

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

79206

**FİZİKSEL UYGULAMALARI İLE
HEISENBERG LIE GRUBU ÜZERİNDE
KONTROL SİSTEMLERİ**

Gürsel HACİBEKİROĞLU

F.B.E. Fizik Anabilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

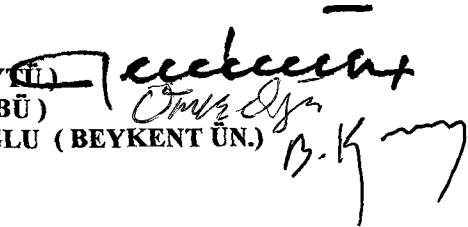
Tez Savunma Tarihi
Tez Danışmanı
Jüri Üyeleri

: 19 Kasım 1998

: Prof. Dr. Şevket ERK (YTÜ)

: Prof. Dr. Ömer OĞUZ (BÜ)

Prof. Dr. Bekir KARAOĞLU (BEYKENT ÜN.)



79206

İSTANBUL, 1998

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
1. GİRİŞ.....	1
2. HEISENBERG MODELİ.....	4
2.1 H Heisenberg Lie Grubu ve $\hbar$ Lie Cebiri.....	4
2.2 H in Co-adjoint Gösterilişi.....	8
3. H ÜZERİNDE KONTROL TEORİ.....	11
3.1 Giriş.....	11
3.2 Heisenberg Lie Grupları Üzerideki Invariant Kontrol Sistemleri.....	13
3.3 Heisenberg Lie Grupları Üzerideki Lineer Kontrol Sistemleri.....	15
3.4 Heisenberg Lie Grupları Üzerideki Singüler Kontrol Sistemleri.....	19
4. SPESİFİK FİZİKSEL PROBLEMLER.....	23
4.1 Analog Radar Sinyal Tasarımı ve Sayısal Sinyal Yöntemleri – Bir Heisenberg Sıfır Güçlü (Nilpotent) Lie Grubu Yaklaşımı.....	23
4.2 Heisenberg Lie Grubunun Perspektifinden Fourier Optikleri.....	27
5. SONUÇLAR.....	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	35

ÖNSÖZ

Tez konusunun seçimindeki katkılarından, araştırmaya verdiği yönlendirici destekten ve yardımlarından dolayı danışman hocam Prof.Dr. Şevket Erk 'e ve Prof.Dr. Victor Ayala 'ya ; yazılım aşamasındaki katkılarından dolayı eşim Yrd.Doç.Dr. Ayşe Kara Hacıbekiroğlu 'na teşekkür ederim.

Gürsel Hacıbekiroğlu

Kasım, 1998



ÖZET

"*Fiziksel Uygulamaları ile Heisenberg Lie Grubu Üzerinde Kontrol Sistemleri*" adlı bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

I. bölümde tezin giriş kısmı yer almaktadır. II. bölümde, genel olarak Heisenberg Lie grubu tanıtılıyor ve co-adjoint gösterilişi tanımlanıyor.

III. bölümde, kontrol sistemleri hakkında genel bilgiler veriliyor, Heisenberg Lie grubu üzerindeki invariant, normalizörlü lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği incelenip lineer sistemlerdeki kontrol edilebilirliğe destek veren bir teoremin ispatı veriliyor. Ayrıca, yeni bir sınıf sistem olan Lie grupları üzerinde normalizer ile verilen singüler kontrol sistemleri sunuluyor.

IV. bölüm de ise, Heisenberg Lie grubu yaklaşımı ile çözülmüş olan bazı spesifik fizik problemlerinden örnekler veriliyor. Bunlardan biri W. Schempp 'in bir çalışması "*Analog Radar Sinyal Tasarımı ve Sayısal Sinyal Yöntemleri -Bir Heisenberg Sıfır Güçlü (Nilpotent) Lie Grubu Yaklaşımı*" dır ve diğeri ise H. Rasziliier ve W. Schempp 'in ortak çalışmaları "*Heisenberg Lie Grubunun Perspektifinden Fourier Optikleri*" dır.

ABSTRACT

This thesis with the title "*Control Systems on the Heisenberg Lie Group with Physical Applications*" contains three chapters.

In I. chapter, we gave general facts about control systems.

In II. chapter, general informations about control systems are given and Singular Control Systems on Lie groups which are given with normalizer which are a new class of systems are presented. There is research proposal with results which we have.

In III. chapter, examples of some specific physics problems which are solved by Heisenberg Lie group approach are given. One of them is a work of W. Schempp "*Analog Radar Signal Design and Digital Signal Processing -a Heisenberg Nilpotent Lie Group Approach*" and the other one is a join work of H. Raszillier and W. Schempp "*Fourier Optics from the Perspective of the Heisenberg Group*."

1 GİRİŞ

Heisenberg Lie grubu üzerinde kontrol teorisinin ve bulunan sonuçların fiziksel anlamlarının incelenmesini amaçlayan bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Amacımız fizikte bir çok yerde uygulama alanı bulmuş olan Heisenberg Lie grubu üzerindeki invariant kontrol sistemlerini ve kontrol edilebilirlik sonuçlarını incelemek, gene Hiesenberg grubu üzerindeki dinamiği normalizör ile tanımlı lineer kontrol sistemlerini ve kontrol edilebilirlik sonuçlarını incelemek ve burada kontrol edilebilirliğe destek olan önemli bir teoremi Heisenberg grubu üzerinde kendi bakış açımızla ispatlamak, daha sonrada gene aynı grup üzerinde singüler sistemleri uyarlamaktır. Tüm bu sistemlerin incelenmesi aşama aşama ele alınmıştır. Heisenberg Lie grubu matematiksel fizikte oldukça ilginç araştırmalara neden olmuştur. Örneğin; Fourier optiğinde, analog ve sayısal sinyal işlemede, kuantum mekaniğinde ve analog radar sinyal tasarımında önemli bir rol oynar. Heisenberg Lie grubunun Fizikte bir çok uygulaması vardır. Yüksek enerji fiziğinde Heisenberg grubu ve cebiri kuantizasyonun bozulması veya quantum gruplarında, örneğin Heisenberg grubuna karşılık gelen q-bozulmuş versiyonunun bulunmasında, çok tartışılır. Heisenberg grubu üzerine uygulanan bu sistem çeşitlerinin yörüngelerinin önceden bilinebilir veya kaotik oluşlarını söyleyebiliriz. Kontrol edilebilirlik koşulunun gerçekleşmesiyle pozitif yörünge tüm gruba eşit olur. Kontrol sistemleri trenin istenen zamanda istenen mesafede durdurulabilmesi kontrolü, uydu kontrolleri ve benzeri bir çok problemlerde uygulama alanı bulmaktadır. Heisenberg grubu üzerindeki sistemlerin ilginç olacağı düşünülerek bu tez çalışmasında incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

II. bölümde, üzerinde özenle durduğumuz Heisenberg Lie grubunu tanıtırız. Öncelikle bu grubu tanımlamamıza yardımcı olacak bazı temel geometrik kavramları veriyoruz. Heisenberg Lie grubunu önce 3 boyutta ve daha sonra genel $2n+1$ boyutta verdikten sonra co-adjoint gösterilişini tanımlıyoruz. Bölümün sonunda örnek veriyoruz.

III. bölümde, genel kontrol sistemleri ve Heisenberg Lie grubu üzerindeki kontrol sistemi çeşitlerini tanımlıyoruz. Sonlu boyutlu H Heisenberg Lie grubu üzerindeki invariant kontrol sistemi $\Sigma = (H, D)$ aşağıdaki datanın belirtmesiyle tanımlıdır :

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(g).$$

Burada, $g \in H$, X, Y^j Heisenberg grubunun Lie cebirinin elemanları, $1 \leq j \leq k$ ve

$$u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

şeklinde parçalı sabit fonksiyonlar yani kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerdir. Öncelikle bu sistem üzerinde daha önceden elde edilmiş kontrol edilebilirlik yani pozitif zamanla stratejiler, durum ve grup üzerinde uygun koşullarla pozitif yörün genin tüm gruba eşit olması örneklerle inceleniyor. Heisenberg normalizörü tanımı olarak dinamiğin bu normalizörle verilen durum uzayı sonlu boyutlu Heisenberg Lie grubu ve dinamiği H üzerindeki

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(g),$$

$X \in \eta$, $Y^j \in \tilde{h}$, diferansiyel denklemlerin ailesi ile belirli olan $\Sigma = (H, \mathcal{D})$ sistemi Heisenberg grubu üzerindeki lineer kontrol sistemleri tanımlanıyor. Burada, $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$,

$$u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

şeklindeki parçalı sabit fonksiyonlar yani kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerdir. Bu tür sistemlerin kontrollenebilirliğine destek olan aşağıdaki teoremin ispatı veriliyor.

3.3.6 Teorem : $\Sigma = (H, \mathcal{D})$ Heisenberg grubu üzerinde lineer kontrol sistemi olsun. O takdirde,

$$\Phi : \eta \rightarrow \tilde{h} \otimes \partial \tilde{h}$$

bir üzerine izomorfizmdir.

Kontrol edilebilirlik örnekle inceleniyor.

Son olarak, Singüler sistemlerde Heisenberg modelini sunuyoruz. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki klasik lineer kontrol sistemleri 40 yıldan fazladır çalışılmaktadır. Bu sistemlerin

teorik ve pratik açılardan önemli olmasıyla beraber bazı uygulamalarda pratikten ortaya çıkan problemler çoğu kez problemin incelenerek model sistemin dinamiğini tamamen bilmenin mümkün olamayacağını göstermiştir. Bu zorluğa bir çözüm getirmek üzere 1980 de Singüler Sistemler ortaya çıkmıştır, (Dai), (Yip ve Sincover, 1981).

