

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

93698

**ÇOK BİLEŞENLİ SÜPER ÇÖZÜLEBİLİR
SİSTEMLERİN HAMILTON YAPILARI**

Devrim YAZICI

F.B.E. Fizik Anabilim Dalında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 20 Ekim 2000

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Oya OĞUZ (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Durul ÖREN (YTÜ)

: Prof. Dr. Ömer OĞUZ (BÜ)

: Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU (İTÜ)

: Prof. Dr. Şehsuvar ZEBİTAY (İÜ)

[Handwritten signatures and initials]

İSTANBUL, 2000

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KdV DENKLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ	3
2.1 KdV Denklemnin Korunan Büyüklükleri	4
2.2 Lax Çifti	11
2.3 Zakharov-Shabat Formülasyonu ve AKNS Denklemleri	18
2.4 Soliton Bağ Fonksiyonları ve Düz Uzay Şartı	23
2.5 KdV Denklemnin Bi-Hamilton Yapısı	25
3. LİNEER OLMAYAN SÜPER ÇÖZÜLEBİLİR SİSTEMLER	30
3.1 Süper KdV Denklemi ve Soliton Bağ Fonksiyonları	30
3.2 Süper mKdV Denklemi	35
3.3 Süpersimetrik KdV Denklemi.....	37
3.4 Süper KdV Denklemnin Bi-Hamilton Yapısı	42
4. ÇOK BİLEŞENLİ LİNEER OLMAYAN SÜPER ÇÖZÜLEBİLİR SİSTEMLER	51
4.1 Çok Bileşenli KdV Denklemi	51
4.2 Çok Bileşenli Süper KdV Denklemi	55
4.3 Jacobi Özdeşliği	56
4.4 Çok Bileşenli Süper KdV Denklemnin Bi-Hamilton Yapısı	63
4.5 Çok Bileşenli Süper mKdV Denklemi	65
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	69
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	74

ÖNSÖZ

Doktora çalışmamın başından beri her zaman ve hiç eksilmeyen desteklerini gördüğüm ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer hocalarım Prof.Dr. Oya OĞUZ ve Prof.Dr. Ömer OĞUZ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımı sürdürürken her türlü imkanı sağlayan Y.T.Ü. Fen-Ed. Fak. Dekanı Prof. Dr. Durul Ören'e , Fizik Bölümü Başkanı Prof.Dr. Emel Çingı'ya ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Beni büyük fedakarlıklarla yetiştirip bugünlere kadar gelmemi sağlayan çok sevdiğim annem ve babam Seher ve İbrahim YAZICI' ya içtenlikle teşekkür eder, bu çalışmanın onlar için bir gurur kaynağı olmasını diliyorum.

Son olarak akademik hayatıma başladığım günden itibaren beni hep destekleyen ve yanımda olan sevgili eşim Berrin YAZICI'ya ve ikinci annem ve babam Kezban ve Metin TOLONGÜÇ'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Devrim YAZICI

Temmuz 2000

ÖZET

Bu çalışmada lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin $(1+1)$ boyutta çözülebilirliği incelenmektedir. Bu denklemlerin çözülebilirliğini göstermek için çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemler soliton çözüme sahip KdV (Korteweg-de Vries) denkleminde gösterilmiştir. Daha sonra fermiyonik değişkenler ithal edilerek elde edilen KdV denkleminin süper ve süpersimetrik genelleştirilmeleri incelenmiştir. Süper KdV denkleminin çözülebilir bir sistem olduğu bi-Hamilton yapısı verilerek gösterilebilir. Öte yandan süpersimetrik dönüşümler altında değişmez olan süpersimetrik KdV denklemlerinin bi-Hamilton yapı içermemektedir. Bununla beraber bir parametreye bağlı olan süpersimetrik KdV denklemleri ailesinin, bu parametrenin sadece bir değeri için Lax formülasyonu kullanılarak çözülebilen bir sistem olmaktadır. Son olarak süper KdV denkleminin çok bileşenli süper KdV denklemine genelleştirilmesi incelenmiş ve çok bileşenli süper KdV denkleminin bi-Hamilton sistem olduğu Jacobi özdeşliğinin bazı bağ şartları altında sağlanması ile elde edilmiştir. Çok bileşenli süper Miura dönüşümü ve elde edilen bağ şartları kullanılarak çok bileşenli süper mKdV denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen çok bileşenli denklemlerin $(1+1)$ boyuttaki tek bileşenli limitleri bulunarak bilinen tek bileşenli süper denklemlere indirgendiği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Çözülebilir sistemler, Bi-Hamilton yapı, Süper lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler , Çok bileşenli sistemler

ABSTRACT

In this work the integrability of non-linear partial differential equations are studied in (1+1) dimension. There are various methods to show the integrability of the non-linear partial differential equations. These methods are introduced and described for the integrability of KdV (Korteweg- de Vries) equation, which admits soliton solutions. The super and super symmetric generalisation of KdV equation is investigated by introducing fermionic variables. The integrability of super KdV equations can be given via the bi-Hamiltonian structure. On the other hand the supersymmetric KdV equations, which is invariant under the supersymmetry transformations, do not possess a bi-Hamiltonian structure. However it was shown that one parameter family of the supersymmetric extensions of the KdV equation exists such that the equations admit a Lax representation for only one particular value of this parameter and therefore they are integrable. The generalisation of super KdV equations to multicomponent super KdV equations is studied and the integrability of multicomponent super KdV is shown by verification of Jacobi identity of Hamilton operators which leads to some constraints. Thus the bi-Hamiltonian structure is constructed for the multicomponent super KdV equations. The multicomponent extension of super mKdV equation is obtained by using the multicomponent super Miura transformations and the constraints found before. It is shown that in the one-component limit multicomponent super equations reduce to the known one-component super integrable equations.

Key words: Integrable systems, Bi-Hamiltonian structure, Super non-linear partial differential equations, Multicomponent systems

1.GİRİŞ

Doğadaki bir çok olayın anlaşılması için yapılan modeller lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler içermektedir. Bu nedenle bu denklemlerin çözümünün olup olmaması hem fizik, hem de matematik açısından oldukça önem kazanmaktadır (Das, 1989). Kısmi türevli lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam olarak çözülebilirliğinin gösterilmesi için bir kaç farklı yöntem vardır. Bu yöntemler sırası ile, sonsuz sayıda korunan büyüklüğe sahip olması, bi-Hamilton yapıya sahip olması, Lax çiftinin olması (Lax, 1968), AKNS metodu (Ablowitz vd., 1973a, 1973b) ve soliton bağ fonksiyonu için düz uzay şartıdır. Denklemin bu yöntemlerden birini veya bir kaçını sağlaması denklemin tamamen çözülebilir denklemler olduğunu gösterir.

Literatürde çok iyi bilinen ve (1+1) boyutta tamamen çözülebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerden bir tanesi de KdV (Korteweg-de Vries) denklemdir. Bu denklem yukarıda belirtilen bütün yöntemleri sağladığından fizik ve matematik açısından oldukça önemlidir. Genellikle elde edilen her yeni formülasyonun KdV denklemine uygulanması, bu formülasyon için önemli bir test olmaktadır.

KdV denkleminin soliton çözümlerinin fiziğin bir çok alanında karşımıza çıkması ve bu denklemin tamamen çözülebilir olması önemini korumasına neden olmaktadır (Dodd R.K vd., 1984; Ablowitz ve Clarkson, 1991). Tamamen çözülebilir sistemlerle yapılan çalışmaların bir çoğu KdV denklemi üzerine yapılan çalışmalarla başlamıştır. Fermiyonik değişkenlerin ithali ile KdV denkleminin süper ve süpersimetrik genelleştirilmesi yapılarak tamamen çözülebilir süper sistemler incelenmeye başlanmıştır (Kupershmidt, 1984, 1987; Manin ve Radul, 1985; Gürses ve Oğuz, 1985; Erbay ve Oğuz, 1985; Mathieu, 1988b). Bu sistemlerin bi-Hamilton yapıları elde edilmiştir. Genellikle tamamen çözülebilir sistemler (1+1) boyutta incelenmektedir. Fizik'te karşılaştığımız (3+1) boyuttaki denklemlerde tamamen çözülebilirliğin gösterilmesi güncel problemlerden birisidir. Bir diğer yönde yapılan güncel çalışmalar ise çok bileşenli tamamen çözülebilir sistemlerin elde edilmesidir. Çok bileşenli KdV denklemleri son yıllarda bir çok çalışmanın odağı olmuştur (Svinolupov, 1991; Oğuz, 1995; Gürses ve Karasu, 1996). Bu çalışmada çok bileşenli süper KdV denklemi inşa edilmekte ve özellikleri incelenerek çözülebilirliği gösterilmektedir.

Bu çalışmanın 1.Bölüm'ün de çalışmanın içeriği ve amacı anlatılmıştır. 2.Bölüm'ün de KdV denklemi ayrıntılı olarak ele alınmış ve çözülebilirliği yukarıda belirtilen beş ayrı yöntem ile

incelenmiştir. 3.Bölüm’de süper ve süper simetrik KdV denklemleri ele alınarak, çözülebilirlikleri, aralarında farklılıklar ve benzerlikler ele alınmıştır. Çalışmanın amacını oluşturan 4.Bölüm’de süper KdV denkleminin çok bileşenli süper KdV denklemine genelleştirilmesi incelenmiştir. Elde edilen çok bileşenli süper KdV denkleminin çözülebilir bir sistem olup olmadığı bi-Hamilton yapısı araştırılarak elde edilmiştir. Sonuç olarak Hamilton operatörlerinin Jacobi özdeşliğini hangi şartlar altında sağlandığı gösterilmiştir. Son olarak çok bileşenli süper Miura dönüşümü elde edilerek çok bileşenli süper mKdV denklemi bulunmuştur.



2. KdV DENKLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Fiziğin bir çok dallarında örneğin, lineer olmayan optik, hidrodinamik, katıhal fiziği, plazma fiziği, yüksek enerji fiziği gibi geniş bir alandaki fiziksel olayların incelenmesinde lineer olmayan sistemler karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle son yıllarda lineer olmayan sistemlerin tamamen çözülebilirliği fizikçiler ve matematikçilerin bir çalışma alanını oluşturmaktadır.

Tamamen çözülebilirliği bir kaç farklı yöntem ve yaklaşımla incelemek mümkündür. Bu kısımda literatürde çok iyi bilinen ve tamamen çözülebilen lineer olmayan diferansiyel denklem olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ele alınacaktır. KdV denklemi ilk defa 1895'te D.J. Korteweg ve öğrencisi G. de Vries sıg su dalgalarını incelerlerken elde edilen

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \quad (2.1)$$

şeklinde bir denklemdir (Korteweg ve de Vries, 1895). (1+1) boyuttaki bu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü;

$$u = 3c \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2}(x + ct) \quad (2.2)$$

şeklinde c hızı ile ilerleyen bir dalgayı tanımlamaktadır (Das,1989). Bu tür çözümlere “soliton” çözümler adı verilmektedir. KdV denklemini çözmek için Clifford S. G., John M. Greene, Martin D. Kruskal ve Robert M. Miura (1968) tarafından önerilen formal metod lineer olmayan sistemleri çözmek için temel bir araç ve ters saçılma teorisinin temelini oluşturmuştur.

Bu bölümde KdV denkleminin tamamen çözülebilirlik kriterleri incelenmektedir. Bunlar sırası ile KdV denkleminin sonsuz sayıda korunan büyüklüklere (Hamilton) sahip olması, Lax çifti, AKNS metodu, bi-Hamilton ve soliton bağ fonksiyonu için düz uzay şartı (Zero Curvature) şeklindedir.

Daha önce de belirtildiği gibi KdV denkleminin soliton çözümleri vardır. Soliton çözümlerin olması, bu denklemin sonsuz sayıda korunan büyüklüklere sahip olduğunu ve ard arda gelen iki korunan büyüklüğün Poisson parantezinin sıfır olduğu (involution) gösterilerek, elde edilecektir.

2.1 KdV Denkleminin Korunan Büyüklükleri

$Q[u(x, t)]$, korunan bir büyüklük olmak üzere, genel olarak;

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \{Q[u], H\} = 0 \quad (2.3)$$

eşitliğini sağlamaktadır. Ayrıca,

$$Q[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho[u(x, t)] \quad (2.4)$$

şeklinde yazılarak ve (2.4) denkleminin t 'ye göre türevi alınarak,

$$\frac{dQ[u]}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial \rho[u(x, t)]}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

elde edilir. $J[u]$ akı yoğunluğu olmak üzere (2.5) denklemini süreklilik denklemini olarak;

$$\frac{\partial \rho[u]}{\partial t} + \frac{\partial J[u]}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. (2.6) denklemini göz önüne alınarak, (2.1) denklemini (KdV denklemini)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir. (2.6) ve (2.7) karşılaştırılarak,

$$\rho_0[u] = u \quad (2.8)$$

$$J_0 = - \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

şeklini alır. Ayrıca ,

$$Q_0 = H_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_0[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx u(x, t) \quad (2.9)$$

olduğunu hatırlayarak; H_0 , KdV denklemi için birinci hareket sabiti olmaktadır. Benzer şekilde ikinci hareket sabitini bulmak için KdV denklemi,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.10)$$

şeklinde yazılarak elde edilir. Böylece,

$$\rho_1[u] = \frac{1}{2} u^2 \quad (2.11)$$

$$J_1 = -\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ve ikinci hareket sabiti H_1 ,

$$H_1 = \frac{1}{2} \int dx (u(x, t))^2 \quad (2.12)$$

elde edilir. Withen, Kruskal ve Zabusky üç tane, Miura ve arkadaşları da bunlara ek olarak beş tane daha korunan büyüklük bulmuşlardır (Miura vd., 1968). Bunların dışında kalan büyüklükleri inşa edebilmek için;

$$u(x, t) = v^2(x, t) + i\sqrt{6}v_x(x, t) \quad (2.13)$$

ile verilen Miura dönüşümünü tanımlayalım (Miura, 1968). Burada ve bundan sonraki gösterimlerde x alt indisi $\frac{\partial}{\partial x}$ kısmi türevini göstermektedir. Bu dönüşüm,

$$v_t = v_{xxx} + v^2 v_x \quad (2.14)$$

ile verilen Modified KdV denkleminin (mKdV) çözümlerini, KdV denkleminin çözümlerine taşımaktadır. mKdV denklemi,

$$t \rightarrow t$$

$$x \rightarrow x + \frac{3}{2\varepsilon^2} t \quad (2.15)$$

$$u \rightarrow u + \frac{3}{2\varepsilon^2}$$

$$v \rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}} v + \frac{\sqrt{6}}{2\varepsilon}$$

ile verilen Galilean dönüşümleri altında değişmez (invariant) değildir. mKdV denklemi Galilean dönüşümü altında;

$$v_t = v_{xxx} + vv_x + \frac{\varepsilon^2}{6} v^2 v_x \quad (2.16)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü, KdV denkleminin çözümüne,

$$u = \frac{\varepsilon^2}{6} v^2 + v + i\varepsilon v_x \quad (2.17)$$

ile verilen Gardner dönüşümü ile taşınmaktadır. (2.13) ve (2.17) denklemleri (2.15) ile verilen Galilean dönüşümleri ile birbirlerine bağlanmaktadır. (2.16) denklemi genel bir denklem

olup, $\varepsilon = 0$ için KdV denklemini ve $\varepsilon \rightarrow \infty$ giderken $v \rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}} v$ dönüşümü altında mKdV

denklemini vermektedir. (2.16) denklemi süreklilik denklemi formunda;

$$v_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{xx} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\varepsilon^2}{18} v^3 \right) \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $v(x,t)$ yoğunluk olmak üzere $\int v(x,t)dt$ integrali de Gardner denkleminin korunan büyüklüğü ve

$$\frac{d}{dt} \int v(x,t)dt = 0 \quad (2.19)$$

olmaktadır. (2.17) denklemini,

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n[u] \quad (2.20)$$

şeklinde, v' yi u cinsinden seriye açarak,

$$\int v_t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \int h_n[u] dx = 0 \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. (2.21) denkleminde $h_n[u]$ terimleri KdV denklemi için korunan büyüklükleri vermektedir, çünkü ε 'un her kuvveti için bağımsız olarak süreklilik denklemi sağlamaktadır. Böylece sonsuz tane korunan büyüklük elde edilir.

Korunan büyüklüklerin toplam türev olmaması gerekmektedir (Das, 1989). Çünkü toplam türev içeren korunan büyüklükler önemsizdir. Böylece v 'nin u cinsinden açılımının toplam türevli terimler içermediğinden emin olmak gerekmektedir. Bunun için (2.17) denkleminin tersinin u 'nun tam polinomu şeklinde yazılabileceğini göstermek gerekmektedir. Çünkü bu tür polinomlar toplam türev şeklinde yazılamazlar. Ayrıca (2.17) denklemindeki εv_x terimini ihmal etmek bu tür terimleri etkilemeyeceğinden, $u = v + \frac{\varepsilon^2}{6} v^2$ denkleminin tersi,

$$v = \frac{3}{\varepsilon^2} \left[\left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon^2 u \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (2.22)$$

ile verilir. (2.22) denkleminde görüldüğü gibi v , u 'nun tam polinomlarını, ε 'un tek kuvvetleri içermektedir. Fakat v 'nin açılımında ε 'un çift kuvvetlerinin toplam türev olup olmadığı bilinmemektedir. Bunu görebilmek için,

$$v = y + iz$$

alınarak (2.17) denklemi,

$$u = \left(y - \varepsilon \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{6} (y^2 - z^2) \right) + i \left(z + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{3} yz \right) \quad (2.23)$$

şeklini alır. Ancak u reel olduğundan,

$$z + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{3} yz = 0$$

veya

$$z = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\varepsilon y + \frac{1}{6} \varepsilon^3 y^2 - \frac{1}{54} \varepsilon^5 y^3 + \dots \right) \quad (2.24)$$

olmalıdır. (2.24) denkleminde v 'nin sanal kısmının toplam türevli terimleri ve ε 'nin tek kuvvetlerini içerdiği görülmektedir. Fakat v 'nin reel kısmının da ε 'nin tek kuvvetli terimleri içerip içermediği açık değildir. Bu durum Gardner dönüşümüne boyut analizi yapılarak anlaşılabilir. Böylece (2.17) denkleminde u , v ve ε 'un boyutları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$[u] = \left[\frac{\varepsilon^2}{6} v^2 + v + i\varepsilon v_x \right]$$

yazarak her terimin boyutları eşitlenerek

$$= \left[\frac{\varepsilon^2}{6} v^2 \right] = [v] = [i\varepsilon v_x]$$

ve

$$= 2[\varepsilon] + 2[v] = [v] = [\varepsilon] + [v] - [x] \quad (2.25)$$

elde edilir. Buradan, (2.25) denklemlerine

$$[u] = 1$$

$$[v] = 1$$

(2.26)

$$[x] = -\frac{1}{2}$$

$$[\varepsilon] = -\frac{1}{2}$$

şeklinde bir çözüm bulunur ve (2.17) denkleminin,

$$v \rightarrow av$$

$$x \rightarrow a^{-\frac{1}{2}} x$$

(2.27)

$$\varepsilon \rightarrow a^{-\frac{1}{2}} \varepsilon$$

dönüşümleri altında değişmez olduğu gösterilebilir. Böylece ε 'un tek kuvvetli terimleri tek mertebeli türevli terimler içermekte ve bu terimler $i\varepsilon x$ teriminden dolayı sanal olmaktadır. Bu da reel terimlerin hepsinin ε ' un çift kuvvetlerini içerdiğini göstermektedir.

