

95024

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KÜÇÜK PARÇACIK TOPLULUKLARINDAN
ELEKTROMAGNETİK DALGA SAÇILMASI**

Elektronik ve Haberleşme Yük. Müh. Kamil DİMİLİLER

**F.B.E Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Haberleşme Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi

Tez Danışmanı

Jüri Üyeleri

: 11 Şubat 2000
: Prof. Dr. Taner ŞENGÖR (Y.T.Ü.)
: Prof. Dr. Ercan TOPUZ (İ.T.Ü.)
: Prof. Dr. Fahri BURŞUK (İ.Ü.)
: Prof. Dr. Selim ŞEKER (B.Ü.)
: Yard. Doç. Dr. Aktül KAVAS (Y.T.Ü.)

İSTANBUL, 2000

ÇİNDEKİLER

Sayfa

İMGE LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖZELGE LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
1 GİRİŞ	1
2 SFEROİDAL DALGA FONKSİYONLARI.....	7
2.1 Dalga Denkleminin Sferoidal Koordinatlar Sisteminde Değişkenlerine Ayrılması.....	8
2.2 Sferoidal Dalga Fonksiyonları.....	10
2.2.1 Açısal fonksiyonlar	11
2.2.2 Ayırma sabitlerinin hesaplanması.....	12
2.2.3 Radyal fonksiyonlar	16
2.2.4 Vektör fonksiyonlar	18
2.3 Sayısal Örnekler.....	18
3 TEK PARÇACIKLI PROBLEM.....	21
3.1 Alanların Vektör Fonksiyonlar Cinsinden Açılımı.....	22
3.2 Sınır Koşullarına İlişkin Denklemlerin Ayrıştırılması.....	25
3.3 Uzak Alan Bağlılıları.....	29
3.4 Sayısal Sonuçlar.....	31
4 TABAKA ŞEKLİ OLASIL ORTAMDAN SAÇILMA PROBLEMİ	35
4.1 İletim Teorisi	35
4.2 Referans Düzlemlerinin Dönüşümü	38
4.3 Problemin 1. Mertebeden Çoklu Saçılma Yaklaşımı ile Çözümü.....	40
4.4 Faz Matrisinin Ayrıştırılması.....	42
4.5 Simetri Ekseninin Tabaka Düzlemine Dik Olduğu Duruma İlişkin Sayısal Çözüm....	45
4.6 Sayısal Sonuçlar.....	48
5 SONUÇLAR ve ÖNERİLER	53
5.1 Sonuçların Literatürdeki Çalışmalarla Karşılaştırılması.....	54
5.2 Gelecek Çalışmalar	60
KAYNAKLAR	62

EKLER	66
EK 1 Diferansiyel Denklemler	66
EK 2 İstatistiksel Özellikler.....	68
EK 3 Stokes Parametreleri.....	69
EK 4 Referans Düzlemleri Arasındaki Açık	71
EK 5 Faz Matrisinin Elemanlarının Fourier Bileşenlerine Ayrıştırılması	72
EK 6 Hesaplanan Ayırma Sabitlerinin Flammer'in tabloları ile Karşılaştırılması.....	75
ÖZGEÇMİŞ	87



SİMGE LİSTESİ

θ	Küresel koordinatlarda z eksenine ile yapılan açıya ilişkin değişken
ξ	Sferoidal koordinatlar sistemindeki radyal değişken
η	Sferoidal koordinatlar sistemindeki açısal değişken
ϕ	Sferoidal koordinatlar sisteminde simetri eksenine, küresel koordinatlarda z eksenine etrafında dönmeye ilişkin değişken
c	Dalga sayısı ile sferoidin yarıdai uzunluğunun çarpımına eşit olan büyüklük parametresi
a/b	Sferoidin büyük ekseninin küçük eksenine oranı (şekil parametresi)
$\lambda_{mn}(c)$	Sferoidal ayırma sabitleri
$S_{mn}^{(i)}(c; \eta)$	Sferoidal açısal öz fonksiyonlar
$P_n^m(\eta)$	Birinci tip asosiyatif Legendre fonksiyonları
$Q_n^m(\eta)$	İkinci tip asosiyatif Legendre fonksiyonları
$R_{mn}^{(j)}(c; \xi)$	Sferoidal radyal öz fonksiyonlar
$j_n(z), y_n(z), h_n^{(i)}(z)$	Küresel Bessel fonksiyonları
$\bar{M}_{\epsilon mn}(c; \xi, \eta, \phi)$	Sferoidal vektör öz fonksiyonlar
$\bar{N}_{\epsilon mn}(c; \xi, \eta, \phi)$	Sferoidal vektör öz fonksiyonlar
$T_{ij}(\theta, \phi)$	Asano ve Yamamoto'nun kullandığı saçılma parametreleri (Bir katsayı farkıyla saçılma genliği matrisi elemanlarına eşittirler)
i_{ij}	T_{ij} genliklerine ilişkin şiddetler
$\sigma(\theta), \chi(\theta)$	Saçılan alanların açısal değişimlerine ilişkin fonksiyonlar
μ	$\cos(\theta)$ 'ya eşit
$[f]$	Saçılma genliği matrisi
$[P(\mu, \phi, \mu_0, \phi_0)]$	İletim denklemindeki faz matrisi
$I(\vec{r}, \vec{e})$	Yer vektörü $\vec{r}$ ile belirli noktada $\vec{e}$ yönünde yayılan özgül şiddet
$[I]$	Stokes vektörü, dört adet özgül şiddetin oluşturduğu sütun matris
σ_t	Toplam radar kesit yüzeyi
τ_0	Optik uzaklık

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Sferoidal koordinatlar sistemi..... 8
Şekil 2.2	$c=1.0$ için açısal fonksiyonlar 19
Şekil 2.3	$c=1.0$ için açısal fonksiyonlar 19
Şekil 2.4	$m=0, n=0$ için açısal fonksiyonlar..... 19
Şekil 2.5	$m=0, n=1$ için açısal fonksiyonlar..... 20
Şekil 2.6	$c=2.0$ için birinci tip radyal fonksiyonlar 20
Şekil 2.7	$c=2.0$ için ikinci tip radyal fonksiyonlar 20
Şekil 3.1	Tek parçacıklı problem..... 21
Şekil 3.2	Tek parçacıklı problemin geometrisi..... 22
Şekil 3.3	$\zeta=45^\circ$ lik geliş açısı ve $a/b=1.1$ için saçılma genliği matrisi elemanları 30
Şekil 3.4	$\zeta=45^\circ$ lik geliş açısı ve $a/b=2.0$ için saçılma genliği matrisi elemanları 31
Şekil 3.5	$\zeta=45^\circ$ lik geliş açısı ve $a/b=3.0$ için saçılma genliği matrisi elemanları 32
Şekil 3.6	$c_1=1.0, a/b=2.0$ ve farklı geliş açıları için saçılma genliği matrisi elemanları . 33
Şekil 3.7	$c_1=1.0, a/b=2.0$ için saçılma şiddetlerinin geliş açısı ile değişimleri 34
Şekil 4.1	Problemin geometrisi 35
Şekil 4.2	Küçük silindirik hacim içinde enerjinin yayılması 35
Şekil 4.3	(α_1, β_1) kadar dönmüş sistemin referans düzlemlerinin dönüşümü..... 39
Şekil 4.4	Tabakadan ileri yönde saçılan I1 bileşeninin θ ve ϕ ile değişimi 49
Şekil 4.5	Tabakadan geriye doğru saçılan I1 bileşeninin θ ve ϕ ile değişimi 49
Şekil 4.6	Tabakadan ileri yönde saçılan I2 bileşeninin θ ve ϕ ile değişimi..... 50
Şekil 4.7	Tabakadan geriye doğru saçılan I2 bileşeninin θ ve ϕ ile değişimi 50
Şekil 4.8	Sol el dairesel ve lineer polarizasyonlu gelen dalgalara göre ileri yönde saçılan difüze şiddetlerin karşılaştırılması..... 51
Şekil 4.9	Sol el dairesel ve lineer polarizasyonlu gelen dalgalara göre geriye doğru saçılan difüze şiddetlerin karşılaştırılması..... 51
Şekil 4.10	Sferoid eksenlerinin tabaka normali ile 0° ve 10° lik açı yaptığı durumlarda ileriye doğru saçılan şiddetlerin karşılaştırılması..... 52
Şekil 4.11	Sferoid eksenlerinin tabaka normali ile 0° ve 10° lik açı yaptığı durumlarda geriye doğru saçılan şiddetlerin karşılaştırılması..... 52
Şekil 4.12	Birinci mertebeden çoklu saçılma yaklaşımı ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması 52
Şekil 5.1	Asano ve Yamamoto'nun (1975) 6. ve 8. şekillerine eşdeğer parametrelerle çizilmiş şekiller ($c=1.0, a/b=2.0$ ve $n=1.33$) 56
Şekil 5.2	Rayleigh yöntemi ile sferoidal fonksiyonlara açılım yöntemlerinin, gelen alanın simetri eksenine paralel geliş durumu için karşılaştırılması..... 57
Şekil 5.3	Büyük eksenin küçük eksene oranının büyümesi ile sferoidal saçıcının küresel saçıcıdan farklılaşmasını gösteren bir örnek..... 58
Şekil 5.4	$\epsilon_r=1.78$ olan sferoidal saçıcıya ilişkin toplam radar kesit yüzeylerinin karşılaştırılması 60
Şekil 5.5	Olasıl konumlu sferoidal parçacıklar içeren tabakanın depolarizasyon parametreleri 61

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 5.1	Tek parçacıklı problem için kullanılan başlıca yöntemler 55
Çizelge Ek 3.1	Değişik polarizasyonlar için pozitif z yönünde yayılan dalgalara ait Stokes parametreleri 71
Çizelge Ek 5.1	$f_m(\phi)$ ve $g_m(\phi)$ fonksiyonlarına bağlı olarak (Ek 5.3) eşitliğindeki $h_k(\phi)$ fonksiyonları ile K_1 , K_2 sabitlerinin alabileceği değerler 73
Çizelge Ek 5.2	Birinci toplamda k 'nın alabileceği değerler 74
Çizelge Ek 5.3	İkinci toplamda k 'nın alabileceği değerler 74
Çizelge Ek 6.1	$m=0$ ve $n=0$ için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma 76
Çizelge Ek 6.2	$m=0$ ve $n=1$ için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma 77
Çizelge Ek 6.3	$m=0$ ve $n=2$ için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma 78
Çizelge Ek 6.4	$m=0$ ve $n=3$ için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma 79
Çizelge Ek 6.5	$m=1$ ve $n=1$ için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma 80
Çizelge Ek 6.6	$m=1$ ve $n=2$ için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma 81
Çizelge Ek 6.7	$m=1$ ve $n=3$ için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma 82
Çizelge Ek 6.8	$m=2$ ve $n=2$ için Flammer (1957) Çizelge 12 ile karşılaştırma 83
Çizelge Ek 6.9	$m=2$ ve $n=3$ için Flammer (1957) Çizelge 12 ile karşılaştırma 84
Çizelge Ek 6.10	$m=3$ ve $n=3$ için Flammer (1957) Çizelge 12 ile karşılaştırma 85
Çizelge Ek 6.11	$m=1$ ve Flammer (1957) Çizelge 11'deki seçilmiş değerler ile karşılaştırma 86

ÖNSÖZ

Çalışmanın her aşamasındaki yönlendiriciliği ve vazgeçilmez katkılarından dolayı danışmanım Sayın Prof. Dr. Taner ŞEGÖR'e; olumlu yaklaşımları ile çalışmanın sağlıklı ilerlemesine katkıda bulunan tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Ercan TOPUZ ve Sayın Yard. Doç. Dr. Aktül KAVAS'a teşekkür ederim. Sağladıkları çalışma ortamı nedeniyle Y.T.Ü. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'ndeki hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim. Hocalarım Sayın Öğr. Gör. Dr. Cahit CANBAY'a, Yard. Doç. Dr. Çintay GÖKSU'ya, arkadaşlarım Arş. Gör. Refet RAMİZ, Yard. Doç. Dr. Hamid TORPİ ve Yard. Doç. Dr. Özlem ÜNVERDİ'ye dostça yaklaşımlarından ve yakınlıklarından dolayı ayrıca teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Eğitimim süresince özveri ile desteklerini hiç esirgemeyen anneme, babama, kardeşlerime ve herşeyi paylaştığımız sevgili eşim Havva'ya teşekkür ederim.

Kamil Dimililer

İstanbul, 2000



ÖZET

Tabaka şekilli ve olasıl konumlu fakat küresel olmayan parçacıklar içeren ortamlar haberleşme ve uzaktan algılama ile ilişkili pek çok gerçek olayın modellenmesi amacıyla kullanılırlar. Sferoid şekilli saçıcılar, küresel olmayan saçıcılara ilişkin olarak en sık ele alınan örneklerdendir. Ayrıca, olasıl ortamlarla ilgili problemlerin çözümünde, iletim teorisinin (radiative transfer theory) yöntemleri sıklıkla kullanılmaktadır. Literatürde, küresel olmayan olasıl saçıcılar içeren tabaka şekilli ortamlardan saçılmaya ilişkin çeşitli çözümler, parçacık boyut ve/veya elektriksel özelliklerinin kısıtlanmış değerleri için elde edilmiş tekli saçılma çözümleri iletim teorisine adapte etmek suretiyle elde edilmiştir. Bu çalışmada, parçacık boyutu veya elektriksel özelliklerine sınırlama getirmeyen sferoidal dalga açılımları yöntemi, dielektrik sferoidler içeren tabaka şekilli olasıl ortamdan saçılma problemini incelemek amacıyla iletim teorisine uyarlanmıştır.

Çalışmanın başında, sferoidal dalga fonksiyonları incelenmiş ve ayırma sabitleri literatürdeki Bouwkamp yönteminden daha hızlı, alternatif sayısal bir yöntemle $c < 7.0$ için elde edilmiştir. İkinci aşamada, sferoidal dalga açılımları yöntemi ile düzlemsel dalganın sferoidden saçılması problemi ele alınarak yeniden düzenlenmiştir. Sferoidal dalga fonksiyonlarına ve tek sferoidden saçılma probleminin çözümüne ilişkin sayısal sonuçlar, Borland C programlama dili kullanılarak hazırlanan programlarla elde edilmiştir. Son aşamada ise, tekli probleme ilişkin olarak elde edilen sonuçlar kullanılarak, referans düzlemlerinde uygun dönüşümler yapmak suretiyle iletim denklemindeki faz matrisi elde edilmiştir. Çalışmada geliştirilen referans düzlemlerinin dönüşümü, eksenel simetriye sahip farklı saçıcıların bulunduğu benzer problemlerin çözümü için de kullanışlıdır. Böylece elde edilen vektör iletim denklemi, çeşitli konfigürasyonlar için birinci mertebeden çoklu saçılma yaklaşımı ile çözülmüştür. Ayrıca, sferoid eksenlerinin tabaka normaline paralel olduğu özel duruma ilişkin sayısal çözüm de elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sferoidal dalga fonksiyonları, sferoidal saçıcılar, iletim teorisi, olasıl (rastgele) ortam, elektromagnetik dalga saçılması

ABSTRACT

A slab of random medium, which contains non-spherical particles is used to model various real problems related to communication and remote sensing. Spheroidal scatterers are the most popular examples of non-spherical scatterers. Radiative transfer theory (transport theory) is used to solve the problems related with random media. There are many solutions of the problem of scattering from a slab of medium containing non-spherical particles. These are achieved by adapting the solution of the single scattering problem, which is applicable with some constraints on relative particle size and/or electrical properties of the scatterers to the radiative transfer theory. In this study, the method of spheroidal wave expansions which has no constraints on particle size or electrical properties of scatterers is adapted to the radiative transfer theory to solve the problem of scattering from a slab of random medium which contains dielectric spheroidal particles.

In the first stage, the spheroidal wave functions are investigated. The spheroidal angular eigenvalues are calculated for $c < 7.0$ by a fast numerical method which is alternative to Bouwkamp method that is used in the literature. In the second stage, the solution method for plane wave scattering by a spheroidal particle is reorganized. The spheroidal wave functions and numerical results for the scattering by a spheroidal particle is calculated by using the programmes prepared in Borland C. Then, the phase matrix in the radiative transfer equation is obtained by transforms of the reference planes of the solution of single scattering problem. These transforms of reference planes are suitable for different axis-symmetric shapes also. In this way, the vector radiative transfer equation is solved by the first order multiple scattering approximation. In addition, numerical solution is obtained for a special case which the symmetry axes of spheroids are parallel to the normal of the boundaries of the slab.

Keywords: Spheroidal wave functions, spheroidal scatterers, radiative transfer theory, random media, scattering of electromagnetic waves

1. GİRİŞ

Propagasyon ve saçılma ile ilgili problemleri, deterministik ya da olası (rastgele) oluşlarına göre sınıflandırmak mümkündür. Anten, difraksiyon ve kılavuzlanmış dalgalarla ilgili problemler ile daha pek çok problem ilk grup içerisinde yer almaktadır. Özellikleri uzay ve zamanda olası olarak değişen ortamlarla ilgili problemler ise ikinci gruba dahil edilirler. Bu tür problemlerde çoğunlukla elektromagnetik dalgayla ilgili büyüklüklerin istatistiksel özellikleri üzerinde çalışılmaktadır (Ishimaru, 1978).

Olasıl ortamlar, üç ana grupta incelenebilir: Olasıl ortam (random continua), dalgalı (engebeli) yüzeyler (rough surfaces) ve olası saçıcılar (randomly distributed particles). Birinci grupta yer alan olası ortamlar, örneğin, troposferik ve iyonosferik türbülansa olduğu gibi kırılma indisi uzay ve zamanda rastgele değişen ortamlardır. Deniz yüzeyindeki dalgalanmalar, biyolojik dokular ve organlar arasındaki engebeli yüzeyler dalgalı yüzeylere örnektir. Bu tez çalışmasının konusunu oluşturan olası saçıcılar ise, büyüklükleri bir olasılık dağılım fonksiyonu ile belirli olan homojen bir ortamda rastgele dağılmış çok sayıda saçıcının oluşturduğu ortamlardır. Yağmur, sis, duman, kan hücreleri ve moleküller bu ortamlarla ilgili örneklerdir. Bu tür ortamlarda dalga propagasyonu ve saçılma analizi iki aşamalı olarak yapılır. Önce tek parçacıklı problem ele alınarak saçılma ve soğurma karakteristikleri incelenir; sonra, bunun sonuçlarından yararlanılarak da birden fazla parçacığın bulunmasının ve rastgele dağılmanın etkileri elde edilir (Ishimaru, 1978).

Tek saçıcı bulunan problemlerin çözümü için geliştirilmiş çok sayıda yöntem vardır. Ancak bu yöntemlerin çoklu saçılma durumuna uyarlanması konusundaki çalışmalar daha azdır. Ayrıca bu konuda yapılan çalışmalar ya oldukça basit yapılar üzerine yoğunlaşmak ya da basitleştirici varsayımlar altında problemi ele almak zorundadırlar. Geometriyi basitleştirmek problemi de daha basit hale getirmektedir. Örnek olarak, yağmur damlalarının küre şeklinde olduğunu varsaymak, tek parçacıklı veya çok parçacıklı problem için kullanılacak ya da geliştirilecek yöntemi basitleştirir. Ancak bu varsayım yalnızca çok özel koşullarda doğruya yakın çözüm elde etmeye elverişlidir. Ayrıca saçıcı büyüklüklerinin dalga boyuna göre küçük olduğu varsayımının sağlanması durumunda Rayleigh yaklaşımı uygulanabilmektedir.

Tek parçacıklı problemlere ilişkin çok sayıda çözüm yöntemi vardır (Brussaard ve Watson, 1995). Özellikle küre için Rayleigh yaklaşımı ve Mie çözümü en iyi bilinen yöntemlerdir. Lord Rayleigh, küreden saçılma problemini saçıcının dalga boyuna göre çok küçük olması

durumunda saçıcı içindeki alanın yaklaşık olarak durgun alan olacağını varsayarak çözmüş ve böylece gökyüzünün mavi rengini ilk olarak açıklayabilmiştir (Ishimaru, 1978). Küre için Mie'nin elde ettiği çözüm, küresel koordinatlar sisteminde gelen, saçılan ve küre içine geçen alanları vektör dalga fonksiyonlarının açılımları olarak ifade edilmelerine ve sınır koşullarını sağlayan katsayıların analitik olarak bulunmasına dayanır (Stratton, 1941). Sferoidal dalga fonksiyonlarını kullanarak Mie'nin küre için izlediği yöntemle benzer bir yöntemle sferoidden saçılan alanların hesaplanması olanaklıdır. Ancak sferoidal fonksiyonlarla oluşturulan vektör dalga fonksiyonlarının sferoid yüzeyinde birbirine dik bileşenlere sahip olmamaları nedeni ile yöntem daha karmaşıktır (Asano ve Yamamoto, 1975; Asano 1979;1980). Keyfi şekilli parçacıklardan saçılma problemi de yaygın olarak ele alınmaktadır. Özel birkaç geometriye sahip saçıcılar dışında yaklaşık ve sayısal çözüm yöntemleri üzerinde durmak zorunlu olmaktadır.

Olasıl saçıcılar içeren ortamlardan saçılma probleminin çözümü için kuramsal çalışmalar iki farklı koldan gelişmiştir. Analitik teoride, Maxwell denklemlerinden veya dalga denklemlerinden hareketle parçacıkların saçma ve soğurma özellikleri dikkate alınarak, alanları ifade eden fonksiyonların istatistiksel büyüklükleri arasında uygun diferansiyel veya integral denklemler ortaya konulur. Prensip olarak analitik teori çoklu saçılma, difraksiyon ve girişim etkilerinin tümünün dikkate alınması için elverişlidir; ancak, matematiksel sınırlamalar tüm etkileri dikkate alan uygun bir formülasyona izin vermez. Dolayısıyla belirli koşullar altında geçerli yöntemler geliştirilmiştir. Örnek olarak Foldy-Lax veya Twersky'nin adıyla da anılan çoklu saçılma teorileri verilebilir (Twersky, 1962; Ishimaru, 1978). Ortamda çok sayıda parçacık bulunması durumunda, tek parçacık için elde edilmiş olan çözümün ortak bir referans sisteminde ifade edilmesi gereklidir. Bu konuda küresel parçacıklar içeren ortamlar üzerine yoğunlaşmış genellikle çok sayıda çalışma vardır (Bruning ve Lo, 1971a,1971b; Xu, 1995; Xu ve Wang, 1998). Bu çalışmaların ortak özellikleri tek parçacıklı problem için genellikle Mie çözümünü kullanmalarıdır. Benzer yöntemler iki tane sferoid şekilli saçıcı bulunan konfigürasyonlar için de uygulanmıştır (Beteshwar ve MacPhie, 1983; Cooray ve Ciric, 1989,1991; Nag ve Sinha, 1995). Bu tür çalışmalarda ortaya konan yöntemler açısından genellikle parçacık sayısına ilişkin sınırlamalar yoktur. Ancak bu yöntemler büyük miktarda veri üzerinde çok sayıda işlem yapmayı gerektirdiğinden bilgisayar kapasitesi ile sınırlıdır.

İletim Teorisi ise enerjinin ortamda yayılması problemini ele alır. İletim teorisi, enerjinin yayılımına ilişkin bir integro-diferansiyel denklemin belirli sınır koşulları altında çözümünü gerektirir. Ancak ortamdaki parçacıkların çok yoğun veya çok seyrek olması durumunda

iletim denkleminin analitik yaklaşık çözümü olanaklıdır. Bunun dışında sayısal çözüm yöntemlerine gereksinim vardır. İletim teorisi, tek parçacığın saçılma ve soğurma özellikleri belirlenirken difraksiyon etkileri dikkate alınmış olsa bile, difraksiyon olaylarının çoklu saçılmadaki etkilerini hesaba katmak için elverişli değildir. Ayrıca İletim teorisi olası ortamda alanların salınımları hakkında da doğrudan bilgiler vermez. Buna karşın, analitik teorideki matematiksel zorluk ve sınırlamalar iletim teorisinde azalmaktadır (Ishimaru, 1978). Literatürde, İletim teorisinin sonuçlarını küreleri içeren olası ortamlarla ilgili saçılma ve propagasyon problemlerini çözmek amacıyla kullanan çok sayıda çalışma vardır (Cheung ve Ishimaru, 1982; Ma ve Ishimaru, 1990, 1991; Lam ve Ishimaru, 1993,1995). Ayrıca sferoid şekilli küçük parçacıklar içeren ortamlardan saçılma problemini iletim teorisini kullanarak inceleyen çalışmalar da vardır (Jin, 1994).

Pratikte parçacık topluluklarından saçılma problemi ile iki farklı amaçla ilgilenilmektedir: Özellikle haberleşme sistemlerinde olası saçıcılarından oluşan bir katmanda yayılan dalganın polarizasyon, genlik ve fazı gibi özelliklerindeki değişimlerin analizi (line-of-sight propagation); radar ve uzaktan algılama problemlerinde olduğu gibi olası saçıcılar topluluğundan saçılma problemi. Haberleşme sistemlerinde, gönderilen işaretin hiçbir değişikliğe uğramadan alıcıya ulaşması istenir. Ancak, gönderilen işaret iletim ortamında bozularak ilerler. Örneğin iletim ortamı olarak atmosferin kullanıldığı durumlarda, atmosferin bozucu etkileri taşıyıcı işaretin gücü ve frekansını sınırlayan en önemli etkenlerdir. Özellikle 10 GHz'in üzerinde, dalgaboyu ve atmosfer parçacıklarının (özellikle su molekülleri) etkileri büyük önem kazanır (Brussaard ve Rogers, 1990). Zayıflamanın en önemli nedenleri, atmosferik parçacıkların yayılan enerjiyi soğurması ve saçılmasına neden olmalarıdır. Haberleşmeyi sınırlandıran bir diğer etki ise işaretin polarizasyonundaki bozulmadır. Özellikle ticari uydularda aynı anda aynı frekanslı iki ortogonal işaret kullanarak kapasite artırılır. Ancak polarizasyondaki bozulma, hem alınan işaretin zayıflamasına hem de ortogonal polarizasyonlu işaretle girişime neden olur. Söz konusu etkilerin modellenmesine katkı sağlamak, bu çalışmanın amaçları arasındadır.

Sferoidal Dalga fonksiyonları özellikle akustik ve elektromagnetik teoride önemli fonksiyonlardır. Ancak kullanılmaları silindirik ve küresel fonksiyonlar kadar yaygın değildir. Bu fonksiyonların diğerlerinden ayrıldığı önemli bir nokta, koordinat parametreleri yanında problemin fiziksel özelliklerine de bağlı olmasıdır: Küresel veya silindirik koordinatlarda dalga denkleminin çözümü olarak yazılacak herhangi bir fonksiyon sadece koordinat büyüklüklerine bağlı olup, saçıcı cismin boyutlarından bağımsızdır. Oysa sferoidal

koordinatlarda sferoidin odak uzaklığı ve ortamın dalga sayısı da koordinat sistemini etkilemektedir. Sferoidin büyüklüğü arttıkça fonksiyonların hesaplanmasında problemlerle karşılaşmaktadır. Ayrıca, ortam parametrelerinin kayıplı olası durumunda fonksiyonların hesaplanması ile ilgili çözümü açık olmayan problemler vardır.

Literatürde sferoid şekilli parçacıkların oluşturduğu olası ortamın elektromagnetik saçıcılığını inceleyen çalışmalar da vardır. Söz konusu çalışmalar genellikle Rayleigh çözümüne dayanmaktadır (De Wolf vd., 1991,1996; Jin, 1994). De Wolf öncülüğündeki çalışmalarda atmosferdeki özellikle yaygın yağmur (widespread rain) sırasında gözlenen erime bölgesi (radar gözlemlerindeki parlak band) sferoid şekilli partiküllerin bulunduğu bir katman olarak modellenmiş ve böyle bir katmandan saçılan alanları hesaplamaya yarayan bir model geliştirilmiştir. Jin (1994)'in çalışmasında ise sferoidlerden oluşan rastgele kümelerin bulunduğu tabaka şekilli bir ortamın geri saçılma kesit yüzeyleri, Rayleigh çözümüne dayanan bir yöntemle hesaplanarak kümelenme etkileri incelenmiştir. Literatürde, iletim teorisinin yöntemleri ve sferoidal dalga fonksiyonlarını kullanarak çok sayıda sferoidal parçacık bulunan bir ortamdan saçılma probleminin incelendiği herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Bu çalışmada düzlemsel dalganın, konumları rastgele olan sferoid (spheroid) şekilli dielektrik parçacıkların bulunduğu tabaka şeklindeki bir olası ortamda propagasyonu ve saçılma özellikleri iletim teorisi (Transport Theory, Radiative Transfer Theory) kullanılarak incelenmiştir. Tez çalışması sırasında sadece dik sferoidler için hesaplamalar yapılmış olmakla beraber, kullanılan yöntemler genellikle yatık sferoidler (oblate spheroid) için de geçerlidir. Dolayısı ile özel bir ayırım söz konusu olmadığı takdirde tez boyunca sferoidler için elde edilen sonuçlar, yatık sferoidler haline de adapte edilebilir.

Tek parçacıklı problemin çözümü için kullanılan sferoidal dalga fonksiyonlarının sferoid yüzeyinde ortogonal fonksiyonlara açılımı yönteminin işe yararlılığı saçıcı büyüklüğü ile sınırlanmamaktadır. Dolayısıyla ortaya konulan yöntem daha basit olan Rayleigh yaklaşımına göre daha büyük saçıcıların bulunması durumunda da geçerliliğini korur. Çoklu saçılma için kullanılan iletim teorisinin geçerlilik koşulları gözönüne alındığı zaman tez çalışması ile ortaya konulan yöntemin, çok yoğun olmayan ortamlarda saçıcı büyüklüğünün çok küçükten dalgaboyu civarına kadar genişlediği frekans bölgesinde oldukça kullanışlı olacağı söylenebilmektedir.

Standart matematik programlarının hiçbirisi sferoidal dalga fonksiyonlarını hesaplama yeteneğine sahip değildir. Dolayısı ile fonksiyonların incelenerek, bunları hesaplayacak alt programların hazırlanması gerekmiştir. Tezin 2. Bölümü sferoidal dalga fonksiyonlarının temel özellikleri ve hesaplama yöntemlerinin özetlenmesine ayrılmıştır. Sferoidal fonksiyonların hesaplanmasındaki temel zorluklardan biri ayırma sabitlerinin belirlenmesi gelir. Bu tez çalışması sırasında, ayırma sabitlerinin hesaplanması için literatürde kullanılan Bouwkamp yöntemi yerine daha basit, sayısal bir yöntem kullanılmıştır. Kullanılan yöntemin sonuçları, literatürdeki tablolar ve Bouwkamp yönteminin sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve $c \in (0.01-7.0)$ (c , yarıdök uzaklığı ile dalga sayısının çarpılması sonucu elde edilen büyüklük parametresidir) aralığında doğru sonuç verdiği gözlenmiştir. Kullanılan yöntemdeki temel sorun iyi bir başlangıç değerinin bulunması gerekliliğidir. $c > 7$ için gerek tez çalışmasında kullanılan yöntemin gerekse Bouwkamp yönteminin yaklaşık sonuç vermekle beraber hata fonksiyonunu istenildiği kadar küçültemediği gözlenmiştir. İkinci tip radyal fonksiyonların hesaplanması sırasında da literatürde açık cevabı bulunmayan zorluklarla karşılaşmıştır. 2. Bölümde de açıklandığı gibi, 1. tip radyal fonksiyonların hesaplanmasında kullanılan seri toplamı, küçük argümanlar için 2. tip radyal fonksiyonu için asimptotik seri karakterindedir. Dolayısı ile küçük argümanlar için 2. tip radyal fonksiyonların hesaplanmasında Legendre fonksiyonlarının serileri kullanılmaktadır. Ancak, bazı özel durumlarda çok dar bir aralığa sıkışmış olduğu gözlenen geçiş bölgesinin belirlenmesinde zorluklarla karşılaşmıştır. Bu problemi aşmak için geçiş bölgesi civarındaki bir aralıkta her iki fonksiyon hesaplanarak karşılaştırılmış ve aralık giderek daraltılarak en uygun geçiş noktası bulunmuştur.

İkinci aşamada düzlemsel dalganın sferoidden saçılması için Asano ve Yamamoto (1978) tarafından elde edilmiş olan çözüm ele alınarak formülasyon yeniden düzenlenmiştir: Yöntem, iki farklı mod (TE ve TM modları) için sferoidal vektör fonksiyonların sferoid yüzeyinde ortogonal bileşenlere ayrıştırılması sonucunda elde edilen dört lineer denklem sisteminin çözümüne dayanmaktadır. 3. Bölümde özetlenen yöntemde denklem sistemleri aynı matrissel denklem yapısı ile gösterilebilecek biçimde yeniden düzenlenmiştir. Böylece formülasyondaki karmaşıklık azaltılırken, programlama (kod yazımı) sırasında kolaylıklar sağlanmıştır. Çeşitli parametreler için hesaplanan değerlerle grafikler hazırlanarak, literatürdeki grafiklerle karşılaştırılmıştır. Rayleigh yaklaşımı ile kürelerden saçılma problemlerinin çözümüne ilişkin grafiklerle yapılan karşılaştırmalarda oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Sferoidin bir limit hali olan, büyük eksenin küçük eksene oranının bire; c parametresinin sıfıra yaklaşması durumu ile küre için Mie çözümü arasında yapılan karşılaştırmalarda da uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca sferoidlerin radar kesit yüzeyleri

ileri yönde saçılma teoremine (forward scattering theorem) göre hesaplanmış ve grafikler elde edilmiştir. Genel olarak, oluşan lob sayısının sferoidin dalgaboyuna göre büyüklüğü ile sıkı bir ilişki içinde olduğu, lobların yönlerinin ise gelen dalganın geliş doğrultusuna bağlı olduğu gözlemlenmiştir. Küçük sferoidler için, az sayıda düzgün lob oluşurken, sferoidin boyutu büyüdükçe oluşan lob sayısının beklendiği gibi arttığı ve çeşitlendiği gözlenmiştir.

Çoklu saçılma problemi ise 4. bölümde ele alınmıştır. Bu bölümde, 3. bölümün sonuçları kullanılarak, tabaka şekilli olası ortamlarda iletim teorisindeki faz matrisi formüle edilmiştir. Asano ve Yamamoto'nun çözümünde, sferoidin simetri ekseni ile gelen ve saçılan dalgaların yayılma doğrultusunun oluşturduğu düzlem, referans düzlemi olarak seçilmiştir. Oysa tabaka şekilli olası ortamdan saçılma problemi ele alındığı zaman, referans düzlemlerinin saçıcı konumuna göre değil, tabakaların normaline göre tanımlanmış olması problemin çözümünü kolaylaştırır. Bu açıdan, 3. bölümde elde edilmiş olan çözüm yalnızca sferoid eksenlerinin tabaka normallerine paralel olduğu durumda kullanışlıdır. Dolayısıyla sözkonusu çözümdeki gelen ve saçılan alanlara ait referans düzlemleri uygun açılı dönüşümleri ile tabakanın normali ile sırasıyla gelen ve saçılan alanların yayılma doğrultularının oluşturduğu düzlemlere dönüştürülmüştür. İletim denklemi sferoidlerin değişik konumları ve gelen alanın farklı geliş doğrultuları için seyrek ortam yaklaşımı için çözülmüştür. Parçacık yoğunluğunun artması durumunda iletim denkleminin birinci mertebeden çoklu yaklaşımla çözümü geçerliliğini yitirmektedir. Bu durumda problemin sayısal çözümlerinin bulunması gereklidir. İletim denkleminin sayısal yöntemlerle çözümünün bulunabilmesi için küresel saçıcılar durumundakine benzer bir şekilde faz matrisinin elemanları Fourier bileşenlerine ayrılmıştır. Daha sonra trigonometrik fonksiyonların ortogonalite özellikleri yardımıyla bağımsız integral denklemler elde edilerek "Gaussian Quadrature" yöntemiyle çözülmüştür. Burada sferoidlerin eksenleri ile tabakanın normalinin paralel olduğu, çeşitli geliş açıları ve çeşitli parçacık boyutları için özgül şiddete ilişkin grafikler verilmiştir.

Son bölümde ise tez çalışması boyunca üzerinde çalışılan işlerle ilgili sonuçlar, çözümü geliştirilen problemin olası uygulamaları ile gelecek çalışmalara ilişkin görüş ve öneriler sunulmuştur.

2. SFEROİDAL DALGA FONKSİYONLARI

Sferoidal dalga fonksiyonları trigonometrik fonksiyonlar, Legendre ve Bessel fonksiyonları ile karşılaştırıldığında oldukça seyrek kullanılan fonksiyonlardır. Sferoidal fonksiyonların daha karmaşık olmalarına bağlı olarak, hesaplanmalarında karşılaşılan güçlükler ve ortam parametreleri ve saçıcı büyüklüğünden bağımsız olarak tanımlanamamaları seyrek kullanılmalarının en önemli nedenleri olarak sıralanabilir. Ayrıca, literatürde bu fonksiyonlara ilişkin çalışmalar oldukça az sayıda olup, fiziksel problemlerin çözümü sırasında gereksinim duyulabilecek eşitlik ve dönüşümlerin hazır olarak bulunmasında ve/veya seçilmesinde önemli zorluklarla karşılaşmaktadır. Buna karşılık, sferoidal dalga fonksiyonları uzun yıllardan beridir araştırmacıların ilgisini çekmektedir (Stratton vd., 1941; Flammer, 1957; Wait, 1966). Bunun başlıca nedeni Sferoidal dalga fonksiyonlarının küresel fonksiyonlara göre daha geniş bir problem sınıfının geometrisine uygun olmalarıdır.