Klasik lineer sistemler ve singüler sistemler için durum uzayı $\mathbb{R}^n$ dir. H sonlu boyutlu Heisenberg Lie grubu ve $\tilde{h}$ Lie cebiri olmak üzere H üzerindeki bir Σ singüler kontrol sistemi, kabul edilebilir kontrollerin kümesi ile parametrelenmiş $E_x(\dot{x}) = X(x) + \sum_{j=1}^m u_j Y^j(x)$, $x \in H$ şeklindeki diferansiyel denklemlerin ailesi ile belirlidir. Burada, $E_x = dl_x \circ E \circ dl_{x^{-1}}$ ve $E : \tilde{h} \rightarrow \tilde{h}$ tersinir olmayan (non invertible) Lie cebiri homomorfizmidir. Diğer taraftan, drift vektör alanı $X \in \mathcal{X}(H)$ Lie cebirinin içinde $\tilde{h}$ nin normalizörü η ye aittir. Diğer bir deyişle :

$$X \in \eta = \{X \in \mathcal{X}(H) \mid [X, Y] \in \tilde{h}, \quad \forall Y \in \tilde{h}\}.$$

Her bir $j = 1, 2, \dots, m$ için Y^j kontrol vektörleri $\tilde{h}$ de elemanlardır.

IV. bölüm de ise, yüksek enerji fiziğinde bir çok uygulama alanı bulmuş olan ve ilerde bizim sonuçlarımıza da uygulanabileceğini düşündüğümüz Heisenberg Lie grubu yaklaşımı ile çözülmüş olan bazı spesifik fizik problemlerinden örnekler veriyoruz. Bunlardan biri W. Schempp 'in bir çalışması "*Analog Radar Sinyal Tasarımı ve Sayısal Sinyal Yöntemleri -Bir Heisenberg Sıfır Güçlü (Nilpotent) Lie Grubu Yaklaşımı*" dır ve diğeri ise H. Raszillier ve W. Schempp 'in ortak çalışmaları "*Heisenberg Lie Grubunun Perspektifinden Fourier Optikleri*" dır.

2 HEISENBERG MODELİ

2.1 H Heisenberg Lie Grubu ve $\hbar$ Lie cebiri

Birinci bölüme Heisenberg Lie grubunu tanımlamamıza yardımcı olacak bazı temel kavramları vererek başlıyoruz.

2.1.1 Tanım : n boyutlu bir M yerel Euclidean uzayı her bir noktası $\mathbb{R}^n$ Euclidean uzayının açık bir altkümesine homeomorfik bir komşuluğa sahip olan bir Hausdorff topolojik uzaydır. Eğer φ bağlantılı bir $U \subset M$ açık altkümeden $\mathbb{R}^n$ nin açık bir altkümüsi üzerine bir homeomorfizm ise, o taktirde φ ye *koordinat tasviri*, $x_i = r_i \circ \varphi$ fonksiyonlarına *koordinat fonksiyonları* ve (U, φ) çiftine (bazen $(U, x_1, \dots, x_n)$ şeklinde gösterilir) de *bir koordinat sistemi* denir. Burada, $r_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r_i(a) = a_i$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ile tanımlıdır.

2.1.2 Tanım : Bir yerel M Euclidean uzayı üzerinde C^∞ sınıfından bir F diferansiyellenebilir yapısı aşağıdaki üç özeliği sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ koordinat sistemlerinin bir koleksiyonudur :

- (a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.
- (b) Tüm $\alpha, \beta \in A$ için $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \in C^\infty$ sınıfındandır.
- (c) F koleksiyonu (b) ye göre maksimaldir; yani, eğer (U, φ) tüm $\alpha \in A$ için $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ve $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$ sınıfından olacak şekilde bir koordinat sistemi ise, o taktirde $(U, \varphi) \in F$.

C^∞ sınıfından bir n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold, bir yerel M Euclidean uzayı ile birlikte C^∞ sınıfından bir F diferansiyellenebilir yapısından oluşan bir (M, F) çiftidir.

2.1.3 Uyarı :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (2.1)$$

teğet demeti 2-dim M boyutlu bir manifolddur, (Varadarajan, 1974).

2.1.4 Tanım : Bir $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tasviri eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa

$p \in M$ de bir teğet vektördür :

$$(a) \quad X(f + g) = X(f) + X(g).$$

$$(b) \quad X(fg)(p) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Teğet vektörlerle ilgili temel sonuç, M manifoldunun boyutuna eşit boyutta olan $T_p M$ ile gösterilen her bir $p \in M$ noktasında bir sonlu vektör uzayı oluşturmalarıdır.

2.1.5 Tanım : M de açık $dom(X)$ üzerinde tanımlı bir X vektör alanı bir özdeşlik lifting idir, yani

$$\begin{array}{ccc} dom(X) \subset M & \xrightarrow{X} & TM \\ Id \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array} \quad (2.2)$$

dir. Burada, $\pi(p, v) = p$ dir. Denk olarak,

$$X(p) \in T_p M, \quad \forall p \in dom(X) \quad (2.3)$$

dır.

2.1.6 Tanım : Bir G kümesine, eğer $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1}$ ile tanımlı $G \times G \rightarrow G$ tasviri diferansiyellenebilir olacak şekilde bir grup yapısı ile birlikte bir diferansiyellenebilir manifold ise, *Lie grubu* denir.

$GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $U(n, \mathbb{R})$, $SU(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$ ve $SO(n, \mathbb{R})$ iyi bilinen Lie grubu örnekleridirler.

2.1.7 Tanım :

$$l_\sigma(\tau) = \sigma\tau \quad (2.4)$$

şeklinde verilen

$$l_\sigma : G \rightarrow G \quad (2.5)$$

tasvirine σ ile *sol dönüşüm (öteleme)* denir.

l_σ nın türevi

$$dl_\sigma : T(G) \rightarrow T(G) \quad (2.6)$$

dir. Burada, $dl_\sigma(T_\tau G) \subset T_{\sigma\tau} G$ dır.

2.1.8 Tanım : Bir X vektör alanına, eğer her $\sigma \in G$ için

$$X \circ l_\sigma = dl_\sigma(X) \quad (2.7)$$

ise, G üzerinde *sol-invariant*tır denir.

2.1.9 Tanım : Bir K cismi ($\mathbb{R}$ veya C) üzerindeki bir $\tilde{g}$ vektör uzayına, eğer vektör uzayı yapısına ek olarak (X, Y) çiftini alarak $\tilde{g}$ nın $[X, Y]$ elemanına götüren $\tilde{g} \times \tilde{g} \rightarrow \tilde{g}$ tasviri aşağıdaki özelliklere sahip ise, *bir Lie cebiridir* denir :

i) K üzerinde ikili-lineerdir :

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y], \quad (2.8)$$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2]; \quad (2.9)$$

ii) Ters-simetriktir :

$$[X, Y] = -[Y, X]; \quad (2.10)$$

iii) Jacobi özdeşliğini sağlar :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \quad (2.11)$$

$gl(n, \mathbb{R})$, $sl(n, \mathbb{R})$ ve $o(n, \mathbb{R})$ iyi bilinen Lie cebiri örnekleridirler.

2.1.10 Tanım : Heisenberg Lie grubu ve Lie cebiri

(i) Boyutun 3 olması hali :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.12)$$

formunda sıfır güçlü (nilpotent) basit bağlantılı bir Lie grubudur.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (2.13)$$

alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için, H de bir nokta elde ederiz, dolayısıyla $\gamma(t)$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \quad (2.14)$$

ve

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_e(H) \quad (2.15)$$

olacak şekilde H üzerinde bir eğridir. Bu sefer

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (2.16)$$

yi alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için, gene H de bir nokta elde ederiz ve dolayısıyla $\alpha(t)$ de

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \quad (2.17)$$

ve

$$\dot{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \in T_e(H) \quad (2.18)$$

olacak şekilde H de bir eğridir. Son olarak,

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (2.19)$$

alalım. Her $t \in \mathbb{R}$ için, H de bir nokta elde ederiz, dolayısıyla $\beta(t)$ de

$$\beta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \quad (2.20)$$

ve

$$\dot{\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \in T_e(H) \quad (2.21)$$

olacak şekilde H de bir eğridir. Böylece, H nin Lie cebiri

$$T_e(H) \cong \tilde{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.22)$$

dir.

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z, [X, Z] = 0 \quad \text{ve} \quad [Y, Z] = 0 \quad (2.23)$$

dir.

(ii) Boyutun $2n+1$ olması hali :

H nin $\tilde{h}$ Lie cebiri

$$[X_i, Y_i] = Z, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.24)$$

sıfır olmayan Lie parantezleri için aşağıdaki kurallar ile

$$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z \quad (2.25)$$

elemanları tarafından üretilir. Bu cebirin

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.26)$$

kamutatörü ile $n+2$ dereceden kesin olarak daha üstün matrislerin vektör uzayı üzerinde bir gerçekleştirmeye sahip olduğu bilinmektedir. Eğer $\delta(i, j)$ (i, j) -koordinatlarında 1 ve diğer yerlerdeki elemanları 0 lardan oluşan $n+2$ dereceden bir

matris ise, $i, j \in \{1, 2, \dots, n+2\}$ için

$$X_i = \delta(1, i+1), \quad Y_j = \delta(j+1, n+2) \quad \text{ve} \quad Z = \delta(1, n+2) \quad (2.27)$$

şeklinde özdeşleyebiliriz. Bu yolla, H nin elemanlarını X_i, Y_j ve Z lerin lineer kombinasyonları ile diyagonal üzerinde 1 ler elde ederek özdeşleyebiliriz. Dolayısıyla, $g \in H$, $g = (x, y, z)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ koordinatlarına sahiptir.

