

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Soft-Hard bir Sil, Şer., Üze, Ard. Kiri
Sonucu Oluşan Akımlar

Doktora Tezi

Çintay Göksu

1987

ef
HM
34
987

R 152
80

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

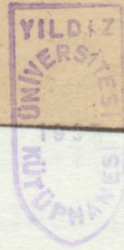
SOFT-HARD BİR SİLİNDİRİK ŞERİT ÜZERİNDE ARDIŞIK KIRINIM
SONUCU OLUŞAN AKIMLAR

DOKTORA TEZİ
YÜK. MÜH. ÇİNTAY GÖKSU

İSTANBUL 1987

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : R 152
Alındığı Yer : Fen Bil. Enst. 80
Tarih : 8.5.1991
Fatura :
Fiatı : 5000. TL
Ayniyat No : 1/3
Kayıt No : 47620
UDC : 621.3 378.242
Ek :





YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT-HARD BİR SİLİNDİRİK ŞERİT ÜZERİNDE ARDIŞIK KIRINIM
SONUCU OLUŞAN AKIMLAR



DOKTORA TEZİ
YÜK. MÜH. ÇİNTAY GÖKSU

İSTANBUL 1987

Bu tezin ortaya çıkmasını olanaklı kılan yöneticim Sayın
Doç. Dr. Z. Filiz GÜNEŞ ile Sayın Yrd. Doç. Dr. Alınur BÜYÜKAKSOY'a en
derin teşekkürlerimi ifade etmek isterim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

GİRİŞ

TEZİN KONUSU VE ÖNEMİ 1

BÖLÜM I

PROBLEMİN FORMÜLASYONU 8

1.1. ESAS PROBLEM 8

1.2. DENK KANONİK PROBLEM 12

1.3. KANONİK PROBLEMİN BİR ÜÇ PARÇALI MATRİS HİLBERT PROBLEMİNE
İNDİRGENMESİ 13

1.4. MATRİS VE ÜÇ PARÇALI OLUŞUN ORTAYA ÇIKARDIĞI GÜÇLÜKLER 15

1.5. HİLBERT PROBLEMİNİN ASİMTOTİK FORMU 16

1.6. BİRİNCİ VE İKİNCİ FAKTORİZASYONUN HURD-WILLIAMS-RAWLINS
YÖNTEMİYLE BULUNMASI 18

1.7. HİLBERT PROBLEMİNİN BİR FREDHOLM INTEGRAL SİSTEMİNE
DÖNÜŞTÜRÜLMESİ 21

1.8. Q_1^- NİN EYER NOKTASI YÖNTEMİYLE DEĞERLENDİRİLMESİ VE
PROBLEMİN İRDELENMESİ 23

1.9. Q_2^+ NİN REZİDÜ YÖNTEMİYLE DEĞERLENDİRİLMESİ	26
1.10. BİR LEMMA	27
1.11. FREDHOLM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ	29

BÖLÜM 2

ARDIŞIK KİRİNİMLARIN YÜZEY ÜZERİNDE OLUŞTURDUĞU AKIMLAR

VE FİZİKSEL YORUMLARI	32
2.1. AKIMLARIN İNTEGRAL İFADESİ	32
2.2. AKIMLARIN ASİMTOTİK İFADELERİ	33
2.3. AKIM BİLEŞENLERİNİN FİZİKSEL YORUMU	34

BÖLÜM 3

TARTIŞMA VE SONUÇ	41
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

ÖZET

Bu çalışmada bir yüzü manyetik bakımdan mükemmel iletken, diğer yüzü de elektrik bakımdan mükemmel iletken olan dairesel silindirik bir şerit üzerinde ardışık kırınımın oluşturduğu çok yüksek frekanslı akımlar incelenmiştir. Akımları oluşturan dalgaların, sonsuz uzun ve silindire paralel, sinüzoidal çizgisel bir akım kaynağı tarafından uyarıldığı varsayılmıştır.

Girişte kırınım olgusunun kısa bir tarihçesi verilmiş ve Kırınımın Geometrik Optik Teorisi (KGOT), Fizik Optik Teorisi (KFOT) ve Kanonik Problem kavramına değinilerek bu çalışmayı önceleyen tarihsel gelişmeler özetlenmiştir.

Bölüm 1, problemin formülasyonu ve genişletilmiş açısal uzayda ifade edilen denk kanonik problemin ortaya çıkardığı üç parçalı matris Hilbert Probleminin çözümüne ayrılmıştır. Hilbert probleminin çok yüksek frekanslar için asimtotik olarak değerlendirilmesiyle, çekirdek matrisin faktörizasyonu ve problemin bir integral denklem sistemine indirgenerek asimtotik çözümlerinin elde edilmesi bu bölümde incelenmiştir. Ayrıtın biri doğrudan kaynak tarafından aydınlatıldığı, diğer ayrıtın ise kaynağı görmediği bir geometri seçilerek hem yüzey, hem ayrıt kırınımı olgusu aynı problem içinde incelenmiştir.

Bölüm 2 de Hilbert probleminin çözümünden yararlanarak yüzey üzerinde oluşan elektrik ve manyetik akımların açık ifadeleri bulunmuş ve bunların fiziksel yorumları yapılmıştır. Bu amaçla önce akımların integral ifadeleri verilmiş sonra da bunların asimtotik çözümleri elde edilmiştir. KGT den yararlanarak bu akımların fiziksel olarak dominant akımların sonsuz ardışık kırınımlarını ifade etmekte olduğu gösterilmiştir. Yüzey ve ayrıt kırınımı sonucu oluşan akımların ardışık kırınımlarını birbirine bağlayan akım dönüşüm katsayıları verilerek, bunların daima aynı kurala uymakta olduğu (İdemen Konjektörü-Öngörüsü) analitik olarak kanıtlanmıştır.

SUMMARY

In this study the high frequency surface currents induced on a soft-hard cylindrical strip due to the successive diffraction are investigated. An infinitely long thin wire, parallel to the strip carrying the sinusoidal current is taken as the source.

In the introduction after a short history of the diffraction phenomenon, Geometrical and Physical Theories (GTD, PTD), as well as the concept of the equivalent canonical problem are briefly surveyed.

Chapter 1 includes the formulation of the problem, the equivalent canonical problem expressed in the extended angular space and the solution of the resulting modified matrix Hilbert Problem. The asymptotical evaluation of the Hilbert Problem, the factorization of the kernel matrix and reducing it to a system of integral equations are handled in this chapter. The geometry is chosen in a fashion that one edge is directly illuminated by the source while the other is not, so that both the surface and the edge diffraction can be studied in the same problem.

In the Chapter 2 the electric and magnetic currents induced on the surface are first found by using the results of the previous chapter and then their physical interpretation are given. These currents are shown to represent the infinite successive diffractions from the edges. The current transformation coefficients connecting the two successive diffraction for both the edge and surface diffraction are given, as a result of this they are proved to obey the same rule (the Idemen Conjecture).

In the Chapter 3 the results and findings are discussed.

GİRİŞ

TEZİN KONUSU VE ÖNEMİ

Saçılma (scattering) kavramı, bir dalganın yayılması sırasında ortamda bulunan cisimlerin veya süreksizliklerin varlığı nedeniyle ortaya çıkan alanın gelen dalga dışındaki terimleri için, kırınım (diffraction) ise ışınsal gösterimin mümkün olduğu yüksek frekanslı dalgaların çeşitli bileşenlerinin ifadesinde (ayrıt kırınımı, yüzey kırınımı vb.) kullanılır.

Bu tür dalgaların incelenmesinde matematiksel olarak büyük güçlükler çıkar. Örneğin böyle problemlerin en basiti olan mükemmel iletken yarım düzlemi ele alalım: Yarım düzlem pozitif x ekseni boyunca xz düzleminde yer alsın. Elektrik alanı yarım düzleme paralel ve silindirik simetri gösteriyorsa $E = H_{n/2}^{(1)}(kr) \sin n\phi / 2$ her n için dalga denklemini, sınır şartlarını ve radyasyon koşulunu sağlar. Görülüyorki sadece sınır şartları Maxwell denklemlerinin çözümünün tekliğini garanti etmemektedir. Anlaşılyorki geometrik ve fiziksel süreksizliklerin varlığı karşımıza yeni problemler çıkarmaktadır.

Hangi şartların problemin çözümünün tekliğini garanti ettiği dalga teorisi açısından önemlidir. Bu konuda ilk adım Rellich tarafından 1943 te kendi adıyla anılan bir teoremlle atılmış, daha sonra çözümün tekliğini sağlayan koşullara ilişkin bir çok teoreml verilmiştir (Örneğin bkz.ref.[1]).

Fakat bunların hiçbirisi bu tek olan çözümün nasıl bulunabileceği konusunda bilgi vermez. Problemin çözümü için gerekli olan bu ek koşullar ayırıt koşulları olarak bilinirler ve alanın ayırıtla yakınında nasıl davrandığını ifade ederler.

Sonucu açıkça verilmemiş olmakla birlikte bir difraksiyon probleminin çözümünün bir integral dönüşümüyle nasıl elde edilebileceği ilk kez 1897 de Poincaré tarafından işaret edilmiştir. Yüzyılımızın başında ise mü-kemmel iletken yarım düzlem problemi Sommerfeld tarafından çözülmüştür. Sommerfeld'e göre ayırıtla söz konusu olduğu bir saçılma probleminin çözümü Maxwell denklemlerinin çok değerli çözümleri arasındadır [2]. Kullandığı yöntem Riemann yapraklarının kullanılmasına dayanır. Fakat bu yaklaşım başka türlü kırınım problemlerinin çözümünün bulunmasına imkân vermemiştir.

Görüldüğü gibi kırınım teorisinde uzun yıllar bir iki istisna dışında hemen hemen hiç bir problem çözülememiştir. Bu konuda en önemli devrim Wiener-Hopf Tekniği'nin bulunmasıdır [1931]. Copson ve ondan bağımsız olarak da Shwinger 1946 da kırınım teorisinde ortaya çıkacak bazı problemlerin bu teknikle çözülebileceğine işaret etmişlerdir [1].

Wiener-Hopf tekniği sayesinde daha önce incelenmemiş birçok problem hem kesin hem de yaklaşık çözümler olarak iyi bir şekilde çözülmesi mümkün hale gelmiştir. Nitekim bu tez çalışması da bu yaklaşımdan hareket ederek, metodun gücü ve önemi hakkında bir fikir verecektir. Fakat Wiener-Hopf Tekniği her çeşit geometrik yapıdaki sistemlere uygulanamaz.

Daha genel problemler için yaklaşık çözümler alternatif bir yol olarak görünmektedir. Buna ek olarak, radarın keşfiyle beraber 50 li yıllarda elektromanyetik spektrumun, mikrodalga ve daha yukarı frekanslarda

uygulama alanı bulmasıyla dikkat özellikle çok yüksek frekansların difraksiyonu problemine kaymıştır. 1950 li yıllarda kırınımın Amerika'da Keller'le Kırınımın Geometrik Optik Teorisi (KGOT) Sovyetler Birliği'nde ise Ufimtsev'in Kırınımın Fizik Optik Teorisi (KFOT) ne tanık oluyoruz ([3], [4]).

