L_i \phi_{ip}$$

$$e_{ip} = \int_0^{L_i} \rho_i A_i \phi_{ip} dx_i + m_i \phi_{ip} \quad (4.13)$$

$$I_i = \int_0^{L_i} \rho_i A_i x_i^2 dx_i + m_i L_i^2$$

$$a_i = \int_0^{L_i} \rho_i A_i x_i dx_i + m_i L_i$$

$$M_i = \sum_{k=i+1}^n \left(\int_0^{L_i} \rho_k A_k dx_k + m_k \right) \quad \theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$$

dir. (4.9) ifadesi aşağıdaki Lagrange denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = Q_i \quad (4.14)$$

Burada, $p_i = [\theta_i, q_i]^T$ genelleştirilmiş koordinatları, $Q_i = [f_{\theta_i}, f_{q_i}]^T$ ise genelleştirilmiş kuvvetleri gösterir.

Dikkat edilirse, bu denklemlerin çözümü için uzuvların elastik yerdeğiştirmesinin bilinmesi gerekir. Uzuvların elastik yerdeğiştirmesinin bulunması işleminden önce ters dinamik probleminin çözülmesi zorunludur. Bunun için, aşağıdaki denklemdeki, elastik yerdeğiştirmelerden kaynaklanan terimler ihmal edilerek, elastik yerdeğiştirmeleri ifade eden denklemlerde kullanılacak olan mafsal momentleri hesaplanır.

$$\sum_{j=i}^n (H_{ij} \ddot{\theta}_{ij} + A_{ij} \dot{\theta}_j^2 + B_{ij} \dot{\theta}_j + G_{ij}) = f_{\theta_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.15)$$

(4.9) denkleminde elastik yerdeğiştirmeleri veren denklemler de, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n \sum_{r=1}^{m_i} \left\{ \Pi_{ijpr} (\ddot{q}_{jr} \cos \theta_{ij} + 2 \dot{\theta}_j \dot{q}_{jr} \sin \theta_{ij}) + [k_{ipr} \delta_{ij} - \Pi_{ijpr} (\dot{\theta}_j^2 \cos \theta_{ij} - \ddot{\theta}_j \sin \theta_{ij})] q_{jr} \right\} \\ - \sum_{j=i}^n T_{ijp} (\ddot{\theta}_j \cos \theta_{ij} - \dot{\theta}_j^2 \sin \theta_{ij}) = f_{q_{ip}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$(p = 1,2,\dots,m_i; i = 1,2,\dots,n)$$

Burada,

Şekil 4.4’de, esnek bir uzuv üzerindeki bir noktanın konum vektörünün çıkarılması için VLCS ile tangent koordinat takımları arasındaki geometrik ilişki gösterilmiştir.

Burada, (x, y) tangent koordinat takımı ile $(\hat{x}, \hat{y})$ VLCS koordinat takımları arasındaki açı $\alpha_{i,i-1}$ ile gösterilir. θ_i ve $\hat{\theta}_i$ mafsallarda yer değiştirmeleri arasındaki ilişki ise,

$$\theta_i = \hat{\theta}_i + \alpha_{i,i-1} \quad (4.21)$$

şeklinde verilir. İki koordinat takımı arasındaki koordinat dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{i,i-1} & -\sin \alpha_{i,i-1} \\ \sin \alpha_{i,i-1} & \cos \alpha_{i,i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{v}_i \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Burada, $\hat{x}_i$ ve $\hat{v}_i$ i’inci esnek uzuv üzerindeki herhangi bir noktanın VLCS’deki bileşenleri olup, bu noktanın tangent koordinat sistemindeki karşılıkları x_i ve v_i dir. $\alpha_{i,i-1}$ açısı çok küçük ise (4.22) denklemi aşağıdaki şekle indirgenebilir.

$$\hat{x}_i = x_i \quad (4.23)$$

$$\hat{v}_i = v_i - x_i \alpha_{i,i-1} = v_i - v_i \Big|_{x_i=L_i} \frac{x_i}{L_i} \quad (4.24)$$

(4.8) denklemi, (4.24) denkleminde yerine konulursa,

$$\hat{v}_i = \sum_{p=1}^{m_i} \hat{\phi}_{ip} q_{ip} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.25)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\hat{\phi}_{ip} = \phi_{ip} - \phi_{ip}(L_i) \frac{x_i}{L_i} \quad (4.26)$$

dir. Yeni şekil fonksiyonu ve koordinat dönüşümleri kullanılarak, potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri yeni koordinat takımında yazılır. Esnek robot kolun, VLCS'deki hareket denklemleri, daha önce yapıldığı gibi Lagrange denklemleri kullanılarak çıkarılır. VLCS'inde elde edilen yeni şekil fonksiyonu, tangent koordinat takımındaki şekil fonksiyonundan daha basittir. Yeni koordinat takımında her bir uzvun iki ucuda basit mesnetlidir. VLCS'deki şekil fonksiyonlarının aşağıda verilen sınır şartları kullanılarak,

$$\hat{\phi}_{ip}(0) = 0, \quad \hat{\phi}_{ip}(L_i) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n; p=1,2,\dots,m_i) \quad (4.27)$$

(4.10) ve (4.11) bağıntıları aşağıdaki şekikde basitleşir.

$$\hat{\Pi}_{ijpr} = \hat{m}_{ipr} \delta_{ij} \quad (4.28)$$

$$\hat{T}_{ijp} = \begin{cases} \hat{e}_{ip} L_i & i > j \\ \hat{s}_{ip} & i = j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad (4.29)$$

Yukarıdaki bağıntılar kullanılarak basitleşen dinamik denklemler aşağıdaki şekili alır.

$$\sum_{j=1}^n \left(\hat{H}_{ij} \ddot{\theta}_j + \hat{A}_{ij} \dot{\theta}_j^2 + \hat{B}_{ij} \dot{\theta}_j + \hat{G}_{ij} \right) = \hat{f}_{\theta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.30)$$

$$\sum_{r=1}^{m_i} \left[\hat{m}_{ipr} \ddot{q}_{ir} + \left(\hat{k}_{ipr} - \hat{m}_{ipr} \dot{\theta}_i^2 \right) \hat{q}_{ir} \right] - \sum_{j=1}^i \hat{T}_{ijp} \left(\ddot{\theta}_j \cos \hat{\theta}_{ij} + \dot{\theta}_j^2 \sin \hat{\theta}_{ij} \right) = \hat{f}_{q_{ip}} \quad (p = 1, 2, \dots, m_i; i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.31)$$

Burada,

$$\hat{H}_{ij} = \sum_{p=1}^{m_i} \sum_{r=1}^{m_j} \hat{m}_{ipr} \hat{q}_{ip} \hat{q}_{jr} \delta_{ij} + \sum_{p=1}^{m_j} \hat{T}_{ijp} \hat{q}_{ip} \sin \hat{\theta}_{ij} - \sum_{r=1}^{m_j} \hat{T}_{jir} \hat{q}_{jr} \sin \hat{\theta}_{ij} + X_{ij} \cos \hat{\theta}_{ij} \quad (4.32)$$

$$\hat{A}_{ij} = \sum_{p=1}^{m_i} \hat{T}_{ip} \hat{q}_{ip} \cos \hat{\theta}_{ij} - \sum_{r=1}^{m_j} \hat{T}_{jr} \hat{q}_{jr} \cos \hat{\theta}_{ij} + X_{ij} \sin \hat{\theta}_{ij} \quad (4.33)$$

$$\hat{B}_{ij} = 2 \left(\sum_{p=1}^{m_i} \sum_{r=1}^{m_j} \hat{m}_{ipr} \hat{q}_{ip} \dot{\hat{q}}_{jr} \delta_{ij} - \sum_{r=1}^{m_j} \hat{T}_{jr} \dot{\hat{q}}_{jr} \sin \hat{\theta}_{ij} \right) \quad (4.34)$$

$$\hat{G}_{ij} = - \sum_{r=1}^{m_j} \hat{T}_{jr} \ddot{\hat{q}}_{jr} \cos \hat{\theta}_{ij} \quad (4.35)$$

ve,

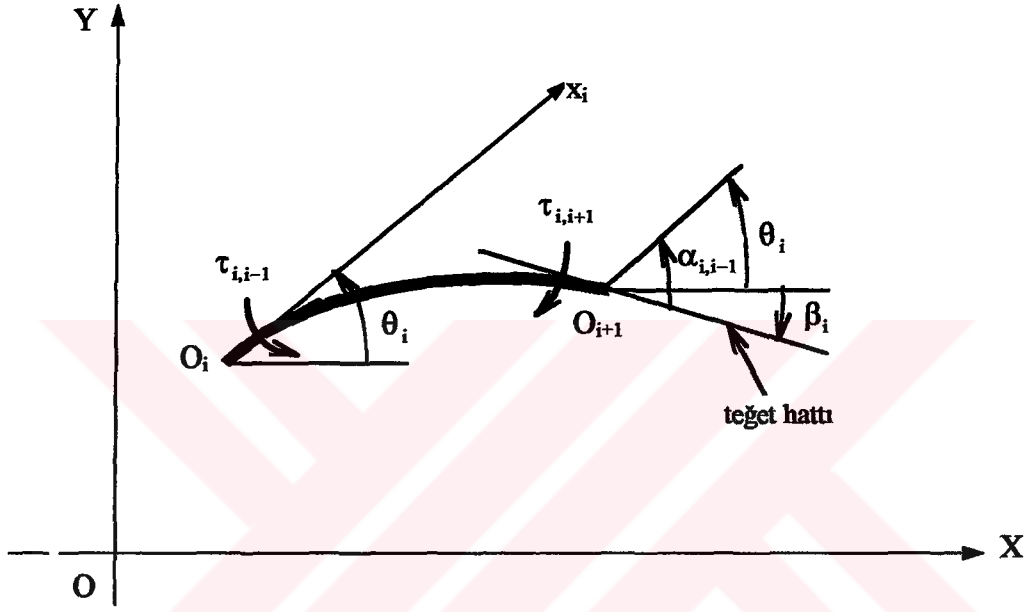
$$\begin{aligned} \hat{m}_{ipr} &= \int_0^{L_i} \rho_i A_i \hat{\phi}_{ip} \hat{\phi}_{ir} d\hat{x}_i & \hat{k}_{ipr} &= \int_0^{L_i} E_i I_i \frac{d^2 \hat{\phi}_{ip}}{d\hat{x}_i^2} \frac{d^2 \hat{\phi}_{ir}}{d\hat{x}_i^2} d\hat{x}_i \\ \hat{s}_{ip} &= \int_0^{L_i} \rho_i A_i \hat{x}_i \hat{\phi}_{ip} d\hat{x}_i & \hat{e}_{ip} &= \int_0^{L_i} \rho_i A_i \hat{\phi}_{ip} d\hat{x}_i \\ \hat{m}_{ipr} &= \hat{m}_{ip} \delta_{pr} & \hat{k}_{ipr} &= \hat{k}_{ip} \delta_{pr} \\ \hat{m}_{ip} &= \int_0^{L_i} \rho_i A_i \hat{\phi}_{ip}^2 d\hat{x}_i & \hat{k}_{ip} &= \int_0^{L_i} E_i I_i \left(\frac{d^2 \hat{\phi}_{ip}}{d\hat{x}_i^2} \right)^2 d\hat{x}_i \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.5 Servomotor Momentleri ve Genelleştirilmiş Kuvvetler

Robot kolların genelleştirilmiş kuvvetleri, servomotorlarca üretilir ve bu kuvvetler dinamik denklemlerin içindedir. Bu bölümde, genelleştirilmiş kuvvetler servomotor momentlerinin fonksiyonu olarak çıkarılacaktır. Genelleştirilmiş kuvvetler ile servomotor momentleri arasındaki ilişki, transmisyon mekanizması ve servomotorun yerine bağlıdır.

Bu çalışmada, servomotorların herbirinin bir mafsala yerleştirildiği ve bir sonraki uzvu tahrik ettiği kabul edildi. Şekil 4.5’de görüldüğü gibi, iki servomotor i . uzvun her iki ucuna yerleştirilmiş ve üretilen momentler $\tau_{i,i-1}^*$ ve $\tau_{i,i+1}^*$ ile gösterilmiştir. Burada birinci indis momentin uygulandığı, ikinci indis ise momentin üretildiği uzvu gösterir.

VLCS’de genelleştirilmiş kuvvetleri çıkarmak için, servomotor momentleri tarafından üretilen virtual işler gözönüne alınmalıdır.



Şekil 4.5 VLCS’ de esnek bir uzva etkiyen servomotor momentlerinin gösterimi.

$$\delta W_i = \tau_{i,i-1}^* \delta \theta_i + \tau_{i,i+1}^* \delta \beta_i \quad (4.37)$$

Burada, β_i O_{i+1} ’de i . uzvun tangent açısıdır.

$$\beta_i = \theta_i - \alpha_{i,i+1} \quad (4.38)$$

$$\alpha_{i,i+1} = \frac{\partial v_i(L_i)}{\partial x_i} \quad (4.39)$$

dir. Etki tepki prensibine göre, $\tau_{i,i+1}^* = -\tau_{i+1,i}^*$ yazılabilir. Buradan (4.38) ve (4.39) bağıntıları (4.37) denkleminde yerine konulursa, (4.37) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\delta W = (\tau_{i,i-1}^* + \tau_{i,i+1}^*)\delta\theta_i - \tau_{i,i+1}^* \delta \left(\frac{\partial v_i(L_i)}{\partial x_i} \right) \quad (4.40)$$

Bütün servomotorların, n adet esnek uzva sahip bir robot kolun üzerine yaptığı toplam virtüel iş,

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_{i,i-1}^* - \tau_{i+1,i}^*)\delta\theta_i + \tau_{n,n-1}^*\delta\theta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{m_j} [\phi'_{ip}(L_i)\tau_{i+1,i}] \delta q_{ip} \quad (4.41)$$

Virtüel iş için yukarıdaki açılım, VLCS koordinat takımı yerine tangent koordinat takımında genelleştirilmiş koordinatların terimleri ile ifade edilmiştir. Bir önceki bölümde, VLCS ile tangent koordinat takımı arasında çıkarılmış olan dönüşüm bağıntıları kullanılarak, virtüel iş ifadesi VLCS'de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \delta W = & \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_{i,i-1}^* - \tau_{i+1,i}^*)\delta\hat{\theta}_i + \tau_{n,n-1}^*\delta\theta_n \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{m_j} [\hat{\phi}'_{ip}(0)\tau_{i,i-1} - \hat{\phi}'_{ip}(L_i)\tau_{i+1,i}] \delta\hat{q}_{ip} - \sum_{p=1}^{m_n} \hat{\phi}'_{np}(0)\tau_{n,n-1} \delta\hat{q}_{np} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Buradan, genelleştirilmiş kuvvetler ile $\hat{\theta}_i$ genelleştirilmiş koordinatları arasındaki ilişki bulunabilir.

$$\hat{f}_{\theta_i} = \tau_{i,i-1}^* - \tau_{i+1,i}^* \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (4.43)$$

$$\hat{f}_{\theta_n} = \tau_{n,n-1}^* \quad (4.44)$$

$\hat{q}_{ip}$ için genelleştirilmiş kuvvetler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{f}_{q_{ip}} = -\hat{\phi}'_{ip}(0)\tau_{i,i-1}^* + \hat{\phi}'_{ip}(L_i)\tau_{i+1,i}^* \quad (p=1,\dots,m; i=1,\dots,n) \quad (4.45)$$

$$\hat{f}_{q_{np}} = -\hat{\phi}'_{np}(0)\tau_{n,n-1}^* \quad (p=1,\dots,m_n) \quad (4.46)$$



BÖLÜM 5

OPTİMİZASYON PROBLEMİ FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

5.1 Geometrik Sınırlamalar

Robot kollar, çalışma uzayı olarak adlandırılan bir hacim içinde hareket ederler. Doğal olarak bu hareketler, bütün mekanizmalarda olduğu gibi tamamen serbest olmayıp, robot kollarının boyutlarına ve hareket sahasına bağlıdır. Ayrıca, çalışma uzayı içindeki sabit veya hareketli cisimler de, robot kol hareketlerini sınırlayan diğer önemli bir faktördür. Robot kolun hareketini sınırlayan bu tür kısıtlara geometrik sınırlamalar denir.

Burada, n uzuv sayısını göstermek üzere ($i, j=1,2,\dots,n$ ve $i \neq j$) için ve V_i i . uzvun, V_j j . uzvun çalışma uzayı içinde kapladığı noktalar kümesi veya diğer bir ifade ile uzuvların kapladığı hacim olduğuna göre,

$$V_i(\theta, q) \cap V_j(\theta, q) = \{\emptyset\} \quad (5.1)$$

olmalıdır. Başka bir ifadeyle, uzuvlar çalışma esnasında birbirine çarpmamalıdır. Bunun haricinde, diğer bir geometrik sınırlamada, robotun herhangi bir uzvunun çalışma sırasında sabit veya hareketli engellere çarpmaması gerekir.

$$V_i(\theta, q) \cap H_k(t) = \{\emptyset\} \quad i=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,o \quad (5.2)$$

Burada, H_k hareketli veya sabit engellerin kapladığı hacimi gösterir.

5.2 Dinamik Sınırlamalar

Robot kolların hareketi, geometrik sınırlamaların haricinde, bir de robot kol hareketlerini gerçekleştiren servomotorların, kapasitelerine bağlı olan bazı değerleri aşmayacak şekilde

tasarlanmalıdır. Aşılması gereken bu değerlere dinamik sınırlamalar denir. Esas itibariyle iki farklı türden servomotor dinamik sınırlamasından söz edilebilir.

5.2.1 Nokta Sınırlamalar

Servomotorların zamana bağlı ani değerleri üzerindeki sınırlamalardır. Örneğin elektrik servomotorların besleme gerilimi, hidrolik silindirlerde üst basınç, nokta tipi sınırlamalara örnek olarak gösterilebilir. Herbir servomotorda, hareketin hiçbir anında aşılması gereken üst sınır olarak tanımlanır. Genel olarak,

$$a_i = \max |w_i(t)| - W_i \leq 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.3)$$

Şeklinde ifade edilebilir. Burada, $w_i(t)$ i. servomotorun nokta tipi sınırlama fonksiyonu, W_i ise, bu fonksiyonun müsaade edilen maksimum değerini gösteren sabit bir değerdir.

5.2.2 Ortalama Sınırlamalar

Servomotorların zamana bağlı büyüklüklerinin, hareket süresi içinde zaman ortalamalarının üzerindeki sınırlamalardır. Örneğin, Robotların uzun süre çalışması sonunda motor sargılarında meydana gelen ısınma ile ilgili sınırlamalar bu sınıfa girer. Genel olarak,

$$b_i = \frac{1}{T} \int_0^T z_i(t) dt - Z_i \leq 0 \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $z_i(t)$ i. servomotorun ortalama sınırlama fonksiyonu, Z_i ise, bu fonksiyonun müsaade edilen maksimum değeridir.

Robot uzuvlarını tahrik eden servomotorların dinamik sınırlamalarını en genel halde,

$$u_j(\theta, q) \leq 0 \quad j=1,2,\dots,s \quad (5.5)$$

biçiminde gösterebiliriz. Daha sonraki bölümlerde anlatılacak olan avantajlarından dolayı robot kolun tahriğinde, genellikle elektrik servomotorlar tercih edilmektedir. Elektrik servomotorlarında, sargı akımı nokta tipi sınırlamaya, besleme gerilimi ve sargılardaki ısınma da ortalama tipi sınırlama sınıfına girer. Ancak, optimum hareket sentezi probleminde sargı ısınması sınırlamasının hesaba katılmaması, problemin basitleşmesine katkıda bulunacağından yapılan çalışmalarda ihmal edilmiştir. Bu durumda, herbir servomotor için bir adet nokta ve bir adette ortalama tipi sınırlama olmak üzere iki adet sınırlama gözönüne alınacaktır.

5.3 Optimum Hareketin Sınır Şartları

Robot kolları görevlerini iki nokta arasında hareket ederek yaparlar. Bu hareketlerinin başlangıç ve son konumlarına kolların sınır *şartları* denir, ve

$$\left. \frac{d^{k-1}\theta_i}{dt^{k-1}} \right|_{t=0} = c_{i,k} \quad i=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,m \quad (5.6)$$

$$\left. \frac{d^{l-1}\theta_i}{dt^{l-1}} \right|_{t=T} = d_{i,l} \quad i=1,2,\dots,n \quad l=1,2,\dots,p \quad (5.7)$$

şeklinde gösterilir. Burada, (5.6) bağıntısıyla hareketin başlangıç anındaki, mafsalsal değişkenlerinin (m-1). mertebeye kadar bütün türevlerinin verilmiş olduğunu gösterir. m=1 konum, m=2 hız, m=3 ivme değerini ifade eder. Aynı şekilde (5.7) ifadesi de, hareket sonunda mafsalsal değişkenlerinin (p-1). mertebeye kadar bütün türevlerinin verilmiş olduğunu gösterir.

Bu çalışmada, esnek robot kolunun uç titreşimleri, tıpkı mafsalsal yerdeğiştirmelerinde olduğu gibi, optimizasyon ölçütünü minimize edecek şekilde birer fonksiyonla temsil edilecektir. Uç titreşimlerini temsil eden bu fonksiyonların sınır şartları da aşağıda verilmiştir.

$$\left. \frac{d^{k-1} q_i}{dt^{k-1}} \right|_{t=0} = e_{i,k} \quad i=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,y \quad (5.8)$$

$$\left. \frac{d^{l-1} q_i}{dt^{l-1}} \right|_{t=T} = f_{i,l} \quad i=1,2,\dots,n \quad l=1,2,\dots,z \quad (5.9)$$

Burada (5.8) bağıntısıyla hareketin başlangıç anında, esnek kolun uç titreşimlerinin (y-1). mertebeye kadar bütün türevlerinin verilmiş olduğunu gösterir. y=1 konum, y=2 hız, y=3 ivme değerini ifade eder. Aynı şekilde (5.9) ifadesi de, hareket sonunda, uç titreşimlerinin (z-1). mertebeye kadar bütün türevlerinin verilmiş olduğunu gösterir.

Esnek kollu robotlar, yukarıda belirtilen bu sınırlamalar altında, optimum olarak tasarlanan $\tau^*(t)$ servomotor momentleri ile $\theta_i(t)$ mafsalları ve $q_i(t)$ titreşim hareketlerini yapmalıdır.

$$\tau^* = \tau^*(t) = [\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^*]^T \quad (5.10)$$

$$\theta = \theta(t) = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \quad (5.11)$$

$$q = q(t) = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (5.12)$$

Burada, n serbestlik dereceli robotun (5.10) servomotor tahrik moment vektörünü, (5.11) mafsalları değişkenleri vektörünü, (5.12) ise uç titreşimlerinin genelleştirilmiş koordinat vektörünü gösterir.

5.4 Optimizasyon Ölçütü

Optimum mafsalları ve uç titreşimlerini tanımlayan θ ve q fonksiyonlarının bulunması tamamen serbest olmayıp çok değişik optimizasyon ölçütlerine göre olabilir.

$$J = \int_0^T f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, q, \dot{q}, \ddot{q}) dt \quad (5.13)$$

(5.13) bağıntısı J optimizasyon ölçütünü tanımlamaktadır. Bağıntının sağ tarafındaki integrali alınan f, reel bir fonksiyon olup birden fazla ölçütü (r adet) bir araya getirecek şekilde de, düzenlenebilir. Bu amaçla,

$$f = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i \quad (5.14)$$

yazılması yeterlidir. Burada, f_i 'ler farklı ölçütlere göre yazılmış boyutsuz fonksiyonlardır. α_i 'ler ise,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \geq 0 \quad (5.15)$$

şartlarını sağlayan ağırlık katsayılarıdır.

