YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIK KESİRLİ FOURIER VE DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLERİN ÖZANALİZİ

Elektronik ve Haberleşme Yüksek Mühendisi Ahmet SERBES

FBE Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Haberleşme Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi	**:** 7 Ocak 2011
Tez Danışmanı	**:** Yrd. Doç. Dr. Lütfiye DURAK–ATA
Jüri Üyeleri	**:** Prof. Dr. Aydın AKAN
Jüri Üyeleri	**:** Prof. Dr. Tülay YILDIRIM
Jüri Üyeleri	**:** Doç. Dr. Abdullah BAL
Jüri Üyeleri	**:** Yrd. Doç. Dr. İlker BAYRAM

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$F^a\{\cdot\}$	a–ıncı dereceden kesirli Fourier operatörü.
$W_f(\cdot,\cdot)$	f işaretinin Wigner dağılımı.
$\mathcal{R}_\alpha\{\cdot\}$	α açısında Radon dönüşüm operatörü.
$\psi_n(u)$	n–inci dereceden Hermite–Gauss fonksiyonu.
$H_n(u)$	n–inci dereceden Hermite polinomu.
$\mathcal{D}^2\{\cdot\}$	İkinci dereceden türev operatörü.
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Sürekli Fourier dönüşüm operatörü.
$\mathbf{F}_N$	N boyutlu ayrık Fourier matrisi.
$\mathbf{W}_N$	N boyutlu merkezi ayrık Fourier matrisi.
$\mathbb{R}\{f\}$	f işaretinin gerçel kısmı.
$\{f\}$	f işaretinin imajiner kısmı.
$\mathbf{V}_i$	Ayrık merkezi Fourier dönüşümünün özvektörlerini barındıran matris
$\mathbf{\Lambda}_N$	N boyutlu ayrık Fourier matrisinin köşegen özdeğer matrisi.
$\overline{\mathbf{V}}_i$	$\mathbf{V}_i$ matrislerinin Gram–Schmidt algoritmasından geçtikten sonraki hali.
$\mathbf{I}_N$	N boyutlu birim matris.
$\mathbf{h}_n$	n–inci dereceden ayrık Hermite–Gauss fonksiyonu.
$\mathbf{K}_N$	N boyutlu AFD–kaydırma permütasyon matrisi.
$\mathbf{S}$	$\mathbf{S}$ yönteminde kullanılan ayrık Fourier matrisiyle sırabağımsız matris.
$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$ yönteminde kullanılan ayrık Fourier matrisiyle sırabağımsız matris.
$\mathbf{\Lambda}_\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$ matrisinin köşegen özdeğer matrisi.
$\mathbf{\Lambda}_\mathbf{W}$	Merkezi ayrık Fourier matrisinin köşegen özdeğer matrisi.
$\mathbf{V}_\mathbf{T}$	$\mathbf{V}$ yöntemi kullanılarak elde edilen AFD sırabağımsız matris.
$\mathbf{B}_1$	Çift doğrusal türev matrisinin bölen matrisi.
$\mathbf{E}_2$	Çift doğrusal türev matrisinin bölünen matrisi.
$\mathbf{B}$	Çift doğrusal yöntemle elde edilen AFD sırabağımsız matris.
$\mathbf{\Lambda}_{B_1}$	Çift doğrusal bölen matrisinin köşegen özdeğer matrisi.
$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{B}_1$ matrisinin ilk sütunu.
$\hat{\mathbf{B}}_1$	$\mathbf{B}_1$ matrisinin kararlı hali.
$\overline{\mathbf{B}}_1$	Daha iyi koşullanmış $\mathbf{B}_1$ matrisi.
$\overline{\mathbf{B}}_n$	n–inci dereceden çift doğrusal türev matrisinin bölen matrisi.
$\mathbf{S}_n$	n–inci dereceden $\mathbf{S}$ matrisi.
$\mathbf{D}_2$	İkinci türeve ikinci dereceden ayrık Taylor yaklaşıklığı matrisi.
$\mathbf{S}_\infty$	İkinci türeve sonsuz yaklaşıklıkla elde edilen AFD sırabağımsız matris.
$\mathbf{E}$	$\mathbf{D}_\infty$ matrisinin köşegen özdeğer matrisi.
T_x	x işaretinin zaman bölgesi genişliği.
B_x	x işaretinin bant–genişliği.
η_t	Zaman bölgesi ortalama değeri.
η_f	Frekans bölgesi ortalama değeri.
$KZBO(a)$	a–ıncı dereceden kesirli zaman–bantgenişliği oranı.
$T_{x,a}$	x işaretinin a–ıncı derecedeki zaman genişliği.
$B_{x,a}$	x işaretinin a–ıncı derecedeki bantgenişliği.
$AKZBO(a)$	a–ıncı dereceden ayrık kesirli zaman–bantgenişliği oranı.
$\eta_{k,a}$	a–ıncı dereceden ayrık kesirli Fourier bölgesi ortalama değeri.
$I(a)$	a dönüşüm derecesine bağlı, gerekli bantgenişliği maliyet fonksiyonu.
$g(u)$	Eşik fonksiyonu.
C_n	n–inci dışbükey küme.
MSE_{1-D}	Bir boyutlu ortalama karesel hata.

MSE_{2-D}	İki boyutlu ortalama karesel hata.
$I_H(\omega_x, \omega_y)$	İki boylutlu $I(x, y)$ görüntüsünün, analitik görüntüsünün FD'si.
$I_h(\omega_x, \omega_y)$	İki boylutlu $I(x, y)$ görüntüsünün, analitik kısmının FD'si.
$\mathbf{M}$	DKD'nin 2×2'lik parametre matrisi.
$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\cdot)$	$\mathbf{M}$ parametreli DKD operatörü.
$\phi_n^{(\sigma,\tau)}(u)$	DKD'nin $\lvert a+d \rvert < 2$ iken (n, τ, σ) dereceden özfonksiyon kümesi.
$\mathbb{H}_r$	Hiperbolik altgrubun özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklem operatörü.
$\chi_{\Lambda_r}^{\pm}(u)$	Λ_r dereceden repulsif osilatör fonksiyonu.
$\chi_{\Lambda_r,\sigma,\tau}^{\pm}(u)$	DKD'nin $\lvert a+d \rvert > 2$ iken $(\Lambda_r, \tau, \sigma)$ dereceden özfonksiyon kümesi.

KISALTMA LİSTESİ

AİT	Ardışıl İzdüşümler Tekniği
AFD	Ayrık Fourier Dönüşümü
AKFD	Ayrık Kesirli Fourier Dönüşümü
AKZBO	Ayrık Kesirli Zaman–Bantgenişliği Oranı
DFM	Doğrusal Frekans Modülasyonu
DKD	Doğrusal Kanonik Dönüşüm
FD	Fourier Dönüşümü
KFD	Kesirli Fourier Dönüşümü
KZBO	Kesirli Zaman–Bantgenişliği Oranı
MAKFD	Merkezi Ayrık Kesirli Fourier Dönüşümü
MAFD	Merkezi Ayrık Fourier Dönüşümü

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim boyunca yaptığım birçok çalışmamda bana yol gösteren, her türlü bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan, bir hocadan daha fazlası olan çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Lütfiye DURAK-ATA'ya, değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Aydın AKAN'a, Prof. Dr. Tülay YILDIRIM'a, Doç. Dr. Abdullah BAL'a ve Yrd. Doç. Dr. İlker BAYRAM'a çok teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım sırasında benden destek ve sevgisini eksik etmeyen Sevgili Eşim Burcu'ya, çalışmalarım esnasında benden yardımlarını esirgemeyen, yorumlarını ve bilgilerini benimle paylaşan Sayın Prof. Dr. Orhan ARIKAN'a, Yrd. Doç. Dr. Ünal Küçük'e ve sevgili meslektaşım Arş. Gör. Sultan Aldırmaz'a, öğrenim hayatım boyunca her zaman yanımda olan sevgili Annem'e, Babam'a ve Abim'e, çok teşekkür ediyorum.

ÖZET

AYRIK KESİRLİ FOURIER VE DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLERİN ÖZANALİZİ

Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş hali olan kesirli Fourier dönüşümü, özellikle son yıllarda, bir çok alanda kullanılmaya başlanan güçlü bir dönüşümdür ve Fourier dönüşümünün kullanıldığı bütün alanlarda kullanılma potansiyeli bulunmaktadır. Sayısal dünyanın, analoğun yerini almasıyla birlikte Fourier dönüşümününün kullanımı hemen her zaman *ayrık Fourier dönüşümü* ile yapılmaktadır. Ayrık Fourier dönüşümü bu kadar önemliyken, ayrık kesirli Fourier dönüşümü yeterince incelenmemiştir. Bu tezin önemli bir bölümünde ayrık kesirli Fourier dönüşümünün yeni tanımlamaları üzerinde çalışılmıştır.

Bu tezde üç değişik ayrık kesirli Fourier dönüşümü tanımlaması yapılmıştır. Bunun yanında bir uygulama olarak, durağan olmayan işaretin eksik kısımlarını ardışıl izdüşümler tekniğiyle geri elde nasıl geri elde edileceği tanıtılmıştır. Son olarak da hem Fourier dönüşümünün, hem kesirli Fourier dönüşümünün, hem de diğer bir takım dönüşümlerin genelleştirilmiş hali olan doğrusal kanonik dönüşümün özfonksiyonları ve bunları üreten diferansiyel denklemler verilmektedir.

Ayrık kesirli Fourier dönüşümünün ilk tanımında sadece merkezi ayrık Fourier dönüşümü ve onun katları kullanılarak ayrık Fourier dönüşümünün özvektörleri bulunmuş ve uygun özdeğerler seçilerek ayrık kesirli Fourier dönüşüm matrisi oluşturulmuştur. Daha sonra da bulunan özvektörler uygun şekilde kullanılarak ayrık Fourier dönüşümüyle sırabağımsız bir matris bulunarak, literatürdeki diğer sırabağımsız matrislerle doğrusal kombinasyonu alınmış ve Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine daha yakın özvektörler bulunmuştur. Elde edilen ayrık kesirli Fourier dönüşüm matrisinin zaman–frekans bölgesinde döndürme özelliği dahil bir çok özelliği test edilmiştir. Bilgisayar benzetimleriyle Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine ne kadar yaklaştığı, diğer yöntemlerle de karşılaştırılarak gösterilmiştir.

İkinci tanımlamada ise çift–doğrusal dönüşümün türeve olan yaklaşıklığından esinlenilmiş ve Hermite–Gauss üreten ikinci dereceden diferansiyel denklem ayrıklaştırılarak ayrık Fourier dönüşümünün özvektörleri bulunmuştur. Bu yaklaşıklığın kararlılık analizi yapılmış, önce daha kararlı, sonra da hem kararlı hem de daha iyi bir yaklaşıklık tanıtılmıştır. Son olarak da yüksek dereceden çift–doğrusal türev matrisleri kullanılarak ayrık Fourier dönüşümüyle sırabağımsız matris elde edilmiştir.

Üçüncü ve son ayrık kesirli Fourier dönüşümü tanımlamasında önce ikinci türev operatörüne sonsuz dereceden Taylor yaklaşıklığı bulunmuştur. Daha sonra da bu türev matrisi kullanılarak Hermite–Gauss üreten diferansiyel denklemde yerine konularak ayrık Fourier dönüşümüyle sırabağımsız bir matris elde edilmiştir. Benzetim sonuçları bu yöntemin literatürdeki bütün diğer yöntemlerden daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir.

Bir uygulama olarak da ardışıl izdüşümler tekniği kullanılarak, kesirli Fourier bölgesinde, durağan olmayan işaretlerin eksik kısımları geri elde edilmiştir. Önce, işaretlerin optimum kesirli geri elde edim bölgesi kestirilmiş, daha sonra da bu bölgede geri elde edim yapılmıştır. Bilgisayar benzetimleri sonucunda önerilen yöntemin geleneksel yöntemlere oranla çok daha başarılı olduğu görülmüştür.

Son olarak da doğrusal kanonik dönüşümün özfonksiyonları bulunmuş, bu özfonksiyonları üreten diferansiyel denklemler tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ayrık kesirli Fourier dönüşümü, özvektör, doğrusal kanonik dönüşüm, özfonksiyon, ardışıl izdüşümler tekniği, Hermite–Gauss fonksiyonları.

ABSTRACT

EIGENANALYSIS OF THE FRACTIONAL FOURIER AND LINEAR CANONICAL TRANSFORMS

The fractional Fourier transform has been a very popular tool, especially in the last few years. The fractional Fourier transform, which is the generalized form of the Fourier transform, has the potential of usage areas where the Fourier transform is being used. As the digital world takes the place of the analog, *only* the discrete Fourier transform is employed in practice. Despite the fact that the discrete Fourier transform is such important, the discrete fractional Fourier transform, which is the generalized form of the discrete Fourier transform, is under-investigated. An important fraction of this thesis investigates the discrete fractional Fourier transform.

In this thesis, we propose three different discrete fractional Fourier definitions. Besides, as an application, we present a restoration scheme in the optimum fractional Fourier domains. We then study the linear canonical transform, which is the generalized form of the Fourier, the fractional Fourier and some other transforms. We find eigenfunctions of the linear canonical transform and present their generating differential equations.

In the first definition of the fractional Fourier transform, we obtain the Hermite–Gaussian–like eigenvectors of the discrete Fourier transform by using only the centered Fourier transform and its powers. By appropriately combining the eigenvectors with their corresponding eigenvalues, we obtain the discrete fractional Fourier transform matrix. Thereafter, we build a matrix that commutes with the discrete Fourier transform. Then, we obtain a better commuting matrix after taking the linear combination of the other commuting matrices with our proposed one. We have tested our proposed matrices, by means of the properties of the continuous fractional Fourier transform including the time–frequency rotation property. We have also compared the proposed eigenvectors with the samples of the Hermite–Gaussian functions.

In the second definition, we discreticize a second–order differential equation that generates the Hermite–Gaussian functions, inspired by the bilinear transform. We replace a bilinear transform inspired discrete derivative matrix as substitute for the second derivative in the differential equation and obtain a matrix commuting with the discrete Fourier matrix. Thereafter, we find eigenvectors of the discrete Fourier transform. We make the stability analysis of the proposed method and find a more stable and a better approach that generates better eigenvectors. We also represent higher order bilinear differentiation matrix, and obtain more accurate eigenvectors.

The third and the last definition is based on the discrete, infinite–order Taylor approximation to the second derivative. By appropriately substituting this approximation for the second–derivative operator in the Hermite–Gaussian generating differential equation, we obtain an excellent discrete Fourier transform commuting matrix. The simulation results show that this approach is the best approach, compared to the others done before.

As an application, we present a signal reconstruction scheme based on the alternating projections algorithm. We recover missing parts of non–stationary signals in the fractional Fourier domain, after estimating its optimum fractional Fourier domain. Computer simulations show that the proposed method overperforms traditional alternating projections methods in the conventional Fourier domain.

In the last, we find eigenfunctions of the linear canonical transform and their generating differential equations.

Keywords: Discrete fractional Fourier transform, eigenvector, linear canonical transform, eigenfunction, alternating projections, Hermite–Gaussian functions.

1 GİRİŞ

Kesirleştirme işlemi bir çok matematiksel ve günlük işlemde kullanılmaktadır. Tarih öncesinde tam sayılar kullanılmakta iken, kesirli sayılara geçiş bir meraktan çok gereksinimlerden doğmuştur. Örneğin, bir $f(u)$ fonksiyonunun birinci dereceden türevi $\mathrm{d}f(u)/\mathrm{d}u$, ikinci dereceden türevi de $\mathrm{d}^2 f(u)/\mathrm{d}u^2$ olmaktadır. Yarım dereceden veya kesirli herhangi bir dereceden türevinin bulunması bir araştırma konusudur. En ilginç kesirleştirme operasyonlarından birisi *faktöriyel* işleminin kesirli sayılarla tanımlanmasıdır. Gamma ($\Gamma(\cdot)$) fonksiyonları bize kesirli sayıların faktöriyelini vermektedir.

Fourier dönüşümü (FD) bilim ve mühendislik alanlarında sayılamayacak kadar fazla uygulama alanı bulmuştur. Kesirli Fourier dönüşümü (KFD) de bilindik Fourier dönüşümünün bir a parametresiyle *kesirleştirilmiş* halidir. Birinci dereceden KFD, FD işlemine denktir, yani FD işlemi KFD'nin özel bir durumudur. Sıfırıncı dereceden KFD birim operatördür ve uygunlandığı işareti değiştirmez. Bu nedenle, KFD teoride ve uygulamalarda daha esnektir ve FD'nin uygulandığı alanlarda kendisine yer bulma olasılığı yüksektir.

Ozaktas vd. (1996) KFD'nin hızlı ayrık hesaplamasının nasıl yapılacağını göstermiştir. Bu hesaplama $\mathrm{O}(N \log N)$ hızında, hızlı ve hassas bir hesaplamadır. Yine de bu hesaplama ayrık FD türünden bir kernele sahip değildir ve tam olarak bir ayrık dönüşümün göstermesi gereken özellikleri göstermez. Bu tanımlama *tam* olarak birimcil değildir ve *tam* olarak toplamsallığı sağlamaz. Ayrık kesirli Fourier dönüşümü (AKFD) tanımlaması yapılırken, KFD'nin özelliklerini taklit edebilmesi için, ayrık Fourier dönüşümünün (AFD) Hermite–Gauss fonksiyonlarına benzeyen özvektörlerinin bulunması gerekmektedir. Bu tezde, öncelikle AFD'nin özvektörleri bulunmuş, AKFD tanımlanmış ve AKFD'nin değişik yöntemlerle nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir.

KFD son yıllarda işaret işleme (Ozaktas vd., 2001), zaman frekans analizi (Durak, 2009), (Durak ve Arıkan, 2003), filtre tasarımı (Sharma vd., 2007), işaret sıkıştırma (Vijaya ve Bhat, 2006), parametre kestirimi (Sharma ve Joshi, 2007a; Oonincx, 2008) ve örüntü tanıma (Mendlovic vd., 1995) gibi alanlarda başarıyla kullanılmaktadır. İşaret işleme alanında güçlü bir araç olduğundan dolayı, sürekli KFD'nin özelliklerini barındıran AKFD tanımlamaları son yıllarda oldukça ilgi çekmiştir.

Santhanam ve McClellan (1996) AFD matrisinin Taylor serisi açılımını ve ardından Cayley–Hamilton teoremini kullanarak AKFD'yi AFD matrisinin kuvvetlerinin toplamı şeklinde tanımlamıştır. Fakat, bu tanım sürekli KFD'nin özelliklerine ve örneklerine yakınsamamaktadır, çünkü bu şekilde bir tanımlamada AKFD'nin sadece dört farklı özdeğeri bulunmaktadır. Oysa ki AKFD'nin tam-sayı olmayan derecelerinde dörtten fazla özdeğeri vardır. Bu nedenle hem sürekli KFD'ye yakınsayamamakta hem de KFD'nin zaman–frekans eksenini döndürme gibi özelliklerinden uzak kalmaktadır.

Santhanam ve McClellan (1996)'nın çalışması dışında AKFD üzerine yapılan ilk çalışmalar kabaca iki ana gruba ayrılabilir. Birinci yaklaşım ilk (Dickinson ve Steiglitz, 1982) tarafından tanımlanmış olan, AFD ile sırabağımsız ve neredeyse üçköşegen olan **S** matrisi tabanlı tanımlamalardır. **S** matrisi AFD matrisi ile sırabağımsız olduğundan dolayı en az bir tane ortak özvektör kümesini paylaşırlar. Candan vd. (2000), (2.15)'te verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemin *ayrıklaştılmış* halinin **S** matrisine eşit olduğunu ve bu matrisin özvektörlerinin de Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine yakın dikgen baz vektörlerini oluşturduğunu göstermiştir. Yakın zamanlarda ise yine aynı diferansiyel denklem, nümerik analiz yöntemleriyle, yüksek mertebeden yaklaşıklıklarla ayrıklaştırılarak Hermite–Gauss fonksiyonlarına daha fazla benzeyen özvektörler elde edilmiştir (Candan, 2007).

Pei vd. (1999), **S** matrisini Hermite–Gauss fonksiyonlarına daha yakın yeni baz vektörleri elde etmek için kullanmıştır. Burada önce N adet sürekli Hermite–Gauss fonksiyonu örneklenir ve **S** matrisinin özvektörleri çıkarılarak ayrı ayrı kaydedilir. Dikgen olmayan Hermite–Gauss örneklerine en yakın dikgen matrisi elde etmek için **S** matrisinin özvektörleri Gram–Schmidt veya dikgen Procrustes algoritması kullanılarak Hermite–Gauss örneklerine benzetilir. Bu yöntemde **S** matrisinin özvektörleri Hermite–Gauss örnekleri üzerine izdüşürülüp Gram-Schmidt algoritması kullanılarak özvektörler elde edilir veya dikgen Procrustes algoritmasıyla **S** matrisinin özvektörleri ile Hermite–Gauss örnekleri arasındaki Frobenius normu minimize edilerek özvektörler bulunur. Ancak, (Hanna vd., 2004) göstermiştir ki, bu yöntemde **S** matrisi kullanmanın getirdiği hiç bir avantaj yoktur. Yani **S** matrisi yerine herhangi bir matris kullanılsaydı da aynı sonuç elde edilecekti.

İkinci yaklaşımda, ilk (Grünbaum, 1982) tarafından öne sürülen ve daha sonra da (Mugler ve Clary, 2001) tarafından arıtılan üçköşegen **T** matrisi kullanılmaktadır. **T** matrisiyle **S** matrisinin $\mathbf{S} + k\mathbf{T}$ şeklindeki doğrusal kombinasyonunun özvektörlerinin Hermite–Gauss örneklerine daha iyi yakınsadığı gösterilmiştir (Pei vd., 2006). Burada k tamsayıdır.

Bütün bu yaklaşımların dışında, (Hanna vd., 2004)'te spektral teorem kullanılarak AFD matrisi ayrıştırılmış ve dört adet $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ matrisi elde edilmiştir. $\mathbf{P}_i$ matrisinin birbirinden bağımsız sütunları AKFD için baz vektörlerini oluşturmuştur. Fakat, $\mathbf{P}$ metodu olarak adlandırılan bu yöntemde elde edilen baz vektörleri Hermite–Gauss fonksiyonunun örneklerine benzememektedir ve örneklerle özvektörler arasındaki hata miktarı çok yüksek çıkmaktadır. Bu nedenle (Hanna vd., 2004)'te, dikgen Procrustes ve iteratif dikgen Procrustes algoritmalarını (Pei vd., 1999)'daki gibi kullanarak hata miktarını azaltmaktadırlar. Ancak, bu çalışmada, yazarların da aslında çalışmada belirttiği gibi, $\mathbf{P}_i$ matrislerini kullanmalarının hiç bir avantajlı yönü yoktur, aksine herhangi bir başka matris kullanılsaydı da aynı sonuçlar elde edilecekti ve $\mathbf{P}_i$ matrislerini hesaplamak için emek harcanmayacaktı. Yazarlar, neden $\mathbf{P}_i$ matrislerini kullandıklarını açıklamamaktadırlar.

Şimdiye kadar yapılan AKFD tanımlamaları içinde en başarılı yöntemlerden biri, Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine en yakın dikgen özvektörleri veren ve (Candan, 2007) tarafından ortaya atılan $\mathbf{S}_k$ matrisleri yöntemidir. Bu yöntemin arkasındaki fikir, Hermite–Gauss fonksiyonları üreten diferansiyel denklemdeki ikinci türev operatörüne yüksek mertebeden ayrık Taylor yaklaşıklığı yazmaktır. Fakat, (Candan, 2007)'deki çalışmanın handikabı yaklaşıklık derecesi k'nın $2k + 1 \leq N$ ile sınırlı olmasıdır.

Pei vd. (2009) bu yaklaşıklıktaki üst limiti kaldırmıştır. Fakat, bu çalışmada da Pei'nin $\mathbf{S}_k$ matrislerini oluşturmak yüksek işlem karmaşıklığı ve hesaplama zorluğuna neden olmaktadır (Serbes ve Durak-Ata, 2011b). En son (Serbes ve Durak-Ata, 2011b)'de ikinci türev operatörünün sonsuz mertebeden yaklaşıklığı bulunmuş ve $k \rightarrow \infty$ durumunda $\mathbf{S}_k$ matrisinin kapalı formu elde edilmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde önce KFD ve özellikleri kısaca tanıtılmakta, sonra da AFD özvektörlerinin yine AFD matrisi kullanılarak nasıl hesaplanabileceği gösterilmektedir. Tezin üçüncü bölümünde çift–doğrusal dönüşüm kullanılarak AFD'nin özvektörleri bulunmuş ve AKFD hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde ise ikinci mertebeden ayrık türev operatörüne sonsuz dereceden yaklaşıklık elde edilmiş ve AFD'nin özvektörlerinin hesaplanmasında kullanılmıştır. AKFD'nin bir uygulaması olarak, dışbükey kümeler üzerine ardışıl izdüşümler tekniği kullanarak işaret geri elde edimi beşinci bölümde sunulmuştur. Altıncı bölümde ise doğrusal kanonik dönüşümün özfonksiyonları bulunmuş, bu özfonksiyonları üreten diferansiyel denklemler verilmiştir.

2 MERKEZİ AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ TABANLI AYRIK KESİRLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Tezin bu bölümünde önce sürekli KFD ve özellikleri kısaca tanıtılmakta, sonra da sürekli KFD'nin özelliklerini sağlayan bir AKFD tanımlaması yapılmaktadır. Bu tanımlamada AFD dönüşümünün özvektörlerini bulmak için yeni ve kolay bir yöntem öne sürülmektedir. Bu yöntemde **S**, **T** veya **P** gibi matrisler kullanılmamakta, sadece AFD matrisinin kendisi kullanılmaktadır. Önerilen yöntemimizde dört kere arka arkaya AFD alındığında birim dönüşüme eşit olmasından, yani

$$\mathbf{W}_N^4 = \mathbf{I}_N \tag{2.1}$$

eşitliğinden faydalanılmaktadır. Burada $\mathbf{W}_N$ ve $\mathbf{I}_N$ sırasıyla $N \times N$'lik merkezi AFD (MAFD) ve birim matrislerdir. Biz, MAFD'yi çarpanlarına ayırarak sütunları MAFD'nin özvektörleri olan matrisleri bulmaktayız. Daha sonra Gram–Schmidt algoritması ile bulunan özvektörleri dikgenleştirmekteyiz. Ardından bir **K** AFD–öteleme matrisi kullanarak MAFD özvektörlerinden AFD özvektörlerine geçiş yapılmaktadır. Daha sonra bu bölümde, **S** ve **T** matrislerinin birlikte kullanılmasıyla önerilen yöntemin performansı arttığı gösterilmiştir. Bu bölümde tanıtılacak olan bu yöntem (Serbes ve Durak-Ata, 2011a)'da yayınlanmıştır.

2.1 Sürekli Kesirli Fourier Dönüşümü ve Özellikleri

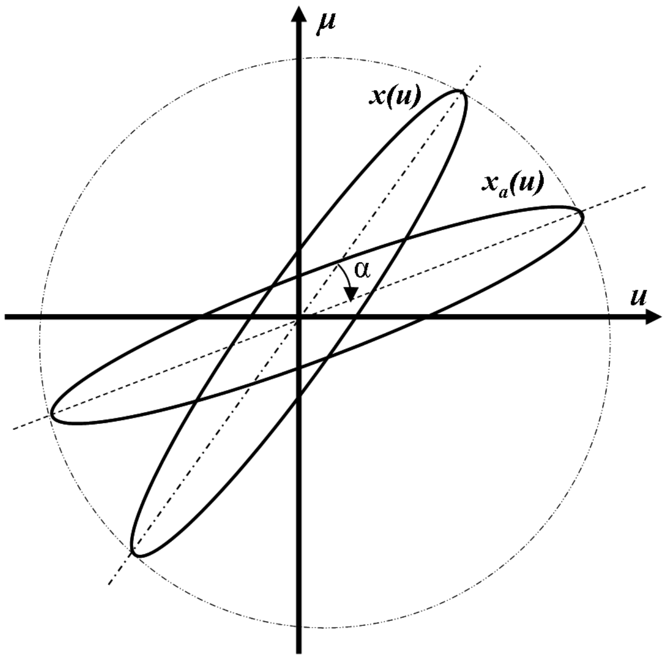
a–ıncı dereceden KFD türevlenebilir bir $f(u)$ fonksiyonu üzerinde tanımlı birimcil bir dönüşümdür ve şu şekilde tanımlıdır

$$f_a(u) = \sqrt{1 - j\cot\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(u') \exp\left[j\pi\left(\cot(\alpha)\, u'^2 - 2\csc(\alpha)\, uu' + \cot(\alpha)\, u^2\right)\right] \mathrm{d}u'. \tag{2.2}$$

Burada $\alpha = a\pi/2$ dönüşüm açısı ve $f_a(u)$ işaretin dönüştürülmüş halidir. Bu dönüşüm k bir tam sayı olmak üzere $a + 4k$ ile daireseldir, yani sürekli KFD'nin kerneli $a = 1$ ($\alpha = \pi/2$) için klasik FD'nin kerneline, $a = 2$ için $\delta(u + u')$ değerine, a=3 için ters FD kerneline ve $a = 4$ için ise $\delta(u - u')$ değerine eşit olmaktadır. KFD toplamsaldır, yani a_1 ve a_2 dereceden ardışıl KFD, $a_1 + a_2$ toplamı derecesinde KFD'ye eşittir:

$$\mathcal{F}^{a_1}\left\{\mathcal{F}^{a_2}\left\{f\right\}\right\}(u) = \mathcal{F}^{a_2}\left\{\mathcal{F}^{a_1}\left\{f\right\}\right\}(u) = \mathcal{F}^{a_1+a_2}\{f\}(u). \tag{2.3}$$

Burada $\mathcal{F}^a\{\dots\}$ a–ıncı dereceden KFD operatörünü göstermektedir. Toplamsallıktan da anlaşılabileceği gibi a–ıncı dereceden bir KFD'nin ters dönüşümü $(-a)$–ıncı dereceden



Şekil 2.1 Kesirli Fourier dönüşümünün bir işareti zaman frekans bölgesinde döndürmesi.

KFD'dir. KFD birimcil* bir dönüşüm olduğundan, KFD'nin tersi aynı zamanda dönüşümün Hermityan'ına eşittir:

$$(F^a)^{-1} = (F^a)^H \tag{2.4}$$

KFD sırabağımsızdır, yani $F^{a_1}\{F^{a_2}\} = F^{a_2}\{F^{a_1}\}$. FD bir işareti zaman–frekans ekseninde $\pi/2$ açısıyla döndürmektedir. KFD ise işaretin zaman bölgesiyle FD bölgesi arasında ara değerlemesi olarak düşünülebilir. Aslında bir işaretin $a = 2\alpha/\pi$ derecesindeki KFD'si işareti zaman–frekans bölgesinde saat yönünde döndürmektedir.

Bir işaretin zaman–frekans karakteristiği Wigner dağılımıyla gösterilebilir. Bir zaman bölgesi $f(u)$ işaretinin Wigner dağılımı şu şekilde tanımlıdır:

$$W_f(u, \mu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(u + u'/2) f(u - u'/2) \exp(-j2\pi\mu u') \mathrm{d}u' \tag{2.5}$$

burada u değişkeni zaman bölgesi değişkeni, μ ise frekans bölgesi değişkenini göstermektedir. Kabaca, Wigner dağılımı bir işaretin zaman–frekans bölgesindeki enerjisinin dağılımını göstermektedir. Wigner dağılımının özellikleri için (Hlawatsch ve Bourdeaux-Bartels, 1992) ve (Cohen, 1989) incelenebilir. Wigner dağılımının u zaman ekseni ve μ frekans ekseni üzerine izdüşümleri

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(u, \mu) \mathrm{d}\mu = |f(u)|^2, \tag{2.6}$$

*İng: Unitary

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(u,\mu)\mathrm{d}\mu = |f_1(\mu)|^2, \tag{2.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_f(u,\mu)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}u = \text{İşaretin enerjisi} \tag{2.8}$$

şeklindedir. Burada $f_1(\mu)$ birinci dereceden KFD'si, yani işaretin FD'sidir. a–ıncı dereceden KFD'si alınmış işaretin, $f_a(u)$'nun, Wigner dağılımı

$$W_{f_a}(u,\mu) = W_f(u\cos(\alpha) - \mu\sin(\alpha), u\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)) \tag{2.9}$$

şeklindedir (Ameida, 1994; Lohmann ve Soffer, 1994; Mustard, 1996; Ozaktas vd., 1994, 2001). Dolayısıyla bir işaretin KFD'si o işaretin zaman–frekans dağılımını döndürür ve bu, KFD'nin en önemli özelliklerinden biridir. Şekil 2.1'de bir $x(u)$ işaretinin, $a = \alpha\pi/2$ açısıyla KFD'si alındıktan sonra, zaman–frekans ekseninde dönmesi gösterilmektedir. Örneğin doğrusal frekans modülasyon (DFM) oranı ϕ olan bir DFM işaretinin $a_\phi = \phi\pi/2$ derecesinde KFD'si bir sinüzoidale dönüşmektedir. Dönüşüm derecesi $a_\phi + 1$ olduğu durumda ise dönüşüm, Dirac–delta dağılımlı bir işaret olur. Zaman–frekans eksenindeki bu dönme yukarıdaki denklemden de anlaşılabileceği gibi 2π ile daireseldir.

KFD ile Wigner dağılımı arasındaki ilişki alternatif olarak şu şekilde de ifade edilebilir (Ameida, 1994; Lohmann ve Soffer, 1994; Ozaktas vd., 1994, 2001)

$$\mathcal{R}_\alpha\left\{\{W_f(u,\mu)\}f\right\}(u) = |f_a(u)|^2, \tag{2.10}$$

burada $\mathcal{R}_\alpha$ Radon dönüşümü operatörüdür. Radon dönüşümü, iki–boyutlu Wigner dağılımının u–ekseniyle $\alpha = a\pi/2$ açısı yapan eksene olan izdüşümdür. Yani, Şekil 2.1'de kesikli çizgilerle gösterilen eksenlere olan integral izdüşümüdür.

2.1.1 Kesirli Fourier Bölgesinde Sıkılık ve Örnekleme

Eğer bir işaretin sıfırdan farklı elemanları sadece belirli bir aralıkta ise, işareti *sınırlı destek*li bir işaret olarak tanımlamaktayız. Sıfırdan farklı elemanları olan bir işaret hem zaman, hem de frekans bölgesinde sınırlı destekli olamaz. Yine de işaret işleme alanında genellikle sınırlı zaman işaretleriyle uğraşılmakta, bu işaretlerin aynı zamanda bant–sınırlı olmaları istenmektedir.

Bu matematiksel gerçekler ile gerçek–zaman uygulamaları arasındaki çelişki, düşük zaman frekans bant–genişliği çarpımı olan işaretler seçildiğinde pratikte ortadan kaldırılmış olmaktadır (Ozaktas vd., 1996). Kısacası, işaretin enerjisinin büyük bir bölümü hem zaman hem de frekans bölgesinde sınırlı bir alanda bulunabilir. Örneğin bir Gauss işareti zaman ve frekans bölgesinde enerjisinin büyük bir bölümünü belli bir alanda barındırmaktadır ve zaman frekans bant genişliği çarpımı en düşüktür. Biz, tezin bundan sonraki bölümünde enerjisinin büyük bölümünü belli bir zaman–frekans bölgesinde barındıran işaretlere sınırlı destekli işaret diyeceğiz.

Bir $f(u)$ işaretinin $[-\Delta t/2, \Delta t/2]$ zaman ve $[-\Delta f/2, \Delta f/2]$ frekans aralığında sınırlı destekli olduğunu düşünelim. O halde bu işaretin zaman–frekans bant genişlikleri çarpımı $N \equiv \Delta t \Delta f$ olmaktadır (Ozaktas vd., 1996). Bu çarpım belirsizlik ilkesi uyarınca her zaman birden büyüktür. u zaman ve μ frekans parametreleri olmak üzere $f(u)$ işaretini bir s ölçeği ile ölçeklersek, ölçeklenmiş zaman ve frekans parametreleri sırasıyla $u' = u/s$ ve $\mu' = \mu s$ olacaktır. Yeni zaman ve frekans koordinatları sayesinde işaret artık $[\Delta t/s]$ zaman ve $[\Delta f s]$ frekans aralığında sınırlı desteklidir. Eğer ölçekleme parametresi $s = \sqrt{\Delta t/\Delta \mu}$ olarak seçilirse zaman ve frekans destekleri artık boyutsuz $\Delta x = \sqrt{\Delta t \Delta \mu}$ olmaktadır. Yeni boyutlarla işaret $N = \Delta x^2$ örnekle gösterilebilir. O halde işaretler kesirli Fourier bölgesinde

$$\Delta x^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{2.11}$$

örnekleme periyoduyla örneklenebilir (Ozaktas vd., 1996). Tezin bundan sonraki bölümünde işaretlerin bu ölçekleme parametresiyle ölçeklenmiş olduğu varsayılmıştır.

Eğer bir işaret zaman–frekans gösteriminde orijin etrafında sınırlı destekliyse, bu şekilde ölçekleyerek, Wigner dağılımında işaretin enerjisinin büyük bir bölümünün Δx'lik bir çemberin içinde olduğu görülebilir. Hemen her sınırlı destekli işaret için yeterli büyüklükte bir Δx seçilerek örnekleme yapılabilir.

2.1.2 Kesirli Fourier Dönüşümünün Özfonksiyonları ve Özdeğerleri

FD'nin ve dolayısıyla KFD'nin tam ve birim dikgen bir özfonksiyon seti Hermite–Gauss fonksiyon kümesidir. $\psi_n(u)$ n. dereceden Hermite–Gauss fonksiyonları olmak üzere

$$\mathcal{F}\{\psi_n\}(u) = e^{-jn\pi/2}\psi_n(u) \tag{2.12}$$

denklemini sağlar. n. dereceden Hermite–Gauss fonksiyonu

$$\psi_n(u) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} \exp[-\pi u^2] H_n(\sqrt{2\pi} u) \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlıdır ve $H_n(u)$, n. dereceden Hermite polinomudur:

$$H_n(u) = (-1)^n e^{u^2} \frac{\mathrm{d}^n e^{-u^2}}{\mathrm{d}u^n}. \tag{2.14}$$

Hermite polinomları gerçel fonksiyonlardır. n–inci dereceden bir Hermite polinomunda n adet sıfır (ve dolayısıyla sıfır geçişi) bulunmaktadır. Eğer n çift sayıysa Hermite polinomu da çift, n tek sayıysa tek fonksiyondur. Dolayısıyla, n–inci dereceden Hermite–Gauss fonksiyonunda da n adet sıfır geçişi vardır, n çift ise çift fonksiyon, tekse tek fonksiyondur. Hermite–Gauss fonksiyonları dikgendir ve $\mathcal{L}^2$ uzayını gerer.