Klasik Geometrik Optik yaklaşımın Keller tarafından geliştirilmiş ve Luneberg-Kline açılımlarıyla matematik olarak doğrulanabilecek varsayımları şu dört postula ile verilmiştir:

1- Dalga, izotrop ortamlarda, Fermat ilkesi ile belirlenen ışınlar boyunca yayılır. İki nokta arasındaki optik yol ışınlar üzerinde stasyonerdir.

2- Yayılan dalgaların taşıdığı güç ışın tüpleri içinde sakınlıdır ve bu tüplerin yan yüzeylerinden enerji geçişi olmaz.

3- Basit ortamlarda yayılma esnasındaki faz değişimi, ışının aldığı yol ile ortamın dalga sayısının çarpımına eşittir.

4- Yansıma, kırılma ve kırınım yerel (local) olaylardır.

Burada sözü edilen ışınlar, alanın asimtotik ifadesinde yer alan değişik türden dalgaların eş faz yüzeylerine dik olan çizgilerdir. Daha önce çözülmüş problemlerden elde edilen deneyimlerin sonucu olarak bu dalgaların aşağıdaki gibi gruplanabileceğini görürüz.

- 1- Gelen dalga,
- 2- Yansıyan dalga,
- 3- Ayrıttan kırınan dalgalar,
- 4- Dış bükey yüzeyler üzerinden sürünen dalgalar,
- 5- İç bükey yüzeyler üzerinde yayılan fısıldayan galeri modları,
- 6- Sürünen dalgaların gölge bölgesine fırlattıkları dalgalar.

Dolayısıyla yüzeyler üzerinde de bu çeşitli dalgalara karşı düşen çeşitli akımlar oluşacaktır. Çünkü akımlar yüzey üzerindeki dalgaların teğetsel bileşenleridir.

KGT nin son varsayımı kırınımın yerel bir olay olduğunu, dolayısıyla, bir ayırıtın kırınıma katkıda bulunan kısmının onun sonsuz küçük bir civarından geldiğini söylemektedir. O halde çok yüksek frekanslara çıkıldıkça ayırıtın etkisi bu noktadaki teğet düzlemleriyle aynı olmaya başlar. Bu nedenle alanın düzlem parçalarından nasıl kırındığı biliniyorsa ayırıtın ortaya çıkardığı problem KGT de oldukça iyi bir şekilde incelenebilir. KGT kırınım katsayılarının hesabını yapamaz fakat bunları kullanır. Bu nedenle çeşitli fiziksel yapılara ilişkin kırınım katsayılarının başka yollarla hesabı gerekir. Bu problemler ise yüzeyleri çeşitli sınır şartlarını sağlayan yarım düzlemlerin kırınım katsayılarının hesabına götürür. Ayrıca KGT yüzeylerin eğriliklerinin kırınıma katkısını da veremez. İşte burada Wiener-Hopf Tekniği yeniden ön plana çıkar. Böyle birçok probleme ilişkin kırınım katsayıları bu teknikle çözülmüştür.

KGT nin son postulası kırınım katsayılarının açıkça bulunmasına kolaylık sağlayan "Kanonik Problem" kavramına götürür. Esas problem denilen bir kırınım problemine herhangi bir M noktasında denk olan bir kanonik problem aşağıdaki iki özelliğe sahip bir başka kırınım problemidir.

1- M noktasının sonsuz yakın bir civarında kanonik problemin fiziksel ve geometrik yapısı esas probleminkilerle aynıdır.

2- Kanonik problemin asimtotik çözümünün kesin ifadesi açık bir biçimde bulunabilir.

Buna göre kırınım katsayılarını bulmak istediğimiz noktanın ötesinde geometriyi istediğimiz gibi değiştirebiliriz. Böylece fiziksel-geometrik anlamı olmayan soyut yüzeyler elde etmiş olsak bile elde edilen sonuçların asimtotik olarak doğru olduğu varsayılmaktadır.

KGT için geliştirilmiş bulunan kanonik problem kavramı KFOT nin dayandığı yüzey akımlarının açık ifadesini bulmada da çok yararlı olmaktadır. KGT nin iyi sonuç vermediği bölgelerde alan ifadelerini daha doğru olarak etmede oldukça başarılı olan KFOT mükemmel iletken bir yüzey üzerinde uyarılan akımın

$$\vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}_1$$

şeklinde olduğunu ve "Geometrik Optik Bileşeni" adı verilen $\vec{J}_0$ in da

$$\vec{J}_0 = \begin{cases} 2\vec{n} \times \vec{H}_i & , \text{ aydınlık kısımda} \\ 0 & , \text{ karanlık kısımda} \end{cases}$$

ile verildiğini kabul eder [4]. $\vec{J}_1$ ise yüzeyin eğriliğinin, varsa yüzey üzerindeki ayırılar nedeniyle ortaya çıkan akımı temsil eder. O halde KFOT ile alanın hesaplanması $\vec{J}_1$ in bilinmesine bağlıdır. Ufimtsev, bu ikinci dereceden akımın, yüksek frekanslarda kırınımın yerel olduğundan hareketle yarım düzlemden gelen katkı olarak kabul etmiştir. Yine de $\vec{J}_1$ in tam ifadesinin bilinmemesi alanın tam olarak hesaplanmasına imkân vermez. Fakat KGT nin kostik ve gölge bölgesinde hiç kullanılamaması karşısında KFOT daha başarılı olmaktadır.

Keller modelinin zayıf tarafı ayırıt yakınlarında ve gölge sınırlarında geçerli olmamasıdır. Çünkü asimtotik ifadeler non üniformdur.

Bu amaçla da 60 lı yıllarda Kırınımın Uniform Asimtotik Teorisi geliştirilmiştir [5]. Burada yapılan, ortaya çıkan kırınım katsayısına ilişkin integral ifadesinden uniform bir asimtotik formül elde etmekten ibarettir. Bu teori yakın tarihlerde anten problemlerine de uygulanmıştır [6].

Wiener-Hopf Tekniği kartezyen geometriye sahip pek çok problemde daha önce başarıyla kullanılmıştır. Küresel ve silindirik problemlerde

de soyut uzaylarda ifade edilen uygun kanonik problemler halinde yine kullanılma olanağına sahiptir. Bu amaçla açısal değişkenin $(0, 2\pi)$ aralığı yerine $(-\infty, \infty)$ aralığında değiştiği kabul edilir. Bu şekilde integral dönüşümleri kullanma olanağı doğar ve ortaya çıkan problem Wiener-Hopf veya Hilbert problemine dönüştürülerek çözülebilir. Kırınımın yerel karakteri nedeniyle yüzey üzerinde ortaya çıkacak temel akımlar esas probleminkiyle aynı olacaktır. Açısal değişkenin böylece genişletilmiş soyut bir matematik uzaya kaydırılması fikrini difraksiyon probleminde ilk kullanan Clemmow (1959) dur [7]. Bundan bağımsız olarakda sözgelimi Thomson ve İdemen [8] bu soyut matematiksel uzayı kullanarak kanonik problemlerin silindirik ve küresel geometrik sistemlerde de Wiener-Hopf tekniğiyle çözülebileceğine işaret etmiş ve bu çeşit birçok problemde ayırıt etkisi incelenmiştir.

Bu tezde içinden I akımı akan sonsuz uzun bir iletkenin oluşturduğu dalgaların üst tarafı mükemmel iletken, iç tarafı mükemmel manyetik iletken bir silindirik şerit üzerinde oluşturduğu akımlar hesaplanmıştır. Bu şekilde bir fiziksel özelliği sahip yüzeylere soft-hard yüzeyler denmektedir. Hard özellik akustik teoride mükemmel yutucu bir malzemeyi temsil eder.

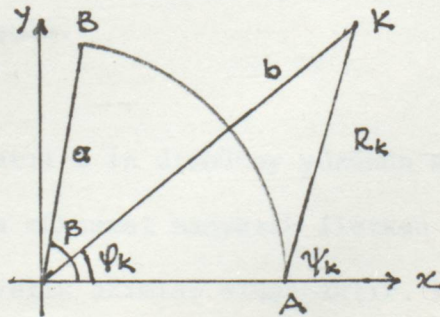
Bu problemin çözümü tarihsel olarak, ortaya çıkan Hilbert problemindeki matrisin faktörizasyonundan sonra mümkün olabilirdi. Yöntem ilk olarak R. A. Hurd tarafından ortaya atılmış, daha sonra Rawkins ve Williams tarafından geliştirilmiştir. Rawkins ve Williams 1981 yılında sözkonusu matrisi faktörize etmişlerdir [9]. Görüldüğü gibi bu tür problemler elektromanyetizmanın ancak yenice çözülmüş konuları arasındadır. KGT de bir ayırıtan kırınım olayı sadece o ayırıttan çizilen teğet düzlemin kırınımına kat-

BÖLÜM I

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

1.1. ESAS PROBLEM

Şekil-1.1 de K ile gösterilmiş ve içinden ω frekanslı akım akan sonsuz uzun ve z- eksenine paralel olarak yerleştirilmiş kaynağın oluşturduğu dalgalar silindirik şeride ulaştığı zaman karmaşık yapıda bir kırınım olayına yol açar. Söz konusu problemde kaynaktan ses dalgalarının yayılması halinde de elde edeceğimiz bağıntılar yine kullanılabilir. Bu takdirde I kaynağın şiddetini ifade eden başka bir fiziksel büyüklük olacaktır. K kaynağı +z ler yönünde elektrik akımı akıtıyorsa bunun oluşturduğu alanın (gelen alan) elektrik alan vektörü silindirik şeride ve kaynağa paralel olacaktır. Zamana bağlılık $e^{-i\omega t}$ olarak alınırsa bütün alan bileşenleri E_z cinsinden yazılabilir. Problemin yapısı silindirik koordinatları kullanmamızı gerektirdiğinden sıfırdan farklı bileşenleri şu şekilde yazabiliriz:



Şekil - 1.1. Problemin Geometrisi

$$(1.1.a) \quad E_z = u(\rho, \phi)$$

$$(1.1.b) \quad H_\rho = \frac{1}{i\omega\mu\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$(1.1.c) \quad H_\phi = - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

u fonksiyonu ise S ve K dışında her yerde

$$(1.2) \quad (\Delta + k^2)u = 0$$

denklemini sağlar. Burada k dalga sayısını gösteriyor ve bilindiği gibi reel kısmı daima pozitifdir. Fakat kırınım teorisinde ortaya çıkan Wiener-Hopf problemlerinde bazı integrallerin ıraksama probleminden kaçınmak için k, pozitif bir sanal kısma sahip kompleks bir sayı olarak alınır. Böylece ele alınan problem aslında bir miktar iletkenliğe sahip ortamlar için çözülmüş olur. Fakat bulunan sonuçlar reel k lar için de bir anlama sahiptir. Dolayısıyla en sonda yeniden k yı reel olarak yazabiliriz.

(1.2) denkleminde u'yu çözmek veya (1.1) le belirli alan bileşenlerinin teğetsel bileşenleri demek olan akımları bulmak için aşağıdaki koşulları gözönüne almalıyız.