Bu çalışmada, optimizasyon ölçütü olarak sadece servomotorların tükettiği enerji alındığından (5.13) ile verilen optimizasyon ölçütü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$J = E_{\text{Top}} = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^T f_{\theta_i}(\theta_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) dt \right] \quad (5.16)$$

Burada f_{θ_i} , i. uzvu tahrik eden i. servomotorun harcadığı gücü, E_{Top} ise bütün servomotorların hareketi gerçekleştirmek için harcayacakları toplam enerjiyi gösterir. Burada amaç (5.16) fonksiyoneli verilen bir T hareket süresi sonunda $v_i(x,t)$ titreşim hareketinin genliğini minimum yapacak optimum $\theta_i(t)$ ve $q_i(t)$ fonksiyonlarının bulunmasıdır.

5.5 Çözüm Yöntemi

5.5.1 Zamanın Boyutsuzlaştırılması

Bölüm.4’de, elde edilen (4.30) ve (4.31) hareket denklemlerinde t zaman değişkeni yerine, boyutsuz τ zaman değişkenini kullanmak, bize süre bakımından optimum mafsallık hareketlerinin bulunması için gerekli olan, ek bir denklemin elde edilmesinde yararlı olacaktır. Böylece T hareket süresinin sabit bir değer olmaktan çıkıp bağımsız bir değişken durumuna gelmesiyle, T hareket süresinin hareket denklemleri üzerindeki etkisi incelenebilecektir. Boyutsuz zaman değişkeni aşağıdaki şekilde tanımlanırsa,

$$\tau = \frac{t}{T} \quad (5.17)$$

Burada τ , boyutsuz zaman t , zaman değişkenini ve T , hareket süresini gösterir. (5.17) bağıntısında birinci ve ikinci dereceden zamana göre türev operatörleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d}{d\tau} \quad (5.18)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{T^2} \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (5.1.9)$$

Böylece (4.30) ve (4.31) hareket denklemleri, boyutsuz zamanda yazılırsa,

$$\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^n (\hat{H}_{ij} \hat{\theta}_j'' + \hat{A}_{ij} \hat{\theta}_j'^2 + \hat{B}_{ij} \hat{\theta}_j' + \hat{G}_{ij}) = \hat{f}_{\theta_i}^* \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{T^2} \sum_{r=1}^{m_i} [\hat{m}_{ipr} \hat{q}_{ir}'' + (\hat{k}_{ipr} - \hat{m}_{ipr} \hat{\theta}_i'^2) \hat{q}_{ir}] - \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^i \hat{T}_{ijp} (\hat{\theta}_j'' \cos \hat{\theta}_{ij} + \hat{\theta}_j'^2 \sin \hat{\theta}_{ij}) = \hat{f}_{q_{ip}} \quad (p = 1, 2, \dots, m_i; i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.21)$$

elde edilir. Burada “ ’ ” ve “ ” ” boyutsuz zaman τ ’ya göre birinci ve ikinci türevi gösterir.

5.5.2 Rijit ve Esnek Gövde Hareketlerinin Polinom Çözüm Kabulü

Bilindiği gibi esnek robot kolların hareketi iki kısımdan oluşur. Birincisi, rijit gövde hareketi diğer bir deyimle büyük hareket olarak adlandırılan, robotun başlangıç konumundan son konumuna giderken mafsalların yapmış olduğu yerdeğiştirmedir. İkincisi ise, bu büyük hareket sırasında, atalet etkilerinden kaynaklanan elastik yerdeğiştirmeler yani küçük harekettir. Robot kollarındaki gerçek yerdeğiştirme, bu iki hareketin toplamından oluşur.

Esnek robot kolların kapalı formda elde edilen hareket denklemleri, lineer olmayan diferansiyel denklemler olup, büyük ve küçük hareketler arasında bağlı ifadelerle sahip oldukça karmaşık denklemlerdir. Bu denklemlerin analitik yöntemlerle gerçek çözümleri elde edilemez. Bu nedenle, sayısal yöntemlerle çözümleri gerekir. Noktadan noktaya hareket problemi, bir sınır değer problemidir dolayısıyla bu problem sonlu farklar veya seriye açma yöntemlerinden biriyle çözülebilir. Bu sınır değer probleminin, optimizasyon ölçütünü minimum yapan $\theta_i(t)$ ve $q_i(t)$ fonksiyonlarının bulunması problemine indirgenmesiyle, esas problem bir parametre optimizasyon problemine dönüşür.

Literatürde seriye açma yöntemlerinden kuvvet serisi ve kuvvet serisi ile Fourier serisinin toplamı biçiminde bileşik bir seri ve spline fonksiyonlar gibi değişik seriler kullanılmaktadır. Bu çalışmada, robot kolun mafsallarındaki $\theta_i(t)$ hareketleri 5. dereceden kuvvet serisi ile sonlu bir Fourier serisinin toplamından oluşan bir seri ile gösterilmiştir. Burada Fourier serisinin sonlu olması gerçek $\theta_i(t)$ hareketinin ancak belli bir yakınsaklıkta temsil edilebildiğini gösterir. Bu açıklamalar ışığında, $\theta_i(t)$ hareketi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\theta_i(t) = \lambda_i(t) + \sigma_i(t) \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.22)$$

$$\lambda_i(t) = \sum_{j=0}^5 a_{i,j} t^j, \quad \sigma_i(t) = \sum_{j=6}^{m+p+k} a_{i,j} \cos\left[\frac{(j-5)\pi t}{T}\right] \quad (5.23)$$

Burada, herbir θ_i mafsalsal fonksiyonu $(m+p+k)$ adet bilinmeyen $a_{i,j}$ parametresine sahiptir. (5.6) ve (5.7) bağıntıları ile verilen sınır şartlarından, (5.22) eşitliği kullanılarak $(m+p)$ adet denklem elde edilir. k adet bilinmeyen parametre ise çözüm kabulüne optimizasyon amacıyla esneklik getirir. Burada k optimizasyonun derecesini gösterir ve bulunan θ_i hareketine de, k . dereceden optimum çözüm denir.

Bu çalışmada, diğer çalışmalardan farklı olarak esnek robot kolun uç titreşimleri de, optimizasyona aktif olarak katıldı. Bu nedenle, aynen θ_i mafsalsal yerdeğiştirmelerinde olduğu gibi uzuvların uç noktalarının titreşim hareketi de, bir fonksiyonla temsil edildi. Esnek robot kolun uç titreşimlerini temsil eden fonksiyon, (5.8) ve (5.9) sınır şartlarını sağlayacak şekilde aşağıdaki gibi seçildi,

$$q_i(t) = b_{i,0} \sum_{j=1}^{y+z} b_{i,j} t^{j-1} + b_{i,8} \cos(b_{i,9} t) \quad (5.24)$$

Burada, $q_i(t)$ esnek uzvun uç noktasının genelleştirilmiş koordinatıdır. Elastik yerdeğiştirme ise, $v_i(x, t)$ dir. Titreşim hareketi, sadece birinci mod için incelendiğinden,

$$v_i(x, t) = v_i(L_i, t) = \phi_i(L_i) q_i(t) \quad (5.25)$$

$$q_i(t) = q_i(t) \Big|_{x=L_i} \quad (5.26)$$

dir. $\phi_i(x)$ şekil fonksiyonudur ve esnek kolun sınır şartlarını sağlayan herhangi bir fonksiyon olabilir.

Elastik yerdeşistirmeleri temsil eden fonksiyonun, gerçek yerdeşistirmelere olan yakınlığı oramında gerçekçi bir optimizasyon yapılabilir. Fakat, elastik yerdeşistirmelerin çok sık yn değiştiren formda eğriler çizmesi, seçilecek fonksiyonun yakınsamasında büyük problem oluşturacaktır. Elastik yerdeşistirmeleri incelemek için yapılan simülasyonlarda, elastik yerdeşistirmeler mafsal moment eğrilerinin belli bir oranda küçültülmüş ve üzerine sabit genlikli peryodik hareketler bindirilmif eğrilere benzediği görülmüştür. Bu benzemeden hareketle $q_i(t)$ fonksiyonunun ilk kısmını oluşturan kuvvet serisi, mafsal eğrilerini üç noktada ve (5.6), (5.7) eşitlikleri ile verilen sınır şartlarındaki sağlayacak biçimde $(r+s+3)$. dereceden bir kuvvet serisi uyduruldu. Bu kuvvet serisi $b_{i,0}$ gibi bir optimizasyon parametresi ile çarpılarak gerçek elastik yerdeşistirmedeki ana harekete yaklaşılmaya çalışıldı.

$q_i(t)$ fonksiyonunun ikinci kısmında ise, ana harekete bindirilmif titreşim hareketi temsil edildi. Burada, $b_{i,8}$ titreşim genliğini temsil eden optimizasyon parametresi olarak alındı. $b_{i,9}$ parametresi ise titreşim hareketinin frekansını göstermektedir. $b_{i,0}$ ve $b_{i,8}$ optimizasyona tabi parametrelerdir. $b_{i,9}$ parametresinin teorik olarak hesaplanması mümkündür.

Bilindiği gibi lineer titreşim yapan bir sistemin titreşim frekansı,

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (5.27)$$

dir. Burada,

f_i : i. esnek uzvun titreşim frekansı

k_i : i. esnek uzvun hareket denkleminin rijitlik terimi

m_i : i. esnek uzvun hareket denkleminin atalet terimi dir.

Esnek robot kolunun lineer titreşim yaptığı kabul edilirse, elastik yerdeşistirmeleri tanımlamak için kullanılan fonksiyonda $b_{i,9}$ parametresi,

$$b_{i,9} = f_i \quad (5.28)$$

olarak alınabilir. Buradan, herbir uzuv için iki adet ($b_{i,0}$ ve $b_{i,8}$) parametrenin optimizasyonda kullanılması yeterli olacaktır.

5.5.3 Optimizasyon Probleminin Çözümü

(5.22) ve (5.23) çözüm kabulleri (5.17), (5.18) ve (5.19) ifadelerinden faydalananarak boyutsuz zamanın fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$\theta_i(\tau) = \lambda_i(\tau) + \sigma_i(\tau) \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.29)$$

$$\lambda_i(\tau) = \sum_{j=0}^5 T^j a_{i,j} \tau^j \quad \sigma_i(\tau) = \sum_{j=6}^{m+p+k} a_{i,j} \cos [(j-5)\pi\tau] \quad (5.30)$$

ve

$$q_i(\tau) = b_{i,0} \sum_{j=1}^{y+z+3} T^{j-1} b_{i,j} \tau^{j-1} + b_{i,8} \cos (b_{i,9} T\tau) \quad (5.31)$$

(5.29) ve (5.31) eşitlikleri (5.20) ve (5.21) denklemlerinde yerine konursa, (5.20) ve (5.21) denklemleri $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, τ , T değişkenlerinin fonksiyonu şeklinde ifade edilebilir. (5.16) optimizasyon ölçütüne, (5.20) ve (5.21) denklem takımıyla verilen boyutsuz zamanda elde edilen mafsal momentlerinin katılmasıyla, ölçüt $E_{Top} = E_{Top}(a_{i,j}, b_{i,j}, T)$ şeklinde $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, T değişkenlerinin bir fonksiyonuna dönüşür.

Problem artık bu değişkenlerin optimum değerlerinin bulunması problemine dönüşmüştür. Burada, çözüm kabulünün incelenmesinden anlaşılacağı gibi $n \times (m + p + k)$ adet $a_{i,j}$ parametrenin hesaplanması gerekecektir. (5.6) ve (5.7) sınır şartlarının (5.29) çözüm kabulünde kullanılmasıyla $a_{i,j}$ katsayıları için toplam $n \times (m + p)$ adet denklem elde edilir. Bu denklemlerden $n \times (m + p)$ adet $a_{i,j}$ katsayısı optimizasyon için serbest bırakılan

katsayılar cinsinden hesap edilir. Serbest bırakılan katsayıları diğerlerinden ayırt etmek için bu katsayılar $a_{r,s}$ şeklinde gösterilir Burada, $(r=1,2,...,n)$ ve $(s=m+p+1,m+p+2,...,m+p+k)$ dir.

(5.16) optimizasyon ölçütünü minimize edecek şekilde $(n \times k)$ adet denklemden bilinmeyen katsayılar aşağıdaki şekilde seçilebilir.

$$\frac{dE_{Top}}{da_{rs}} = \frac{\partial E_{Top}}{\partial a_{i,j}} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial a_{r,s}} = 0 \quad (5.32)$$

(5.31) çözüm kabulünün incelenmesinden anlaşılacağı gibi $n \times (y + z + 5)$ adet $b_{i,j}$ parametresinin hesaplanması gerekecektir. (5.8) ve (5.9) sınır şartlarının (5.31) çözüm kabulünde kullanılmasıyla $b_{i,j}$ katsayıları için $n \times (y + z)$ adet, ayrıca (5.31) çözüm kabulünde ana hareketi, hareket süresinin $(T/4, T/2$ ve $3T/4)$ anlarındaki mafsal moment değerlerini sağlayan $3 \times n$ adet denklemden toplam $n \times (y + z + 3)$ adet $b_{i,j}$ edilir. Serbest bırakılan katsayıları diğerlerinden ayırt etmek için bu katsayılar $b_{r,u}$ şeklinde gösterilir. Burada, $(r=1,2,...,n)$ ve $(u=1,2)$ dir.

(5.16) optimizasyon ölçütünü minimize edecek şekilde $2 \times n$ adet denklemden bilinmeyen katsayılar aşağıdaki şekilde seçilebilir.

$$\frac{dE_{Top}}{db_{r,u}} = \frac{\partial E_{Top}}{\partial b_{i,j}} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial b_{r,u}} = 0 \quad (5.33)$$

burada, $(r=1,2,...,n; u=0,8)$ dir.

Bilindiği gibi (5.16) ifadesinde hareket süresi, T optimizasyona tabi bir unsur olarak katılmıştı. Aynı şekilde T hareket süresi parametresi de (5.16) optimizasyon ölçütünü minimize edecek şekilde, aşağıdaki denklemle ifade edilir.

$$\frac{dE_{Top}}{dT} = 0 \quad (5.34)$$

Böylece, (5.32), (5.33) ve (5.34) denklemlerinden oluşan $n \times (k+2) + 1$ adet denklem takımının çözümünden, bilinmeyen $n \times (k+2) + 1$ adet parametre bulunur. Bulunan optimum parametrelerden, esnek robot kolunda minimum artık titreşim oluşturacak optimum $\theta_i(t)$ mafsall hareketleri elde edilir.

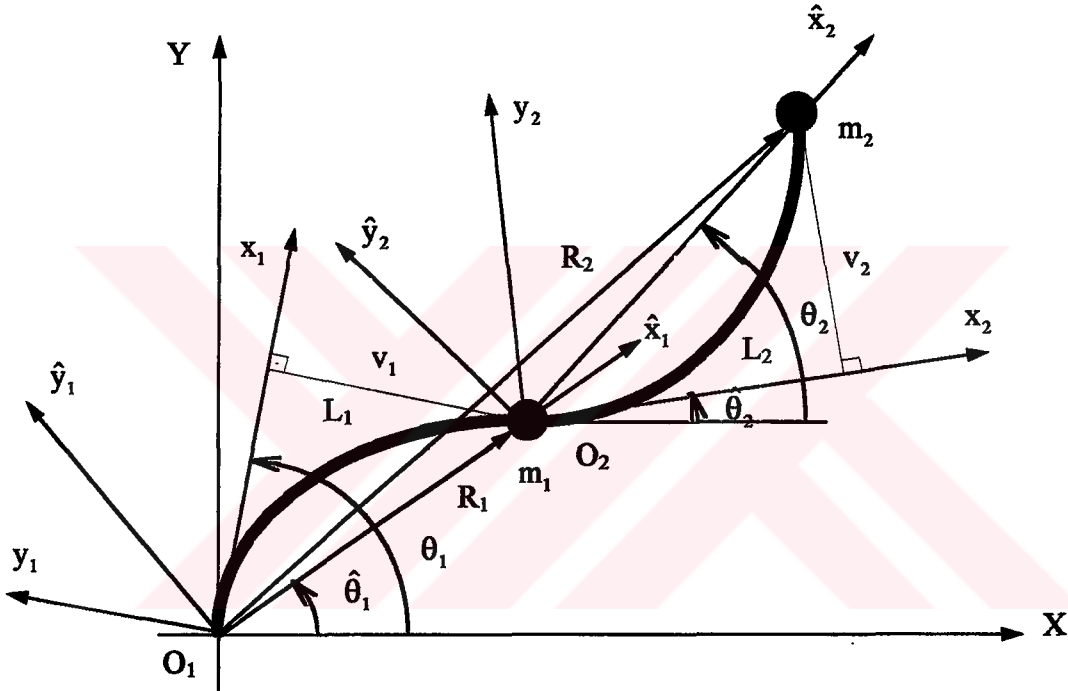


BÖLÜM 6

ÖRNEK PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

6.1 Giriş

Bu çalışmada esas alınacak iki serbestlik dereceli ve düşey bir düzlem içinde hareket eden esnek kollu robotun şematik gösterimi Şekil 6.1’de verilmiştir.



Şekil 6.1 İki serbestlik dereceli düzlemsel bir robotun elastik yerdeğişirmesinin gösterimi

(X,Y) referans koordinat takımı olup, (x_1,y_1) ile (x_2,y_2) birinci ve ikinci uzvun tangent koordinat takımıdır. Aynı şekilde, $(\hat{x}_1,\hat{y}_1)$ ile $(\hat{x}_2,\hat{y}_2)$ birinci ve ikinci uzvun VLCS’deki koordinat takımıdır. θ_1, θ_2 tangent koordinat takımında ve $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ VLCS’de uzuvların O_1X eksenine yaptığı açıyı gösterir. Uzuvların yeteri kadar ince ve sabit kesitli homojen çubuklardan yapıldığı farzedildi. m_1 ve m_2 kütleleri, mafsallara yerleştirilen servomotor kütleleri ile uç noktada tutucunun taşıdığı cisim temsil etmektedir. Mafsal sürtünmeleri ve uzuvlardaki kesit dönmeleri, dinamik denklemlerin çıkarılmasında hesaba katılmadı.

6.2 Enerji Denklemlerinin Çıkarılması

6.2.1 Kinetik ve Potansiyel Enerji İfadelerinin Çıkarılması

Şekil.6.1'deki sistemin kinetik enerji ifadesini çıkarmak için herbir uzvun konum vektörleri ve hızlarının hesaplanması gerekir. (4.4) ifadesinden, birinci uzuv üzerindeki herhangi bir noktanın hız vektörü şöyle hesaplanır.

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{C}_0^1 [\dot{\mathbf{r}}_1^{(k)} + \mathbf{D} \mathbf{r}_1^{(k)} \dot{\theta}_1] \quad (6.1)$$

Burada $\mathbf{C}_0^1$, (x_1, y_1) koordinat takımının (X, Y) koordinat takımına göre dönme matrisidir.

$$\mathbf{C}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$\mathbf{r}_1^{(k)}$, (x_1, y_1) koordinat takımında birinci uzvun üzerindeki herhangi bir noktanın konum vektörüdür.

$$\mathbf{r}_1 = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{v}_{k1}]^T \quad (6.3)$$

Konum vektörü zamana göre türetilirse, hız vektörü elde edilir.

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = [0 \quad \dot{\mathbf{v}}_{k1}]^T \quad (6.4)$$

$\mathbf{D}$, skew matris olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi 2×2 boyutunda bir matristir.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

(6.2), (6.3), (6.4) ve (6.5) ifadeleri (6.1) eşitliğinde yerine konulduğunda (6.1) eşitliği,

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \begin{bmatrix} v_{k1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - (\dot{v}_{k1} - x_1 \dot{\theta}_1) \sin \theta_1 \\ v_{k1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + (\dot{v}_{k1} - x_1 \dot{\theta}_1) \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

şeklini alır. İkinci uzvun üzerindeki herhangi bir noktanın hız vektörü için aynı işlem sırası uygulanırsa, ikinci uzvun hız vektörü için (4.4) eşitliğinden,

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = \sum_{i=1}^2 C_0^i [\dot{\mathbf{r}}_i^{(k)} + D\mathbf{r}_i^{(k)} \dot{\theta}_i] \quad (6.7)$$

şeklinde yazılır. Burada, (k) indisi uzuv üzerindeki herhangi bir noktayı gösterir. C_0^2 , (x_2, y_2) koordinat takımının (X, Y) koordinat takımına göre dönme matrisidir.

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$\mathbf{r}_2$, (x_2, y_2) koordinat takımında herhangi bir noktanın konum vektörüdür.

$$\mathbf{r}_2 = [x_{k2} \quad y_{k2}]^T \quad (6.9)$$

Konum vektörü zamana göre türetilirse hız vektörü,

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = [0 \quad \dot{v}_{k1}]^T \quad (6.10)$$

elde edilir. D skew matristir ve aynen (6.5)'teki eşitlik burada da kullanılacaktır. (6.2) ile (6.5) ve (6.8) ile (6.10) arasındaki eşitlikler (6.7)'de yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = \begin{bmatrix} v_{k1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + v_{k2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - (\dot{v}_{k1} - x_1 \dot{\theta}_1) \sin \theta_1 - (\dot{v}_{k2} - x_2 \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \\ v_{k1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + v_{k2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + (\dot{v}_{k1} - x_1 \dot{\theta}_1) \cos \theta_1 + (\dot{v}_{k2} - x_2 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

şeklinde bulunur. (6.7) ve (6.11) eşitlikleri (4.6) eşitliğinde yerine konulup ara işlemlerden sonra, sistemin toplam kinetik enerji ifadesinin açık şekli aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
K = & \frac{1}{2} \left\{ \rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \left[v_{k1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{v}_{k1}^2 - 2\dot{v}_{k1} x_1 \dot{\theta}_1 + x_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right] dx_1 + m_1 \left[v_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{v}_1^2 - 2\dot{v}_1 x_1 \dot{\theta}_1 + x_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right] \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ \rho_2 A_2 \sin \theta_{21} \int_0^{L_2} \left[-2v_{k1} \dot{v}_{k2} \dot{\theta}_1 + 2v_{k1} x_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\dot{v}_{k1} v_{k2} \dot{\theta}_2 - 2v_{k2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] dx_2 \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ \rho_2 A_2 \cos \theta_{21} \int_0^{L_2} \left[2v_{k1} v_{k2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\dot{v}_{k1} \dot{v}_{k2} - 2\dot{v}_{k1} x_2 \dot{\theta}_2 - 2\dot{v}_{k2} L_1 \dot{\theta}_1 + 2L_1 x_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] dx_2 \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ \rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \left[v_{k1}^2 \dot{\theta}_1^2 + v_{k2}^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{v}_{k1}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{v}_{k2}^2 + x_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{v}_{k1} L_1 \dot{\theta}_1 - 2\dot{v}_{k2} x_2 \dot{\theta}_2 \right] dx_2 \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ m_2 \sin \theta_{21} \left[-2v_1 \dot{v}_2 \dot{\theta}_1 + 2v_1 x_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\dot{v}_1 v_2 \dot{\theta}_2 - 2v_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ m_2 \cos \theta_{21} \left[2v_1 v_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\dot{v}_1 \dot{v}_2 - 2\dot{v}_1 x_2 \dot{\theta}_2 - 2\dot{v}_2 L_1 \dot{\theta}_1 + 2L_1 x_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] \right\} + \\
& \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[v_1^2 \dot{\theta}_1^2 + v_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{v}_1^2 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{v}_2^2 + x_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{v}_1 L_1 \dot{\theta}_1 - 2\dot{v}_2 x_2 \dot{\theta}_2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Sistemin toplam potansiyel enerji ifadesi de, (4.7) eşitliğinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$P = \frac{1}{2} \left[E_1 I_1 \int_0^{L_1} \left[\frac{\partial^2 v_{k1}}{\partial x_1^2} \right]^2 dx_1 + E_2 I_2 \int_0^{L_2} \left[\frac{\partial^2 v_{k2}}{\partial x_2^2} \right]^2 dx_2 \right] \tag{6.13}$$

(6.12) ve (6.13) ifadelerindeki v_{k1} , v_{k2} elastik yerdeğiştirmeleri bulmak için (4.8)'de verilen Rayleigh-Ritz metodu kullanıldı. Uzunların üzerindeki herbir noktanın elastik yerdeğiştirmesini hassas olarak hesaplamak için, çok sayıda modun elastik yerdeğiştirmeye olan katkısı gözönüne alınması gereklidir. Hemen anlaşılacağı gibi, mod katkılarının çok sayıda olması sistemin genelleştirilmiş koordinatlarının sayısını arttıracaktır. Dolayısıyla, böyle bir yaklaşım, hareket denklemlerinin boyutunu aşırı derecede büyütecektir.

