T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU SİMETRİK JEODEZİK KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜNDE STOKASTİK MODEL TASARIMI

Süreyya Özgür UYGUR

DOKTORA TEZİ
Harita Mühendisliği Anabilim Dalı
Geomatik Programı

Danışman
Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

Temmuz, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU SİMETRİK JEODEZİK KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜNDE STOKASTİK MODEL TASARIMI

Süreyya Özgür UYGUR tarafından hazırlanan tez çalışması 28.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Harita Mühendisliği Anabilim Dalı Geomatik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cüneyt AYDIN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Cüneyt AYDIN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _______________

Prof. Dr. Doğan Uğur ŞANLI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _______________

Prof. Dr. Orhan AKYILMAZ, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _______________

Prof. Dr. Uğur DOĞAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _______________

Prof. Dr. Niyazi ARSLAN, Üye
Çukurova Üniversitesi _______________

Danışmanım Prof. Dr. Cüneyt AYDIN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Üç Boyutlu Simetrik Jeodezik Koordinat Dönüşümünde Stokastik Model Tasarımı başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Süreyya Özgür UYGUR

İmza

Bu zorlu süreçte yanımda olan başta ailem olmak üzere
tüm sevdiklerime ithafen...

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması danışmanım ve değerli hocam Prof. Dr. Cüneyt AYDIN'ın yürütücülüğünde gerçekleştirilmiştir. Çalışma süresince bilgisini, ilgisini ve desteğini benden esirgemeyen sayın hocama, özelikle de gösterdiği sonsuz sabır için, teşekkürü bir borç bilirim. Yine bilgilerini benimle paylaşmaktan hiç bir zaman çekinmeyen ve her daim desteklerini hissettiğim değerli hocalarım ve tez izleme jüri üyelerim Prof. Dr. Doğan Uğur ŞANLI'ya ve Prof. Dr. Orhan AKYILMAZ'a teşekkürü bir borç bilirim. Son olarak, ihtiyacım olan her an desteğini ve yardımlarını benden esirgemeyen Arş. Gör. Özge GÜNEŞ'e en içten duygularımla teşekkür ederim.

Süreyya Özgür UYGUR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$\mathbf{P}$	Ağırlık matrisi
H_k	Alternatif hipotez
μ	Bağıl ölçek çarpanı
$\mathbf{L}_k$	Bağıl ölçek çarpanları matrisi
$\mathbf{J}_m$	Başlangıç sistemi ağırlık merkezi koordinatları ile oluşturulan katsayılar matrisinin alt matrisi
$\mathbf{X}_1$	Başlangıç sistemi koordinat vektörü
$\mathbf{Q}_1$	Başlangıç sistemi koordinatlarının ağırlık katsayılar matrisi
$\mathbf{C}_1$	Başlangıç sistemi koordinatlarının kovaryans matrisi
$\mathbf{e}_1$	Başlangıç sistemi koordinatlarının rasgele hata vektörü
σ_1^2	Başlangıç sistemi koordinatlarının varyans bileşeni
$\mathbf{X}_{1,c}$	Başlangıç sisteminin ağırlık merkezinin koordinatları
n_x	Başlangıç ve hedef sistemlerinin varyans çarpanları oranı
δq_i	Bilinmeyen kuaterniyon elemanı
σ_0^2	Bilinmeyen varyans bileşeni (sonsal varyans)
$\mathbf{I}$	Birim matris
$\mathbf{H}$	Blok-köşegen matris
$\mathbf{\Theta}$	Eğim parametreleri (afinite) matrisi
$\mathbf{U}$	Elemanları 3×3 boyutlu birim matristen oluşan $3n \times 3$ boyutlu matris
φ	Euler dönüklük açısı
c_i	Euler dönüklük açısının kosinüsü
s_i	Euler dönüklük açısının sinüsü
$\boldsymbol{\gamma}$	Hata vektörü

$\Delta\mathbf{X}_c$	Hedef sistemi ağırlık merkezi koordinat vektörünün bilinen değeri ile kestirim değerinin farkı
$\mathbf{X}_2$	Hedef sistemi koordinat vektörü
$\mathbf{Q}_2$	Hedef sistemi koordinatlarının ağırlık katsayılar matrisi
$\mathbf{C}_2$	Hedef sistemi koordinatlarının kovaryans matrisi
$\mathbf{e}_2$	Hedef sistemi koordinatlarının rasgele hata vektörü
σ_2^2	Hedef sistemi koordinatlarının varyans bileşeni
$\mathbf{X}_{2,c}$	Hedef sisteminin ağırlık merkezinin koordinatları
$\mathbf{F}_m$	Jacobi matrisi
$\mathbf{E}$	Katsayılar matrisine ilişkin hata matrisi
$\mathbf{J}$	Katsayılar matrisinin alt matrisi
$\mathbf{y}$	Kapanma veya küçültülmüş gözlem vektörü
$\hat{}$	Kestirim değeri
∂	Kısmi türev
χ^2	Ki-Kare Dağılımı
σ_p	Konum hatası
Δ	Koordinat farkı
ρ	Korelasyon
$\otimes$	Kronecker çarpımı
q_i	Kuaterniyon elemanı
$\mathbf{q}$	Kuaterniyon vektörü
$\mathbf{q}_p$	Kuaterniyonlar cinsinden konum vektörü
$\mathbf{q}^*$	Kuaterniyonun eşleniği
$\|\|q\|\|$	Kuaterniyonun normu
$\mathbf{x}_1$	Küçültülmüş başlangıç sistemi koordinatları
$\mathbf{J}_c$	Küçültülmüş koordinatlar ile oluşturulan katsayılar matrisinin alt matrisi
λ	Lagrange çarpanı
n	Nokta sayısı
$\sim N$	Normal dağılım