- a- S üzerinde sağlanması gereken sınır koşulları,
- b- Kaynağın sağlaması gereken koşullar,
- c- Alanın ayırtılarda sağlaması gereken koşullar (ayırt koşulları),
- d- Radyasyon koşulu.

a- Sınır koşulları: S in dışbükey yüzünün mükemmel elektrik iletken, içbükey tarafının da mükemmel manyetik iletken olması nedeniyle yüzey üzerinde elektrik ve manyetik akımlar oluşacaktır. Yüzeyin normali $\vec{n}$ ile gösterilirse bu yüzeysel akımlar

$$(1.3.a) \quad \vec{J}_e = \vec{n} \times \vec{H}$$

$$(1.3.b) \quad \vec{J}_M = -\vec{n} \times \vec{E}$$

bağıntısıyla bulunur. Bu durumda sınır koşulları şu şekilde olacaktır.

$$(1.4.a) \quad u(a + 0, \phi) = 0 \quad \phi \in (0, \beta)$$

$$(1.4.b) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} u(a - 0, \phi) = 0 \quad \phi \in (0, \beta)$$

$$(1.4.c) \quad u(a + 0, \phi) - u(a - 0, \phi) = \begin{cases} J_M(\phi) & \phi \in (0, \beta) \\ 0 & \phi \notin (0, \beta) \end{cases}$$

$$(1.4.d) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} [u(a + 0, \phi) - u(a - 0, \phi)] = \begin{cases} \tilde{J}(\phi) & \phi \in (0, \beta) \\ 0 & \phi \notin (0, \beta) \end{cases}$$

Burada elektromanyetik alan halinde $\tilde{J} = -i\omega\mu J_e$ olup J_e elektrik akım yoğunluğudur. J_M ise manyetik akım yoğunluğunu göstermektedir.

b- Kaynaklar, dalga denklemine bir kaynak terimi olarak sokulabileceği gibi "sınır" koşullarıyla da karakterize edilebilirler. Bu koşullar gözönüne alınan problemde

$$(1.5.a) \quad u(b + 0, \phi) - u(b - 0, \phi) = 0.$$

$$(1.5.b) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} [u(b + 0, \phi) - u(b - 0, \phi)] = (I'/b) \delta(\phi - \phi_k)$$

şeklinde olacaktır. I' kaynağın şiddetiyle orantılı bir büyüklük olup elektrik akımı akması halinde $I' = -i\omega\mu I$ dır.

c- Ayırıt koşulları alan bileşenlerinin ayırıtlar civarında nasıl davrandığını ifade ederler. Bunlar ortaya çıkan problemin çözümünün tekliğini garanti ederler. A ve B ayırıtında sağlanması gereken bu koşullar

$$(1.6.a) \quad u(a, \phi) = 0 [(-a\phi)^{1/4}] \quad \phi \rightarrow -0$$

$$(1.6.b) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} (a, \phi) = 0 [(-a\phi)^{3/4}] \quad \phi \rightarrow -0$$

$$(1.6.c) \quad u(a, \phi) = O[a(\phi - \beta)^{1/4}] \quad \phi \rightarrow \beta+$$

$$(1.6.d) \quad \frac{\partial}{\partial a} u(a, \phi) = O[a(\phi - \beta)^{3/4}] \quad \phi \rightarrow \beta+$$

olarak verilmişlerdir [13].

d- Radyasyon koşulu dalğanın sonsuza giderken nasıl bir davranışa sahip olduğunu ifade eder. Sommerfeld radyasyon koşulu denen bu bağlantı iki boyutlu dalga için

$$(1.7) \quad \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} u - iku \right) \rightarrow 0 \quad \rho \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

Görüldüğü gibi problem karışık bir sınır değer problemidir.

Bu şekilde ortaya konulmuş problemin analitik çözümünü bulmak mümkün değildir. Fakat bizim için önemli olan kesin analitik çözümü değilde yüksek frekanslarda geçerli bir asimtotik ifadelerdir. Çok yüksek frekanslarda dalgaların saçılmasının KGT ye göre yerel bir karakter göstermesi bu tür çözümlerin elde edilmesini mümkün kılacaktır. Burada yüksek veya çok yüksek frekans kavramına açıklık getirilmesi gerekmektedir. Mutlak olarak bir yüksek frekans kavramı kendi başına anlamsızdır. Söz gelimi optik frekanslar yüksek sayılabilir ama birkaç mikronluk saçıcı bir cisim için bu çözüm yöntemini yine kullanamayız. O halde saçıcı cismin, dalğanın dalga boyuna oranla çok çok büyük olması gerekir. Şöyle bir kabul yapabiliriz: Saçıcı cismin geometrik parametreleri dalga boyundan çok çok büyük ve alanın asimtotik açılımında ikinci dereceden terimler baskın terim yanında tamamen ihmal edilebiliyorsa çok yüksek frekanslar bölgesindeyiz diyebiliriz. Biz pratik olsun diye k sonsuza giderken diyerek bir belirsizlikten kurtulacağız. Çünkü bu takdirde asimtotik açılımdaki ikinci dereceden terimler tamamen atılabilir demektir. Bu takdirde kırınımın yerel karakterine dayanarak açısal değişkeni $(-\infty, \infty)$ aralığına

genişletiriz. Bu takdirde elde edilen esas probleme denk kanonik problem, A ve B arasında çok yüksek frekanslı olaylar sonucu oluşan akımların ay-
nısını verir.

1.2. DENK KANONİK PROBLEM

Bu şekilde genişletilmiş uzay kavramı sayesinde problemin çö-
zümünde yeni bir adım atmak mümkün olur. Bunun için alanın aşağıdaki ifa-
desinden hareket edilecektir:

$$(1.8) \quad u(\rho, \phi) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A(v) J_{|v|}(k\rho) e^{-iv\phi} dv & \rho < a \\ \int_{-\infty}^{\infty} [B(v) H_v^{(1)}(k\rho) + C(v) H_v^{(2)}(k\rho)] e^{-iv\phi} dv & a < \rho < b \\ \int_{-\infty}^{\infty} D(v) H_v^{(1)}(k\rho) e^{-iv\phi} dv & \rho > b \end{cases}$$

A, B, C, D henüz bilinmeyen fakat daha önce yazdığımız koşullar tarafın-
dan belirlenecek olan büyüklüklerdir. Bu ifadeyi (1.4) ve (1.5) olarak
verilen sınır ve kaynak koşullarında yerine koyar ve ortaya çıkan integ-
rallerin şimdi ters Fourier dönüşümlerini alırsak şu bağıntıları buluruz:

$$(1.9.a) \quad BH_v^{(1)}(x) + CH_v^{(2)}(x) = \psi_1^-(v) + e^{iv\beta} \psi_1^+(v)$$

$$(1.9.b) \quad AJ_{|v|}'(x) = \psi_2^-(v) + e^{iv\beta} \psi_2^+(v)$$

$$(1.9.c) \quad BH_v^{(1)}(x) + CH_v^{(2)}(x) - AJ_{|v|}(x) = P_1(v)$$

$$(1.9.d) \quad BH_v^{(1)'}(x) + CH_v^{(2)'}(x) - AJ_{|v|}'(x) = P_2(v)$$

$$(1.9.e) \quad (D - B)H_v^{(1)}(y) - CH_v^{(2)}(y) = 0$$

$$(1.9.f) \quad (D - B)H_v^{(1)'}(y) - CH_v^{(2)'}(y) = (I'/2\pi y) e^{iv\phi_k}$$

$$(1.9.g) \quad x = ka \quad y = kb$$

Burada şu büyüklükler tanımlanmıştır:

$$(1.10.a) \quad \psi_1^- = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 u(a+0, \phi) e^{i\nu\phi} d\phi$$

$$(1.10.b) \quad \psi_1^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\infty} u(a+0, \phi) e^{i\nu(\phi-\beta)} d\phi$$

$$(1.10.c) \quad \psi_2^- = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial a} u(a-0, \phi) e^{i\nu\phi} d\phi$$

$$(1.10.d) \quad \psi_2^+ = \frac{1}{2\pi k} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} u(a-0, \phi) e^{i\nu(\phi-\beta)} d\phi$$

$$(1.10.e) \quad P_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\beta} J_M(\phi) e^{i\nu\phi} d\phi$$

$$(1.10.f) \quad P_2 = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{\beta} \tilde{J}(\phi) e^{i\nu\phi} d\phi$$

Bundan böyle daima şu notasyonu kullanacağız. + üst veya alt indisli fonksiyonlar bağımsız değişkenin kompleks üst yarım düzleminde regüler, - ler ise alt yarım düzlemde regüler olan fonksiyonları gösterecektir. Bu regülerlik keyfiyeti Fourier dönüşümün önemli bir özelliğidir.

(1.10) daki P ler ise bu değişkenin bir tam fonksiyonudur. Bu regülerlik-özellikleri biraz sonra karşımıza çıkacak olan Hilbert Probleminin çözümünün -bilindiği gibi- püf noktasını oluşturmaktadır.

1.3. KANONİK PROBLEMİN BİR ÜÇ PARÇALI MATRİS HİLBERT PROBLEMİNE İNDİRGENMESİ

(1.9) ve (1.10) sistemiyle ifade edilen problemde bir çok bilinmeyen gözükmesi aldatıcı bir görünüm olup esas olarak tek bir bilinmeyen vardır. Bu problemin çözümü için önce bu sistemde gözüken A, B, C, D büyüklüklerini elimine edelim. Elimizde iki denklem kalır ve bu da aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(1.11.a) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{H_v^{(1)'}(x)}{H_v^{(1)}(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{J|v|(x)}{J'|v|(x)} \\ -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^- \\ \psi_2^- \end{bmatrix} + e^{i\nu\beta} \begin{bmatrix} \psi_1^+ \\ \psi_2^+ \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + (iT/x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(1.11.b) \quad T = \frac{I}{2\pi i} \frac{H_v^{(1)}(y)}{H_v^{(1)}(x)} e^{i\nu\phi_k}$$

Bu ise bilindiği gibi bir modifiye Hilbert problemidir. Sağ tarafta P tam fonksiyonları olmasaydı buna Hilbert problemi denir. Fakat P lerin varlığı nedeniyle bu üç parçalı diyebileceğimiz bir Hilbert problemi tipindedir ve ana fikir (regülerlik özellikleri) aynı kalmakla birlikte farklı bir yaklaşımla çözülebilir. Bilindiği gibi Hilbert problemi

$$(1.2) \quad GF^+ + F^- = g$$

şeklinde olup genel olarak + ve - ler kapalı bir bölgenin içinde ve dışında (veya reel eksenin altında ve üstünde) regüler olan fonksiyonlardır ve sınırda (1.2) bağıntısını sağlamaktadırlar. Örneğimizde bu iki bölge üst ve alt yarı v-düzlemleridir. Eğer G yi biri üst yarı düzlemde regüler ve sıfırsız (G_+) diğeri alt yarı düzlemde regüler ve sıfırsız (G_-) iki fonksiyonun çarpımı olarak yazabilirsek (faktörizasyon problemi), sonra her iki tarafı G_- ile bölüp sağ tarafta ortaya çıkan terimi de + ve - iki fonksiyonun toplamı olarak yazarız (dekompozisyon problemi). Bu eşitlik ancak ve ancak + ve - fonksiyonlar kendi aralarında (eklenecek keyfi bir tam fonksiyon dışında) eşit olursa sağlanır. Birçok halde bu tam fonksiyon $F^\pm$ lerin asimtotik davranışlarının bilinmesi ile tek bir şekilde belli olur. Böylece iki parçalı skalar bir Hilbert problemi çözülebilir.