Korunan büyüklükleri inşa etmek için, (2.20) denklemi Gardner dönüşümünde yerine konularak;

$$h_n + i \frac{\partial h_{-1}}{\partial x} + \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{n-2} h_{n-m-2} h_m = 0 \quad (2.28)$$

tekrarlama bağıntısı elde edilir. ε^0 lı terimlerin eşleştirilmesi sonucu

$$h_0 = u$$

ve

$n > 0$ değerleri için $h_{-1} \equiv h_{-2} \equiv 0$ olmak üzere, (2.28) denkleminde,

$$h_1 = -iu_x \quad (2.29a)$$

$$h_2 = -\frac{1}{6}u^2 - u_{xx} \quad (2.29b)$$

$$h_3 = i\left(\frac{1}{3}u^2 + u_{xx}\right)_x \quad (2.29c)$$

$$h_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right)_{xx} \quad (2.29d)$$

$\vdots$

şeklinde sonsuz sayıda h elde edilir. Görüldüğü gibi n nin tek değerleri toplam türev ve sanaldır. n . korunan yoğunluğu,

$$\rho_n = 3(-1)^n h_{2n} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanarak, n . korunan büyüklük ;

$$H_n = 3(-1)^n \int h_{2n} dx \quad (2.31)$$

ile verilir. Böylece ilk üç korunan büyüklükler,

$$H_0 = 3 \int u dx \quad (2.32a)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \int u^2 dx \quad (2.32b)$$

$$H_2 = \int \left(\frac{1}{3!} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2 \right) dx \quad (2.32c)$$

ile verilir. Burada H_0 ve H_2 KdV denkleminin, sırası ile birinci ve ikinci Hamilton'larıdır.

Çözülebilirlik şartı,

$$\{H_n, H_m\}_1 = \{H_n, H_m\}_2 = 0 \quad (2.33)$$

ile verilir. Burada $\{, \}$ Poisson parantezi ve $\frac{\delta}{\delta u}$ fonksiyonel türev olmak üzere, birinci Hamilton operatörü için

$$\{H_n, H_m\}_1 = \int dx \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \quad (2.34)$$

ve ikinci Hamilton operatörü için

$$\{H_n, H_m\}_2 = \int dx \frac{\delta H_n}{\delta u(x)} \left[\partial_x^2 + \frac{1}{3} (\partial_x u + u \partial_x) \right] \frac{\delta H_m}{\delta u(x)} \quad (2.35)$$

ile verilir.

2.2 Lax Çifti

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözülebilirliğini göstermede kullanılan yöntemlerden biri de Lax (1968) tarafından verilmiştir. $u = u(x, t)$ fonksiyonunun zamanla değişimi, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ olmak üzere,

$$u_t = K[u] \quad (2.36)$$

şeklinde bir denklemle verilsin. Burada $K[u] = F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ şeklinde u ve u 'nin x 'e göre türevlerinin fonksiyonudur. Bu denklemin çözülebilir olup olmadığını test etmek için $L(t)^+ = L(t)$ şeklinde hermitsel bir operatör alalım. $L(t)$ operatörünün üniter $U(t)$ operatörü yardımı ile $t = 0$ daki dönüşümü,

$$U^+(t)L(t)U(t) = L(0) \quad (2.37)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $U^{-1} = U^+$ üniter bir operatör ve ayrıca

$$U_t = BU \quad (2.38)$$

şeklinde diferansiyel denklemi sağlamaktadır. Burada B antihermitsel ($B^* = -B$) bir operatördür. (2.37) denkleminin her iki tarafının t 'ye göre türevi alınarak,

$$\frac{\partial U^+(t)}{\partial t} L(t) U(t) + U^+(t) \frac{\partial L(t)}{\partial t} U(t) + U^+(t) L(t) \frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0 \quad (2.39)$$

elde edilir. $U(t)$ üniter olduğundan,

$$U^+(t) U(t) = I$$

ve

$$\frac{\partial U^+}{\partial t} U + U^+ \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

bulunur. (2.38) denklemi (2.39) denkleminde yerine konularak,

$$U^+(t) \left(\frac{\partial L(t)}{\partial t} - [B, L(t)] \right) U(t) = 0$$

elde edilir. Bu denklemin sol tarafı U ile ve sağ tarafı U^+ ile çarpılarak ,

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = [B, L(t)] = BL - LB \quad (2.40)$$

elde edilir. Bu denkleme Lax denklemi ve L ile B operatörlerine de Lax çifti adı verilir. $L(t)$ operatörün özdeğer problemi

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t) \quad (2.41)$$

ile verilir. Burada t sadece bir parametredir ve λ zamandan bağımsızdır (Dirac, 1958). Bunu görmek için her iki tarafın t parametresine göre türev alınarak

$$L_t \psi + L\psi_t = -\lambda_t \psi - \lambda \psi_t$$

ve (2.40) denklemini yardımı ile,

$$[B, L]\psi + L\psi_t = -\lambda_t \psi - \lambda \psi_t \quad (2.42)$$

elde edilir. $\psi(t)$ üniter olarak $t = 0$ daki değerine bağlı olduğundan,

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) \quad (2.43)$$

ile verilir. Buradan

$$\psi_t = \frac{\partial U(t)}{\partial t} \psi(0) = B(t)U(t)\psi(0) = B(t)\psi(t)$$

şeklinde bulunur. ψ_t (2.42) denkleminde yerine konularak

$$(BL - LB)\psi + LB\psi = -\lambda_t \psi - \lambda B\psi \quad (2.44)$$

elde edilir. (2.41) denkleminin yardımı ile,

$$\lambda_t = 0$$

bulunur. (2.38) ve (2.41) denklemlerinin çözülebilirlik şartı Lax denklemi ile verilmektedir. (2.38) ve (2.41) denklemleri Fourier metodunun bir genelleştirmesi olan ters saçılma yöntemi ile çözülür. Bu çalışmada denklemlerin çözümlerinin bulunması yönünde değil denklemlerin çözülebilir olup olmadıklarının belirlenmesi ile ilgileneceğiz. Örnek olarak,

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

şeklindeki KdV denkleminin Lax çiftini inceleyelim. KdV denklemi için L operatörü,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{6}u = \partial_x^2 + \frac{1}{6}u \quad (2.45)$$

şeklinde alınabilir. Buradan,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.46)$$

elde edilir. Şimdi de B'yi bulmaya çalışalım. Daha önce de belirttiğimiz gibi B anti hermitsel olduğundan türevlerin mertebesi tek sayılar olmak zorundadır. İlk seçim; a bir sabit olmak üzere,

$$B = a\partial_x \quad (2.47)$$

şeklinde alınabilir. Böylece Lax denklemi

$$[B, L] = a \frac{D(u(x, t))}{6} = \frac{a}{6} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.48)$$

olmak üzere, $a = 1$ seçilerek,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B, L] = \frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial t}$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.49)$$

olarak elde edilir. B operatörünün bu şekilde seçilmesi KdV denklemi yerine dalga denklemini vermektedir. Diğer bir seçim ise ,

$$B(t) = a_3 \partial_x^3 + a_1 (\partial_x u + u \partial_x) \quad (2.50)$$

şeklinde yapılabilir. Bu durumda

$$[B(t), L(t)] = \left(\frac{a_3}{2} - a_1 \right) (\partial_x^3 u) + \frac{a_1}{3} u (\partial_x u) + \left(\frac{a_3}{2} - 4a_1 \right) [(\partial_x^2 u) \partial_x + (\partial_x u) \partial_x^2] \quad (2.51)$$

elde edilir. KdV denkleminin elde edilebilmesi için,

$$\frac{a_3}{2} - 4a_1 = 0 \quad \text{veya} \quad a_3 = 8a_1 \quad (2.52)$$

olmalıdır. Böylece,

$$[B(t), L(t)] = \frac{a_1}{3} (u (\partial_x u) + (\partial_x^3 u)) \quad (2.53)$$

şeklini alır. (2.53) denkleminde $a_1 = \frac{1}{2}$ seçilerek,

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = [B(t), L]$$

ile verilen Lax denkleminden

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.54)$$

KdV denklemi elde edilir. Böylece KdV denklemi için Lax çifti,

$$L(t) = \partial_x^2 + \frac{1}{6} u \quad (2.55)$$

$$B(t) = 4\partial_x^3 + \frac{1}{2} (\partial_x u + u \partial_x) \quad (2.56)$$

olarak bulunur. $B(t)$ daha genel olarak ,

$$B(t)_m = a \left[\partial_x^{2m+1} + \sum_{j=1}^m (b_j(u) \partial_x^{2j-1} + \partial_x^{2j-1} b_j(u)) \right] \quad (2.57)$$

şeklinde yazılabilir. Formal operatör tekniği kullanılarak da $B(t)_m$ 'yi bulmak mümkündür.

$L(t)$ operatörü,

$$L(t) = \partial_x^2 + \frac{1}{6}u \quad (2.58)$$

şeklinde verilirse, bu operatörün kare kökü,

$$L^{1/2}(t) = \partial_x + a_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(u) \partial_x^{-n} \quad (2.59)$$

ile verilen bir seri açılımı şeklinde tanımlanabilir. Burada her $a_n(u)$ u'nun fonksiyoneliidir. Bu katsayılar serinin herhangi bir mertebeye göre karesi alınarak L 'ye eşitlenmesi ile belirlenir. "+" işareti D nin sadece pozitif kuvvetlerin içerdiğini göstermek ve α_m bir sabit olmak üzere $B_m(t)$,

$$B_m(t) = \alpha_m (L(t))_+^{\frac{2m+1}{2}} \quad (2.60)$$

ile verilmektedir (Das, 1989). Bu formülasyona göre $m = 0$ ve $m = 1$ için sırası ile (2.47) ve (2.56) değerleri bulunmaktadır. Bunu görmek için,

$$L = \partial_x^2 + \frac{1}{6}u$$

ve $m = 0$ değeri için ,

$$B_0(t) = \alpha_0 (L(t))_+^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Denklem (2.59) dan

$$(L(t))^{\frac{1}{2}} = \partial_x + a_0(u) + a_1(u)\partial_x^{-1}$$

şeklinde yazılıp, her iki tarafın karesi alınarak, $L = \left[L^{\frac{1}{2}}\right]_+$ şartından

$$(\partial_x + a_0(u) + a_1(u)\partial_x^{-1})(\partial_x + a_0(u) + a_1(u)\partial_x^{-1}) = \partial_x^2 + \frac{1}{6}u$$

veya

$$\partial_x^2 + 2a_0(u)\partial_x + \left[(\partial_x a_0(u)) + (a_0(u))^2 + 2a_1(u)\right] = \partial_x^2 + \frac{1}{6}u$$

elde edilir. Her iki tarafın terimleri karşılaştırılarak

$$a_0(u) = 0$$

$$a_1(u) = \frac{1}{12}u$$

ve

$$B_0 = \alpha_0 \left(\partial_x + \frac{1}{12}u\partial_x^{-1} \right)_+ = \alpha_0 \partial_x$$

bulunur. $\alpha_0 = a$ seçilerek (2.47) denklemini elde edilmektedir. $m = 1$ değeri için

$$B_1 = \alpha_1 \left(L^{\frac{3}{2}} \right)_+ = \alpha_1 L \left(L^{\frac{1}{2}} \right)_+$$

olur. Seri açılımından

$$(L(t))^{\frac{1}{2}} = \partial_x + \frac{1}{2}u\partial_x^{-1} - \frac{1}{24}u_x\partial_x^{-2}$$

bulunarak

$$\begin{aligned}
(L(t))^{\frac{3}{2}} &= \left(\partial_x^2 + \frac{1}{6} u \right) (L(t))^{\frac{1}{2}} \\
&= \partial_x^3 + \frac{1}{12} \partial_x^2 u \partial_x^{-1} - \frac{1}{24} \partial_x^2 u_x \partial_x^{-2} + \frac{1}{6} u \partial_x + \frac{1}{72} u^2 \partial_x^{-1} - \frac{1}{144} u u_x \partial_x^{-2} \\
&= \partial_x^3 + \frac{1}{8} u_x + \frac{1}{4} u \partial_x + O(\partial_x^{-1})
\end{aligned}$$

veya

$$(L(t))^{\frac{3}{2}} = \partial_x^3 + \frac{1}{8} (\partial_x u + u \partial_x) + O(\partial_x^{-1})$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$(L(t))^{\frac{3}{2}}_+ = \partial_x^3 + \frac{1}{8} (\partial_x u + u \partial_x)$$

bulunur. Buradan $B_1(t)$,

$$B_1(t) = \alpha_1 (L(t))^{\frac{3}{2}}_+ = \alpha_1 \left(\partial_x^3 + \frac{1}{8} (\partial_x u + u \partial_x) \right)$$

ile verilir. $\alpha_1 = 4$ seçilerek (2.56) denklemi elde edilmektedir.

2.3 Zakharov-Shabat Formülasyonu ve AKNS Denklemleri

Bilinen lineer olmayan integre edilebilir sistemleri sınıflandırmaya yönelik çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalar yeni çözülebilir sistemlerin bulunmasına da yardımcı olmaktadır. Zhakarov ve Shabat yaptıkları formülasyonla integre edilebilir denklemleri sınıflandıran denklemleri elde ettiler. Bu denklemler daha sonra Ablowitz-Kaup-Navell-Segur (AKNS) tarafından geliştirilerek AKNS denklemleri adını almışlardır (Ablowitz vd., 1973a; 1973b).

Birinci mertebe formülasyonda, $L(t)$ 'nin $\frac{\partial}{\partial x}$ 'te lineer olması istenir. Bunu göz önünde bulundurarak;

$$L(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t) \quad (2.61)$$

ve

$$\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = B(t)\psi(t) \quad (2.62)$$

denklemlerini (2x2) matris denklemlerine genelleştirelim. Pauli matrisleri,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

kullanılarak; σ_+ ve σ_-

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, I birim matrisi olmak üzere,

$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_3^2 = I$$

$$\sigma_{\pm}\sigma_3 = \mp\sigma_{\pm} = -\sigma_3\sigma_{\pm} \quad (2.65)$$

$$\sigma_{\pm}\sigma_{\mp} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_3)$$

özellikleri göz önüne alınarak,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

şeklinde bir sütun matris tanımlayalım. Böylece (2.61) ve (2.62) denklemleri,

$$\left(\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} - q\sigma_+ + r\sigma_- \right) \psi = -i\lambda \psi$$

veya

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (q\sigma_+ + r\sigma_- - i\lambda \sigma_3) \psi \quad (2.67)$$

ve

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (A\sigma_3 + B\sigma_+ + C\sigma_-) \psi \quad (2.68)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ dinamik büyüklüklerdir ve λ spektral parametresine bağlı değildir. λ , x ve t den bağımsızdır. A , B ve C katsayıları λ ya bağlı olarak değişen q ve r fonksiyonlardır. Böylece Lax çiftinin matrisel gösterimi,

$$L = i \left(\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} - q\sigma_+ + r\sigma_- \right)$$

veya

$$L = \begin{pmatrix} i\partial_x & 0 \\ 0 & -i\partial_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & iq \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ir & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\partial_x & -iq \\ ir & -i\partial_x \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

ve

$$B(t) = A\sigma_3 + B\sigma_+ + C\sigma_-$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t,x,\lambda) & B(t,x,\lambda) \\ C(t,x,\lambda) & -A(t,x,\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

şeklinde elde edilir (2.69) ve (2.70) denklemleri (2.61) ve (2.62) denklemlerinde kullanılarak

$$\psi_{1,x} = -i\lambda\psi_1 + q\psi_2 \quad (2.71a)$$

$$\psi_{2,x} = i\lambda\psi_2 + r\psi_1$$

ve

$$\psi_{1,t} = A\psi_1 + B\psi_2 \quad (2.71b)$$

$$\psi_{2,t} = C\psi_1 - A\psi_2$$

elde edilir. Bu denklemlerin integre edilebilirlik şartı,

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = [L, B] \quad (2.72)$$

Lax denklemi ile verilir. (2.69) ve (2.70) denklemleri (2.72) de kullanarak,

$$A_x + rB - qC = 0 \quad (2.73a)$$

$$B_x + 2i\lambda B - q_t + 2qA = 0 \quad (2.73b)$$

$$C_x - 2i\lambda C - r_t - 2rA = 0 \quad (2.73c)$$

denklemleri elde edilir. Burada x alt indisleri $\frac{\partial}{\partial x}$ ve t alt indisleri ise $\frac{\partial}{\partial t}$ kısmi türevlerini

göstermektedir (Bundan sonraki tüm gösterimlerde x ve t alt indisleri sırası ile x'e ve zamana göre kısmi türevleri gösterir). (2.73) denklemlerine AKNS denklemleri adı verilir. Bu denklemlerde A, B ve C yi λ 'nın kuvvet serisine aşağıdaki gibi açılarak,

$$A = \sum_{m=0}^M a_m \lambda^m \quad B = \sum_{m=0}^M b_m \lambda^m \quad C = \sum_{m=0}^M c_m \lambda^m$$

ve (2.73) denklemlerinde yerine konularak aşağıdaki lineer olmayan değişim denklemleri elde edilir.