Bu çalışmadaki örnek problemde, anlatılan mahsurları bertaraf etmek için elastik yerdeğiştirmelerin hesabında sadece birinci mod gözönüne alınmıştır. Buna rağmen hareket denklemlerinin boyutunun oldukça büyük olduğu görülmüştür. Hesaplama zamanını azaltmak amacıyla bu denklemlerin boyutunu düşürülmesi VLCS yöntemi kullanılarak gerçekleştirildi.

(6.12) ve (6.13) ifadelerinin yukarıdaki bilgiler ışığı altında,

$$v_{k1} = \phi_1(x_1) q_1 \quad \text{ve} \quad v_{k2} = \phi_2(x_2) q_2 \quad (6.14)$$

dönüşümleri kullanılarak yeniden düzenlendi.

6.2.2 Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Sistemin hareket denklemleri (4.14) formülasyonu uyarınca, (6.12) ve (6.13) ifadeleri, (4.9) eşitliğinde yerine konularak hareket denklemleri tangent koordinatlarında elde edildi.

6.2.3 VLCS Dönüşümünün Hareket Denklemlerine Uygulanması

Tangent koordinat takımından VLCS'e dönüşüm bölüm.4.4'de anlatılmıştı. Bu bölümde tangent koordinatlarında çıkarılan hareket denklemleri, (4.25) ve (4.26) eşitlikleri kullanılarak VLCS elde edildi. Daha sonra (4.27) eşitliği yardımıyla da sadeleştirildi.

Bu dönüşümde şekil fonksiyonu olarak, esnek uzvun VLCS'de sınır şartlarını sağlayan

$$\hat{\phi}_p(\hat{x}_i) = \sin\left(\frac{p\pi\hat{x}_i}{L_i}\right) \quad p=1 \quad i=1,2 \quad (6.15)$$

trigonometrik bir fonksiyon kullanıldı. Tangent koordinat takımı ile VLCS arasındaki $\alpha_{i,i-1}$ açısının çok küçük olduğu kabul edildi. Yukarıdaki kabuller altında VLCS'deki hareket denklemleri aşağıdaki şekilde elde edildi.

$$\begin{aligned}
& \left[\rho_1 A_1 \left(\hat{q}_1^2 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 + \frac{L_1^3}{3} \right) + \rho_2 A_2 L_1^2 L_2 + L_1^2 (m_1 + m_2) \right] \ddot{\hat{\theta}}_1 + \\
& \left[\rho_2 A_2 L_1 \left(-\hat{q}_2 \sin \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \cos \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) + m_2 L_1 L_2 \cos \hat{\theta}_{21} \right] \ddot{\hat{\theta}}_2 - \\
& \left(\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \hat{x}_1 \hat{\phi}_1(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right) \ddot{\hat{q}}_1 - \left(\rho_2 A_2 \cos \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \ddot{\hat{q}}_2 + \\
& \left(2\rho_1 A_1 \hat{q}_1 \dot{\hat{q}}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right) - \left[\rho_2 A_2 \dot{\hat{\theta}}_2^2 L_1 \left(\hat{q}_2 \cos \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 - \sin \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) \right] - \\
& \left(m_2 L_1 L_2 \sin \hat{\theta}_{21} \dot{\hat{\theta}}_2^2 \right) = \hat{f}_{\hat{\theta}_1}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\rho_2 A_2 L_1 \left(-\hat{q}_2 \sin \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \cos \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) + m_2 \cos \hat{\theta}_{21} L_1 L_2 \right] \ddot{\hat{\theta}}_1 + \\
& \left[\rho_2 A_2 \left(\hat{q}_2^2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \frac{L_2^3}{3} \right) + m_2 L_2^2 \right] \ddot{\hat{\theta}}_2 - \left(\rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \hat{x}_2 \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \ddot{\hat{q}}_2 + \\
& \left[2\rho_2 A_2 \hat{q}_2 \left(\hat{q}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 - \dot{\hat{\theta}}_1 \sin \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \right] + \\
& \left[\rho_2 A_2 \dot{\hat{\theta}}_1^2 L_1 \left(\hat{q}_2 \cos \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \sin \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) + \left(m_2 \dot{\hat{\theta}}_1^2 \sin \hat{\theta}_{21} L_1 L_2 \right) \right] = \hat{f}_{\hat{\theta}_2}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \hat{x}_1 \hat{\phi}_1(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right] \ddot{\hat{\theta}}_1 + \left[\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right] \ddot{\hat{q}}_1 - \rho_1 A_1 \hat{q}_1 \dot{\hat{\theta}}_1^2 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 + \\
& E I_1 \hat{q}_1 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1'''^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 = \hat{f}_{\hat{q}_1}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\rho_2 A_2 \cos \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right] \ddot{\hat{\theta}}_1 - \left[\rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \hat{x}_2 \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right] \ddot{\hat{\theta}}_2 + \left[\rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right] \ddot{\hat{q}}_2 + \\
& \left[\rho_2 A_2 \left(\dot{\hat{\theta}}_1 \sin \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 (2\dot{\hat{\theta}}_2 - \dot{\hat{\theta}}_1) - \hat{q}_2 \dot{\hat{\theta}}_2^2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \right] + E I_2 \hat{q}_2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2'''^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 = \hat{f}_{\hat{q}_2}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

6.2.4 Hareket Denklemlerinin Boyutsuzlaştırılması

Esnek robot kolun uç titreşimlerini minimize edecek optimum mafsalsal hareketlerinin bulunması probleminde, hareket süresi T 'nin de, optimizasyona tabi bir unsur olarak katılması durumunda, T hareket süresi parametresinin, hareket denklemlerinde sabit bir değer olmaktan çıkarılıp değişken bir parametreye dönüştürülmesi gereklidir. Bu amaçla Bölüm.5.5.1'de verilen dönüşümler kullanılarak boyutsuz zamanın fonksiyonu olan hareket denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T^2} \left[\rho_1 A_1 \left(\hat{q}_1^2 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 + \frac{L_1^3}{3} \right) + \rho_2 A_2 L_1^2 L_2 + L_1^2 (m_1 + m_2) \right] \hat{\theta}_1'' + \\
& \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 L_1 \left(-\hat{q}_2 \sin \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \cos \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) + m_2 L_1 L_2 \cos \hat{\theta}_{21} \right] \hat{\theta}_2'' + \\
& \frac{1}{T^2} \left(-\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \hat{x}_1 \hat{\phi}_1(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right) \hat{q}_1'' - \frac{1}{T^2} \left(\rho_2 A_2 \cos \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \hat{q}_2'' + \\
& \frac{2}{T^2} \left(\rho_1 A_1 \hat{q}_1 \hat{q}_1' \hat{\theta}_1' \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right) - \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \hat{\theta}_2'^2 L_1 \left(\hat{q}_2 \cos \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 - \sin \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{T^2} (m_2 L_1 L_2 \sin \hat{\theta}_{21} \hat{\theta}_2'^2) + = \hat{f}_{\hat{\theta}_1}^*
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 L_1 \left(-\hat{q}_2 \sin \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \cos \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) + m_2 \cos \hat{\theta}_{21} L_1 L_2 \right] \hat{\theta}_1'' + \\
& \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \left(\hat{q}_2^2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \frac{L_2^3}{3} \right) + m_2 L_2^2 \right] \hat{\theta}_2'' - \frac{1}{T^2} \left(\rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \hat{x}_2 \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \hat{q}_2'' + \\
& \frac{2}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \hat{q}_2' \left(\hat{q}_2 \hat{\theta}_2' \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 - \hat{\theta}_1' \sin \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \right] + \\
& \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \hat{\theta}_1'^2 L_1 \left(\hat{q}_2 \cos \hat{\theta}_{21} \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 + \sin \hat{\theta}_{21} \frac{L_2^2}{2} \right) + (m_2 \hat{\theta}_1'^2 \sin \hat{\theta}_{21} L_1 L_2) \right] = \hat{f}_{\hat{\theta}_2}^*
\end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{T^2} \left[\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \hat{x}_1 \hat{\phi}_1(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right] \hat{\theta}_1'' + \frac{1}{T^2} \left[\rho_1 A_1 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right] \hat{q}_1'' - \\
& \frac{1}{T^2} \left(\rho_1 A_1 \hat{q}_1 \hat{\theta}_1'^2 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 \right) + E_1 I_1 \hat{q}_1 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1''^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1 = \hat{f}_{\hat{q}_1}^*
\end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \cos \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right] \hat{\theta}_1'' - \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \hat{x}_2 \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right] \hat{\theta}_2'' + \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right] \hat{q}_2'' + \\
& \frac{1}{T^2} \left[\rho_2 A_2 \left(\hat{\theta}_1' \sin \hat{\theta}_{21} L_1 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 (2\hat{\theta}_2' - \hat{\theta}_1') - \hat{q}_2 \hat{\theta}_2'^2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 \right) \right] + E_2 I_2 \hat{q}_2 \int_0^{L_2} \hat{\phi}_2''^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2 = \hat{f}_{\hat{q}_2}^*
\end{aligned} \tag{6.23}$$

6.2.5 Servomotor Momentlerinin Bulunması

Bölüm 4.5'de n adet esnek uzva sahip bir robotun, servomotor momentlerinin genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden ifadesi verilmişti. Bu bölümde, örnek problem için harcanan toplam elektrik enerjisinin bulunmasında gerekli olan ve servomotorlar tarafından üretilen momentleri veren ifadeler, (4.43) ve (4.44) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\tau_1^* = \hat{f}_{\hat{\theta}_1}^* + \hat{f}_{\hat{\theta}_2}^* \tag{6.24}$$

$$\tau_2^* = \hat{f}_{\hat{\theta}_1}^* \tag{6.25}$$

Burada, $\hat{f}_{\hat{\theta}_1}^*$ ve $\hat{f}_{\hat{\theta}_2}^*$ ifadeleri (6.20) ve (6.21) eşitlikleri ile verilmiş genelleştirilmiş kuvvetleri, τ_1^* ve τ_2^* ise birinci ve ikinci mafsaldaki servomotorlar tarafından üretilen toplam momenti gösterir.

6.2.6 Servomotorların Matematik Modeli

Robotlar, serbestlik derecesi sayısınca servomotorlara sahiptir. Robotik uygulamalarda kullanılan servomotorlar; hidrolik, pnömatik, AC ve DC elektrik motorları ile adım (stepper)

motorları veya bu üç tip elektrik motorunun avantajlı özelliklerine sahip olarak tasarlanmış elektrik motorlarıdır. Robotlarda kullanılan servomotorlar, kullanıldıkları yere, yaptıkları işe, istenilen çalışma hassasiyeti ve hızına bağlı olarak seçilir.

Bu çalışmada, özellikle montaj işlerinde kullanılan robotlarda, yüksek olması istenen çalışma hızı ve son nokta konum hassasiyeti gibi özellikler incelendiğinden, servomotor tipi olarak DC elektrik motorunun kullanılması uygun görülmüştür. DC elektrik motorlarının yapılarının basit ve ucuz olması, yüksek moment üretebilmeleri ve kontrollerinin kolay olması gibi avantajlarından dolayı bugün endüstrideki robotik uygulamalarda kullanılmaları tercih nedeni olmuştur. DC elektrik motorlarının çalışması,

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + K_e N \dot{\theta}(t) \quad (6.26)$$

ve

$$\tau^*(t) = K_t N i(t) \quad (6.27)$$

şeklinde iki denklemden oluşan lineer bir matematik modelle yeterli yaklaşıklıkta temsil edilebilir (Turhan, 1989). Burada,

u : Besleme gerilimi,

i : Sargı akımı,

L : Sargı enduktansı,

R : Sargı direnci,

N : Redüktör çevrim oranı,

K_e : Motor gerilim sabitini,

K_t : Motor moment sabitini,

$\dot{\theta}$: Redüktör çıkış milinin açısal hızını,

τ^* : Servomotorun ürettiği toplam momenti,

göstermektedir. Bir servomotorun üretmesi gereken toplam moment, uzvun istenen hareketi yapması için gerekli moment ve servomotora ait iç sürtünme kuvvetleri ile atalet kuvvetlerinden kaynaklanan momentlerin toplamına eşittir.

Servomotora ait iç sürtünme kuvvetleri ile atalet kuvvetlerinin meydana getirdiği momentler ve DC elektrik motorlarının çok küçük olan L endüktansı, bu konudaki çalışmalarda yaygın olarak yapıldığı gibi ihmal edildi. Bütün formülasyonlarda yapıldığı gibi (4.48) ve (4.49) denklemleri de, τ boyutsuz zamanda aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse,

$$u(\tau) = R i(\tau) + \frac{K_e N}{T} \theta'(\tau) \quad (6.28)$$

$$i(\tau) = \frac{\tau^*(\tau)}{K_t N} \quad (6.29)$$

şeklinde, servomotor denklemleri boyutsuz zamanda elde edilir.

6.2.7 Optimizasyon Ölçütü

Bu çalışmada, en kısa hareket süresi ve minimum enerji tüketimi ölçütleri altında minimum genlikli artık titreşimi oluşturan, optimum mafsallık hareketlerinin bulunması amaçlanmıştır. Bunun için, uzuvların hareketini sağlayan ve mafsallara yerleştirilmiş olan DC elektrik motorlarının harcadığı elektrik enerjisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$E_i = \int_0^T u_i(t) i_i(t) dt \quad (6.30)$$

$u_i(t)$: i. DC elektrik motorunun hareket süresince rotor sargılarına uygulanan gerilim fonksiyonu,

$i_i(t)$: i. DC elektrik motorunun, hareket süresince çektiği akımın fonksiyonunu gösterir.

Örnek problemde, kullanılan iki DC elektrik motorunun harcadığı toplam elektrik enerjisi ifadesi, (6.28) ve (6.29) denklemleri de gözönüne alınarak şu şekilde yazılabilir.

$$E_{\text{Top}}(T) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^1 \left(\frac{R_i}{K_{t_i}^2} T \tau_i^{*2}(\tau, T) + \frac{K_{e_i}}{K_{t_i}} \hat{\theta}_i' \tau_i^*(\tau, T) \right) d\tau \right\} \quad (6.31)$$

Burada, $\tau_i^*(\tau, T)$ ifadesi için (6.24) ve (6.25) denklemleri kullanılacaktır. (6.31) ifadesinin ilk terimi elektrikte Joule olayından oluşan enerji kaybını, ikinci terimi ise sistem üzerine yapılan işi gösterir. Optimizasyon şart denklemlerini oluştururken kullanılacak ve (6.31) ifadesinden elde edilecek olan enerji integrandı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$E_{\text{Top}}^*(\tau, T) = \sum_{i=1}^2 \left[C_i T \tau_i^{*2}(\tau, T) + D_i \hat{\theta}_i' \tau_i^*(\tau, T) \right] \quad (6.32)$$

Burada, C_i ve D_i aşağıdaki ifadelere eşittir.

$$C_i = \frac{R_i}{K_{t_i}^2 N_i^2} \quad (6.33)$$

$$D_i = \frac{K_{e_i}}{K_{t_i}} \quad (6.34)$$

6.2.8 Mafsal Hareketlerinin Sınır Şartları

(5.6) ve (5.7) genel ifadeleri ile verilen sınır şartlarını, örnek problem için $m=p=3$ olarak alındı. Aynı zamanda optimizasyona serbestlik getiren ve optimizasyonun derecesini gösteren k değeri için $k=2$ alınması yeterli olacaktır (Turhan, 1989).

Bu kabuller altında, herbir mafsalın hareketini tarif eden $\theta_i(\tau)$ fonksiyonlarının ilk altı a_{ij} terimi, optimizasyon için serbest bırakılan son iki a_{ij} terimi cinsinden, (5.22) ve (5.23)

ifadeleride gözönünde tutularak (5.6) ve (5.7) ile verilen sınır şartlarına göre matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ a_{i,3} \\ a_{i,4} \\ a_{i,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i(0) - a_{i,6} - a_{i,7} \\ \theta_i(T) + a_{i,6} - a_{i,7} \\ \dot{\theta}_i(0) \\ \dot{\theta}_i(T) \\ \ddot{\theta}_i(0) + \frac{1}{T^2}(a_{i,6}\pi^2 + a_{i,7}(2\pi)^2) \\ \ddot{\theta}_i(T) + \frac{1}{T^2}(-a_{i,6}\pi^2 + a_{i,7}(2\pi)^2) \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

(6.35) denkleminin analitik çözümünden a_{ij} katsayıları,

$$a_{i,0} = \theta_i(0) - a_{i,6} - a_{i,7}$$

$$a_{i,1} = \dot{\theta}_i(0)$$

$$a_{i,2} = \frac{\ddot{\theta}_i(0) T^2 + \pi^2 a_{i,6} + 4\pi^2 a_{i,7}}{2T^2}$$

$$a_{i,3} = \frac{-20\theta_i(0) + 40a_{i,6} + 20\theta_i(T) - 12\dot{\theta}_i(0)T - 8\dot{\theta}_i(T)T - 3\ddot{\theta}_i(0)T^2 - 4\pi^2(a_{i,6} + 2a_{i,7}) + \ddot{\theta}_i(T)T^2}{2T^3}$$

$$a_{i,4} = \frac{30\theta_i(0) - 60a_{i,6} - 30\theta_i(T) + 16\dot{\theta}_i(0)T + 14\dot{\theta}_i(T)T + 3\ddot{\theta}_i(0)T^2 + \pi^2(5a_{i,6} + 4a_{i,7}) - 2\ddot{\theta}_i(T)T^2}{2T^4}$$

$$a_{i,5} = \frac{-12\theta_i(0) + 240a_{i,6} + 12\theta_i(T) - 6\dot{\theta}_i(0)T - 6\dot{\theta}_i(T)T - \ddot{\theta}_i(0)T^2 - 2\pi^2 a_{i,6} + \ddot{\theta}_i(T)T^2}{2T^5}$$

(6.36)

olarak bulunur. Burada, $\theta_i(0)$, $\dot{\theta}_i(0)$ ve $\ddot{\theta}_i(0)$ i. uzvun, $t=0$ anındaki konum, hız ve ivmesini, $\theta_i(T)$, $\dot{\theta}_i(T)$ ve $\ddot{\theta}_i(T)$ ise $t=T$ anındaki konum, hız ve ivmesini göstermekte olup, hareketin (5.6) ve (5.7) denklemleriyle verilmiş olan sınır şartlarıdır.

6.2.9 Elastik Yerdeğiştirmenin Sınır Şartları

Bölüm 5.2.2’de anlatıldığı gibi esnek uzuvların elastik yerdeğiştirmeleri de, aynı mafsalsal hareketlerinde yapıldığı gibi uygun bir fonksiyonla temsil edilebilir. Hareket sonunda, artık titreşim genliğinin sıfır olması için seçilecek olan fonksiyon (5.24), (5.25) ve (5.26) ifadeleride gözönünde tutularak (5.8) ve (5.9) ile verilen sınır şartlarına göre matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 & T^6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 & 6T^5 \\ 1 & \left(\frac{T}{4}\right) & \left(\frac{T}{4}\right)^2 & \left(\frac{T}{4}\right)^3 & \left(\frac{T}{4}\right)^4 & \left(\frac{T}{4}\right)^5 & \left(\frac{T}{4}\right)^6 \\ 1 & \left(\frac{2T}{4}\right) & \left(\frac{2T}{4}\right)^2 & \left(\frac{2T}{4}\right)^3 & \left(\frac{2T}{4}\right)^4 & \left(\frac{2T}{4}\right)^5 & \left(\frac{2T}{4}\right)^6 \\ 1 & \left(\frac{3T}{4}\right) & \left(\frac{3T}{4}\right)^2 & \left(\frac{3T}{4}\right)^3 & \left(\frac{3T}{4}\right)^4 & \left(\frac{3T}{4}\right)^5 & \left(\frac{3T}{4}\right)^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{i,1} \\ b_{i,2} \\ b_{i,3} \\ b_{i,4} \\ b_{i,5} \\ b_{i,6} \\ b_{i,7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_{i,0}}(q_i(0) - b_{i,8}) \\ \frac{1}{b_{i,0}}(q_i(T) - b_{i,8} \cos(b_{i,9})) \\ \frac{1}{b_{i,0}}\dot{q}_i(0) \\ \frac{1}{b_{i,0}}(\dot{q}_i(T) + b_{i,8}b_{i,9} \sin(b_{i,9})) \\ m_{i,1}|_{\tau=0.25} \\ m_{i,2}|_{\tau=0.5} \\ m_{i,3}|_{\tau=0.75} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Bu denklem takımının analitik çözümünden b_{ij} katsayıları,

$$b_{i,1} = (q_i(0) - b_{i,8})/b_{i,0}$$

$$b_{i,2} = \dot{q}_i(0)/b_{i,0}$$

$$b_{i,3} = \frac{1}{9} \left[499q_i(0) + 499b_{i,8} - 93q_i(T) + 93b_{i,8} \cos(b_{i,9}T) - 84\dot{q}_i(0)T + 9T\dot{q}_i(T) + 9Tb_{i,8}b_{i,9} \sin(b_{i,9}T) + b_{i,0}(768m_{i,1} - 432m_{i,2} + 256m_{i,3}) \right] (1/T^2b_{i,0})$$

$$b_{i,4} = -\frac{1}{9} \left[-2210q_i(0) + 2210b_{i,8} - 766q_i(T) + 766b_{i,8} \cos(b_{i,9}T) - 285\dot{q}_i(0)T + 75T\dot{q}_i(T) + 75Tb_{i,8}b_{i,9} \sin(b_{i,9}T) + b_{i,0}(4096m_{i,1} - 3168m_{i,2} + 2048m_{i,3}) \right] (1/T^3b_{i,0})$$

$$\begin{aligned}
b_{i,5} &= \frac{2}{9} \left[-1932q_i(0) + 1932b_{i,8} - 1052q_i(T) + 1052b_{i,8} \cos(b_{i,9}T) - 225\dot{q}_i(0)T + 105T\dot{q}_i(T) + \right. \\
&\quad \left. 105Tb_{i,8}b_{i,9} \sin(b_{i,9}T) + b_{i,0} \left(3968m_{i,1} - 3672m_{i,2} + 2688m_{i,3} \right) \right] \left(1/T^4 b_{i,0} \right) \\
b_{i,6} &= -\frac{16}{9} \left[-190q_i(0) + 190b_{i,8} - 146q_i(T) + 146b_{i,8} \cos(b_{i,9}T) - 21\dot{q}_i(0)T + 15T\dot{q}_i(T) + \right. \\
&\quad \left. 15Tb_{i,8}b_{i,9} \sin(b_{i,9}T) + b_{i,0} \left(416m_{i,1} - 432m_{i,2} + 352m_{i,3} \right) \right] \left(1/T^5 b_{i,0} \right) \\
b_{i,7} &= \frac{32}{9} \left[-28q_i(0) + 28b_{i,8} - 28q_i(T) + 28b_{i,8} \cos(b_{i,9}T) - 3\dot{q}_i(0)T + 3T\dot{q}_i(T) + \right. \\
&\quad \left. 3Tb_{i,8}b_{i,9} \sin(b_{i,9}T) + b_{i,0} \left(64m_{i,1} - 72m_{i,2} + 64m_{i,3} \right) \right] \left(1/T^6 b_{i,0} \right)
\end{aligned} \tag{6.38}$$

olarak bulunur. Burada, $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$ ve $\ddot{q}_i(0)$ $t=0$ anında $q_i(T)$, $\dot{q}_i(T)$ ve $\ddot{q}_i(T)$ ise $t=T$ anında i . uzvun q_i genelleştirilmiş koordinatının konum, hız ve ivmesini göstermekte olup, (5.8) ve (5.9) denklemleriyle verilmiş olan elastik yerdeğiştirme sınır şartlarıdır. $m_{i,1}|_{\tau=0.25}$, $m_{i,2}|_{\tau=0.5}$ ve $m_{i,3}|_{\tau=0.75}$ için mafsalsal moment değerleri olarak alınmıştır.

