

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

79207

**TEK YÖNLÜ LİF-LEVHALI KOMPOZİTLERİN
BASINÇ ALTINDA KIRILMA
PROBLEMLERİ**

Arzu ÇİLLİ

F.B.E. Fizik Anabilim Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

79207

Tez Savunma Tarihi	: 9 Temmuz 1998
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Durul ÖREN (YTÜ)
İkinci Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (YTÜ)
Jüri Üyeleri	: Prof. Dr. Metin ARIK (BÜ)
	: Prof. Dr. Şehsuvar ZEBİTAY (İÜ)

Ş. ZEBİTAY

D. ÖREN

M. Arik
Metin Arik

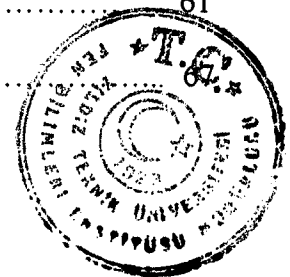
S. Akbarov

İSTANBUL, 1998

İÇİNDEKİLER

Sayfa

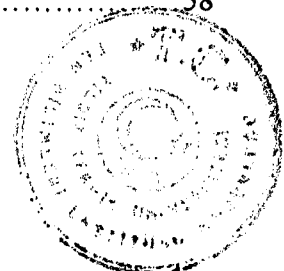
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	viii
TEŞEKKÜR.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Kompozit Malzemelerin Kırılma Mekaniğine Ait Genel Bilgiler.....	1
1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti.....	4
1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği.....	7
1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları.....	8
2. ELASTİSİTE ve VİSKOELASTİSİTE TEORİSİNİN LİNEERİZE EDİLMİŞ DENKLEMLERİ ve BU DENKLEMLERİN TEK YÖNLÜ KOMPOZİTLERİN KIRILMA MEKANİĞİNE UYGULANMASI.....	9
2.1 Elastisite ve Viskoelastisite Teorisinin Geometrik Non-Linear Denklemleri.....	9
2.2 Non-Linear Denklemlerin Lineerize Edilmesi.....	16
2.3 Lineerize Edilmiş Denklemlerin Stabilitate Problemlerine Uygulanması.....	20
2.3.1 Tek yönlü kompozitlerin yapısındaki stabilite kaybı.....	21
2.3.2 Tek yönlü kompozitlerin teorik basınç limitinin belirlenmesi.....	29
3. YAPISINDA YEREL EĞRİSELLİK OLAN TEKYÖNLÜ ELASTİK KOMPOZİTLERİN BASINÇ ALTINDA KIRILMASININ İNCELENMESİ	32
3.1 Problemlerin Matematiksel Formülasyonu.....	32
3.2 Çözüm Yöntemi ve Kırılma Kriteri.....	34
3.3 Sıfıncı, Birinci ve İkinci Yaklaşımların Belirlenmesi.....	38
3.3.1 Sıfıncı yaklaşım.....	38
3.3.2 Birinci yaklaşım.....	39
3.3.3 İkinci yaklaşım.....	46
3.4 Birinci ve İkinci Yaklaşımlardan Elde Edilen Kritik Değerlerin Karşılaştırılması... ..	49
3.5 Sayısal Sonuçlar ve İncelenmesi.....	51
4. TEK YÖNLÜ VİSKOELASTİK KOMPOZİTLERİN TEORİK BASINÇ LİMİTLERİNİN BELİRLENMESİ.....	60
4.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu.....	60
4.2 Sıfıncı ve Birinci Yaklaşımlara Ait Quasistatik Sınırdeğer Problemlerinin İncelenmesi.....	61
4.3 Problem Parametrelerinin Teorik Basınç Kırılma Süresine Etkisini Gösteren Sayısal Sonuçların İncelenmesi.....	



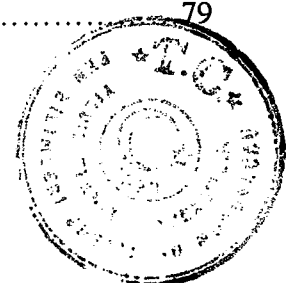
5. SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRİLMESİ.....	94
KAYNAKLAR.....	97
EKLER.....	101
Ek 1. Schapery Yöntemi.....	101
ÖZGEÇMİŞ.....	105



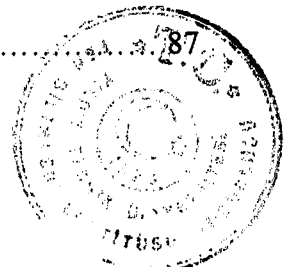
Şekil 2.1	Birbirini tekrarlayan iki tür malzemeden oluşmuş levhalardan elde edilen çok katlı levhalı kompozit malzemenin yapısı.....	20
Şekil 2.2	Yapısındaki stabilite kaybı Sinfaz bir formda meydana gelen çok katlı levhalı kompozit malzeme yapısı.....	28
Şekil 2.3	p_{α} değerleri ile χ değerleri arasındaki iki tip bağımlılık.....	29
Şekil 3.1	Sonsuz küçük yerel eğriselliği olan bir kompozit malzemenin yapısı.....	32
Şekil 3.2	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $\chi=0.1$ halinde $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ olduğu durumlarda $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ ; $ u_2^{(2),2}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	53
Şekil 3.3	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $\chi=0.1$ halinde $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ olduğu durumlarda $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ ; $ u_2^{(2),2}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	53
Şekil 3.4	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=200$, $\chi=0.1$ halinde $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ olduğu durumlarda $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ ; $ u_2^{(2),2}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	54
Şekil 3.5	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	55
Şekil 3.6	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	55
Şekil 3.7	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	56
Şekil 3.8	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	56
Şekil 3.9	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	57
Şekil 3.10	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	57
Şekil 3.11	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=200$, $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	58
Şekil 3.12	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=200$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	58



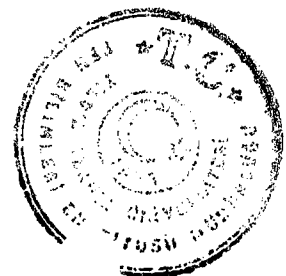
Şekil 3.13	$E^{(2)}/E_0^{(1)}=200, \eta^{(2)}=0.5$ durumunda farklı χ' lar için $ u_2^{(2),1}(0,0) /L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar.....	59
Şekil 4.1	$\omega=0.5, \alpha=-0.7, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100, p/E_0^{(1)}=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $\varphi_2(t'), \varphi_3^{(k)}(t'), \varphi_4^{(k)}(t')$ fonksiyonları ile t' arasındaki bağımlılık.....	72
Şekil 4.2	$\omega=0.5, \alpha=-0.7, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100, p/E_0^{(1)}=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $\varphi_2(t'), \varphi_3^{(k)}(t'), \varphi_4^{(k)}(t')$ fonksiyonları ile t' arasındaki bağımlılık.....	72
Şekil 4.3	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.18$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	73
Şekil 4.4	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.20$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	73
Şekil 4.5	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.22$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	74
Şekil 4.6	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.23$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	74
Şekil 4.7	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.24$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	75
Şekil 4.8	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.25$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	75
Şekil 4.9	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.27$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	76
Şekil 4.10	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.22$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	76
Şekil 4.11	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.23$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	77
Şekil 4.12	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.24$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	77
Şekil 4.13	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.31$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	78
Şekil 4.14	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.36$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	78
Şekil 4.15	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.38$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	79



Şekil 4.16	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.42$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	79
Şekil 4.17	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.28, \eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	80
Şekil 4.18	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.28, \eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	80
Şekil 4.19	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.28, \eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=150$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	81
Şekil 4.20	$\omega=0.5, \alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.28, \eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=200$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	81
Şekil 4.21	$\alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=0.5$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	82
Şekil 4.22	$\alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=1.0$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	82
Şekil 4.23	$\alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=2.0$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	83
Şekil 4.24	$\alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=3.0$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	83
Şekil 4.25	$\alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=5.0$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	84
Şekil 4.26	$\alpha=-0.3, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=6.0$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	84
Şekil 4.27	$\omega=0.5, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.1$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	85
Şekil 4.28	$\omega=0.5, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.3$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	85
Şekil 4.29	$\omega=0.5, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.5$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	86
Şekil 4.30	$\omega=0.5, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100, p/E_0^{(1)}=0.42, \eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.7$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	86
Şekil 4.31	$\omega=0.5, E^{(2)}/E_0^{(1)}=100, p/E_0^{(1)}=0.32, \alpha=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	



Şekil 4.32	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	87
Şekil 4.33	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	88
Şekil 4.34	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.5$ ve $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	88
Şekil 4.35	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.5$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	89
Şekil 4.36	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.5$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	89
Şekil 4.37	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.7$ ve $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	90
Şekil 4.38	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.7$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	90
Şekil 4.39	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.7$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $ u_2^{(2),1}(0,0;t') /L$ ile t' arasındaki bağımlılık.....	91



TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1	$\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $p/E_0^{(1)}$ değişiminin t_{α} değerlerine etkisi.....	92
Tablo 4.2	$\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $p/E_0^{(1)}$ değişiminin t_{α} değerlerine etkisi.....	92
Tablo 4.3	$\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.28$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ değişiminin t_{α} değerlerine etkisi.....	92
Tablo 4.4	$\alpha=-0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda ω değişiminin t_{α} değerlerine etkisi.....	93
Tablo 4.5	$\omega=1$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.45$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda α değişiminin t_{α} değerlerine etkisi.....	93
Tablo 4.6	$\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, durumunda α ve $\eta^{(2)}$ değişiminin t_{α} değerlerine etkisi.....	93



TEŞEKKÜR

Tez danışmanlığımı üstlenen ve çalışmalarım sırasında beni her konuda destekleyen ve yalnız bırakmayan sayın hocam Prof.Dr. Durul ÖREN' e çok teşekkür ederim.

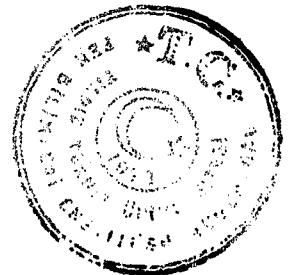
Tez çalışmamın başlangıcından sonuna kadar her aşamasında bilgi, tecrübe ve önerilerinden faydalandığım ve onun sayesinde böyle bir çalışma yapabildiğim için sayın danışman hocam Prof.Dr. Surkay D. AKBAROV' a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, bu çalışma sırasında bana her konuda yardımcı olan Fizik Bölümü Öğretim Üyelerine ve Araştırma Görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca büyük bir sabır ve özveriyle bana destek olan ve manevi yardımlarını esirgemeyen anneme ve babama çok teşekkür ederim.

ARZU ÇİLLİ

Nisan, 1998



ÖZET

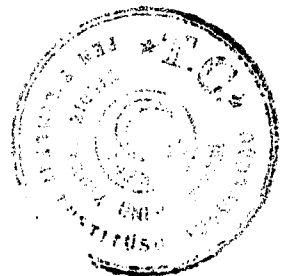
Bu çalışmada tek yönlü kompozitlerin güçlendirici lif veya levhalar yönünde dış basınca maruz kaldığı durumlarda kırılmasının bazı problemleri teorik olarak incelenmiştir. İlk kez tez kapsamında Akbarov vd., (1997) yönteminin hem elastik ve hem de viskoelastik tek yönlü kompozitlerin basınç dayanımlarının teorik sınırlarının belirlenmesine uygulanabileceği gösterilmiş ve bazı test problemlerinin incelenmesine uygulanmıştır.

Bu tezde elastisite ve viskoelastisite teorisinin geometrik non-lineer denklemleri ele alınmış ve bunların lineerize edilmesi incelenmiştir. Lineerize edilmiş bu denklemler stabilite problemlerine uygulanarak, tek yönlü kompozitlerin yapısındaki stabilite kaybı ve basınç altında kırılmanın teorik limiti belirlenmiştir.

Çalışmanın ikinci kısmında, yapısında yerel eğrisellik olan tek yönlü elastik kompozitlerin basınç altında kırılması incelenmiştir. Bu incelemede araştırılan problemlerin matematiksel formülasyonu verilerek çözüm yöntemi ve kırılma kriteri önerilmiştir. Farklı yaklaşımlardan elde edilen kritik değerler karşılaştırılarak sayısal sonuçlar incelenmiştir.

Araştırmanın son kısmında ise tek yönlü viskoelastik kompozitlerin teorik basınç limitlerinin belirlenmesi için problemin matematiksel formülasyonu verilerek farklı yaklaşımlara ait quasistatik sınırdeğer problemleri incelenmiştir. Elde edilen problem parametrelerinin teorik basınç kırılma süresine etkisi sayısal sonuçlarla değerlendirilmiştir.

Sonuç olarak bu çalışmada ilk kez, tek yönlü viskoelastik kompozit malzemelerin teorik basınç kırılma sürelerinin belirlenmesi için parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde viskoelastisite teorisinin kesin geometrik non-lineer denklemleri kullanılarak bir yöntem geliştirilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçların fiziksel yorumları yapılarak bunların gerçek beklentilere uygun oldukları gösterilmiştir.



ABSTRACT

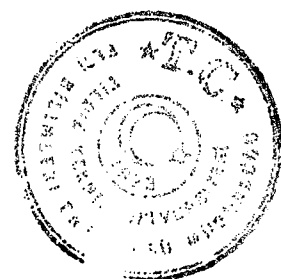
In this study, some problems of the fracture have been theoretically examined, in cases where the unidirectional composites undergo an external pressure in the direction of the reinforcing fiber or plates. In the content of the thesis the method of Akbarov et al., (1997) is shown for the first time to be applicable to the determination of the theoretical limits of the pressure strengths of both elastic and viscoelastic unidirectional composites and is applied to the examination of some test problems.

In this thesis, first the geometrical and non-linear equations of the elasticity and viscoelasticity theory have been treated and their linearization explored. Later, these linearized equations being applied to the stability problems, the loss in stability and the theoretical limit of fracture under pressure of the unidirectional composites are specified.

In the second part of the study, the destruction under pressure of the unidirectional elastic composites having a local curvature is investigated where a mathematical formulation of the problems in question is given and the fracture criterion and the solution procedure are suggested. The critical values attained from the different approaches being compared, some numerical results are examined.

In the last part of the research, the mathematical formulation of the problem being given to specify the theoretical pressure limits of the unidirectional viscoelastic composites, the quasistatic boundary value problems belonging to different approaches have been studied. The effect of the problem parameters obtained on the theoretical pressure fracture time is evaluated by the numerical results.

Consequently, for the first time in this study, has a method been developed by making use of the precise, geometrical non-linear equations of the viscoelasticity theory, within the framework of the piecewise-homogeneous body model, to find out the theoretical fracture periods of the unidirectional viscoelastic composite materials. The physical interpretation of the numerical results acquired being given, it is shown that they comply with the real expectations.



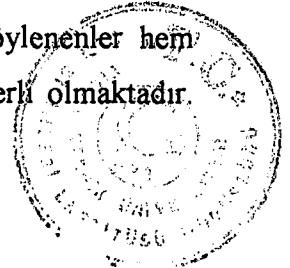
BÖLÜM I

1. GİRİŞ

1.1 Kompozit Malzemelerin Kırılma Mekanizmasına Ait Genel Bilgiler

Kompozit malzemelerin üretiminin günümüzde çok arttığı ve mühendislik, tıp ve çağdaş tekniğin diğer alanlarında yaygın şekilde kullanılması, bu malzemelerin farklı dış etkiler altındaki kırılmalarının incelenmesini gerektirmektedir. Kırılma, bir malzemenin mekaniksel, fiziksel veya herhangi başka bir dış etkiden dolayı ortaya çıkan direncinin kaybolması şeklinde tanımlanır. Bu alandaki incelemeler hem teorik açıdan ve hem de deneysel açıdan yapılabilir. Belirtmek gerekir ki; kırılma olayları makroskopik açıdan yani atom ve molekül boyutlarından çok büyük boyutları içeren kavram ve büyüklükler çerçevesinde incelenir. Bununla birlikte geleneksel malzemelerin teorik çekme, kayma, basınç dayanımlarının incelenmesinde çıkış noktası olarak malzemenin atomsal yapısı ele alınır. Bu durumda atomların ideal dizilim koşulunun sağlandığı kabul edilir ve bilinen teknik bilgiler yardımı ile teorik dayanımların değerleri elde edilir. Bu değerlerin pratikte elde edilen gerçek değerlerden çok büyük olması onların önemini küçültmemektedir. Başka bir deyişle; teorik dayanım değerlerine ulaşamamasının nedenleri (dislokasyonların oluşması, kristal kafeslerindeki hasarların olması,..vs.) araştırılıp incelenir ve bu nedenlerin ortadan kaldırılması ile teorik dayanımlara yaklaşmanın yolları bulunur. Yukarıda anlatılanlar daha geniş bir biçimde Bendler ve Wood (1960), Ekobori (1978), Finkel (1970),..vs. tarafından verilmekte ve açıklanmaktadır. Ancak bu araştırmalar çok kısıtlı sayıda ve daha çok malzemelerin kırılmasının incelenmesi amacı ile değil, başka fiziksel olayların araştırılması nedeni ile yapılmıştır.

Günümüzde malzemelerin kırılması, çatlak tipli hasarların mekaniksel ve fiziksel dış etkiler altında büyüyüp artması, sürekli ortamlar mekanizması çerçevesinde incelenmektedir. Bu tür incelemeler hem geleneksel ve hemde kompozit malzemeler için çok büyük boyutlarda yapılmış ve yapılmaktadır. Bu konuda çok sayıda araştırmanın (Cherepanov (1983), Ekobori (1978), Knott (1979), Parton (1992),..vs.) yayınlanması yukarıda söylenenleri doğrulamaktadır. Adı geçen bu araştırmaların büyük çoğunluğunda malzemenin yapısında çatlakların var olduğu kabul edilir ve Griffith (1920)- Irwin (1957) kriteri kullanılarak çatlak ilerlemesine dış etkilerin ve malzeme özelliklerinin etkisi araştırılır. Bu söylenenler hem geleneksel homojen malzemeler için hem de kompozit malzemeler için geçerli olmaktadır.



Bununla birlikte kompozit malzemelerin kırılmasının geleneksel malzemelerden birçok farklılıkları vardır. Bu farklılıklardan en önemlisi ise kompozit malzemelerin (tek yönlü lif veya levhalı kompozitlerin) dış basınç altında kırılmasıdır. Basınç altında kırılma olaylarını genelde yukarıda adı geçen Griffith-Irwin kriteri yardımı ile araştırmak imkansız olduğundan bu durumlarda başka kriterlerin uygulanması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Şimdi söylenenlere daha kesin bir yön verebilmemiz ve daha net açıklamalar getirebilmemiz için kompozit malzemeler hakkında gerekli bilgileri gözden geçirelim.

Literatürde yapay şekilde oluşturulmuş kompozit malzemeler; aralarında kesin geometrik sınır olan ve kimyasal açıdan en azından iki tür malzemedan meydana geldiği şeklinde tanımlanmaktadır. Bu tanımdan görüldüğü gibi, kompozit malzemeler bileşenlerinin sahip olmadığı özelliklere sahip olurlar. Kompozit malzemenin bileşenleri yaptığı fonksiyonlara bağlı olarak; takviye (güçlendirici) ve matris diye ikiye ayrılır. Genellikle, takviyeler (güçlendiriciler); kompozit malzeme içerisinde yük taşıma görevini görür. Matris malzemesi ise takviyelerin birliğini ve karşılıklı etkileşimini sağlar.

Kompozit malzemelerin birçok açıdan sınıflandırılması yapılabilir. Bunlardan en yaygın olanı ve bu malzemelerin mekaniğinde sıkça kullanılanı, kompozit malzemelerin mikro yapısına ilişkin sınıflandırmadır. Adı geçen sınıflandırmaya göre Modern Composite Materials (1967), Eds. Broutman J. ve Krock R.M., 'de gösterildiği gibi kompozit malzemeler aşağıdaki gruplara ayrılır:

1. Seyrek, küçük (Dispers) tanecik-takviyeli kompozitler
2. Tanecik-takviyeli kompozitler
3. Lifli kompozitler

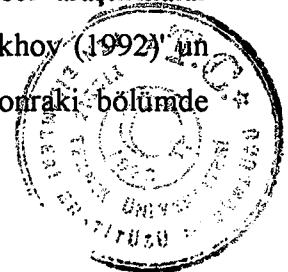
Seyrek, küçük tanecik-takviyeli kompozit malzemelerin yapısı; matris ve boyutları 0.01-0.1µm ve hacim oranı ise, %1 - %15 aralığında değişen taneciklerden meydana gelir. Tanecik-takviyeli kompozitlerin yapısında ise taneciklerin boyutu 1 mikrometreden daha büyük olup hacim oranı ise %25'den fazladır. Lifli kompozit malzemelerde ise liflerin çapı 0.01µm' den 100µm 'e kadar değişebilir. Hacim oranları ise % 70 ' e kadar arttırılabilir. Tanımlanan bu gruplar içerisinde en yaygın olanı lifli kompozitlerdir. Lifli kompozit malzemeler içerisinde ise en önemli yerlerden birini, matrisi polimer malzemedan oluşan lifli kompozitler tutar. Bu türlü kompozitlerde takviye (lif) olarak Bor, cam vb. ve matris malzemesi olarak Epoksi, polyester ve başka reçineler kullanılır. Adı geçen kompozit



malzemeler, (lif yönlerine bağlı olarak her bir tabakadaki lifler birbirine paralel ve ayrı ayrı tabakalardaki lifler belirli bir açı yapan) levhalı kompozit malzeme ve (lifleri birbirine paralel olan) lifli kompozit malzeme diye iki gruba ayrılır. Belirtelim ki; bu tez çalışmasında yapılan araştırmalar lifli ve levhalı kompozitlerin lifler yönünde ki basıncından dolayı, kırılmasının teorik sınırlarının (teorik dayanımının) bazı problemlerini teorik, yani, matematiksel açıdan çözülmesine ilişkin araştırmalardır.

Ele alınan bu bilgilerden sonra yeniden yukarıya dönersek o zaman aşağıdakileri söyleyebiliriz. Tek yönlü lif veya levhalı kompozitlerin güçlendirici lifler veya levhalar yönünde dış basıncı altındaki kırılmaları, çatlak oluşumu ve büyümesi şeklinde, dolayısıyla Griffith-Irwin kriteri çerçevesinde çözümlenemez. Adı geçen kompozit malzemede basınç yönüne dik veya basınç yönüne paralel çatlakların var olduğunu kabul edersek, bu çatlakların uçlarındaki gerilim birikimi sıfıra eşit olur ve bu nedenle de Griffith-Irwin kriteri uygulanamaz. Eğer ele alınan tek yönlü kompozit malzemede basınç yönü ile belirli bir açı yapan çatlak oluşumu söz konusu ise o zaman bu durumlara Griffith-Irwin kriterleri uygulanabilir. Ancak bu durumlardan doğan kırılma olayları sıkça rastlanılmadığından teorik araştırmalarda bu durumun varlığı gözönüne alınmamaktadır.

Yukarıda söylenen nedenlerden dolayı tek yönlü kompozitlerin kırılmasının teorik incelenmesi Griffith-Irwin kriterinden farklı başka bir kriteri gerektirmektedir. Böyle bir kriter ise ilk kez Dow ve Gruntfest (1960), Rosen (1965) tarafından verilen stabilite kaybı kriteridir. Bu kritere göre tek yönlü kompozitlerin basınç altında kırılması bu kompozitlerdeki liflerin veya levhaların denge formlarının stabilitesinin kaybı şeklinde tanımlanmaktadır. Yani tek yönlü kompozitler güçlendirici lif veya levha yönünde dış basınca maruz kaldıklarında güçlendiriciler birbirine paralel doğru veya düzlemler üzerinde kalmayıp bazı eğilmelere uğrayarak konumlarından çıkması halinde kırılma oluşmuştur denir. Adı geçen bu kriter, kırılma hakkında yazılan bütün kaynaklarda (örneğin; Cherepanov (1983) ve Chamis (1978) vb.) daha geniş bir biçimde gösterilmektedir. Bundan başka ele alınan bu kırılma mekanizmasını (kriterini) Greszczuk (1974,1975)'un deneysel sonuçları da desteklemektedir. Böylece tek yönlü kompozit malzemelerin basınç altında kırılmasının teorik açıdan incelenmesi, bu malzemelerin yapısındaki stabilite kaybının incelenmesine getirilmekte ve stabilite kaybına neden olabilecek basınç kuvvetinin değerine, kırılma basınç kuvvetinin değeri olarak bakılmaktadır. Şimdiye kadar bu konuda çok sayıda bilimsel araştırmalar yapılmış ve bu araştırmaların özetleri Guz' ve Babich (1979), Guz' ve Chekhov (1992)'ın makalelerinde verilmektedir. Adı geçen bu özete geniş bir biçimde bir sonraki bölümde



bakılacaktır. Bilindiği gibi; tek yönlü kompozitlerin basınç altında kırılmaya karşı direncinin teorik bir sınırı vardır. Ancak bu teorik sınırın belirlenmesi geleneksel malzemeler için yapılan atomistik açıdan değil makroskopik açıdan yani sürekli ortamlar fiziğinin kavram ve büyüklükleri kullanılarak bulunmaktadır. Bu konuda ise şimdiye kadar yapılan araştırmalarda kompozit malzemelerin süreklilik teorileri kullanılmış ve malzemenin kırılmaya kadar elastik şekil değiştirme durumunda kaldığı kabul edilmiştir. Dolayısıyla malzeme özelliklerinin zamana bağımlı olması halinde adı geçen teorik sınırın belirlenmesine imkan verebilecek kesin yöntem ve kriterler şimdiye kadar yapılamamıştır.

Bu tez kapsamında yukarıda sözü edilen tek yönlü kompozit malzemeler için var olan teorik basınç dayanımının elde edilmesine ait bazı güncel problemler incelenerek bu durumda ki kompozit malzemenin mekanik özelliklerinin zamana bağımlı olması da gözönüne alınacaktır. Yukarıda kullandığımız bazı kavramların açıklanması ve tanımlanması da bu incelemelerin yorumlanması sırasında daha geniş bir biçimde verilecektir.

1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti

Tez konusu tek yönlü kompozitlerin güçlendirici lif veya levhalar yönünde dış basınca maruz kaldığı durumda kırılmasının bazı problemlerinin teorik olarak incelenmesine ait olduğundan burada ancak bu konuda olan araştırmalar üzerinde duracağız. Yukarıda söylendiği gibi bu araştırmalar Dow ve Gruntfest (1960) , Rosen (1965) tarafından verilen kırılma kriteri ile başlamış Schuerch (1964, 1966) tarafından tespit ve devam ettirilmiş ve daha sonralar Greszcuk (1974, 1975)' un deneysel araştırmalarıyla ispatlanmıştır. Ele alınan alanda teorik açıdan şimdiye kadar yapılan araştırmaları iki gruba ayırabiliriz. Birinci grup araştırmalara; yaklaşık teoriler çerçevesinde yapılanları (örneğin; Rosen (1965), Schuerch (1966),..vb.) dahil edersek, ikinci gruba sürekli ortamlar mekaniğinin lineerize edilmiş kesin denklemleri çerçevesinde yapılan araştırmaları dahil edebiliriz. İkinci gruba dahil olan araştırmalar Guz' (1969a; 1969b)' un araştırmaları ile başlamış, Guz' ve onun öğrencileri tarafından devam ettirilmiştir. Bu araştırmaların geniş özetleri Babich ve Guz' (1992), Guz' ve Chekhov (1992) makalelerinde ve bu araştırmaların geniş yorum ve uygulamaları ise Guz' (1990) tarafından verilmiştir. Adı geçen çalışmalar iki açıdan: 1) Parçalı homojen cisim modeli açısından; 2) Sürekli anizotrop ortam modeli açısından yapılmaktadır.

Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmalarda kompozit malzemenin her bir homojen bileşeni için gerekli denklemler ve ifadeler yazılır ve bu bileşenlerin ortak



sınırlarında kontakt koşulları verilerekten incelemeler yapılır. Sürekli anizotrop ortam çerçevesinde yapılan araştırmalarda ise gerçekte homojen olmayan kompozit malzeme normalize edilmiş mekanik özellikli bir homojen malzeme ile yer değiştirilerek gereken incelemeler bu homojen malzeme üzerinde yapılır. Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde tek yönlü lifli kompozitler için yapılan araştırmaların özetini veren Babich ve Guz' (1992) makalesinde görüldüğü gibi bu alanda yapılan araştırmaların büyük çoğunluğu ancak elastik şekil değiştirme durumuna, çok az bir kısım ise (örneğin; Guz' ve Cherevko (1985)...vb.) elastik-plastik şekil değiştirme durumuna aittirler. Dolayısıyla yapılan araştırmalarda malzeme özelliklerinin zamana bağımlılığı gözönüne alınmamaktadır. Aynı durum parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde levhalı kompozitlerin stabilitesine (basınç altında kırılmasına) ait araştırmaların özetini veren Guz' ve Chekhov (1992) yayınında da görülmektedir. Yukarıda adı geçen son iki özetleme makalesinde sıralanan bütün incelemelerde dış basınç kuvvetinin tek yönlü kompozit malzeme yapısında olan lif ve levhaların stabilite kaybının periyodik formunun yarım dalga uzunluğu ℓ 'den ve lif yarıçapı R 'den (levha kalınlığı H 'dan) oluşan $\chi = 2\pi R / \ell$ ($\chi = 2\pi H / \ell$) parametresine bağımlılığı incelenmiştir.

Bu incelemeler, güçlendirici liflerin (levhaların) elastisite modülü matris malzemenin elastisite modülünden büyükse p dış basınç kuvveti ile χ parametresi arasındaki bağımlılığın monoton olmayan bir bağımlılık olduğunu göstermiştir ve χ 'nın $\chi \neq 0$ ' dan farklı öyle bir değeri vardır ki bu değerde p minimum olur. p 'nin bu minimum değeri basınç için kırılma değeri gibi kabul edilir. Kırılma basınç kuvvetleri için elde edilen bu sonuçlar kompozit malzemeyi belirten diğer parametrelerden örneğin, bileşenlerin yoğunluğuna ve onların malzeme yapısındaki dizilim formuna vs.'ye bağımlıdır. Ancak kırılma basınç kuvveti için elde edilen bu sonuçların hiçbirisi ele alınan kompozit malzemenin basınca dayanımının teorik sınırını belirleyemez. Adı geçen teorik sınır ancak bakılan kırılma probleminin sürekli homojen anizotrop ortam açısından incelenmesi sonucunda elde edilebilir. Bu anlamda kompozit malzemelerin teorik basınç dayanımı ilk kez Biot (1965) tarafından verilmiştir. Daha sonraları ise bu konu Guz' (1969a,1985)' un vb. araştırmalarında geliştirilmiş ve bazı durumlara uygulanmıştır. Ancak bu araştırmalarda malzeme özelliklerinin zamandan bağımsız olduğu kabul edilmektedir.

Bilindiği gibi, polimer malzemeler içeren birçok kompozitin mekanik özellikleri zamana önemli bir ölçüde bağımlı olabilir. Bu tür kompozitlere ait örnekler Schapery (1978) tarafından verilmektedir. Bu yüzden bu tür kompozitlerin uzun süreli kırılma (long time



fracture) problemlerini araştırma gereği ortaya çıkar. Bu tür araştırmalarda belirli parametrelerde uzun süreli kırılmaların teorik sınırlarının belli olması hem teorik açıdan ve hem de uygulama açısından gerekli olmaktadır. Ancak şimdiye kadar yapılan araştırmaların hiçbirisi bu soruya yeterli ölçüde cevap verememiştir. Bugüne kadar yapılan araştırmaların çok büyük bir kısmı sadece elastik kompozitlere (örneğin; Guz' (1969b, 1971, 1985) kaynaklarında olduğu gibi) aittir. Bu araştırmalarda kullanılan yöntem ve kriterler, malzeme özellikleri zamana bağımlı olan kompozitler için direkt olarak kullanılamazlar. Yukarıda söylenildiği gibi kompozit malzemelerin basınç dayanımlarının teorik sınırını belirleyen bu araştırmalarda parçalı-homojen olmayan gerçek malzeme sonsuz büyüklükte homojen anizotrop malzeme gibi kabul edilir. Daha sonra bu sonsuz ortamda 3 boyutlu lineerize edilmiş elastisite teorisinin denklemleri yazılarak bu denklemlerin tip değişmesi incelenir. Tip değişmesi ise adı geçen denklemlerin katsayılarının belirli koşulları sağlayıp sağlamayacağı şeklinde incelenir. Bilindiği üzere lineerize edilmiş denklemlerin katsayılarına dış basınç kuvvetleri de girdiğinden bu kuvvetlerin öyle bir değeri bulunabilir ki bu değerinde lineerize edilmiş üç boyutlu elastisite teorisi denklemleri eliptikliğini kaybeder. Dış basınç kuvvetlerinin bu duruma karşı gelen değerleri ele alınan kompozit malzemenin basınç dayanımındaki teorik sınırı diye kabul edilir. Kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özelliklerinin zamana bağlı olduğu durumda, örneğin ; lineer bir viskoelastik kompozit malzemeye bakıldığında yukarıdaki araştırma mekanizması uygulanamaz hale gelir. Bu yüzden yukarıda açıklaması verilen araştırma mekanizmasını da içeren ve viskoelastik kompozitlere de uygulanabilen bir inceleme mekanizmasını yani viskoelastik kompozit malzemelerin uzun süreli basınç durumunda, basınç dayanımının teorik sınırını belirlemeğe imkan verebilen bir yöntemin veya yaklaşımın önerilmesi ve uygulanması zorunluluğu ortaya çıkar. Şimdiye kadar viskoelastik kompozitlerin basınç durumunda uzun süreli kırılmasının teorik sınırının belirlenmesi için Guz' (1990); Gerard ve Gilbert (1959)' in kritik deformasyon yönteminin kullanılarak araştırılmasını önermiştir.

Kritik deformasyon yöntemine göre ise viskoelastik malzemeye karşı gelen saf elastik malzemenin teorik basınç dayanımı durumunda ortaya çıkan şekil değişmelerinin değerlerini kullanarak viskoelastik bünye denklemlerinden kritik zaman belirlenebilir. Bilindiği üzere ve ileride de görüleceği gibi bu yöntem yaklaşık bir yöntem olduğundan şimdiye kadar hiçbir problemin incelenmesinde (basınç dayanımının teorik sınırının belirlenmesi problemlerinde) kullanılmamıştır.



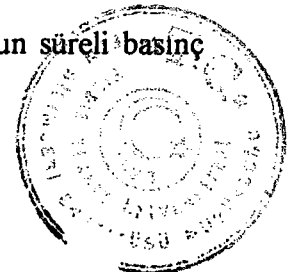
Akbarov vd., (1997) araştırmasında tek yönlü kompozit malzemelerin basınç durumunda kırılmasının incelenmesi için yeni bir yöntem teklif etmişlerdir. Bu yöntemle göre yukarıda adı geçen birçok kaynakta olduğu gibi, tek yönlü kompozitlerin basınç durumunda kırılması bu malzemelerin yapısındaki stabilite kaybından ortaya çıkmaktadır. Ancak Akbarov vd., (1997)'de adı geçen stabilite kaybı kriteri tek yönlü kompozit malzemelerin yapısında olan çok küçük başlangıç eğintilerinin büyümeğe başlaması ve sonsuz boyutlara yaklaşması şeklinde tanımlanmaktadır. Yukarıdaki araştırmalarda ise kompozit malzeme yapısındaki stabilite kaybı Euler yaklaşımı yardımı ile incelenmektedir. Bilindiği gibi Euler yaklaşımı, malzeme özellikleri zamana bağlı ortamların stabilite kaybının araştırılmasına uygulanamaz. Bu tür ortamların stabilite kaybının incelenmesi onlardan oluşan yapı elemanlarının ilkin çok küçük eğilmelerinin dış basınç altında zamana bağımlı olarak artması ve bu artışın çok büyük boyutlar alması şeklinde bir kriter çerçevesinde incelenebilir. Yukarıda belirtilen nedenlerden dolayı Akbarov vd., (1997) tarafından önerilen yöntem hem elastik ve hem de viskoelastik tek yönlü kompozit malzemelerin basınç altındaki kırılmalarının incelenmesine olanak vermektedir. Ancak şimdiye kadar adı geçen bu yöntem sadece elastik ve viskoelastik kompozit malzemelerin bazı basit kırılma problemlerinin incelenmesine uygulanmıştır. Bu uygulamalar Akbarov vd., (1997) makalesinde verilmektedir.

Akbarov vd., (1997) yönteminin elastik ve viskoelastik tek yönlü kompozit malzemelerin basınç dayanımlarının teorik sınırlarının belirlenmesine uygulanabilmesi üzerine hiçbir çalışma yapılmamıştır. İlk kez bu tez kapsamında Akbarov vd., (1997) yönteminin hem elastik ve hem de viskoelastik tek yönlü kompozitlerin basınç dayanımlarının teorik sınırlarının belirlenmesine uygulanabileceği gösterilmiş ve bazı test problemlerinin incelenmesinde kullanılmıştır.

Özette kullanılan bazı kavram ve deyimlerin daha açık ve geniş bir biçimde tanımları ve yorumları tez de yeri gelince verilecektir.

1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Bu çalışmanın konusu tek yönlü elastik ve viskoelastik kompozit malzemelerin onlardaki takviyeler yönündeki basınç dayanımının teorik sınırlarının belirlenmesi için gereken bir yöntemin geliştirilmesi ve bazı test problemlere uygulanması olup hem teorik hem de uygulama açısından ilginçtir. Konu, viskoelastik kompozit malzemelerin uzun süreli basınç



dayanımlarının bulunabilmesi için gereken bir yöntemin önerilmesi ve bu yöntem kullanılarak kesin sonuçların elde edilmesi açısından önemlidir.

Tez konusunun uygulama açısından gerekliliği; tek yönlü viskoelastik kompozit malzemelerin takviye yönündeki basınç dayanımlarının Akbarov vd., (1997) yöntemi çerçevesinde elde edilen teorik sınırının incelenerek belirlenmesidir.

Bilindiği gibi, viskoelastik kompozit malzemelerin uzun süreli basınç kırılmaları dış basınç kuvvetlerinin ele alınan malzemeye karşı gelen belirli bir değeri aştığı durumda mümkün olabilmektedir. Tez kapsamında yapılan araştırmaların bu sınırı belirlemek açısından da pratik önemi vardır.

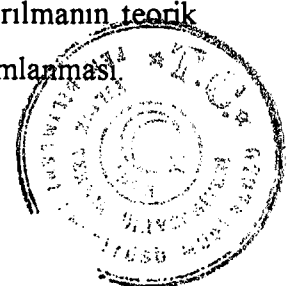
Tez çalışmasını gerekli kılan başka bir neden ise; burada yapılan araştırmaların bu yönde çok önemli bir geliştirme oluşturması ve elde edilen sonuçların ilk kez tarafımızdan bulunmasıdır.

Günümüzde kompozit malzemelerin yaygın şekilde kullanılması ve tez çalışmasının yukarıda söylenen gereklilikleri, bu konunun güncelliğini ortaya koymaktadır.

1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir:

1. Akbarov vd., (1997) yöntemi ve yaklaşımının elastik ve viskoelastik tek yönlü kompozitlerin basınç dayanımlarının teorik sınırının belirlenmesine uygun olarak geliştirilmesi;
2. İncelenmesi gereken problemlerin matematiksel formülasyonu;
3. Yapılan araştırmalar için gerekli modelin tespit ve ispat edilmesi;
4. Formülasyonu yapılmış matematiksel sınır değer problemlerinin incelenmesi için gerekli metodların geliştirilmesi;
5. Ele alınan sınır değer problemlerinin incelenmesinde uygulanan Fourier ve Laplace integral dönüşümlerinin sayısal sonuçları için gereken algoritmaların ve programların yapılması;
6. Kompozit malzemenin bileşenlerinin reolojik ve elastik özelliklerinin kırılmanın teorik sınır değerlerine etkisini gösteren bazı sayısal sonuçların elde edilmesi ve yorumlanması.