2.2 H nin Co-adjoint Gösterilişi H nin adjoint gösterilişi ρ aşağıdaki şekilde tanımlı

$$\rho : H \rightarrow \text{Aut}(\tilde{h}) \quad (2.28)$$

homomorfizmidir : her bir $g \in H$ için,

$$i_g : H \rightarrow H, \quad i_g(h) = ghg^{-1} \quad (2.29)$$

analitik tasviri H üzerine bir otomorfizmdir ve e deki türevi $\tilde{h}$ nin bir otomorfizmidir. O taktirde,

$$\rho : H \rightarrow \text{Aut}(\tilde{h}) \quad (2.30)$$

$$g \rightarrow \rho(g) = di_g \Big|_e \quad (2.31)$$

$\tilde{h}$ de H nin bir lineer gösterilişidir. Her bir $W \in \tilde{h}$ de $d\rho$ türevi

$$d\rho(W)(\cdot) = [W, \cdot] \quad (2.32)$$

ile verilir.

Co-adjoint gösteriliş ρ^* (ρ nun contragradient gösterilişi) $\tilde{h}$ nin dual uzayı $\tilde{h}^*$ de H nin lineer gösterilişidir ve

$$\rho^*(g)(\lambda)(W) = \lambda(\rho(g^{-1})W), \quad W \in \tilde{h} \quad (2.33)$$

ile tanımlı

$$H \times \tilde{h}^* \rightarrow \tilde{h}^*, \quad (2.34)$$

$$(g, \lambda) \rightarrow \rho^*(g)(\lambda) \quad (2.35)$$

etkisi (action) ile bulunabilir. Aşağıdaki diyagram kamutatiftir :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h} & \xrightarrow{d\rho} & \text{End}(\tilde{h}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow e \\ H & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}(\tilde{h}) \end{array} \quad (2.36)$$

Her $W \in \tilde{h}$ için $d\rho(W) \in \text{End}(\tilde{h})$ dir. Böylece,

$$\rho(\exp(tW)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (d\rho(W))^n \quad (2.37)$$

dir. O taktirde, eğer $\xi \in \tilde{h}$ ve $\lambda \in \tilde{h}^*$ ise,

$$d\rho^*(W)(\lambda)(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \lambda(\rho(\exp(-tW))(\xi)) \quad (2.38)$$

elde ederiz. $\rho(\exp(-tW))$ serisinin terim terim türevi alınarak

$$d\rho^* : \tilde{h} \rightarrow \text{End}(\tilde{h}^*) \quad (2.39)$$

lineer tasvirinin

$$d\rho^*(W)(\lambda)(\xi) = -\lambda[W, \xi], \quad \xi \in \tilde{h} \quad (2.40)$$

şeklinde verildiği sonucu çıkar. $\lambda \in \tilde{h}^*$ olsun. O taktirde, ρ^* etkisi (action) tarafından λ nın θ_λ co-adjoint yörüngesi, yani

$$\theta_\lambda = \rho^*(H)(\lambda) \quad (2.41)$$

$\tilde{h}$ nin bir alt manifoldudur, (Corwin ve Greenleaf, 1990). Gerçekten,

$$\rho_\lambda^* : H \rightarrow \theta_\lambda, \quad (2.42)$$

$$\rho_\lambda^*(g) = \rho^*(g)(\lambda) \quad (2.43)$$

analitik tasvirini gözönüne alalım. Her $W \in \tilde{h}^*$ ve $g \in H$ için,

$$d\rho_\lambda^* \Big|_g (W) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho_\lambda^*(g \exp(tW)) \quad (2.44)$$

$$= \rho^*(g)(d\rho^*(W))(\lambda) \quad (2.45)$$

dir. $\rho^*(g) \in \text{Aut}(\tilde{h}^*)$ olduğundan,

$$e_\lambda = \{w \in \tilde{h} | d\rho^*(W)(\lambda) = 0\} \quad (2.46)$$

altcebiri herhangi bir $g \in H$ için

$$\text{rank}(d\rho_\lambda^* \Big|_g) = \dim(\tilde{h}) - \dim(e_\lambda) \quad (2.47)$$

yi sağlar. Özellikle, $d\rho_\lambda^*$ nın rangı H üzerinde sabittir. Diğer taraftan, ρ^* etkisi (action) tarafından stabilizer

$$E_\lambda = \{g \in H | \rho^*(g)(\lambda) = \lambda\} \quad (2.48)$$

e_λ Lie cebirli H nin kapalı bir Lie altgrubudur.

2.2.1 Örnek : Lie cebiri ile birlikte 3-boyutlu Heisenberg Lie grubunu gözönüne alalım.

$$i : H \times H \rightarrow H \quad (2.49)$$

$$i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau) \quad (2.50)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (2.51)$$

ve

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (2.52)$$

olsun. O takdirde,

$$i_\sigma(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.53)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & z+ay-bx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

dir.

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = di_\sigma \quad (2.56)$$

$$i_\sigma : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z + ay - bx) \quad (2.57)$$

$$Jac(i_g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$di_\sigma : (x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -bx + ay + z \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$d\rho(X)(Y) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \rho(\exp tX)(Y) \quad (2.60)$$

$$\rho(t, 0, 0) \in Aut(\tilde{h}) \quad (2.61)$$

öyle ki

$$\rho(t, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$d\rho(X)(Y) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Z = [X, Y] \quad (2.63)$$

dir.

3 H ÜZERİNDE KONTROL TEORİ

3.1 Giriş

M bir diferansiyellenebilir manifold olsun ve $\mathcal{X}(M)$ de M nin açık altkümeleri üzerinde tanımlı tüm smooth vektör alanlarının ailesini gösterebiliriz. Smooth kavramını C^∞ veya analitik olarak düşüneceğiz. Her bir $X \in \mathcal{X}(M)$, M üzerinde yerel difeomorfizmlerin bir 1-parametrel grubunu tanımlar, yani X için olanaklı her bir $t \in \mathbb{R}$ için, manifoldlar üzerinde vektör alanları vasıtası ile üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık-teklik teoreminden dolayı, (Warner, 1971),

$$X_t : \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M \quad (3.1)$$

nin bir yerel difeomorfizm olduğu elde edilir ve eğer $\gamma^X(\cdot, x)$, x noktasındaki vektör alanının integral eğrisi ise, o takdirde

$$X_t(x) = \gamma^X(t, x) \quad (3.2)$$

ile tanımlıdır. Kuşkusuz,

$$X_{-t} : X_t(\text{dom}(X_t)) \subset M \rightarrow \text{dom}(X_t) \subset M \quad (3.3)$$

tersidir. Ayrıca, tanımlandığında,

$$\text{i) } X_t \circ X_s = X_{t+s},$$

$$\text{ii) } (X_t)^{-1} = X_{-t},$$

$$\text{iii) } X_0 = Id \text{ dir.}$$

3.1.1 Tanım : Bir Σ *control sistemi*, $\Sigma = (M, D)$ şeklinde bir ikili olarak tanımlanır. Burada, M diferansiyellenebilir bir manifold ve D , $\mathcal{X}(M)$ nin bir altailesidir.

3.1.2 Uyarılar :

i) M ye Σ nin *durum uzayı* denir.

ii) D nin elemanları sistemin stratejileri ve Σ nin kontrolleridirler.

iii) Σ bir

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, t_j \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}\} \quad (3.4)$$

"sözde (pseudo) grubu" tanımlar ve Σ tarafından M de x in yörüngesi, x de G_Σ nin etkisi (action) ile verilir :

$$G_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G_{\Sigma}\}. \quad (3.5)$$

3.1.3 Tanım : Eğer $G_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde $x \in M$ varsa, Σ sistemine *geçişlidir* denir.

Ayrıca Σ ile birleşmiş,

$$S_{\Sigma} = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \mid X^j \in D, \quad t_j \geq 0, \quad r \in \mathbb{N}\} \quad (3.6)$$

"sözde-yarı (pseudo-semi) grubu" elde edilir ve x den Σ nin "ulaşılabilirlik (accessibility) kümesi" denilen Σ ile M deki x in pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma}(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_{\Sigma}\} \quad (3.7)$$

dir.

Kontrol Teorideki temel problemlerden biri $S_{\Sigma}(x) = M$ olacak şekilde M , D ve $x \in M$ altındaki koşulları bulmaktır. Gerçekten, eğer bir x başlangıç noktası ile başlanırsa problem, Σ nin D dinamiği ile verilen negatif olmayan stratejiler ile M nin her noktasına ulaşmaktır. Yani $S_{\Sigma}(x) = M$ ne zaman doğrudur?

3.1.4 Tanım : $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun. Σ ya :

- i) eğer $S_{\Sigma}(x) = M$ ise, x de *kontrol edilebilir* dir,
- ii) eğer Σ , M nin her elemanı üzerinde kontrol edilebilir ise, *kontrol edilebilirdir* denir.

Burada, genel kontrol sistemleri için teorik açıdan çok önemli bilinen bir sonucu vereceğiz. Bu sonuca, sistemin dinamiği hakkındaki tüm bilgileri koruyan, M deki herhangi bir başlangıç koşulu için durum (state) uzayının yörüngesine indirgenmesine olanak veren Yörünge (Orbit) Teoremi adı verilir.

3.1.5 Teorem (Yörünge Teoremi, (Sussmann, 1973)) :

Eğer $\Sigma = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ ise, o takdirde $G_{\Sigma}(x)$ yörüngesi bir diferansiyellenebilir manifold yapısına sahiptir.

3.2 Heisenberg Lie Grubu Üzerindeki Invariant Kontrol Sistemleri

Sonlu boyutlu H Heisenberg Lie grubu üzerindeki invariant kontrol sistemi $\Sigma = (H, D)$ aşağıdaki data ile belirlidir :

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(g). \quad (3.8)$$

Burada, $g \in H$, X, Y^j Heisenberg grubunun Lie cebirinin elemanları, $1 \leq j \leq k$ ve

$$u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (3.9)$$

şeklinde parçalı sabit fonksiyonlar yani kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerdir.