1.4. MATRİS VE ÜÇ PARÇALI OLUŞUN ORTAYA ÇIKARDIĞI GÜÇLÜKLER

Bizim örneğimizde iki farklılık göze çarpmaktadır. Birincisi faktörize edilecek G fonksiyonu skalar olmayıp bir matristir. İkincisi sağ tarafta ek olarak tam fonksiyonlar da vardır.

Skalar bir Hilbert probleminde hem faktörizasyon hem dekompozisyon birer integrasyonla elde edilebilir. Matris Hilbert probleminde dekompozisyonda bir güçlük olmayıp yine bir integrasyonla başarılabilir. Fakat faktörizasyon logaritma işlemiyle yine dekompozisyon problemine dönüştürüldüğünden ve matris çarpımı genel olarak komütatif olmadığından faktörizasyon genel halde mümkün değildir. Bizim problemlerimizde de bu faktörizasyon yapılamaz. Ancak problemin yüksek frekanslar için geçerli çözümünü aradığımızdan önce (1.11) i asimtotik olarak değerlendirecek ve ortaya çıkan matrisin özel bir biçime uyması nedeniyle faktörizasyonunun mümkün olduğu görülecektir.

Hilbert probleminin sağ tarafında fazladan tam fonksiyonların ortaya çıkmasının yarattığı iki güçlük daha vardır. Bu terimlerin varlığı nedeniyle modifiye veya üç parçalı Hilbert problemi denir. Çünkü şimdi bu fazladan P ler içinde de bilinmeyen u fonksiyonu vardır. Eğer bu skalar bir modifiye Hilbert problemi olsaydı, P nin eliminasyonu ile kuplu bir inhomojen Fredholm integral sistemine dönüştürülerek çözülebilirdi [10, 11]. Görülüyorki üç parçalı problemde faktörizasyondan hemen sonra çözüm bulunamamakta ayrıca bir Fredholm integral sistemini de çözmek gerekmektedir. Bu nedenle üç parçalı problem ek güçlükler getirmektedir. Üç parçalı matris probleminin yarattığı ikinci sorun tek bir faktörizasyonun yetmemesi biraz sonra çözüm sırasında da görüleceği gibi $G = G_+ G_-$ gibi bir faktörizasyondan sonra bir de $G = G'_+ G'_-$ gibi ikinci bir faktörizasyonun gerekli olmasıdır.

Görülüyorki skalar bir Hilbert probleminden farklı olarak bir üç parçalı Matris Hilbert Problemi büyük güçlükler ortaya çıkarmaktadır.

1.5. HILBERT PROBLEMİNİN ASİMTOTİK FORMU

Başlangıçtan beri yüksek frekanslar için çözüm aramaktaydık. Üstelik ortaya çıkan Hilbert problemi de bu şekliyle çözülememektedir. Bu nedenle önce k nın çok büyük değerleri için bazı basitleşmelerden yararlanmak amacıyla (1.11) de görülen Bessel ve Hankel fonksiyonlarını her bölgede geçerli olan Debye yaklaşımları denen asimtotik formlarıyla de-
ğiştirelim:

$$(1.12.a) \quad H_v^{(1)}(x) \sim (2/\pi x \sin \theta_x)^{1/2} e^{iv(\tan \theta_x - \theta_x)} e^{-i\pi/4}$$

$$(1.12.b) \quad J_v(x) \sim \frac{1}{2} H_v^{(2)}(x) \sim (2\pi x \sin \theta_x)^{-1/2} e^{-iv(\tan \theta_x - \theta_x)} e^{i\pi/4}$$

$$(1.12.c) \quad \cos \theta_x = v/x$$

$$(1.12.d) \quad \operatorname{Re} \theta_x \in (0, \pi)$$

Bunlar yerine konur ve yeniden düzenlenerek yazılırsa

$$(1.13.a) \quad G(\psi^- + e^{iv\beta} \psi^+) = P + S$$

denklemini elde edilirki burada

$$(1.13.b) \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1/K \\ K & -1 \end{bmatrix}$$

$$(1.13.c) \quad K = K(v) = \sqrt{x^2 - v^2} = i \sqrt{v^2 - x^2}$$

$$(1.13.d) \quad \psi^+ = \begin{bmatrix} \psi_1^+ \\ -ix\psi_2^+ \end{bmatrix}$$

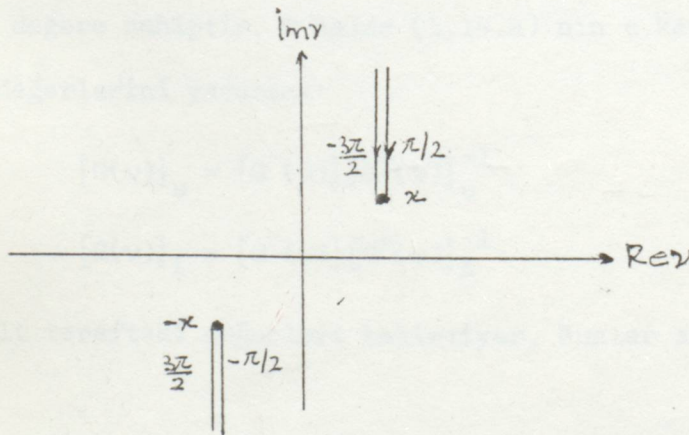
$$(1.13.e) \quad \psi^- = \begin{bmatrix} \psi_1^- \\ -ix\psi_2^- \end{bmatrix}$$

$$(1.13.f) \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ -ixP_2 \end{bmatrix}$$

$$(1.13.g) \quad S = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yazılmıştır.

Görülüyorki karekök fonksiyonun kesimlerinin de ayrıca belirtilmesi gerekir. Problemin yapısından en uygun kesimin Şekil-2.2 deki gibi olması gerektiği anlaşılır. Daha sonraki bölümde kullanılacak bir



Şekil - 2.2. $K(v)$ nün dal noktaları ve kesimleri

integral hesabı için bu kesim özellikle reel eksene dik alınmış ve kolay referans için integrasyon yönleri ayrıca işaretlenmiştir. Şu andaki amacımız için kesimin $+x$ ($-x$) den $+\infty$ ($-\infty$) a reel eksenini kesmeyen herhangi bir yoldan gitmesi yeterlidir.

1.6. BİRİNCİ VE İKİNCİ FAKTORİZASYONUN HURD-WILLIAMS-RAWLINS YÖNTEMİYLE BULUNMASI

Sözkonusu Hilbert probleminin çözümünde bilindiği gibi en önemli adım (1.13.b) ile verilen G çekirdek matrisinin

$$(1.14.a) \quad G(v) = [G^-(v)][G^+(v)]^{-1}$$

$$(1.14.b) \quad G(v) = [G^+(v)][G^-(v)]^{-1}$$

olacak şekilde iki faktörizasyonunun bulunmasıdır. Birinci faktörizasyon bulunduktan sonra ikincisi, matrisin özel biçimi nedeniyle kolayca bulunacaktır.

Şekil-2.2 de G nin elemanları olarak K ve $1/K$ nin kesim çizgileri gösterilmiştir. G^+ üst yarı düzlemde regüler olduğundan tek tekilliği $-x$ teki dal noktası, G^- nin ise $+x$ deki dal noktasıdır. Karekök fonksiyonunun özelliği ise kesimin üst ve alt tarafında ters işaretli oluşudur. G^- alt yarı düzlemde regüler olduğundan kesimin altında ve üstünde aynı değere sahiptir. O halde (1.14.a) nın c kesiminin üstünde ve altındaki değerlerini yazarsak

$$(1.15.a) \quad [G(v)]_u = [G^-(v)][G^+(v)]_u^{-1}$$

$$(1.15.b) \quad [G(v)]_\ell = [G^-(v)][G^+(v)]_\ell^{-1}$$

u üst, ℓ alt taraftaki değerleri belirtiyor. Bunlar arasında G^- yok edilirse

$$(1.16) \quad [G^+(v)]_u = [G(v)]_u^{-1}[G(v)]_\ell[G^+(v)]_\ell$$

bulunur. Kesimin üstünde karekökün $+$ değeri alınırsa alt tarafta $-$ olacaktır. Bu şekilde G nin ℓ alt indisli ifadesinde K yerine $-K$ gelmiş olacaktır. (1.16) açıkça yazılırsa

$$(1.17) \quad [G^+(v)]_u = \begin{bmatrix} 0 & -1/K(v) \\ K(v) & 0 \end{bmatrix} [G^+(v)]_\ell$$

Bu son denklemi G^+ nın $[g_{ij}^+]$ bileşenleri cinsinden yazabiliriz.

$$(1.18.a) \quad (g_{11}^+)_u = - (g_{21}^+)_\ell / K$$

$$(1.18.b) \quad (g_{12}^+)_u = - (g_{22}^+)_\ell / K$$

$$(1.18.c) \quad (g_{21}^+)_u = K(g_{11}^+)_\ell$$

$$(1.18.d) \quad (g_{22}^+)_u = K(g_{12}^+)_\ell$$

Bu denklemlerin ilk ikisiyle son ikisi aynı yapıdadır. Demekki çözülmesi gereken sistem artık

$$(1.19.a) \quad (M_1)_u = - (M_2)_\ell / K$$

$$(1.19.b) \quad (M_2)_u = - K(M_1)_\ell$$

şekline inmiştir. Bunlar c kesim çizgisi üstünde tanımlı kuple bir sistemdir ve bu son iki bağıntı taraf tarafa çarpılıp bölünerek ve

$$(1.20.a) \quad N_1 = M_1 M_2$$

$$(1.20.b) \quad N_2 = M_1 / M_2$$

yazılarak

$$(1.21.a) \quad (N_1)_u = - (N_1)_\ell$$

$$(1.21.b) \quad (N_2)_u (N_2)_\ell = - 1/K^2$$

şeklinde dekopple edilebilir. (1.21.a) nın çözümünün

$$(1.22) \quad N_1(v) = \frac{1}{\sqrt{k + v}}$$

olduğu görülmektedir. Şimdi (1.21.b) nin bir özel çözümünü bulmaya çalışalım. Bu bağıntıyı

$$(1.23.a) \quad [(N_2)_u(\sqrt{2k} + \sqrt{v+k})\sqrt{v+k}] [(N_2)_\ell(\sqrt{2k} - \sqrt{v+k})(-\sqrt{v+k})] = 1$$

şeklinde düzenleyelim. Bu yazış biçiminden de anlaşılmaktadır ki ilk parantez $\sqrt{v+k}$ nın C_u da ikincisi ise C_ℓ deki değeridir. Yani bu son bağıntı aslında $h_u h_\ell = 1$ şeklindedir. Bunun çözümü ise $h = 1$ olduğundan (1.21.b) nin bir özel çözümünün

$$(1.24) \quad N_2(v) = \frac{1}{\sqrt{v+k}} \frac{1}{(\sqrt{2k} + \sqrt{v+k})}$$

olduğu bulunur. Buradan da

$$(1.25.a) \quad M_1(v) = \sqrt{N_1 N_2} = \{(k+v)[\sqrt{2k} + \sqrt{k+v}]\}^{-1/2}$$

$$(1.25.b) \quad M_2(v) = -\sqrt{N_1/N_2} = (\sqrt{2k} + \sqrt{k+v})^{1/2}$$

son bağıntıda karekökün pozitif işaretlisi (1.18) bağıntılarını sağlamadığından alınmamıştır.