BÖLÜM II

2. ELASTİSİTE ve VİSKOELASTİSİTE TEORİSİNİN LİNEERİZE EDİLMİŞ DENKLEMLERİ ve BU DENKLEMLERİN TEK YÖNLÜ KOMPOZİTLERİN KIRILMA MEKANİĞİNE UYGULANMASI

2.1 Elastisite ve Viskoelastisite Teorisinin Geometrik Non-Lineer Denklemleri

Dış etkiler altında şekil değiştirebilen ortamlar mekaniğinin en önemli teorilerinden birisi de elastisite teorisidir. Farklı tabiatlı dış etkilerin (mekaniksel kuvvetlerin, ısı etkilerinin, elektromagnetik alan kuvvetlerinin,...vs.) etkisinden dolayı şekil ve hacim değiştiren bir cisim bu etkiler kesildiğinde kendi doğal formuna dönerse bu cisim elastiktir denir. Cismin doğal formu bu cisimde hiçbir şekil değiştirmenin olmadığı durum olarak varsayılır. Bütün sürekli ortamlar mekaniğinde olduğu gibi elastisite teorisinde de gerilme ve gerilme ile ilgili olan gerilme tansörü kavramları kullanılır. Elastisite teorisi cisimlerde dış etkiler altında ortaya çıkan ve yukarıda tanımlı verilen elastik şekil değiştirmenin özelliklerini incelediğinden elastisite teorisinin en önemli kavramlarından biri şekil değiştirme ve ona bağlı şekil değiştirme tansörü kavramlarıdır. Yukarıda adı geçen bu kavramlar ve elastisite teorisinin kullandığı diğer kavramların ve anlamlarının çok geniş şekilde açıklanması ve tanımlanması sürekli ortamlar mekaniğine ait kaynaklarda (örneğin; Eringen (1962), Guz' (1971, 1972) vs.) verilmektedir. Bu nedenle bu konular üzerinde durmayarak ve bazı ifade ve denklemler adı geçen kaynaklardan yararlanılarak direkt olarak verilecektir.

Bütün sürekli ortamlar mekaniğinde olduğu gibi elastisite teorisinde Lagrange ve Euler koordinatları kullanılır. Ele alınan ortamın parçacıklarının şekil değiştirmeye kadar ki konumunun koordinatlarına Lagrange koordinatları, şekil değiştirmeden sonraki koordinatlarına ise Euler koordinatları denir. Bilindiği üzere, non-lineer elastisite problemlerinin incelenmesinde Lagrange koordinatları çok önemli kolaylıklar sağladığından ileride çoğunlukla Lagrange koordinatlarından yararlanacağız. Şimdi ilerideki işlem ve açıklamaların kolay olması için elastisite teorisinin bize gereken ve tez kapsamında sık sık kullanılan temel denklem ve bağıntılarının matematiksel ifadelerini ele alarak aşağıdaki tanımları ve kabulleri gözden geçirelim.

Elastisite teorisinin temel denklemlerinden önde geleni ve bütün sürekli ortamlar mekaniğinde geçerli olan ve gerilme tansörü bileşenleri ile yazılan ve yerdeğişme vektörü bileşenlerinin



zamana göre ikinci mertebeden maddesel türevlerini içeren (atalet kuvvet bileşenleri) denklemleridir. Eğer incelenen problem statik veya quasi statik problem ise adı geçen atalet kuvvetleri ihmal edilir ve hareket denklemleri yerine denge denklemleri ele alınır. Hareket veya denge denklemlerinden sonra elastik ortamların bünye denklemleri denen denklemler gelmektedir. Bir ortamın bünye denklemleri gerilme tansörü bileşenleri ile şekil değiştirme tansörü bileşenleri arasında ilişkileri veren ve deneysel olarak belirlenen denklemler şeklinde tanımlanır. Biz ileride Cauchy gerilme tansörünü ve Green şekil değiştirme tansörünü kullanacağız. Sürekli ortamların temel kavramlarından biri olan yerdeğiştirme vektörü bileşenleri ile şekil değiştirme tansörü arasındaki bağıntılara ise geometrik bağıntılar denir ve sürekli ortamların ve aynı zamanda elastisite teorisinin 3. grup temel denklemlerini oluşturur. Şekil değiştirme tansörü bileşenlerinin değerlerinin sonlu veya çok küçük olmasına bağlı olarak elastisite teorisi problemleri sonlu şekil ve küçük şekil değiştirme problemleri diye birbirinden ayrılırlar. Küçük şekil değiştirmeye uğrayan cisimlere ait elastisite problemleri incelenirken şekil değiştirmeden önce ve şekil değiştirmeden sonra cismin sınır formu aynı kabul edildiğinden bu durumda Cauchy tansörü bileşenleri ile yazılan denge denklemleri lineer denklemler oluşturur. Bu durumda denge denklemlerinin Lagrange veya Euler koordinatlarında yazılmasında bir farklılık ortaya çıkmamaktadır. Bununla birlikte, sonlu şekil değiştirmeye uğrayan cisimlerin elastisite problemlerinin incelenmesinde kullanılan ve Lagrange koordinatlarında yazılan denge denklemleri ise non-lineer denklemler oluşturur.

Elastisite problemlerinin non-lineer kaynaklarından biri de bünye denklemleridir. Bu denklemlerin lineer veya non-lineer olmasında ele alınan problemlerin lineer veya non-lineer olmasına neden olur.

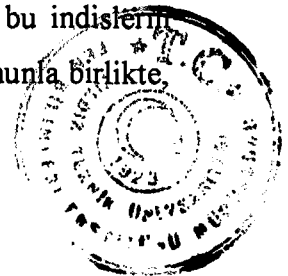
Şimdi yukarıda söylenenleri matematiksel açıdan ele alalım ve adı geçen lineer ve non-lineer problemlerin daha detaylı bir tanımını verelim. Bu nedenle geometrik bağıntıları gösteren denklemlerden başlayarak aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim:

ε_{ij} - Green şekil değiştirme tansörü bileşenleri;

u_i - Yerdeğiştirme vektörü bileşenleri;

σ_{ij} - Cauchy gerilme tansörü bileşenleri;

İleride biz hep indis notasyonlarını kullanacağız ve tekrarlanan indislere göre bu indislerin değişme aralığında Einstein toplam uyluşmasının sağlandığını kabul edeceğiz. Bununla birlikte,



herhangi bir ifade veya denklemde tekrarlanan indislere göre toplama işleminin yapılmamasını bu indislerin altına çizilmesi ile göstereceğiz.

Şimdi elastik bir ortamın şekil değiştirmesini bir $ox_1x_2x_3$ Lagrange koordinat takımında (bu koordinat takımının şekil değiştirmeden önce kartezyen koordinat takımı ile üst üste düştüğü kabul edilir) inceleyelim ve Green şekil değiştirme tansörü bileşenleri ile yerdeğiştirme vektörü bileşenleri arasında olan ve birçok kaynaklarda (örneğin; Eringen (1962), vs.) verilen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad i,j,\alpha=1,2,3 \quad (2.1)$$

geometrik bağıntılarını ele alalım.

ε_{ij} ' lerin değerlerine bağlı olarak yukarıda adı geçen sonlu şekil değiştirme ve küçük şekil değiştirme durumlarını bir daha gözden geçirelim ve onları daha detaylı bir şekilde açıklayalım. Eğer ε_{ij} değerleri; şekil değiştirmesi incelenen cismin yüzey ve hacim elemanlarının boyutlarının değişmesinin mutlaka gözönüne alınmasını gerektiriyorsa, bu tür şekil değiştirmelere sonlu şekil değiştirmeler denir. Bu durumda ε_{ij} ' ler (2.1) bağıntıları yardımı ile hesaplanır ve farklı gerilme tansörü kavramları ortaya çıkar. Eğer şekil değiştirme tansörü bileşenleri ε_{ij} ' lerin aldığı değerler; yukarıda adı geçen yüzey ve hacim elemanlarının boyutlarının değişmesinin gözönüne alınmasını gerektirmiyorsa; o zaman bu tür şekil değiştirmelere küçük şekil değiştirmeler denir. Yukarıda söylenenlerden başka ε_{ij} ' lerin değerlerinin hesaplanmasında kullanılan (2.1) formüllerindeki nonlineer terim olan $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}$ terimi ihmal ediliyorsa; bu duruma sonsuz küçük şekil değiştirme durumu denir.

Bu halde ε_{ij} ' ler

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

formülleri yardımı ile hesaplanabilir.

Yukarıda söylenenleri kısaca özetleyecek olursak şekil değiştirme durumlarını: sonlu, küçük ve sonsuz küçük şekil değiştirme durumları diye sınıflandırabiliriz. Görüldüğü gibi küçük ve



sonsuz küçük şekil değiştirme durumlarında şekil değiştirmesi incelenen cismin yüzey ve hacim elemanlarının şekil değiştirmeden önceki ve sonraki boyutları arasındaki farklılıklar gözönüne alınmadıklarından farklı gerilme tansörü kavramları Cauchy gerilme tansörü kavramı ile aynı olur. Kaynaklar da küçük şekil değiştirmeler birkaç gruba ayrılmaktadır. Biz burada bu gruplamaları kullanmadığımız için yukarıda verdiğimiz şekil değiştirme durumu sınıflandırmasını kullanmakla yetineceğiz. Bundan başka belirtelim ki, bu kısmın başlangıcında kullandığımız küçük şekil değiştirme durumu kavramı, yukarıda verdiğimiz sonsuz küçük şekil değiştirme durumunun aynısı olmaktadır.

Bu tez kapsamında yapılan araştırmada, ancak tanımı yukarıda verilen küçük ve sonsuz küçük şekil değiştirme durumlarından ve dolayısıyla Cauchy gerilme tansörü bileşenlerinden yararlanılacaktır. Bu durumda ele alınan $ox_1x_2x_3$ Lagrange koordinat takımında denge denklemleri küçük ve sonsuz küçük şekil değiştirme durumlarında sırası ile aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

Küçük şekil değiştirme durumu :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] = 0 \quad (2.3)$$

Sonsuz küçük şekil değiştirme durumu :

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.4)$$

(2.3) ve (2.4) de aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir.

σ_{ij} - Cauchy gerilme tansörü bileşenleri

δ_i^n - Kronecker sembolleridirler.

Başka işaretlemelerin anlamları yukarıda verilmiştir. Bilindiği gibi, Cauchy gerilme tansörü bileşenleri simetriktirler yani $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. İleride σ_{ij} ' lere sadece gerilme tansörü bileşenleri diyeceğiz. Şimdi elastik ortamın bünye denklemlerini ele alalım. En genel durumda bu denklemleri küçük ve sonsuz küçük şekil değiştirme hallerinde gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin kartezyen koordinat takımlarındaki bileşenleri cinsinden



$$\sigma_{ij} = \varphi_0(A_1, A_2, A_3) \delta_{ij}^j + \varphi_1(A_1, A_2, A_3) \varepsilon_{ij} + \varphi_2(A_1, A_2, A_3) \varepsilon_{i\alpha} \varepsilon_{j\alpha} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ fonksiyonları deneysel olarak tanımlanan fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların bağlı oldukları A_1, A_2, A_3 büyüklükleri Green şekil değiştirme tansörünün cebirsel invariantları olup

$$\begin{aligned} A_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ A_2 &= \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \\ A_3 &= \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(2.5)' deki φ_0 fonksiyonu $\varphi_0(0,0,0) = 0$ koşulunu sağlamak zorunda olduğu açıktır. Bu koşulun fiziksel anlamı; cisme hiçbir dış kuvvet etkimediğinde yani ondaki şekil değiştirmeler sıfır olduğunda gerilmeler de sıfır olmalıdır, şeklinde açıklanabilir. Bundan başka (2.5)'e dahil olan $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ fonksiyonları farklı malzemeler için farklı form ve değerler alabilmektedirler. Bilindiği gibi, (2.5) denklemleri izotrop ortamlar için geçerli olmaktadır. Anizotrop ortamlar için ise (ortamın özellikleri yöne bağımlı olmadığında bu tür ortamlara izotrop, yöne bağımlı olduğunda ise anizotrop ortam denir) (2.5) şeklinde olan ifadeler yerine

$$\sigma_{ij} = C_{ijnm} \varepsilon_{nm} + D_{ijnmkl} \varepsilon_{nm} \varepsilon_{kl} + E_{ijnmkl\alpha\beta} \varepsilon_{nm} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{\alpha\beta} + \dots \quad (2.7)$$

şeklindeki ifadeler kullanılır. Buradaki $C_{ijnm}, D_{ijnmkl}, E_{ijnmkl\alpha\beta}$ 'lara 4., 6., 8., vs. mertebeden olan elastisite modülleri veya elastisite sabitleri denir. Bu bağıntılar bazen (2.5)' in tersi

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijnm} \sigma_{nm} + d_{ijnmkl} \sigma_{nm} \sigma_{kl} + e_{ijnmkl\alpha\beta} \sigma_{nm} \sigma_{kl} \sigma_{\alpha\beta} + \dots \quad (2.8)$$

şeklinde de verilirler. Buradaki $c_{ijnm}, d_{ijnmkl}, e_{ijnmkl\alpha\beta}$ 4., 6., 8., vs. mertebeden olan esneklik sabitleridir. Biz ileride ancak lineer izotrop ve anizotrop ortamları ele alacağımızdan kullanacağımız en genel lineer bağıntılar

$$\sigma_{ij} = C_{ijnm} \varepsilon_{nm}$$

veya



$$\varepsilon_{ij} = c_{ijnm} \sigma_{nm} \quad (2.10)$$

şeklinde olacaktırlar. Bilindiği üzere C_{ijnm} ' ler ve c_{ijnm} ' ler

$$\begin{aligned} C_{ijnm} &= C_{nmij} & (c_{ijnm} &= c_{nmij}) \\ C_{ijnm} &= C_{jinm} & (c_{ijnm} &= c_{jinm}) \\ C_{ijnm} &= C_{ijnm} & (c_{ijnm} &= c_{ijnm}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

koşullarını sağladığından 81 tane C_{ijnm} (c_{ijnm}) bileşeninden 21 tanesi bağımsız olacaktır. Yukarıda verilen (2.11) simetri özellikleri sadece bakılan cismin elastik bir cisim olmasından gerilme tansörü bileşenleri σ_{ij} ' lerin ve şekil değiştirme tansörü bileşenleri ε_{ij} ' lerin simetrik olmalarından elde edilmektedirler. Bundan başka eğer cismin yapısı herhangi bir simetriye sahipse o zaman bağımsız 21 sabitin sayısı daha da düşürülmüş olur. Anizotrop cisimlerin elastisite teorisinde geniş bir biçimde kullanılan simetri durumları aşağıdadır:

- 1) Ortotrop cisimler: Bu cisimler herbir noktasında birbirine dik 3 simetri düzleminin olduğu cisimlerdir. Bu durumda yukarıda adı geçen 21 bağımsız sabitten 9 bağımsız sabit kalır.
- 2) Transversal izotrop cisim: Herbir noktasından simetri eksenini geçen ve bu eksenin dik olduğu düzlemlerde cismin kendisini izotrop bir ortam gibi gösterdiği cisimlerdir. Bu durumda 5 bağımsız sabit kalır.
- 3) İzotrop cisim: Herbir noktasından birbirine dik iki simetri eksenini geçen bir ortam gibi de tanımlanır. Bu tür cisimlerin 2 bağımsız mekanik sabiti vardır.

Bilindiği gibi, yukarıda adı geçen ve daha başka simetri durumlarının detaylı bir şekilde açıklaması ve tanımlanması Lekhitskii (1963) tarafından verilmektedir.

Şimdiye kadar yazdığımız bünye denklemleri saf elastik cisimlere aittir. Ancak bunları kolayca lineer viskoelastik cisimler içinde yazabiliriz. Bu nedenle (2.9) veya (2.10)'daki C_{ijnm} (c_{ijnm}) sabitlerini uygun operatörlerle yer değiştirmek gerekir. Bu operatörlerin tezde kullanacağımız ve Rabotnov (1977), Schapery (1978) vs. kaynaklarında verilen genel formu

$$C_{ijnm}^* = C_{ijnm0} + \int_0^t C_{ijnm}(t - \tau) d\tau \quad (2.12)$$

veya



$$c_{ijnm}^* = c_{ijnm0} + \int_0^t c_{ijnm}(t - \tau) d\tau \quad (2.13)$$

şeklinde olur. Bu durumda (2.9) ve (2.10) bünye denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır:

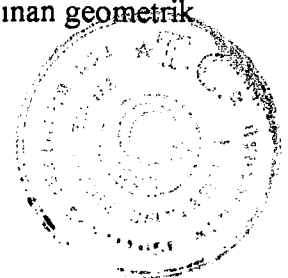
$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijnm0} \varepsilon_{nm}(t) + \int_0^t C_{ijnm}(t - \tau) \varepsilon_{nm}(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

veya

$$\varepsilon_{ij}(t) = c_{ijnm0} \sigma_{nm}(t) + \int_0^t c_{ijnm}(t - \tau) \sigma_{nm}(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

(2.13)-(2.15)' de t zaman $C_{ijnm}(t-\tau)$ ' lar viskoelastisite özelliklerine bağlı olarak deneyler yardımı ile elde edilen malzeme fonksiyonlarıdır. Bu konuda çok detaylı ayrıntılara girmeden belirtelim ki yukarıda adı geçen anizotropi özellikleri ve bu durumdaki simetri halleri $C_{ijnm}(t-\tau)$ fonksiyonları için de aynı olmaktadır. Bundan başka yukarıda yazdığımız (2.1)-(2.4) denklemleri bünye denklemlerinden bağımsız olduğundan hem saf elastik hem de viskoelastik malzemeler için aynıdır. Böylece bu bölümün başlangıcında adı geçen elastisite ve viskoelastisite teorisinin geometrik non-lineer denklemleri (2.1), (2.3), (2.14) veya (2.15) denklemlerinden oluşmaktadır. İleride yapılacak bütün işlemler bu denklemler üzerinde olacaktır.

Bu denklemlerin matematiksel açıdan modellendirdiği fiziksel olaylara quasistatik olaylar denir. Yani bu olayların içindeki büyüklükler zamana çok zayıf bir biçimde bağlıdır. Bu yüzden hareket denklemlerindeki atalet (inersial) terimleri ihmal edilerek onların yerine (2.1) denge denklemleri kullanılır. Bu nedenle de uygun olayların matematiksel açıdan incelenmesi başlangıç koşulunun verilmesini gerektirmemektedir. Ancak bu durumda gereken ve uygun sınır koşullarının bu denklemlere eklenmesi zorunludur. Adı geçen sınır koşulları birkaç tür olmaktadır. Bu türlerin herbirini açıklamak için (2.1), (2.3), (2.14) (veya (2.15)) denklemi S kapalı yüzeyi ile sınırlanan V hacminde geçerli olduğunu farzedelim. S yüzeyinde ise gereken sınır koşulları verilmektedir. Bundan başka S yüzeyinin S_1 ve S_2 ' yle işaret edilen iki kısma ayrıldığını kabul edelim. Yani $S = S_1 \cup S_2$ dir. Şimdi cismin S yüzeyinin S_1 kısmında yer değiştirmelerin, S_2 kısmında ise dış kuvvetlerin verildiğini kabul edelim. Ele alınan geometrik non-lineer durumda bu koşullar aşağıdaki gibi yazılabilir;



$$u_i|_{S_1} = f_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.16)$$

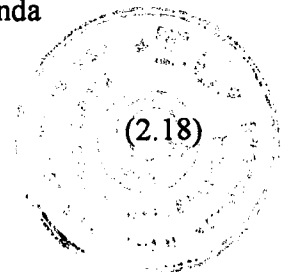
$$\left[\sigma_{jm} \left(\delta_i^m + \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) \right] \Big|_{S_2} n_j = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.17)$$

Burada f_i ve F_i 'ler verilen fonksiyonlardır. n_j 'ler cismin yüzeyinin dış birim normalinin bileşenleridirler. Eğer $S_1=S$ ise bu tür sınır koşullara birinci tip, eğer $S_2=S$ ise bu tip sınır koşullara ikinci tip sınır koşulları denir. Eğer $S_1 \neq S$ ve $S_2 \neq S$ ise bu tür sınır koşullarına karışık tip sınır koşulları denir. Birinci ve ikinci tip sınır koşullarında S yüzeyi üzerinde sırası ile ancak (2.16) ve ancak (2.17) verildiğini belirtelim. Bazı durumlarda S yüzeyinin tümü üzerinde (2.16) ve (2.17) koşullarının herikisinin verilmesi zorunluluğu ortaya çıkabilir. Örneğin böyle bir durum kontakt problemlerinde ve tezde ele alacağımız problemlerde de görünecektirler. Sonuncu tür sınır koşullarına karışık-karışık tip sınır koşulları da denir. Bununla da elastisite ve viskoelastisite teorisinin geometrik non-lineer denklemlerinin ve bu denklemleri incelemek için gerekli olan sınır koşullarını açıklamış bulunuyoruz ve ileride bu kısımda verilen kavramlar ve denklemlerden sık olarak yararlanılarak gerektiğinde konuyla ilgili bazı ek bilgilerde verilecektir.

2.2 Non-Linear Denklemlerin Lineerize Edilmesi

Yukarıdaki kısımda verilen non-lineer denklemlerin direkt olarak incelenmesi ve uygulanması çok zor ve bazı durumlarda imkansız olduğundan birçok mekaniksel ve fiziksel olayların teorik açıdan incelenmesi bu denklemlerin lineerize edilmiş formundan yararlanılarak yapılmaktadır. Adı geçen denklemlerin lineerize edilmesi ilk kez Biot (1934,1939,1965) tarafından yapılmış ve birçok mekaniksel olayların incelenmesinde kullanılmıştır. Lineerize olmuş denklemlerin daha genel bir durumda elde edilmesi geniş çaplı ve değişik alanlarda kullanılması Guz' ve onun öğrencileri tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu araştırmaların detaylı özetleri ve uygulamaları Guz' (1971,1972,1973,1985,1986,1990), Guz' ve Babich (1979), Guz' ve Chekhov (1992), Babich ve Guz' (1992) kaynaklarında verilmektedir. Şimdi burada yukarıdaki kaynaklarda verilmiş lineerize edilmiş denklemlerin tezde kullanacağımız varyantını önceki kısımda verilen non-lineer denklemlerden çıkaralım. Bu nedenle cisimde oluşmuş yerdeğiştirme, şekil değiştirme ve gerilme durumlarının u_i^0 , ε_{ij}^0 , σ_{ij}^0 ve u_i , ε_{ij} , σ_{ij} 'lerle işaret edilen iki kısımdan oluştuğunu varsayarak ve bu büyüklükler arasında

$$u_i \ll u_i^0 ; \varepsilon_{ij} \ll \varepsilon_{ij}^0 ; \sigma_{ij} \ll \sigma_{ij}^0 \quad (2.18)$$



koşullarının sağlandığını kabul edeceğiz. Bundan başka σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 , u_i^0 ve $\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}$, $u_i^0 + u_i$ büyüklükleri için ayrı ayrı (2.1), (2.3), (2.14), (2.15) denklemleri ve (2.16), (2.17) sınır koşullarının sağlandığını kabul ederiz. Yani

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^0 \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_n} \right) \right] = 0 \quad (2.19)$$

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijnm0} \varepsilon_{ij}^0(t) + \int_0^t C_{ijnm} (t - \tau) \varepsilon_{ij}^0(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_j} \right) \quad (2.21)$$

$$u_i^0|_{S_1} = f_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.22)$$

$$\sigma_{jm}^0 \left(\delta_i^m + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_m} \right) \Big|_{S_2} n_j = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.23)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\sigma_{jn}^0 + \sigma_{jn}) \left(\delta_i^n + \frac{\partial (u_i^0 + u_i)}{\partial x_n} \right) \right] = 0 \quad (2.24)$$

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij} = C_{ijnm0} (\varepsilon_{ij}^0(t) + \varepsilon_{ij}(t)) + \int_0^t C_{ijnm} (t - \tau) (\varepsilon_{nm}^0(\tau) + \varepsilon_{nm}(\tau)) d\tau \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (u_i^0 + u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_j^0 + u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial (u_\alpha^0 + u_\alpha)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_\alpha^0 + u_\alpha)}{\partial x_j} \right) \quad (2.26)$$

$$(u_i^0 + u_i)|_{S_1} = f_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.27)$$

$$(\sigma_{jm}^0 + \sigma_{jm}) \left(\delta_j^m + \frac{\partial (u_i^0 + u_i)}{\partial x_m} \right) \Big|_{S_2} n_j = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.28)$$

denklemleri ve sınır koşullarını sağlamaktadırlar. Şimdi σ_{ij} , ε_{ij} ve u_i lerin ikinci mertebeden olan terimlerini son denklemlerde (2.24), (2.27), (2.28) denklemlerinde aynı büyüklüklerin birinci mertebeden olan terimlerine göre çok küçük olduğundan ihmal edersek (2.24)-(2.28) den aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^0 \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_n} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_n} \right) + \sigma_{jn}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] = 0$$



$$\sigma_{ij}^0 - C_{ijnm0} \varepsilon_{nm}^0 - \int_0^t C_{ijnm} (t - \tau) \varepsilon_{nm}^0 (\tau) d\tau = C_{ijnm0} \varepsilon_{nm} + \int_0^t C_{ijnm} (t - \tau) \varepsilon_{nm} (t - \tau) d\tau - \sigma_{ij} \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_j} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) \quad (2.31)$$

$$u_i^0|_{s_1} - f_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i|_{s_1} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{jm}^0 \left(\delta_i^m + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_m} \right) \Big|_{s_2} n_j + \sigma_{jm} \left(\delta_i^m + \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) + \sigma_{jm}^0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) \Big|_{s_2} n_j = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.33)$$

(2.19)-(2.23) denklemlerini gözönüne alırsak (2.29)-(2.33)' den σ_{ij} , ε_{ij} ve u_i ' ler için aşağıdaki denklem ve sınır koşullarını yazabiliriz.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_n} \right) + \sigma_{jn}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] = 0 \quad (2.34)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijnm0} \varepsilon_{ij} (t) + \int_0^t C_{ijnm} (t - \tau) \varepsilon_{nm} (\tau) d\tau \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\left(\delta_i^\alpha + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \left(\delta_j^\alpha + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) \quad (2.36)$$

$$u_i|_{s_1} = 0 \quad (2.37)$$

$$\sigma_{jm} \left(\delta_i^m + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_m} \right) + \sigma_{jm}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \Big|_{s_2} n_j = 0 \quad (2.38)$$

Elde edilen bu denklemlere viskoelastisite teorisinin 3 boyutlu lineerize edilmiş denklemleri denir. Bu denklemlerdeki i, j, n, m, α indisleri 1'den 3'e kadar değer alır. Viskoelastisite teorisinin lineerize edilmiş denklemlerinin (2.34)-(2.38) formu 3 boyutlu stabilite problemlerinin incelenmesine uygun olduğunu belirtmekte yarar vardır. Eğer (2.35) denklemindeki $C_{ijnm} (t-\tau) \equiv 0$ gibi kabul edilirse o zaman bu denklemler uygun saf elastik stabilite problemlerinin lineerize edilmiş 3 boyutlu denklemlerine dönüşür. Bu denklemlerin çıkarılması durumunda σ_{ij} , ε_{ij} ve u_i ' ler aynı işaretle gösterilen büyüklüklerin pertürbasyonudur, fakat incelenen sınır koşullarında verilen f_i ve F_i büyüklüklerinin bu denklemlerin çıkarılışı sırasında hiçbir pertürbasyon almadığı varsayılır. Bütün bu söylenenlerden başka elde edilen 3 boyutlu lineerize edilmiş (2.34)-(2.38) denklemleri



stabilite problemlerine uygulanır iken σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 , u_i^0 büyüklükleri stabilite kaybından önceki duruma ait (precritical state) olan büyüklükler diye adlandırılır. Nihayet elde edilen (2.34)-(2.38) probleminin bir özdeğer problemi olduğunda kaydetmek gerekir. Bu problemin incelenmesi sırasında bu denklemlere dahil olan u_i^0 büyüklüklerinin önceden belli olduğu varsayılmaktadır. Bu büyüklükler (2.19)-(2.23) sınır değer probleminin çözümünden elde edilmektedir. Bu problemin incelenmesi sırasında birçok durumlarda (örneğin; yeterli derecede rijit kompozit malzemelere uygulandığında) (2.19)-(2.23) denklemlerindeki non-lineer terimler ihmal edilir ve stabilite kaybına kadar ki şekil değiştirmelerin sonsuz küçük şekil değiştirmeler olduğu varsayılır. Dolayısıyla u_i^0 terimleri

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = 0 \quad (2.39)$$

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijnm0} \varepsilon_{nm}^0 + \int_0^t C_{ijnm} (t - \tau) \varepsilon_{nm}^0(\tau) d\tau \quad (2.40)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) \quad (2.41)$$

$$u_i^0|_{s_1} = f_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.42)$$

$$\sigma_{ij}^0|_{s_2} n_j = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.43)$$

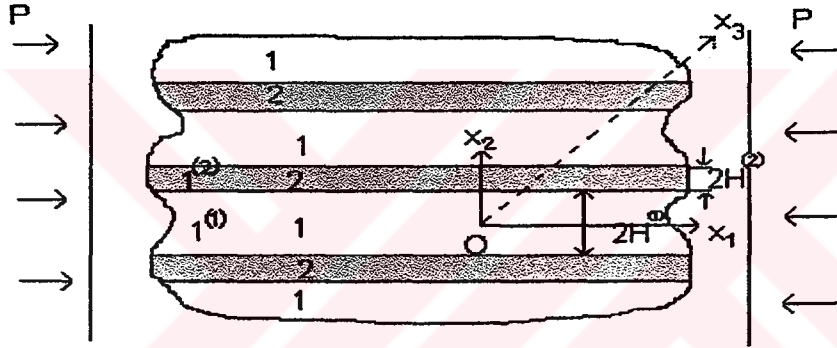
sınır değer problemlerinin çözümünden elde edilir.

Tez konusu ile ilgili olan ve yukarıda adı geçen kaynaklardaki araştırmaların (2.34)-(2.38) ve (2.39)-(2.43) lineerize edilmiş denklemler çerçevesinde yapıldığını belirtmekte yarar vardır.



2.3 Lineerize Edilmiş Denklemlerin Stabilité Problemlerine Uygulanması

Bu kısımda (2.34)-(2.38) lineerize edilmiş stabilite denklemlerinin bazı örnek problemlere uygulanmasını Euler yaklaşımı çerçevesinde inceleyeceğiz. Tezde yapılan araştırmalarla uygun olması açısından ele alınacak örnek problemler, çok katlı levhalı kompozit malzemelerin yapısındaki stabilite problemleridirler. Araştırılan çok katlı levhalı kompozit malzemenin, birbirini tekrarlayan iki tür malzemeden oluşmuş levhalardan elde edildiğini kabul edeceğiz. Bu levhaların dizimi Şekil 2.1'de gösterildiği gibidir. Bundan başka bu malzemenin ox_1 yönünde yoğunluğu p olan uniform yayılan normal dış kuvvetlerle basınca maruz kaldığını ve bu kuvvetlerin sonsuzda etki ettiğini ve Şekil 2.1'de gösterilen 1 ve 2 nolu levhaların herbirinin malzemesinin elastik ve izotrop olduğunu ve 2 levhasının güçlendirici levha, 1 levhasının ise matris levhası olduğunu kabul edeceğiz



Şekil 2.1 Birbirini tekrarlayan iki tür malzemeden oluşmuş levhalardan elde edilen çok katlı levhalı kompozit malzemenin yapısı

Bu levhaların mekanik özelliklerini $E^{(k)}$ (Elastisite modülü), $\nu^{(k)}$ (Poisson oranı) veya $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ (Lame sabitleri) ($k=1,2$) ile işaret edelim. $k=1$ için bu işaretlemenin matris levhaya, $k=2$ için ise güçlendirici levhaya ait olduklarını varsayalım. Ele alınan kompozit malzeme yapısının ox_2 eksen yönündeki $2(H^{(1)}+H^{(2)})$ peryotla tekrarlandığını (burada $2H^{(1)}$ matris levhanın kalınlığı, $2H^{(2)}$ ise güçlendirici levhanın kalınlığıdır) gözönüne alarak ilerideki araştırmalarımızda bu levhalardan birbiri ile komşu olan keyfi ikisini seçip bütün incelemelerimizi onlar üzerinde yapacağız. Bu yüzden Şekil 2.1'de $1^{(1)}$ ve $1^{(2)}$ ile işaret edilen iki levha seçelim ve bu levhaların herbirinin orta yüzeyi ile $o^{(k)}x_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$ Lagrange koordinat takımını birleştirelim ve bu koordinat takımlarının şekil değiştirmeden önce kartezyen koordinat takımı ile çakıştığını ve Şekil 2.1'de verilen $ox_1x_2x_3$ koordinat takımının ox_2 eksen yönündeki paralel dönüşümlerinden elde edildiğini kabul edelim. Dış kuvvetlerin ox_3 ekseninden bağımsız olduğunu ve ele alınan ortamın bütün yönlerde sonsuz olan bir alan



kapsadığını kabul ettiğimizden ileride ancak düzlem şekil değiştirme durumlarını, yani $u_3=0$ ve $u_1=u_1(x_1, x_2)$, $u_2=u_2(x_1, x_2)$ olduğu durumları inceleyeceğiz.

2.3.1 Tek yönlü kompozitlerin yapısındaki stabilite kaybı

Şimdi yukarıda söylenenler çerçevesinde yapısı Şekil 2.1' de gösterilen bir kompozit malzemenin yapısındaki stabilite kaybının incelenmesini ele alalım. Bu malzemeyi oluşturan levhaların ara yüzeyleri boyunca ideal temas (kontakt) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Malzemenin yapısı stabilite kaybına kadar Şekil 2.1' de gösterildiği gibidir ve bu durumda gerilme ve şekil değiştirme dağılımı

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)0}}{\partial x_j} = 0, \quad k=1,2 \quad (2.44)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)0} = \lambda^{(k)} \theta^{(k)0} \delta_{ij} + 2\mu^{(k)} \epsilon_{ij}^{(k)0}, \quad (2.45)$$

$$\epsilon_{ij}^{(k)0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)0}}{\partial x_i} \right), \quad \theta^{(k)0} = \frac{\partial u_1^{(k)0}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(k)0}}{\partial x_2} \quad (2.46)$$

$$u_i^{(1)0} \Big|_{x_2^{(1)}=H^{(1)}} = u_i^{(2)0} \Big|_{x_2^{(2)}=-H^{(2)}}, \quad (2.47)$$

$$\sigma_{i2}^{(1)0} \Big|_{x_2^{(1)}=H^{(1)}} = \sigma_{i2}^{(2)0} \Big|_{x_2^{(2)}=-H^{(2)}}, \quad (2.48)$$

$$\sigma_{11}^{(1)0} 2H^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)0} 2H^{(2)} = 2(H^{(1)} + H^{(2)}) p \quad (2.49)$$

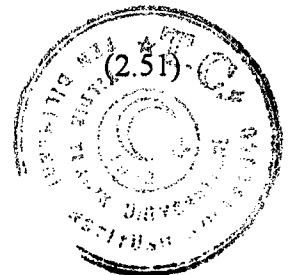
sınır değer probleminin çözümünden elde edilir. Şimdi bu problemin çözümünü araştıralım.

Problemin formülasyonundan ve fiziksel tahminlerden

$$\sigma_{i2}^{(k)0} = 0 \quad (2.50)$$

olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $\sigma_{11}^{(k)0}$ larında sabit olduklarını da yani $\sigma_{11}^{(k)0} = \text{sabit}_k$ olduğu (2.44) ve (2.49) ' dan elde edilir. Böylece gerilme dağılımının homojen bir gerilme dağılımı olduğu ve bu durumda

$$u_i^{(k)0} = a^{(k)} x_1^{(k)} + b^{(k)} x_2^{(k)} + e_i^{(k)}$$



$$u_2^{(k)0} = c^{(k)}x_1^{(k)} + d^{(k)}x_2^{(k)} + e_2^{(k)} \quad (2.52)$$

yazabileceğimiz açıktır. Buradan

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)0}}{\partial x_1^{(k)}} = a^{(k)} \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_{22}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)0}}{\partial x_2^{(k)}} = d^{(k)} \quad (2.54)$$

$$2\varepsilon_{12}^{(k)} = 0 = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_2^{(k)}} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1^{(k)}} = b^{(k)} + c^{(k)} = 0 \Rightarrow c^{(k)} = -b^{(k)} \quad (2.55)$$

(2.47)' den

$$a^{(1)}x_1^{(1)} + b^{(1)}H^{(1)} + e_1^{(1)} = a^{(2)}x_1^{(2)} - b^{(2)}H^{(2)} + e_1^{(2)} \quad (2.56)$$

$$-b^{(1)}x_1^{(1)} + d^{(1)}H^{(1)} + e_2^{(1)} = -b^{(2)}x_1^{(2)} - d^{(2)}H^{(2)} + e_2^{(2)} \quad (2.57)$$

buradan

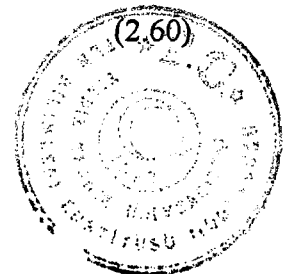
$$a^{(1)} = a^{(2)} \quad ; \quad b^{(1)}H^{(1)} + e_1^{(1)} = -b^{(2)}H^{(2)} + e_1^{(2)} \quad (2.58)$$

$$b^{(1)} = b^{(2)} \quad ; \quad d^{(1)}H^{(1)} + e_2^{(1)} = -d^{(2)}H^{(2)} + e_2^{(2)} \quad (2.59)$$

elde ederiz.

Elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi $b^{(1)}$ ve $b^{(2)}$ sabitleri şekil değiştirebilen cisim parçacığına rijit dönme verdiğiinden bu sabitlerin $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$ kabul edilmesi şekil değiştirme ve gerilme değerlerine hiçbir etki göstermez. Bundan başka yukarıdaki $e_1^{(1)}$ ve $e_1^{(2)}$ sabitleride ox_1 eksenini yönündeki rijit bir parçacığın öteleme yerdeğiştirmesini belirttiğinden bu sabitlerinde şekil değiştirme ve gerilme değerlerine hiçbir etkisi olmaz ve bu yüzden $e_1^{(1)} = e_1^{(2)} = 0$ kabul edebiliriz. (2.59)' dan,

$$d^{(1)} = -d^{(2)} \frac{H^{(2)}}{H^{(1)}} + (e_2^{(2)} - e_2^{(1)}) \frac{1}{H^{(1)}} \quad (2.60)$$



elde ederiz. Burada

$$d^{(2)} = d \quad ; \quad (e_2^{(2)} - e_2^{(1)}) \frac{1}{H^{(1)}} = e \quad (2.61)$$

işaretlemeleri kabul ettikten sonra

$$u_2^{(1)0} = \left(-d \frac{H^{(2)}}{H^{(1)}} + e \right) x_2^{(1)} + e_2^{(1)} \quad (2.62)$$

$$u_2^{(2)0} = d x_2^{(2)} + e_2^{(2)}$$

bundan başka $a^{(1)} = a^{(2)} = a$ kabul edilerek ve $x_1^{(1)} = x_1^{(2)}$ olduğunda gözönüne alarak

$$u_1^{(k)0} = a x_1^{(k)} \quad (2.63)$$

olduğunu yazabiliriz. (2.50), (2.60), (2.61), (2.62), (2.63)' den gözüktüğü gibi elde edilen sonuçlar (2.47) ve (2.48) ideal kontakt koşullarını sağlamaktadırlar. Şimdi (2.62) ve (2.63)'e dahil olan bilinmeyen sabitlerin p , $H^{(k)}$,

$$\begin{aligned} \lambda^{(k)} &= v^{(k)} E^{(k)} / \left((1 + v^{(k)}) (1 - 2v^{(k)}) \right) \\ \mu^{(k)} &= E^{(k)} / \left(2(1 + v^{(k)}) \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

verilenlerinden bağımlı olan ifadelerini elde edelim

Düzlem şekil değiştirme durumunda (2.45)' le verilmiş Hooke kanunu aşağıdaki gibi, yani

$$\sigma_{11}^{(k)0} = (\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \epsilon_{11}^{(k)0} + \lambda^{(k)} \epsilon_{22}^{(k)0} \quad (2.65)$$

$$\sigma_{22}^{(k)0} = \lambda^{(k)} \epsilon_{11}^{(k)0} + (\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \epsilon_{22}^{(k)0} \quad (2.66)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\epsilon_{11}^{(k)0} = \frac{(1 + v^{(k)})}{E^{(k)}} \left[(1 - v^{(k)}) \sigma_{11}^{(k)0} - v^{(k)} \sigma_{22}^{(k)0} \right]$$



$$\varepsilon_{22}^{(k)0} = \frac{(1 + v^{(k)})}{E^{(k)}} \left[(1 - v^{(k)}) \sigma_{22}^{(k)0} - v^{(k)} \sigma_{11}^{(k)0} \right] \quad (2.67)$$

(2.50)' yi gözönüne alırsak (2.67)' den

$$\varepsilon_{11}^{(k)0} = \frac{1 - (v^{(k)})^2}{E^{(k)}} \sigma_{11}^{(k)0} \quad (2.68)$$

$$\varepsilon_{22}^{(k)0} = - \frac{v^{(k)}(1 + v^{(k)})}{E^{(k)}} \sigma_{11}^{(k)0} \quad (2.69)$$

(2.63) ve (2.69)' dan $(\varepsilon_{11}^{(k)0} = \partial u_1^{(k)0} / \partial x_1)$ olduğuna göre)

$$a = \frac{1 - (v^{(1)})^2}{E^{(1)}} \sigma_{11}^{(1)0} = \frac{1 - (v^{(2)})^2}{E^{(2)}} \sigma_{11}^{(2)0} \quad (2.70)$$

elde ederiz. Bundan başka (2.62) ve (2.69)' dan

$$d = - \frac{v^{(2)}(1 + v^{(2)})}{E^{(2)}} \sigma_{11}^{(2)0} \quad (2.71)$$

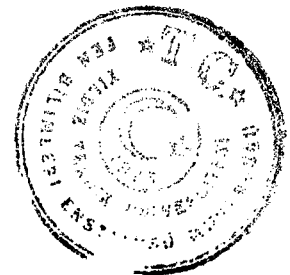
elde ederiz. (2.60) ve (2.61) ' den e sabitini de kolayca belirleyebiliriz. Şimdi (2.70)' den

$$\sigma_{22}^{(2)0} = \frac{E^{(2)}(1 - (v^{(1)})^2)}{E^{(1)}(1 - (v^{(2)})^2)} \sigma_{11}^{(1)0} \quad (2.72)$$

elde edip bunu (2.49)' da yerine yazarsak ve

$$\eta^{(1)} = \frac{H^{(1)}}{H^{(1)} + H^{(2)}} \quad \eta^{(2)} = \frac{H^{(2)}}{H^{(1)} + H^{(2)}} \quad (2.73)$$

tanımlarsak (2.49)' dan



$$\sigma_{11}^{(1)0} = p \left(\eta^{(1)} + \eta^{(2)} \frac{E^{(2)}(1 - (v^{(1)})^2)}{E^{(1)}(1 - (v^{(2)})^2)} \right)^{-1} \quad (2.74)$$

elde ederiz. Böylece ele alınan malzeme yapısında verilen dış kuvvetlerin etkisi altında stabilite kaybına kadar olan gerilme ve yerdeğiştirme durumu (2.50), (2.68)-(2.74) şeklinde belirlenmiş bulunmaktadır. (2.73) işaretlemeleri ile verilen $\eta^{(1)}$ ve $\eta^{(2)}$ sabitlerine sırasıyla ele alınan kompozit malzemedeki matris malzemesinin ve güçlendirici malzemenin yoğunluğu denir. Böylece elde edilen sonuçları kullanarak incelenen durum için stabilite kaybı denklemleri (2.34)-(2.36)' den yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1^{(k)}} \sigma_{11}^{(k)} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial x_2^{(k)}} + \sigma_{11}^{(k)0} \frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial x_1^{(k)2}} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial x_1^{(k)}} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial x_2^{(k)}} + \sigma_{11}^{(k)0} \frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial x_1^{(k)2}} &= 0 \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= \lambda^{(k)} \theta^{(k)} \delta_{ij} + 2 \mu^{(k)} \epsilon_{ij}^{(k)} \\ \theta^{(k)} &= \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1^{(k)}} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2^{(k)}} \\ \epsilon_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Bu denklemlerin yazılışında stabilite kaybına kadarki durumda $\left| \frac{\partial u_i^{(k)0}}{\partial x_j^{(k)}} \right| \ll 1$ olduğundan

(2.34)-(2.36) denklemlerindeki $\left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(k)0}}{\partial x_n^{(k)}} \right)$ ifadeleri δ_i^n ' lerle yer değiştirilmiştir. Aynı

basitleştirmeleri kontakt koşullarının yazılışında da gözönüne alırsak aşağıdakileri elde ederiz:

$$u_i^{(1)} \Big|_{x_2^{(1)}=H^{(1)}} = u_i^{(2)} \Big|_{x_2^{(2)}=-H^{(2)}} \quad ; \quad \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2^{(1)}=H^{(1)}} = \sigma_{i2}^{(2)} \Big|_{x_2^{(2)}=-H^{(2)}} \quad (2.76)$$

Böylece ele alınan çok katlı kompozit malzemenin yapısında Şekil 2.1' de gösterilen dış basınç kuvvetlerinin etkisi altında olabilecek stabilite kaybının incelenmesi (2.75), (2.76) özdeğer probleminin incelenmesine getirilmektedir. İnceleme sonucunda elde edilen kritik dış basınç değerlerinin kırılma basınç değerleri gibi kabul edildiğini belirtmekte yarar vardır.



Böylece şimdiye kadar yapılan tek yönlü kompozit malzemelerin basınç altında kırılmasının teorik incelenmesi (2.75), (2.76) özdeğer problemlerinin çözülmesi ve elde edilen sonuçların yorumlanmasıdır. Bu problemlerin incelenmesinin nasıl yapıldığını daha iyi anlamak için ele aldığımız örnek problemi inceleyelim. Bu durumda malzeme yapısındaki stabilite kaybı levhaların ox_1 yönünde periyodu ℓ olan periyodik bir formda eğilmesi şeklinde ortaya çıktığını farzedelim. Bu nedenle yerdeğiştirmelerin pertürbasyonlarını

$$\begin{aligned} u_1^{(k)} &= \varphi_1^{(k)}(x_2^{(k)}) \cos \frac{2\pi}{\ell} x_1 \\ u_2^{(k)} &= \varphi_2^{(k)}(x_2^{(k)}) \sin \frac{2\pi}{\ell} x_1 \end{aligned} \quad (2.77)$$

şeklinde seçelim. Şimdi (2.77)'yi (2.75)'de yerine yazarsak $\varphi_1^{(k)}$ ve $\varphi_2^{(k)}$ 'lar için aşağıdaki denklemler takımını elde ederiz:

$$\begin{aligned} -C_1^{(k)}\varphi_1^{(k)} + C_2^{(k)} \frac{d^2 \varphi_1^{(k)}}{d(\alpha x_2^{(k)})^2} + \frac{d\varphi_2^{(k)}}{d(\alpha x_2^{(k)})} &= 0 \\ -C_3^{(k)}\varphi_2^{(k)} + C_4^{(k)} \frac{d^2 \varphi_2^{(k)}}{d(\alpha x_2^{(k)})^2} - \frac{d\varphi_1^{(k)}}{d(\alpha x_2^{(k)})} &= 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

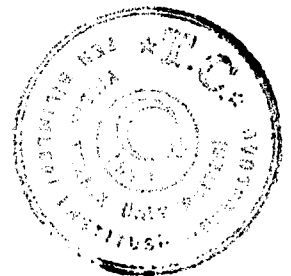
burada aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir:

$$\begin{aligned} C_1^{(k)} &= 2(1 - \nu^{(k)}) + \frac{2\sigma_{11}^{(k)0}}{E^{(k)}}(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)}) \\ C_3^{(k)} &= (1 - 2\nu^{(k)}) + \frac{2\sigma_{11}^{(k)0}}{E^{(k)}}(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)}) \\ C_2^{(k)} &= (1 - 2\nu^{(k)}) \quad ; \quad C_4^{(k)} = 2(1 - \nu^{(k)}) \end{aligned} \quad (2.79)$$

(2.78)'den $\varphi_2^{(k)}$ için kolayca aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{d^4 \varphi_2^{(k)}}{d(x_2^{(k)})^4} + \frac{C_1^{(k)}C_4^{(k)} - C_2^{(k)}C_3^{(k)} - 1}{C_2^{(k)}C_4^{(k)}} \frac{d^2 \varphi_2^{(k)}}{d(x_2^{(k)})^2} + \frac{C_1^{(k)}C_3^{(k)}}{C_2^{(k)}C_4^{(k)}} \varphi_2^{(k)} = 0 \quad (2.80)$$

Burada



$$D_1^{(k)} = \frac{C_1^{(k)}C_4^{(k)} - C_2^{(k)}C_3^{(k)} - 1}{C_2^{(k)}C_4^{(k)}} \quad ; \quad D_2^{(k)} = \frac{C_1^{(k)}C_3^{(k)}}{C_2^{(k)}C_4^{(k)}} \quad (2.81)$$

dir. (2.80)' e karşı gelen karakteristik denklemin yani

$$(\lambda^{(k)})^4 + D_1^{(k)}(\lambda^{(k)})^2 + D_2^{(k)} = 0 \quad (2.82)$$

denkleminin

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(k)} &= \left(-\frac{D_1^{(k)}}{2} + \sqrt{\frac{D_1^2}{4} - D_2} \right)^{1/2} \\ \lambda_2^{(k)} &= \left(-\frac{D_1^{(k)}}{2} - \sqrt{\frac{D_1^2}{4} - D_2} \right)^{1/2} \\ \lambda_3^{(k)} &= -\lambda_1^{(k)} \\ \lambda_4^{(k)} &= -\lambda_2^{(k)} \end{aligned} \quad (2.83)$$

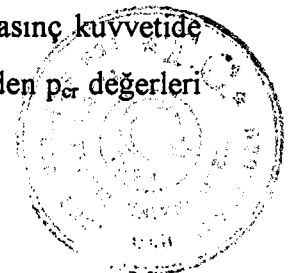
kökleri gerçekte sayılar ise $\varphi_2^{(k)}$ aşağıdaki gibi belirlenir:

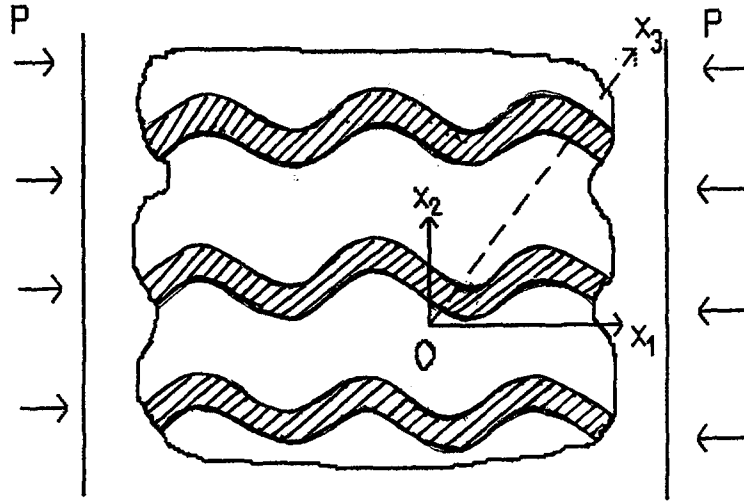
$$\varphi_2^{(k)} = A_1^{(k)} \text{ch}(\lambda_1^{(k)} \alpha x_2^{(k)}) + A_2^{(k)} \text{sh}(\lambda_1^{(k)} \alpha x_2^{(k)}) + A_3^{(k)} \text{ch}(\lambda_2^{(k)} \alpha x_2^{(k)}) + A_4^{(k)} \text{sh}(\lambda_2^{(k)} \alpha x_2^{(k)}) \quad (2.84)$$

Şekil 2.1' de gösterilen malzemenin yapısındaki stabilite kaybı Sinfaz (aynı fazda) bir formda meydana geliyor ise (Şekil 2.2' de gösterildiği gibi) o zaman $\varphi_2^{(k)}(x_2^{(k)})$ fonksiyonunu (2.84)' den aşağıdaki gibi seçmek gerekir:

$$\varphi_2^{(k)} = A_1^{(k)} \text{ch}(\lambda_1^{(k)} \alpha x_2^{(k)}) + A_3^{(k)} \text{ch}(\lambda_2^{(k)} \alpha x_2^{(k)}) \quad (2.85)$$

Bundan sonra gerekli işlemler yapılarak (2.78) den $\varphi_1^{(k)}(x_2^{(k)})$ fonksiyonu (2.85) ile ifade edilir ve (2.76)' dan bir sıra çevirmelerden sonra $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ bilinmeyen sabitlerine göre homojen kapalı cebirsel denklemler takımı elde edilir. Bu denklemler takımının sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi bilinmeyenler katsayısından oluşan determinantın sıfıra eşit olmasını gerektirir. Adı geçen bu katsayılar $\sigma_{11}^{(k)0}$ 'lar aracılığı ile dış p basınç kuvvetide dahil olur ve yukarıdaki determinantın sıfıra eşitliğinden elde edilen denklemden p_{cr} değerleri bulunur.

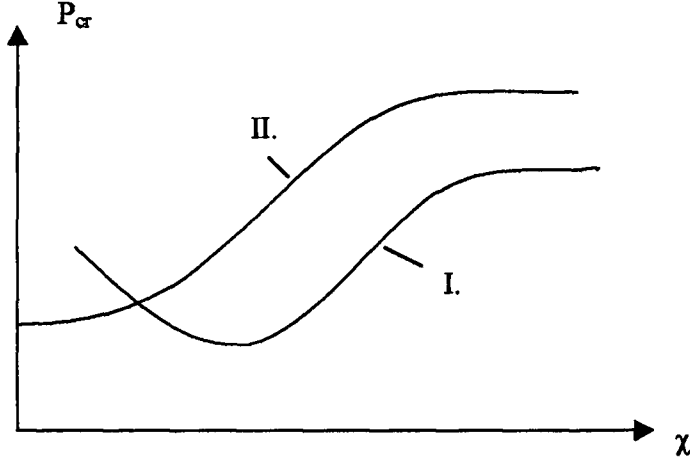




Şekil 2.2 Yapısındaki stabilite kaybı Sinfaz bir formda meydana gelen çok katlı levhali kompozit malzeme yapısı

Sayısal araştırmalar için $\chi = 2\pi H^{(2)}/\ell$ parametresi ele alınır ve p_{cr} değerleri ile χ değerleri arasındaki bağımlılık incelenir. Bu incelemeler problem parametrelerinin yani $E^{(2)}/E^{(1)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ parametrelerinin kayıt edilmiş değerlerinde yapılır. Bu tür sayısal araştırmaların özetlenmesi Guz' ve Chekhov (1992) tarafından verilmiştir. Bu yayından ve atıf yapılan kaynaklardan gözüktüğü gibi $p_{cr} = p_{cr}(\chi)$ bağımlılığı iki tipte elde edilmektedir. Bu tipler Şekil 2.3' de genel bir formda I. ve II. eğrilerle gösterilmektedir. Görüldüğü gibi I. tip bağımlılıklarda $\chi > 0$ durumlarında p_{cr} ' in minimum değerleri vardır. II. tip bağımlılıklarda ise böyle bir minimum değer müşahade edilememektedir. I. tip bağımlılık olan durumlarda p_{cr} ' lerin minimum değerine, ele alınan kompozit malzemenin basınçtaki kırılma değeri denir ve bu tür stabilite kaybının meydana geldiği durumlara I. tip iç stabilite kaybı da denir. Şekil 2.3' den gözüktüğü gibi $p_{cr} = p_{cr}(\chi)$ bağımlılığının müşahade edilen her iki türünde p_{cr} değerlerinin χ' ya bağımlılığı açıkça ve önemli bir biçimde göze çarpmaktadır. İleride bu özellikten yararlanılarak elde edilen bazı sonuçların, şimdiye kadar bilinen sonuçlardan farkı açıklanacaktır. Bu kısmın sonunda şunu da belirtelim ki $p_{cr} = p_{cr}(\chi)$ bağımlılığının her iki türünde elde edilen p_{cr} değerleri, fiziksel açıdan teorik basınç kırılma limitinden düşük olduğu hallerde anlam taşımaktadır. Teorik basınç kırılma limitinin belirlenmesi ise 2.3.2' de verileceği gibidir.





Şekil 2.3 p_{α} değerleri ile χ değerleri arasındaki iki tip bağımlılık

2.3.2 Tek yönlü kompozitlerin teorik basınç kırılma limiti (TBKL) hep sürekli ortam

Şimdiye kadar tek yönlü kompozitlerin teorik basınç kırılma limiti (TBKL) hep sürekli ortam yaklaşımı çerçevesinde yapılmıştır. Bu yaklaşıma göre parçalı-homojen ortam sürekli anizotrop homojen bir ortama dönüştürülerek aynı dış kuvvetlerin etkisi altında (2.34)-(2.36) denklemleri yazılır ve bu ortamın kapsadığı alanın bütün yönlerde sonsuz olduğu kabul edilir. Sonraki açıklamalarımızı basitleştirmek ve daha anlaşılır bir hale getirmek için Şekil 2.1 'de gösterilen ve bir önceki kısımda ele alınan kompozit malzemeyi gözönüne alalım. Bu malzeme için sürekli ortam modeli uygulanırsa o izotropi eksenini ox_2 eksenini olan transversal izotrop homojen bir malzemeye dönüştürülür ve normalize edilmiş mekanik özellikleri aşağıdaki gibi belirlenir. Bu malzeme için genelleştirilmiş Hooke kanununu (2.35)' den,

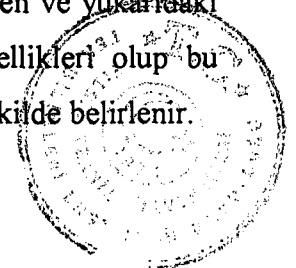
$$C_{ijnm}(t - \tau) \equiv 0$$

$$C_{ijnm0} = \delta_i^j \delta_n^m A_{im} + (1 - \delta_i^j) (\delta_i^n \delta_j^m + \delta_j^n \delta_i^m) G_{ij} \quad (2.86)$$

olduğunda aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\sigma_{ii} = A_{ij} \varepsilon_{jj} \quad ; \quad \sigma_{ij} = 2 G_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j) \quad (2.87)$$

(2.86) ve (2.87)' deki A_{ij} ve G_{ij} ' ler ($i, j = 1, 2, 3$) Şekil 2.1' de yapısı gösterilen ve yukarıdaki kısımda ele alınan kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleri olup bu malzemenin bileşenlerinin mekanik özellikleri ve hacim oranları aşağıdaki şekilde belirlenir.



$$G_{12} = G_{23} = \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}\eta^{(2)} + \mu^{(2)}\eta^{(1)}} \quad , \quad G_{13} = \eta^{(1)}\mu^{(1)} + \eta^{(2)}\mu^{(2)}$$

$$\frac{1}{2}(A_{11} - A_{13}) = \mu^{(1)}\eta^{(1)} + \mu^{(2)}\eta^{(2)} \quad , \quad A_{23} = A_{12} = \lambda^{(1)}\eta^{(1)} + \lambda^{(2)}\eta^{(2)} -$$

$$- \eta^{(1)}\eta^{(2)}(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}} \quad ,$$

$$\frac{1}{2}(A_{11} + A_{13}) = (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})\eta^{(1)} + (\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})\eta^{(2)} -$$

$$- \eta^{(1)}\eta^{(2)} \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + \eta^{(1)}(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})} \quad ,$$

$$A_{22} = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(1)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(2)} - \eta^{(1)}\eta^{(2)} \frac{[(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})]^2}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}}$$

$$A_{33} = A_{11} \quad ; \quad A_{11} - A_{13} = 2 G_{13} \quad ;$$

$$\mu^{(k)} = G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \quad k=1,2$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})} \quad (2.88)$$

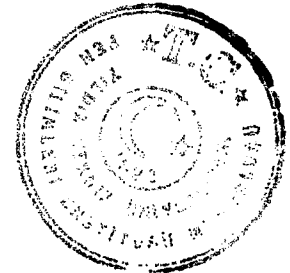
(2.88) formüllerinin elde edilme yöntemleri birçok kaynaklarda, örneğin Christensen (1979)'da verilmektedir. Bu nedenle burada bu formüllerin çıkarılması üzerinde durmuyoruz. Şimdi yukarıda söylenenleri gözönüne alarak (2.87), (2.88) ile verilen ortam Şekil 2.1' de gösterilen ve yoğunluğu p olan basınç kuvveti etkisi altındaki durumda düzlem şekil değiştirme halinde lineerize edilmiş stabilite denklemleri (2.34)-(2.36), (2.86), (2.87)' den aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(A_{11} + p) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + G_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (A_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad ,$$

$$(G_{12} + p) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (A_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

(2.89)

Böylece elde edilmiş (2.89) denkleminin tipi araştırılır. Eğer bu denklemin katsayıları α_1 ve α_2 bilinmeyenlerine göre yazılmış

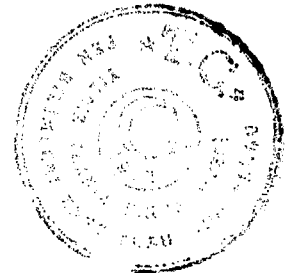


$$\begin{aligned} & ((A_{11} + p)\alpha_1^2 + G_{12}\alpha_2^2)((G_{12} + p)\alpha_1^2 + A_{22}\alpha_2^2) - (A_{12} + G_{12})^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 0 \\ & |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.90)$$

cebirsel denklem takımının kökleri kompleks sayılar ise (2.89) denklem takımı eliptiktir denir. Eğer (2.90) denklemlerinin en azından bir kompleks olmayan kökü varsa o zaman (2.89) takımı eliptiklik tipini kaybeder ve Biot (1965)' ya göre "hiperbolik tip" çözüme sahip olur. (2.90)' dan görüldüğü gibi $\alpha_2 = 0$, $|\alpha_1| = 1$ durumunda $(A_{11} + p)(G_{12} + p)\alpha_1^4 = 0$ ' dan $p = -G_{12}$ durumu ((2.88)' e göre $A_{11} \gg G_{12}$ olduğundan $p = -A_{11}$ durumu gözönüne alınmıyor.) (2.89) denklemler takımının eliptiklik tipini kaybetme anına karşı gelmektedir. Bu nedenle de $p = -G_{12}$ şeklinde belirlenen dış basınç kuvveti, Şekil 2.1' de gösterilen kompozit malzemenin teorik basınç kırılma limiti (TBKL) olarak adlandırılır. Yapısı Şekil 2.1' de gösterilen yapıdan farklı olan kompozit malzemeler için TBKL yukarıda verilmiş işlemlerin belli şekilde değiştirilmesi ve geliştirilmesi yardımı ile elde edilebilir. Bir daha belirtelim ki, bu yönde yapılan bütün araştırmalar saf elastik kompozit malzemeler için yapılabilmekte, fakat viskoelastik kompozit malzemeler için TBKL' nin belirlenmesi açıklanamamaktadır.

Bundan başka belirtelim ki bir önceki kısımda söylendiği gibi $p_{cr} = p_{cr}(\chi)$ bağımlılıklarının $\min p_{cr}$ değerleri TBKL' den örneğin ele alınan kompozit malzeme için G_{12} ' den küçük olduğu durumlarda fiziksel anlam taşımaktadır. Aksi halde Şekil 2.3' de genel formu verilen $p_{cr} = p_{cr}(\chi)$ bağımlılıklarının hiçbir anlam ve önemi olmaz. Söylenen nedenlerden dolayı tek yönlü kompozit malzemelerin TBKL' nin belirlenme yöntemlerinin geliştirilmesi ve farklı tür kompozit malzemelere uygulanması çok gerekli ve zaruri sanılmaktadır.

Tez çalışmalarının sonraki bölümlerinin esas amaçlarından biri de şimdiye kadar açıklanamayan tek yönlü viskoelastik malzemelerin TBKL' lerinin belirlenmesi için yeni bir yöntemin önerilmesi ve bazı örnekler için uygulanmasıdır.

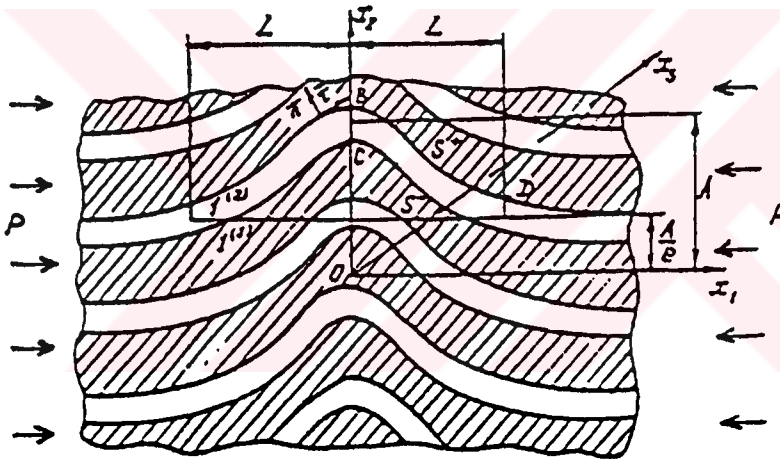


BÖLÜM III

3. YAPISINDA YEREL EĞRİSELLİK OLAN TEK YÖNLÜ ELASTİK KOMPOZİTLERİN BASINÇ ALTINDA KIRILMASININ İNCELENMESİ

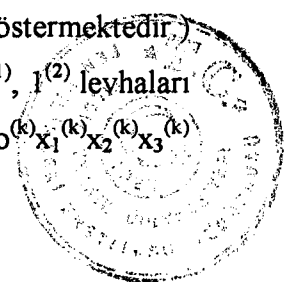
3.1 Problemlerin Matematiksel Formülasyonu

Bu bölümde birbirini tekrarlayan iki tabakadan oluşmuş kompozit malzemenin yapısında sonsuz küçük Sinfaz yerel bir eğrilmenin var olduğu kabul edilir. Bu malzeme Şekil 2.1' de gösterildiği gibi sonsuzlukta p yoğunluklu dış basınç kuvveti ile yüklenir. Akbarov vd., (1997) tarafından verilen yöntem yardımı ile yapısında yüklemeden önce Şekil 3.1' de gösterilen formda sonsuz küçük yerel eğrilselliği olan bir kompozit malzemenin yapısındaki stabilite kaybı incelenmektedir. Çalışmada, kompozit malzemeyi oluşturan bileşenlerin saf elastik, izotrop ve homojen malzemelerden oluşması hali ele alınmaktadır.



Şekil 3.1 Sonsuz küçük yerel eğriselliği olan bir kompozit malzemenin yapısı

Şimdi yapısı Şekil 3.1' de gösterilen kompozit malzemenin $|x_1| \rightarrow \infty$ da yoğunluğu p olan ve homojen yayılan basınç kuvvetinin etkisi altında olduğunu farzedelim. Güçlendirici levhaların ox_1x_3 düzlemi üzerine yerleştirildiğini ve kalınlıklarının sabit olduğunu kabul edelim. İleride güçlendirici levhalara ait olan büyüklükler üst (2) indisi ile, matris levhalara ait olan büyüklükler ise üst (1) indisi ile gösterilecektir. Ele alınan kompozit malzemenin yapı özelliği ox_2 eksenini boyunca (Şekil 3.1) her $2(H^{(1)}+H^{(2)})$ uzunluğundan sonra tekrarlandığından (burada $2H^{(2)}$ güçlendirici levhanın kalınlığını, $2H^{(1)}$ ise matris levhanın kalınlığını göstermektedir) ilerideki incelemeler ancak Şekil 3.1' de gösterilen levhalar içinden seçilmiş $1^{(1)}, 1^{(2)}$ levhaları üzerinde yapılacaktır. Sözü edilen bu levhaların herbirinin orta yüzeyine $o^{(k)}x_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}$



Lagrange koordinat takımına ($k=1,2$, $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = x_1$, $x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = x_3$) ait olduğu kabul edilir. Bu koordinat takımlarının herbiri Şekil 3.1' de gösterilen $ox_1x_2x_3$ koordinat sisteminden ox_2 eksenı boyunca olan paralel öteleme sonucunda elde edilebilir ve dış kuvvet etki göstermeden önce kartezyen koordinatlarla çakışır. Ele alınan kompozit malzemenin yapısında olan sonsuz küçük yerel eğrilmelerin ancak ox_1 eksenı yönünde olduğu kabul edilir. Yukarıda söylenenleri dikkate alarak incelenen kompozit malzemede oluşan gerilme ve şekil değıştirme durumunu parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde geometrik non-lineer elastisite teorisinin kesin denklemlerini uygulayarak inceleyelim. Araştırmalar parçalı homojen modeli çerçevesinde yapıldığından seçilmiş $1^{(1)}$ ve $1^{(2)}$ levhalarının herbirinin kapsadığı alanda düzlem şekil değıştirme durumuna ait olan (düzlem şekil değıştirme durumu denir iken $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 \equiv 0$ olması hali kabul edilmektedir.) denge denklemlerini, bünye denklemlerini, şekil ve yer değıştirme arasındaki bağıntıları yazalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j^{(k)}} \left[\sigma_{jn}^{(k)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_n^{(k)}} \right) \right] &= 0; \quad i, j; n = 1, 2 \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= \lambda^{(k)} \theta^{(k)} \delta_i^j + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \theta^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)}; \\ 2\varepsilon_{ij}^{(k)} &= \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j^{(k)}} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i^{(k)}} + \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial x_i^{(k)}} \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial x_j^{(k)}}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1)' de anlamları bir önceki bölümde gösterilen işaretlemeler kullanılmıştır.

Ele alınan kompozit malzemeyi oluşturan levhalar arasında ideal temas koşullarının sağlandığını farzedelim. $1^{(2)}$ levhasının üst yüzeyini S^+ , alt yüzeyini ise S^- ile işaret edersek belirtilen temas koşullarını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\left[\left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n^{(1)}} \right) \sigma_{jn}^{(1)} \right] \Big|_{S^+} n_j^\mp = \left[\left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_n^{(2)}} \right) \sigma_{jn}^{(2)} \right] \Big|_{S^+} n_j^\mp; \quad u_i^{(1)} \Big|_{S^+} = u_i^{(2)} \Big|_{S^+} \quad (3.2)$$

burada $n_j^\pm$, $S^\pm$ yüzeylerinin birim normal vektörünün bileşenleridirler. Malzeme yapısındaki sonsuz küçük yerel eğrisellik $1^{(2)}$ güçlendirici levhasının orta yüzeyinin

$$x_2^{(2)} = \varepsilon f(x_1)$$



şeklinde verilen denklemi vasıtası ile gösterilir. Burada ε boyutsuz küçük bir parametredir ve $(0 < \varepsilon < 1)$ bu parametrenin geometrik anlamı (3.3)' deki $f(x_1)$ fonksiyonu açık şekilde verildiğinde gösterilecektir. Bunlardan başka (3.3)' deki $f(x_1)$ fonksiyonunun ve onun birinci mertebeden türevinin sürekli olduğu ve aşağıdaki

$$f(x_1); \frac{df}{dx_1} \rightarrow 0 \quad |x_1| \rightarrow \infty \quad \text{iken,} \quad \varepsilon \left| \frac{df}{dx_1} \right| \ll 1 \quad x_1 \in (-\infty, +\infty) \quad (3.4)$$

koşulları sağladığı kabul edilir.

Yukarıda söylenenler çerçevesinde ileride incelenecek problemin matematiksel formülasyonu tanımlanmıştır. Şimdi bu matematiksel problemin çözüm yöntemini ele alalım.

3.2 Çözüm Yöntemi ve Kırılma Kriteri

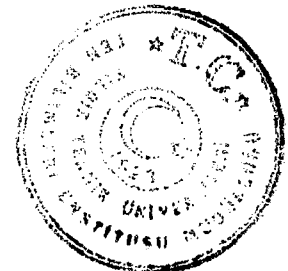
(3.1)-(3.4) non-lineer sınır değer probleminin incelenmesi için, Akbarov ve Guz'(1995), Akbarov (1995) kaynaklarında geliştirilmiş olan ve sınır formunun pertürbasyon yöntemi diye adlandırılan bir yöntemin belli bir varyantını, yani Akbarov ve Guz' yöntemini uygulayalım. Bu yöntemle göre (3.3) denkleminde ve güçlendirici levhaların kalınlıklarının sabit olması koşulunu kullanarak $S^\pm$ yüzeylerinin (matris ve güçlendirici levhaların temas yüzeylerinin) denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$x_1^{(2)\pm} = t_1 \mp \frac{H^{(2)}}{L(t_1)} \frac{dF(t_1)}{dt_1}; \quad x_2^{(2)\pm} = F(t_1) \mp \frac{H^{(2)}}{L(t_1)}; \quad F(t_1) = \varepsilon f(t_1);$$

$$L(t_1) = \left[1 + \left(\frac{dF}{dt_1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.5)$$

burada t_1 parametredir ve $t_1 \in (-\infty, +\infty)$, $H^{(2)}$ güçlendirici levhanın kalınlığının yarısıdır. Yukarıdaki verilerden yararlanarak $S^\pm$ yüzeylerinin birim normalinin bileşenlerinin ifadeleri ise aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$n_1^\pm = -\frac{dx_2^{(2)\pm}(t_1)}{dt_1} [V^\pm(t_1)]^{-1}, \quad n_2^\pm = \frac{dx_1^{(2)\pm}(t_1)}{dt_1} [V^\pm(t_1)]^{-1},$$



$$V^{\pm}(t_1) = \left[\left(\frac{dx_1^{(2)\pm}(t_1)}{dt_1} \right)^2 + \left(\frac{dx_2^{(2)\pm}(t_1)}{dt_1} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

(3.5) ve (3.6)'daki $x_1^{\pm}$, $x_2^{\pm}$ 'ler $S^{\pm}$ yüzeyinin koordinatlarıdır. Dolayısıyla (3.5) $S^{\pm}$ yüzeylerinin parametrik şekilde olan bir denklemdir. Şimdi $1^{(1)}$ ve $1^{(2)}$ levhalarındaki gerilme ve şekil değiştirme durumunu belirten büyüklükleri ε küçük parametresinin kuvvet serisi şeklinde arayalım. Dolayısıyla bu büyüklükleri,

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(k)}; \varepsilon_{ij}^{(k)}; u_i^{(k)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(k),q}; \varepsilon_{ij}^{(k),q}; u_i^{(k),q} \right\} \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edelim. (3.7) ifadesini (3.1) denklemlerinde yerine yazıp ve ε 'nin mertebelerine göre gruplaştırmalar yapıp ε^n 'lerin katsayılarını sıfıra eşitleyerekten (3.7)'deki her bir yaklaşım için kapalı denklemler takımı elde ederiz. Her yaklaşım için elde edilen denklemler kendinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri de içerir. Bunun nedeni (3.1) denklemlerinin non-lineer denklemler olmasıdır. Bundan başka (3.7) ifadelerini (3.2) temas koşullarında yerine yazarsak ve (3.5) ifadelerini gözönüne alarak (3.7)'nin her bir yaklaşımını $(t_1, \pm H^{(k)})$ civarında Taylor serisine ayırırsak ve daha sonra (3.6) ifadelerinde ε 'nin serisi şeklinde yazarak (3.2)'de gözönüne alırsak belli çevirme ve işlemlerden sonra her bir yaklaşım için uygun temas koşullarını elde ederiz. Böylece önceki kısımda gösterilen non-lineer sınır değer probleminin incelenmesi bir seri sınır değer probleminin incelenmesine dönüştürülmüş olur. İlerideki araştırmaları kolaylaştırmak ve daha kapsamlı yapmak nedeni ile her bir yaklaşımda elde edilen denklemler takımını ve kontakt koşullarını ayrı ayrı yazalım. ((3.7) serisindeki q büyüklüğünün yaklaşımın sırasını gösterdiğini belirtelim.)

Sıfırıncı yaklaşım

Denge denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{(k)}} \left[\sigma_{jn}^{(k),0} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(k),0}}{\partial x_n^{(k)}} \right) \right] = 0 \quad i, j, n = 1, 2 \quad (3.8)$$



Bünye denklemleri

$$\sigma_{ij}^{(k),0} = \lambda^{(k)} \theta^{(k),0} \delta_i^j + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k),0}; \quad \theta^{(k),0} = \varepsilon_{11}^{(k),0} + \varepsilon_{22}^{(k),0}; \quad (3.9)$$

Şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{\partial u_i^{(k),0}}{\partial x_j^{(k)}} + \frac{\partial u_j^{(k),0}}{\partial x_i^{(k)}} + \frac{\partial u_n^{(k),0}}{\partial x_i^{(k)}} \frac{\partial u_n^{(k),0}}{\partial x_j^{(k)}} \quad (3.10)$$

Birinci yaklaşım

Denge denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{(k)}} T_{ij}^{(k),1} = 0 \quad (3.11)$$

Bünye denklemleri

$$\sigma_{ij}^{(k),1} = \lambda^{(k)} \theta^{(k),1} \delta_i^j + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k),1}; \quad \theta^{(k),1} = \varepsilon_{11}^{(k),1} + \varepsilon_{22}^{(k),1}; \quad (3.12)$$

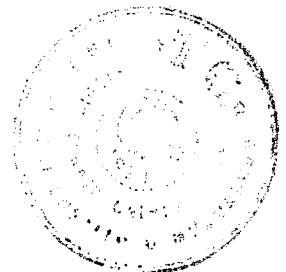
Şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları

$$\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(k),0}}{\partial x_i^{(k)}} \right) \frac{\partial u_n^{(k),1}}{\partial x_j^{(k)}} + \frac{1}{2} \left(\delta_j^n + \frac{\partial u_n^{(k),0}}{\partial x_j^{(k)}} \right) \frac{\partial u_n^{(k),1}}{\partial x_i^{(k)}} \quad (3.13)$$

Sonraki yaklaşımlar

Denge denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{(k)}} T_{ij}^{(k),q} = \Psi_{iq} (T_{ij}^{(k),1}, \dots, T_{ij}^{(k),q-1}) \quad (3.14)$$



Bünye denklemleri

$$\sigma_{ij}^{(k),q} = \lambda^{(k)} \theta^{(k),q} \delta_i^j + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k),q}; \quad \theta^{(k),q} = \varepsilon_{11}^{(k),q} + \varepsilon_{22}^{(k),q}; \quad (3.15)$$

Şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(k),0}}{\partial x_i^{(k)}} \right) \frac{\partial u_n^{(k),q}}{\partial x_j^{(k)}} + \left(\delta_j^n + \frac{\partial u_n^{(k),0}}{\partial x_j^{(k)}} \right) \frac{\partial u_n^{(k),q}}{\partial x_i^{(k)}} + \sum_{r=1}^{q-1} \frac{\partial u_n^{(k),q-r}}{\partial x_i^{(k)}} \frac{\partial u_n^{(k),r}}{\partial x_j^{(k)}} \quad (3.16)$$

(3.11), (3.14)' de aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir;

$$T_{ij}^{(k),q} = \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(k),0}}{\partial x_n^{(k)}} \right) \sigma_{jn}^{(k),q} + \sigma_{jn}^{(k),0} \frac{\partial u_n^{(k),q}}{\partial x_n^{(k)}} \quad (3.17)$$

Birinci ve sonraki yaklaşımlar için (3.2)' den elde edilen kontakt koşullarını ise aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} T_{i2}^{(1),q} \Big|_{(t_1, \pm H^{(1)})} - T_{i2}^{(2),q} \Big|_{(t_1, \pm H^{(2)})} &= \Phi_{iq} (T_{ij}^{(1),q-1}, T_{ij}^{(2),q-1}, u_i^{(1),q-1}, u_i^{(2),q-1}, \dots, \\ &\quad \sigma_{ij}^{(1),0}, \sigma_{ij}^{(2),0}, u_i^{(1),0}, u_i^{(2),0}, f); \\ u_i^{(1),q} \Big|_{(t_1, \pm H^{(1)})} - u_i^{(2),q} \Big|_{(t_1, \pm H^{(2)})} &= \varphi_{iq} (u_i^{(1),q-1}, u_i^{(2),q-1}, \dots, u_i^{(1),0}, u_i^{(2),0}, f) \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.14) ve (3.18)' deki Ψ_{iq} , Φ_{iq} ve φ_{iq} 'ler bilinen fonksiyonlardır ve ifadeleri çözüm prosedüründen elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerden görüldüğü gibi uygulanan çözüm yöntemi (3.1)-(3.4) non-lineer sınır değer probleminin incelenmesi ve (3.8)-(3.10) daha basit non-lineer sınır değer probleminin, (3.11)-(3.18)' lerle verilen bir seri lineer sınır değer problemlerinin incelenmesine getirilmiş oluyor. (3.11)-(3.17) denklemlerinin (2.34)-(2.38) denklemleri ile karşılaştırılmasından, (3.11)-(3.18) denklemlerinin de elastisite teorisinin üç boyutlu lineerize edilmiş denklemleri olduğu açıkça görülmektedir. Ancak ikinci ve daha sonraki yaklaşımlara karşı gelen (3.14)-(3.17) denklemleri homojen olmayan lineerize edilmiş denklemlerdir.