Literatürde sferoidal dalga fonksiyonlarını ifade etmek için kullanılan notasyon konusunda açık bir anlaşma yoktur. Buna karşın, Flammer'in (1957) notasyonu yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışma boyunca genellikle Flammer'in notasyonu kullanılmıştır. Sadece, Asano ve Yamamoto'nun (1975), Flammer'den (1957) farklı kullandığı bazı ifadelere sadık kalınmıştır. Bu bölümde, sferoidal fonksiyonların temel özellikleri ve fonksiyonları hesaplamada kullanılan yöntemler özetlenmiştir: Dalga denkleminin sferoidal koordinat sisteminde değişkenlerine ayrılması sonucunda ortaya çıkan adi diferansiyel denklemlerin çözümü olarak sferoidal fonksiyonların temel özellikleri açıklanmış ve fonksiyonları hesaplamak amacıyla kullanılan ayırma sabitlerini elde etme yöntemi verilmiştir. Ayrıca fonksiyonların bazı özelliklerinin ve diğer fonksiyonlarla olan ilişkilerinin anlaşılması için Ek 1'de adi diferansiyel denklemlerin teorisine ilişkin bir özet verilmiştir.

Fonksiyonların hesaplanması sırasında, küresel Bessel ve Legendre fonksiyonları da hazırlanan program tarafından hesaplanmaktadır. Bu fonksiyonların hesaplanmasında kullanılan formül ve yöntemler çeşitli kitaplardan (Erdélyi, 1941; Stratton, 1941; Morse ve Feshbach, 1953; Smirnov, 1964; Abrovomitz, 1981) derlenmiş ve elde edilen sonuçlar tablolarla karşılaştırılarak kontrol edilmiştir.

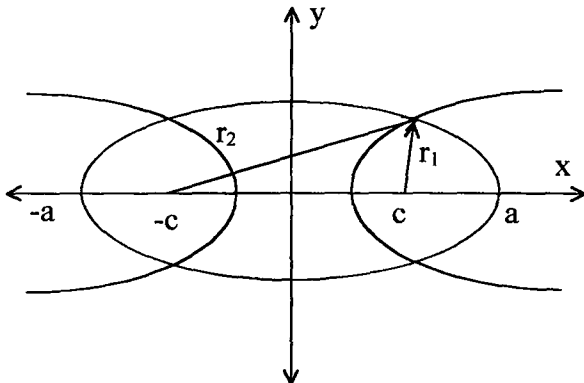
2.1 Dalga Denkleminin Sferoidal Koordinatlar Sisteminde Değişkenlerine Ayrıştırılması

Sferoid, elipsin eksenlerinden biri etrafında dönmesi sonucunda ortaya çıkan üç boyutlu geometrik şekildir. İki boyutlu düzlemde iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri elips veya hiperboldür. Şekil 2.1'de verilen vektörlerin uzunlukları r_1 ve r_2 olmak üzere, elips $r_1+r_2=2a$ eşitliğini sağlar. $t=a/d$ olmak üzere, uzunluklar d , x ve y 'nin fonksiyonları olarak yazılarak düzenlenirse,

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - 1} = d \quad (2.1)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem $t > 1$ ise elips, $t < 1$ ise hiperbol denklemdir. Hiperboller $t=0$ değeri için $x^2=0$ iki katlı doğrusuna, $t=\pm 1$ için $|x|>d$, $y^2=0$ iki katlı doğru parçalarına dönüşürler. Elipsler ise $t=\pm 1$ için $|x|<d$, $y^2=0$ doğru parçasına, $t \rightarrow \infty$ için orijin merkezli sonsuz yarıçaplı daireye dönüşürler. Ayrıca gösterilebilir ki her noktada elipslerle hiperboller birbirine diktir. Dolayısıyla $\xi=\{t, 1 \leq t \leq \infty\}$ ve $\eta=\{t, 0 \leq t \leq 1\}$ ile tanımlanan eğriler iki boyutlu bir ortogonal koordinat sistemi oluştururlar (Erdlëyi, 1941).

Elde edilen iki boyutlu sistem küçük eksen etrafında döndürülürse yatık (oblate); büyük eksen etrafında döndürülürse dik (prolate) sferoid elde edilir. Bunlardan birini esas alarak oluşturulan üç boyutlu koordinat sistemine sferoidal koordinat sistemi denir. Sistemin oblate veya prolate olmasına bağlı olarak iki farklı durum ayırdedilir. Yeni sistemin eksenleri kartezyen koordinat sistemine göre tanımlanabilir. Literatürde birkaç farklı gösterilim vardır. Aralarındaki fark dönme ekseninin seçiminden ve/veya eksenlerin tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca ξ ve η parametrelerinin değişim aralıkları dikkate alınarak $\xi=\cosh(u)$, $\eta=\cos(v)$ ve eksen etrafındaki dönme miktarını temsilen ϕ ile tanımlanan (u, v, ϕ) eksenlerinin kullanımı da yaygındır.



Şekil 2.1 Sferoidal Koordinatlar Sistemi

Odak noktaları $x=0$, $y=0$ ve $z=\pm d$ 'de iken dönme z eksenini etrafında ise prolate sferoidal koordinat sistemi için dönüşüm bağıntıları,

$$x = d\sqrt{(1-\eta^2)}\xi \cos(\phi) = d \sinh(u) \sin(v) \cos(\phi) \quad (2.2a)$$

$$y = d\sqrt{(1-\eta^2)}\xi \sin(\phi) = d \sinh(u) \sin(v) \sin(\phi) \quad (2.2b)$$

$$z = d\eta\xi = d \cosh(u) \cos(v) \quad (2.2c)$$

ve $\xi \neq \pm 1$ ve $\eta \neq \pm 1$ olmak üzere, ölçek çarpanları

$$h_1 = \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad (2.3)$$

eşitlikleri ile belirlidir. Yatık (Oblate) sistem için dönüşüm bağıntılarını elde etmek için c yerine $-ic$ ve ξ yerine $i\xi$ ya da $\cosh(u)$ yerine $i \sinh(u)$ yazmak yeterlidir¹. Yatık sistem bu şekilde tanımlandığı zaman dönme ekseninin değişmediğine, ancak odakların z ekseninde olmadığına, ξ 'nin tanım aralığının $(0, \infty)$ olarak değiştiğine dikkat etmek gerekir. Bu çalışmanın geriye kalan kısmında yapılacak işlemlerde yalnızca dik sistem ele alınacaktır.

Dalga denklemi, kaynakların bulunmadığı basit ortamlar için, sferoidal koordinat sisteminde,

$$\begin{aligned} &(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right] + (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right] + \\ &(\xi^2 - \eta^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + k^2 d^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) \Psi = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

biçiminde yazılabilir. Burada k dalga sayısı, d sferoidin yarı odak uzaklığıdır.

Denklem (2.4), $\Psi(\xi, \eta, \phi) = \Psi_1(\xi) \Psi_2(\eta) \Psi_3(\phi)$ yerleştirilerek değişkenlerine ayrılırsa M ve m ayırma sabitleri olmak üzere,

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{d\Psi_1}{d\xi} \right] + \left(k^2 d^2 \xi^2 - \frac{m^2}{\xi^2 - 1} - M \right) \Psi_1 = 0 \quad (2.5a)$$

¹ Literatürde eksenlerin seçimine ilişkin farklılıklar özellikle yatık (oblate) sistemin tanımında oluşmaktadır. Yatık sistem yukarıdaki şekilde tanımlandığı zaman dik ve yatık sferoidal koordinatlarda yazılan denklem ve fonksiyonlar arasındaki ilişki oldukça basit hale gelmektedir.

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{d\Psi_2}{d\eta} \right] - \left(k^2 d^2 \eta^2 + \frac{m^2}{1-\eta^2} - M \right) \Psi_2 = 0 \quad (2.5b)$$

$$\frac{d^2 \Psi_3}{d\phi^2} + m^2 \Psi_3 = 0 \quad (2.5c)$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri elde edilir. Ψ_3 için yazılan denklemin genel çözümü, a ve b sabit sayılar olmak üzere $\Psi_3(\phi) = a \sin(m\phi) + b \cos(m\phi)$ şeklindedir. Burada çözümün ϕ 'ye göre periyodik olması için m tamsayı olmalıdır. Ψ_1 ve Ψ_2 için yazılan denklemler birbirinin aynısıdır. Aralarındaki tek fark bağımsız değişkenin değişim aralığıdır. Dolayısıyla denklem için farklı bölgelerde bulunacak sonuçlardan herbiri Ψ_1 veya Ψ_2 fonksiyonlarından birini temsil etmekte kullanışlı olacaktır. $\xi = \pm 1$ ve $\eta = \pm 1$, (2.4) diferansiyel denkleminin düzgün tekil noktalarıdır. Dolayısıyla bu noktalar civarındaki çözüm, Ek 1'de açıklandığı gibi seri açılımına sahiptir. $\xi = \pm 1$ ve $\eta = \pm 1$ noktalarındaki çözümler ise uygun seri açılımlarından uygun limit yaklaşımlarıyla elde edileceklerdir.

2.2 Sferoidal Dalga Fonksiyonları

Genellikle sferoidal koordinatlarda ortaya çıkan, daha önce (2.5a) ve (2.5b) eşitlikleri ile verilmiş olan diferansiyel denklem uygun dönüşümlerle $c=kd$ olmak üzere,

$$(z^2 - 1)\Psi'' + 2(a+1)z\Psi' + (c^2 z^2 - b)\Psi = 0 \quad (2.6)$$

biçiminde yazılır (Morse and Feshbach, 1953). Bu diferansiyel denklem $z = \pm 1$ 'de iki tane düzgün tekilliğe ve $z = \infty$ 'da bir adet düzgün olmayan tekilliğe sahiptir. Dolayısı ile $z = \infty$ noktası, denklemin çözümü olarak yazılacak iki bağımsız fonksiyonun en az biri için esaslı tekil nokta olacaktır. $z = \pm 1$ noktası ise kutup veya dallanma noktaları olabilir.

Genel olarak bir diferansiyel denklemin çözümü, sağladığı diferansiyel denklemin tekillikleri bir eksik veya daha az karmaşık olan fonksiyonlar cinsinden yazılmaya çalışılır (Morse ve Feshbach, 1953). Sferoidal koordinatlarda ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin çözümü de sağladıkları denklemlerin tekillikleri açısından daha basit olan Bessel veya Gegenbauer (Legendre) fonksiyonlarının serileri olarak yazılabilir. Değişim aralığı $|z| < 1$ ise değişken sferoidal koordinatlar sistemindeki η ile gösterilir ve bu aralıkta geçerli olan çözümler Legendre fonksiyonları cinsinden yazılabilir. Bu bölgede denklemi sağlayan fonksiyonlar fiziksel problemlerde büyüklüklerin açısal değişimlerini temsil etmek amacıyla

kullanıldıklarından 1. ve 2. tip açısai fonksiyonlar ($S_{mn}^{(i)}(h;\eta)$, $i=1,2$) olarak adlandırılırlar. (2.6) denkleminin $z>1$ bölgesindeki çözümleri radyal fonksiyonlar olarak adlandırılır. Bu bölgedeki değişken ξ ile gösterilir. Radyal fonksiyonlar ($R_{mn}^{(j)}(h;\xi)$, $j=1,2,3,4$), Bessel fonksiyonlarının serileri olarak yazılabilir. Buna göre, sferoidal koordinat sisteminde dalga denklemini sağlayan genel bir fonksiyonu,

$$\Psi_{mn}^{(j)}(c;\eta,\xi,\phi) = S_{mn}(c;\eta)R_{mn}^{(j)}(c;\xi) \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} ; (j=1,2,3,4) \quad (2.7)$$

eşitliği ile tanımlamak mümkündür (Flammer, 1957). Buradaki e ve o indisleri ϕ 'ye bağıllığın çift veya tek fonksiyon oluşunu temsil etmektedir. İkinci tip açısai fonksiyonlar, $\eta=\pm 1$ noktalarında regüler olmadığı için, genellikle fiziksel olayların temsilinde kullanılmazlar. Dolayısı ile (2.7) eşitliğindeki gibi açısai fonksiyonun tipi belirtilmediği takdirde bunun birinci tip fonksiyon olduğu anlaşılmalıdır.

2.2.1 Açısai fonksiyonlar

Sferoidal fonksiyonlar (Ek 2.2) deklemlerindeki kuvvet serileri yardımıyla hesaplanabileceği gibi, Legendre veya Bessel fonksiyonlarının serileri olarak da hesaplanabilir. Ek 2.'de özetlenen genel teori gereğince, fonksiyonu hesaplamak amacıyla yazılabilecek en basit seri yapısı, fonksiyonun sağladığı diferansiyel denkleme en yakın daha basit bir denklemi sağlayan fonksiyonları kullanmakla elde edilebilir. Dolayısı ile sferoidal koordinatlardaki açısai fonksiyonları elde etmek amacıyla Legendre fonksiyonlarının serileri kullanılır. Sferoidal koordinatlardaki açısai fonksiyonlar ve Legendre fonksiyonlarının sağladıkları diferansiyel denklemler $z=\pm 1$ 'de aynı türden tekilliklere sahip olduğundan katsayıların başlangıç değeri uygun seçildiği takdirde, $c \rightarrow 0$ limit halinde $|z| \leq 1$ bölgesinde birbirine eşit olmaları sağlanabilir (Flammer, 1957). Böylece, $|\eta| \leq 1$ bölgesinde regüler olan 1. tip açısai fonksiyonlar, her ayrik λ_{mn} değeri için ($c=kd$ 'dir),

$$S_{mn}(c;\eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^m(\eta) \quad (2.8)$$

eşitliği ile yazılabilir. İkinci tip açısai fonksiyonlar ise ikinci tip assosiyel Legendre fonksiyonlarının açılımları olarak yazılabilir. Ancak, toplamlarda $r<0$ olan terimler de hesaba katılmalıdır (Flammer, 1957):

$$S_{mn}^{(2)}(c;\eta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} d_r^{mn}(c) Q_{m+r}^m(\eta) \quad (2.9)$$

Bu fonksiyonlar $\eta=\pm 1$ 'de regüler olmadıkları için fiziksel problemlerdeki açısal değişimleri temsil etmek için kullanışlı değildir. Ancak 2. tip radyal fonksiyonların hesaplanmasında bu fonksiyonların $|\eta|>1$ bölgesindeki değerlerine gereksinim duyulur. Ancak, (2.9) denkleminin $r<0$ olan terimlerinde rekürsion bağıntısının yapısı ve 2. tip Legendre fonksiyonlarının özellikleri nedeniyle belirsiz terimlerle karşılaşmaktadır. Dolayısıyla bu bölgede 2. tip açısal fonksiyonlar,

$$S_{mm}^{(2)}(c;\eta) = \sum_{r=-2m, -2m+1}^{\infty} d_r^{mm}(c) Q_{m+r}^m(\eta) + \sum_{r=-2m+2, 2m+1}^{\infty} d_{\rho/r}^{mm}(c) P_{r-m-1}^m(\eta) \quad (2.10)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanabilir. Eşitliklerdeki $d_{\rho/r}^{mm}$ katsayılarına ilişkin hesaplama yöntemleri C. Flammer (1957)'in kitabından alınmış olup ayrıntılarına burada yer verilmeyecektir. Sferoidal fonksiyonların türevleri ise (2.8)-(2.10) Legendre fonksiyonları, türevleriyle yer değiştirerek hesaplanmıştır.

2.2.2 Ayırma sabitlerinin hesaplanması

Çözüm olarak yazılan serinin kullanılacağı bölgede yakınsak olması gereklidir. Yukarıda açıklandığı gibi m ayırma sabiti tamsayı olmalıdır. Diğer ayırma sabiti M 'nin değeri de önemlidir. Çünkü yazılan çözümlerden biri, ancak M 'in ayırık değerleri için $\eta=\pm 1$ 'de sonludur. Bu değerlere özdeğerler, bunlara ilişkin fonksiyonlara öz fonksiyonlar denir. $\lambda_{mn}(c)$ ile gösterilecek olan özdeğerler genellikle (Ek 1.2) denklemlerindeki ρ_1 ve ρ_2 sabitlerinin bulunmasını sağlarlar.

Sferoidal fonksiyonları hesaplarken karşılaşılan temel zorluklardan birisi $\lambda_{mn}(c)$ özdeğerlerinin hesaplanmasıdır. Literatürde özdeğerleri hesaplamak amacıyla, genellikle Bouwkamp yöntemi kullanılmaktadır (Flammer, 1957; Abrowomitz, 1966; Asano, 1980). Bouwkamp yöntemi, oluşturulan hata fonksiyonunun, türevi yardımıyla minimize edilmesine dayanır (Flammer, 1957). Ancak, bu yöntem çok sayıda ardışıl hesaplamayı gerektirir. Dolayısı ile bilgisayar olanaklarını kullanarak ayırma sabitlerini hesaplamak için alternatif bir yöntem kullanılmıştır.

Hesaplama yöntemi, özdeğerler belli iken, uygun bölgede (2.8) denklemlerindeki serileri veya onlara eşdeğer serileri, diferansiyel denkleme yerleştirerek bilinmeyen katsayıların sağlayacağı denklemleri (rekürsion bağıntılarını) bulmaya dayanır. Sferoidal fonksiyonlar

için elde edilen rekürsiyon bağıntıları üç terimlidir. Legendre fonksiyon serileri kullanılarak bulunan rekürsiyon bağıntısı $r \geq 0$ ve $m \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)c^2}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} d_{r+2}^{mn} \\ & + \left[(m+r)(m+r+1) - \lambda_{mn}(c) + \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} \right] d_r^{mn}(c) \\ & + \frac{r(r-1)c^2}{(2m+2r-3)(2m+2r-3)} d_{r-2}^{mn}(c) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

biçimindedir (Flammer, 1957).

(2.11) bağıntısı incelendiğinde, r 'nin çift ve tek değerleri için iki farklı çözüm setinin elde edileceği anlaşılır. Ayrıca rekürsiyon bağıntısı d_r^{mn} ile bölünür ve d_{r-2}^{mn}/d_r^{mn} oranının $r=0$ ve $r=1$ için sonlu kalması koşulu dikkate alınır, buradan $r < 0$ için bütün katsayıların sıfır olacağı sonucu çıkarılır. Dolayısı ile $r=0$ veya $r=1$ için keyfi bir d_r^{mn} katsayısı ve (2.11) denklemi yardımı ile geri kalan bütün katsayılar hesaplanabilmektedir. Daha önce söz edildiği gibi $\lambda_{mn}(c)$ 'nin alabileceği değerler ile ilgili bir kısıtlama, (2.8)-(2.10) serilerinin yakınsaması koşulu ile getirilebilir. Assosiyatif Legendre polinomları η 'nın tanım aralığında sonlu olduğundan, serinin yakınsaması için $r \rightarrow \infty$ limit durumunda d_r^{mn} katsayılarının sıfır olması koşulu yeterlidir (Flammer, 1957).

Rekürsiyon bağıntısını d_r^{mn} ile böldükten sonra elde edilen eşitliğin ilk terimi N_{r+2}^m olarak adlandırılırsa $r \geq 2$ için,

$$N_r^m = \frac{(2m+r)(2m+r-1)c^2}{(2m+2r-1)(2m+2r+1)} \frac{d_r^{mn}}{d_{r-2}^{mn}} \quad (2.12)$$

elde edilir. Ayrıca $r \geq 0$ için,

$$\gamma_r^m = (m+r)(m+r+1) + \frac{c^2}{2} \left[1 - \frac{4m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} \right] \quad (2.13)$$

ve $r \geq 2$ için,

$$\beta_r^m = \frac{r(r-1)(2m+r)(2m+r-1)c^4}{(2m+2r-1)^2(2m+2r+1)(2m+2r-3)} \quad (2.14)$$

kısaltmaları ile (2.11)'deki bağıntı $N_{r+2}^m + \gamma_r^m(c) - \lambda_{mm}(c) \neq 0$ ve $N_r^m \neq 0$ oldukça,

$$N_r^m = \frac{-\beta_r^m(c)}{N_{r+2}^m + \gamma_r^m(c) - \lambda_{mm}(c)}, \quad r \geq 2 \quad (2.15)$$

veya

$$N_{r+2}^m = \lambda_{mm}(c) - \gamma_r^m(c) - \frac{\beta_r^m(c)}{N_r^m}, \quad r \geq 2 \quad (2.16)$$

halini alır². Ayrıca, $r < 2$ için,

$$N_2^m = \gamma_0^m - \lambda_{mm}, \quad N_3^m = \gamma_1^m - \lambda_{mm} \quad (2.17)$$

bağıntıları geçerlidir. (2.15) eşitliği sonsuzdan başlayarak, (2.16) eşitliği $r=0$ değerinden ise ardışıl katsayıların oranlarını hesaplamaya yarar. Dolayısıyla r 'nin her değeri için her iki yöntemle hesaplanan oranların birbirine eşit olması gereklidir. $\lambda_{mm}(c)$ ayırma sabitleri bu eşitliği sağlayacak biçimde seçilmelidir.

Serinin yakınsaması koşulu $\lim_{r \rightarrow \infty}$ koşulunda $R_r^{mn} = d_r^{mn} / d_{r-2}^{mn}$ oranının sifıra gitmesi biçiminde de ifade edilebilir. Yazılan bir ara programla bu oranın sıfır kabul edilebileceği en küçük r ($TOL1=10^{-30} \geq R_r^{mn}$) değeri araştırılmıştır: $R_{r_max}^{mn}=0$ alınarak (2.15) ile hesaplanan R_{n-m}^{mn} değerleri hesaplanmıştır³. r_max değeri başlangıçta 10000 alınmış ve sonraki her döngüde azaltılmıştır. Her döngü sonunda hesaplanan değer, hesaplanan ilk değerle karşılaştırılmış, aradaki fark $TOL1$ 'den büyük olduğu zaman döngü durdurulmuştur. Bir önceki adımda kullanılan r_max değeri kaydedilmiştir. Bu şekilde döngü sonunda bulunan en büyük sayı, c 'nin değeri de 0.1-10.0 arasında değiştirilerek araştırılmıştır. Böylece $c < 10.0$ için $r_max > 80$ 'in yeterli olacağı gözlenmiştir. Bütün hesaplamalarda N_r^m 'nin sıfır kabul edildiği r_max değeri olarak $200+r$ alınmıştır.

Kullanılan yöntemde $c < 3.0$ için kuvvet serisinin açılımı, $7 \leq c \leq 10.0$ için asimptotik seriler yardımı ile ayırma sabitlerinin başlangıç değerleri hesaplanmıştır (Flammer, 1957; Abramovitz ve Stegun, 1964). $3.0 \leq c < 7.0$ aralığında ise her iki yöntem kullanılarak, hata

² Son eşitlikte $\gamma_r^m(c)$ ve $\lambda_{mm}(c)$ 'nin işaretleri Flammer'in kitabındaki formüllerdeki tersidir. Bu kitaptaki bir yazım hatasından kaynaklanıyor olabilir. Eğer N_r^m 'nin yukardaki tanımını -1 ile çarpılırsa (2.15) ve (2.16) denklemleri Flammer'in kitabındaki ile aynı olur.

fonksiyonunu daha küçük yapan değer başlangıç değeri kabul edilmiştir. Hata fonksiyonu burada $TOL=10^{-12}$ değerinden küçük değerler sıfır kabul edilmiştir. Böylece ayırma sabitleri elde edilmiştir.

Rekürsion bağıntısı, yalnızca indisler arasındaki ilişkiyi belirlediğinden, indislerden bir tanesi keyfidir. Gösterilebilir ki indislerin başlangıç değerini uygun seçmekle, çözümlerden birinin $z=-1$ ve $z=1$ civarında regüler kalması sağlanabilir. Diğer bir deyişle (Ek 1.2) denklemlerindeki $y_1(z)$ fonksiyonundaki toplama işlemi $k=0$ 'dan başlatılarak hesaplanabilir (Stratton vd, 1941). Ayrıca $z=\pm 1$ civarındaki çözümlerin limit halde assosiyatif Legendre fonksiyonlarına eşit olması sağlanabilir (Flammer, 1957):

$$\lim_{c \rightarrow 0} S_{mn}(c; \eta) = P_n^m(\eta) \quad (2.18)$$

Bunu sağlamak için, belirli bir değerde iki fonksiyonun eşitlenmesi (örneğin $S_{mn}(c;0) = P_n^m(0)$) yeterlidir. Bu amaçla $r_r^{mn} = d_r^{mn} / d_0^{mn}$ ile tanımlanan katsayı oranları Flammer'in kitabındaki (3.1.31) eşitliklerine yerleştirilmiş ve toplam sembolünün dışında kalan d_0^{mn} katsayısı, r_r^{mn} cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$d_0^{mn} = \frac{\frac{(-1)^{\frac{n-m-p}{2}} (n-m+p)!}{2^{n-m} \left(\frac{n-m-p}{2}\right)! \left(\frac{n+m+p}{2}\right)!}}{\sum_{k=p, p+2, \dots} \frac{(-1)^{\frac{k-p}{2}} (k+2m+p)!}{2^k \left(\frac{k-1}{2}\right)! \left(\frac{k+2m+p}{2}\right)!} r_k^{mn}} ; p = \begin{cases} 1 & ; m-n \text{ tek ise,} \\ 0 & ; m-n \text{ çift ise,} \end{cases} \quad (2.19a)$$

Buradaki toplam p tekse tek, çiftse çift sayılar üzerinden yapılacaktır. Böylece tüm katsayılar $d_r^{mn} = r_r^{mn} \cdot d_0^{mn}$ bağıntısı yardımıyla hesaplanmıştır. Buradaki r_r^{mn} oranının

$$r_r^{mn} = R_1^{mn} R_2^{mn} R_3^{mn} \dots R_r^{mn} \quad (2.19b)$$

eşitliği ile bulunabileceği açıktır. Flammer (1957), tablolarını oluştururken, ardışıl katsayıların oranları R_r^{mn} 'leri de c 'nin kuvvet serilerine açarak hesaplamıştır. Bu yöntemle hesaplanan oranlarda hatanın c ile artacağı gözönünde tutularak, bu çalışma sırasında (2.11)'deki rekürsion bağıntısı kullanılmıştır.

³ Küçük sferoidler için dominant katsayı $n-m$ 'inci katsayıdır.

Ayrıca, açısal fonksiyonlar ortogonal fonksiyonlar olup,

$$\int_{-1}^1 S_{mn}(c; \eta) S_{ml}(c; \eta) d\eta = \delta_{nl} N_{mn} \quad (2.20.a)$$

$$N_{mn} = 2 \sum \frac{(r+2m)!(d_r^{mn})^2}{(2r+2m+1)r!} \quad (2.20.b)$$

bağıntılarını sağlarlar.

2.2.3 Radyal fonksiyonlar

Radyal fonksiyonlar, kuvvet serileri veya Bessel fonksiyonlarının serileri ile temsil edilebilmektedir (Stratton vd., 1941; Flammer, 1957). Önceki kısımlarda açıklandığı gibi radyal fonksiyonları küresel Bessel fonksiyonlarının serileri cinsinden hesaplamak tercih edilir. Sferoidal koordinat sisteminde, Radyal fonksiyonlar prensip olarak, 1. tip küresel Bessel, 2. tip küresel Bessel, 1. tip Hankel veya 2. tip Hankel fonksiyonunun serileri olarak yazılmalarına bağlı olarak 1., 2., 3. veya 4. tip fonksiyonlar olarak adlandırılırlar. Açısal fonksiyonlara benzer şekilde, serilerin katsayılarındaki serbestlik fonksiyonların sonsuzdaki asimptotik ifadelerinin ilgili Bessel fonksiyonunun asimptotik davranışıyla aynı olması koşulu getirilerek ortadan kaldırılır (Flammer, 1957). Çözümü temsil edebileceği öngörülen seriler sferoidal fonksiyonların sağlaması gereken diferansiyel denkleme yerleştirilerek bilinmeyen katsayılarla ilişkin bağıntılar (rekürsion bağıntıları) elde edilir (Stratton vd., 1941). Ancak açısal fonksiyonlarla, radyal fonksiyonların aynı diferansiyel denklemi farklı bölgelerde sağlaması nedeniyle radyal fonksiyonlara ilişkin katsayılar açısal fonksiyonlara ilişkin katsayılar cinsinden yazılmak suretiyle iki farklı katsayı seti hesaplanması gereği ortadan kaldırılır (Flammer, 1957).

Radyal fonksiyonlar, küresel Bessel fonksiyonlarının serileri olarak,

$$R_{mn}^{(j)}(c; \xi) = \frac{1}{\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(r+2m)!}{r!} d_r^{mn}(c)} \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right]^{m/2} \sum_{r=b, b+2}^{\infty} (i)^{r+n-m} d_r^{mn}(c) \frac{(r+2m)!}{r!} z_{m+r}^{(j)}(c\xi) \quad (2.21)$$

eşitliği ile verilir. Burada,

$$z_{m+r}^{(j)}(z) = \begin{cases} j_{m+r}(z) ; & j=1 \text{ ise} \\ y_{m+r}(z) ; & j=2 \text{ ise} \\ h_{m+r}^{(1)}(z) ; & j=3 \text{ ise} \\ h_{m+r}^{(2)}(z) ; & j=4 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.22)$$

olup, $j_n(z)$, $y_n(z)$ ve $h_n^{(i)}(z)$ ($i=1,2$) sırasıyla küresel Bessel, Neumann ve Hankel fonksiyonlarını temsil etmektedir. Sferoidin içinde, regüler olan $j=1$ 'e karşı gelen Bessel fonksiyonları, sferoidin dışında ise zamanla değişimin nasıl seçildiğine bağlı olarak birinci tip veya ikinci tip Hankel fonksiyonu ile yazılan seriler uygundur. (2.21) eşitliği ile verilen fonksiyonların sonsuzdaki davranışları,

$$R_{mm}^{(1)}(c; \xi) \xrightarrow{c\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{h\xi} \cos\left(c\xi - \frac{1}{2}(n+1)\pi\right) \quad (2.23)$$

$$R_{mm}^{(1)}(c; \xi) \xrightarrow{c\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{h\xi} \sin\left(c\xi - \frac{1}{2}(n+1)\pi\right) \quad (2.24)$$

$$R_{mm}^{(3),(4)}(c; \xi) \xrightarrow{c\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{c\xi} \exp\left(\pm i\left[c\xi - \frac{1}{2}(n+1)\pi\right]\right) \quad (2.25)$$

biçimindedir (Flammer, 1957). Ayrıca küresel Bessel fonksiyonları arasında olduğu gibi, sferoidal koordinatlardaki radyal fonksiyonlar arasında da

$$R_{mm}^{(3),(4)}(c; \xi) = R_{mm}^{(1)}(c; \xi) \pm iR_{mm}^{(2)}(c; \xi) \quad (2.26)$$

ilişkisi vardır. (2.21) eşitliği ile verilen seri toplamı birinci tip fonksiyonu sonlu bölgede hesaplamak için oldukça elverişlidir. Ancak (2.21)'deki seri ikinci tip radyal fonksiyonlar söz konusu olduğu zaman özellikle küçük argümanlar için yakınsak değildir. Söz konusu seri toplamı ancak büyük ($c\xi$) değerleri için asimptotik bir seri olarak kullanılabilir. Küçük argümanlar için ikinci tip radyal fonksiyonu hesaplamak için ise

$$R_{mm}^{(2)}(c; \xi) = \frac{1}{\kappa_{mm}^{(2)}(c)} \left\{ \sum_{r=-2m, -2m+1}^{\infty} d_r^{mm}(c) Q_{m+r}^m(\xi) + \sum_{r=-2m+2, 2m+1}^{\infty} d_{p/r}^{mm}(c) P_{r-m-1}^m(\xi) \right\} \quad (2.27)$$

ifadesi kullanılabilir (Flammer, 1957). Buradaki normalizasyon katsayısı, p , $(n-m)$ çift ise sıfır, tek ise bir olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\kappa_{mn}^{(2)}(c) = \frac{2^{n-m} (2m)! \left(\frac{(n-m-p)}{2} \right)! \left(\frac{(n+m+p)}{2} \right)! d_{-2m}^{mn}}{[1+p(2m-2)](2m-1-2p)m!(n+m+p)c^{m-1-p}} \sum_{r=p, p+2}^{\infty} d_r^{mn}(c) \frac{(2m+r)!}{r!} \quad (2.28)$$

2.2.4 Vektör fonksiyonlar

Elektromagnetik alanlar vektörel büyüklüklerdir. Ancak vektörel büyüklükler için yazılan dalga denkleminin çözümü en basit halde bile oldukça güçtür. Skaler dalga denkleminin çözümü olan fonksiyonlardan, vektör dalga denkleminin çözümlerinin türetilmesi olanaklıdır. Skaler dalga denkleminin bir çözümü ψ ise,

$$\vec{M} = \text{rot}(\vec{a}\Psi) \quad (2.29)$$

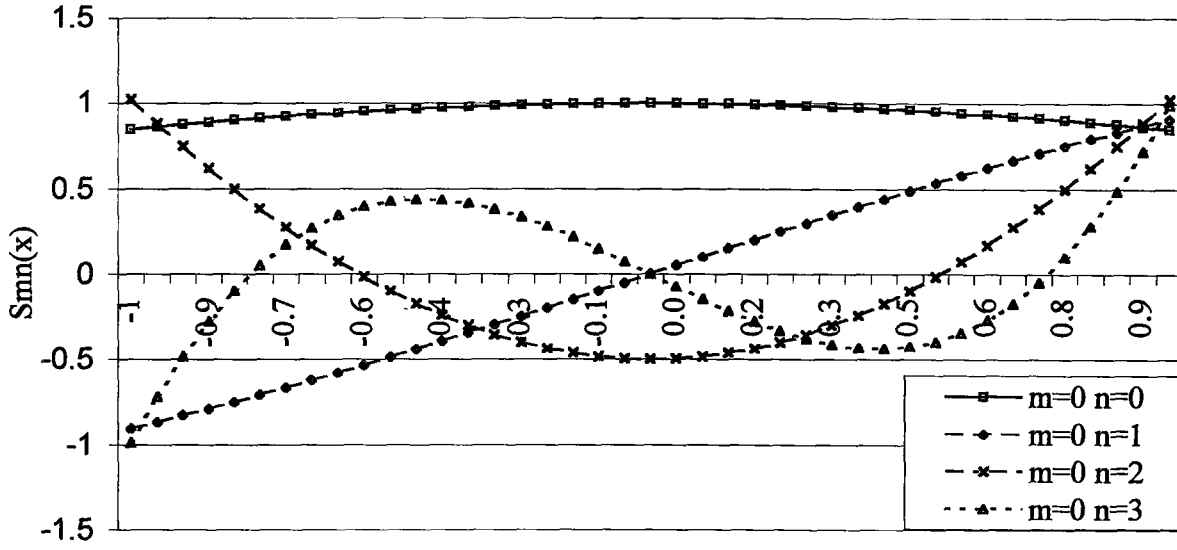
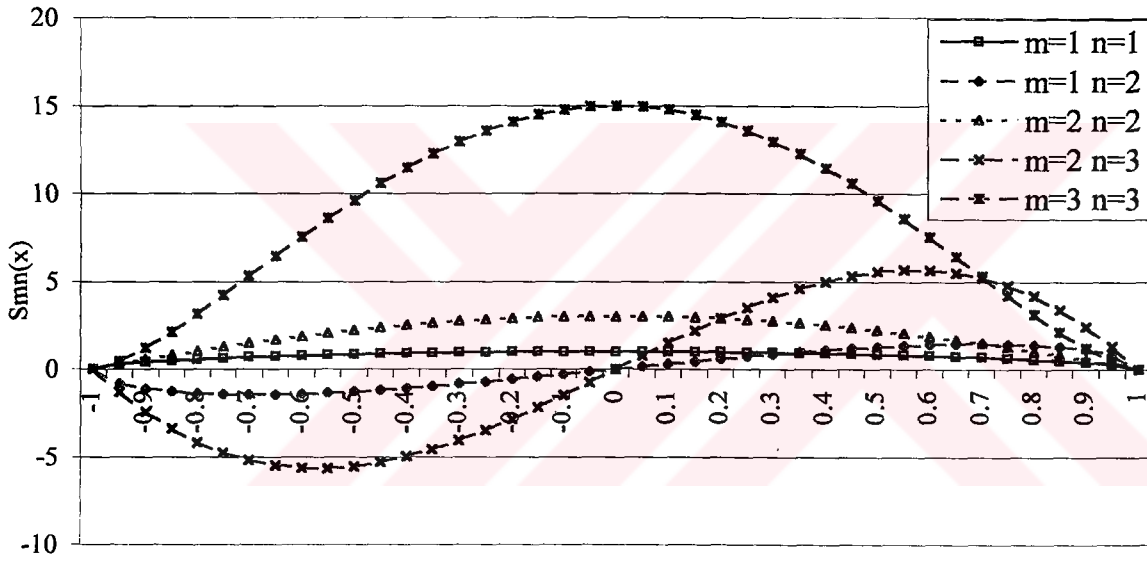
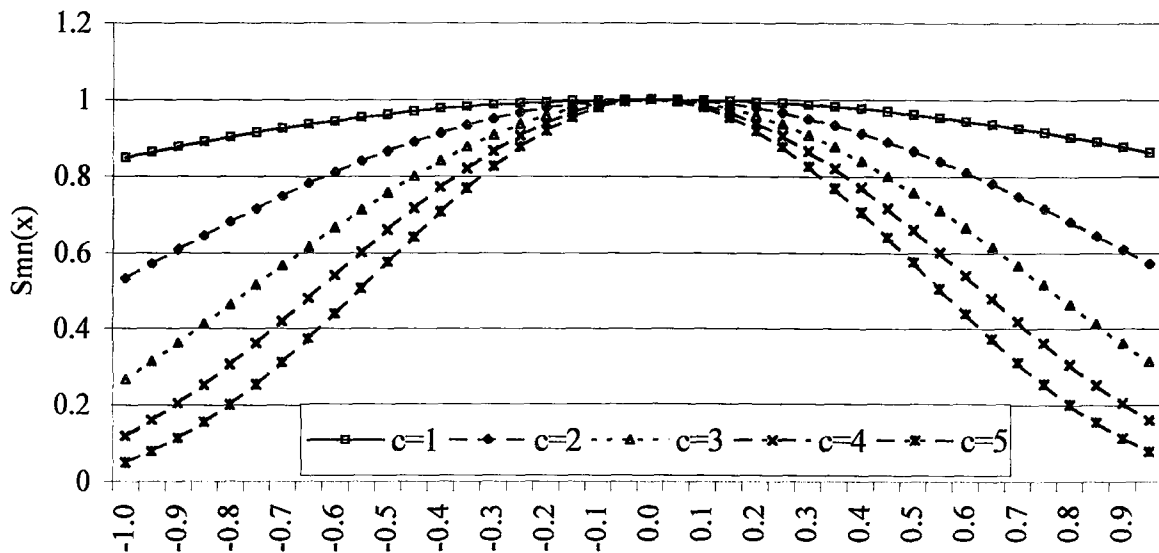
$$\vec{N} = \frac{1}{k} \text{rot}(\vec{M}) \quad (2.30)$$