Hermite–Gauss fonksiyonları aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümüdür,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(u)}{\mathrm{d}u^2} - u^2 f(u) = -2\pi(2n+1)f(u). \tag{2.15}$$

Bu denklem aynı zamanda kuantum mekaniğinde harmonik osilatör fonksiyonları olarak da bilinir. Şekil 2.2'de $n = 0, 1, 2$ ve 3. dereceden Hermite–Gauss fonksiyonları çizdirilmiştir. Yukarıdaki diferansiyel denklem özdeş olarak

$$\{\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1}\}f(u) = \lambda f(u) \tag{2.16}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathcal{D}^2$ ikinci dereceden türev operatörü, $\mathcal{F}$ ise FD operatörüdür. Hermite polinomlarının

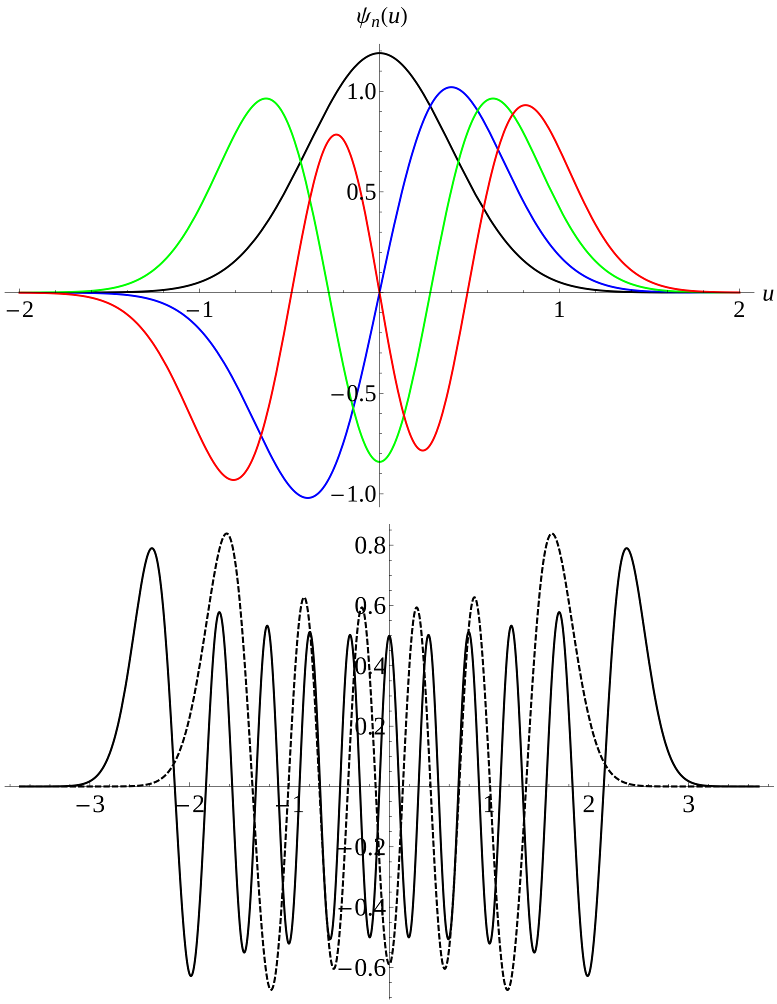
$$\frac{\mathrm{d}^2 H_n(u)}{\mathrm{d}u^2} - 2u\frac{\mathrm{d}H_n(u)}{\mathrm{d}u} + 2nH_n(u) = 0 \tag{2.17}$$

özelliği kullanılarak, (2.15)'ün, Hermite–Gauss fonksiyonlarının çözümü olduğu gösterilebilmektedir. Bununla birlikte, (2.15)'teki diferansiyel denklemin çözümünün FD'nin özfonksiyonu olduğu kolayca şu şekilde gösterilebilir: (2.15)'ün her iki tarafın FD'si yine aynı denklemi vermektedir. Hermite–Gauss fonksiyonları iki boyutlu Hermityan uzayında baz fonksiyonları oluşturur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(u)\psi_m(u)\mathrm{d}u = \delta_{n,m}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(u)\psi_n(u') = \delta(u-u'). \tag{2.19}$$

Hermite–Gauss fonksiyonlarının en ilginç özelliklerinden birisi de n. dereceden bir Hermite–Gauss fonksiyonunun enerjisinin *büyük* kısmının $-\sqrt{(n+1/2)/\pi}$ ile $\sqrt{(n+1/2)/\pi}$ sınırları arasında olmasıdır (Ozaktas vd., 2001; Ozaktas ve Mendlovic,



Şekil 2.2 Hermite–Gauss fonksiyonları. a) Siyah $n = 0$, mavi $n = 1$, yeşil $n = 2$, kırmızı $n = 3$ b) çizgili $n = 10$, düz $n = 22$. dereceden Hermite–Gauss fonksiyonlarını göstermektedir.

1993). n. dereceden bir Hermite–Gauss fonksiyonunun özdeğeri $e^{-jn\pi/2}$ olduğundan (bkz (2.12)), FD'nin kerneli

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\pi/2}\psi_n(u)\psi_n(u') = e^{-j2\pi uu'} \tag{2.20}$$

toplamına eşittir. KFD kesirleştirilirken bir a. dereceden KFD kerneli

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jan\pi/2}\psi_n(u)\psi_n(u') = \sqrt{1 - j\cot\alpha}\exp\left[j\pi\left(\cot(\alpha)\,u'^2 - 2\csc(\alpha)\,uu' + \cot(\alpha)\,u^2\right)\right] \tag{2.21}$$

şeklinde elde edilir. KFD, FD'nin kesirleştirilmiş hali olduğundan aynı özfonksiyon kümesini paylaşır, fakat özdeğerleri farklıdır. Bir işaretin dört kere arka arkaya FD'si alınırsa o işaretin aynısı geri elde edilir. Dolayısıyla FD'nin sadece dört tane birbirinden farklı özdeğeri vardır: $\{1, -j, -1, j\}$. Bu nedenle tek bir özfonksiyon kümesi yoktur, aksine bir çok özfonksiyon seti yazılabilir. KFD geliştirilirken özfonksiyon seti olarak

Hermite–Gauss fonksiyon kümesi ve özdeğerleri de $e^{-jn\pi/2}$ seçilmiştir (örneğin, özdeğerleri $e^{-(jn\pi/2+2kn\pi)}$ de seçilebilirdi). KFD'nin özfonksiyonları ve özdeğerleri sadece bu şekilde seçildiği zaman işareti zaman–frekans ekseninde döndürmektedir. Zaten KFD geliştirilirken de bu amaç güdülmüş (Ozaktas vd., 2001) ve fiziksel bir anlamı olması istenmiştir. Örneğin, bir kaç lensten oluşan, nokta aydınlatmalı bir optik sistemde görüntünün aydınlatma noktasında önce FD'si, daha ileride bir yerde görüntünün tersi, daha da ilerde yine FD'si, sonra yine görüntünün kendisi gözlemlenmektedir. Bu böyle devam etmektedir. Görüntünün kendisiyle FD'si arasında ilerledikçe işaretin $a \in [0,1]$ artan dönüşüm derecelerinde KFD'si görülmektedir. İşte, arada gözlenen görüntülerin KFD olabilmesi için özdeğerlerin ve özfonksiyonlarn burada tanımlandığı gibi olması gerekmektedir (Ozaktas vd., 2001).

2.1.3 Ayrık Fourier Dönüşümü

N–noktalı ayrık bir $f[n]$ işareti için AFD

$$\widetilde{f}[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi nk} \tag{2.22}$$

şeklindedir. Burada $\widetilde{f}[k]$, $f[n]$ işaretinin AFD'sini göstermektedir. AFD, dönüştürdüğü işaretin enerjisini değiştirmeyen, doğrusal fakat ötelemeyle değişen bir dönüşümdür. Doğrusal bir dönüşüm olduğundan

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{F}_N \mathbf{f} \tag{2.23}$$

yazılabilir. Burada $\widetilde{\mathbf{f}} = [\widetilde{f}[0], \widetilde{f}[1], \ldots, \widetilde{f}[N-1]]^T$, $\mathbf{f} = [f[0], f[1], \ldots, f[N-1]]^T$ şeklinde tanımlı tek boyutlu vektörler ve $\mathbf{F}_N$ n. sütunun m. satırının elemanları

$$(\mathbf{F}_N)_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right) \tag{2.24}$$
$$n, m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

olan AFD matrisidir. $\mathbf{I}_N$, N boyutlu birim matris olmak üzere $\mathbf{F}_N^4 = \mathbf{I}_N$ olmaktadır ve dört kere art arda AFD birim dönüşüme karşılık geldiği için AFD'nin sadece dört farklı özdeğeri $\lambda \in \{1, -j, -1, j\}$ bulunmaktadır. Özdeğer ayrıştırması yapılırsa $\mathbf{F}_N$

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{U}_N^H \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{\Lambda}_N$ özdeğerleri köşegenlerinde bulunduran bir köşegen matris, $\mathbf{U}_N$ AFD matrisinin özvektörleri, ve $(\cdot)^H$ kompleks konjüge transpoze (Hermityan) operatörüdür.

KFD, FD'nin kesirleştirilmiş hali olduğundan, AKFD de $a \in [0,4]$ parametresiyle kesirleştirilmiş halidir. Dolayısıyla a. dereceden AKFD

$$\mathbf{F}_N^a = \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N^a \mathbf{U}_N^T \tag{2.26}$$

şeklinde tanımlaması bu tez kapsamında öngörülmüştür. Yukarıdaki eşitlikte dikkat edilirse özvektör matrisinin Hermityanını almak yerine transpozesini alınır, çünkü AKFD'nin KFD'nin özelliklerini taklit edebilmesi için özvektörlerinin Hermite–Gauss benzeri özvektörler olmasını istenir. Hermite–Gauss fonksiyonları gerçel fonksiyonlar olduğundan Hermityanı transpozesine eşittir. Sürekli FD'nin özelliklerini birebir sağlaması açısından, AFD çok önemli uygulamalarda kendisine yer bulmuştur. AKFD tanımlamaları yapılırken de sürekli KFD'nin özelliklerini birebir sağlaması istenmektedir. Bu tezde de anlatıldığı gibi AFD, AKFD'nin çok özel ve hatasız bir alt kümesidir. Burada hatadan kasıt sürekli dönüşümün özelliklerini birebir taklit etmedeki yetersizlik ve ayrık ile sürekli dönüşümün birbirinden farklı olmasıdır.

2.2 Ayrık Fourier Dönüşümünün Özanalizi

AFD ile bir işaret, $[0, N-1]$ ayrık giriş uzayından $[0, 2\pi)$ ayrık frekans uzayına eşlenmektedir, oysa ki MAFD $[-(N-1)/2, (N-1)/2]$ ayrık giriş uzayından $[-\pi, \pi)$ ayrık frekans uzayına eşler. Bu nedenle MAFD, AFD'nin aksine Hermite–Gauss fonksiyonları gibi tek ve çift fonksiyonları tanımlamaya izin verir. MAFD'yi şu şekilde tanımlıyoruz

$$\begin{aligned}(\mathbf{W}_N)_{n,m} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(n-c)(m-c)\right), \\ &\quad n, m = 0, 1, ..., N-1; \quad c = \frac{N-1}{2}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

KFD'nin örneklerine yakınsamak ve zaman–frekans eksenindeki döndürme işlemini gerçekleyebilmek için AKFD matrisinin özvektörlerinin Hermite–Gauss fonksiyonlarına olabildiğince yakın olması gerekmektedir. Dolayısıyla AKFD tanımlaması yapılırken, Hermite–Gauss fonksiyonlarına olabildiğince yakın bir dikgen küme elde edilmelidir.

Hermite–Gauss fonksiyonlarının sadece MAFD'nin özfonksiyonu olması ve AFD özfonksiyonlarının Hermite–Gauss fonksiyonlarının dairesel ötelenmiş hali olması nedeniyle, burada MAFD matrisi kullanılmaktadır. Örneğin, ayrık bir Hermite–Gauss–benzeri özvektör geleneksel AFD ile dönüştürüldügünde çıkış, Hermite–Gauss fonksiyonunun ötelenmiş ve bir kompleks sinüzoidalle çarpılmış hali elde edilir. Bu kapsamda öncelikle Önerme 2.1 ortaya konmuş ve ispatlanmıştır.

Önerme 2.1. MAFD'nin Hermite–Gauss–benzeri özvektörlerini barındıran $\mathbf{V}_i$ matrisleri $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\} + (\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\})^2\right) \tag{2.28a}$$

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{1}{2}\left(\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\} - (\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\})^2\right) \tag{2.28b}$$

$$\mathbf{V}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\} + (\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\})^2\right) \tag{2.28c}$$

$$\mathbf{V}_4 = -\frac{1}{2}\left(\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\} - (\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\})^2\right) \tag{2.28d}$$

şeklindedir. Burada, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ ve $\mathbf{V}_4$'ün sütunları sırasıyla 1, -1, j ve $-j$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri barındırmaktadır. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{I}$ gerçel ve sanal kısımları alan operatörlerdir.

İspat. (2.1)'teki denklem $\mathbf{W}_N^4 - \mathbf{I}_N = 0$ şeklinde tekrar yazılıp çarpanlarına ayrıldığında

$$(\mathbf{W}_N - \mathbf{I}_N)(\mathbf{W}_N + \mathbf{I}_N)(\mathbf{W}_N - j\mathbf{I}_N)(\mathbf{W}_N + j\mathbf{I}_N) = 0_N \tag{2.29}$$

elde edilir. Bu denklem, daha önce Bose (2001) tarafından ortaya konulmuştur ve çok önemli sonuçlar vermektedir. Yukarıdaki denklem, özdeğer ayrıştırması denklemine benzemektedir ve dört farklı şekilde yazılabilir. Bunlardan $\lambda = 1$ için

$$(\mathbf{W}_N - \mathbf{I}_N)(\mathbf{W}_N^3 + \mathbf{W}_N^2 + \mathbf{W}_N + \mathbf{I}_N) = 0_N. \tag{2.30}$$

denklemi yazılabilir. Bu nedenle, sütunları $\lambda = 1$ özdeğerine ait katlı özvektörleri *içeren* özvektör matrisi

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{W}_N^3 + \mathbf{W}_N^2 + \mathbf{W}_N + \mathbf{I}_N) \tag{2.31a}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{W}_N^4 = I_N$ olduğu bilindiğinden, $\mathbf{W}_N\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Burada özellikle belirtmek gerekir ki, $\mathbf{V}_1$'in *sadece* bazı sütunları doğrusal bağımsızdır.

Sütunları MAFD'nin özvektörleri olan diğer matrisler aynı şekilde elde edilebilir:

$$\mathbf{V}_2 = (\mathbf{W}_N^3 - \mathbf{W}_N^2 + \mathbf{W}_N - \mathbf{I}_N) \tag{2.31b}$$

$$\mathbf{V}_3 = (\mathbf{W}_N^3 + j\mathbf{W}_N^2 - \mathbf{W}_N - j\mathbf{I}_N) \tag{2.31c}$$

$$\mathbf{V}_4 = (\mathbf{W}_N^3 - j\mathbf{W}_N^2 - \mathbf{W}_N + j\mathbf{I}_N). \tag{2.31d}$$

Elde edilen bu matrislerin rankı tam değildir, yani sütunları birbirinden doğrusal bağımsız olmamaktadır. Elde edilen özvektörlere ait özdeğerler $\{1, -j, -1, j\}$ değerlerinin dört katıdır, çünkü $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ ve $\mathbf{V}_4$, dört tane birim özdeğerli vektörün toplamı şeklindedir. Örneğin, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_N^3 + \mathbf{W}_N^2 + \mathbf{W}_N + \mathbf{I}_N$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-3(jn\pi/2)} + e^{-2(jn\pi/2)} + e^{-jn\pi/2} + 1)\mathbf{v}_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 4\mathbf{v}_{4n}\end{aligned} \tag{2.32a}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{v}_n$, n–inci dereceden ayrık Hermite–Gauss benzeri özvektördür ve $\mathbf{W}_N = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\pi/2}\mathbf{v}_n$ bağıntısı kullanılmaktadır. Aynı şekilde (2.31b)–(d) kullanılarak $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ ve $\mathbf{V}_4$,

$$\mathbf{V}_2 = \sum_{n=0}^{N-1} -4\mathbf{v}_{4n+2} \tag{2.32b}$$

$$\mathbf{V}_3 = \sum_{n=0}^{N-1} (4j)\mathbf{v}_{4n+3} \tag{2.32c}$$

$$\mathbf{V}_4 = \sum_{n=0}^{N-1} (-4j)\mathbf{v}_{4n+1}. \tag{2.32d}$$

şeklinde elde edilir. Sonuçta $\mathbf{V}_1$ *sadece* $4n$–inci dereceden Hermite–Gauss benzeri özvektörleri barındırmakta ve benzer olarak da $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ ve $\mathbf{V}_4$ sırasıyla sadece $4n+2$, $4n+3$ ve $4n+1$ derecelerindeki Hermite–Gauss benzeri özvektörleri tutmaktadır. Bu özvektör matrislerinin bağımsız sütun sayısı (ya da rankı) özdeğerlerin *katlılığına** eşittir. MAFD'nin katlılığı Çizelge 2.1'de gösterilmektedir (Vargas-Rubio ve Santhanam, 2005). Bu durumda $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$ tamamen gerçel $\mathbf{V}_3$ ve $\mathbf{V}_4$ ise tamamen sanal vektörlerdir, çünkü

$${\mathbf{W}_N}^3 + \mathbf{W}_N = 2\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\} \tag{2.33a}$$

$${\mathbf{W}_N}^3 - \mathbf{W}_N = -2j\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\} \tag{2.33b}$$

$${\mathbf{W}_N}^2 + \mathbf{I}_N = 2\left(\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\}\right)^2 \tag{2.33c}$$

$${\mathbf{W}_N}^2 - \mathbf{I}_N = -2\left(\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\}\right)^2 \tag{2.33d}$$

*Eğer λ bir $\mathbf{A}$ kare matrisinin özdeğeriyse, λ'nın katlılığı $\mathbf{A}$'nın karakteristik polinomunda $(t-\lambda)$'nın üstel derecesine eşittir.

Çizelge 2.1 $N \times N$ boyutlu MAFD matrisinin özdeğerlerinin katlılığı.

N	λ: 1	$-j$	-1	j
$4m^*$	m	m	m	m
$4m^*+1$	$m+1$	m	m	m
$4m^*+2$	$m+1$	$m+1$	m	m
$4m^*+3$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	m

*: m sıfırdan farklı pozitif tamsayı

olmaktadır. (2.33)'deki uygun terimler (2.31)'dakilerle değiştirilerek

$$\mathbf{V}_1 = 2\left(\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\} + (\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\})^2\right) \tag{2.34a}$$

$$\mathbf{V}_2 = 2\left(\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\} - (\mathbb{R}\{\mathbf{W}_N\})^2\right) \tag{2.34b}$$

$$\mathbf{V}_3 = -2j\left(\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\} + (\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\})^2\right) \tag{2.34c}$$

$$\mathbf{V}_4 = -2j\left(\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\} - (\mathbb{I}\{\mathbf{W}_N\})^2\right). \tag{2.34d}$$

elde edilir. Hermite–Gauss benzeri özvektörler gerçel ve birimcil olmak durumundadır. Gerçel ve birimcil özvektörleri elde etmek için $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ ve $\mathbf{V}_4$ sırasıyla $4, -4, 4j$ ve $-4j$ ile bölünür. $\square$

2.3 AKFD Matrisi

a–ıncı dereceden AKFD operatörü normal AFD operatörünün a–ıncı kuvveti olarak tanımlıdır. Dolayısıyla AKFD operatörü özvektör ayrıştırması cinsinden

$$\mathbf{W}_N^a = \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N^a \mathbf{U}_N^T \tag{2.35}$$

eşitliğiyle ifade edilebilir. Burada, MAFD için, $\mathbf{\Lambda}_N^a$ açık haliyle

$$\mathbf{\Lambda}_N^a = \text{kosegen}(e^{-j0}, e^{-j\frac{\pi}{2}a}, \ldots, e^{-j\frac{\pi}{2}a(N-2)}, e^{-j\frac{\pi}{2}a(N-1)}) \tag{2.36}$$

şeklinde olmaktadır (Vargas-Rubio ve Santhanam, 2005). (2.28)'teki matrislerin sütunları doğrusal bağımsız olmadığından, doğrusal bağımsız ve dikgen sütunları elde etmenin basit ve hızlı bir yolu olarak aşağıdaki üç işlem adımını önermekteyiz.

1. Matrislerin her birinin eşelon formu hesaplanır,
2. $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ ve $\mathbf{V}_4$'te sadece pivotlara denk gelen sütunlar alınır,
3. Gram-Schmidt algoritması gibi bir dikgenleştirme algoritması koşulur.

Pivotları bulmak için Gauss–Jordan indirgeme yöntemi kullanılmaktadır. Daha sonra, her bir $\mathbf{V}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ için pivotlara karşılık gelen bağımsız sütunlar seçilerek alınır ve kalan sütunlar atılır. En son olarak da modifiye edilmiş Gram-Schmidt algoritması (Golub ve Van Loan, 1996) kullanılarak bağımsız ve dikgen özvektörler bulunur. Bu noktada hatırlatmak gerekir ki, MAFD matrisi kullanılmasının nedeni, ayrık Hermite–Gauss özvektörlerinin sadece MAFD'nin özvektörleri olmasıdır. AFD'nin özvektörleri ise Hermite–Gauss fonksiyonlarının faz kaydırılmış halidir. Aynı yöntem direk olarak AFD matrisine uygulanırsa yanlış sonuçlar elde edilir. Hanna vd. (2004) spektral teorem kullanarak (2.31)'dakine benzer denklemler elde etmişler, fakat hem normal AFD matrisi kullanmışlar, hem de sütunları dikgenleştirmemişlerdir. Sonuçta elde ettikleri özvektörler Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine hiç benzememektedir, yani yanlış sonuçlar elde etmişlerdir.

2.3.1 Modifiye Gram-Schmidt Algoritması

(2.28)'deki matrisler birbirine dikgen olmasına rağmen, bu matrislerin sütunları hem dikgen hem de doğrusal bağımsız değildir. Bir önceki alt bölümde vurgulandığı gibi pivotlara denk gelen sütunlar seçilerek doğrusal bağımsız sütunlar elde edilmelidir. Hermite–Gauss benzeri dikgen MAKFD özvektörleri modifiye Gram–Schmidt algoritması kullanılarak elde edilebilmektedir. Modifiye Gram–Schmidt algoritmasını kullanmadan önce şu tanımlamalar yapılmalıdır:

- $\mathbf{y}$: Gauss–Jordan indirgeme metodu kullanıldıktan sonra elde edilen dikgen olmayan $\mathbf{V}_i$ sütunları. (Her bir $\mathbf{V}_i$ matrisinde k_i sütun bulunmaktadır.)
- $\overline{\mathbf{v}}$: Modifiye Gram–Schmidt algoritması sonucu elde edilen dikgen sütunlar
- k_i: $\mathbf{V}_i$'deki pivot sayısı.

Her bir $\mathbf{V}_i$ için Algoritma 2.1'de özetlenen modifiye Gram–Schmidt algoritması koşulur. Modifiye Gram–Schmidt algoritması herhangi bir vektör kümesini izdüşümler ve çıkarmalar yaparak dikgenleştirir. İlk basamakta bir vektör alınır ve o vektörün kalan vektörler üzerindeki izdüşümleri kendisinden çıkarılır. En sonda ise bir normalizasyon basamağı bulunmaktadır. Bütün vektörler için bu süreç yürütülünce işlem tamamlanır.

2.3.2 Merkezi AKFD Matrisi

$\overline{\mathbf{V}}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ modifiye Gram–Schmidt algoritmasından geçtikten sonra elde edilen yeni dikgen özvektör kümesi olsun. Yeni özvektör kümesini içeren $\overline{\mathbf{V}}_i$'nin her biri $N \times k_i$

Algoritma 2. 1 Modifiye Gram–Schmidt algoritması

for $n = 1$ to k_i **do**
  for $m = 1$ to n **do**
    $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n - \frac{<\mathbf{y}_m,\mathbf{y}_n>}{<\mathbf{y}_m,\mathbf{y}_m>}\mathbf{y}_m$
  end for
  $\overline{\mathbf{v}}_n = \frac{\mathbf{y}_n}{||\mathbf{y}_n||}$
end for

boyutludur. Çizelge 2.1'deki özdeğer katlılığına bakılarak da görülebilen k_i, zaten Gauss–Jordan indirgeme işleminden sonra otomatik olarak elde edilmektedir. Normal MAFD matrisi, özdeğer ayrıştırma yöntemi ve $\lambda = \{1, -1, j, -j\}$ özdeğerlerine karşılık gelen $\overline{\mathbf{V}}_i$'ler kullanılarak şu şekilde geri elde edilebilmektedir

$$\mathbf{W}_N = \overline{\mathbf{V}}_1\mathbf{I}_{k_1}\overline{\mathbf{V}}_1^T + \overline{\mathbf{V}}_2(-\mathbf{I}_{k_2})\overline{\mathbf{V}}_2^T + \overline{\mathbf{V}}_3(j\mathbf{I}_{k_3})\overline{\mathbf{V}}_3^T + \overline{\mathbf{V}}_4(-j\mathbf{I}_{k_4})\overline{\mathbf{V}}_4^T. \tag{2.37}$$

Burada, $\mathbf{I}_{k_i}$, $k_i \times k_i$ birim matristir. Şimdiye kadarki bölümde $\lambda = \{1, -1, j, -j\}$ özdeğerlerine sırasıyla karşılık gelen dikgen ve doğrusal bağımsız $\overline{\mathbf{V}}_1$, $\overline{\mathbf{V}}_2$, $\overline{\mathbf{V}}_3$ ve $\overline{\mathbf{V}}_4$ özvektör matrisleri bulundu. Bu özvektör matrislerinin sütunlarının hangi ayrık Hermite–Gauss vektörüne karşılık geldiğini bulmak için sıralamak gerekmektedir.

Özvektörlerin Sırası: Önerilen bu yöntemde özvektörleri sıralamak çok kolaydır. n–inci dereceden bir Hermite–Gauss fonksiyonunda n tane sıfır geçişi bulunmaktadır. MAFD matrisinde sıfır geçişleri azalan derecelerde (ortada hiç sıfır geçişi yok ve birinci sütunda $N-1$ tane sıfır geçişi var) olduğundan, Gauss–Jordan indirgemesinden sonra özvektörler otomatik olarak sıralı şekilde gelmektedir. Özvektörleri bulmak için MAFD'nin direk kendisi ve katlarını kullandığımız için zaten sıralanmış özvektörlerle karşılaşmaktayız. Sonuçta, her bir $\overline{\mathbf{V}}_i$ en yüksek dereceden Hermite–Gauss benzeri özvektörü ilk sütununda ve en düşük dereceden Hermite–Gauss benzeri özvektörü de en son sütununda barındırmaktadır. Örneğin, $\overline{\mathbf{V}}_1$ sıfırıncı dereceden Hermite–Gauss benzeri özvektörü en son sütununda ve $4(k_1-1)$–inci dereceden Hermite–Gauss vektörünü de ilk sütununda bulundurmaktadır,

$$\overline{\mathbf{V}}_1 = \begin{bmatrix} | & & | & | & | \\ \mathbf{h}_{4k_1-4} & \dots & \mathbf{h}_8 & \mathbf{h}_4 & \mathbf{h}_0 \\ | & & | & | & | \end{bmatrix}. \tag{2.38a}$$

Benzer şekilde diğer matrisler de

$$\overline{\mathbf{V}}_2 = \begin{bmatrix} | & & | & | & | \\ \mathbf{h}_{4k_2-2} & \dots & \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_6 & \mathbf{h}_2 \\ | & & | & | & | \end{bmatrix} \tag{2.38b}$$

$$\overline{\mathbf{V}}_3 = \begin{bmatrix} | & & | & | & | \\ \mathbf{h}_{4k_3-1} & \dots & \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_7 & \mathbf{h}_3 \\ | & & | & | & | \end{bmatrix} \tag{2.38c}$$

$$\overline{\mathbf{V}}_4 = \begin{bmatrix} | & & | & | & | \\ \mathbf{h}_{4k_4-3} & \dots & \mathbf{h}_9 & \mathbf{h}_5 & \mathbf{h}_1 \\ | & & | & | & | \end{bmatrix} \tag{2.38d}$$

biçimindedir. Böylece bu özvektörlere karşılık gelen (2.37)'teki $\lambda \mathbf{I}_{k_i}$ bütün λ değerleri için

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{k_1} &= \text{kosegen}\left(e^{-j2\pi(k_1-1)}, ..., e^{-j2\pi}, e^{-j0}\right) \\ -\mathbf{I}_{k_2} &= \text{kosegen}\left(e^{-j(\pi+2\pi(k_2-1))}, ..., e^{-j3\pi}, e^{-j\pi}\right) \\ j\mathbf{I}_{k_3} &= \text{kosegen}\left(e^{-j(3\pi/2+2\pi(k_3-1))}, ..., e^{-j7\pi/2}, e^{-j3\pi/2}\right) \\ -j\mathbf{I}_{k_4} &= \text{kosegen}\left(e^{-j(\pi/2+2\pi(k_4-1))}, ..., e^{-j5\pi/2}, e^{-j\pi/2}\right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

biçiminde ifade edilmelidir. Özdeğerlerin bu şekilde ifade edilmesinin nedeni AKFD'yi sürekli KFD'nin (2.21)'deki tanımına ve kerneline benzetmektir. Bu nedenle özvektörlerin derecelerine uygun özdeğerler seçilmiştir. Bir sonraki aşama ise merkezi AKFD'yi (MAKFD) bulmak olacaktır.

MAKFD'nin Elde Edilmesi: a–ıncı dereceden MAKFD (2.35), (2.31) ve (2.39) birleştirilerek elde edilebilir:

$$\mathbf{W}_N^a = \overline{\mathbf{V}}_1 \overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_1}^a \overline{\mathbf{V}}_1^T + \overline{\mathbf{V}}_2 \overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_2}^a \overline{\mathbf{V}}_2^T + \overline{\mathbf{V}}_3 \overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_3}^a \overline{\mathbf{V}}_3^T + \overline{\mathbf{V}}_4 \overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_4}^a \overline{\mathbf{V}}_4^T. \tag{2.40}$$

Burada

$$\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_1}^a = \text{kosegen}\left(e^{-j2\pi(k_1-1)a}, \dots, e^{-j2\pi a}, e^{-j0}\right) \tag{2.41a}$$

$$\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_2}^a = \text{kosegen}\left(e^{-j(\pi+(k_2-1)2\pi)a}, \dots, e^{-j3\pi a}, e^{-j\pi a}\right) \tag{2.41b}$$

$$\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_3}^a = \text{kosegen}\left(e^{-j(\frac{3\pi}{2}+(k_3-1)2\pi)a}, \dots, e^{-j\frac{7\pi}{2}a}, e^{-j\frac{3\pi}{2}a}\right) \tag{2.41c}$$

$$\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_4}^a = \text{kosegen}\left(e^{-j(\frac{\pi}{2}+(k_4-1)2\pi)a}, \dots, e^{-j\frac{5\pi}{2}a}, e^{-j\frac{\pi}{2}a}\right). \tag{2.41d}$$

olmaktadır. $\overline{\mathbf{V}}_i$ birbirine dikgen olduğundan, (2.40) kullanılarak önerilen yöntemin (2.3)'de gösterilen toplamsallık kuralını sağladığı gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_N^{a_1}\mathbf{W}_N^{a_2} =&(\overline{\mathbf{V}}_1\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_1}^{a_1}\overline{\mathbf{V}}_1^T + \overline{\mathbf{V}}_2\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_2}^{a_1}\overline{\mathbf{V}}_2^T + \overline{\mathbf{V}}_3\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_3}^{a_1}\overline{\mathbf{V}}_3^T + \overline{\mathbf{V}}_4\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_4}^{a_1}\overline{\mathbf{V}}_4^T)(\overline{\mathbf{V}}_1\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_1}^{a_2}\overline{\mathbf{V}}_1^T + \overline{\mathbf{V}}_2\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_2}^{a_2}\overline{\mathbf{V}}_2^T \\
&+ \overline{\mathbf{V}}_3\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_3}^{a_2}\overline{\mathbf{V}}_3^T + \overline{\mathbf{V}}_4\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_4}^{a_2}\overline{\mathbf{V}}_4^T) \\
=&(\overline{\mathbf{V}}_1\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_1}^{a_1+a_2}\overline{\mathbf{V}}_1^T + \overline{\mathbf{V}}_2\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_2}^{a_1+a_2}\overline{\mathbf{V}}_2^T + \overline{\mathbf{V}}_3\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_3}^{a_1+a_2}\overline{\mathbf{V}}_3^T + \overline{\mathbf{V}}_4\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_4}^{a_1+a_2}\overline{\mathbf{V}}_4^T) \\
=&\mathbf{W}_N^{a_1+a_2}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Bölüm 2.4'te önerilen MAKFD'nin, sürekli KFD'nin örneklenmiş durumuna ne kadar yaklaştığı yapılan benzetimlerle incelenecektir.

2.3.3 AKFD Elde Edimi

MAFD ile AFD arasında yakın bir ilişki bulunmaktadır ve bazı durumlarda birbirlerine dönüştürülmeleri mümkün olmaktadır. Normal AFD dönüşüm bölgesindeki işaret, MAFD dönüşüm bölgesindekinin ötelenmiş halidir. Örneğin, tek uzunluklu bir işaretin MAFD'si alınsa ve tam orta noktasından sağ ve sol tarafları yer değiştirilse bildiğimiz AFD ile dönüştürülmüş işaret elde edilir. Bu işlemi biz AFD–*kaydırma** olarak adlandırmaktayız.

$\mathbf{W}_N$ ve $\mathbf{F}_N$ sırasıyla $N \times N$ boyutlu MAFD ve normal AFD matrisleri olsun. $\mathbf{W}_N$ ile $\mathbf{F}_N$ arasındaki ilişkiyi çift ve tek N için ayrı ayrı inceleyelim. N tek sayı ise, $\mathbf{W}_N$ ile $\mathbf{F}_N$ arasındaki ilişki bir permütasyon matrisi $\mathbf{K}_N$ yardımıyla

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{K}_N\mathbf{W}_N\mathbf{K}_N^{-1} \tag{2.43}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada AFD–kaydırma operatörü $\mathbf{K}_N$

$$\mathbf{K}_N = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_k \\ \mathbf{I}_{N-k} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{I}_k$ ve $\mathbf{I}_{N-k}$ sırasıyla $k \times k$ ve $(N-k) \times (N-k)$'lık birim matrislerdir ve $k = (N+1)/2$ olmaktadır. Bu durumda $\mathbf{K}_N$ permütasyon matrisi tersine eşittir, yani $\mathbf{K}_N = \mathbf{K}_N^{-1}$. Böylece (2.43) denklemi $\mathbf{F}_N = \mathbf{K}_N\mathbf{W}_N\mathbf{K}_N$ şeklinde kısalmış olur. Bu nedenle, $\mathbf{W}_N$ ve $\mathbf{F}_N$ benzer matrislerdir, aynı özdeğerlere sahiptirler ve $\mathbf{K}_N$ matrisi özvektörler arasındaki ilişkiyi belirler.

Ayrık Hermite–Gauss vektörleri normal AFD matrisinin özvektörleri değildir, çünkü bu vektörler MAFD'nin özvektörleridir. $\mathbf{h}_n$, n–inci dereceden ayrık Hermite–Gauss vektörü

*Bu işlem aynı zamanda MATLAB ® programında/dilinde `fftshift()` fonksiyonu olarak da bilinmektedir.

olsun. Normal AFD matrisi

$$\mathbf{F}_N\mathbf{K}_N\mathbf{h}_n = \lambda_n\mathbf{K}_N\mathbf{h}_n, \tag{2.45}$$

eşitliğini sağlar, çünkü normal AFD matrisinin özvektörleri Hermite–Gauss vektörlerinin dairesel olarak döndürülmüş halidir. Burada λ_n, $\mathbf{h}_n$ ile ilintili özdeğerdir.

N çift sayı olduğu durumda ise, (2.45)'deki gibi bir permütasyon matrisi tanımlanamaz. Böyle bir permütasyon matrisi tanımlayabilmek için (2.27)'deki tanımlamayı $c = \frac{N}{2}+1$ olarak değiştirmek gerekmektedir. Bu durumda N çift olduğundan

$$\mathbf{K}_N = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{N/2} \\ \mathbf{I}_{N/2} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

şeklinde değiştirilir. Burada $\mathbf{I}_{N/2}$, $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$'lik birim matristir. MAFD bu şekilde tanımlandığında özdeğerlerin katlılığı da değişmektedir. Beklendiği gibi özdeğerlerin katlılığı, Çizelge 2.2'de gösterilen normal AFD matrisiyle aynıdır ve hesaplamalar bu yeni katlılığa göre değişmektedir. Çizelge 2.1 ile Çizelge 2.2 karşılaştırıldığında N'in tek olduğu durumlar için özdeğerlerin katlılığının aynı, çift olduğu durumlarda ise değiştiği görülmektedir. Bu nedenle, N çift sayı olduğunda, (2.41)'daki son özdeğerde bir atlama yapılarak $\mathbf{\Lambda}_N^a = \text{kosegen}(e^{-j0}, e^{-j\frac{\pi}{2}a}, \ldots, e^{-j\frac{\pi}{2}a(N-2)}, e^{-j\frac{\pi}{2}aN})$ şeklinde değiştirilmelidir. Böylece $N = 4m+2$ için sadece (2.41b)

$$\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_2}^a = \text{kosegen}\Big(e^{-j(\pi+k_2 2\pi)a}, e^{-j(\pi+(k_2-2)2\pi)a}, \ldots, e^{-j3\pi a}, e^{-j\pi a}\Big) \tag{2.47}$$

olarak ve $N = 4m$ için ise sadece (2.41c)

$$\overline{\mathbf{\Lambda}}_{k_4}^a = \text{kosegen}\Big(e^{-j(\frac{\pi}{2}+k_4 2\pi)a}, e^{-j(\frac{\pi}{2}+(k_4-2)2\pi)a}, \ldots, e^{-j\frac{5\pi}{2}a}, e^{-j\frac{\pi}{2}a}\Big). \tag{2.48}$$

olarak değiştirilmelidir. N tek için (2.43) değiştirilmez. Kısaca özetlemek gerekirse a–ıncı dereceden AKFD

$$\mathbf{F}_N^a = \mathbf{K}_N\mathbf{W}_N^a\mathbf{K}_N^{-1}. \tag{2.49}$$

şeklinde ifade edilir. Bir sonraki alt bölümde $\overline{\mathbf{V}}_i$, $i = 1,2,3,4$ AKFD hesaplaması için kullanılarak performans analizi yapılmaktadır. Bu yöntem, literatürde matris isimleri kullanılarak adlandırma geleneğine uygun olarak $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemi olarak tarafımızdan isimlendirilmiştir.

Çizelge 2.2 $N \times N$ boyutlu normal AFD matrisinin özdeğerlerinin katlılığı.

N	λ: 1	$-j$	-1	j
$4m$	$m+1$	m	m	$m-1$
$4m+1$	$m+1$	m	m	m
$4m+2$	$m+1$	m	$m+1$	m
$4m+3$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	m

*: m sıfırdan farklı pozitif tamsayı

2.4 Önerilen $\overline{\mathbf{V}}$ Yönteminin Başarımı

Bu bölümde yeni bir AKFD ve MAKFD tanımı olarak verilen $\overline{\mathbf{V}}$ yönteminin, sürekli KFD'nin özelliklerini nasıl ve ne kadar gerçekleyebildiği, sürekli KFD'nin örnekleriyle, $\overline{\mathbf{V}}$ yönteminde elde edilen örneklerin birbirine ne kadar benzediği irdelenecektir.

2.4.1 Birimcillik

Önerilen $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemiyle elde edilen dönüşüm matrisleri birimcildir, çünkü

$$(\mathbf{W}_N^a)^{-1} = (\mathbf{W}_N^a)^H = \mathbf{W}_N^{-a}. \tag{2.50}$$

olmaktadır. (2.31)'dan görülebildiği üzere $\overline{\mathbf{V}}_i$, $i = 1, 2, 3$ ve 4 için birbirlerine dikgendirler. Modifiye Gram–Schmidt algoritmasından sonra, $\overline{\mathbf{V}}_i$'nin sütunları da birbirine dikgen olmaktadır. Özvektörler birbirine dikgen, özdeğerler de birim normda olduğundan, dönüşüm birimcildir.

2.4.2 Toplamsallık

Önerilen yöntem, KFD'nin toplamsallık kuralına uymaktadır. a ve b derecelerinde art arda iki AKFD, $a+b$ derecesinde bir tane AKFD'ye eşittir:

$$\mathbf{W}_N^a \mathbf{W}_N^b = \mathbf{W}_N^{a+b}. \tag{2.51}$$

Bu kural ikiden fazla art arda dönüşüm için de benzer şekilde dönüşüm derecelerinin toplamında tek bir dönüşüme eşittir. Bu kuralın ispatı (2.37)'de verilmiştir.

2.4.3 $a = 1$ iken AFD'ye İngirgenme

Önerilen AKFD, $a = 1$ olduğu durumda normal AFD'ye eşittir. Bu özellik ayrık zaman–frekans eksenini $\frac{\pi}{2}$ açısında döndürmek olarak da düşünülebilir. $a = 1$ durumunda normal AFD'ye indirgenme özelliği (2.37)'de verilmiştir.