Bu kısımda, Heisenberg Lie grubunun Lie cebiri $\tilde{h}$ nin elemanlarını H üzerinde sol invariant vektör alanları olarak gözönüne alacağız.

Dinamik D ise Σ ile birleşmiş

$$D = \{X + \sum_{j=1}^k u_j Y^j \mid u_j \in \mathbb{R}^k\} \quad (3.10)$$

şeklindedir.

Aşağıda 3-boyutlu Heisenberg Lie grubu üzerinde kontrol sistemi örneğini veriyoruz.

3.2.1 Örnek : H 3-boyutlu Heisenberg Lie grubu olsun. Yani

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.11)$$

ve Lie cebiri

$$\tilde{h} = \text{Span}_{\mathcal{L.A.}} \left\{ Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.12)$$

dir. Bu durumda, $[Y^1, Y^2] = Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

$$D = \{X + uY^2 \mid u \in \mathbb{R}\} \quad (3.13)$$

ile $\Sigma = (H, D)$ kontrol sistemini gözönüne alalım. Burada, X sonsuzküçük (infinitesimal) otomorfizmi

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad \text{icin} \quad X(x) = x_2 Y^3 \quad (3.14)$$

ile tanımlıdır. Σ geçişli değildir. Gerçekten,

$$G_{\Sigma}(e) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.15)$$

dir.

Bu tür sistemlerin kontrol edilebilirliği için aşağıdaki sonuç verilmiştir.

3.2.2 Teorem, (Ayala, 1995) : Σ basit bağlantılı G Lie grubu üzerinde bir nilpotent sistem olsun. O taktirde Σ ancak ve ancak $\tilde{h} = \tilde{g}$ ise kontrol edilebilirdir.

Burada, $\tilde{g}$ G nin Lie cebiri ve

$$\tilde{h} = \text{Span}_{L.A.}\{Y^1, Y^2, \dots, Y^k\} \quad (3.16)$$

dir.

Nilpotent sistem, nilpotent Lie grubu üzerindeki invariant sistem olduğuna göre bu sonuç Heisenberg grubu üzerindeki invariant kontrol sistemleri için de geçerlidir. Çünkü, Heisenberg grubu basit bağlantılı nilpotent bir Lie grubudur.

3.2.3 Örnek : 3-boyutlu Heisenberg grubu ve onun Lie cebiri

$$\tilde{h} = \text{Span}_{L.A.}\{Y^1, Y^2\} \quad (3.17)$$

yi gözönüne alalım.

$$D = \left\{ Y^1 + uY^2 \middle| Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.18)$$

dinamiği ile invariant kontrol sistemini alalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

dir. Burada,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

dir ve Teorem 3.2.2 ye göre bu sistem kontrol edilemez. Eğer sistemin dinamiği

$$D = \left\{ u_1 Y^1 + u_2 Y^2 \middle| Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.21)$$

şeklinde ise yani

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[u_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

ise kontrol vektörlerine bağlıdır ve kontrol edilebilirdir.

3.3 Heisenberg Lie Grubu Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemleri

Bu kısımda, bir önceki invariant hali genelleyen Heisenberg Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sistemlerinden bahsedeceğiz. Hatta daha da genelleştirerek normalizörün tanımlanmasıyla dinamiğin bir parçasını normalizörden alarak daha genel bir sistemin kontrollenmesi durumunu inceleyeceğiz. Bu daha genel hal için kontrollenme aşamasına götüren bir teoremin ispatını vereceğiz.

Eğer G Lie grubu ise, G nin $\tilde{g}$ Lie cebiri e birimindeki G nin $T_e G$ tanjant uzayı ile özdeşleştirilecektir. Aynı zamanda, $\mathcal{X}(G)$ G üzerindeki tüm C^∞ vektör alanlarının Lie cebiri olacaktır.

3.3.1 Tanım : Herhangi bir $Y \in \tilde{h}$ için $\tilde{Y} \in \mathcal{X}(H)$, $\tilde{Y}_e = Y$ olacak şekilde H üzerindeki sol invariant vektör alanını gösterebilir. O halde, Heisenberg normalizörü $\eta = \{X \in \mathcal{X}(H) \mid [X, \tilde{Y}] \in \tilde{h}, \forall Y \in \tilde{h}\}$ (3.23) dir ve η nün elemanlarına H üzerindeki lineer vektör alanları denir.

3.3.2 Tanım : Durum uzayı sonlu boyutlu Heisenberg Lie grubu ve dinamiği H üzerindeki

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{j=1}^k u_j Y^j(g), \quad (3.24)$$

$X \in \eta$, $Y^j \in \tilde{h}$, diferansiyel denklemlerin ailesi ile belirli olan $\Sigma = (H, \mathcal{D})$ sistemi Heisenberg grubu üzerinde lineer kontrol sistemlerini tanımlar. Burada, $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$,

$$u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (3.25)$$

şeklindeki parçalı sabit fonksiyonlar yani kısıtlanmayan kabul edilebilir kontrollerdir.

3.3.3 Teorem (Ayala ve Tirao, 1994) : Eğer $F \in C^\infty(G, \tilde{g})$ ise, o takdirde $\tilde{F} \in \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(\tilde{g}) \Leftrightarrow$ her bir $Y \in \tilde{g}$ için

$$F(x \exp Y) = (e^{-\text{ad} Y}) F(x) + \left(\frac{1 - e^{-\text{ad} Y}}{\text{ad} Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)]) \quad (3.26)$$

dir. Özellikle, $\text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(\tilde{g})$ bir G Lie grubunun Lie cebiri yardımı ile oluşturulan normalizör olup üzerindeki tüm vektör alanları analitiktir.

3.3.4 Teorem (Ayala ve Tirao, 1994) : $\phi \in \partial \tilde{g}$ $\tilde{g}$ nin bir türevi ve $E \in \tilde{g}$ olsun.

O taktirde,

$$\Delta_{(x,X)} = \{(\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y)) : Y \in \tilde{g}\} \quad (3.28)$$

ile tanımlı $G \times \tilde{g}$ deki Δ dağılımı C^∞ dir, $n = \dim(\tilde{g})$ boyutludur ve involutive dir.

3.3.5 Teorem (Ayala ve Tirao, 1994) : G bir Lie grubu ve

$$\Phi : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(\tilde{g}) \rightarrow \tilde{g} \otimes \mathfrak{gl}(\tilde{g}) \quad (3.29)$$

$$\Phi(\tilde{F}) = (F(e), -dF_e) \quad (3.30)$$

ile tanımlı lineer bir tasvir olsun. Otaktirde,

a) $\Phi, \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(\tilde{g})$ den $\tilde{g} \otimes \partial\tilde{g}$ semi-direkt çarpımı içine bir Lie cebiri homomorfizmidir.

b) Eğer G bağlantılı ise, o taktirde $\Phi : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(\tilde{g}) \rightarrow \tilde{g} \otimes \partial\tilde{g}$ bire-bir bir homomorfizmdir.

c) Eğer G bağlantılı ve basit bağlantılı ise , o taktirde

$$\Phi : \text{norm}_{\mathcal{X}(G)}(\tilde{g}) \rightarrow \tilde{g} \otimes \partial\tilde{g} \quad (3.31)$$

bir üzerine izomorfizmdir. Burada, $\mathfrak{gl}(\tilde{g})$ Lie cebiri üzerindeki tersinir lineer dönüşümler uzayı ve $\partial\tilde{g}$ Lie cebirinin türevidir.

Biz de bağlantılı ve basit bağlantılı bir Lie grubu olan Heisenberg grubu üzerinde incelediğimiz sistemimiz için bu teoremin ispatını verelim.

3.3.6 Teorem : $\Sigma = (H, \mathcal{D})$ Heisenberg grubu üzerinde lineer kontrol sistemi olsun. O taktirde,

$$\Phi : \eta \rightarrow \tilde{h} \otimes \partial\tilde{h} \quad (3.32)$$

bir üzerine izomorfizmdir.

İspat : η nin $\tilde{h} \otimes \partial\tilde{h}$ ye üzerine izomorfik olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.3.5 'le aynı paralelde Φ bire-bir bir homomorfizmdir.

$(E, \phi) \in \tilde{h} \times \partial\tilde{h}$ olsun. O zaman, Teorem 3.3.4 'deki gibi tanımlı $H \times \tilde{h}$ üzerindeki involutive Δ dağılımını gözönüne alalım. $\iota : M_{(x,X)} \rightarrow H \times \tilde{h}$ ile (x, X) noktasından geçen Δ nın maximal bağlantılı integral altmanifoldu verilsin.