$$q_t = b_{0,x} + 2a_0 q \quad (2.74a)$$

$$r_t = c_{0,x} - 2a_0 r \quad (2.74b)$$

ve tekrarlama bağıntıları

$$a_{m,x} - c_m q + b_m r = 0 \quad m \geq 0 \quad (2.75a)$$

$$b_{m,x} + 2ib_{m-1} + 2a_m q = 0 \quad m \geq 1 \quad (2.75b)$$

$$c_{m,x} - 2ic_{m-1} - 2a_m r = 0 \quad m \geq 1 \quad (2.75c)$$

şeklinde elde edilir. $a_M = \text{sabit}$, $b_M = 0$ ve $c_M = 0$ seçilerek çeşitli, çözülebilir, lineer olmayan denklemler elde edilebilir. Örnek olarak $M = 3$ seçilerek, (2.74) değişim denklemleri

$$q_t = a_2 \left[-\frac{1}{2} q_{xx} + q^2 r \right] + a_3 i \left[-\frac{1}{4} q_{xxx} + \frac{3}{2} r q q_x \right] \quad (2.76a)$$

$$r_t = a_2 \left[\frac{1}{2} r_{xx} - q^2 r \right] + ia_3 \left[-\frac{1}{4} r_{xxx} + \frac{3}{2} q r r_x \right] \quad (2.76b)$$

şeklini alır. Burada a_2 ve a_3 sabitlerdir. $a_2 = 0$, $ia_3 = 4$ ve $r = r_0$ (sabit) seçilerek (2.76a) denkleminde

$$q_t = -q_{xxx} + 6r_0 q q_x$$

KdV denklemi elde edilir. Aynı işlemler (2.76b) denkleminde uygulanarak, $q = q_0$ (sabit) ve $r = u$ seçilerek tekrar KdV denklemi elde edilmektedir. Bu iki denklem $q = kr$ dönüşümü ile

birbirine dönüşebilmektedir. (2.76b) denkleminde $a_2 = 0$, $ia_3 = 4$ ve $r = -\frac{1}{6}q$ seçilerek

$$q_t = -q_{xxx} + q^2 q_x$$

ile verilen mKdV denklemi ve $a_3 = 0$, $a_2^* = -a_2$ ve $r = q^*$ seçilerek,

$$q_t = a_2 \left[-\frac{1}{2} q_{xx} + q^2 q^* \right]$$

şeklinde lineer olmayan Schrödinger denklemi elde edilir.

2.4 Soliton Bağ Fonksiyonları ve Düz Uzay Şartı

Yukarıda Lax denklemlerinden yararlanarak KdV denkleminin çözülebilir bir denklem olduğu gösterilmişti. Şimdi de aynı denklemin çözülebilir olduğunu düz uzay(zero curvature) şartını kullanarak göstereyim. Bunun için $sl(2,R)$ cebirinde değeri olan 1-form bağ fonksiyonu Ω ,

$$\Omega = e_i \theta_i = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_0 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $e_i (i = 0, 1, 2)$ $sl(2,R)$ cebirinin üreteçleri olup,

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

şeklinde matris gösterimleri vardır. Ayrıca e_i 'ler arasındaki komütasyon bağıntılarını

$$[e_0, e_1] = 2e_1 \quad [e_0, e_2] = -2e_2 \quad [e_1, e_2] = e_0 \quad (2.79)$$

ile verilmektedir. θ_i 1-formları ise, $i = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\theta_i = A_i(t, x, \lambda)dt + r_i(t, x, \lambda)dx \quad (2.80)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada çözülebilirlik koşulu, eğriliğin sıfır olmasıdır . Başka bir deyişle

$$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0 \quad (2.81)$$

olması gerekmektedir. Burada $\wedge$ dış çarpımı göstermektedir. (2.81) denkleminde AKNS denklemleri elde edilebilmektedir. (2.77) ve (2.80) denklemleri birleştirilip (2.81) denkleminde yerine konularak;

$$e_i d\theta_i + e_i \theta_i \wedge e_j \theta_j = 0$$

$$\left(-e_i A_{i,x} + e_i r_{i,t} + [e_i, e_j] A_i r_j \right) dt \wedge dx = 0$$

veya

$$-e_i A_{i,x} + e_i r_{i,t} + [e_i, e_j] A_i r_j = 0 \quad (2.82)$$

denklemini bulunur. Böylece (2.79) da verilen bağıntılar kullanılarak,

$$\begin{aligned} e_0 (-A_{0,x} + r_{0,t} + A_1 r_2 - A_2 r_1) + e_1 (-A_{1,x} + r_{1,t} + 2A_0 r_1 - 2A_1 r_0) \\ + e_2 (-A_{2,x} + r_{2,t} - A_0 r_2 + 2A_2 r_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

elde edilir. (2.83) denklemindeki ,

$$A_0 = A \quad r_0 = -i\lambda$$

$$A_1 = C \quad r_1 = r$$

$$A_2 = B \quad r_2 = q$$

şeklinde seçilerek,

$$A_x + rB - qC = 0 \quad (2.84a)$$

$$B_x + 2i\lambda B - q_t + 2qA = 0 \quad (2.84b)$$

$$C_x - 2i\lambda C - r_t - 2rA = 0 \quad (2.84c)$$

denklemleri elde edilir. Böylece (2.73) deki AKNS denklemleri elde edilir.

2.5 KdV Denkleminin Bi-Hamilton Yapısı

Şu ana kadar KdV denkleminin çözülebilir bir lineer olmayan diferansiyel denklem olduğu sırası ile sonsuz korunan büyüklüklere sahip olması, Lax denklemi, AKNS denklemleri ve düz uzay şartı olmak üzere dört ayrı yöntemle gösterilmiştir. Son olarak KdV denkleminin çözülebilirliği farklı bir bakış açısı olan, bi-Hamilton sistem oluşturması açısından ele alınacaktır.

Bir dinamik sistemin Hamilton olabilmesi için, H Hamilton, $q(x,t)$ ve $p(x,t)$ faz uzayını oluşturan sırası ile genelleştirilmiş koordinat ve genelleştirilmiş momentum olmak üzere, hareket denklemleri,

$$q_t = \{q, H\} = \frac{\delta H}{\delta p} \quad (2.85a)$$

$$p_t = \{p, H\} = -\frac{\delta H}{\delta q} \quad (2.85b)$$

ile verilir (McCauley, 1997). Burada $\{, \}$ Poisson parantezini temsil etmektedir. (2.85) denklemleri kontravaryant formda,

$$\dot{y}^\mu = \{y^\mu, H\} = \{y^\mu, y^\nu\} \frac{\partial H}{\partial y^\nu} \quad (2.86)$$

şeklinde yazılabilir. KdV denkleminde olduğu gibi, sürekli sistemler sonsuz sayıda serbestlik derecesi ihtiva ederler. Bu nedenle y^μ dinamik büyüklük olan $u(x,t)$ ile ve kısmi türev de fonksiyonel türevle yer değiştirmelidir. Böylece (2.86) denklemi,

$$u_t = \{u, H\} = \int dy \{u(x), u(y)\} \frac{\delta H}{\delta u(y)} \quad (2.87)$$

şeklinde yazılabilir. Genel olarak

$$\{A[u], B[u]\} = \int dx dy \frac{\delta A[u]}{\delta u(x)} \{u(x), u(y)\} \frac{\delta B[u]}{\delta u(y)} \quad (2.88)$$

ile verilir. (2.87) denkleminde $H[u]$ u ve u'nun x'e göre türevlerinin fonksiyonelleri ve $H[u]$ nun fonksiyonel türevi,

$$\frac{\delta H[u]}{\delta u[x]} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \dots \right) H[u] \quad (2.89)$$

formülü ile verilir. $H[u]$ üzerine etki eden operatöre Euler operatörü adı verilir. (2.86) denklemini daha kısa olarak,

$$u_t = J \frac{\delta H}{\delta u} \quad (2.90)$$

şeklinde yazılabilir. Burada J Hamilton operatörü adını alır. Böylece temel Poisson parantezi,

$$\{u(x), u(y)\} = J\delta(x - y) \quad (2.91)$$

şeklini alır. Kısım 2.1 de KdV denklemini veren Hamilton'lar,

$$H_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (u^2) \quad (2.92)$$

$$H_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{3!} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2 \right) \quad (2.93)$$

olarak elde edilmişti. (2.89) denkleminde,

$$\frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = u$$

ve

$$\frac{\delta H_2}{\delta u(x)} = \frac{1}{2}u^2 + u_{xx}$$

hesaplanarak ve (2.90) denklemi gözönüne alınarak Hamilton operatörleri sırası ile,

$$J_1 = \partial_x^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u + u \partial_x) \quad (2.94)$$

$$J_2 = \partial_x \quad (2.95)$$

şeklinde bulunur. J_1 ve J_2 nin Hamilton operatörleri olabilmeleri için,

$$\text{Pr } v_{J_0}(I) = 0 \quad (2.96)$$

şeklinde yazılabilen Jacobi özdeşliğini sağlamalıdır (Olver, 1986). Burada I fonsiyonel bi-vektör olmak üzere,

$$I = \frac{1}{2} \int dx [\theta \wedge (J_1 \theta)] \quad (2.97)$$

ile verilir. J_2 operatörünün Jacobi özdeşliğini sağladığı kolayca görülebilir. Böylece sadece J_1 için Jacobi özdeşliğini hesaplamak yeterli olacaktır. (2.97) denklemi (2.96) denkleminde yerine konularak,

$$\text{Pr } v_{J_0}(I) = -\frac{1}{2} \int dx [\theta \wedge \text{Pr } v_{J_0}(J_1 \theta)] = 0 \quad (2.98)$$

elde edilir. $\text{Pr } v_{J_0}$ operatörü,

$$\text{Pr } v_{J,\theta} = \sum_j \partial_j (J_1 \theta) \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (2.99)$$

şeklinde verilir ve sadece dinamik büyüklükler üzerine etki etmektedir. Burada

$$j = 1, x, xx, xxx, \dots$$

şeklindedir. Böylece, (2.99) denklemi kullanılarak,

$$\text{Pr } v_{J,\theta} (J_1) = \theta_{xxx} + \frac{2}{3} u \theta_x + \frac{1}{3} u_x \theta \quad (2.100)$$

hesaplanır. (2.100) denklemi (2.98) de yerine konularak ve

$$\theta \wedge \theta = 0 \text{ ve } \theta_x \wedge \theta_x = 0 \quad (2.101)$$

olduğu gözönüne alınarak,

$$\text{Pr } \vartheta_{J,\theta} (I) = \frac{1}{3} \int dx [\theta_{xxx} \wedge \theta_x \wedge \theta] \quad (2.102)$$

elde edilir. (2.102) denkleminde kısmi integrasyon uygulanarak,

$$\text{Pr } v_{J,\theta} (I) = \frac{1}{3} \int dx [(\theta_{xx} \wedge \theta_x \wedge \theta)_x - (\theta_{xx} \wedge \theta_{xx} \wedge \theta) - (\theta_{xx} \wedge \theta_x \wedge \theta_x)] = 0 \quad (2.103)$$

elde edilir. İntegrant içindeki her terim ayrı ayrı sıfıra eşit olduğundan Jacobi özdeşliği sağlanır ve J_1 , KdV denkleminin ikinci Hamilton operatörü olur. Buna bağlı olarak temel Poisson parantezleri,

$$\{u(x), u(y)\}_1 = \left[\partial_x^3 + \frac{1}{3} (\partial_x u + u \partial_x) \right] \delta(x - y) \quad (2.104a)$$

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \partial_x \delta(x - y) \quad (2.104b)$$

ile verilir. Görüldüğü gibi KdV denklemini veren iki ayrı Hamilton (Bi-Hamilton) ve Hamilton operatörü vardır. Bu da KdV denkleminin tamamen çözülebilir olmasının başka bir kriteridir.

Bu bölümde KdV denklemini ele alarak KdV denkleminin çözülebilir bir sistem olduğu, beş ayrı yöntemle ayrıntılı olarak incelenmiştir.



3. LİNEER OLMAYAN SÜPER ÇÖZÜLEBİLİR SİSTEMLER

3.1 Süper KdV Denklemi ve Soliton Bağ Fonksiyonları

Son yıllarda çözülebilir sistemlerin (özellikle KdV denkleminin) süper ve süpersimetrik genelleştirmeleri üzerine çalışmalar yapılmaktadır (B.Hu, 1997, Kupershmidt, 1987). Süper çözülebilir sistemler (Kupershmidt, 1984; Gürses ve Oğuz, 1986; Mathieu, 1988b) bozonik ve fermiyonik değişkenleri olan fakat bu değişkenler arasında süper simetri dönüşümleri olamayan sistemlerdir. Süpersimetrik çözülebilir sistemler (Manin ve Randul, 1985; Mathieu, 1988a, 1988b) ise bozonik ve fermiyonik değişkenleri arasında süpersimetri dönüşümleri olan sistemlerdir. Bu iki farklı genelleştirmenin özellikleri bu bölümde incelenecektir.

İlk olarak süper soliton bağ fonksiyonları inşa edilerek düz uzay olma şartından süper KdV denkleminin elde edilmesi incelenecektir (Gürses ve Oğuz, 1985). Süper soliton bağ fonksiyonları elde etmek için öncelikle $sl(2, \mathbb{R})$ cebri yerine bu cebrin süper hali olan $osp(2/1)$ süper cebri kullanılmaktadır. $Osp(2/1)$ cebri 3×3 matrislerle temsil edilmektedir. Bu matrisler üç tane bozonik $e_i (i = 0, 1, 2)$ ve iki tane fermiyonik $q_a (a = 1, 2)$ üreteçleri tanımlamaktadır. Bu matrisler,

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilmektedir. Komütasyon $[,]$ ve anti komütasyon $\{ , \}$ bağıntıları,

$$\begin{aligned} [e_0, e_1] &= 2e_1 & [e_0, e_2] &= -2e_2 & [e_1, e_2] &= e_0 & [e_0, q_1] &= q_1 \\ [e_0, q_2] &= -q_2 & [e_1, q_1] &= 0 & [e_1, q_2] &= q_1 & [e_2, q_1] &= q_2 \\ [e_2, q_2] &= 0 & \{q_1, q_1\} &= -2e_1 & \{q_2, q_2\} &= 2e_2 & \{q_1, q_2\} &= e_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde verilmekte ve Jacobi özdeşliği sağlanmaktadır. $Osp(2/1)$ değerli süper soliton bağ fonksiyonu,

$$\Omega = e_i \theta_i + q_a \pi_a = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \pi_1 \\ \theta_2 & -\theta_0 & \pi_2 \\ \pi_2 & -\pi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada Ω ' ya süper soliton bağ fonksiyonu (connection) adı verilmektedir. Düz uzay çözülebilirlik şartı,

$$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde eğriliğin sıfır olması ile tanımlanmaktadır. Burada,

$$d\Omega = \Omega_t dt + \Omega_x dx \quad (3.5)$$

şeklinde olup,

$$\theta_i = A_i dt + r_i dx \quad (3.6)$$

$$\pi_a = \beta_a dt + \alpha_a dx \quad (3.7)$$

denklemleri (3.5) denkleminde kullanılarak,

$$d\Omega = (-e_i A_{i,x} + e_i r_{i,t} - q_a \alpha_{a,t} + q_a \beta_{a,x}) dt \wedge dx \quad (3.8)$$

elde edilir. Öte yandan $\Omega \wedge \Omega$ ise,

$$\Omega \wedge \Omega = \left\{ [e_i, e_j] A_i r_j + [e_i, q_b] A_i q_b + [q_a, e_j] \alpha_a r_j + \{q_a, q_b\} \alpha_a \beta_b \right\} dt \wedge dx \quad (3.9)$$

şeklindedir. (3.5) ve (3.8) denklemleri (3.4) denkleminde yerine konularak ve (3.2) de verilen ilişkiler göz önüne alınarak.

$$-A_{0,x} + A_1 r_2 - A_2 r_1 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0 \quad (3.10a)$$

$$-A_{1,x} + r_{1,t} + 2A_0 r_1 - 2A_1 r_0 - 2\alpha_1 \beta_1 = 0 \quad (3.10b)$$

$$-A_{2,x} + r_{2,t} - 2A_0 r_2 + 2A_1 r_0 + 2\alpha_2 \beta_2 = 0 \quad (3.10c)$$

$$-\alpha_{1,x} + \beta_{1,t} + A_0 \beta_1 + A_1 \beta_2 - \alpha_1 r_0 - \alpha_2 r_1 = 0 \quad (3.10d)$$

$$-\alpha_{2,x} + \beta_{2,t} - A_0 \beta_2 + A_2 \beta_1 - \alpha_1 r_2 + \alpha_2 r_0 = 0 \quad (3.10e)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde,

$$A_0 = A, A_1 = C \text{ ve } A_2 = B$$

$$r_0 = -i\lambda, r_1 = r \text{ ve } r_2 = q$$

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \rho, \beta_1 = \beta \text{ ve } \beta_2 = \varepsilon$$

şeklinde seçilerek, (3.10) denklemleri,

$$-A_x + Cq - Br + \alpha\varepsilon + \rho\beta = 0 \quad (3.11a)$$

$$r_t - C_x + 2Ar - 2i\lambda C - 2\alpha\beta = 0 \quad (3.11b)$$

$$-\alpha_t + \beta_t + A\beta + C\varepsilon + i\alpha\lambda - \rho r = 0 \quad (3.11c)$$

$$-B_x + q_t - 2Aq - 2i\lambda C + 2\rho\varepsilon = 0 \quad (3.11d)$$

$$-\rho_z + \varepsilon_t - A\varepsilon + B\beta - \alpha q - i\lambda\rho = 0 \quad (3.11e)$$