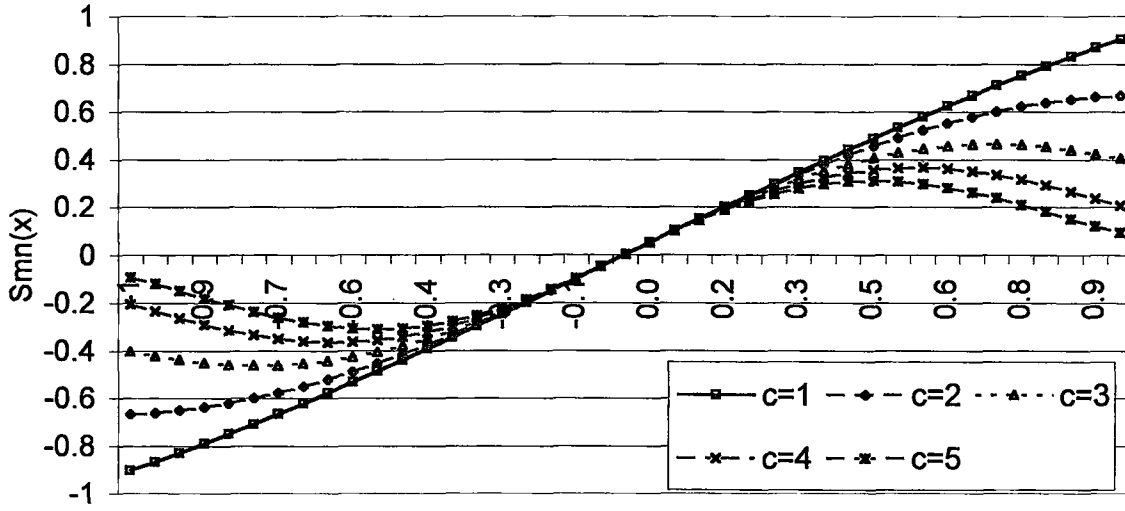
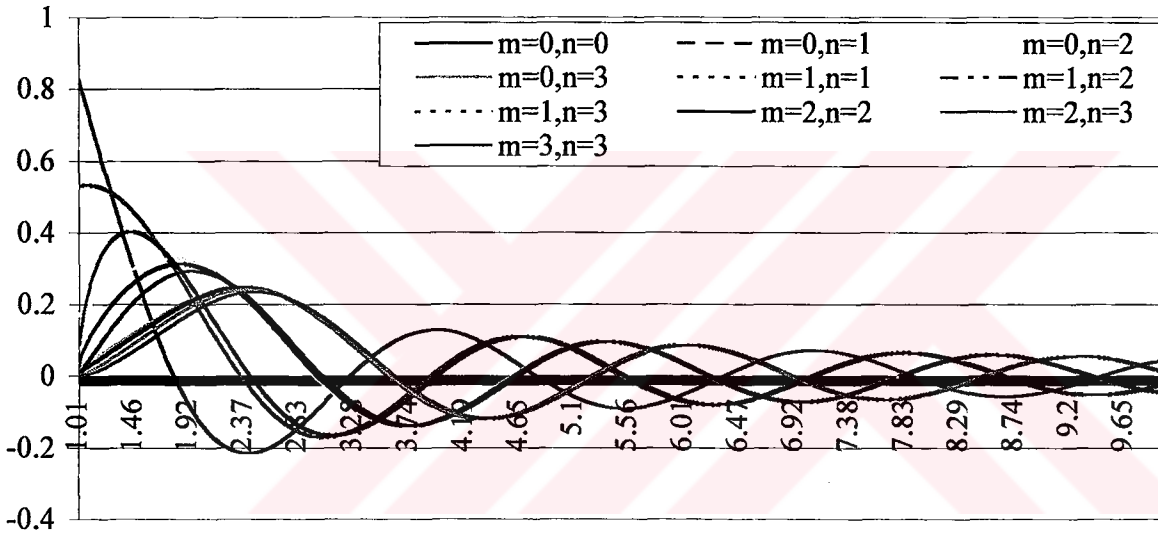
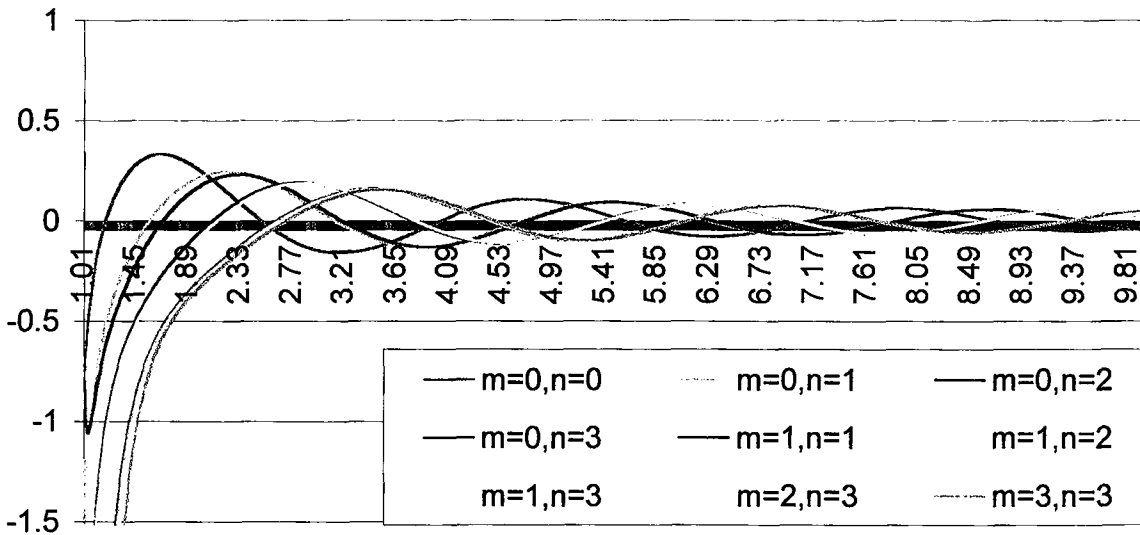
biçiminde tanımlanan fonksiyonlar vektör dalga denklemini sağlarlar (Stratton, 1941). Ancak buradaki $\vec{a}$ vektörünün çözümlerin bağımsız olma koşulu altında bulunması gerekir. Küresel veya sferoidal koordinat sistemlerinde küresel veya sferoidal saçıcıdan saçılma problemi ele alındığı zaman $\vec{a}$ vektörü yer vektörü olarak seçilir. Bu çalışmada, C. Flammer'in (1957) kitabında Tablo 5'de verilmiş olan $\vec{a} = \vec{r}$ ile tanımladığı vektör fonksiyonlar kullanılmıştır.

2.3 Sayısal Örnekler

Şekil 2.2-2.7'de çeşitli c , m ve n değerleri için hesaplanan açısall ve radyal fonksiyonlara ait grafikler görülmektedir. Açısall fonksiyonlar $-1 \leq \eta \leq 1$ aralığı içinde, radyal fonksiyonlar ise $1 < \xi$ aralığında çizilmiştir.

Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'de $c=1.0$ için çeşitli m ve n değerlerine ilişkin grafikler verilmiştir. Şekil 2.4'de ise fonksiyonların büyüklük parametresi c ile değişimine örnek olarak $m=0$ ve $n=0$ için grafikler verilmiştir. Bu örnekten de açıkça görüldüğü gibi açısall fonksiyonların büyüklük katsayısı c küçüldükçe Legendre fonksiyonları gibi davrandığı gözlenmiştir. Radyal fonksiyonlarının ise (2.23) ve (2.24)'de öngörülen asimptotik ifadelerinde öngörüldüğü gibi, büyük argümanlar için, n parametresine bağlı gruplanarak Bessel ve Neumann fonksiyonları gibi davrandığı gözlenmiştir.

Şekil 2.2 $c=1$ için açılal fonksiyonlar,Şekil 2.3 $c=1.0$ için açılal fonksiyonlarŞekil 2.4 $m=0, n=0$ için açılal fonksiyonlar

Şekil 2.5 $m=0, n=1$ için açılal fonksiyonlarŞekil 2.6 $c=2.0$ için birinci tip radyal fonksiyonlarŞekil 2.7 $c=2.0$ için 2. tip radyal fonksiyonlar

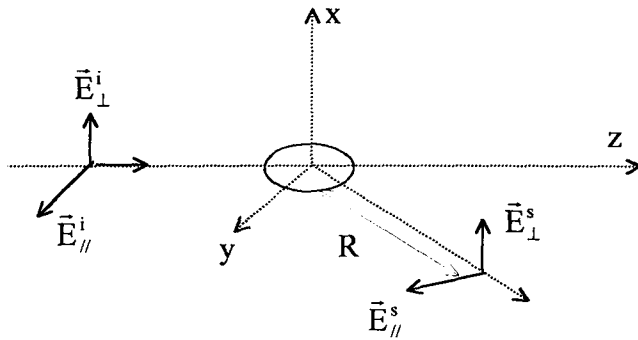
3. TEK PARÇACIKLI PROBLEM

Saçılan alan, saçıcı cismin varlığı halinde gelen dalgada oluşan değişim olarak tanımlanır. Saçılan alanla gelen alanın toplamı cismin çevresindeki alana eşittir. Saçılan alan saçıcının geometrik ve fiziksel özelliklerine bağlı olarak uzaya dağılır. Tek saçıcıdan saçılan alan incelendiği takdirde, genellikle merkezi saçıcı üzerinde olan uygun bir koordinat sistemi kullanılır. Gelen alan, problemin geometrisine bağlı olarak bir düzleme dik ve paralel iki alanın toplamı olarak ele alınabilir (Van de Hulst, 1957). Saçıcı Şekil 3.1'deki gibi xyz koordinat sisteminin orijinine yerleştirilmiş olsun. Gelen alan $\vec{e}_z$ doğrultusunda yayılsın. Gelen elektrik alan vektörü, geliş doğrultusunu içeren bir referans düzlemine dik ve paralel iki bileşene ayrılabilir. Aynı şekilde saçılan alan da saçılma doğrultusunu içeren bir referans düzlemine dik ve paralel iki bileşene ayrılabilir. Buna göre gelen ve saçılan alan bileşenleri arasında,

$$\begin{bmatrix} E_{\perp}^s \\ E_{\parallel}^s \end{bmatrix} = \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\perp}^i \\ E_{\parallel}^i \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklinde bir ilişki mevcuttur. Buradaki $[f]$ matrisi saçılma genliği matrisi adını alır. Belirli bir saçıcı için, matrisin elemanları geliş ve gözlem doğrultularının fonksiyonudur. Gösterilebilir ki saçıcı küresel simetrik iken, gelme ve saçılma doğrultularını içeren düzlem hem gelen hem de saçılan alan için referans düzlemi olarak seçilmişse $f_{12}=f_{21}=0$ olacaktır. Bu durumda saçılan alan sadece gözlem doğrultusunun (saçılma açısının) fonksiyonu olacaktır (Van de Hulst 1957; Sekera, 1966).

Toplam (radar) kesit yüzeyi (extinction cross section), soğrulma (absorbsiyon) ve saçılma nedeniyle gelen dalganın enerjisindeki azalmanın bir ölçüsüdür. Yayılan dalganın enerjisindeki azalma, yayılma doğrultusunda saçılan (ileri yönde saçılan) alanla ilişkilidir ve



Şekil 3.1 Tek parçacıklı problem

optik teoreme (Forward scattering theorem) göre, toplam kesit yüzeyinin saçılma genliğinin sanal kısmı ile orantılıdır (Van de Hulst, 1957; Ishimaru, 1978).

Simetri eksen, z eksen ve odaklarının ortası orijin ile çakışık yerleştirilmiş bir sferoid, keyfi bir doğrultuda yayılan lineer polarizasyonlu bir düzlemsel dalga ile aydınlatılmakta olsun. Eksenel simetri nedeniyle, Şekil 3.2’de gösterildiği gibi gelen dalganın x-z düzlemi içinde yayıldığını varsaymak problemin genelliğini bozmayacaktır. Bu durumda $\theta=\zeta$ doğrultusunda yayılarak sferoid üzerine gelen düzlemsel dalganın elektrik alan vektörü, biri $\phi=0$ düzlemine dik, diğeri paralel iki bileşene ayrılabilir. Asano ve Yamamoto’nun (1975) adlandırması ile ilk durum TE modu ikinci durum TM modu olarak anılacaktır. Tek parçacık için kullanılan yöntem, Mie’nin düzlem dalganın küreden saçılması probleminde izlediği yöntemle aynıdır. Ancak sferoidal vektör dalga fonksiyonlarının küresel fonksiyonlardan farklı olarak saçıcı sferoid yüzeyi üzerinde ortogonal olmamaları nedeniyle bilinmeyen katsayılar küredeki gibi analitik yöntemlerle bulunamazlar.

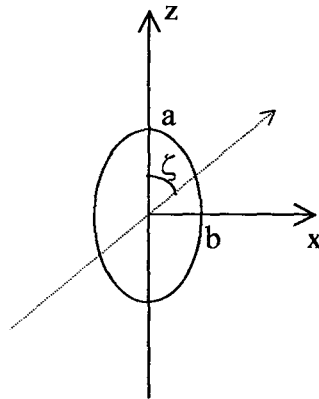
3.1 Alanların Vektör Fonksiyonlar Cinsinden Açılımı

TE modu ile gelen alan ifadesi*

$$\vec{E}^i = -\vec{e}_y \exp[ik^{(1)}(\sin \zeta + z \cos \zeta)] \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^i &= \frac{1}{ik} \text{rot} \vec{E}^i \\ &= (\cos(a) \vec{e}_x - \sin(a) \vec{e}_z) Z^{(1)} \exp[ik^{(1)}(x \sin(a) + z \cos(a))] \end{aligned} \quad (3.3)$$

olmak üzere, bu fonksiyonların sferoidal koordinat sistemindeki açılımı,



Şekil 3.2 Tek parçacıklı problemin geometrisi

* Bu bölümde ifadelerin karmaşık görünmemesi için fonksiyonların argümanları yazılmayacaktır.

$$\bar{E}^i = \sum_{mn} i^n \left(g_{mn}(\zeta) \bar{M}_{emn}^{r(1)} + i f_{mn}(\zeta) \bar{N}_{omn}^{r(1)} \right) \quad (3.4)$$

$$\bar{H}^i = Z^{(1)} \sum_{mn} \left(f_{mn}(\zeta) \bar{M}_{omn}^{r(1)} - i g_{mn}(\zeta) \bar{N}_{emn}^{r(1)} \right) \quad (3.5)$$

ile verilir (Asano ve Yamamoto, 1975). Saçılan ve sferoidin içine geçen alan ifadeleri de gelen alanla benzer şekilde olmalıdır. Buna göre $\xi > \xi_0$ ise,

$$\bar{E}^s = \sum_{mn} i^n \left(\beta_{l,mn} \bar{M}_{emn}^{r(3)} + i \alpha_{l,mn} \bar{N}_{omn}^{r(3)} \right) \quad (3.6)$$

$$\bar{H}^s = Z^{(1)} \sum_{mn} i^n \left(\alpha_{l,mn} \bar{M}_{omn}^{r(3)} + i \beta_{l,mn} \bar{N}_{emn}^{r(3)} \right) \quad (3.7)$$

$\xi < \xi_0$ ise,

$$\bar{E}^t = \sum_{mn} i^n \left(d_{l,mn} \bar{M}_{emn}^{r(1)} + i \gamma_{l,mn} \bar{N}_{omn}^{r(1)} \right) \quad (3.8)$$

$$\bar{H}^t = Z^{(2)} \sum_{mn} i^n \left(\gamma_{l,mn} \bar{M}_{omn}^{r(1)} - i d_{l,mn} \bar{N}_{emn}^{r(1)} \right) \quad (3.9)$$

ifadeleri geçerlidir (Asano ve Yamamoto, 1975).

TM modu için,

$$\bar{E}^i = \sum_{mn} i^n \left(f_{mn}(\zeta) \bar{M}_{emn}^{r(1)} - i g_{mn}(\zeta) \bar{N}_{omn}^{r(1)} \right) \quad (3.10)$$

$$\bar{H}^i = \sum_{mn} Z^{(1)} \left(g_{mn}(\zeta) \bar{M}_{omn}^{r(1)} + i f_{mn}(\zeta) \bar{N}_{emn}^{r(1)} \right) \quad (3.11)$$

ile verilir. Saçılan ve sferoidin içine geçen alan ifadeleri ise $\xi > \xi_0$ için,

$$\bar{E}^s = \sum_{mn} i^n \left(\alpha_{2,mn} \bar{M}_{emn}^{r(3)} + i \beta_{2,mn}(a) \bar{N}_{omn}^{r(3)} \right) \quad (3.12)$$

$$\bar{H}^s = Z^{(1)} \sum_{mn} i^n \left(\alpha_{2,mn} \bar{M}_{omn}^{r(3)} + i \beta_{2,mn} \bar{N}_{emn}^{r(3)} \right) \quad (3.13)$$

$\xi < \xi_0$ ise,

$$\bar{E}^t = \sum_{mn} i^n (d_{2,mn} \bar{M}_{erm}^{r(1)} + i\gamma_{2,mn} \bar{N}_{omn}^{r(1)}) \quad (3.14)$$

$$\bar{H}^t = Z^{(2)} \sum_{mn} i^n (\gamma_{2,mn} \bar{M}_{omn}^{r(1)} - id_{2,mn} \bar{N}_{erm}^{r(1)}) \quad (3.15)$$

şeklinde dir*. Burada $f_{mn}(\zeta)$ ve $g_{mn}(\zeta)$ düzlemsel dalga nın vektör sferoidal özfonksiyonlar açılım katsayılarıdır (Asano ve Yamomoto, 1975; Flammer, 1957). $Z^{(1)}$ ve $Z^{(2)}$ ise sırası ile sferoidin dışındaki ve içindeki ortamların dalga empedansıdır.

Sınır yüzeyi, $\xi = \xi_0$ 'da elektrik ve magnetik alanın teğetsel bileşenleri sürekli olmalıdır:

$$E_{\eta}^i + E_{\eta}^s = E_{\eta}^t, \quad (3.16a)$$

$$E_{\phi}^i + E_{\phi}^s = E_{\phi}^t \quad (3.16b)$$

$$H_{\eta}^i + H_{\eta}^s = H_{\eta}^t, \quad (3.16c)$$

$$H_{\phi}^i + H_{\phi}^s = H_{\phi}^t \quad (3.16d)$$

Yazılan sınır koşulları yardımıyla, $\alpha_{1,mn}, \beta_{1,mn}, d_{1,mn}$ ve $\gamma_{1,mn}$ bilinmeyen katsayılarını bilinen g_{mn} ve f_{mn} katsayıları cinsinden bulmak gereklidir. Trigonometrik fonksiyonların ortagonallığı sayesinde m üzerinden yapılan toplam lar ayrıştırılarak $m=0,1,2,3...$ için eş zamanlı denklem sistemleri elde edilir. Ancak küresel dalga fonksiyonlarından farklı olarak sferoidal vektör dalga fonksiyonlarının sferoid yüzeyinde ortogonal olmaması nedeni ile n üzerinden yapılan toplam lar kolayca ayrıştırılamazlar. Ayrıştırma işlemini gerçekleştirmek için vektör dalga fonksiyonlarının bileşenlerinin sferoid yüzeyinde ortogonal fonksiyonlar cinsinden serilere açılması gerekir. Problemin fiziksel yapısı göz önüne alındığı zaman sferoidal vektör dalga fonksiyonlarının, assosye Legendre fonksiyonları veya sferoidal koordinat sistemindeki açıl sal fonksiyonlar cinsinden seriye açılması yöntemlerinden biri kullanılabilir. Bu iki yöntemden hangisinin daha uygun olduğu üzerinde ayrıntılı bir çalışmaya rastlanmamıştır. İlk bakışta, sferoidal fonksiyonlar cinsinden açılımlar kullanmanın ortaya çıkacak olan denklemleri basitleştireceği kanısı uyanmaktadır. Buna karşılık, elimizde sferoidal açıl sal fonksiyonlara özgü yeterli sayıda bağıntı olmaması ve eldeki hemen bütün

* Buradaki toplam sembolü $\sum_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty}$ anlamındadır.

bağıntıların Legendre fonksiyonları cinsinden elde edilmiş olması nedeni ile Legendre fonksiyonları cinsinden seri açılımları kullanılmıştır.

3.2 Sınır Koşullarına İlişkin Denklemlerin Ayrıştırılması

Sınır koşullarına ilişkin denklemlerde görünen vektör özfonksiyonu bileşenlerinin $\sqrt{\xi^2 - \eta^2}$ çarpanlarına bağılılıklarını ortadan kaldırmak için $\eta \neq \xi$ ve $\xi \neq \pm 1$ oldukça, η bileşenlerini $(\xi^2 - \eta^2)^{5/2}$ ile ϕ bileşenlerini de $(\xi^2 - \eta^2)/\sqrt{\xi^2 - 1}$ ile çarparak $n_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta)$, $m_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta)$, $n_{mn\phi}^{(i)}(c; \xi, \eta)$ ve $m_{mn\phi}^{(i)}(c; \xi, \eta)$ fonksiyonlarını tanımlayalım*. Elde ettiğimiz fonksiyonları da Legendre fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi seriye açalım:

$$\begin{aligned} n_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta) &= (\xi^2 - \eta^2)^{5/2} N_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta) \\ &= \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{c} \left\{ \frac{dS_{mn}}{d\eta} \left[(3\xi^2 - 1)(\xi^2 - \eta^2) - 2\xi^2(\xi^2 - 1) \right] R_{mn}^{(i)} + (\xi^2 - \eta^2)\xi(\xi^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. - 2S_{mn}\xi\eta(1 - \eta^2) \frac{dR_{mn}}{d\xi} - \eta S_{mn}(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1) \frac{d^2 R_{mn}}{d\xi^2} + \frac{m2\eta(\xi^2 - \eta^2)^2}{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} S_{mn} R_{mn}^{(i)} \right\} \begin{matrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$n_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta) = \left\{ \sum_{r=b, b+2, \dots}^{\infty} V_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta) P_{m-l+r}^{m-l}(\eta) \right\} \begin{matrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{matrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} m_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta) &= (\xi^2 - \eta^2)^{5/2} M_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta) \\ &= \left\{ \left(2m\xi(\xi^2 - 1) R_{mn}^{(i)} \sqrt{1 - \eta^2} S_{mn} + m\xi R_{mn}^{(i)} \frac{S_{mn}}{\sqrt{1 - \eta^2}} (\xi^2 - 1)^2 + m\xi R_{mn}^{(i)} (1 - \eta^2)^{3/2} S_{mn} \right) \right\} \begin{matrix} \sin m\phi \\ -\cos m\phi \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$m_{mn\eta}^{(i)}(c; \xi, \eta) = \left\{ \sum_{r=b, b+2, \dots}^{\infty} U_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta) P_{m-l+r}^{m-l}(\eta) \right\} \begin{matrix} \sin m\phi \\ -\cos m\phi \end{matrix} \quad (3.20)$$

* Aksi belirtilmediği sürece $f(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}$ fonksiyonu, reel eksen boyunca $z = -\infty$ 'dan $z = 1$ noktasına kadar kesilmiş düzlemde $f(5)=2$ koşulu ile tanımlıdır.

$$\begin{aligned}
n_{\phi}^{r(i)}(c; \xi, \eta) &= \sqrt{\xi^2 - 1} (\xi^2 - \eta^2) N_{\phi}^{r(i)}(c; \xi, \eta) \\
&= \left\{ \frac{m}{kc} \left(R_{mn} + \xi \frac{dR_{mn}}{d\xi} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} S_{mn} + \frac{m}{kc} \left(\frac{1}{(\xi^2 - 1)} R_{mn}^{(i)} \right) \sqrt{1 - \eta^2} S_{mn} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{kc} \left(\frac{1}{(\xi^2 - 1)} R_{mn}^{(i)} \right) \eta \sqrt{1 - \eta^2} \frac{dS_{mn}}{d\eta} \right\}_{\cos m\phi}^{-\sin m\phi}
\end{aligned} \quad (3.21)$$

$$n_{\phi}^{r(i)}(c; \xi, \eta) = \left\{ \sum_{r=b, b+2, \dots}^{\infty} Y_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta) P_{m-1+r}^{m-1}(\eta) \right\}_{\cos m\phi}^{-\sin m\phi} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
m_{\phi}^{r(i)} &= (\xi^2 - \eta^2)^{5/2} M_{mn\phi}^{r(i)}(c; \xi, \eta) \\
&= \left\{ \sqrt{1 - \eta^2} \frac{dS_{mn}}{d\eta} \xi R_{mn}^{(i)} - \frac{dR_{mn}}{d\xi} \eta \sqrt{1 - \eta^2} S_{mn} \right\}_{\sin m\phi}^{\cos m\phi}
\end{aligned} \quad (3.23)$$

$$m_{\phi}^{r(i)}(c; \xi, \eta) = \left\{ \sum_{r=1-b, 3-b, \dots}^{\infty} X_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta) P_{m-1+r}^{m-1}(\eta) \right\}_{-\cos m\phi}^{\sin m\phi} \quad (3.24)$$

Buradaki $U_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta)$ ve $Y_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta)$ fonksiyonları matrisel denklemlerde simetri sağlamak ve programlama sırasında daha az kompleks çarpma işlemi yapmak amacıyla Asano ve Yamamoto'nun (1975) tanımladığı fonksiyonlardan $i = \sqrt{-1}$ çarpanı ile farklı tanımlanmıştır. $V_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta)$ ve $X_{mn}^{(i),r}(c; \xi, \eta)$ fonksiyonları ise aynıdır.

Tanımlanan fonksiyonları $\xi = \xi_0$ 'daki sınır koşullarında yerleştirerek elde edilen denklemlerde, trigonometrik fonksiyonların ve Legendre fonksiyonlarının ortogonalite özellikleri gözönüne alındığında m üzerinden yapılan toplamlar ayrılabilir. Ayrıca r üzerinden yapılan toplama işlemlerinde r 'nin artımının 2 olduğu ve Legendre fonksiyonlarının özellikleri dikkate alındığı zaman $m=0,1,2,3,\dots$ için dekuple sonsuz bilinmeyenli iki ayrı lineer denklem sistemi elde edilir. Benzer işlemler TM modu için de yapıldığı takdirde iki denklem sistemi daha elde edilir.

Toplamlar sonsuza kadar olmakla birlikte seriler özellikle küçük sferoidler için oldukça hızlı yakınsamaktadır. Eğer m ve n üzerinden yapılan toplama işlemleri yeterince büyük M ve N değerlerinde sınırlandırılırsa katsayıların yaklaşık değerlerini bulmaya uygun olan denklem sistemleri elde edilir. Böylece, bilinmeyen katsayılarla ilişkin denklemler aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{bmatrix} A_{kmm}^0 & A_{kmm+2}^0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{kmmN}^0 \\ A_{kmm}^2 & A_{kmm+2}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{kmmN}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{kmm}^{N-m} & A_{kmm+2}^{N-m} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{kmmN}^{N-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{kmm} \\ X_{kmm+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{kmmN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{km}^0 \\ B_{km}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{km}^2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Öyle ki buradaki k , yukarıda sözü edilen dört denklem sisteminden birini temsil etmektedir.

Ayrıca A_{kmm}^r 16 elemanlı bir kare matrisi, X_{kmm} ve B_{km}^r ise 4 elemanlı birer sütun matrisi temsil etmektedir:

TE modu için,

$$[A_{lmm}^r] = \begin{bmatrix} i^n U_{mm}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^n U_{mm}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & -i^n V_{mm+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & i^n V_{mm+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \\ i^{n+1} V_{mm}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa V_{mm}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} U_{mm+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa U_{mm+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \\ i^n X_{mm}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^n X_{mm}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & -i^n Y_{mm+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & i^n Y_{mm+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \\ i^{n+1} Y_{mm}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa Y_{mm}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} X_{mm+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa X_{mm+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$[B_{lm}^r] = \begin{bmatrix} - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mm} U_{mm}^{(1),r}(c_1; \xi_0) - f_{mm+1} V_{mm+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mm} V_{mm}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) + f_{mm+1} U_{mm+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mm} X_{mm}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) - f_{mm+1} Y_{mm+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mm} Y_{mm}^{(1),r}(c_1; \xi_0) + f_{mm+1} X_{mm+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$[X_{l,mm}] = [\beta_{l,mm} \quad d_{l,mm} \quad \alpha_{l,mm+1} \quad \gamma_{l,mm+1}]^r \quad (3.28)$$

ve

$$[A_{2mm}^r] = \begin{bmatrix} i^{n+1} U_{mm+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} U_{mm+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} V_{mm}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} V_{mm}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \\ -i^n V_{mm+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & i^n \kappa V_{mm+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & i^n U_{mm}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^n \kappa U_{mm}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \\ i^{n+1} X_{mm+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} X_{mm+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & -i^n Y_{mm}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & i^n Y_{mm}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \\ -i^n Y_{mm+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & i^n \kappa Y_{mm+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} X_{mm}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa X_{mm}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[B_{2m}^r] = \begin{bmatrix} - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mn+1} U_{mn+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0) + f_{mn} V_{mn}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \\ \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mn+1} V_{mn+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) - f_{mn} U_{mn}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mn+1} X_{mn+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) + f_{mn} Y_{mn}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \\ \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mn+1} Y_{mn+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0) - f_{mn} X_{mn}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$[X_{2,mn}] = [\beta_{1,mn+1} \quad d_{1,mn+1} \quad \alpha_{1,mn} \quad \gamma_{1,mn}]^T \quad (3.31)$$

TM modu için ise,

$$[A_{3mn}^r] = \begin{bmatrix} i^{n+1} V_{mn}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} V_{mn}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} U_{mn+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} U_{mn+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \\ i^n U_{mn}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^n \kappa U_{mn}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & -i^n V_{mn+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & i^n \kappa V_{mn+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \\ i^{n+1} Y_{mn}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} Y_{mn}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} X_{mn+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} X_{mn+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \\ i^n X_{mn}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^n \kappa X_{mn}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & -i^n Y_{mn+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & i^n \kappa Y_{mn+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$[B_{3m}^r] = \begin{bmatrix} - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mn} V_{mn}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) + f_{mn+1} U_{mn+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mn} U_{mn}^{(1),r}(c_1; \xi_0) - f_{mn+1} V_{mn+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mn} Y_{mn}^{(1),r}(c_1; \xi_0) + f_{mn+1} X_{mn+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mn} X_{mn}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) - f_{mn+1} Y_{mn+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$[X_{3mn}] = [\beta_{2,mn} \quad d_{2,mn} \quad \alpha_{2,mn+1} \quad \gamma_{2,mn+1}]^T \quad (3.34)$$

ve

$$[A_{4mn}^r] = \begin{bmatrix} -i^n V_{mn+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & i^n V_{mn+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & i^n U_{mn}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^n U_{mn}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \\ i^{n+1} U_{mn+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa U_{mn+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} V_{mn}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa V_{mn}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \\ -i^n Y_{mn+1}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & i^n Y_{mn+1}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) & i^n X_{mn}^{(3),r+1}(c_1; \xi_0) & i^n X_{mn}^{(1),r+1}(c_2; \xi_0) \\ i^{n+1} X_{mn+1}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa X_{mn+1}^{(1),r}(c_2; \xi_0) & i^{n+1} Y_{mn}^{(3),r}(c_1; \xi_0) & -i^{n+1} \kappa Y_{mn}^{(1),r}(c_2; \xi_0) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$[B_{4m}^r] = \begin{bmatrix} \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mn+1} V_{mn+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0) - f_{mn} U_{mn}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mn+1} U_{mn+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) + f_{mn} V_{mn}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \\ \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^n (g_{mn+1} Y_{mn+1}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0) - f_{mn} X_{mn}^{(1),r+1}(c_1; \xi_0)) \\ - \sum_{n=m, m+2, \dots}^N i^{n+1} (g_{mn+1} X_{mn+1}^{(1),r}(c_1; \xi_0) + f_{mn} Y_{mn}^{(1),r}(c_1; \xi_0)) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$[X_{4,mn}] = [\beta_{2,mn+1} \quad d_{2,mn+1} \quad \alpha_{2,mn} \quad \gamma_{2,mn}]^T \quad (3.37)$$

ifadeleri yazılabilir. Burada $\kappa = Z^{(2)}/Z^{(1)}$ 'dir.