6.2.10 Optimizasyon Şartları

(6.35) denklem takımının çözümüyle, (5.22) polinom çözüm kabulünün ilk altı, (6.37) denklem takımının çözümüyle de, (5.24) polinom çözüm kabulünün ilk yedi katsayısı, optimizasyon için serbest bırakılan diğer katsayılara bağlı olarak bulunur.

Örnek problemde, mafsalsal koordinatları için ($a_{i,s}$; $i=1,2$ $s=6,7$) dört, esnek uzvun uç noktasının genelleştirilmiş koordinatları için ($b_{i,s}$; $i=1,2$ $s=7,8$) dört adet olmak üzere toplam sekiz adet katsayıyı elde edebilmek için (5.32) ve (5.33) eşitlikleriyle aynı olan,

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{Top}(T)}{dc_{i,m}} &= \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^2 \left[\left(\frac{\partial E_{Top}^*}{\partial \theta_i^{(s)}} + \sum_{r=1}^2 \frac{\partial E_{Top}^*}{\partial \tau_i^*} \frac{\partial \tau_i^*}{\partial \theta_i^{(s)}} \right) \frac{\partial \theta_i^{(s)}}{\partial a_{i,m}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial E_{Top}^*}{\partial q_i^{(s)}} + \sum_{r=1}^2 \frac{\partial E_{Top}^*}{\partial \tau_i^*} \frac{\partial \tau_i^*}{\partial q_i^{(s)}} \right) \frac{\partial q_i^{(s)}}{\partial b_{i,m}} \right] \right\} d\tau = 0
\end{aligned} \tag{6.39}$$

$$c_{i,m} \begin{cases} a_{i,m} & i = 1,2 \quad m = 6,7 \\ b_{i,m} & i = 1,2 \quad m = 7,8 \end{cases} \quad (6.40)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, $c_{i,m}$ polinom çözüm kabullerindeki optimize edilecek olan katsayıları, E_{Top}^* harcanan toplam elektrik enerjisi ifadesinin (6.32) bağıntısı ile tanımlanan integrandını, (s) ise τ 'ya göre t . mertebeden ($t=0,1,2$) türevi göstermektedir. (6.39) bağıntısını daha açık yazabilmek için terim terim ele alınırsa birinci terimler,

$$\frac{\partial E_{Top}^*}{\partial \hat{\theta}_i^{(s)}} = \begin{cases} D_i \tau_i^* & t = 1 \\ 0 & t \neq 1 \end{cases} \quad (6.41)$$

$$\frac{\partial E_{Top}^*}{\partial \hat{q}_i^{(s)}} = 0 \quad (6.42)$$

olarak bulunur. İkinci terimler (6.32) ifadesinden şu şekilde hesaplanır.

$$\frac{\partial E_{Top}^*}{\partial \tau_i^*} = 2C_r T \tau_i^* + D_r \hat{\theta}_r' \quad (6.43)$$

Üçüncü terimler ise, (6.24) ve (6.25) denklemlerinden hesaplanabilir. Dördüncü terimler de, şöyle açılabilir.

$$\frac{\partial \hat{\theta}_i^{(s)}}{\partial a_{i,m}} = \sum_{j=0}^7 \frac{\partial \hat{\theta}_i^{(s)}}{\partial a_{i,j}} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial a_{i,m}} \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial q_i^{(s)}}{\partial b_{i,m}} = \sum_{j=0}^9 \frac{\partial q_i^{(s)}}{\partial b_{i,j}} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial b_{i,m}} \quad (6.45)$$

Burada, birinci terimler (5.22) ile (5.24) eşitlikleri kullanılarak türetilir. Aynı şekilde, (6.35) ve (6.37) denklem takımlarının türevi alınarak ikinci terimler de hesaplanır.

(6.41) ifadesinden (6.45)'e kadar olan ifadeler (6.39) eşitliğinde yerine konulursa, örnek problem için bilinmeyen katsayıları hesaplayacak Ek 1'de verilen ilk sekiz adet optimizasyon şart denklemi elde edilir.

6.2.11 T Hareket Süresi Optimizasyon Şart Denkleminin Elde Edilmesi

Optimum mafsal hareketlerinin bulunmasında, hareket süresinin de optimizasyona katılması istendiğinde, (6.39)'da verilen sekiz adet denkleme ilave olarak (6.34) eşitliğiyle verilmiş olan ifadenin de optimizasyon şart denklemlerine dokuzuncu denklem olarak katılması gerekir. (5.34) eşitliği serbest değişken T'ye göre aşağıdaki şekilde zincir kuralına göre türev alınarak elde edilir.

$$\frac{dE_{Top}(T)}{dT} = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial E_{Top}^*(\tau, T)}{\partial T} + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial E_{Top}^*(\tau, T)}{\partial \tau_i^*} \frac{\partial \tau_i^*}{\partial T} + \sum_{t=0}^2 \sum_{j=1}^7 \frac{\partial E_{Top}^*(\tau, T)}{\partial \hat{\theta}_i^{(s)}} \frac{\partial \hat{\theta}_i^{(s)}}{\partial a_{i,j}} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial T} + \sum_{t=0}^2 \sum_{j=1}^9 \frac{\partial E_{Top}^*(\tau, T)}{\partial \hat{q}_i^{(s)}} \frac{\partial \hat{q}_i^{(s)}}{\partial b_{i,j}} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial T} \right] \right\} d\tau = 0 \quad (6.46)$$

Burada, $E_{Top}^*(\tau, T)$ (6.31) ifadesinin integrandı olup (6.32) bağıntısı ile tanımlanmıştır. (6.46)

ifadesinin sağ tarafı terim terim ele alınırsa,

Birinci terim için (6.32) bağıntısından,

$$\frac{\partial E_{Top}^*(\tau, T)}{\partial T} = \sum_{i=1}^2 C_i \tau_i^{*2}(\tau, T) \quad (6.47)$$

elde edilir. İkinci terimin birinci çarpanı daha önce (6.43) bağıntısı ile tanımlanmıştır. İkinci terimin ikinci çarpanı ise (6.24) ve (6.25) bağıntılarından elde edilir.

Üçüncü terimin ilk çarpanına ait açık ifadeler (6.41) bağıntısı ile verilmiştir. Üçüncü terimin ikinci çarpanına ait ifadeler de (6.35) denklem takımının, üçüncü terimin üçüncü çarpanı ise, (6.36) bağıntılarının T'ye göre türetilmesinden elde edilir

Dördüncü terimin birinci çarpanı daha önce (6.42) bağıntısı ile tanımlanmıştı. Dördüncü terimin ikinci ve üçüncü çarpanına ait açık ifadeler de (6.37) ve (6.38) denklemlerinden türetilir.

Buraya kadar yapılan işlemlerle (6.46) eşitliğinin bütün çarpanlarının açık ifadeleri elde edildi. (6.39) ve (6.46) eşitliklerinden elde edilen ve Ek 1’de açık ifadeleri verilen dokuz denklemden, optimizasyon için serbest bırakılan ($a_{1,6}$, $a_{1,7}$, $a_{2,6}$, $a_{2,7}$, $b_{1,0}$, $b_{1,8}$, $b_{2,0}$, $b_{2,8}$, T) değişkenleri hesaplanabilir.



BÖLÜM 7

SONUÇLAR

7.1 Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümde tanımı yapılan ve hareket denklemleri çıkarılan esnek iki uzuvdan oluşan robotun, optimum mafsalsal hareketleri altında, dinamik davranışlarına ilişkin sonuçlar sunulacaktır. Şekil 6.1’de şematik olarak gösterilen ve çözümlere esas oluşturan esnek uzuvlu robotun (6.20), (6.21), (6.22) ve (6.23) dinamik denklemleri kullanılarak aşağıdaki hususlar incelenmiştir.

- Robot uzuvları esnek ve rijit kabul edilerek hareket süresiyle mafsalsal motorlarının harcadığı toplam enerjinin değişimi.
- Çelik ve alüminyum malzemeden yapılmış eşit kesit alanına fakat farklı profil kesitlerine sahip esnek ve rijit kabul edilmiş uzuvların farklı uç kütleleri için, optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsalsal hareketleri altında esnek uzuvların uç noktalarının titreşim genliklerinin hareket esnasında ve hareket süresinin sonunda nasıl değiştiği.
- Yukarıda verilen şartlar altında mafsalsal motorlarına uygulanan maksimum gerilim ve motorların çektiği akımın karesel ortalamasının değişimi.

Bu temel inceleme konularına ilave olarak bunların birbirleriyle oluşturduğu kombinezon durumları da nazara alındığında, çok sayıda sonuç elde edildi. Ancak burada, bu sonuçların hepsini vermek mümkün olmadığından yalnızca tez konusuyla doğrudan ilgili olan uzuv elastik yerdeğiştirmesi, servomotor toplam enerji minimizasyonu ve hareket süresi gibi sonuçlar üzerinde durulacaktır. Örnek problemde, robot kol malzemesi olarak çelik alınmıştır ve çözüme esas alınan datalar Tablo 1’de verilmiştir. Mafsalsal motorlarına ilişkin değerler ise, Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 1 Robot uzuvlarının fiziki değerleri.

Kol No	L (m)	A (m ²)	E (N/m ²)	ρ (kg/m ³)	m (kg)
1	0.8	$7.8539 \cdot 10^{-5}$	$21 \cdot 10^{10}$	7800	1
2	0.7	$3.8484 \cdot 10^{-5}$	$21 \cdot 10^{10}$	7800	0.5

Tablo 2 Mafsal motorlarının karakteristik değerleri.

Kol No	K_t (Nm/A)	K_e (Vs/rad)	R (Ω)	N
1	0.154	0.208	8.1	40
2	0.142	0.348	15.2	50

Daha önceki bölümlerde de, anlatıldığı üzere optimizasyon probleminin çözümünde diferansiyel denklemler kullanılmıştır. Bu [(6.20), (6.21), (6.22), (6.23)] diferansiyel denklemlerin çözümü için (5.6), (5.7), (5.8) ve (5.9) sınır şartları seçilmiştir. Sınır şartları hareketin başlangıç ve bitiş anındaki kinematik değerleridir. Örnek problem için seçilen sınır şartları Tablo 3 ve Tablo 4’de verilmiştir.

Tablo 3 Mafsal sınır şartları.

Mafsal No	Başlangıç			Bitiş		
	Konum (derece)	Hız (rad/s)	İvme (rad/s ²)	Konum (derece)	Hız (rad/s)	İvme (rad/s ²)
1	65	0	0	-15	0	0
2	-70	0	0	75	0	0

Tablo 4 Uzuvarların uç noktalarının sınır şartları.

Kol No	Başlangıç		Bitiş	
	Konum (m)	Hız (m/s)	Konum (m)	Hız (m/s)
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0

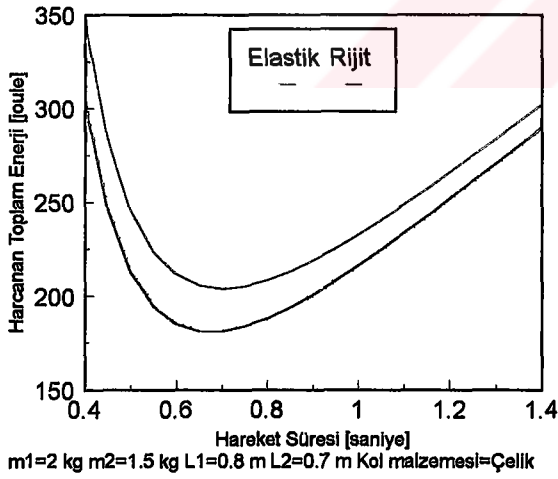
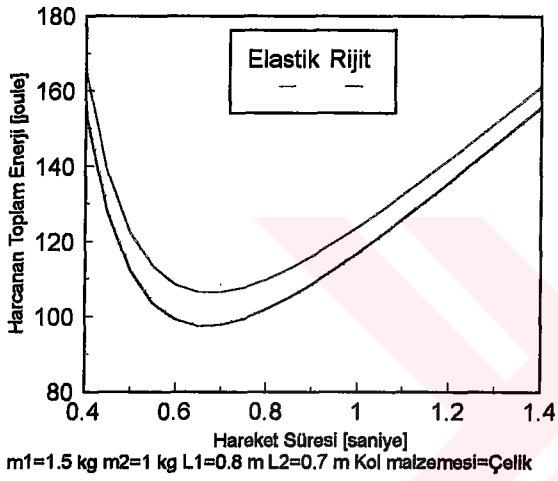
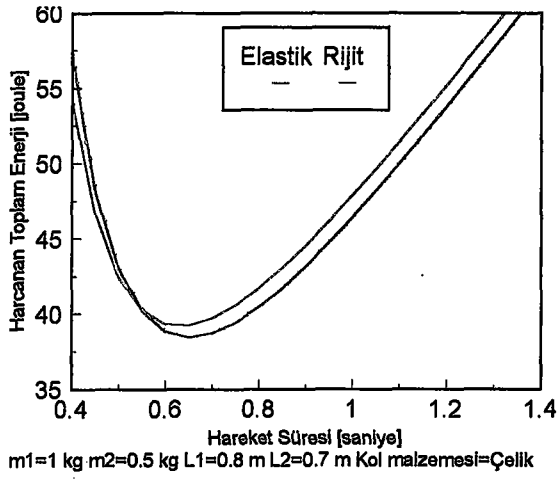
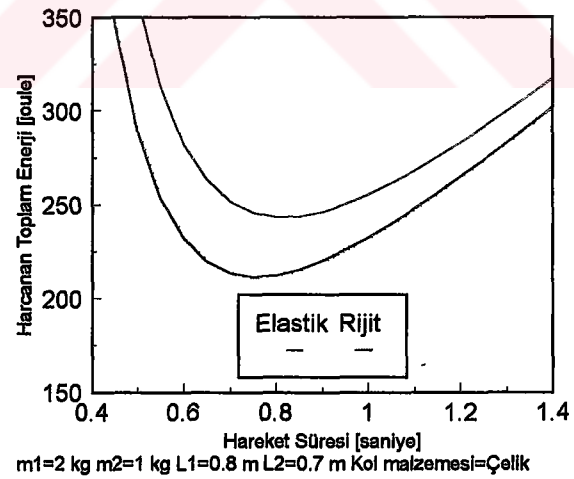
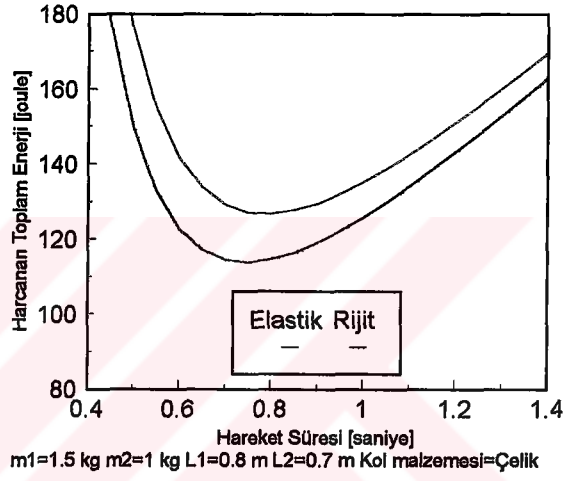
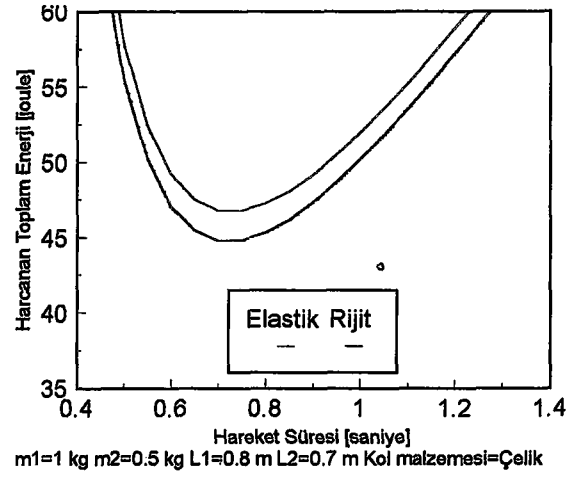
Mafsal ve uzuv hareketinde, hareketin başlangıç ve durma anında hızların sıfır seçilmesinin bir anlamı yoktur. Ancak ivmelerin sıfır seçilmesi hareketin başlangıç ve durma anında robot dinamiği açısından çok önemli olan yumuşak hareketlerin elde edilmesi için gereklidir. Zira özellikle esnek uzuvlu robotların yüksek ivmeli, ani kalkış ve duruşları aşırı motor momentlerinin oluşmasına neden olur.

7.2 Servomotor Toplam Enerjisi ve Hareket Süresinin Değişimi

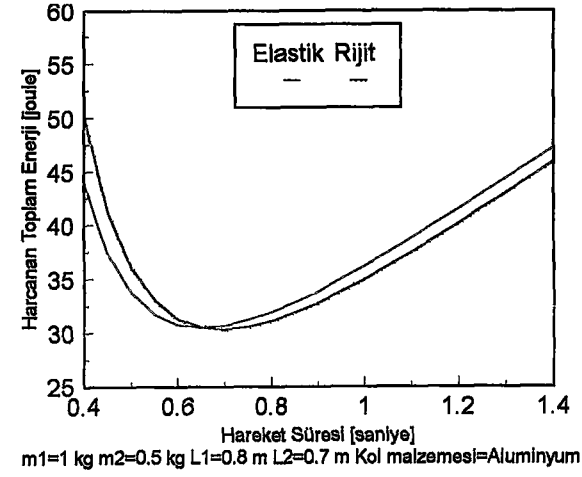
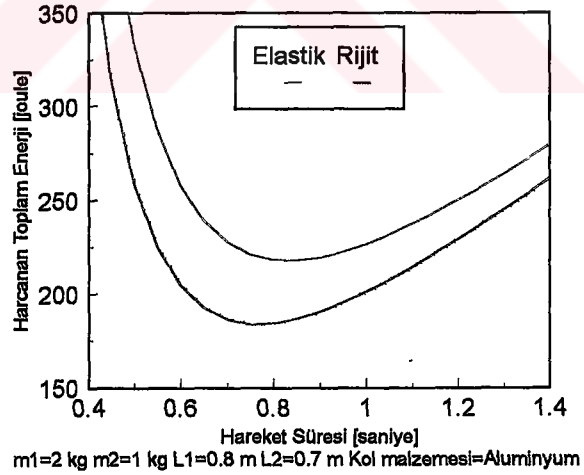
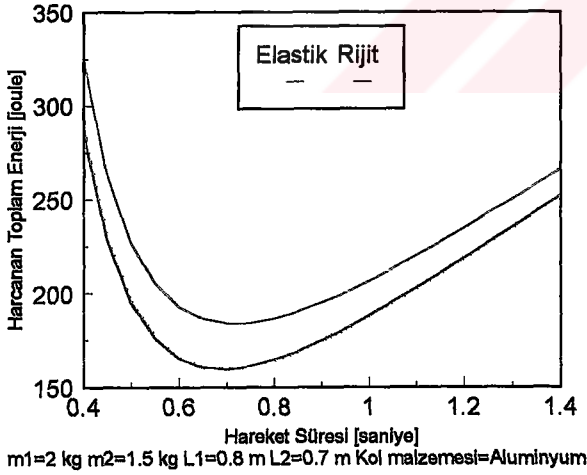
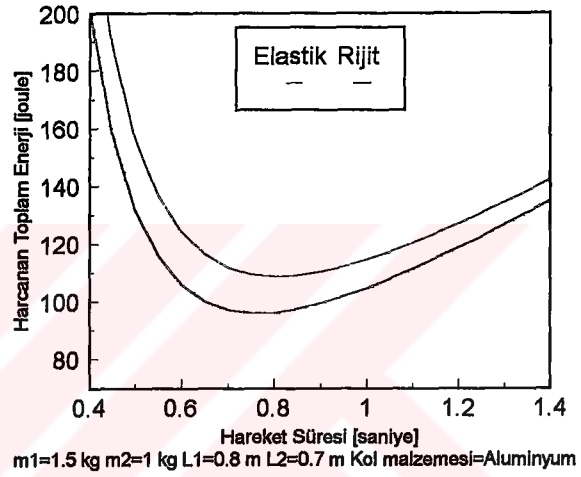
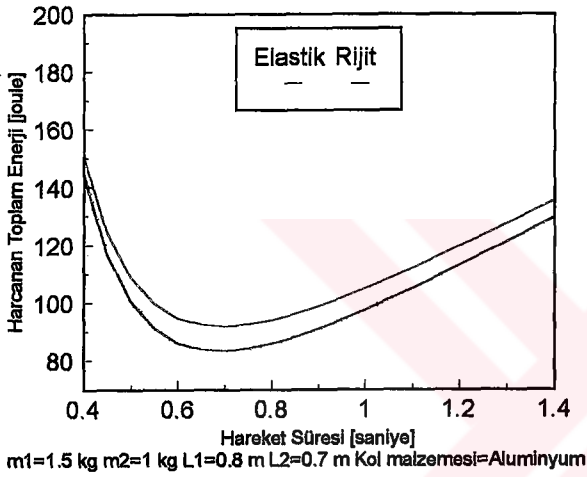
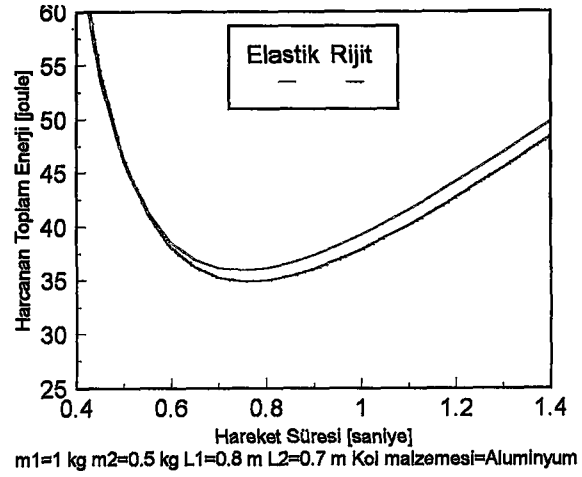
Şekil 7.1 ve Şekil 7.2’de, yukarıdaki tablolarda verilen dinamik ve kinematik değerlere sahip çelik ve alüminyumdan yapılmış farklı uç kütlelerine sahip esnek ve rijit robot kolların, optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsal hareketlerine göre servomotor toplam enerjisinin hareket süresi ile değişimi görülmektedir.