Böylece elde edilen (3.8)-(3.18) sınır-değer problemlerinin incelenmesi sonucunda Şekil 2.1'de yapısı verilen kompozit malzemede oluşan gerilme ve şekil değiştirme dağılımını belirlemiş oluyoruz. Bundan sonra bu malzemenin kırılmasının incelenebilmesi için kırılma kriteri seçilir ve aşağıdakiler gözönüne alınır.

Dow ve Gruntfest (1960), Rosen (1965), Greszcuk (1974,1975), Guz' (1969,1990) kaynaklarında ele alındığı gibi bu çalışmada da tekyönlü kompozit malzemenin basınç sırasında kırılması, malzeme yapısının stabilite kaybı gibi kabul edilecektir. Ancak, tez çalışmasında stabilite kaybı kriteri olarak Euler veya çözümün dallanması (bifurcation) kriterinden değil, dış basınç kuvvetleri artarak sonlu bir değere yaklaştığında malzeme yapısında olan sonsuz küçük başlangıç eğriliklerinin büyüyerek sonsuza yaklaşması durumu kriteri alınacaktır. Bu kriterin daha detaylı açıklaması ilerideki uygulamalarda verilecektir.

Şimdi ise her bir yaklaşıma ait olan büyüklüklerin belirlenmesi üzerinde duralım.

3.3 Sıfıncı, Birinci ve İkinci Yaklaşımların Belirlenmesi

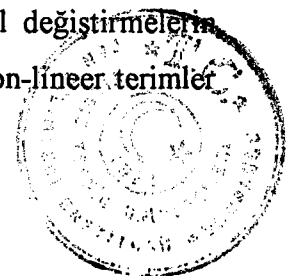
3.3.1 Sıfıncı yaklaşım

Yukarıda gösterildiği gibi $1^{(1)}$ ve $1^{(2)}$ levhalarına ait büyüklükler (3.8)-(3.10) denklemlerini ve

$$\left(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(1),0}}{\partial x_n^{(1)}} \right) \sigma_{2n}^{(1),0} \bigg|_{(t_1, \pm H^{(1)})} = \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(2),0}}{\partial x_n^{(2)}} \right) \sigma_{2n}^{(2),0} \bigg|_{(t_1, \pm H^{(2)})}$$

$$u_i^{(1),0} \bigg|_{(t_1, \pm H^{(1)})} = u_i^{(2),0} \bigg|_{(t_1, \pm H^{(2)})} \quad (3.19)$$

temas koşullarını da sağlamak zorundadırlar. (3.19)' dan gözüktüğü gibi sıfıncı yaklaşım Şekil 2.1 'de gösterilen durumdaki gerilme ve şekil değiştirme yayılımına karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, sıfıncı yaklaşım önceki bölümde ele alınan stabilite kaybına kadar ki duruma karşılık gelmektedir. Fakat burada adı geçen gerilme ve şekil değiştirmelerin belirlenmesi (3.8)-(3.10) ve (3.19) non-lineer probleminin çözümüne getirilmiştir. Bilindiği üzere $E^{(2)} \gg E^{(1)}$ durumlarında (3.8)-(3.10) ve (3.19) denklemlerindeki non-lineer terimden dolayı Şekil 3.1' de gösterilen yapıya sahip malzemedeki gerilme ve şekil değiştirmelerin değişimi çok az olduğundan, sıfıncı yaklaşımın incelenmesi sırasında bu non-lineer terimler



yüksek bir hassasiyetle gözönüne alınmamaktadır. Söylenen nedenlerden dolayı sıfırıncı yaklaşım için (2.60)-(2.74) formülleri ile verilen aşağıdaki çözümü kabul edebiliriz.

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{(k),0} &= \sigma_{22}^{(k),0} = 0 \quad ; \quad \sigma_{11}^{(1),0} = p \left(\eta^{(1)} + \eta^{(2)} \frac{(1 - (v^{(1)})^2)}{(1 - (v^{(2)})^2)} \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \right)^{-1}, \\ \sigma_{11}^{(2),0} &= \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \frac{1 - (v^{(1)})^2}{1 - (v^{(2)})^2} \sigma_{11}^{(1),0}; \quad u_1^{(k),0} = \frac{(1 - (v^{(k)})^2)}{E^{(k)}} \sigma_{11}^{(k),0} x_1, \\ u_2^{(k),0} &= -\frac{v^{(k)}(1 + v^{(k)}) \sigma_{11}^{(k),0}}{E^{(k)}} x_2^{(k)} + C^{(k)}, \quad \eta^{(k)} = \frac{H^{(k)}}{H^{(1)} + H^{(2)}}, \quad C^{(k)} = \text{const.}\end{aligned}\tag{3.20}$$

Böylece sıfırıncı yaklaşımı (3.20) formülleri şeklinde belirlemiş oluyoruz.

3.3.2 Birinci yaklaşım

Şimdi birinci yaklaşıma ait olan büyüklüklerin belirlenmesini ele alalım. Bu durumda (3.20)'yi gözönüne alarak (3.11)-(3.13), (3.17)'den yerdeğiştirmelerle verilmiş aşağıdaki lineerize edilmiş denklemleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}C_1^{(k)} \frac{\partial^2 u_1^{(k),1}}{\partial x_1^2} + C_2^{(k)} \frac{\partial^2 u_1^{(k),1}}{\partial (x_2^{(k)})^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(k),1}}{\partial x_1 \partial x_2^{(k)}} &= 0, \\ C_3^{(k)} \frac{\partial^2 u_2^{(k),1}}{\partial x_1^2} + C_4^{(k)} \frac{\partial^2 u_2^{(k),1}}{\partial (x_2^{(k)})^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(k),1}}{\partial x_1 \partial x_2^{(k)}} &= 0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

(3.21)'de kabul edilmiş işaretlemelerin ifadelerini yazalım:

$$\begin{aligned}C_1^{(k)} &= \frac{2(1 + g_1^{(k)})(1 - v^{(k)})}{(1 + 2g_2^{(k)})} + \frac{2\sigma_{11}^{(k),0}(1 + v^{(k)})(1 - 2v^{(k)})}{E^{(k)}(1 + g_1^{(k)})(1 + g_2^{(k)})}; \\ C_3^{(k)} &= \frac{(1 + g_1^{(k)})(1 - 2v^{(k)})}{(1 + g_2^{(k)})} + \frac{2\sigma_{11}^{(k),0}(1 + v^{(k)})(1 - 2v^{(k)})}{E^{(k)}(1 + g_1^{(k)})(1 + g_2^{(k)})},\end{aligned}$$



$$C_2^{(k)} = (1 - 2v^{(k)}) \frac{1 + g_1^{(k)}}{1 + g_2^{(k)}} ; \quad C_4^{(k)} = 2(1 - v^{(k)}) \frac{1 + g_2^{(k)}}{1 + g_1^{(k)}} ; \quad (3.22)$$

$$g_1^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k),0}}{\partial x_1} ; \quad g_2^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k),0}}{\partial x_2^{(k)}} .$$

(3.18)' den bazı gerekli işlemler sonucunda (bu işlemlerin yapılması yöntemi yukarılarda verilmiştir) birinci yaklaşım için aşağıdaki kontakt (temas) koşullarını elde ederiz:

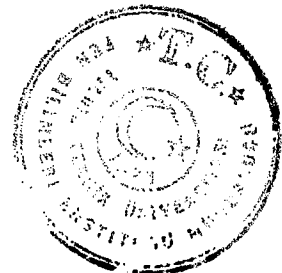
$$\begin{aligned} & (1 + g_i^{(1)}) \sigma_{i2}^{(1),1} \Big|_{(t_1, \pm H^{(1)})} - (1 + g_i^{(2)}) \sigma_{i2}^{(2),1} \Big|_{(t_1, \mp H^{(2)})} = \\ & \frac{df}{dx_1} \Big|_{x_1=t_1} \left((1 + g_1^{(1)}) \sigma_{11}^{(1),0} - (1 + g_1^{(2)}) \sigma_{11}^{(2),0} \right) \delta_i^1 , \\ & u_i^{(1),1} \Big|_{(t_1, \pm H^{(1)})} - u_i^{(2),1} \Big|_{(t_1, \mp H^{(2)})} = f \Big|_{x_1=t_1} (g_2^{(1)} - g_2^{(2)}) \delta_i^2 , \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Bundan başka, (3.20) ve (3.13)' den aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left((1 + g_i^{(k)}) \frac{\partial u_i^{(k),1}}{\partial x_j^{(k)}} + (1 + g_j^{(k)}) \frac{\partial u_j^{(k),1}}{\partial x_i^{(k)}} \right) \quad (3.24)$$

Böylece birinci yaklaşımın belirlenmesi lineerize edilmiş (3.21)-(3.24) probleminin incelenmesine getirilmiş olmaktadır. Ancak, (3.23)' e dahil olan f fonksiyonunun açık ifadesi verildiğinde bu problemin çözülmesi ele alınabilir. f fonksiyonunun ifadesi ise aşağıdaki şekilde belirlenir.

Çok katlı kompozit malzemelerin yapılarının incelenmesi (bu yapıların bazı durumlarının şekilleri Akbarov vd., (1995), Guz' (1990), Tarnopolsky ve Roze (1968) vs. de verilmektedir.) bu yapılardaki lokal (yerel) eğilmelerin yüksek bir hassasiyetle aşağıdaki şekilde verilmiş fonksiyonla ifade edilebileceğini göstermektedir:



$$\begin{aligned} \varepsilon f(x_1) &= A \exp \left\{ - \left[\left(\frac{x_1}{L} \right)^2 \right]^\gamma \right\} \cos \left(n \frac{x_1}{L} \right) = \\ &= \varepsilon L \exp \left\{ - \left[\left(\frac{x_1}{L} \right)^2 \right]^\gamma \right\} \cos \left(n \frac{x_1}{L} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.25)' deki γ , n ve L parametreleri malzeme yapısındaki yerel (lokal) eğilmelerin formunu belirten parametrelerdir ve geometrik anlamları (3.25)' den görülmektedir. Bundan başka $A \ll L$ kabul edilerek ε küçük parametresi $\varepsilon = A / L$ şeklinde seçilir.

Şimdi, (3.25) formülünü de gözönüne alarak (3.21)-(3.24) probleminin çözümünü elde etmeğe çalışalım. Her şeyden önce belirtelim ki, (3.25) ifadesine ve fiziksel öngörülere göre aşağıdaki sönme koşullarının sağlandığını varsayabiliriz:

$$\sigma_{ij}^{(k),1} ; u_i^{(k),1} \rightarrow 0 , |x_1| \rightarrow \infty . \quad (3.26)$$

(3.26) koşulları ve (3.25) ifadesi (3.21)-(3.24) probleminin incelenmesine üstel Fourier dönüşümünün uygulanabilmesini sağlar. Böylece, (3.21)-(3.24) denklemlerini $\exp(-isx_1)$ ile çarpıp (burada s üstel Fourier dönüşüm parametresidir ve $i = \sqrt{-1}$), $\bar{x}_i^{(k)} = x_i^{(k)} / L$ boyutsuz koordinatlarına geçerek (ileride $\bar{x}_i^{(k)}$ üzerindeki çizgiyi bırakacağız) ve daha sonra bu denklemleri $x_i^{(k)}$ 'a göre $-\infty$ ' dan $+\infty$ ' a kadar integre edersek, (3.21), (3.23) ve (3.24)' den aşağıdakileri elde ederiz.

$$\begin{aligned} C_1^{(k)} s^2 \bar{u}_{1F}^{(k),1} + C_2^{(k)} \frac{d^2 \bar{u}_{1F}^{(k),1}}{d(\bar{x}_2^{(k)})^2} - is \frac{d \bar{u}_{2F}^{(k),1}}{d\bar{x}_2^{(k)}} &= 0 , \\ C_3^{(k)} s^2 \bar{u}_{2F}^{(k),1} + C_4^{(k)} \frac{d^2 \bar{u}_{2F}^{(k),1}}{d(\bar{x}_2^{(k)})^2} - is \frac{d \bar{u}_{1F}^{(k),1}}{d\bar{x}_2^{(k)}} &= 0 . \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} (1 + g_i^{(1)}) \bar{\sigma}_{i2F}^{(1),1} \Big|_{(\bar{x}_2^{(1)} = \pm H^{(1)})} - (1 + g_i^{(2)}) \bar{\sigma}_{i2}^{(2),1} \Big|_{(\bar{x}_2^{(2)} = \mp H^{(2)})} &= \\ = -is \bar{f}_F \left((1 + g_1^{(1)}) \bar{\sigma}_{11}^{(1),0} - (1 + g_1^{(2)}) \bar{\sigma}_{11}^{(2),0} \right) \delta_i^1 , \\ \bar{u}_{iF}^{(1),1} \Big|_{(\bar{x}_2^{(1)} = \pm H^{(1)})} - \bar{u}_{iF}^{(2),1} \Big|_{(\bar{x}_2^{(2)} = \mp H^{(2)})} &= \bar{f}_F (g_2^{(1)} - g_2^{(2)}) \delta_i^2 , i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.28)$$



$$\varepsilon_{11F}^{-(k),1} = -is \bar{u}_{1F}^{-(k),1}, \quad \varepsilon_{22F}^{-(k),1} = \frac{d\bar{u}_{2F}^{-(k),1}}{d\bar{x}_2^{(k)}};$$

$$\varepsilon_{12F}^{-(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{u}_{1F}^{-(k),1}}{d\bar{x}_2^{(k)}} - is \bar{u}_{2F}^{-(k),1} \right) \quad (3.29)$$

(3.27)-(3.29)' e dahil olan büyüklüklerin alt indeksi F ve üstlerindeki çizgi onların aynı adlı büyüklüğün üstel Fourier dönüşümü olduğunu gösterir. Bilindiği ve yukarıda ifade edildiği gibi keyfi bir $\varphi(x)$ fonksiyonunun üstel Fourier dönüşümü $\bar{\varphi}_F(s)$ aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\bar{\varphi}_F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-isx} dx \quad (3.30)$$

(3.30)' da $\bar{\varphi}_F(s)$ ' in bilinen ve $\varphi(x)$ ' in bilinmeyen olduğunu farz edersek, Krylov ve Shulgina (1966) vb. kaynaklarda gösterildiği gibi, $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}_F(s)$ ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_F(s) e^{isx} ds \quad (3.31)$$

Şimdi (3.27) denklemlerinin genel çözümünü elde edelim. Bazı dönüşümler yaparak (3.27)' nin ikinci denkleminde $\bar{u}_{1F}$ fonksiyonunu $\bar{u}_{2F}$ fonksiyonu ile

$$\frac{d\bar{u}_{1F}^{-(k),1}}{d\bar{x}_2^{(k)}} = -i C_3^{(k)} s \bar{u}_{2F}^{-(k),1} - i C_4^{(k)} \frac{d^2 \bar{u}_{2F}^{-(k),1}}{d(\bar{s}x_2^{(k)})^2} \quad (3.32)$$

şeklinde ifade ederek, (3.27)' nin birinci denkleminde $\bar{u}_{2F}^{-(k),1}$ için aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\frac{d^4 \bar{u}_{2F}^{-(k),1}}{d(\bar{s}x_2^{(k)})^4} + a_1^{(k)} \frac{d^2 \bar{u}_{2F}^{-(k),1}}{d(\bar{s}x_2^{(k)})^2} + d_1^{(k)} \bar{u}_{2F}^{-(k),1} = 0 \quad (3.33)$$

(3.33)' de aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir:



$$\begin{aligned} a_1^{(k)} &= \left(1 - \left(C_2^{(k)} C_3^{(k)} + C_1^{(k)} C_4^{(k)}\right)\right) \left(C_2^{(k)} C_4^{(k)}\right)^{-1} ; \\ d_1^{(k)} &= C_1^{(k)} C_3^{(k)} \left(C_2^{(k)} C_4^{(k)}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Bilindiği üzere, gerçek durumlarda $\left| \sigma_{11}^{(k),0} \right| / E^{(k)} \ll 1$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliği gözönüne alarak yapılan direkt hesaplamalar gösterir ki, (3.33) adi diferansiyel denkleminde ait olan karakteristik denklemin kökleri, ancak ve ancak gerçek kısımları sıfırdan farklı olan kompleks sayılardır,

$$\alpha_1^{(k)} + i \beta_1^{(k)} ; \alpha_1^{(k)} - i \beta_1^{(k)} ; -\alpha_1^{(k)} - i \beta_1^{(k)} ; -\alpha_1^{(k)} + i \beta_1^{(k)} \quad (3.35)$$

şeklinde elde edilirler. Burada

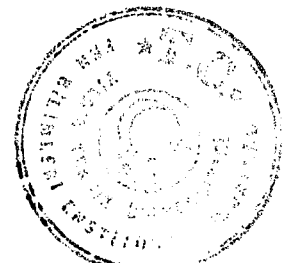
$$\begin{aligned} \alpha_1^{(k)} &= \left(d_1^{(k)}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_1^{(k)}}{4 \left(d_1^{(k)}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \beta_1^{(k)} &= \left(d_1^{(k)}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{a_1^{(k)}}{4 \left(d_1^{(k)}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

işaretlemleri kabul edilmiştir.

Böylece, (3.33) denkleminin genel çözümü aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \bar{u}_{2F}^{(k),1}(s x_2^{(k)}) &= A_1^{(k)}(s) \sinh(\alpha_1^{(k)} s x_2^{(k)}) \sin(\beta_1^{(k)} s x_2^{(k)}) + \\ &A_2^{(k)}(s) \cosh(\alpha_1^{(k)} s x_2^{(k)}) \cos(\beta_1^{(k)} s x_2^{(k)}) + \\ &A_3^{(k)}(s) \sinh(\alpha_1^{(k)} s x_2^{(k)}) \cos(\beta_1^{(k)} s x_2^{(k)}) + \\ &A_4^{(k)}(s) \cosh(\alpha_1^{(k)} s x_2^{(k)}) \sin(\beta_1^{(k)} s x_2^{(k)}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

(3.37)' de $A_1^{(k)}(s), A_2^{(k)}(s), A_3^{(k)}(s), A_4^{(k)}(s)$ sadece s parametresine bağımlı olan bilinmeyenlerdir.



(3.28)' in birinci ifadesinden görüldüğü gibi ele alınan durumda $\bar{\sigma}_{12F}^{(k),1}$ gerilmesi $x_2^{(k)}$ ' nin çift fonksiyonu olmalıdır. Bu nedenden dolayı ve (3.32), (3.29)' in son ifadesi ve (3.12)' den üstel Fourier dönüşümü sonrası elde edilen

$$\bar{\sigma}_{ijF}^{(k),1} = \lambda^{(k)} \bar{\theta}_F^{(k),1} \delta_i^j + 2\mu^{(k)} \bar{\epsilon}_{ijF}^{(k),1} \quad (3.38)$$

denklemlerinden $\bar{\sigma}_{12F}^{(k),1}$ ' e ait olan $\bar{\sigma}_{12F}^{(k),1} = 2\mu^{(k)} \bar{\epsilon}_{12F}^{(k),1}$ denklemine göre, (3.37)' deki $A_3^{(k)}(s)$ ve $A_4^{(k)}(s)$ bilinmeyenlerinin sıfır olması gerektiği sonucunu elde ederiz. Dolayısıyla

$$A_3^{(k)}(s) = A_4^{(k)}(s) = 0 \quad (3.39)$$

olması gerektiğinden, (3.37)' den $\bar{u}_{2F}^{(k),1}$ ' nin ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\bar{u}_{2F}^{(k),1}(sx_2^{(k)}) = A_1^{(k)}(s) \sinh(\alpha_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \sin(\beta_1^{(k)} sx_2^{(k)}) + A_2^{(k)}(s) \cosh(\alpha_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \cos(\beta_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \quad (3.40)$$

(3.40), (3.38), (3.29) denklemlerinden yararlanarak (3.28)' in, sadece $x_2^{(1)} = +H^{(1)}$ ve $x_2^{(2)} = -H^{(2)}$ halinde sağlanan kontakt koşullarından $A_1^{(k)}(s)$, $A_2^{(k)}(s)$ ($k=1,2$) bilinmeyenlerinin elde edilmesi için kapalı, lineer ve homojen olmayan cebirsel denklemler takımı elde ederiz. (Ele alınan durumda $x_2^{(1)} = -H^{(1)}$ ve $x_2^{(2)} = +H^{(2)}$ halinde sağlanan sınır koşulları yukarıda söylenen nedenlerden dolayı $x_2^{(1)} = +H^{(1)}$ ve $x_2^{(2)} = -H^{(2)}$ halinde sağlanan uygun koşulların birebir tekrarı olduğunu ve bu yüzden (3.28) kontakt koşullarının sadece $x_2^{(1)} = +H^{(1)}$ ve $x_2^{(2)} = -H^{(2)}$ için sağlandığını varsayarak bu koşulların hem de $x_2^{(1)} = -H^{(1)}$ ve $x_2^{(2)} = +H^{(2)}$ ' ler için de sağlanmış olduğunu garanti etmiş olduğumuzu belirtelim). Bu denklemlerden $A_1^{(k)}(s)$, $A_2^{(k)}(s)$ ' leri belirledikten sonra (3.40), (3.32), (3.29) ve (3.38)' den birinci yaklaşıma ait büyüklüklerin hepsinin üstel Fourier dönüşümlerinin ifadelerini elde ediyoruz. ($A_1^{(k)}(s)$ ve $A_2^{(k)}(s)$ ' lerin belirlendiği denklemlerin ve yukarıda adı geçen büyüklüklerin üstel Fourier dönüşümlerinin ifadeleri, onların elde edilmesi tekniğinin açık ve bu ifadelerin çok büyük olmasından dolayı burada verilmesine gerek görülmediğini belirtmekte yarar vardır.)



Bundan sonra (3.31) dönüşümünden yararlanarak birinci yaklaşıma ait büyüklüklerin değerleri elde edilir. Adı geçen büyüklüklerin üstel Fourier dönüşümlerinin ifadeleri çok karmaşık olduklarından (3.31)' den birinci yaklaşıma ait olan büyüklüklerin analitik ifadelerini elde etmenin imkan dışı olduğu açıktır. Bu nedenden, (3.31)' den aranan büyüklüklerin sayısal değerleri elde edilir ve bu değerlerin elde edilmesi (3.31) integralinin hesaplanması için Krylov ve Shulgina (1966) tarafından verilen algoritma uygulanır. Adı geçen algoritmayı $u_2^{(k),1}(x_1, x_2)$ 'nın hesaplanması örneği üzerinde açıklayalım. Yani,

$$u_2^{(k),1}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{2F}^{-(k),1}(sx_2) e^{isx_1} ds =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1^{(k)}(s) \sinh(\alpha_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \sin(\beta_1^{(k)} sx_2^{(k)}) + A_2^{(k)}(s) \cosh(\alpha_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \cos(\beta_1^{(k)} sx_2^{(k)})] e^{isx_1} ds$$
(3.41)

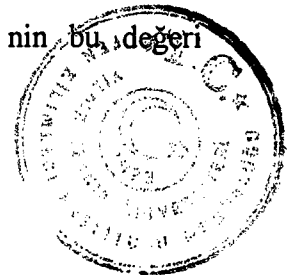
integralinin hesaplanmasını ele alalım.

Krylov ve Shulgina (1966) algoritmasına göre (3.41) integraline dahil olan integralaltı ifadelerin $s = s_q$; $s_q = (2q - 1)h_0$ ve $s_q = (2q + 1)h_0$ ($q = 1, 2, \dots, N$) (burada h_0 adımın değerini gösterir.) belli değerlerinde hesap edilip uygun interpolasyon formüllerinde yerine yazılarak x_1 'in herhangi seçilmiş bir değerinde $u_2^{(k),1}(x_1, x_2^{(k)})$ sayısal olarak elde edilir. Bu işlemlerin yapılması için gerekli olan $A_1^{(k)}(s_q)$ ve $A_2^{(k)}(s_q)$ ler (3.28)' den bu sabitler için elde edilen denklemlerden $s=s_q$ hallerinde elde edilir. Yukarıda adı geçen sayısal işlemlerin hepsi bilgisayar yardımı ile yapılmakta ve N sayısının büyümesi ile elde edilen sonuçların 10^{-6} - 10^{-7} hassasiyetiyle yakın kalması durumuna kadar devam ettirilmektedir.

Böylece diğer büyüklüklerde, değerleri seçilmiş keyfi bir $(x_1, x_2^{(k)})$ noktasında hesap edilir. Bundan sonra, örneğin, $u_2^{(2),1}(0,0)$ değeri ile p kuvveti arasındaki bağımlılık incelenir ve p' nin

$$|u_2^{(2),1}(0,0)| \rightarrow \infty$$
(3.42)

durumuna karşı gelen p^* değeri $p_{cr}=p^*$ gibi kabul edilir ve dolayısıyla $p=p_{cr}^*$ olduğunda ele alınan kompozit malzeme yapısında stabilite kaybı oluyor denir ve p' nin bu değeri malzemenin bir eksenli basınç altında kırılma değeri gibi kabul edilir.



Böylece, sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımlardan yararlanarak p_{α} değeri belirlenmiş olur. Belirtelim ki, ele alınan araştırmalarda ki en önemli noktalardan birisi p_{α} değerine ikinci ve daha sonraki yaklaşımların gözönüne alınmasının etki etmediğini gösterebilmektir. Böyle bir durumun gösterilmesi mümkün olduğunda, ele alınan kırılma problemlerinin incelenebilmesi için sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımların yeterli olması ispatlanacak ve böylece incelemeler çok önemli bir biçimde basitleşecektir.

Yukarıda söylenenleri araştırmak amacı ile ikinci yaklaşımın belirlenmesini ele alalım.

3.3.3 İkinci yaklaşım

Yukarıdaki kısımlarda gösterilen gerekli işlemler yapıldıktan sonra, ikinci yaklaşım için (3.14), (3.15), (3.16) ve (3.17)' den yerdeğiştirmelerle verilmiş aşağıdaki denklemleri elde etmiş oluyoruz:

$$\begin{aligned}
& C_1^{(k)} \frac{\partial^2 u_1^{(k),2}}{\partial x_1^2} + C_2^{(k)} \frac{\partial^2 u_1^{(k),2}}{\partial (x_2^{(k)})^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(k),2}}{\partial x_1 \partial x_2^{(k)}} = \\
& \left\{ - (1 + \Lambda^{(k)}) (1 + g_1^{(k)}) \frac{\partial \Omega_{11}^{(k),2}}{\partial x_1^{(k)}} - (1 + g_1^{(k)}) \Lambda^{(k)} \frac{\partial \Omega_{22}^{(k),2}}{\partial x_1^{(k)}} - \frac{1}{2} (1 + g_1^{(k)}) \frac{\partial \Omega_{12}^{(k),2}}{\partial x_1^{(k)}} - \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x_1^{(k)}} \left[\frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_1^{(k)}} \left((1 + \Lambda^{(k)}) \epsilon_{11}^{(k),1} + \Lambda^{(k)} \epsilon_{22}^{(k),1} \right) + \frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \epsilon_{22}^{(k),1} \right] - \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x_2^{(k)}} \left[\frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_1^{(k)}} \epsilon_{12}^{(k),1} \left((1 + \Lambda^{(k)}) \epsilon_{22}^{(k),1} + \Lambda^{(k)} \epsilon_{12}^{(k),1} \right) + \frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \right] \right\} (D^{(k)})^{-1}, \\
& C_3^{(k)} \frac{\partial^2 u_2^{(k),2}}{\partial x_1^2} + C_4^{(k)} \frac{\partial^2 u_2^{(k),2}}{\partial (x_2^{(k)})^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(k),2}}{\partial x_1 \partial x_2^{(k)}} = \\
& \left\{ - (1 + g_2^{(k)}) \frac{\partial \Omega_{12}^{(k),2}}{\partial x_1} - (1 + g_2^{(k)}) (1 + \Lambda^{(k)}) \frac{\partial \Omega_{22}^{(k),2}}{\partial x_2^{(k)}} - (1 + g_2^{(k)}) \Lambda^{(k)} \frac{\partial \Omega_{11}^{(k),2}}{\partial x_2^{(k)}} - \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \epsilon_{12}^{(k),1} + \left((1 + \Lambda^{(k)}) \epsilon_{11}^{(k),1} + \Lambda^{(k)} \epsilon_{22}^{(k),1} \right) \frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_1} \right] - \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x_2^{(k)}} \left[\frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \left((1 + \Lambda^{(k)}) \epsilon_{22}^{(k),1} + \Lambda^{(k)} \epsilon_{11}^{(k),1} \right) + \frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_1} \epsilon_{12}^{(k),1} \right] \right\} (D^{(k)})^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

(3.18)' den ise ikinci yaklaşım için aşağıdaki kontakt koşullarını elde ediyoruz:



$$\begin{aligned}
& -\frac{df}{dx_1} \Big|_{x_1=t_1} \left[\left(1 + g_i^{(1)}\right) \sigma_{i1}^{(1),1} + \sigma_{i1}^{(1),0} \frac{\partial \tilde{u}_i^{(1),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{(t_1, \pm H^{(1)})} + \left(1 + g_i^{(1)}\right) p_{i2}^{(1),2} \Big|_{(t_1, \pm H^{(1)})} = \\
& -\frac{df}{dx_1} \Big|_{x_1=t_1} \left[\left(1 + g_i^{(2)}\right) \sigma_{i1}^{(2),1} + \sigma_{i1}^{(2),0} \frac{\partial \tilde{u}_i^{(2),1}}{\partial x_1} \right] \Big|_{(t_1, \mp H^{(2)})} + \left(1 + g_i^{(2)}\right) p_{i2}^{(2),2} \Big|_{(t_1, \mp H^{(2)})} \\
& \tilde{u}_i^{(1),2} \Big|_{(t_1, \pm H^{(1)})} = \tilde{u}_i^{(2),2} \Big|_{(t_1, \mp H^{(2)})}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Bunlardan başka, (3.16) ve (3.15)' den

$$\varepsilon_{ij}^{(k),2} = \frac{1}{2} \left(\left(1 + g_i^{(k)}\right) \frac{\partial u_i^{(k),2}}{\partial x_j^{(k)}} + \left(1 + g_j^{(k)}\right) \frac{\partial u_j^{(k),2}}{\partial x_i^{(k)}} \right) + \Omega_{ij}^{(k)} \tag{3.45}$$

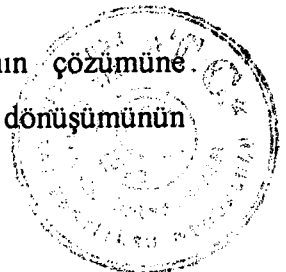
$$\sigma_{ij}^{(k),2} = \lambda^{(k)} \theta^{(k),2} \delta_i^j + 2 \mu^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k),2} \tag{3.46}$$

ifadelerini elde ediyoruz. (3.43)-(3.45)' de aşağıdaki işaretlemelerin kullanıldığını belirtmekte yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
D^{(k)} &= \left(\Lambda^{(k)} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + g_1^{(k)}\right) \left(1 + g_2^{(k)}\right), \quad \Lambda^{(k)} = \frac{v^{(k)}}{1 - 2v^{(k)}}, \\
\Omega_{ij}^{(k),2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_i^{(k)}} \frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_j^{(k)}} + \frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_i^{(k)}} \frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_j^{(k)}} \right), \\
\tilde{u}_i^{(k),1} \Big|_{(t_1, \mp \delta_k H^{(k)})} &= \left\{ u_i^{(k),1} \mp H^{(2)} \frac{df}{dx_1} \frac{\partial u_i^{(k),0}}{\partial x_1} + f \frac{\partial u_i^{(k),0}}{\partial x_2^{(k)}} \right\} \Big|_{(t_1, \mp \delta_k H^{(k)})} \\
\tilde{u}_i^{(k),2} \Big|_{(t_1, \mp \delta_k H^{(k)})} &= \left\{ u_i^{(k),2} \mp H^{(2)} \frac{df}{dx_1} \frac{\partial u_i^{(k),1}}{\partial x_1} + f \frac{\partial u_i^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \right\} \Big|_{(t_1, \mp \delta_k H^{(k)})} \\
p_{ij}^{(k),2} \Big|_{(t_1, \mp \delta_k H^{(k)})} &= \left\{ \sigma_{ij}^{(k),2} \mp H^{(2)} \frac{df}{dx_1} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(k),1}}{\partial x_1} + f \frac{\partial \sigma_{ij}^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \right\} \Big|_{(t_1, \mp H^{(2)})}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\delta_1 = -1 \quad ; \quad \delta_2 = 1.$$

Böylece ikinci yaklaşımın belirlenmesi (3.43)-(3.47) denklemler takımının çözümüne indirgenmiş oluyor. Bu denklemler takımının çözümü için de üstel Fourier dönüşümünün



uygulanabileceği açıktır. Ancak bu durumda (3.43) denklemlerinin sağ taraflarındaki büyüklüklerin Fourier dönüşümlerinin analitik ifadelerinin elde edilmesi çok zor ve birçok durumlarda imkansız olduğundan, (3.43) denklemlerine dahil olan bilinmeyenlerin Fourier dönüşümlerinin özel çözüme karşı gelen kısmının analitik ifadelerinin de elde edilmesi imkansız olacaktır. Bu zorluğun kaldırılması

$$\left(\frac{\partial u_i^{(1),1}}{\partial x_j^{(1)}} \right)^2 \approx \left(\frac{\partial u_i^{(2),1}}{\partial x_j^{(2)}} \right)^2 \ll \left| \frac{\partial u_i^{(1),1}}{\partial x_j^{(1)}} \right| \approx \left| \frac{\partial u_i^{(2),1}}{\partial x_j^{(2)}} \right| \quad (3.48)$$

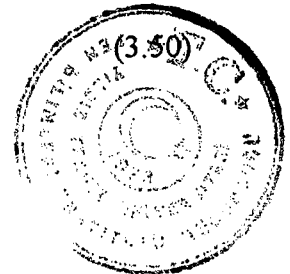
eşitsizlikleri sağlanan durumlarda (3.43) denklemlerinin sağ taraflarının ihmal edilmesi yolu ile mümkün olmaktadır. İleride ele alınacak sayısal sonuçların elde edilmesi durumunda kabul edilen problem parametrelerinin değerlerinin (3.48) eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçildiğini belirtelim. Bundan başka bu kısımda yapılan araştırmaların amacı ikinci yaklaşımın p_α değerine etki gösterip göstermediğini belirlemek olduğundan, (3.43) denklemlerinin sağ taraflarına karşı gelen özel çözümlerin ancak birinci yaklaşımı belirleyen $A_1^{(k)}(s)$, ve $A_2^{(k)}(s)$ lerle ifade edilebileceğinden dolayı, (3.43) denklemlerinin sağ taraflarının ihmal edilmesi p_α değerine etki göstermeyecektir.

Yukarıdaki muhakemelerden yola çıkarak ikinci yaklaşımın incelenmesini,

$$\begin{aligned} C_1^{(k)} \frac{\partial^2 u_1^{(k),2}}{\partial x_1^2} + C_2^{(k)} \frac{\partial^2 u_1^{(k),2}}{\partial (x_2^{(k)})^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(k),2}}{\partial x_1 \partial x_2^{(k)}} &= 0 \\ C_3^{(k)} \frac{\partial^2 u_2^{(k),2}}{\partial x_1^2} + C_4^{(k)} \frac{\partial^2 u_2^{(k),2}}{\partial (x_2^{(k)})^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(k),2}}{\partial x_1 \partial x_2^{(k)}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

denklemlerinin (3.44)-(3.47) koşul ve ifadeleri çerçevesinde incelenmesine indirgeyebiliriz. (3.49) denklemlerinin genel çözümünü ise birinci yaklaşımda olduğu gibi elde ediyoruz. Ancak bu durumda (3.44) koşullarının incelenmesi sonucunda $\sigma_{12}^{(k),2}$ gerilmelerinin bu durumda $x_2^{(k)}$ 'nın tek fonksiyonu olması gerektiği sonucuna varıyoruz. Böylece $u_2^{(k),2}$ 'nin üstel Fourier dönüşümü için aşağıdaki ifadeyi elde ediyoruz:

$$\begin{aligned} u_{2F}^{(k),2}(sx_2^{(k)}) &= B_1^{(k)}(s) \cosh(\alpha_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \sin(\beta_1^{(k)} sx_2^{(k)}) + \\ &B_2^{(k)}(s) \sinh(\alpha_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \cos(\beta_1^{(k)} sx_2^{(k)}) \end{aligned}$$



Bundan sonra, (3.50) ve (3.32) ikinci yaklaşıma ait yazılmış ifadesinden ve daha sonra (3.45), (3.46)' lardan yararlanarak ikinci yaklaşıma ait olan bütün büyüklüklerin üstel Fourier dönüşümlerinin ifadelerini elde ederiz. Bilindiği gibi bu ifadelerin hepsine $B_1^{(k)}(s)$ ve $B_2^{(k)}(s)$ bilinmeyenleri dahil olacaktır. Bu bilinmeyenleri ise, birinci yaklaşımın belirlenmesinde olduğu gibi (3.44) kontakt koşullarından belirleyebiliriz. Aranılan büyüklüklerin sayısal değerlerinin elde edilmesi birinci yaklaşımda yapılan işlemlerin tekrarıdır. Bu durumda, örneğin, $|u_2^{(2),2}(0,0)|$ değerinin p 'ye bağımlı olarak artışı incelenir ve

$$|u_2^{(2),2}(0,0)| \rightarrow \infty \quad (3.51)$$

durumuna karşı gelen p değerine, ikinci yaklaşımın verdiği p_{cr} değeri denir.

İkinci yaklaşımın verdiği p_{cr} değeri ile birinci yaklaşımın verdiği p_{cr} değerlerinin aynı olması, yani üst-üste düşmesi analitik olarak ispat edilememektedir. Ancak ileride elde edilecek sayısal sonuçların incelenmesi, bu değerlerin ele alınan problem parametrelerinin alabileceği mümkün değerlerin hepsinde üst-üste düşmesi sonucunu verecektir. Yukarıdaki açıklama ve muhakemelerden anlaşılacağı gibi, daha sonraki yaklaşımların p_{cr} değerine etkisi bu yaklaşımların belirlenmesine karşı gelen (3.14) denklemlerinin özel çözümleri ile değil, genel çözümleri ile belirlenebilir. Bundan başka, yukarıdaki açıklama ve muhakemelerden, tek sayılı yaklaşımların üstel Fourier dönüşümlerinin sağladığı denklemlerin genel çözümü (3.40) şeklinde, çift sayılı yaklaşımların üstel Fourier dönüşümlerinin sağladıkları denklemlerin genel çözümü ise (3.50) şeklinde belirlenebileceği görülmektedir. Bu nedenlerden dolayı daha sonraki yaklaşımların, p_{cr} değerlerine hiçbir katkıda bulunmayacağı sonucuna varılır.