Bu özel çözüm bulunduktan sonra (1.19) un genel çözümü M_1 ve M_2 yi

$$(1.26.a) \quad (\tilde{M}_1)_u = (\tilde{M}_2)_\ell$$

$$(1.26.b) \quad (\tilde{M}_2)_u = (\tilde{M}_1)_\ell$$

ile çarparak bulunabilir. Bu son bağıntılar ise

$$(1.27.a) \quad \tilde{M}_1 = (k+v)^{n/2}$$

$$(1.27.b) \quad \tilde{M}_2 = (-1)^m (k+v)^{m/2}$$

tarafından sağlanır. (1.18) sisteminde böyle iki denklem olduğundan ikincisi içinde n yerine m koyarak G^+ tamamen belli olur. Bu şekilde elde edilen matrislerin determinantlarının sıfırdan farklı ve kendi bölgelerinde kutuplarının bulunmaması için $n-m$ tek sayı ve $m+n=1$ olmalıdır. O halde $n=0$, $m=1$ seçerek ($m=0$, $n=1$ farklı bir sonuç vermez) faktörizasyon tamamlanmış olur.

Fakat matrisin tesadüfen $G^{-1} = G/2$ olması nedeniyle ikinci faktörizasyon da hemen bulunmuş olmaktadır.

Sonuç olarak bu iki faktörizasyon

$$(1.28.a) \quad G = (G^+)^{-1} G^-$$

$$(1.28.b) \quad G = 2(G^-)^{-1} G^+$$

şeklinde olup burada

$$(1.28.c) \quad \gamma = \gamma(v) = (\sqrt{2x} + \sqrt{x+v})^{1/2}$$

olmak üzere

$$(1.28.d) \quad G^+ = \begin{bmatrix} \gamma\sqrt{x+v} & -1/\gamma \\ \gamma & 1/\gamma\sqrt{x+v} \end{bmatrix}$$

$$(1.28.e) \quad G^- = \begin{bmatrix} \gamma\sqrt{x+v} - k/\gamma & 1/\gamma + \gamma\sqrt{x-v} \\ \gamma + \sqrt{x-v}/\gamma & \gamma/k - 1/\gamma\sqrt{x+v} \end{bmatrix}$$

dir. Böylece iki farklı faktörizasyonun bulunmasıyla önemli adımlardan biri gerçekleştirilmiş durumdadır [9].

1.7. HİLBERT PROBLEMİNİN BİR FREDHOLM INTEGRAL SİSTEMİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Faktörizasyon başarıldıktan sonra (1.13) bağıntısıyla verilmiş olan Hilbert problemindeki G çekirdek matrisi iki ayrı şekilde faktörize edilmiş olarak yazılır. İlki G^+ ikinci G^- çarpılıp

$$(1.29.a) \quad G^-(\psi^- + e^{i\nu\beta} \psi^+) = G^+P + R_1$$

$$(1.29.b) \quad G^+(e^{-i\nu\beta} \psi^- + \psi^+) = e^{-i\nu\beta}(G^-P/2 + R_2)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$(1.29.c) \quad R_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ (x + v)^{-1/2} \end{bmatrix} T/\gamma$$

$$(1.29.d) \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1/\gamma + \gamma/\sqrt{x - v} \\ \gamma/k - 1/\gamma \sqrt{x + v} \end{bmatrix} T/2$$

konmuştur.

(1.29) sistemi şu şekilde çözülebilir [10]: P tam fonksiyon olduğundan G^+P üst yarı düzlemde, G^-P ise alt yarı düzlemde regülerdir.

Bütün karışık cinsten fonksiyonları $+$ ve $-$ fonksiyonların toplamı olarak dekompoze edersek (1.29) sistemi dört ayrı integral denklemine ayırır.

Karışık, yani ne $+$ ne de $-$ olan bir fonksiyon ise bir integrasyonla

$$(1.30.a) \quad f^\pm(v) = (1/2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - v} d\tau \quad \text{Im } v \gtrless 0$$

$$(1.30.b) \quad f = f^+ - f^-$$

şeklinde dekompoze edilir. Bu işlem yapıldıktan sonra $+$ ve $-$ fonksiyonlar kendi aralarında eşitlenecektir. Ortaya çıkan tam fonksiyonlar ise

$$(1.31.a) \quad \psi_1^-, \psi_1^+ = O(v^{-5/4}) \quad |v| \rightarrow \infty$$

$$(1.31.b) \quad \psi_2^-, \psi_2^+ = O(v^{-1/4})$$

asimtotik davranışları nedeniyle sıfır olmalıdır. Bu dört denklemden P leri bulundurmayan iki tanesi

$$(1.32.a) \quad G^-\psi^-(v) = Q_1^-(v) + (1/2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^-(\tau)\psi^+(\tau)e^{i\tau\beta}}{\tau - v} d\tau \quad \text{Im } v < 0$$

$$(1.32.b) \quad G^+ \psi^+(v) = Q_2^+(v) - (1/2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\tau\beta} G^+(\tau) \psi^-(\tau)}{\tau - v} d\tau \quad \text{Im } v > 0$$

dır. Burada

$$(1.32.c) \quad Q_1^- = (-1/2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_1(\tau)}{\tau - v} d\tau \quad \text{Im } v < 0$$

$$(1.32.d) \quad Q_2^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2(\tau) e^{-i\tau\beta}}{\tau - v} d\tau \quad \text{Im } v > 0$$

konmuştur.

R lerin dolayısıyla Q ların bilinen fonksiyonlar olması (1.32) sisteminin inhomojen bir Fredholm integral sistemi olduğunu gösteriyor. Bu tür bir sistemin avantajı ardışık yaklaşımlarla çözmeye elverişli olmasıdır. Fakat önce (1.32.c-d) integrallerini açıkça hesaplamamız gerekiyor. R lerin açık ifadesinden gözüktüğü gibi bu integralleri analitik olarak elde etmek mümkün değil, çünkü Hankel fonksiyonlarının oranını içeriyorlar. Fakat hep asimtotik çözümlerle ilgilendiğimizden bunların asimtotik değerlendirmesini yapabiliriz.

1.8. Q_1^- NİN EYER NOKTASI YÖNTEMİYLE DEĞERLENDİRİLMESİ VE PROBLEMİN İRDELENMESİ

Asimtotik formunu araştırdığımız integralin açık ifadesinide gözüken Hankel fonksiyonlarının (1.12) deki asimtotik formları yerine konarak

$$(1.33.a) \quad Q_1^- = (1/2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} (a \sin \theta_x / b \sin \theta_y)^{1/2} \frac{e^{i\tau f(\tau)}}{\gamma(\tau)(\tau - v)} d\tau \quad \text{Im } v < 0$$

$$(1.33.b) \quad f(\tau) = \tan \theta_x - \theta_y + \theta_x - \tan \theta_x + \phi_k$$

olarak yazılır. Bu integrali eyer noktası yöntemiyle bulmak için önce eyer noktasını

$$(1.34.a) \quad [\tau f(\tau)]' = \theta_x - \theta_y + \phi_k = 0$$

bağıntısından buluruz. Karışık fakat basit bazı trigonometrik hesaplardan sonra

$$(1.34.b) \quad \tau_o = x \sin \psi_k$$

$$(1.34.c) \quad \theta_x = \pi/2 - \psi_k \in [0, \pi]$$

$$(1.34.d) \quad \theta_y = \pi/2 - \psi_k + \phi_k \in [0, \pi]$$

buradan da

$$(1.34.e) \quad \psi_k \in [-\pi/2, \pi/2]$$

olması gerektiği bulunur. Aslında iki eyer noktası olmakla birlikte (diğeri ilkinin ters işaretlisidir) ikincisi sonsuzdan gelen dalgaya karşı geldiği için fiziksel bir anlama sahip değildir.

(1.34.e) şartı gerçekleşmezse hiç bir eyer noktası olmayacaktır. Şekil-1.1'e bakılırsa bunun fiziksel olarak kaynağın A ayırıtını doğrudan aydınlatmadığı durum olduğu görülür. Eğer Q_2^- nin açık ifadesindeki Hankel fonksiyonları için ayrı işlem yapılırsa tek fark üstel fonksiyonun fazında

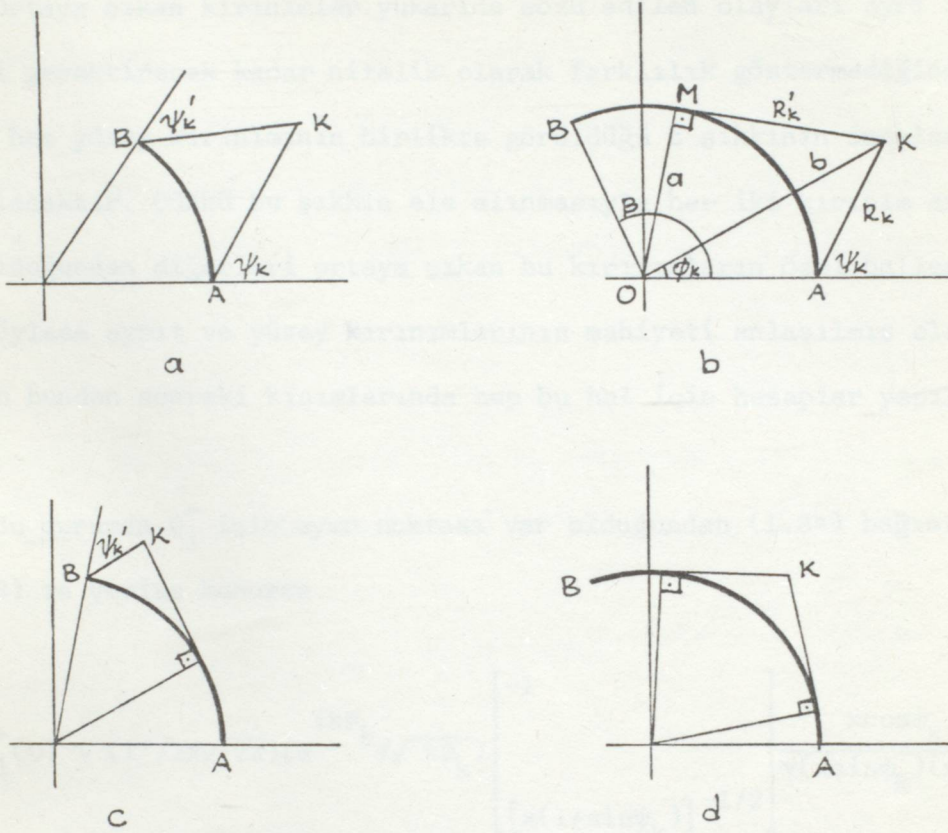
$$(1.35) \quad \phi_k \rightarrow \beta - \phi_k$$

değiştirilmesi yapılması gerekir. Bu durumda Q_2^+ ya ilişkin eğer noktası

$$(1.36) \quad \tau_o' = x \sin \psi_k'$$

olacaktır (Bkz.Şekil-1.2). Buna göre yine B ayırıtının kaynak tarafından doğrudan aydınlatılmaması halinde eğer noktası olmayacaktır.