Şekillerdeki minimum hareket sürelerinin rahat okunabilmesi için hareket süresi eksenini küçük bir aralıkta alınmıştır. Bu nedenle enerjinin sanki zamanla hızla azalmakta, belirli bir noktada minimum yaptıktan sonrada yeniden hızla artmakta olduğu gibi bir izlenim bırakmaktadır. Oysa, şekillerin yeteri kadar uzun bir zaman için elde edilmesi durumunda, harcanan enerjinin hareket süresi ile değişimi incelendiğinde, hareket süresinin çok çok küçük değerlerinde, enerjinin çok büyük değerler aldığı, belirli bir noktada minimum yaptıktan sonra da, zamanla çok küçük bir eğimle sabit şekilde arttığı görülür.

İnsan kolu yapısındaki robotlarda, hareket süresi ile harcanan toplam enerji arasında böyle bir ilişkinin çıkması beklenen bir sonuçtur. Çünkü kısa hareket sürelerinde uzuvlar yüksek

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

Şekil 7.1 Uzun uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2$ kg ve $m_2=0.5, 1, 1.5$ kg yük taşıyan elastik ve rijit modellenmiş, çelikten yapılmış $L_1 = 0.8$ m ve $L_2 = 0.7$ m boyundaki uzuvların, optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsallarda hareketlerinde servomotorların harcadığı toplam enerjinin T hareket süresi ile değişimi.

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

Şekil 7.2 Uzun uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2 \text{ kg}$ ve $m_2=0.5, 1, 1.5 \text{ kg}$ yük taşıyan elastik ve rijit modellenmiş, alüminyumdan yapılmış $L_1 = 0.8 \text{ m}$ ve $L_2 = 0.7 \text{ m}$ boyundaki uzunların, optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsıl hareketlerinde servomotorların harcadığı toplam enerjinin T hareket süresi ile değişimi.

ivmeli hareket yapacağından, sistemde atalet kuvvetlerinden kaynaklanan momentler, ağırlık kuvvetlerinden kaynaklanan momentlere nazaran daha baskındır. Dolayısıyla harcanan toplam enerji de kısa hareket sürelerinde büyük olacaktır. Bunun tam tersi olarakta, hareket süresinin artmasıyla atalet kuvvetlerinden kaynaklanan momentlerin azalmasına karşılık, belirli bir süreden sonra bu sefer de kolların ağırlıklarından kaynaklanan momentleri karşılamak amacıyla daha fazla enerjinin harcanması gerekecektir.

Şekil 7.1 ve Şekil 7.2’de dikkat çeken bir diğer husus ise, aynı hareket sürelerinde harcanan enerji, uzuvların rijit modellenmesi durumunda elastik modellemeye nazaran daha azdır. Bunun nedeni, rijit modellemede esnek uzuvların ve uç noktada taşınan kütlelerin elastik yerdeğiştirmesinden kaynaklanan enerji ifadelerinin, kinetik ve potansiyel enerji ifadelerine ilave edilmemesidir. Modelleme farklılığından kaynaklanan bu enerji farkı artan hareket sürelerinde titreşim genliklerinin düşmesiyle orantılı olarak azalır.

Optimum mafsallık hareketlerinin bulunmasında, mafsalların hareketini temsil etmek için değişik fonksiyonların kullanıldığı anlatılmıştı. Ancak bütün bu fonksiyonlarda, hareketin optimizasyonunda kullanılan, serbest değişkenler ile hareketin optimizasyon derecesini gösteren serbest değişken sayısının seçimi, bu çalışmada, esas gaye alınmadığından belirli bir kriter kullanılmamıştır. Serbest değişkenlerin seçiminde ilk önce herbir mafsala rastgele bir değişken takımı atanmış, daha sonra iteratif olarak bu değişkenler değiştirilerek minimum enerji harcamasını veren değerlerin bulunması ile bu iterasyon son bulmuştur.

Optimum mafsallık hareketinin mertebesi ile harcanan enerji ters orantılıdır. Hareket mertebesinin yükselmesi, hesaplama zamanını üstel şekilde arttırmakta buna karşılık enerji tüketiminde kayda değer bir azalma olmamaktadır. Harcanan enerji ile hesaplama zamanı arasındaki ilişkinin incelenmesinde, yapılan iterasyonlarda görülmüştür ki, ikinci dereceden optimum mafsallık fonksiyonlarının kullanılması, pratikte en uygun optimizasyon mertebesidir.

Örnek problem çözümünde, Tablo 1 ve Tablo 2’de verilen fiziksel değerlere sahip bir robotun Tablo 3’de verilen sınır şartlarını sağlayan optimum mafsallık hareketleri aşağıdaki

gibi elde edilmiştir. Sıfırıncı mertebeden harekette yani herhangi bir keyfi serbest değişken atanmadığında,

$$\theta_1(\tau) = 1.1345 - 136.35\tau^3 + 511.33\tau^4 - 511.33\tau^5 \quad (7.1)$$

$$\theta_2(\tau) = -12217 + 395.43\tau^3 - 1482.8\tau^4 + 1482.8\tau^5$$

$$E_{\text{Top}} = 46.809 \text{ joule} \quad T=0.75 \text{ saniye}$$

İkinci mertebeden optimum harekette, yani optimizasyon için her bir mafsala iki adet keyfi serbest değişken atandığında,

$$\theta_1(\tau) = 34.084 - 1030.17\tau^2 - 177.48\tau^3 + 7219.6\tau^4 - 7335.3\tau^5 - 32.8 \cos(\pi\tau) - 0.15 \cos(2\pi\tau)$$

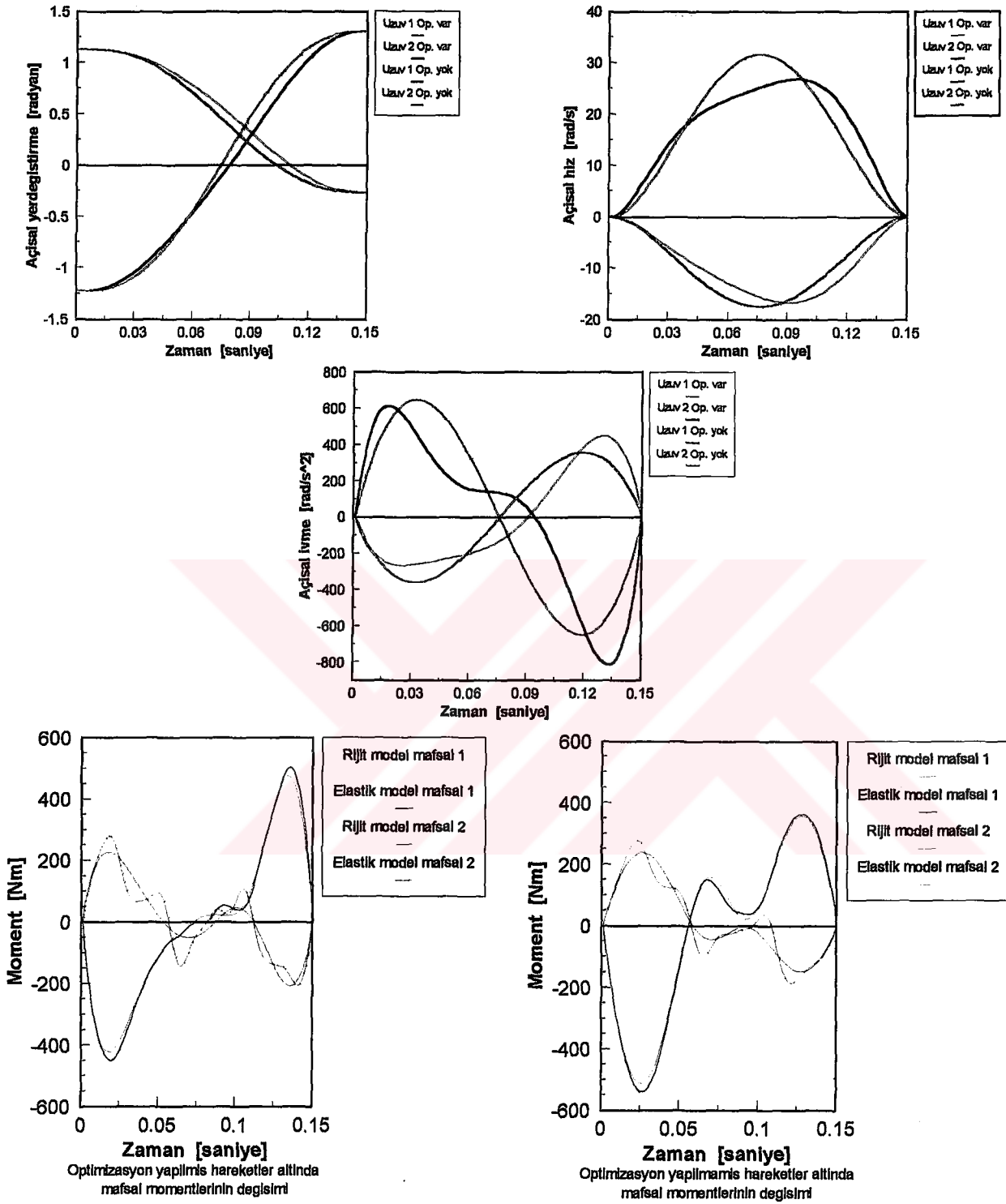
$$\theta_2(\tau) = -115.18 + 3529\tau^2 + 763.53\tau^3 - 25039\tau^4 + 25159\tau^5 + 113.8 \cos(\pi\tau) + 0.155 \cos(2\pi\tau)$$

(7.2)

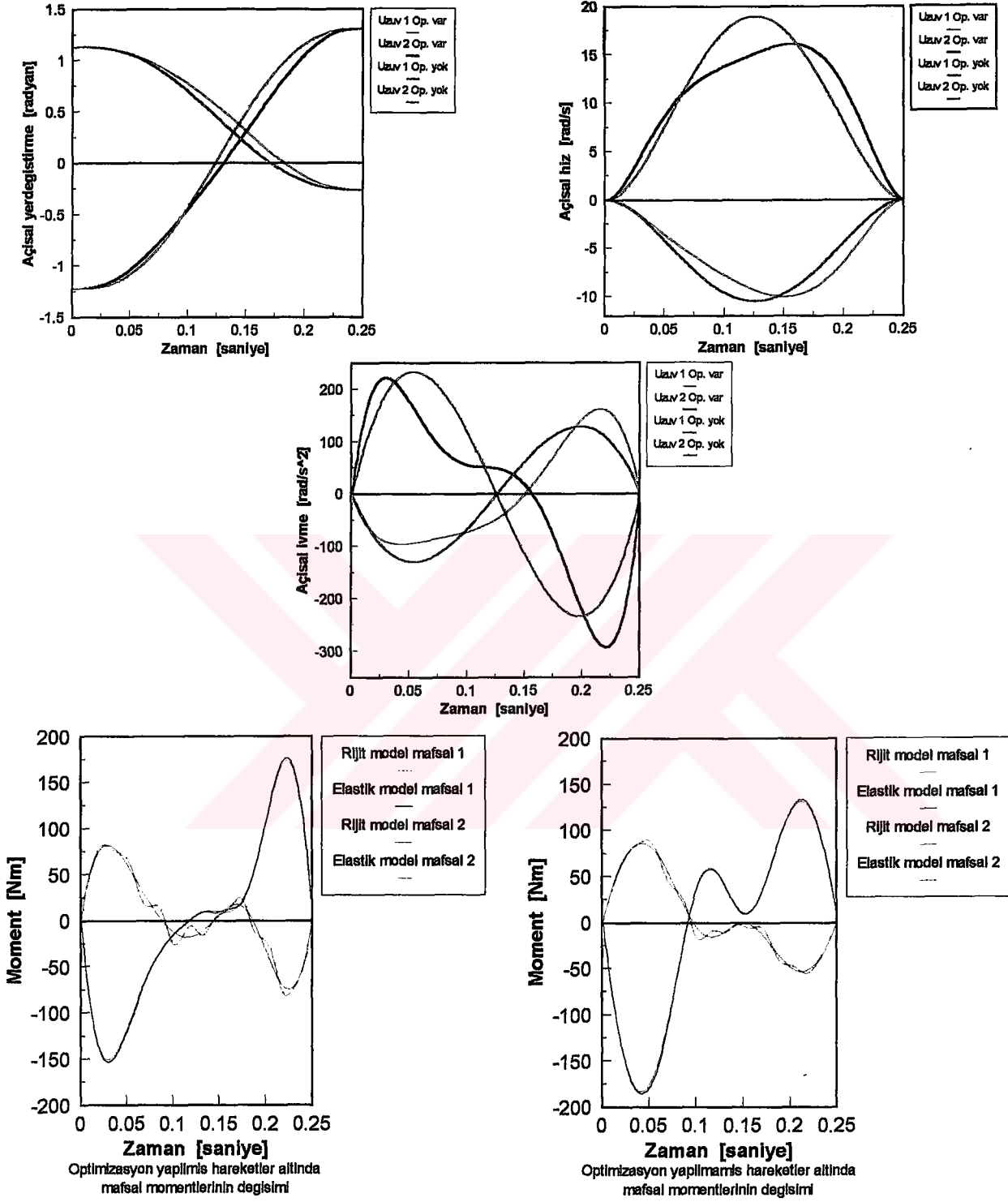
$$E_{\text{Top}} = 39.302 \text{ joule} \quad T=0.65 \text{ saniye}$$

(7.1) ve (7.2) sonuçlarından da görüldüğü üzere, ikinci dereceden optimum hareketde, harcanan enerjide %16 'lık bir azalma olurken aynı zamanda hareket süresinde de, yaklaşık 0.1 saniyelik bir azalma meydana gelmektedir. Bu iki hareket arasındaki 7.505 joule'luk bir enerji az gibi görünürse de, uzuvların ucunda taşınan kütlelerin 1 kg arttırıldığında bu fark 39.22 joule çıkmaktadır. Robotun günlük hareket süresi düşünülürse, aradaki farkın önemi daha iyi anlaşılacaktır.

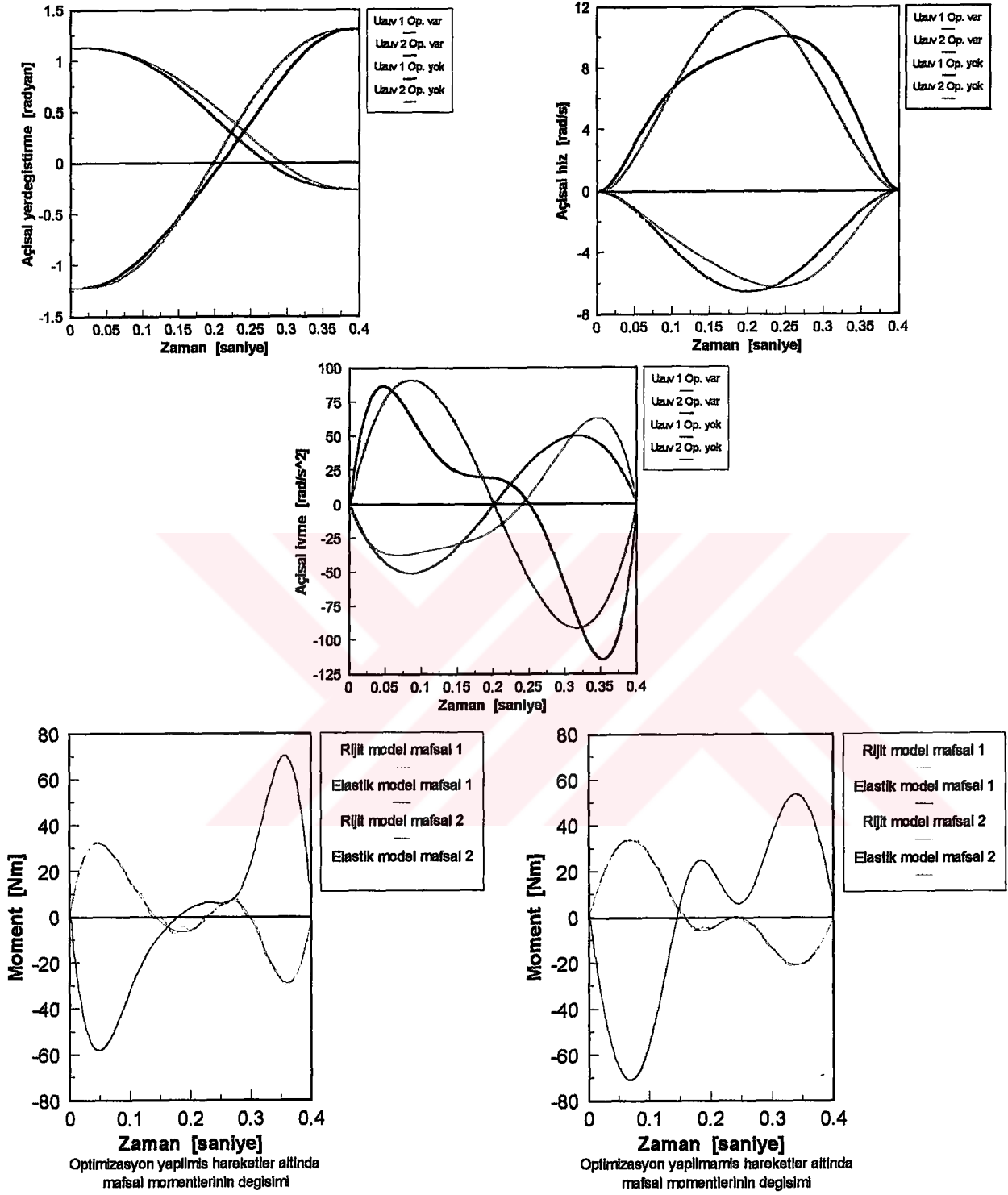
Aşağıda, Şekil 7.3, Şekil 7.4, Şekil 7.5 ve Şekil 7.6'da $T=0.15, 0.25, 0.4$ ve 0.6 saniye için, (7.1) ve (7.2) eşitlikleri kullanılarak birinci ve ikinci uzuv mafsallarının konum, hız ve ivme değerleri ile uzuvların rijit ve elastik modellenmesi durumunda elde edilen mafsal moment eğrileri verilmiştir.



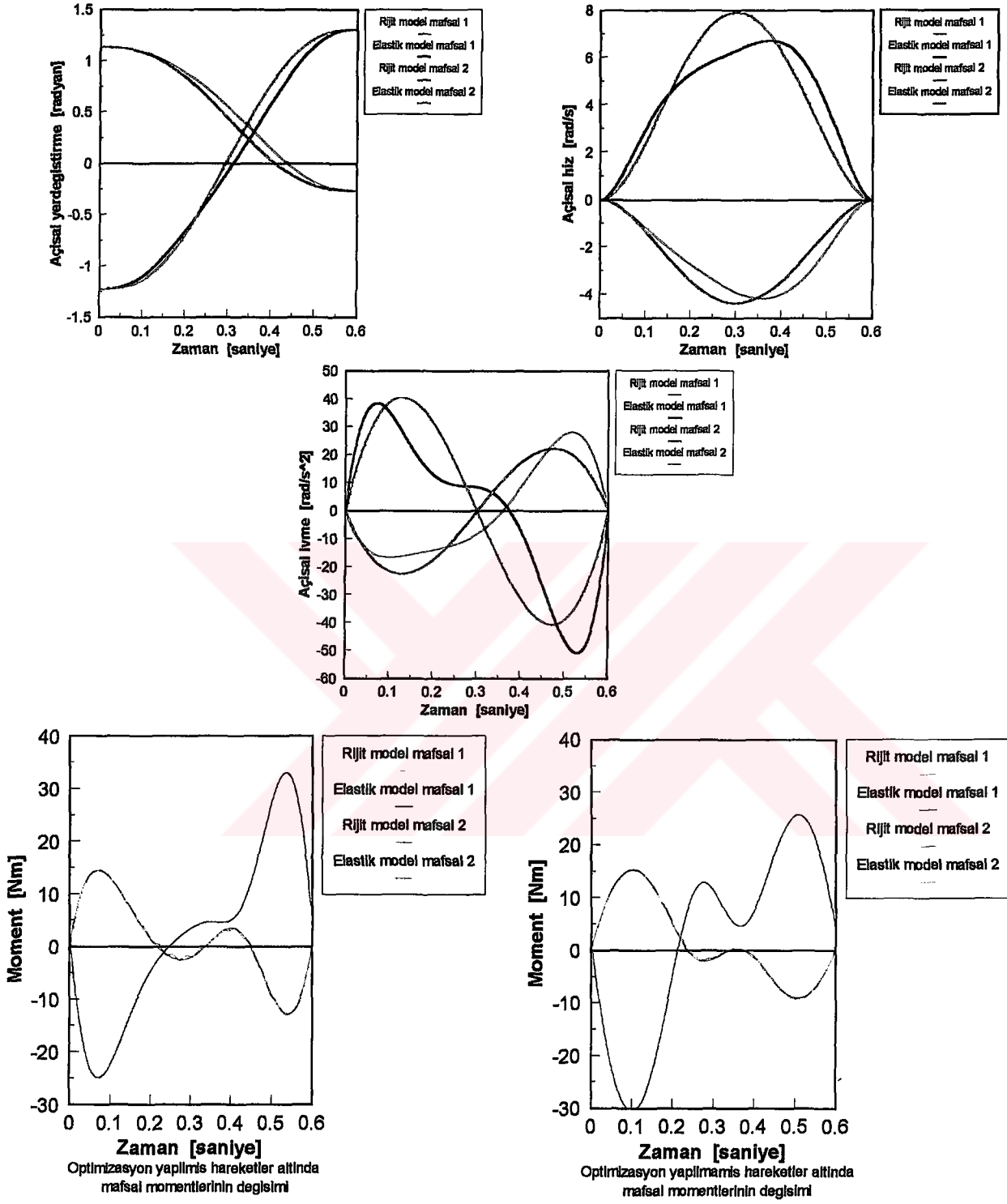
Şekil 7.3 $T=0.15$ saniye için mafsai konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsai hareketleri altında değişimi.



Şekil 7.4 $T=0.25$ saniye için mafsai konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsai hareketleri altında değışimi.



Şekil 7.5 $T=0.4$ saniye için mafsai konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsai hareketleri altında değışimi.