Çizelge 2.3 Şekil 2.3'te verilen işaretin sürekli KFD'sinin örnekleri ile, önerilen yöntem ve diğer yöntemler kullanıldığında elde edilen AKFD'si arasındaki toplam normalize hata.

a	Toplam Normalize Hata			
	$\overline{\mathbf{V}}$	$\mathbf{S}$	$\mathbf{S}+\mathbf{15T}$	$\mathbf{S}+15\mathbf{T}-7\mathbf{V}_T$
0.05	0.0829	0.0612	0.0181	0.0160
0.10	0.1481	0.1155	0.0282	0.0193
0.15	0.1866	0.1524	0.0535	0.0412
0.25	0.2017	0.1538	0.0686	0.0482
0.50	0.3156	0.2038	0.0764	0.0541
0.75	0.2048	0.1567	0.0625	0.0437
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

2.4.4 Sürekli AKFD'nin Örneklerine Yakınsama

Önerilen $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemi sürekli KFD'nin örneklerine yakınsar. Bunu göstermek için $N = 73$ uzunluğunda bir kare dalga $x[n]$ işareti

$$\mathbf{x}[n] = \begin{cases} 1, & \text{if } -6 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{diger.} \end{cases} \tag{2.52}$$

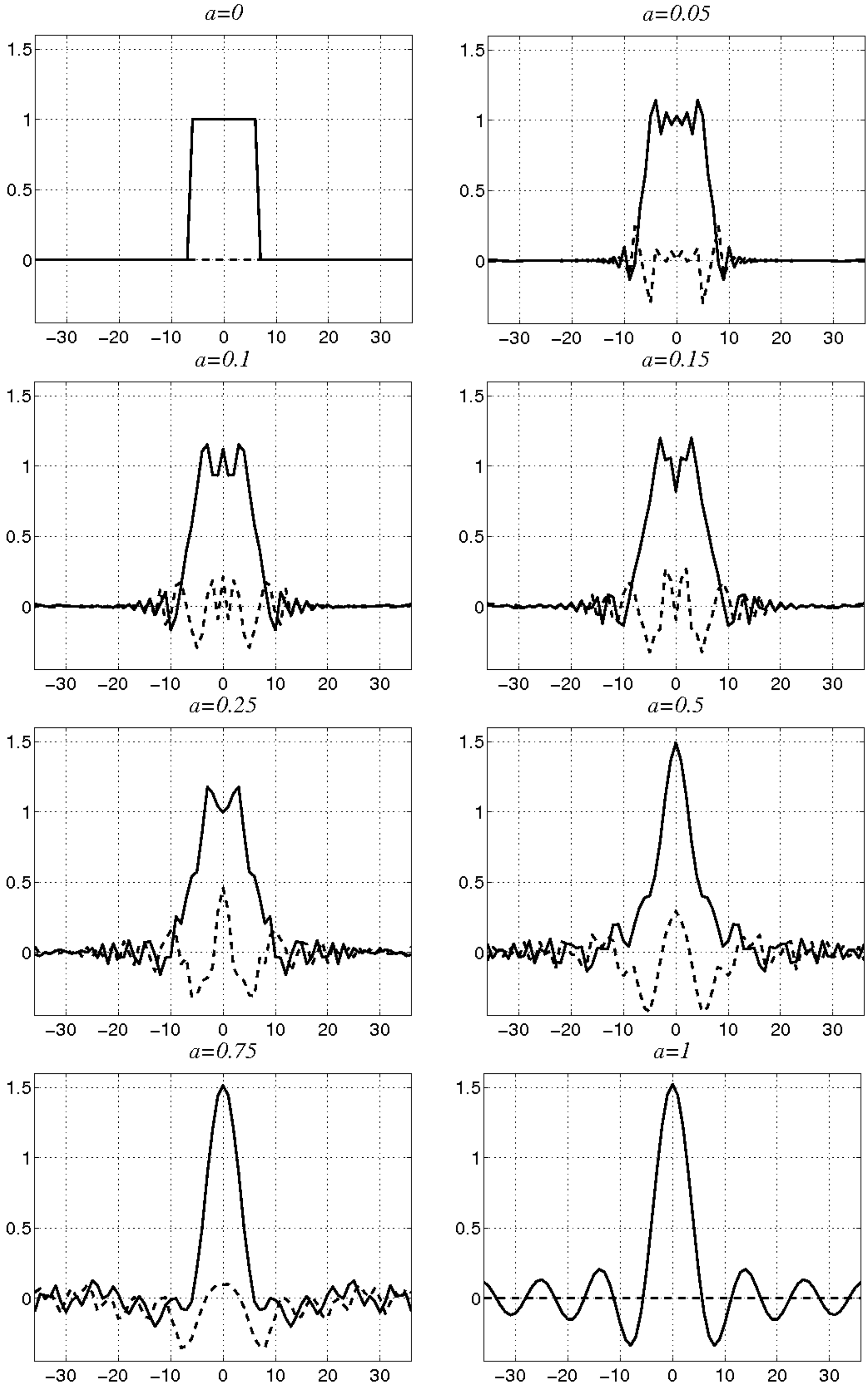
şekinde oluşturulmuştur. Şekil 2.3'de önerilen yöntem kullanılarak, işaretin değişik dönüşüm derecelerindeki AKFD'si gösterilmiştir. Şekil 2.4'de ise $x[n]$ işaretinin aynı derecelerde sürekli KFD'si alınıp örneklendikten sonraki örnekleri gösterilmektedir. Şekillerden de görülebildiği üzere önerilen yöntem sürekli KFD'nin örneklerine yakın sonuçlar üretmektedir. Çizelge 2.3 sürekli KFD'nin örnekleriyle önerilen yöntemle hesaplanan örnekler arasındaki normalize hatayı göstermektedir. Normalize hata miktarını,

$$\text{Hata} = \frac{||\mathbf{x}_a - \overline{\mathbf{x}}_a||}{||\mathbf{x}||} \tag{2.53}$$

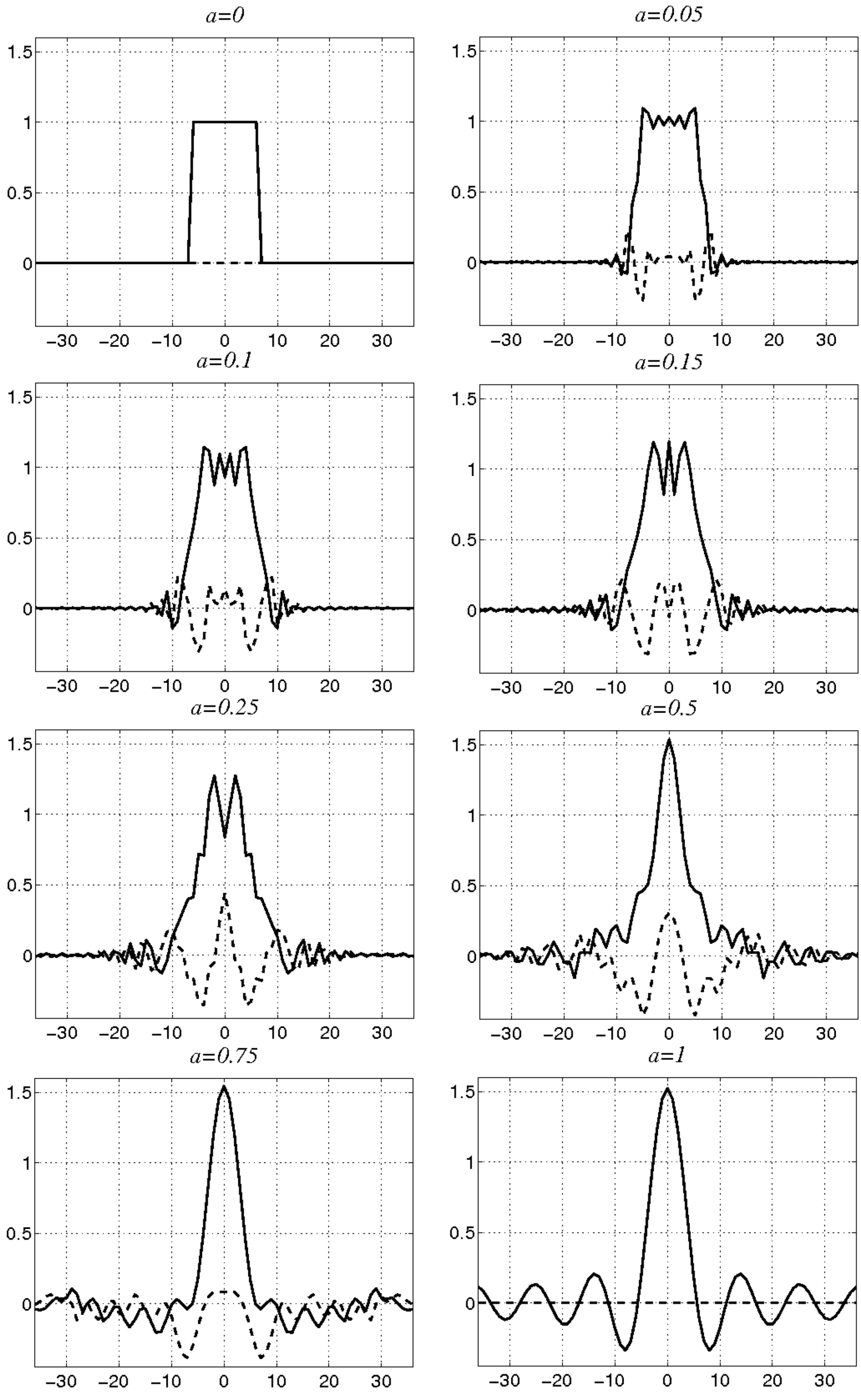
şeklinde tanımlıyoruz. Burada, $||\cdot||$ Frobenius normunu, $\mathbf{x}_a$ ve $\overline{\mathbf{x}}_a$ ise sırasıyla işaretin sürekli KFD'sinin örneklerini ve önerilen $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemiyle hesaplanan işaretin AKFD'sini göstermektedir. Çizelge 2.3'te (Pei vd., 2006)'da gösterildiği gibi $\mathbf{S}$, $(\mathbf{S} + 15\mathbf{T})$ ve bu bölümün ilerleyen kısımlarında tanıtacağımız $(\mathbf{S} + 30\mathbf{T} - 7\mathbf{V}_T)$ yöntemlerinin başarım oranları da gösterilmektedir.

2.4.5 Zaman–Frekans Bölgesinde Döndürme

KFD, bir işareti zaman–frekans ekseninde, dönüşüm derecesiyle orantılı olarak döndürmektedir. Bu bölümde önerilen yöntem, ayrık işaretlerin zaman–frekans (ya da



Şekil 2.3 Ayrık kare işaretinin değişik dönüşüm derecelerinde önerilen $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemi kullanılarak alınan AKFD'si. Düz: Gerçel kısım, Çizgili: Sanal kısım.



Şekil 2.4 Kare işaretin sürekli KFD'sinin değişik dönüşüm derecelerindeki örnekleri. Düz: Gerçel kısım, Çizgili: Sanal kısım.

uzam–frekans) eksenlerini $\alpha = a\pi/2$ açısına yakın bir açıyla döndürmektedir. Bu özellik hemen görülebilir, çünkü önerilen yöntem sürekli KFD'nin örneklerine yakınsamaktadır. Bu özelliği sınamak için, zarfı Gauss işareti olan ve DFM oranı $\beta = 0.1$ olan bir DFM işareti oluşturulmuştur. Şekil 2.5.(a) ve (b), oluşturulan DFM işareti ve bu işaretin zaman–frekans eksenindeki Wigner dağılımını göstermektedir. Şekil 2.5.(c) ve (d) ise sırasıyla $a = 0.75$ dönüşüm derecesindeki AKFD'sini ve onun Wigner dağılımını göstermektedir. İşaretin yine $a = 0.75$ derecesindeki sürekli KFD'si ve onun Wigner dağılımı da Şekil 2.5.(e) ve (f)'de gösterilmektedir. Şekil 2.5.(c) ve (d) ile (e) ve (f) karşılaştırıldığında önerilen AKFD yönteminin KFD'nin zaman–frekans'ta döndürme özelliğini sağladığı açıkça görülmektedir.

2.5 Önerilen Yöntemin Başarımını Yükseltme

Pei vd. (2006) **S** yöntemini **T** yöntemiyle, ikisinin doğrusal kombinasyonlarını alarak birleştirmiş ve **S** + 15**T**'nin özvektörlerinin hem **S** hem de **T** yöntemine oranla Hermite–Gauss fonksiyonlarına daha fazla benzediğini gözlemlemiştir. Biz de önerilen yöntemin Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine benzerlik açısından başarımını arttırmak için önerdiğimiz yöntemle birlikte **S** ve **T** matrislerinin doğrusal kombinasyonlarını kullandık.

Bunu gerçeklemek için önce AFD ile sırabağımsız bir matris oluşturmak gerekmektedir. Bu amaç doğrultusunda

$$\mathbf{V_T} = \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_T} \overline{\mathbf{V}}_N^T \tag{2.54}$$

şeklinde yeni bir AFD sırabağımsız matrisi sunmaktayız. Burada $\overline{\mathbf{V}}_N$, önerilen yöntemle bulunan $N \times N$'lik, sıfır geçişleri artan olarak sıralanmış özvektör matrisi ve $\mathbf{\Lambda_T}$, $\mathbf{T}$ matrisinin özdeğerlerini köşegeninde barındıran köşegen matrisi göstermektedir.

Önerme 2.2: Gösterilebilir ki, $\mathbf{V}_T$ ile AFD matrisi sırabağımsızdır, yani $\mathbf{V_T W}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{V_T}$ olmaktadır.

İspat. $\overline{\mathbf{V}}_N$ matrisinin sütunları AFD matrisinin özvektörleri olduğundan, AFD matrisi

$$\mathbf{W}_N = \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_W} \overline{\mathbf{V}}_N^T \tag{2.55}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{\Lambda_W}$, AFD matrisinin özdeğerlerini içeren köşegen matristir.

O halde $\mathbf{V_T W}_N$ şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V_T W}_N =& \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_T} \overline{\mathbf{V}}_N^T \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_W} \overline{\mathbf{V}}_N^T \\
=& \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_T} \mathbf{\Lambda_W} \overline{\mathbf{V}}_N^T \\
=& \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_W} \mathbf{\Lambda_T} \overline{\mathbf{V}}_N^T \\
=& \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_W} \overline{\mathbf{V}}_N^T \overline{\mathbf{V}}_N \mathbf{\Lambda_T} \overline{\mathbf{V}}_N^T \\
=& \mathbf{W}_N \mathbf{V_T}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Özellik 2.1: $\mathbf{T}$ üçköşegen bir matristir ve önerdiğimiz yöntemin ürettiği özvektörlere yakın özvektör kümesi üretmektedir (Pei vd., 2006). $\mathbf{T}$ matrisinin özvektörleri yerine bizim bulduğumuz özvektörler konulduğu için, $\mathbf{V_T}$, $\mathbf{T}$ matrisinin yapısına benzeyecektir. Yaptığımız benzetimler sonucu $\mathbf{V_T}$ matrisinin de hemen hemen üçköşegen bir matris olduğu görülmüş, bu matrisin üç köşegeninde yüksek genlikli değerler, kalan kısımlarında ise çok düşük genlikli değerler gözlenmiştir. Yapılan bilgisayar benzetimleri sonucu $k_1\mathbf{S} + k_2\mathbf{T} + k_3\mathbf{V_T}$ şeklinde üç yöntemin doğrusal birleşiminde, $k_1 = 1$,$k_2 = 30$ ve $k_3 = -7$ seçildiğinde bu kombinasyonun özvektörleriyle Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleri arasındaki hatanın minimum olduğu gözlenmiştir. Çizelge 2.3'e tekrar bakılırsa önerilen $\mathbf{S} + 15\mathbf{T} - 7\mathbf{V_T}$ yönteminin $\mathbf{S}$,$\mathbf{T}$ ve $\mathbf{S} + 15\mathbf{T}$ yöntemlerinden daha başarılı olduğu görülebilir.

2.6 Benzetimler

Bu bölümde AKFD için iki yeni yöntem önerilmektedir:

1. $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemi (bkz, Bölüm 2.2).
2. $\mathbf{S} + 30\mathbf{T} - 7\mathbf{V_T}$ yöntemi(bkz, Bölüm 2.3).

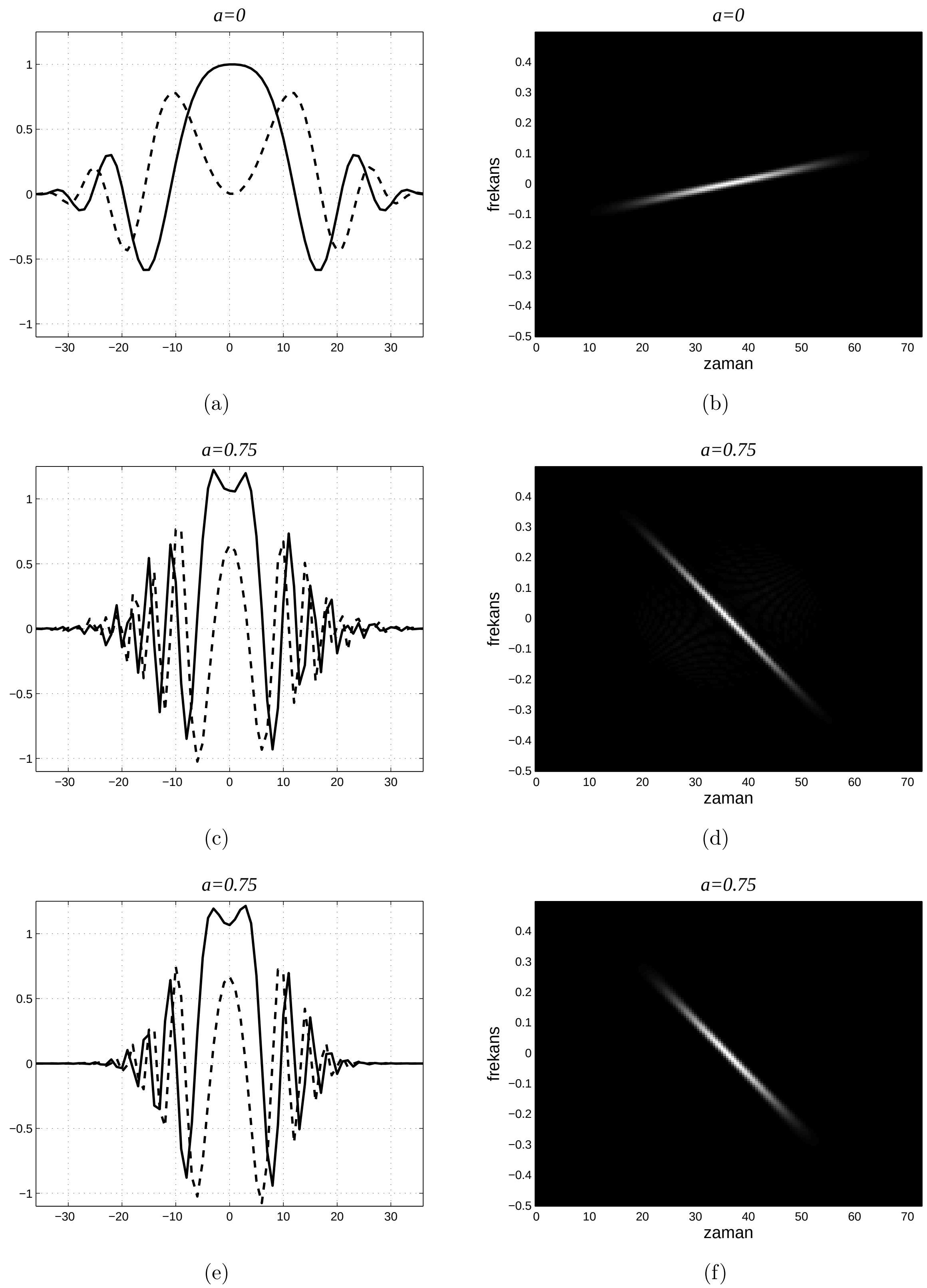
Şekil 2.6, önerilen $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemininin performansının (Candan vd., 2000)'da tanıtılan $\mathbf{S}$ yöntemiyle $N = 33$ için kıyaslamalı göstermektedir. Burada, performans kriteri, sürekli Hermite–Gauss işaretlerinin örnekleriyle dikgen özvektörler arasındaki hatanın normu seçilmiştir. Şekilden de görülebildiği üzere $\mathbf{S}$ yöntemi, küçük derecelerde daha iyi olmasına rağmen, $\overline{\mathbf{V}}$ yöntemi orta dereceler için daha iyi performans sergilemiştir. $N = 65$ için $\overline{\mathbf{V}}$ ile $\mathbf{S}$ yöntemlerinin kıyaslaması Şekil 2.7'te gösterilmektedir.

Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle ($\mathbf{S} + 15\mathbf{T} - 7\mathbf{V_T}$) ve (Pei vd., 2006)'daki ($\mathbf{S} + 15\mathbf{T}$) yöntemleri arasıdaki hatanın normu Şekil 2.8'da N=33 için gösterilmektedir. Açıkça belli olmaktadır ki önerilen ($\mathbf{S} + 15\mathbf{T} - 7\mathbf{V_T}$), ($\mathbf{S} + 15\mathbf{T}$)'den daha üstündür. Şekil 2.9'de, $N = 65$ için ($\mathbf{S} + 15\mathbf{T}$) ile ($\mathbf{S} + 15\mathbf{T} - 7\mathbf{V_T}$) yaklaşımlarını karşılaştırılmıştır. Yine açıkça bellidir ki önerilen yöntem, diğer yöntemlerle kıyaslandığında daha başarılıdır.

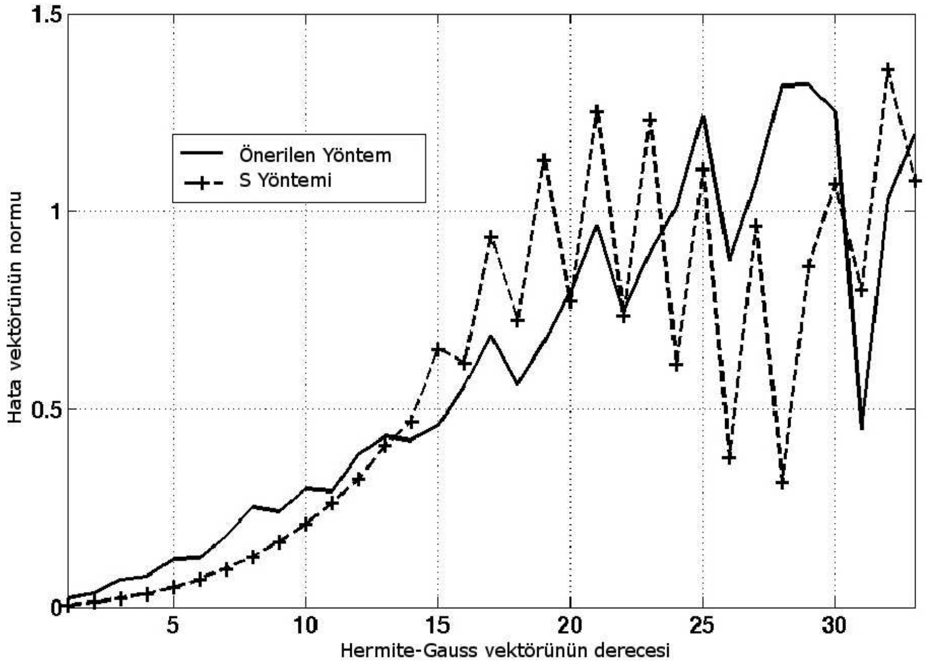
2.7 Sonuçlar

Bu bölümde, bir işaretin dört kere arka arkaya AFD'sinin işaretin kendisine eşit olmasından yola çıkılarak, AKFD matrisi için yeni bir yaklaşıklık elde edilmiştir. MAFD matrisinin sadece kendisi ve katları kullanılararak kolay ve şık bir prosedürle MAFD matrisinin özvektörleri elde edilmiştir. MAFD matrisinin özvektörleri elde edildikten sonra, MAKFD'den AKFD matrisi elde edilmesinin basit bir yöntemi gösterilmiştir. Benzetim sonuçları, uygulanan yöntemin bazı dereceler için $\mathbf{S}$ yönteminden daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir (Serbes ve Durak-Ata, 2011a).

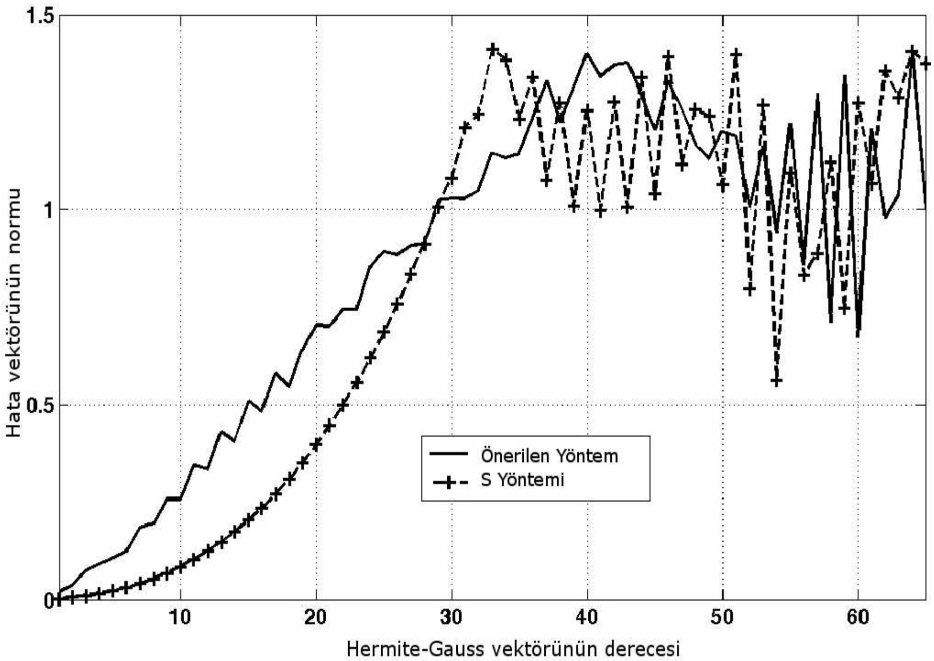
AFD özvektörlerinin Hermite–Gauss fonksiyonlarına daha iyi yaklaşmasını sağlamak adına, yeni bir AFD sırabağımsız $\mathbf{V}_T$ matrisi ortaya atılmış ve diğer sırabağımsız $\mathbf{S}$ ve $\mathbf{T}$ matrisleriyle uygun bir biçimde doğrusal kombinasyonu alınmıştır. Bilgisayar benzetimleri ($\mathbf{S} + 30\mathbf{T} - 7\mathbf{V}_T$) matrisinin özvektörlerinin Hermite–Gauss özvektörlerine daha iyi yakınsadığını göstermektedir.



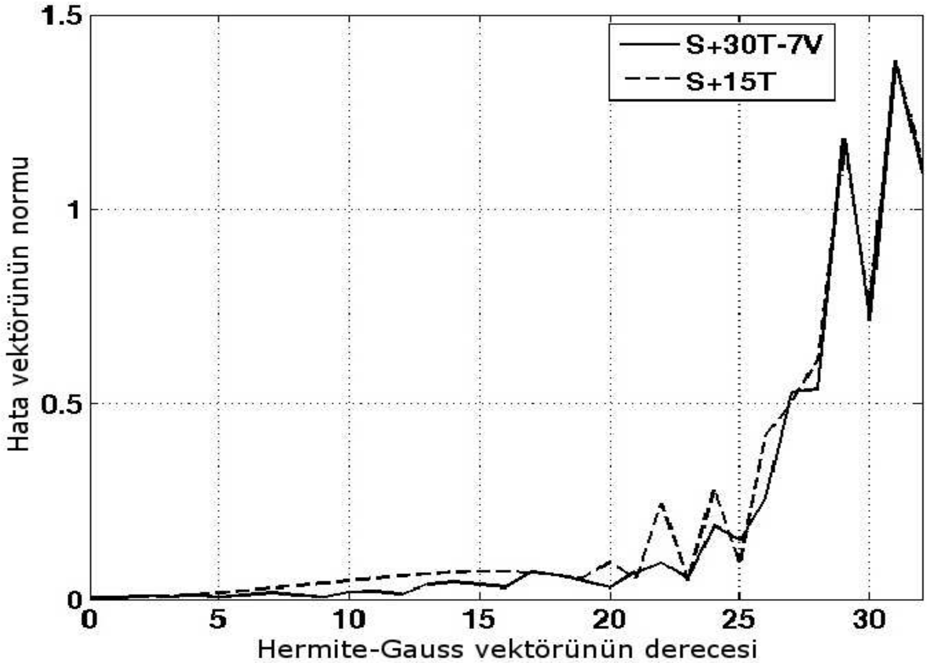
Şekil 2.5 (a) DFM oranı $\beta = 0.1$ olan bir DFM işareti ve (b) onun Wigner dağılımı. (c) İşaretin önerilen yöntemle a–ıncı AKFD'si ve (d) onun Wigner dağılımı. (e) İşaretin a–ıncı dereceden sürekli KFD'si ve (f) onun Wigner dağılımı. Düz: Gerçel kısım, Çizgili: Sanal kısım.



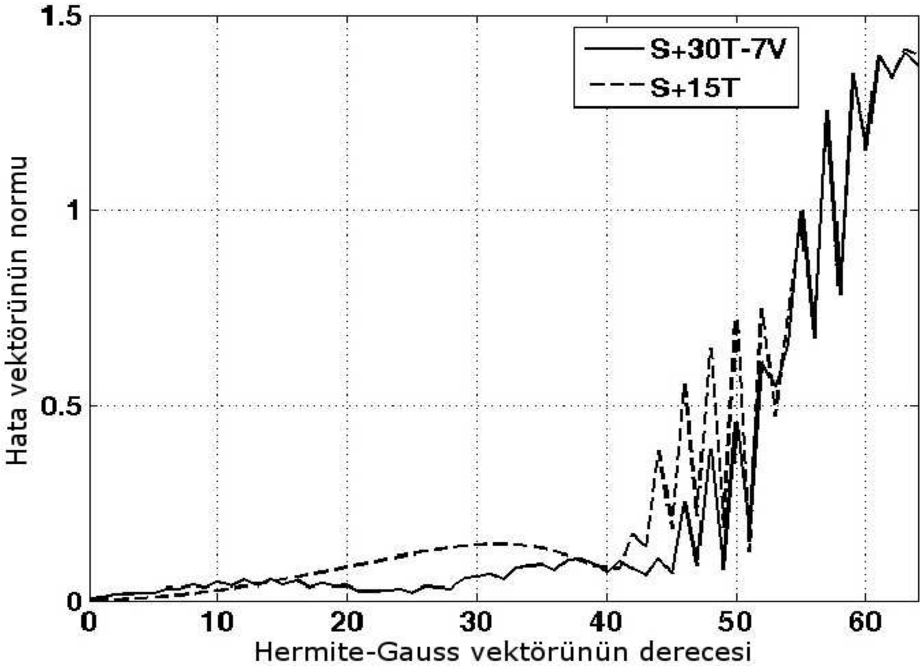
Şekil 2.6 $N = 33$ için Hermite–Gauss fonksiyonunun örnekleriyle $\overline{\mathbf{V}}$ ve $\mathbf{S}$ yöntemleri arasındaki hata normları.



Şekil 2.7 $N = 65$ için Hermite–Gauss fonksiyonunun örnekleriyle $\overline{\mathbf{V}}$ ve $\mathbf{S}$ yöntemleri arasındaki hata normları.



Şekil 2.8 $N = 33$ için Hermite–Gauss fonksiyonunun örnekleriyle $\mathbf{S} + 15\mathbf{T} - 7\mathbf{V_T}$ ve $\mathbf{S} + 15\mathbf{T}$ yöntemleri arasındaki hata normları.



Şekil 2.9 $N = 65$ için Hermite–Gauss fonksiyonunun örnekleriyle $\mathbf{S} + 15\mathbf{T} - 7\mathbf{V_T}$ ve $\mathbf{S} + 15\mathbf{T}$ yöntemleri arasındaki hata normları.

3 ÇİFT–DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM TABANLI AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZVEKTÖRLERİ

KFD'nin ayrıklaştırılması işaret işleme, filtreleme, örnekleme ve zaman–frekans analizi alanlarında oldukça önemlidir (Ozaktas vd., 2001; Kutay vd., 1997; Xia, 1996). KFD, Wigner dönüşümüyle ilişkili olduğundan, (Ozaktas vd., 2001), DFM oranı kestirimi gibi zaman–frekans analizi konularında güçlü bir araçtır (Akay ve Boudreaux-Bartels, 2001).

Bu bölümde AFD matrisinin özvektörleri tamamen farklı bir yaklaşımla bulunmuştur. Burada, türev operatörünün çift–doğrusal yaklaşıklığı kullanılmış ve Hermite–Gauss üreten ikinci dereceden diferansiyel denklemde yerine konmuştur. Çift–doğrusal dönüşüm, analog bölgeyi ayrık bölgeye birebir eşleştirmektedir. Böylece Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine yakın özvektörler elde edilmektedir. Çift–doğrusal dönüşümün ikinci dereceden türev operatörüne yaklaşıklığı yapıldıktan sonra kararlılık analizi de yapılmıştır. Buna ek olarak iki farklı yöntem daha sunulmuştur, ki bu yöntemlerin ilkinde daha iyi koşullanmış çift–doğrusal yaklaşıklık, ikincisinde ise çift–doğrusal dönüşümün yüksek dereceden Taylor yaklaşıklığı benzeri bir yöntem kullanılmıştır. Bu bölümde tanıtılacak olan çalışma (Serbes ve Durak-Ata, 2010)'da yayınlanmıştır.

3.1 Ön Bilgiler

3.1.1 AFD ile Sırabağımsız Matris Üretimi

$\mathbf{A}$ ile $\mathbf{B}$ $N \times N$ boyutunda kare matris olsun. Eğer $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ise, $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{B}$ sırabağımsızdır. Eğer $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{B}$ sırabağımsız iseler en az bir tane ortak özvektör kümesini paylaşırlar (Candan vd., 2000).

Candan (2007) göstermiştir ki $N \times N$'lik, AFD ile sırabağımsız bir $\mathbf{K}$ matrisi

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} + \mathbf{FLF}^{-1} + \mathbf{F}^2\mathbf{LF}^{-2} + \mathbf{F}^3\mathbf{LF}^{-3} \tag{3.1}$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{F}$ $N \times N$'lik, sırasıyla herhangi bir matris ve AFD matrisidir. $\mathbf{K}$'nın $\mathbf{F}$ ile sırabağımsız olduğunu göstermek çok kolaydır, çünkü $\mathbf{F}^4 = \mathbf{I}$ olduğu kullanılarak $\mathbf{FKF}^{-1} = \mathbf{K}$ olduğu hemen görülebilmektedir.

(Pei vd., 2009)'da gösterilmiştir ki eğer $\mathbf{L}$ matrisi $\mathbf{F}^2$ ile sırabağımsızsa (3.1)

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} + \mathbf{FLF}^{-1} \tag{3.2}$$

şeklinde kısalır.

Önerme 3.1. Bu fikir daha da genişletilerek, eğer $\mathbf{L}$ dairesel ve simetrik bir matrisse yukarıdaki denklem aynen geçerlidir.

İspat. Eğer $N \times N$'lik kare bir $\mathbf{C}$ matrisi dairesel ve simetrikse, bu matrisin özdeğer ayrıştırması

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda}_C\mathbf{F} \tag{3.3}$$

şeklindedir (Golub ve Van Loan, 1996) (sf. 201–202). Burada $\mathbf{\Lambda}_C = \text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{Fc})$, $\mathbf{C}$'nin özdeğerlerini içeren köşegen matristir ve $\mathbf{c}$, $\mathbf{C}$'nin ilk sütunudur. $\mathbf{C}$ simetrik olduğundan dolayı yukarıdaki denklem

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{\Lambda}_C\mathbf{F}^{-1} \tag{3.4}$$

denklemine denktir, çünkü simetriklikten dolayı $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$ olmaktadır. (3.4) ve (3.3) birlikte kullanılarak $\mathbf{C} + \mathbf{FCF}^{-1} = \mathbf{F}^2\mathbf{CF}^{-2} + \mathbf{F}^3\mathbf{CF}^{-3}$ yazılabileceği kolayca görülebilir. Sonuç olarak

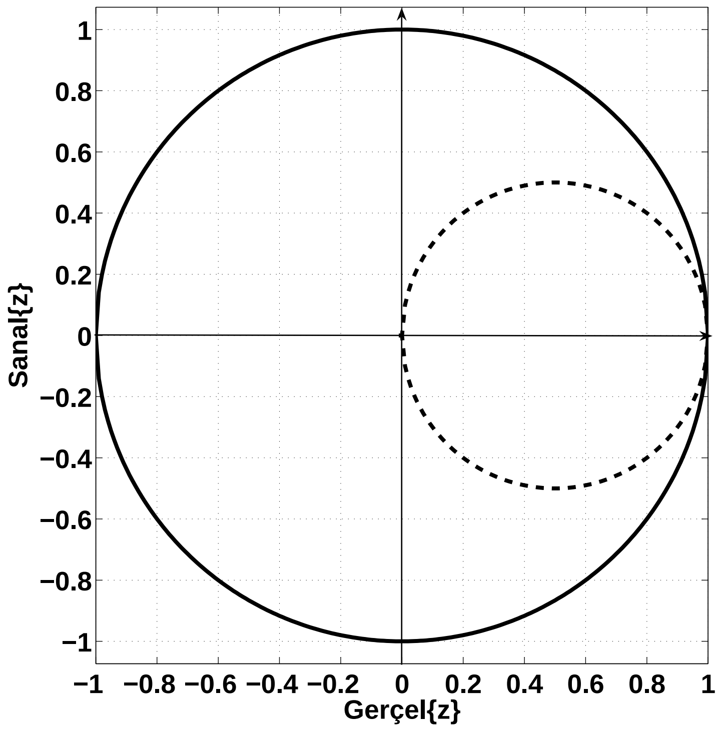
$$\mathbf{K} = \mathbf{C} + \mathbf{FCF}^{-1} \tag{3.5}$$

olduğu ispatlanmış olur. Son olarak, AFD ile sırabağımsız matrisler oluşturulurken, gerçel, simetrik, dairesel ve ikinci türev işlemini iyi modelleyen bir $\mathbf{C}$ matrisi oluşturarak bunu (3.5)'te yerine koymak iyi bir seçim olacaktır. □

3.1.2 Çift–Doğrusal Dönüşüm

Çift–doğrusal dönüşüm, işaret ve sistem analizinde Laplace sürekli s bölgesini, ayrık z bölgesine eşleştirmekte kullanılan güçlü ve popüler bir araçtır. s bölgesini z bölgesiyle eşleştirmek için bir çok nümerik analiz yöntemi bulunmaktadır. Bu yöntemler arasında en popüler olanları ileri ve geri fark yöntemleriyle çift–doğrusal dönüşüm yöntemidir. İleri fark yöntemi, türev operatörünü $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t \Rightarrow (x(n) - x(n-1))/\Delta t$ ile modellerken, geri fark yöntemi $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t \Rightarrow (x(n+1) - x(n))/\Delta t$ şeklinde modellemektedir. Çift–doğrusal dönüşüm yöntemi ise ayrık $x(n)$ işaretinin ayrık türevini

$$x'(n) + x'(n-1) = \frac{c}{\Delta t}\left(x(n) - x(n-1)\right) \tag{3.6}$$



Şekil 3.1 Çift doğrusal dönüşüm ve ileri fark yöntemlerinin $j\omega$ ekseninin z düzlemindeki görüntüsü. Düz: Çift–doğrusal dönüşüm, Çizgili: İleri fark yöntemi.