Görülüyorki matematiksel olarak da kendini açıkça ifade eden bu durum, fiziksel olarak ayırıtların kaynağı doğrulan doğruya görüp görmemesine göre problemin irdelenmesine götürmektedir. Olası dört durum ve asimtotik analizle ilgili parametreler Şekil-2.3 de gösterilmiştir.



Şekil - 2.3

Bu farklı duruma karşı düşen şu dört ayrı problemin ayrı ayrı incelenmesi gerekir.

- a) $\psi_k, \psi'_k \in L = [-\pi/2, \pi/2]$
- b) $\psi_k \in L, \psi'_k \notin L$
- c) $\psi_k \notin L, \psi'_k \in L$
- d) $\psi_k, \psi'_k \notin L$

Bunların kırınım açısından ortaya çıkardığı sonuçlar daha sonra görüleceği gibi ayırıt ve yüzey difraksiyonu kavramlarıdır. Kaynak tarafından doğrudan aydınlatılan ayırıtta ayırıt kırınımı oluşur. Aydınlatılmayan ayırıt varsa kaynaktan gelen dalga ayırıtı ulaşamaz yüzeye teğet olarak çarparak yüzey kırınımı denen olayı yaratır.

Ortaya çıkan kırınımın yukarıda sözü edilen olayları ayrı ayrı incelemeyi gerektirecek kadar nitelik olarak farklılık göstermediğinden, hem ayrıt hem yüzey kırınımının birlikte görüldüğü b şıkkının incelenmesi yeterli olacaktır. Çünkü bu şıkkın ele alınmasıyla her iki kırınım analiz edilmiş olduğundan diğerleri ortaya çıkan bu kırınımın özel halleri olacak, böylece ayrıt ve yüzey kırınımının mahiyeti anlaşılmış olacaktır. Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında hep bu hal için hesaplar yapılacaktır.

Bu durumda Q_1^- için eyer noktası var olduğundan (1.34) bağıntıları (1.33) te yerine konursa

$$(1.37) \quad Q_1^-(v) \sim (I'/2\pi\sqrt{2\pi})(e^{ikR_k/\sqrt{kR_k}}) \begin{bmatrix} -1 \\ [x(1+\sin\psi_k)]^{-1/2} \end{bmatrix} \frac{x\cos\psi_k}{\gamma(x\sin\psi_k)(x\sin\psi_k-v)}$$

bulunur.

1.9. Q_2^+ NİN REZİDÜ YÖNTEMİYLE DEĞERLENDİRİLMESİ

Bunun açık ifadesi

$$(1.38) \quad Q_2^+(v) = \frac{I'}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1/\gamma + \gamma\sqrt{x-\tau}}{\gamma/k - 1/\gamma\sqrt{x+\tau}} \right] \frac{H_{\tau}^{(1)}(y)}{H_{\tau}^{(1)}(x)} e^{i\tau(\beta-\phi_k)} \frac{d\tau}{\tau-v} \quad \text{Im } v > 0$$

olarak yazılırsa eyer noktasının olmaması nedeniyle integrandın kutuplarının bulunmasıyla asimtotik ifadesinin elde edilebileceği görülür. Çünkü integrand alt yarı düzlemde yalnızca Hankel fonksiyonunun sıfırlarından gelen tekilliklere sahiptir. O halde Jordan ve Rezidü Teoremlerine binaen bu integral $-2\pi i$ kere alt yarı düzlemdeki rezidülerin toplamına eşittir.

Oysaki üstel fonksiyonun varlığı nedeniyle bu terimler, rezidüler reel eksenden uzaklaştıkça üstel olarak sönmemektedir. Demekki dominant katkı reel eksene en yakın rezidüden gelecektir. Öyleyse Hankel fonksiyonunun reel eksene en yakın sıfırını bulmalıyız. $\tau \rightarrow -\tau$ dönüşümüyle bu integral üst yarı düzleme taşınabilir. Hankel fonksiyonunun ilk üç sıfırının değeri

$$(1.39) \quad v_n \sim x + x^{1/3} 2^{-4/3} e^{2in\pi/3} \quad n = 1, 2, 3$$

olarak bulunur. Bu ifade $H_v^{(1)}(x)/H_v^{(1)'}(x)$ in asimtotik serisinden yararlanarak bulunmuştur. Görüldüğü gibi bu ilk sıfır $v_1 \sim x$ olarak alınabilir. Bu değer (1.38) de yerine konursa

$$(1.40) \quad H_{v_1}(y) \sim (2/\pi y \sqrt{1-a^2/b^2})^{1/2} e^{-i\pi/4} e^{ix(\sqrt{b^2-a^2}/a-\theta_x)}$$

Şekil-2.3.b den de

$$(1.40.b) \quad \theta_x = \arccos(a/b) = \angle \text{MOK}$$

olduğu görülmektedir. O halde

$$(1.41) \quad Q_2(v) \sim \frac{I'}{\pi i \sqrt{2kR_k}} \frac{e^{ik(R'_k + \overline{MB})}}{H_{v_1}(x)(v+x)} e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 2(2x)^{-1/4} \\ (2x)^{-3/4} \end{bmatrix}$$

bulunur. Nokta Hankel fonksiyonunun v ye göre türevini göstermektedir.

1.10. BİR LEMMA

Bu bölümden sonra birbirinin aşağı yukarı aynısı olan bazı integrallerin asimtotik değerlendirilmesiyle uğraşacağız. Sık kullanıldığı için kolay referans olası için bunları aşağıdaki Lemma içinde gösteriyoruz.

$$(1.44.b) \quad \int_{L^+} \sqrt{\tau^2 - x^2} e^{i\tau\beta} f^+(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \sqrt{|x|t} e^{i\pi/4(2x + |x|t)} \times \\ \times e^{i\beta x} e^{-\beta t|x|} f^+(x + it|x|) |x| dt$$

üstel fonksiyonun biçimi integrale dominant katkının t nin ancak sıfır civarındaki sonsuz küçük bölgesinden geldiğini göstermektedir. Dolayısıyla bu son integralin $|x| \rightarrow \infty$ için değerlendirilmesi

$$(1.44.c) \quad \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-\beta t|x|} dt = (\beta|x|)^{-3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

şeklindeki Euler integrali ile yapılabilir. (1.44.b) ve (1.44.c) yardımıyla ilk bağıntı kanıtlanır. İkinci bağıntı da tamamen aynı şekilde gösterilir. Son iki bağıntı, integralleri, bu kez alt yarı düzlem üzerindeki kesim üzerine taşıyarak ve aynı işlemleri tekrarlayarak bulunabilir. Fakat en kısa yol ilk iki integralde $\tau = -t$ dönüşümü yapmaktır.

1.11. FREDHOLM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Şimdi artık (1.32) ile verilen integral sisteminin asimtotik olarak ardışık yaklaşımlara gerek olmadan tam çözümünü elde edebiliriz. Eğer bu sistemin ardışık yaklaşımlarla asimtotik değerlendirmesini yap- saydık dominant terimlerin ardışık kırınımlarını elde ederdik. Fakat bu ardışık kırınımlara ilişkin sonsuz terimin hepsi Lemma-1 den yararlanarak bulunabilir. Önce Lemma'nın şartlarının sağlanması için integralin içinde gözüken $G^{\pm}$ leri bu şartlar sağlanacak şekilde (1.28) i kullanarak yazabiliriz, (yani $G^- = G^+G$, $G^+ = G^-G/2$) sonra Lemma'yı kullanarak şu integral

$$(1.45.a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{\pm i\tau\beta} f^{\pm}(\tau) d\tau \sim - e^{i\beta x} Mf^{\pm}(\pm x)$$

$$(1.45.b) \quad M = M(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & i/\sqrt{x} \\ \sqrt{x}/\beta & 0 \end{bmatrix} \sqrt{2\pi/\beta} e^{i\pi/4}$$

bağıntısını yazarız. Böylece integral sistem lineer bir cebirsel sisteme dönüşür:

$$(1.46.a) \quad G^-(v)\psi^-(v) \sim Q_1^-(v) + G^+(x)Me^{i\beta x}\psi^+(x)/2\pi i(x-v)$$

$$(1.46.b) \quad G^+(v)\psi^+(v) \sim Q_2^+(v) - G^-(-x)Me^{i\beta x}\psi^-(-x)/4\pi i(v+x)$$

İlk denklemden $v = -x$ ikinci $v = x$ yazılır ve çözülürse

$$(1.47.a) \quad \psi^-(-x) = [I - e^{2i\beta x} A_2 B_2 / x^2]^{-1} (A_1 - e^{i\beta x} A_2 B_1 / x)$$

$$(1.47.b) \quad \psi^+(x) = [I - e^{2i\beta x} B_2 A_2 / x^2]^{-1} (B_1 - e^{i\beta x} B_2 A_1 / x)$$

elde edilir. Burada

$$(1.47.c) \quad A_1 = [G^-(-x)]^{-1} Q_1^-(-x)/2$$

$$(1.47.d) \quad A_2 = [G^-(-x)]^{-1} G^+(x)M/4\pi i$$

$$(1.47.e) \quad B_1 = [G^+(x)]^{-1} Q_2^+(x)/2$$

$$(1.47.f) \quad B_2 = [G^+(x)]^{-1} G^-(-x)M/8\pi i$$

konmuş olup ayrıca basit bir hesap sonucu da

$$(1.47.g) \quad G^+(x) = \begin{bmatrix} 2^{5/4} x^{3/4} & -2^{-3/4} x^{-1/4} \\ 2^{3/4} x^{1/4} & 2^{-5/4} x^{-3/4} \end{bmatrix}$$

$$(1.47.h) \quad G^{-}(-x) = \begin{bmatrix} 0 & 2(2x)^{-1/4} \\ 2(2x)^{1/4} & (2x)^{-3/4} \end{bmatrix}$$

olduğu da bulunur. Böylece Fredholm sistemi de çözülmüş olmaktadır.