$$\psi(t) = (e^{-t\text{ad}Y})X + \left(\frac{1-e^{-t\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(\phi(Y) + [Y, E]) \quad (3.33)$$

olsun. O takdirde, $\psi(0) = X$ dir ve

$$\psi'(t) = [Y, E - \psi(t)] + \phi(Y) \quad (3.34)$$

dir. Dolayısıyla, $\psi(t)$, x noktasından geçen $D_Z = [Y, E - Z] + \phi(Y)$ ile tanımlı $D \in X(\tilde{h})$ nin integrallenebilir eğrisidir. $\gamma(t) = (x \exp(tY), \psi(t))$ ise, O takdirde $\gamma(0) = (x, X)$ ve $\gamma'(t) = (\tilde{Y}_{x \exp(tY)}, \psi'(t))$ dir. O halde, $\gamma(t)$ (x, X) noktasından geçen $(\tilde{Y}, D)_{(x, Z)} = (\tilde{Y}_x, D_Z)$ ile tanımlı $(\tilde{Y}, D) \in \mathcal{X}(H \times \tilde{h})$ nin integrallenebilir eğrisidir. $(\tilde{Y}, D) \in \Delta$ olduğundan, tüm t ler için $\gamma(t) \in M_{(x, X)}$ elde edilir. Böylece, tüm $Y \in \tilde{h}$ için

$$(x \exp Y, (e^{-\text{ad}Y})X + \left(\frac{1-e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(\phi(Y) + [Y, E])) \in M_{(x, X)} \quad (3.35)$$

elde edilir. Şimdi $\iota : M \rightarrow H \times \tilde{h}$ ile (e, E) noktasından geçen Δ nın maximal bağlantılı integral altmanifoldu olsun. π_j , $j = 1, 2$ için j -faktörü içine $H \times \tilde{h}$ nin izdüşüm tasviri olsun. $p = \pi_1 \cdot \iota$ olsun. O takdirde,

$$dp_{(x, X)}(\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y)) = \tilde{Y}_x \quad (3.36)$$

dir ve bu da $p : M \rightarrow H$ nin regüler bir tasvir olduğunu gösterir. Bundan başka, p nin bir örtü olduğu ispatlanacaktır. $\exp : V \rightarrow U$ bir difeomorfizm olacak şekilde V ve U sırasıyla simetrik $\tilde{h}$ deki 0 'ın ve H 'deki e 'nin açık komşulukları olsunlar. $(x, X) \in M$ verildiğinde

$$s(x \exp Y) = \left(x \exp Y, (e^{-\text{ad}Y})X + \left(\frac{1-e^{-\text{ad}Y}}{\text{ad}Y}\right)(\phi(Y) + [Y, E])\right) \in M_{(x, X)}, Y \in V \quad (3.37)$$

ile tanımlı $s : xU \rightarrow M$ olsun. O takdirde, s , xU üzerinde tanımlı (x, X) den geçen $p : M \rightarrow H$ nin bir yerel parçasıdır.

$p(M) = H$ olduğunu ispatlayalım. Eğer $x \in p(M)$ ise, o zaman s nin varlığı $xU \subset p(M)$ olmasını gerektirir. O halde, n üzerinden tümevarım yoluyla $U^n \subset p(M)$ olduğu sonucu çıkar. Böylece, H bağlantılı olduğundan $p(M) = H$ dir.

$x \in H$ için $p^{-1}(x) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ olsun. s_α , (x, X_α) dan geçen xU üzerindeki yerel parça olsun. O takdirde,

$$p^{-1}(xU) = \bigcup_{\alpha \in A} s_\alpha(xU) \quad (3.38)$$

dir. Gerçekten eğer $(x \exp Y, Z) \in M$, $Y \in V$ ise, $\sigma(x \exp Y, Z)$ den geçen

$(x \exp Y)U$ üzerinde tanımlı yerel parça olsun. O taktirde, eğer $(x, X_\alpha) = \sigma(x)$ ise, $(x \exp Y, Z) = s_\alpha(x \exp Y)$ elde edilir. Diğer taraftan, eğer $\alpha \neq \beta$ ise, o taktirde $s_\alpha(xU)$ ve $s_\beta(xU)$ ayrıktyrlar. Gerçekten de $s_\alpha(x \exp Y) = s_\beta(x \exp Z)$ ($Y, Z \in V$), $Y = Z$ ve $(e^{-\text{ad}Y})X_\alpha = (e^{-\text{ad}Y})X_\beta$ yı gerektirir ki $X_\alpha \neq X_\beta$ olduğundan bu imkansızdır. $p : s_\alpha(xU) \rightarrow xU$ bir difeomorfizm olduğundan, $p : M \rightarrow H$ bir örtü tasviridir.

H basit bağlantılı olduğundan $p : M \rightarrow H$ bir difeomorfizmdir. Bundan başka, $X = \pi_2(p^{-1}(x))$ olsun. O zaman

$$(dp^{-1})_x(\tilde{Y}_x) = (\tilde{Y}_x, [Y, E - X] + \phi(Y)) \quad (3.39)$$

dir. $F = \pi_2 \cdot p^{-1}$ olsun. O taktirde, $F(e) = E$ ve

$$dF_x(\tilde{Y}_x) = d\pi_2(\tilde{Y}_x, [E - X] + \phi(Y)) = [Y, F(e) - F(x)] + \phi(Y) \quad (3.40)$$

dir. Özellikle, $dF_e = \phi$ dir. $\lambda(t) = F(x \exp tY)$ ve

$$\psi(t) = (e^{-t\text{ad}Y})F(x) + \left(\frac{1 - e^{-t\text{ad}Y}}{\text{ad}Y} \right) (Y(F) + [Y, F(e)]) \quad (3.41)$$

olsun. O taktirde,

$$\lambda'(t) = [Y, F(e) - \lambda(t)] + \phi(Y) \quad (3.42)$$

ve

$$\psi'(t) = [Y, F(e) - \psi(t)] + \phi(Y) \quad (3.43)$$

dir. $\lambda(0) = F(x) = \psi(0)$ olduğundan $\lambda(t) = \psi(t)$ olduğu sonucu çıkar. Ohalde, Teorem 3.3.3 uygulanarak $\tilde{F} \in \eta$ bulunur ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

η nin $\tilde{h} \otimes \partial \tilde{h}$ üzerine izomorf olduğunu yani normalizörün elemanlarının Heisenberg grubunun Lie cebiriden ve bu cebirin türevinden alınan elemanların direkt çarpımı şeklinde düşünebileceğimizi gördükten sonra şimdi de bağlantılı Lie grupları için verilen ve elbette bağlantılı ve basit bağlantılı nilpotent Lie grubu olan Heisenberg Lie grubu içinde geçerli olan aşağıdaki sonucu görelim.

3.3.7 Teorem (Ayala ve Tirao, 1994) : G bağlantılı bir Lie grubu olsun. Eğer

$$\dim.\text{Span}\{Y^j, \text{ad}^i(X)(Y^j) | 0 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq k\} = \dim(G) \quad (3.44)$$

ise, o taktirde sistem kontrol edilebilirdir.

3.3.8 Örnek : Örnek 3.7.1 'deki sistemi gözönüne alalım. Yani

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.45)$$

üç boyutlu Heisenberg ve onun Lie cebiri

$$\tilde{h} = \text{Span}_{\mathcal{L.A.}} \left\{ Y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.46)$$

olmak üzere

$$\mathcal{D} = \{X + uY^2 \mid u \in \mathbb{R}\} \quad (3.47)$$

ile verilen $\Sigma = (H, \mathcal{D})$ lineer kontrol sisteminin gözönüne alalım. Burada,

$$[Y^1, Y^2] = Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

olduğunu ve X in

$$X(x) = x_2 Y^3, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (3.49)$$

şeklinde verildiğini hatırlatalım. Basit bir hesaplamayla

$$\langle X | \mathcal{H} \rangle = \text{Span}_{\mathcal{L.A.}} \{Y^2, Y^3\} = \text{Span}\{Y^2, Y^3\} \quad (3.50)$$

olduğu görülür ve dolayısıyla Σ geçişmeli değildir. Gerçekten de

$$G_\Sigma(e) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.51)$$

dir. Σ sisteminin birim elemandaki yörünge üzerine indirgenerek elde edilen $\Sigma_1 = (H_\Sigma(e), \mathcal{D})$ sistemi ise Teorem 3.3.7 'ye göre kontrol edilebilirdir. Asıl sistem kontrol edilemezdir, ancak birimdeki yörüngesine indirgediğimizde oluşan geçişmeli sistem kontrol edilebilirdir.

Kontrol edilebilirlik sistemin yörüngesinin kaotik oluşuna engel oluşturabilir.

3.4 Heisenberg Lie Grubu Üzerindeki Singüler Kontrol Sistemleri

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki klasik lineer kontrol sistemleri 40 yıldan fazladır çalışılmakta dır. Bunlar teorik ve pratik açılardan önemlidirler. Bununla birlikte, bazı uygulamalarda pratikten ortaya çıkan bazı problemler göstermiştir ki çoğu kez problem incelenerek model sistemin dinamiğini tamamen bilmek mümkün değildir. Bu zorluğa bir çözüm getirmek üzere 1980 de Singüler Sistemler ortaya çıkmıştır, (Dai), (Yip ve Sincover, 1981).

Klasik lineer sistemler ve singüler sistemler için durum uzayı $\mathbb{R}^n$ dir. Bu kısımda da sonlu boyutlu Heisenberg Lie grubu için singüler sistemler sınıfının bir genellemesini incelemek istiyoruz. Öncelikle Heisenberg grubu üzerindeki singüler kontrol sistemi modelini tanımlayalım.

3.4.1 Tanım : H sonlu boyutlu Heisenberg Lie grubu ve $\tilde{h}$ Lie cebiri olmak üzere H üzerindeki bir Σ singüler kontrol sistemi, $\mathcal{U}$ yani kabul edilebilir kontrollere kümesi ile parametrelendirilmiş

$$E_x(\dot{x}) = X(x) + \sum_{j=1}^m u_j Y^j(x), \quad x \in H \quad (3.52)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin ailesi ile belirlidir. Burada, $E_x = dl_x \circ E \circ dl_{x^{-1}}$ ve $E : \tilde{h} \rightarrow \tilde{h}$ tersinir olmayan (non invertible) Lie cebiri homomorfizmidir. Diğer taraftan, drift vektör alanı $X \in \mathcal{X}(H)$ Lie cebirinin içinde $\tilde{h}$ nin normalizörü η ye aittir. Diğer bir deyişle :

$$X \in \eta = \{X \in \mathcal{X}(H) \mid [X, Y] \in \tilde{h}, \quad \forall Y \in \tilde{h}\}. \quad (3.53)$$

Her bir $j = 1, 2, \dots, m$ için Y^j kontrol vektörleri $\tilde{h}$ de elemanlardır.