3.4 Birinci ve İkinci Yaklaşımlardan Elde Edilen Kritik Değerlerin Karşılaştırılması

Yukarıda elde edilen sonuçlardan, görüldüğü gibi ele alınan malzemenin yapısındaki stabilite kaybına yani tekyönlü kompozit malzemenin basınç altında kırılmasına karşı gelen p basınç kuvvetinin değeri (yani p_{cr} değeri) sadece sıfırcı, birinci ve ikinci yaklaşımlardan elde edilen sonuçlarla belirlenebiliyor. Bundan başka önceki kısımda bildirildiği gibi, birinci ve ikinci yaklaşımlardan elde edilen p_{cr} değerlerinin (bu değerleri sırasıyla $p_{cr,I}$ ve $p_{cr,II}$ ile işaret edelim) aynı olup olmadığının analitik olarak ispat edilmesi çok zor olduğundan bu tez kapsamında ele alınmamaktadır. Ancak, $p_{cr,I}$ ve $p_{cr,II}$ değerlerinin aynı olmasını elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılması yolu ile göstermiş oluyoruz.



Şimdi bu sonuçlardan bazılarını ele alalım ve

$$\delta = -\frac{p}{E^{(1)}} \left(1 - (v^{(1)})^2\right) \left[\eta^{(1)} + \eta^{(2)} \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \frac{\left(1 - (v^{(1)})^2\right)}{\left(1 - (v^{(2)})^2\right)} \right]^{-1} \quad (3.52)$$

parametresi ile $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve $|u_2^{(2),2}(0,0)|/L$ arasındaki bağımlılıkları inceleyelim. (3.25)'e dahil olan parametreleri $\gamma=1$, $n=0$ olarak kabul edelim ve $v^{(1)}=v^{(2)}=0.3$, $\chi = H^{(2)}/L = 0.1$ olsun. Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4' de verilen grafikleri ele alalım. Bu grafikler $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ (Şekil 3.2), 100 (Şekil 3.3), 200 (Şekil 3.4) olduğu durumlarda $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$, $|u_2^{(2),2}(0,0)|/L$ ve δ parametresi arasındaki bağımlılığı gösteriyor. Bu şekillerde 1, 2, 3 eğrileri sırasıyla $\eta^{(2)} = 0.1; 0.2; 0.5$ olduğu durumlarda $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki, 1', 2', 3' eğrileri ise $|u_2^{(2),2}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılığı gösteriyor. Bundan başka, bu şekillerde δ 'nın, yukarıda seçilen $\eta^{(2)}$ 'lere karşı gelen kritik değerleri $\delta_{1\alpha}$, $\delta_{2\alpha}$ ve $\delta_{3\alpha}$ işaretlemeleri ile gösterilmektedir. Şekil 3.2-3.4' de verilen sayısal sonuçlardan, ele alınan durumların hepsinde

$$p_{\alpha.I} = p_{\alpha.II} \quad (3.53)$$

olduğu açıkça görülmektedir. Burada verilmeyen sayısal sonuçlar (3.53) eşitliğinin problem parametrelerinin mümkün değerlerinin hepsinde sağlandığını göstermektedir. Bunlardan başka, (3.25)' e dahil olan n 'nin, γ 'nın ve $\chi = H^{(2)}/L$ 'nin birçok başka değerlerinde elde edilen sonuçların gösterdiği gibi, $p_{\alpha.I}$ ve $p_{\alpha.II}$ değerleri n , γ ve χ 'dan bağımsızdır. İleride p_{α} (δ_{α})'in χ 'ya bağımlı olmadığı daha detaylı bir biçimde gösterilecektir.

Böylece, ikinci yaklaşımın gözönüne alınmasıyla, p_{α} değerlerinin değişmediği şeklinde bir sonuç elde etmiş oluyoruz. Bu ise ileride ki sayısal incelemelerin ancak birinci yaklaşım çerçevesinde yapılmasının yeterli olduğunu göstermektedir.



3.5 Sayısal Sonuçlar ve İncelenmesi

Şimdi, sıfırcı ve birinci yaklaşımlar çerçevesinde bulunan sayısal sonuçların, yani p_{cr} değerlerinin incelenmesini ele alalım. Öncelikle bu incelemelerin (3.25)' e dahil olan n ve γ' nin $n=0$, $\gamma=1$ değerlerinde yapıldığını belirtelim. Yukarıda gösterildiği gibi n ve γ' nin değişmesi p_{cr} ' lere etki etmediğinden bu parametrelerin başka değerleri burada ele alınmamıştır. Bundan başka, elde edilen sayısal sonuçlar $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıkları grafiklerle Şekil 3.5-3.13' de verilmektedir. Şekil 3.5-3.7' de verilen grafikler $E^{(2)}/E^{(1)}=50$ durumuna, Şekil 3.8-3.10' da verilen grafikler $E^{(2)}/E^{(1)}=100$ durumuna, Şekil 3.11-3.13' de verilen grafikler ise $E^{(2)}/E^{(1)}=200$ durumuna karşılık geldiğini belirtelim. Seçilmiş her bir $E^{(2)}/E^{(1)}$ değerine karşı gelen şekillerdeki grafikler, bu şekillerin numaralama sırasına uygun olarak $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ değerleri için elde edilmiştir. Bundan başka, bu şekillerdeki grafiklerin 1-8 numaralanması χ parametresinin, sırasıyla, $\chi=0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 0.7; 0.8; 1.0$ değerlerine karşı gelmektedir.

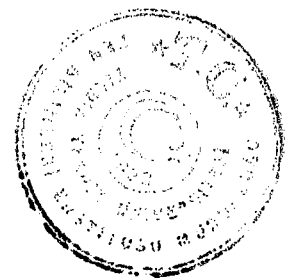
Böylece, Şekil 3.5-3.13' de verilen sonuçlardan açıkça görülmektedir ki, $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılığın grafiklerinin forması χ' ya bağımlı olarak değişse de, $\delta_{cr}(p_{cr})$ değerleri χ' dan bağımsızdır. Ancak $p_{cr}(\delta_{cr})$ değerleri, $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $\eta^{(2)}$ parametrelerinin değişmesinden önemli bir biçimde etkilenmektedir; $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve $\eta^{(2)}$ ler büyüdükçe $\delta_{cr}(p_{cr})$ değerleri monoton olarak küçülmektedir.

Böylece, elde edilen sonuçlar ele alınan kompozit malzeme yapısındaki stabilite kaybının bir önceki bölümdeki Şekil 2.3' de gösterilen stabilite kayıpları türünün hiçbirine karşılık gelmediğini göstermektedir. Bu nedenden dolayı elde edilen p_{cr} değerlerinin ne anlam taşıdığını açıklamak gerekiyor.

Bir önceki bölümün son kısmında yapısı Şekil 2.1' de gösterilen bir kompozit malzemenin tek yönlü dış basınç altında kırılmasının teorik basınç limiti belirlenmiş ve bu limitin

$$p = -G_{12} = \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}\eta^{(2)} + \mu^{(2)}\eta^{(1)}} ; \quad \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})} ; \quad k=1,2. \quad (3.54)$$

olduğu elde edilmiştir.



Şekil 3.8-3.13' de verilen grafiklere karşı gelen $E^{(2)} / E^{(1)}$ ve $\eta^{(2)}$ ($\eta^{(1)} = 1 - \eta^{(2)}$) değerlerini (3.54) formülünde yerine yazarsak ve (3.52) işaretlemesinde (3.54)' ü göz önüne alarak δ' nın değerlerini hesaplırsak, bu değerlerin Şekil 3.8-3.13' de gösterilen $\delta_{cr.}$ lerin aynısı olduğu sonucunu elde ederiz. Böylece, bu bölümde elde edilen p_{cr} ($\delta_{cr.}$) değerleri yapısı Şekil 2.1' de verilen kompozit malzemenin teorik basınç limitinin aynısı olmaktadır.

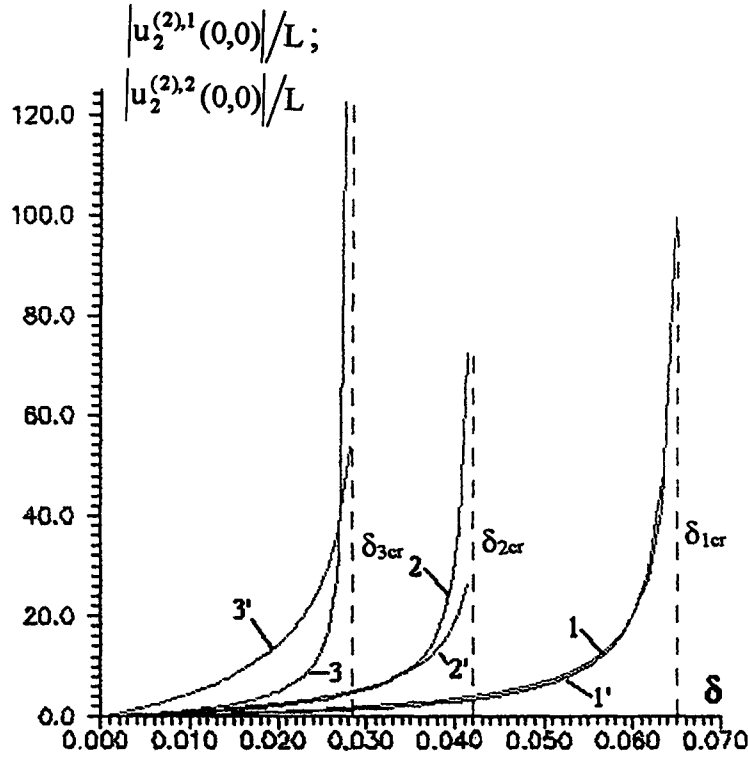
Yukarıda ifade edilenlerden aşağıdaki sonuçları elde ediyoruz:

1. Yapısı Şekil 3.1' de verilen kompozit malzemenin tekyönlü basınç altındaki kırılmasının parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde ve elastisite teorisinin geometrik nonlineer kesin denklemlerini uygulayarak yapılan inceleme sonucunda, yapısı Şekil 2.1' de verilen tekyönlü kompozit malzemelerin basınç altında kırılmasının teorik limiti belirlenmektedir.

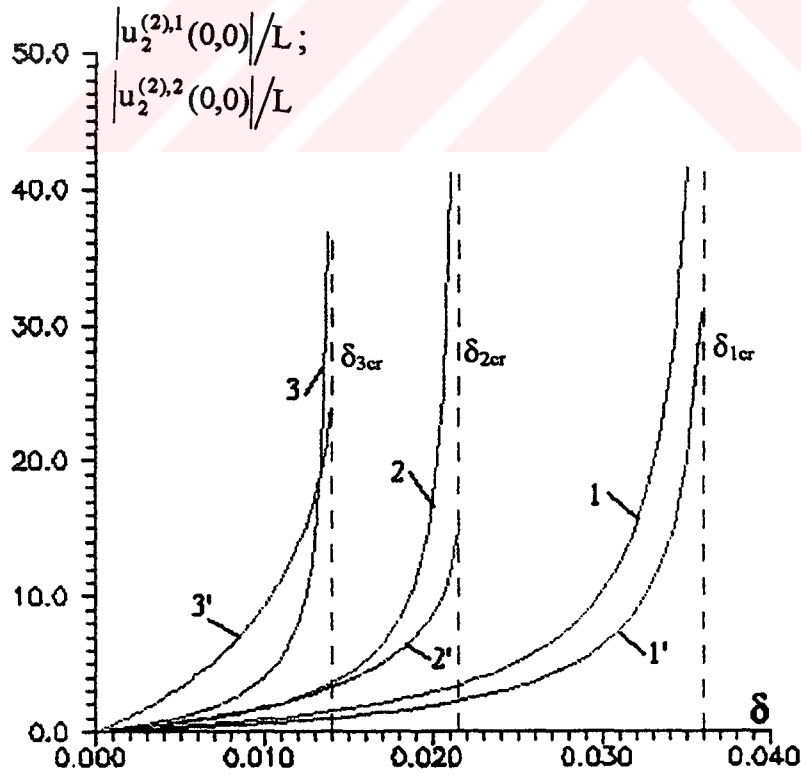
2. Adı geçen teorik basınç limitinin sürekli ortam yaklaşımı ile belirlenmesi yöntemi ancak saf elastik malzemelere uygulanabildiği halde, bu bölümde geliştirilen ve tekyönlü kompozitlerin teorik basınç limitinin parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde belirlenmesi yöntemi şeklinde adlandırılabilen yöntemin ise aynı zamanda saf elastik olmayan (örneğin viskoelastik kompozitler) malzemelere de uygulanabileceği açıktır.

3. Bu bölümdeki ve ilerideki incelemelerde Şekil 3.1' de gösterilen yerel (lokal) eğrisel yapı, Şekil 2.1' de verilen malzemelerin teorik basınç limitlerinin belirlenmesi için bir model olarak kullanılabilir.

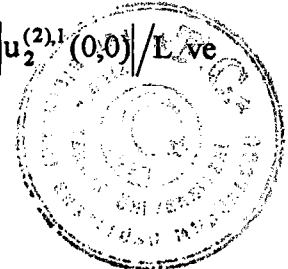


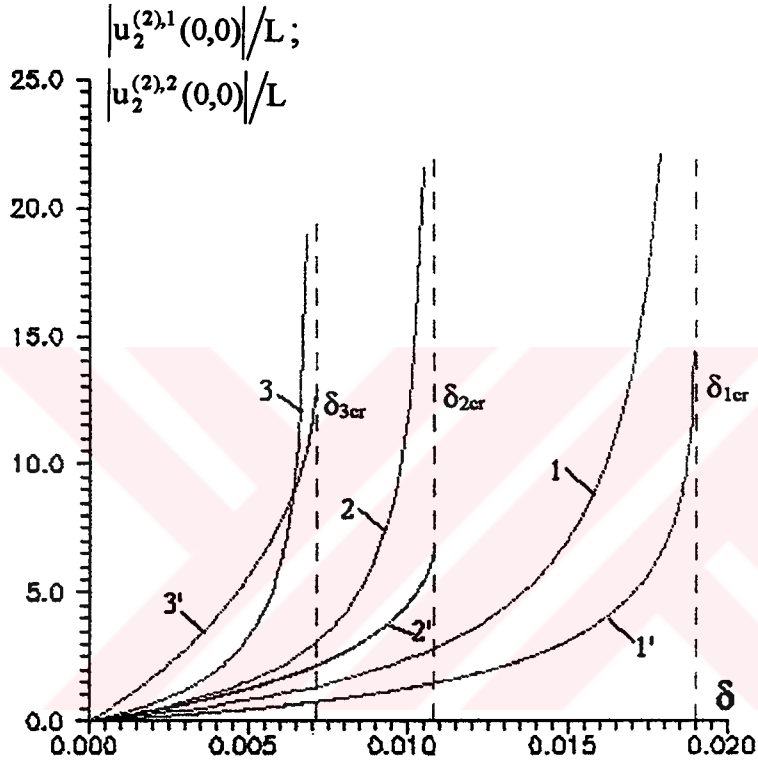


Şekil 3.2 $E^{(2)}/E^{(1)}=50$, $\chi=0.1$ halinde $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ olduğu durumlarda $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ ; $|u_2^{(2),2}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar



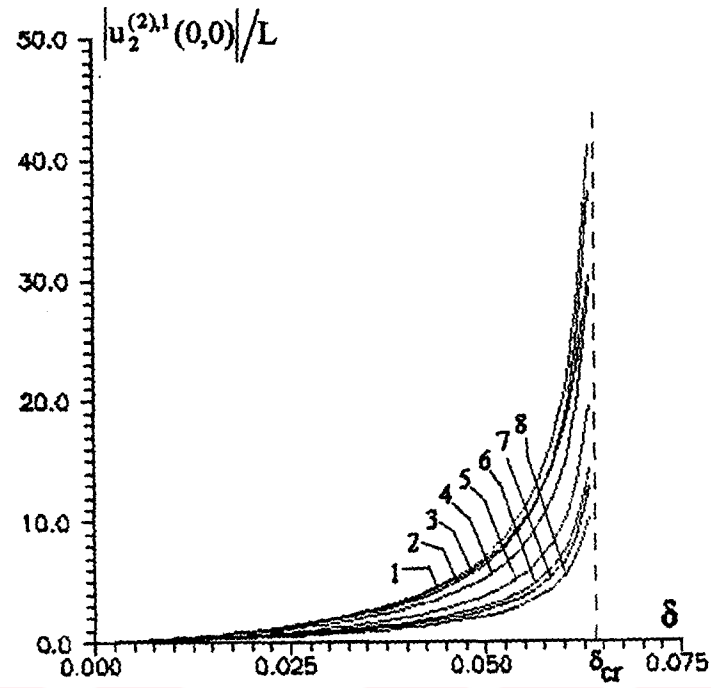
Şekil 3.3 $E^{(2)}/E^{(1)}=100$, $\chi=0.1$ halinde $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ olduğu durumlarda $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ ; $|u_2^{(2),2}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar



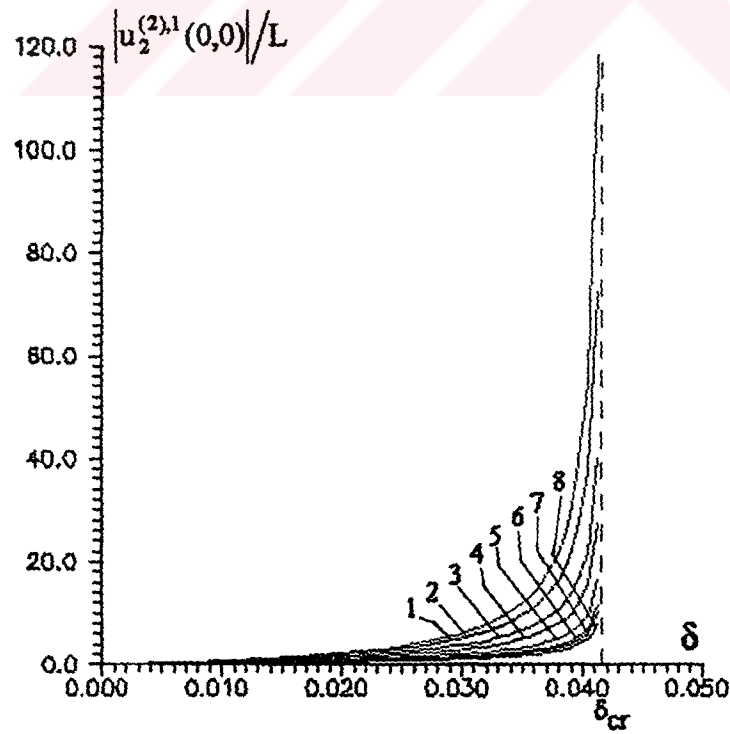


Şekil 3.4 $E^{(2)}/E^{(1)}=200$, $\chi=0.1$ halinde $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ olduğu durumlarda $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ ; $|u_2^{(2),2}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar

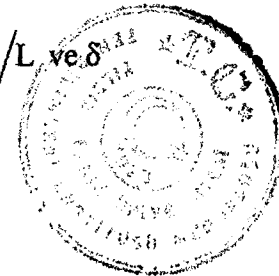


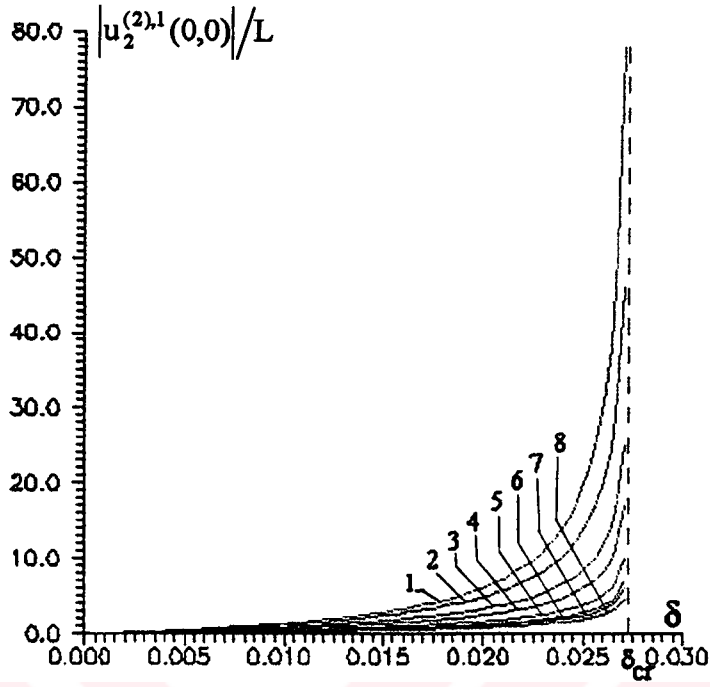


Şekil 3.5 $E^{(2)}/E^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda farklı χ' lar için $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar

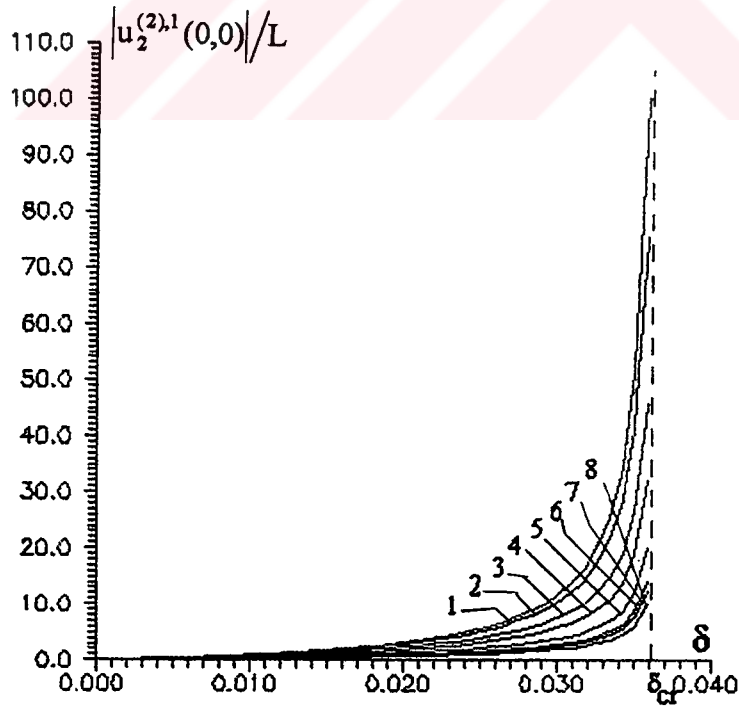


Şekil 3.6 $E^{(2)}/E^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda farklı χ' lar için $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar

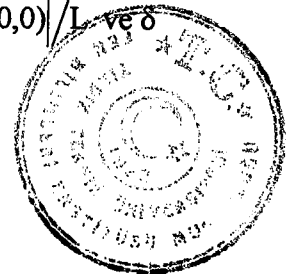


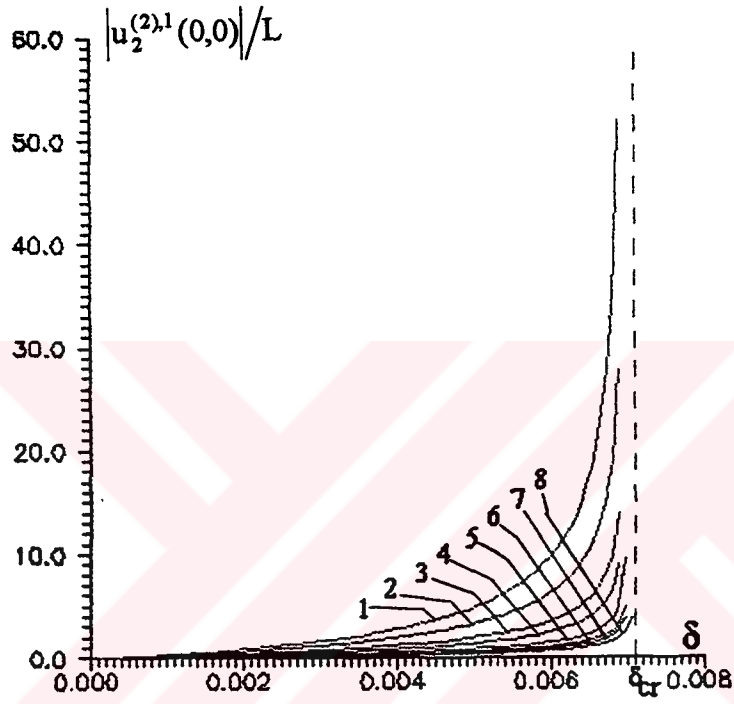


Şekil 3.7 $E^{(2)}/E^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda farklı χ' lar için $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar

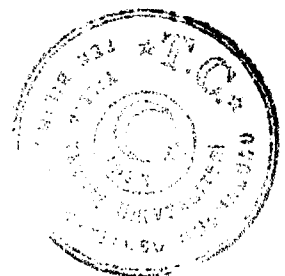


Şekil 3.8 $E^{(2)}/E^{(1)}=100$, $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda farklı χ' lar için $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar





Şekil 3.13 $E^{(2)}/E^{(1)}=200$, $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda farklı χ ' lar için $|u_2^{(2),1}(0,0)|/L$ ve δ arasındaki bağımlılıklar



BÖLÜM IV

4. TEK YÖNLÜ VİSKOELASTİK KOMPOZİTLERİN TEORİK BASINÇ LİMİTLERİNİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde, Bölüm 2' de geliştirilen modeli ve Akbarov vd., (1997)' de verilen yöntemi uygulayarak tekyönlü viskoelastik malzemelerin teorik basınç limitlerinin belirlenmesi ele alınmaktadır. Şimdiye kadar tekyönlü viskoelastik kompozitlerin teorik basınç limitinin belirlenmesi için, Gerard ve Gilbert (1959)' de verilen kritik şekil değiştirme yönteminin uygulanması önerilmiştir. Ancak ele alınan konuda bu yaklaşık yöntemle de hiç bir sonuca varılamamıştır. Bir önceki bölümde ve Akbarov vd., (1997) kaynağında geliştirilen yaklaşımların ise tekyönlü viskoelastik kompozitlerin basınç altında kırılma limitlerinin yüksek hassasiyetle belirlenebilmesini sağlaması ve uygulaması ileride gösterilecektir.

4.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Yapısı Şekil 3.1' de gösterilen, yani yapısında sonsuz küçük yerel eğriselliği olan ve birbirini tekrarlayan iki tür levhadan oluşan bir kompozit malzeme ele alalım ve Bölüm 3' ün 3.1 kısmında yapılan kabullerin hepsinin sağlandığını varsayalım. $1^{(2)}$ ile işaret edilen levhanın güçlendirici, $1^{(1)}$ ile işaret edilen levhanın ise matris malzemeden oluştuğunu farz edelim. Güçlendirici malzemenin saf elastik malzeme olduğunu ve $E^{(2)}$ (Elastisite modülü), $\nu^{(2)}$ (Poisson oranı) mekanik sabitleri ile belirlendiğini, matris malzemesinin ise lineer viskoelastik malzeme olduğunu varsayalım.

Matris malzemesinin mekanik özelliklerini aşağıdaki operatörlerle belirleyelim:

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= E_0^{(1)} \left[1 - \omega_0 \Pi_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right], \\ \nu^{(1)} &= \nu_0^{(1)} \left[1 + \frac{1 - 2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \omega_0 \Pi_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

(4.1)' de $E_0^{(1)}$ ve $\nu_0^{(1)}$ Elastisite modülünün ve Poisson oranının başlangıç değerlerini; ω_0 , ω_∞ ve α malzemenin reolojik parametrelerini gösterir. Bundan başka (4.1)' deki Π_α^* Rabotnov'un (1977) kesirli üstel (fractional-exponential) operatörüdür ve bu operatör



$$\Pi_{\alpha}^*(\beta) = \int_0^t \Pi_{\alpha}(\beta, t - \tau) d\tau$$

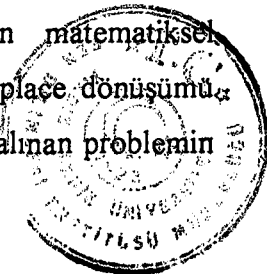
$$\Pi_{\alpha}(\beta, t) = t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \quad (4.2)$$

şeklindedir.

(4.2)' de $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonunu göstermektedir. (4.1) ifadelerinin yapısında matris malzemesinin hacimsel genleşme ve sıkışmasının saf elastik olması koşulunun sağlandığını belirtelim. Yukarıdaki veriler çerçevesinde (3.1)-(3.18) denklemlerinin sağlandığını ve ancak bu denklemlerde $E^{(1)}$, $\nu^{(1)}$ sabitleri yerine (4.1), (4.2) operatörlerinin konulduğunu gözönüne almak gerekmektedir. Böylece bu bölümde incelenen problemin formülasyonu bitmiş ve bu problemin incelenmesi için kullanılan yaklaşımın genel yönleri önceki bölümde kullanılan yaklaşımın aynısı olmaktadır. Ancak bu bölümde ele alınan problemin sıfırcı ve birinci yaklaşımlarının belirlenmesi için daha başka matematik araçların uygulanması gerekmektedir. Bu yaklaşımlara ait büyüklüklerin belirlenmesine geçmeden önce, belirtelim ki bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar esas alınarak ele alınan malzemenin kırılma parametrelerinin belirlenmesinde sıfırcı ve birinci yaklaşımlardan elde edilen sonuçlarla yetineceğiz.

4.2 Sıfırcı ve Birinci Yaklaşımlara Ait Quasistatik Sınırdeğer Problemlerinin İncelenmesi

Önceki bölümde yapıldığı gibi, ele alınan viskoelastik problemde sıfırcı yaklaşımın belirlenmesi (3.8), (3.10) denklemlerinin (3.19) temas koşulları çerçevesinde çözümü sonucunda elde edilmekte ve bu durumda da bilinen nedenlerden dolayı (3.8), (3.10) ve (3.19) denklemlerindeki nonlinear terimler ihmal edilmektedir. Böylece, sıfırcı yaklaşımın belirlenmesi (4.1) ve (4.2) verileri çerçevesinde lineer quasistatik bir problemin çözümüne getirilmektedir. Bilindiği üzere lineer quasistatik (viskoelastik) sınır-değer problemleri için karşılık prensibi (principle of corresponds) geçerlidir ve bu prensibe göre bir lineer viskoelastik problemin çözümünü uygun lineer saf elastik problemin çözümünde mekanik sabitlerin karşılığı olan operatörlerle yer değiştirerekten elde etmek gerekir. Başka bir deyişle, karşılık prensibine göre lineer viskoelastisite sınır-değer probleminin matematiksel formülasyonunu oluşturan denklem ve koşulların hepsine zamana göre Laplace dönüşümü uygularsak ve bu uygulamada Konvolüsyon teoremini gözönüne alırsak ele alınan problemin



formülasyonunu aranan büyüklüklerin Laplace dönüşümleri ile elde etmiş oluruz. Laplace dönüşümleri için elde edilen sınır-değer problemi ise, araştırılan viskoelastik probleme karşı gelen saf elastik durum için olan sınır-değer probleminde aranan büyüklükleri, onların Laplace dönüşümleri ile yer değiştirildiğinde oluşan problemle çakışmaktadır. Dolayısıyla, karşılık prensibine göre lineer bir viskoelastik malzeme için verilen lineer bir sınır-değer probleminin çözümü bu probleme karşı gelen saf elastik problemin çözümünden, bu çözümdeki büyüklükleri, Laplace dönüşümleri ile yer değiştirmekle elde etmiş olmaktadır.

Yukarıda söylenenleri gözönüne alarak, sıfıncı yaklaşıma ait olan lineer denklem ve koşulların hepsine

$$\bar{\varphi}_L(\lambda) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-\lambda t} dt \quad (4.3)$$

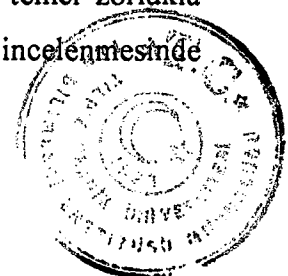
şeklindeki Laplace dönüşümünü uygularsak, karşılık prensibine göre sıfıncı yaklaşıma ait büyüklüklerin Laplace dönüşümleri (3.20)' den

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(k),0}; u_i^{(k),0}; v^{(1)}; E^{(1)} \right\} \Rightarrow \left\{ \bar{\sigma}_{ijL}^{(k),0}; \bar{u}_{iL}^{(k),0}; \bar{v}_L^{(1)}; \bar{E}_L^{(1)} \right\} \quad (4.4)$$

yer değiştirmesi yardımı ile elde edilmektedir.

Lineer viskoelastisite problemlerinin incelenmesinde karşılaşılan en zor aşamalardan birisi ters (invers) Laplace dönüşümlerinin elde edilmesi işlemidir. Tez kapsamında yapılan araştırmalarda aranan büyüklüklerin invers Laplace dönüşümlerinin analitik bir yolla elde edilmesi çok zor veya imkan dışı olduğundan, (4.3)' deki dönüşüm parametresi λ ' nın $\lambda > 0$ koşulunu sağladığı kabul edilerek sözkonusu dönüşümler Schapery (1978) yöntemi uygulanarak sayısal olarak elde edilmektedir. Böylece, (3.20), (4.4) ve Schapery yönteminden yararlanarak sıfıncı yaklaşıma ait büyüklüklerin değerini t zamanının keyfi bir değerinde belirleyebiliriz. Adı geçen Schapery yönteminin açıklaması Ek.1' de verilmektedir.

Yukarıda sıfıncı yaklaşımın belirlenmesi örneğinden görüldüğü gibi lineer viskoelastisite problemlerinin incelenmesinde karşılık prensibi geçerli olduğundan hiç bir temel zorlukla karşılaşılmamaktadır. Ancak, lineerize edilmiş viskoelastisite problemlerinin incelenmesinde



karşılık prensibi, genellikle geçersiz olduğundan, aşılması büyük zorluklarla karşılaşılır. Bu söylenen zorluklarla, ileride birinci yaklaşımın belirlenmesi işlemlerinde karşılaşılacaktır.

Şimdi birinci yaklaşıma ait büyüklüklerin belirlenmesini ele alalım. İlkönce bu yaklaşımın sağladığı denklemleri aşağıdaki biçimde yazalım:

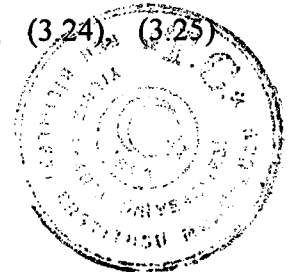
Denge denklemleri:

$$\begin{aligned} (1 + g_1^{(k)}) \frac{\partial \sigma_{11}^{(k),1}}{\partial x_1} + \sigma_{11}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_1^{(k),1}}{\partial x_1^2} + (1 + g_1^{(k)}) \frac{\partial \sigma_{12}^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} &= 0 ; \\ (1 + g_2^{(k)}) \frac{\partial \sigma_{12}^{(k),1}}{\partial x_1} + \sigma_{11}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_2^{(k),1}}{\partial x_1^2} + (1 + g_2^{(k)}) \frac{\partial \sigma_{22}^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} &= 0 ; \end{aligned} \quad (4.5)$$

Bünye denklemleri:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k),1} &= \frac{E^{(k)}}{(1 + v^{(k)})(1 - 2v^{(k)})} \left[(1 + g_1^{(k)})(1 - v^{(k)}) \frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_1^{(k)}} + (1 + g_2^{(k)}) v^{(k)} \frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \right] ; \\ \sigma_{22}^{(k),1} &= \frac{E^{(k)}}{(1 + v^{(k)})(1 - 2v^{(k)})} \left[(1 + g_1^{(k)}) v^{(k)} \frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_1^{(k)}} + (1 + g_2^{(k)})(1 - v^{(k)}) \frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} \right] ; \\ \sigma_{12}^{(k),1} &= \frac{E^{(k)}}{2(1 + v^{(k)})} \left[(1 + g_1^{(k)}) \frac{\partial u_1^{(k),1}}{\partial x_2^{(k)}} + (1 + g_2^{(k)}) \frac{\partial u_2^{(k),1}}{\partial x_1^{(k)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6)' da $E^{(1)}$ ve $v^{(1)}$ (4.1), (4.2) formülleri ile verilmiş operatörlerdir. (4.5) ve (4.6) denklemlerinden başka birinci yaklaşımın belirlenmesi için (3.23) ve (3.24) denklemleri gözönüne alınmaktadır. Ele alınan durumda yukarıdaki denklemlerdeki bilinmeyenlerin katsayılarının zamana bağlı belli fonksiyonlar olduğu açıktır. Bu nedenden dolayı yukarıda adı geçen karşılık prensibini (4.5), (4.6), (3.23) ve (3.24) probleminin incelenmesine, yani, birinci yaklaşımın belirlenmesi işlemlerine uygulamak mümkün olmamaktadır. Bu tür durumlarda ele alınan problemlerin incelenmesi için Akbarov vd., (1997)' de yaklaşık bir yöntem önerilmiş ve benzeri problemlerin çözümüne uygulanmıştır. Şimdi Akbarov vd., (1997) tarafından önerilmiş yöntemin ele alınan (4.5), (4.6), (3.23), (3.24), (3.25) problemlerinin çözümüne uygulanmasını araştıralım.



Boyutsuz reolojik $\omega = \omega_{\infty}/\omega_0$ parametresi ve boyutsuz $t' = \omega_0^{1/(1+\alpha)} t$ zamanını ele alalım. İlkönce (4.5), (4.6), (3.23) ve (3.24) denklemlerinin katsayılarını oluşturan

$$\varphi_1(t') = \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{E_0^{(1)}} ; \varphi_2(t') = \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{E_0^{(2)}} ; \varphi_3^{(k)}(t') = 1 + g_1^{(k)} ; \varphi_4^{(k)}(t') = 1 + g_2^{(k)} \quad (4.7)$$

fonksiyonlarının t' 'ye göre değişimlerini problem parametrelerinin mümkün değerlerinde araştıralım. $\omega = 0.5$, $\alpha = -0.7$; $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 100$; $p/E_0^{(1)} = -0.3$ oldukları halde Şekil 4.1 ve Şekil 4.2' de (4.7) fonksiyonlarının t' 'dan bağımlılıklarının $\eta^{(2)} = 0.2$ (Şekil 4.1) ve $\eta^{(2)} = 0.5$ (Şekil 4.2) değerlerinde gösteren grafikleri ele alalım. Bu grafiklerden ve problem parametrelerinin diğer başka değerlerinde elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi $\varphi_2(t')$, $\varphi_3^{(k)}(t')$, $\varphi_4^{(k)}(t')$ ($k=1,2$) fonksiyonlarının t' 'ye göre değişimleri çok az olduklarından onları yeteri dereceden hassasiyetle sabit gibi kabul edebiliriz, yani

$$\varphi_2(t') = \text{sabit}_2 ; \varphi_3^{(k)}(t') = \text{sabit}_3^{(k)} ; \varphi_4^{(k)}(t') = \text{sabit}_4^{(k)} \quad (4.8)$$

gibi yazabiliriz. (4.8)' deki sabitlerin değeri olarak uygun fonksiyonların $t'=0$ da veya $t'=\infty$ daki değerlerini kabul edebiliriz.