3.3 Uzak Alan Bağınıları

Her $m=0,1,2,\dots,M$ için (3.25)'deki dört adet matrissel denklem çözüldüğü takdirde, bilinmeyen katsayılar sonlu sayıda m ve n değerleri için bulunur. Vektör sferoidal fonksiyonların asimptotik açılımları da dikkate alındığı takdirde saçılan alanlar aşağıdaki gibi yazılacaktır:

$$-E_{1,\eta}(\theta, \phi) = Z^{(1)} H_{1,\phi}(\theta, \phi) = \frac{i}{kr} e^{ikr} T_{12} \quad (3.38a)$$

$$E_{1,\phi}(\theta, \phi) = Z^{(1)} H_{1,\eta}(\theta, \phi) = \frac{i}{kr} e^{ikr} T_{11} \quad (3.38b)$$

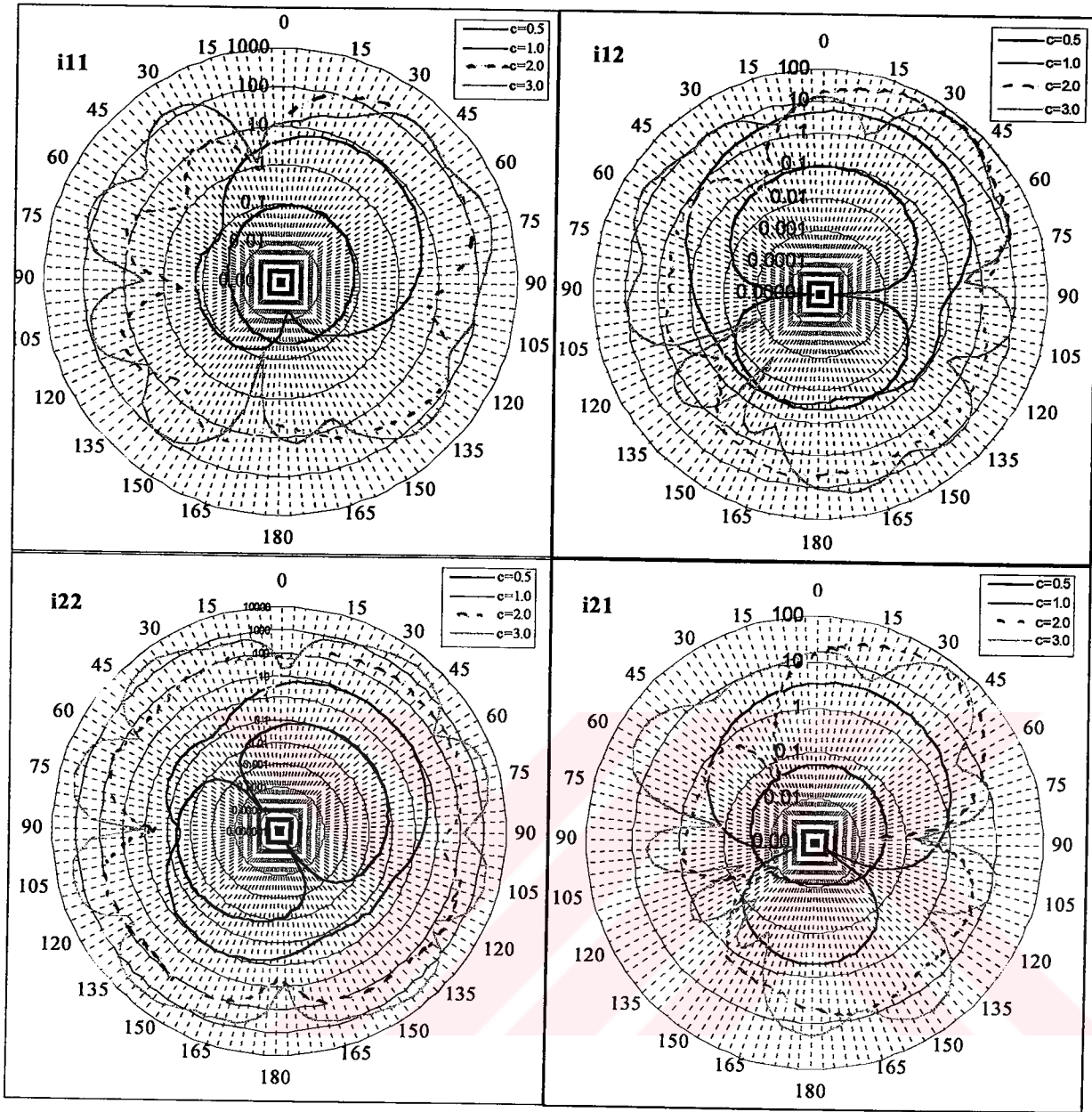
$$E_{2,\eta}(\theta, \phi) = -Z^{(1)} H_{2,\phi}(\theta, \phi) = \frac{i}{kr} e^{ikr} T_{22} \quad (3.38c)$$

$$E_{2,\phi}(\theta, \phi) = Z^{(1)} H_{2,\eta}(\theta, \phi) = \frac{i}{kr} e^{ikr} T_{21} \quad (3.38d)$$

Burada bulunan T_{ij} katsayıları (3.1) eşitliğindeki saçılma genliği matrisinin elemanlarından bir çarpan farkıyla farklıdır. Bu fark, sferoid için yapılan çözümdeki büyüklük parametresinin dalgaboyu ile sferoidin yarıdök uzaklığının oranına bağlı olmasından ileri gelir.

$$T_{11}(\theta, \phi) = \sum_{mn} [\alpha_{1,mn} \sigma(\theta) + \beta_{1,mn} \chi(\theta)] \cos(m\phi) \quad (3.39a)$$

$$T_{12}(\theta, \phi) = \sum_{mn} [\alpha_{1,mn} \chi(\theta) + \beta_{1,mn} \sigma(\theta)] \sin(m\phi) \quad (3.39b)$$



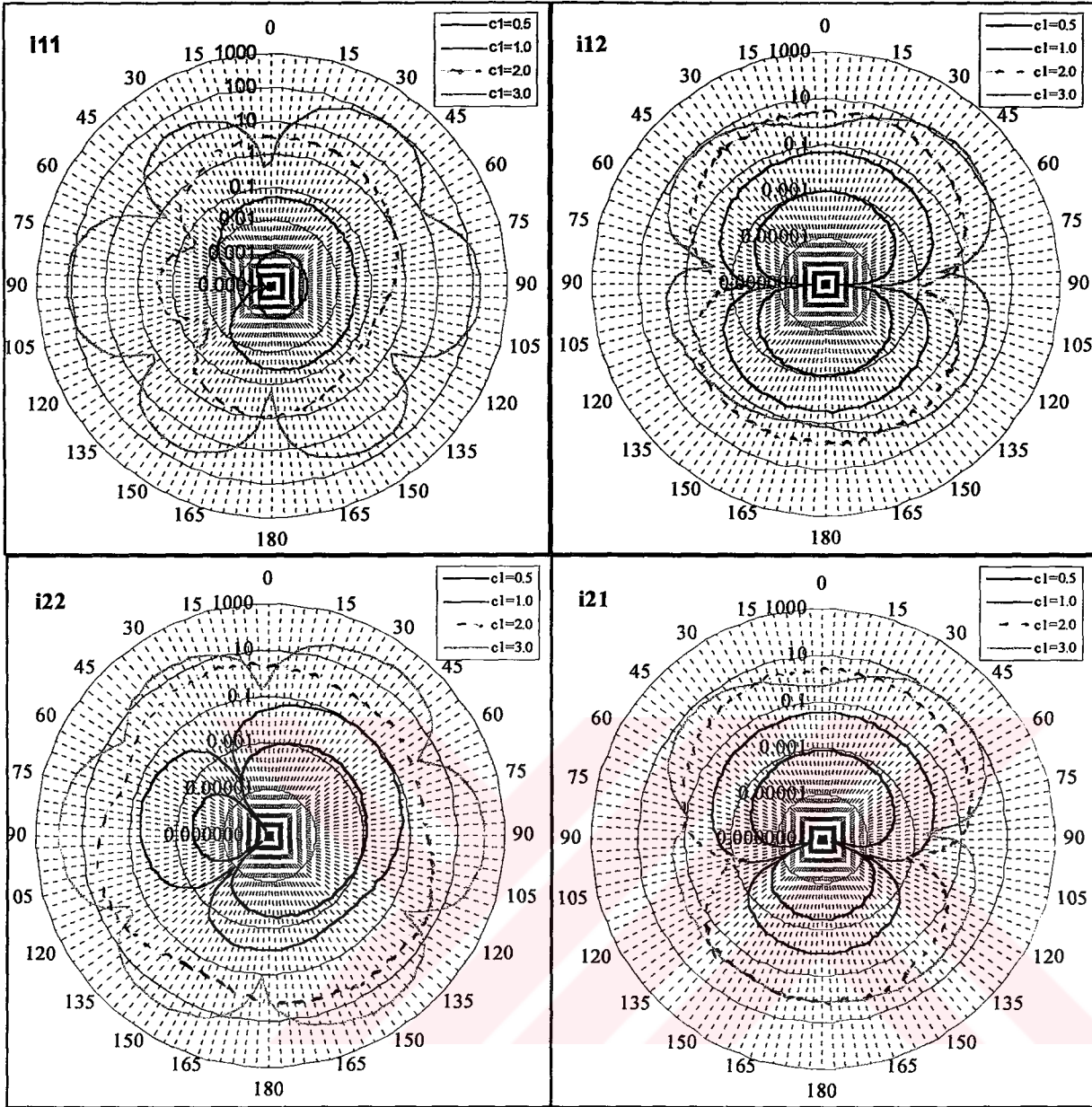
Şekil 3.3 $\zeta=45^\circ$ 'lik geniş açısı ve $a/b=1.1$ için saçılma genliği matrisi elemanları

$$T_{22}(\theta, \phi) = \sum_{nm} [\alpha_{2, nm} \sigma(\theta) + \beta_{2, nm} \chi(\theta)] \cos(m\phi) \quad (3.39c)$$

$$T_{21}(\theta, \phi) = \sum_{nm} [\alpha_{2, nm} \chi(\theta) + \beta_{2, nm} \sigma(\theta)] \sin(m\phi) \quad (3.39d)$$

Buradaki $\sigma(\theta)$ ve $\chi(\theta)$ fonksiyonları ise saçılan alanların açısal değişimlerine ilişkin fonksiyonlar olup aşağıdaki gibi tanımlıdırlar (Asano ve Yamamoto, 1975):

$$\sigma(\theta) = m \frac{S_{nm}(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (3.40a)$$

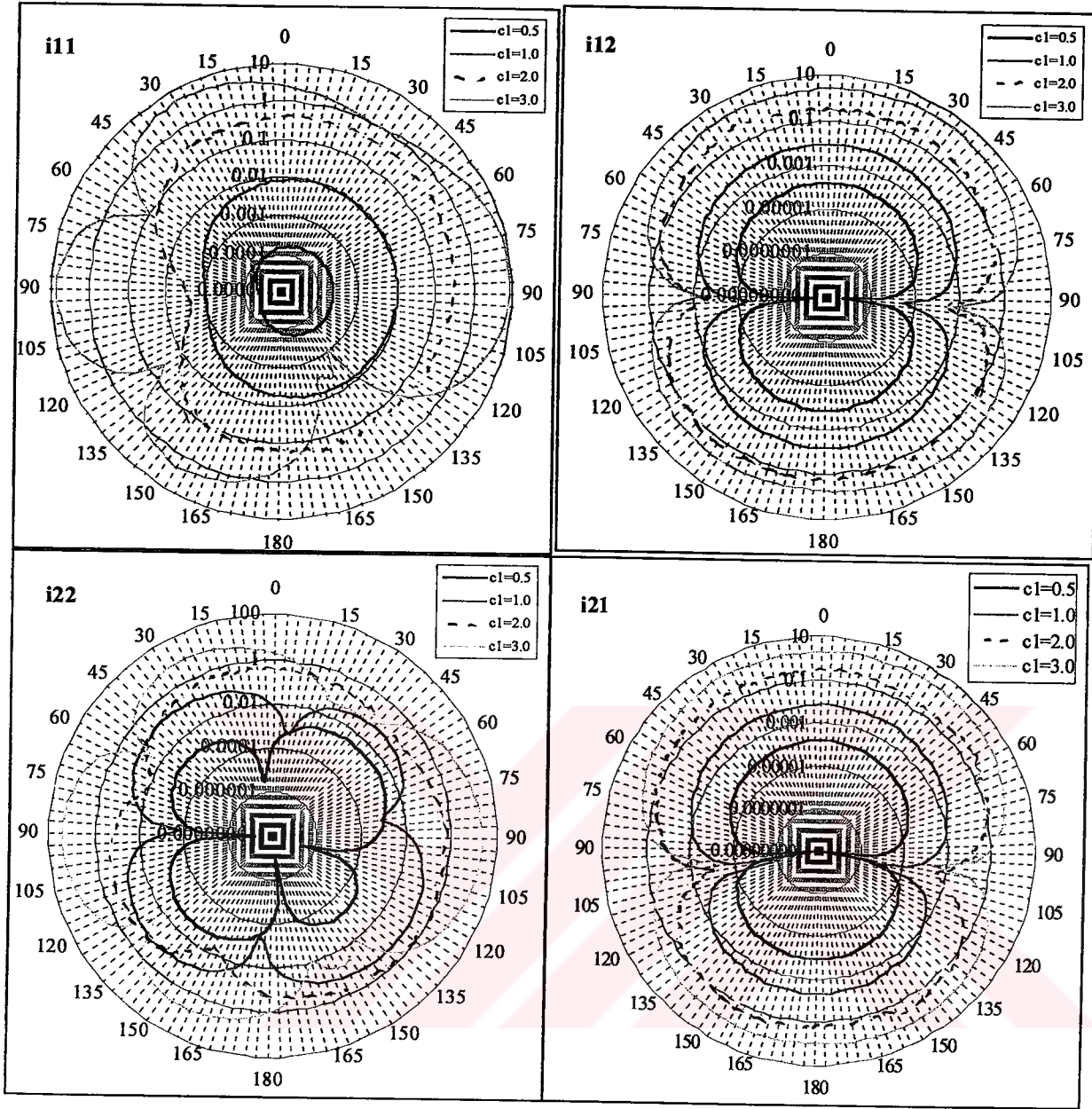


Şekil 3.4 $\zeta=45^\circ$ ve $a/b=2.0$ için saçılma genliği matrisi elemanları

$$\chi(\theta) = \frac{\partial S_{mn}(\cos\theta)}{\partial \theta} \quad (3.40b)$$

3.4 Sayısal Sonuçlar

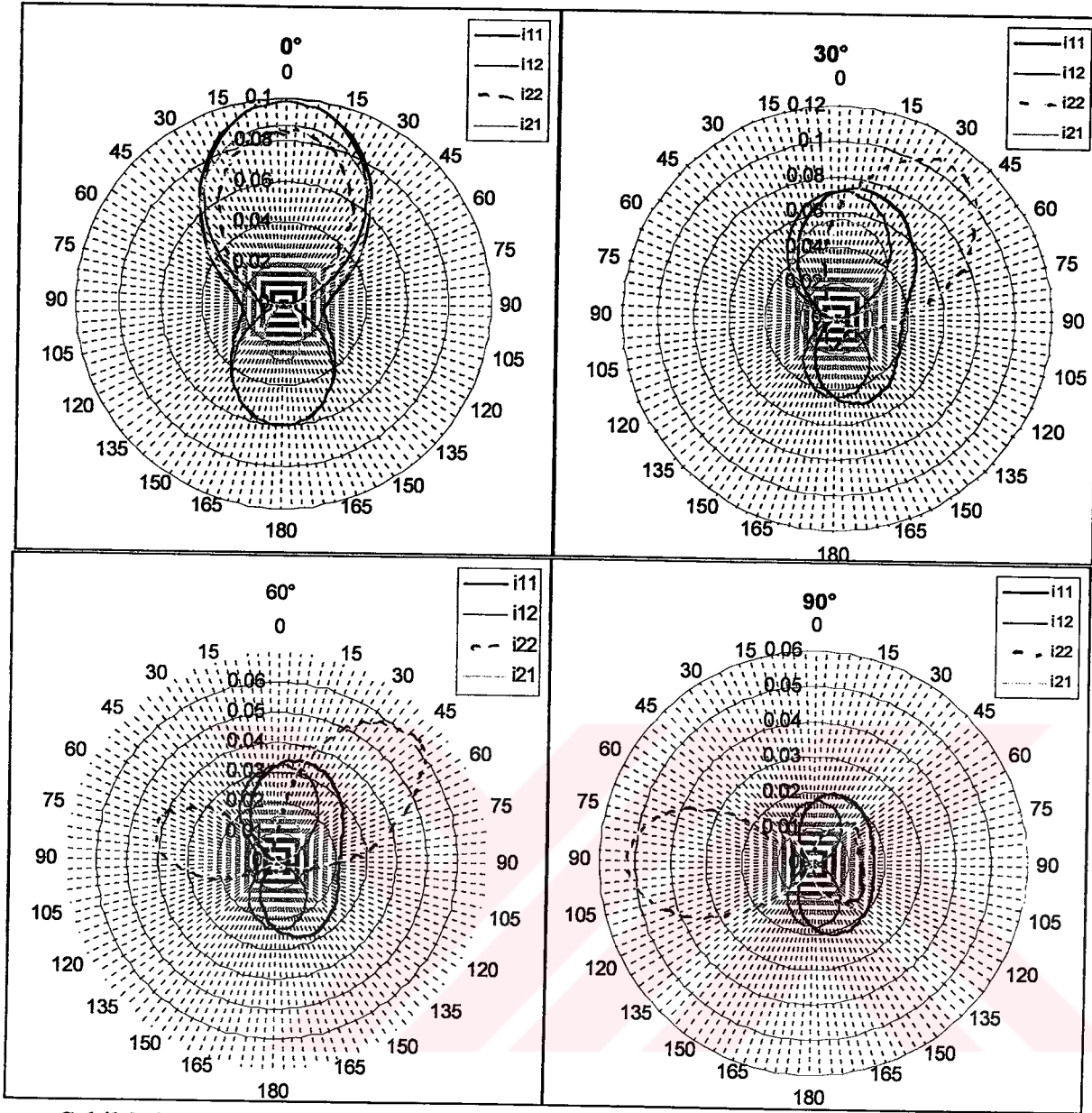
Katsayıların hesaplanması sırasında kullanılan matrislerin satır ve sütunlarındaki elemanların reel ve sanal kısımlarının n değeriyle değişimi incelenmiştir. Ayrıca, N değerinin katsayılar üzerindeki etkisi de $c=1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ değerleri için incelenmiştir. Yapılan incelemelerde seri toplamalarının yakınsaması için alınması gereken terim sayıları M ve N 'in alt sınırları için Asano ve Yamamoto'nun (1975) bulduğu sınırlarla uygun değerler elde edilmiştir. Hesaplamalarda, sferoidlerin tümü için $N=24$; $c \leq 4$ için $M=4$ ve $c=5.0$ için $M=5$ alınmıştır.



Şekil 3.5 $\zeta=45^\circ$ ve $a/b=3.0$ için Saçılma genliği matrisi elemanları

Sayısal sonuçlara ilişkin verilmiş şekillerde i_{11} , i_{12} , i_{22} ve i_{21} , sırayla T_{11} , T_{12} , T_{22} e T_{21} fonksiyonlarının karelerine eşittir. Buradaki i_{ij} ($i=1,2$; $j=1,2$) saçılma genliği matrisinin elemanlarının dalga sayısının karesi ile çarpılmış haline ve c_1 sferoidin dışındaki ortamdaki dalga sayısı ile yarıdök uzaklığının çarpımına eşittir. Şekil 3.3-Şekil 3.7'de saçıcıların bağıl dielektrik sabiti 1.78 alınmıştır.

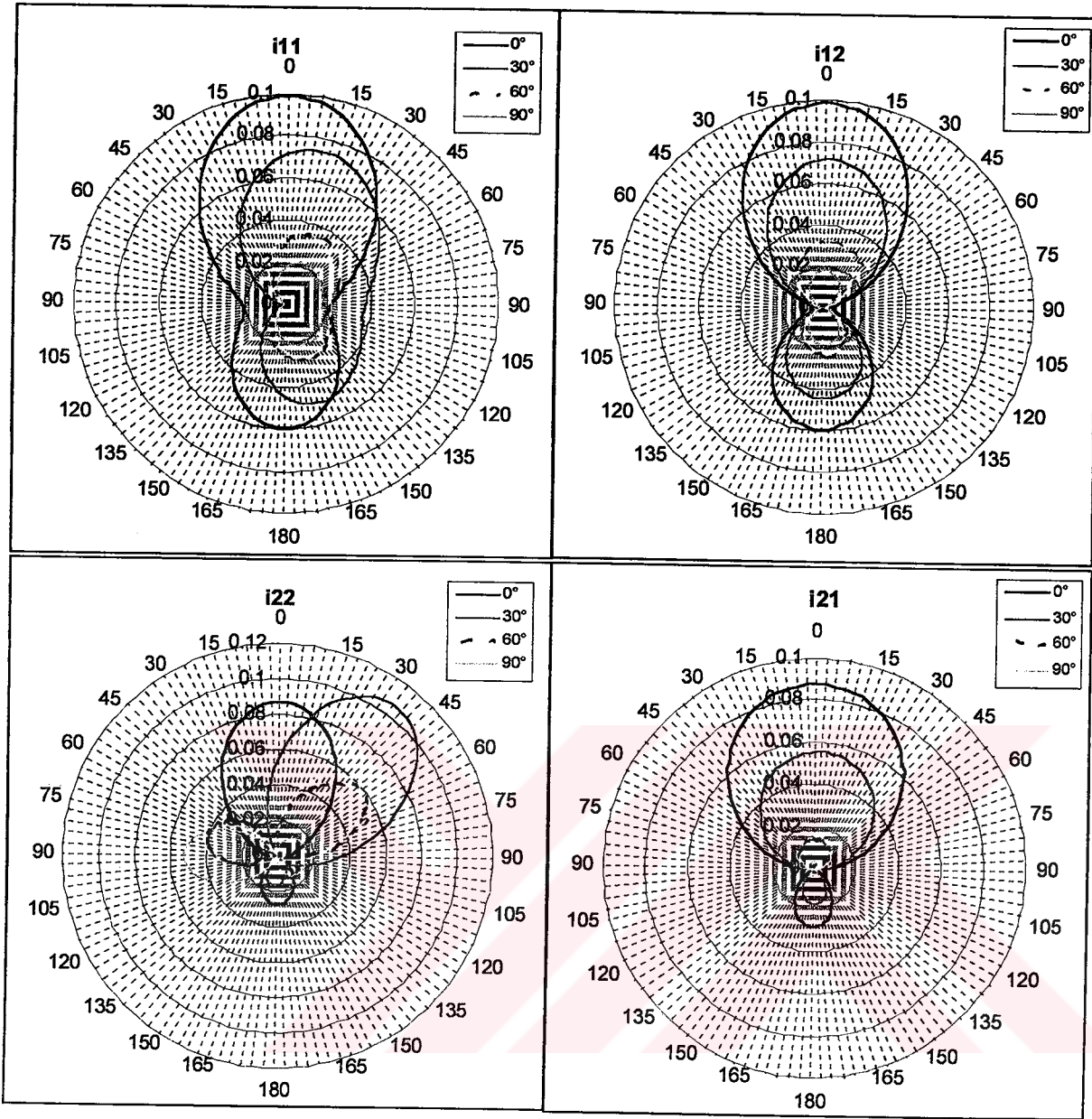
Şekiller i_{11} ve i_{22} 'in gelen alan ile sferoidin simetri ekseninin belirlediği düzlem ($\phi=0^\circ$) içindeki; i_{12} ve i_{21} 'in ise, sözkonusu düzleme dik olan düzlem ($\phi=90^\circ$) içindeki değişimlerini göstermektedir. (3.39) eşitliklerinden de görülebileceği gibi, $\phi=90^\circ$ düzleminde i_{11} ve i_{22} , $\phi=0^\circ$ düzleminde ise i_{12} ve i_{21} sıfıra eşittir.



Şekil 3.6 $c_1=1.0$, $a/b=2.0$ ve farklı geliş açıları için saçılma genliği matrisi elemanları

Şekil 3.3-Şekil 3-5 farklı şekil parametreleri için değişik büyüklüklere sahip sferoidler saçılma genliği matrisi elemanlarını karşılaştırmaktadır. Küçük sferoidler için Rayleigh çözümüne benzer sonuçlar elde edildiği sferoid büyüdükçe saçılma genliği matrisi elemanlarının genliğinde gözlem açısına bağlı değişimin çeşitlendiği gözlenmiştir. Ayrıca, saçılma genliği elemanlarının genliklerinin de büyük ölçüde büyüklük parametresine bağlı olduğu gözlenmiştir. a/b oranı büyüdükçe, geliş açısına bağlı olarak ($\xi=45^\circ$ de) geometrik kesit yüzeyinin küçülmesi nedeniyle Rayleigh bölgesinden daha geç çıkıldığı gözlenmiştir.

Şekil 3.6 0° , 30° , 60° ve 90° lik geliş açıları için saçılma genliği matrisi elemanlarını karşılaştırmaktadır. i_{12} ve i_{21} 'in θ ile değişiminin beklenildiği gibi simetri eksenine göre simetrik olduğu gözleniyor. TE ve TM modlarına ilişkin parametreler $\zeta=0^\circ$ için benzer



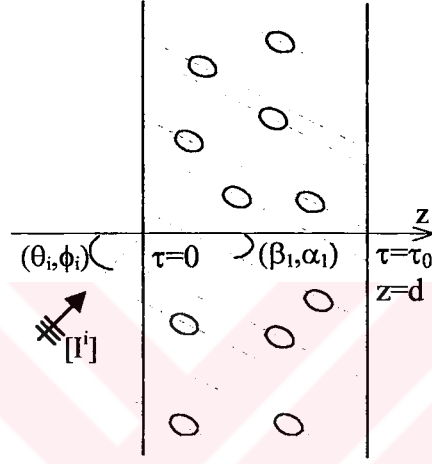
Şekil 3.7 $c=1.0$ ve $a/b=2.0$ için saçılma şiddetlerinin geliş açısı ile değişimleri

davranış gösterirken, geliş açısı büyüdükçe aralarındaki farklılıkların arttığı görülmektedir. Özellikle TM modunda aynı polarizasyonda saçılan alanın oldukça büyük olduğu görülmektedir.

Şekil 3.7 ise her bir saçılma genliği parametresinin geliş açısı ile nasıl değiştiğini göstermektedir. Elektrik alan vektörünün sferoide göre konumu nedeniyle, özellikle gelen alanla aynı polarizasyona sahip saçılan alan bileşenlerinin TE ve TM modlarına göre oldukça farklı davrandığı gözlemlenmiştir.

4. TABAKA ŞEKİLLİ OLASIL ORTAMDAN SAÇILMA PROBLEMİ

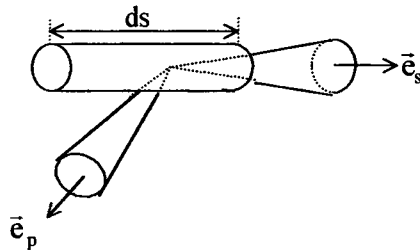
Bu bölümde, sferoid şekilli parçacıklar içeren tabaka şeklindeki bir olası ortamdan saçılma probleminin çözüm yöntemi açıklanarak, değişik konfigürasyonlara ilişkin sayısal sonuçlar verilmiştir. Ele alınan problem grubunun genel hali Şekil 4.1'deki gibidir. Bu bölümde ele alınan problemde olası parçacıkların istatistiksel özellikleriyle ilgili tanımlar Ek 2'de; Stokes vektörlerine ilişkin tanımlar Ek 3'de verilmiştir. Eğer, parçacık büyüklükleri belirli bir olasılık fonksiyonu ile verilmişse, eşitliklerde yazılmamakla beraber, faz matrisinin elemanları ve radar kesit yüzeylerinin Ek 2'de açıklanan istatistiksel ortalamaları kullanılacaktır.



Şekil 4.1 Problemin geometrisi

4.1 İletim Teorisi

İletim teorisi (transport theory, radiative transfer theory), enerjinin (güç akısının) iletimi ile ilgili fiziksel gözlemlerden yola çıkarak, özgül şiddetin olası ortamda değişimine ilişkin bir denklem önerir. Bu denklemin belirli sınır koşulları altındaki çözümü araştırılır. Olası ortamda birim kesit yüzeyli ve birim uzunluklu hayali bir silindir boyunca özgül şiddetin değişimini ele alalım. Silindir içinde özgül şiddet başlıca üç nedenden dolayı değişir (Ishimaru, 1978):



Şekil 4.2 Küçük silindirik hacim içinde enerjinin yayılması

-Özgül şiddette, silindir içindeki her bir parçacığın toplam kesit yüzeyi ve parçacık yoğunluğu (sayısı) ile orantılı bir azalma gözlenir:

$$-\rho\sigma_t I(\vec{r}, \vec{e}_s) ds \quad (4.1)$$

-Silindirin dışındaki parçacıklardan saçılarak, alana bağlı olarak özgül şiddette bir miktar artış olması beklenir:

$$\int_{4\pi} \rho ds |f(\vec{e}_s, \vec{e}_p)|^2 I(\vec{r}, \vec{e}_p) d\omega \quad (4.2)$$

-Silindir içindeki emisyon nedeniyle özgül şiddette bir miktar artış olur.

Bu üç katkının toplamı özgül şiddetteki değişim miktarını ifade eden iletim denklemini oluşturur:

$$\frac{dI(\vec{r}, \vec{e}_s)}{ds} = -\rho\sigma_t I(\vec{r}, \vec{e}_s) + \frac{\rho\sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\vec{e}_s, \vec{e}_p) I(\vec{r}, \vec{e}_p) d\omega_p + l(\vec{r}, \vec{e}_s) \quad (4.3)$$

Burada, ρ birim hacimdeki parçacık sayısı, σ_t toplam radar kesit yüzeyi, $I(\vec{r}, \vec{e})$ $\vec{e}$ doğrultusunda birim katı açı ve birim hacimde yayılan güçtür. Faz fonksiyonu $p(\vec{e}, \vec{e}') = (4\pi/\sigma_t) |f(\vec{e}, \vec{e}')|^2$ ise $\vec{e}$ doğrultusunda gelen dalganın tek parçacıktan saçılarak $\vec{e}'$ doğrultusunda yaydığı güçle orantılıdır. Burdaki $l(\vec{r}, \vec{e}_s)$ ise kaynak fonksiyonudur.

Ayrıca özgül şiddet kaynakları açısından farklı iki şiddetin toplamı olarak ele alınabilir. Olasıl ortama dışarıdan gelen alanla ilişkili olan, saçılma ve soğrulma nedeniyle azalarak ilerleyen özgül şiddet (reduced intensity) ve çeşitli parçacıklardan saçılarak her bir noktada özgül şiddete katkıda bulunan difüzyon şiddetinin toplamı, toplam özgül şiddete eşit olacaktır:

$$I(\vec{r}, \vec{e}) = I_r(\vec{r}, \vec{e}) + I_d(\vec{r}, \vec{e}) \quad (4.4)$$

İletim denkleminin ancak belirli durumlarda tam çözümü vardır. Çoğu pratik problemde yaklaşık veya sayısal çözümleri araştırılır (Ishimaru, 1978; Lam ve Ishimaru, 1994). Yaklaşık çözüm yöntemleri, ortamdaki saçıcı yoğunluğuna göre tekli saçılma (single scattering), birinci mertebeden çoklu saçılma (first order multiple scattering) ve difüzyon yaklaşımları olarak üç gruba ayrılabilir. İlk iki yaklaşıklıkta, yoğunluğun düşük olduğu ortamlarda bir noktaya her bir parçacığı aydınlatan ‘gelen’ alan katkısının sadece olası ortam dışından gelen alan olduğunu varsayılır. Diğer bir deyişle difüzyon şiddetinin, parçacıkları aydınlatan alana

katkısının ihmal edilebilir olduğu kabul edilir. Eğer ortamdaki parçacık yoğunluğu oldukça düşükse gelen alanın parçacıklardan saçılma ve soğrulma nedeniyle uğradığı zayıflama ihmal edilebilir. Böylece uygulanan yaklaşım tekli saçılma olarak adlandırılır. Eğer ortamdaki parçacık yoğunluğu artarsa gelen alanın (saçılma ve soğrulma nedeniyle) zayıflaması ihmal edilemez düzeyde olacaktır. Böylece parçacıkları aydınlatan alanın olası ortamın dışından gelen ancak zayıflayarak ilerleyen alan olduğunu varsayan yaklaşım birinci mertebeden çoklu saçılma olarak adlandırılır. İletim denklemi için yapılan diğer bir yaklaşım ise, parçacık yoğunluğunun çok büyük olduğu ortamlarda difüzyon şiddetinin hemen hemen bütün yönlerde düzgün yayıldığı varsayımına dayanan difüzyon yaklaşımıdır. Ancak her iki durum arasında, yukarıdaki varsayımların geçerli olmadığı orta yoğunluklarda iletim denkleminin sayısal çözümleri araştırılır.

Stokes parametreleri, genel eliptik polarizasyonlu dalgaya ait özgül şiddetleri temsil etmek için kullanılabilir. Bu durumda (4.3) denklemi,

$$\frac{d[I(\vec{r}, \vec{e}_s, \vec{e}_t)]}{ds} = -\rho \sigma_t [I(\vec{r}, \vec{e}_s, \vec{e}_t)] + \frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} [p(\vec{e}_s, \vec{e}_t, \vec{e}'_s, \vec{e}'_t)] [I(\vec{r}, \vec{e}'_s, \vec{e}'_t)] d\omega' + [\ell(\vec{r}, \vec{e}_s, \vec{e}_t)] \quad (4.5)$$

halini alır ki burada, önceki denklemlerdeki özgül şiddetler elemanları Stokes parametreleri olan vektörlerle yer değiştirmiştir. Faz fonksiyonu ise faz matrisiyle yer değiştirmiştir. Ek 3'de tanımı verilen Stokes matrisi, belirli koşulları sağadığı takdirde faz matrisine eşittir; aksi halde referans düzlemlerinin uygun dönüşümleri ile faz matrisine dönüştürülebilir (Sekera, 1966; Ishimaru, 1978).

Uygun referans düzlemlerine göre tanımlanmış saçılma genliği matrisi elemanlarını kullanarak faz matrisi aşağıdaki biçimde elde edilebilir (Ishimaru, 1978):

$$[p(\vec{e}_s, \vec{e}_t, \vec{e}'_s, \vec{e}'_t)] = \frac{4\pi}{\sigma_t} \begin{bmatrix} |f_{11}|^2 & |f_{12}|^2 & \text{Re}(f_{11}f_{12}^*) & -\text{Im}(f_{11}f_{12}^*) \\ |f_{21}|^2 & |f_{22}|^2 & \text{Re}(f_{21}f_{22}^*) & -\text{Im}(f_{21}f_{22}^*) \\ 2\text{Re}(f_{11}f_{21}^*) & 2\text{Re}(f_{12}f_{22}^*) & \text{Re}(f_{11}f_{22}^* + f_{12}f_{21}^*) & -\text{Im}(f_{11}f_{22}^* - f_{12}f_{21}^*) \\ 2\text{Im}(f_{11}f_{21}^*) & 2\text{Im}(f_{12}f_{22}^*) & \text{Im}(f_{11}f_{22}^* + f_{12}f_{21}^*) & \text{Re}(f_{11}f_{22}^* - f_{12}f_{21}^*) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Bölümün başında da açıklandığı gibi, parçacık büyüklükleri belirli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ile belirli ise toplam radar kesit yüzeyi ve faz matrisinin elemanları istatistiksel ortalamalarına eşit alınır.

4.2 Referans Düzlemlerinin Dönüşümü

Tek parçacıklı problemlerde genellikle saçıcıya göre tanımlanmış bir referans sistemi kullanılır. Örnek olarak, tek parçacıklı problemde küresel simetri olması durumunda gelen ve saçılan alanların yayılma doğrultusuna dik ve paralel düzlemler referans (saçılma) düzlemi olarak seçilir (Van de Hulst, 1957). Ancak aynı anda çok sayıda saçıcı söz konusu ise ortak bir referans sistemine gereksinim vardır. Paralel iki düzlemle sınırlanmış olası ortamdan saçılma problemleri incelenirken gelen ve saçılan alanlara ilişkin referans düzlemlerinin, ortamın sınırlarını oluşturan tabakaların normali ile sırası ile gelme ve saçılma doğrultularına göre tanımlanması gerekir (Sekera, 1966). Ele aldığımız problemde parçacıklar küresel simetrik değildir. Dolayısı ile küresel parçacıklar için Sekera'nın (1966) elde etmiş olduğu formülasyon kullanışlı değildir. Sekera'nın (1966) elde ettiği çözüm değiştirilerek küresel olmama durumuna genelleştirilebilir. Ancak, böyle bir çözüm tekli parçacık için alanın gelme ve saçılma doğrultularına göre tanımlanmış bir saçılma matrisinin elde edilmiş olmasını gerektirir. Oysa, sferoid için 3. Bölümde özetlenen çözümde gelen ve saçılan alanlar için referans düzlemleri, sferoidin simetri eksenine ve sırası ile gelme ve saçılma doğrultularına göre tanımlanmıştır.

3. Bölümde sferoid şekilli saçıcılar için elde edilmiş olan çözüm aşağıdaki matrissel ilişki ile de verilebilir (Asano ve Sato, 1980):

$$\begin{bmatrix} E_{//}^s \\ E_{\perp}^s \end{bmatrix}_{\text{POR}} = \frac{e^{ikr}}{ikr} \begin{bmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{//}^i \\ E_{\perp}^i \end{bmatrix}_{\text{QOR}} \quad (4.7)$$

Eğer sferoidlerin eksenleri tabakanın normaline paralel ise (4.7) eşitliğindeki saçılma genliği matrisi elemanları faz matrisinin elde edilmesi amacıyla kullanılabilir. Ancak, sferoidlerin eksenlerinin doğrultusu ile ilgili herhangi bir sınırlama getirilmemiş ise referans düzlemlerinin değiştirilmesi gerekir.

Şekil 4.3'de başlangıç noktaları ortak olan, xyz koordinat sistemindeki z ekseninin tabakanın normaline paralel, x'y'z' koordinat sistemindeki z' ekseninin ise sferoidin simetri eksenine paralel olduğunu varsayalım. Ayrıca, x'y'z' sisteminin, xyz koordinat sistemi üzerinde (α_1, β_1) kadar dönmüş olduğunu varsayalım. Buna göre, gelen alan için QOR ile tanımlı olan referans düzlemini QOS ile gösterilen düzleme; saçılan alan için POR ile tanımlı olan referans düzlemini POS ile gösterilen düzleme dönüştürmek gerekir.

Referans düzlemi yayılma doğrultusu etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülürse, eski ve yeni elektrik alan bileşenleri arasında

$$\begin{bmatrix} E'_{//} \\ E'_{\perp} \end{bmatrix} = R(\alpha) \begin{bmatrix} E_{//} \\ E_{\perp} \end{bmatrix} \quad (4.8a)$$

ilişkisi vardır. Buradaki dönüşüm matrisi $R(\alpha)$,

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

eşitliği ile verilebilir (Sekera, 1966.; Ishimaru, 1978).