BÖLÜM 2

ARDIŞIK KIRINIMLARIN YÜZEY ÜZERİNDE OLUŞTURDUĞU AKIMLAR VE FİZİKSEL YORUMLARI

2.1. AKIMLARIN İNTEGRAL İFADESİ

Bir önceki bölümde probleme karşı düşen Hilbert problemi çözülmüştü. Bunun sayesinde her noktadaki alan bulunabilir. Fakat biz yalnızca yüzey üzerinde oluşan akımlarla ilgilendiğimizden ve bu akımlar da

$$(2.1.a) \quad J(\phi) = \begin{bmatrix} J_M \\ -i\omega\mu_a J_e \end{bmatrix} = - \int_{-\infty}^{\infty} P(v) e^{-iv\phi} dv \quad \phi \in [0, \beta]$$

bağıntısından hesaplandığından P yi hesaplamamız yeterlidir. (1.13) den P çekilerek yukarıda yerine konursa

$$(2.2.a) \quad J = - \int_{-\infty}^{\infty} S e^{-iv\phi} dv + \int_{-\infty}^{\infty} H(v) \{ e^{iv(\beta-\phi)} \psi^+(v) + e^{-iv\phi} \psi^-(v) \} dv$$

$$(2.2.b) \quad H(v) = \begin{bmatrix} 0 & 1/K(v) \\ K(v) & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Aslında H yerine G çekirdek matrisi vardı. Fakat Jordan ve rezidü teoremleri kullanılırsa G nin $\neq 1$ olan elemanlarının integrasyonu sıfır olur ve yukarıdaki bağıntı kalır. Bu bağıntıdaki bütün büyüklükler

bilindiğinden akımlar hiç olmazsa bir integrasyonla verilmiş olmaktadır. Bu integrasyonları hesap etmek ve bunlar için açık ifadeler vermek imkânsız görünüyor. Ancak yüksek frekanslar için çözümler aradığımızdan bunları asimtotik olarak değerlendirmek uygun olacaktır.

2.2. AKIMLARIN ASİMTOTİK İFADELERİ

Yukarıda verilen akımlara ilişkin integrallerin hepsi daha önceki bölümlerde hesaplanmış bulunan tiplerdir. Örneğin ilk integral Hankel fonksiyonlarının oranını kapsıyor ve geçen bölümde (1.8 ve 1.9) bunun için bir ifade verilmişti. İkinci integral için ise Lemma 1'in bütün şartları sağlandığından (1.45) formülü doğrudan kullanılabilir. O halde hiç bir hesap yapmadan akımların açık ifadesini derhal yazabiliriz:

$$(2.3.a) \quad J = J_0 + J_1 + J_2 = J_0 + M(\phi)\psi^-(x) - M(\beta-\phi)\psi^+(x)$$

$$(2.3.b) \quad J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{0}{1} (I'/2\pi i) H_v^{(1)}(y)/H_v^{(1)}(x) e^{-iv(\phi-\phi_k)} dv$$

$$(2.3.c) \quad J_1 \sim e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi/\phi} e^{ix\phi} \begin{bmatrix} 0 & i/\sqrt{x} \\ \sqrt{x}/\phi & 0 \end{bmatrix} (I - e^{2i\beta x} A_2 B_2 / x^2)^{-1} \times \\ \times (A_1 - e^{i\beta x} A_2 B_1 / x)$$

$$(2.3.d) \quad J_2 \sim -e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi/(\beta-\phi)} e^{ix(\beta-\phi)} \begin{bmatrix} 0 & i/\sqrt{x} \\ \sqrt{x}/(\beta-\phi) & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times (I - e^{2i\beta x} B_2 A_2 / x^2)^{-1} (B_1 - e^{i\beta x} B_2 A_1 / x)$$

Görüldüğü gibi J_1 ve J_2 akımlarının asimtotik ifadesi ayrıtlara çok yakın noktalarda kullanılamaz durumdadır. Yani üniform olmayan bir asimtotik

formül elde ettik. Uniform bir asimtotik ifade bulmak Kırınımın Uniform Asimtotik Teorisi bakımından ilginç olabilirdi. Ancak integral içinde G^+ fonksiyonları görüldüğünden böyle bir ifade bulabilmek hiç de kolay görünmüyor.

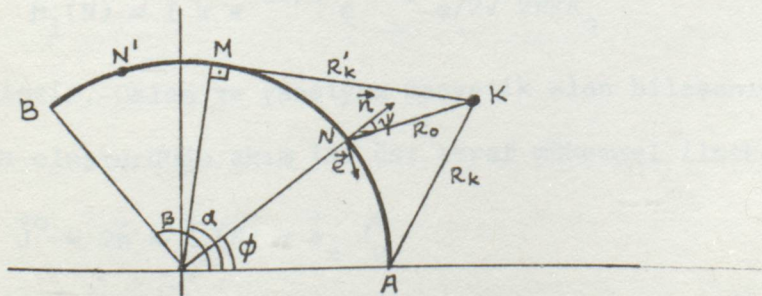
2.3. AKIM BİLEŞENLERİNİN FİZİKSEL YORUMU

Bulunan akım bileşenlerinin fiziksel yorumu (2.3) ile verilen akımların herbir bileşeni teker teker incelenerek yapılacaktır. Görüldüğü gibi J_1 ve J_2 ikişer terimden oluşmaktadır. Her bir terim ise sonsuz terimli geometrik bir dizinin toplamıdır. Bunların yorumunu kolayca yapabilmek için KGOT den elde ettiğimiz şu iki özellik kullanılacaktır:

1- Akım ifadelerindeki tekil noktalar alanın kırınıma uğradığı yerlerdir.

2- Işınlardan izlediği yol faz terimlerine bakılarak anlaşılabilir. Çünkü KGOT ye göre bir P noktasından Q noktasına giden ışının fazı yol farkı $\times$ dalga sayısı kadar değişir. O halde yalnızca faz terimlerini kontrol ederek alan bileşenlerinin hangi yolu izleyerek o noktaya geldiğini anlamak mümkün olur. Akımlar ise alanların teğetsel bileşenleri olduğundan aynı kurallar geçerlidir.

İncelemede geçen büyüklükler Şekil-2.1 de gösterilmiştir.



Şekil - 2.1. İncelemede kullanılan geometri ve büyüklükler

J_0 AKIMI: İlk önce J_0 teriminden başlayalım. Bu integralin asimtotik ifadesi (1.8) ve (1.9) bağıntılarıyla verilmişti. Oradaki irdeleme KN doğrusunun yüzeyin normaliyle yaptığı açıya göre, yani bu noktanın kaynak tarafından doğrudan aydınlatılması veya aydınlatılmaması durumuna göre, iki farklı ifade ortaya çıkarmıştı. Bu ise ayırıt ve yüzey kırınımına karşı düşüyordu. Zaten Şekil-2.1 den de bu görülmektedir: Akımın N noktasındaki ifadesi bu noktanın M ile B arasında olması halinde yüzey kırınımı, M ile A arasında olması halinde biraz sonra görüleceği gibi gelen alanın oluşturduğu akımı ifade edecektir. (1.8) ve (1.9) formüllerinde

$$(2.4) \quad \phi_k \rightarrow \phi_k - \phi$$

konularak aranan bağıntılar bulunur.

$$(2.5.a) \quad J_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{cases} (I'/2\pi\sqrt{2})e^{-i\pi/4} e^{ikR_0} k \cos\psi/\sqrt{kR_0} & \phi \in (0, \alpha) \\ -I'\sqrt{2/\pi kR_k} e^{ik(R'_k + \widehat{MN'})} / \dot{H}_{V_1}(x) & \phi \in (\alpha, \beta) \end{cases}$$

Görülüyorki bu terime ilişkin manyetik akım sıfırdır. Fiziksel olarak bunların ne olduklarını daha iyi görebilmek amacıyla elektrik akımı yüzeyin doğrudan kaynağı gören bölgesi için açıkça yazalım:

$$(2.6) \quad J_0^e(N) = I e^{-i\pi/4} e^{ikR_0} k \cos\psi/\sqrt{2\pi kR_0}$$

Öte yandan gelen alanın manyetik bileşeni bu noktada

$$(2.7) \quad \vec{H}_i(N) = I k e^{-i\pi/4} e^{ikR_0} \vec{e}/2\sqrt{2\pi kR_0}$$

ile verilmiştir. Gelen ve yansıyan manyetik alan bileşenlerinin yüzeyin bu kısmında oluşturduğu akım ise üst taraf mükemmel iletken olduğundan

$$(2.8) \quad \vec{J}^o = 2\vec{n} \times \vec{H}_i(N) = \vec{a}_z J_0^e$$

dir. Görülüyorki J_0^e akımı doğrudan kaynaktan gelen alanın oluşturduğu

akımdır. Buna yüzey akımının geometrik optik terimi de denir.

Yüzeyin kaynağı görmeyen MB yayında oluşan akıma ilişkin ifade (2.5.b) ile verilmişti. Bu terimin fazı $R'_k + \widehat{MN'}$ dür. Yani alan M noktasına gelip yüzey üzerinde sürünerek N' noktasına varmaktadır. (2.5.b) ise bu N' noktasındaki akımın değerini vermektedir. Oysaki genlik terimi gelen alanın oluşturduğu akıminkinden farklıdır. Bu nedenle gelen alanın burada bir "yüzey kırınımına" uğradığı söylenir. Demekki bu terim kaynaktan doğrudan gelen alanın yüzey kırınımına uğramasıyla oluşan ilk akım terimidir.

M noktasındaki geometrik optik akımını yüzey kırınımı akımına bağlayan bir dönüşüm katsayısı tanımlamak mümkündür. Ancak geometrik optik akım bu noktada sıfırdır. Bu nedenle genellikle yapıldığı gibi bir slop kırınım katsayısı tanımlanır.

$$(2.9.a) \quad J_o^{es} \vec{a}_z = \frac{\partial}{x \partial \phi} J_o^e(M) T_c \cdot e^{iv_1 \cdot \widehat{MON}}$$

buradan bu katsayı

$$(2.9.b) \quad T_c = 2i/H_{v_1}^{(1)}(x)$$

olarak bulunur.

J_1 AKIMLARI: A Ayırıtında Kırınımalar. J_1 akımının, A ayırıtından kırınım sonucu oluşan akımların baskın olan ilk terimlerinin hepsinin toplamı olduğu $\phi=0$ daki tekilliğinden anlaşılmaktadır. Daha ayrıntılı bir görüş elde etmek için faz terimlerine bakmalıyız. Bu amaçla matrisin tersi olarak görünen ifadeyi bir geometrik seri olarak yazalım. Bu serinin her bir terimi aslında daha önce çözdüğümüz Fredholm sisteminin dışık yaklaşımlarıyla elde edilecek terimlerinin bir kısmıdır. Dolayısıyla

yakınsaklık problemi olmayacaktır. Aslında $\text{Im } x > 0$ alındığından bu seri kuşkusuz yakınsaktır ve ayrıca bir incelemeye gerek kalmaz. Bu işlem yapılır ve exponansiyel ifadeler kuvvetlerine göre sıralanırsa baştaki terimleri C ile gösterilirse

$$(2.10) \quad J_1 = C e^{ix\phi} (A_1 - A_2 B_1 e^{i\beta x/x} + A_2 B_2 A_1 e^{2i\beta x/x^2} - e^{3i\beta x} A_2 B_2 A_2 B_1 / x^3 + \dots) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (J_{1,2n} + J_{1,2n+1})$$

biçimindedir. Görülüyorki bu akım sonsuz tane akım bileşeninin toplamıdır. n nin çift terimlerinde A_1 yani $Q_1^-(x)$ tek terimlerinde ise B_1 yani $Q_2^+(x)$ görünmektedir. O halde bu terimlerin fazları

$$(2.11.a) \quad \phi_{2n} = k(R_k + 2n\beta + a\phi)$$

$$(2.11.b) \quad \phi_{2n+1} = k(R'_k + a(\beta - \alpha) + (2n+1)\beta + a\phi)$$

olup katedilen yollar açıkça görülmektedir. Sözgelimi $J_{1,0}$, R_k kadar yol almış yani A ayırıtına gelmiş ve orada kırınıma uğramış alanın yüzey üzerinden sürünerek oluşturduğu akımdır. Yorumu daha kolay görmek için $\text{faz}/k = \ell$ yazıp açısal büyüklükler yerine yaylar cinsinden yazacağız ve katedilen yolları da katedilmelerine göre sıralayacağız. Böylece akımların kimliği hemen görülebilecektir:

$$(2.12.a) \quad \ell_{2n} = R_k + \widehat{AN} + 2n \cdot \widehat{AB}$$

$$(2.12.b) \quad \ell_{2n+1} = R'_k + \widehat{MB} + \widehat{BA} + \widehat{AN} + 2n \cdot \widehat{AB}$$

Bunlara bakarak $J_{1,2}$ akımını yorumlayalım. Bu akım A ayırıtından kırınan ve sürünerek B ye gelen ve orada tekrar kırınıma uğrayıp sürünerek yeniden A ya gelip orada bir daha kırınarak oluşan alanın yüzey üzerinde sürünerek B ye doğru giderken oluşturduğu akımdır. $J_{1,2n}$ o halde bu şekilde $2n$

defa A da $2n-1$ defa B de ardışık olarak kırınan alanın yüzey üzerinde oluşturduğu akımları temsil ediyor.