şeklinde modellemektedir. Burada $x'(n)$, $x(n)$ işaretinin ayrık türevi, $\Delta t = 1/\sqrt{N}$ örnekleme periyodu, c herhangi bir skaler ve N ise $x(n)$ işaretinin uzunluğudur. Böylece ikinci dereceden ayrık türev operatörü $x''(n)$, merkezlenmiş haliyle

$$x''(n-1) + 2x''(n) + x''(n+1) = \left(\frac{c}{\Delta t}\right)^2 (x(n-1) - 2x(n) + x(n+1))\,. \tag{3.7}$$

elde edilmektedir. Çift–doğrusal dönüşüm analog bölgeyi ayrık bölgeye birebir eşleştirmektedir. Daha açık olarak s bölgesindeki $\mathbb{R}\{s\} = 0$'daki ($j\omega$ ekseni) noktaları, z eksenindeki $|z| = 1$ birim çemberine birebir eşler. Fakat ileri fark yöntemi Şekil 3.1'de gösterildiği gibi yarıçapı 0.5 olan ve merkezi $z = 0.5$'te olan bir çembere eşler. Çift doğrusal dönüşüm $j\omega$ eksenindeki her bir noktayı z düzlemine örtüşme olmadan eşler.

(3.7)'yi matris biçiminde

$$\mathbf{B}_1\mathbf{X}'' = \left(\frac{c}{\Delta t}\right)^2 \mathbf{E}_2\mathbf{X} \tag{3.8}$$

olarak ifade edebiliriz. Burada $\mathbf{X}'' = [x''(0), x''(1), \ldots, x''(N-1)]^T$, $\mathbf{X} = [x(0), x(1), \ldots,$

$x(N-1)]^T$ olmakta ve

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

ile

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

şeklindedir. Sonuç olarak işaretin ikinci dereceden türevini

$$\mathbf{X}'' = \left(\frac{c}{\Delta t}\right)^2 \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{E}_2\mathbf{X} \tag{3.11}$$

şeklinde ifade ederek, ikinci dereceden türev operatörünü $\mathbf{D}^2 = \left(\frac{c}{\Delta t}\right)^2 \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{E}_2$ olarak tanımlamaktayız.

3.2 AFD ile Sırabağımsız Matris Üretimi

AFD matrisinin Hermite–Gauss benzeri özvektörlerini elde etmek için kolay ve doğru bir yol, (2.15)'teki diferansiyel denklemin ayrıklaştırılmış halini taklit eden bir AFD sırabağımsız matris üretmektir.

Öne sürdüğümüz algoritma basit, fakat etkilidir. Önerilen yöntemde AFD sırabağımsız matrisi, (2.16)'teki ikinci dereceden türev operatörü yerine (3.11)'de sunulan ikinci dereceden ayrık türev operatörü, FD yerine de (2.24)'teki AFD matrisi yerleştirilerek üretilmektedir. Hermite–Gauss fonksiyonları üreten diferansiyel denklem taklit edildiğinden, bu matrisin özvektörleri de ayrık Hermite–Gauss benzeri vektörler olmaktadır. Böylece, çift–doğrusal dönüşümden esinlenilmiş AFD ile sırabağımsız matris

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{E}_2 + \mathbf{F}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{E}_2\mathbf{F}^{-1}. \tag{3.12}$$

şwklinde yazılabilir. Burada $(c/\Delta t)^2$ katsayısı atılmaktadır, çünkü $\mathbf{B}$ matrisinin özvektörlerine hiç bir etkisi yoktur.

Önerme 3.2. $\mathbf{B}$ matrisi AFD matrisiyle sırabağımsızdır.

İspat. $\mathbf{B}_1$ ve $\mathbf{E}_2$ matrislerinin her ikisi de dairesel ve simetrik olduğundan, $\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{E}_2$ matrisi de dairesel ve simetriktir. Bölüm 3.1.1'de verilen ve herhangi bir dairesel ve simetrik $\mathbf{C}$ matrisinin (3.5)'teki gibi kullanılarak AFD sırabağımsız matris elde edilebileceğini gösteren Önerme 3.1 kullanılarak, $\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{E}_2$ olduğundan $\mathbf{B}$ matrisi AFD ile sırabağımsızdır önermesi ispatlanmış olur. □

3.2.1 Kararlılık Analizi

Eğer $\mathbf{B}_1$ matrisi tekil değilse $\mathbf{B}$ de kararlı olur. Dairesel bir matris olan $\mathbf{B}_1$'in tekil olup olmadığını incelemek için özdeğer ayrıştırması

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda}_{B_1}\mathbf{F} \tag{3.13}$$

şeklinde yapılabilir. Burada $\mathbf{\Lambda}_{B_1}$, $\mathbf{B}_1$'in özdeğerlerini içeren köşegen matristir. $\mathbf{B}_1$ dairesel olduğundan, $\mathbf{B}_1$'in ilk sütunu $\mathbf{b}_1$ olmak üzere, özdeğerleri $\mathbf{\Lambda}_{B_1} = \text{kosegen}\left(\sqrt{N}\mathbf{F}\mathbf{b}_1\right)$ şeklindedir. $\mathbf{b}_1 = [2, 1, 0, 0, \ldots, 1]^T$ olduğundan, bunun AFD'si kolaylıkla bulunabilir

$$\mathbf{\Lambda}_{B_1} = \text{kosegen}\left(2 + 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right), n = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3.14}$$

$\mathbf{\Lambda}_{B_1}$, N'in tek olduğu durumda hiç bir zaman sıfıra eşit olmaz, çünkü bütün n değerleri için kosegen $\left(2 + 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) > 0$ olmaktadır. Fakat, N arttıkça $\mathbf{B}_1$ zayıf koşullanmış olur. Bununla birlikte, N çift ise $n = N/2$ olduğu durumda $\left(2 + 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) = 0$ olmakta, böylece $\mathbf{B}_1$ tekil olmaktadır. Kararlılığı sağlamak için $\mathbf{B}_1$'in köşegenine küçük bir $\xi > 0$ değeri eklemek yeterli olacaktır. O halde $\mathbf{\Lambda}_{B_1}$'i

$$\mathbf{\Lambda}_{B_1} = \text{kosegen}\left(2 + \xi + 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right), n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3.15}$$

şeklinde değiştiriyoruz, ki kararlılık sağlansın. Sonuç olarak (3.9)'daki $\mathbf{B}_1$,

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} 2+\xi & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 2+\xi & 1 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 2+\xi & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2+\xi \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

ile değiştirilmektedir. Köşegenlere küçük bir ξ değeri eklemek sırabağımsız matrisin özvektörlerini bozmaz.

3.2.2 Daha İyi Koşullanmış Çift–Doğrusal Yöntemler

Çift–doğrusal dönüşüm, ayrık türev operatörüne yamuk yaklaşıklığıdır. Bu nedenle alternatif $\mathbf{B}_1$ matrisleri kullanılabilir. $\mathbf{B}_1$ matrisinin köşegeninin bir $k > 2$ değeriyle değiştirilmesinin hem kararlılığı sağladığı hem de performansı arttırdığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak $\mathbf{B}_1$ matrisini

$$\bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & k \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

şeklinde tanımladığımız $\bar{\mathbf{B}}_1$ matrisiyle değiştiriyoruz. $k > 2$ olduğundan, oluşturulacak AFD sırabağımsız matrisi de daha iyi koşullanmış olacaktır. Optimum k değeri Bölüm 3.3'te gösterileceği üzere yaklaşık $k \approx 4,3$ olarak bulunmuştur.

3.2.3 Yüksek Dereceden Çift–Doğrusal Türev Matrisleri

Şimdiye kadar, daha iyi ikinci türev yaklaşıklığı elde etmek için çift–doğrusal dönüşümden esinlenilmiş matrisler kullanılmıştır. Bu kısımda $\mathbf{B}_1$ matrisine Taylor serisi yaklaşıklığı tarzı bir yaklaşıklık geliştirmenin bize daha iyi çift–doğrusal türev matrisleri vereceği öne sürülmektedir. Bu yüzden yüksek dereceden çift doğrusal türev matrislerini

$$\bar{\mathbf{B}}_n = a_1\bar{\mathbf{B}}_1 + a_2(\bar{\mathbf{B}}_1)^2 + \dots + a_n(\bar{\mathbf{B}}_1)^n \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlıyoruz. Burada, a_i'ler skaler olmak üzere $\bar{\mathbf{B}}_n$ matrisini ikinci türeve n–inci dereceden çift–doğrusal yaklaşıklık olarak adlandırıyoruz. Yukarıdaki denklemde her bir $\mathbf{B}_1$ matrisi için $k = 4,3$ seçilmiştir, çünkü bu değer Bölüm 3.3'te gösterileceği üzere toplam hatanın normunu minimize eden optimum değer olarak bulunmuştur. a_i'lerin optimum değerini belirlemek için şimdilik analitik bir yöntem geliştirilememiştir.

$i = 1$'den 14'e kadar olan optimum a_i değerlerini belirlemek için genetik algoritma (Goldberg, 1989) ve örüntü arama (Audet ve Dennis Jr, 2002) yöntemleri kullanılmıştır. İlk 14 optimum a_i değeri Çizelge 3.1'de verilmiştir. Bu katsayılar kullanılarak bulunan $\bar{\mathbf{B}}_{14}$ matrisi (3.12)'de $\mathbf{B}_1$'in yerine konularak AFD sırabağımsız matrisi elde edilmiştir. $\bar{\mathbf{B}}_{14}$ kullanıldığı zaman elde edilen $\mathbf{B}$ matrisinin özvektörlerinin Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine çok yakın olduğu gözlemlenmiştir.

Çizelge 3.1 $\bar{\mathbf{B}}_{14}$ için üretilen ilk 14 optimum a_i katsayısı

a_i	Optimum Değer
a_1	1.00
a_2	0.247634068038315
a_3	-0.103839534211561
a_4	-0.141176982675410
a_5	0.005956945393076
a_6	-0.008133047918379
a_7	-0.020103743248487
a_8	-0.001866823892062
a_9	-0.000336065416294
a_{10}	-0.002383849560258
a_{11}	-0.000725049220057
a_{12}	-0.000698349278537
a_{13}	-0.003339855815284
a_{14}	-0.001759635742928

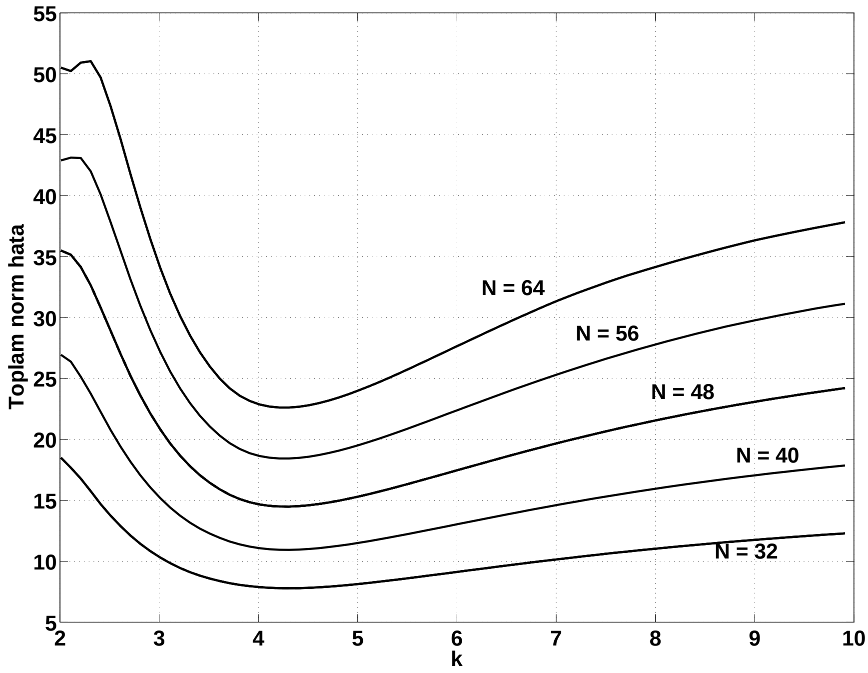
Şimdiye kadar olan kısımlarda AFD'nin Hermite–Gauss benzeri özvektörlerinin bulunması için üç farklı yöntem önerilmiştir. Bu yöntemlerin özeti Algoritma 3.1'de verilmiştir. Birinci yöntemde, kararlılığı sağlamak için $\mathbf{B}_1$'in köşegenine küçük bir ξ değeri eklenerek $\hat{\mathbf{B}}_1$ oluşturulur. İkinci yöntemde ise $\hat{\mathbf{B}}_1$'in köşegeni, $k > 2$ gibi bir değerle değiştirerek, $\bar{\mathbf{B}}_1$ oluşturulur. Köşegeni böyle bir değerle değiştirmek hem kararlılığı sağlamakta, hem de performansı arttırmaktadır. Son önerilen yöntemde ise $\bar{\mathbf{B}}_1$ ve onun ağırlıklı kuvvetleri kullanılarak, yüksek dereceden çift–doğrusal türev matrisleri üretilmiştir. Bu yöntemlerden biri seçildikten sonra, $\hat{\mathbf{B}}_1$, $\bar{\mathbf{B}}_1$ veya $\bar{\mathbf{B}}_n$ matrislerinden biri (3.12)'deki $\mathbf{B}_1$ yerine konulur ve AFD sırabağımsız matris elde edilir. Elde edilen AFD sırabağımsız matrisinin Hermite–Gauss benzeri dikgen özvektörleri bulunur.

Algoritma 3. 1 Bu bölümde önerilen yöntemlerin özeti.

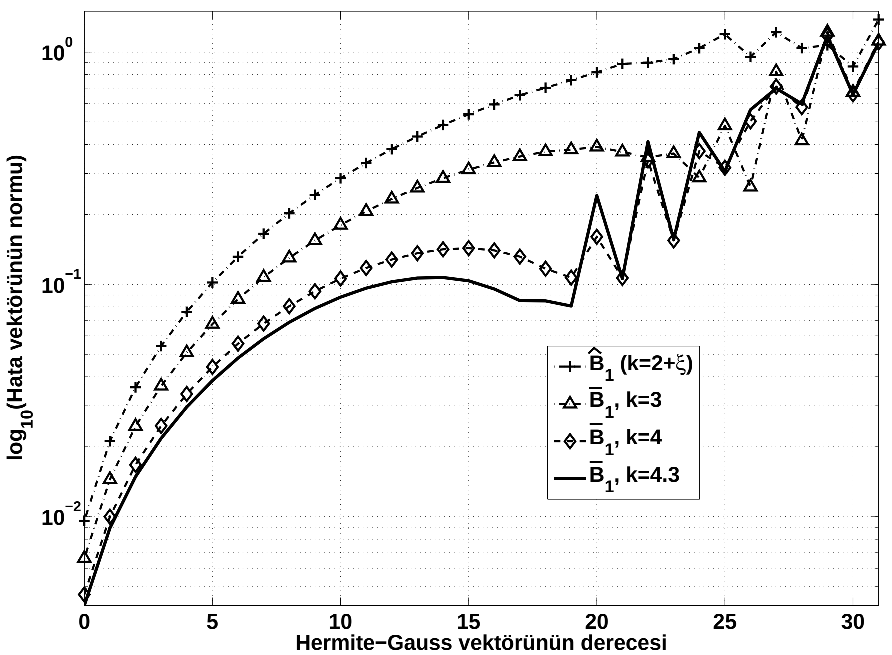
1 $\hat{\mathbf{B}}_1$, $\bar{\mathbf{B}}_1$ veya $\bar{\mathbf{B}}_n$ matrislerinden biri üretilir.
2 Üretilen matris, (3.12)'de $\mathbf{B}_1$'in yerine konulur ve AFD sırabağımsız $\mathbf{B}$ matrisi üretilir.
3 $\mathbf{B}$'nin Hermite–Gauss benzeri dikgen özvektörleri bulunur.

3.3 Benzetim Sonuçları

İlk önce, $\bar{\mathbf{B}}_1$ yöntemindeki optimum k değerini bulmak için, Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle, Hermite–Gauss benzeri özvektörler arasındaki toplam hatanın normu, değişik k değerleri ve değişik N uzunlukları için bulunmuş ve Şekil 3.2.a'da çizdirilmiştir. Şekilden de açık olarak görülebileceği gibi, optimum k değeri yaklaşık 4,3 olmaktadır.



(a)



(b)

Şekil 3.2 (a)$N = 32$, 40, 48, 56 ve 64 için k değerinin toplam hata normuyla değişimi. Toplam hatanın normu $k \approx 4,3$ iken minimum olmaktadır. (b) $N = 32$ için Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle $\bar{\mathbf{B}}_1$ yönteminde $k = 3$, 4 ve 4.3 seçildiğinde ve $\hat{\mathbf{B}}_1$ yöntemi kullanıldığında elde edilen özvektörler arasındaki hatanın normu.

$\bar{\mathbf{B}}_1$ yöntemi kullanıldığında $k = 3$, 4 ve 4,3 değerleri için Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle bulunan özvektörler arasındaki hatanın normları $N = 32$ için Şekil 3.2.b'de gösterilmektedir. Yine şekilden açıkça görülebileceği gibi toplam hatanın normu $k = 4{,}3$ için minimumdur.

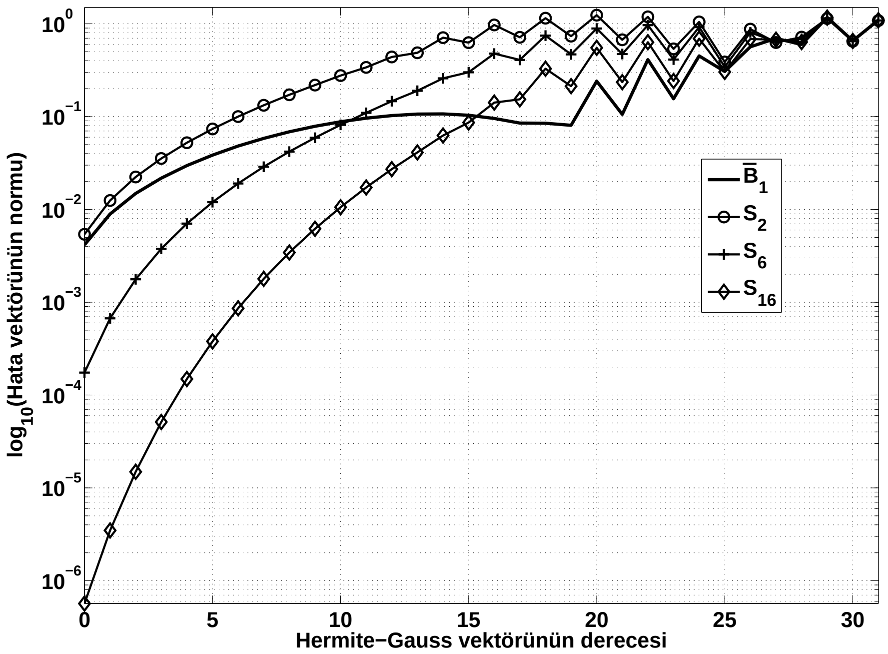
Şekil 3.3, (Candan, 2007)'de tanıtılan değişik yöntemlerle, önerilen $\mathbf{B}_1$ ($k = 4{,}3$ iken) yöntemi kullanıldığında elde edilen özvektörler ile Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleri arasındaki hatanın normunu göstermektedir. Bu şekilde $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_6$, ve $\mathbf{S}_{16}$ yöntemleri türev operatörüne, sırasıyla $O(h^2)$, $O(h^6)$ ve $O(h^{16})$ Taylor yaklaşıklığıdır (Candan, 2007). Şekil 3.3.a'da $N = 33$ için bu yöntemler ile önerilen yöntemde elde edilen özvektörler kıyaslanmış, Şekil 3.3.b'de ise bu kıyaslama $N = 65$ için yapılmıştır. Şekilden görülmektedir ki, önerilen $\mathbf{B}_1$ ($k = 4, 3$) yöntemi diğer yöntemlere kıyasla daha iyi performans sergilemektedir.

Önerilen yüksek dereceden $\hat{\mathbf{B}}_{14}$ yöntemi, $\mathbf{S}_{32}$, $\mathbf{S}_{100}$ ve $\mathbf{S}_{400}$ gibi (Pei vd., 2009)'da önerilen yüksek dereceden Taylor yaklaşıklıklarıyla kıyaslanmaktadır. Şekil 3.4'de önerilen $\hat{\mathbf{B}}_{14}$ yöntemi ile sözü edilen yüksek dereceden yaklaşıklıkların hata normlarının karşılaştırması gösterilmetedir. Bizim yöntemimiz sadece 14–üncü dereceden yaklaşıklık olsa da, $\mathbf{S}_{400}$ yönteminden bile daha iyi performans göstermektedir.

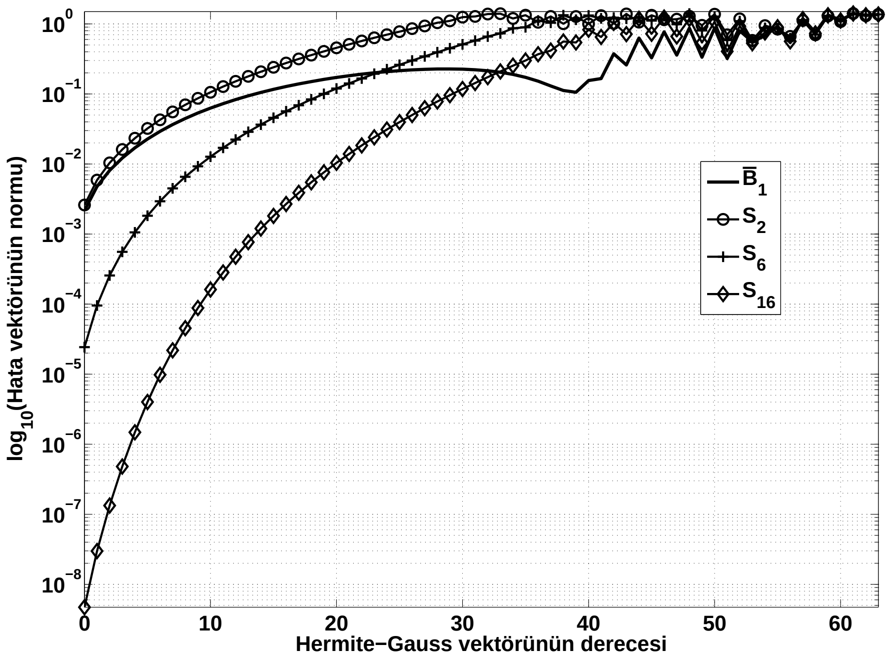
3.4 Sonuçlar

AKFD tanımlamak için Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine olabildiğince yakın dikgen özvektörler bulmak gerektiği için bu bölümde çift–doğrusal dönüşümden esinlenerek daha iyi AFD sırabağımsız matrisler tanımlanmıştır. Bunun için üç değişik yöntem önerilmiş ve kararlılıkları incelenmiştir. Birinci yöntemde çift–doğrusal türev matrisleri üretilerek, bu matrisin köşegenine küçük bir ξ değeri eklenmiş ve kararlı olması sağlanmıştır. İkinci yöntemde ise daha iyi performans gösteren ve daha kararlı çift–doğrusal türev matrisi elde edilmiştir. En son, yüksek dereceden çift–doğrusal türev matrisleri önerilmiştir. Benzetim sonuçları diğer yöntemlerle kıyaslanmış ve Hermite–Gauss fonksiyonlarına daha yakın, dikgen özvektörler ürettikleri gösterilmiştir.

Bu konudaki gelecek çalışmalar, yüksek dereceden çift–doğrusal $\bar{\mathbf{B}}_n$ matrisi oluşturmanın kapalı bir yöntemini içerebilir. Dahası, $\bar{\mathbf{B}}_n$ matrislerinin diğer $\mathbf{S}_{2k}$ matrisleriyle doğrusal kombinasyonu alınarak daha iyi sırabağımsız matrisler oluşturulabilir.

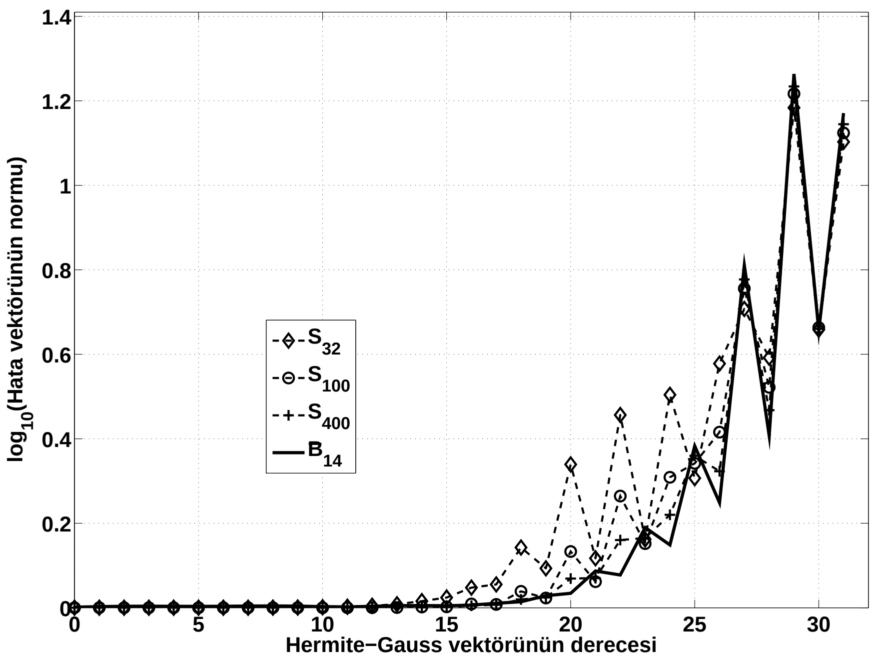


(a)



(b)

Şekil 3.3 (a) N=32 ve (b) N=64 için Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle $\bar{\mathbf{B}}_1$ yönteminde $k = 4.3$ seçildiğinde elde edilen AFD sırabağımsız matrisin özvektörleri arasındaki hata normlarıyla, literatürdeki diğer yöntemlerin özvektörleri arasındaki hata normlarının karşılaştırılması.



Şekil 3.4 $\bar{\mathbf{B}}_{14}$ ile $\mathbf{S}_{32}$, $\mathbf{S}_{100}$ ve $\mathbf{S}_{400}$ yöntemlerinin özvektörleriyle Hermite–Gauss fonksiyonları arasındaki hata normları $N = 32$ için karşılaştırılmaktadır.

4 İKİNCİ TÜREV OPERATÖRÜNE SONSUZ DERECEDEN YAKLAŞIKLIK İLE DÜŞÜK HESAPLAMA KARMAŞIKLI AFD SIRABAĞIMSIZ MATRİS ÜRETİMİ

Şimdiye kadar, literatürde yapılan çalışmalar arasında Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine en yakın dikgen özvektör üreten çalışmalardan birisi (Candan, 2007)'de önerilen $\mathbf{S}_{2k}$ yöntemidir. Fakat bu yöntemde N boyutlu ayrık türev operatörüne yaklaşıklık derecesi $O(h^{2k})$, $2k+1 \leq N$ ile sınırlı olmaktadır. Daha sonra Pei vd. (2009) bu sınırı kaldırarak herhangi bir yaklaşıklık derecesinde ayrık türev operatörleri tanımlamıştır. Bu yöntemin de eksikliği, yüksek dereceden türev operatörü tanımlamak için yüksek hesaplama karmaşıklığı gerektirmesidir. Bununla birlikte, herhangi bir yaklaşıklık derecesi için, türev operatörünün kapalı formu olmaması da ayrı bir eksikliktir.

Bu bölümde, ikinci dereceden türev operatörüne sonsuz dereceden $O(h^{\infty})$ Taylor yaklaşıklığının limiti bulunarak, ikinci dereceden ayrık türev operatörünün kapalı formu bulunmuştur. Bulunan bu sonsuz dereceden ayrık türev operatörü (2.16)'te $\mathcal{D}^2$'nin yerine konularak Hermite–Gauss üreten diferansiyel denklem ayrıklaştırılmaktadır. Benzetim sonuçları, sonsuz dereceden sırabağımsız matris kullanmanın literatürdeki diğer bütün yöntemlerden daha iyi ve mükemmel Hermite–Gauss benzeri özvektör ürettiğini göstermektedir. Sonsuz dereceden sırabağımsız matris kullanmanın literatürdeki $\mathfrak{n}^2$ (Santhanam ve Santhanam, 2007; Pei vd., 2008) yöntemiyle birebir aynı özvektörleri ürettiği gösterilmiştir.

4.1 İkinci Türev Matrisleri

AKFD tanımlaması yapılırken en hayati kısım, ikinci dereceden türev matrisinin iyi tanımlanmasıdır. İkinci dereceden türev matrisine en basit yaklaşıklık olan ikinci dereceden Taylor yaklaşıklığı, matris formunda

$$\mathbf{D_2} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

yazılabilir. Bu yaklaşıklık,

$$f''(t) = \frac{f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)}{h^2} + O(h^2) \tag{4.2}$$

olarak da ifade edilebilir. Burada örnekleme oranı $h = 1/\sqrt{N}$ olmaktadır.

4.1.1 Yüksek Dereceden Türev Matrisleri

(2.16)'i ayrıklaştırmak için yüksek dereceden yaklaşıklık elde etmenin bir yolu (Candan, 2007)'de gösterilmektedir. İkinci dereceden türev operatörüne yaklaşıklık ne kadar iyi elde edilirse, Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine daha yakın özvektörler elde edilmektedir. İkinci türev operatörüne yüksek dereceden Taylor yaklaşıklığı (Candan, 2007)'de

$$f_k'' = \left(\sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \frac{2\left[(m-1)!\right]^2}{(2m)!} \delta^{2m} \right) \frac{f_k}{h^2} + O(h^{2k}) \tag{4.3}$$

şeklinde verilmektedir. Burada $\delta^2 f_k = f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}$ ikinci türev operatörüne merkezi ikinci dereceden yaklaşıklıktır. Candan (2007) bu formülü türev operatörüne yüksek mertebeden yaklaşıklık elde etmek için kullanmıştır. Fakat, yaklaşıklık seviyesi $2k+1 \leq N$ ile sınırlıdır (Candan, 2007; Pei vd., 2009). Daha sonra Pei vd. (2009) göstermiştir ki yukarıdaki formül

$$f''(x_k) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \frac{2\left[(m-1)!\right]^2}{(2m)!} \mathbf{D}_2^m f(x_k) + O(h^{2k}) \tag{4.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{D}_2$, (4.1)'te verilen δ^2'nin matris halidir. Yukarıdaki gibi ifade edildiğinde, ikinci türeve herhangi bir dereceden yaklaşıklık elde edilebilir. Böylece *herhangi* bir $2k$–ıncı dereceden yaklaşıklık

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2^{(2k)} &= \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \frac{2\left[(m-1)!\right]^2}{(2m)!} \mathbf{D}_2^m \\ &= \mathbf{D}_2 - \frac{1}{12}\mathbf{D}_2^2 + \frac{1}{90}\mathbf{D}_2^3 + \ldots \end{aligned} \tag{4.5}$$

bir üst limit olmadan ifade edilebilmektedir. Fakat, k arttıkça hem hesaplama karmaşıklığı artmakta, hem de ilerleyen bölümlerde gösterileceği gibi hesaplama zorluğu da ortaya çıkmaktadır.

4.1.2 Dairesel Matrisler

Dairesel matrisler Toeplitz matrislerinin önemli bir alt grubunu oluşturmaktadır. Bu matrisler konvolüsyon, korelasyon ve bunun gibi işlemler için kullanılmaktadır. Dairesel bir matris

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_4 & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_4 & c_3 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_4 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir. Elemanları gerçel olan herhangi bir simetrik ve dairesel matris özdeğer ayrıştırması alınarak (3.3) veya (3.4) şeklinde yazılabilmektedir.

Özellik 4.1. Eğer $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinden her ikisi de dairesel ve simetrikse, α_1 ve α_2 herhangi iki skaler olmak üzere, $\alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{B}$ de simetrik ve daireseldir.

Özellik 4.2. Herhangi bir $\mathbf{A}$ matrisi dairesel ve simetrikse, α bir skaler olmak üzere, $\mathbf{A}^\alpha$ da dairesel ve simetriktir.

İspat. (3.3) kullanılarak $\mathbf{A}$ matrisi dairesellikten dolayı $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{Fa})\mathbf{F}$ şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ matrisinin ilk sütunudur. Buradan da $\mathbf{A}^\alpha$

$$\mathbf{A}^\alpha = \mathbf{F}^{-1}\text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{Fa})^\alpha\mathbf{F}. \tag{4.7}$$

olmaktadır. $\mathbf{A}^\alpha$ ile $\mathbf{A}$ aynı özvektör kümesine sahip olduğundan dolayı daireseldir.

Simetriklikten dolayı da $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{Fa})\mathbf{F} = \mathbf{F}\text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{Fa})\mathbf{F}^{-1}$ olmaktadır. Her iki tarafın da α ile kuvveti alınırsa $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{Fa})^\alpha\mathbf{F} = \mathbf{F}\text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{Fa})^\alpha$ $\mathbf{F}^{-1}$ olur. Böylece hem simetrikliğin hem de daireselliğin korunmuş olduğu ispatlanmış olur. □

4.2 Sonsuz Dereceden AFD Sırabağımsız Matris Üretimi

Yüksek dereceden türev matrisi elde etmek için Pei vd. (2009), (4.5) denklemini kullanmaktadır. AFD sırabağımsız matris elde etmek için, elde edilen yüksek dereceden türev matrisi, (2.16)'teki ikinci dereceden türev operatörü yerine konularak bu denklem ayrıklaştırılmaktadır. Bu kısımda biz bu işlemi, (4.5)'in sonsuz dereceden toplamının limitini bularak kolaylaştırmaktayız. Bu işlem, sonsuz dereceden AFD sırabağımsız matris üretimi için literatüre önemli bir katkı sağlamaktadır. Bu bölümdeki ana fikir aşağıdaki önermelerde verilmiştir.

Önerme 4.1. Sonsuz dereceden ikinci türev matrisi

$$\mathbf{D}_\infty = \lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{k}(-1)^{m-1}\frac{2\left[(m-1)!\right]^2}{(2m)!}\mathbf{D}_2^m$$
$$= -\arccos^2\left(\frac{\mathbf{D_2}+2}{2}\right). \tag{4.8}$$

şeklindedir.

İspat. Yukarıdaki denklemin ispatı uzun ve karmaşık matematiksel hesaplamalar ve tanımlamalar gerektirmektedir. Bunun yerine kolay ve anlaşılır bir ispat vermekteyiz: Yukarıdaki denklemde her iki tarafın Taylor serisi açılımı birbirine eşittir. Diğer bir deyişle yukarıdaki denklemin sağ tarafının Taylor serisi açılımı

$$-\arccos^2\left(\frac{x+2}{2}\right) = x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + \dots$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{2\left[(m-1)!\right]^2}{(2m)!}x^m. \tag{4.9}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bölüm 3.1.1'de dairesel ve simetrik matrisler kullanarak nasıl AFD sırabağımsız matris üretilebileceği gösterilmiştir. Bu dairesel ve simetrik matrisler ikinci dereceden türev operatörünü ne kadar iyi modellerse, AFD sırabağımsız matrisin özvektörlerinin Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine daha yakın olacaktır (Candan vd., 2000; Candan, 2007; Pei vd., 2008, 2009).

Biz bu aşamada (2.16) denklemindeki $\mathcal{D}^2$ operatörünü $\mathbf{D}_\infty$ ile, $\mathcal{F}$ operatörünü ise AFD matrisiyle değiştirip

$$\mathbf{S}_\infty = \mathbf{D}_\infty + \mathbf{F}\mathbf{D}_\infty\mathbf{F}^{-1}. \tag{4.10}$$

elde ediyoruz. $\mathbf{S}_\infty$ matrisi AFD ile sırabağımsızdır, çünkü $\mathbf{D}_\infty$ matrisi dairesel ve simetriktir. Bölüm 3.1.1'deki Önerme 3.1'de dairesel ve simetrik matrisler bu şekilde kullanıldığında AFD sırabağımsız matris elde edildiği gösterilmiştir. $\mathbf{D}_\infty$'un dairesel ve simetrik olduğu da açıktır, çünkü bu bölümde verilen Özellik 4.2'den dairesel matrislerin doğrusal kombinasyonunun dairesel ve simetrik olduğu bilinmektedir ve $\mathbf{D}_\infty$ da dairesel ve simetrik matrislerin sonsuz derecede doğrusal kombinasyonudur.

Önerme 4.2. Sonsuz dereceden AFD sırabağımsız matrisi $\mathbf{S}_\infty$ özdeş olarak

$$\mathbf{S}_\infty = \mathbf{D}_\infty + \mathbf{E} = \mathbf{F}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{E} \tag{4.11}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{E}$, aşağıdaki şekilde tanımlı bir köşegen matristir:

$$\text{kosegen}(\mathbf{E}) = \begin{cases} -\left(\frac{2\pi}{N}n\right)^2, & 0 < n < \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \\ -\left(\frac{2\pi}{N}(N-n)\right)^2, & \lceil \frac{N}{2} \rceil < n < N-1. \end{cases} \tag{4.12}$$

İspat. $\mathbf{D}_2$ matrisinin özdeğer ayrıştırması $\mathbf{D}_2 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}$ olsun. Burada $\mathbf{D}_2$ (4.1)'deki gibi, $\mathbf{\Lambda} = \text{kosegen}(\sqrt{N}\mathbf{F}\mathbf{d}_2)$ şeklinde ve $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{D}_2$'nin birinci sütunudur. (4.8) ve $\mathbf{D}_2 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}$ birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\infty &= \mathbf{F}^{-1}\left(-\arccos^2\left(\frac{\mathbf{\Lambda}+2}{2}\right)\right)\mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^{-1}\text{kosegen}\left(-\arccos^2\left(\frac{\mathbf{F}\sqrt{N}\mathbf{d}_2+2}{2}\right)\right)\mathbf{F}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

yazılabilir. $\sqrt{N}\mathbf{d}_2$'nin AFD'si kolaylıkla

$$\mathbf{F}\sqrt{N}\mathbf{d}_2 = -2 + 2\cos(\frac{2\pi n}{N}). \tag{4.14}$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{E}$ matrisini $\mathbf{D}_\infty$'nin özdeğerlerini içeren köşegen matris şeklinde tanımlarsak,

$$\mathbf{E} = -\arccos^2\left(\frac{\mathbf{\Lambda}+2}{2}\right) = \text{kosegen}\left(-\arccos^2\left(\frac{\left(-2+2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right)+2}{2}\right)\right) \tag{4.15}$$

olduğu hemen görülebilmektedir. Böylece

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\left(\frac{2\pi}{N}n\right)^2, & 0 < n < \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \\ -\left(\frac{2\pi}{N}(N-n)\right)^2, & \lceil \frac{N}{2} \rceil < n < N-1 \end{cases}. \tag{4.16}$$

olmaktadır. Yukarıdaki denklem parçalıdır, çünkü arccos$(\cdot)$ fonksiyonunun değer kümesi sadece $[0, \pi/2]$ arasında tanımlıdır. $\mathbf{D}_\infty = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{F}$'i (4.10)'da yerine yerleştirirsek (4.11) elde edilir. Böylece de ispat tamamlanmış olur. □

(4.11), literatürde önce MAFD için (Santhanam ve Santhanam, 2007), sonra da geleneksel AFD için Pei vd. (2008) tarafından tanımlanmış $\mathfrak{n}^2$ yöntemiyle aynı özvektör kümesini paylaşmaktadır. $\mathfrak{n}^2$ yönteminde bir $\hat{\mathbf{E}}$ köşegen matrisi (Pei vd., 2008)'de

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{cases} -n^2, & 0 < n < \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \\ -\left((N-n)\right)^2, & \lceil \frac{N}{2} \rceil < n < N-1 \end{cases} \tag{4.17}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlama bizim tanımlamamızın sadece bir skalerle çarpılmış halidir ve aynı özvektör uzayını paylaşmaktadır. Fakat, (Santhanam ve Santhanam, 2007; Pei vd., 2008)'de neden bu yöntemin mükemmel sırabağımsız matris verdiğinin ispatı yapılmamıştır. Bu çalışmada, önerilen yaklaşımın ikinci türev matrisine sonsuz dereceden yaklaşıklığa denk olduğu gösterilmiştir.