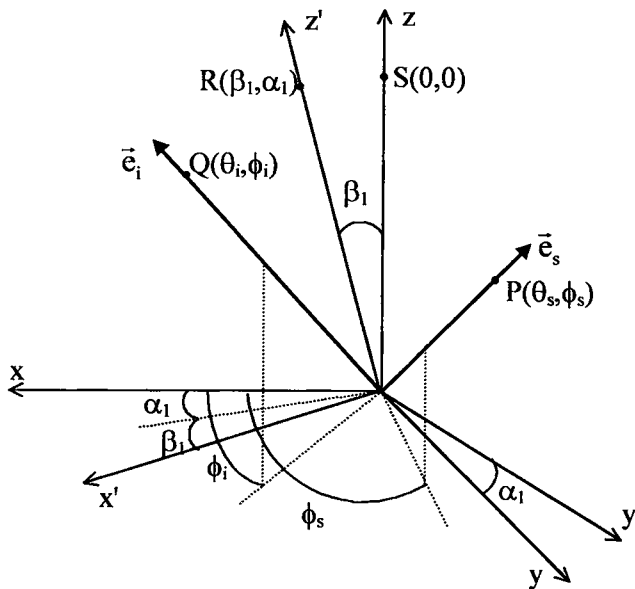
Eğer, POR ile POS arasındaki açı Θ_s , QOR ile QOS arasındaki açı Θ_i ise yeni referans düzlemlerindeki elektrik alan bileşenleri arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix} E_{//}^s \\ E_{\perp}^s \end{bmatrix}_{POS} = \frac{e^{ikr}}{ikr} \begin{bmatrix} -\cos \Theta_s & \sin \Theta_s \\ -\sin \Theta_s & -\cos \Theta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \Theta_i & -\sin \Theta_i \\ \sin \Theta_i & -\cos \Theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{//}^i \\ E_{\perp}^i \end{bmatrix}_{QOS} \quad (4.9)$$

eşitliği ile verilebilir. Böylece yeni saçılma matrisi elemanlarını

$$f_{11} = [\cos \Theta_i (\cos \Theta_s T_{22} - \sin \Theta_s T_{21}) + \sin \Theta_i (\cos \Theta_s T_{12} + \sin \Theta_s T_{11})] / ik \quad (4.10a)$$

$$f_{12} = [\sin \Theta_i (\cos \Theta_s T_{22} - \sin \Theta_s T_{21}) - \cos \Theta_i (\cos \Theta_s T_{12} + \sin \Theta_s T_{11})] / ik \quad (4.11b)$$



Şekil 4.3 (α_1, β_1) kadar dönmüş sistemin referans düzlemlerinin dönüşümü

$$f_{21} = [\cos\Theta_i(\sin\Theta_s T_{22} + \cos\Theta_s T_{21}) + \sin\Theta_i(\sin\Theta_s T_{12} - \cos\Theta_s T_{11})]/ik \quad (4.11c)$$

$$f_{22} = [\sin\Theta_i(\sin\Theta_s T_{22} + \cos\Theta_s T_{21}) - \cos\Theta_i(\sin\Theta_s T_{12} - \cos\Theta_s T_{11})]ik \quad (4.11d)$$

biçiminde yazarsak,

$$\begin{bmatrix} E_{//}^s \\ E_{\perp}^s \end{bmatrix}_{POS} = \frac{e^{ikr}}{r} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{//}^i \\ E_{\perp}^i \end{bmatrix}_{QOS} \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir. Buradaki Θ_i ve Θ_s açıları aşağıdaki eşitlik ile verilebilir (Ek 4):

$$\cos\Theta_j = \frac{\sin\theta_j \cos\beta_1 - \sin\beta_1 \cos\theta_j \cos(\phi_j - \alpha_1)}{\sqrt{\sin^2\beta_1 \cos^2\theta_j + \cos^2\beta_1 \sin^2\theta_j + \sin^2\beta_1 \sin^2\theta_j G(\phi_j, \theta_j, \alpha_1, \beta_1)}}, \quad (j = i, s) \quad (4.13a)$$

$$G(\phi_j, \theta_j, \alpha_1, \beta_1) = \sin^2(\phi_j - \alpha_1) - 2\cos(\phi_j - \alpha_1)\sin\theta_j \sin\beta_1 \cos\theta_j \cos\beta_1 \quad (4.14b)$$

Buradan açıkça görüldüğü gibi, sferoid sınır düzlemlerinin normaline paralel ise dönme açıları sıfır olacaktır.

3. bölümde tek sferoid için Şekil 4.2'deki $x'y'z'$ koordinat sisteminde bir çözüm elde edilmiştir. Sferoidin ekseninin z eksenine ile çakıştığı durum haricinde, çoklu saçılma problemini çözmek için $x'y'z$ sisteminde elde edilen çözümü xyz sisteminin değişkenleriyle yazmak gereklidir. Bu işlem için aşağıdaki bağıntılar kullanılmıştır (Asano ve Sato, 1980):

$$\cos\theta' = \cos\theta \cos\beta_1 + \sin\theta \sin\beta_1 \cos(\phi - \alpha_1) \quad (4.15a)$$

$$\cos\phi' = \frac{\cos\theta \sin\beta_1 - \sin\theta \cos\beta_1 \cos(\phi - \alpha_1)}{\pm \sin\theta'} \quad (4.15b)$$

Burada, $0 < (\phi - \alpha_1) < \pi$ ise pozitif; $\pi < (\phi - \alpha_1) < 2\pi$ ise negatif işaret kullanılmalıdır.

4.3 Problemin 1. Mertebeden Çoklu Saçılma Yaklaşımı ile Çözümü

Küresel parçacıklar içeren tabaka şekilli rastgele ortamlardan saçılma probleminin çözümleri, Sekera'nın (1966) Mie çözümüne ilişkin olarak geliştirdikleri saçılma genliği matrisi formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir (Cheung ve Ishimaru, 1982; Ma ve Ishimaru ve Ma, 1991; Lam ve Ishimaru, 1993). Sözkonusu çalışmalarda, tek parçacıklı çözümde, referans düzlemleri gelen ve saçılan alanların yayılma doğrultularının belirlediği düzlem ile bu düzleme dik olan düzlem seçilmiştir. Sferoidal parçacık için elde edilen çözümde ise referans

düzlemleri sferoidin simetri eksenini ve gelen veya yansıyan dalgaların yayılma doğrultusuna göre tanımlanmıştır. Dolayısı ile sferoidlerin eksenlerinin tabaka düzlemine dik olduğu durum için, (4.7) eşitliği ile oluşturulan Stokes matrisi ile iletim teorisindeki faz matrisi eşit olacaktır.

Ortamda yayılan toplam özgül şiddetleri temsil eden Stokes vektörünün elemanları bilinmeyen büyüklüklerdir. Giriş bölümüne de söz edildiği gibi toplam özgül şiddet, azalarak gelen şiddet ve difüze şiddetin toplamı olarak ele alınabilir. Birinci mertebeden çoklu saçılma yaklaşımında difüze şiddetin parçacıkları aydınlatan alana katkısının, azalarak gelen şiddet yanında ihmal edilebilir seviyede olduğu varsayılır. Bu durumda, parçacıkları aydınlatan toplam şiddet, yaklaşık olarak eşit olan azalarak gelen şiddete eşittir (Ishimaru, 1978). Ele alınan problem için, azalarak gelen şiddet,

$$\frac{d[I_{ri}(\vec{r}, \vec{e}_s)]}{ds} = -\rho\sigma_t[I_{ri}(\vec{r}, \vec{e}_s)] \quad (4.16)$$

denklemini sağlar ve

$$[I_{ri}(\tau, \mu, \phi)] = [F] \exp(-\tau/\mu_0) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) \quad (4.17)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $\mu = \cos(\theta)$, $\mu_0 = \cos(\theta_0)$ ve τ optik uzaklıktır. Ayrıca, (θ_0, ϕ_0) gelen alanın ve (θ, ϕ) saçılan alanın yayılma doğrultularıdır. $[F]$ ise bir sütun matrisi olup parçacıkların saçıcılık özelliklerine ve olası ortamı aydınlatan gelen alana bağlıdır (Ishimaru, 1982). Eğer tabakanın kırılma indisi dış ortamdan farklı ise $[F]$ matrisi aynı zamanda tabakanın geçirgenliği ve yansıtıcılığı ile de ilgilidir (Ishimaru, 1978; Ma ve Ishimaru, 1991). Tabaka ile içinde olası parçacıkların özellikleri ve gelen alan belli ise, sınır koşullarını sağlayan difüze şiddet,

$$[I_d(\tau, \mu, \phi)] = [F(\mu, \phi, \mu_0, 0)] \begin{cases} \mu_0 \frac{\exp(-\tau/\mu_0) - \exp(-\tau/\mu)}{(\mu_0 - \mu)} & ; \text{if } 0 < \mu \leq 1 \\ \mu_0 \frac{\exp(-\tau/\mu_0) - \exp(-\tau/\mu_0 + (\tau_0 - \tau)/\mu)}{(\mu_0 - \mu)} & ; \text{if } -1 \leq \mu < 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

eşitliği ile verilir (Ishimaru, 1978). Burada gelen alanın $\phi_0 = 0$ düzleminde yayıldığını varsaymak problemin genelliğini bozmaz. Ayrıca açıkça görüldüğü gibi $\mu = \mu_0$ 'da, birinci mertebeden çoklu saçılma yaklaşımı ile elde edilen analitik çözüm $0 < \mu < 1$ için belirsiz, $-1 < \mu < 0$ için tekildir. Çoğu pratik durumda, tabakadan geri ve ileri saçılan alanlara ilişkin bilgilerle ilgilenilir. Dolayısı ile tabakanın $z=0$ düzleminde dalgaın geldiği ortama giren ve $z=d$

düzleminden diğer ortama geçen alan büyüklükleri ile ilgilenilir. Buna göre $0 < \mu < 1$ için iletilen özgül şiddet,

$$[I]_t = \begin{cases} \frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} [F] \{ \exp(-\tau_0 / \mu) - \exp(-\tau_0 / \mu_0) \}; & \mu \neq \mu_0 \text{ ise} \\ \frac{\tau_0}{\mu_0} [F] \exp(-\tau_0 / \mu_0) & ; \mu = \mu_0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $-1 < \mu < 0$ için yansıyan özgül şiddet,

$$[I]_r = \begin{cases} \frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} [F] \{ \exp(-\tau_0 (1/\mu_0 - 1/\mu)) - 1 \}; & \mu \neq \mu_0 \text{ ise} \\ -\frac{\tau_0}{\mu_0} [F] & ; \mu = \mu_0 \text{ ise} \end{cases}$$

eşitlikleri ile verilir (Ishimaru, 1978; Ma ve Ishimaru, 1991).

Eğer Şekil 4.1'deki tabakaların kırılma indisleri birbirine eşit ise, $[F]$ sütun matrisi ortamdaki parçacıkların faz matrisi ve gelen alana ilişkin Stokes vektörü yardımıyla bulunabilir:

$$[F(\mu, \phi, \mu_0, 0)] = [P(\mu, \phi, \mu_0, 0)] \cdot [I^i] \quad (4.19)$$

Buradaki μ , ϕ , μ_0 açıları (4.15) eşitlikleri ile tanımlı olan, Şekil 4.2'de xyz sistemindeki açı değişkenleridir. Tabakanın kırılma indisi, tabakayı çevreleyen ortamlardan farklı ise, sınırlardaki yansımalar nedeniyle ortamda yayılan gelen alanın iki farklı bileşeni olacaktır. Böyle bir durumda izlenmesi gereken yöntem küresel saçıcılar durumundan farklı olmayacaktır (Ma vd., 1982; Lam ve Ishimaru, 1993).

4.4 Faz Matrisinin Ayırıştırılması

Problemin sayısal çözümünü elde etmenin bir yolu, iletim denkleminin uygun bir şekilde ayırıştırılarak, elde edilen integral denklemlerin sayısal çözümünü bulmaya dayanır. (3.39)'daki saçılma genliği matrisi elemanlarını

$$T_{11}(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^M A_m^{11}(\theta) \cos(m\phi) \quad (4.20a)$$

$$T_{12}(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^M A_m^{12}(\theta) \sin(m\phi) \quad (4.20b)$$

$$T_{22}(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^M A_m^{22}(\theta) \cos(m\phi) \quad (4.20c)$$

$$T_{21}(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^M A_m^{21}(\theta) \sin(m\phi) \quad (4.20d)$$

biçiminde yeniden yazalım. Buradaki $A_m^{ij}(\theta)$; $i, j = 1, 2$ fonksiyonları,

$$A_m^{11}(\theta) = \sum_{n=m}^M (\alpha_{1,mn} \sigma(\theta) + \beta_{1,mn} \chi(\theta)) \quad (4.21a)$$

$$A_m^{12}(\theta) = \sum_{n=m}^M (\alpha_{1,mn} \chi(\theta) + \beta_{1,mn} \sigma(\theta)) \quad (4.21b)$$

$$A_m^{22}(\theta) = \sum_{n=m}^M (\alpha_{2,mn} \sigma(\theta) + \beta_{2,mn} \chi(\theta)) \quad (4.21c)$$

$$A_m^{21}(\theta) = \sum_{n=m}^M (\alpha_{2,mn} \chi(\theta) + \beta_{2,mn} \sigma(\theta)) \quad (4.21d)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre, sferoidlerin eksenlerinin tabaka normaline paralel olduğu durum için, faz matrisinin elemanalarını, Ek 5.6 eşitliği yardımıyla Fourier bileşenlerine ayırılarak,

$$\begin{aligned} k^2 |f_{11}|^2 &= |T_{22}|^2 = |A_0^{22}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M |A_i^{22}|^2 + \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^{M-k} \operatorname{Re} \left\{ A_i^{22} (A_{i+k}^{22})^* \right\} + \sum_{i=0}^k A_i^{22} (A_{k-i}^{22})^* \right) \cos(k\phi) \\ &+ \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{22} (A_{k-i}^{22})^* \right) \cos(k\phi) \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned} k^2 |f_{12}|^2 &= |T_{12}|^2 = |A_0^{12}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M |A_i^{12}|^2 + \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^{M-k} \operatorname{Re} \left\{ A_i^{12} (A_{i+k}^{12})^* \right\} - \sum_{i=0}^k A_i^{12} (A_{k-i}^{12})^* \right) \cos(k\phi) \\ &- \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{12} (A_{k-i}^{12})^* \right) \cos(k\phi) \end{aligned} \quad (4.22b)$$

$$\begin{aligned} k^2 |f_{22}|^2 &= |T_{11}|^2 = |A_0^{11}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M |A_i^{11}|^2 + \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^{M-k} \operatorname{Re} \left\{ A_i^{11} (A_{i+k}^{11})^* \right\} + \sum_{i=0}^k A_i^{11} (A_{k-i}^{11})^* \right) \cos(k\phi) \\ &+ \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{11} (A_{k-i}^{11})^* \right) \cos(k\phi) \end{aligned} \quad (4.22c)$$

$$\begin{aligned}
k^2 |f_{21}|^2 &= |T_{21}|^2 = |A_0^{21}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M |A_i^{21}|^2 + \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^{M-k} \operatorname{Re} \left\{ A_i^{21} (A_{i+k}^{21})^* \right\} - \sum_{i=0}^k A_i^{21} (A_{k-i}^{21})^* \right) \cos(k\phi) \\
&\quad - \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{21} (A_{k-i}^{21})^* \right) \cos(k\phi)
\end{aligned} \tag{4.22d}$$

$$\begin{aligned}
k^2 f_{11} f_{12}^* &= -T_{22} T_{12}^* = - \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^k A_i^{22} (A_{k-i}^{12})^* + \sum_{i=0}^{M-k} \left(A_i^{22} (A_{i+k}^{12})^* - A_{i+k}^{22} (A_i^{12})^* \right) \right) \sin(k\phi) \\
&\quad - \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{22} (A_{k-i}^{12})^* \right) \sin(k\phi)
\end{aligned} \tag{4.22e}$$

$$\begin{aligned}
k^2 f_{21} f_{22}^* &= T_{21} T_{11}^* = \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^k A_i^{21} (A_{k-i}^{11})^* - \sum_{i=0}^{M-k} \left(A_i^{21} (A_{i+k}^{11})^* - A_{i+k}^{21} (A_i^{11})^* \right) \right) \sin(k\phi) \\
&\quad + \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{21} (A_{k-i}^{11})^* \right) \sin(k\phi)
\end{aligned} \tag{4.22f}$$

$$\begin{aligned}
k^2 f_{11} f_{21}^* &= T_{22} T_{21}^* = \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^k A_i^{22} (A_{k-i}^{21})^* + \sum_{i=0}^{M-k} \left(A_i^{22} (A_{i+k}^{21})^* - A_{i+k}^{22} (A_i^{21})^* \right) \right) \sin(k\phi) \\
&\quad + \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{22} (A_{k-i}^{21})^* \right) \sin(k\phi)
\end{aligned} \tag{4.22g}$$

$$\begin{aligned}
k^2 f_{12} f_{22}^* &= -T_{12} T_{11}^* = - \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^k A_i^{12} (A_{k-i}^{11})^* - \sum_{i=0}^{M-k} \left(A_i^{12} (A_{i+k}^{11})^* - A_{i+k}^{12} (A_i^{11})^* \right) \right) \sin(k\phi) \\
&\quad - \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M A_i^{12} (A_{k-i}^{11})^* \right) \sin(k\phi)
\end{aligned} \tag{4.22h}$$

$$\begin{aligned}
k^2 (f_{11} f_{22}^* + f_{12} f_{21}^*) &= T_{22} T_{11}^* - T_{12} T_{21}^* = A_0^{22} (A_0^{11})^* + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^{M-k} \left(A_i^{22} (A_{i+k}^{11})^* + A_{i+k}^{22} (A_i^{11})^* \right) \right. \\
&\quad \left. + A_{i+k}^{12} (A_i^{21})^* + A_{i+k}^{12} (A_i^{21})^* \right) + \sum_{i=0}^k A_i^{22} (A_{k-i}^{11})^* - A_i^{12} (A_{k-i}^{21})^* \cos(k\phi) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M \left(A_i^{22} (A_{k-i}^{11})^* - A_i^{12} (A_{k-i}^{21})^* \right) \right) \cos(k\phi)
\end{aligned} \tag{4.22i}$$

$$\begin{aligned}
k^2(f_{11}f_{22}^* - f_{12}f_{21}^*) &= T_{22}T_{11}^* + T_{12}T_{21}^* = A_0^{22}(A_0^{11})^* + A_0^{12}(A_0^{21})^* + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^{M-k} \left(A_i^{22}(A_{i+k}^{11})^* \right. \right. \\
&+ A_{i+k}^{22}(A_i^{11})^* - A_{i+k}^{12}(A_i^{21})^* - A_{i+k}^{12}(A_i^{21})^* \Big) + \sum_{i=0}^k A_i^{22}(A_{k-i}^{11})^* + A_i^{12}(A_{k-i}^{21})^* \Big) \cos(k\phi) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=M+1}^{2M} \left(\sum_{i=k-M}^M \left(A_i^{22}(A_{k-i}^{11})^* + A_i^{12}(A_{k-i}^{21})^* \right) \right) \cos(k\phi)
\end{aligned} \quad (4.22j)$$

eşitlikleri elde edilmiştir. (4.22) eşitlikleri gözönüne alındığında (4.6) eşitliği ile verilen faz matrisi,

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_t}{4\pi} [P(\mu, \phi, \mu', \phi')] &= \\
[S(\mu, \mu')]_0^a + \sum_{k=1}^{2M} [S(\mu, \mu')]_k^a \cos(k(\phi - \phi')) + \sum_{k=1}^{2M} [S(\mu^s, \mu^i)]_k^b \sin(k(\phi - \phi'))
\end{aligned} \quad (4.23)$$

biçiminde yazılmıştır. Buna göre (4.5) denklemini sağlayan özgül şiddet

$$[I] = [I]_0^a + \sum_{k=1}^{2M} [I]_k^a \cos(k\phi) + \sum_{k=1}^{2M} [I]_k^b \sin(k\phi) \quad (4.24)$$

biçiminde fourier bileşenlerine ayrılmıştır. (4.23) denklemi ile tanımlanan $[S]_k^a$ ve $[S]_k^b$ matrislerinin 8'er elemanı sıfır olacaktır.

Burada ele alınan, tabakanın kırılma indisi ile çevre ortamların kırılma indislerinin birbirine eşit olduğu durumda ortamda yayılan azalarak gelen şiddet (reduced incident intensity) ortamdaki parçacıkların saçıcılığı nedeniyle, (4.5) eşitliğindeki kaynak fonksiyonunu oluşturmaktadır:

$$[F] = [F]_0^a + \sum_{k=1}^{2M} [F]_k^a \cos(k\phi) + \sum_{k=1}^{2M} [F]_k^b \sin(k\phi) \quad (4.25)$$

Elde edilen denklem takımı sonsuz sayıda olmakla beraber tekli saçılmada M için kullanılan sınırlar kullanılarak, sonlu sayıda terim için çözülmüştür.

4.5 Simetri Ekseninin Tabaka Düzlemine Dik Olduğu Duruma İlişkin Sayısal Çözüm

Tabaka şekilli olası ortamın küresel saçıcılar içermesi halinde çeşitli konfigürasyonlar için iletim denkleminin sayısal çözümü elde edilmiştir (Ma ve Ishimaru, 1990; Ma ve Ishimaru, 1991; Lam ve Ishimaru, 1993). Bir önceki kısımda elde edilen sferoidal fonksiyonların

Fourier açılımları sayesinde küresel saçıcılar durumu için çözülmüş problemler sferoidal saçıcılar için de çözülebilir. Sferoidal saçıcılar durumu küresel saçıcılardan daha genel bir problem sınıfı oluşturmaktadır. Dolayısı ile küresel saçıcılar için sözkonusu olmayan, saçıcı simetri ekseninin konumu burada bir değişken olarak önem kazanmaktadır. Sayısal sonuçlar bölümünde sferoid ekseninin tabaka normali ile belirli bir açı yaptığı duruma ilişkin birinci mertebeden çoklu saçılma çözümleri verilmiştir. Ancak, iletim denkleminin sayısal çözümü sadece sferoid ekseninin tabaka normaline dik olduğu durum için elde edilmiştir. Bu bölümde “Gaussian Quadrature” yönteminin uygulanarak sayısal çözümün elde edilişi kısaca özetlenecektir. Çözüm yöntemi Ishimaru (1978) tarafından ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Olasıl ortamlarla ilgili olarak fiziksel uzaklık yerine optik uzaklık sıklıkla kullanılır. Bunun başlıca nedeni, optik uzaklığın fiziksel uzaklık yanında parçacık yoğunluğu ve toplam radar kesit yüzeylerinin de fonksiyonu olmasıdır. Yöntem, özgül şiddeti temsil eden Stokes vektörünün (4.4) ifadesindeki gibi difüze ve azalarak gelen bileşenlerinin ayrıldıktan sonra, azalarak gelen şiddeti ortam içinde kaynak olarak ifade etmeye dayanır. Bu bakış açısıyla genel ifadesi (4.5) eşitliği ile verilmiş olan iletim denklemi tabaka şekilli bir olası ortam için, $\tau = \rho \sigma_t d \cos(\theta)$ olmak üzere,

$$\mu \frac{d[I(\tau, \mu, \phi)]}{d\tau} = -[I(\tau, \mu, \phi)] + \frac{1}{\sigma_t} \int_{4\pi} [S(\mu, \phi, \mu', \phi')] [I(\tau, \mu', \phi')] d\omega' + [F(\mu, \phi, \mu_0, \phi_0)] \exp(-\tau / \mu_0) \quad (4.26)$$

şeklinde yazılır (Ishimaru, 1978; Lam ve Ishimaru, 1993). Burada $\mu = \cos(\theta)$, $d\omega = \sin(\theta) d\theta d\phi = -d\mu d\phi$ 'dir ve ayrıca (μ_0, ϕ_0) dışardan gelen alanın yayılma doğrultusunu göstermektedir. Denklemin sağ tarafındaki ikinci terim tüm yönlerden ‘gelen’ difüze şiddetin, ortamdaki parçacıktar nedeniyle (μ, ϕ) doğrultusunda saçılan alanları temsil eder. Bir önceki kısımda elde edilmiş olan Fourier açılımları (4.26)’da yerine yerleştirilir ve elde edilen denklem trigonometrik fonksiyonların ortogonalliğinden yararlanarak ayrıştırılırsa $k=0$ için,

$$\mu \frac{d[I(\tau, \mu)]_0^a}{d\tau} = -[I(\tau, \mu)]_0^a - \frac{1}{\sigma_t} \int_{-1}^1 [S(\mu, \mu')]_0^a [I(\mu')]_0^a d\mu' + [F(\mu, \mu_0)]_0^a \exp(-\tau / \mu_0) \quad (4.27a)$$

ve $k=1, 2, \dots, 2M$ için,

$$\mu \frac{d[I(\tau, \mu)]_k^a}{d\tau} = -[I(\mu)]_k^a - \frac{\pi}{\sigma_t} \int_{-1}^1 [S(\mu, \mu')]_k^a [I(\tau, \mu')]_k^a - [S(\mu, \mu')]_k^b [I(\tau, \mu')]_k^b d\mu' + [F(\mu, \mu_0)]_k^a \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.27b)$$

$$\mu \frac{d[I(\tau, \mu)]_k^b}{d\tau} = -[I(\mu)]_k^b - \frac{\pi}{\sigma_t} \int_{-1}^1 [S(\mu, \mu')]_k^a [I(\tau, \mu')]_k^b + [S(\mu, \mu')]_k^b [I(\tau, \mu')]_k^a d\mu' + [F(\mu, \mu_0)]_k^b \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.27c)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.27a) ve (4.27b) eşitliklerindeki integrantlar incelendiği takdirde herbir denklemin ilk iki satırı ile diğerinin son iki satırını aynı metris yapısı içinde gösterilebileceği ortaya çıkar. Buna göre,

$$[S]_k^c = \begin{bmatrix} S_{11}^k & S_{12}^k & -S_{13}^k & -S_{14}^k \\ S_{21}^k & S_{22}^k & -S_{23}^k & -S_{24}^k \\ S_{31}^k & S_{32}^k & S_{33}^k & S_{34}^k \\ S_{41}^k & S_{42}^k & S_{43}^k & S_{44}^k \end{bmatrix} \quad (4.28a)$$

$$[S]_k^d = \begin{bmatrix} S_{11}^k & S_{12}^k & S_{13}^k & S_{14}^k \\ S_{21}^k & S_{22}^k & S_{23}^k & S_{24}^k \\ -S_{31}^k & -S_{32}^k & S_{33}^k & S_{34}^k \\ -S_{41}^k & -S_{42}^k & S_{43}^k & S_{44}^k \end{bmatrix} \quad (4.28b)$$

$$[F]_k^{c,d} = [F_{1k}^{a,b}, F_{2k}^{a,b}, F_{1k}^{b,a}, F_{2k}^{b,a}]^T \quad (4.28c)$$

$$[I]_k^{c,d} = [I_{1k}^{a,b}, I_{2k}^{a,b}, U_k^{b,a}, V_k^{b,a}]^T \quad (4.28d)$$

olmak üzere

$$\mu \frac{d[I(\tau, \mu)]_k^c}{d\tau} = -[I(\mu)]_k^c - \frac{\pi}{\sigma_t} \int_{-1}^1 [S(\mu, \mu')]_k^c [I(\tau, \mu')]_k^c d\mu' + [F(\mu, \mu_0)]_k^c \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.29a)$$

$$\mu \frac{d[I(\tau, \mu)]_k^d}{d\tau} = -[I(\mu)]_k^d - \frac{\pi}{\sigma_t} \int_{-1}^1 [S(\mu, \mu')]_k^d [I(\tau, \mu')]_k^d d\mu' + [F(\mu, \mu_0)]_k^d \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.29b)$$

yazılır. Gaussian Quadrature yöntemi integrallerin yaklaşık olarak bir toplama işlemi ile yer değiştirebileceği gerçeğine dayanan ve yapılacak hatayı en düşük seviyede tutmayı amaçlayan bir yöntemdir. Yönteme göre (4.27a) ve (4.29) eşitliklerindeki integral ifadeleri

$$\int_{-1}^1 [S(\mu_i, \mu') I(\mu')] d\mu' = \sum_{j=1}^{2N} [S(\mu_i, \mu_j) I(\mu_j)] \quad (4.30)$$

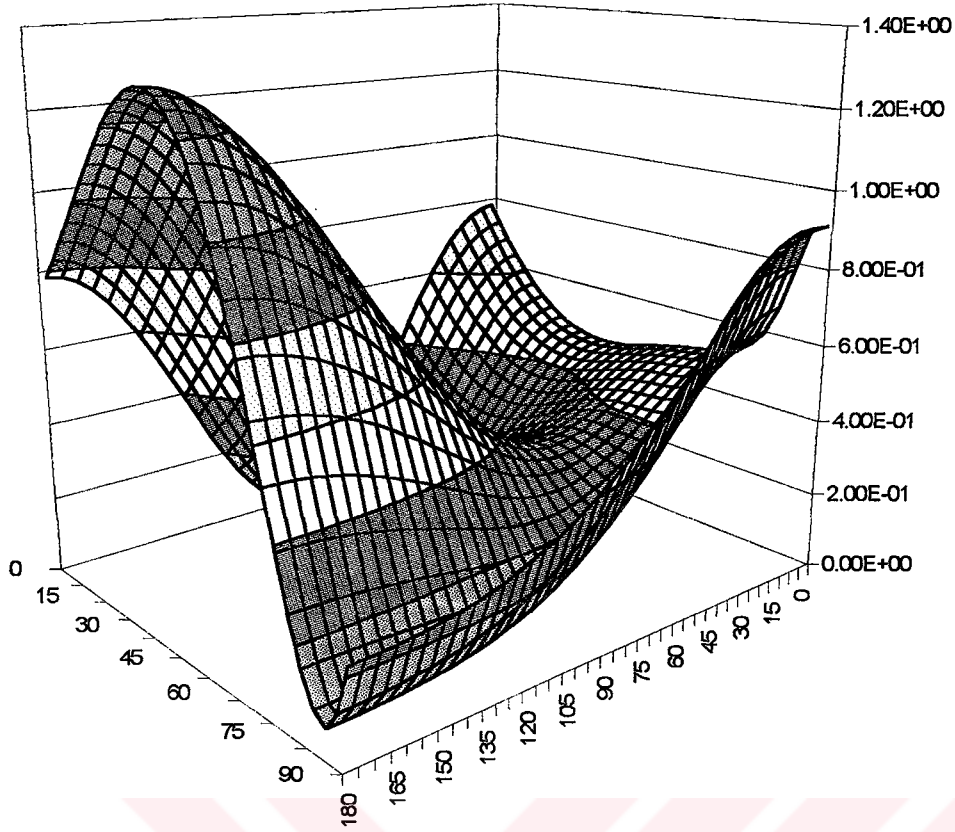
eşitliği ile yer değiştirebilir. Buradaki $2N$, $[-1, +1]$ aralığında değişen integral değişkeninin Gauss-Legendre kuralına göre nokta sayısı ve μ_i 'ler $P_{2N}(\mu)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır (Ishimaru, 1978; Mathews 1992; Evans, 1995).

4.6 Sayısal Sonuçlar

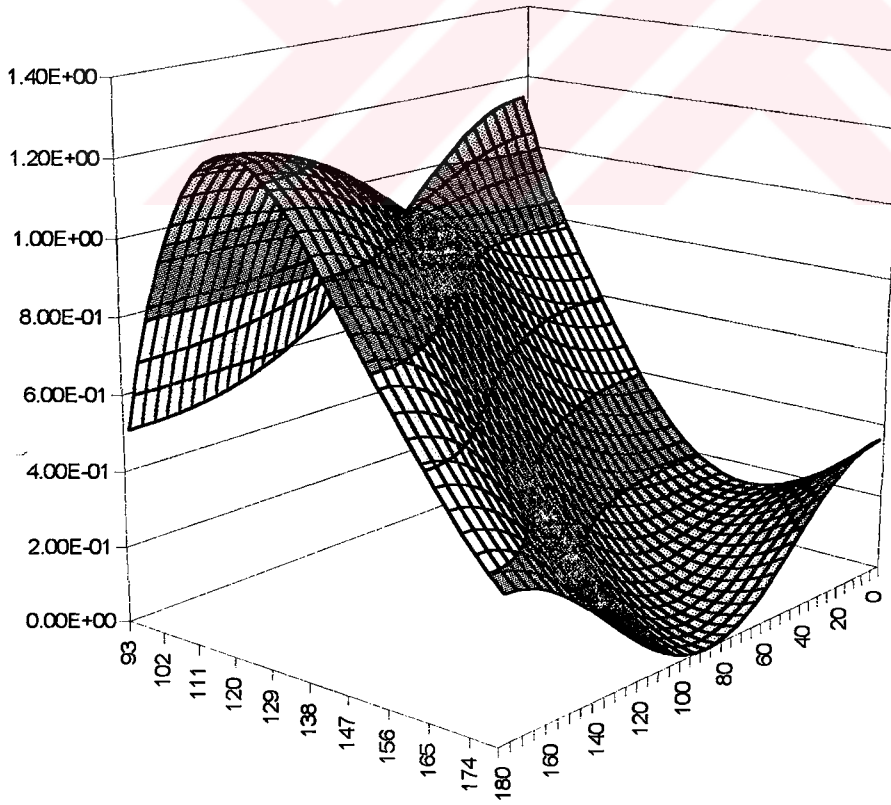
Çoklu saçılmaya ilişkin bir örnek olarak, sferoid eksenlerinin tabaka normaline paralel, $c_1=2.0$, $a/b=2.0$ ve bağıl dielektrik sabitinin 1.78 olduğu durum incelenmiştir. Yayılma doğrultusunun tabaka normali ile 30° açı yaptığı lineer polarizasyonlu gelen alan için ileri ve geri yönde saçılan şiddetlere ilişkin grafikler çizilmiştir. Simetri ekseninin tabaka normali ile yaptığı açının ve polarizasyonun etkileri bu örnekle karşılaştırılmıştır. Verilen bütün örneklerde tabakanın optik kalınlığı 0.2 olarak alınmıştır. Şekillerde verilen şiddet değerleri normalize edilmiş değerler değildir.

Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'de sırasıyla ileri ve geri yönde saçılan polarizasyonu gelen alanla aynı olan (kopolar) difüze şiddet bileşenlerinin değişimi gözlenmektedir. Şekil 4.4'de difüze şiddetin yayılma doğrultusunda gelen alanın yayılma yönünde en büyük değerini aldığı gözlenmektedir. Buna karşılık Şekil 4.5'de tabakadan geri yönde saçılan alanın en büyük değerini, gelen alanın yayılma yönünün tersi yönde aldığı açıkça görülmektedir. Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 ise çapraz polarizasyonlu (crosspolarization) bileşenlerin değişimlerini göstermektedir. Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'den de açıkça görüldüğü gibi, aynı polarizasyonlu bileşenlerin en büyük değerlerini aldığı doğrultularda çapraz polarizasyonlu bileşenler minimum değerlerini almaktadır. Bu, kürelerle ilgili olarak yapılan çalışmalarda da gözlenmiş olan beklenen bir olgudur (Lam ve Ishimaru, 1993). Buna karşılık, küresel simetri nedeniyle, küresel saçıcılar durumunda gelen alanın yayılma doğrultusuna göre karşılaşılan simetrik dağılım sferoidler durumunda bozulmaktadır.