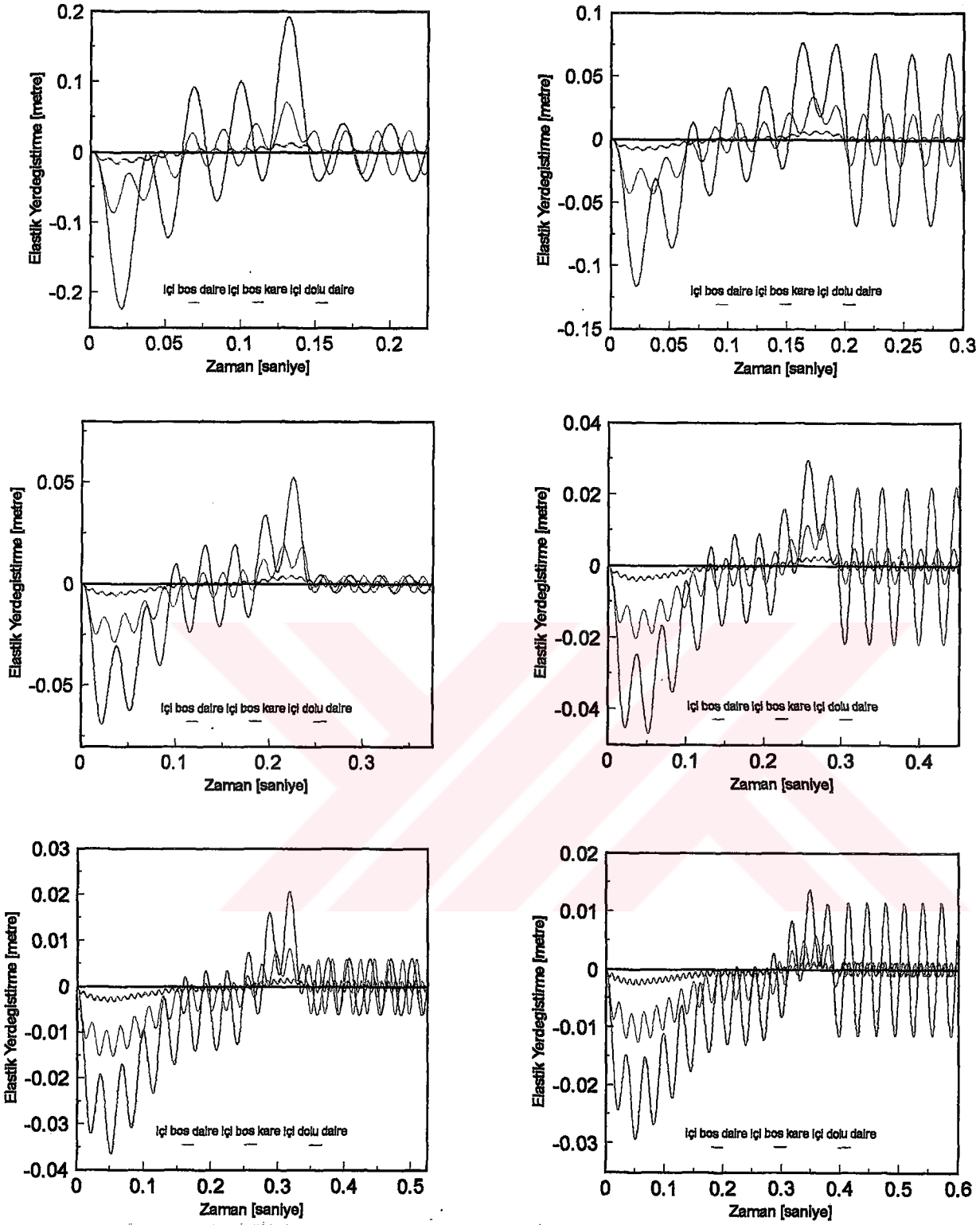


Şekil 7.6 $T=0.6$ saniye için mafsai konum, hız, ivme ve momentlerin optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsai hareketleri altında değişimi.

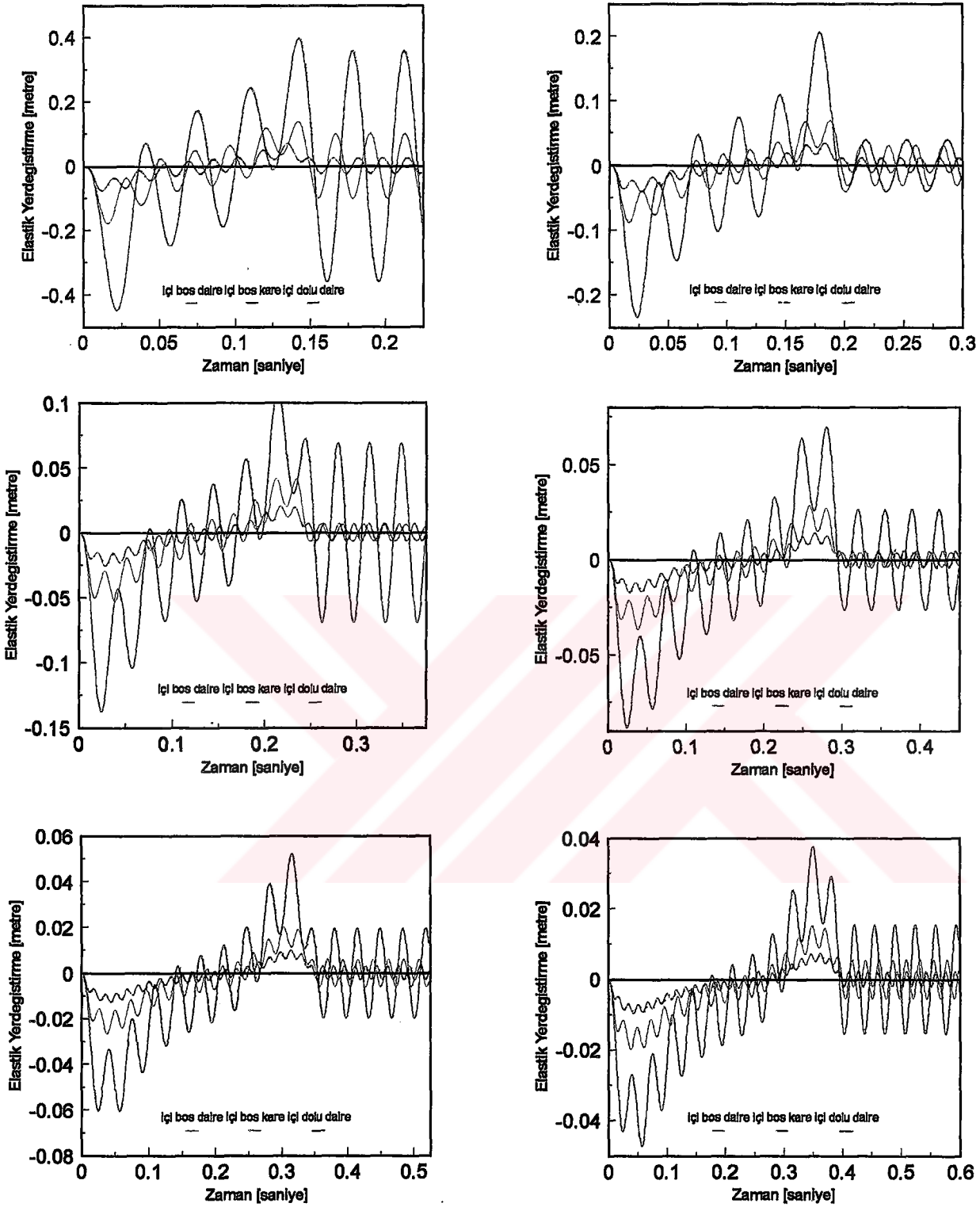
7.3 Hareket Süresi ile Uç Titreşimlerin İlişkisi

Bir önceki bölümde, hareket süresi ile harcanan toplam enerji arasındaki ilişki incelenmişti. Bu bölümde de, hareket süresi ile esnek uzuvların uç noktalarının elastik yerdeğiştirmesi incelenecek. Esnek uzuvlar (7.2) eşitliği ile verilen ikinci dereceden optimum mafsallık hareketleri ile Tablo 3’de verilen sınır şartları altında noktadan noktaya hareket ederken mafsallık momentlerinin etkisinde zorlanmış titreşim ve hareket sonunda da, serbest titreşim veya robot kol titreşimlerindeki adıyla artık titreşim hareketi yapar.

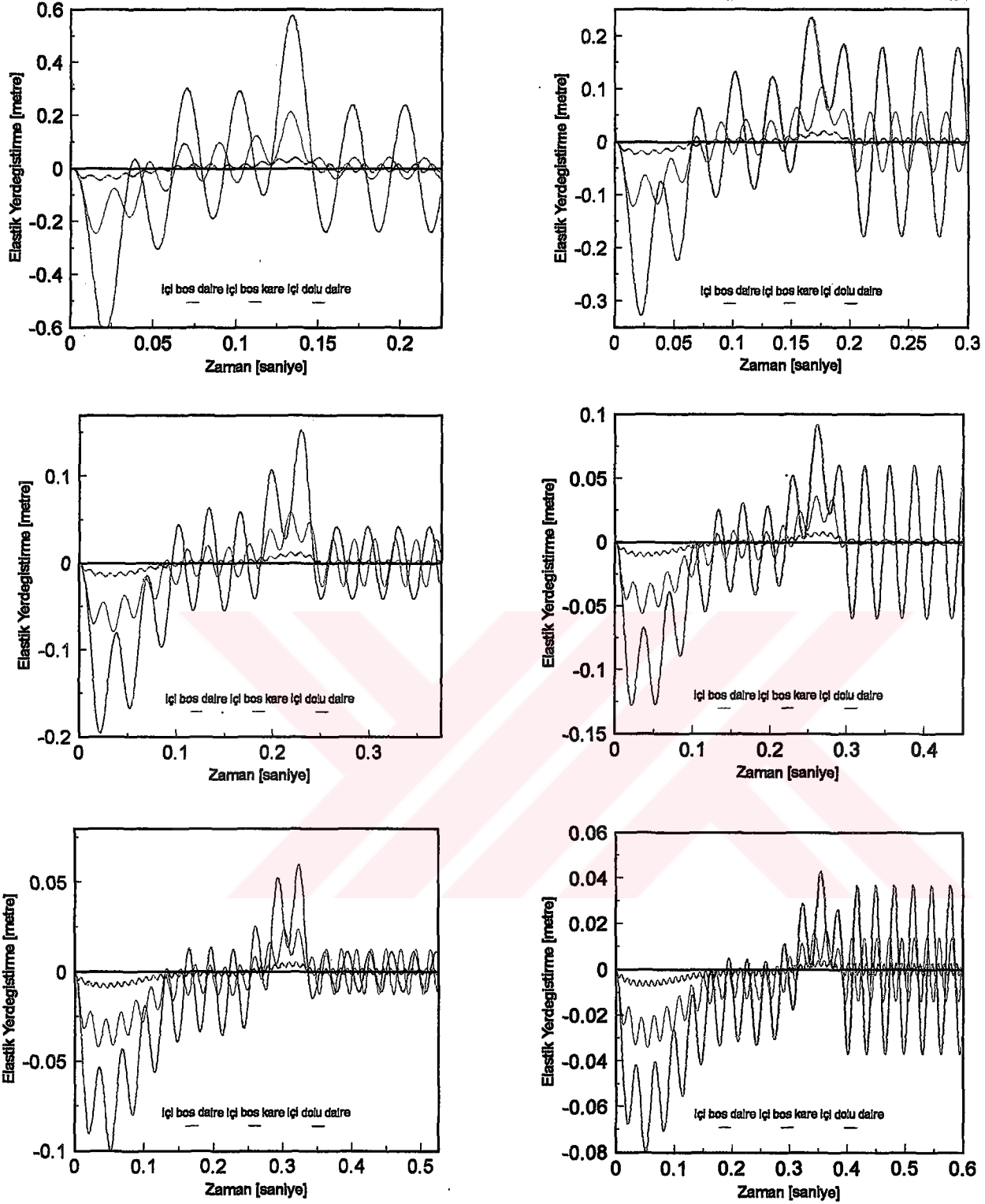
Eşit kesit alanlı içi dolu daire, içi boş daire ve içi boş dikdörtgen kesitli çelik ve alüminyum malzemeden yapılmış esnek uzuvların ikinci dereceden optimum mafsallık hareketleri altında uzuvların uç noktalarının elastik yerdeğiştirmeleri $T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4$ saniye için elde edilmiştir. Şekil 7.7, Şekil 7.8, Şekil 7.9 ve Şekil 7.10 'nun incelenmesinden de, görüleceği üzere birinci ve ikinci uzvun uç noktasının elastik yerdeğiştirmesinin genliği artan hareket süresi ile azalmaktadır. Aynı hareket süresi için elastik yerdeğiştirmenin genlikleri, çelik malzemede alüminyuma nazaran daha küçük olmaktadır. Eşit kesit alanlı uzuvlarda, en az elastik yerdeğiştirme sırasıyla içi boş dikdörtgen, içi boş daire ve içi dolu daire kesitli uzuvlarda meydana gelmektedir. Bu sonuçlar beklenen sonuçlardır. Çünkü, elastik yerdeğiştirme esneklikle doğru, kesit atalet momenti ile ters orantılıdır. Şekil 7.7, Şekil 7.8, Şekil 7.9 ve Şekil 7.10 'daki eğriler uzuvların ikinci dereceden optimum mafsallık hareketi için elde edilmiştir. Sıfırıncı dereceden mafsallık hareketi için elde edilen elastik yerdeğiştirme eğrileri teze ilave edilmemiştir. Ancak iki hareketin incelenmesinden görülmüştür ki, ikinci dereceden hareketde oluşan genlikler sıfırıncı dereceden hareketde oluşan genliklerden daha büyüktür. Bunun sebebi ise, Şekil 7.3, Şekil 7.4, Şekil 7.5 ve Şekil 7.6 'da görüldüğü gibi ikinci dereceden hareketde uzuvların maksimum ivme değerleri daha büyüktür. Dolayısı ile uzuvların titreşim enerjileri de yüksek olacağından, meydana gelen genlikler de büyük olacaktır.



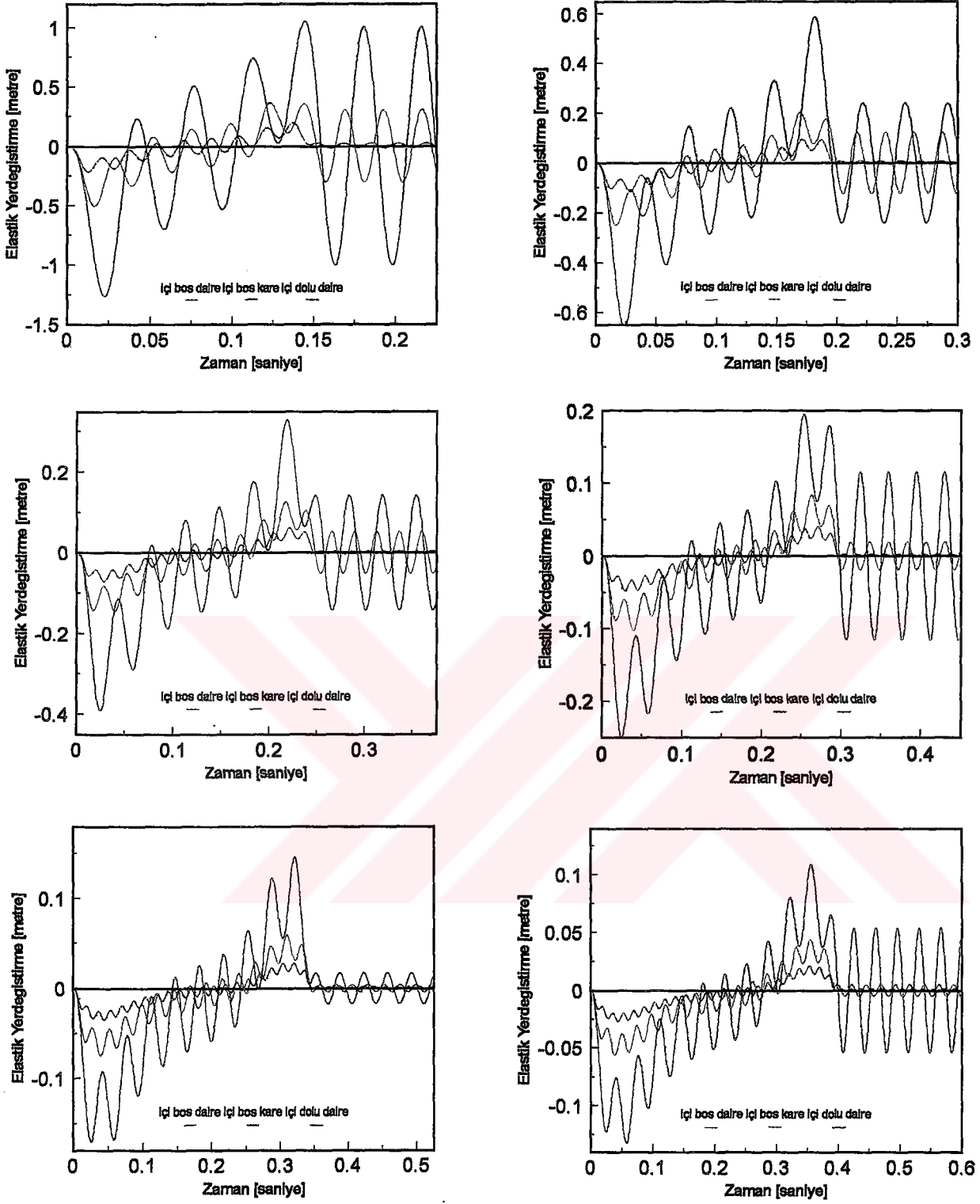
Şekil 7.7 Uzun uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsallı hareketleri altında, $T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$ saniye hareket süreleri için birinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.



Şekil 7.8 Uzun uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsallı hareketleri altında, $T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$ saniye hareket süreleri için ikinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.



Şekil 7.9 Uzun uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsal hareketleri altında, $T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$ saniye hareket süreleri için birinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.



Şekil 7.10 Uzun uçlarında $m_1=1$ kg, $m_2=0.5$ kg taşıyan alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli, içi boş dairesel kesitli ve içi boş kare kesitli uzuvların, optimizasyon yapılmış mafsalları hareketleri altında, $T=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$ saniye hareket süreleri için ikinci uzvun uç noktasının titreşim genlikleri.

7.4 Hareket Süresi ile Artık Titreşim Genliğinin Değişimi

Esnek robot kollarında hareket sonunda oluşan titreşimlere, artık titreşim (residual vibration) denir. Hareket sonunda son nokta civarında konum hassasiyeti istenen robotik uygulamalarında, artık titreşim genliği büyük önem kazanır.

Yapılan simülasyonlarda görüldü ki, artık titreşim genliği de, aynı bölüm 7.3'de hareket sırasında oluşan titreşimlerde açıklandığı gibi uzvun yapıldığı malzeme ve uzuv kesit atalet momentine bağlı olarak değişmektedir. Şekil 7.11 ve Şekil 7.12 'de çelik ve alüminyumdan yapılmış içi dolu dairesel kesitli esnek uzuvların, ikinci dereceden optimizasyon yapılmış ve optimizasyon yapılmamış mafsallı hareketleri altında, değişik uç yükleri taşımaları durumunda, hareket sonunda oluşan artık titreşim genliklerinin hareket süresi ile değişim eğrileri verilmiştir.

Eğrilerden görüldüğü gibi, genel olarak hareket süresinin artmasıyla artık titreşim genliklerinde, eksponansiyel bir azalma meydana gelmektedir. Ancak bu azalma, belirli aralıklarda minimumlar yapan bir karektere sahiptir. Bu minimum hareket süreleri, artık titreşim periyodlarının tam katlarına denk gelmektedir. Bu beklenen bir sonuçtur. Çünkü, esnek uzuvlar hareket sonunda $\theta_i|_{t=T}$ anında sahip oldukları $q_i|_{t=T}$, $\dot{q}_i|_{t=T}$ başlangıç şartları ile serbest titreşim hareketi yapar. Serbest titreşim hareketinin başlangıç şartlarının $q_i|_{t=0} = 0$, $\dot{q}_i|_{t=0} = 0$ olması durumunda, teorik olarak sistemde titreşim olmayacağından, artık titreşimlerin oluşmaması doğaldır. Şekillerde, bu minimum noktaların sıfır olmaması veya sıfıra çok yakın gözükmesi, örnekleme zamanı aralığından kaynaklanmaktadır.

Esnek robot kolların uzuv titreşimleri, gerçekte komşu uzuvlardan etkilenir. Ancak, modellemede VLCS koordinat takımının kullanılması, uzuvların titreşimini veren diferansiyel denklemlerde komşu uzuvlardan gelen etkileri ortadan kaldırır. Böylece uzuvlar münferit bir uzuvmuş gibi titreşim yapar. Malzeme iç sönümü ve mafsallı sönüm etkilerinin ihmal edildiği esnek robot kolları, hareket sonunda serbest titreşim frekansında artık titreşim

yapar. Örnek problem için birinci ve ikinci kolun serbest titreşim frekansını veren ifadeler aşağıda verilmiştir.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{E_1 I_1 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1''^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1}{A_1 \rho_1 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_1^2(\hat{x}_1) d\hat{x}_1}} \quad (7.3)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{E_2 I_2 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_2''^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2}{A_2 \rho_2 \int_0^{L_1} \hat{\phi}_2^2(\hat{x}_2) d\hat{x}_2}} \quad (7.4)$$

Tablo 1' deki değerler için kolların titreşim frekansları

$$\omega_1 = 200.4 \quad \text{rad / s} \quad (7.5)$$

$$\omega_2 = 182.9 \quad \text{rad / s} \quad (7.6)$$

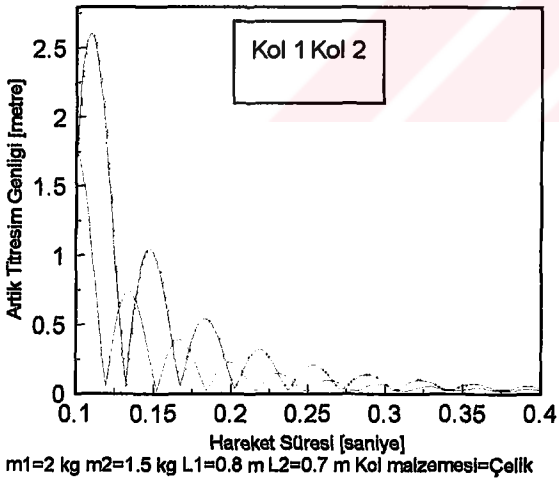
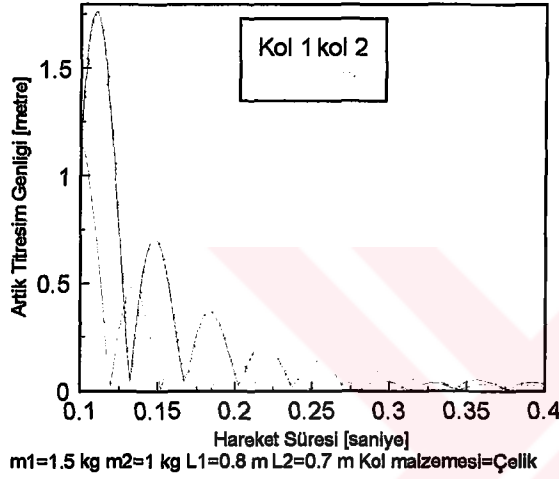
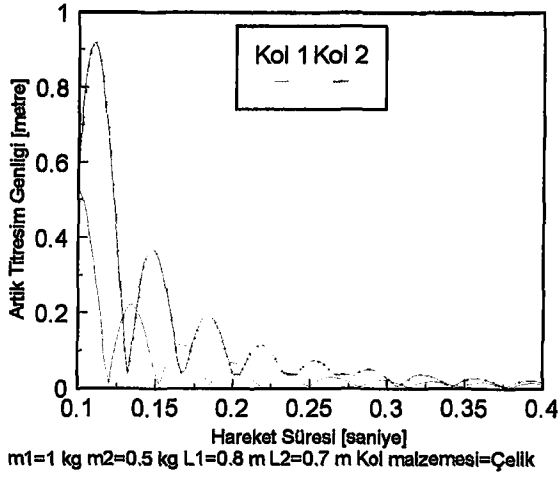
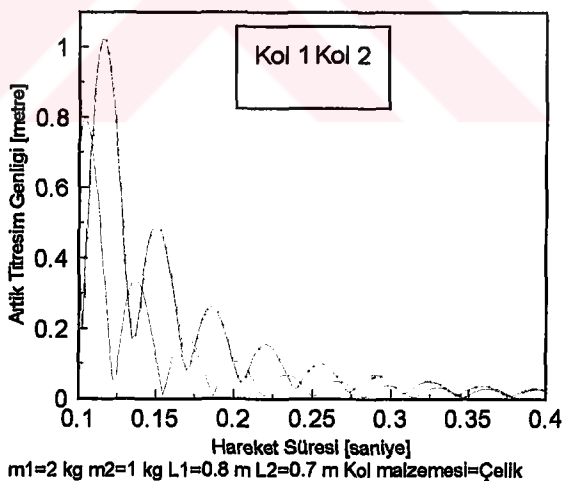
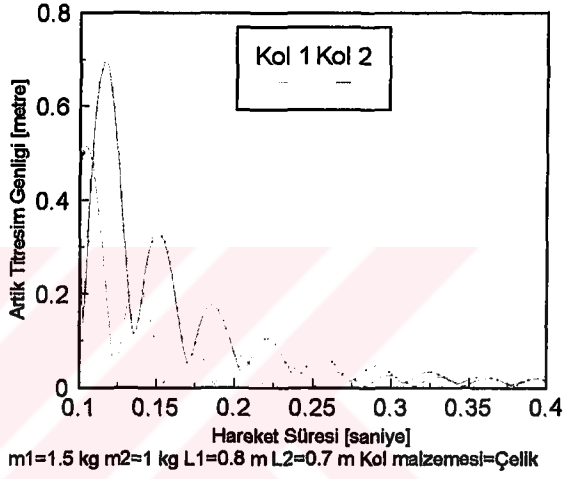
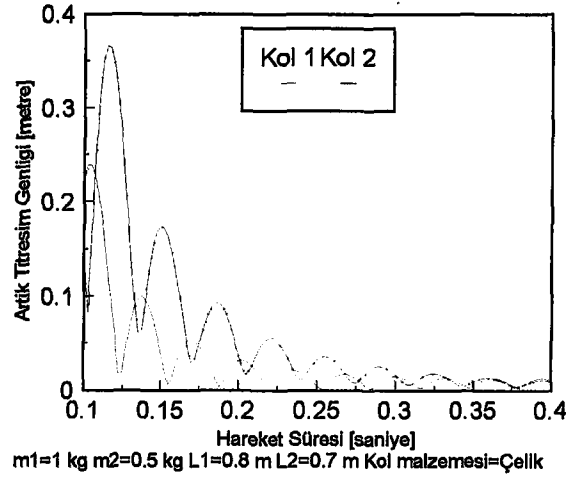
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ifadesinden de titreşim periyodları,