Hesaplama Açısından İncelenmesi: Önerilen yöntemde, AFD sırabağımsız matris üretmek için herhangi bir ek hesaplama karmaşıklığı yoktur. Fakat, (Pei vd., 2009)'un (4.5)'te verilen yöntemi herhangi bir yaklaşıklık derecesinde yüksek hesaplama karmaşıklığı gerektirmektedir, çünkü

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_2^{(2k)} &= \mathbf{D}_2 - \frac{1}{12}\mathbf{D}_2^2 + \frac{1}{90}\mathbf{D}_2^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{2\left[(k-1)!\right]^2}{(2k)!}\mathbf{D}_2^k \\ &\quad + O(h^{2k}) \\ &= \mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}_2 - \frac{1}{12}\mathbf{\Lambda}_2^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{2\left[(k-1)!\right]^2}{(2k)!}\mathbf{\Lambda}_2^k\right)\mathbf{F} \\ &\quad + O(h^{2k})\end{aligned} \tag{4.18}$$

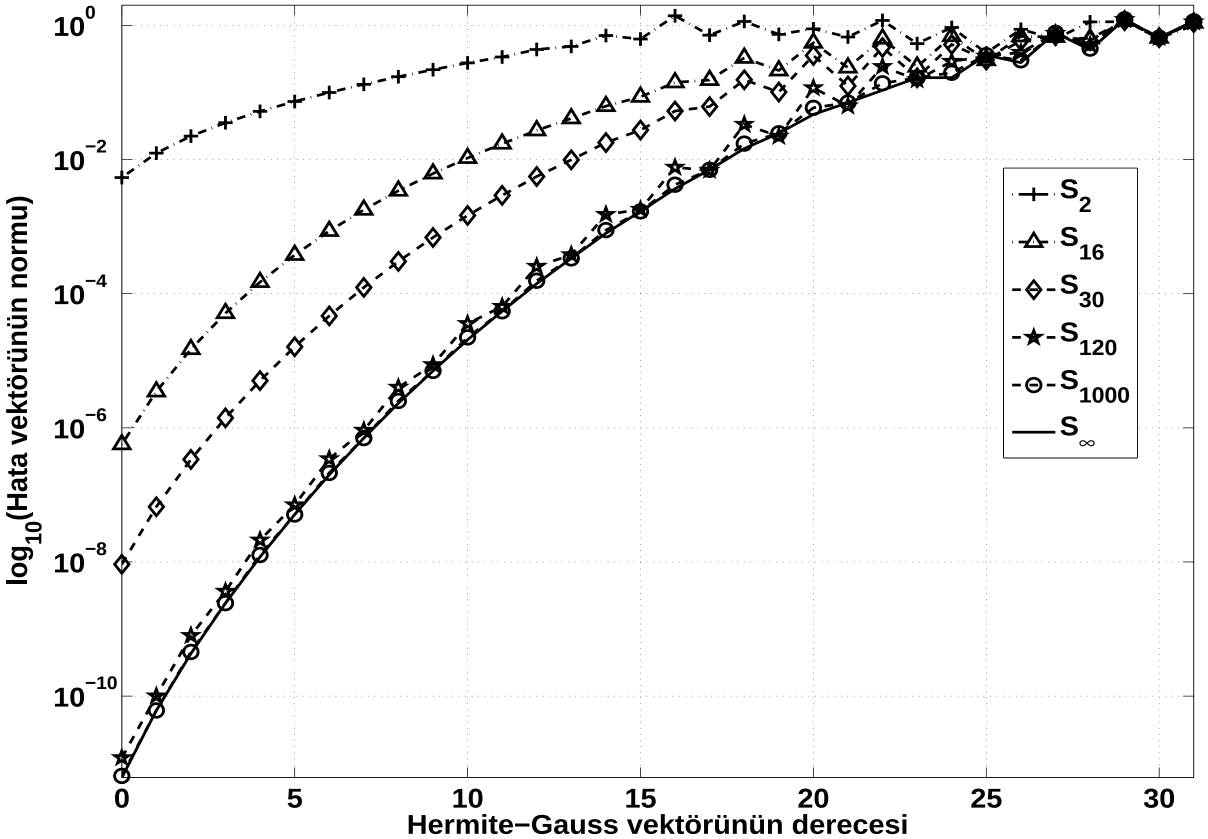
şeklinde bir toplamdan oluşmaktadır. Burada $\mathbf{D}_2$, (4.2)'de verilmiştir ve $\mathbf{\Lambda}$ = kosegen($\sqrt{N}\mathbf{F}\mathbf{d}_2$) olmaktadır. $\mathbf{d}_2$'nin AFD'sini hesaplamak en az $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ karmaşık çarpma–toplama gerektirmektedir, çünkü sıfırdan farklı sadece üç elemanı bulunmaktadır. Yine de herhangi bir $\mathbf{\Lambda}^m$, yüksek hesaplama karmaşıklığı getirmektedir.

(4.18)'i hesaplamanın bir diğer dezavantajı da şudur: Yaklaşıklık derecesi $O(h^{2k})$, yani k, arttıkça $\frac{(-1)^{k-1}2[(k-1)!]^2}{(2k)!}$ katsayılarını hesaplamak gittikçe zorlaşmaktadır, çünkü faktöriyeller aşırı boyutta artarken katsayılar çok küçük olmaktadır. Örneğin, $k = 130$ iken $(-1)^{k-1}2\left[(k-1)!\right]^2/(2k)! \approx 6.46e - 82$ olmaktadır. Bu nedenle, bu matrisler hesaplanırken yuvarlama ve kesme hataları oluşacaktır. Kısacası, (Pei vd., 2009)'daki yöntemin dezavantajları

- Yüksek hesaplama maliyeti
- Hesaplamadaki zorluklar, yani,
  - k'nın özellikle yüksek dereceleri için katsayılardaki $(2k)!$ faktöriyelinin aşırı yüksek değerlerde olması
  - Yine k'nın özellikle yüksek dereceleri için katsayılardaki $(k - 1)!/(2k)!$ teriminden dolayı çok küçük sayıların hesaplanmasının gerekliliği
  - Çok büyük ve çok küçük sayıların hesaplanmasından doğabilecek kesme ve yuvarlama hataları

olmaktadır.

Bütün bunların yanında bizim önerdiğimiz yöntemin herhangi bir hesaplama karmaşıklığı, kesme ve yuvarlama hatası, çok küçük ve/veya çok büyük sayıların hesaplanması gibi dezavantajları bulunmamaktadır.

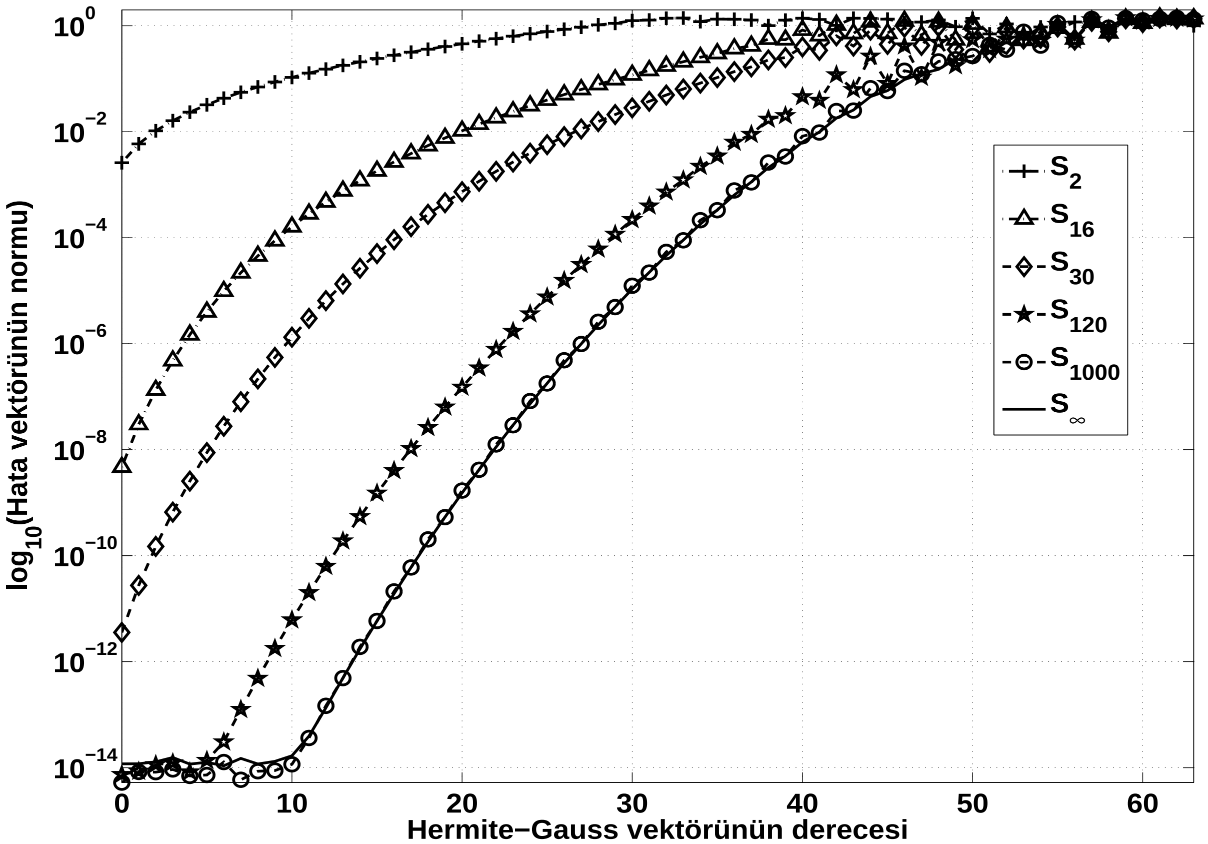


Şekil 4.1 Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle Hermite–Gauss benzeri özvektörler arasındaki hatanın normu $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_{16}$, $\mathbf{S}_{30}$, $\mathbf{S}_{120}$, $\mathbf{S}_{1000}$ ve $\mathbf{S}_\infty$ için $N = 32$ olmak üzere çizdirilmiştir.

Özet olarak bu kısımda mükemmel AFD sırabağımsız matris elde etmek için ikinci türeve sonsuz dereceden yaklaşıklık yöntemi önerilmiştir. Burada mükemmellikten kasıt AFD sırabağımsız matrisin özvektörlerinin Hermite–Gauss fonksiyonunun örneklerine olabildiğince yakın olmasıdır. Bununla birlikte, önerilen yöntemin diğer yöntemlere kıyasla hesaplama avantajlarına sahip olduğu gösterilmiştir.

4.3 Benzetim Sonuçları

Önerilen yöntem, (Candan vd., 2000; Candan, 2007; Pei vd., 2009)'da önerilen yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Bu amaçla $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_{16}$, $\mathbf{S}_{30}$, $\mathbf{S}_{120}$, $\mathbf{S}_{1000}$ ve $\mathbf{S}_\infty$ AFD sırabağımsız matrisleri oluşturulmuştur. Bu matrisler ayrık ikinci türev operatörüne, sırasıyla $O(h^2)$, $O(h^{16})$, $O(h^{30})$, $O(h^{120})$, $O(h^{1000})$ ve $O(h^\infty)$ Taylor yaklaşıklıklarıdır. Şekil 4.1'de adı geçen yöntemlerin AFD sırabağımsız matrislerinin özvektörleriyle, Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleri arasındaki hatanın normu $N = 32$ uzunluk için çizdirilmiştir. Şekilden de kolaylıkla görülebileceği üzere önerilen $\mathbf{S}_\infty$, AFD matrisi için mükemmel bir özvektör kümesi oluşturmaktadır.



Şekil 4.2 Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle Hermite–Gauss benzeri özvektörler arasındaki hatanın normu $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_{16}$, $\mathbf{S}_{30}$, $\mathbf{S}_{120}$, $\mathbf{S}_{1000}$ ve $\mathbf{S}_\infty$ için $N = 64$ olmak üzere çizdirilmiştir.

Çizelge 4.1 $N = 32$ ve 64 için ve değişik yöntemlerde toplam norm hata.

	Toplam Hata					
N	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{S}_{16}$	$\mathbf{S}_{30}$	$\mathbf{S}_{120}$	$\mathbf{S}_{1000}$	$\mathbf{S}_\infty$
32	17.73	11.13	7.21	5.97	5.627	5.191
64	49.98	25.91	20.28	14.98	13.809	13.575

$N = 64$ olduğunda, daha önce sözü edilen yöntemler ile, önerilen yöntemin özvektörlerinin hata normlarının karşılaştırılması Şekil 4.2'de gösterilmektedir. N'in bu değeri için de önerdiğimiz yöntemin başarımının diğer yöntemlere kıyasla daha iyi olduğu görülmektedir.

Bu hata normlarının toplamlarını göstermek de, önerilen yöntemin diğer yöntemlere kıyasla ne kadar başarılı olduğunu göstermek için uygun bir yöntemdir. Çizelge 4.1'de $N = 32$ ve $N = 64$ uzunlukları için Hermite–Gauss fonksiyonlarının örnekleriyle özvektörler arasındaki hatanın normunun toplamı verilmiştir. Çizelge'ye göre, önerilen $\mathbf{S}_\infty$ yöntemi en başarılı yöntemdir.

Ayrıca, önerilen yöntemin toplam performansı bir kare dalga üzerinde değişik derecelerde AKFD alınarak gösterilmektedir. AFD matrisinin özvektörlerini elde ettikten sonra AKFD

Çizelge 4.2 (2.52)'deki işaretin değişik dönüşüm açılarında ve değişik AKFD yöntemleriyle sürekli KFD'nin örnekleri arasındaki hatanın normunun toplamı.

	Kesirli Dönüşüm Derecesi, a								
	0.0	**0.1**	**0.2**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
$\mathbf{S}_{\infty}$	0.0	*0.041*	*0.111*	*0.112*	*0.089*	*0.082*	*0.086*	*0.086*	0.0
$\mathbf{S}_{1000}$	0.0	0.041	0.115	0.113	0.093	0.084	0.090	0.090	0.0
$\mathbf{S}_{120}$	0.0	0.068	0.172	0.174	0.172	0.166	0.143	0.112	0.0
$\mathbf{S}_{30}$	0.0	0.138	0.300	0.342	0.352	0.350	0.259	0.176	0.0
$\mathbf{S}_{16}$	0.0	0.190	0.374	0.447	0.473	0.451	0.330	0.218	0.0
$\mathbf{S}_{2}$	0.0	0.416	0.531	0.750	0.735	0.751	0.529	0.410	0.0

matrisi daha önce de vurgulandığı gibi

$$\mathbf{F}^a = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^a\mathbf{U}^T \tag{4.19}$$

şeklinde olmaktadır. Burada $\mathbf{V}$, Hermite–Gauss benzeri $\mathbf{S}_{\infty}$'un özvektörleri ve $\boldsymbol{\Lambda}^a$ AFD matrisinin özdeğerlerinin a–ıncı kuvvetidir. AKFD matrisin N'in tek ve çift değerleri için

$$\mathbf{F}^a = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ja\frac{\pi}{2}k}\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T, & N \text{ tek} \\ \sum_{k=0}^{N-2} e^{-ja\frac{\pi}{2}k}\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T + e^{-ja\frac{\pi}{2}N}\mathbf{v}_{N-1}\mathbf{v}_{N-1}^T, & N \text{ cift} \end{cases} \tag{4.20}$$

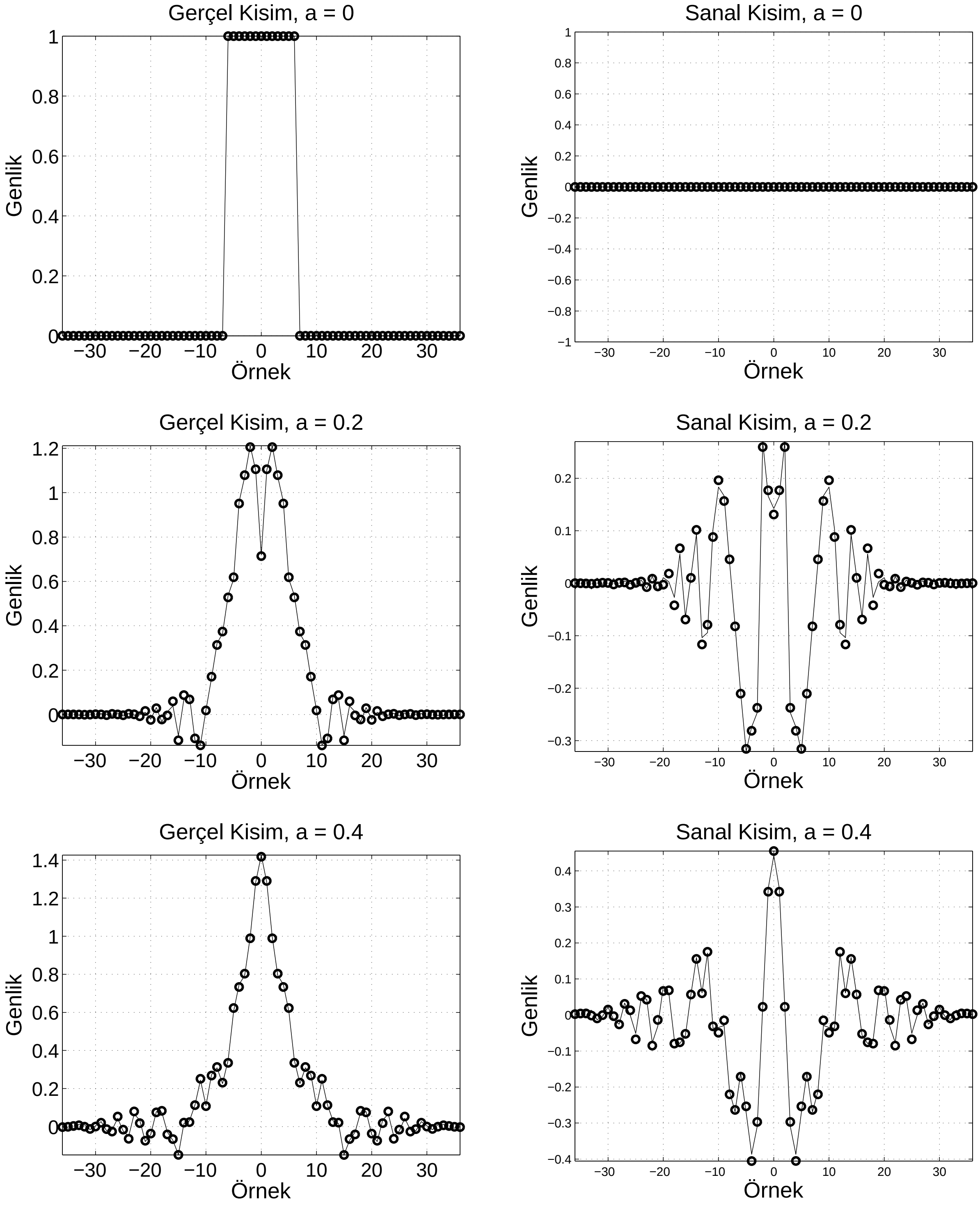
şeklinde elde edilmiştir. Burada $\mathbf{v}_k$, k tane sıfır geçişi olan k–ıncı Hermite–Gauss benzeri AFD özvektörüdür ve $e^{-ja\frac{\pi}{2}k}$, k–ıncı Hermite–Gauss benzeri özvektörün özdeğeridir. Önerilen yöntemin performansını sınamak için (2.52)'de verilen kare dalganın değişik derecelerde AKFD'si alınmış ve sürekli AFD'nin örnekleriyle karşılaştırılmıştır. Şekil 4.3'te bu kare dalga işaretinin değişik dönüşüm derecelerinde AKFD'si ile AFD'sinin gerçel ve sanal kısımları ayrı ayrı ve üst üste çizdirilmiştir. Kolay görülebilmesi açısından sürekli KFD düz çizgiyle, önerilen AKFD örnekleri ise halkalarla gösterilmektedir.

Daha da ayrıntılı bir inceleme yapabilmek için Çizelge 4.2'te kare dalganın değişik yöntemlerle ve değişik dönüşüm derecelerinde AKFD'lerinin, yine aynı dönüşüm derecesindeki sürekli KFD ile arasındaki hatanın normunun toplamı verilmektedir. Önerilen $\mathbf{S}_{\infty}$ yöntemi diğer yöntemlerden daha az hata vermektedir. Kolaylık olsun diye minimum hata italik yazı tipi ile yazılmıştır.

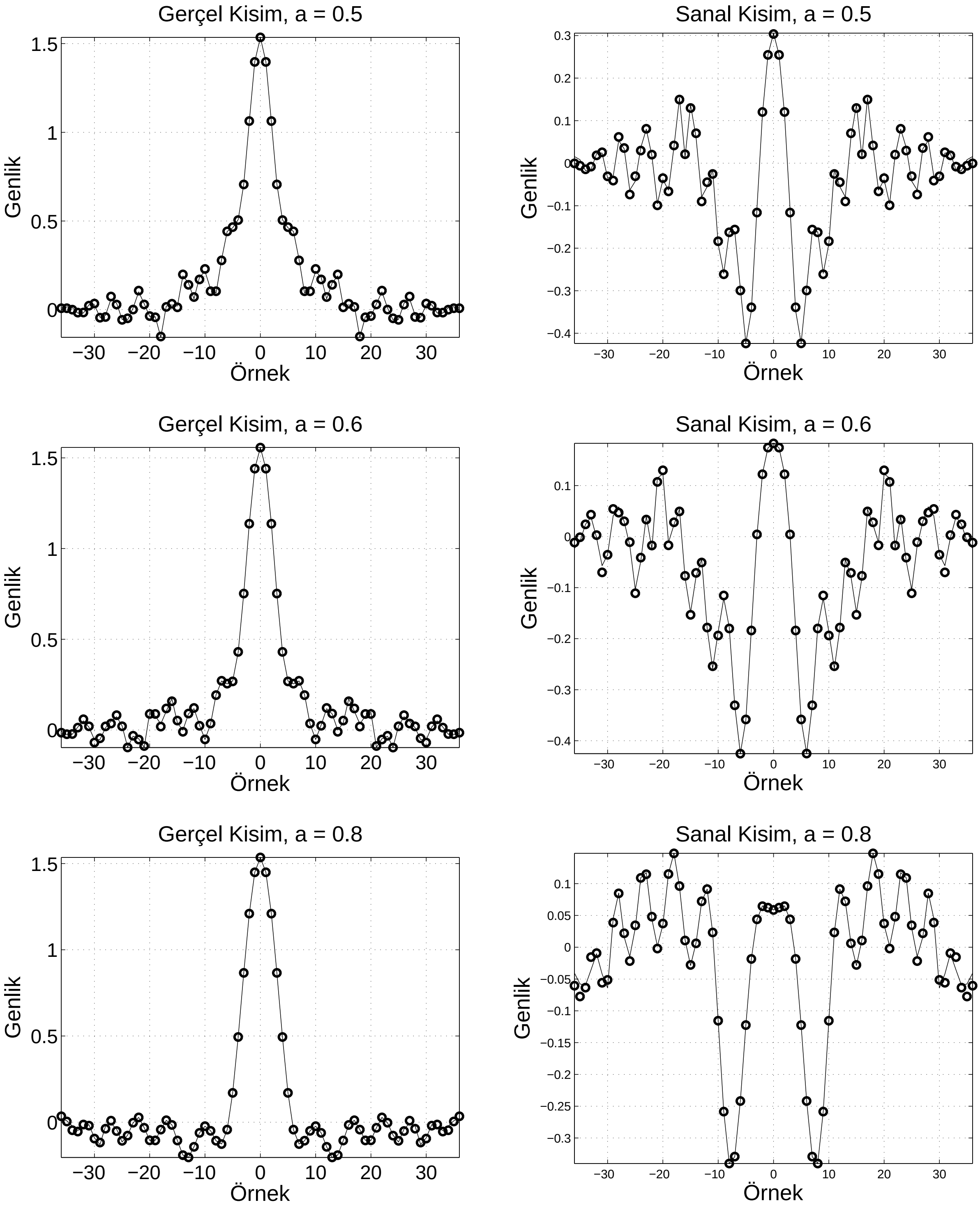
4.4 Sonuçlar

Bu çalışmada ikinci dereceden türev operatörüne sonsuz dereceden ayrık Taylor serisi yaklaşıklığının kapalı formu bulunmuştur. Bununla birlikte önerilen türev matrisinin

Hermite–Gauss üreten diferansiyel denklemde yerine konulduğunda mükemmel Hermite–Gauss benzeri özvektörler ürettiği de gösterilmiştir. Bilgisayar benzetimleri bu çalışmanın, literatürdeki şimdiye kadar yapılmış diğer yöntemlere kıyasla daha başarılı bir yöntem olduğunu göstermiştir.



Şekil 4.3 Bir kare dalga işaretinin önerilen değişik dönüşüm derecelerde, AKFD yöntemiyle ve sürekli KFD yöntemiyle dönüşümleri. Halkalı: Önerilen AKFD yöntemi, Düz: Sürekli KFD'nin örnekleri.



Şekil 4.3 (Devamı)

5 ARDIŞIL İZDÜŞÜMLER TEKNİĞİYLE KESİRLİ FOURIER BÖLGESİNDE OPTİMUM İŞARET VE GÖRÜNTÜ GERİ ELDE EDİMİ

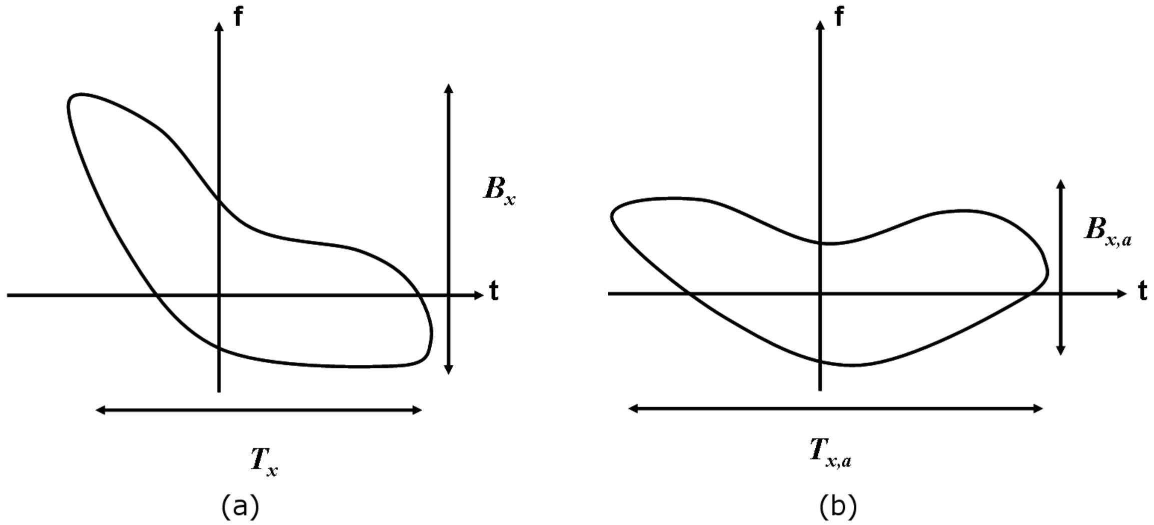
Bir çok işaret işleme ve optik uygulamasında, işaretin bir kısmı kaybolmuşsa veya eksikse, işaret geri elde edimi önemli bir gereksinimdir. Bu uygulamalardan birisi de patlama gürültüsü altındaki EEG işaretlerinin fonksiyonel manyetik rezonans görüntülemesidir (Salek-Haddahi vd., 2003). İki boyutlu işaretler söz konusu olduğunda, bir engelin arkasındaki görüntünün kestirimi, görüntü işleme alanında önemli bir problemdir (Youla ve Webb, 1982a,b). Blok–tabanlı görüntü ve video kodlama işinde kaybolan blokların geri elde edilmesi (Park vd., 2005; Sun ve Kwok, 1995) bir başka önemli problemdir, çünkü gönderilen bit dizileri, özellikle gerçek–zamanlı video konferanslarda, ağda kaybolabilmektedir. Asenkron transfer modunu (ATM) da içeren paket anahtarlamalı gönderim yöntemlerinin bir çoğunda, paket kaybı bir çok ağ modeli için yığılma ve tampon belleğin dolması gibi nedenlerden dolayı gözlemlenmektedir (Verbiest vd., 1988). Dışbükey kümeler üzerine ardışıl izdüşümler tekniği, ara değerleme, dış değerleme ve işaret geri elde edimi gibi alanlarda, normal FD bölgesinde kullanılmıştır (Papoulis, 1975; Jorge ve Ferreira, 2003). Ardışıl izdüşümler tekniği, bu alanların yanında görüntü geri elde edimi (Youla ve Webb, 1982a,b; Park vd., 2005; Sun ve Kwok, 1995), işaret sentezleme (Goldburg ve Marks II, 1985), medikal görüntüleme ve tomografi (Sezan ve Stark, 1984) ve diğer alanlarda da (Marks II, 1984; Combettes, 1993) kullanılmıştır.

Bu bölümde, optimum KFD bölgesinde, ardışıl izdüşümler tekniği (AİT) kullanılarak, bir ve iki boyutlu, işaret ve görüntülerin geri elde edilmesi için yeni bir yöntem tanıtılacaktır. DFM işaretleri genellikle radar, sonar ve sismik işaret işlemede yoğun olarak kullanılan işaret tiplerinden biridir. Doğanın kendisi de DFM işaretlerini, yarasa, yunus ve balina gibi hayvanların radar işleme işleri için kullanmaktadır. Bu bölümde AİT, bir veya birden fazla DFM işaretlerin varlığında ve optimum FD bölgesinde kullanılmaktadır. Optimum FD bölgesi genetik algoritma kullanılarak yeni bir yöntemle kestirilmiştir. Öne sürülen algoritma, yapay olarak üretilmiş bir DFM işareti, gerçek bir yarasa ekolokasyon verisi ve yapay görüntüler üzerinde test edilmiş ve AİT tabanlı geri elde edim metodunda optimum bir çözüm olduğu gösterilmiştir.

AİT geri elde edim yöntemi, dışbükey kümeler üzerine ardışıl izdüşümler yönteminin özel bir halidir. Dışbükey kümeler üzerine ardışıl izdüşümler yöntemi, dışbükey kümelerin kesişimini iteratif olarak, dışbükey kümelere izdüşümler alarak hesaplar. M adet dışbükey küme $C_k, k = 1, 2, ..., M$, tarafından tanımlanmış olsun. Bu tanımlamalar işaretin karakteristiği hakkında ön bilgi sağlamaktadırlar. Ön bilgi, negatif olmama, bant sınırlılık, sabit alan, sınırlı enerji veya bunların kombinasyonlarını alan bir tür sınırlama şeklindedir. Çözüm, her bir sınırlamayla tanımlı dışbükey kümelerin kesişiminin ($\bigcap_{m=1}^{M} C_m$) bir elemanı olmak zorundadır (Combettes, 1993). P_m, C_m'e ait izdüşüm operatörü olmak üzere, x işaretinin C_m kümesine olan izdüşümü iterasyonun tek bir *elemanıdır* ve $P_m x$ şeklinde ifade edilmektedir. Diğer kümeler üzerine de izdüşümler alındıktan sonra iterasyonun n–inci basamağı $x^{n+1} = P_M \ldots P_2 P_1 x^n$ şeklinde elde edilir ve yakınsama sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir. Yakınsama hızını arttırmak için değişik yöntemler mevcuttur (Combettes, 1993, 1996) ve diğer dışbükey optimizasyon yöntemleri (Bauschke ve Borwein, 1996)'da bulunabilir.

KFD, özellikle son yıllarda bir çok alanda uygulanmıştır (Erden vd., 1999; Mendlovic vd., 1993; Ozaktas vd., 2001). Daha önce, KFD bölgesinde dışbükey kümeler üzerinde ardışıl izdüşümler tekniği kullanılarak, işaret zenginleştirme (Cetin vd., 2003), dış değerleme (Sharma ve Joshi, 2008), ara değerleme (Sharma ve Joshi, 2007b) ve işaret geri elde edimi (Guven vd., 2008) yapılmıştır. Cetin vd. (2003) yapay olarak ürettiği prototip işaretlerin M değişik KFD bölgesi informasyonunu kullanarak çözünürlüğünü zenginleştirmiştir. Sharma ve Joshi (2008) AİT tabanlı dış değerleme yönteminin performansının KFD derecesine bağlı olduğunu göstermiştir. Fakat, bu çalışmada optimum KFD derecesinin nasıl belirleneceği gösterilmemiştir. Guven vd. (2008), işaretlerin ardışıl M değişik küme üzerine izdüşüm alınarak nasıl geri elde edileceğini göstermiştir ve bu yöntemi, prototip işaretler üzerinde denemiştir.

Bu çalışmada, işaretlerin kayıp parçaları optimum KFD derecesinde, değişik kümeler üzerine izdüşürülerek geri elde edilmektedir. Gösterilmektedir ki, en iyi performans için optimum KFD derecesi önceden kestirilmelidir. Bu amaçla, optimum KFD derecesinin bulunmasında, genetik–algoritma tabanlı bir yöntem de geliştirilmiştir. Optimum KFD derecesinin bulunmasında, genetik algoritma için zaman–bantgenişliği oranı ve gerekli bantgenişliği gibi amaç fonksiyonları tanımlanmıştır. Hem işaret geri elde edimi, hem de KFD derecesi kestiriminde tatmin edici sonuçları elde edilmiştir. Benzetim sonuçları, AİT tabanlı işaret geri elde edim yönteminde en iyi performansın optimum KFD



Şekil 5.1 (a) Bir işaretin zaman–frekans bölgesi desteği, (b) KFD'nin döndürme özelliği zaman–frekans desteğini değiştirmektedir. Optimum KFD derecesi işaretin frekans bölgesi desteğini minimize ederken zaman bölgesi desteğini de maksimize etmektedir.

bölgesinde elde edildiğini göstermiştir. Bu çalışma (Serbes ve Durak, 2009)'da yayınlanmıştır.

5.1 Kesirli Fourier Dönüşüm Derecesinin Kestirimi

DFM oranı β olan $x(t) = A\exp(\jmath[\beta t^2 + 2\pi f t])$ şeklinde bir DFM işareti ele alınsın. $(\beta + 1)$ derecesinde DFM işareti, Dirac–delta dağılımlı işarete, β derecesinde ise saf sinüzoidale dönüşmektedir. Elimizdeki problem için $(\beta + 1)$, AİT için optimum KFD dönüşüm derecesidir, çünkü optimum dönüşüm derecesinde işaret en sıkı formundadır. AİT belirsizlik prensibinden faydalandığı için, eğer bir $x(u)$ işareti zamanda sınırlıysa, bant–sınırlı olamaz. Bunun tam tersi de geçerlidir. Eğer bir işaretin frekansı zamanla değişiyorsa, bant–genişliğinin minimum olduğu en az bir tane dönüşüm derecesi vardır. Optimum dönüşüm derecesini bulmak için iki yöntem önerilmektedir. Minimum bant–genişliğini bulmak için de global minimumu bulan sezgisel genetik algoritma kullanılmaktadır.

5.1.1 Kesirli Zaman–Bantgenişliği Oranı Kullanılarak Optimum KFD Derecesi Kestirimi

Bir $x(t)$ işaretinin zaman–bantgenişliği, işaretin zaman-genişliği T_x ve frekans bölgesi bantgenişliği B_x ile orantılıdır. T_x ve B_x

$$T_x = \frac{\left[\int (t-\eta_t)^2 |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right]^2}{\|x\|} \tag{5.1}$$

$$B_x = \frac{\left[\int (f-\eta_f)^2 |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f\right]^2}{\|x\|} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $X(f)$, $x(t)$'nin FD'si, $||\cdot||$ norm operatörü ve ortalama değerler η_t ile η_f

$$\eta_t = \frac{\int t|x(t)|^2 \mathrm{d}t}{\|x\|}, \tag{5.3}$$

$$\eta_f = \frac{\int f|X(f)|^2 \mathrm{d}f}{\|x\|}. \tag{5.4}$$

şeklindedir. Burada amaç, bantgenişliğini minimize eden KFD derecesini bulmaktır. Şekil 5.1.(a)'da bir işaretin zaman–frekans desteği gösterilmektedir. İşaretin uygun KFD bölgesinde, KFD'nin zaman–frekans'taki döndürme özelliğinden dolayı, frekans–bölgesi bant–genişliği minimum olurken, zaman–bölgesi bantgenişliği maksimum olmaktadır (bkz. Bölüm 2.1). Biz bu aşamada, optimum KFD derecesini belirlemek için dönüşüm bölgesindeki bant–genişliğini maksimize eden kesirli zaman–bantgenişliği oranını (KZBO)

$$KZBO(a) = \frac{T_{x,a}}{B_{x,a}} \tag{5.5}$$

şeklinde tanımlıyoruz. Burada $T_{x,a}$ ve $B_{x,a}$ sırasıyla, a ve $a+1$–inci derecelerdeki genişliklerdir ve

$$T_{x,a} = \frac{\left[\int (u-\eta_{u,a})^2 |x_a(u)|^2 \mathrm{d}u\right]^2}{\|x\|}, \tag{5.6}$$

$$B_{x,a} = \frac{\left[\int \left(u-\eta_{u,(a+1)}\right)^2 |x_{a+1}(u)|^2 \mathrm{d}u\right]^2}{\|x\|}, \tag{5.7}$$

şeklinde tanımlanmışlardır. $\eta_{u,a}$ ile $\eta_{u,(a+1)}$, sırasıyla a ve $a+1$–inci KFD derecelerindeki ortalama değerlerdir. KZBO'yu maksimize eden derece, optimum dönüşüm derecesidir. a

dönüşüm derecesi, KFD bölgesindeki genişliği maksimize ederken, $(a+1)$–inci derecedeki desteği minimize etmektedir. $B_{x,a}$ ile $T_{x,(a+1)}$ birbirine eşit olduğundan KZBO

$$KZBO(a) = \frac{\left[\int \left(u - \eta_{u,a}\right)^2 |x_a(t)|^2 \mathrm{d}u\right]^2}{\left[\int \left(u - \eta_{u,(a+1)}\right)^2 |x_{a+1}(t)|^2 \mathrm{d}u\right]^2} \; . \tag{5.8}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Ayrık işaretler söz konusu olduğunda ayrık kesirli zaman–bantgenişliği (AKZBO) oranı KZBO'nun yerini almaktadır. Ayrık KZBO'nun tanımı

$$AKZBO(a) = \frac{\left[\sum \left(k - \eta_{k,a}[k]\right)^2 |x_a[k]|^2\right]^2}{\left[\sum \left(k - \eta_{u,(a+1)}[k]\right)^2 |x_{a+1}[k]|^2\right]^2}, \tag{5.9}$$

şeklinde kolaylıkla yazılabilir. Burada $\eta_{k,a}[k]$ ve $\eta_{k,a+1}[k]$

$$\eta_{k,a} = \frac{\sum k|x_a[k]|^2}{\|x\|}, \tag{5.10}$$

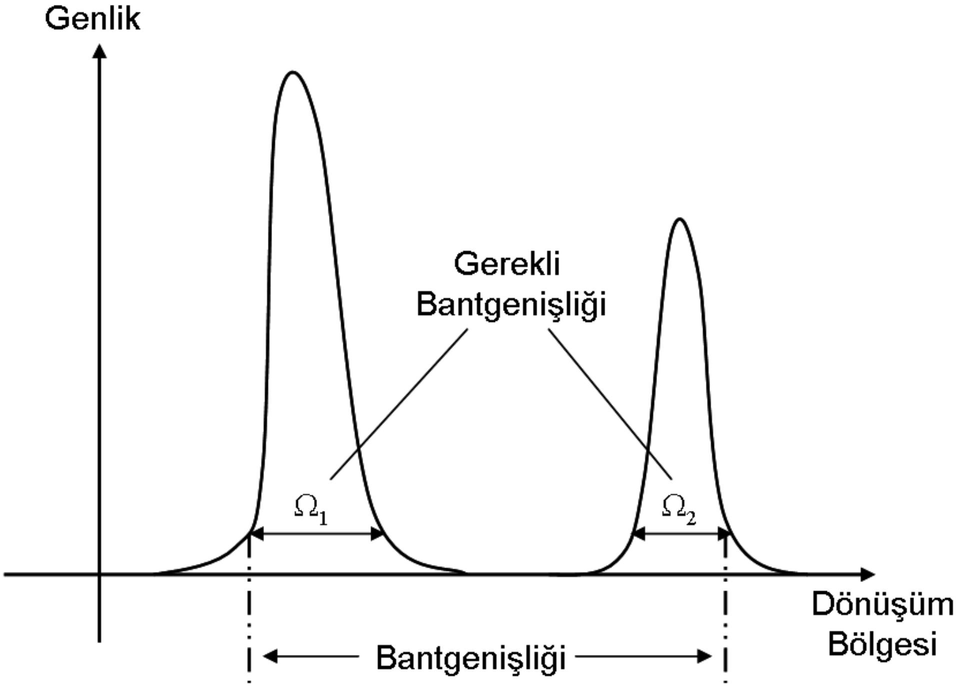
$$\eta_{k,a+1} = \frac{\sum k|x_{a+1}[k]|^2}{\|x\|} \; . \tag{5.11}$$

şeklindedir. KZBO yöntemi, eğer gözlemlenen işaretin sadece *tek* bir bileşeni varsa uygulanabilir.