Yukarıda tartışılan sonuçları gözönüne alarak (4.3) Laplace dönüşümünü (4.5), (4.6) ve (3.23) denklemlerine uygulayalım. Bu durumda $k=2$ hali için $\sigma_{ij}^{(2),1}$ ve $u_i^{(2),1}$ leri onların $\bar{\sigma}_{ijL}^{(2),1}$ ve $\bar{u}_{iL}^{(2),1}$ lerle sadece yerdeğiştirerekten (4.5) ve (4.6) denklemleri tekrar yazılır. Bundan başka, Konvolüsyon teoremi'nden kullanarak $k=1$ halinde (4.5) ve (4.6)' dan aşağıdakileri elde ederiz:

$$\left(1 + g_1^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{11L}^{(1),1}}{\partial x_1} + E_0^{(1)} \int_0^{\infty} \varphi_1(t') \frac{\partial^2 u_1^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' + \left(1 + g_1^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{12L}^{(1),1}}{\partial x_2^{(1)}} = 0 ;$$

$$\left(1 + g_2^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{12L}^{(1),1}}{\partial x_1} + E_0^{(1)} \int_0^{\infty} \varphi_1(t') \frac{\partial^2 u_2^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' + \left(1 + g_2^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{\sigma}_{22L}^{(1),1}}{\partial x_2^{(1)}} = 0 ;$$



$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11L}^{(1),1} &= \frac{\bar{E}_L^{(1)}}{\left(1 + \bar{v}_L^{(1)}\right)\left(1 - 2\bar{v}_L^{(1)}\right)} \left[\left(1 + g_1^{(1)}\right)\left(1 - \bar{v}_L^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{u}_{1L}^{(1),1}}{\partial x_1} + \left(1 + g_2^{(1)}\right)\bar{v}_L^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_{2L}^{(1),1}}{\partial x_2^{(1)}} \right]; \\
\bar{\sigma}_{22L}^{(1),1} &= \frac{\bar{E}_L^{(1)}}{\left(1 + \bar{v}_L^{(1)}\right)\left(1 - 2\bar{v}_L^{(1)}\right)} \left[\left(1 + g_1^{(1)}\right)\bar{v}_L^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_{1L}^{(1),1}}{\partial x_1} + \left(1 + g_2^{(1)}\right)\left(1 - \bar{v}_L^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{u}_{2L}^{(1),1}}{\partial x_2^{(1)}} \right]; \\
\bar{\sigma}_{12L}^{(1),1} &= \frac{\bar{E}_L^{(1)}}{2\left(1 + \bar{v}_L^{(1)}\right)} \left[\left(1 + g_1^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{u}_{1L}^{(1),1}}{\partial x_2^{(1)}} + \left(1 + g_2^{(1)}\right) \frac{\partial \bar{u}_{2L}^{(1),1}}{\partial x_1} \right].
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Şimdi (4.9)'daki integral terimleri ele alalım, yani

$$\int_0^\infty \varphi_1(t') \frac{\partial^2 u_j^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' \quad ; \quad j=1,2 \tag{4.10}$$

terimlerini inceleyelim.

Yukarıda tartışılan ve diğer sonuçlara göre, $\varphi_1(t')$ fonksiyonunun keyfi $t' \in (0, \infty)$ için

$$\varphi_1(t') \leq 0 \quad \text{ve} \quad |\varphi_1(\infty)| \leq |\varphi_1(t')| \leq |\varphi_1(0)| \tag{4.11}$$

koşullarını sağladığını söyleyebiliriz. (4.11)'i gözönüne alırsak, keyfi seçilmiş $\lambda > 0$ değeri için

$$\left| \varphi_1(\infty) \int_0^\infty \frac{\partial^2 u_2^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' \right| \leq \left| \int_0^\infty \varphi_1(t') \frac{\partial^2 u_i^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' \right| \leq \left| \varphi_1(0) \int_0^\infty \frac{\partial^2 u_i^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' \right|. \tag{4.12}$$

oluyor.

Bundan başka (4.12)'yi de dikkate alırsak keyfi seçilmiş $\lambda > 0$ değeri için

$$\int_0^\infty \varphi_1(t') \frac{\partial^2 u_i^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' \cong \varphi_1(t'_*) \int_0^\infty \frac{\partial^2 u_i^{(1),1}}{\partial x_1^2} e^{-\lambda t'} dt' = \varphi_1(t'_*) \frac{\partial^2 \bar{u}_{iL}^{(1),1}}{\partial x_1^2}. \tag{4.13}$$

olduğunu elde ederiz.



(4.13)' de t^* , t^* 'nin keyfi seçilmiş ve (4.13) eşitliğini sağlayan bir değeridir. Açıkta ki, t^* değerinin kesin biçimde belirlenmesi çoğu zaman imkan dışı olduğundan, tezde yapılan araştırmalarda $t^* = 0$ ve $t^* = \infty$ kabul edilmiştir. Böylece, problem parametrelerinin seçilmiş değerlerinde

$$\lim_{t' \rightarrow t'_{\alpha}} \left| u_2^{(2),1}(0,0,t') \right| / L \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

kriterinden belirlenen kesin t'_{α} değeri yerine (4.13)' deki t^* 'a $t^* = 0$ ve $t^* = \infty$ alındığında, (4.14)' den sırasıyla $t'_{\alpha,0}$ ve $t'_{\alpha,\infty}$ değerlerini belirleriz. Dolayısıyla, kesin t'_{α} değerinin belirlenmesini $t'_{\alpha,0}$ ve $t'_{\alpha,\infty}$ ' lerin belirlenmesine indirgemiş oluruz. Bu durumda, belli fiziksel görüşlere göre $t'_{\alpha,\infty} \leq t'_{\alpha} \leq t'_{\alpha,0}$ eşitsizliği sağlanmalıdır.

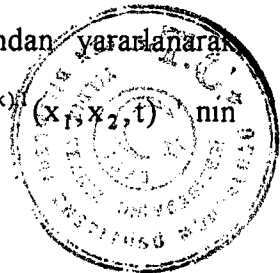
Şimdi aranan büyüklüklerin Laplace dönüşümlerinin ve bu dönüşümlerde sözü edilen büyüklüklerin belirlenmesi için aşağıdakileri söyleyebiliriz.

(4.5), (4.6) ve (3.23) denklemlerine (4.3) Laplace dönüşümü uyguladıktan, (4.13) eşitliği kullanıldıktan ve bazı belli çevirmelerden sonra aranan büyüklüklerin Laplace dönüşümlerinin bir önceki bölümde incelemesi yapılmış (3.21)-(3.25) denklemlerini sağladığı görülmüştür. Bu durumda (3.22)' deki $C_j^{(k)}$ ($k=1,2$; $j=1,2,3,4$) sabitlerinin ifadelerinde yapılması gereken uygun değişikliklerin olması gerektiğini vurgulayalım. Bundan sonra aranan büyüklüklerin Laplace dönüşümlerinin sağladığı bu denklemlere (3.29) üstel Fourier dönüşümünü uygulayarak (3.27)-(3.29) denklemlerini ve buradan da (3.40)' da verilen şekilde bir genel çözüm elde ediyoruz. Eğer, $u_2^{(2),1}(x_1, x_2, t)$ aranan fonksiyonun Laplace dönüşümü olan $u_{2L}^{-(k),1}(x_1, x_2, \lambda)$ ' nin üstel Fourier dönüşümünü $u_{2LF}^{=(k),1}(s, x_2, \lambda)$ şeklinde gösterecek olursak, (3.30)' a ve yukarıda belirtilenlere göre

$$u_{2LF}^{=(k),1}(s, x_2, \lambda) = A_1^{(k)}(\lambda, s) \sinh(\alpha_1^{(k)}(\lambda) s x_2^{(k)}) \sin(\beta_1^{(k)}(\lambda) s x_2^{(k)}) + A_2^{(k)}(\lambda, s) \cosh(\alpha_1^{(k)}(\lambda) s x_2^{(k)}) \cos(\beta_1^{(k)}(\lambda) s x_2^{(k)}) \quad (4.15)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan da, seçilmiş keyfi λ değerlerinde (3.31)' den ve bir önceki bölümde açıklaması yapılan Krylov ve Shulgina (1966) algoritmasından yararlanarak

$u_{2L}^{-(k),1}(x_1, x_2, \lambda)$ 'i ve buna da Schapery (1978) yöntemi uygulayarak $u_2^{(k)}(x_1, x_2, t)$ nin



sayısal değerlerini elde ederiz. Yukarıdaki sayısal işlemlerin bilgisayarlar yardımı ile yapıldığını ve bu durumlarda önceden x_1 ve $x_2^{(k)}$ koordinatlarının tespit edildiğini belirtelim.

Böylece, p 'nin ve diğer problem parametrelerinin belirli değerlerinde $\left| u_2^{(2),1}(0,0,t') \right| / L$ 'nin t' 'ye bağımlı olarak değişmesini inceleyerek (4.14) kriterini sağlayan t'_{α} değerlerini (yani, $t'_{\alpha,0}$, $t'_{\alpha,\infty}$ vb. değerlerini) belirlemiş oluruz.

Yukarıda tekrarlandığı gibi elde edilen bu kritik değerler aynı zamanda yapısı Şekil 2.1' de verilen tek yönlü viskoelastik kompozit malzemenin teorik basınç kırılma süresini göstermiş olmaktadır.

Şimdi bu kısımda açıklaması verilen yöntemin uygulanması ile yukarıda adı geçen teorik basınç kırılma süresine ait elde edilmiş sayısal sonuçların incelenmesine geçelim.

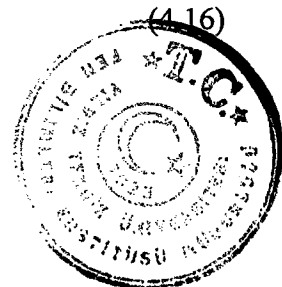
4.3 Problem Parametrelerinin Teorik Basınç Kırılma Süresine Etkisini Gösteren Sayısal Sonuçların İncelenmesi

İlkönce $\omega = \omega_{\infty} / \omega_0$ boyutsuz reolojik parametresinin ve $t' = \omega_0^{1/(1+\alpha)} t$ boyutsuz zamanın ilerideki işlemlerde kullanılacağını vurgulayarak, teorik basınç kırılma süresine (TBKS) $p/E_0^{(1)}$ değişiminin etkisini ele alalım.

Aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim: Ele alınan viskoelastik problemde $E^{(1)}$ ve $\nu^{(1)}$ operatörlerini $E_0^{(1)}$ ve $\nu_0^{(1)}$ sabitleri ile yer değiştirirsekten oluşturulan saf elastik kırılma probleminin incelenmesi sonucunda bulunan teorik basınç kırılma kuvvetini $p_{\alpha,0}$ ile, $E^{(1)}$ ve $\nu^{(1)}$ operatörlerini $E_{\infty}^{(1)}$ ve $\nu_{\infty}^{(1)}$ sabitleri ile yer değiştirirsekten oluşturulan saf elastik kırılma probleminin incelenmesi sonucunda bulunan teorik basınç kırılma kuvvetini ise $p_{\alpha,\infty}$ ile gösterelim. Burada $E_{\infty}^{(1)}$ ve $\nu_{\infty}^{(1)}$ sabitleri (4.1), (4.2)' den integraleme sınırındaki t' 'ni sonsuza yaklaştırarak

$$E_{\infty}^{(1)} = E_0^{(1)} \left(1 - \frac{1}{1 + \omega} \right)$$

$$\nu_{\infty}^{(1)} = \nu_0^{(1)} \left(1 + \frac{1 - 2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \frac{1}{1 + \omega} \right)$$



biçiminde elde edilir.

(4.16)'nın (4.1) ve (4.2)'den tekbaşına elde edilmesi çok da kolay olmadığından, (4.1) ve (4.2)'ye ilkönce (4.3) Laplace dönüşümü uygulanır ve

$$\begin{aligned}\bar{E}_L^{(1)} &= E_0^{(1)} \left(1 - \frac{1}{\lambda^\alpha + 1 + \omega} \right) \\ \bar{v}_L^{(1)} &= v_0^{(1)} \left(1 + \frac{1 - 2v_0^{(1)}}{2v_0^{(1)}} \frac{1}{\lambda^\alpha + 1 + \omega} \right)\end{aligned}\quad (4.17)$$

dönüşümleri elde edilir. Bilindiği üzere, eğer bir $\bar{f}_L(\lambda)$ fonksiyonu $f(t)$ fonksiyonunun (4.3) Laplace dönüşümü ise, onda

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{f}_L(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (4.18)$$

olur. Böylece, (4.18) kuralını (4.17)'ye uygulayarak (4.16) elde edilir.

Şimdi yeniden $p_{\alpha,0}$ ve $p_{\alpha,\infty}$ değerlerine dönelim. Bir önceki bölümde elde edilen sonuçlara göre $p_{\alpha,\infty} < p_{\alpha,0}$ olmaktadır. Eğer dış basınç kuvvetine $p/E_0^{(1)} < p_{\alpha,\infty}/E_0^{(1)}$ değeri verilirse incelenen viskoelastik malzeme hiçbir zaman kırılmayacaktır, eğer dış basınç kuvvetine $p/E_0^{(1)} = p_{\alpha,0}/E_0^{(1)}$ değeri verilirse incelenen viskoelastik malzeme aniden kırılacaktır, yani TBKS olan $t'_{\alpha}=0$ olacaktır. Nihayet, eğer $p/E_0^{(1)} > p_{\alpha,0}/E_0^{(1)}$ ise, araştırılan problemlerin hiçbir fiziksel anlamı olmayacaktır.

Söylenen nedenlerden dolayı ileride ele alınacak incelemelerin hepsinde dış basınç kuvvetinin

$$p_{\alpha,0} < p < p_{\alpha,\infty} \quad (4.19)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde değer aldığını varsayacağız. Bundan başka, önemle belirtmek gerekir ki bir önceki bölümde elde edilen sonuçlara göre $H^{(2)}/L$ parametresi teorik basınç kırılma limitine etki yapmadığı gibi bu bölümde ele alınan problem için elde edilen sonuçlardan $H^{(2)}/L$ parametresinin TBKS'ne de etki etmediği görülmektedir. Bu nedenden



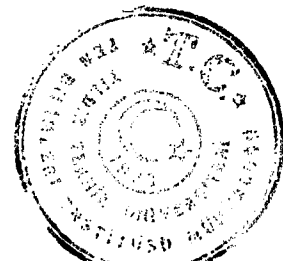
dolayı ilerideki sayısal incelemeler $H^{(2)}/L$ parametresinin sadece $H^{(2)}/L=0.1$ değerinde yapılacaktır.

Şimdi $p/E_0^{(1)}$ 'in değişiminin $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılığı gösteren grafikleri ve dolayısıyla $t'_{\alpha,0}$ ve $t'_{\alpha,\infty}$ değerlerine etkisini gösteren sonuçları ele alalım. Bu sonuçlar $\omega=0.5$; $\alpha=-0.3$; $\eta^{(2)}=0.2$ halinde Şekil 4.3-4.9' da $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ için, Şekil 4.10-4.16' da ise $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ için verilmektedir. Şekil 4.3-4.9' da gösterilen sonuçlar, sırasıyla, $p/E_0^{(1)}=0.18$; 0.20; 0.22; 0.23; 0.24; 0.25; 0.27 değerlerinde, Şekil 4.10-4.16' da gösterilen sonuçlar ise, sırasıyla, $p/E_0^{(1)}=0.22$; 0.23; 0.24; 0.31; 0.36; 0.38; 0.42 değerlerinde elde edilmiştir. Sıralanan durumlardaki $t'_{\alpha,0}$ ve $t'_{\alpha,\infty}$ değerleri ise Tablo 4.1 ve Tablo 4.2' de verilmektedir. Bu sonuçlardan açıkça görüldüğü gibi $p/E_0^{(1)}$ büyüdükçe $t_{\alpha,0}$ ve $t_{\alpha,\infty}$ ' lar monoton olarak küçülmektedir ve bu durumda $t_{\alpha,\infty} < t_{\alpha,0}$ olması ve (4.13)' deki t^* 'a 0 veya ∞ değil, $(0, \infty)$ ' dan olan keyfi bir değer verildiğinde elde edilen TBKS' ni gösteren $t'_{\alpha,*}$ 'ler $t'_{\alpha,\infty} < t'_{\alpha,*} < t'_{\alpha,0}$ eşitsizliğini sağlamaktadır. Bundan başka bu sonuçlardan görüldüğü gibi, t^* ' lar büyüyerek 0' dan ∞ ' a yaklaştığında $t'_{\alpha,*}$ ' ler de monoton bir biçimde küçülerek $t'_{\alpha,0}$ ' dan $t'_{\alpha,\infty}$ ' a yaklaşmaktadır.

Yukarıda belirtilenlerden başka, ele alınan sonuçlardan $(t'_{\alpha,0} - t'_{\alpha,\infty})$ değerlerinin $t'_{\alpha,0}$ veya $t'_{\alpha,\infty}$ değerlerine göre çok küçük olması net bir şekilde gözükmemektedir. Dolayısıyla, bulunan $t'_{\alpha,0}$ veya $t'_{\alpha,\infty}$ zamanlarını $\eta = (t'_{\alpha,0} - t'_{\alpha,\infty}) / t'_{\alpha,\infty}$ nispi (relatif) hata çerçevesinde incelenen tek yönlü viskoelastik kompozit malzemenin teorik basınç kırılma süresi (TBKS) gibi kabul edebiliriz.

Böylece yukarıdakilerden $p/E_0^{(1)}$ değerlerinin artmasının TBKS' nin küçülmesine neden olduğu elde edilmektedir.

Şimdi de $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ değişiminin TBKS' nin değerlerine yaptığı etkiyi inceleyelim. Şekil 4.17-4.20' de $\omega=0.5$; $\alpha=-0.3$; $p/E_0^{(1)}=0.28$; $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılıkların farklı t^* ' ler için çizilen grafikler; sırasıyla, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$; 100; 150; 200 değerleri için verilmektedir. Bundan başka, ele alınan durumlardaki $t'_{\alpha,0}$ ve $t'_{\alpha,\infty}$ değerleri Tablo 4.3' de verilmektedir. Elde edilen sayısal sonuçlardan $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ büyümesinin TBKS' nin monoton olarak küçülmesine neden olduğu açıkça görülmektedir.

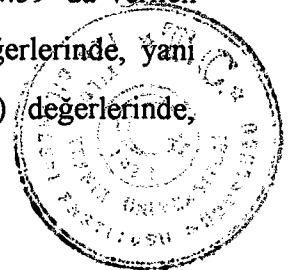


TBKS' nin değerlerine matris malzemesinin reolojik parametrelerinin etkisinin incelenmesini ele alalım. Şekil 4.21-4.26' da $\alpha=-0.3$; $p/E_0^{(1)}=0.42$; $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda sırasıyla, $\omega=0.5$; 1.0; 2.0; 3.0; 5.0; 6.0 değerlerinde $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ve t' arasındaki bağımlılıkların grafikleri verilmektedir. Tablo 4.4' de ise uygun durumlardaki $t'_{cr,0}$ ve $t'_{cr,\infty}$ değerleri verilmektedir. $\omega=\omega_0/\omega_0$ parametresi (4.17)' den de gözüktüğü gibi, viskoelastik malzemenin $t'=\infty$ daki mekanik özelliklerini karakterize etmeğe imkan veren bir büyüklük olduğunu hatırlatalım. Örneğin, eğer $\omega \rightarrow \infty$ ise, $E_\infty^{(1)} \rightarrow E_0^{(1)}$ veya $\omega \rightarrow 0$ ise $E_\infty^{(1)} \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla, ω parametresi viskoelastik malzemenin rijitliğini belirten bir parametredir ve ω ' nın artması ile viskoelastik malzemenin viskozite özelliği zayıflar ve daha rijit olur. Bu nedenlerden dolayı belli fiziksel görüşlere göre ele alınan problemin incelenmesinden " ω ' nın artması TBKS' nin büyümesine neden olmalıdır" şeklinde formüle edilmiş bir sonucun olması gerektiğini sayısal incelemeler yapılmaksızın söylemek mümkündür. Dolayısıyla, Şekil 4.21-4.26' daki ve Tablo 4.4' deki sonuçlar ω ' nın artması ile TBKS' nin büyümesinin gerçeğe uygun geldiğini göstermektedir.

Şimdi α parametresinin TBKS' ne etkisini gösteren sayısal sonuçları ele alalım. Bilindiği üzere α parametresi (4.1), (4.2)' lerle verilen integral operatöründeki çekirdek fonksiyonunun tekillik mertebesini göstermekte ve $-1 < \alpha \leq 0$ değerini almaktadır. (4.17)' den görüldüğü gibi α parametresi viskoelastik malzeme özelliklerinin $t'=0$ ve $t'=\infty$ aralığındaki değişme formuna etki göstermektedir. (4.17)' de Laplace dönüşümlerinin belli özelliklerinden dolayı $\lambda \sim (t')^{-1}$ olduğunu dikkate alırsak , TBKS' nin yani t'_{cr} 'in $t'_{cr} < 1$ olması hallerine ait problemlerde $|\alpha|$ değerlerinin büyümesinin t'_{cr} 'in küçülmesine, $t'_{cr} > 1$ olması hallerine ait problemlerde ise $|\alpha|$ 'nın artmasının t'_{cr} 'in de artmasına neden olacağını, fiziksel bakış açısından sayısal hesaplamalar yapmadan da yaklaşık olarak söylemek mümkündür.

Şekil 4.27-4.30' da $\omega=0.5$; $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$; $p/E_0^{(1)}=0.42$; $\eta^{(2)}=0.2$ halinde, sırasıyla, $\alpha=-0.1$; -0.3 ; -0.5 ; -0.7 durumlarına ait elde edilmiş sonuçları, Tablo 4.5' de ise $t'_{cr,0}$ ve $t'_{cr,\infty}$ değerleri gösterildiğini belirtelim. Farklı α değerleri için elde edilen uygun sonuçların karşılaştırılmasıyla yukarıda söylenen öngörünün $t'_{cr} < 1$ haline ait kısmının doğrulandığını görmüş oluruz.

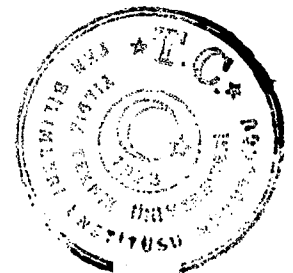
Bundan başka, yukarıda söylenen öngörü daha açık bir biçimde Şekil 4.31-4.39' da verilen sayısal sonuçlardan da görülmektedir. Bu verilen grafikler α ' nın farklı değerlerinde, yani $\alpha=-0.3$ (Şekil 4.31-4.33); -0.5 (Şekil 4.34-4.36); -0.7 (Şekil 4.37-4.39) değerlerinde,

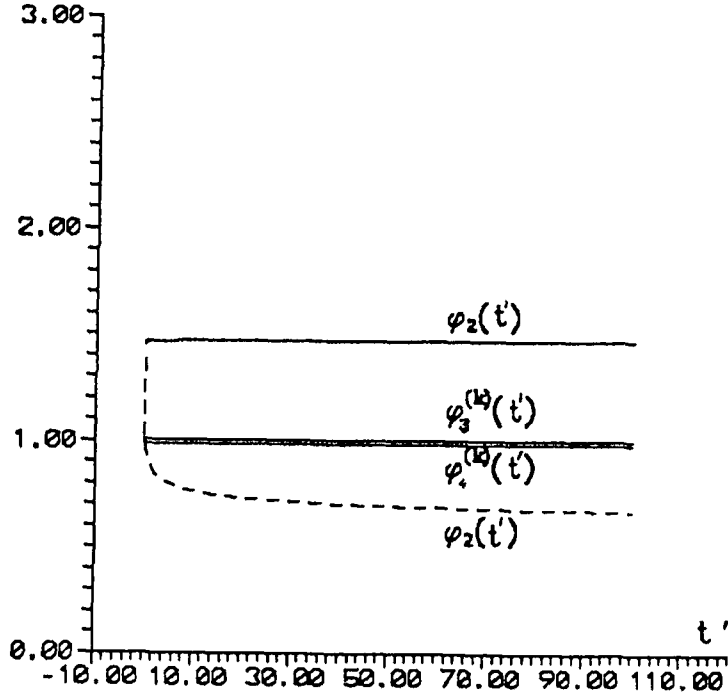


sırasıyla, $\eta^{(2)}=0.1; 0.2; 0.5$ durumlarında elde edilmiş ve $\omega=0.5$; $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$; $p/E_0^{(1)}=0.32$ kabul edilmiştir. Bundan başka Tablo 4.6' da yukarıda sıralanan durumlara karşı gelen $t'_{\alpha,0}$ ve $t'_{\alpha,\infty}$ değerleri verilmektedir. $\eta^{(2)}=0.5$ halinde farklı α' lar için elde edilen uygun sonuçların karşılaştırılması yukarıdaki öngörünün $t'_{\alpha}>1$ haline ait kısmınında doğru olduğunu kanıtlamış olmaktadır. Bundan başka, Şekil 4.31-4.33' de verilen sonuçlar TBKS' nin $\eta^{(2)}$ 'nin (yani ele alınan tek yönlü levhalı viskoelastik kompozit malzemedeki güçlendirici levhaların hacim orantısının) büyümesi ile arttığını açıkça göstermektedir.

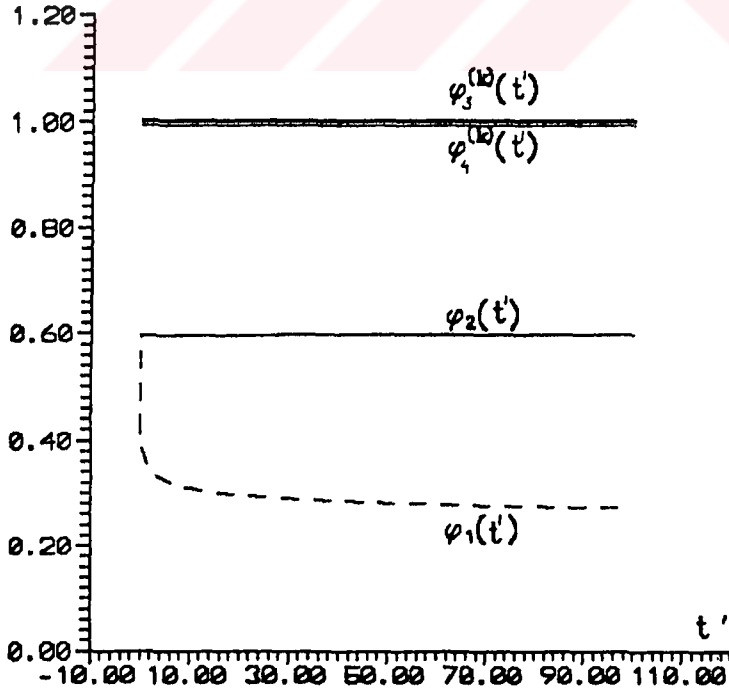
Böylece, problem parametrelerinin TBKS' ne etkisini elde edilen sayısal sonuçların incelenmesinden yararlanarak aşağıdaki gibi açıklayabiliriz:

1. Dış basınç kuvvetinin büyümesi ile TBKS (yani t'_{α}) küçülmekte,
2. Kompozit malzemenin viskozite derecesi küçüldükçe (ele alınan örnek problemde ω ve $\eta^{(2)}$ 'nin artması ile) TBKS artmakta,
3. Kompoziti oluşturan malzemeler arasındaki farklılık arttıkça (örneğin $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ 'in değerleri arttıkça), TBKS küçülmektedir.

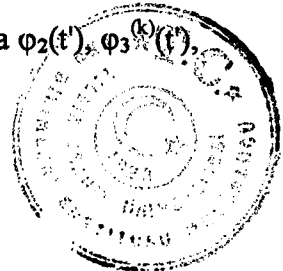


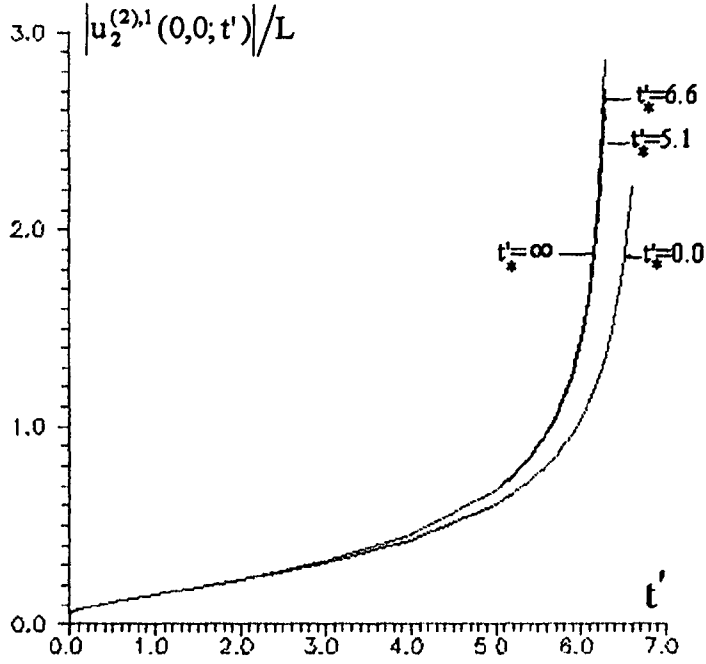


Şekil 4.1 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.7$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $\varphi_2(t')$, $\varphi_3^{(k)}(t')$, $\varphi_4^{(k)}(t')$ fonksiyonları ile t' arasındaki bağımlılık.

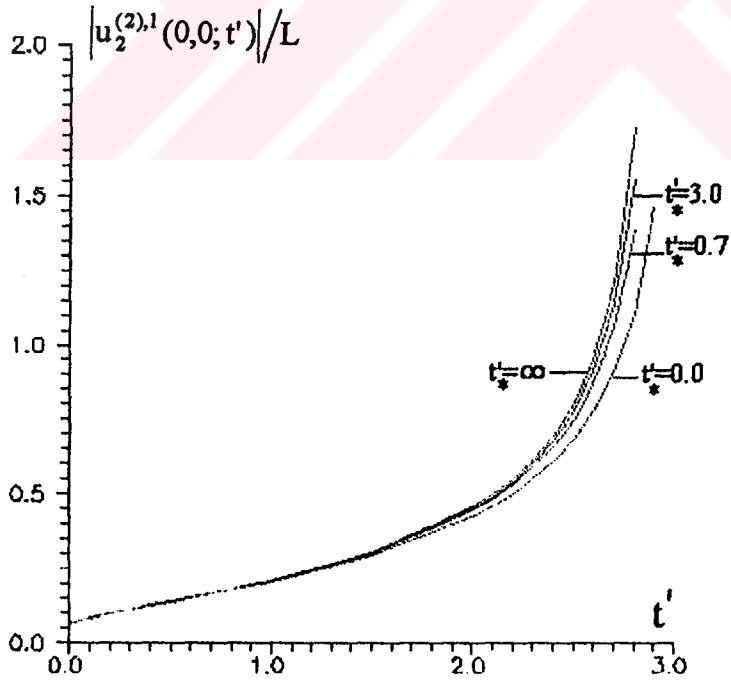


Şekil 4.2 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.7$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $\varphi_2(t')$, $\varphi_3^{(k)}(t')$, $\varphi_4^{(k)}(t')$ fonksiyonları ile t' arasındaki bağımlılık.



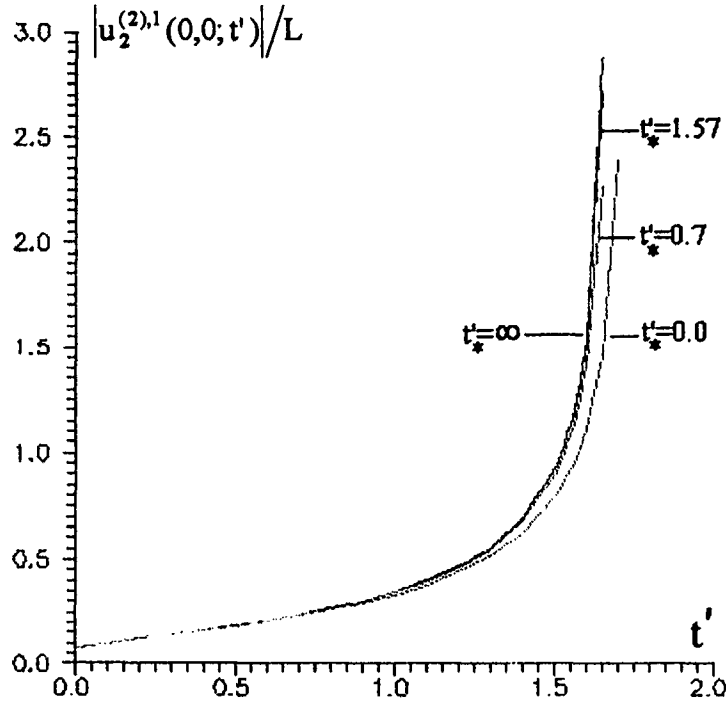


Şekil 4.3 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.18$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

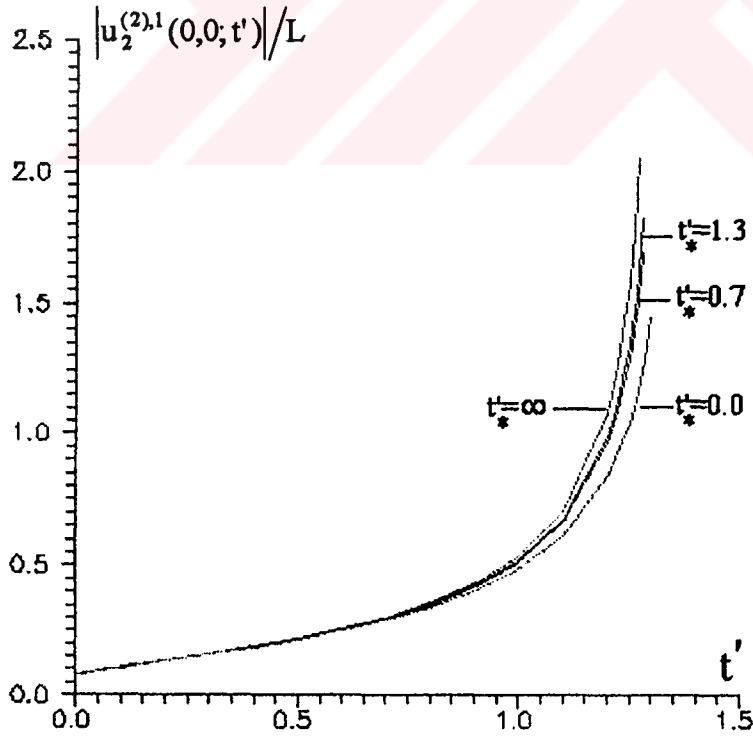


Şekil 4.4 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.20$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

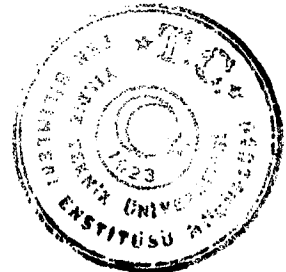


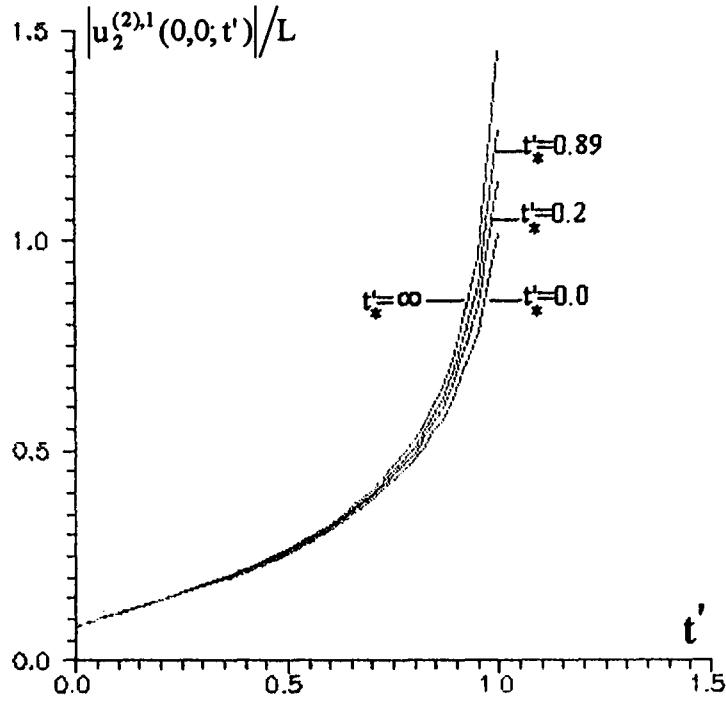


Şekil 4.5 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.22$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

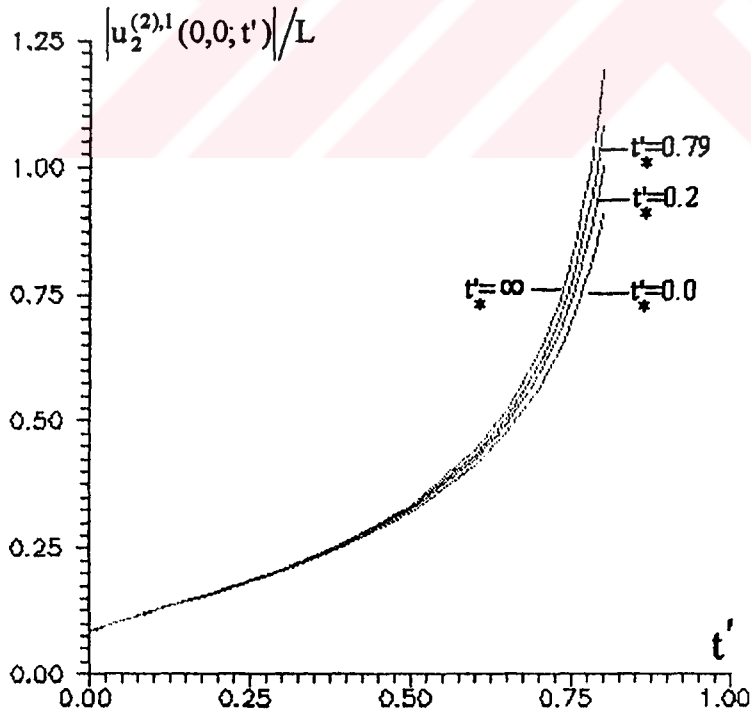


Şekil 4.6 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.23$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

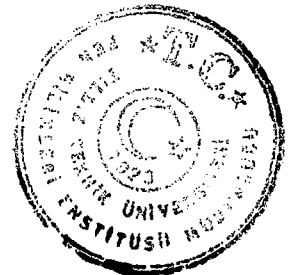


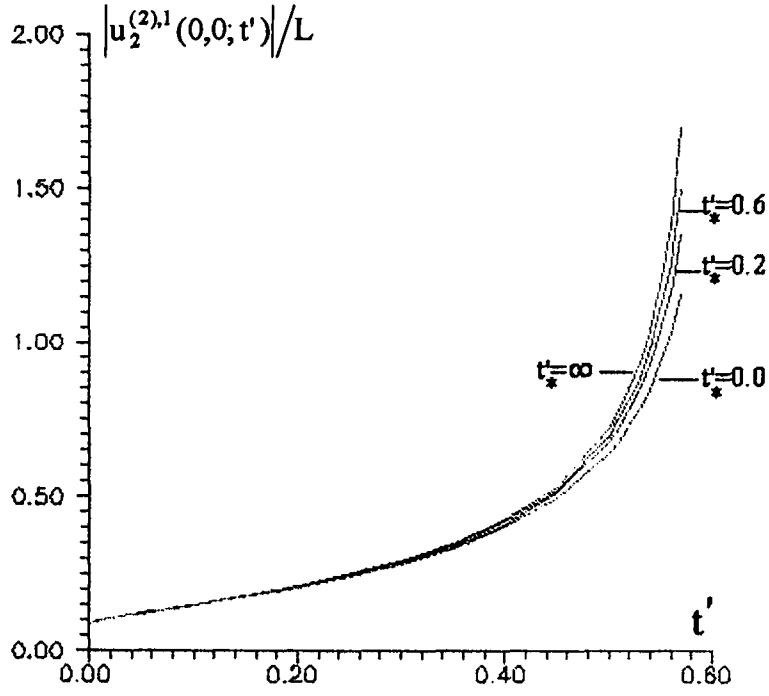


Şekil 4.7 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.24$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

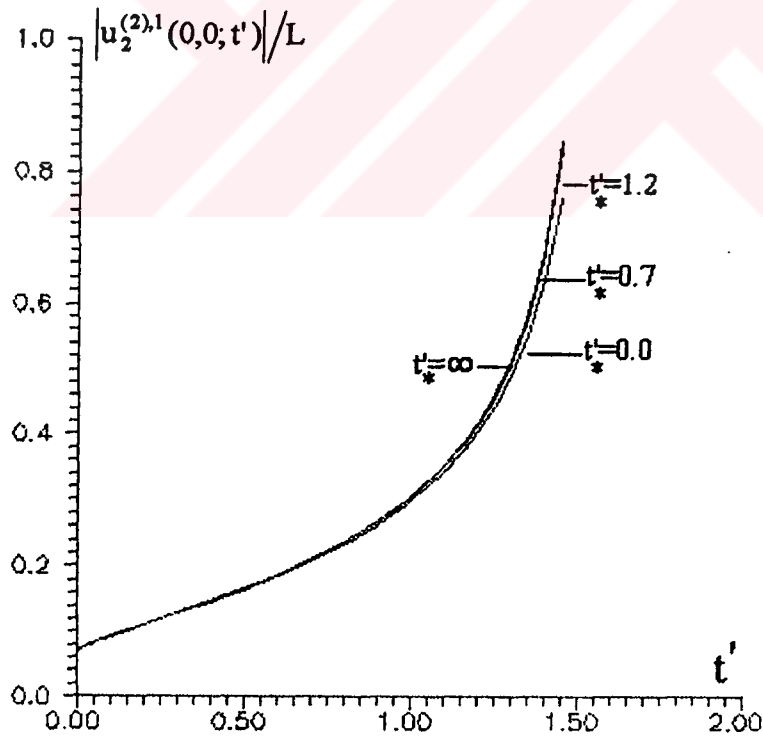


Şekil 4.8 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.25$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.