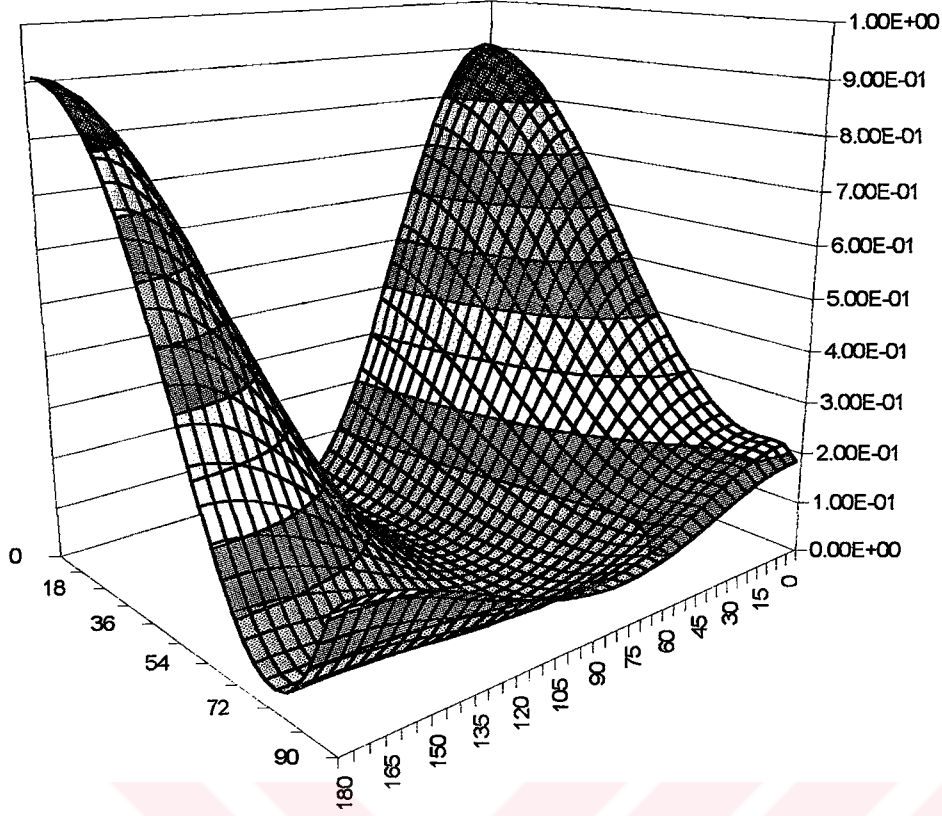
Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'da ise farklı polarizasyon durumlarında ileri ve geriye doğru saçılan difüze şiddetler karşılaştırılmıştır. Burada vurgulanması gereken önemli nokta, dairesel polarizasyon durumunda yayılma doğrultusunda kopolar bileşenin lineer polarizasyon



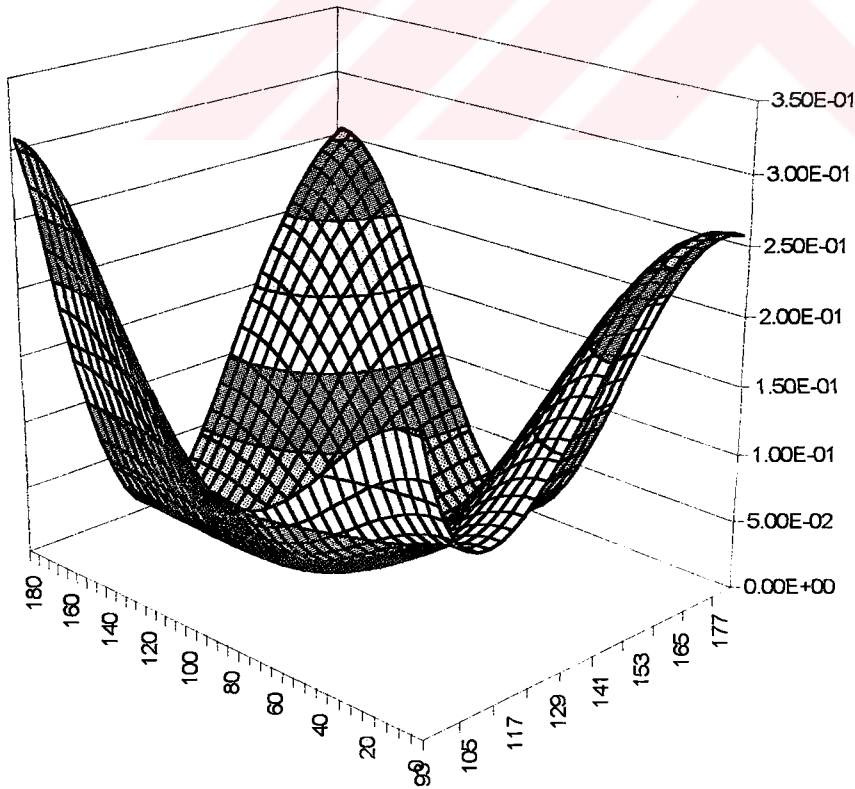
Şekil 4.4 Tabakadan ileri yöne saçılan I_1 bileşeninin θ ve ϕ ile değişimi



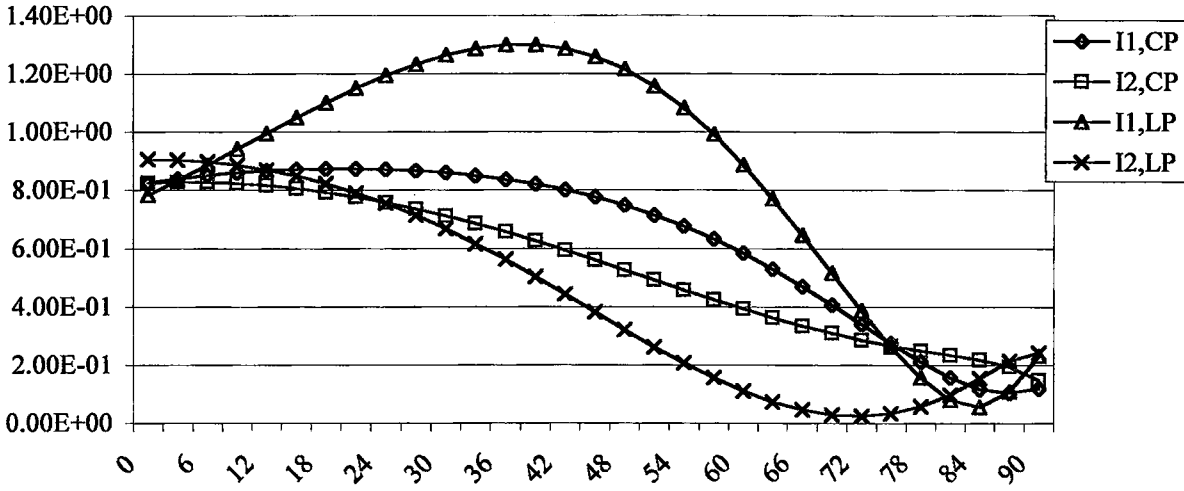
Şekil 4.5 Tabakadan geriye doğru saçılan I_1 bileşeninin θ ve ϕ ile değişimi



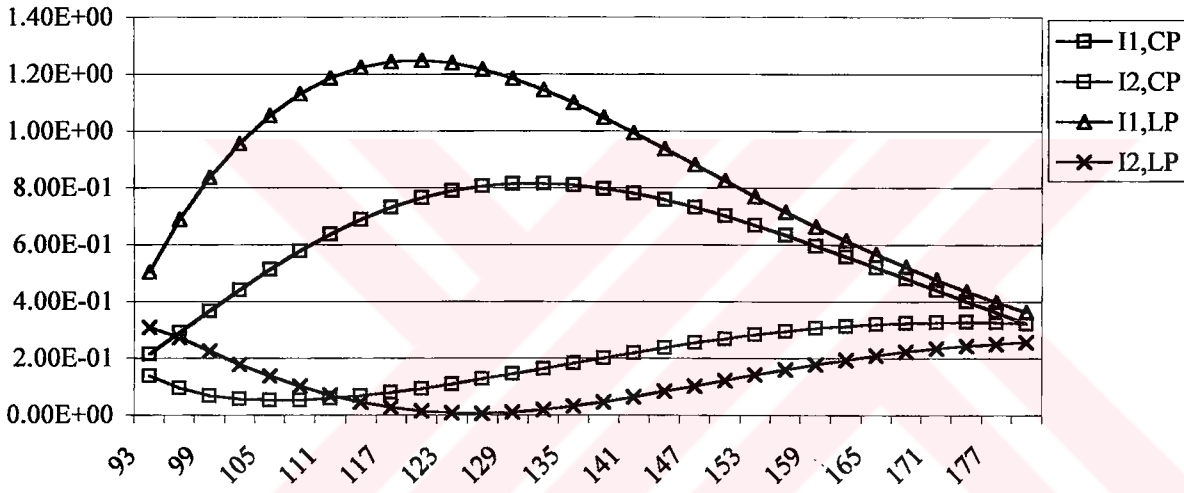
Şekil 4.6 İleri yönde saçılan I_2 'nin θ ve ϕ ile değişimleri



Şekil 4.7 Geriye doğru saçılan I_2 şiddetinin θ ve ϕ ile değişimi



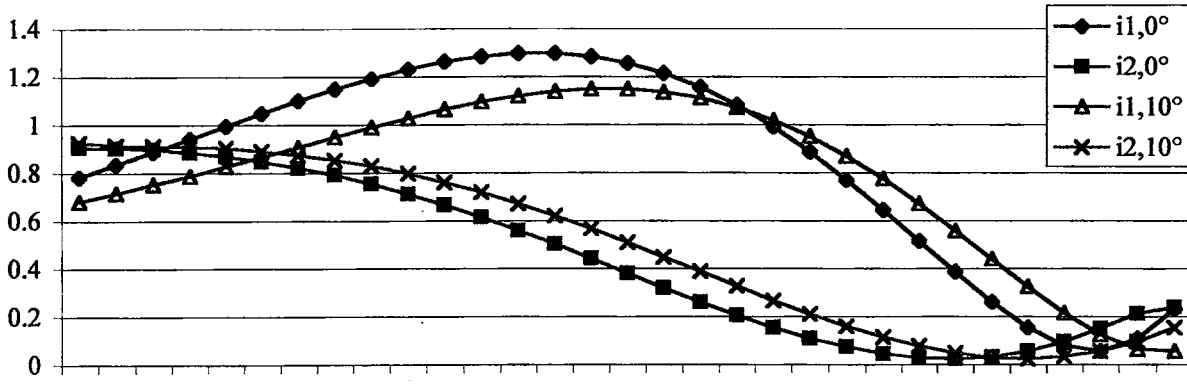
Şekil 4.8 Sol el dairesel (CP) ve lineer (LP) polarizasyonlu gelen dalgalara göre ileri yönde saçılan difüze şiddetlerin karşılaştırılması



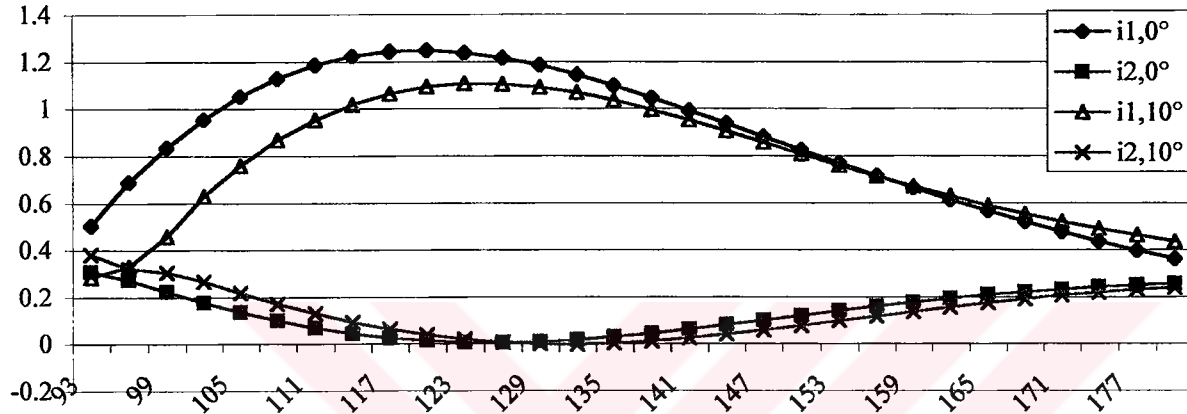
Şekil 4.9 Sol el dairesel (CP) ve lineer (LP) polarizasyonlu gelen dalgalara göre geriye doğru saçılan difüze şiddetlerin karşılaştırılması

durumuna göre çok daha zayıf olduğudur. Bu sonuç, çeşitli araştırmacılar tarafından bildirilen ölçüm sonuçlarıyla tutarlıdır (Brussaard ve Watson, 1995).

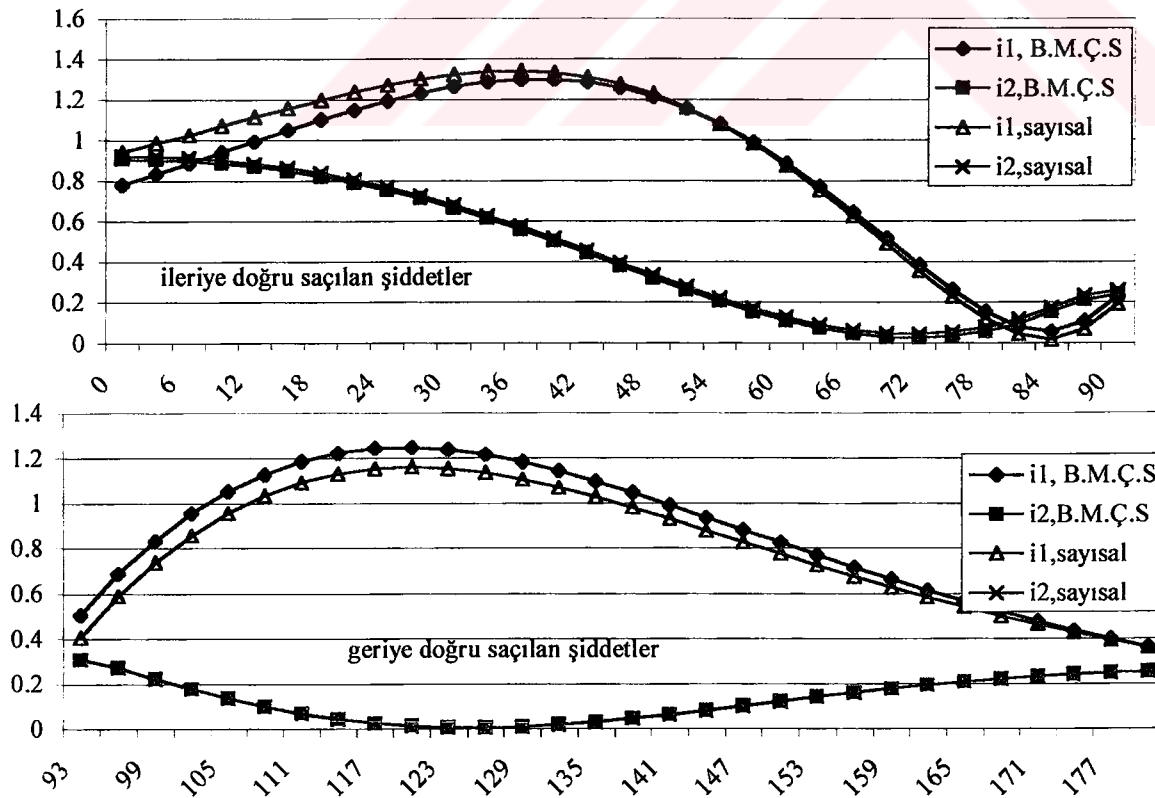
Şekil 4.10 ve şekil 4.11’de sferoid eksenlerinin tabaka normaline göre $\phi=0^\circ$ düzlemi 10° dönmesinin etkileri görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.12’de sayısal çözümle birinci mertebeden çoklu saçılma yöntemleri karşılaştırılmaktadır. Burada da görüldüğü gibi, optik uzaklığın 0.2 olduğu durumda her iki yöntem de yaklaşık aynı sonucu vermektedir. Benzer sonuçlar, kürelerle yapılmış çalışmalarda da elde edilmiştir (Ma ve Ishimaru, 1991).



Şekil 4.10 Sferoid eksenlerinin tabaka normali ile 0° ve 10° açı yaptığı durumlarda ileriye doğru saçılan şiddetlerin karşılaştırılması



Şekil 4.11 Sferoid eksenlerinin tabaka normali ile 0° ve 10° açı yaptığı durumlarda geriye doğru saçılan şiddetlerin karşılaştırılması



Şekil 4.12 Birinci mertebeden çoklu saçılma yaklaşımı ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çalışmanın esas amacı, sferoidal fonksiyonları kullanarak, sferoidal parçacıkların bulunduğu tabaka şekilli olası ortamda iletim denkleminin çözümlerini olanaklı hale getirmektir. Tez çalışması sonucunda bu işlem başarılmıştır. Bu açıdan bakıldığında, Kısım 4.2’de açıklanan referans düzlemlerinin dönüşüm yöntemi orijinal olup, özellikle eksenel simetriye sahip diğer şekillerle ilişkili benzer türden problemlerin çözümü için de elverişlidir. Aynı zamanda Kısım 4.4’de açıklanan faz matrisinin fourier bileşenlerine ayrıştırılması da orijinal olup, problemin sayısal çözümünü olanaklı hale getirmektedir. Ayrıca, tez çalışmasının esas amaçları arasında olmadığı halde, Kısım 2.3’de açıklanan sferoidal açısal fonksiyonlara ilişkin ayırma sabitlerinin sayısal bir yöntemle elde edilmesi sferoidal fonksiyonların, standart matematik programları tarafından hesaplanabilir olmamasının önemli bir gerekçesinin ortadan kalkmasına katkı sağlayabilir.

Bu tez çalışması boyunca, sferoidal dalga fonksiyonları, tek sferoidden saçılma problemi ve iletim teorisi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Tek sferoidden saçılmaya ilişkin çözüm düzenlendikten sonra, rastgele sferoidal parçacıklarla dolu tabaka şekilli bir ortamdan saçılma problemi seyrek ortam yaklaşımı ile çözülmüştür. Ayrıca, Problemin özel bir halinin sayısal çözümü elde edilmiştir.

Tez çalışması sırasında Borland C programlama dili kullanılarak sferoidal fonksiyonları ve tek sferoidden saçılan alanları hesaplayan modüler bir program hazırlanmıştır. Program, her bir modül kendi başına çalışabilecek şekilde tasarlanmış olup her bir modül bağımsız olarak kontrol edilmiştir. Programın tümü 6 ana modül ve bir birleştirici modülden oluşturulmuştur. Sferoidal fonksiyonlara ilişkin katsayılar, küresel Bessel ve Legendre fonksiyonları, radyal ve açısal sferoidal fonksiyonlar, matrissel denklemlerdeki matrislerin oluşturulması, lineer denklem sistemlerinin çözümü ayrı birer modül tarafından yapılmaktadır. Grafikler ve birinci mertebeden çoklu saçılmaya ilişkin işlemler için Microsoft Excel programı kullanılmıştır. Ayrıca, sayısal çözüm sırasında kullanılan özdeğer ve özfonksiyonlar Mathcad programı kullanılarak hesaplanmıştır.

Sferoidal saçıcılardan saçılma problemi küresel olmayan saçıcılara ilişkin en basit problemlerden biridir. Küresel olmayan saçıcılardan saçılma problemlerinin çözüm yöntemlerinin performansları sıklıkla sferoidler üzerinde sınanagelmıştır. Doğada sıklıkla küresel olmayan parçacıklarla karşılaşılır. Özellikle atmosferin, deniz ve okyanusların, biyolojik dokuların uzaktan algılanması ve iletim ortamı olarak atmosferin kullanıldığı haberleşme sistemlerinde küresel olmayan parçacık toplulukları elektromagnetik dalgalarla

etkileşir. Tüm bu konularda, etkileşim mekanizmasının hesaplanabilir olmasının önemi büyüktür. Küresel saçıcıların varsayıldığı modeller, temel birçok olayı aydınlatmada işe yaramakla beraber bazı gözlemleri açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Farklı polarizasyonlu işaretler atmosfer ortamından iletilirken özellikle yağışlı hava koşullarında eşit miktarda etkilenmezler. Küresel saçıcıların bulunduğu atmosfer modelleri bu olayı açıklayamazlar. Oysa Sferoidlerin bulunduğu bir model, sözkonusu gözleme daha doğru bir açıklama getirebilir.

5.1 Sonuçların Literatürdeki Çalışmalarla Karşılaştırılması

Literatürde sferoidal şekilli saçıcılara ilişkin çok sayıda çalışma mevcuttur. Tekli saçılmaya ilişkin olarak sıklıkla adı geçen yöntemler özellik ve sınırlamaları açısından Çizelge 5.1’de karşılaştırılmaktadır. Bu yöntemler arasında özellikle T-matris (Waterman,1979; Barber ve Yeh, 1975), dalga denkleminin sferoidal koordinatlarda değişkenlerine ayrılması yöntemleri (Asano ve Yamamoto, 1975; Asano ve Sato 1980) uygulanabileceği parçacık büyüklüğü ve elektriksel özelliklerine prensip olarak herhangi bir sınırlama getirmemektedir. Buna karşılık özellikle Rayleigh yaklaşımı, Born yaklaşımı, Rayleigh-Mie yaklaşımı, genellikle saçıcının dalgaboyuna kıyasla boyutlarına ve/veya parçacığın elektriksel özelliklerine sınırlama getirerek özel koşullar altında doğruya yakın sonuçlar elde etmektedirler (Ishimaru, 1978; de Wolf, 1996). Her ne kadar Rayleigh yönteminin uygulanabilir olduğu bölgenin genişletilmesi yönünde çabalar sürüyor olsa bile, rezonans bölgesi olarak adlandırılan dalgaboyu ile parçacık boyutlarının birbirine yakın olması durumunda Rayleigh yaklaşımına dayanan yöntemler geçerliliğini yitirmektedir. Buna karşılık T-matris yöntemi ve sferoidal koordinatlarda değişkenlerine ayrılması yöntemi referans yöntemler olarak, geliştirilen yöntemleri sınamak için yaygın olarak kullanılmaktadır (Karam vd., 1995; de Wolf 1996).

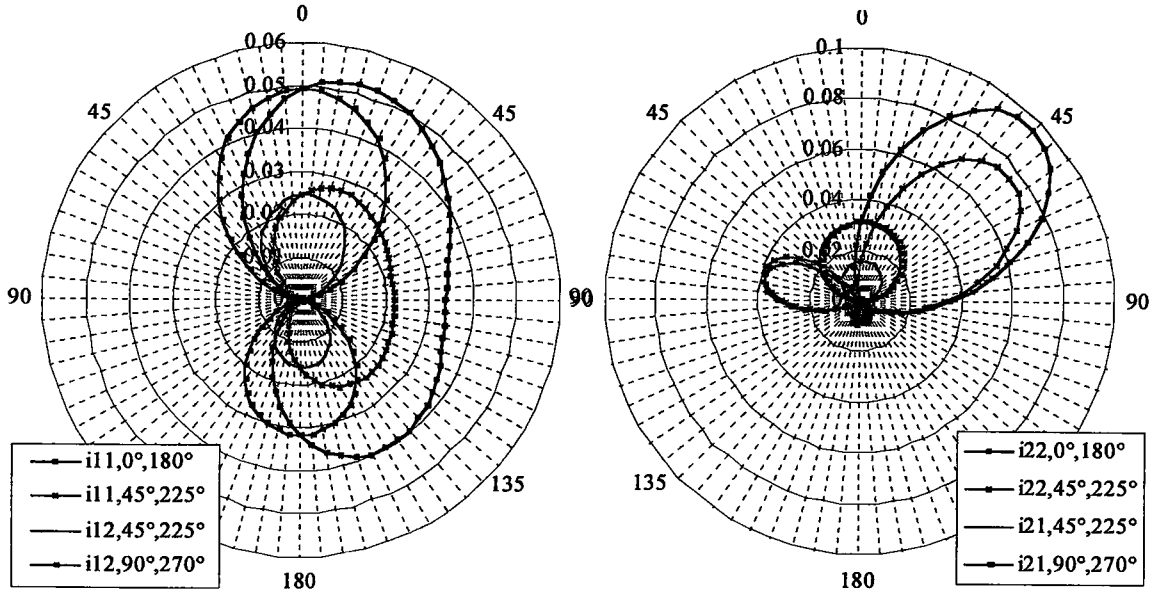
Tez çalışması sırasında elde edilen sonuçlar Asano ve Yamamoto (1975) ile karşılaştırıldığı gibi, Rayleigh yöntemi, küre için Mie çözümü ve sferoid için T-matris (genişletilmiş sınır koşulları) yöntemi ile elde edilmiş sonuçlarla da karşılaştırılmıştır. Asano ve Yamamoto (1975) ile yapılan karşılaştırmada, tüm sonuçların aynı karakterde elde edildiği, ancak makaledeki şekillerde küçük değişimlere duyarsızlık olduğu gözlenmiştir. Asano ve Yamamoto’nun makalesinde sadece $\zeta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ geliş açıları için az sayıda örnek incelenmiştir. Buna karşılık Asano ve Yamamoto (1975) hem yatık hem de dik sferoidlerden saçılma problemini ele almışlardır. Tez çalışması sırasında, $\epsilon_r=1.78$ geliş açısının $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ olması durumları için büyüklük parametresi c_1 0.5-5.0 aralığında değiştirilerek incelemeler yapılmıştır. Örnek olarak, Asano ve Yamamoto’nun (1975) makalesindeki 6. ve

8. şekillere eşdeğer olarak elde edilen sonuçlar Şekil 5.1’de verilmiştir. Şekiller arasında yapılan karşılaştırmada, makalede çizilen şekillerin Şekil 5.1’deki şekillerin daha az veri ile çizilmiş hallerine eşit olduğu görülür.

Çizelge 5.1 Tek parçacıklı problem için kullanılan başlıca yöntemler (Ishimaru, 1978; Brussaard ve Watson, 1995; de Wolf, 1996)

Yöntem	Özellik	Sınırlamalar
Mie (Mie-Stratton)	Tüm frekans bölgesinde geçerli analitik yöntem	Homojen küreler
Sferoidal fonksiyon açılımları	Tüm frekans bölgesinde geçerli	Homojen sferoid veya deforme olmuş sferoid, kayıplı ve büyük saçıcılar için sferoidal fonksiyonları hesaplama problemleri var
Rayleigh yaklaşımı	Basit analitik yöntem Sferoid içindeki alan durgun alan varsayılıyor	Küre için $ka < 0.3$ olmalı
Rayleigh- Debye (Born yaklaşımı)	Saçıcı içindeki alan gelen alana eşit varsayılıyor	$(\epsilon_r - 1)ka \ll 1$
WKB (Wentzel-Kramer-Brillouin)	Saçıcı içinde alanın yön değiştirmedeği varsayılıyor. İçerideki dalganın genliği düzlemsel dalganın düzleme dik geldiği durumda ikinci ortama geçen dalgaya eşit varsayılıyor	$(\epsilon_r - 1)ka \gg 1$, $(\epsilon_r - 1) < 1$
Kollokasyon (Nokta eşleştirme)	Şekil sınırlaması yok	Homojen saçıcılar, yakınsaklık ve hafıza ile ilgili problemler var
T-Matrix (Watermann)	Büyük deformasyona uğramış saçıcılarda dahi kullanılabilir	Yüksek frekanslarda büyük saçıcılarda yakınsama sorunu var
Fredholm İntegral	Distorsiyona uğramış saçıcılar için en kararlı yöntem	Dielektrik özellikleri sürekli değişen saçıcılar
Unimoment	Homojen olmayan keyfi şekilli saçıcılar için geçerli	$ka \leq 60$, eksenel oranlar büyüdükçe (hesaplama ve hafıza gereksinimi hızlı arttığından) verimlilik azalıyor
Genişletilmiş Rayleigh veya Rayleigh-Mie	Basit, Rayleigh yönteminden daha geniş uygulama alanı	Şekil küreden uzaklaştıkça hata artar

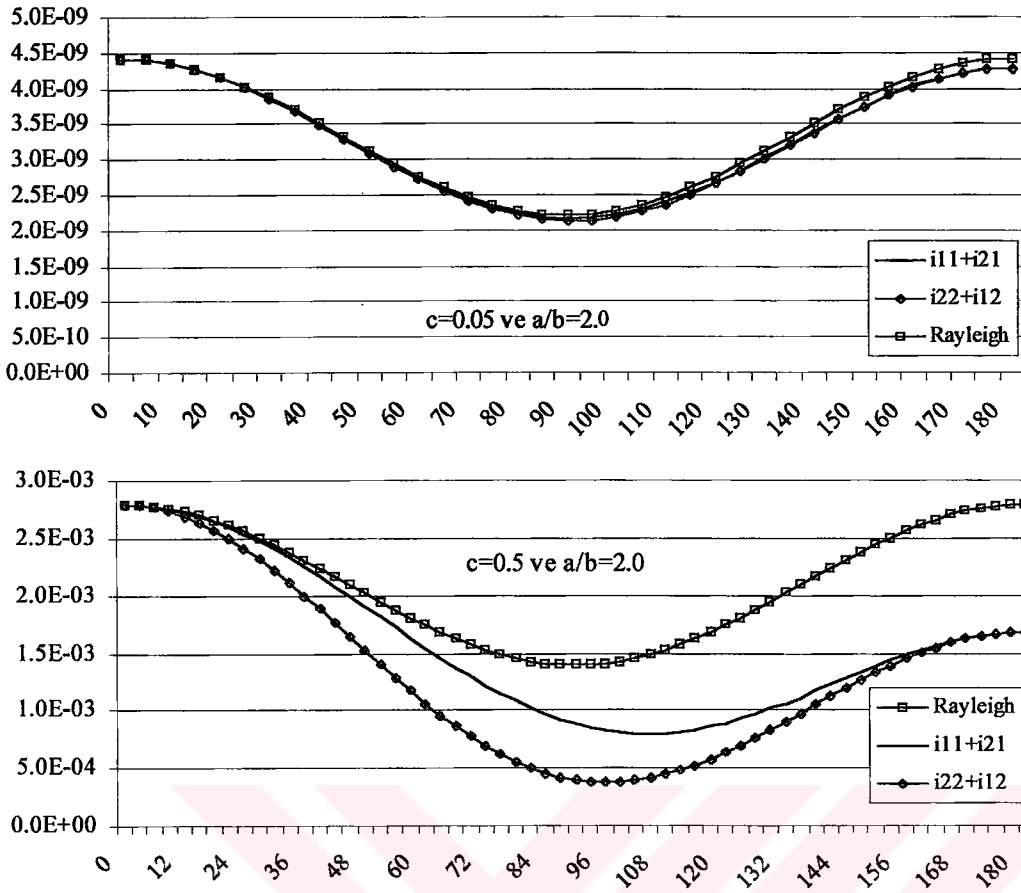
Küçük kürelerin küçük elektrik dipol gibi davrandığı gerek Mie yöntemi gerekse Rayleigh yaklaşımının sonuçları olarak bilinmektedir. Elektrik alan vektörü gözlem yapılan düzlem içinde olan gelen dalga için (yatay polarizasyon), gelen alanın yayılma doğrultusu ve bu doğrultu ile 180° açı yapan doğrultuda en büyük saçılan alan; gelen alanın yayılma doğrultusu ile 90° açı yapan doğrultuda ise saçılan alan olmadığı gözlemlenmiştir. Gözlem düzlemine dik polarizasyona sahip gelen alan ise her yönde eşit saçılır. Bu olayın gözlemlendiği bölge, Rayleigh bölgesi olarak anılır. Rayleigh yaklaşımının küresel saçıcılara uygulanabilir olduğu frekans



Şekil 5.1 Asano ve Yamamoto'nun 6. ve 8. şekillerine eşdeğer parametrelerle çizilmiş şekiller ($c=1.0$, $a/b=2.0$ ve $n=1.33$)

bölgesi ka 'nın (k dalga sayısı, a küre çapı) 0.3'ten küçük olduğu bölgedir. Rayleigh yaklaşımı ile sferoidal saçıcılardan saçılmaya ilişkin olarak elde edilmiş çözüm de sferoidin eksenine paralel geliş için küredeki benzer biçimde davrandığını varsayar. Buradaki farklılık, simetri eksenini ile gelen alanın yayılma doğrultusu arasındaki açıya göre saçılan alanın döndürülmesine dayanır (Ishimaru, 1991). Ancak, Barber ve Yeh'in (1975) bildirdiği ve tez çalışmasında da gözlemlendiği gibi, sferoidin uzun ekseninin kısa eksenine oranına ve saçıcı büyüklüğüne bağlı olarak saçılma karakteristikleri küresel saçıcılardan farklıdır. Şekil 5.2'de gelen alan simetri eksenine paralel iken Rayleigh yaklaşımı ve tezde kullanılan yöntem $c=0.05$ ve $c=0.5$ için karşılaştırılmıştır (Şengör ve Dimililer, 2000). Açıkça görüldüğü gibi Rayleigh yaklaşımı küredekiyle kıyaslandığı zaman çok daha küçük sferoidler için geçerlidir.

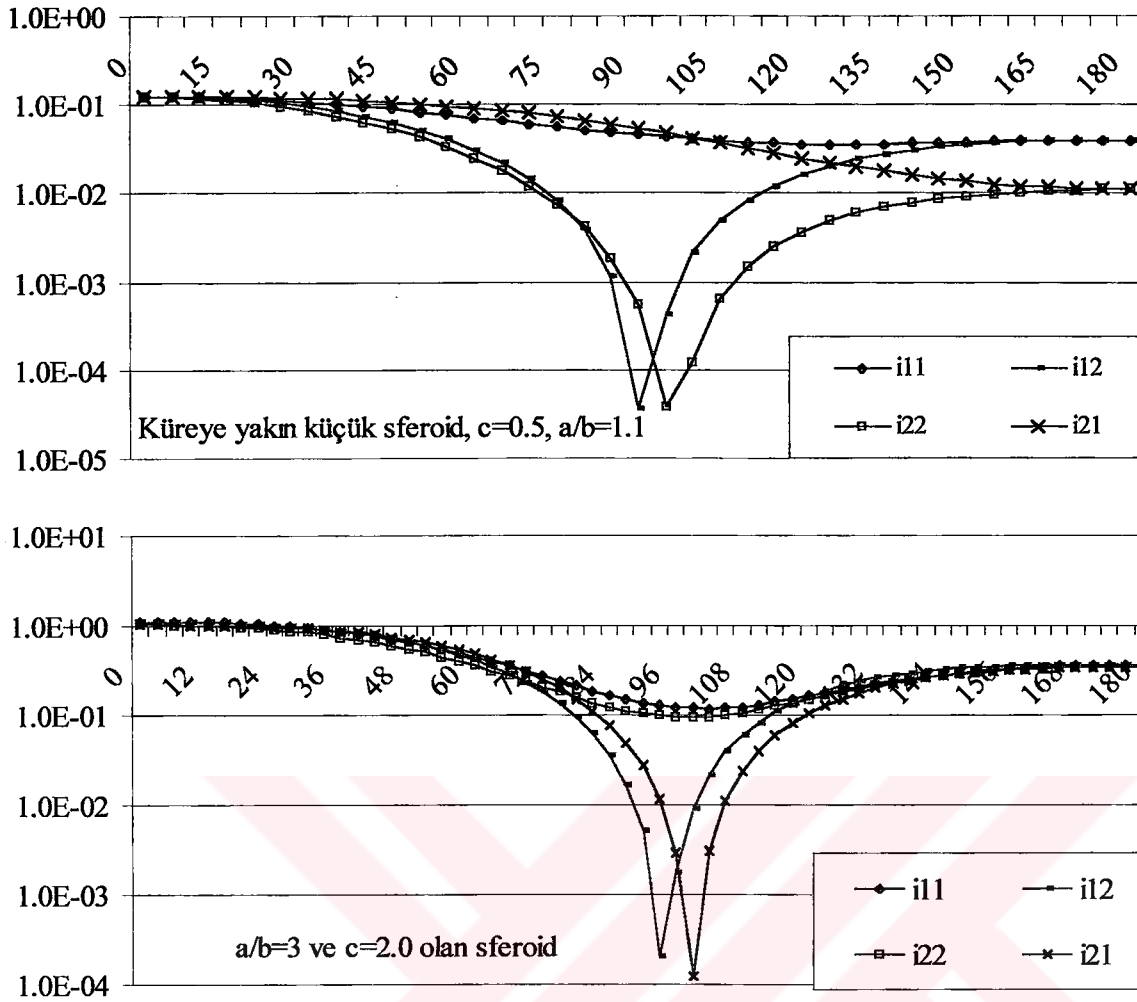
Küresel dalga fonksiyonlarını kullanarak, küreden saçılma probleminin analitik çözümü Mie tarafından ortaya konulmuştur. Literatürde, sferoidal saçıcıdan saçılma problemine ilişkin analitik çözüm elde mevcut değildir. Ancak, çok sayıda sayısal çözüm yöntemi vardır. Bu tez çalışmasında Asano ve Yamamoto tarafından geliştirilen, sferoidal dalga fonksiyonlarını kullanarak Mie'nin küre için ortaya koyduğu çözüme benzer bir yöntem kullanılmıştır. Ancak, alanlara ilişkin katsayılar küre için yapılandan farklı olarak sayısal yöntemlerle bulunmuştur. Açık literatürde sferoidal saçıcıdan saçılma problemine ilişkin sıkça karşılaşılan diğer yöntemlerle burada kullanılan yöntemi karşılaştıran ayrıntılı bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Daha ayrıntılı bir çalışma ile, değişik yöntemlerin performanslarının karşılaştırılması yararlı olacaktır.



Şekil 5.2 Rayleigh yöntemi ile Sferoidal fonksiyonlara açılım yöntemlerinin, gelen alanın simetri eksenine paralel geliş durumu için karşılaştırılması

Küresel saçıcı büyüklüğü arttıkça, gelen alanla aynı yönde yayılan saçılan alan (ileri yönde saçılma) artar. Saçıcı büyüklüğü arttıkça özellikle dik polarizasyonlu gelen dalga için, önce geri saçılma yönünde hareketlenme başlar sonra hareketlilik (maksimum-minimum sayıları artarak) ileri yöndeki saçılma bölgesine kayar. Yatay polarizasyon durumunda aynı etki gözlenmekle beraber hareketlilik daha azdır. Farklı dielektrik sabitleri için boyuta bağlı olarak benzer davranış gözlemlenir. Sferoidler için T-matris yöntemi ile elde edilmiş sonuçlar, tez çalışması sırasında da karşılaşılan, küçük sferoidlerden beklenmeyen bazı farklılıklar taşıdığı bildirilmiştir (Barber ve Yeh, 1975). Söz konusu ilginç farklılık uzun eksenin kısa kenara oranı arttıkça, yatay ve düşey polarizasyonlu gelen dalgalara karşılık olarak saçılan alan karakteristiklerinin küredekinin tersi gibi olduğu şekil 5.3'deki örnekte görülmektedir.

Sferoidal dalga fonksiyonları, karmaşıklıkları ve hesaplanmalarındaki zorluklar nedeniyle yaygın olarak kullanılmazlar. Sferoidal fonksiyonlar üzerinde, diğer fonksiyonlarla karşılaştırıldığı takdirde fazla çalışılmadığı söylenebilir. Bunun başlıca nedenleri, dalga denkleminin çözümü olarak sferoidal fonksiyonların ortamın parametreleri ve geometriden bağımsız olarak tanımlanamamalarıdır. Buna karşılık, fonksiyonların özellikle eksenel



Şekil 5.3 büyük eksenin küçük eksene oranının büyümesi ile sferoidal saçıcının küresel saçıcıdan farklılaşmasını gösteren bir örnek

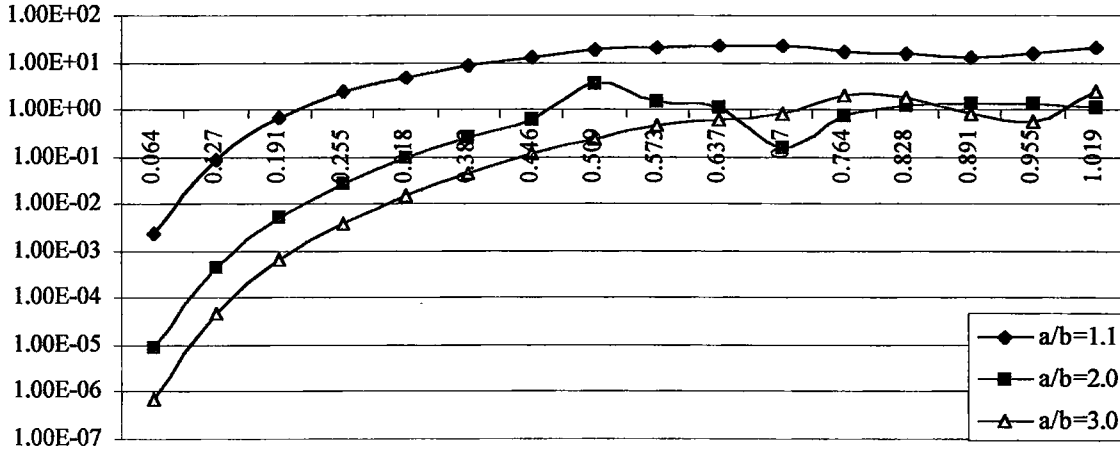
simetriye sahip saçıcılarla ilgili problemlerin çözümlerinde kullanışlı olma potansiyelleri oldukça yüksektir. Konu üzerinde az çalışılmış olması nedeniyle, fiziksel problemlerin çözümünde gereksinim duyulan dönüşüm veya eşitliklerin bulunabilirliği oldukça düşüktür. Söz konusu eşitlikler veya dönüşümler çoğunlukla Bessel fonksiyonlarına ait eşitlik veya dönüşümlerden türetilmeye çalışılmaktadır.