5.1.2 Minimum Gerekli Bantgenişliği Kullanarak KFD Derecesi Kestirimi

Gözlemlerimiz ve pratikte kullanılan işaretlerin boyutu sınırlı olduğundan, bütün pratik işaretler zamanda sınırlı olmak zorundadır. Belirsizlik ilkesi uyarınca, işaretlerin ya zamanda ya da frekansta sınırlı olması gerektiği daha önceki bölümlerde (bkz Bölüm 2.1.1) ele alınmıştı. Biraz sonra tanımlayacağımız gerekli–bantgenişliği kavramı, bilinen bantgenişliği kavramından farklıdır. Şöyle ki, bantgenişlikleri Ω_1 ve Ω_2 olan iki işaretin toplamının gerekli-bantgenişliği en çok $\Omega_1 + \Omega_2$ olabilmektedir. Bunun yanında, normal bantgenişliği tanımı için, bu toplamın bantgenişliği, $\Omega_1 + \Omega_2$ toplamından çok daha büyük olabilmektedir. Şekil 5.2'de bu olay gösterilmektedir.

Yarasa, yunus ve balina'nın ekolokasyon verisi gibi birden fazla DFM bileşeni olan bir işareti ele alalım. Bu işaretlerin DFM oranları hemen hemen aynıdır, fakat zaman ve frekans kaymaları farklıdır (Thomas vd., 2004). Bu tip işaretlerin, Şekil 5.2'teki gibi bir *optimum* KFD dönüşüm bölgesi genlik karakteristiği bulunmaktadır. KZBO yöntemi, bu tip işaretler için iyi bir yöntem değildir, çünkü zaman–frekans bölgesindeki döndürme işlemi, dönüşüm bölgesindeki genişliği minimize etmeyecektir. Aslında, bu tip işaretleri zaman–frekansta döndürmek, optimum dönüşüm derecesinde sadece



Şekil 5.2 Gerekli bant genişliği $\Omega_1 + \Omega_2$ olan bir işaret. Bu işaretin bantgenişliği $\Omega_1 + \Omega_2$ toplamından çok daha büyüktür.

gerekli–bantgenişliğini minimize etmektedir. Bu kısımda, gerekli–bantgenişliğini minimize edecek optimum dönüşüm derecesinin nasıl bulunacağını belirleyen yeni bir yöntem tanıtılacaktır. $x(u)$ ve $x_a(u)$, sırasıyla bir işaret ve onun a–ıncı dereceden KFD'si olsun. Optimum dönüşüm derecesi,

$$I(a) = \int g\left(|x_a(u)|^2\right) du \ , \tag{5.12}$$

maliyet fonksiyonunu minimize etmektedir. Burada $g(u)$, $u_{thr} \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$g(u) = \begin{cases} 1 & u \geq u_{thr} \\ 0 & u \leq u_{thr} \end{cases} \ , \tag{5.13}$$

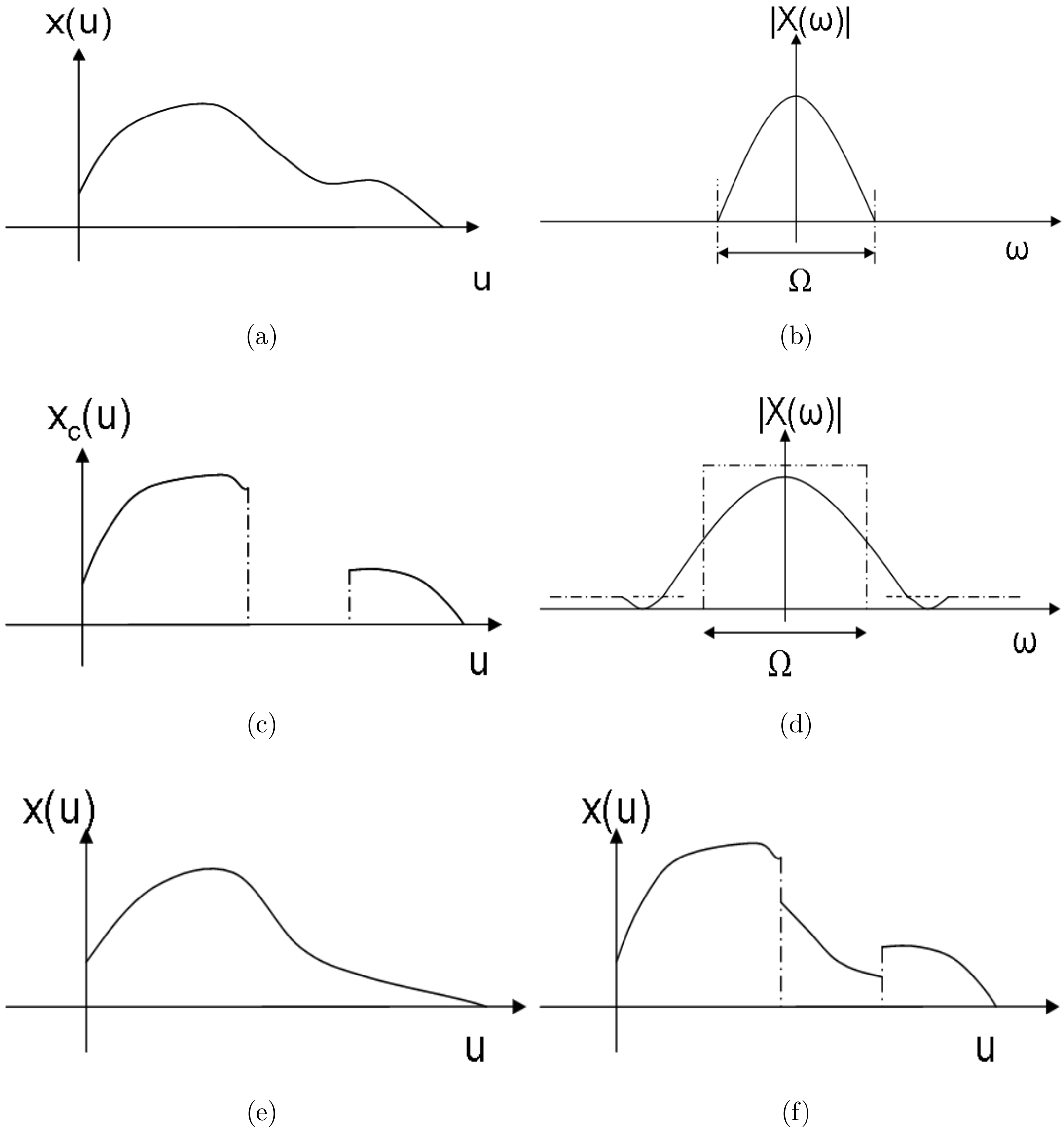
şeklindeki eşik fonksiyonudur. Eşik değerini, işaretin gücüyle veya genliğiyle orantılı olarak seçmek uygun olmaktadır. Biz u_{thr} eşiğini, işaretin gücüyle orantılı olacak şekilde

$$u_{thr} = \frac{\|x\|}{m}, m \gg 1 \ , \tag{5.14}$$

olarak seçtik. m değerinin seçimi yakınsama oranını birebir etkilemektedir. İşaretlerin dönüşüm bölgesindeki gerekli–bantgenişliği

$$\Omega \in \{u| \ g\left(|x_a(u)|\right) > u_{thr}\} \, . \tag{5.15}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada Ω gerekli–bantgenişliğidir ve optimum KFD bölgesinde minimumdur.



Şekil 5.3 (a) Bir $x(u)$ işareti ve (b) Onun frekans gösteriminin genliği. (c) Bir kısmı eksik işaret, (d) onun kesim frekansı Ω olan alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi ve (e) süzgeçten geçirildikten sonraki durumu. (f) İşaretin (c)'de görülen elde var olan kısmı yerine konur. Daha sonra (d) şıkkına geri dönülerek yakınsama sağlanıncaya kadar devam edilir.

5.2 İşaret Geri Elde Edimi İçin Ardışıl İzdüşümler Tekniği

AİT, dışbükey kümeler üzerine ardışıl izdüşümler tekniğinin özel bir durumudur ve dışbükey optimizasyon problemlerine uygulanmıştır. Papoulis (1975) ve Gerchberg (1974), AİT yöntemini ilk uygulayanlar olmuşlardır. Zamanda sınırlı olan işaretlerin bant sınırlı olamayacağından faydalanılarak AİT, bant sınırlı işaretlerin ara ve dış değerlemeleri için, normal FD bölgesinde daha önce kullanılmıştır (Youla ve Webb, 1982a,b). Her ne kadar zamanda sınırlı işaretler frekansta da sınırlı olamazlarsa da bir minimum–norm çözümde buluşmaktadırlar.

AİT, verinin bir kısmı eksikse, kaybolduğunda veya yanlış alındığında işaret ve görüntü geri elde edim problemleri için kullanılmıştır (Youla ve Webb, 1982b). *Sınırlı destekli* bir $x(u)$ işaretinin $u_2 < u < u_1$ aralığındaki bir bölümü eksik olsun (*sınırlı desteklilik* için bkz Bölüm 2.1.1). FD bölgesinde AİT tabanlı geri elde edim algoritması şu şekildedir:

1. İşaretin bantgenişliği Ω hakkındaki ön bilgiden faydalanarak işaret, kesim frekansı Ω olan alçak geçiren süzgeçten geçirilir.
2. İşaretin doğru olduğu bilinen, yani eksik olmayan kısmı, yerine yerleştirilir.
3. Basamak 1'e geri dönülür ve yakınsama sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir.

Şekil 5.3.a'da bir işaretin zaman bölgesi gösterimi, Şekil 5.3.b'de ise bu işaretin frekans bölgesinde sınırlı olması gösterilmiştir. Şekil 5.3.c'de ise işaretin kayıp kısmının yerine sıfır yerleştirildiği görülmektedir. Açıktır ki, işaretin kayıp olan kısmı sıfırlarla doldurulduğunda, Şekil 5.3.d'de gösterildiği gibi yeni işaretin frekans spektrumu değişir, çünkü kayıp kısımlardan kaynaklanan yüksek frekans bileşenleri ortaya çıkar. Eğer işaretin bant–genişliği Ω önceden biliniyorsa, bir kısmı kayıp olan işaret Şekil 5.3.d'deki gibi, kesim frekansı Ω olan bir alçak geçiren süzgeçten geçirilir. Şekil 5.3.e'de alçak geçiren süzgeçten geçirilmiş işaret görülmektedir. Bu işaret Şekil 5.3.a'daki orijinal işaretten oldukça farklıdır. Bu nedenle 5.3.f'de gösterildiği gibi, işaretin zaten elde var olan, 5.3.c'deki kısımları yerine yerleştirilir. Şekil 5.3.f'de görüldüğü gibi işaretin eldeki kısımları yerine yerleştirildiğinde yine süreksizlikler bulunmaktadır. Bu süreksizlik işaretin frekans gösterimine yine yüksek frekans bileşenleri olarak yansımaktadır. Bu nedenle tekrar kesim frekansı Ω olan alçak geçiren süzgeçten geçirilerek tekrar eldeki ksımlar eklenir. Bu iterasyon, artık süreksizlikler ortadan kayboluncaya kadar veya yakınsama sağlanıncaya kadar sürdürülür.

Bu durumda iki tane dışbükey küme

$$C_1 = \{x(u)|X(\omega) = 0, |\omega| \notin \Omega\} \quad (5.16)$$

$$C_2 = \left\{ x(u) \middle| \begin{array}{cc} P_1 x(u) & x_2 < u < x_1 \\ x(u) & \text{diger.} \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

şeklindedir. Burada P_1 birinci dışbükey küme olan C_1 kümesine olan izdüşümdür. Problemin cinsine uygun olarak sınırlı enerji veya negatif olmama gibi diğer sınırlamalar da eklenebilir. Özetlemek gerekirse, işaretin bir kısmı eksikse, normal FD bölgesinde işaret geri elde edimi prosedürü şu şekildedir. İşaretin bantgenişliğiyle ilgili *ön bilgi* elde varsa, kesim frekansı bantgenişliğine eşit olan bir süzgeçle süzülür. Bu süzme işlemi, yukarıdaki denklemdeki C_1 dışbükey kümesini oluşturur. Daha sonra zaten bilinen kısım yerine yerleştirilir, ki bu da C_2 kümesini oluşturmaktadır. Eğer işaretin bantgenişliği minimumsa, yani işaret bir sinüzoidalse birinci iterasyondan sonra bile süreksizlikler minimum olacaktır, çünkü süreksizlikler yüksek frekans bileşenleri gerektirir. Fakat FD bölgesi AİT, DFM işaretleri gibi durağan olmayan işaretler için uygun olmayabilir, çünkü bu tip işaretler büyük bir frekans bölgesini tararlar.

Bu bölümde, bir DFM işaretinin, gerçek bir yarasa ekolokasyon verisinin ve iki boyutlu görüntülerin eksik kısımları geri elde edilmiştir. Biz, Fourier bölgesindeki AİT fikrini, optimum KFD bölgesine taşımaktayız. Bu bölümde önerilen algoritmanın süreci izlemektedir:

1. Optimum KFD derecesi ve minimum bantgenişliği Ω kestirilir,
2. İşaret, dönüşüm bölgesi bantgenişliği bilgisi Ω kullanılarak süzülür,
3. İşaretin var olan doğru kısmı yerine konur,
4. Yakınsama sağlanıncaya kadar 2. basamağa geri dönülür.

KFD bölgesi bantgenişliği, (5.15) kullanılarak önceden kestirilmektedir. İkinci basamakta ise KFD bölgesi süzme işlemi uygun KFD bölgesinde uygulanır. Uygun KFD bölgesi, tek veya çok bileşenli DFM işaretleri için, (Durak ve Arıkan, 2003; Akay ve Boudreaux-Bartels, 2001)'de önerilen alternatif yöntemler kullanılarak da hesaplanabilir.

Bizim önerdiğimiz yöntemde sırasıyla iki adet dışbükey küme bulunmaktadır:

$$C_1 = \{x(u) | x_a(\omega) = 0, \omega \notin \Omega\} \tag{5.18}$$

$$C_2 = \left\{ x(u) \,\middle|\, \begin{array}{rl} P_1 x(u) & u_2 < u < u_1 \\ x(u) & \text{diger.} \end{array} \right\} \tag{5.19}$$

Burada P_1, C_1 kümesi üzerine izdüşüm operatörüdür. Bant–sınırlı işaretler zamanda sınırlı olamasalar bile, yani ardışıl izdüşümlerin kesişim kümesi $C_1 \cap C_2 \in \varnothing$ boş küme olsa da, bu tutarsız kümeler bir minimum norm çözüm sağlamaktadır. Burada n–inci iterasyon $x_{n+1}(u) = P_2 P_1 x_n(u)$ şeklindedir ve $\lim_{n\to\infty} x_n(u)$ giderken, hata miktarı bir limit döngüye ulaşmaktadır (Combettes, 1993; Marks II, 1984). AİT prosedürü iki boyutlu KFD (Pei ve Yeh, 1998) kullanılarak direk iki boyuta da uygulanabilir.

Birinci dışbükey küme için KFD bölgesinde band sınırlı süzme işlemi (Zayed, 1998)

$$\mathcal{F}^{-a}\left\{ x^a(u) \mathrm{rect}\left(\frac{u-\Omega_0}{2\Omega}\right)\right\} = \sqrt{1+\jmath\cot\alpha} \int_{\Omega}^{\Omega_0} \exp[-\jmath\pi(\cot\alpha u^2 - 2\csc\alpha u u' + \cot\alpha u'^2)] x_a(u) du' \tag{5.20}$$

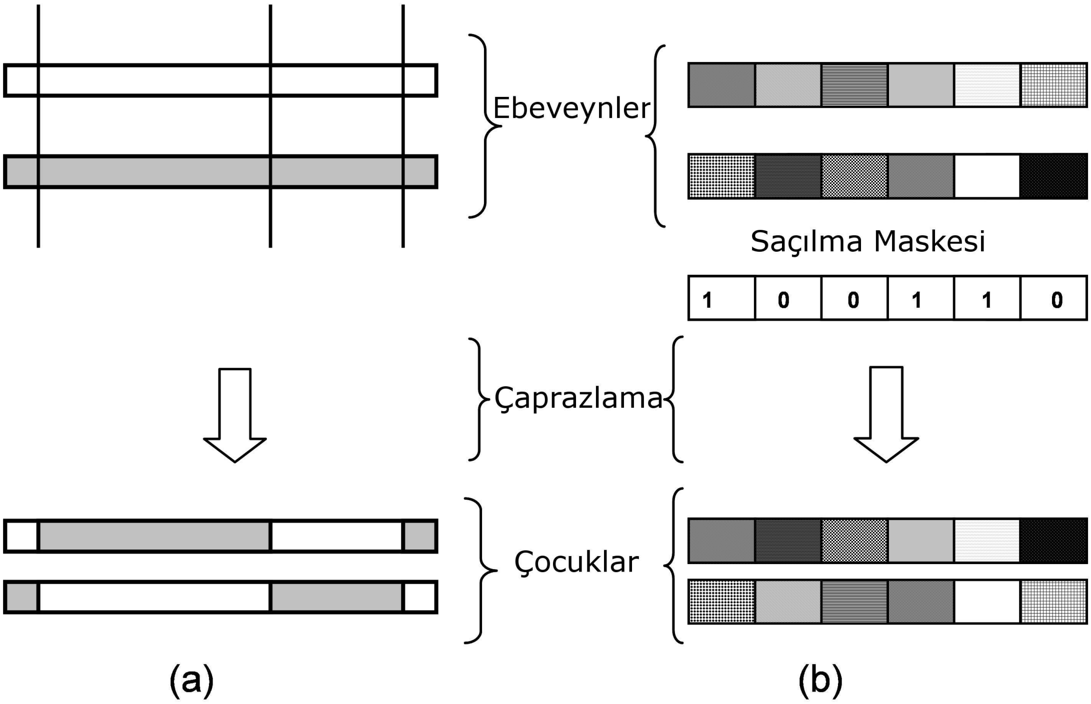
şeklindedir. Burada rect(·) dikdörtgen fonksiyonudur. Bu çalışmada, önceki bölümlerde tanımlanan AKFD yerine, Ozaktas vd. (1996)'daki KFD hesaplama yöntemi kullanılmıştır. Bunun nedeni, Bölüm 4'te verilen AKFD tanımı kullanmakla, Ozaktas vd. (1996)'daki KFD hesaplama yöntemi kullanmak arasında, alınacak sonuçlar bakımından hemen hemen hiç bir fark olmamaktadır. Zaten benzetim sonuçları da Bölüm 4'te gösterilen yöntemle elde edilen sonuçların, sürekli KFD'nin örneklerine oldukça yakınsadığını göstermektedir. Ozaktas vd. (1996)'daki KFD hesaplama yöntemi kullanmanın tercih edilme nedeni, hesaplama hızı bakımından getirdiği avantajdır.

5.3 KFD Derecesi Kestiriminde Optimizasyon

Genetik algoritma, doğrusal veya doğrusal olmayan, türevlenebilir ya da türevlenebilir olmayan, eşitlik ya da eşitsizlik cinsinden maliyet fonksiyonlarının global optimumunu bulan, stokastik bir arama yöntemidir (Goldberg, 1989). Bu algoritma, güçlü bir sezgisel yöntemle, doğal seleksiyon ve adaptasyon sürecini temel almaktadır (Tang vd., 1996; Goldberg ve Kendall, 2005). Genetik algoritma bir çok alana uygulanmıştır. Bunların arasında yüz tanıma (Jun-Su ve Jong-Hwan, 2008), elektromanyetik problemlerin çözümü (Haupt ve Werner, 2007), kanserlerin sınıflandırması (Dolled-Filhart vd., 2006) ve moleküler biyoloji (Pond vd., 2006) de bulunmaktadır. Standart genetik algoritma yöntemi, bir $F(x), x \in \{\Theta \subset \mathcal{R}^n\}$ maliyet fonksiyonunu Θ parametre uzayı içinde maksimize eden stokastik optimizasyon metodudur. Popülasyonlar n boyutlu ikili diziden oluşan, rasgele ilk değerli, N kromozomlu yapılardır. Her bir birey (kromozom) için maliyet fonksiyonu hesaplanır ve seleksiyon operatörü doğal seleksiyon uyarınca en iyi kromozomları seçer. Daha sonra tek noktalı, çok noktalı yada saçılmış çaprazlama yöntemlerinden biriyle Şekil 5.4'teki gibi çocukları oluşturmak için ebeveynler karşılıklı olarak bitleri değiştirir. Mutasyon operatörü ise çaprazlama işleminden hemen sonra önceden belirlenmiş bir olasılıkla bitleri değiştirir ve algoritmanın yerel bir minimumda takılmasını önler. Bu işlem genellikle kromozomdaki bit dizisinde bir bitin değiştirilmesi şeklindedir. Elitizm ise daha iyi maliyet fonksiyonu veren genleri bir sonraki gen havuzuna aktarır (Thierens, 1997; Baker, 1987). İterasyonlar maksimum kuşak sayısına ulaşınca veya maliyet fonksiyonu belli bir seviyenin altına düşünce biter.

Genetik algoritmanın adımları şunlardır:

- Her bir x_i bireyi için N boyutlu kodlanmış ikili dizi oluşturarak $X(0) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_N)$ ilk popülasyonunu oluşturulur.



Şekil 5.4 (a) Üç noktalı çaprazlama. Çaprazlama yerleri yatay çizgilerle gösterilmiştir. (b) Saçılmış çaprazlama.

- Her bir kromozom için maliyet fonksiyonu $F(x_i)$'yi hesaplanır.
- Seleksiyon uygulayıp sadece en iyi kromozomlar alınır.
- Ebeveynler çiftleştirilerek yeni kromozomlar oluşturulur.
- Önceden belirlenmiş bir olasılıkla mutasyon uygulanır.
- Elitist strateji uyarınca yeni nesili oluşturacak üstün ebeveynler bir sonraki nesile taşınır.
- Hedefe ulaşıncaya kadar 2. basamağa geri dönülerek işlemler tekrarlanır.

Bu çalışmada her bir kromozom 64 bit, popülasyon büyüklüğü 20 kromozom ve rank tabanlı (Thierens ve Goldberg, 1994; Baker, 1987) bir maliyet ölçekleme fonksiyonu seçilmiştir. Seleksiyon işlemi düzgün örneklemelidir (Goldberg, 1989; Blickle ve Thiele, 1995) ve çarprazlama çok noktalı saçılmalı olarak yapılmıştır. İki en iyi birey bir sonraki nesilde kesinlikle yer almaktadır. Maliyet fonksiyonunun toleransı 10^{-6} olarak seçilmiştir. Arama uzayı $a \in [0, 2]$ arasındadır ve parametre uzayı da böylece $\Theta \in \{[0, 2], [0, 2], \times \ldots [0, 2]\}$ olmuştur. Bu bölümdeki bütün genetik algoritma optimizasyonlarında bu parametreler kullanılmıştır.

5.3.1 KZBO Maksimize Edilerek Optimum KFD Derecesinin Bulunması

Önerilen yöntemde KZBO oranını maksimize edecek KFD derecesi için maliyet fonksiyonu

$$\hat{a} = \arg\max_{a} \frac{\left[\int \left(u - \eta_{u,a}\right)^2 |x_a(u)|^2 \mathrm{d}u\right]^2}{\left[\int \left(u - \eta_{u,(a+1)}\right)^2 |x_{a+1}(u)|^2 \mathrm{d}u\right]^2} \ , \tag{5.21}$$

şeklindedir ve burada $\hat{a}$ optimum KFD derecesi kestirimidir. Bu denklem, (5.8) kullanılarak çıkarılmıştır.

5.3.2 Minimum Gerekli Bant Genişliği Bulunarak Optimum KFD Derecesinin Kestirimi

Daha önce (5.12) denklemi ile optimum KFD derecesi tanımlanmıştı.

$$\hat{a} = \arg\min_{a} \int g\left(|x_a(u)|^2\right) \mathrm{d}u \tag{5.22}$$

denklemi minimize edilerek optimum KFD derecesi kestirilmektedir. Gerekli–bantgenişliği kestirimi ise

$$\hat{\Omega} \in \{u|\ g\left(|x_{\hat{a}}(u)|\right) > u_{thr}\} \, , \tag{5.23}$$

şeklinde olmaktadır. Burada $\hat{\Omega}$ işaretin gerekli–bantgenişliği kestirimidir ve u_{thr}, (5.14) ile tanımlanmıştır. Bu şekilde gerekli–bantgenişliği ve optimum KFD derecesi kestirilmektedir.

5.3.3 Optimum KFD Derecesi Seçiminin Başarım Analizi

Bu kısımda optimum önerilen yöntemlerle KFD derecesinin kestiriminin başarım analizi yapılmakta, artıları ve eksileri ortaya konmaktadır. İlk olarak DFM oranı $\beta_0 = 1/3$, zaman ve frekans kaymaları sıfır olan

$$x_1(u) = G(u) \exp\left(\jmath \left[\beta_0 \left(u - u_0\right)^2 + 2\pi b \left(u - u_0\right)\right]\right) \tag{5.24}$$

şeklinde bir DFM işareti üretilmiştir. Burada $G(u)$, işaretin Gauss zarfıdır. İkinci olarak da eşit genlik, zaman ve frekans kaymaları olan, fakat DFM oranları $\beta = 1/3$ ve $4/9$ olan

$$x_2(u) = G(u) \exp\left(\jmath \frac{1}{3} u^2\right) + G(u) \exp\left(\jmath \frac{4}{9} u^2\right) \ . \tag{5.25}$$

şeklinde, iki tane DFM işaretinin toplamından oluşan bir işaret oluşturulmuştur. Bu durumda, beklenen optimum KFD derecesi $1 + (a_1 + a_2)/2$ olmaktadır.

Çizelge 5.1 Önerilen kestirim algoritmalarının değişik işaretler üzerindeki başarımı.

	Maksimum AKZBO			Minimum Gerekli–Bantgenişliği			Bekl.*
	Ort.	Std.	% Hata	Ort.	Std.	% Hata.	a
$x_1(u)$	1.335	7.3E-4	0.15	1.333	3.7E-3	0.00	1.333
$x_2(u)$	1.396	8.2E-4	0.50	1.392	9.5E-4	0.22	1.389
$x_3(u)$	1.398	4.3E-4	4.88	1.333	3.8E-3	0.00	1.333
$x_4(u)$	1.448	5.9E-4	8.62	1.332	3.4E-3	0.07	1.333

* Beklenen optimum KFD derecesi.

Üçüncü olarak da eşit 1/3 DFM oranlarına sahip, fakat 0 ve 3 farklı zaman kaymalarına sahip, iki DFM işaretinin toplamı $x_3(u)$ üretilmiştir. Dördüncü ve son olarak da yine eşit DFM oranı, fakat farklı frekans kaymalarına sahip iki DFM işaretinin toplamı $x_4(u)$ üretilmiştir. $x_3(u)$ ve $x_4(u)$ işaretlerinin her ikisinin de beklenen DFM oranı kestirimi $1 + 1/3$ değeridir. Bu iki işaret

$$x_3(u) = G(u) \exp\left(\jmath \frac{1}{3} u^2\right) + G(u) \exp\left(\jmath \left[1/3\,(u-3)^2\right]\right) , \tag{5.26}$$

$$x_4(u) = G(u) \exp\left(\jmath \left[\frac{1}{3}(u-3)^2\right]\right) + G(u) \exp\left(\jmath \left[\frac{1}{3} u^2 + \pi u\right]\right) . \tag{5.27}$$

şeklindedir. Önerilen yöntemler bu işaretlerin DFM oranlarının kestiriminde kullanılmıştır. Kestirim sonuçları Çizelge 5.1'de özetlenmiştir. Her bir işaret için 20 deneme yapılmış, denemelerin ortalamaları, standart sapmaları ve yüzde hata miktarıyla kestirilmesi beklenen değerler verilmiştir. Çizelge'den de açıkça görülebileceği gibi maksimum AKZBO yöntemi sadece tek bileşenli DFM işaretleri için iyi başarım göstermektedir. Yani, yarasa, yunus veya balina ekolokasyon verisi gibi birden fazla DFM bileşeni barındıran işaretler için minimum gerekli–bantgenişliği yöntemi optimum KFD açısını verecektir.

5.4 Benzetimler

KFD bölgesindeki AİT başarımı, dört farklı senaryo ile test edilmiştir. Birinci senaryoda bir kısmı eksik, yapay bir DFM işareti üretilmiştir. Optimum dönüşüm bölgesi kestirildikten sonra işaret, optimum KFD bölgesinde geri elde edim yöntemiyle geri elde edilmiştir.

İkinci senaryoda, birden fazla DFM bileşeni barındıran gerçek bir yarasa ekolokasyon verisinin eksik kısımları geri elde edilmiştir. Yarasa işaretinin rasgele bir kısmı kesilerek atılmış ve eksik kısmı geri elde edilmiştir. Geri elde edim sürecinden önce optimum dönüşüm derecesi kestirilmiştir.

Üçüncü senaryo ise rasgele bir kısmı kesilerek atılmış iki boyutlu, yönlü bir DFM görüntüsü geri elde edilmektedir. Optimum dönüşüm bölgesi kestirilmeden önce iki boyutlu Hilbert dönüşümü alınmıştır. İki boyutlu Hilbert dönüşümünün nasıl alındığı ilerleyen kısımlarda ayrıntılı olarak anlatılmaktadır.

Dördüncü ve son senaryoda, bir önceki senaryodakine benzer bir görüntü üretilmiştir, fakat bu senaryoda görüntü yönlü değildir. Bu senaryoda da iki boyutlu Hilbert dönüşümü alındıktan sonra optimum dönüşüm derecesi kestirilmiştir ve geri elde edim prosedürü uygulanmıştır.

Önerilen yöntemin başarımı ortalama karesel hata cinsinden bulunmuş ve normal Fourier bölgesi yöntemiyle kıyaslanmıştır. Bir boyutlu ortalama karesel hata

$$MSE_{1-D} = \frac{\int |x(u) - \hat{x}(u)|^2 \mathrm{d}u}{||x(u)||}, u \in [u_1, u_2] \ , \tag{5.28}$$

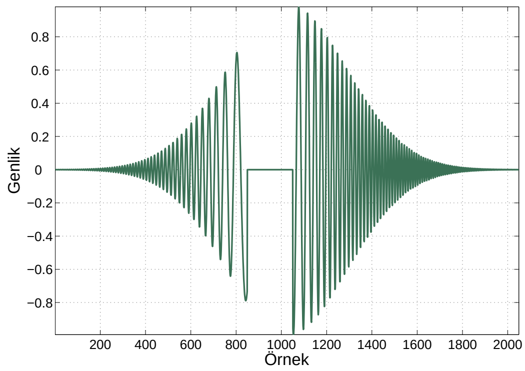
şeklinde tanımlanmıştır. Burada u_1 ve u_2 işaretin eksik kısımlarının sınırları, $x(u)$ ile $\hat{x}(u)$ ise sırasıyla, istenilen ve elde edilen işaretlerdir. Ortalama karesel hata iki boyutlu $x(u, v)$ işaretine sınırları $u \in [u_1, u_2]$ ve $v \in [v_1, v_2]$ olarak değiştirerek kolaylıkla genişletilebilir. Burada u_1 ile u_2, u yönünde, v_1 ile v_2 de v yönündeki sınırlardır. Böylece iki boyutlu ortalama karesel hata

$$MSE_{2-D} = \frac{\int |x(u,v) - \hat{x}(u,v)|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v}{||x(u,v)||}, u \in [u_1, u_2] \ , v \in [v_1, v_2] \ , \tag{5.29}$$

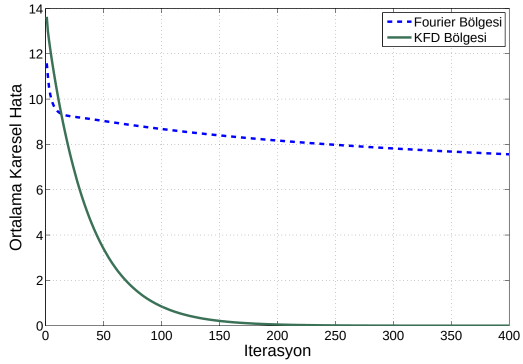
şeklindedir.

5.4.1 Doğrusal Frekans Modüleli İşaretlerin Geri Elde Edimi

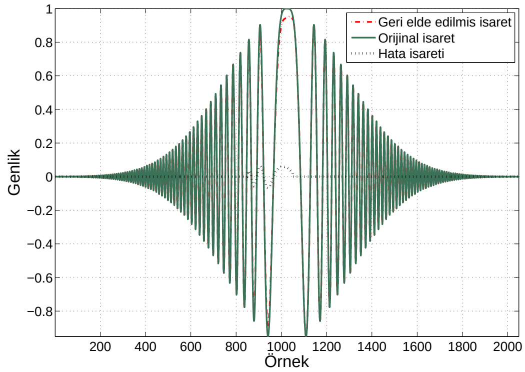
Birinci senaryoda benzetimler, yapay olarak üretilen, Gauss zarfıya modüle edilmiş, (5.24)'te verilen DFM işaretiyle yürütülmüştür. 2048 örnekli bu işaretin parametreleri, $\beta = 1/3$, $b = 0$ ve $u_0 = 0$ şeklindedir. İşaretin yaklaşık %10'u Şekil 5.5-(a)'daki gibi kesilerek atılmıştır. Ortalama karesel hata Şekil 5.5-(b)'de görüldüğü gibi iterasyon sayısına bağlı olarak düşmekte ve yaklaşık 200 iterasyondan sonra optimum KFD derecesinde ihmal edilebilir küçük bir hata oranında kalmaktadır. Yine Şekil 5.5-(b)'de



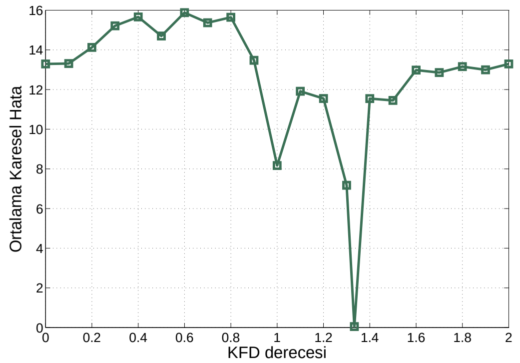
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 5.5 (a) 200 uzunluklu kısmı kesilmiş, 2048 uzunluklu, Gauss zarflı DFM işareti. (b) İşaretin eksik kısmı için, optimum KFD bölgesi AİT ve geleneksel FD bölgesi AİT yöntemlerinde ortalama karesel hatanın iterasyon sayısıyla değişimi. (c) Optimum KFD derecesinde 150 iterasyon sonunda geri elde edilmiş işaret, orijinal işaret ve hata işareti. (d) 200 iterasyon için ortalama karesel hatanın KFD derecesiyle değişimi. Hata oranı optimum KFD derecesinde minimumdur.

FD bölgesi yönteminin 400 iterasyondan sonra bile geri elde etmek için yetersiz kaldığı gözlemlenmektedir.

Önerilen yöntemin, normal FD bölgesi geri elde edim yöntemine oranla bu kadar başarılı olmasının nedeni, optimum KFD bölgesinde, DFM işaretlerinin, minimum dönüşüm bölgesi genişliği olan, Dirac–delta dağılımlı işarete dönüşmesidir. Bunun yanında işaret, normal FD bölgesinde daha yüksek bantgenişliğine sahiptir ve bu nedenle daha düşük başarım göstermektedir.

Şekil 5.5-(c)'de 150 iterasyondan sonra elde edilen işaret, orijinal işaret ve hata işareti gösterilmektedir. Elde edilen işaretle orijinal işaret üst üsteymiş gibi görünmektedir, çünkü hata miktarı küçüktür. Normal FD bölgesini de içeren diğer KFD bölgelerine kıyasla optimum KFD bölgesi geri elde edim yönteminde hata miktarı Şekil 5.5-(d)'de gösterildiği gibi çok daha küçüktür. Benzetim sonuçları, hem ortalama karesel hata cinsinden, hem de iterasyon sayısı cinsinden optimum KFD bölgesi geri elde edim yönteminin daha başarılı olduğunu göstermektedir.

5.4.2 Yarasa Ekolokasyon İşaretinin Geri Elde Edilmesi

Bu kısımda %6,5'u önceden kesilerek atılmış, sayısallaştırılmış 2,8 ms uzunluğunda, uzun, geniş, kahverengi cins yarasa (eptesicus fuscus) ekolokasyonunun (http://www.dsp.rice.edu/software/TFA/RGK/BAT/batsig.bin.z*) geri elde edimi yapılacaktır. Şekil 5.6-(a)'da birden fazla DFM bileşeni barındıran yarasa ekolokasyon işareti görülmektedir.