$\mathbf{R}$	Ortogonal dönüklük matrisi
k	Ölçek çarpanı
$\mathbf{K}$	Ölçek çarpanları matrisi
$\mathbf{\Lambda}$	Ölçek çarpanları matrisi ile dönüklük matrisinin çarpımı
η	Ölçeklendirme katsayısı
$\mathbf{R}_k$	Ölçekli dönüklük matrisi
m	Örneklem sayısı
$\mathbf{t}$	Öteleme parametreleri vektörü
$\Delta\alpha$	Parametre kestirimindeki hatanın olasılık cinsinden ifadesi
$\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$	Parametre kestirimlerine ilişkin kovaryans matrisi
$\boldsymbol{\beta}$	Parametre vektörü
$\boldsymbol{\xi}$	Parametre vektörünün dönüklük ve ölçek parametrelerini içeren alt vektörü
f	Serbestlik derecesi
H_0	Sıfır hipotezi
v	Sıfır hipotezinin gerçeklendiği örneklem sayısı
$\mathbf{B}$	Yaklaşık değer belirleme probleminde geçen katsayılar matrisi
$\boldsymbol{\zeta}$	Yaklaşık ölçek çarpanları parametre vektörü
T	Test büyüklüğü
$\mathbf{M}$	Toplam dönüşüm matrisi
u	Uniform dağılımlı rasgele sayı
$\mathbf{M}_0$	Varyans bileşen kestirimi algoritmasında geçen ortogonal matris
θ	Varyans bileşenleri ile yaklaşık değerleri arasındaki varyans çarpanları oranı
$\sim$	Yaklaşık değer
α	Yanılma payı

KISALTMA LİSTESİ

BIQUE	Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation
CBS	Coğrafi Bilgi Sistemleri
EKK	En Küçük Kareler
EIV	Errors in Variables
GNSS	Global Navigation Satellite System
GOCE	Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
IAUE	Iterative Almost Unbiased Estimation
IMU	Inertial Measurement Unit
ITU_GGC16	Statik Gravite Alanı Modeli
KOH	Karesel Ortalama Hata
LS-VCE	Least Squares-Variance Components Estimation
MINQUE	Minimum Quadratic Unbiased Estimation
REML	Restricted Maximum Likelihood Estimator
SS	Standart Sapma
TLS	Total Least Squares
VBK	Varyans Bileşen Kestirimi
WTLS	Weighted Total Least Squares
YPO	Yanlış Prediksiyon Olasılığı

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

ÖZET

Üç Boyutlu Simetrik Jeodezik Koordinat Dönüşümünde Stokastik Model Tasarımı

Süreyya Özgür UYGUR

Harita Mühendisliği Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

Koordinat dönüşümü probleminde iki sistem arasındaki matematiksel ilişki, dönüşüm parametreleri ile tanımlanır. Bu parametrelerin belirlenmesi için izlenen klasik yaklaşım (ağırlıklı) en küçük kareler (EKK) dengelemesidir. Eğer başlangıç ve hedef sistem koordinatlarının her ikisi de rasgele hatalar ile yüklü ise, başlangıç sistemi hatalarının göz ardı edilmesi, bazı özel durumlar dışında, yanıltıcı sonuçlar elde edilmesine neden olur. Bu sebeple dönüşüm probleminin çözümü, tüm koordinat hatalarının dikkate alındığı simetrik koordinat dönüşümü altında ele alınmalıdır. Simetrik koordinat dönüşümünün çözümü toplam EKK yöntemi olarak adlandırılır. Bu yöntem, doğrusal olmayan bir denklem sisteminin iteratif çözümünü gerektirmektedir. Dolayısıyla, dönüşüm parametrelerinin iyi belirlenmiş yaklaşık değerlerine gereksinim duyulur. Dönüşüm parametrelerinin büyük olması durumunda, dönüklük matrisinin Euler açıları ile parametrizasyonu, başlangıç değeri belirleme problemi başta olmak üzere nümerik açıdan çeşitli zorluklara sebep olabilir. Bu nedenle, dönüklüklerin farklı bir şekilde ifade edildiği daha genel bir çözüme ihtiyaç duyulur.