şeklinde bulunur. Burada λ spektral parametresi hariç Latin (Greek) harfler bozonik (fermiyonik) büyüklüklerdir. Bu denklemlere süper AKNS denklemleri adı verilir. Bir grup

süper lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler A, B, C, α ve ρ 'yu λ 'nın pozitif kuvvet serisine,

$$A = \sum_{m=0}^M a_m \lambda^m, \quad B = \sum_{m=0}^M b_m \lambda^m, \quad C = \sum_{m=0}^M c_m \lambda^m \quad (3.12)$$

$$\alpha = \sum_{m=0}^M \alpha_m \lambda^m, \quad \rho = \sum_{m=0}^M \rho_m \lambda^m$$

şeklinde açılarak elde edilebilir. Bu denklemler (3.11) denklemlerinde yerlerine konulursa,

$$q_t = b_{0,x} - 2\rho_0 \varepsilon + 2a_0 q \quad (3.13a)$$

$$r_t = c_{0,x} + 2\alpha_0 \beta - 2a_0 r \quad (3.13b)$$

$$\beta_t = \alpha_{0,x} - \alpha_0 \beta + \rho_0 r - \varepsilon c_0 \quad (3.13c)$$

$$\varepsilon_t = \rho_{0,x} - \beta b_0 + q \alpha_0 + \varepsilon a_0 \quad (3.13d)$$

ve tekrarlama bağıntıları,

$$a_{m,x} - \alpha_m \varepsilon + \rho_m \beta - c_m q + b_m r = 0 \quad m \geq 0 \quad (3.14a)$$

$$b_{m,x} + 2ib_{m-1} - 2\rho_m \varepsilon + 2a_m q = 0 \quad m \geq 1 \quad (3.14b)$$

$$c_{m,x} - 2ic_{m-1} + 2\alpha_m \beta - 2a_m r = 0 \quad m \geq 1 \quad (3.14c)$$

$$\alpha_{m,x} - i\alpha_{m-1} + \rho_m r - \beta a_m - \varepsilon c_m = 0 \quad m \geq 1 \quad (3.14d)$$

$$\rho_{m,x} + i\rho_{m-1} + \alpha_m q - \beta b_m + \varepsilon a_m = 0 \quad m \geq 1 \quad (3.14e)$$

elde edilir. $a_M = \text{sabit}$ ve $b_M = c_M = \alpha_M = \rho_M = 0$ seçilirse, süper integre edilebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri elde edebiliriz. Örnek olarak $M = 3$ alınırsa (3.13) denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$q_t = a_2 \left[-\frac{1}{2} q_{xx} + q^2 r + 2\epsilon_x \epsilon + 2q\beta\epsilon \right] + ia_3 \left[-\frac{1}{4} q_{xxx} + \frac{3}{2} rqq_x + 3(\epsilon_x \epsilon)_x - 3q\beta_x \epsilon + 3q\beta\epsilon_x \right] \quad (3.15)$$

$$r_t = a_2 \left[\frac{1}{2} r_{xx} - q^2 r + 2\beta_x \beta - 2r\beta\epsilon \right] + ia_3 \left[-\frac{1}{4} r_{xxx} + \frac{3}{2} qrr_x - 3(\beta_x \beta)_x + 3r\beta_x \epsilon - 3r\beta\epsilon_x \right] \quad (3.16)$$

$$\epsilon_t = a_2 \left[-\epsilon_{xx} + q\beta_x + \frac{1}{2} \beta q_x + \frac{1}{2} qr\epsilon \right] + ia_3 \left[-\epsilon_{xxx} + \frac{3}{4} r q_x \epsilon + \frac{3}{4} q r_x \epsilon + \frac{3}{2} q r \epsilon_x + \frac{3}{2} q_x \beta_x + \frac{3}{4} \beta q_{xx} \right] \quad (3.17)$$

$$\beta_t = a_2 \left[-\beta_{xx} - r\epsilon_x - \frac{1}{2} \epsilon r_x - \frac{1}{2} qr\beta \right] + ia_3 \left[-\beta_{xxx} + \frac{3}{4} r q_x \beta + \frac{3}{4} q r_x \beta + \frac{3}{2} q r \beta_x + \frac{3}{2} r_x \epsilon_x + \frac{3}{4} \epsilon r_{xx} \right] \quad (3.18)$$

Burada a_1 ve a_3 bozonik sabitlerdir. Bu denklemlerden uygun değişken seçimleri yapılarak süper integre edilebilir kısmi türevli diferansiyel denklemler elde edilebilir. Özel haller,

i) Süper KdV: $r = r_0$ (sabit), $\beta = 0$, $a_2 = 0$ ve $ia_3 = 4$ seçilerek,

$$q_t = q_{xxx} + 6r_0 q q_x - 12(\epsilon_x \epsilon)_x \quad (3.19a)$$

$$\epsilon_t = -4\epsilon_{xxx} + 6q r_0 \epsilon_x + 3r_0 q_x \epsilon \quad (3.19b)$$

denklemleri elde edilir. (3.19) denklem çiftine süper KdV denklemleri adı verilir.

ii) Süper mKdV denklemi: $r = k_1 \bar{q}$, $\beta = k_2 \bar{\varepsilon}$, $a_2 = 0$ ve $ia_3 = 4$ seçilerek;

$$q_t = -q_{xxx} + 6k_1 |q|^2 q_x + 12(\varepsilon_x \varepsilon)_x - 12k_2 q \bar{\varepsilon}_x \varepsilon + 12k_2 q \bar{\varepsilon} \varepsilon_x \quad (3.20a)$$

$$\varepsilon_t = -\varepsilon_{xxx} + k_1 |q|^2_x \varepsilon + 6k_1 |q|^2 \varepsilon_x + 6k_2 q_x \bar{\varepsilon}_x + 3k_2 \bar{\varepsilon} q_{xx} \quad (3.20b)$$

ile verilir.

iii) Süper lineer olmayan Schrödinger denklemi: $r = k_1 \bar{q}$, $\beta = k_2 \bar{\varepsilon}$, $a_2 = -2i$, $a_3 = 0$ ve $k_i = \bar{k}_i$ (k reel) seçilerek,

$$q_t = -2i \left[-\frac{1}{2} q_{xx} + k_1 |q|^2 q + 2\varepsilon_x \varepsilon + 2k_2 q \bar{\varepsilon} \varepsilon \right] \quad (3.21a)$$

$$\varepsilon_t = -2i \left[-\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} k_1 |q|^2 \varepsilon + k_2 q \bar{\varepsilon}_x + \frac{1}{2} k_2 q_x \bar{\varepsilon} \right] \quad (3.21b)$$

elde edilir. q , ε ve k 'nın üzerindeki bar işaretleri Grassman cebrinde Brezin adjoint operatörünü göstermektedir (Brezin, 1966). Kompleks değerli fonksiyonlar için bu işlemler kompleks eşlenik işlemlerine indirgenir. (ii) ve (iii) durumlarında, $k_1 = (k_2)^2$ bulunur. Böylece bozonik kısımlardaki etkileşme teriminin işareti süper açılımla sabitleştirilmiştir.

3.2 Süper mKdV Denklemi

Bir önceki bölümde elde edilen süper mKdV denkleminde farklı bir mKdV denkleminin elde edilmesi Kupershmidt (1984) tarafından verilmiştir. Bu denklemler,

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + 3\xi \xi_{xx} \quad (3.22a)$$

$$\xi_t = -4\xi_{xxx} + 6u\xi_x + 3u_x \xi \quad (3.22b)$$

şeklindeki süper KdV denklemlerinde,

$$u = v^2 + v_x + \frac{1}{4}\theta\theta_x \quad (3.23a)$$

$$\xi = \theta_x + v\theta \quad (3.23b)$$

ile verilen süper Miura dönüşümü kullanılarak elde edilir (Mathieu, 1992). (3.23) denklemlerinden,

$$u_x = 2vv_x + v_{xx} + \frac{1}{4}\theta\theta_{xx}$$

$$\xi_x = \theta_{xx} + (v\theta)_x$$

$$\xi_{xxx} = \theta_{xxxx} + v_{xxx}\theta + 3v_{xx}\theta_x + 3v_x\theta_{xx} + v\theta_{xxx}$$

değerleri hesaplanıp, (3.22b) denkleminde yerlerine konularak,

$$\begin{aligned} v_t\theta + (v + \partial_x)\theta_t &= 12v_x v\theta_x + 12v_x v^2\theta + 3v_{xx} v\theta + \frac{3}{4}\theta\theta_{xx}\theta_x + \frac{3}{4}v\theta\theta_{xx}\theta + 6v^2\theta_{xx} \\ &\quad + 6v^3\theta_x + 6v_x^2\theta + \frac{3}{2}\theta\theta_x\theta_{xx} + \frac{3}{2}v_x\theta\theta_x\theta + \frac{3}{2}v\theta\theta_x\theta_x - 4\theta_{xxxx} \\ &\quad - 4v_{xxx}\theta - 12v_{xx}\theta_x - 6v_x\theta_{xx} - 4v\theta_{xxx} \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin sağ tarafı düzenlenerek,

$$\begin{aligned} v_t\theta + (v + \partial_x)\theta_t &= \partial_x \left(2v^3 - v_{xx} + \frac{3}{4}\theta\theta_{xx} + \frac{3}{2}v\theta\theta_x \right) \\ &\quad + (v + \partial_x) \left[-4\theta_{xxx} + (6vv_x - 3v_{xx})\theta + 6(6vv_x - v_x)\theta_x \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklini alır. Sağ tarafın sol taraf ile eşleştirilmesi sonucu,

$$v_t = \partial_x \left(2v^3 - v_{xx} + \frac{3}{4} \theta \theta_{xx} + \frac{3}{2} v \theta \theta_x \right) \quad (3.26a)$$

$$\theta_t = -4\theta_{xxx} + (6vv_x - 3v_{xx})\theta + 6(v^2 - v_x)\theta_x \quad (3.26b)$$

bulunur. Kolayca görüldüğü gibi fermiyonik limitin sıfıra gitmesi durumunda, mKdV denklemini elde edilmektedir. (3.23) denkleminde verilen süper Miura dönüşümleri süper mKdV denkleminin çözümlerini süper KdV denkleminde bağlamaktadır.

3.3 Süpersimetrik KdV Denklemini

Süpersimetrik KdV denklemini elde etmek için süper uzay formalizmi kullanılır (Mathieu, 1988a, 1988b). Süper uzay yaklaşımında normal uzaydaki x değişkeni, süper uzayda (x, θ) şeklinde olur. Burada θ yer değiştirme özelliği olmayan (fermiyonik) bir değişkendir ($\theta^2 = 0$). Yeni sistem öyle olmalıdır ki,

$$x \rightarrow x - \eta\theta$$

ve

$$\theta \rightarrow \theta + \eta$$

dönüşümleri altında değişmez kalmalıdır. Böylece $\Phi(x, \theta)$ süper alanının süpersimetrik dönüşümü,

$$\delta\Phi = \Phi(x - \eta\theta, \theta + \eta) - \Phi(x, \theta) \quad (3.27)$$

ile verilir. Eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim Taylor serisine açılarak,

$$\delta\Phi = \Phi(x, \theta) - \eta\theta \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \Phi(x, \theta) \quad (3.28)$$

ve

$$\delta\Phi = \eta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \theta \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi \quad (3.29)$$

elde edilir. Parantezin içindeki ifade Q ile gösterilirse,

$$Q = \partial_\theta - \theta \partial_x \quad (3.30)$$

ve

$$\delta\Phi = \eta Q\Phi \quad (3.31)$$

şeklini alır. Burada, Q süpersimetrik dönüşümü yapan operatördür. Süper uzay formalizminde KdV denklemindeki $u(x)$ bozonik değişkeni yerine, $\Phi(x, \theta)$ süper alanı alınır. $\Phi(x, \theta)$,

$$\Phi(x, \theta) = \xi(x) + \theta u(x) \quad (3.32)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada $\xi(x)$ fermiyonik bir büyüklük olduğundan, $\Phi(x, \theta)$ süper alanı da fermiyoniktir. (3.32) denklemini (3.31) denkleminde kullanılarak $u(x)$ ve $\xi(x)$ için süpersimetri dönüşümleri,

$$\delta u(x) = \eta \xi_x(x) \quad (3.33)$$

$$\delta \xi(x) = \eta u(x)$$

şeklinde elde edilir. Süper alana ek olarak, kovaryant türev,

$$D = \theta \partial_x + \partial_\theta \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $D^2 = \partial_x$ olduğu kolayca görülebilir. Türev operatörü Q operatörü ile

$$\{Q, D\} = 0$$

özelliğine sahiptir (antikomütasyon özelliği). Kovaryant, türev ve süper alanlarla yazılan denklemler (3.33) denkleminde verilen dönüşümler altında değişmez kalmaktadır.

KdV denkleminin süpersimetrik genelleştirmesini elde etmenin bir yolu, KdV denklemini süpersimetrik alan ve kovaryant türevler cinsinden yazmaktır. KdV denklemi θ ile çarpılarak da süpersimetrik hale dönüştürülebilir. Örneğin θu_t çarpımı süpersimetrik olarak Φ_t şeklinde dönüşür. Her zaman öyle bir genelleme yapmak doğru değildir. Çünkü $\theta(6uu_x)$ fermiyonik terimi hem $3D^2(\Phi D\Phi)$ hem de $6D\Phi(D^2\Phi)$ şeklinde yazılabilir. Bu nedenle KdV denkleminin en genel süpersimetrik açılımını yapabilmek için bütün olasılıkların lineer kombinasyonu göz önüne alınmalıdır. Bu da,

$$\Phi_t = -D^6\Phi + aD^2(\Phi D\Phi) + (6-2a)D\Phi D^2\Phi \quad (3.35)$$

şeklinde “a” parametresine bağlı olan bir denklem ailesine neden olur. Bu denkleme sKdV-a denklemini adı verilir. Fermiyonik ve bozonik bileşenler cinsinden bu denklemi,

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x - a\xi\xi_{xx} \quad (3.36a)$$

$$\xi_t = -\xi_{xxx} + (6-a)\xi_x u + a\xi u_x \quad (3.36b)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sistem basit (trivial) olmayan, genel süpersimetrik KdV denklemini temsil etmektedir ($a = 0$ durumu basit süpersimetrik duruma karşılık gelir). Başka bir basit sonuç, fermiyonik süper alan yerine,

$$\Omega(x, \theta) = u(x) + \theta\xi(x) \quad (3.37)$$

şeklinde bozonik bir süper alan seçimi ile elde edilir. Bu durumda KdV denkleminin süper alan açılımı ,

$$\Omega_t = -D^6\Omega + 6\Omega D^2\Omega \quad (3.38)$$

ile verilir. Buradan bileşenler cinsinden,

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x \quad (3.39a)$$

$$\xi_t = -\xi_{xxx} + 6(\xi u)_x \quad (3.39b)$$

elde edilir. (3.39) denkleminde görüldüğü gibi bozonik kısım doğrudan KdV denklemini vermekte ve fermiyonik kısım da lineer olmaktadır. Bu çözümlere basit (trivial) çözüm denir. Süper KdV denkleminde olduğu gibi sKdV denklemi için smKdV denklemi,

$$\psi_t = -D^6\psi + 3(D\psi)D^2(\psi D\psi) + (3-b)(D\psi)D(\psi D^2\psi) \quad (3.40)$$

ile verilir (Mathieu, 1988b). Burada $\psi(x, \theta)$, fermiyonik süper alan olup,

$$\psi(x, \theta) = \theta v(x) + \zeta(x)$$

ile verilir. smKdV-b denleminin çözümü sKdV-a denlemine sadece $a = b = 3$ için

$$\Phi = D^2\psi + \psi D\psi$$

ile verilen süper Miura dönüşümü ile taşınmaktadır.

Daha önce de belirtildiği gibi çözülebilirlik kriterlerinden birisinin Lax denklemini sağlaması gerektiği olduğu görülmüştü. sKdV-3 denklemi için Lax çiftinin ilk elamanı $\bar{L}$,

$$\bar{L} = D^4 - (D\Phi) + \Phi D \quad (3.41)$$

şeklinde seçilebilir. İkinci elemanı ise,

$$\bar{P}_3 = -4(\bar{L})_+^{\frac{3}{2}} \quad (3.42)$$

ile verilir. Burada $\bar{P}_3$ 'ü hesaplayabilmek, için $\bar{L}$ 'nin karekökü,

$$J = (\bar{L})^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_{-i} D^i \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlanır. Burada C_i tek (çift) değerli ise fermiyonik (bozonik). D^n 'lerle işlem yapmanın kuralı;

$$\partial_x^{-n} f = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} f^{(j)} \partial_x^{-n-j} \quad (n > 0) \quad (3.44)$$

ile verilir. Burada,

$$f^{(i)} = \partial_x^i f, \quad D^{-2n} = \partial_x^{-n} \text{ ve } D^{2n-1} = D \partial_x^{-n-1}$$

şeklinde tanımlanır. C_i katsayıları

$$J^2 = \bar{L}$$

eşitliğinden,

$$C_{-2} = 1, \quad C_{-1} = C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{\Phi}{2}$$

$$C_2 = -\frac{D\Phi}{2}, \quad C_3 = -\frac{D^2\Phi}{4}, \quad C_4 = \frac{D^3\Phi}{4}$$

bulunur. Böylece $\bar{P}_3$,

$$\bar{P}_3 = -4D^6 + 3(D^3\Phi) - 3(D^2\Phi) + 6(D\Phi)D^2 - 6\Phi D^3 \quad (3.45)$$

şeklinde bulunur. Buradan Lax denklemi,

$$\bar{L}_t = [\bar{P}_3, \bar{L}] \quad (3.46)$$

(3.35) denklemini (sKdV-3 denklemini) vermektedir. Görüldüğü gibi sistem sadece belli bir parametre değeri için (örneğin sKdV-3) tam olarak integre edilebilmektedir. $a \neq 3$ için sistem çözülemeyen bir sistem olmaktadır.