$$T_1 = 0.031409 \quad \text{s} \quad (7.7)$$

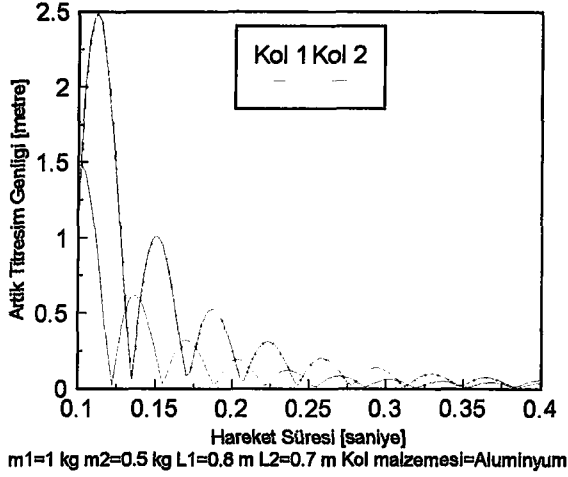
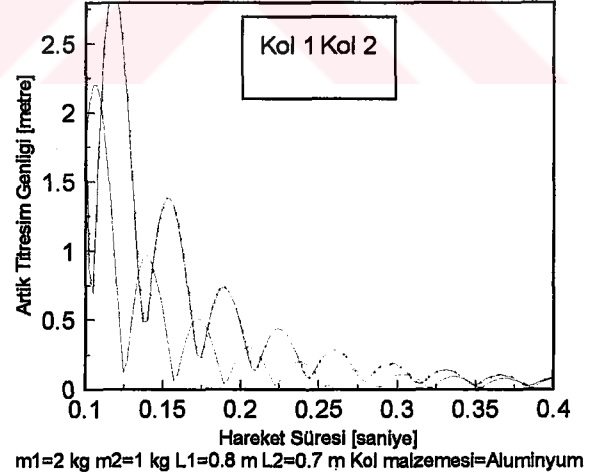
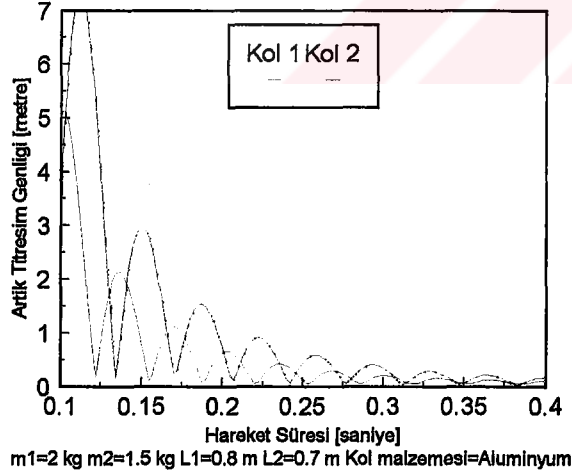
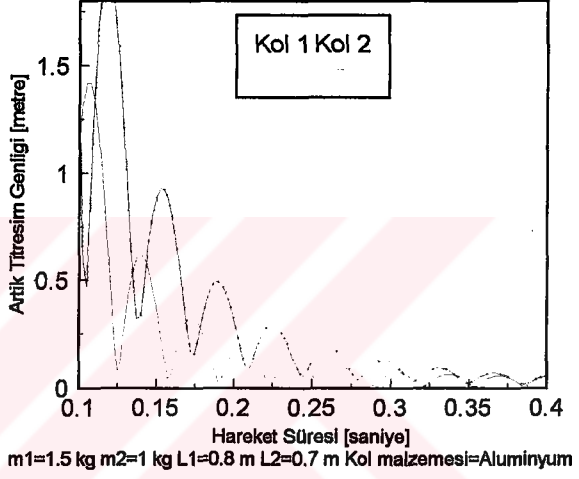
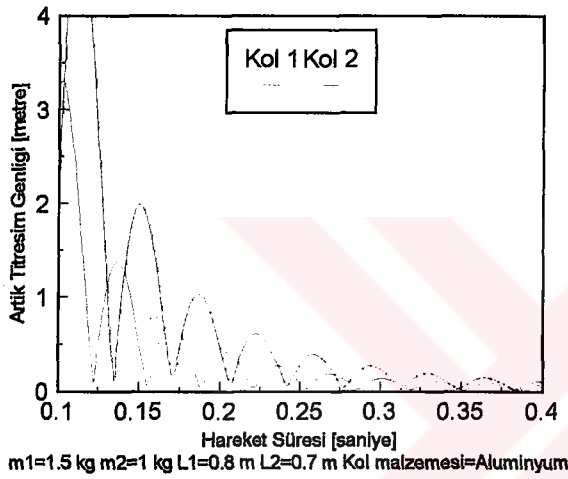
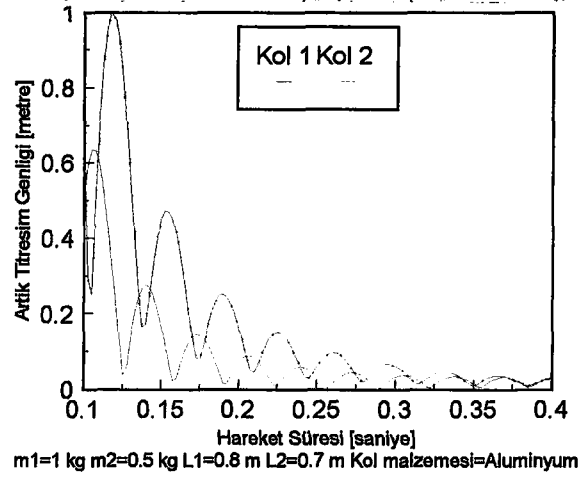
$$T_2 = 0.034354 \quad \text{s} \quad (7.8)$$

olarak bulunur.

Uzuvların hareket süreleri eğer bu periyodların tam katları ise, doğal olarak hareket sonunda titreşim genliği sıfır olacaktır.

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

Şekil 7.11 Uzun uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2$ kg ve $m_2=0.5, 1, 1.5$ kg yük taşıyan çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsalsal hareketleri altında, birinci ve ikinci uzvun uç noktasının artık titreşim genliklerinin hareket süresiyle değişimi.

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

Şekil 7.12 Uzun uçlarında sırasıyla $m_1=1, 1.5, 2 \text{ kg}$ ve $m_2=0.5, 1, 1.5 \text{ kg}$ yük taşıyan alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzunların optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsalsal hareketleri altında, birinci ve ikinci uzvun uç noktasının artık titreşim genliklerinin hareket süresiyle değişimi.

7.5 Hareket Süresi ile Servomotorların Elektriksel Parametrelerinin Değişimi

Optimum mafsal hareketlerinin tesbitinde, yalnız harcanan enerjinin, hareket süresinin ve meydana gelen artık titreşim genliğinin minimize edilmesi ile sınırlı olmayıp, optimum mafsal hareketlerinin ancak servomotor dinamik sınırlamalarının müsaadesi oranında olacağı tezin başında belirtilmişti. Örnek problemde, servomotor dinamik sınırlamaları için herbir servomotorun, bir adet nokta ve bir adette ortalama tipi olmak üzere iki sınırlamaya maruz kaldığı kabul edilmiştir.

Nokta tipi sınırlama olarak besleme gerilimi alındı. Bu sınırlama herbir servomotor için,

$$u_i - U_i \leq 0 \quad (7.9)$$

şeklinde ifade edilir. Burada u_i , i. servomotorun besleme geriliminin hareket sırasında alabileceği en büyük değeri, U_i ise gerilim kaynağının verebileceği en büyük gerilim değerini gösterir.

Ortalama tipi sınırlama olarak ise, servomotor sargılarındaki ısınmanın bir ölçüsü olmak üzere sargı akımının karesel ortalaması alındı. Bu sınırlama herbir servomotor için,

$$i_i - I_i \leq 0 \quad (7.10)$$

şeklinde gösterilir. Burada i_i , i. servomotor yükteyken motor sargılarından geçen akımın,

$$i_i = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \quad (7.11)$$

şeklinde tanımlanan karesel ortalamasını, I_i ise bu ortalamanın müsaade edilen en yüksek değerini gösterir.

i. servomotor için, (7.9) ifadesi (6.28) ve (6.29) denklemleri de kullanılarak,

$$u_i = \left| \frac{R_i}{K_{t_i} N_i} \tau_i^*(\tau) + \frac{K_{e_i} N_i}{T} \theta_i'(\tau) \right| \leq U_i \quad (7.12)$$

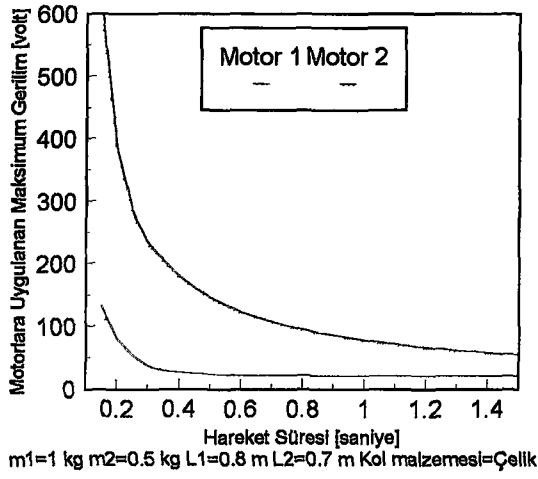
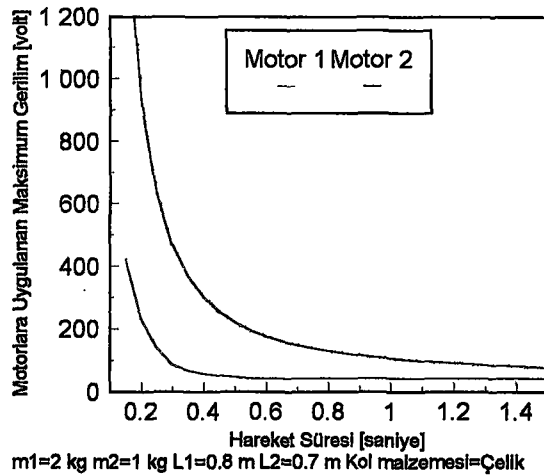
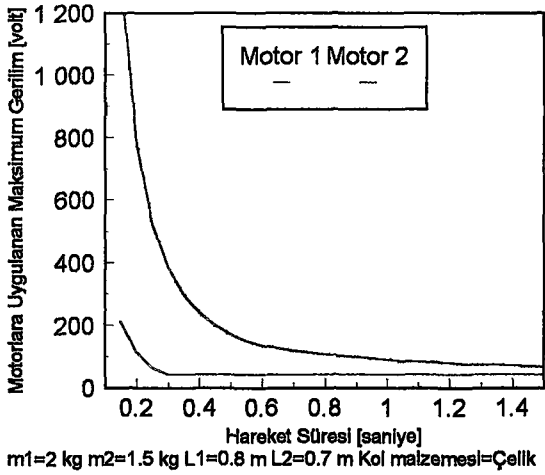
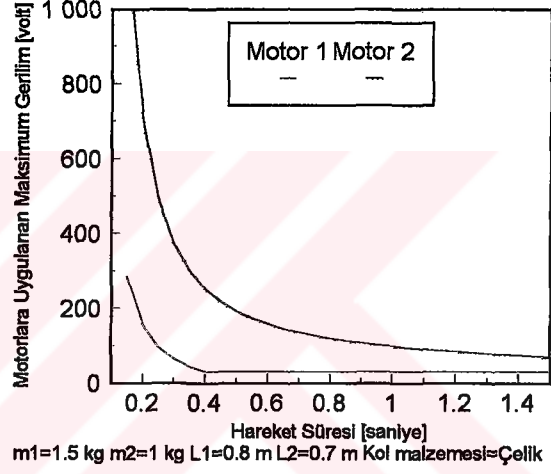
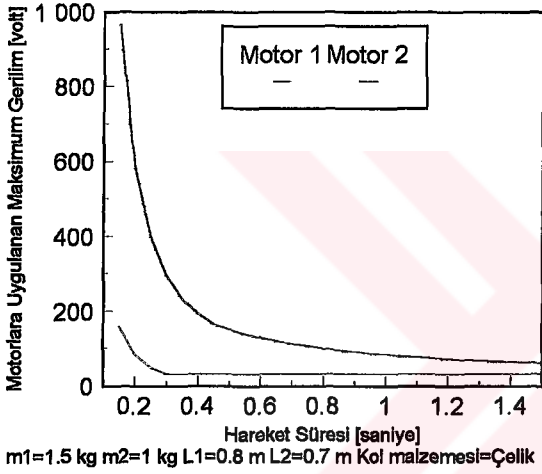
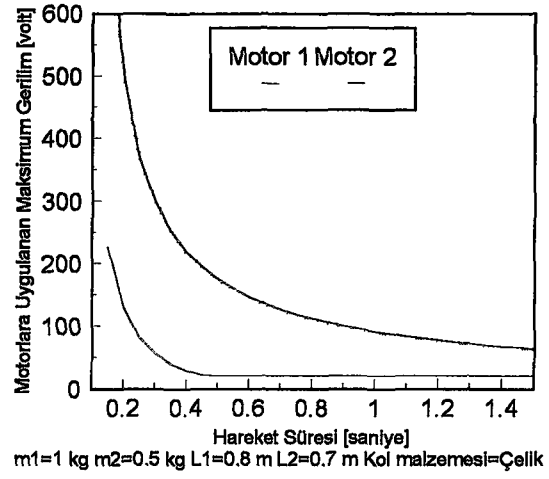
şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Aynı şekilde, (6.29) denklemi, (7.11) ifadesinde yerine konursa, sargı akımının karesel ortalaması üzerindeki ortalama tipi sınırlamada,

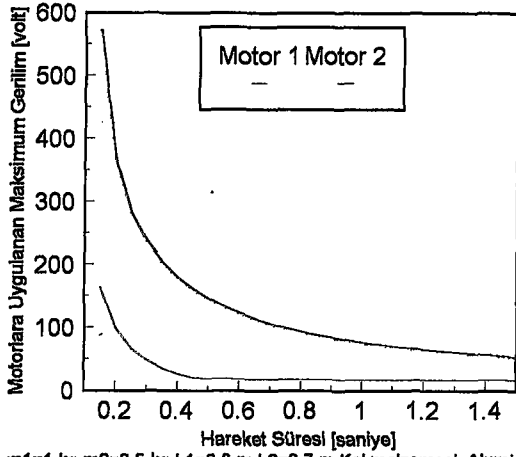
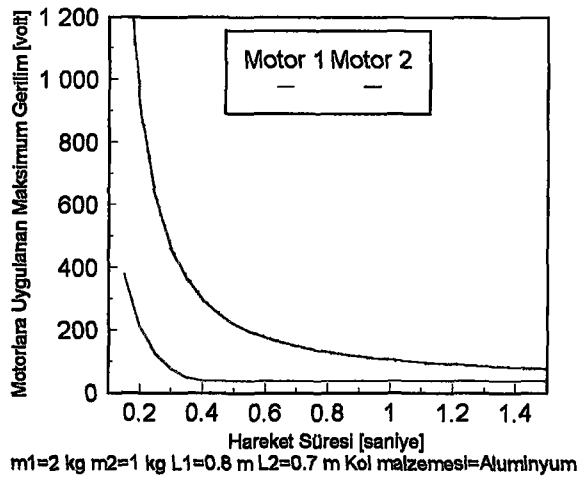
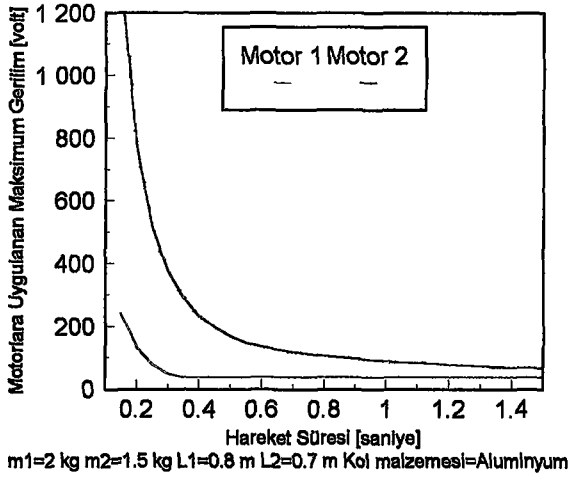
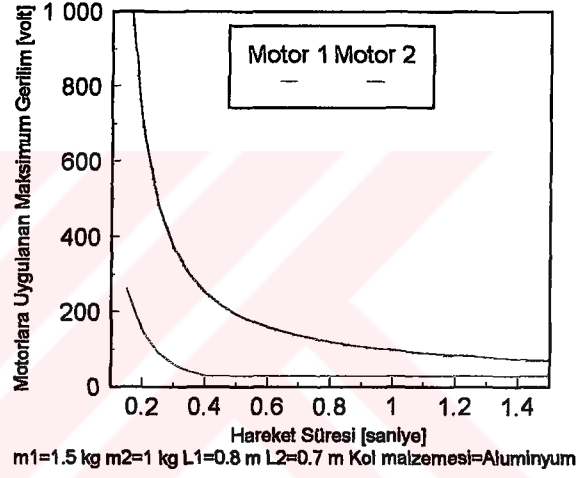
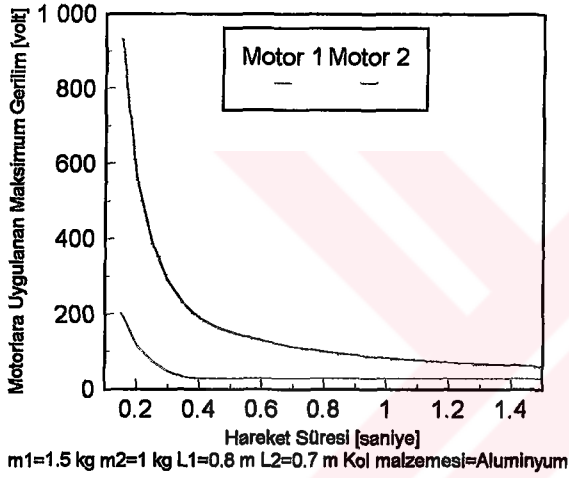
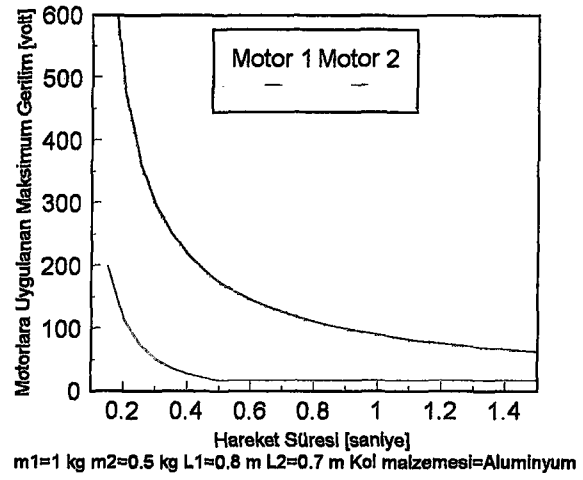
$$i_i = \frac{1}{K_{t_i} N_i} \sqrt{\int_0^1 (\tau_i^*(\tau))^2 d\tau} \leq I_i \quad (7.13)$$

şeklinde elde edilir. (7.12) ve (7.13) eşitliklerinin örnek problemde alınan ikinci dereceden optimizasyon yapılmış ve yapılmamış mafsallı hareketleri için, çelik ve alüminyum malzemeden imal edilmiş, içi dolu daire kesitli uzuvların uç noktalarında taşıdıkları $m_1 = 1, 1.5, 2$ kg ve $m_2 = 0.5, 1, 1.5$ kg kütleler için servomotorların çektiği akımın, karesel ortalaması ve servomotorlara uygulanan maksimum gerilimin hareket süresi ile değişimi Şekil 7.13, Şekil 7.14, Şekil 7.15 ve Şekil 7.16' da verilmiştir.