Bu çalışma kapsamında, üç boyutlu asimetrik ve simetrik koordinat dönüşümü problemlerinin kuaterniyon tabanlı EKK yöntemi ile çözümü ele alınmıştır. Dönüklüklerin kuaterniyonlar ile gösteriminin klasik Euler açılarına göre avantajları ortaya konmuş ve algoritmanın performansı oldukça geniş bir örneklemde test edilmiştir. Başlangıç sistemi koordinat hatalarının ihmal edilmesinin parametre kestirimine etkileri irdelenmiştir. Ayrıca, her iki sistem koordinatlarının da farklı kaynaklardan gelmesi durumunda problem, varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik koordinat dönüşümü altında ele alınmış ve varyans bileşen kestirimi (VBK) algoritmasının başarısı irdelenmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre, her iki sistem koordinatları da hatalı iken başlangıç sistemi koordinat hatalarını ihmal etmek çözümlerin biaslı olmasına sebep olmaktadır. Bu bias, başlangıç sistemi koordinatlarının doğruluğu hedef sistem koordinatlarına göre arttıkça azalmaktadır. Başlangıç sistemi koordinatları hedef sistem koordinatlarından en az 10 kat daha doğru ise, asimetrik ve simetrik koordinat dönüşüm algoritmaları ile özdeş parametre kestirimleri elde edilir. Benzer biçimde, başlangıç sistemi koordinatlarının doğruluğu hedef sistem koordinatlarına göre arttıkça VBK'nin başarı oranı azalmaktadır. Bu durumda (aslında her durumda), nokta sayısının artması VBK algoritmasının başarı oranını arttırmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Üç boyutlu koordinat dönüşümü, simetrik koordinat dönüşümü, benzerlik dönüşümü, afin dönüşümü, Gauss-Helmert modeli, varyans bileşen kestirimi, kuaterniyon

ABSTRACT

Stochastic Model Design In Three Dimensional Symmetric Geodetic Coordinate Transformation

Süreyya Özgür UYGUR

Department of Geomatic Engineering
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

In coordinate transformation problem, the mathematical relation between two systems is defined by transformation parameters. The classical approach in order to determine these parameters is the (weighted) least-squares solution. If the start and target system coordinates are both burdened with random errors, then ignoring the start system errors lead to misleading results. Therefore, the solution of the transformation problem should be treated as symmetric coordinate transformation which considers all the coordinate errors. The solution of the symmetric coordinate transformation is called the method of total least-squares. This method requires an iterative solution of a nonlinear system of equations. Therefore, good initial approximate values of the transformation parameters are needed. However, in case of large transformation parameters, the Euler parameterization of the rotation matrix may cause various numerical difficulties, particularly for initial value determination problem. Thus, a more general solution is needed where the rotations are distinctly represented.

In this study, a quaternion based LS solution of the asymmetric and symmetric transformation problems has been discussed. Advantages of the representation of rotations with quaternions over classical Euler angles have been revealed and the performance of the algorithm has been tested on a very large sample size. The effect of ignoring the start system coordinate errors on the parameter estimation has been examined. Moreover, if the coordinates of both systems come from different sources, then the problem is treated as symmetric coordinate transformation with unknown variance components and the performance of the variance component estimation (VCE) algorithm has also been examined.

Findings show that if both system coordinates are erroneous, then neglecting the start system coordinate errors causes biased solutions. The bias decreases as the accuracy of the start system coordinates increases w.r.t the target system coordinates. If the start system coordinates are at least ten times more accurate than the target system coordinates, then both symmetric and asymmetric coordinate transformation methods result in equivalent parameter estimations. Similarly, if the accuracy of the start system coordinates increases w.r.t the target system coordinates, the success rate of the VCE algorithm decreases. In this case (actually in all the cases), increasing the number of the points increases the success rate of the VCE algorithm.

Keywords: Three dimensional coordinate transformation, symmetric coordinate transformation, similarity transformation, affine transformation, Gauss-Helmert model, variance component estimation, quaternion

---

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Koordinat dönüşümü, koordinatları her iki sistemde de bilinen eşlenik noktalar yardımıyla hesaplanan parametreler kullanılarak, bir referans çerçevesindeki koordinatların diğer bir referans çerçevesine dönüştürülmesi işlemidir. Koordinat dönüşümü işlemi çoklu-sistem konum bilgisinin bir bütün olarak analizine olanak sağlaması nedeniyle, afin ve benzerlik dönüşümü gibi 3 boyutlu (3B) kartezyen koordinat dönüşümü modelleri çok sayıda bilimsel alanda ve mühendislik çalışmasında kullanılmaktadır [1]. Bunlarla sınırlı olmamakla beraber, 3B koordinat dönüşümü modellerinin sıklıkla kullanıldığı uygulama alanlarına ilişkin çeşitli örnekler aşağıda verilmektedir:

- Jeodezik çalışmalar:
  - Koordinatların bir referans çerçevesinden başka bir referans çerçevesine dönüştürülmesi [2, 3]
  - Ulusal GNSS (Global Navigation Satellite System) ağları ile klasik yersel ağlar arasında koordinat dönüşümü uygulamaları [4, 5]
  - Deformasyon analizi çalışmaları [6]
- Fotogrametrik çalışmalar:
  - Hava fotoğraflarının iç ve dış yöneltme elemanlarının belirlenmesi [7]
- Coğrafi bilgi sistemi (CBS) çalışmaları:
  - Yersel lazer tarayıcıların kalibrasyonu, çoklu nokta bulutu verisinin birleştirilmesi ve jeodezik referans çerçevesinde tanımlanması [8, 9]
  - LiDAR, GNSS/IMU ve kamera sistemleri gibi çeşitli sensörleri içeren mobil haritalama sistemlerinin kalibrasyonu [10, 11]
- Uzaktan algılama ve görüntü işleme çalışmaları

  - Yüksek çözünürlüklü uydu görüntülerinin (sensör) yöneltme elemanlarının belirlenmesi [12]

- Bilgisayar görüntüleme ve robotik navigasyon çalışmaları [13, 14]
- Tıbbi görüntüleme ve radyocerrahi çalışmaları [15–18]
- Hava ve deniz navigasyonunda, uydu konum belirleme çalışmalarında kullanılan manyetometrelerin kalibrasyonu [19]
- Uydu yönelimlerinin belirlenmesi [20]

Koordinat dönüşümleri, uygun modeller ve parametreler aracılığıyla gerçekleştirilir. Uygulanan dönüşüm modeline bağlı olarak dönüşümlerin obje ve ağlar üzerindeki etkisi farklılık göstermektedir. Jeodezik çalışmalarda basit bir konum değişiminden, şekil ve boyut değişimine kadar değişen farklı etkilere sahip çeşitli koordinat dönüşümü modelleri kullanılmaktadır. Bunların en önemlileri şu şekilde listelenebilir [4, 21]:

- 3 parametreli ($3p$) dönüşüm modeli
- 6 parametreli ($6p$) dönüşüm modeli
- 7 parametreli ($7p$) dönüşüm modeli
- 8 parametreli ($8p$) dönüşüm modeli
- 9 parametreli ($9p$) dönüşüm modeli
- 12 parametreli ($12p$) dönüşüm modeli

3B koordinat dönüşümü uygulamalarında kullanılan en genel model; x, y, z koordinat eksenlerinin her biri için bir öteleme, bir dönüklük, bir ölçek ve bir afinite (eğim) parametresinin söz konusu olduğu $12p$ afin dönüşüm modelidir [22–24]. Koordinat eksenleri için eğim parametreleri söz konusu değilse, $9p$ afin dönüşüm modeli elde edilir [4, 25]. Bu iki modele ek olarak, Fraser ve Yamakawa [12] tarafından yüksek çözünürlüklü uydu görüntüleri için sensör konumlandırma işleminde kullanılan $8p$ koordinat dönüşüm modeli de bir tür afin dönüşümü olarak ele alınmaktadır. Bu modelde dönüşüm parametreleri; iki öteleme, üç dönüklük, iki ölçek ve bir eğim parametresinden oluşmaktadır. Üç öteleme ve üç dönüklük parametresine ek olarak biri yatay bileşenler, diğeri ise düşey bileşen için olmak üzere toplam iki ölçek parametresinin öngörüldüğü benzer bir $8p$ dönüşüm modeli Andrei [4] tarafından jeodezik ağlara uyarlanmıştır. Afin dönüşümü, ortogonal olmayan bir dönüşüm olması nedeniyle, konum ve hacim değişimlerine ek olarak şekil değişimine de olanak sağlamaktadır. Örneğin bir küp için afin dönüşümü uygulanacak olursa, dönüşüm sonrası küp yerine bir paralel eş yüzlü elde edilecektir [26]. Bu sebeple düzensiz deforme olmuş sistemler için afin modelinin kullanılması daha uygundur [23, 27].

Özellikle jeodezik çalışmalarda sıklıkla kullanılan bir diğer dönüşüm modeli, her üç koordinat ekseni boyunca ortak bir ölçek parametresinin öngörüldüğü 3B benzerlik dönüşümüdür. Açı (dolayısıyla şekil) koruyan özelliği nedeniyle konform bir dönüşüm olan 3B benzerlik dönüşümü, jeodezide Helmert ya da $7p$ dönüşüm olarak da isimlendirilir [22]. Eğer iki sistem arasında herhangi bir ölçek bozulması söz konusu değilse, dönüşüm işlemini gerçekleştirmek için 6 parametre yeterlidir [28]. Benzerlik dönüşümünün özel bir durumu olan böylesi dönüşümler (6 p ve $3p$ dönüşüm modelleri), ortogonal ya da rijit dönüşüm olarak isimlendirilir [4, 22].