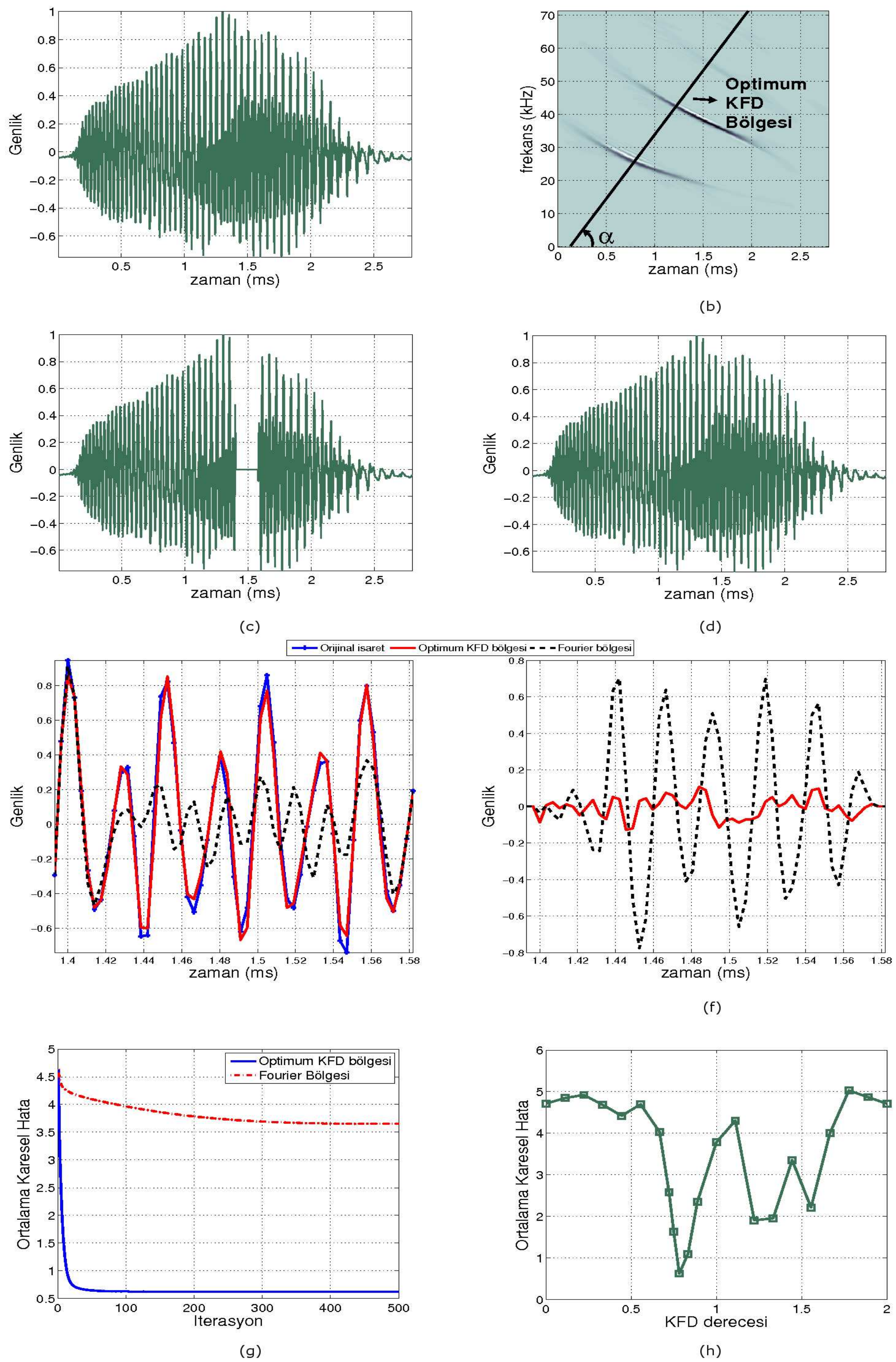
Yarasa ekolokasyon işaretinin optimum KFD derecesi, gerekli–bantgenişliğinin minimum olduğu derecedir. Şekil 5.6-(b)'de, Hilbert dönüşümü alınmış, analitik yarasa ekolokasyon işaretinin Wigner dağılımı gösterilmektedir. Optimum dönüşüm derecesi, DFM açısına dik olan KFD açısına denk düşen derecedir. Optimum KFD dönüşüm derecesi minimum gerekli–bantgenişliği yöntemi kullanılarak $0,391\pi \approx 0.782$ rad. $(70,4$ derece) olarak kestirilmiştir. İşaretin optimum KFD derecesinde dönüşümü alındığında zaman–frekans ekseni saat yönünün tersinde döner ve minimum gerekli–bantgenişliği elde edilmiş olur.

Şekil 5.6-(c)'de rasgele kesilmiş işaret ve Şekil 5.6-(d)'de onun 100 iterasyon sonra geri elde edilmiş hali görülmektedir. Geri elde edilen işaret, orijinal işaretin bütün özelliklerini sağlamaktadır. Dahası, Şekil 5.6-(e)'de işaretin sadece kesilmiş kısmının 200 iterasyon sonrası, hem FD bölgesi AİT için, hem de önerilen optimum KFD derecesi AİT için gösterilmektedir. Önerilen optimum geri elde etme yöntemi işaretle hemen hemen üst üstedir, çünkü hata miktarı çok azdır. Şekil 5.6-(f) ise bu işaretin FD bölgesi ve optimum KFD bölgesi AİT yöntemiyle geri elde edildiğindeki hata işaretlerini gösterilmektedir. Şekil Şekil 5.6-(e) ve (f) sadece kesilmiş bölgeyi göstermektedir, çünkü hata sadece burada olmaktadır.

Ortalama karesel hata, hem FD bölgesi, hem de optimum KFD bölgesi geri elde edimi yönteminde Şekil 5.6-(g)'de görüldüğü gibi belli bir limit noktasına kadar inmektedir. Fakat, hem yakınsama oranı, hem de ortalama karesel hata cinsinden optimum KFD bölgesi geri elde edimi, klasik FD bölgesi geri elde edimine göre daha iyi sonuç vermektedir.

---

*Yazar, Beckman Institute of the University of Illinois'den Curtis Condon, Ken White ve Al Feng'e yarasa verisinin sağlanması ve kullanılmasındaki izni için teşekkür eder.



Şekil 5.6 (a) Yarasa ekolokasyon işareti, (b) Wigner dağılımı ve optimum KFD derecesi. (c) Kesilmiş işaret ve (d) 100 iterasyon sonunda geri elde edilen işaret. (e) Orijinal işaret, 200 iterasyonun sonunda optimum KFD bölgesinde geri elde edilmiş işaret ve geleneksel FD yöntemiyle geri elde edilmiş işaret ve bu yöntemler sonunda (f) sadece kesilen bölge için hata işaretlerinin kıyaslanması. (g) Geleneksel FD bölgesinde ve optimum KFD bölgesinde AİT için ortalama karesel hatanın iterasyon sayısıyla değişimi. (h) 200 iterasyon için KFD derecesiyle ortalama karesel hatanın değişimi.

Şekil 5.6-(g)'de KFD derecesiyle ortalama karesel hatanın değişimi gösterilmektedir.

5.5 İki Boyutlu Yönlü Doğrusal Frekans Modüleli Görüntülerin Geri Elde Edimi

Arka plan görüntülerinin bir kısmı önde kalan bir engel tarafından engellenmiş ya da patlama gürültüsü veya bir başka nedenden dolayı eksik kalmış olabilir. Bu durumda görüntüler iki boyutu optimum KFD bölgesinde geri elde edilebilir.

Bir görüntünün optimum KFD derecesinin elde edilebilmesi için, önce *analitik görüntü*'ye dönüştürülmesi gerekmektedir. Analitik görüntü elde edilebilmek için de iki boyutlu Hilbert dönüşümü alınmalıdır. Şimdiye kadar yapılan çalışmalar içerisinde görüntüleri saf analitik hale getiren bir çözüm bulunmamaktadır (Bose ve Prabhu, 1979). Bu çalışmalardan çoğu görüntüleri sözde–analitik görüntülere dönüştürmektedir. Analitik görüntü elde etmek için Fourier tabanlı bir algoritma kullanıyoruz,

$$I_H(\omega_x, \omega_y) = I(\omega_x, \omega_y) + jI_h(\omega_x, \omega_y). \tag{5.30}$$

Burada $I(\omega_x, \omega_y)$, görüntünün iki boyutlu FD'si, $I_H(\omega_x, \omega_y)$ analitik görüntünün FD'si ve $I_h(\omega_x, \omega_y)$ görüntüyü analitiğe çeviren toplamsal kısmın FD'sidir. $I_h(\omega_x, \omega_y)$'nin ters FD'si tamamen gerçel olmalıdır, ki orijinal görüntünün gerçel kısmını değiştirmesin. $I_h(\omega_x, \omega_y)$ orijinal görüntünün analitik–görüntüsü olduğundan

$$I_H(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} I(\omega_x, \omega_y), & 0 < \omega_x, \omega_y < \pi/2. \\ 0, & \text{diger.} \end{cases} \tag{5.31}$$

olmaktadır. $I_h(\omega_x, \omega_y) = \jmath I(\omega_x, \omega_y) - \jmath I_H(\omega_x, \omega_y)$ olduğundan, işaretin analitik toplamsal kısmı

$$I_h(x, y) = \jmath\mathbb{R}\left\{\mathcal{F}^{-1}\left\{I(\omega_x, \omega_y) - \jmath I_H(\omega_x, \omega_y)\right\}\right\} \tag{5.32}$$

şeklinde bulunur. Burada $I_h(x, y)$, $I(x, y)$ ve $I_H(x, y)$, sırasıyla analitik görüntünün toplamsal kısmı, orijinal görüntü ve Hilbert dönüşümü alınmış analitik görüntüdür. Bütün diğer yöntemlerde olduğu gibi, bu yöntemde de sözde–analitik görüntüler elde edilmektedir. Benzetimlerde verilen bütün görüntüler önce iki boyutlu Hilbert dönüşümünden geçirilmekte, daha sonra optimum KFD dereceleri kestirilmektedir.

Bir iki boyutlu DFM işareti,

$$x(u, v) = g(u, v) \exp\left[\jmath\left(a_u(u - u_0)^2 + 2b_u(u - u_0) + 2b_v(v - v_0) + a_v(v - v_0)^2\right)\right] \tag{5.33}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $g(u, v)$ iki boyutlu Gauss zarfı, a_u ile a_v, u ve v yönlerindeki DFM oranları, u_0 ile v_0 zaman kaymaları ve b_u ile b_v frekans kaymalarıdır. Bu senaryoda iki boyutlu yapay bir DFM görüntüsü oluşturulmuştur. Bu görüntü Şekil 5.7-(a)'da görüldüğü gibi yönlüdür, yani sadece tek bir yönde DFM bileşeni vardır. Görüntünün önce iki boyutlu Hilbert dönüşümü alınmış, sonra da optimum KFD derecesi kestirilmiştir. Görüntü 128×128 boyutundadır ve rasgele seçilen 25×25'lik kısmı Şekil 5.7-(b)'deki gibi kesilerek atılmıştır. İşaret, optimum KFD bölgesinde geri elde edilmiş ve daha birinci iterasyondan sonra bile tatmin edici sonuçlar alınmıştır (Şekil 5.7-(c)). Şekil 5.7-(d)'de görüldüğü gibi görüntü 5 iterasyondan sonra tamamen geri elde edilmiştir.

Şekil 5.7-(e)'de optimum KFD AİT yönteminin yakınsama oranı ve ortalama karesel hatanın iterasyon sayısıyla değişimi gösterilmektedir. Hata oranları birkaç iterasyondan sonra hemen hemen sıfıra inmektedir. Hata oranı optimum KFD derecesinde 0.02 iken normal FD bölgesinde hata oranı 0.1 civarındadır.

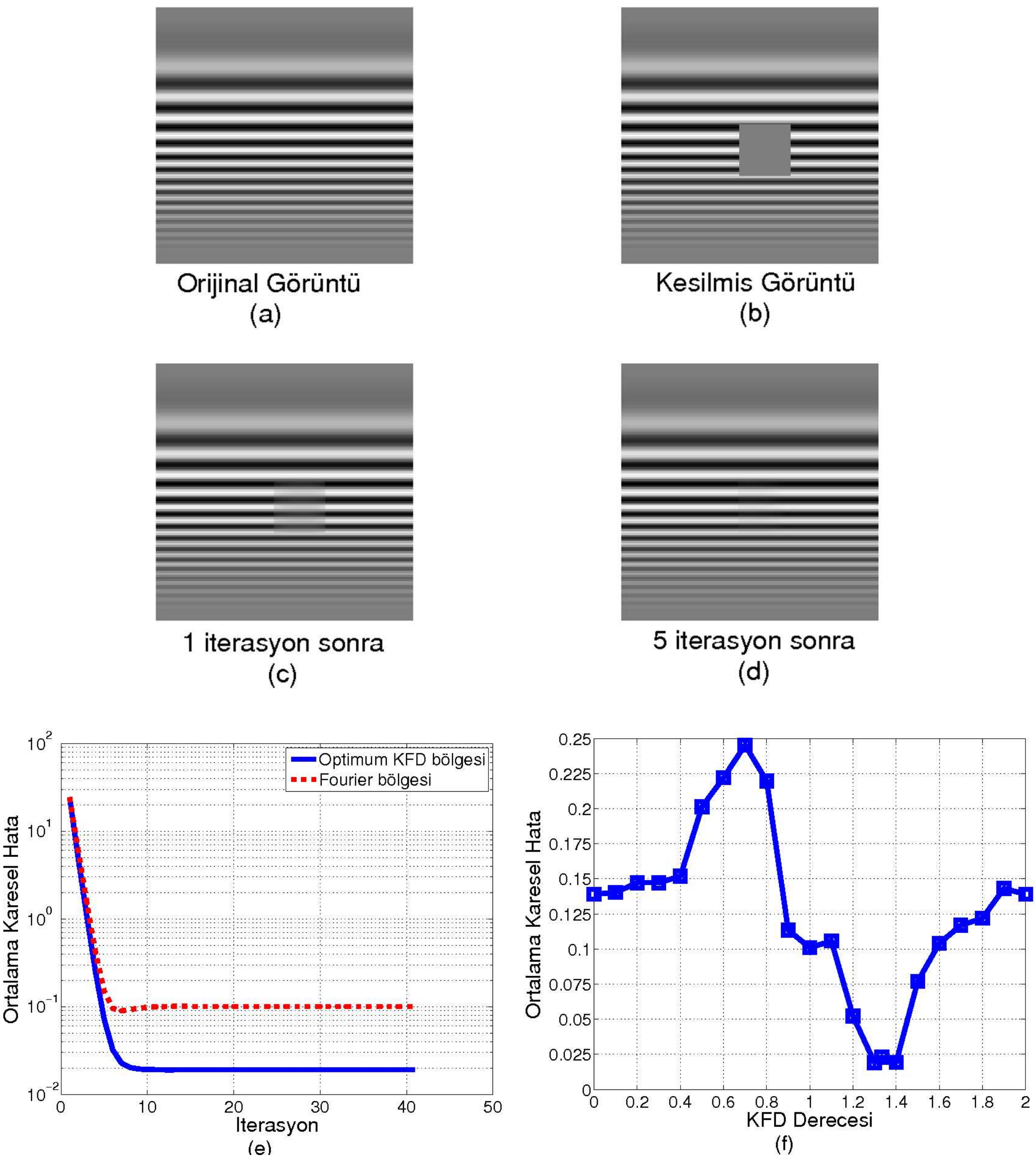
Şekil 5.7-(f)'de 50 iterasyon sonunda KFD derecesiyle ortalama karesel hatanın değişimi gösterilmektedir. Şekilden de görülebileceği üzere uygun KFD derecesi $1,2$ olmaktadır.

5.5.1 Yönlü Olmayan İki Boyutlu Doğrusal Frekans Modüleli Görüntünün Geri Elde Edilmesi

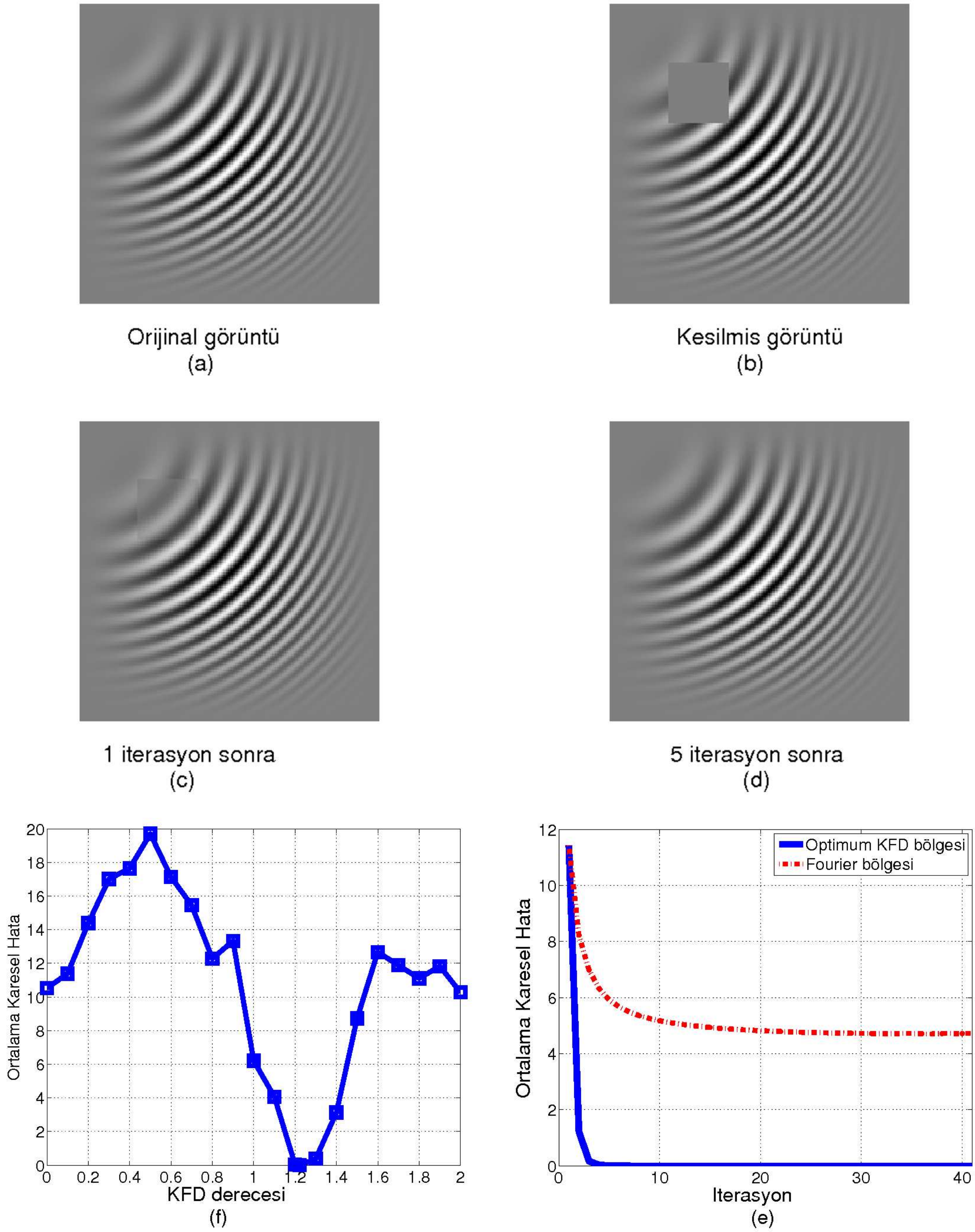
Son olarak, Şekil 5.8-(a)'da gösterilen, iki boyutlu, 128×128'lik yönlü olmayan bir DFM görüntüsü üretilmiş ve Şekil 5.8-(b)'de gösterildiği gibi 25×25'lik bir kısmı kesilerek atılmıştır. Görüntünün önce Hilbert dönüşümü alınmış, daha sonra da optimum KFD derecesi kestirilmiştir. Şekil 5.8-(c)'de görüldüğü gibi birinci iterasyondan sonra bile tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 5.8-(d)'de 5 iterasyon sonrası gösterilmektedir ve bu iterasyon derecesinde hata oranları hemen hemen sıfır olmaktadır.

Bir önceki senaryoda olduğu gibi Şekil 5.8-(e), 50 iterasyon sonunda değişik KFD derecelerindeki ortalama karesel hata miktarını göstermektedir. Şekilden de görülebileceği üzere optimum KFD derecesi $1,2$ olmaktadır ve bu derecede sıfıra yakın hata oranı olmaktadır.

Son olarak, Şekil 5.8-(f)'de optimum KFD derecesinde ortalama karesel hatanın iterasyon sayısıyla değişimi gösterilmektedir. Hata oranı normal FD bölgesi AİT yönteminde çok daha fazladır.



Şekil 5.7 (a) Orijinal ve (b) kesilmiş görüntü. (c) Optimum KFD bölgesinde birinci iterasyon sonunda geri elde edilmiş görüntü. (d) Optimum KFD bölgesinde 5. iterasyon sonunda geri elde edilmiş görüntü. (e) İterasyon sayısıyla ortalama karesel hatanın değişimi ve (f) ortalama karesel hatanın KFD derecesiyle değişimi.



Şekil 5.8 a) Orijinal ve (b) kesilmiş görüntü. (c) Optimum KFD bölgesinde birinci iterasyon sonunda geri elde edilmiş görüntü. (d) Optimum KFD bölgesinde 5. iterasyon sonunda geri elde edilmiş görüntü. (e) Ortalama karesel hatanın KFD derecesiyle değişimi ve (f) İterasyon sayısıyla ortalama karesel hatanın değişimi.

5.6 Sonuçlar

Optimum KFD derecesinde değişik işaretlerin eksik kısımları geri elde edilmiş, zamanla değişen işaretler ve görüntüler için önerilen yöntemin optimum bir geri elde edim yöntemi olduğu gösterilmiştir. Geleneksel FD bölgesi geri elde edim yöntemine göre önerilen yöntemin daha düşük ortalama karesel hata ürettiği ve daha iyi yakınsadığı görülmüştür. En iyi başarım oranlarının sağlanması için de genetik algoritma tabanlı yeni iki optimum KFD derecesi kestirim yöntemi önerilmiştir.

Önerilen yöntem radar, sonar veya sismik, DFM tipinde verilerin eksik kısımlarının geri elde edilmesi için optimum bir yöntemdir. Bu yöntem görüntü işleme ve optikte de kullanılabilir.

Bu yöntemin ara değerleme veya dış değerleme işlemi için de kolaylıkla modifiye edilerek kullanılabileceği gibi düzgün örneklenmemiş işaretleri düzgün örneklenmiş işaretlere çevirmek için de kullanılabilir.

6 DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLERİN ÖZFONKSİYONLARI VE BU ÖZFONKSİYONLARI ÜRETEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Doğrusal kanonik dönüşüm (DKD) (Wolf, 1979), KFD, FD Fresnel dönüşümü, ölçekleme, çörp çarpımı ve Laplace dönüşümü gibi dönüşümlerin genelleştirilmiş hali olan, üç parametreli, üniter ve toplamsal bir dönüşümdür (Ozaktas vd., 2001). DKD genellikle dört $\{a, b, c, d\}$ parametreyle ve $ad - bc = 1$ eşitliğiyle modellenmektedir. Bu eşitlik bir parametreyi serbest bıraktığı için aslında toplamda üç parametre bulunmaktadır. Biz, kolaylık olsun diye dört parametreli gösterimi kullanmaktayız.

DKD, dalga propagasyonu, radar ve optik problemleri gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. Bir çok optik sistem DKD kullanılarak modellenebilmektedir (Bastiaans, 1979, 1989; Abe ve Sheridan, 1994; Nazarathy ve Shamir, 1982), çünkü DKD, ince lensler, düzeyli dereceli ortamlar ve bunların kombinasyonları olan ortamları iyi modellemektedir.

Doğrusal operatörlerin ne yaptığını ve özelliklerini anlamanın önemli bir adımı, onların özfonksiyonlarını incelemekten geçer. KFD ve FD gibi popüler dönüşümlerin özfonksiyonları şimdiye kadar iyi çalışılmıştır, fakat bu dönüşümlerin genelleştirilmiş hali olan DKD'nin özfonksiyonları hala bakir bir konudur. DKD'nin özfonksiyonları ilk olarak James ve Agarwa (1996) tarafından çalışılmış, daha sonra da Pei ve Ding (2002) tarafından daha ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu yazarlar, çalışmalarında özfonksiyonları genel olarak $|a + d| < 2$ ve $|a + d| > 2$ olarak ikiye ayırmışlar, fakat sadece $|a + d| < 2$ için analitik bir özfonksiyon tanımlamışlardır. Bu çalışmada biz, hem $|a + d| < 2$ için, hem de $|a + d| > 2$ için özfonksiyonları analitik olarak tanımlamaktayız. James ve Agarwa (1996) ve Pei ve Ding (2002), $|a + d| < 2$ için DKD'nin özfonksiyonlarının Hermite–Gauss fonksiyonları ile modüleli çörp fonksiyonları olduğunu göstermişlerdir. Biz de $|a + d| > 2$ için dikgen özfonksiyon kümesinin *repulsif osilatör* fonksiyonlarıyla modüle edilmiş çörp fonksiyonları olduğunu göstermekteyiz.

KFD ve FD'nin özfonksiyonları önceki bölümlerde de söz edildiği gibi Hermite–Gauss fonksiyonlarıdır. Yine bu tezin büyük bir bölümü olan Bölüm 2-4 arasında, Hermite–Gauss fonksiyonlarına benzeyen dikgen özvektör kümeleri araştırılmıştır. Hem Hermite–Gauss fonksiyonları incelenirken, hem de ayrık Hermite–Gauss benzeri özvektörler araştırılırken en çok kullanılan denklem, (2.15)'de verilen diferansiyel denklemdir. Daha önce de söz edildiği gibi bu ikinci dereceden diferansiyel denklem hem FD'nin hem de KFD'nin özfonksiyonları olan Hermite–Gauss fonksiyonlarını üretmektedir. KFD ve FD'nin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklem bu kadar önemliyken, literatürde bu ve birçok diğer dönüşümün genelleştirilmiş hali olan DKD'nin özfonksiyonlarını üreten bir diferansiyel denklem bulunmamaktadır. Bu bölümde her iki $|a+d| < 2$ ve $|a+d| > 2$ durumu için DKD'nin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklemler bulunarak verilmiştir. Bu diferansiyel denklemler (Serbes ve Durak-Ata, 2011b, 2010; Pei vd., 2009; Candan, 2007)'deki gibi kullanılarak ayrık DKD tanımlamalarının önünü açabilir özelliktedir.

6.1 Ön Bilgiler

6.1.1 Doğrusal Kanonik Dönüşüm ve Özellikleri

$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}$, $\mathbf{M}$ parametreli DKD operatörü olmak üzere, DKD

$$(\mathcal{C}_{\mathbf{M}}f)(u) = f_{\mathbf{M}}(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{j}{2}\left(\frac{a}{b}u^2 - \frac{2}{b}uu' + \frac{d}{b}u'^2\right)\right] f(u')\mathrm{d}u', & b \neq 0 \\ \sqrt{d}\exp\left(\frac{j}{2}cdu^2\right) f(d \cdot u), & b = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Herhangi $f(u)$ işaretinin $\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ parametreli DKD'si $f_{\mathbf{M}}(u)$ şeklinde gösterilmektedir. Bu tezin kalan kısımlarında kolaylık olsun diye $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$ şeklinde gösterilecektir. DKD parametrelerinin 2×2'lik bir matrisle gösterilmesi bir çok matematiksel işlemde kolaylık sağlamaktadır.

$\mathbf{M}$ matrisi birim determinantlı bir rotasyon matrisidir. Böylece,

$$ad - bc = 1 \tag{6.2}$$

eşitliği yazılabilir. DKD toplamsaldır. Önce $\mathbf{M}_1$ ve sonra $\mathbf{M}_2$ parametreli iki ardışıl DKD, $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ parametreli tek bir DKD'ye denktir. $\mathbf{M}$ parametreli DKD'si alınmış $f_{\mathbf{M}}(u)$ işaretinin ters DKD'si, DKD kerneli Hermityanıyla değiştirerek elde edilebilir. Bu da $\mathbf{M}^{-1}$ parametresiyle DKD'ye denktir. Bu nedenle dönüşüm üniterdir.

Bir çok dönüşüm, DKD'nin özel durumudur. Örneğin, meşhur FD, DKD'nin $\mathbf{M} = \{0,\ 1,\ -1,\ 0\}$ parametresiyle özel bir halidir. $\mathbf{M} = \{\cos(\alpha), \sin(\alpha), -\sin(\alpha), \cos(\alpha)\}$ olduğunda, bir faz farkı haricinde DKD, KFD'ye denk olmaktadır. Bu tanımlamada KFD, (2.2)'de tanımlı olandan, ölçekleme yönünden farklıdır. Bu nedenle Hermite–Gauss fonksiyonları da (2.15)'ten sadece ölçekleme yönünden farklıdır. Bundan dolayı Hermite–Gauss fonksiyonları tezin bundan sonraki kısmında

$$\psi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}} H_n(u) e^{-u^2/2} \tag{6.3}$$

olarak kullanılacaktır. Burada $H_n(u)$, (2.14) denkleminde tanımlı n–inci dereceden Hermite polinomudur. Bu şekilde ölçeklenmiş Hermite–Gauss fonksiyonunu üreten ikinci dereceden diferansiyel denklem de

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(u)}{\mathrm{d}u^2} - u^2 f(u) = -(2n+1)f(u), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.4}$$

şeklindedir.

Fresnel dönüşümü de DKD'nin $\mathbf{M} = \{1, b, 0, 1\}$ parametresiyle özel halidir. Fresnel dönüşümü, aynı zamanda çörp çarpımı olarak da düşünülebilir. Ölçekleme ve çörp çarpımı işlemleri de DKD'nin, sırasıyla $\mathbf{M} = \{\sigma^{-1}, 0, 0, \sigma\}$ ve $\mathbf{M} = \{1, 0, -q, 1\}$ parametreli durumudur.

DKD'nin uygulandığı işaretin zaman–frekans karakteristiği üzerine etkileri bulunmaktadır. $x(t)$, bir zaman bölgesi işaret ve $x_{\mathbf{M}}$ onun DKD'si olsun. Eğer işaretin ve DKD'sinin Wigner dağılımı, sırasıyla $W_x(t, f)$ ve $W_{x_{\mathbf{M}}}(t, f)$ ise bu iki zaman–frekans gösterimi arasındaki ilişki

$$W_{x_{\mathbf{M}}}(t, f) = W_x(at + bf, ct + df) \tag{6.5}$$

şeklindedir. DKD'nin, işaretin zaman–frekans dağılımı üzerine etkisi Şekil 6.1'de gösterilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi FD işaretin zaman–frekans desteğini $-\pi/2$ rad. döndürmektedir. Ölçekleme işlemi, işareti zaman–frekanstaki desteğini ölçeklerken, çörp çarpımı ve çörp konvolüsyonu işlemleri işaretin zaman–frekans desteğinin kaykılmasına neden olmaktadır. KFD ise, işaretin zaman–frekans desteğini α açısıyla orantılı olarak döndürmektedir.

6.1.2 DKD'nin Özellikleri

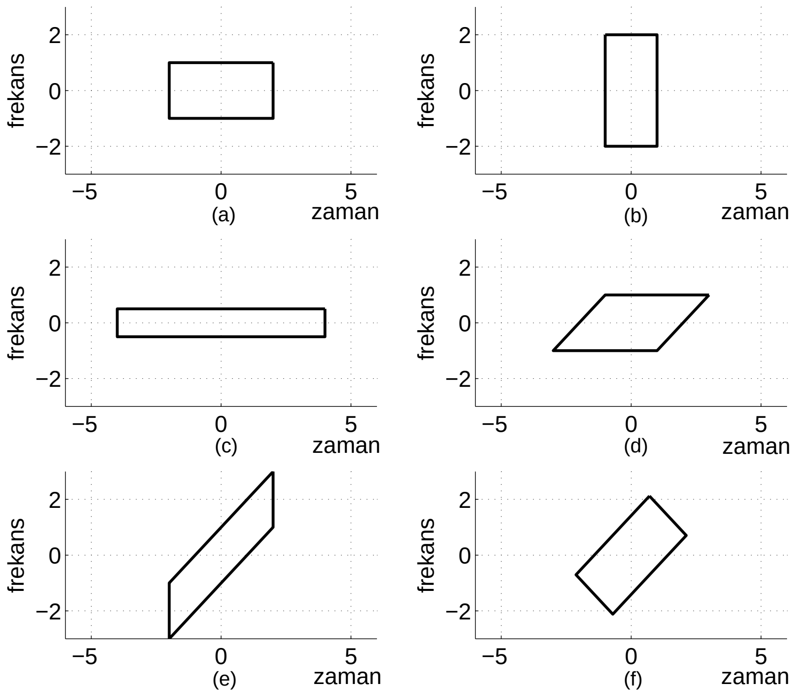
Bu kısımda DKD'nin özfonksiyonlarını ve bu fonksiyonları üreten diferansiyel denklemleri elde etmek için gerekli bir takım DKD özellikleri tanıtılacaktır.

Özellik 6.1 $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$, $\mathbf{M}_1 = \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$, ve $\mathbf{M}_2 = \{a_2, b_2, c_2, d_2\}$ birim determinantlı DKD parametreleri olsunlar. Eğer $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1^{-1}$ şeklinde yazılabiliyorsa, yani

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{6.6}$$

eşitliği varsa, şu eşitlikten bahsedilebilir,

$$a + d = a_2 + d_2 \tag{6.7}$$



Şekil 6.1 (a) İşaretin zaman–frekans dağılımını gösteren alan. (b) FD ($\mathbf{M} = \{0, 1, -1, 0\}$), (c) ölçekleme ($\mathbf{M} = \{1/2, 0, 0, 2\}$), (d) çörp çarpımı ($\mathbf{M} = \{1, 0, -1, 1\}$), (e) çörp konvolüsyonu ($\mathbf{M} = \{1, 1, 0, 1\}$) ve (f) KFD ($\mathbf{M} = \{\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), -\sin(\pi/4), \cos(\pi/4)\}$) işlemlerinin işaretin zaman–frekans dağılımı üzerindeki etkileri.

İspat. Bu özelliğin ispatı temel doğrusal cebirden faydalanılarak kolaylıkla şu şekilde yapılabilir: $\mathbf{M}$ matrisinin izi* $\mathbf{M}_2$ matrisinin izine eşittir (Golub ve Van Loan, 1996). Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Özellik 6.2 Eğer $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrisleri 6.6'teki eşitliği $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1^{-1}$ şeklinde sağlıyorsa ve $e(u)$, $\mathbf{M}_2$ parametreli DKD'nin özfonksiyonuysa, yani

$$(\mathcal{C}_{\mathbf{M}_2} e)(u) = \lambda e(u) \tag{6.8}$$

eşitliğinden söz edilebiliyorsa, o halde $\mathbf{M}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonu,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1}(e))(u) = \lambda(\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1} e)(u) = \lambda e_{\mathbf{M}_1}(u) \tag{6.9}$$

olmaktadır. Diğer bir deyişle, eğer bir $e(u)$ fonksiyonu $\mathbf{M}_2$ parametreli DKD'nin λ özdeğerli bir özfonksiyonuysa, o halde $(\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1} e)(u) = e_{\mathbf{M}_1}(u)$ da $\mathbf{M}$ parametreli DKD'nin λ özdeğerli bir özfonksiyonudur.

---

*Matrisin izi: (İng.) Trace of a matrix

İspat. $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1^{-1}$ olduğundan $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1}(e))(u)$ şu şekilde yeniden ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1}(e))(u) &= \mathcal{C}_{\mathbf{M}_1}\mathcal{C}_{\mathbf{M}_2}\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1^{-1}}\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1^{-1}}\{e\}(u) \\ &= \mathcal{C}_{\mathbf{M}_1}\mathcal{C}_{\mathbf{M}_2}\{e\}(u) \\ &= \lambda\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1}\{e\}(u). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Özellik 6.3 Bir f(u) işaretinin n–inci dereceden türevinin DKD'si,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}u}\right)(u) = (j)^n\left[-cu - ja\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right]^n f_{\mathbf{M}}(u) \tag{6.11}$$

olmaktadır (Wolf, 1979; Ozaktas vd., 2001). Burada DKD parametresi $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$ şeklindedir. Bu özellik, operatör formunda

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}\left(\mathbb{D}^n f\right)(u) = (-c\mathbb{U} + a\mathbb{D})^n f_{\mathbf{M}}(u) \tag{6.12}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{U}$, sırasıyla türev ve uzamsal çarpım işlemlerini sembolize etmektedir ve $(\mathbb{U}f)(u) = uf(u)$ ve $(\mathbb{D}f)(u) = -j\mathrm{d}f(u)/\mathrm{d}(u)$ olmaktadır.

Özellik 6.4 $u^n f(u)$ şeklindeki n–inci dereceden çarpma işleminin KFD'si

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(u^n f)(u) = \left(du + jb\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^n f_{\mathbf{M}}(u) \tag{6.13}$$

şeklindedir (Wolf, 1979; Ozaktas vd., 2001). Bu eşitlik operatör cinsinden

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}\left(\mathbb{U}^n f\right)(u) = (d\mathbb{U} - b\mathbb{D})^n f_{\mathbf{M}}(u). \tag{6.14}$$

olarak da yazılabilir.

6.2 Doğrusal Kanonik Dönüşümün Özfonksiyonları

DKD değişik ardışıl dönüşümler şeklinde ifade edilebilir. Örneğin, DKD bir çörp konvolüsyonu, onu izleyen ölçeklenmiş bir FD ve en son olarak da bir çörp çarpımına denktir. Benzer olarak, DKD bir çörp çarpımı, çörp konvolüsyonu ve tekrar bir çörp çarpımı şeklinde ayrıştırılabilir. Bununla birlikte, elimizdeki probleme uygun olarak değişik özel ayrıştırmalar seçilebilir.

James ve Agarwa (1996) ve Pei ve Ding (2002), $|a + d| < 2$ için DKD özfonksiyonlarını bulmuşlardır, fakat $|a + d| > 2$ için özfonksiyonlar bulunamamıştır. Özellikle (Pei ve

Ding, 2002)'de $|a + d| < 2$ durumu için özfonksiyonlar tam ve doğru olarak tanımlanmıştır. Fakat, $|a + d| > 2$ durumu için özfonksiyonlar bir fonksiyonunun dönüşümü olarak tanımlanmış, fakat fonksiyon analitik olarak tanımlanmamış, ölçekleme fonksiyonunun özfonksiyonu olarak verilmiştir. Kısacası, $|a + d| > 2$ için daha önce tam ve dikgen özfonksiyon kümesi tanımlanmamıştır. Bu kısımda DKD'nin uygun ayrıştırmaları ve özellikleri kullanılarak $|a + d| < 2$ ve $|a + d| > 2$ için tam ve dikgen özfonksiyonlar verilmektedir.

6.2.1 DKD'nin Özfonksiyonları Üzerine Geçmiş Çalışmalar: $|a + d| < 2$

Pei ve Ding (2002), $|a + d| < 2$ için özfonksiyonları ve nasıl bulunacağını ayrıntılı olarak anlatmaktadır. $|a + d| < 2$ durumu için özfonksiyonları kolayca bulabilmek için DKD şu şekilde ayrıştırılmıştır;

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha + \tau\sin\alpha & \sigma^2\sin\alpha \\ -(\tau^2+1)\sigma^{-}2\sin\alpha & \cos\alpha - \tau\sin\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Burada $|a + d| = 2\cos\alpha < 2$ olduğu, Özellik 6.1'den de faydalanılarak hemen görülebilir. $\{\cos\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha, \cos\alpha\}$ parametreli DKD'nin, KFD'ye denk olduğu ve KFD'nin de özfonksiyonlarının Hermite–Gauss fonksiyonları olduğu bilinmektedir.

$\{\cos\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha, \cos\alpha\}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonları bilindikten sonra yukarıdaki denklemdeki $\{a, b, c, d\}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonları, Özellik 6.2'den de görülebileceği gibi Hermite–Gauss fonksiyonlarının $\{\sigma,\ 0,\ -\tau\sigma^{-1},\ \sigma^{-1}\}$ parametreli DKD'sidir. $\{\sigma,\ 0,\ -\tau\sigma^{-1},\ \sigma^{-1}\}$ parametresiyle DKD almak, (6.1)'den de görülebileceği gibi, bir çörp çarpımı ve ölçeklemeden ibarettir ve herhangi bir integral dönüşümü gerektirmediğinden çok basit bir işlemdir. Böylece (Pei ve Ding, 2002)'de, $|a + d| < 2$ için DKD'nin (n, τ, σ) dereceden özfonksiyon kümesi,

$$\phi_n^{(\sigma,\tau)}(u) = \frac{1}{\sqrt{\sigma 2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{(1 + j\tau)u^2}{2\sigma^2}\right] H_n\left(\frac{u}{\sigma}\right) \tag{6.16}$$

şeklinde verilmiştir. Burada $H_n(u)$, (2.14)'de verilen Hermite polinomudur. $\mathbf{M}$ ve σ ile τ arasındaki ilişki ise

$$\sigma^2 = \frac{2|b|}{\sqrt{4 - (a+d)^2}}, \quad \tau = \frac{\mathrm{sgn}(b)(a - d)}{\sqrt{4 - (a+d)^2}} \tag{6.17}$$

şeklindedir. Burada sgn(·) işaret fonksiyonudur. $\phi_n^{(\sigma,\tau)}$ özfonksiyonuna ait özdeğer,

$$\lambda_n = (e^{j\alpha})^{1/2} e^{-j\alpha n}, \quad \alpha = \arccos\left(\frac{a+d}{2}\right). \tag{6.18}$$

şeklindedir.

İlerleyen kısımlarda $|a+d| > 2$ için DKD'nin özfonksiyonları kolaylık açısından ikiye ayrılmış, özfonksiyonlar $(a+d) > 2$ ve $(a+d) < -2$ için ayrı ayrı incelenmiştir.