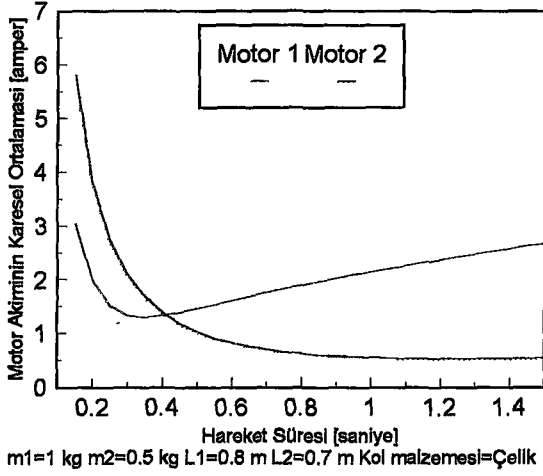
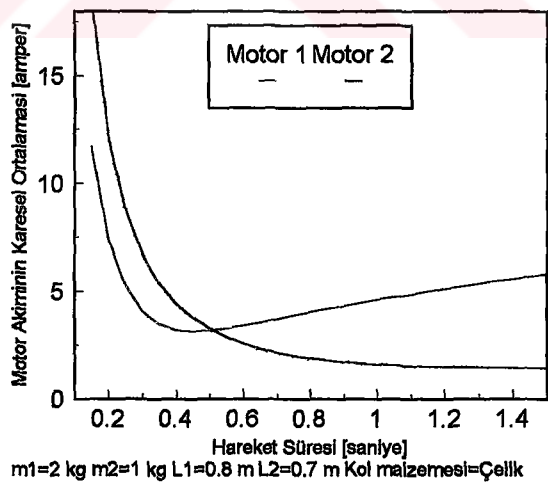
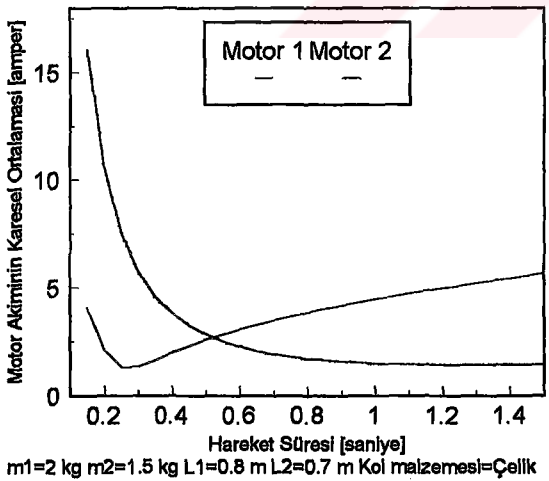
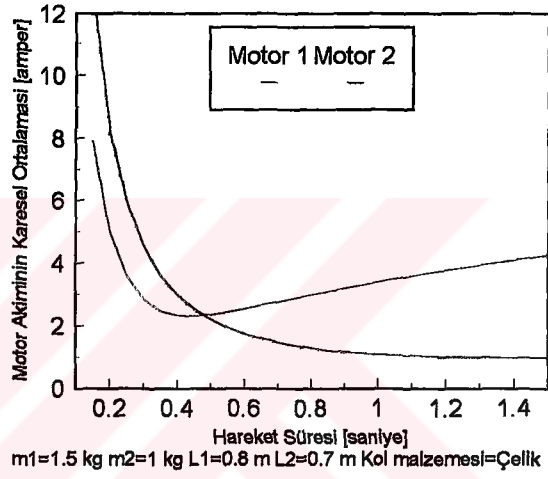
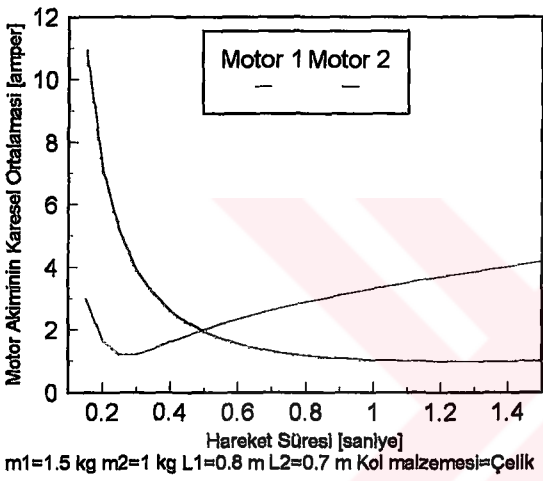
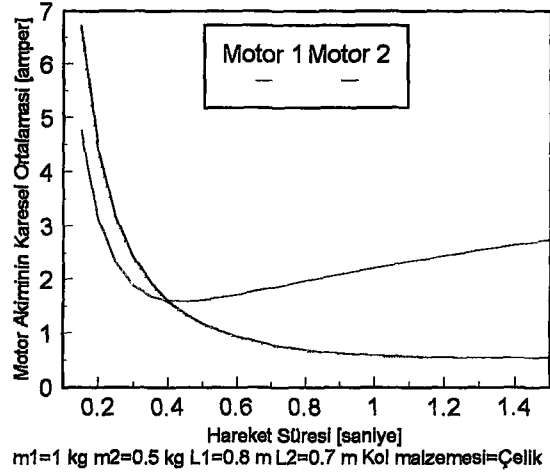
Şekillerin incelenmesinden görüleceği üzere, her bir hareketde taşınan uç kütlelerin artmasıyla eğrilerin karakterinde bir değişim olmamakta sadece aynı hareket sürelerine karşı gelen motor akımının karesel ortalaması ve motorlara uygulanan maksimum gerilim değerleri yükselmektedir. Motor sargı akımlarının karesel ortalama değeri, hareket süresi ile belli bir noktada minimum yapacak şekilde değişim göstermektedir. Bu minimum noktalar, esnek uzuvların hareketinin farklı başlangıç değerleri için değişik hareket sürelerinde meydana gelmektedir. Motorlara uygulanan maksimum gerilimin hareket süresi ile değişimi ise, aynı hareket süreleri için, taşınan kütlenin artmasıyla uygulanan gerilim de orantılı olarak artış göstermektedir. Ancak esnek uzuvların hareketinin, farklı başlangıç değerleri için eğrilerin karakterinde bir değişim olmamakta, servomotor gerilimi hareket süresi ile azalarak belirli bir süreden sonra sabit kalmaktadır.

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

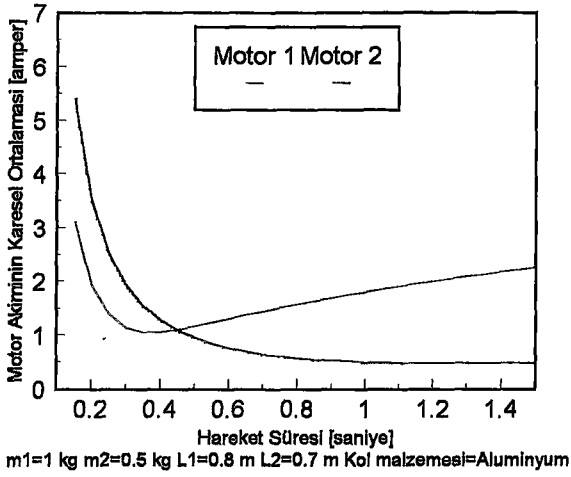
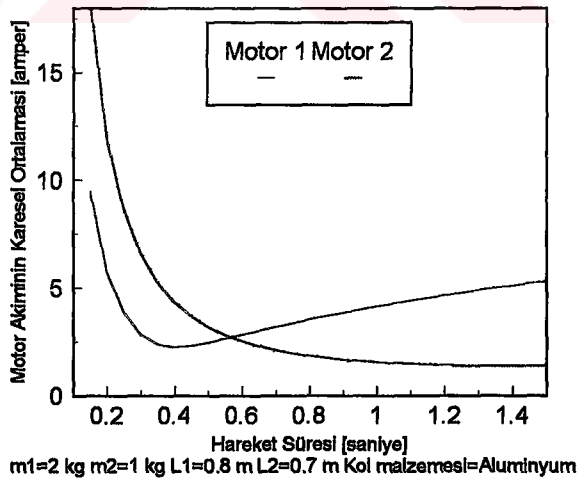
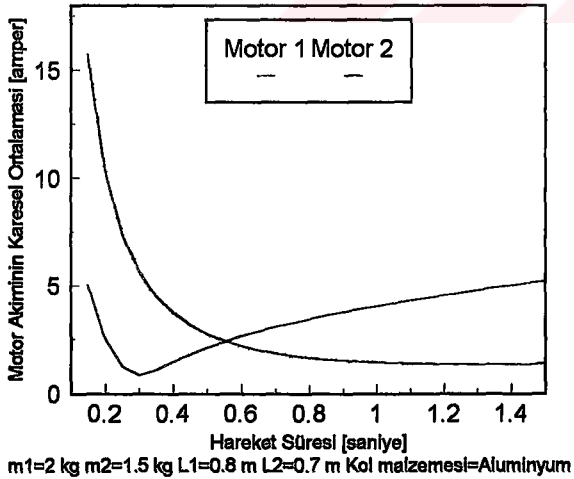
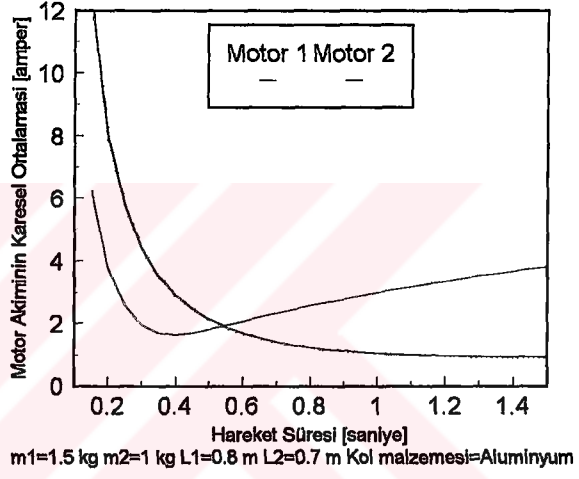
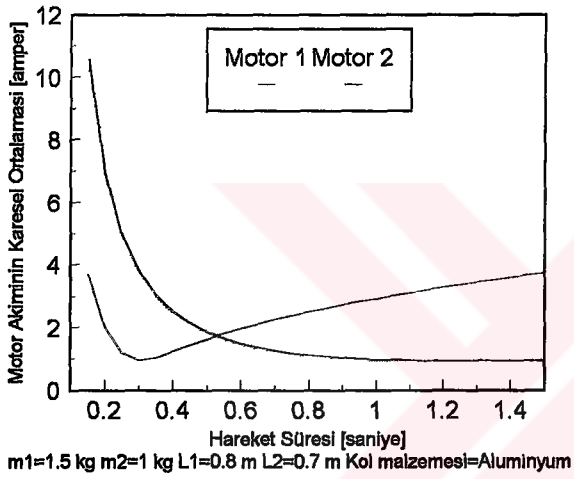
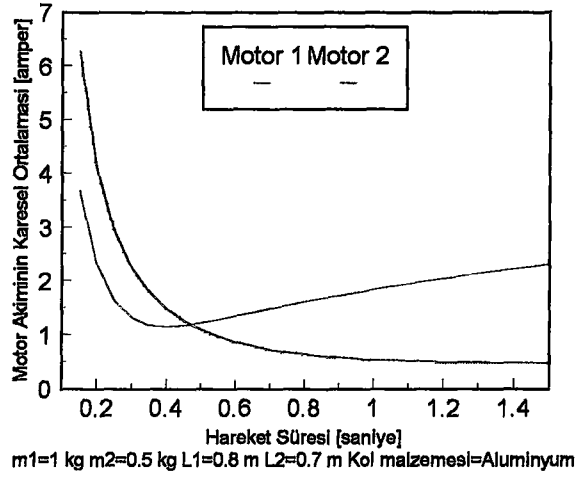
Şekil 7.13 Farklı uç kütleleri için, çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorlara uygulanan maksimum gerilimin hareket süresi ile değişimi.

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

Şekil 7.14 Farklı uç kütleleri için, alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorlara uygulanan maksimum gerilimin hareket süresi ile değişimi.

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

Şekil 7.15 Farklı uç kütleleri için, çelik malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorların çektiği akımın karesel ortalamasının hareket süresi ile değişimi.

Optimizasyon yapılmış hareket**Optimizasyon yapılmamış hareket**

Şekil 7.16 Farklı uç kütleleri için, alüminyum malzemeden yapılmış içi dolu dairesel kesitli uzuvların, mafsallarında bulunan D.C servomotorların çektiği akımın karesel ortalamasının hareket süresi ile değişimi.

7.6 Tezden Sağlananlar

Bu tezde, esnek uzuvlu robotların noktadan noktaya hareketini, minimum enerji, zaman ve artık titreşim genliği ölçütleri altında ve servomotor dinamik sınırlamalarının müsaadesi ölçüsünde gerçekleştirecek, optimum mafsal hareketlerinin bulunması amaçlanmıştır. Minimize edilmesi amaçlanan enerji, zaman ve artık titreşim genliklerinin birbiriyle değişimi incelenmiştir.

Önerilen optimizasyon yönteminde (6.39) ve (6.46) eşitlikleri ile enerji ve zaman açısından optimum mafsal değişkenlerinin bulunması sağlanırken, artık titreşim genliği ve servomotor dinamik sınırlamaları, optimizasyona aktif olarak katılmayıp sadece aşılması gereken üst sınırlar olarak optimizasyon işlemine dahil edilmiştir.

Ede edilen sonuçlardan görülmüştür ki, bir optimizasyon parametresi olan hareket süresi T 'nin tesbiti, bu problemde esas amaç olmamakla birlikte, mafsal parametrelerinde olduğu gibi rastgele seçilmesi durumunda optimizasyon süresini önemli ölçüde uzatacaktır. Hareket süresi T 'in rastgele seçilmesi yerine, denklem (7.3) ve (7.4) gözönüne alınarak T 'nin uzuvların serbest titreşim periyodlarının tam katlarında seçilmesi, optimizasyon süresinin kısaltılmasında büyük katkı sağlayacaktır. Kullanılan optimizasyon yöntemi sayesinde, yumuşak kalkış ve duruşlu mafsal hareketleri elde edilmesi ve bunun sonucu olarak, pratikte uygulanabilir mafsal moment fonksiyonlarını vermesi, bu yöntemin önemli bir avantajıdır. Bu açıklamalar ışığında, tezin genel bir sonucu olarak esnek robot uzuvlarında oluşan artık titreşimlerin önlenmesi ve optimum mafsal hareketlerinin bulunmasında şu önerilerde bulunmak mümkündür.

- Artık titreşim genliğinin azaltılması için uzuv malzemesi elastisite modülü yüksek malzemelerden seçilmelidir.
- Uzuv kesitleri içi boş kare veya dikdörtgen kesitli olmalıdır.
- Uzuvların kendi ağırlığı ile servomotor ağırlıklarının toplamının taşınan ağırlığa oranı, mümkün olduğu kadar küçük tutulmalıdır.

- Hareket süresinin tesbitinden önce uzuvların tabii titreşim frekansları tesbit edilmelidir.
- Optimizasyon mertebesi olarak ikinci derecenin kullanılması, optimizasyon süresi bakımından en uygun mertebedir.

7.7 Gelecekte Yapılması Önerilen Çalışmalar

- Bu çalışmada, robot geometrik parametreleri, sabit kabul edilerek optimum mafsalsal hareketleri bulundu. Bundan sonraki çalışmalarda, robotun geometrik ve servomotor dinamik parametrelerinin, optimum mafsalsal hareketlerine etkisi incelenebilir.
- Optimizasyon serbest değişkenlerinin seçimi için uygun bir algoritma araştırılması yapılabilir. Böylece, bu çalışmada yapıldığı gibi optimizasyon serbest değişkenlerinin seçiminin rastgele değil de, belli bir algoritmaya bağlı olarak yapılması durumunda, hem mafsalsal hareketlerinin derecesi yükseltilebilir, hem de optimizasyon için gerekli hesaplama zamanı kısaltılmış olur.
- Bir robotun çalışma uzayı, bu çalışmada kabul edilenin aksine tamamen boş olmayıp gerçekte optimum mafsalsal hareketlerinin gerçekleştirilmesine mani olabilecek sabit veya hareketli engellere sahiptir. Bu engelleri de, gözönüne alan daha gerçekçi bir optimizasyon çalışması yapılabilir.

KAYNAKLAR

Al-Bedoor, B.O., Khulief, Y.A., (1996), "Finite Element Dynamic Modeling of a Translating and Rotating Flexible Link", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 131, 173-189.

Asada, H., Ma, Z.-D., Tokumaru, H., (1990), "Inver Dynamics of Flexible Robot Arms: Modeling and Computation for Trajectory Control", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* June, Vol .112.

Bayo, E., Papadopoulos, P., Stubbe, J. and Serna, M.A.,(1989) "Inverse Dynamics and Kinematics of Multilink Elastik Robots: An Iterative Frequency Domain Approach", *The International Journal of Robotics Research*, Vol 8, No.6, December

Bock, O., D'Eleuterio, G.M.T., Lipitkas, J., and Grodski, J.J., (1996), " Parametric Motor Control: A New Approach to the Control of Point-to-Point Manipulator Movements" *Journal of Robotics Systems* Volume 13(1), pp 35-40

Book, J.W., (1984), "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", *The International Journal of Robotics Research*, Vol 3, N0 3.

Book, J.W., Maizza-Neto, O., Whitney, D.E., (1975), "Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems With Distributed Flexibility", *Transactions of the ASME*, December.

Chang,L.W.,and Hamilton, J.F. (1991), "Dynamic of Robotic Manipulators with Flexible Links" *Journal of the Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Transaction of the ASME, 54/Vol.113, March, pp 54-59

Chen, M. and Zalzala, A.M.S.,(1997) " A Genetic Approach to Motion Planning of Redundant Mobile Manipulator Systems Considering Safety and Configuration" *Journal of Robotics Systems* Volume 14(7), pp 529-544

Choi, S.B. and Shin, H.C. (1996) " A Hybrid Actuator Scheme for Robust Position Control of a Flexible Single-Link Manipulator" *Journal of Robotics Systems* Volume 13(6), pp 359-370

Croft, E. A., Benhabib, B., Fenton G., (1995), "Near-Time Optimal Robot Motion Planning for On-line Applications", *Journal of Robotic Systems*, 12(8), 553-567.

Fukuda, T., Arakawa, A., (1987), "Modeling and Control Characteristics for a Two-Degrees-of-Freedom Coupling System of Flexible Robotic Arms", *JSME International Journal*, Vol 30, No 267.

Fukuda, T., Arai, F., Hosogai, H., Yajima, N., (1988), "Flexibility Control of Flexible Structures", *JSME International Journal, Series III*, Vol 31, No 3.

Furusho, J., Nagao, H., Naruse, M., (1992), "Multivariable Root Loci of Control System of Robot Manipulators with Flexible Driving Systems", JSME International Journal, Series III, Vol 35, No 1.

Ge, S.S., Lee, T.H., and Zhu, G. (1997) "A Nonlinear Feedback Controller for a Single-Link Flexible Manipulator Based on a Finite Element Model", Journal of Robotics Systems Volume 14, pp 165-178

Gogate, S., Lin, Y-J., (1993), "Formulation and Control of Robots with Link and Joint Flexibility", Robotica, Volum 11, pp 273-282.

Gordaninejad, F., Azhdari, A. and Chalhoub, N.G.,(1991), "Nonlinear Dynamic Modelling of a Revolute-Prismatic Flexible Composite-Material Robot Arm" Journal of Vibration and Acoustics, Volume.113, October , pp 461-468

Jin Li, Chang, (1989)"A New Lagrangian Formulation of Dynamics for Robot Manipulators", Journal of the Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transaction of the ASME, Vol.111, December, pp 559-566

Kyung-jo, P., Youn-sik P., (1993), "Fourier-based Optimal Design of a Flexible Manipulator Path to Reduce Residual Vibration of the Endpoint", Robotica, volume 11, 263-272.

Lee, T-S., Lin, Y-J., (1993), "Shear Deformation Effect in Design Considerations of Flexible Manipulators", Robotica, Volume 11, pp83-92.

Li, C. J., (1988), "A New Method of Dynamics for Robot Manipulators", IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Vol SMC-18, No 1, pp 105-114

Li, Z.,J., and Trabia, B., Mohamed, (1996) "Adaptive Path Planning and Obstacle Avoidance for a Robot with a Large Degree of Redundancy" Journal of Robotics Systems Volume 13, pp 163-176

Lin, Y-J., Zhang, H-Y., (1993), "Simplification of Manipulator Dynamic Formulations Utilizing a Dimensionless Method", Robotica, Volume 11, pp 139-147.

Mills, K.J., and Lawryshyn, A.Y., (1997), "Robot Link and Contact Surface Dynamic Interaction: An Experimental Study of Contact Task Instability", Journal of Robotics Systems Volume 14(3), pp 213-227

Moallem, M., Patel, R.V., Moallem, M.,(1997)", An Inverse Dynamics Control Strategy for Tip Position Tracking of Flexible Multi-Link Manipulators", Journal of Robotics Systems Volume 14, pp 649-658

- Morimoto, Y., Inamura, T., Makita, R., (1990), "Analysis and Control of a Flexible Robot Arm by Using Experimental Modal Analysis", JSME International Journal, Series III, Vol 33, No 4.
- Morris, A.S and Madani, A. (1996) "Static and Dynamic Modelling of a Two-Flexible-Link Robot Manipulator", *Robotica*, Volume 14., pp 289-300
- Namgung, I., and Duffy, J., (1997) "Two Dimensional Collision-Free Path Planning Using Linear Parametric Curve" *Journal of Robotics Systems* Volume 14, pp 659-673
- Parks, T.R., Pak, H.A., (1991), "Effect of Payload on the Dynamics of a Flexible Manipulator-Modeling for Control", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* September, Vol .113.
- Pham,C.M., Khalil W.and Chevallereu C.,(1993), "A Nonlinear Model-Based Control of Flexible Robots" , *Robotica*, Volume 11, pp73-82
- Raibert, M. H., Horn, B. K. P., (1987), "Manipulator Control Using the Configuration Space Method", *Industrial Robot*, Vol 5, No 2
- Sakuta, H., Yoshitani, Y., Mukai, Y., Yonezawa, T., (1988), "Vibration Absorption Control of a Robot Arm Software Servomechanism", JSME International Journal, Series III, Vol 31, No 3.
- Sharan,A.M., Jain,J. and Kalra P. (1992) "Efficient Methods for Solving Dynamic Problems of Flexible Manipulators" *Journal of the Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transaction of the ASME*, Vol.114, March, pp 78-87
- Simo, J.C., Vu-Quoc, L., (1986), "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions-The Plane Case: Part 1", *Journal of Applied Mechanics*, Vol 53, December.
- Singh, S.N., Schy, A.A., (1986), "Control of Elastic Robotic Systems by Nonlinear Inversion and Modal Damping", *Journal of the Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transaction of the ASME*, 180/Vol.108, September, pp180-188
- Spong, M.W., (1987), "Modeling and Control of Elastic Joint Robots" *Transactions of the ASME*, Vol 109, December, pp 310-319
- Streit, D.A., Krousgrill, C.M., Bajaj, A.K., (1989), "Nonlinear Response of Flexible Robotic Manipulators Performing Repetitive Tasks", *Transaction of the ASME*, Vol.111, September, pp470-480
- Su, C., Stepanenko, Y. (1996), "On the Robust Control of Robot Manipulators Including Actuator Dynamics" *Journal of Robotics Systems* Volume 13(1), pp 1-10
- Sugiuchi, H., Yoshimoto, K., (1989), "Preview Tracking Control of a Flexible Manipulator", JSME International Journal, Series III, Vol 32, No 3.

- Tahara, M., Chonan, S., (1988), "Closed-Loop Displacement Control of a One-Link Flexible Arm with a Tip Mass", JSME International Journal, Series III, Vol 31, No 2.
- Tomei, P., Tornambe, A., (1988), "Approximate Modeling of Robots Having Elastic Links", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol.18, No.5.
- Turhan, Ö., (1989), "Robot Kolları Optimum Hareket Sentezi", Doktora tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Won, J. H., Choi, B. W., Chung, M. J., (1993), "A Unified Approach to the Inverse Kinematic Solution For a Redundant Manipulator", Robotica, volume 11, 159-165.
- Wu, J., Yoshimoto, K., (1991), "A Study on the Speeding Up of the Motion of a Flexible Robot Arm", JSME International Journal, Series III, Vol 34, No 3.
- Wang, T., Kohli, D., (1985), "Closed and Expanded Form of Manipulator Dynamics Using Lagrangian Approach", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design", Vol 107, pp 223-225
- Yamura, H., Ono, K., (1989), "Nonlinear Bending Vibration of a Rapidly Driven Flexible Arm", JSME International Journal, Series III, Vol 32, No 3
- Yamura, H., Ono, K., (1989), "Vibrationless Starting and Stopping Control for a Flexible Arm", JSME International Journal, Series III.
- Yao, C. M., Cheng W. H., (1995), "Joint Space Trajectory Planning for Flexible Manipulators", Journal of Robotic Systems, 12(5), 287-299.
- Yim, W., Singh, S. N., (1996), "Predictive End-Point Trajectory Control of Elastic Manipulators", Journal of Robotic Systems, 13(9), 561-569.
- Yim, W., Zuang, J., N.Singh, S., (1992), "Experimental Two-Axis Vibration Suppression and Control of a Flexible Robot Arm", Journal of Robotic System 10(3), 321-343.
- Yoshida, Y., Tanaka, M., (1993), "Position Control of a Flexible Arm Using a Dither Signal", JSME International Journal, Series C, Vol 36, No 1.