3.4.2 Uyarılar :

1. Bu tip kontrol sistem sınıfı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki singüler kontrol sistemini genelleştirir, (Dai). Gerçekten, tanımdan, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir Σ kontrol sistemi

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.54)$$

dinamiği ile belirlidir. Burada, $u \in \mathcal{U}$, A ve B uygun dereceden matrisler ve $E \in M_n(\mathbb{R})$ n -inci dereceden bir tersinir olmayan matristir. Eğer $b_1, \dots, b_m$ B nin sütun vektörlerini gösteriyorsa, o takdirde $Bu = \sum_{j=1}^m u_j b_j$ dir. $L(\mathbb{R}^n)$ $\mathbb{R}^n$ üzerindeki sabit vektör alanlarının Abelian Lie cebiri olduğundan, dolayısıyla $b_1, \dots, b_m \in L(\mathbb{R}^n)$ dir. Diğer taraftan, eğer $b \in \mathbb{R}^n$ ise, o takdirde $[A, b] = -Ab$ dir. O halde, $A \in \text{norm}_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)}(\mathbb{R}^n)$ dir. Özellikle, Σ Abelian basit bağlantılı Lie grubu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir singüler kontrol sistemidir.

2. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki singüler ve klasik lineer kontrol sistemleri arasındaki bağlantı lineer durumda matris E nin tersinir olmasından kaynaklanmaktadır. Böylece, singüler durumda E yi özdeşlik tasviri olarak lineer durum elde edilebilir.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki singüler kontrol sistemleri bir anlamda $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer kontrol sistemler sınıfını genişletir. Gerçekten, E tersinir olmayan bir lineer dönüşüm olduğundan sadece dinamiğin bir kısmı bilinir. Diğer taraftan, eğer E singüler değilse, sistem lineerdir. Elbette, bu sınıf $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer kontrol sistemlerini genelleştirir. Bundan başka, H üzerindeki singüler ve lineer kontrol sistemleri $\mathbb{R}^n$ için daha önce açıklanan anlamda bağlantılıdır. Bunu görmek için, $X \in \tilde{g} \otimes \text{aut}(G)$ drift vektör alanı ile birleşmiş $F \in C^\infty(G, \tilde{g})$ fonksiyonunu alalım. O takdirde,

$$\dot{x} = dl_x(E^{-1} \circ F)(x) + \sum_{j=1}^m u_j dl_x(E^{-1}(Y^j(e))), \quad x \in G, \quad u \in \mathcal{U} \quad (3.55)$$

dir. F sadece $(F(e), -dF_e)$ çiftine bağlı olduğundan $E^{-1} \circ F$ fonksiyonu $((E^{-1} \circ F)(e), -E^{-1} \circ dF_e)$ çifti ile karakterize edilir. Teorem 3.3.6 'dan dolayı, $E^{-1} \circ F \in \eta$ olduğu sonucu çıkar. Elbette, $j = 1, 2, \dots, m$ için $E^{-1}(Y^j) \in \tilde{g}$ dir; öyle ki diferansiyel denklemlerin bu ailesi G Lie grubu üzerinde bir lineer kontrol sistemi tanımlar.

3.4.3 Teorem, (Ayala ve Tirao, 1994) : $\Sigma, X \in \eta$ drift vektör alanı bir singüleriteye sahip olacak şekilde bir G Lie grubu üzerinde bir lineer kontrol sistemi olsun. Eğer,

$$\dim.\text{Span}\{Y^j, \text{ad}^i(X)(Y^j) | 0 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq \kappa\} = \dim(G) \quad (3.56)$$

ise, Σ kontrol edilebilirdir.

3.4.4 Uyarılar :

1. Teorem 3.4.3 'deki rank koşulu aynı zamanda bilinen Kalman kontrol edilebilirlik rank koşulunun bir genellemesidir. Gerçekten, $[b_1, b_2] = 0, \quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ dir.

2. Elbette, Teorem 3.4.3, $Y = 0$ hali dışında invariant kontrol sistemleri için doğru değildir.

3. Tanım 3.4.1 deki gibi Heisenberg Lie grubu üzerindeki singüler kontrol sistemleri için kontrol edilebilirlik özeliğini incelemek üzere en az iki halde Teorem 3.4.3 ü ve yine bu grup için invariant sistemlerin kontrol edilebilirlik sonuçlarını kullanabiliriz

- a) İnvariant singüler kontrol sistemleri, yani, $X = (Y, 0) \in \tilde{\mathfrak{g}} \otimes \text{aut}(G)$ olması hali.
- b) Lineer singüler kontrol sistemleri, yani, $X \in \eta$ in singüleriteye sahip olması hali.



4 SPESİFİK FİZİKSEL PROBLEMLER

Bu bölümde, daha önce Heisenberg Lie grubunun Fizik problemlerine uygulanmış bazı örneklerinden vermek istiyoruz. Önceki bölümde yer alan çalışmamızın ileride benzer Fizik problemlerine uygulanabileceğini umut ediyoruz.

4.1 Analog Radar Sinyal Tasarımı ve Sayısal Sinyal Yöntemleri

-Bir Heisenberg Sıfır Güçlü (Nilpotent) Lie Grubu Yaklaşımı

Analog ve sayısal radarın tasarımlarının oto ve çapraz belirsizlik fonksiyonları fiziğin, matematiğin ve elektrik mühendisliğinin sınır çizgilerindedir. Bu kısımda, (Schempp) de verilmiş olan analog radar sinyal tasarımının iki probleminin bahsedeceğiz. Bunlardan biri 1953 de ortaya atılan sentez problemi ve diğeri ise simplektik zaman-frekans düzlemi üzerindeki belirsiz yüzeyler için değişmezlik problemidir. Her iki problem de basit bağlantılı reel Heisenberg sıfır güçlü (nilpotent) Lie grubunun tek boyutlu merkezine izomorfik yapı grubu ile iki boyutlu polarize (sırasıyla izotropik) arakesit üzerinde diferansiyel ana iplik demetindeki harmonik analizler yolu ile çözülüyor. Bu yolla, 3-boyutlu reel metaplektik grubun lineer osilatör tasviri zaman-frekans düzlemi üzerinde verilen herhangi bir radar belirsizlik yüzeyinin enerji koruyucu lineer otomorfizmaları için yöntemler ortaya çıkarır.

Dijital sinyal işleme alanında, Whittaker-Shannon-Kotelnikov örnekleme teoremi de nilpotent harmonik analizin çatısı ile de çıkarılır. Temel düşünce lineer Schrödinger gösterilişinin kompakt Heisenberg nilmanifoldunda modellenen Hilbert uzayına etki eden lineer örgü gösterilişi ile gerçekleştirilmesi, yani, iki boyutlu kompakt tor T^2 üzerindeki diferansiyel ana iplik demeti ile indirgenmiş reel Heisenberg nilpotent Lie grubunun tek boyutlu merkezine izomorfik yapı grubudur.

4.1.1 Radar prensiplerine giriş :

Basit olarak, radar sistemlerinin amacı gökyüzünün geniş alanlarını yoklamak,

uzak bir nesnenin görüntüsünü saptamak ve aynı zamanda hedefe ait bilgilerin çeşitli türlerini seçmektir. Radar tarafından aranan hareketli hedef durumunda ana ilgi alanının verileri : - davranış,

- erim (rank) d,
- radar antenine göre radyal hız v ,
- ve
- nesnenin büyüklüğü (ölçüleri) dir.

Tipik bir hava trafik kontrol radarında, sabit anten mekaniksel olarak eksenini etrafında döner, her 4 den 12 s. kadar ki mikrodalga radyasyon demeti ile 360° nin tamamını tarar. Azimut demet çözünürlüğü yaklaşık $1^\circ \sim 2^\circ$ ve dikey anten modeli yayılmış yelpaze gibi ve genellikle $30^\circ \sim 45^\circ$ genişliktir. Günümüzde havaalanı gözetim radar sistemleri görüş alanları içindeki 50 tane uçağa kadar sayıda uçağı izlemelidir (35 den 65 km. kadar) ve bu izleri (rota) hava trafik kontrollerine görüntülemelidir.

Düz, özdeş küçük anten elementlerinin kurallı ayarlanması, her biri radar sinyallerini iletmeye ve almaya müsait, fiziksel anlamda dönen parabolik reflek törde yer almaktadır. Hatta ışınları uzayın boşluklarını tarasada radar anteninin hiç bir parçası kendi başına hareket edemez. Sinyal hedeften hedefe elektronik olarak saptırılma yerine dalga girişiminin fiziksel prensibinden geçerek yönetilir.

Bu gün bu türün tek radar sistemi bataryalı (pil) mekaniksel yönlendirmeli antenlere ihtiyaç duyulabilir. Yeni radar aleti elektronik yönlendirmeli fazlı-düzen olarak biliniyor. İleri teknolojiye şekillendirilirken, radarın temel prensipleri değişmeden kalıyor.

Eğer uzak cisim yayılan ışının izinde kalıyorsa, iletilen sinyal enerjisinin bir kısmı hedef tarafından yansıtılır. Günümüzdeki radarların amaçları için kabul edebiliriz ki hedefin hızı v elektromanyetik radyasyonun hızı c ile kıyaslandığında ufaktır.

Herhangi bir radar sisteminin pratik olarak gerçekleşmesi aşırı miktarda elektronik

alete gerek duyar. Radar sisteminin beyni alıcı izleyici bilgisayar, mekaniksel yönlendirilen çanağın uygun pozisyonlarının programlanması veya elektronik yönlendirilen antenin ışın pozisyonları, anten sistemine giden kontrol izi yoluyla iletilen radar sinyallerini koordine etmek ve son olarak görüntüleme sisteminin çalışması.

4.1.2 Analog radar sinyal tasarımı :

Tüm radar sistemlerinin tasarımındaki başlıca unsur en iyi erim ve hız ölçümlerini bir veya daha fazla uzak hedeflerde yapabilmeye yönelenmiş analog sinyal tasarımıdır.