Sferoidal fonksiyonların hesaplanmasında karşılaşılan temel bir zorluk, önceki bölümlerde de söz edildiği gibi, ayırma sabitlerinin hesaplanmasında ortaya çıkmaktadır. Özellikle büyük veya kayıplı sferoidlere ilişkin ayırma sabitlerinin hesaplanmasında problemler aşılmış değildir. Günümüzde bilgisayar teknolojisinin olanaklarını kullanarak sayısal yöntemlerle bu problemleri aşmak olanaklıdır. Tez çalışması sırasında, tüm ayırma sabitlerinin tüm parametre aralığı için hesaplanabilmesi amaçlanmış ve büyüklük parametresi c 'nin 0-7 aralığındaki değerleri için başarılmıştır. Literatürde yaygın olarak kullanılan Bouwkamp yöntemi, oldukça yavaş bir yöntem olup çok sayıda fonksiyonun hesaplanmasını gerektiren işlerde elverişli

değildir. Yöntem, oluşturulan bir hata fonksiyonunun, türevi yardımı ile minimize edilmesine dayanmaktadır. Tez çalışması sırasında aynı hata fonksiyonu kullanılarak, oldukça basit bir sayısal yöntemle aynı sonuçların oldukça hızlı elde edilebileceği gözlemlenmiştir. Hesaplanan değerlere ilişkin olarak karşılaştırmalı tablolar Ek 6'da verilmiştir. Ancak yapılan incelemelerde, ne tezde kullanılan sayısal yöntemin ne de Bouwkamp yönteminin $c > 7$ için hata fonksiyonunu istenildiği kadar küçültemediği gözlemlenmiştir. Bunun başlıca nedeni büyük sferoidler için önerilmiş olan asimptotik formüllerin Bouwkamp'ın hata fonksiyonunu çok büyük bir değerden başlatıyor olmasıdır. Sferoidal fonksiyonların hesaplanmasına ilişkin problemler aşıldığı takdirde, kullanımlarının yaygınlaşacağı açıktır.

Literatürde, tez çalışmasında ele alınarak çözölen çoklu saçılma problemine eşdeğer çalışmalar ya küresel saçıcılar ya da çok küçük sferoidal saçıcılar durumunu incelemiştir. Dolayısıyla tez çalışması sırasında geliştirilen formölasyon, sferoidlerin rezonans bölgesinde de geçerli olan tek çalışmadır. Literatürde, Kısım 4.4'deki referans düzlemlerinin dönüşümü eksenel simetrik tüm saçıcılara uygulanabilir. Buradaki yöntem, Sekera'nın (1966) formölasyonuna alternatiftir. Sekera'nın (1966) formölasyonu tek parçacığa ilişkin çözümün gelen ve yansıyan dalgalara göre tanımlanmış olan referans düzlemlerine yapılmasını gerektirir. Bu, küre dışındaki saçıcılar için ek dönüşümleri gerektirir. Oysa Kısım 4.4'deki formölasyon, belirli bir eksene göre elde edilmiş tekli çözümün iletim denkleminin oluşturulması için kullanılabilmesini sağlar.

Yapılan hesapların doğruluğunun deneysel çalışmalarla kanıtlanması problemi önemlidir. Literatürde deney ve ölçüm sonuçlarına ilişkin yayınlanmış çalışmalarla, tez çalışmasında elde edilen sonuçların karşılaştırılması konusunda önemli güçlükler bulunmaktadır. Her deneysel çalışmada ölçölen ve yayınlanan konfigürasyon ve büyüklükler, ölçüm yapan kişi veya grubun amaçları doğrultusunda seçilmiş büyüklüklerdir. Buna karşılık, ölçüm yapılan olayı modelleyerek, aynı parametrelerle hesaplama yapmak çoğu zaman olanaklı olmaz. Özellikle doğal saçıcılar (kar, buz, bitki örtüsü vb.) ile ilgili olarak yapılan ölçömlerin çoğunluğu ortalama (coherent) büyüklüklere (zayıflatma, depolarizasyon, geri saçılma kesit yüzeyi vb.) ilişkindir. Ortalama büyüklüklerle ilgili olarak çeşitli ideal modellerle yapılan hesaplamalarla deneysel sonuçların büyük ölçöde uyumlu olduğu çeşitli araştırmacılar tarafından bildirilmiştir (Bringi vd., 1982; Kuga vd., 1996). Ortalama olmayan (incoherent, noncoherent) büyüklüklerin ölçölmesi ise, güncel bir araştırma alanı olup daha karmaşık yöntemler kullanılmasını gerektirir. Polarimetrik radar ölçömleri, saçıcıların olası özellikleri, şekil ve yerleşimleri (orientation) ile ilgili bilgi edinmek amacıyla kullanılırlar (Mead vd.,



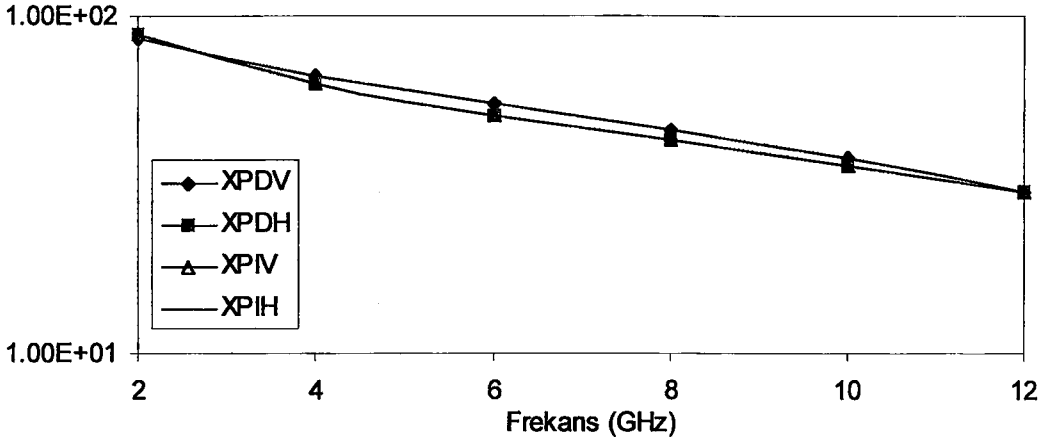
Şekil 5.4 Bağlı dielektrik sabiti 1.78 olan dielektrik sferoidal saçıcıya ilişkin toplam radar kesit yüzeylerinin karşılaştırılması (x eseni yarıdada uzaklığının dalgaboyuna oranını göstermektedir)

1996). Tezde ele alınarak çözülen problemle karşılaştırılabilecek yayınlanmış uygun deneysel bir çalışmaya rastlanılmamıştır.

Tekli probleme ilişkin yöntemlerin, deneysel çalışmalarla sınanması daha yaygındır. Özellikle küre içim Mie çözümü ve geçerli olduğu bölgede Rayleigh çözümü, çok sayıda araştırmacı tarafından deneysel olarak kanıtlanmıştır (Mon, 1982, Fletcher vd., 1992, Brussaard ve Watson, 1995). Ayrıca sferoidlerle ilgili yapılan deneysel çalışmalar, T-matris yöntemi ile karşılaştırılmış ve yöntemin sonuçları doğrulanmıştır (Mon, 1982). Tezde kullanılan sferoidal dalga açılımları yöntemi, ayrıntılı deneysel çalışmalarla doğruluğu kanıtlanmış T-matris yöntemi ile ve limit halde küre için analitik Mie çözümü ile karşılaştırılmış ve uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Örnek olarak şekil 5.4'de çeşitli a/b oranları için hesaplanmış toplam radar kesit yüzeyleri karşılaştırılmaktadır.

5.2 Gelecek Çalışmalar

Sferoidal fonksiyonların ayırma sabitlerinin hesaplmasına ilişkin olarak çalışmalar devam etmektedir. Çalışmalar dik ve yatık sferoidler için ayırma sabitlerinin hem büyük sferoidler hem de kayıplı ortamlar halini içerecek sayısal bir yöntemin kuramsal bir zemine oturtulması yönünde devam etmektedir. Literatürde kayıplı halde ayırma sabitlerini hesaplamaya yönelik yöntemler de mevcuttur (Oguchi, 1975). Ancak bu yöntemlerin de bilgisayar olanaklarını içerecek biçimde geliştirilmesi gereklidir. Tezde kullanılan basit algoritma, ayırma sabitlerine ilişkin uygun asimptotik başlangıç değerleri bulunabildiği takdirde, geliştirilecek daha iyi bir hata fonksiyonunu sayısal yöntemlerle minimize etmek suretiyle amaçlanan özelliklere sahip bir yöntemin geliştirilebileceğini göstermektedir.



Şekil 5.5 Marshall-Palmer dağılımına, Laws ve Person'un önerdiği ortalama büyüklüğe sahip sferoidal parçacıklar içeren, optik genişliği 0.2 olan tabakanın depolarizasyon parametreleri ($R=1\text{ mm/sa}$, gelen alan tabaka normali ile 30° 'lik açı yapıyor)

Olasıl saçıcılar içeren tabaka şekilli ortamdan saçılma problemi güncel ve oldukça ilgi çekici bir problemdir. Söz konusu problem, oldukça geniş pratik uygulama alanına sahiptir (Berdnik ve Loiko, 1999 ;Şengör,2000, Dimililer ve Şengör, 2000a). Tezde ele alınan problemin bir uygulaması basit bir yağmur modeline uygulanarak, sferoidlerin bulunduğu tabakanın depolarizasyon parametreleri hesaplanmıştır (Dimililer ve Şengör, 2000b). Söz konusu çalışmada oldukça basit bir modele uygulanmış olmakla beraber benzeri çalışmalarla (örneğin de Wolf ve Zwiesler, 1996) uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Örnek olarak, 1 mm/saat yağış şiddeti ve gelen alanın tabaka normali ile 30° açısı yaptığı durum için hesaplanan çapraz polarizasyon izolasyonu (XPI, cross-polarization isolation) ve çapraz polarizasyon ayrımı (XPD, Cross-polarization discrimination) parametreleri farklı polarizasyona sahip gelen alanlar için şekil 5.5'de verilmiştir. Kullanılan modelin geliştirilmesi yönündeki çalışmalar devam etmektedir. Ayrıca, yatık sferoidler için de yöntemin uygulanabilir hale getirilmesi yönündeki çalışmalar sürdürülmektedir. Bu konudaki en önemli problem, yatık fonksiyonların hesaplanmasına ilişkindir.

Olasıl ortamlara ilişkin ilgi çekici bir diğer yaklaşım ise olası ortam içinde yayılan dalganın efektif propagasyon sabitinin hesaplanmasıdır (Bringi vd., 1982; Kuga vd.,1996). Söz konusu çalışmalarda ortam ve parçacıklar kayıpsız olsa bile parçacıkların saçıcılığı nedeniyle efektif yayılma sabitinin sanal kısmı oluşmaktadır. Foldy yaklaşımı ile sferoidal parçacıkların bulunduğu ortamlara ilişkin efektif yayılma sabitinin hesaplanmasına yönelik çalışmalar sürdürülmektedir (Dimililer ve Şengör, 2000c).

Tez çalışmasında tek frekanslı düzlemsel dalgaya ilişkin çözümler elde edilmiştir. Oysa günümüzün pratik amaçlı uygulamalarında belirli bir frekans bandına sahip, sürekli veya

darbeli işaretler kullanılmaktadır. Dolayısıyla bu türlü problemlerin de ele alınmasının önemi büyüktür. Rastgele ortamlar, ortam ve parçacık parametreleri frekansla değişmese bile dispersif ortam gibi davranır. Belirli bir banda sahip sürekli veya darbeli işaretlerin sferoidal parçacıklar içeren olası ortamlardan etkileşme mekanizması üzerinde çalışma yapılması planlanmaktadır.



KAYNAKLAR

Abramowitz, M. ve Stegun, I.A., (1964), Handbook of Mathematical Functions, U.S. Govt. Printing Office, Washington D.C.

Ajewole, M.O., Kolawole, L.B. ve Ajayi, G.O., (1999), "Theoretical study of the effect of different types of tropical rainfall on microwave and millimeter-wave propagation", Radio Science, 34(5):1103-1124.

Asano, S. ve Sato, M., (1980), "Light scattering by randomly oriented spheroidal particles", Applied Optics, 19(6):962-974.

Asano, S. ve Yamamoto, G., (1975), "Light Scattering by a spheroidal particles", Applied Optics, 14(1):29-49.

Asano, S., (1979), "Light Scattering properties of spheroidal particles", Applied Optics, 18(5), 712-723.

Barber, P., Yeh, C. (1975), "Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies", Applied Optics, 14(12):2864-2872.

Bates, A.P., Hopcraft, K.I., ve Jakeman, E., (1998), "Non-Gaussian fluctuations of Stokes parameters in scattering by small particles", Waves in Random Media, 8:235-253.

Bateshwar, P.S. ve MacPhie, R.H., (1983), "Electromagnetic plane wave scattering by a system of two parallel conducting prolate spheroids", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 31(2):294-304.

Berdnik, V. ve Loiko, V., (1999) "Radiative transfer in a layer with oriented spheroidal particles", Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 63:369-382.

Bringi, V.N., Varadan, V.V., ve Varadan, V.K., (1982) "Coherent wave attenuation by a random distribution of particles", Radio Science, 17(5).

Bruning, J.H. ve Lo, Y.T., (1971), "Multiple scattering of EM waves by spheres. Part 1 and Part 2", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 19(5):378-400.

Brussaard, G. ve Watson P.A., (1995), Atmospheric Modelling and Millimetre Wave Propagation, Chapman & Hall, London.

Cheung, R.L. ve Ishimaru, A., (1982), "Transmission, backscattering and depolarization of waves in randomly distributed spherical particles", Applied Optics, 21(20):3792-3798.

Cooray, M. F.R. ve Ciric, J. R., (1989), "Electromagnetic wave scattering by a system of two spheroids of arbitrary orientation", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 37(2):608-618.

Cooray, M. F.R. ve Ciric, J. R., (1991), "Scattering of Electromagnetic waves by a system of two dielectric spheroids of arbitrary orientation", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 37(2):608-618.

de Hulst, H.C., (1957), Light Scattering by small Particles, Dover Publications, New York.

de Wolf, D.A. and Zwiesler, A.J., (1996) "Rayleigh-Mie Approximation for line of sight propagation through rain at 5-90 GHz", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 44(3):273-279.

de Wolf, D.A., Russchenberg, H.J.W. ve Ligthart, L.P., (1991), "Attenuation of Co- and Cross-polarized electric fields of waves through a layer of dielectric spheroids", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-39(2):204-210.

Dimililer K. ve Şengor, T. (2000a), "Scattering From Randomly Distributed Spheroidal Particles in a Dielectric Slab", Accepted for AP2000, Millennium Conference on Antennas & Propagation, P0991, 9-14 April 2000, Davos.

Dimililer K. ve Şengor, T. (2000b), "Depolarization characteristics of a layer of dielectric spheroids", Accepted for AP2000, Millennium Conference on Antennas & Propagation, P1199, 9-14 April 2000, Davos.

Dimililer K. ve Şengor, T. (2000c), "Propagation Constant of the Coherent Wave in a Medium Containing Spheroidal Particles", Invited Paper for PIERS 2000, 5-14 July 2000, Cambridge.

Erdélyi, A., (1953), Higher Transcendental Functions, vol 1,2,3 McGraw-Hill, New York.

Evans, G. A., (1995), Practical Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Chichester, England.

Farafonov, V.G., Vladimir V. I., Henning, T., (1999) "A new solution of the light scattering problem for axisymmetric particles", Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 63:205-215.

Flammer, C., (1957), Spheroidal Wave Functions, Stanford University Press, California.

Fletcher, P.N., Hardaker, P.J., Auchterlonie, L.J. ve Holt, A.R., (1992), "Comparison of experimental and theoretical scattering effects from melting ice spheres an microwave and millimeter-wave frequencies", IEE Proc.-H, (Technical memorandum), 139(6):545-548.

Holt, A.R., Uzunoğlu, N.K. ve Evans, B.G., (1978), "An integral equation solution to the scattering of electromagnetic radiation by dielectric spheroids and ellipsoids", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-26(5).

Ishimaru, A., (1978), Propagation and Scattering in Random Media, Academic Press, London.

Ishimaru, A., (1991), Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering, Prentice Hall.

Jin, Y., (1994), "Polarimetric scattering from a layer of random clusters of spheroids", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-42(8):1138-1144.

Karam, M.A., LeVine, D.A., Antar, Y.M.M. ve Stogryn, A., (1995), "Improvement of the Rayleigh Approximation for scattering from a small scatterer", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-43(7):681-688.

Kuga, Y., Rice D. ve West, R. D., (1996) "Propagation constant and the velocity of the coherent wave in a dense strongly scattering medium", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 44(3):326:332.

Lam, C. M. ve Ishimaru, A., (1993), "Calculation of Mueller matrices and polarization signatures for a slab of random medium using vector radiative transfer", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-41(7):851-862.

- Lam, C. M. ve Ishimaru, A., (1994), "Mueller Matrix Calculation for a slab of random medium with both random rough surfaces and discrete particles", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-42(2):145-156.
- Li, L.W., Kooi P.H., Leong, M.S., T.S., ve Gao, M.Z., (1995a) "Microwave attenuation by realistically distorted raindrops: Part I-Theory", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-43(8):811-822.
- Li, L.W., Kooi P.H., Leong, M.S., T.S., ve Gao, M.Z., (1995b) "Microwave attenuation by realistically distorted raindrops: Part II-Predictions", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-43(8):823-828.
- Ma, Q. ve Ishimaru, A., (1990), "Scattering and depolarization of waves incident upon a slab of random media with refractive index different from that of the surrounding media", Radio Science, 25(4):419-426.
- Ma, Q. ve Ishimaru, A., (1991), "Propagation and depolarization of an arbitrarily polarized wave obliquely incident on a slab of random media", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Ap-39(11):1626-1632.
- Mathews, J.H., (1992), Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, Prentice-Hall, London.
- Mead J.B., Pazmany, A.L., Chang, P.S. ve McIntosh, R.E., (1996), "Comparison of coherent and noncoherent polarimetric radar measurements at 95 GHz", Radio Science, 31(2):325-333.
- Modest, F.M., (1993), Radiative Heat Transfer, McGraw-Hill, New York.
- Mon, J.P., (1982), "Backward and forward scattering of microwaves by ice particles: A review", Radio Science, 17(5).
- Morse P.M. ve Feshbach H., (1953), Methods of Theoretical Physics, part 1,2 McGraw-Hill, New York.
- Nag, S. ve Sinha, B.P., (1995), "Electromagnetic plane wave scattering by a system of two uniformly lossy dielectric prolate spheroids in arbitrary orientation", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 43(3):322-327.
- Oguchi, T., (1970), "Eigenvalues of spheroidal wave functions and their branch points for complex values of propagation constants", Radio Science, 5(8)(9): 1207-1214.
- Oguchi, T., (1983), "Electromagnetic wave propagation and scattering in rain and other hydrometeors", Proceedings of IEEE, 71(9):1029-1078.
- Olsen, R.L., (1982), "A review of theories of coherent radio wave propagation through precipitation media of randomly oriented scatterers, and the role of multiple scatterers", Radio Science, 17(5).
- Sekera, Z., (1966), "Scattering matrices and reciprocity relationships for various representations of the state of polarizations", Journal of The Optical Society of America, 56(12):1732-1740.
- Simirnov, V.I., (1964) A Course of Higher Mathematics, 3(2), Pergamon Press, London.

Sinha, B.P., MacPhie, R.H., (1983), "Electromagnetic plane wave scattering by a system of two parallel conducting prolate spheroids", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-31(2):394-304.

Stratton, J.A., (1941), Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York.

Stratton, J.A., Morse, P.M., Chu, L.J. ve Hunter, R.A., (1941), Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, John Wiley & Sons, New York.

Şengor, T. ve Dimililer K., (2000), "Comparison of the rayleigh method and the method of spheroidal wave expansions for small spheroids", Accepted for AP2000 Millennium Conference on Antennas & Propagation, P0990, 9-14 April 2000, Davos.

Şengor, T., (2000), "First order multiple inversion of randomly distributed particles in a dispersive slab", Invited Paper for PIERS 2000, 5-14 July 2000, Cambridge.

Twersky, V., (1962), "On scatterer of waves by random distributions. 1. Free-space scatterer formalism", Journal of Mathematical Physics, 1(4):700:715.

Vargas, V., Cruz, L., Fonseca, L.F ve Gómez, M., (1993), "T-matrix approach for calculating local fields around clusters of rotated spheroids", Applied Optics, 32(12):2164-2170.

Wait, J., (1966), "Theories of Prolate spheroidal antennas", Radio Science, 1(4):475-512.

Waterman, P.C. (1965), "Matrix formulation of electromagnetic scattering", Proceedings of IEEE, 53:805-812.

Waterman, P.C., (1979), "Matrix methods in potential theory and electromagnetic scattering", J. Appl. Phys. 50(7):4550-4566.

Xu, Y.L., (1995), "Electromagnetic scattering by an aggregate of spheres", Applied Optics, 34(21):4573-4588.

Xu. Y.L. ve Wang, R.T., (1998), "Electromagnetic scattering by an aggregate of spheres: Theoretical and experimental study of the amplitude scattering matrix", Physical Review E, 58(3).

Ek 1 Diferansiyel Denklemler

İkinci dereceden bir lineer diferansiyel denklem, z fonksiyonun kompleks değerli değişkenini temsil etmek kaydıyla

$$y''(z) + p(z) y'(z) + q(z) y(z) = 0 \quad (\text{Ek 1.1})$$

şeklinde yazılabilir. Genel olarak böyle bir denklemin çözümleri $p(z)$ ve $q(z)$ katsayılarına bağlıdır. Çözümlerdeki tekilliklerin $p(z)$ ve $q(z)$ katsayılarının tekillikleri ile çakıştığı; dolayısıyla bu tekillikleri inceleyerek denklemin çözümü olan fonksiyonların temel özelliklerinin elde edilebileceği ispatlanabilir. Genel yöntem, böyle bir denklemin çözümünü bir nokta civarında kuvvet serisi olarak yazmaya dayanır. Bu şekilde yazılan bir çözümün geçerli olduğu bölge, Abel Teoremi gereğince en yakın tekil noktaya olan uzaklığın belirlediği yarıçap kadardır (Morse and Feshbach, 1953; Smirnov, 1964).

Adi diferansiyel denklemin katsayılarının tekil olmadığı noktalardaki çözümler Taylor serilerine açılabilir. Eğer denklemdeki katsayılarda tekillik varsa, tekil nokta civarındaki çözümlerde esaslı tekil nokta bulunup bulunmayacağına bakılarak denklemin tekilliği sınıflandırılır: Eğer çözümlerden en az birinde bir esaslı tekil nokta varsa, bu nokta düzgün olmayan (irregular) tekilliktir; aksi halde bu noktadaki tekillik düzgündür (regular). Düzgün tekil noktalarda çözümlerde genellikle kutup ya da dallanma tekillikleri ile karşılaşılır (Morse and Feshbach, 1953).

İkinci dereceden her diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümü vardır. Genel olarak, $z=z_0$ noktasındaki çözümler, $\rho_1, \rho_2, c'_k, c''_k$ ve a sabit sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} y_1 &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k (z - z_0)^k \\ y_2 &= (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c''_k (z - z_0)^k \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.2.a})$$

veya

$$\begin{aligned} y_1 &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k (z - z_0)^k \\ y_2 &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c''_k (z - z_0)^k + a y_1 \log(z - z_0) \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.2.b})$$

şeklinde olacaktır. Eğer bulunan her iki çözümde sonlu sayıda negatif üslü terim varsa diferansiyel denklemin bu açılımın yapıldığı noktadaki ($z = z_0$ 'daki) tekilliği düzgündür. Aksi halde sonsuz sayıda negatif üslü terim varsa, ki bu nokta çözüm için bir esaslı tekil noktadır, denklemin düzgün olmayan (irregular) tekilliği söz konusudur.

Herhangi bir $z=z_0$ noktasının (Ek 1.2.1)'deki denklemin düzgün tekil bir noktası olması için gerek ve yeter koşul, bu noktanın $p(z)$ için en fazla birinci, $q(z)$ için en fazla ikinci dereceden bir kutup noktası olmasıdır (Smirnov, 1964). Bu durumda denklemin $z=z_0$ 'daki tekilliği için, $p(z)=f(z)/(z-z_0)$ ve $q(z)=g(z)/(z-z_0)^2$ olmak üzere,

$$\rho^2 + [f(z_0) - 1]\rho + g(z_0) = 0 \quad (\text{Ek 1.3})$$

denkleminin (determining equation, indicial equation) kökleri birbirinden farklı veya tamsayı değillerse (Ek 1.2.a) eşitliklerindeki ρ_1 ve ρ_2 sabitleridir (Morse and Feshbach, 1953). Eğer kökler birbirine eşit veya tamsayı iseler (Ek 1.2.a)'daki çözümler de lineer bağımsız olmazlar. Bu durumda (Ek 1.2.b)'deki çözüm çifti denklemin çözümüdür (Smirnov, 1964).

Bütün teklikleri düzgün olan diferansiyel denklemler Fuchs sınıfına aittir. Sonsuz noktasının da düzgün teklik şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul, $z=\infty$ noktasının $p(z)$ 'in en az birinci dereceden sıfırı, $q(z)$ 'in en az ikinci dereceden sıfırı olmasıdır. Üç tane düzgün tekliği herhangi üç noktada olan diferansiyel denklem Papperitz Denklemdir (Riemann denklemi de denir). Üç adet düzgün tekliği 0, 1 ve sonsuzda olan denklem ise Gauss denklemi veya 'Hypergeometric' diferansiyel denklem adıyla anılır. Üç düzgün tekliği -1, +1 ve sonsuzda olan denklem ise Gegenbauer Denklemi olarak anılır. Gegenbauer denkleminin özel bir hali Legendre Diferansiyel denklemidir. Papperitz denklemi daha genel olmakla birlikte, bağımsız değişkenin uygun bilineer dönüşümleri ile teklikler standart noktalara ($z=0, 1$ ve ∞) taşınabilir. Dolayısıyla bu sınıfa ait denklemlerin çözümleri sıklıkla 'Hypergeometric' denklemin çözümleri cinsinden yazılmaktadır (Morse ve Feshbach, 1953).

Fiziksel olaylarla ilişkili olarak karşılaşılan bir diğer denklem sınıfı da, biri düzgün diğeri düzgün olmayan iki tekliği olan denklemlerdir. Bu sınıfa ait en önemli denklem Bessel diferansiyel denklemidir. Yine özellikle dalga fonksiyonunun separasyonu sonucu karşılaşılan bir denklem sınıfı ise ikisi düzgün biri düzgün olmayan üç tekliğe sahip adi diferansiyel denklemlerdir. Sferoidal koordinatlarda dalga denkleminin değişkenlerine ayrılması sonucunda elde edilen denklemler bu sınıftaki denklemlerdendir.

Ek 2 İstatistiksel Özellikler

Olasıl ortamlardaki parçacıklara ilişkin birtakım özellikler istatistiksel büyüklüklerdir. Ek 2'de tezde kullanılan tanımlar özetlenmiştir. Birim hacimdeki toplam parçacık sayısı (sayı yoğunluğu veya yoğunluk)

$$\rho = \int_0^{\infty} n(D) dD$$

eşitliği ile verilir. Burada, $n(D)dD$ Birim hacimde boyutları D ile $D+dD$ arasında olan parçacıkların sayısını gösterir. Belirli bir D büyüklüğündeki parçacığın var oluş olasılığı olasılık yoğunluk fonksiyonu ile verilir:

$$W(D) = \frac{n(D)}{\rho}$$

Öyle ki olasılık yoğunluk fonksiyonunun bütün parçacık büyüklükleri üzerinden integrali bire eşittir:

$$\int_0^{\infty} W(D) dD = 1$$

Ortalama radar toplam kesit yüzeyi ise,

$$\langle \sigma_t \rangle = \int_0^{\infty} \sigma_t(D) W(D) dD$$

eşitliği ile tanımlanır. Ortalama parçacık büyüklüğü

$$\langle D_t \rangle = \int_0^{\infty} D_t(D) W(D) dD$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin yağmur, mm/saat cinsinden yağış hızı ile ölçülür. yağmur nedeniyle elektromagneik dalgaların saçılması problemine ilişkin olarak en yaygın kullanılan olasılık dağılım fonksiyonu Marshall ve Palmer'in elde ettikleri fonksiyondur:

$$n(p, a) = n_0 e^{-\alpha a} \left\{ \begin{array}{l} n_0 = 1.6 \times 10^4 \text{ (m}^{-3} \text{ mm}^{-1}) \\ \alpha = 8.2 p^{-0.21} \text{ mm}^{-1} \end{array} \right.$$

burada p yağmur yağış hızıdır.

Ek 3 Stokes Parametreleri

Genel eliptik polarizasyonlu bir dalga üç bağımsız parametre ile belirlenebilir. Örneğin, yayılma doğrultusu $\vec{e}_z$ olan eliptik polarizasyonlu bir dalga,

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= a_1 \cos(\omega t - kz + \phi_1) \\ E_y(z, t) &= a_2 \cos(\omega t - kz + \phi_2) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Ek 3.1})$$

bileşenlerine sahipse a_1 , a_2 ve $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ polarizasyonu belirleyen parametrelerdir. Her üç parametrenin de aynı boyutta olduğu alternatif bir gösterilim G. Stokes tarafından önerilmiştir (Ishimaru, 1978):

$$I = a_1^2 + a_2^2 \quad (\text{Ek 3.2a})$$

$$Q = a_1^2 - a_2^2 \quad (\text{Ek 3.2b})$$

$$U = 2a_1a_2 \cos \phi = 2 \text{Re}(E_x E_y^*) \quad (\text{Ek 3.2c})$$

$$V = 2a_1a_2 \sin \phi = 2 \text{Im}(E_x E_y^*) \quad (\text{Ek 3.2d})$$

Burada $I_2 = Q_2 + U_2 + V_2$ olduğu açıktır. İletim teorisinde tanımları aşağıdaki gibi olan, modifiye edilmiş Stokes parametreleri daha kullanışlıdır:

$$I_1 = |E_x|^2 \quad (\text{Ek 3.3a})$$

$$I_2 = |E_y|^2 \quad (\text{Ek 3.3b})$$

$$U = 2 \text{Re}(E_x E_y^*) \quad (\text{Ek 3.3c})$$

$$V = 2 \text{Im}(E_x E_y^*) \quad (\text{Ek 3.3d})$$

Modifiye stokes parametreleri ile dört elemanlı bir sütun matris (Stokes vektörü) oluşturulabilir. Gelen ve saçılan Stokes vektörleri arasında da (1) eşitliğine eşdeğer bir bağıntı yazılabilir:

$$\vec{I}^s = \frac{1}{R} [s] \vec{I}^i \quad (\text{Ek 3.4})$$

Buradaki $[s]$ Stokes matrisi olarak adlandırılır. Buna göre, $\vec{I}^i = [I_1^i, I_2^i, U^i, V^i]^T$ ve

$\vec{I}^s = [I_1^s, I_2^s, U^s, V^s]^T$ olmak üzere Stokes Matrisi,

$$[s] = \begin{bmatrix} |f_{11}|^2 & |f_{12}|^2 & \text{Re}(f_{11}f_{12}^*) & -\text{Im}(f_{11}f_{12}^*) \\ |f_{21}|^2 & |f_{22}|^2 & \text{Re}(f_{21}f_{22}^*) & -\text{Im}(f_{21}f_{22}^*) \\ 2 \text{Re}(f_{11}f_{21}^*) & 2 \text{Re}(f_{12}f_{22}^*) & \text{Re}(f_{11}f_{22}^* + f_{12}f_{21}^*) & -\text{Im}(f_{11}f_{22}^* - f_{12}f_{21}^*) \\ 2 \text{Im}(f_{11}f_{21}^*) & 2 \text{Im}(f_{12}f_{22}^*) & \text{Im}(f_{11}f_{22}^* + f_{12}f_{21}^*) & \text{Re}(f_{11}f_{22}^* - f_{12}f_{21}^*) \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 3.5})$$

eşitliği ile verilir. Stokes matrisi tek saçıcı için, saçılan alanın belirli bir polarizasyondaki bileşenlerini gelen alan cinsinden belirler. Örnek olarak Çizelge Ek 3.1'de pozitif z ekseninde yayılan, farklı polarizasyonlardaki dalgaları temsil eden Stokes parametreleri verilmiştir.

Küçük parçacıklardan saçılan alanlar, genellikle küresel koordinat sisteminde alanların θ ve ϕ bileşenleri cinsinden elde edilir. Tez'in konusunu oluşturan sferoidal parçacıklardan saçılan alanların η ve ϕ bileşenleri de uzak alanda küresel koordinatlar sistemindeki θ ve ϕ bileşenlerine dönüşür. Oysa tabaka şekilli olası ortamlardaki şiddetlerin tabakaya paralel bileşenler cinsinden yazılması daha kullanışlıdır. Bu durumda referans düzlemleri

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ U_{xy} \\ V_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & -(\sin 2\phi \cos \theta)/2 & 0 \\ \cos^2 \theta \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & (\sin 2\phi \cos \theta)/2 & 0 \\ \cos^2 \theta \sin 2\phi & -\sin 2\phi & \cos 2\phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\theta \\ I_\phi \\ U \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 3.6})$$

dönüşüm bağıntısı yardımıyla dönüştürülür (Cheung ve Ishimaru, 1982).

Çizelge Ek 3.1 Değişik polarizasyonlar için pozitif z yönünde yayılan dalgalara ait Stokes Parametreleri

Polarizasyon	$ E_x $	$ E_y $	$\Delta\phi$	$I_1=I_x$	$I_2=I_y$	U_{xy}	V_{xy}
Lineer	1	0	-	1	0	0	0
Lineer	0	1	-	0	1	0	0
Lineer	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	45°	0.5	0.5	1	0
Dairesel (sol-el)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	90°	0.5	0.5	0	1
Dairesel (sağ-el)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	270°	0.5	0.5	0	-1
Eliptik	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	53.13°	0.5	0.5	0.6	0.8

Ek 4 Referans Düzlemleri Arasındaki Açı

(θ_1, ϕ_1) ve (θ_2, ϕ_2) doğrultularının belirlediği düzleme paralel olan düzlemin normali, bu iki doğrultu ile belirli herhangi iki vektörün vektörel çarpımları ile aynı doğrultudadır. (θ_1, ϕ_1) ve (θ_2, ϕ_2) doğrultularından geçen birim uzunluklu

$$\vec{r}_1 = \sin(\theta_1) \cos(\phi_1) \vec{e}_x + \sin(\theta_1) \sin(\phi_1) \vec{e}_y + \cos(\theta_1) \vec{e}_z \quad (\text{Ek 4.1a})$$

ve

$$\vec{r}_2 = \sin(\theta_2) \cos(\phi_2) \vec{e}_x + \sin(\theta_2) \sin(\phi_2) \vec{e}_y + \cos(\theta_2) \vec{e}_z \quad (\text{Ek 4.1b})$$

vektörlerini ele alalım. Bu iki vektörden geçen düzlemin normali,

$$\vec{n} = \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \quad (\text{Ek 4.2})$$

eşitliği ile hesaplanır. Buna göre,

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_x &= \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\phi_1) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\phi_2) \\ (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_y &= \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\phi_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\phi_1) \\ (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_z &= \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\phi_2 - \phi_1) \end{aligned} \quad (\text{Ek 4.3})$$

ve

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2 &= \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \sin^2(\phi_2 - \phi_1) \\ &\quad - 2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\phi_2 - \phi_1) \end{aligned} \quad (\text{Ek 4.4})$$

yazılır. Eğer, $\theta_1 = 0^\circ$ ise

$$\vec{n}_0 = -\vec{e}_x \sin(\phi_2) + \vec{e}_y \cos(\phi_2) \quad (\text{Ek 4.5})$$

elde edilir. İki birim vektörün skaler çarpımı vektörler arasındaki açının kosinüsüne eşit olduğundan, (θ_1, ϕ_1) ve (θ_2, ϕ_2) doğrultularının belirlediği düzlem ile $(0, \phi_1)$ ve (θ_2, ϕ_2) doğrultularının belirlediği düzlem arasındaki açı,

$$\cos(\Theta) = \frac{\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\phi_2 - \phi_1)}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \quad (\text{Ek 4.6})$$

eşitliği yardımıyla bulunur.

Ek 5 Faz Matrisi Elemanlarının Düzenlenmesi

D_m ve E_m kompleks sayılar olmak üzere A ve B,

$$A = \sum_{m=0}^M D_m f_m(\phi) \quad (\text{Ek 5.1})$$

$$B = \sum_{m=0}^M E_m g_m(\phi) \quad (\text{Ek 5.2})$$

şeklinde tanımlansın. $f_m(\phi)$ ile $g_m(\phi)$ fonksiyonları, çarpımları

$$f_m(\phi)g_n(\phi) = \frac{1}{2}(K_1 h_{m+n}(\phi) + K_2 h_{m-n}(\phi)) \quad (\text{Ek 5.3})$$

biçiminde ifade edilebilen trigonometrik fonksiyonlar (sinüs veya cosinüs) olsun. Buradaki K_1 , K_2 sabitleri ile $h_k(\phi)$ fonksiyonlarının alabilecekleri değerler Çizelge Ek 5.1'de verilmiştir.