6.2.2 $(a+d) > 2$ Durumu İçin DKD Özfonksiyonları

DKD'nin ayrıcalıklı bir altgrubu, *hiperbolik altgrup*tur (Wolf, 1979). Biz hiperbolik altgrubu, DKD'nin özfonksiyonlarını bulmak için ara araç olarak kullanmaktayız. Hiperbolik altgrup, DKD parametreleriyle

$$\mathbf{M}_{\mathbf{H}_r} = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

olarak tanımlıdır (Wolf, 1979). DKD'nin, $(a+d) > 2$ için özfonksiyonlarını bulmak için önce hiperbolik altgrubun özfonksiyonları bulunmalıdır.

Hiperbolik altgrubun özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklem,

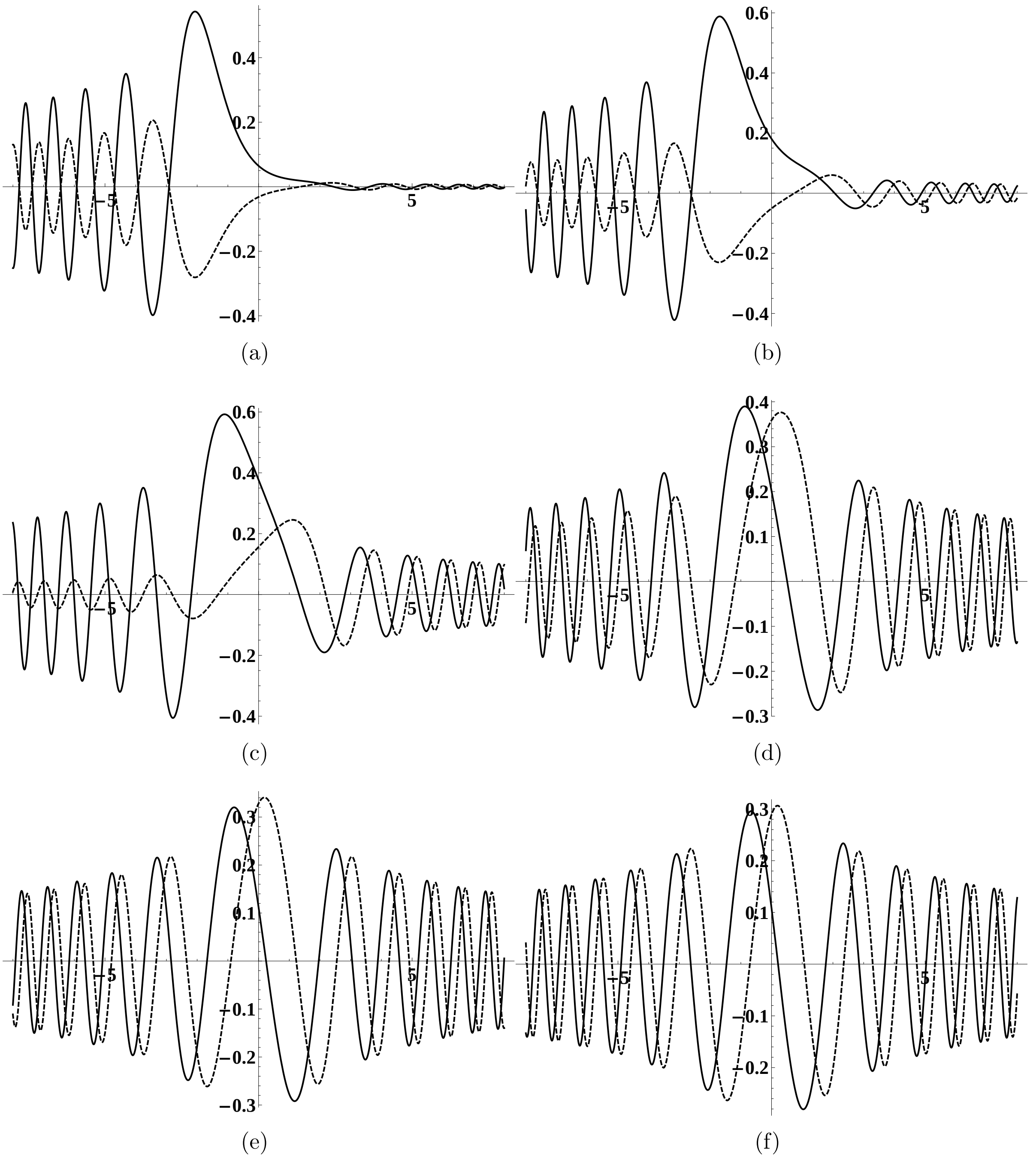
$$\mathbb{H}_r \chi_{\Lambda_r}(u) = \Lambda_r \chi_{\Lambda_r}(u) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi_{\Lambda_r}(u)}{\mathrm{d}u^2} + u^2\chi_{\Lambda_r}(u)\right) \tag{6.20}$$

şeklindedir (Wolf, 1979; Ozaktas vd., 2001). Burada $\mathbb{H}_r$ hiperbolik altgrubun özfonksiyonlarını üreten operatör ve $\Lambda_r = (r+1)/2$ bu diferansiyel denklemin özdeğeridir (r bir tamsayı). Bu özdeğer, hiperbolik altgrubun özdeğeri değil, diferansiyel denklemin özdeğeridir, karıştırılmamalıdır. Literatürde bu diferansiyel denklemin çözümü *repulsif osilatör* fonksiyonu olarak bilinmektedir. Sonuç olarak hiperbolik altgrubun özfonksiyonları, yani repulsif osilatör fonksiyonları,

$$\chi^{\pm}_{\Lambda_r}(u) = \frac{2^{j\Lambda_r/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u'^{-1/2-j\Lambda_r}_{\pm} \exp\left[j(u'^2/4 + uu' + u^2/2)\right]\mathrm{d}u'. \tag{6.21}$$

olarak bilinmektedir (Wolf, 1979). Burada, $\Lambda_r = \ldots, -1, -0,5, 0, 0,5, \ldots$ özfonksiyonun derecesidir. Yukarıdaki denklemin çözümü, $u > 0$ ve $u < 0$ için farklı, ayrık ve bağımsızdır ve $u_\pm$

$$u_+ = \begin{cases} u, & u > 0 \\ 0, & u \le 0 \end{cases} \qquad u_- = \begin{cases} 0, & u \ge 0 \\ -u, & u < 0 \end{cases} \tag{6.22}$$



Şekil 6.2 Repulsif osilatör dalga fonksiyonları $\chi_{\Lambda}^{\pm}(u)$ (bkz. (6.24)) (a) $\Lambda = -1$, (b) $\Lambda = -0,5$, (c) $\Lambda = 0$, (d) $\Lambda = 0,5$, (e) $\Lambda = 1$ ve (f) $\Lambda = 1,5$ dereceleri için gösterilmektedir. Düz: gerçel kısım, çizgili: sanal kısım.

şeklinde tanımlıdır. Kolaylıkla görülebilir ki,

$$\chi^{+}_{\Lambda_r}(u) = \chi^{-}_{\Lambda_r}(-u) \tag{6.23}$$

eşitliği yazılabilir. Repulsif osilatör fonksiyonları Whittaker'ın parabolik silindir fonksiyonları cinsinden

$$\chi^{\pm}_{\Lambda_r}(u) = C_{\Lambda_r} D_{j\Lambda_r - 1/2}\left(\mp 2^{1/2}\exp(j3\pi/4)u\right) \tag{6.24}$$
$$C_{\Lambda_r} = \frac{2^{-3/4}}{\pi}\exp(j\pi/8)\exp(\pi\Lambda_r/4)\Gamma(1/2 - j\Lambda_r)$$

olarak da ifade edilebilir (Wolf, 1979). Parabolik silindir fonksiyonları $D_\beta(u)$ ve gamma fonksiyonları $\Gamma(u)$ için bkz. (Abramowitz ve Stegun, 1972) (sırasıyla, sf. 685–700 ve sf. 255-263). Repulsif osilatör fonksiyonları dirac manasında tam ve dikgendir (Wolf, 1979). Bu fonksiyon kümesi, alternatif olarak

$$\chi^{\pm}_{\Lambda_r}(u) = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{1/2}\{u_{\pm}^{-j\Lambda_r - 1/2}\} \tag{6.25}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\mathcal{F}^{1/2}$, FD operatörünün karekökü, yani $a = 1/2$ dereceden KFD'dir. Bu da $\mathbf{M} = \{1/\sqrt{2}, 1\sqrt{2}, -1\sqrt{2}, 1\sqrt{2}\}$ parametreli DKD'ye denktir. Şekil 6.2'de repulsif osilatör fonksiyonları $\chi^{\pm}_{\Lambda}$, $\Lambda = -1,\ -0,5,\ 0,\ 0,5$ ve 1 derecelerinde çizdirilmiştir.

Bu kısımda, şimdiye kadar hiperbolik altgrubun özfonksiyonları üzerinde çalışıldı. Hiperbolik altgrubun özfonksiyonları bulunduktan sonra, $(a + d) > 2$ durumu için DKD'nin özfonksiyonlarını bulmak kolaydır. Bu nedenle DKD'yi şu şekilde ayrıştırıyoruz,

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh\alpha - \tau\sinh\alpha & -\sigma^2\sinh\alpha \\ (\tau^2 - 1)\sigma^{-2}\sinh\alpha & \cosh\alpha + \tau\sinh\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Burada $(a + d) = 2\cosh\alpha > 2$ olduğu açıktır (bkz. Özellik 6.1). $\mathbf{M}_{\mathbf{H}_r} = \{\cosh(\alpha), -\sinh(\alpha), -\sinh(\alpha), \cosh(\alpha)\}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonları repulsif osilatör fonksiyonları olduğundan, $(a + d) > 2$ koşulu için DKD'nin özfonksiyonları repulsif osilatör fonksiyonlarının $\{\sigma, 0, -\tau\sigma^{-1}, \sigma^{-1}\}$ parametreli DKD'sidir (Özellik 6.2). (6.1)'den de görülebileceği gibi bu parametreyle DKD almak sadece bir çörp çarpımı ve ölçeklemeden oluşmaktadır. Böylece, $(a + d) > 2$ koşulunda DKD'nin özfonksiyonları,

$$\begin{aligned}\chi^{\pm}_{\Lambda_r,\sigma,\tau}(u) &= \sigma^{-1/2}\exp\left(\frac{-j\tau}{2\sigma^2}\right)\chi^{\pm}_{\Lambda_r}(u/\sigma) \\ &= C_{\Lambda_r}\sigma^{-1/2}\exp\left(\frac{-j\tau}{2\sigma^2}\right)D_{j\Lambda_r - 1/2}\left(\mp 2^{1/2}\exp(j3\pi/4)u/\sigma\right)\end{aligned} \tag{6.27}$$

şeklindedir. C_{Λ_r} (6.24)'de verildiği gibidir. a, b, c, d ile τ, σ ve α arasındaki ilişki de,

$$\sigma^2 = \frac{2|b|}{\sqrt{(a+d)^2-4}}, \qquad \tau = \frac{(a-d)\mathrm{sgn}(b)}{\sqrt{(a+d)^2-4}}, \qquad \alpha = -\mathrm{arccosh}\left(\frac{a+d}{2}\right)\mathrm{sgn}(b). \tag{6.28}$$

şeklinde kolaylıkla bulunur.

6.2.3 $(a+d) < -2$ Durumu İçin DKD Özfonksiyonları

Bu kısımda $(a+d) < -2$ olduğunda DKD'nin özfonksiyonları tanıtılacaktır. $(a+d) < -2$ durumu için DKD'yi şu şekilde ayrıştırıyoruz,

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -\cosh\alpha + \tau\sinh\alpha & \sigma^2\sinh\alpha \\ (1-\tau^2)\sigma^{-2}\sinh\alpha & -\cosh\alpha - \tau\sinh\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Bir önceki kısımda da olduğu gibi önce $\mathbf{M}_{\mathbf{H}_{nr}} = \{-\cosh\alpha,\ \sinh\alpha,\ \sinh\alpha,\ -\cosh\alpha\}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonları bulunmalıdır. Bu parametreli DKD'nin de özfonksiyonları repulsif osilatör fonksiyonlarıdır, çünkü iki hiperbolik form

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} -\cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \\ &\quad= \begin{bmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.30}$$

olacak şekilde sırabağımsızdır, fakat özdeğerler farklıdır. Özetlemek gerekirse, bu tipteki hiperbolik formun da özfonksiyonları (6.24)'te verilen repulsif osilatör fonksiyonlarıdır. Bu nedenle (6.27), $(a+d) < -2$ koşulundaki DKD'nin de özfonksiyonudur. Fakat, a, b, c, d ile σ, τ ve α arasındaki ilişki bir öncekinden biraz farklıdır:

$$\sigma^2 = \frac{2|b|}{\sqrt{(a+d)^2-4}}, \qquad \tau = \frac{(a-d)\mathrm{sgn}(b)}{\sqrt{(a+d)^2-4}}, \qquad \alpha = \mathrm{arccosh}\left(-\frac{a+d}{2}\right)\mathrm{sgn}(b). \tag{6.31}$$

6.3 DKD Özfonksiyonlarını Üreten Diferansiyel Denklemler

Bu kısımda DKD'nin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklemler tantılacaktır.

6.3.1 Birinci Durum: $|a+d| < 2$

$|a+d| < 2$ olması koşuluyla herhangi bir $\mathbf{M}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklem

$$\sigma^2 \frac{\mathrm{d}^2 f(u)}{\mathrm{d}u} + \left(\frac{1-\tau^2}{\sigma^2}\right) u^2 f(u) + j\tau\left(2u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} + 1\right) f(u) = -(2n+1)f(u) \tag{6.32}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklindedir. Bu denklemin çözümü, (6.16)'de verilen genelleştirilmiş Hermite–Gauss fonksiyonlarıdır. Burada, σ ve τ ile, $\mathbf{M}$'in $\{a, b, c, d\}$ parametreleri arasındaki ilişki (6.17)'de verilmiştir.

İspat. Özellik 6.2'ye tekrar bakıldığında şu yargıya varılabilir: Eğer 2×2'lik $\mathbf{M}$ parametre matrisi $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1^{-1}$ şeklinde ayrıştırılabiliyorsa ve $e(u)$, $\mathbf{M}_2$ parametreli DKD'nin özfonksiyonuysa, $\mathcal{C}_{\mathbf{M}_1}(e)(u)$, $\mathbf{M}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonudur. Diferansiyel denklemin çıkarımında, $|a + d| < 2$ durumu için $\mathbf{M}$ matrisini (6.16)'daki gibi ayrıştırılmaktadır. Hermite–Gauss fonksiyonları $\{\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ -\sin\alpha,\ \cos\alpha\}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonu olduğundan $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ -\tau\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{bmatrix}^{-1}$ parametreli DKD'nin özfonksiyonu,

$$\phi_n^{(\sigma,\tau)}(u) = \mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) \tag{6.33}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{M}' = \{\sigma, 0, -\tau\sigma^{-1}, \sigma^{-1}\}$ olmaktadır. Eğer (6.3)'te verilen Hermite–Gauss üreten diferansiyel denklemin her iki tarafının da $\mathbf{M}'$ parametreli DKD'si alınırsa (6.32) denklemi elde edilir. (6.3)'ün her iki tarafının da DKD'si alınırsa,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\left\{\frac{\mathrm{d}^2\psi_n}{\mathrm{d}u^2} - u^2\psi_n\right\}(u) = (2n+1)\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u). \tag{6.34}$$

elde etmektedir, ki yukarıdaki denklemin sol tarafının (6.32) olduğu açıktır. DKD'nin türev alma ve uzamsal çarpmayla ilgili olan Özellik 6.3 ve 6.4 kulanılarak ve $\{a = \sigma, b = 0, c = -\tau\sigma^{-1}, d = \sigma^{-1}\}$ yerine konularak,

$$-\left[\tau\sigma^{-1}u - j\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right]^2 \mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) - [\sigma^{-1}u]^2\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) = (2n+1)\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) \tag{6.35}$$

denklemi kolaylıkla elde edilebilir. Yukarıdaki denklem

$$\left[\sigma^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u} - (\tau^2+1)\sigma^{-2}u^2 + j\tau\left(u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u\right)\right]\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) = -(2n+1)\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) \tag{6.36}$$

şeklinde kısaltılabilir. Gerekli bir takım kısaltmalar daha yapılırsa

$$\left[\sigma^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u} - \left(\frac{\tau^2+1}{\sigma^2}\right)u^2 + j\tau\left(2u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} + 1\right)\right]\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) = -(2n+1)\mathcal{C}_{\mathbf{M}'}\{\psi_n\}(u) \tag{6.37}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin başka bir ispatı, her iki tarafa da (6.16)'da verilen özfonksiyonlar konularak yapılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

6.3.2 İkinci Durum: $|a+d| < 2$

$|a+d| > 2$ olduğu durumda DKD'nin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklem

$$\sigma^2 \frac{\mathrm{d}^2 f(u)}{\mathrm{d}u^2} + \left(\frac{1-\tau^2}{\sigma^2}\right) + j\tau\left(2u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right) f(u) = -\frac{n+1}{2} f(u), \qquad (6.38)$$
$$n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

şeklindedir. Burada σ ve τ, $(a+d) > 2$ için (6.28)'deki gibi, $(a+d) < -2$ için ise (6.31)'deki gibidir.

İspat. Repulsif osilatör fonksiyonlarını üreten diferansiyel denklem

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(u)}{\mathrm{d}u^2} + u^2 f(u) = -\frac{n+1}{2} f(u), \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

şeklindedir (Wolf, 1979). Yukarıdaki denklem aynı zamanda $\{\cosh\alpha, -\sinh\alpha, -\sinh\alpha, \cosh\alpha\}$ veya $\{-\cosh\alpha, \sinh\alpha, \sinh\alpha, -\cosh\alpha\}$ parametreli DKD'lerin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklemdir, çünkü bu parametreli DKD'lerin özfonksiyonları repulsif osilatör fonksiyonlarıdır. Bu diferansiyel denklemin her iki tarafının da $\{\sigma, 0, -\tau\sigma^{-1}, \sigma^{-1}\}$ parametreli DKD'si, bir önceki kısımdaki gibi Özellik 6.3 ve 6.4'ten faydalanılarak

$$\sigma^2 \frac{\mathrm{d}^2 f(u)}{\mathrm{d}u^2} + \left(\frac{1-\tau^2}{\sigma^2}\right) + j\tau\left(2u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right) f(u) = -\frac{n+1}{2} f(u) \qquad (6.39)$$

olarak bulunur. Tabii ki, $(a+d) > 2$ ve $(a+d) < -2$ için σ ile τ, sırasıyla (6.28) ve (6.31)'deki gibi tanımlanmalıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\square$

6.4 Sonuçlar

Bu kısımda DKD'nin özfonksiyonları ve bunları üreten diferansiyel denklemler bulunmuştur. Özfonksiyonlar bulunurken, DKD parametrelerinden a ve d'nin aldığı değerlere göre üçe ayrılmıştır: $|a+d| < 2$, $(a+d) > 2$ ve $(a+d) < -2$. Daha önce yapılan çalışmalarda $|a+d| < 2$ olduğunda DKD özfonksiyonlarının bir çörple çarpılmış Hermite–Gauss fonksiyonlarının ölçeklenmiş hali olduğu gösterilmiştir. Biz de bu çalışmada $(a+d) > 2$ ve $(a+d) < -2$ durumlarında DKD özfonksiyonlarının bir çörple çarpılmış repulsif osilatör fonksiyonlarının ölçeklenmiş hali olduğunu gösterdik. Bununla birlikte $(a+d) > 2$ ve $(a+d) < -2$ durumlarındaki DKD özfonksiyonları arasındaki tek farkın, özfonksiyon parametreleriyle $\{a, b, c, d\}$ parametreleri arasındaki fark olduğu da gösterilmiştir.

Hermite–Gauss ve repulsif osilatör fonksiyonları üreten diferansiyel denklemler ile DKD özellikleri kullanılarak hem $|a + d| < 2$, hem de $|a + d| > 2$ durumları için ayrı ayrı DKD özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklemler bulunmuştur.

7 SONUÇLAR

Bu tezde ilk olarak *sadece* MAFD matrisi ve onun katlarını kullanan yeni bir AKFD matrisi tanıtılmıştır. Böylece, MAFD matrisinin Hermite–Gauss benzeri özvektörleri kolay, fakat şık bir yöntemle elde edilmiştir. Daha sonra da bir **K** AFD–kaydırma permütasyon matrisi kullanılarak AKFD matrisi de elde edilmiş, elde edilen AKFD matrislerinin sürekli KFD'nin özelliklerini sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra da elde edilen AFD özvektörleri kullanılarak bir AFD sırabağımsız matris üretilmiştir. Üretilen AFD sırabağımsız matris, var olan diğer AFD sırabağımsız matrislerle uygun bir şekilde birleştirilerek daha iyi AFD sırabağımsız matrisler elde edilmiştir. Burada *iyi* sözcüğünden kasıt özvektörlerin Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine yakın olmasıdır. Önerilen algoritmanın geçerliliği bilgisayar benzetimleriyle ve var olan diğer yöntemlerle karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

İkinci olarak da çift doğrusal dönüşümün türevi modellemesinden esinlenilerek AFD matrisinin özvektörleri bulunmuştur. Çift doğrusal dönüşüm, analog s bölgesindeki $j\omega$'yı, ayrık z bölgesindeki birim çembere birebir ve örtüşme olmadan eşleştirmektedir. Bu nedenle FD'nin ayrık özvektörlerini bulmak için uygun bir araç olmaktadır. Çift–doğrusal dönüşüm kullanarak, ikinci dereceden türev modellenmiş ve Hermite–Gauss benzeri AFD özvektörleri bulunmuştur. Özvektörler bulunurken üç değişik yöntem ileri sürülmüş ve bu yöntemlerin kararlılıkları incelenmiştir. Bu yöntemler, daha iyi koşullanmış ve yüksek mertebeden AFD sırabağımsız matris üretim yöntemlerini de içermektedir. Elde edilen sonuçlar, bilgisayar benzetimleriyle doğrulanmıştır. Önerilen bu yöntem, literatürde bulunan diğer AKFD tanımlamalarından çok farklıdır. Bu nedenle, ileride önerilebilecek hızlı veya hesaplama karmaşıklığı bulunmayan ve daha *iyi* AKFD tanımlamaları için temel teşkil edebilir.

Üçüncü çalışmada da ikinci dereceden türeve sonsuz dereceden Taylor yaklaşıklığı yapılarak mükemmel bir ayrık, ikinci dereceden türev matrisinin kapalı hali elde edilmiştir. Sonsuz yaklaşıklıklığın, ikinci türev matrisine ikinci dereceden Taylor yaklaşıklığının trigonometrik bir fonksiyonu olduğu gösterilmiş ve ispatlanmıştır. Bu sonsuz yaklaşıklık, mükemmel AFD sırabağımsız matrisi üretiminde kullanılmıştır. Bu AFD sırabağımsız matrisler, Hermite–Gauss fonksiyonlarının örneklerine çok yakın özvektörler üretmektedir. Üretilen özvektörlerin, şimdiye kadar üretilen özvektörlerden hem iyi olduğu, hem de hesaplama karmaşıklığı ve zorluğu olmadığı da gösterilmiştir.

Bir uygulama olarak KFD bölgesinde ardışıl izdüşümler tekniği kullanılarak işaret ve görüntü geri elde edimi yapılmıştır. Bir kısmı eksik olan işaret değişik dışbükey kümeler üzerine ardışıl olarak izdüşürülerek eksik kısmın geri elde edilmesi amaçlanmıştır. Durağan olmayan işaretin önce optimum KFD bölgesi kestirilmiş, kestirilen bölgede işaretin eksik kısmı AİT ile geri elde edilmiştir. Durağan olmayan işaretler için optimum KFD bölgesi AİT'nin, geleneksel Fourier bölgesi AİT yöntemine göre daha başarılı olduğu gösterilmiştir. Önerilen yöntem, sentetik bir DFM işareti, bir yarasa ekolokasyon işareti ve iki boyutlu görüntüler üzerinde denenmiş ve geleneksel yöntemlere göre daha başarılı olduğu gösterilmiştir. İşaret ve görüntü geri elde edim yöntemi olarak sunulan bu yöntem, ara değerleme ve dış değerleme problemlerine değiştirilmeden uygulanabilir. Bununla birlikte önerilen optimum KFD bölgesi çözümü, farklı dışbükey küme tanımlama imkanı olan problemler için, problemin cinsine göre, optimum çözümler getirebilir.

Bu tezde, son olarak DKD'nin özfonksiyonları bulunmuştur. DKD'nin, $|a + d| < 2$ için özfonksiyonlarının bir çörple modüle edilmiş, ölçeklenmiş Hermite–Gauss fonksiyonları olduğu bilinmektedir. Fakat, daha önce yapılan çalışmalarda $|a + d| > 2$ durumunda özfonksiyonlar tanımlanmamıştır. Biz, özgün olarak $|a + d| > 2$ durumunda DKD özfonksiyonlarının çörple modüle edilmiş Hermite–Gauss fonksiyonları olduğunu göstermiş bulunmaktayız. Bununla birlikte, DKD'nin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklemler de daha önce tanımlanmamıştır. Yine tezin son bölümünde, hem $|a + d| > 2$ için, hem de $|a + d| < 2$ için DKD özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklemler tanımlanmıştır.

Bu tezin üçüncü bölümündeki AKFD tanımlaması, ikinci türev matrisinin sonsuz dereceden yaklaşıklığı elde edilerek geliştirilmiştir. Bu nedenle, sürekli KFD'nin örneklerine daha iyi yakınsayan bir AKFD tanımlaması elde etmek mümkün değildir. Tezde önerdiğimiz yöntemde AKFD, $O(N^2)$ karmaşık çarpma ve hesaplama gerektirmektedir. *Mükemmel* AKFD elde edildiğinden, bu konudaki gelecek çalışmalar hızlı AKFD hesaplamaları olabilir. Bununla birlikte AKFD matrisinin hesaplanması, Bölüm 4'te verilen *mükemmel* sırabağımsız matrisin özvektörlerinin bulunmasını gerektirmektedir. Bu matris, bir köşegen matris ve bir dairesel matrisin toplamına eşittir. Yine gelecek çalışmalar, bu matrisin özvektörlerinin açık formunun hesaplanması, ya da özvektörlerin hızlı hesaplanması olabilir.

Tezin son bölümünde ise DKD'nin özfonksiyonları ve bu özfonksiyonları üreten diferansiyel denklemler verilmiştir. Nasıl ki, AKFD ile sırabağımsız matrisler Hermite–Gauss üreten diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılması sonucu elde edilebiliyorsa, gelecek çalışmalarda DKD'nin özfonksiyonlarını üreten diferansiyel denklemler ayrıklaştırılarak ayrık DKD tanımlamaları geliştirilebilir. Bununla birlikte bazı optik ortamlar ve zaman–frekans analizinde DKD'nin özfonksiyonları doğrusal dönüşümlerden etkilenmediğinden bir takım uygulama alanları bulabilir.

KAYNAKLAR

Abe S. ve Sheridan J. T. (1994), “Generalization of the fractional Fourier transformation to an arbitrary linear lossless transformation: An operator approach”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 27:4179–4187.

Abramowitz M. ve Stegun I. A. D. (1972), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, New York.

Akay O. ve Boudreaux-Bartels G. F. (2001), “Fractional convolution and correlation via operator methods and an application to detection of linear FM signals”, IEEE Transactions on Signal Processing, 49:979–993.

Ameida L. B. (1994), “The fractional Fourier transform and time–frequency representations”, IEEE Transactions on Signal Processing, 42:3084–3091.

Audet C. ve Dennis Jr J. E. (2002), “Analysis of generalized pattern searches”, SIAM Journal on Optimization, 13:889–903.

Baker J. E. (1987), “Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm”, Proceedings of Second International Conference on Genetic Algorithms and Their Application, 2:14–21.

Bastiaans M. J. (1979), “Wigner distribution and its application to first-order optics”, Journal of Optical Society of America A, 69:1710–1716.

Bastiaans M. J. (1989), “Propagation laws for the second–order moments of the Wigner distribution function in first–order optical systems”, Optik, 82:173–181.

Bauschke H. B. ve Borwein J. M. (1996), “On projection algorithms for solving convex feasibility problems”, SIAM Review, 38:367–426.

Blickle T. ve Thiele L. (1995), “A comparison of selection schemes used in genetic algorithms”, TIK-Report, Computer Engineering and Communication Networks Lab., Swiss Federal Institute of Technology, 11.

Bose N. ve Prabhu K. (1979), “Two–dimensional discrete Hilbert transform and computational complexity aspects in its implementation”, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 27:356–360.

Bose N. K. (2001), “Eigenvectors and eigenvalues of 1–D and n–D DFT matrices”, AEÜ International Journal of Electronics Communication, 55:131–133.

Candan C. (2007), “On higher order approximations for Hermite–Gaussian functions and discrete fractional Fourier transforms”, IEEE Signal Processing Letters, 14:669–702.

Candan C., Kutay M. A., ve Özaktaş H. M. (2000), “The discrete fractional Fourier transform”, IEEE Transactions Signal Processing, 48:1329–1337.

Cetin A. E., Özaktaş H., ve Özaktaş H. M. (2003), “Resolution enhancement of low resolution wavefields with POCS algorithm”, Electronics Letters, 39:1808–1810.

Cohen L. (1989), “Time–frequency distributions–A review”, Proceedings of the IEEE, 77: 941–981.

Combettes P. L. (1993), “The foundations of set theoretic estimation”, Proceedings of the IEEE, 81:182–208.

Combettes P. L. (1996), The convex feasibility problem in image recovery, Der, P. Hawkes: Advances in imaging and electron physics, Academic Press, New York.

Dickinson B. ve Steiglitz K. (1982), “Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform”, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 30:25–31.

Dolled-Filhart M., Ryden L., Cregger M., Jirstrom K., Harigopal M., Camp D. L., ve Rimm D. L. (2006), “Classification of breast cancer using genetic algorithms and tissue microarrays”, Clinical Cancer Research, 12:6459–6468.

Durak L. (2009), Time–frequency analysis: Novel techniques for deterministic signals, VDM Verlag, Almanya.

Durak L. ve Arıkan O. (2003), “Short–time fourier transform: Two fundamental properties and an optimal implementation”, IEEE Transactions on Signal Processing, 51:1231–1242.

Erden M. F., Kutay M. A., ve Ozaktas H. M. (1999), “Repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains and its applications to signal restoration”, IEEE Transactions on Signal Processing, 47:1458–1462.

Gerchberg R. W. (1974), “Super–resolution through error energy reduction”, Optica Acta, 21:709–720.

Goldberg D. (1989), Genetic Algorithms in Search, Optimzation and Machine Learning, Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts.

Goldberg D. ve Kendall G. (2005), Genetic Algorithms, Der, E. K. Burke ve G. Kendall: Search methodologies: Introductory tutorials in optimization and decision support technicques, Springer, New York.

Goldburg M. ve Marks II R. (1985), “Signal synthesis in the presence of an inconsistent set of constraints”, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 32:647–663.

Golub G. H. ve Van Loan C. F. (1996), Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, Londra.

Grünbaum F. A. (1982), “The eigenvectors of the discrete Fourier transform: A version of the Hermite functions”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 88:355–363.

Guven H. E., Ozaktas H. M., Cetin A. E., ve Barshan B. (2008), “Signal recovery from partial fractional Fourier domain information and its applications”, IET Signal Processing, 2:15–25.

Hanna M. T., Seif N. P. A., ve Ahmed W. A. E. M. (2004), “Hermite–Gaussian-like eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix based on the singular–value decomposition of its orthogonal projection matrices”, IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Regular Papers, 51:2245–2254.

Haupt R. L. ve Werner D. H. (2007), Genetic Algorithms in electromagnetics, IEEE Press, Pennsylvania.

Hlawatsch F. ve Bourdeaux-Bartels G. F. (1992), “Linear and quadratic time–frequency signal representations”, IEEE Signal Processing Magazine, 9:21–67.

James D. F. V. ve Agarwa G. S. (1996), “The generalized Fresnel transform and its applications to optics”, Optics Communications, 126:207–212.

Jorge P. ve Ferreira S. G. (2003), “Interpolation and the discrete Papoulis–Gerchberg algorithm”, IEEE Transactions on Signal Processing, 42:2596–2606.

Jun-Su J. ve Jong-Hwan K. (2008), “Fast and robust face detection using evoutionary pursuit”, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 12:542–561.

Kutay M. A., Özaktaş H. M., Arıkan O., ve Onural L. (1997), “Optimal filtering in fractional Fourier domains”, IEEE Transactions on Signal Processing, 54:1129–1142.

Lohmann A. W. ve Soffer B. H. (1994), “Relationship between the Radon–Wigner and fractional fourier transforms”, Journal of Optical Society of America A, 11:1798–1801.

Marks II R. (1984), Alternating projections onto convex sets, Der, P. A. Jansson: Deconvolution in images and spectra, Academic Press, New York.

Mendlovic D., Özaktaş H. M., ve Lohmann A. W. (1993), “Fractional Fourier transforms and their optical implementation”, Journal of Optical Society of America A, 10:1875–1881.

Mendlovic D., Özaktaş H. M., ve Lohmann A. W. (1995), “Fractional correlation”, Applied Optics, 34:303–309.

Mugler D. H. ve Clary S. (2001), “Discrete Hermite functions and the fractional Fourier transform”, Proceedings of the International Conference on Sampling Theory and Applications, pages 303–308.

Mustard D. (1996), “The fractional Fourier transform and the Wigner distribution”, Journal of Australian Mathematical Society Series B., 38:209–219.

Nazarathy M. ve Shamir J. (1982), “First order optics–a canonical approach: Lossless systems”, Journal of Optical Society of America A, 72:356–364.

Oonincx P. J. (2008), “Joint time-frequency offset detection using the fractional Fourier transform”, IEEE Transactions on Signal Processing, 88:2936–2942.

Ozaktas H. M. ve Mendlovic D. (1993), “Fractional Fourier transforms and their optical implementation”, Journal of Optical Society of America A, 10:2522–2531.

Ozaktas H. M., Barshan B., Mendlovic D., ve Onural L. (1994), “Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms”, Journal of Optical Society of America A, 11:547–559.

Ozaktas H. M., Arıkan O., Kutay M. A., ve Bozdağı G. (1996), “Digital computation of the fractional Fourier transform”, IEEE Transactions on Signal Processing, 44:2141–2150.

Ozaktas H. M., Zalevski Z., ve Kutay M. A. (2001), The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing, Wiley and Sons, New York.

Papoulis A. (1975), “A new algorithm in spectral analysis and band limited signal analysis”, IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS–22:735–742.

Park J., Park D. C., Marks II R. J., ve El-Sharkawi E. S. (2005), “Recovery of image blocks using the method of alternating projections”, IEEE Transactions on Image Processing, 14: 461–475.

Pei S. C. ve Ding J. J. (2002), “Eigenfunctions of the Linear Canonical Transform”, IEEE Transactions on Signal Processing, 50:11–26.

Pei S. C. ve Yeh M. H. (1998), “Two dimensional discrete fractional Fourier transform”, Signal Processing, 67:105–109.

Pei S. C., Yeh M. H., ve Tseng C. C. (1999), “Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections”, IEEE Transactions on Signal Processing, 47:1335–1348.

Pei S. C., Hsue V. L., ve Ding J. J. (2006), “Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices”, IEEE Transactions on Signal Processing, 54:3815–3828.

Pei S. C., Ding J. J., Hsue W. L., ve Chang K. W. (2008), “Generalized commuting matrices and their eigenvectors for DFTs, offset DFTs, and other periodic operations”, IEEE Transactions on Signal Processing, 56:3891–3904.

Pei S. C., Ding J. J., ve Hsue V. L. (2009), “DFT–commuting matrix with arbitrary or infinite order second derivative approximation”, IEEE Transactions on Signal Processing, 57:390–394.

Pond S. L. K., Posada D., Gravenor M. B., Woelk C. H., ve Frost S. D. W. (2006), “Automated phylogenetic detection of recombination using genetic algorithm”, Molecular Biology and Evolution, 23:1891–1901.

Salek-Haddahi A., Friston K. J., Lemieux L., ve Fish D. R. (2003), “Studying spontaneuos EEG activity with fMRI”, Brain Research Reviews, 43:110–133.

Santhanam B. ve McClellan J. H. (1996), “The discrete rotational Fourier transform”, IEEE Transactions on Signal Processing, 44:994–998.

Santhanam B. ve Santhanam T. S. (2007), “Discrete Gauss–Hermite functions and eigenvectors of the centered discrete Fourier transform”, Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pages 1385–1388.

Serbes A. ve Durak L. (2009), “Optimum signal and image recovery by the method of alternating projections in fractional Fourier domains”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15:675–689.

Serbes A. ve Durak-Ata L. (2010), “Eigenvectors of the discrete Fourier transform based on the bilinear transform”, EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010:7 sayfa.

Serbes A. ve Durak-Ata L. (2011a), “The discrete fractional Fourier transform based on the DFT matrix”, Signal Processing, 91:571–581.

Serbes A. ve Durak-Ata L. (2011b), “Efficient computation of DFT commuting matrices by a closed-form infinite order approximation to the second differentiation matrix”, Signal Processing, 91:582–589.

Sezan M. I. ve Stark H. (1984), “Tomographic image reconstructiono from incomplete view data by convex projections and direct Fourier method”, IEEE Transactions on Medical Imaging, MI–3:91–98.

Sharma K. K. ve Joshi S. D. (2007a), “Time delay estimation using fractional Fourier transform”, Signal Processing, 87:853–865.

Sharma K. K. ve Joshi S. D. (2008), “Extrapolation of signals using the method of alternating projections in fractional Fourier domains”, Signal, Image and Video Processing, 2:177–182.

Sharma K. K. ve Joshi S. D. (2007b), “Papoulis–like generalized sampling expansions in fractional Fourier domains and their application to supperresolution”, Optics Communications, 278:52–59.

Sharma S. N., Saxena R., ve Saxena S. C. (2007), “Tuning of FIR filter transition bandwidth using fractional Fourier transform”, Signal Processing, 80:1501–1513.

Sun H. ve Kwok W. (1995), “Concealment of damaged block transform coded images using projections onto convex sets”, IEEE Transactions on Image Processing, 4:470–477.

Tang K. S., Man K. F., Kwong S., ve He Q. H. (1996), “Genetic algorithms and their applications”, IEEE Signal Processing Magazine, 13:22–37.

Thierens D. (1997), “Selection schemes, elitist recombination, and selection intensity”, Proceedings of 7th International Conference on Genetic Algorithms, 7:152–159.

Thierens D. ve Goldberg D. E. (1994), “Elitist recombination: An integrated selection recombination GA”, Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence, 1:508–512.

Thomas A. J., Moss C. F., ve Vater M. (2004), Echolocation in bats and dolphins, The University of Chicago Press, London.

Vargas-Rubio J. G. ve Santhanam B. (2005), "On the multiangle centered discrete fractional Fourier transform", IEEE Signal Processing Letters, 12:273–276.

Verbiest W., Pinoo L., ve Voeten B. (1988), "The impact of ATM concept in video coding", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 7:739–751.

Vijaya C. ve Bhat J. S. (2006), "Signal compression using discrete fractional Fourier transform and set partitioning in hierarchical tree", Signal Processing, 86:1976–1983.

Wolf K. B. (1979), Integral transforms in science and engineering, Plenum Press, New York.

Xia X. (1996), "On bandlimited signal with fractional Fourier transform", IEEE Signal Processing Letters, 3:72–74.

Youla D. C. ve Webb H. (1982a), "Image restoration by the method of convex projections: Part 1–Theory", IEEE Transactions on Medical Imaging, MI–1:81–94.

Youla D. C. ve Webb H. (1982b), "Image restoration by the method of convex projections: Part 2–Applications and numerical results", IEEE Transactions on Medical Imaging, MI–1: 95–101.

Zayed A. (1998), "A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform", IEEE Signal Processing Letters, 5:101–103.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	08.04.1981	
Doğum yeri	Adana	
Lise	1991–1998	Ümraniye Anadolu Lisesi
Lisans	1998–2002	İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik–Elektronik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2002–2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Müh. Anabilim Dalı Haberleşme Programı

Çalıştığı kurumlar

	2004–2005	Bahçeşehir Üniversitesi
	2006-Devam ediyor	YTÜ Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü Araştırma Görevlisi