Dönüşüm parametrelerinin en küçük kareler bağlamında -dengelemeli çözüm ile- belirlenebilmesi için koordinatları her iki sistemde de bilinen kontrol noktalarına ihtiyaç duyulur. Çözüm için izlenen en genel yaklaşım, klasik (ağırlıklı) en küçük kareler (EKK) dengelemesidir [29]. Bu yöntemde yalnızca gözlenen büyüklükler, diğer bir deyişle hedef sistemi koordinatlarının hataları göz önüne alınmaktadır. Bu nedenle literatürde, asimetrik çözüm ya da asimetrik dönüşüm modeli olarak da isimlendirilir [24, 30]. Bununla beraber, eğer her iki sistem koordinatları da hatalı ise, bu hataları göz ardı etmek yanıltıcı sonuçlar elde edilmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla problemin çözümü, her iki sistem koordinatlarının da hatalarının göz önünde bulundurulduğu, simetrik koordinat dönüşümü altında ele alınmalıdır [31].

Simetrik koordinat dönüşümü probleminin çözümü toplam EKK yöntemi ile gerçekleştirir [32]. Bu yöntem jeodezide ilk kez Felus [33] tarafından kullanılmış ve koordinat dönüşümü problemine ilk kez Akyılmaz [34] tarafından uyarlanmıştır. Schaffrin ve Wieser [35] tarafından ağırlıklı toplam EKK yönteminin ortaya konması ve stokastik modeldeki kısıtlamaların ortadan kalkması ile beraber, konu ile ilgili oldukça fazla sayıda çalışma ortaya çıkmıştır [36–49]. Literatürdeki farklı ağırlıklı toplam EKK kareler çözümleri birbiri ile özdeş sonuçlar vermektedir [50]. Benzer biçimde, Aydın vd. [51] tarafından toplam EKK çözüm yöntemleri,

- Genelleştirilmiş normal denklem tabanlı toplam EKK yöntemi,
- EKK tabanlı toplam EKK yöntemi ve
- Geliştirilmiş toplam EKK yöntemi

olmak üzere, üç farklı grupta toplanmış ve her üç yöntem ile özdeş parametre kestirimleri elde edildiği ortaya konmuştur. Diğer taraftan Nietzel [52], problemi doğrusal olmayan Gauss-Helmert modeli altında ele alıp, bu modelin iteratif EKK yöntemi ile çözümünün toplam EKK çözüm yöntemlerine denk olduğunu göstermiştir [53]. Bu yöntemlerin dışında simetrik koordinat dönüşümü problemi, detayları Ghilani ve Wolf [54] tarafından verilen genel EKK çözümü altında da ele alınabilir.

Toplam EKK çözüm yöntemleri doğrusal olmayan bir denklem sisteminin çözümünü gerektirir. Dolayısıyla çözüm iteratif olarak gerçekleştirilir. Koordinat dönüşümü problemi için de çözüm yönteminden bağımsız olarak benzer bir doğrusalsızlık söz konusudur [25]. Bunun temel sebebi, klasik koordinat dönüşüm problemlerinde dönüklük matrisinin dönüklük açılarının doğrusal olmayan trigonometrik fonksiyonları şeklinde tanımlanmasıdır. Dönüklük açılarının diferansiyel anlamda küçük olması durumunda, dönüşüme ilişkin matematiksel model basitleştirilerek jeodezik literatürde sıklıkla kullanılan (Bursa-Wolf vb.) doğrusal dönüşüm modelleri elde edilir [4, 5, 55–64]. Ancak, bu dönüşümler genel bir çözüme karşılık gelmez. Doğrusal olmayan koordinat dönüşümü problemlerinin çözümü iteratif olarak gerçekleştirilir. Dolayısıyla, dönüşüm parametrelerinin iyi belirlenmiş yaklaşık değerlerine ihtiyaç duyulur. Dönüklük açılarının büyük olduğu durumlarda, Euler dönüklük açılarının yaklaşık değerlerinin belirlenmesi nümerik açıdan kolay değildir. Bu nedenle, üç boyutlu koordinat dönüşümü problemlerinde dönüklüklerin ele alınış biçimi oldukça önemlidir. Klasik Euler parametrizasyonunun dezavantajları nedeniyle birçok alanda dönüklüklerin gösteriminde birim kuaterniyonlar, Euler dönüklük açılarına tercih edilmektedir. Dönüklüklerin birim kuaterniyonlar ile ifadesi birçok koordinat dönüşümü çalışmasında ele alınmıştır. [13, 24, 25, 65–70]. Özellikle Mercan vd. [70]'te verilen kuaterniyon tabanlı dönüşüm algoritması, hem simetrik hem de asimetrik 3B koordinat dönüşümü problemlerinin çözümünde önemli üstünlüklere sahiptir. Bunlardan en önemlisi, iteratif çözüm için dönüşüm parametrelerinin yaklaşık değerlerine gereksinim duyulmamasıdır. Uygur vd. [24], Mercan vd. [70] tarafından ortaya konan çözümden Euler dönüklük açılarının ve standart sapmalarının nasıl elde edileceğini göstermiştir. Uygur vd. [25] ise, kuaterniyon tabanlı dönüşüm algoritmasını $9p$ (a)simetrik afin dönüşümüne uyarlamıştır.