3.4 Süper KdV Denkleminin Bi-Hamilton Yapısı

Süper KdV için birinci ve ikinci Hamilton'lar sırası ile,

$$H_1 = \frac{1}{2} \int dx \left[(u_x)^2 + 2u^3 + c_1 \xi_x \xi_{xx} + c_2 u \xi \xi_x \right] \quad (3.47)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \int dx \left[u^2 + c_0 \xi \xi_x \right] \quad (3.48)$$

ile verilmektedir (Mathieu, 1988b). Birinci Hamilton yapısı için temel Poisson parantezleri,

$$\{u(x), u(y)\} = \partial_x \delta(x - y),$$

$$\{u(x), \xi(y)\} = 0 \quad (3.49)$$

$$\{\xi(x), u(y)\} = 0$$

$$\{\xi(x), \xi(y)\} = c_3 \delta(x - y)$$

ve ikinci Hamilton yapısı için temel Poisson parantezleri,

$$\{u(x), u(y)\} = (\partial_x^3 + 4u + 2u_x) \delta(x - y)$$

$$\{u(x), \xi(y)\} = (a \xi \partial_x + b \xi_x) \delta(x - y) \quad (3.50)$$

$$\{\xi(x), u(y)\} = (c \xi \partial_x + d \xi_x) \delta(x - y)$$

$$\{\xi(x), \xi(y)\} = (m \partial_x^2 + n u) \delta(x - y)$$

şeklinde yazılabilir. Sırası ile birinci ve ikinci Hamilton yapısının Hamilton operatörleri,

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} J_{11}^{(1)} & J_{12}^{(1)} \\ J_{21}^{(1)} & J_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad (3.51a)$$

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{11}^{(2)} & J_{12}^{(2)} \\ J_{21}^{(2)} & J_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x & a\xi\partial_x + b\xi_x \\ c\xi\partial_x + d\xi_x & m\partial_x^2 + nu \end{pmatrix} \quad (3.51b)$$

şeklinde bir matris ile ifade edilebilir. Bu operatörleri kullanarak sistemin zaman evrim denklemi

$$\alpha, \beta = 1, 2$$

ve

$$\Phi_\alpha = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \xi \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\partial_t \Phi_\alpha = (J^{(1)})_{\alpha\beta} \frac{\delta H_1}{\delta \Phi_\beta} \quad (3.52a)$$

$$\partial_t \Phi_\alpha = (J^{(2)})_{\alpha\beta} \frac{\delta H_2}{\delta \Phi_\beta} \quad (3.52b)$$

ile verilir. H_1 ve H_2 nin Hamilton olabilmesi için, ilgili Poisson parantezlerinin skew-simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekmektedir. Her iki operatörün skew-simetrik olduğu kolayca görülebilir. Birinci Hamilton için Jacobi özdeşliğinin kolayca sağlandığı gösterilebilir, ancak H_2 için o kadar açık değildir. (3.52b) denkleminin sağlanması için $J^{(2)}$ nin Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekmektedir. Hamilton operatörlerinin Jacobi özdeşliği,

$$\text{Pr } v_{J_0}(\Theta) = 0 \quad (3.53)$$

ile verilir (Olver, 1986). Burada Θ ;

$$\Theta = \frac{1}{2} \int [J_{\alpha\beta}^{(2)} \omega^\beta \wedge \omega^\alpha] dx \quad (3.54)$$

şeklindedir. Ayrıca α ve β 1 ve 2 değerlerini almaktadır. $\omega_1 = p$ (bozonik) ve $\omega_2 = v$ (fermiyonik) alanlar arasındaki $\wedge$ çarpımı,

$$\omega_\alpha \wedge \omega_\beta = -(-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \omega_\beta \wedge \omega_\alpha \quad (3.55)$$

şeklinde tanımlanır (Kupershmidt, 1985; Mathieu, 1988c). Burada ω_α bozonik(fermiyonik) ise $\tilde{\alpha} = 0(\tilde{\alpha} = 1)$, ω_β bozonik(fermiyonik) ise $\tilde{\beta} = 0(\tilde{\beta} = 1)$ değerlerini almaktadır. (3.54) denklemi, daha açık olarak,

$$\Theta = \frac{1}{2} \int [J_{11}^{(2)} p \wedge p + J_{12}^{(2)} p \wedge v + J_{21}^{(2)} v \wedge p + J_{22}^{(2)} v \wedge v] dx \quad (3.56)$$

şeklinde yazılabilir. (3.56) denklemi (3.53) te yerine konularak,

$$\begin{aligned} \text{Pr } v_{J\omega}(\Theta) = \frac{1}{2} \int \Big\{ & [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{11}^{(2)})p] \wedge p + [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{12}^{(2)})p] \wedge v + \\ & + [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{21}^{(2)})v] \wedge p + [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{22}^{(2)})v] \wedge v \Big\} = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

elde edilir. $\text{Pr } v_{J\omega}$ operatörü,

$$\text{Pr } v_{J\omega} = \sum_{j,\alpha,\beta} \partial_j (J_{\alpha\beta} \omega^\beta) \frac{\partial}{\partial \Phi_j^\alpha} \quad (3.58)$$

ile verilir. Burada,

$$\alpha, \beta = 1, 2$$

$$j = 1, x, xx, xxx, \dots$$

$$\Phi_1 = u \text{ ve } \Phi_2 = \xi$$

şeklindedir. (3.58) denklemi kullanılarak,

$$\text{Pr } v_{J_{11}}(J_{11}^{(2)}) = 4 \left[(J_{11}^{(2)}p) + (J_{12}^{(2)}v) \right] \partial_x + 2 \partial_x \left[(J_{11}^{(2)}p) + (J_{12}^{(2)}v) \right]$$

$$\text{Pr } v_{J_{12}}(J_{12}^{(2)}) = a \left[(J_{21}^{(2)}p) + (J_{22}^{(2)}v) \right] \partial_x + b \partial_x \left[(J_{21}^{(2)}p) + (J_{22}^{(2)}v) \right]$$

$$\text{Pr } v_{J_{21}}(J_{21}^{(2)}) = c \left[(J_{21}^{(2)}p) + (J_{22}^{(2)}v) \right] \partial_x + d \partial_x \left[(J_{21}^{(2)}p) + (J_{22}^{(2)}v) \right]$$

$$\text{Pr } v_{J_{22}}(J_{22}^{(2)}) = n \left[(J_{11}^{(2)}p) + (J_{21}^{(2)}v) \right]$$

elde edilir. Bu denklemler (3.57) denkleminde yerine konularak,

$$\begin{aligned} \text{Pr } v_{J_{11}}(\Theta) = \frac{1}{2} \int dx \left\{ 4(J_{21}^{(2)}v) \wedge p_x \wedge p + (a - b + d) \left[(J_{21}^{(2)}p) + (J_{22}^{(2)}v) \wedge v_x \wedge p \right] \right. \\ \left. - (a + b + d) \left[(J_{21}^{(2)}p) + (J_{22}^{(2)}v) \wedge v \wedge p_x \right] + n \left[(J_{11}^{(2)}p) + (J_{12}^{(2)}v) \wedge v \wedge v \right] \right\} = 0 \quad (3.59) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.51) denkleminde matris elemanları (3.59) denkleminde yerine konularak,

$$\begin{aligned}
\Pr v_{j\omega}(\Theta) = \frac{1}{2} \int dx \Big\{ & 4(a\xi v_x + b\xi_x v) \wedge p_x \wedge p + (a-b+d)(mv_{xx} + nuv + c\xi p_x) \wedge v_x \wedge p + \\
& -(a+b+d)(mv_{xx} + nuv + d\xi_x p) \wedge v \wedge p_x + (a\xi v_x + b\xi_x v - p_{xxx} + 4up_x + 2u_x p) \wedge v \wedge v \Big\} = 0
\end{aligned}
\tag{3.60}$$

bulunur. (3.60) denklemi düzenlenerek,

$$\begin{aligned}
\Pr v_{j\omega}(\Theta) = \frac{1}{2} \int dx \Big\{ & [4a - c(a-b+d)]\xi v_x \wedge p_x \wedge p + [4a - d(b+c-d)]\xi_x v \wedge p_x \wedge p \\
& + [m(a+c) + 6n]v_{xx} \wedge v_x \wedge p + [m(b+c-d) + 2n]v_{xxx} \wedge v \wedge p \\
& + \left[4n - \frac{n}{2}(a+b+2c-d)\right]up_x \wedge v \wedge v + \left[4n - \frac{n}{2}(a-b+d)\right]u_x p \wedge v \wedge v \\
& + \frac{n}{3}(3b-a)\xi_x v \wedge v \wedge v \Big\} = 0
\end{aligned}
\tag{3.61}$$

elde edilir. (3.61) denkleminin sıfıra eşit olabilmesi için, integrantın sıfır olması gerekmektedir. Yani,

$$4a - c(a - b + d) = 0$$

$$4a - d(b + c - d) = 0$$

$$m(a + c) + 6n = 0$$

$$m(b + c - d) + 2n = 0$$

$$4 - \frac{1}{2}(a + b + 2c - d) = 0$$

$$4 - \frac{1}{2}(a - b + d) = 0$$

$$3b - a$$

olmalıdır. Bu denklemlerin basit çözümleri bütün katsayıların sıfır olması veya,

$$a = c = 3$$

$$b = 1$$

$$d = 2$$

$$n = -m$$

(3.62)

olmaktadır. Görüldüğü gibi $J^{(1)}$ ve $J^{(2)}$ operatörleri Jacobi özdeşliğini sağlamaktadır, böylece süper KdV denkleminin bi-Hamilton yapıya sahip olduğunu söyleyebiliriz. (3.47) de verilen H_1 'den

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = 3u^2 + \frac{1}{2}c_2 \xi \xi_x - u_{xx}$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta \xi} = c_2 u \xi_x + \frac{1}{2}c_2 \xi u_x - c_1 \xi_{xxx}$$

hesaplanarak, (3.52a) denkleminde,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3u^2 + \frac{1}{2}c_2\xi\xi_x - u_{xx} \\ c_2u\xi_x + \frac{1}{2}c_2u_x\xi - c_1\xi_{xxx} \end{pmatrix}$$

veya

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + \frac{c_2}{2}\xi\xi_{xx} \quad (3.63a)$$

$$\xi_t = c_3c_2u\xi_x + \frac{1}{2}c_3c_2u_x\xi - c_3c_1\xi_{xxx} \quad (3.63b)$$

şeklinde bozonik ve fermiyonik değişkenler için zaman evrim denklemleri elde edilir. Aynı işlemler, H_2 ve $J^{(2)}$ için tekrarlanarak,

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + ac_0\xi\xi_{xx} \quad (3.64a)$$

$$\xi_t = mc_0\xi_{xxx} + (d + nc_0)u\xi_x + cu_x\xi \quad (3.64b)$$

denklemleri elde edilir. (3.63) ve (3.64) denklemleri süper KdV denklemleridir. Buna göre, (3.62) yardımı ile her iki denklemin terimleri eşleştirilerek, $n = -m = 4$ olmak üzere,

$$c_0 = 1 \quad c_1 = 4, \quad c_2 = 6 \quad \text{ve} \quad c_3 = 1$$

bulunur. Böylece süper KdV denklemi,

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + 3\xi\xi_{xx} \quad (3.65a)$$

$$\xi_t = -4\xi_{xxx} + 6\xi_x u + 3u_x \xi \quad (3.65b)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi süper KdV denklemi bi-Hamilton yapıya sahip olduğundan tamamen çözülebilir bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Fakat süpersimetrik KdV denklemi bi-Hamilton yapıya sahip değildir. Süpersimetrik KdV için birinci Hamilton

$$\bar{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \iint [2\Phi(D\Phi)^2 + D^2\Phi D^3\Phi] d\mu \quad (3.66)$$

ile verilir. Burada,

$$d\mu = dx d\theta, \quad \int d\theta = 0 \quad \text{ve} \quad \int \theta d\theta = 1$$

şeklindedir. Kolayca görüleceği gibi $\bar{H}^{(1)}$ sKdV-a için korunan bir büyüklüktür. $\bar{H}^{(1)}$ için süper alanların Poisson yapısı,

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = -D_1 \Delta \quad (3.67)$$

ile verilir. Burada süper Δ fonsiyonu,

$$\Delta = (\theta_1 - \theta_2) \delta(x_1 - x_2)$$

şeklindedir. Δ fonsiyonun işlevi,

$$\int F(x_1, \theta_1) \Delta d\mu_1 = F(x_2, \theta_2)$$

ve

$$\frac{\delta \bar{H}^{(1)}}{\delta \Phi} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} D^i \frac{\partial \bar{H}^{(1)}}{\partial (D^i \Phi)}$$

olmak üzere,

$$\Phi_t = \{\Phi, \bar{H}^{(1)}\} = \int d\mu \{\Phi_1, \Phi_2\} \frac{\delta \bar{H}^{(1)}}{\delta \Phi} \quad (3.68)$$

denkleminden,

$$\Phi_t = \{\Phi, \bar{H}^{(1)}\} = -D^6 \Phi + 4D\Phi D^2 \Phi + 2\Phi D^3 \Phi \quad (3.69)$$

şeklinde hesaplanır. Bu denklem (3.35) denklemde $a = 2$ değeri için elde edilen denklemdir. İkinci Hamilton yapısı ise,

$$\bar{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \int \Phi D\Phi d\mu \quad (3.70)$$

ile verilir. $\bar{H}^{(2)}$ için Poisson parantezi,

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = +D_1^5 \Delta - 3\Phi_1 D_1^2 \Delta + (D_1 \Phi) D_1 \Delta - 2(D_1^2 \Phi) \Delta \quad (3.71)$$

olmak üzere Φ_t ,

$$\Phi_t = \{\Phi, \bar{H}^{(2)}\} = -D^6 \Phi + 3D^2(\Phi D\Phi) \quad (3.72)$$

bulunur. Bu denklem aynı şekilde (3.35) denkleminde $a = 3$ değeri için elde edilen denklemdir. Böylece aynı denklemi veren sabit bir a değeri olmadığından (3.35) denklemi bi-Hamilton yapıya sahip değildir. Bununla beraber sKdV-3 denklemi Lax denklemini sağladığından sKdV-3 çözülebilir bir denklem olmaktadır (Barcelos ve Das, 1992).

4. ÇOK BİLEŞENLİ LİNEER OLMAYAN SÜPER ÇÖZÜLEBİLİR SİSTEMLER

4.1 Çok Bileşenli KdV Denklemleri

İlk iki bölümde KdV ve süper KdV denklemlerinin çözülebilirlik koşulları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Son yıllarda KdV denkleminin birden fazla KdV alanı için genelleştirilmesi üzerine çalışmalar yapılmaktadır (Svinolupov, 1991). Bu genelleştirmeye $\phi_i(x, t)$ N-bileşenli alan olmak üzere,

$$L = \frac{1}{2} \delta_{ij} \phi_{i,x} \phi_{j,t} + \frac{1}{2} b_{ij} \phi_{i,xx} \phi_{j,xx} - \frac{1}{3} C_{ijk} \phi_{i,x} \phi_{j,x} \phi_{k,x} \quad (4.1)$$

ile verilen Lagrangian yoğunluğu ile başlanabilir (Oğuz, 1995). Burada $i, j = 1, 2, \dots, N$, b_{ij} ve C_{ijk} tamamen simetrik olan sabitlerdir. (4.1) denkleminde hareket denklemleri,

$$\phi_{i,xt} = b_{ij} \phi_{j,xxx} + C_{ijk} (\phi_{j,x} \phi_{k,x})_x \quad (4.2)$$

elde edilir. u_i , hız potansiyelleri,

$$u_i(x, t) = \phi_{i,x}(x, t) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. u_i , (4.2) denkleminde yerine konularak çok bileşenli KdV denklemleri,

$$u_{i,t} = b_{ij} u_{j,xxx} + C_{ijk} (u_j u_k)_x \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir. (4.4) denkleminin çözülebilirliği, ilk iki bölümde görüldüğü gibi bi-Hamilton sisteme sahip olup olmadığına bakılarak elde edilir. Böylece sistemimizin kanonik momentumu, Hamilton formalizminden yola çıkılarak,

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial(\phi_{i,t})} = \frac{1}{2} \phi_{i,x} \quad (4.5)$$

ile verilir. Kanonik Poisson parantezi de,

$$\{\phi_i(x), \Pi_j(x')\} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta(x - x') \quad (4.6)$$

ve u_i potansiyelleri cinsinden,

$$\{u_i(x), \Pi_j(x')\} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_x \delta(x - x') \quad (4.7)$$

veya

$$\{u_i(x), u_j(x')\} = \delta_{ij} \partial_x \delta(x - x') \quad (4.8)$$

şeklini alır. Burada $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ şeklinde türev operatörünü göstermektedir. Böylece birinci Hamilton operatörü,

$$J_{ij}^{(1)} = \delta_{ij} \partial_x \quad (4.9)$$

olur. (4.9) denklemi skew-simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlamaktadır. Bu durumda karşılık gelen Hamilton,

$$H_1 = \int (\delta_{ij} \Pi_i \phi_{j,t} - L) dx$$

veya

$$H_1 = \int \left(-\frac{1}{2} b_{ij} \phi_{i,xx} \phi_{j,xx} + \frac{1}{3} C_{ijk} \phi_{i,x} \phi_{j,x} \phi_{k,x} \right) dx \quad (4.10)$$

olmaktadır. (4.4) denklemi göz önüne alınarak, (4.10) denklemi,

$$H_1 = \int \left(-\frac{1}{2} b_{ij} u_{i,x} u_{j,x} + \frac{1}{3} C_{ijk} u_i u_j u_k \right) dx \quad (4.11)$$

şeklini alır. Buradan (4.4) denklemi

$$u_{i,t} = \{u_i, H_i\} = J_{ij}^{(1)} E_j (H_i) \quad (4.12)$$

ile elde edilir. E_j , Euler türevi olup,

$$E_j = \frac{\delta}{\delta u_j} = \sum_{m=0}^n (-1)^m \partial_x^m \frac{\partial}{\partial u_{i,mx}}$$

ile verilir. Ayrıca (4.4) denkleminin,

$$H_2 = \int \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} u_i u_j \right) dx \quad (4.13)$$

Hamilton fonksiyonundan da elde edilebileceği gösterilebilir. Bunun için gerekli olan Hamilton operatörünün elde edilmesidir. Böylece ,

$$m_{ij} = \frac{2}{3} C_{ijk} u_k$$

olmak üzere

$$J_{ij}^{(2)} = b_{ij} \partial_x^3 + m_{ij} \partial_x + \partial_x m_{ij} \quad . \quad . \quad (4.14)$$

şeklinde bir Hamilton operatörü alınabilir. (4.14) operatörünün skew-simetrik olduğu kolayca görülebilir. $J_{ij}^{(2)}$ nin Hamilton operatörü olabilmesi için, Jacobi özdeşliğini de sağlamalıdır.