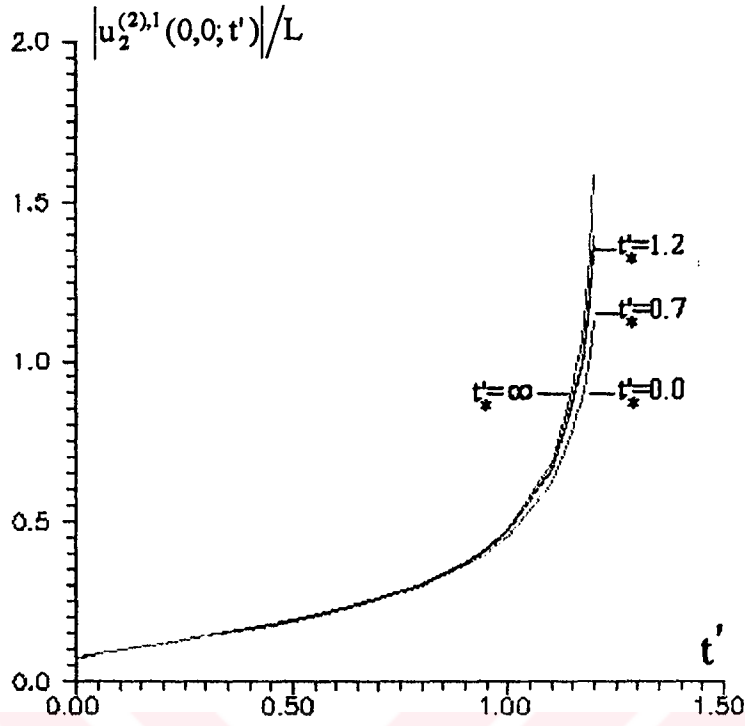


Şekil 4.9 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ ve $p/E_0^{(1)}=0.27$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

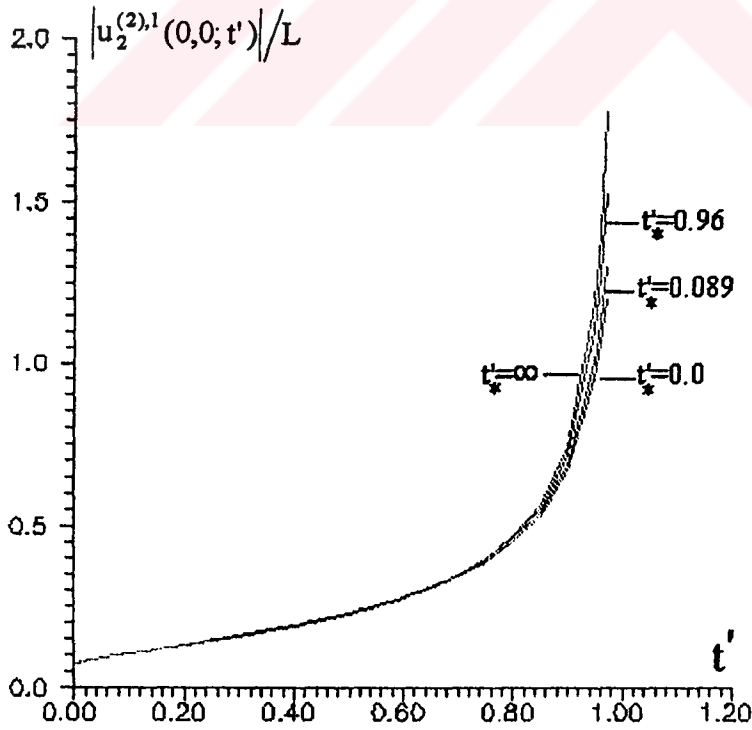


Şekil 4.10 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.22$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

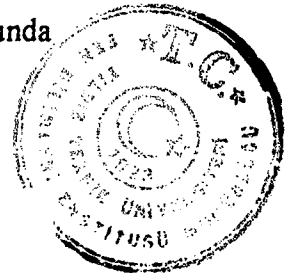


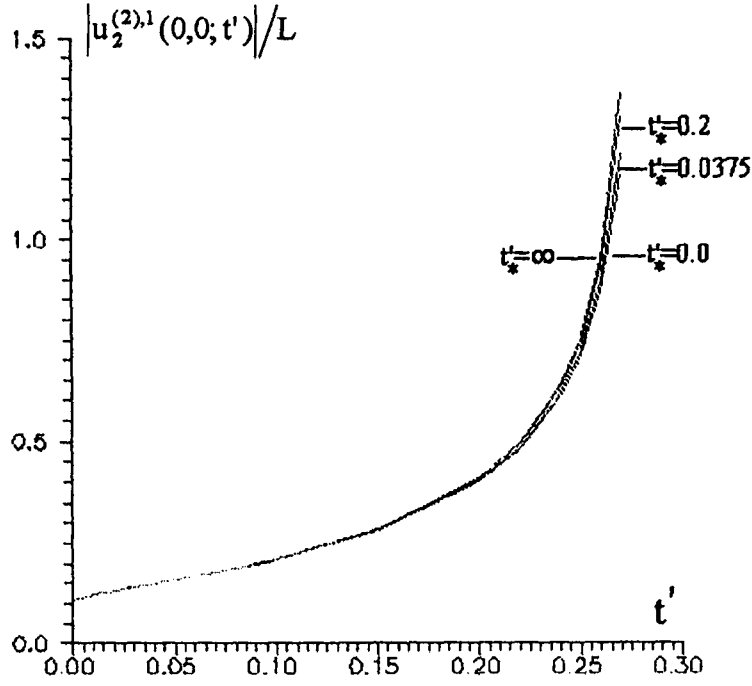


Şekil 4.11 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.23$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

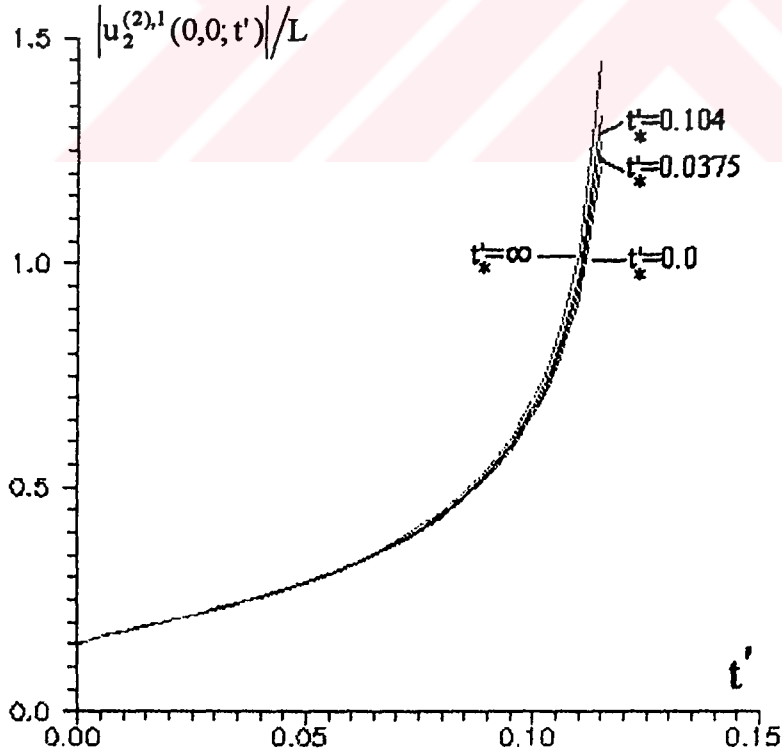


Şekil 4.12 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.24$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.



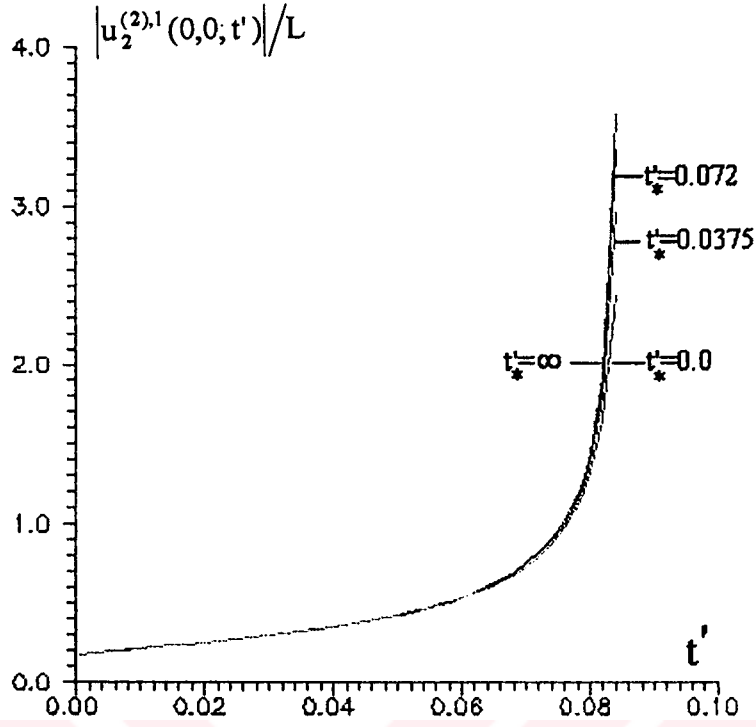


Şekil 4.13 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.31$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

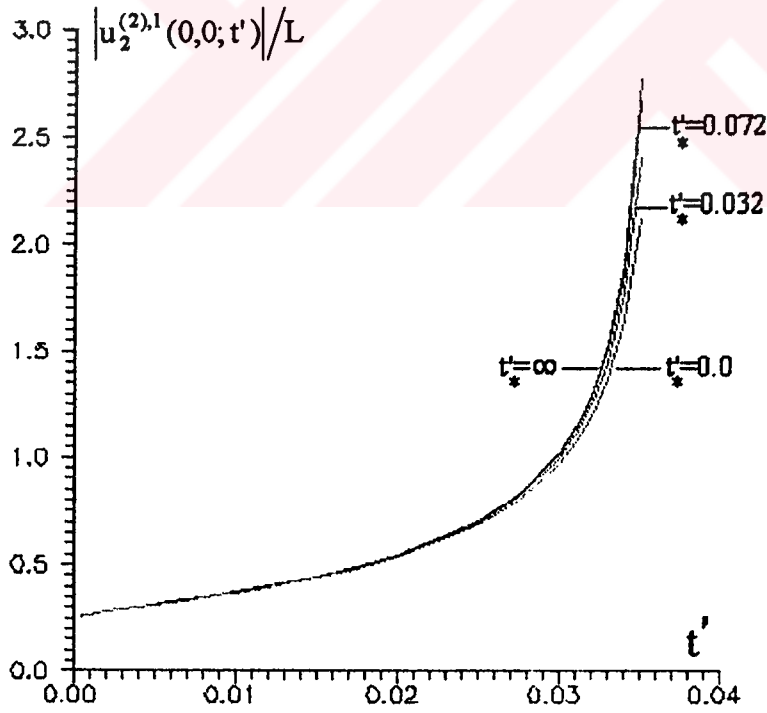


Şekil 4.14 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.36$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

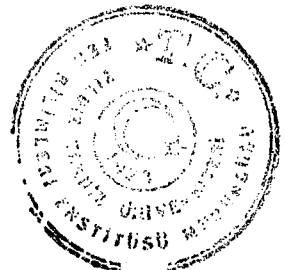


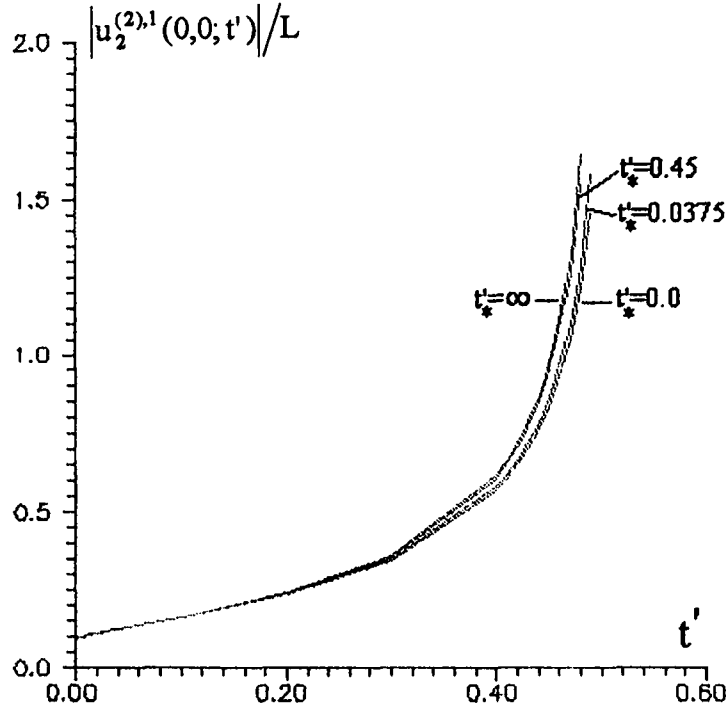


Şekil 4.15 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.38$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

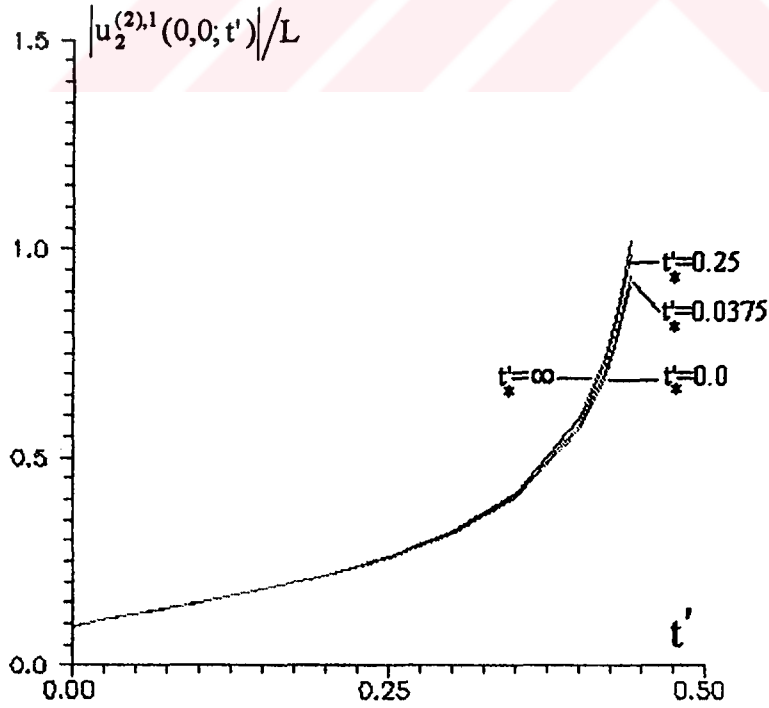


Şekil 4.16 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $p/E_0^{(1)}=0.42$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

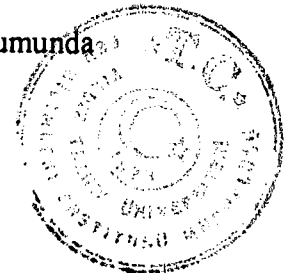


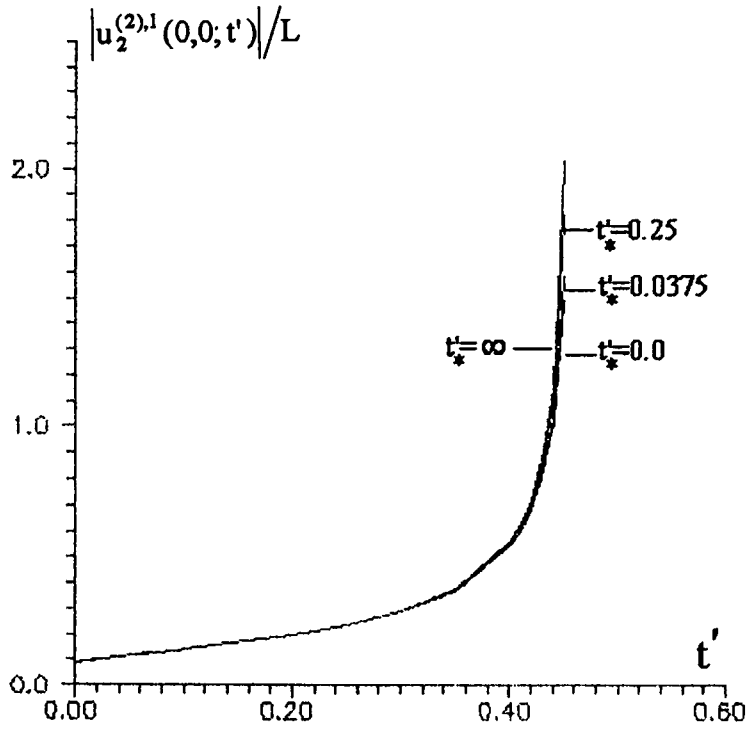


Şekil 4.17 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.28$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

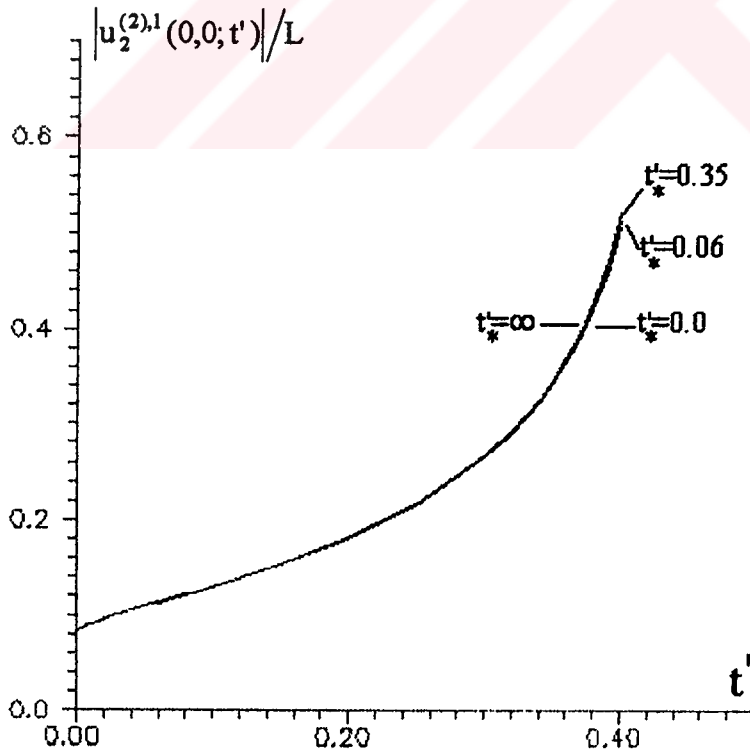


Şekil 4.18 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.28$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.



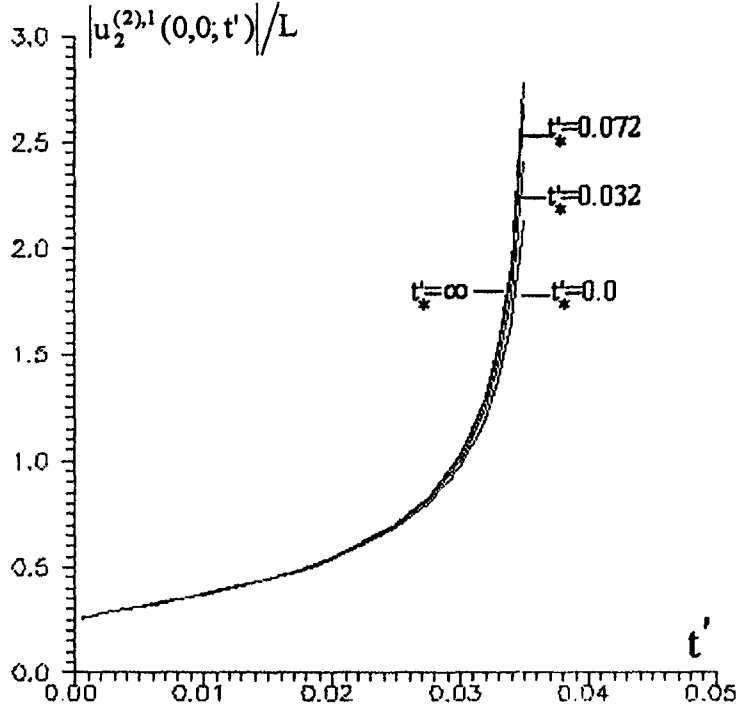


Şekil 4.19 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.28$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=150$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

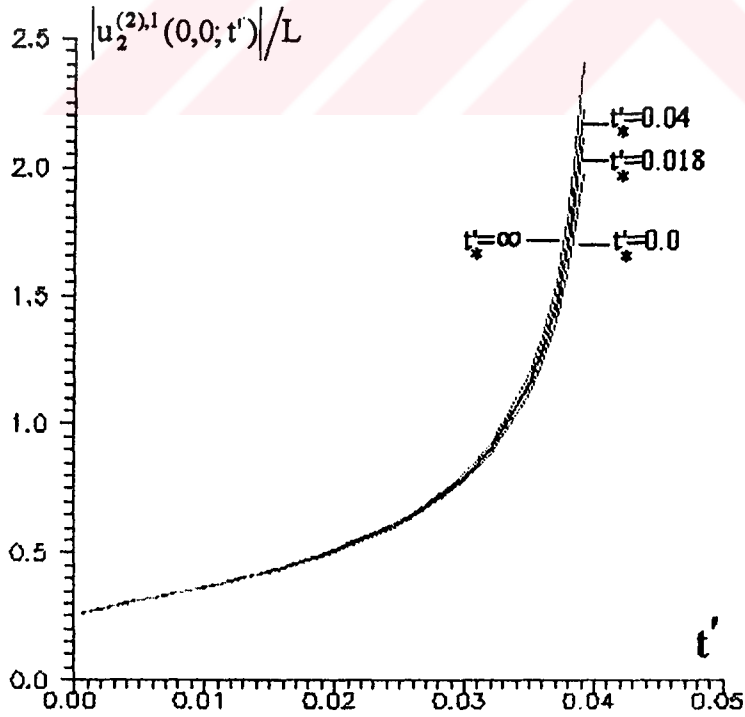


Şekil 4.20 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.28$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $E^{(2)}/E_0^{(1)}=200$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

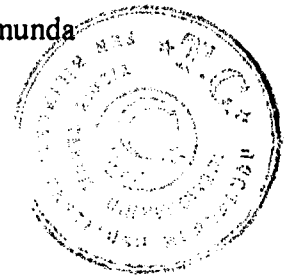


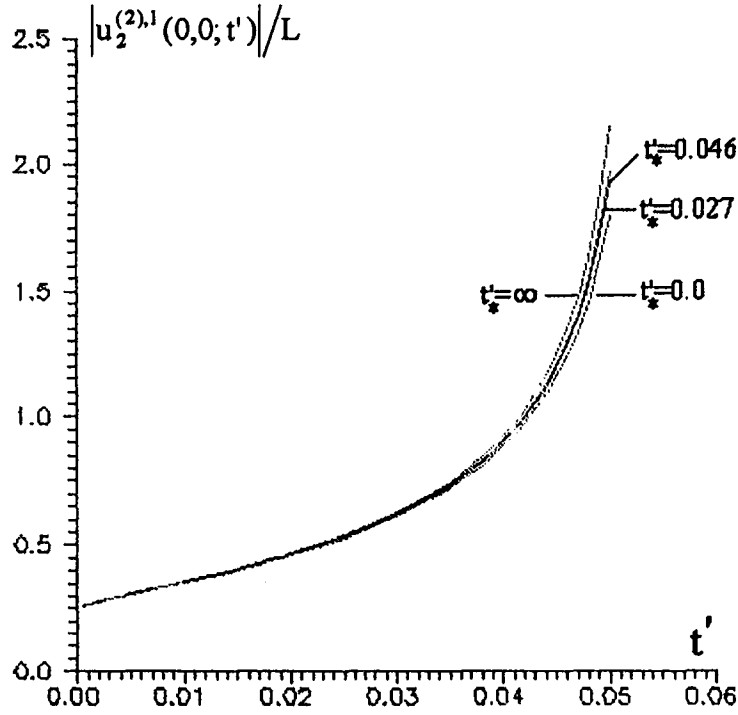


Şekil 4.21 $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=0.5$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

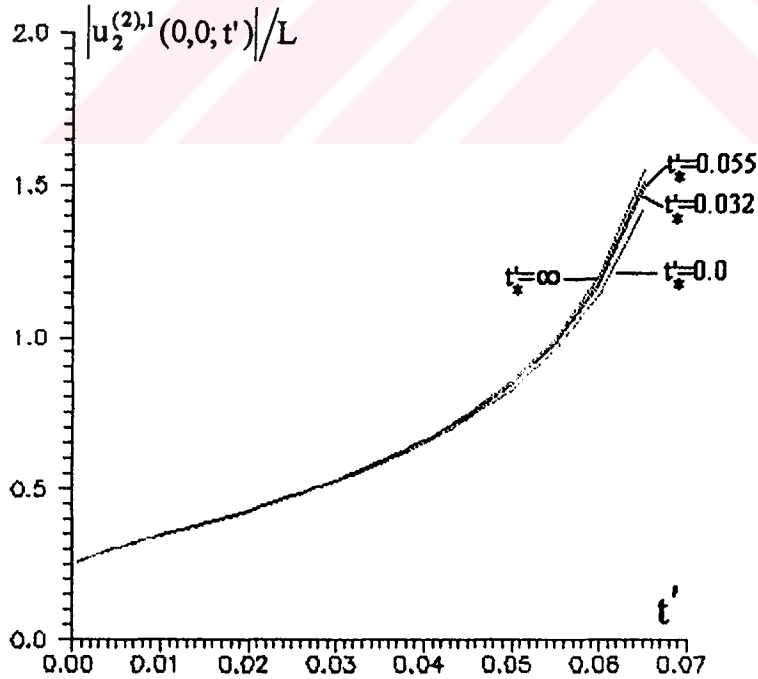


Şekil 4.22 $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=1.0$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

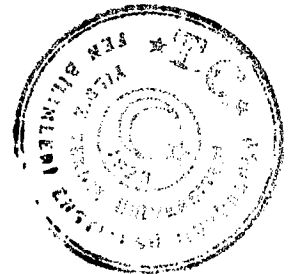


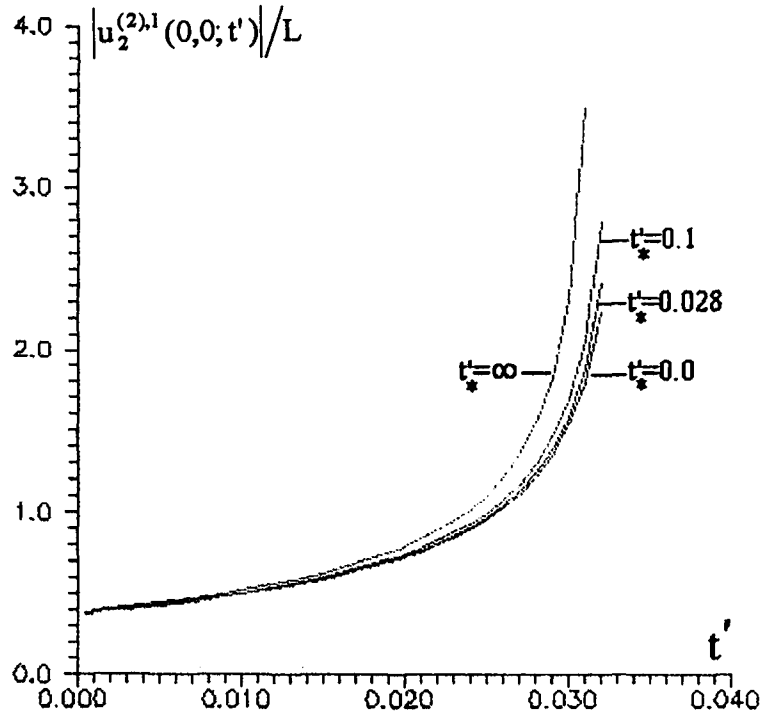


Şekil 4.23 $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=2.0$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

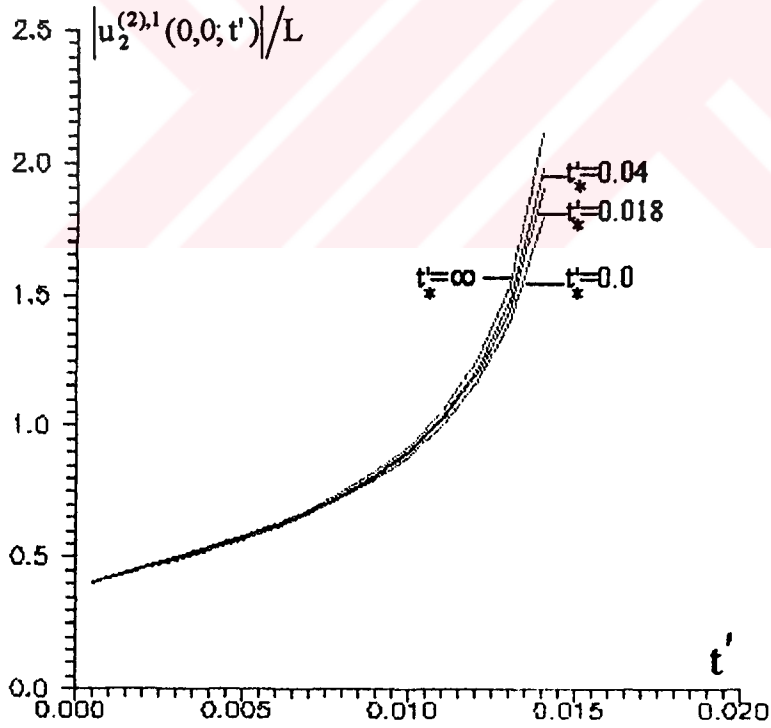


Şekil 4.24 $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$ ve $\omega=3.0$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

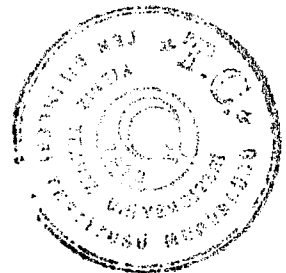


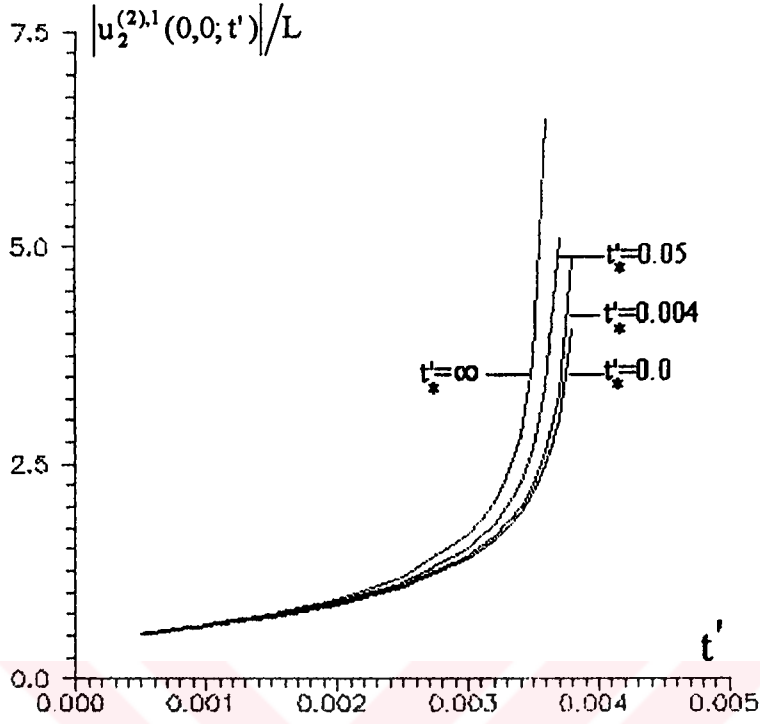


Şekil 4.27 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.1$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

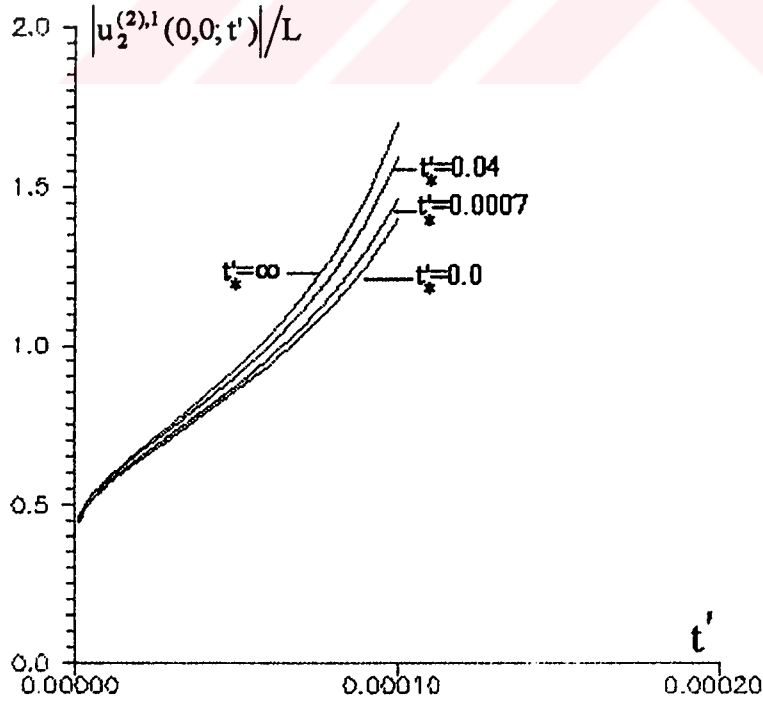


Şekil 4.28 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.3$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.