Çizelge Ek 5.1 $f_m(\phi)$ ve $g_n(\phi)$ fonksiyonlarına bağlı olarak (Ek 5.3) eşitliğindeki $h_k(\phi)$ fonksiyonları ile K_1 , K_2 sabitlerinin alabileceği değerler

$f_m(\phi)$	$G_n(\phi)$	$h_k(\phi)$	K_1	K_2
$\cos(m\phi)$	$\cos(n\phi)$	$\cos(k\phi)$	1	1
$\cos(m\phi)$	$\sin(n\phi)$	$\sin(k\phi)$	1	-1
$\sin(m\phi)$	$\cos(n\phi)$	$\sin(k\phi)$	1	1
$\sin(m\phi)$	$\sin(n\phi)$	$\cos(k\phi)$	-1	1

Buna göre (AB^*) 'nin trigonometrik açılımlarını bulmaya çalışalım.

$$\begin{aligned} AB^* &= \left(\sum_{m=0}^M D_m f_m(\phi) \right) \left(\sum_{n=0}^M E_n^* g_n(\phi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(K_1 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M D_m E_n^* h_{m+n}(\phi) + K_2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M D_m E_n^* h_{m-n}(\phi) \right) \end{aligned} \quad (\text{Ek 5.4})$$

Bu eşitikteki birinci toplamda $k=m+n$, ikinci toplamda $k=m-n$ dönüşümünü yaparsak,

$$AB^* = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^M \sum_{k=m}^{M+m} D_m E_{k-m}^* h_k(\phi) + \sum_{m=0}^M \sum_{k=m-M}^m D_m E_{m-k}^* h_k(\phi) \right) \quad (\text{Ek 5.5})$$

eşitliğini elde ederiz. Amacımız faz matrisi elemanlarını trigonometrik fonksiyonların serileri olarak elde etmektir. Dolayısı ile k üzerinden yapılan toplam işlemi ile m üzerinden yapılan toplam işleminin yer değiştirmesi gereklidir. Bu amaçla k'nın m ve n'in değerlerine göre alabileceği değerler Çizelge Ek 5.2 ve Çizelge Ek 5.3'de gösterilmiştir.

Çizelge Ek 5.2 Birinci toplamda k'nın alabileceği değerler

n\m	0	1	2	3	4	...	M
0	0	1	2	3	4	...	M
1	1	2	3	4	5	...	M+1
2	2	3	4	5	6	...	M+2
3	3	4	5	6	7	...	M+3
4	4	5	6	7	8	...	M+4
...	...	...	...	...	...	...	...
M	M	M+1	M+2	M+2	M+4	...	2M

Çizelge Ek 5.3 İkinci toplamda k'nın alabileceği değerler

n\m	0	1	2	3	4	...	M
0	0	1	2	3	4	...	M
1	-1	0	1	2	3	...	M-1
2	-2	-1	0	1	2	...	M-2
3	-3	-2	-1	0	1	...	M-3
4	-4	-3	-2	-1	0	...	M-4
...	...	...	...	...	...	...	...
M	-M	1-M	2-M	3-M	4-M	...	0

Çizelge Ek 5.2 ve Çizelge Ek 5.3 incelendiği zaman k'nın alabileceği değerlerin, $-M \leq k < 0$, $0 \leq k \leq M$ ve $M < k \leq 2M$ olmak üzere üç ayrı grupta ele alınabileceği sonucuna varılır:

$$AB^* = \frac{1}{2} \left(K_2 \sum_{k=1}^M \sum_{i=0}^{M-k} D_i E_{i+k}^* h_{-k}(\phi) + \sum_{k=0}^M \left(K_2 \sum_{i=k}^M D_i E_{i-k}^* + K_1 \sum_{i=0}^k D_i E_{k-i}^* \right) h_k(\phi) \right. \\ \left. + K_1 \sum_{k=M+1}^{2M} \sum_{i=k-M}^M D_i E_{k-i}^* h_k(\phi) \right) \quad (\text{Ek 5.6})$$

Ek 6 Hesaplanan Ayırma Sabitlerinin Flammer'in (1957) Tabloları ile Karşılaştırılması

Tez boyunca yapılan hesapların büyük bölümü önceden sözedildiği gibi Borland C (3.1) derleyicisi kullanılarak yazılan programlarla yapılmıştır. Program boyunca reel değişkenler için C'deki 64 bitlik "double" sayı tipi kullanılmıştır. Sözkonusu sayı tipi, $1.7 \cdot 10^{-308}$ - $1.7 \cdot 10^{308}$ aralığındaki sayıları saklamak için uygundur. Buna karşılık, bu sayı tipi ile DOS ortamında yapılan hesaplamalarda çarpma ve bölme işlemlerindeki doğruluk 10^{-15} mertebesinde dir.

Verilmiş olan çizelgelerde hesaplanan değerler, Flammer'in (1957) çizelgelerinde verdiği gibi altıncı ondalık sayıda yuvarlatılmıştır. Dolayısı ile çizelgelerin üçüncü sütunlarında yuvarlatma yapmaksızın hesaplanan ayırma sabitleri için hata fonksiyonunun aldığı değerler; son sütun ise Flammer'in (1957) tablolarında verdiği ayırma sabitlerine ilişkin olarak hesaplanan hata fonksiyonunun aldığı değerlerdir.



Çizelge Ek 6.1 m=0 ve n=0 için Flammer (1957) Çizelge 10 ile karşılaştırma

c	Ayrırma Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	0.003332	0.00333	9.69E-11	1.85E-06
0.2	0.01331	0.01331	9.17E-11	-3.40E-07
0.3	0.02988		9.27E-11	
0.4	0.052956	0.05296	9.67E-11	-3.99E-06
0.5	0.082415	0.08242	9.38E-11	-5.19E-06
0.6	0.118102	0.1181	9.78E-11	2.16E-06
0.7	0.159832		9.55E-11	
0.8	0.20739	0.20739	9.13E-11	4.98E-07
0.9	0.260535		9.79E-11	
1	0.319	0.319	9.70E-11	5.53E-08
1.1	0.382499		9.00E-11	
1.2	0.450728	0.45073	9.77E-11	-1.65E-06
1.3	0.52337		9.07E-11	
1.4	0.600096	0.6001	9.98E-11	-3.60E-06
1.5	0.680575	0.68058	9.48E-11	-4.88E-06
1.6	0.764472	0.76447	9.65E-11	1.94E-06
1.7	0.851455		9.50E-11	
1.8	0.941201	0.9412	9.04E-11	6.66E-07
1.9	1.033394		9.30E-11	
2	1.127734	1.12773	9.28E-11	4.19E-06
2.1	1.223937		9.01E-11	
2.2	1.321738	1.32174	9.50E-11	-1.98E-06
2.3	1.420891		9.77E-11	
2.4	1.521172	1.52117	9.81E-11	2.58E-06
2.5	1.62238	1.62238	9.42E-11	1.67E-07
2.6	1.724334	1.72433	9.82E-11	4.28E-06
2.7	1.826875		9.04E-11	
2.8	1.929865	1.92986	9.23E-11	5.43E-06
2.9	2.033184		9.30E-11	
3	2.136732	2.13673	9.22E-11	2.46E-06
3.1	2.240423		8.94E-11	
3.2	2.344187	2.34419	9.46E-11	-3.55E-06
3.3	2.447966		9.55E-11	
3.4	2.551714	2.55172	9.97E-11	-6.33E-06
3.5	2.655396	2.6554	9.68E-11	-4.18E-06
3.6	2.758984	2.75899	9.55E-11	-6.91E-06
3.7	2.862457		-9.36E-11	
3.8	2.965801	2.96581	-8.97E-11	-1.07E-05
3.9	3.069006		-9.17E-11	
4	3.172067	3.17207	-9.15E-11	-3.12E-06
4.1	3.274982		-9.63E-11	
4.2	3.377751	3.37775	-9.69E-11	7.81E-07
4.3	3.480375		-9.48E-11	
4.4	3.58286	3.58286	-9.08E-11	-5.89E-07
4.5	3.685208	3.68521	-9.82E-11	-2.01E-06
4.6	3.787427	3.78743	-9.19E-11	-3.30E-06
4.7	3.889523		-9.81E-11	
4.8	3.9915	3.9915	-9.07E-11	3.26E-07
4.9	4.093367		-9.62E-11	
5	4.195129	4.19513	-8.85E-11	-1.49E-06

Çizelge Ek 6.2 $m=0$, $n=1$ için Flammer (1957) Tablo 10 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	2.005999	2.006	-6.09E-11	-6.86E-07
0.2	2.023989	2.02399	-9.75E-11	-9.75E-07
0.3	2.053944		-9.82E-11	
0.4	2.095824	2.09582	-9.17E-11	4.21E-06
0.5	2.14957	2.14957	-9.84E-11	4.86E-07
0.6	2.215109	2.21511	-9.17E-11	-1.49E-06
0.7	2.292347		-9.89E-11	
0.8	2.381176	2.38118	-9.41E-11	-4.22E-06
0.9	2.48147		-9.03E-11	
1	2.593085	2.59308	-9.91E-11	4.58E-06
1.1	2.715858		-9.19E-11	
1.2	2.849611	2.84961	-9.99E-11	6.86E-07
1.3	2.994143		-9.33E-11	
1.4	3.149239	3.14924	-9.31E-11	-7.06E-07
1.5	3.314663	3.31466	-9.96E-11	2.60E-06
1.6	3.490159	3.49016	-9.29E-11	-1.30E-06
1.7	3.675454		-9.35E-11	
1.8	3.870258	3.87026	-9.14E-11	-2.45E-06
1.9	4.074258		-9.69E-11	
2	4.287129	4.28713	-9.00E-11	-1.47E-06
2.1	4.508523		-9.07E-11	
2.2	4.738081	4.73808	-9.93E-11	1.34E-06
2.3	4.975426		-9.54E-11	
2.4	5.220168	5.22017	-9.95E-11	-1.64E-06
2.5	5.471906	5.4719	-9.09E-11	5.84E-06
2.6	5.730226	5.73023	-9.03E-11	-3.80E-06
2.7	5.994711		-9.75E-11	
2.8	6.264934	6.26493	-9.20E-11	4.31E-06
2.9	6.540469		-9.44E-11	
3	6.820888	6.82088	-9.43E-11	8.83E-06
3.1	7.105768		-9.17E-11	
3.2	7.394692	7.39469	-9.70E-11	1.96E-06
3.3	7.687251		-9.97E-11	
3.4	7.98305	7.98305	-9.95E-11	-1.96E-07
3.5	8.281709	8.28171	-9.61E-11	-1.47E-06
3.6	8.582865	8.58286	-8.96E-11	5.40E-06
3.7	8.886176		-9.04E-11	
3.8	9.19132	9.19132	-9.83E-11	-6.93E-06
3.9	9.498001		-8.87E-11	
4	9.805944	9.80595	-9.27E-11	-7.31E-06
4.1	10.1149		-8.87E-11	
4.2	10.42465	10.42464	-9.91E-11	7.57E-06
4.3	10.73498		9.36E-11	
4.4	11.04573	11.04574	9.93E-11	-1.34E-05
4.5	11.35674	11.35675	-9.58E-11	-1.67E-05
4.6	11.66787	11.66787	-9.57E-11	2.58E-06
4.7	11.97902		-8.96E-11	
4.8	12.29009	12.29009	-9.55E-11	3.78E-06
4.9	12.60101		-9.00E-11	
5	12.9117	12.91171	-9.18E-11	-9.52E-06

Çizelge Ek 6.3 $m=0$ $n=2$ için Flammer (1957) Tablo 10 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	6.005239	6.00523	-9.80E-11	9.11E-06
0.2	6.020969	6.02096	-9.28E-11	8.59E-06
0.3	6.047225		-9.38E-11	
0.4	6.084067	6.08407	-9.78E-11	-2.59E-06
0.5	6.131579	6.13158	-9.50E-11	-7.30E-07
0.6	6.189864	6.18986	-9.90E-11	4.45E-06
0.7	6.259047		-9.66E-11	
0.8	6.339269	6.33927	-9.23E-11	-1.34E-06
0.9	6.430687		-9.88E-11	
1	6.533472	6.53347	-9.78E-11	1.81E-06
1.1	6.647803		-9.05E-11	
1.2	6.773865	6.77387	-9.78E-11	-4.82E-06
1.3	6.911847		-9.05E-11	
1.4	7.061933	7.06193	-9.89E-11	2.84E-06
1.5	7.224303	7.2243	-9.32E-11	2.81E-06
1.6	7.399125	7.39913	-9.40E-11	-4.73E-06
1.7	7.586554		-9.14E-11	
1.8	7.786725	7.78673	-9.55E-11	-5.21E-06
1.9	7.999749		-9.65E-11	
2	8.225713	8.22572	-9.43E-11	-7.25E-06
2.1	8.464673		-9.96E-11	
2.2	8.716656	8.71665	-9.13E-11	6.00E-06
2.3	8.981652		-9.07E-11	
2.4	9.259618	9.25962	-9.79E-11	-2.12E-06
2.5	9.550477	9.55048	-9.18E-11	-3.65E-06
2.6	9.854113	9.85411	-9.37E-11	3.53E-06
2.7	10.17038		-9.32E-11	
2.8	10.49909	10.49909	-9.03E-11	-1.91E-06
2.9	10.84003		-9.61E-11	
3	11.19294	11.19294	-8.88E-11	-1.54E-06
3.1	11.55755		-9.06E-11	
3.2	11.93355	11.93355	-9.11E-11	-4.51E-06
3.3	12.32059		-9.05E-11	
3.4	12.71833	12.71833	-8.95E-11	4.78E-07
3.5	13.12637	13.12637	-8.89E-11	8.60E-07
3.6	13.54431	13.54431	-8.95E-11	-1.52E-06
3.7	13.97172		-9.23E-11	
3.8	14.40816	14.40816	9.49E-11	1.66E-06
3.9	14.85318		8.97E-11	
4	15.3063	15.3063	9.67E-11	-5.11E-09
4.1	15.76705		8.93E-11	
4.2	16.23494	16.23494	9.45E-11	5.32E-06
4.3	16.70949		9.93E-11	
4.4	17.1902	17.1902	8.82E-11	-2.58E-07
4.5	17.67658	17.67658	9.05E-11	2.82E-06
4.6	18.16815	18.16813	9.20E-11	3.30E-05
4.7	18.66443		9.25E-11	
4.8	19.16495	19.16495	9.18E-11	2.06E-06
4.9	19.66926		8.96E-11	
5	20.17692	20.17691	8.56E-11	8.15E-06

Çizelge Ek 6.4 $m=0$ $n=3$ için Flammer (1957) Tablo 10 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	12.00511	12.00511	5.96E-11	1.44E-06
0.2	12.02045	12.02045	9.53E-11	-2.81E-07
0.3	12.04603		9.60E-11	
0.4	12.08186	12.08186	9.96E-11	2.35E-06
0.5	12.12799	12.12798	9.62E-11	4.58E-06
0.6	12.18443	12.18443	9.96E-11	-3.39E-07
0.7	12.25124		9.66E-11	
0.8	12.32848	12.32848	9.18E-11	-4.43E-06
0.9	12.41619		9.78E-11	
1	12.51446	12.51446	9.64E-11	2.15E-06
1.1	12.62337		9.92E-11	
1.2	12.743	12.743	9.68E-11	-3.19E-06
1.3	12.87345		9.01E-11	
1.4	13.01484	13.01484	9.95E-11	-1.96E-07
1.5	13.16728	13.16728	9.54E-11	2.75E-06
1.6	13.33091	13.33091	9.83E-11	-1.54E-07
1.7	13.50586		9.82E-11	
1.8	13.69229	13.69229	9.52E-11	-3.85E-06
1.9	13.89034		9.99E-11	
2	14.1002	14.1002	9.16E-11	3.93E-06
2.1	14.32204		9.10E-11	
2.2	14.55604	14.55604	9.80E-11	-6.50E-07
2.3	14.80239		9.23E-11	
2.4	15.06128	15.06128	9.41E-11	2.95E-06
2.5	15.33292	15.33292	9.34E-11	-9.87E-07
2.6	15.6175	15.6175	9.01E-11	-5.48E-06
2.7	15.91521		9.42E-11	
2.8	16.22624	16.22625	9.56E-11	-6.17E-06
2.9	16.55079		9.41E-11	
3	16.88903	16.88903	8.96E-11	2.38E-07
3.1	17.24111		9.26E-11	
3.2	17.60719	17.60719	9.24E-11	-1.48E-06
3.3	17.98738		8.89E-11	
3.4	18.38179	18.38179	9.27E-11	6.07E-07
3.5	18.7905	18.7905	9.29E-11	-5.65E-06
3.6	19.21354	19.21354	8.91E-11	1.51E-06
3.7	19.65095		9.20E-11	
3.8	20.10269	20.10269	8.94E-11	4.55E-07
3.9	20.56873		9.09E-11	
4	21.04896	21.04897	9.22E-11	-1.17E-05
4.1	21.54327		8.81E-11	
4.2	22.0515	22.0515	-8.90E-11	5.43E-06
4.3	22.57345		-8.75E-11	
4.4	23.10889	23.10889	-9.06E-11	-4.43E-06
4.5	23.65754	23.65755	-9.44E-11	-1.84E-05
4.6	24.2191	24.21911	-1.00E-10	-1.31E-05
4.7	24.79324		-9.72E-11	
4.8	25.3796	25.3796	-8.84E-11	2.39E-06
4.9	25.97778		-9.03E-11	
5	26.58736	26.58737	-8.84E-11	-1.71E-05

Çizelge Ek 6.5 m=1 n=1 için Flammer (1957) Tablo 10 ile karşılaştırma

C	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	2.002	2.002	9.87E-11	-4.57E-07
0.2	2.007993	2.00799	9.33E-11	2.69E-06
0.3	2.017963		9.42E-11	
0.4	2.031883	2.03188	9.79E-11	3.47E-06
0.5	2.049716	2.04972	9.48E-11	-3.82E-06
0.6	2.071413	2.07141	9.84E-11	3.20E-06
0.7	2.096917		9.59E-11	
0.8	2.126159	2.12616	9.16E-11	-8.56E-07
0.9	2.159065		9.83E-11	
1	2.195548	2.19555	9.77E-11	-1.65E-06
1.1	2.235518		9.14E-11	
1.2	2.278876	2.278875	9.02E-11	4.77E-08
1.3	2.325515		9.47E-11	
1.4	2.375325	2.37533	9.58E-11	-5.19E-06
1.5	2.428191	2.42819	9.38E-11	1.01E-06
1.6	2.483994	2.48399	9.92E-11	4.16E-06
1.7	2.542612		9.19E-11	
1.8	2.603921	2.60392	9.24E-11	1.44E-06
1.9	2.667796		9.10E-11	
2	2.734111	2.734111	9.76E-11	2.58E-08
2.1	2.80274		9.25E-11	
2.2	2.873559	2.87356	9.58E-11	-8.61E-07
2.3	2.946445		9.77E-11	
2.4	3.021277	3.02128	9.81E-11	-2.71E-06
2.5	3.097938	3.097938	9.71E-11	-6.22E-08
2.6	3.176313	3.17631	9.48E-11	2.71E-06
2.7	3.25629		9.13E-11	
2.8	3.337764	3.337764	-9.74E-11	-6.40E-08
2.9	3.420632		-9.34E-11	
3	3.504796	3.504796	-9.79E-11	-3.32E-08
3.1	3.590162		-8.97E-11	
3.2	3.676643	3.676643	-9.86E-11	-1.40E-08
3.3	3.764155		-9.18E-11	
3.4	3.852619	3.85262	-9.65E-11	-7.23E-07
3.5	3.941962	3.94196	-9.11E-11	2.04E-06
3.6	4.032114	4.03212	-9.59E-11	-6.19E-06
3.7	4.123011		9.96E-11	
3.8	4.214593	4.2146	9.47E-11	-7.28E-06
3.9	4.306804		9.34E-11	
4	4.399593	4.3996	9.93E-11	-7.32E-06
4.1	4.492912		9.77E-11	
4.2	4.586716	4.58672	9.16E-11	-3.77E-06
4.3	4.680967		9.28E-11	
4.4	4.775625	4.77563	9.17E-11	-5.57E-06
4.5	4.870657	4.87066	9.95E-11	-3.11E-06
4.6	4.966032	4.96604	9.47E-11	-8.49E-06
4.7	5.061721		9.95E-11	
4.8	5.157698	5.1577	9.20E-11	-1.91E-06
4.9	5.253939		9.41E-11	
5	5.350422	5.35043	9.51E-11	-8.46E-06

Çizelge Ek 6.6 m=1 n=2 için Flammer (1957) Tablo 10 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	6.004285	6.00429	1.44E-11	-4.67E-06
0.2	6.017137	6.01714	9.11E-11	-3.36E-06
0.3	6.03854		9.21E-11	
0.4	6.068472	6.06847	9.61E-11	1.97E-06
0.5	6.1069	6.1069	9.35E-11	1.30E-07
0.6	6.153783	6.15378	9.78E-11	2.61E-06
0.7	6.209068		9.60E-11	
0.8	6.272697	6.2727	9.25E-11	-2.64E-06
0.9	6.3446		9.02E-11	
1	6.424699	6.4247	9.08E-11	-8.56E-07
1.1	6.512907		9.55E-11	
1.2	6.609128	6.60913	9.56E-11	-2.32E-06
1.3	6.713257		9.18E-11	
1.4	6.825183	6.82518	9.45E-11	3.43E-06
1.5	6.944785	6.94479	9.42E-11	-5.19E-06
1.6	7.071933	7.07193	9.14E-11	2.77E-06
1.7	7.206491		9.61E-11	
1.8	7.348315	7.44832	9.89E-11	-0.10029
1.9	7.497254		9.98E-11	
2	7.65315	7.65315	9.88E-11	-4.40E-07
2.1	7.815838		9.61E-11	
2.2	7.985149	7.98515	9.20E-11	-8.87E-07
2.3	8.160907		9.65E-11	
2.4	8.342929	8.34293	9.97E-11	-5.68E-07
2.5	8.531032	8.53104	9.13E-11	-7.84E-06
2.6	8.725025	8.72503	9.19E-11	-4.72E-06
2.7	8.924716		9.12E-11	
2.8	9.129907	9.1299	9.95E-11	7.12E-06
2.9	9.340401		9.63E-11	
3	9.555998	9.556	9.21E-11	-1.63E-06
3.1	9.776497		9.69E-11	
3.2	10.0017	10.00169	9.05E-11	7.00E-06
3.3	10.2314		-9.63E-11	
3.4	10.46539	10.46539	9.15E-11	3.59E-06
3.5	10.70349	10.70349	9.50E-11	1.84E-06
3.6	10.94549	10.94549	9.44E-11	4.14E-06
3.7	11.19121		9.27E-11	
3.8	11.44044	11.44043	9.00E-11	8.73E-06
3.9	11.693		9.66E-11	
4	11.94872	11.94872	9.17E-11	-6.53E-07
4.1	12.20741		9.22E-11	
4.2	12.4689	12.46889	9.05E-11	1.00E-05
4.3	12.73302		9.77E-11	
4.4	12.99962	12.99962	9.28E-11	3.69E-06
4.5	13.26854	13.26854	9.75E-11	1.60E-06
4.6	13.53963	13.53962	9.03E-11	1.14E-05
4.7	13.81275		9.30E-11	
4.8	14.08776	14.08774	9.50E-11	2.21E-05
4.9	14.36454		9.63E-11	
5	14.64296	14.64294	9.70E-11	1.83E-05

Çizelge Ek 6.7 m=1 n=3 için Flammer (1957) Tablo 10 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	12.00467	12.00467	-9.58E-11	-3.20E-06
0.2	12.01867	12.01867	-9.05E-11	-1.16E-06
0.3	12.04201		-9.13E-11	
0.4	12.0747	12.0747	-9.50E-11	1.12E-06
0.5	12.11675	12.11675	-9.19E-11	1.25E-07
0.6	12.16817	12.16817	-9.54E-11	1.39E-06
0.7	12.22898		-9.29E-11	
0.8	12.2992	12.2992	-9.86E-11	-4.97E-06
0.9	12.37883		-9.51E-11	
1	12.46792	12.46792	-9.45E-11	-4.67E-06
1.1	12.56646		-9.80E-11	
1.2	12.67449	12.67449	-9.66E-11	-3.30E-08
1.3	12.79201		-9.10E-11	
1.4	12.91905	12.91905	-9.18E-11	1.16E-06
1.5	13.05562	13.05562	-9.95E-11	-2.20E-06
1.6	13.20172	13.20172	-9.41E-11	2.45E-07
1.7	13.35736		-9.63E-11	
1.8	13.52255	13.52255	-9.62E-11	-5.13E-06
1.9	13.69726		-9.38E-11	
2	13.88149	13.88149	-9.97E-11	1.67E-08
2.1	14.07523		-9.33E-11	
2.2	14.27843	14.27843	-9.52E-11	-2.60E-06
2.3	14.49106		-9.54E-11	
2.4	14.71308	14.71309	-9.40E-11	-8.98E-06
2.5	14.94443	14.94443	-9.10E-11	-3.47E-08
2.6	15.18504	15.18505	-9.65E-11	-5.72E-06
2.7	15.43485		-9.04E-11	
2.8	15.69375	15.69375	-9.28E-11	-6.21E-08
2.9	15.96166		-9.39E-11	
3	16.23847	16.23847	-9.35E-11	2.87E-08
3.1	16.52405		-9.17E-11	
3.2	16.8183	16.818293	-9.90E-11	
3.3	17.12105		-9.42E-11	
3.4	17.43218	17.43218	1.00E-10	
3.5	17.75151	17.75150	-9.13E-11	
3.6	18.07889	18.0789	-9.30E-11	-9.34E-06
3.7	18.41414		-9.34E-11	
3.8	18.75708	18.75708	-9.24E-11	1.94E-06
3.9	19.10752		-9.01E-11	
4	19.46526	19.46527	-9.72E-11	-1.04E-05
4.1	19.8301		-9.20E-11	
4.2	20.20183	20.20184	-9.65E-11	-8.17E-06
4.3	20.58024		-9.96E-11	
4.4	20.96512	20.96512	-8.97E-11	-3.67E-06
4.5	21.35623	21.35624	9.62E-11	-8.96E-06
4.6	21.75337	21.75337	9.40E-11	-2.88E-06
4.7	22.1563		9.06E-11	
4.8	22.5648	22.5648	9.78E-11	-1.19E-07
4.9	22.97865		9.20E-11	
5	23.39761	23.39762	9.74E-11	-8.39E-06

Çizelge Ek 6.8 m=2 n=2 için Flammer (1957) Tablo 12 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	6.001428	6.00143	3.61E-11	-1.62E-06
0.2	6.005711	6.00571	9.78E-11	1.18E-06
0.3	6.012841		9.86E-11	
0.4	6.022808	6.02281	9.23E-11	-2.47E-06
0.5	6.035593	6.03559	9.93E-11	3.37E-06
0.6	6.051178	6.05118	9.29E-11	-1.65E-06
0.7	6.069538		9.05E-11	
0.8	6.090642	6.09064	9.62E-11	1.81E-06
0.9	6.114458		9.30E-11	
1	6.140949	6.14095	9.27E-11	-1.01E-06
1.1	6.170074		9.65E-11	
1.2	6.201789	6.20179	9.56E-11	-8.28E-07
1.3	6.236047		9.07E-11	
1.4	6.272796	6.2728	9.23E-11	-3.58E-06
1.5	6.311985	6.31199	9.09E-11	-4.92E-06
1.6	6.353557	6.35356	9.69E-11	-2.89E-06
1.7	6.397455		9.06E-11	
1.8	6.443618	6.44362	9.22E-11	-1.93E-06
1.9	6.491986		9.19E-11	
2	6.542495	6.5425	9.00E-11	-4.73E-06
2.1	6.595082		9.64E-11	
2.2	6.649683	6.64968	9.15E-11	2.53E-06
2.3	6.70623		9.52E-11	
2.4	6.76466	6.76466	9.79E-11	7.11E-08
2.5	6.824906	6.82491	9.93E-11	-3.92E-06
2.6	6.886903	6.8869	9.97E-11	2.78E-06
2.7	6.950585		9.90E-11	
2.8	7.015888	7.01589	9.74E-11	-2.40E-06
2.9	7.082747		9.48E-11	
3	7.151101	7.1511	9.15E-11	5.28E-07
3.1	7.220886		9.74E-11	
3.2	7.292042	7.29204	9.25E-11	2.10E-06
3.3	7.36451		9.69E-11	
3.4	7.438232	7.43823	9.06E-11	2.38E-06
3.5	7.513152	7.51315	9.35E-11	2.09E-06
3.6	7.589215	7.58921	9.59E-11	4.76E-06
3.7	7.666367		9.77E-11	
3.8	7.744558	7.74456	9.89E-11	-1.55E-06
3.9	7.823739		9.95E-11	
4	7.903861	7.90386	9.95E-11	9.70E-07
4.1	7.984879		-9.19E-11	
4.2	8.066748	8.06675	-9.87E-11	-1.84E-06
4.3	8.149427		-9.53E-11	
4.4	8.232875	8.23288	-9.21E-11	-4.69E-06
4.5	8.317054	8.31705	-9.94E-11	4.30E-06
4.6	8.401927	8.40193	-9.64E-11	-3.54E-06
4.7	8.487457		-9.35E-11	
4.8	8.573613	8.57361	-9.09E-11	3.49E-06
4.9	8.660362		-9.87E-11	
5	8.747674	8.74767	-9.62E-11	4.42E-06

Çizelge Ek 6.9 m=2 n=3 için Flammer (1957) Tablo 12 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	12.00333	12.00333	1.28E-11	3.11E-06
0.2	12.01333	12.01333	9.95E-11	-2.57E-07
0.3	12.02998		9.05E-11	
0.4	12.05328	12.05328	9.42E-11	-4.08E-06
0.5	12.08319	12.08319	9.14E-11	3.24E-06
0.6	12.11971	12.11971	9.52E-11	-3.11E-07
0.7	12.1628		9.30E-11	
0.8	12.21242	12.21242	9.92E-11	-2.72E-06
0.9	12.26853		9.62E-11	
1	12.3311	12.3311	9.62E-11	1.51E-06
1.1	12.40007		9.06E-11	
1.2	12.47538	12.47538	9.02E-11	3.89E-06
1.3	12.55699		9.56E-11	
1.4	12.64481	12.64481	9.78E-11	-2.65E-06
1.5	12.73878	12.73878	9.70E-11	3.48E-06
1.6	12.83884	12.83884	9.36E-11	-3.85E-07
1.7	12.9449		9.79E-11	
1.8	13.05688	13.05688	9.02E-11	-2.72E-06
1.9	13.17469		9.07E-11	
2	13.29825	13.29825	9.94E-11	4.75E-07
2.1	13.42746		9.66E-11	
2.2	13.56223	13.56223	9.25E-11	-1.77E-06
2.3	13.70245		9.70E-11	
2.4	13.84802	13.84802	9.04E-11	4.49E-06
2.5	13.99885	13.99885	9.25E-11	-4.61E-06
2.6	14.15481	14.1548	9.37E-11	4.60E-06
2.7	14.31579		9.38E-11	
2.8	14.48169	14.48169	9.29E-11	2.49E-06
2.9	14.65239		9.12E-11	
3	14.82778	14.82778	9.87E-11	-1.80E-06
3.1	15.00773		9.51E-11	
3.2	15.19213	15.19213	9.08E-11	-4.23E-06
3.3	15.38085		9.57E-11	
3.4	15.57378	15.57378	8.99E-11	1.41E-06
3.5	15.7708	15.7708	9.32E-11	-1.35E-06
3.6	15.97178	15.97178	9.58E-11	1.28E-06
3.7	16.17661		9.78E-11	
3.8	16.38516	16.38516	9.91E-11	4.89E-08
3.9	16.59732		9.97E-11	
4	16.81296	16.81296	9.96E-11	-1.53E-06
4.1	17.03197		9.87E-11	
4.2	17.25423	17.25423	9.72E-11	9.23E-07
4.3	17.47963		9.50E-11	
4.4	17.70805	17.70805	9.22E-11	1.91E-06
4.5	17.93939	17.93939	9.91E-11	-4.21E-06
4.6	18.17352	18.17352	9.49E-11	2.64E-06
4.7	18.41035		9.02E-11	
4.8	18.64978	18.64978	9.52E-11	-4.16E-06
4.9	18.89169		9.98E-11	
5	19.13598	19.13598	9.31E-11	2.02E-06

Çizelge Ek 6.0 m=3 n=3 için Flammer (1957) Tablo 12 ile karşılaştırma

c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
0.1	12.00111	12.00111	1.33E-11	1.01E-06
0.2	12.00444	12.00444	9.28E-11	2.85E-06
0.3	12.00999		9.37E-11	
0.4	12.01775	12.01775	9.74E-11	2.29E-06
0.5	12.02772	12.02772	9.44E-11	-4.37E-06
0.6	12.03987	12.03987	9.81E-11	1.32E-06
0.7	12.05421		9.57E-11	
0.8	12.07071	12.07071	9.16E-11	-4.07E-06
0.9	12.08935		9.84E-11	
1	12.11013	12.11013	9.82E-11	-3.42E-06
1.1	12.13301		9.22E-11	
1.2	12.15797	12.15797	9.14E-11	1.99E-07
1.3	12.18499		9.66E-11	
1.4	12.21404	12.21404	9.84E-11	2.70E-06
1.5	12.2451	12.2451	9.73E-11	-3.67E-06
1.6	12.27812	12.27812	9.35E-11	1.80E-06
1.7	12.31309		9.75E-11	
1.8	12.34996	12.34996	9.96E-11	3.13E-07
1.9	12.38871		9.97E-11	
2	12.42929	12.42929	9.82E-11	-4.59E-07
2.1	12.47167		9.52E-11	
2.2	12.51582	12.51582	9.09E-11	2.93E-06
2.3	12.5617		9.53E-11	
2.4	12.60926	12.60926	9.86E-11	-2.85E-07
2.5	12.65847	12.65847	9.09E-11	-7.46E-08
2.6	12.70929	12.70929	9.21E-11	-1.37E-06
2.7	12.76168		9.24E-11	
2.8	12.81559	12.81559	9.18E-11	1.43E-06
2.9	12.871		9.05E-11	
3	12.92785	12.92785	9.84E-11	-3.73E-06
3.1	12.98611		9.54E-11	
3.2	13.04573	13.04573	9.19E-11	9.99E-07
3.3	13.10668		9.78E-11	
3.4	13.16893	13.16893	9.29E-11	-4.21E-06
3.5	13.23242	13.23242	9.75E-11	-4.10E-06
3.6	13.29712	13.29712	9.16E-11	-3.94E-06
3.7	13.36299		9.50E-11	
3.8	13.42999	13.42999	9.81E-11	4.47E-06
3.9	13.4981		9.05E-11	
4	13.56726	13.56726	9.25E-11	2.72E-06
4.1	13.63745		9.40E-11	
4.2	13.70863	13.70863	9.51E-11	3.49E-06
4.3	13.78077		9.58E-11	
4.4	13.85383	13.85383	9.60E-11	1.27E-06
4.5	13.92778	13.92778	9.58E-11	2.76E-06
4.6	14.00259	14.00259	9.53E-11	3.57E-06
4.7	14.07823		9.44E-11	
4.8	14.15467	14.15467	9.31E-11	1.17E-06
4.9	14.23188		9.15E-11	
5	14.30983	14.30983	9.97E-11	-1.16E-06

Çizelge Ek 6.11 $m=1$ için Flammer (1957) Tablo 11'deki seçilmiş değerler ile karşılaştırma

n	c	Ayırma-Sabiti	Flammer	Hata Fonk.	Hata F. (Flammer)
5	1.2	30.70337	30.70337	-9.68E-11	-1.89E-08
5	2.5	33.07878	33.07878	-9.69E-11	-5.21E-08
5	3.2	35.07804	35.07804	-9.49E-11	-6.07E-08
7	1.2	56.7113	56.7113	-9.08E-11	8.17E-08
7	2.5	59.1027	59.1027	-9.14E-11	-3.87E-08
7	3.2	61.10433	61.10433	-9.80E-11	9.46E-09
9	1.2	90.71464	90.71464	-9.84E-11	-4.46E-08
9	2.5	93.11169	93.11169	-9.03E-11	-7.28E-08
9	3.2	95.1117	95.1117	-9.10E-11	-3.12E-08
11	1.2	132.7164	132.7164	-9.57E-11	3.08E-07
11	2.5	135.1161	135.1161	-9.81E-11	-1.17E-07
11	3.2	137.1148	137.1148	-9.11E-11	-1.13E-07
13	1.2	182.7174	182.7174	-9.22E-11	-4.18E-07
13	2.5	185.1186	185.1186	-9.48E-11	-1.33E-07
13	3.2	187.1164	187.1164	-9.90E-11	-1.48E-07
15	1.2	240.718	240.718	-9.20E-11	-1.65E-07
15	2.5	243.1202	243.1202	-9.49E-11	1.21E-07
15	3.2	245.1174	245.1174	-9.98E-11	3.63E-07
17	1.2	306.7184	306.7184	-9.19E-11	-1.70E-08
17	2.5	309.1213	309.1213	-9.49E-11	-7.81E-09
17	3.2	311.118	311.118	-9.03E-11	-9.75E-08
19	1.2	380.7187	380.7187	-9.98E-11	-3.43E-07
19	2.5	383.122	383.122	-9.27E-11	-1.16E-07
19	3.2	385.1184	385.1184	-9.83E-11	1.33E-07

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	16.12.1968	
Doğum Yeri	Kıbrıs	
Lise	1980-1986	Lapta Yavuzlar Lisesi
Lisans	1986-1991	Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1991-1994	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Haberleşme Programı
Doktora	1994-2000	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Haberleşme Programı
Çalıştığı Kurum	1992-	Y.T.Ü. Elektronik ve Haberleşme Müh. Bölümü, Araştırma Görevlisi (kadro F.B.E.'nde)