Analog radar sinyal tasarımının temel sınırlaması radar ölçümlerinde ciddi neticelere sahiptir. Aslında, radar sinyali tasarımı yapılamaz, öyle ki erim-hız düzleminin her yerinde yüksek performans verir ve radar belirsizlik prensibinin özünü meydana getirir. Eğer sinyal dalga formu $f \in S(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ de sonsuz türetilen kompleks değerli fonksiyonlar uzayı Schwartz uzayı, normalize edilirse, öyle ki $\|f\| = 1$ olur ve radar belirsizlik prensibi

$$\int \int_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} dx dy |H(f; x, y)|^2 = 1 \quad (4.1)$$

formülü ile analog radar belirsizlik fonksiyonu terimleriyle açıklanabilir. Bu aşamalardan zaman frekans düzlemi üzerindeki normalize radar belirsizlik yüzeyi $F = H(f; \mathbb{R}, \mathbb{R})$ altındaki toplam hacim birim değere eşittir (sinyal dalga formu f den bağımsız olarak). Buradan da erim d ve radyal hız v de yapılabilir çözünürlük performansında bir sınırlama vardır. Öyleyse, radar sinyal tasarımı erim ve hız ölçümleri arasında bir uzlaşma meydana getirmektedir.

Radar belirsizlik prensibi quantum mekaniğinin Heisenberg belirsizlik ilkesi ile paralellik göstermesine rağmen ilk düşünce niçin Heisenberg belirsizlik ilkesinin radar teorisinde hiç bir önemi görülmediği şeklindedir.

Analog radar sinyal tasarımında ikinci çözölen problem zaman frekans düzlemi üzerindeki radar belirsizlik yüzeyi için invariant problemidir. Zaman-frekans düzlemi üzerindeki her radar belirsizlik yüzeyi için sonuç chirp sinyaller vasıtasıyla enerji koruyucu lineer otomorfizmaların üretim işlemini gösteriyor. Bundan

başka, simplektik zaman frekans düzlemi $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ üzerindeki $SO(2, \mathbb{R})$ invariant radar belirsizlik yüzeyleri, radyal simetriklikleri belirlemeyi mümkün kılıyor ve bizleri Laguerre fonksiyonlarına götürüyor. İki boyutlu polarize arakesit üzerindeki ana iplik demetiyle basit bağlantılı reel Heisenberg nilpotent Lie grubunun tek boyutlu merkezine izomorfik yapı grubunun kompakt Heisenberg nilmanifoldu ile değişti rilmesi işlemi Laguerre fonksiyonunun farklı düzeyleri için yeni bir denklemi verir.

4.1.3 Radar sentez problemi :

D. Gabor (1971 Nobel ödülü) klasik makalesinde, (1946), doğanın tanımına esas itibarıyla biri zamanın ve diğeri frekansın olmak üzere iki ayrı yaklaşımın olduğuna işaret etmektedir. Her iki yaklaşım da zaman-frekans düzlemi fikri ile birleştirilir. Bu, iletişim (information) teorisinde temel öneme sahiptir.

Reel Heisenberg grup $\tilde{A}(\mathbb{R})$ 3-boyutlu reel Lie grubu ile destekleyici manifold $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ dir ve çarpım

$$(v_1, z_1) \cdot (v_2, z_2) = (v_1 + v_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}B(v_1, v_2)) \quad (4.2)$$

ile verilir. Fizikçiler arasında $\tilde{A}(\mathbb{R})$ grubu Weyl grubu olarak adlandırılır.

İletişim teorisinin zaman-frekans düzlemi ve analog radar sinyal tasarımının erim-hız düzlemi iki boyutlu reel simplektik vektör uzayı W ile tanımlanabilir.

4.1.4 Sonlu faz uzayı ve sonlu Fourier dönüşümü :

Fiziksel sistemlerin temelini teşkil eden şekil uzayı sonlu bir set olup ya temel görüş noktasından ya da geleneksel alan teorilerinde sunulan sonsuzluklardan kurtulmak amacı ile uzun zamandan beri fizikçilerin dikkatini çekmektedir. Diğer taraftan, kompleks vektör uzaylarındaki sonlu nilpotent grupların indirgenmeyen lineer temsillerinin tamamen monomial olduğu bu yüzyılın başından beri bilinmektedir. Bu teorem, bütün basit bağlantılı nilpotent Lie grupları için benzer sonuç belirten ünlü Dixmier-Kirillov teoreminin atasıdır.

4.1.5 Fourier optiğinin faz süreksizliği :

Ortak eksenli optik sistem boyunca ışık dalgasının gelişmesi ışık şiddetlerine dair bilgiler verir. Kuadratik Hamiltonian 'ın yardımı ile paraxial yaklaşımda tanımlanabilir. Optik zaman eksenli boyunca karşılık gelen ışın gelişmesi iki boyuttaki relativistik olmayan kuantum fiziğinin çevresindeki kanonik dönüşümleri gibi işleyen operatör grubunun ortaya çıkmasını sağlar. Sinyal teorisinin faz uzayının zaman-frekans düzlemi $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ olduğunu görmekteyiz. Halbuki, optik faz uzayı en az zamanın Fermat prensibinden çıkartılmaktadır. Fourier optiğinde lineer geometrik optiğin sayısal tanımlayıcısı olan en önemli teorem optik sistemin geometrik eksenli boyunca belirsizlik yüzeyinin korunduğunu belirtir. Bu teoreme, belirsizlik yüzey korunum prensibi gibi bakıyoruz.

Sonuç olarak, iki boyutlu polarize arakesit üzerindeki diferansiyel iplik demetindeki harmonik analiz ile basit bağlantılı reel Heisenberg nilpotent Lie grubunu $\tilde{A}(\mathbb{R})$ nin tek boyutlu merkezine izomorfik yapı grubu relativistik olmayan Fourier optiğinde ve analog ve sayısal sinyal işlemede kuantum mekaniğinde önemli bir rol oynar. Daha açık olarak, Lie grubu $\tilde{A}(\mathbb{R})$ kuantum mekaniği ve analog radar sinyal tasarımının birleştiği noktada bu aralarında ilişki kurulan faz uzayları $\tilde{A}(\mathbb{R})$ nin dejenere olmamış co-adjoint yörüngelerine simplektik tanjant uzayı ile bir tutulabilir olduğundan beri durmaktadır. Özellikle, kompakt Heisenberg nilmanifoldundaki harmonik analizler dahilinde farklı dizilerin Laguerre fonksiyonları için özdeşliklerin bir geometrik ispatı desteklenir.

4.2 Heisenberg Lie Grubunun Perspektifinden Fourier Optikleri

Bu kısımda, referans (Raszillier ve Schempp), geometrik (lineer) optik ve onun skaler dalga karşılığı Fourier optikleri faz (optik) uzayın simplektik yapısından çıkan grup teorik vasıtaların doğal sonucu olarak Fermat prensibinden türetilir gibi inceleniyor. Aslında, quantize geometrik optik yapıyor. Simplektik yapı lineer kanonik dönüşümlerin grubu (simplektik) ile korunuyor. Simplektik grubun her elemanı geometrik optikteki bir görüntü sisteminin bir kısmı gibi tasavvur edilebilir. Diğer taraftan, (nilpotent) simplektik grup $Sp(4, \mathbb{R})$ nin etki etmesi Lie

cebirini (simplektik) faz uzayına benzetebilir. Bunlara ilaveten, desteklenen basit bağlantılı Lie grubunun indirgenemez bölünmez temsillerinde bulunan Heisenberg grubundaki simplektik hareket her (sonsuz-boyutlu) indirgenemez temsillerin uzayındaki bölünmez dönüşümlerin grubuna sebep oluyor. Bu grup, metaplektik grup olarak adlandırılır. (Skaler) dalga alanının (Fourier optiği) gelişiminin ışınların (geometrik optik) gelişimine benzemesini tanımlar ve o surette optikteki iki görüntüyü bağlar. Kavramların karşılıklı etkileşiminin vurgusu yapılıyor ve bu nedenle klasik ve kuantum mekaniğinden teknik terimlere ve sezgilere de müracaat ediliyor.

Son bir kaç yıl süresince optikte ışınlar sistemi (Butterweck, 1981), (Stoler, 1981), (Nazarathy ve Shamir, 1982) ve (Guillemin Sternberg, 1984) bilgisinden dalga optiğinin oluşturulmasına çok fazla dikkat sarfedilmiştir. Araştırmalar optik dalga alanının kendisi üzerinde veya eşdeğer olarak onun çeşitli dönüşümlerinin yoğunluk matrisi üzerinde ahenkli dalgalar için yoğunlaştırılmıştır (oto-korelasyon veya otobelirsizlik ve Fourier dönüşümü, Wigner fonksiyonu).

Klasik mekaniğin kuantizasyonu ile benzerliğinden beri kuantum mekaniği ile karşılıklı etkileşimler çoğu kez uygulanmaktadır. İki alan arasındaki farklılıkların ve benzerliklerin her ikisi de vurgulanmaktadır. Birinci mertebe paraxial optikler olarak adlandırılan geometrik optikteki durumların kesin çerçevesinde ilgileniliyor. Bu klasik mekanik sistemlere optik bir benzerliktir ve matris formülasyonu ile verilebilir. Matrisler 4-boyutlu faz uzayındaki (Guillemin ve Sternberg, 1984), (Stavroutdis, 1972) lineer kanonik dönüşümlerin simplektik grubu $Sp(4, \mathbb{R})$ ye aittir.

Geometrik optiğin simplektik formülasyonu elbette ki klasiktir, (Stavroutdis, 1972), (Born ve Wolf, 1975). Metaplektik grubun (simplektik grupların iki-katlı örtü grubu) terimleri türünden kuantizasyonu fikri Guillemin ve Stenberg, (Guillemin ve Sternberg, 1984), tarafından kısaca tarif edilmiş bulunuyor. Metaplektik grup kavramı A. Weil, (Weil, 1964) , ye götürür ve Bacry ve Cadilhac, (Bacry ve Cadilhac,

hac, 1981), tarafından da Maxwell denklemlerinden geometriğimsi dalga optikleri yaklaşımının ters problemi tartışılırken kullanılmıştır.