Jacobi özdeşliği daha önce de kullandığımız gibi

$$\text{Pr } v_{j\theta}(\Theta) = 0 \quad (4.15)$$

ile verilir (Olver, 1986). Burada Θ

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \theta^i \wedge J_{ij}^{(2)} \theta^j dx \quad (4.16)$$

şeklindedir. (4.16), (4.15) te yerine konularak,

$$\text{Pr } v_{J\theta}(\Theta) = -\frac{1}{2} \int \theta^i \wedge \text{Pr } v_{J\theta}(J_{ij}^{(2)}) \wedge \theta^j dx \quad (4.17)$$

şeklini alır ve,

$$\text{Pr } v_{J\theta}(J_{ij}^{(2)}) = \sum_{k,\alpha,\beta} \partial_k (J_{\alpha\beta} \theta^\beta) \frac{\partial J_{ij}^{(2)}}{\partial u_k^\alpha} \quad (4.18)$$

ile verilir. Burada $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$ ve $k = 1, x, xx, \dots$ (kaçıncı dereceden türev olduğunu gösterir) şeklindedir. (4.18) denklemi hesaplanıp (4.17) de yerine konularak,

$$\text{Pr } v_{J\theta}(\Theta) = -\frac{1}{2} \int (b_{k\beta} C_{ijk} \theta_{xxx}^\beta \wedge \theta^i \wedge \theta_x^j + 2C_{ijk} C_{k\beta m} u^m \theta_x^\beta \wedge \theta^i \wedge \theta_x^j) dx = 0 \quad (4.19)$$

elde edilir. Jacobi özdeşliğinin sağlanabilmesi için,

$$b_{k\beta} C_{kji} - b_{ki} C_{kj\beta} = 0 \quad (4.20)$$

$$C_{kij} C_{k\beta m} - C_{k\beta j} C_{kim} = 0$$

ile verilen bağ koşulları gerekmektedir. Böylece (4.15) denklemi sağlanmış olur. Yani (4.20) bağ koşulları ile birlikte $J_{ij}^{(2)}$ Hamilton operatörü olmaktadır.

Çok bileşenli mKdV denklemini elde etmek için,

$$u_i = -C_{ijk} \omega_j \omega_k + \sqrt{3} \omega_{i,x} \quad (4.21)$$

şeklinde genelleştirilmiş Miura transformasyonu kullanılabilir. Burada u_i ,

$$u_{i,t} = u_{i,xxx} + C_{ijk} (u_j u_k)_x \quad (4.22)$$

ile verilen çok bileşenli KdV denkleminin ($b_{ij} = \delta_{ij}$) çözümleridir. (4.22) denklemi (4.21) de yerine konularak ve (4.20) de verilen koşullar kullanılarak,

$$\left(-C_{ijk}\omega_j\omega_k + \sqrt{3}\omega_{i,x}\right)\left(\omega_{i,t} - \omega_{k,xxx} - 2C_{klm}C_{npm}\omega_l\omega_n\omega_{p,x}\right) = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir. Böylece çok bileşenli mKdV denklemi

$$\omega_{i,t} = \omega_{i,xxx} - 2C_{ilm}C_{npm}\omega_l\omega_n\omega_{p,x} \quad (4.24)$$

şeklinde elde edilir. Kolayca görüleceği gibi Miura dönüşümü kullanılarak çok bileşenli mKdV denkleminin herhangi bir çözümünü çok bileşenli KdV denkleminin çözümünden elde etmek mümkün olmaktadır.

4.2 Çok Bileşenli Süper KdV Denklemi

Yukarıdaki kısımda KdV denkleminin çok bileşenli KdV denkleme genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu kısımda n-bozonik ve m-fermiyonik bileşenleri içeren çok bileşenli süper KdV denkleme genelleştirilme göz önüne alınacaktır. Ayrıca bu denklemlerin çok bileşenli bi-Hamilton yapısı elde edilerek, çok bileşenli süper KdV denkleminin çözülebilir bir denklem olduğu gösterilmekte ve çok bileşenli süper mKdV elde edilmektedir. Bundan sonraki kısımda kullanılacak Latin (Greek) indisler fermiyonik (bozonik) büyüklüklere karşılık geldiğini göstermektedir. Çok bileşenli süper KdV denklemleri $b_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma}$, $K_{\alpha ab}$ ve $M_{a\beta b}$ sabit katsayılar olmak üzere,

$$u_{\alpha,t} = b_{\alpha\beta}u_{\beta,xxx} + 3C_{\alpha\beta\gamma}u_{\beta,x}u_{\gamma} + K_{\alpha ab}\xi_a\xi_{b,xx} \quad (4.25a)$$

$$\xi_{a,t} = \Lambda_{ab}\xi_{b,xxx} + M_{a\beta b}(2u_{\beta}\xi_{b,x} + u_{\beta,x}\xi_b) \quad (4.25b)$$

şeklinde alınabilir. (4.25) denklemlerini veren Hamilton operatörlerini sırası ile,

$$J_{AB}^{(1)} = \begin{pmatrix} J_{\alpha\beta}^{(1)} & J_{\alpha b}^{(1)} \\ J_{a\beta}^{(1)} & J_{ab}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}\partial_x & 0 \\ 0 & \delta_{ab} \end{pmatrix} \quad (4.26a)$$

$$J_{AB}^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{\alpha\beta}^{(2)} & J_{\alpha b}^{(2)} \\ J_{a\beta}^{(2)} & J_{ab}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\alpha\beta}\partial_x^3 + 2C_{\alpha\beta\gamma}u_{\gamma}\partial_x + C_{\alpha\beta\gamma}u_{\gamma,x} & K_{\alpha bd}\xi_d\partial_x + L_{\alpha bd}\xi_{d,x} \\ M_{a\beta d}\xi_d\partial_x + N_{a\beta d}\xi_{d,x} & \Lambda_{ab}\partial_x^2 + \Omega_{ab\gamma}u_{\gamma} \end{pmatrix} \quad (4.26b)$$

şeklinde alalım. Burada

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, n \text{ (bozonik)}$$

$$a, b = 1, 2, 3, \dots, m \text{ (fermiyonik)}$$

olmak üzere $A = (\alpha, a)$ ve $B = (\beta, b)$ şeklinde alınmıştır. Bölüm 3'te (1+1) boyutta olduğu gibi $J_{AB}^{(1)}$ ve $J_{AB}^{(2)}$ nin Hamilton operatörü olabilmesi için Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekmektedir. $J_{AB}^{(1)}$ nin Jacobi özdeşliğini sağladığı çok kolay bir şekilde görülmesine karşın $J_{AB}^{(2)}$ için kolay olmadığı açıktır.

4.3 Jacobi Özdeşliği

Burada da ,

$$\text{Pr } v_{J\omega}(\Theta) = 0 \quad (4.27)$$

şeklinde verilen Jacobi özdeşliğinin $J_{AB}^{(2)}$ operatörü için sağlanması üzerine çalışılmaktadır.

Benzer şekilde

$$\omega^A = (\theta^\alpha, \eta^a) \text{ ve } \omega^B = (\theta^\beta, \eta^b) \quad (4.28)$$

olmak üzere,

$$\Theta = \frac{1}{2} \int (J_{AB}^{(2)} \omega^B \wedge \omega^A) dx \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlanır. (4.29) denklemi daha açık olarak,

$$\Theta = \frac{1}{2} \int [J_{\alpha\beta}^{(2)} \omega^\beta \wedge \omega^\alpha + J_{ab}^{(2)} \omega^b \wedge \omega^a + J_{a\beta}^{(2)} \omega^\beta \wedge \omega^a + J_{\alpha b}^{(2)} \omega^b \wedge \omega^\alpha] dx \quad (4.30)$$

yazılır. (4.28) denklemi yardımı ile,

$$\Theta = \frac{1}{2} \int [(J_{\alpha\beta}^{(2)}\theta^\beta) \wedge \theta^\alpha + (J_{\alpha b}^{(2)}\eta^b) \wedge \theta^\alpha + (J_{a\beta}^{(2)}\theta^\beta) \wedge \eta^a + (J_{ab}^{(2)}\eta^b) \wedge \eta^a] dx \quad (4.31)$$

şeklini alır. (4.31) denklemi (4.27) denkleminde yerine konularak,

$$\begin{aligned} \text{Pr } v_{J^{(2)}\omega}(\Theta) = \frac{1}{2} \int \Big\{ & [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{\alpha\beta}^{(2)})\theta^\beta] \wedge \theta^\alpha + [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{\alpha b}^{(2)})\eta^b] \wedge \theta^\alpha \\ & + [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{a\beta}^{(2)})\theta^\beta] \wedge \eta^a + [\text{Pr } v_{J\omega}(J_{ab}^{(2)})\eta^b] \wedge \eta^a \Big\} dx = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir. Hem fermiyonik hem de bozonik değişkenlerin olduğu bu durum için indisler

$$J = 1, x, xx, xxx, \dots$$

$$A' = (c, \lambda) \text{ ve } B' = (r, \rho)$$

$$Q^{A'} = (u^\lambda, \xi^c)$$

olmak üzere,

$$\text{Pr } \vartheta_{J\omega} = \sum_{j, A', B'} \partial_j (J_{A'B'} \omega^{B'}) \frac{\partial}{\partial Q_j^{A'}} \quad (4.33)$$

olur. Böylece (4.33) denklemi kullanılarak,

$$\text{Pr } v_{J\omega}(J_{\alpha\beta}^{(2)}) = 2C_{\alpha\beta\lambda} \left[(J_{\lambda r}^{(2)}\eta^r + J_{\lambda\rho}^{(2)}\theta^\rho) \partial_x + \frac{1}{2} \partial_x (J_{\lambda r}^{(2)}\eta^r + J_{\lambda\rho}^{(2)}\theta^\rho) \right] \quad (4.34a)$$

$$\text{Pr } v_{J\omega}(J_{\alpha b}^{(2)}) = K_{\alpha bc} (J_{cr}^{(2)}\eta^r + J_{c\rho}^{(2)}\theta^\rho) \partial_x + L_{\alpha bc} \partial_x (J_{cr}^{(2)}\eta^r + J_{c\rho}^{(2)}\theta^\rho) \quad (4.34b)$$

$$\text{Pr } v_{J\omega}(J_{a\beta}^{(2)}) = M_{\alpha\beta c} (J_{cr}^{(2)}\eta^r + J_{c\rho}^{(2)}\theta^\rho) \partial_x + N_{\alpha\beta c} \partial_x (J_{cr}^{(2)}\eta^r + J_{c\rho}^{(2)}\theta^\rho) \quad (4.34c)$$

$$\text{Pr } v_{J\omega}(J_{ab}^{(2)}) = \Omega_{a\beta c} (J_{\lambda r}^{(2)}\eta^r + J_{\lambda\rho}^{(2)}\theta^\rho) \quad (4.34d)$$

hesaplanır. (4.34) denklemleri (4.32) de yerine konularak,

$$\begin{aligned}
 \text{Pr } v_{J\omega}(\Theta) = \frac{1}{2} \int \Big\{ & 2C_{\alpha\beta\lambda} \left((J_{\lambda r}^{(2)} \eta^r) \wedge \theta_x^\beta \wedge \theta^\alpha + (J_{\lambda p}^{(2)} \theta^p) \wedge \theta_x^\beta \wedge \theta^\alpha + \frac{1}{2} \partial_x (J_{\lambda r}^{(2)} \eta^r + J_{\lambda p}^{(2)} \theta^p) \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\alpha \right) \\
 & + K_{\alpha bc} (J_{cr}^{(2)} \eta^r) \wedge \eta_x^b \wedge \theta^\alpha + K_{\alpha bc} (J_{cp}^{(2)} \theta^p) \wedge \eta_x^b \wedge \theta^\alpha + L_{\alpha bc} \partial_x (J_{cr}^{(2)} \eta^r) \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha \\
 & + L_{\alpha bc} \partial_x (J_{cp}^{(2)} \theta^p) \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha + M_{a\beta c} (J_{cr}^{(2)} \eta^r) \wedge \theta_x^\beta \wedge \eta^a + M_{a\beta c} (J_{cp}^{(2)} \theta^p) \wedge \theta_x^\beta \wedge \eta^a \\
 & + N_{a\beta c} \partial_x (J_{cr}^{(2)} \eta^r) \wedge \theta^\beta \wedge \eta^a + N_{a\beta c} \partial_x (J_{cp}^{(2)} \theta^p) \wedge \theta^\beta \wedge \eta^a + \Omega_{ab\lambda} (J_{\lambda r}^{(2)} \eta^r) \wedge \eta^b \wedge \eta^a \\
 & + \Omega_{ab\lambda} (J_{\lambda p}^{(2)} \theta^p) \wedge \eta^b \wedge \eta^a \Big\} dx = 0
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35) denkleminde üçüncü terim,

$$C_{\alpha\beta\lambda} = C_{\beta\alpha\lambda} \tag{4.36}$$

koşulu ile sıfır olmaktadır. Ayrıca altıncı, yedinci, onuncu ve onbirinci terimlere kısmi integrasyon uygulanarak ve,

$$C_{\alpha\beta\lambda} b_{\lambda p} = C_{\rho\beta\lambda} b_{\lambda\alpha} = C_{\alpha\rho\lambda} b_{\lambda\beta} \tag{4.37}$$

$$C_{\alpha\beta\lambda} C_{\lambda\rho\gamma} = C_{\alpha\rho\lambda} C_{\lambda\beta\gamma} = C_{\rho\beta\lambda} C_{\lambda\alpha\gamma}$$

koşulları göz önüne alınarak (4.35) denklemi

$$\begin{aligned}
 \text{Pr } v_{J\omega}(\Theta) = \frac{1}{2} \int dx \Big\{ & 2C_{\alpha\beta\lambda} (J_{\lambda r}^{(2)} \eta^r) \wedge \theta_x^\beta \wedge \theta^\alpha + (K_{\alpha bc} - L_{\alpha bc} + N_{b\alpha c}) (J_{cr}^{(2)} \eta^r + J_{cp}^{(2)} \theta^p) \wedge \eta_x^b \wedge \theta^\alpha \\
 & - (L_{\alpha bc} + M_{b\alpha c} + N_{b\alpha c}) (J_{cr}^{(2)} \eta^r + J_{cp}^{(2)} \theta^p) \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha + \Omega_{ab\lambda} (J_{\lambda r}^{(2)} \eta^r + J_{\lambda p}^{(2)} \theta^p) \wedge \eta^b \wedge \eta^a \Big\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklini alır. Burada matris elemanları indislerine göre ,

$$\begin{aligned}
 J_{\lambda\rho}^{(2)} &= b_{\lambda\rho} \partial_x^3 + 2C_{\lambda\rho\gamma} u_\gamma \partial_x + C_{\lambda\rho\gamma} u_{\gamma,x} \\
 J_{\lambda r}^{(2)} &= K_{\lambda rd} \xi_d \partial_x + L_{\lambda rd} \xi_{d,x} \\
 J_{cp}^{(2)} &= M_{cpd} \xi_d \partial_x + N_{cpd} \xi_{d,x} \\
 J_{cr}^{(2)} &= \Lambda_{cr} \partial_x^2 + \Omega_{cr\gamma} u_\gamma
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklinde düzenlenerek (4.38) denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
 \text{Pr } v_{J\omega}(\Theta) &= \frac{1}{2}(I_1 - I_2 + I_3 + I_4) + \frac{1}{2} \int dx \left\{ 2C_{\alpha\beta\lambda} (K_{\lambda rd} \xi_d \eta_x^r \wedge \theta_x^\beta \wedge \theta^\alpha + L_{\lambda rd} \xi_{d,x} \eta^r \wedge \theta_x^\beta \wedge \theta^\alpha) \right. \\
 &+ (K_{\alpha bc} - L_{\alpha bc} + N_{bac}) (\Lambda_{cr} \eta_{xx}^r \wedge \eta_x^b \wedge \theta^\alpha + M_{cpd} \xi_d \theta_x^p \wedge \eta_x^b \wedge \theta^\alpha + N_{cpd} \xi_{d,x} \theta^p \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha) \\
 &- (L_{\alpha bc} + M_{bac} - N_{bac}) (\Omega_{cr\gamma} u_\gamma \eta^r \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha + M_{cpd} \xi_d \theta_x^p \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha + N_{cpd} \xi_{d,x} \theta^p \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha) \\
 &\left. + \Omega_{abl} L_{\lambda rd} \xi_{d,x} \eta^r \wedge \eta^b \wedge \eta^a + 2\Omega_{abl} C_{\lambda\rho\gamma} u_\gamma \theta_x^p \wedge \eta^b \wedge \eta^a + \Omega_{abl} C_{\lambda\rho\gamma} u_{\gamma,x} \theta^p \wedge \eta^b \wedge \eta^a \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilir. Burada $\xi_{d,x} \theta^p \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha$ ve $\xi_d \theta_x^p \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha$ çarpanlarını içeren terimlerin