$J_{1,2n+1}$ nin yol bağıntısından kimliği hemen görülmektedir. $J_{1,1}$ M de yüzey kırınımına sonra B de ayırıt kırınımına ve A da yeniden kırınan alanın yüzey üzerinde oluşturduğu akımdır. $J_{1,2n+1}$ ise aynı olayın n defa ardışık oluşumuyla ortaya çıkan yüzey akımlarıdır. Not edilmeli ki $e^{ix\phi}$ terimi bunların ϕ ler doğrultusunda aktığını göstermektedir.

J_2 AKIMLARI: Bu akım grubu $\phi=\beta$ da tekilliğe sahip olduğundan J_1 için yapılan yorumlar bu kez B ayırıtı için aynen tekrarlanacaktır. $e^{-ix\phi}$ teriminin varlığı bütün hepsinin B den A ya aktığını göstermektedir. Doğrusuyla bunlar en son B de kırınarak yüzey üzerinde sürünen alanların oluşturdukları akımlardır. Yine geometrik seriye açıp artan kuvvetlerine göre sıralanırsa

$$(2.13) \quad J_2 = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2,2n} + J_{2,2n+1}$$

formundadır. Yalnız bu kez çift terimler B_1 tek terimler A_1 matrisini ihtiva ettiğinden tek terimler ayırıt kırınımıyla başlayan akımları, çift terimler ise yüzey kırınımıyla başlayan akımların ardışık kırınımalarını temsil edecektir. Doğrudan yollar yazılırsa kimlik tespiti hemen görülebilir:

$$(2.14.a) \quad \ell'_{2n} = R'_k + \widehat{MB} + \widehat{BN} + 2n \cdot \widehat{AB}$$

$$(2.14.b) \quad \ell'_{2n+1} = R'_k + \widehat{AB} + \widehat{BN} + 2n \cdot \widehat{AB}$$

Sözgelimi $J_{2,1}$ A ayırıtından kırınan ve sürünerek B ye gelip kırınarak geri dönen alanın yüzey üzerinde oluşturduğu akımdır, vs. 0 halde ardışık kırınımalar aşağıdaki sırayı izlemektedir. A ayırıtından kırınımına başlayan

alanların ardışık kırınımları ve bunların akımları:

$$J_{1,0} \rightarrow J_{2,1} \rightarrow J_{1,2} \rightarrow J_{2,3} \dots : J_{1,2n} \rightarrow J_{2,2n+1}$$

Yüzey kırınımı sonucu oluşan alanın ardışık kırınımları ve akımları:

$$J_{2,0} \rightarrow J_{1,1} \rightarrow J_{2,2} \rightarrow J_{1,3} \rightarrow \dots : J_{2,2n} \rightarrow J_{1,2n+1}$$

Artık bu akımları birbirine bağlayan bir akım dönüşüm katsayıları kolaylıkla verilebilir.

$$(2.15.a) \quad J_{2,2n} e^{-ix\phi} = T_{12} e^{ix\phi} J_{1,2n}$$

ile tanımlanacak olan $J_{1,2n}$ akımlarının, $J_{2,2n+1}$ akımlarına nasıl dönüş-
tüğünü belirten katsayının açık ifadesi

$$(2.15.b) \quad T_{12}^1 = DB_2$$

$$(2.15.c) \quad D = - \begin{bmatrix} \phi^{3/2}/(\beta-\phi) & 0 \\ 0 & \sqrt{\phi(\beta-\phi)} \end{bmatrix} e^{i\beta x/x}$$

benzer şekilde,

$$(2.16) \quad J_{2,2n} e^{-ix\phi} = T_{21} e^{ix\phi} J_{1,2n+1}$$

tanımlanarak

$$(2.16.b) \quad T_{21} = DA_2$$

olarak bulunur. O halde aşağıdaki sonucu elde ettik:

TEOREM (İdemen Öngörüsü): Aynı ayırtan kırınarak oluşan akımlar aynı dönüşüm kuralına uyarlar.

Böylece bu öngörünün böyle bir sistem için matematiksel kanıtını vermiş oluyoruz. Bu gerçek akımları veren ifadenin bir geometrik dizi

oluşturmasından kaynaklanıyor. Çünkü yalnızca geometrik bir seri için herhangi bir terim öncekinden aynı katsayı ile çarpılarak bulunur.

BÖLÜM 3 TARTIŞMA VE SONUÇ

BÖLÜM 3

TARTIŞMA VE SONUC

Bu çalışmada soft-hard denen bir tarafı mükemmel elektrik iletken, diğer tarafı mükemmel manyetik iletken olan bir silindirik şerit üzerinde ardışık kırınımları ve bunlara karşı gelen akımların dominant terimleri incelenmiştir. Bu problem kırınım teorisinde az incelenmiş olan bir konu hakkında anlayışımızın zenginleşmesine katkıda bulunmaktadır. Problemin çözümünü olanaklı kılan tarihsel koşullara bakıldığında niçin daha önceleri incelenemediği kolayca anlaşılabilir. Gördükki kanonik problemin ortaya çıkardığı Hilbert Problemindeki çekirdek matrisi asimtotik halde bile gözlemle faktörize edilememektedir. Bu faktörizasyona imkân veren yöntem Hurd tarafından 1975 de bulunmuş, sözkonusu matris ise 1981 de Rawlins ve Williams tarafından faktörize edilmiştir. Doğal olarak her iki tarafı farklı sınır şartlarına sahip yüzeylerin ayırıt kırınımının incelenmesinde matris Wiener-Hopf veya Hilbert problemleriyle karşılaşılır. O halde matris faktörizasyonunun gözlemle yapılamadığı hallerde büyük güçlüklerle hatta imkânsızlıklarla karşı karşıya kalınacaktır. Şeritin ortaya çıkardığı güçlük ise kullandığımız yöntem gereği ikinci bir faktörizasyonun daha gerekli olmasıdır. Bu çalışmada tesadüfen, matrisin bir özelliği sayesinde, ikinci faktörizasyon birinciden hemen elde edilebil-

miştir. Hilbert probleminin bir Fredholm integral sistemine dönüştürülmesinden sonra integrallerin asimtotik ifadelerinin verdiği bir imk nla Fredholm sisteminin cebirsel bir sisteme dönüşmesi ve bunun da sonsuz terimli geometrik seri olarak yazılabilmesi, hem ardışık kırınlımların fiziksel mahiyetini gözler önüne sermiş, hem de "İdemen Konjekt r " denen yani yüzey üzerinde ayrıtlara gidip tekrar dönen akımların aynı kuralla göre birbirine dönüştüğü varsayımını, tahminini matematiksel olarak kanıtlamamızı sağlamıştır.

Böylece yüzey üzerinde yüksek frekanslar sonucu oluşan akımların ardışık kırınlımlarının her bir terimi için açık ifadeler verilmiş, bunların birbirine nasıl dönüştüğü gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] . D.S.Jones, "The Theory of Electromagnetism", Pergamon Press, 1964.
- [2] . Baker and Copson, "The Mathematical Theory of Huygens Principle", Oxford, 1939.
- [3] . J.B.Keller, "The Geometrical Theory of Diffraction", J. Optic. Soc. Amer. Vol. 52, 1952.
- [4] . P.Y.Ufimtsev, "Diffraction by a Wedge and by a Strip", Soviet Physics, Tech. Physics, 27, 1957.
- [5] . Levis, M., "Uniform Asymptotic Theory of Edge Diffraction", J. Math. Phys. Vol. 10, 1969.
- [6] . R.C.Menendez, S.W.Lee, "Analysis of Rectangular Horn Antennas Via UAT", IEEE Ant. and Prop. March 1982.
- [7] . Clemmov, "Infinite Integral Transformations on Diffraction Theory", IEEE, 1959.
- [8] . M.İdemen, G.Uzgören, "Some Diffraction Coefficient Related to Diffraction at the Edges of Curved Reflectors", 12th Europ. Microwave Conf. Helsinki, (1982).
- [9] . Rawlins, Williams, "Matrix Wiener-Hopf Factorization", Quart. J. Mech. Appl. Math. 1981.

- [10]. Noble, "Methods Based on Wiener-Hopf Technique", Pergamon Press, 1958.
- [11]. A.Büyükaksoy, G. Uzgören, "Contribution of the Secondary Diffraction to the Surface Current Induced on a Perfectly Conducting Cylindrical Strip", Bull. of Tech. Univ. of Istanbul, Vol. 38, No.1, 1985.
- [12]. Uzgören, G., Büyükaksoy, A., "Kırınımın Geometrik Teorisinde Birinci Mertebeden Kanonik Problemler", Yıldız Üniv. Yayınları, İstanbul, 1986.
- [13]. Rawlins, A.W., "The Solution of a Mixed Boundary Value Problem in the Theory of Diffraction by a Semi-Infinite Half-Plane", Proc. Roy. Soc. London (1975), 356.
- [14]. A.Büyükaksoy, "Diffraction Coefficients Related to Cylindrically Curved Soft-Hard Surfaces", Ann. Telecom. 40, No.7-8, 1985.

ÖZGEÇMİŞ

Çintay GÖKSU, 6.11.1954'de Artvin'de doğmuş, ilk ve orta öğrenimini (Haydarpaşa Lisesi) İstanbul'da tamamlamıştır. 1978'de İ.T.Ü. Elektronik ve Haberleşme Bölümünden mezun olmuştur. Askerlik hizmetini 1980-81 de tamamladıktan sonra, 1984 yılında İ.T.Ü. de Lisansüstü eğitimini Mikrodalga ve Alanlar bölümünde tamamlamıştır. Şu anda Yıldız Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Bölümü Elektromanyetik Alanlar ve Mikrodalga Bilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.