Yukarıda bahsedilen iteratif dengelemeli çözümler dışında, Grafarend ve Awange [71] tarafından ağırlıklı procrustes çözümü ve Shen vd. [65] tarafından kuaterniyon tabanlı çözüm ortaya konmuştur. Asimetrik dönüşüm probleminin çözümünde kullanılan bu çözümler ile dönüşüm parametreleri belirlenirken herhangi bir doğrusallaştırma işlemi söz konusu değildir. Bu kapalı-form (analitik) yaklaşımlar, çözüm için tekil değer veya özdeğer-özvektör ayrıştırması algoritmalarını kullanırken stokastik modele ilişkin kısıtlamalar söz konusudur. Benzer analitik yaklaşımlar, Han [72], Zeng [73], Ligas ve Prochniewicz [30], Awange vd. [74] ve Paláncz vd. [75] tarafından da ortaya konmuştur. Bununla beraber, simetrik koordinat dönüşümüne ilişkin kapalı-form yaklaşımları konu alan çalışmalar, asimetrik dönüşüme ilişkin çalışmalara oranla oldukça az sayıdadır [69, 76].

Koordinat dönüşümü probleminin çözümünde genel düşünce, çözüme ilişkin göz önüne alınan stokastik yapının doğru olduğudur. Bu durumda her iki sistem için tek bir varyans bileşeni öngörülür ve simetrik koordinat dönüşümü algoritmaları doğrudan kullanılarak dönüşüm parametreleri belirlenir. Ancak, matematiksel modelde geçen gözlemler farklı kaynaklardan (farklı dengelemelerden ya da ölçme yöntemlerinden) elde edilmiş olabilir. Bu durumda problem, en uygun parametre kestirimi için, varyans bileşenlerinin de bilinmeyen olduğu simetrik koordinat dönüşümü altında ele alınmalıdır.

Heterojen ölçü gruplarının bir dengeleme modelinde birleştirilmesi, hem fonksiyonel modelde hem de stokastik modelde ele alınması gereken bir problemdir. Bu amaçla, ilgili (heterojen) ölçü gruplarına ilişkin (ko)varyans parametreleri de dengeleme hesabında bilinmeyen olarak alınır ve diğer parametreler ile birlikte kestirilirler. Stokastik modele ilişkin bilinmeyen parametrelerin kestirimi için aşağıdaki varyans bileşen kestirimi (VBK) yöntemleri kullanılır:

- Helmert [77]
- IAUE (Iterative Almost Unbiased Estimation) [78, 79]
- MINQUE (Minimum Quadratic Unbiased Estimation) [80]
- BIQUE (Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation) [81]
- LS-VCE (Least Squares-Variance Components Estimation) [82, 83]
- REML (Restricted Maximum Likelihood Estimator) [84]

VBK yöntemlerine ilişkin ayrıntılı bilgi, Grodecki [85], Fotopoulos [86] ve Amiri-Simkooei [82] tarafından ortaya konan çalışmalarda verilmektedir.

Literatürde VBK yöntemlerini konu alan oldukça fazla sayıda çalışma bulunmaktadır. Ancak, bunların önemli bölümü yalnızca gözlenen büyüklüklerin hatalı olduğu (heterojen noise içerdiği) duruma ilişkindir [82, 83, 87–97]. Bununla beraber, varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik koordinat dönüşümü (daha genel anlamda varyans bileşenlerinin bilinmeyen olduğu EIV model) jeodezik literatürde ilk olarak Amiri-Simkooei [46] tarafından iki boyutlu afin dönüşümü problemi için ele alınmış, Aydın ve Uygur [98] tarafından bu çalışmadan bağımsız biçimde iki boyutlu benzerlik dönüşümü problemi için uygulanmıştır. Uygur [99] ise, Aydın ve Uygur [98] tarafından verilen algoritmayı iki boyutlu afin dönüşümü örnekleri üzerinden irdelemiştir. Benzer biçimde Mahboub [100] ve Amiri-Simkooei [22], varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik dönüşüm modelini 3B benzerlik dönüşümü örnekleri üzerinden irdelemişlerdir. Bunlara ek olarak, jeodezik literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur; bkz. [43, 44, 101, 102].

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının temel amacı, üç boyutlu asimetrik ve simetrik benzerlik ve afin dönüşümlerinde doğrusal olmayan Gauss-Helmert modeli altında ele alınan kuaterniyon tabanlı algoritmanın performansının ortaya çıkarılmasıdır. Koordinatların stokastik yapısının çözümlere olan etkisi oldukça geniş bir örneklemde gerçekleştirilen simülasyon çalışmaları ile ifade edilmeye çalışılmıştır. Bununla birlikte, varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik koordinat dönüşümü probleminin çözümü için bir VBK algoritmasını tasarlamak ve performansını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Çalışmada ele alınan hipotezler aşağıda verilmektedir:

- Kontrol noktalarına ilişkin başlangıç ve hedef sistemi koordinatlarının aynı anda rasgele hatalı olması durumunda, koordinat dönüşümü problemi simetrik dönüşüm modeli altında ele alınır.
- Başlangıç sistemi koordinatları da hatalı iken, yalnızca hedef sistem koordinat hatalarını göz önüne alarak çözüm yapmak, sonuç parametre kestirim değerlerinin biaslı olmasına neden olur.
- Dönüşümde geçen data matrisine konu olan başlangıç sistemi koordinatlarının doğruluğu, hedef sistem koordinatlarına göre yeterince yüksekse, simetrik dönüşüm yerine asimetrik dönüşüm ele alınır.
- Kuaterniyon tabanlı koordinat dönüşümü algoritması, 3B koordinat dönüşümü problemleri için en genel çözümdür.
- Kontrol noktalarının her iki sistemdeki koordinatlarının farklı kaynaklardan gelmesi durumunda, çözüm varyans bileşenlerinin de bilinmeyen olduğu simetrik koordinat dönüşümü modeli altında ele alınır.

2
ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ

2.1 Üç Boyutlu Koordinat Dönüşümlerine Genel Bakış

Üç boyutlu (3B) koordinat dönüşümleri bir çok bilimsel alanda ve mühendislik çalışmasında kullanılmaktadır. Karşılaşılan probleme ilişkin olarak farklı dönüşüm modelleri söz konusudur. Bu modeller, genel olarak, afin ve benzerlik dönüşümü olarak sınıflandırılır. Probleme konu olan obje veya ağ için geçerli fiziki özelliklere bağlı olarak uygun bir dönüşüm modeli seçilmelidir.

12 parametreli ($12p$) afin dönüşümü olarak da ifade edilen 3B koordinat dönüşümünün en genel biçimi aşağıdaki gibidir [22]:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t} + \mathbf{RK\Theta X}_1 \tag{2.1}$$

Burada, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$, sırasıyla, başlangıç ve hedef sistemlerine ilişkin koordinat vektörlerine; $\mathbf{t}$, 3×1 boyutlu öteleme parametreleri vektörüne; $\mathbf{K}$, 3×3 boyutlu ölçek çarpanlarını içeren köşegen matrise ve $\mathbf{\Theta}$, 3×3 boyutlu afinite (eğim) parametreleri matrisine karşılık gelmektedir. $\mathbf{R}$ ise, sırasıyla, x, y ve z eksenlerinin φ_x, φ_y ve φ_z (Euler) açıları kadar döndürülmesi ile elde edilen 3×3 boyutlu ortogonal (toplam) dönüklük matrisidir [24, 103]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_yc_z & c_xs_z + s_xs_yc_z & s_xs_z - c_xs_yc_z \\ -c_ys_z & c_xc_z - s_xs_ys_z & s_xc_z + c_xs_ys_z \\ s_y & -s_xc_y & c_xc_y \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Burada, $\mathbf{R}_i$, i ekseni için dönüklük matrisini ifade ederken; c_i ve s_i, sırasıyla, cos φ_i ve sin φ_i'ye karşılık gelmektedir (i=x, y, z).

Bu çalışma kapsamında ele alınan dönüşüm modelleri, Eşitlik 2.1 ile verilen $12p$ dönüşüm modelinin özel halleridir. Koordinat eksenleri için afinite (eğim) parametreleri söz konusu değilse ($\mathbf{\Theta} = \mathbf{I}$ birim matris ise), $9p$ afin dönüşüm modeli elde edilir [4, 24, 25]:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t} + \mathbf{RKX}_1 \tag{2.3}$$

Eşitlik 2.3'te verilen modelde x, y ve z koordinat eksenleri için ortak bir ölçek çarpanı öngörülmesi durumunda, konform (açı koruyan) bir dönüşüm modeli söz konusu olur. Böylesi dönüşümler, 3B benzerlik dönüşümü ya da $7p$ koordinat dönüşümü olarak ifade edilir [4, 24]:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t} + k\mathbf{RX}_1 \tag{2.4}$$

Jeodezik çalışmalarda, genel olarak, dönüklük açılarının diferansiyel büyüklükler olduğu ve her üç koordinat ekseni için de ortak bir ölçek çarpanının öngörüldüğü dönüşüm modelleri yeterlidir. Bu durumda Eşitlik 2.3'teki $\mathbf{R}$ dönüklük matrisi, elemanları diferansiyel anlamda küçük üç dönüklük açısının doğrusal fonksiyonları olan ters-simetrik bir matris biçimini alır. Böylesi datum dönüşümü problemleri jeodezik literatürde, (doğrusal) Bursa-Wolf ya da Molodensky-Badekas gibi modeller altında ele alınmaktadır [55–63].