$$(K_{\alpha bc} - L_{\alpha bc} + N_{bac}) N_{cpd} = (K_{pbc} - L_{pbc} + N_{bpc}) N_{cad} \tag{4.41a}$$

$$(L_{\alpha bc} + M_{bac} - N_{bac}) M_{cpd} = (L_{pbc} + M_{bpc} - N_{bpc}) M_{cad} \tag{4.41b}$$

koşulları göz önüne alındığında, sıfır olduğu görülür. Ayrıca, I_1 , I_2 , I_3 ve I_4 integralleri,

$$I_1 = \Omega_{\text{crg}} (K_{\alpha bc} - L_{\alpha bc} + N_{b\alpha c}) \int u_\gamma \eta^r \wedge \eta_x^b \wedge \theta^\alpha dx$$

$$I_2 = \Lambda_{\text{cr}} (M_{b\alpha c} - N_{b\alpha c} + L_{\alpha bc}) \int \eta_{xx}^r \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha dx$$

$$I_3 = \Omega_{ab\lambda} L_{\lambda rd} \int \xi_d \eta_x^r \wedge \eta^b \wedge \eta^a dx$$

$$I_4 = \Omega_{ab\lambda} b_{\lambda\rho} \int \theta_{xxx}^\rho \wedge \eta^b \wedge \eta^a dx$$

ile verilir. I_1 , I_2 , I_3 ve I_4 integrallerine ayrı ayrı kısmi integrasyon uygulanarak,

$$I_1 = -\frac{1}{2} \Omega_{\text{crg}} (K_{\alpha bc} - L_{\alpha bc} + N_{b\alpha c}) \int (u_{\gamma,x} \eta^r \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha - u_\gamma \eta^r \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha) dx \quad (4.42a)$$

$$I_2 = \Lambda_{\text{cr}} (M_{\alpha bc} - N_{b\alpha c} + L_{\alpha bc}) \int (\eta_{xxx}^r \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha + \eta_{xx}^r \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha) dx \quad (4.42b)$$

$$I_3 = -\frac{1}{3} \Omega_{ab\lambda} K_{\lambda rd} \int \xi_{d,x} \eta^r \wedge \eta^b \wedge \eta^a dx \quad (4.42c)$$

$$I_4 = -2\Omega_{ab\lambda} b_{\lambda\rho} \int (\eta_{xxx}^a \wedge \theta^\rho \wedge \eta^b + 3\eta_{xx}^a \wedge \theta^\rho \wedge \eta_x^b) dx \quad (4.42d)$$

elde edilir. Bu sonuçlardan sonra sırası ile,

$$\Omega_{\text{crg}} (K_{\alpha bc} - L_{\alpha bc} + N_{b\alpha c}) = \Omega_{\text{cbr}} (K_{\alpha rc} - L_{\alpha rc} + N_{r\alpha c}) \quad (4.43a)$$

$$\Omega_{ab\lambda} K_{\lambda rd} = \Omega_{rb\lambda} K_{\lambda ad} \quad (4.43b)$$

$$\Omega_{ab\lambda} = \Omega_{rb\lambda} = \Omega_{ba\lambda} \quad (4.43c)$$

koşulları altında bu terimlerin sıfır olduğu görülmektedir. (4.42) denklemleri (4.40) ta yerine konularak ve gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\begin{aligned}
\text{Pr v}_{J\omega}(\Theta) = & \frac{1}{2} \int \left\{ \left[2C_{\alpha\beta\lambda} K_{\lambda rd} - M_{c\beta d} (K_{arc} - L_{arc} + N_{rac}) \right] \xi_d \eta_x^r \wedge \theta_x^\beta \wedge \theta^\alpha \right. \\
& + \left[2C_{\alpha\beta\lambda} L_{\lambda rd} - N_{cad} (M_{r\beta c} - N_{r\beta c} + L_{\beta rc}) \right] \xi_{d,x} \eta^r \wedge \theta_x^\beta \wedge \theta^\alpha \\
& + \left[\Lambda_{cr} (K_{abc} + M_{bac}) - 6\Omega_{br\lambda} b_{\lambda\alpha} \right] \eta_{xx}^r \wedge \eta_x^b \wedge \theta^\alpha \\
& + \left[\Lambda_{cr} (M_{bac} - N_{bac} + L_{abc}) - 2\Omega_{rb\lambda} b_{\lambda\alpha} \right] \eta_{xxx}^r \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha \\
& - \left[2\Omega_{rb\lambda} C_{\lambda\rho\gamma} - \frac{1}{2} \Omega_{c\gamma} (2M_{bac} - N_{bac} + K_{abc} + L_{abc}) \right] u_\gamma \eta^r \wedge \eta^b \wedge \theta_x^\alpha \\
& - \left[\Omega_{rb\lambda} C_{\lambda\alpha\gamma} - \frac{1}{2} \Omega_{c\gamma} (N_{bac} + K_{abc} - L_{abc}) \right] u_{\gamma,x} \eta^r \wedge \eta^b \wedge \theta^\alpha \\
& \left. + \frac{1}{3} \Omega_{abl} [3L_{\lambda rd} - K_{\lambda rd}] \xi_{d,x} \eta^r \wedge \eta^b \wedge \eta^a \right\} dx = 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.44) denkleminin sıfır olması için integranttaki her katsayının ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekmektedir. Yani,

$$2C_{\alpha\beta\lambda} K_{\lambda rd} - M_{c\beta d} (K_{arc} - L_{arc} + N_{rac}) = 0 \tag{4.45a}$$

$$2C_{\alpha\beta\lambda} L_{\lambda rd} - N_{cad} (M_{r\beta c} - N_{r\beta c} + L_{\beta rc}) = 0 \tag{4.45b}$$

$$\Lambda_{cr} (K_{abc} + M_{bac}) - 6\Omega_{br\lambda} b_{\lambda\alpha} = 0 \tag{4.45c}$$

$$\Lambda_{cr} (M_{bac} - N_{bac} + L_{abc}) - 2\Omega_{rb\lambda} b_{\lambda\alpha} = 0 \tag{4.45d}$$

$$2\Omega_{abl} C_{\lambda\rho\gamma} - \frac{1}{2} \Omega_{c\gamma} (2M_{bac} - N_{bac} + K_{abc} + L_{abc}) = 0 \tag{4.45e}$$

$$\Omega_{rb\lambda} C_{\lambda\alpha\gamma} - \frac{1}{2} \Omega_{c\gamma} (N_{bac} + K_{abc} - L_{abc}) = 0 \tag{4.45f}$$

$$\frac{1}{3}\Omega_{ab\lambda}[3L_{\lambda rd} - K_{\lambda rd}] = 0 \quad (4.45g)$$

olmalıdır. Bu koşullar sağlandığı takdirde (4.44) denklemi sağlanır ve $J_{AB}^{(2)}$ nin Jacobi özdeşliğini sağladığı görülür. Böylece katsayılar arasında (4.36), (4.37), (4.41), (4.43) ve (4.45) koşullarının sağlanması halinde (4.25) çok bileşenli süper KdV denklemlerinin bi-Hamilton yapısı elde edilmiş olmaktadır. Bir başka deyişle (4.25) denklemlerinin tamamen çözülebilir oldukları gösterilmiş olmaktadır. Bir sonraki kısımda Hamilton fonksiyonları verilecek ve bi-Hamilton yapı tamamlanmış olacaktır. Elde ettiğimiz bağ koşullarına

$$\Omega_{ab\lambda} = \Omega_{ba\lambda}$$

$$K_{\alpha ad} = 3L_{\alpha ad}$$

$$M_{acd} = \frac{3}{2}N_{acd}$$

$$N_{acd} = 2L_{acd}$$

$$K_{\alpha ad} = M_{acd}$$

$$b_{\lambda\alpha}\Omega_{ab\lambda} = \Lambda_{db}L_{\alpha ad}$$

$$C_{\alpha\beta\lambda}L_{\lambda ab} = 2L_{\alpha ad}L_{\beta db}$$

$$\Omega_{ab\lambda}L_{\lambda cd} = \Omega_{ac\lambda}L_{\lambda bd}$$

$$M_{acd}M_{d\beta b} = M_{a\beta d}M_{d\alpha b}$$

şeklinde bir çözüm bulunacağı gibi, bunlar tek çözüm olmayabilir. Daha farklı çözümler bulmak da mümkün olabilir. Ayrıca bu çözümlerin oluşturduğu yapının incelenmesi bize yeni simetriler bulmamıza olanak sağlayacaktır.

4.4 Çok Bileşenli Süper KdV Denkleminin Bi-Hamilton Yapısı

Görüldüğü gibi, (4.26) denklemlerinde verilen birinci ve ikinci Hamilton operatörleri, Jacobi özdeşliğini (4.45) denklemi ile verilen koşullar altında sağlamaktadırlar. Böylece (4.25) denklemleri çok bileşenli süper KdV denkleminin bi-Hamilton olduğunu, bu da çok bileşenli KdV denkleminin çözülebilir bir denklem olduğunu göstermektedir. Çok bileşenli KdV denklemini veren Hamilton'lar sırası ile,

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} \int dx \left[-b_{\alpha\beta} u_{\alpha,x} u_{\beta,x} + C_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha} u_{\beta} u_{\gamma} - \Lambda_{ab} \xi_{a,x} \xi_{b,xx} + 2K_{abc} u_{\alpha} \xi_b \xi_{c,x} \right] \quad (4.46a)$$

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} \int dx \left[\delta_{\rho\sigma} u_{\rho} u_{\sigma} + \delta_{ab} \xi_a \xi_{b,x} \right] \quad (4.46b)$$

şeklinde alınabilir. (4.25) denklemleri, (4.26) ve (4.46) denklemleri kullanılarak,

$$\partial_t \Phi_A = J_{AB}^{(1)} \frac{\delta H^{(1)}}{\delta \Phi_B} \quad (4.47a)$$

veya

$$\partial_t \Phi_A = J_{AB}^{(2)} \frac{\delta H^{(2)}}{\delta \Phi_B} \quad (4.47b)$$

denklemlerinden hesaplanabilir. Burada $\Phi_A = (u_{\alpha}, \xi_a)$ ve $\Phi_B = (u_{\beta}, \xi_b)$ şeklindedir. (4.46a) denklemini kullanarak,

$$\frac{\delta H^{(1)}}{\delta u_{\sigma}} = b_{\sigma\beta} u_{\beta,xx} + \frac{3}{2} C_{\sigma\beta\gamma} u_{\beta} u_{\gamma} + K_{\sigma bc} \xi_b \xi_{c,x} \quad (4.48a)$$

$$\frac{\delta H^{(1)}}{\delta \xi_n} = \Lambda_{ab} \xi_{b,xxx} + K_{anb} (2u_{\alpha} \xi_{b,x} + u_{\alpha,x} \xi_b) \quad (4.48b)$$

hesaplanır. (4.48) denklemleri, (4.47a)'da yerine konularak,

$$u_{\alpha,t} = b_{\alpha\beta} u_{\beta,xxx} + 3C_{\alpha\beta\gamma} u_{\beta,x} u_{\gamma} + K_{\alpha bc} \xi_b \xi_{c,xx} \quad (4.49a)$$

$$\xi_{a,t} = \Lambda_{ab} \xi_{b,xxx} + K_{\alpha ab} (2u_{\alpha} \xi_{b,x} + u_{\alpha,x} \xi_b) \quad (4.49b)$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.46b) denkleminde,

$$\frac{\delta H^{(2)}}{\delta u_{\beta}} = u_{\beta} \quad (4.50a)$$

$$\frac{\delta H^{(2)}}{\delta \xi_b} = \xi_{b,x} \quad (4.50b)$$

hesaplanarak ve (4.47b) de yerine konularak,

$$u_{\alpha,t} = b_{\alpha\beta} u_{\beta,xxx} + 3C_{\alpha\beta\gamma} u_{\beta,x} u_{\gamma} + K_{\alpha ab} \xi_a \xi_{b,xx} \quad (4.51a)$$

$$\xi_{a,t} = \Lambda_{ab} \xi_{b,xxx} + M_{a\alpha b} \xi_b u_{\alpha,x} + (N_{a\alpha b} + \Omega_{ab\alpha}) u_{\alpha} \xi_{b,x} \quad (4.51b)$$

bulunur. (4.49) ve (4.51) denklemleri çok bileşenli süper KdV denklemleridir. Her iki denklemin katsayıları eşleştirilerek,

$$2K_{\alpha ab} = N_{a\alpha b} + \Omega_{ab\alpha}$$

ve

$$K_{\alpha ab} = M_{a\alpha b}$$

bulunur. Böylece çok bileşenli süper KdV denklemi,

$$u_{\alpha,t} = b_{\alpha\beta} u_{\beta,xxx} + 3C_{\alpha\beta\gamma} u_{\beta,x} u_{\gamma} + K_{\alpha ab} \xi_a \xi_{b,xx} \quad (4.52a)$$

$$\xi_{a,t} = \Lambda_{ab} \xi_{b,xxx} + M_{a\alpha b} (2u_{\alpha} \xi_{b,x} + u_{\alpha,x} \xi_b) \quad (4.52b)$$

şeklini alır. Görüldüğü gibi elde edilen (4.52) denklemleri (4.26)'da verilen denklemlerin aynısıdır. Çok bileşenli KdV denklemin (1+1) boyuttaki limitinde,

$$u_{1,t} = b_{11}u_{1,xxx} + 3C_{111}u_{1,x}u_1 + K_{111}\xi_1\xi_{1,xx} \quad (5.53a)$$

$$\xi_{1,t} = \Lambda_{11}\xi_{b,xxx} + M_{111}(2u_1\xi_{1,x} + u_{1,x}\xi_1) \quad (5.53b)$$

şeklini alır. Burada, $b_{11} = -1$, $C_{111} = 2$, $\Lambda_{11} = -4$, $K_{111} = M_{111} = 3$, $u_1 = u$ ve $\xi_1 = \xi$ şeklinde seçilerek,

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + 3\xi\xi_{xx}$$

$$\xi_t = -4\xi_{xxx} + 6\xi_x u + 3u_x \xi$$

(3.65) denkleminde verilen (1+1) boyuttaki süper KdV denklemi elde edilmiş olur. Fermiyonik limitte ise çok bileşenli KdV denklemin elde edilir.

4.5 Çok Bileşenli Süper mKdV Denklemi

Çok bileşenli süper mKdV denkleminin çözümlerini çok bileşenli süper KdV denklemin taşıyan genelleştirilmiş Miura dönüşümünü,

$$u_\alpha = \frac{1}{2}C_{\alpha\lambda\rho}v_\lambda v_\rho + v_{\alpha,x} + K_{\alpha ab}\theta_a\theta_{b,x} \quad (4.54a)$$

$$\xi_b = \theta_{b,x} + \frac{1}{3}M_{b\sigma c}v_\sigma\theta_c \quad (4.54b)$$

şeklinde yazalım. Burada v bozonik ve θ fermiyonik büyüklükleri tanımlamakta ve $C_{\alpha\beta\gamma}$, $K_{\alpha\alpha c}$ ve $M_{b\sigma c}$ katsayılar çok bileşenli süper KdV denkleminde kullanılan katsayılardır. 1+1 limitine gidilirse Kupershmidt (1984) tarafından verilen (3.24) denklemleri ile verilen tek bileşenli süper Miura dönüşümü elde edilir. (4.54) denklemleri düzenlenerek (4.52b) denkleminde ($b_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ ve $\Lambda_{ab} = -4\delta_{ab}$) yerine konularak;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \theta_{a,t} + \frac{1}{3} M_{asc} (v_{\sigma} \theta_{a,t} + \theta_c v_{\sigma,t}) = & -4\theta_{a,xxx} - \frac{4}{3} M_{asc} (v_{\sigma,xxx} \theta_c + 3v_{\sigma,xx} \theta_{c,x} + 3v_{\sigma,x} \theta_{c,xx} + v_{\sigma} \theta_{c,xxx}) \\
& + M_{aab} \left[\left(C_{\alpha\lambda\rho} v_{\lambda} v_{\rho} + 2v_{\alpha,x} + \frac{1}{6} K_{\alpha mn} \theta_m \theta_{n,x} \right) \left(\theta_{b,xx} + \frac{1}{3} M_{b\sigma c} (v_{\sigma,x} \theta_c + v_{\sigma} \theta_{c,x}) \right) \right. \\
& \left. + \left(C_{\alpha\lambda\rho} v_{\lambda,x} v_{\rho} + v_{\alpha,xx} + \frac{1}{12} K_{\alpha mn} \theta_m \theta_{n,xx} \right) \left(\theta_{b,x} + \frac{1}{3} M_{b\sigma c} v_{\sigma} \theta_c \right) \right] \quad (4.55)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \theta_{a,t} + \frac{1}{3} M_{asc} (v_{\sigma} \theta_{c,t} + v_{\sigma,t} \theta_c) = & \partial_x \left[-4\theta_{a,xxx} - M_{asc} (v_{\sigma,xxx} \theta_c + 2v_{\sigma,x} \theta_{c,x}) \right. \\
& \left. + M_{aab} C_{\alpha\lambda\rho} (v_{\lambda} v_{\rho} \theta_{b,x} + v_{\lambda,x} v_{\rho} \theta_b) \right] \\
& + v_{\sigma} \left[-\frac{4}{3} M_{asc} \theta_{c,xxx} + \left(\frac{1}{3} M_{b\sigma c} M_{a\lambda b} - M_{aac} C_{\alpha\lambda\rho} \right) (v_{\lambda,xx} \theta_c + 2v_{\lambda,x} \theta_{c,x}) \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} M_{aab} M_{b\sigma c} C_{\alpha\lambda\rho} (v_{\lambda} v_{\rho} \theta_{c,x} + v_{\lambda,x} v_{\rho} \theta_c) \right] \\
& + \left[-\frac{1}{3} M_{asc} v_{\sigma,xxx} + \frac{1}{3} M_{aab} C_{\alpha\lambda\rho} M_{b\sigma c} v_{\lambda} v_{\rho} v_{\sigma,x} + \left(\frac{2}{3} M_{a\lambda b} M_{b\rho c} - M_{aac} C_{\alpha\lambda\rho} \right) v_{\lambda,x} v_{\rho,x} \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} K_{\alpha nc} M_{aab} \left(\theta_{n,x} \theta_{b,xx} - \frac{1}{2} \theta_{n,xx} \theta_{b,x} \right) + \frac{1}{36} K_{\alpha mn} M_{aab} M_{b\sigma c} (2v_{\sigma,x} \theta_m \theta_{n,x} + v_{\sigma} \theta_m \theta_{n,xx}) \right] \theta_c \quad (4.56)
\end{aligned}$$