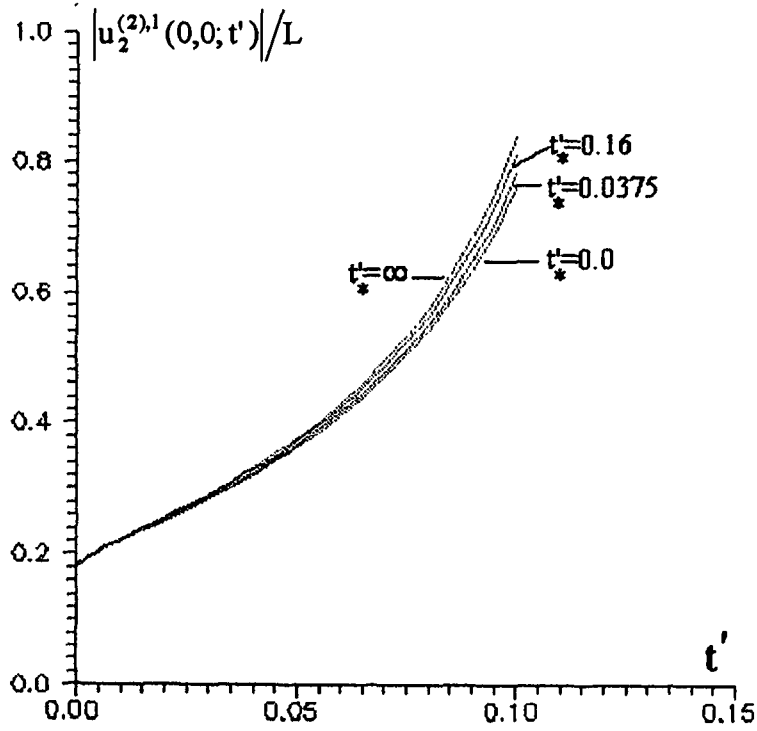


Şekil 4.29 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.5$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

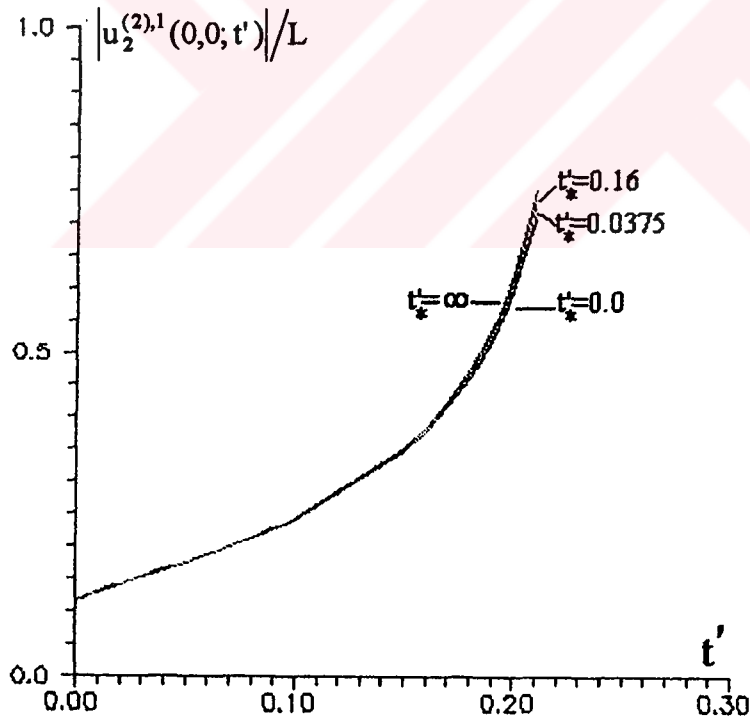


Şekil 4.30 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$ ve $\alpha=-0.7$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

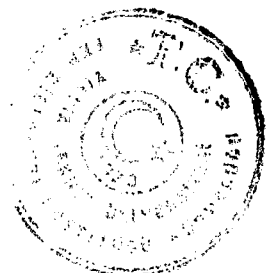


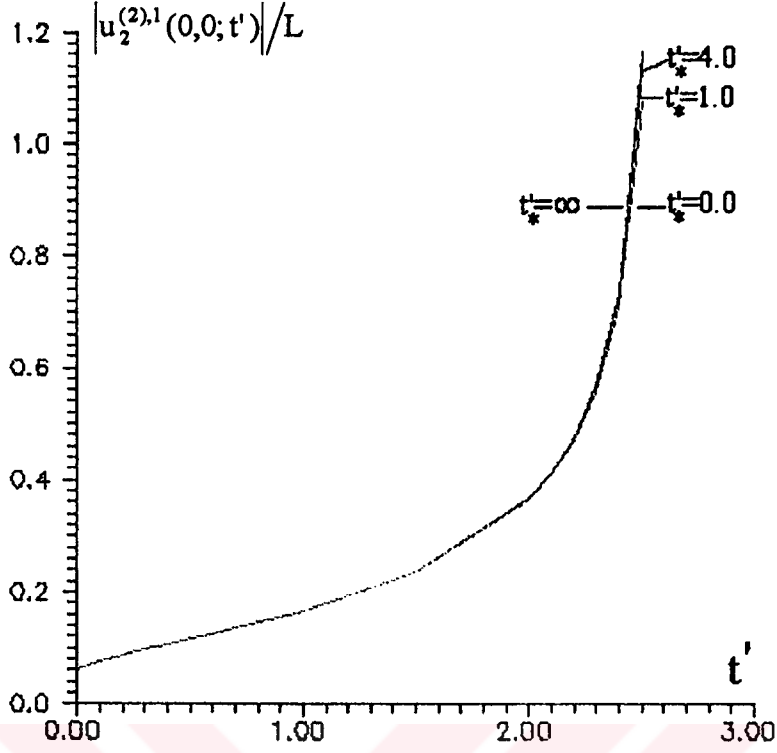


Şekil 4.31 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

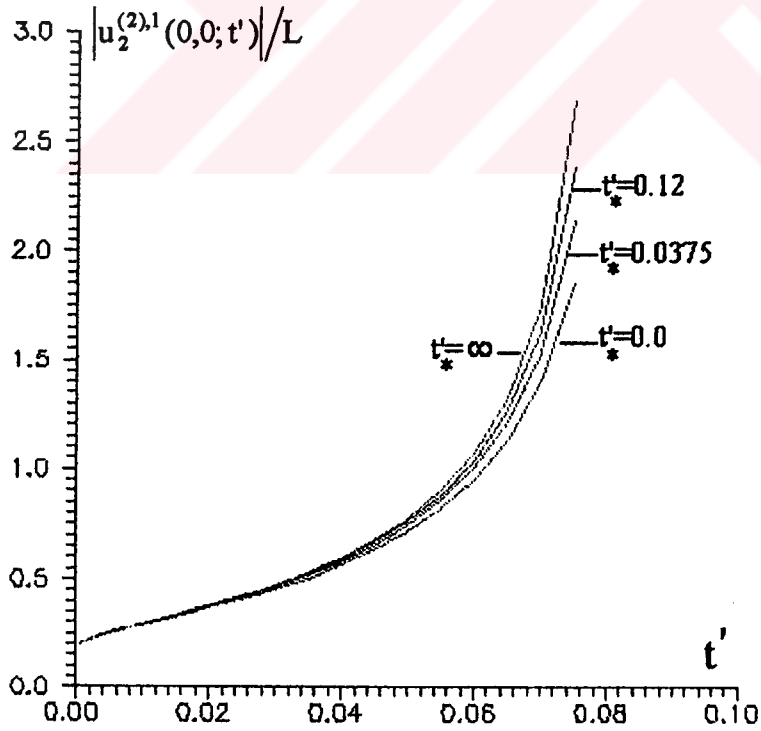


Şekil 4.32 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

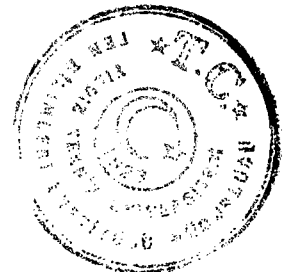


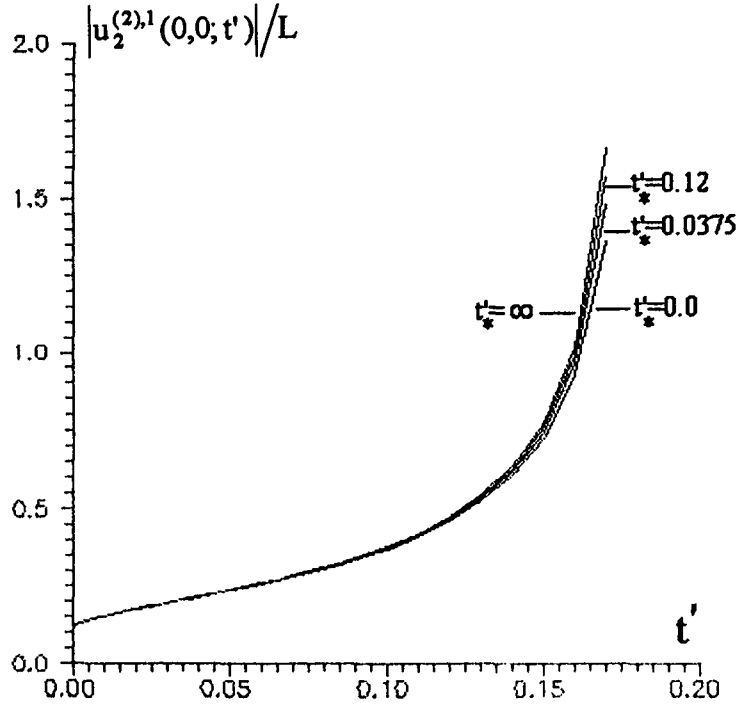


Şekil 4.33 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.3$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

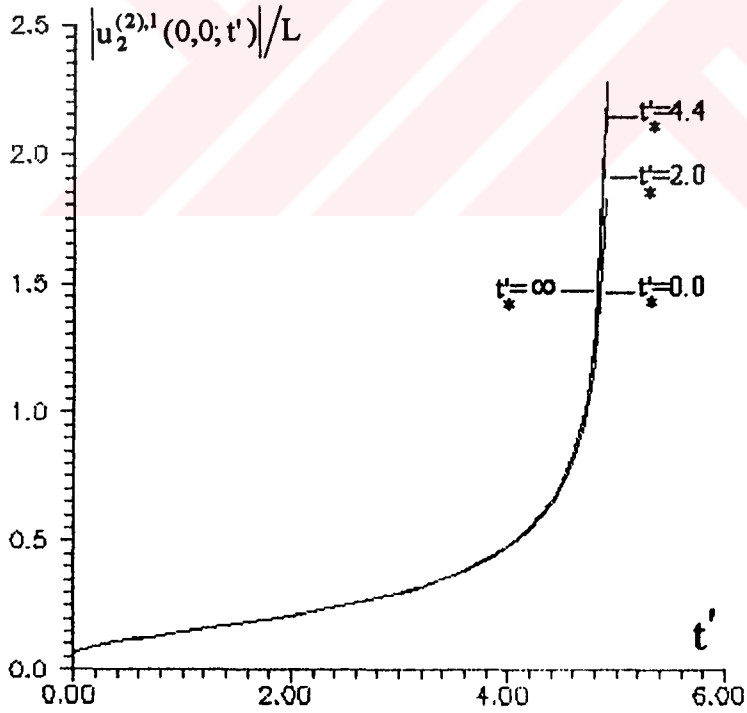


Şekil 4.34 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.5$ ve $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

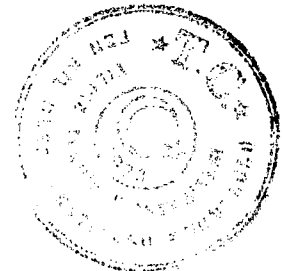


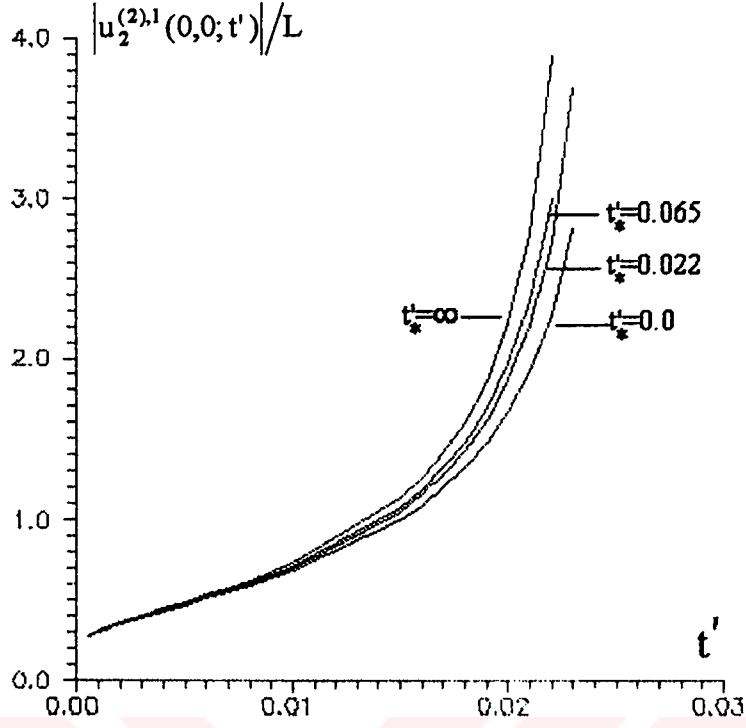


Şekil 4.35 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.5$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

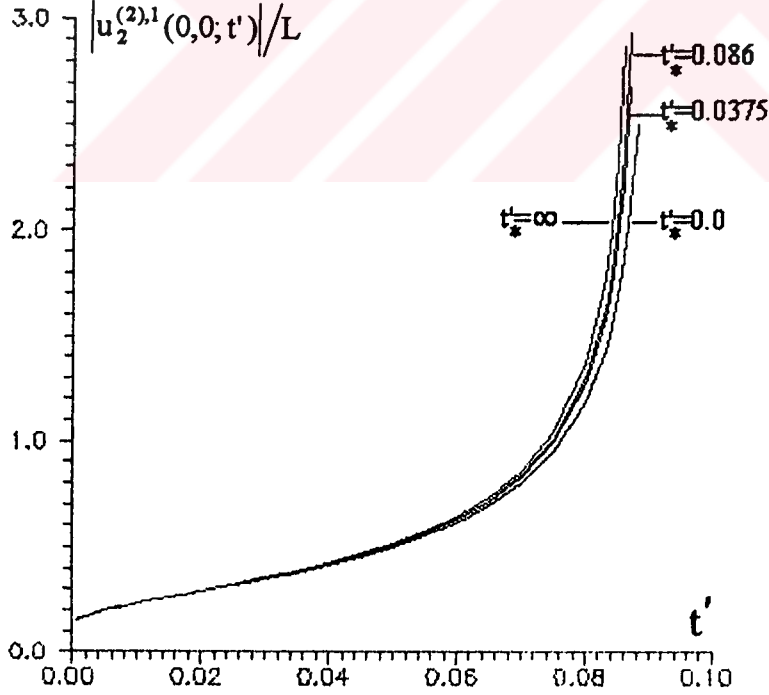


Şekil 4.36 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.5$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

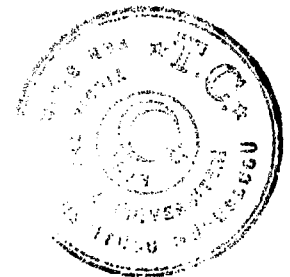


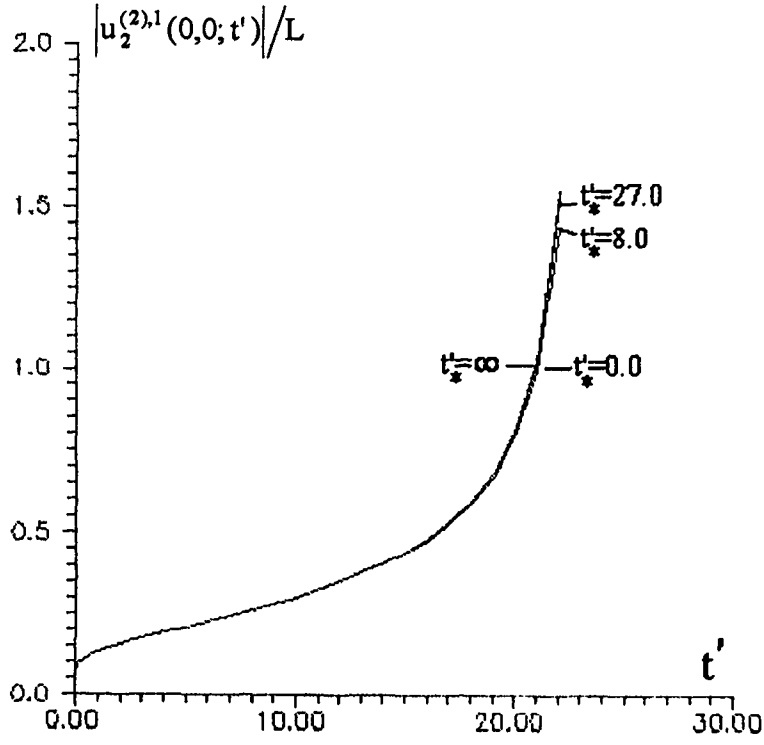


Şekil 4.37 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.7$ ve $\eta^{(2)}=0.1$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.

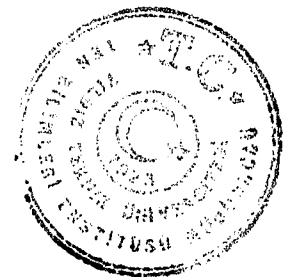


Şekil 4.38 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.7$ ve $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.





Şekil 4.39 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$, $\alpha=-0.7$ ve $\eta^{(2)}=0.5$ durumunda $|u_2^{(2),1}(0,0;t')|/L$ ile t' arasındaki bağımlılık.



Tablo 4.1 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=50$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $p/E_0^{(1)}$ değişiminin t_{cr} değerlerine etkisi.

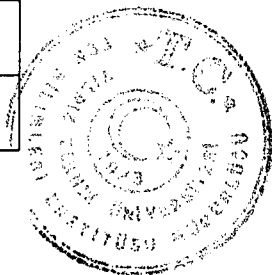
	$p/E_0^{(1)}$						
	0.18	0.20	0.22	0.23	0.24	0.25	0.27
$t_{cr.0}$	6.599	2.900	1.700	1.299	1.000	0.800	0.569
$t_{cr.\infty}$	6.300	2.799	1.649	1.269	1.000	0.800	0.569

Tablo 4.2 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $p/E_0^{(1)}$ değişiminin t_{cr} değerlerine etkisi.

	$p/E_0^{(1)}$						
	0.22	0.23	0.24	0.31	0.36	0.38	0.42
$t_{cr.0}$	1.450	1.200	0.970	0.270	0.115	8.39×10^{-2}	3.50×10^{-2}
$t_{cr.\infty}$	1.450	1.200	0.970	0.270	0.115	8.39×10^{-2}	3.50×10^{-2}

Tablo 4.3 $\omega=0.5$, $\alpha=-0.3$, $p/E_0^{(1)}=0.28$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ değişiminin t_{cr} değerlerine etkisi.

	$E^{(2)}/E_0^{(1)}$			
	50	100	150	200
$t_{cr.0}$	0.490	0.469	0.449	0.400
$t_{cr.\infty}$	0.479	0.465	0.449	0.400



Tablo 4.4 $\alpha=-0.3$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.42$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda ω değişiminin t_{cr} değerlerine etkisi.

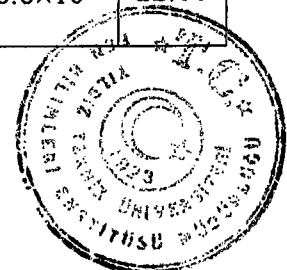
	ω					
	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	6.0
$t_{cr.0}$	3.50×10^{-2}	3.90×10^{-2}	5.00×10^{-2}	6.49×10^{-2}	0.189	0.649
$t_{cr.\infty}$	3.50×10^{-2}	3.90×10^{-2}	4.89×10^{-2}	6.49×10^{-2}	0.189	0.649

Tablo 4.5 $\omega=1$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.45$, $\eta^{(2)}=0.2$ durumunda α değişiminin t_{cr} değerlerine etkisi.

	α			
	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1
$t_{cr.0}$	9.999×10^{-5}	3.800×10^{-3}	1.400×10^{-2}	3.200×10^{-2}
$t_{cr.\infty}$	9.999×10^{-5}	3.599×10^{-3}	1.400×10^{-2}	3.099×10^{-2}

Tablo 4.6 $\omega=0.5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)}=100$, $p/E_0^{(1)}=0.32$ durumunda α ve $\eta^{(2)}$ değişiminin t_{cr} değerlerine etkisi.

	$\alpha=-0.3$			$\alpha=-0.5$			$\alpha=-0.7$		
	$\eta^{(2)}$			$\eta^{(2)}$			$\eta^{(2)}$		
	0.1	0.2	0.5	0.1	0.2	0.5	0.1	0.2	0.5
$t_{cr.0}$	0.10	0.209	2.50	7.5×10^{-2}	0.170	4.90	2.3×10^{-2}	8.8×10^{-2}	22.00
$t_{cr.\infty}$	0.10	0.209	2.50	7.5×10^{-2}	0.170	4.90	2.1×10^{-2}	8.6×10^{-2}	22.00



BÖLÜM V

5. SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRİLMESİ

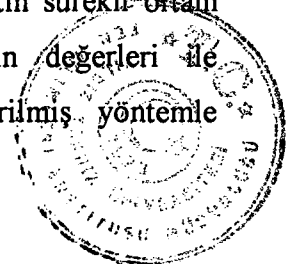
Tezde yapılan incelemelerden elde edilen sonuçları kısaca aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

1. Akbarov vd., (1997) yöntemi tek yönlü elastik ve viskoelastik kompozit ortamların teorik basınç kırılma sınırlarının belirlenmesine uygun olarak geliştirilmiştir.

2. İncelemeler birbirini tekrarlayan ve herbiri izotrop homojen malzemeden elde edilen iki tür levhadan oluşmuş kompozit malzemeler üzerinde yapılmıştır. Bu malzemedeki güçlendirici levhaların başlangıçta (yani yüklemmeden önce) çok küçük yerel eğriselliklere sahip oldukları kabul edilmiştir. Bu kabul ve parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite ve viskoelastisite teorilerinin kesin geometrik non-lineer denklemlerinden yararlanarak incelenen problemlerin matematiksel formülasyonu yapılmıştır.

3. Önce saf elastik problemin incelenmesi ele alınmış ve aranan büyüklükler Akbarov vd., (1997) kaynağında olduğu gibi yerel eğrisellik derecesini gösteren küçük parametreye göre seri şeklinde ifade edilmiştir. Bu serilerdeki terimler (yaklaşımlar) uygun sınır değer problemleri incelenerek belirlenir. Saf elastik problem örneği esasında teorik basınç sınırının belirlenmesi için sıfıncı ve birinci yaklaşımlarının incelenmesinde elde edilen sonuçların yeterli oldukları ispat edilmiştir. Bu incelemelerde kırılma kriteri malzeme yapısı stabilitesinin kaybı biçiminde ele alınmış, stabilite kaybının ise ilkin küçük yerel eğrisellik genliklerinin büyüyerek sonsuza yaklaşması halinde olduğu kabul edilmiştir. Yerel eğrisellik genliklerinin sonsuza yaklaşması haline karşılık gelen dış basınç kuvvetinin değerine ise *basınç kırılma kuvveti* denmiştir.

4. Yukarıda adı geçen birinci yaklaşıma ait sınır-değer probleminin incelenmesi üstel Fourier dönüşümü yardımı ile yapılmış ve sayısal sonuçların elde edilmesi için bilgisayarlar kullanılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlardan basınç kırılma kuvvetinin malzeme yapısındaki yerel eğrisellik formundan ve malzeme yapısının geometrisini belirten parametreden (yani $\chi = H^{(2)}/L$ den) bağımsız olmadığı gösterilmiştir. Bundan sonra tezde geliştirilmiş yöntemle elde edilen basınç kırılma kuvvetlerinin, ideal yapıya sahip aynı kompozitin sürekli ortam yaklaşımı çerçevesinde elde edilmiş teorik basınç kırılma limitlerinin değerleri ile karşılaştırılması yapılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda tezde geliştirilmiş yöntemle



yapısında yerel eğrisellik olan tek yönlü kompozit malzeme için elde edilen basınç kırılma kuvvetlerinin ideal yapıya sahip aynı kompozitin teorik basınç kırılma limiti olması ispat edilmiştir. Böylece, tek yönlü kompozit malzemelerin yapısında yerel eğriselliğin olması bu malzemeye karşı gelen ideal yapıya sahip kompozit malzemenin teorik basınç kırılma limitinin belirlenmesi için bir model olarak kabul edilebileceği ispatlanmıştır.

5. Yukarıdaki sonuçlardan yararlanarak, polimer bileşenleri olan tek yönlü kompozitlerin yani viskoelastik kompozitlerin, şimdiye kadar belirlenememiş ve belirlenmesi süreklilik teorisi çerçevesinde imkansız görünen, teorik basınç kırılma sürelerinin (TBKS) bulunması için bir yaklaşım geliştirilmiştir.

6. Tezde viskoelastik kompozitler için geliştirilmiş yöntemi uygulayarak ve ele alınan örnek problem üzerine sayısal araştırmalar yapılarak birçok durumlarda ilk kez TBKS' nin değerleri yüksek bir hassasiyetle belirlenmiştir.

7. TBKS' lere ait sayısal sonuçların bulunması, çözülmesi gereken quasistatik sınır değer problemleri üstel Fourier ve Laplace dönüşümlerini birlikte uygulayarak yapılmıştır ve invers Laplace dönüşümleri Schapery yöntemi yardımı ile elde edilmiştir. Üstel Fourier dönüşümlerini ise sayısal olarak hesaplamak için belli algoritmalar kullanılmıştır.

8. TBKS' ler için elde edilmiş sayısal sonuçlardan yararlanarak viskozite ve yapı parametrelerinin TBKS' lere etkisi incelenmiştir.

9. TBKS' lere ait elde edilen sayısal sonuçların geçerliliği gösterilmiş ve fiziksel açıdan yorumlanması yapılmıştır.

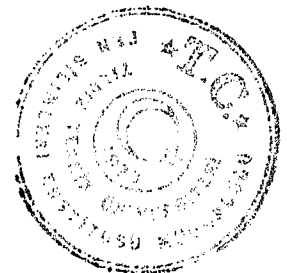
Elde edilen sonuçların değerlendirilmesinden aşağıdakileri söyleyebiliriz:

I. İlk kez tek yönlü viskoelastik kompozit malzemelerin teorik basınç kırılma sürelerinin belirlenmesi (TBKS) için parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde viskoelastisite teorisinin kesin geometrik non-lineer denklemleri kullanılarak bir yöntem geliştirilmiştir.

II. Yukarıdaki yöntemi uygulayarak Rabotnov operatörleri ile belirlenen viskoelastik malzeme içeren çok katlı viskoelastik kompozit malzemelerin TBKS' i hesaplanmıştır.



III. Elde edilen sayısal sonuçların fiziksel yorumları yapılmış ve bu sonuçların gerçeklere uygun olduğu gösterilmiştir.



KAYNAKLAR

Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioglu, N. (1997), "On The Fracture of The Unidirectional Composites In Compression", Int. J. Engng. Sci., Vol.35, No. 12-13, p.1115-1136.

Akbarov, S.D. (1995), "On The Determination of Nonlinear Mechanical Properties of Composite Materials With Periodically Curved Layers", *Int. J. Solids and Structures*, 32, 3129-3143.

Akbarov, S.D. ve Guz', A.N. (1992), "Statics of Laminated and Fibrous Composites With Curved Structures", Appl. Mech. Rev. (Published by the American Society of Mechanical Engineers) 45, 17-35.

Akbarov, S.D., Guz', A.N., Movsumov, E.A., ve Mustafayev, S.M. (1995), Mechanics of Materials With Curved Structures, Nauk. Dumka, Kiev (in Russian).

Babich Yu, I. ve Guz', A.N. (1992), "Stability of Fibrous Composites", Appl. Mech. Rev. (Published by the American Society of Mechanical Engineers) 45, 61-80.

Bazant, Z.P. (1971), "Correlation Study of Formulation of Incremental Deformation and Stability of Continuous Bodies", Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. Ser. E, 4, 344-358.

Bendler, H.A., Wood, W.A. (1960), "Electron Metallographic Observation on The Formation of Fatigue Cracks" // Acta met.- 8, N6.-P.402-403.

Bilby, B.A., Eshelby, J.D. (1968), "Dislocations and Theory of Fracture" , Fracture, Vol.1., Academic Press, s100-178.

Biot, M.A. (1965), Mechanics of Incremental Deformations, -New York :Willey, 504p.

Biot, M.A. (1934), "Sur la Stabilité de l'Equilibre Elastique. Equations de l'Elasticité d'un Milieu Soumis à Tension Initiale", Ann. Soc. Sci. Sect. B., 54 (1), 91-109.

Biot, M.A. (1939), "Non-linear Theory of Elasticity and The Linearized Case for a Body under Initial Stress", *Philas. Mag. Ser. Z.*, 27, 89-115.

Biot, M.A. (1963a), Interfacial Instability In Finite Elasticity under Initial Stress // Proc. Roy. Soc.A 273.

Biot, M.A. (1963b), "Surface Instability In Finite Anisotropic Elasticity under Initial Stress" // Proc.Roy.Soc. 273, N 1354.

Brezeno, C.B. ve Hencky, H. (1930), "On The General Theory of Elastic Stability", K. Akad.Wet. Amsterdam Proc; 32, 444-456.

Broutman, L.J. ve Krock, R.M. (Eds.) (1967), Modern Composite Materials. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Chamis, C.C. (1978), "Micro Mechanics of The Strength", In: Composite materials, Edts. By Broutman L.J. and Krock R.H., vol.5, Fracture and Fatigue, Edt. by Broutman L.J., Mir, Moscow, pp.106-163 (in Russian).



Cherepanov, G.P. (1983), Fracture Mechanics of Composite Materials, Moscow, Nauka (in Russian).

Christensen, R.M. (1979), Mechanics of Composite Materials, John Wiley and Sons.

Dow, N.F., Gruntfest, I.J. (June 1960), "Determination of Most Needed Potentially Possible Improvements in Materials for Ballistic and Space Vehicles" // General Electric Co., Space Sci. Lab., TISR 60 SD 389.

Ekobori, T. (1978), Physical Foundations of Strength and Fracture of Materials, K.: Nauk. Dumka, 352p. (in Russian).

Eringen, A.C. (1962), Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New York.

Eshelby, I.D. (1962), "The Force on The Elastic Singularity" // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A.-1951.-244.-P.87.

Finkel, V.M. (1970), Physics of Brittle Fracture, M.: Metallurgiya. 376p.

Fracture of Composite Materials. (1982), Nijhoff, 488p.

Gerard, F. ve Gilbert, A. (1959), "Methods of Critical Deformation for Buckling of Plates and Shells at Creep", Mekhanika 2, 113-125 (in Russian).

Green, A.E. ve Adkins, J.E. (1960), Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics, Oxford at the Clarendon Press.

Greszczuk, L.B. (1974), "Microbuckling of Lamina-reinforced Composites" // Composite Materials: Testing and Design (3rd Conf.) ASTM STP N 546.- Philadelphia (Pa.), P. 5-29.

Greszczuk, L.B. (1975), "Fracture of Composite Reinforced by Circular Fibers from Loss of Stability of Fibers", J. AIAA 13(10), 67-75.

Griffith, A.A. (1920), "The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids" // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 211, N 2.-P. 163-198.

Guz', A.N. (1969a), "On The Construction of The Theory of Stability of The Unidirectional Fibrous Composite Materials", Prikl. Mech.-5, N 2- p.62-70 (in Russian).

Guz', A.N. (1969b), "On Determination of The Theoretical Strength Limit in Compression of Reinforced Materials", Dokl. Akad. Nauk USSR Ser A3, 236-238 (in Russian).

Guz', A.N. (1971), Stability of Three-Dimensional Deformable Body, Naukova Dumka, Kiev. (in Russian).

Guz', A.N. (1972), "Three-Dimensional Theory of Elastic Stability under Finite Precritical Deformation", Prikladnaya Mekhanika, 8(12), 15-44 (in Russian).

Guz', A.N. (1973), Stability of Elastic Body under Finite Deformations, Naukova Dumka, Kiev. (in Russian)



- Guz', A.N. (1982), "Fracture of Unidirectional Composite Materials under The Axial Compression" // Fracture of Composite Materials.- Nijhoff.-P. 173-182.
- Guz', A.N. (1984), "Foundations of Mechanics of Brittle Fracture of Materials With Initial Stresses" // Proc. Sixth Int. Conf. On fracture, India, P.1223-1230.
- Guz', A.N. (1985), "On The Three Dimensional Theory of Stability", Internal Instability. Prikl. Mech. M. N 11, P. 3-17.
- Guz', A.N. (1990), Mechanics of Compressive Failure of Composite Materials, Nauk. Dumka., Kiev (in Russian).
- Guz', A.N. ve Babich, I.Yu. (1979), "Three Dimensional Stability Problems of Composite Materials and Composite Construction Components", Rozp: Inz., 27(4), 613-631.
- Guz', A.N. ve Chekhov, VIK.N. (1992), "Stability of Laminated Composites", Appl. Mech. Rev. (published by the American Society of Mechanical Engineers) 45, 81-101.
- Guz', A.N. ve Cherevko, M.A. (1985), "Fracture Mechanics of Unidirectional Fibrous Composites with Metal Matrix Under Compression" // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 3 , N2.-P. 151-155.
- Guz', A.N., Babich, I.U. (1979), "Three Dimensional Stability Problems of Composite Materials and Composite Construction Components" // Rozpr. Inz. 27, N4.-S. 613-631.
- Guz', A.N. (1986), Foundations of Three- dimensional Theory of Deformably Bodies Stability, Vistaya Shcola, Kiev.(in Russian)
- Hayashi, T. (1966), "On The Shear Instability of Structures Caused by Compressive Loads" // Proc. 16th Jap. Congr. Appl. Mech. P. 149-157.
- Hayashi, T. (1970), "On The Shear Instability of Structures Caused by Compressive Loads" // AIAA Paper. N 65-770.Nov.
- Hermann, L.R., Mason, W.E., Chan, S.T.K. (1967), "Response of Reinforcing Wires to Compressive States of Stress" // J. Composite Materials. P.212-226.
- Irwin, G.R. (1957), "Analysis of Stresses and Strains Near and A Crack Traversing A Plate" // J. Appl. Mech. 24, N 3.-P. 361-364.
- Irwin, G.R. (1958), "Fracture" // Handbuch der Physik.- Berlin, Bd 6.- S.551-590.
- Knott, I.F. (1979), Fundamentals of Fracture Mechanics, -London. Butterworths.: 320p.
- Krylov, V.I. ve Shulgina, L.T. (1966), Handbook on Numerical Integration, Nauka, Moscow (in Russian).
- Lang, A.R. (1958), "Direct Observation of Individual Dislocations by X-ray Diffraction" // J.Appl.Phys. 29, N3.- P.597-598.
- Lekhnitskii, S.G. (1963), Theory of Elasticity of An Anisotropic Elastic Body, Holden Day, San Francisco, CA.



Parton, V.Z. (1992), Fracture Mechanics, From Theory to Practise, Gordon and Breach Science Publisher.

Rabotnov, Yu.N. (1977), Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies, Nauka, Moscow, (in Russian).

Rosen, B.W. (1965), Fiber Composite Materials, Amer. Soc. For Metals, Metals Park, Ohio, p.37.

Sadovsky, M.A., Pu, S.L., Hussain, M.A. (1967), "Buckling of Microfibers" // Jbid. 34, N 4.- P. 295-302.

Schapery, R.A. (1966), "Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis", Proc US Natl Cong Appl ASME 4, 1075-1085.

Schuerch, H. (1964), Boron Filament Composite Materials for Space Structures, Prt 1: Compressive Strength of Boron Metal Composite / Astro Research Corp. Santa Barbara (Ca), Rep. N ARC-R-168.

Schuerch, H. (1966), "Prediction of Compressive Strength in Uniaxial Boron Fibermetal Matrix Composite Materials" //AIAA Journal.- 4, N 1.-P. 102-106.

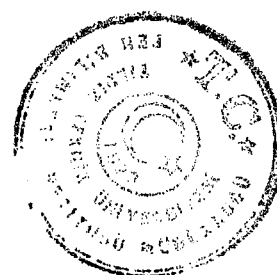
Schapery, R.A. (1978), The Viscoelastic Behaviour of Viscoelastic Composite Materials, in. Composite Materials vol.2; Mechanics of Composite Materials. Eds. L. Broutman and R. Krock, p. 102-195 (in Russian).

Southwell, R.V. (1913), "On The General Theory of Elastic Stability", Philos. Trans. Soc. London. Ser.A., 213, 187-244.

Tarnopolsky, Yu M. ve Rose, A.V. (1969), Special Features of Design of Parts Fabricated from Reinforced Plastics, Zinatne, Riga, 274 pp (in Russian).

Wen-Yi Chung, Testa, R.B. (1969-Jan), "The Elastic Stability of Fibers in A Compressive Plate" // J. Composite Materials. P. 149-157.

Williams, J.G. (1984), Fracture Mechanics of Polymers, -New York: Wiley, 320p.



EKLER

Ek 1. Schapery yöntemi

Tezde ele alınan örnek quasistatik lineer problemler için Schapery yöntemini açıklayalım. 4. Bölümün 4.2 kısmında incelenen ve birinci yaklaşıma ait (4.5), (4.6) ve (3.23) denklemlerinde $E^{(1)}$ ve $\nu^{(1)}$ operatörleri yerine (4.16) ile belirlenen $E_{\infty}^{(1)}$ ve $\nu_{\infty}^{(1)}$ sabitleri olduğunu farzedelim. Bu durumda (4.5), (4.6) ve (3.23) problemi zamandan bağımsız bir hale getirilmiş olduğunu ve onun çözümünü (örneğin $u_2^{(2),1}$ için) $u_{2\infty}^{(2),1}$ la gösterelim. (4.5), (4.6) ve (3.23) probleminin (4.16) operatörleri ile $u_2^{(2),1}$ için olan çözümünü

$$u_2^{(2),1}(t) = \delta u_2^{(2),1}(t) + u_{2\infty}^{(2),1} \quad (E.1)$$

şeklinde ifade edelim. Yukarıdaki kabullerden ve (E.1)' den,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta u_2^{(2),1}(t) = 0 \quad (E.2)$$

olduğu açıktır.

(E.1)' deki $u_{2\infty}^{(2),1}$ nin elde edilmesi (4.5), (4.6), (3.23), (4.16)' larla verilmiş saf elastik bir problemin 3. Bölümde gösterilen bir yöntemle bulunabileceği açıktır.

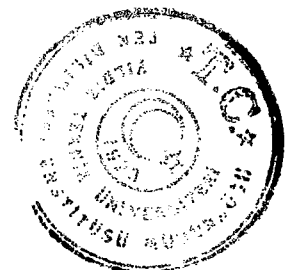
Şimdi (E.1)' e (4.3) Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\overline{u_{2L}^{(2),1}}(\lambda) = \bar{\delta} \overline{u_{2L}^{(2),1}}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} u_{2\infty}^{(2),1} \quad (E.3)$$

veya

$$\lambda \overline{u_{2L}^{(2),1}}(\lambda) = \lambda \bar{\delta} \overline{u_{2L}^{(2),1}}(\lambda) + u_{2\infty}^{(2),1} \quad (E.4)$$

yazabiliriz.



(E.2)' e göre

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \overline{\delta u_{2L}^{(2),1}}(\lambda) = 0 \quad (E.5)$$

oluyor ve (E.5), (E.1)' den

$$u_{2\infty}^{(2),1} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \overline{u_{2L}^{(2),1}}(\lambda) \quad (E.6)$$

yazabiliyoruz.

Yukarıdaki bazı açıklamalardan sonra Schapery yöntemini ele alalım. Öncelikle belirtelim ki, bu yöntem

$$\bar{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt \quad (E.7)$$

şeklinde verilen integral denklemin bazı durumlarda yaklaşık çözümünü elde etmeğe imkan vermektedir. Bu yöntem Laplace dönüşümlerinin sadece sayısal değerleri belli olduğu durumlarda da uygun invers Laplace dönüşümlerinin sayısal değerlerinin bulunmasına uygulanabilir.

(E.7)' de verilen $\bar{f}(\lambda)$ ve aranan $f(t)$ fonksiyonlarının

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) ; \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \bar{f}(\lambda) = f(\infty) ; f(\infty) < \infty \quad (E.8)$$

koşullarını sağladığı ve $f(\infty)$ ' nin değerinin verildiği kabul ediliyor.

Bundan sonra

$$\delta f(t) = f(t) - f(\infty) \quad (E.9)$$

fonksiyonunun (4.3) Laplace dönüşümü olan



$$\overline{\delta f}(\lambda) = f(\lambda) - \frac{1}{\lambda} f(\infty) \quad (\text{E.10})$$

ifadesinin λ' 'nın keyfi λ_i değerlerinde bilindiği kabul edilmektedir. Bu durumda (E.9)' la belirlenen $\delta f(t)$ fonksiyonunun yaklaşık ifadesi

$$\delta f_D(t) = \sum_{i=1}^N S_i e^{-\lambda_i t} \quad (\text{E.11})$$

şeklinde aranmaktadır. Burada λ_i ve δ_i ' ler gerçekte sayılardır. (E.11)' deki bilinmeyen S_i katsayılarının elde edilmesi için en küçük kareler yöntemi

$$E = \int_0^{\infty} [\delta f(t) - \delta f_D(t)]^2 dt \quad (\text{E.12})$$

fonksiyoneline uygulanır ve

$$\frac{\partial E}{\partial S_i} = 0 \quad (\text{E.13})$$

koşulundan

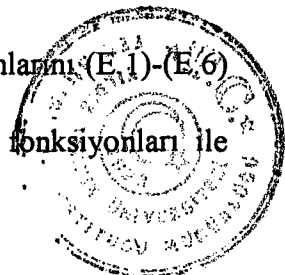
$$\sum_{j=1}^N \frac{S_j}{1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_i}} = \lambda \delta \bar{f} \Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad (\text{E.14})$$

denklemleri elde edilir. (E.14)' den S_j ' ler bulunduktan sonra aranan $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) \approx \delta f_D(t) + f(\infty) \quad (\text{E.15})$$

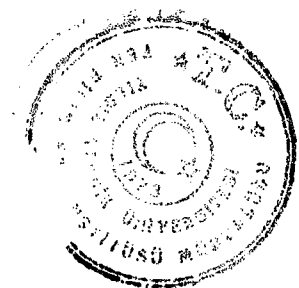
formülünden elde edilir.

Şimdi (E.7) - (E.15) formüllerindeki $f(t)$, $\delta f(t)$, $f(\infty)$, $\bar{f}(\lambda)$, $\delta \bar{f}(\lambda)$ fonksiyonlarını (E.1)-(E.6) formüllerindeki, sırasıyla, $u_2^{(2),1}(t)$, $\delta u_2^{(2),1}(t)$, $u_{2\infty}^{(2),1}$, $\bar{u}_{2L}^{(2),1}(\lambda)$, $\delta \bar{u}_{2L}^{(2),1}(\lambda)$ fonksiyonları ile



yer değiştirirsek, $\bar{u}_{2L}^{(2),1}(\lambda_i)$ değerlerini (4.13)' deki t^* 'ın seçilmiş keyfi bir değerinde (4.9), (3.23), (4.13), (4.17) denklemleri ile verilen problemin çözümünden elde edilir. $\bar{u}_{2L}^{(2),1}(\lambda_i)$ 'lerin bu değerlerini (E.4)' de ve buradan da elde edilen $\lambda_i \bar{\delta u}_{2L}^{(2),1}(\lambda_i)$ 'leri (E.13)' de yerine yazarak S_j bilinmeyenlerini buluruz. Böylece $\delta u_2^{(2),1}(t)$ 'nin yaklaşık $\delta u_{2D}^{(2),1}(t)$ ifadesini, dolayısıyla (E.1)' e göre aranan $u_2^{(2),1}(t)$ fonksiyonunun yaklaşık sayısal değerlerini elde etmiş oluruz.

Yukarıdaki işlemlerin yapılması, (E.13)' deki N sayısını arttıraraktan λ_i 'lere 0 ' dan başlayarak belirli bir adımla değerler vermekle, $u_2^{(2),1}(t)$ için bulunan sayısal sonuçların yeterli derecede yakınsak olması kanıtlanıncaya kadar devam ettirildiğini belirtelim.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	08.03.1967	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1981-1984	İstanbul Çamlıca Kız Lisesi
Lisans	1985-1989	Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Lisans Bölümü
Yüksek Lisans	1989-1992	Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı, Fizik Programı
Doktora	1992-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enst. Fizik Anabilim Dalı, Fizik Programı
Çalıştığı Kurum	1991-Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Fizik Bölümü Araştırma Görevlisi