(Raszillier ve Schempp) de, Heisenberg grubundaki harmonik analizin bakış açısından grup teorisinin çatısında birinci merteye paraxial (benzer eksenli) dalga optikleri oluşturuluyor. Bu grup, çok yakından kuantum mekaniği (Howe, 1980) ve sinyal teorisine (Schempp, 1984) ile bağlantılıdır. Dolayısıyla, $Sp(2n, \mathbb{R})$ grubuna ve onun iki katlı örtü grubu olan $Mp(2n, \mathbb{R})$ arasındaki ilişkiye özel bir dikkat gösteriliyor. Optik (skaler) dalga alanının faz süreksizliklerinin doğası, yer ve orjindeki bazı detayları da tartışılıyor. Ancak bu gerçekler, uygun grup teoriksel perspektifine henüz konmamıştır.

4.2.1 Kuantum mekaniğinden örnekler :

En basit örnek (a) **serbest parçacık** Burada $\{g(t)\}$ tek parametre grubudur :

$$g(t) = \begin{pmatrix} I_n & \frac{t}{m} I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < \infty \quad (4.3)$$

ve onun için

$$G(x, y; t) = \left(\frac{m}{2\pi i t h}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{i n \pi}{4} + \frac{i m}{2 t h} (x - y)^2\right), \quad t > 0 \quad (4.4)$$

ile

$$G(x, y; -t) = G^*(y, x; t) \quad (4.5)$$

dir.

Onun için Feynman ve Hibbs tarafından verilen altgrup $\{g(t)\}$ için kütlesi m ve frekansları $w_1, \dots, w_n$ olan (b) **n-boyutlu harmonik osilatör** için de sonuca işaret ediliyor.

$$g(t) = \begin{pmatrix} \cos w_1 t & \dots & 0 & \frac{\sin w_1 t}{m w_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \cos w_n t & 0 & \dots & \frac{\sin w_n t}{m w_n} \\ -m w_1 \sin w_1 t & \dots & 0 & \cos w_1 t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -m w_n \sin w_n t & 0 & \dots & \cos w_n t \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$-\infty < t < \infty \quad (4.7)$$

dir.

SONUÇLAR

Heisenberg Lie grubu üzerindeki kontrol sistemi çeşitleri ve kontrol edilebilirlik problemleri incelenmiştir.

Heisenberg Lie grubu üzerindeki normalizörlü lineer kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğine destek olan teorem ispat edilmiş ve Heisenberg Lie grubu üzerindeki singüler kontrol sistemleri sunulmuştur. Sistemlerin yörüngelerinin önceden bilebilir yada kaotik olabileceğini söyleyebiliriz ve çok yaygın uygulama alanları olan (örneğin; trenlerin kontrol sistemleri, uydu kontrolleri, vb.) kontrol sistemlerinin Heisenberg modelinin ilginç olduğu düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Agrachev, A.A., (1994), "*Shuffle products and symmetric groups*", In the book : Differential Equations, Dynamical Systems and Control Science. A Festschrift in Honor of Laurence Markus. Marcel Dekker.
- Agrachev, A.A. ve Gamkrelidze, R.V., (1993), "*Local Controllability and Semi-groups of Diffeomorphisms*", Acta Applicandae Mathematicae 32, 1-57.
- Agrachev, A.A., Gamkrelidze, R.V. ve Sarychev, A.V., (1989), "*Local Invariant of Smooth Control Systems*", Acta Applicandae Mathematicae 14, 191-237.
- Ayala, V. ve Tirao, J., "*Linear Control Systems on Lie Groups and Controllability*", submitted at Proceedings of the Summer Research Institute: Differential Geometry and Control. Boulder, Colorado, U.S.A. American Maths. Society, (baskıda).
- Ayala, V., (1995), "*Controllability of Nilpotent Systems*". Series Banach Publication, vol. 32, pp. 1-12, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science.
- Bacry, H., ve Cadilhac, M., (1981), "*The metaplectic group and Fourier optics*", Phys. Rev. A23, 2533-2536.
- Boothby, W. ve Wilson, E., (1979), "*Determination of the transitivity of bilinear systems*". Siam J. Control Optim. 17, 212-221.
- Born, M. ve Wolf, E., (1975), "*Principles of Optics*", Pergamon, Oxford.
- Bornard, B., Jurdjevic, V., Kupka, I. ve Sallet, G., (1982), "*Controlabilite sur le produit semi-direct d'un groupe compact par un E.V. reel*", Trans. Amer. Math. Soc.
- Brockett, R., (1972), "*System theory on group manifolds and coset spaces*", Siam J. Control 10, 265-284.
- Butterweck, H.J., (1981), "*Principles of Data Processing In Progress in Optics*", E. Wolf, Ed. (North Holland, Amsterdam).
- Corwin, L. ve Greenleaf, F., (1990), "*Representations of Nilpotent Lie Groups and their Applications*", Part I, Cambridge University Press.

- Dai, L., "Lecture Note in Control and Information Sciences", No.118.
- Dubins, L.E., (1957), "On curves of minimal length with constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal position and tangents", Amer. J. Math., 79, 497-516.
- Gabor, D., (1946), "Theory of communication", J. Inst. Elec. Eng. (London) 93, 429-457.
- Gauthier, J. ve Bornard, G., (1982), "Controlabilite des systemes bilineaires". Siam J. Control Optim. 20, 377-384.
- Guillemin, V. ve Sternberg, S., (1984) "Symplectic Techniques in Physics", Cambridge University Press.
- Howe, R., (1980), "On the Role of the Heisenberg Group in Harmonic Analysis", Bull. Amer. Math. Soc. 3, 821-843.
- Isidori, A., (1989), "Nonlinear Control Systems : an introduction". Springer Verlag.
- Jurdjevic, V., "Optimal Control Problems on Lie Groups : Crossroads between Geometry and Mechanics", in The Geometry of Non-linear Feedback and Optimal Control, B. Jakubczyk and W. Respondek (eds.). Marcel Dekker, (Dordrecht).
- Jurdjevic, V., (1995), "Casimir Elements and Optimal Control". Banach Center Publication, Vol. 32, pp. 261-275.
- Jurdjevic, V., (1995), "Non-Euclidean elastica", Amer. J. Math., 117, 93-124.
- Jurdjevic, V., (1993), "The geometry of the plate-ball problem", Arch. Rational Mech. Anal., 124, 305-328.
- Jurdjevic, V. ve Sussmann, H., (1972), "Control Systems on Lie Groups". Journal of Differential Equations 12, 313-329.
- Laumonde, J.P. ve Souriat, P., (1992) "Synthese des plus courts chemins pour la voiture de Reeds et Shepp", Rapport LASS/CNRS 92234, Juin 1992.
- Nazarathy, M. ve Shamir, J., (1982), "First Order Optics a Canonical Operator

Representation : ", J. Opt. Soc. Amer. 72, 356-364.

Raszillier, H. ve Schempp, W., "*Fourier optics from the perspective of the Heisenberg group*".

Reeds, J.A. ve Shepp, R.A., (1990), "*Optimal paths for a car that goes both forward and backwards*", Pacific J. Math. 145, 367-393.

San Martin, L., (1987), "*Controllability of families of measure preserving vector fields*", Systems and Control Letters, Vol. 8, pp. 459-462.

Schempp, W., (1984), "*Radar Ambiguity Functions, the Heisenberg group, and Holomorphic Theta Series*", Proc. Amer. Math. Soc. 92, 103-110.

Schempp, W., "*Analog radar signal design and digital signal processing- a Heisenberg nilpotent Lie group approach*".

Stavroudis, O.N., (1972) "*The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*", Academic Press, London.

Stoler, D., (1981), "*Operator Methods in Physical Optics*", J. Opt. Soc. Amer. 71, 334-341.

Sussmann H.J. ve Tang, G., "*Shortest paths for the Reeds-Shepp car : A worked out example of the use of geometric techniques in non-linear optimal control*", a pre-print.

Sussmann, H., (1977), "*Existence and Uniqueness of Minimal Realization of Non-linear Systems*", Mathematical System Theory 10, pp.263-284.

Sussmann, H., (1973), "*Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*", Trans. American Math. Soc., 180.

Varadarajan, V., (1974), "*Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*", Prentice-Hall Inc.

Warner, F., (1971), "*Foundations of differentiable Manifolds on Lie groups*". Scott Foreman and Company, Glenview Illinois.

Weil, A., (1964), "*Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*", Acta Math. 111, 143-211.

Yip, E.L. ve Sincov, W.F., (1981), "*Solvability controllability and observability of continuous descriptor systems*". IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-26, No. 3.



Ö Z G E Ç M i Ş

Adı Soyadı : Gürsel Hacıbekiroğlu
Doğum Tarihi : 25.10.1961
Doğum Yeri : Manisa
Lise Öğretimi : 1980 Erzincan Lisesi
Lisans Öğretimi : 1987 Ortadoğu Teknik Üniversitesi,
Fizik Bölümü

Yüksek Lisans Öğretimi : 1988-1990 Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü

Katıldığı Bilimsel Aktiviteler :

1. Synchrotrone Trieste, misafir araştırmacı,
Mart-Eylül 1994, Trieste, İtalya.
2. Workshop on Synchrotrone Radiation and Surface Science Techniques,
Temmuz 1994, Trieste, İtalya.
3. Uluslararası Teorik Fizik Merkezi, ICTP, araştırmacı,
Temmuz 1992, Trieste, İtalya.
4. Staj, Haziran 1991, Varşova, Polonya.
5. 4. Ulusal Nükleer Bilimler Kongresi,
1990 Erzurum Atatürk Üniversitesi, Erzurum.