şeklini alır. Daha önce elde ettiğimiz bağ koşullarından,

$$M_{a\alpha d} M_{d\sigma b} = M_{a\sigma d} M_{d\alpha b}$$

$$M_{aac} C_{a\lambda\sigma} = \frac{2}{3} M_{a\lambda b} M_{b\sigma c}$$

$$K_{\alpha mn} M_{b\sigma c} = K_{\alpha mc} M_{b\sigma n}$$

(4.56) denkleminde kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \theta_{a,t} + \frac{1}{3} M_{a\sigma c} (v_{\sigma} \theta_{c,t} + v_{\sigma,t} \theta_c) = & \partial_x \left[-4\theta_{a,xxx} - M_{a\sigma c} (v_{\sigma,xx} \theta_c + 2v_{\sigma,x} \theta_{c,x}) \right. \\ & \left. + M_{a\sigma b} C_{a\lambda\rho} (v_{\lambda} v_{\rho} \theta_{b,x} + v_{\lambda,x} v_{\rho} \theta_b) \right] \\ & + v_{\sigma} \left[-\frac{4}{3} M_{a\sigma b} \theta_{b,xxx} - \frac{1}{3} M_{a\sigma b} M_{b\lambda c} (v_{\lambda,xx} \theta_c + 2v_{\lambda,x} \theta_{c,x}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} M_{a\sigma b} M_{b\alpha c} C_{a\lambda\rho} (v_{\lambda} v_{\rho} \theta_{b,x} + v_{\lambda,x} v_{\rho} \theta_b) \right] \\ & + \left[-\frac{1}{3} M_{a\beta c} v_{\beta,xxx} + \frac{1}{3} M_{a\beta b} C_{\beta\alpha\sigma} C_{a\lambda\rho} v_{\lambda} v_{\rho} v_{\sigma,x} + \frac{1}{6} M_{a\beta c} K_{\beta mn} \left(\theta_{n,x} \theta_{m,xx} - \frac{1}{2} \theta_{b,x} \theta_{m,xx} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{36} K_{\alpha mn} C_{\beta\sigma\alpha} M_{a\beta c} (2v_{\sigma,x} \theta_m \theta_{n,x} + v_{\sigma} \theta_m \theta_{n,xx}) \right] \theta_c \quad (4.57) \end{aligned}$$

şeklini alır. (4.57) denklemini düzenlenerek,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \theta_{a,t} + \frac{1}{3} M_{a\sigma c} (v_{\sigma} \theta_{c,t} + v_{\sigma,t} \theta_c) = & \frac{\partial}{\partial x} \left[-4\theta_{a,xxx} - M_{a\lambda c} (v_{\lambda,xx} \theta_c + 2v_{\lambda,x} \theta_{c,x}) \right. \\ & \left. + M_{a\sigma b} C_{a\lambda\rho} (v_{\lambda} v_{\rho} \theta_{b,x} + v_{\lambda,x} v_{\rho} \theta_b) \right] \\ & + \frac{1}{3} M_{a\sigma b} v_{\sigma} \left[-4\theta_{b,xxx} - M_{b\lambda c} (v_{\lambda,xx} \theta_c + 2v_{\lambda,x} \theta_{c,x}) + M_{b\alpha c} C_{a\lambda\rho} (v_{\lambda} v_{\rho} \theta_{b,x} + v_{\lambda,x} v_{\rho} \theta_b) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} M_{a\beta c} \left[-v_{\beta,xxx} + \frac{3}{2} C_{\beta\alpha\sigma} C_{\alpha\lambda\rho} v_{\lambda} v_{\rho} v_{\sigma,x} + \frac{1}{2} K_{\beta mn} \left(\theta_{n,x} \theta_{m,xx} - \frac{1}{2} \theta_{m,x} \theta_{n,xx} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} K_{\alpha mn} C_{\beta\sigma\alpha} (2v_{\sigma,x} \theta_m \theta_{n,x} + v_{\sigma} \theta_m \theta_{n,xx}) \right] \theta_c \quad (4.58)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.58) denkleminin sağ ve sol terimleri karşılaştırılarak,

$$v_{\beta,t} = -v_{\beta,xxx} + \frac{3}{2} C_{\beta\alpha\sigma} C_{\alpha\lambda\rho} v_{\lambda} v_{\rho} v_{\sigma,x} + \frac{1}{8} K_{\alpha mn} C_{\beta\sigma\alpha} (2v_{\sigma,x} \theta_m \theta_{n,x} + v_{\sigma} \theta_m \theta_{n,xx}) + \frac{1}{4} K_{\beta mn} \theta_{n,x} \theta_{m,xx} \quad (4.59a)$$

$$\theta_{a,t} = -4\theta_{a,xxx} - M_{a\sigma c} (v_{\sigma,xx} \theta_c + 2v_{\sigma,x} \theta_{c,x}) + M_{a\alpha b} C_{\alpha\lambda\rho} (v_{\lambda} v_{\rho} \theta_{b,x} + v_{\lambda,x} v_{\rho} \theta_b) \quad (4.59b)$$

denklem çifti elde edilir. (4.59) denklemleri çok bileşenli mKdV denklemdir. (4.59) denklemini (1+1) boyuttaki limitinde,

$$v_{1,t} = -v_{1,xxx} + \frac{3}{2} C_{111} C_{111} v_1 v_1 v_{1,x} + \frac{1}{8} K_{111} C_{111} (2v_{1,x} \theta_1 \theta_{1,x} + v_1 \theta_1 \theta_{1,xx}) + \frac{1}{4} K_{111} \theta_{1,x} \theta_{1,xx} \quad (4.60a)$$

$$\theta_{1,t} = -4\theta_{1,xxx} - M_{111} (v_{1,xx} \theta_1 + 2v_{1,x} \theta_{1,x}) + M_{111} C_{111} (v_1 v_1 \theta_{1,x} + v_{1,x} v_1 \theta_1) \quad (4.60b)$$

şeklini alır. Burada, $C_{111} = 2$, $M_{111} = K_{111} = 3$, $v_1 = v$ ve $\theta_1 = \theta$ seçilerek,

$$v_t = \partial_x \left(2v^3 - v_{xx} + \frac{3}{4} \theta \theta_{xx} + \frac{3}{2} v \theta \theta_x \right) \quad (4.61a)$$

$$\theta_t = -4\theta_{xxx} + (6vv_x - 3v_{xx})\theta + 6(v^2 - v_x)\theta_x \quad (4.61b)$$

daha önce (1+1) boyutta bulduğumuz ve (3.26) denklemini ile verilen süper mKdV denklemini elde edilmiş olur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada (1+1) boyutta lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem olan KdV denkleminin çözülebilirliği ele alınarak, KdV denkleminin tamamen çözülebilen bir sistem olduğu bir kaç farklı yöntem ile gösterilmiştir. Daha sonra fermiyonik değişkenlerin ithal edilmesi ile KdV denkleminin süper ve süper simetrik genelleştirilmesi incelenmiştir. Bu inceleme sonucu da; süpersimetrik dönüşümler altında değişmez olmayan süper KdV denklemi bi-Hamilton yapıya sahip ve çözülebilen bir sistem olduğu görülmüştür. Öte yandan süpersimetrik dönüşümler altında değişmez olan süpersimetrik KdV denklemi bi-Hamilton yapıya sahip değildir. Ancak bir “a” parametresine bağlı olan sKdV denkleminin sadece $a = 3$ değeri için Lax denklemini sağladığı ve böylece çözülebilir bir sistem olduğu anlaşılmıştır. $a \neq 3$ değerleri için sKdV denklemi çözülemeyen bir sistem olmaktadır.

Son bölümde, ele alınan ve çalışmanın amacını oluşturan süper KdV denkleminin çok bileşenli süper KdV denklemine genelleştirilmesi ve çözülebilirliği incelenmiştir. Burada çözülebilirlik sistemin bi-Hamilton yapısı incelenerek elde edilmiştir. $J^{(1)}$ ve $J^{(2)}$ Hamilton operatörlerinin Hamilton sistem olup olmadıkları Jacobi özdeşliğini sağlamaları ile anlaşılmaktadır. $J^{(1)}$ in Hamilton sistem olduğu kolayca görülmesine karşın $J^{(2)}$ için o kadar açık değildir. Elde edilen sonuçlara göre $J^{(2)}$ nin ancak bazı bağ koşulları altında Jacobi özdeşliğini sağladığı gösterilmiştir. (4.36), (4.37), (4.41), (4.43) ve (4.45) koşullarının sağlanması halinde (4.25) çok bileşenli süper KdV denklemlerinin bi-Hamilton yapısı elde edilmiş olmaktadır. Bu koşulların çözümleri,

$$K_{\alpha d} = 3L_{\alpha d}$$

$$M_{\alpha d} = \frac{3}{2}N_{\alpha d}$$

$$N_{\alpha d} = 2L_{\alpha d}$$

$$K_{\alpha d} = M_{\alpha d}$$

$$b_{\lambda\alpha}\Omega_{ab\lambda} = \Lambda_{db}L_{\alpha d}$$

$$C_{\alpha\beta\lambda} L_{\lambda ab} = 2L_{\alpha ad} L_{d\beta b}$$

$$\Omega_{ab\lambda} L_{\lambda cd} = \Omega_{ac\lambda} L_{\lambda bd}$$

$$M_{acd} M_{d\beta b} = M_{a\beta d} M_{d\alpha b}$$

$$2K_{\alpha ab} = N_{\alpha ab} + \Omega_{ab\alpha}$$

şeklinde bulunmuştur. Bu çözümler den farklı çözümler de bulmak mümkün olabilir. Görüldüğü gibi burada $K_{\alpha ad}$, $\Omega_{ad\alpha}$, M_{acd} ve N_{acd} sabitleri $L_{\alpha ad}$ 'ye bağlıdır. Bu nedenle $K_{\alpha ad}$, $\Omega_{ad\alpha}$, M_{acd} ve N_{acd} sabitleri $L_{\alpha ad}$ cinsinden,

$$M_{acd} = K_{\alpha ad} = 3L_{\alpha ad}$$

$$N_{acd} = 2L_{\alpha ad}$$

$$\Omega_{ad\alpha} = 4L_{\alpha ad}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $J^{(2)}$ Hamilton operatörünü daha sade bir halde,

$$J_{AB}^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{\alpha\beta}^{(2)} & J_{\alpha b}^{(2)} \\ J_{a\beta}^{(2)} & J_{ab}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\alpha\beta} \partial_x^3 + 2C_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma \partial_x + C_{\alpha\beta\gamma} u_{\gamma,x} & 3L_{\alpha bd} \xi_d \partial_x + L_{\alpha bd} \xi_{d,x} \\ 3L_{a\beta d} \xi_d \partial_x + 2L_{a\beta d} \xi_{d,x} & \Lambda_{ab} \partial_x^2 + 4L_{ab\gamma} u_\gamma \end{pmatrix}$$

ve buna bağlı olarak çok bileşenli KdV denkleminde,

$$u_{\alpha,t} = b_{\alpha\beta} u_{\beta,xxx} + 3C_{\alpha\beta\gamma} u_{\beta,x} u_\gamma + 3L_{\alpha ab} \xi_a \xi_{b,xx}$$

$$\xi_{a,t} = \Lambda_{ab} \xi_{b,xxx} + 3L_{aab} (2u_a \xi_{b,x} + u_{a,x} \xi_b)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece daha sade olan $J^{(2)}$ Hamilton operatörü ile hesaplamalar daha az karmaşık ve daha kolay olmaktadır. Son olarak genelleştirilmiş çok bileşenli süper Miura dönüşümü verilerek çok bileşenli süper mKdV denklemi elde edilmiştir. Süper mKdV

denklemleri hesaplanırken daha önce elde edilen bağ şartlarını kullanmak işlemleri kolaylaştırmıştır. Elde edilen çok bileşenli süper KdV ve süper mKdV denklemlerinin (1+1) boyuttaki tek bileşen limitleri elde edilerek bu denklemlerin tezin ikinci bölümünde verilen tek bileşenli süper denklemlerle aynı olduğu gösterilmiştir.

Burada çok bileşenli çözülebilir sistem elde etmek için kullanılan yöntem diğer tamamen çözülebilir sistemlerin çok bileşenli süper genelleştirmelerini elde etmede kullanılabilir. Ayrıca KdV denklemi için birinci bölümde anlatılan farklı çözülebilirlik kriterlerinden sadece bir tanesi (bi-Hamilton yapı) kullanılarak tamamen çözülebilir süper çok bileşenli KdV denklemi elde edilmiştir. Diğer kriterlerin bu denklemler için sağlandığının gösterilmesi bir başka çalışma konusudur. (1+1) boyuttaki çözülebilir sistemler ile uğraşmamız 4. boyuttaki lineer olmayan sistemlerin çözüm yöntemleri hakkında bilgi sahibi olmamıza yardımcı olması içindir. 3 boyutlu çözülebilir sistemler de vardır. Bu çalışmaların 4 boyuta taşınması bir başka önemli hedefi oluşturmaktadır.



KAYNAKLAR

Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. ve Segur H., (1973a), "Method for Solving the Sine-Gordon Equation", Phys. Rev. Lett., 30:1262-1264.,

Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. ve Segur H., (1973b), "Nonlinear Evolution Equations of Physical Significance", Phys. Rev. Lett. 31:125-127.

Ablowitz M. J ve Clarkson P. A., (1991), Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press, Cambridge.

Barcelos-Neto J. ve Das A., (1992), "On the Bi-Hamiltonian Structures of the sKdV", J. Math. Phys., 33(8):2743-2748.

Biao Hu X., (1997), "An Approach to Generate Superextensions of Integrable Systems", J. Phys. A: Math. Gen. 30: 619-632.

Brezin F. A., (1966), The Method of Second Quantization, Academic Press, Newyork.

Das A., (1989), Integrable Models, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol.30, Newyork.

Dirac P. A. M., (1958), The Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press, London.

Dodd R. K., Eilebeck J.C., Gibbon J.D., ve Morris H.C., (1984), Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, Inc., Newyork.

Erbay S. ve Oguz Ö., (1985), "A Super Extension of WKI Integrable Systems", Journal of Physics A, 18: L969-L974.

Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., ve., Miura R. M., (1967) "Method for Solving Korteweg de Vries Equation", Physical Review Lettes, 19:1095-1097.

Gürses M. ve Oğuz Ö., (1985), " A Super AKNS Scheme", Physics Letters, 108A(9): 437-440.

Gürses M. ve Oğuz Ö., (1986), " A Super Soliton Connection", Letters in Mathematical Physcis 11:235-246.

Gürses M. ve Karasu A., (1996), "Degenerate Svinolupov KdV Systems", Physics Letters A 214: 21-26.

Korteweg D. J., ve G. de Vries, (1895), "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and On a New Type of Stationary Waves ", Philos. Mag. Ser. 5, 39: 422-443.

Kupershmidt B. A., (1984), "A Super Korteweg-de Vries Equation: An Integrable System", Physics Letters, 102A(5, 6): 213-215.

- Kupershmidt B. A, (1985), "Odd and even Poisson Brackets in Dynamical Systems", Letters in Mathematical Physics, 9: 323-330.
- Kupershmidt B. A, (1987), Elements of Superintegrable Systems, D. Reidel, Dordrecht.
- Lax P. D., (1968), "Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves", Commun. Pure Appl. Math., 21: 467-490.
- Manin Yu I. ve Radul A. O., (1985), "A Super Symmetric Extension of the Kodomtsev-Petviashvili Hierarchy", Comm. Math. Phys. 98: 65-67.
- Mathieu P., (1988a), "Super Conformal Algebra and Supersymmetric Korteweg de-Vries Equation", Physics Letter B 203, (3): 287-291.
- Mathieu P., (1988b), "Super Symmetric Extension of the Korteweg-de Vries Equation", J. Math. Phys., 29(11): 2499-2056.
- Mathieu P., (1988c), "Hamiltonian Structure of Graded and Super Evolution Equations", Letters in Mathematical Physics, 16: 199-206.
- Mathieu P., (1992), "Süper Miura Transformations Süper Schwarzian Derivatives and Super Hill Operators", Integrable and super Integrable Systems, World Scientific, Newyork.
- McCauley J. L., (1997), Classical Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Miura R.M, (1968) "Korteweg de Vries Equation and Generalization. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation", Journal of Mathematical Physics, 9:1202-1204.
- Miura R.M, Gardner C. S. ve Kruskal M. D., (1968) "Korteweg de Vries Equation and Generalization.II.Existence of Conservation Laws and Constants of Motion", Journal of Mathematical Physics, 9, No:8:1205-1209.
- Oğuz Ö., (1995), "Hamiltonian Structure of Multicomponent KdV Equations", Symmetries in Science VII, B.Gruber, Plenum Press, Newyork.
- Olver P. J., (1986), Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, Newyork.
- Svinolupov S. I., (1991), "Jordan algebra and Generalization KdV Equations", Theoretical Mathematics, Plenum Publishing Corporation, 87: 611-620.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	30.08.1972	
Doğum Yeri	Antakya	
Lise	1986-1989	İstanbul Cıbalı Lisesi
Lisans	1989-1993	Yıldız Teknik Üniversitesi. Fen-Ed. Fak. Fizik Bölümü
Yüksek Lisans	1993-1996	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı
Doktora	1996-2000	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı
Çalıştığı kurum	1995-Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Fizik Bölümü, Araştırma Görevlisi