Koordinat dönüşümü problemi, esas olarak, iki sistem arasındaki matematiksel ilişkiyi tanımlayan dönüşüm parametrelerinin belirlenmesi problemidir. Bu parametrelerin belirlenmesi için izlenen en genel yol, koordinatları her iki sistemde de bilinen yeterli sayıda kontrol noktası kullanılarak gerçekleştirilen En Küçük Kareler (EKK) dengelemesidir [29]. Yalnızca hedef sistem koordinatlarının hatalı kabul edildiği bu yaklaşım, literatürde asimetrik çözüm olarak da ifade edilir [24, 25, 30]. 3B koordinat dönüşümü için verilen Eşitlik 2.1'deki genel model dışında, dönüşüm parametreleri hesaplanırken bazı nümerik kısıtlamalar göz önünde bulundurulmalıdır. Bu eşitlikte geçen $\mathbf{RK\Theta}$ çarpımı,

$$\mathbf{M} = \mathbf{RK\Theta} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

biçiminde ifade edilirse, her bir 9 elemanı, Euler dönüklük açılarının, ölçek çarpanlarının ve eğim parametrelerinin doğrusal olmayan trigonometrik bir fonksiyonu olan $\mathbf{M}$ matrisi elde edilir. $12p$ koordinat dönüşümünde, üç öteleme ile birlikte bu 9 eleman bilinmeyen parametreler olarak ele alınır. Böylece, parametre kestirimi açısından bir problem oluşmaz. Ancak, daha alt dönüşüm problemlerinde parametrizasyon problemleri oluşur. Örneğin, $9p$ dönüşüm modelinde eğim parametreleri olmamasına karşın, $\mathbf{RK}$ çarpımı sonucu elde edilen $\mathbf{M}$ matrisi için yine 9 eleman, dolayısıyla, ötelemelerle birlikte yine 12 parametre ortaya çıkar. Benzer parametrizasyon problemleri $8p$, $7p$ ve diğer ortogonal dönüşümler için de geçerlidir. Amiri-Simkooei [22], Lehmann [21] ve Fang [39], bu parametrizasyon probleminin üstesinden gelmek ve bilinmeyen sayısını ilgili probleme göre indirgemek amacıyla, Eşitlik 2.1 ile birlikte kullanılan (doğrusal olmayan) koşul denklemleri (*con-*

straints) tanımlamışlardır. Diğer taraftan Andrei [4], **RK** çarpımı sonucu elde edilen elemanların dönüklük açıları ve ölçek çarpanlarına göre birinci mertebeden türevlerini alarak, doğrusal düzeltme denklemlerini elde etmek yoluyla dönüşüm parametrelerini belirlemiştir. Her iki yöntem de birbirine özdeş sonuçlar vermektedir. Dönüklüklerin diferansiyel büyüklükler olduğu jeodezik datum dönüşümleri ve Even-Tzur [23] tarafından verilen afin dönüşümleri dışındaki her asimetrik dönüşüm modeli, doğrusal olmayan bir fonksiyonel modele sahiptir [24]. Bu nedenle çözüm, iteratif olarak gerçekleştirilir ve çözümde parametrelerin uygun yaklaşık değerlerine ihtiyaç duyulur. Dönüklüklerin klasik Euler açıları ile parametrizasyonu, dönüklük açılarının büyük olduğu bu tür doğrusal olmayan iteratif dönüşüm problemleri için elverişsizdir. Bu kısıtlamalar nedeniyle, dönüklük matrisinin farklı bir şekilde ele alındığı daha genel bir koordinat dönüşüm problemi çözümüne ihtiyaç duyulur.

2.1.1 Dönüklüklerin Kuaterniyonlar Cinsinden İfadesi

19. yüzyılda İrlandalı matematikçi W. R. Hamilton tarafından ortaya konan kuaterniyonların, dönüklüklerin tanımlanmasında Euler dönüklük açılarına göre oldukça önemli üstünlükleri söz konusudur. Bu üstünlükleri nedeniyle, havacılık ve uzay çalışmalarından, robotik ve bilgisayar görselleştirme çalışmalarına kadar bir çok alanda dönüklüklerin gösteriminde kuaterniyonlar tercih edilmektedir. Bu bölümde kuaterniyonlar için çok temel bilgiler verilmekte olup, daha detaylı bilgi için [20, 65, 104–107] kaynaklarından yararlanılabilir.

Bir kuaterniyon karmaşık sayılar cinsinden şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \tag{2.6}$$

Burada, q_0, q_1, q_2, q_3, kuaterniyon elemanlarına ve $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ eşitliklerini sağlayan birim vektörlere karşılık gelmektedir. q_0 elemanı eşitliğin skaler kısmını oluştururken, $q_1\mathbf{i}+q_2\mathbf{j}+q_3\mathbf{k}$ ise, vektör kısmına karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, bir kuaterniyon skaler ve vektör parçaların toplamı olarak da ifade edilebilir:

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}_1 \tag{2.7}$$

Bir kuaterniyonun normu $\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ eşitliği ile belirlenir. Üç boyutlu uzayda bir dönüklüğün ifade edilmesi için kuaterniyon normunun $\|q\| = 1$ olması gerekmektedir. Böylesi kuaterniyonlar *birim kuaterniyon* olarak adlandırılır. Bir $\mathbf{I}_3$ birim vektörü ($\|\mathbf{I}_3\| = 1$) kendi etrafında θ açısı kadar döndürülürse, $q_0^2 + \|\mathbf{q}_1\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$

koşulu altında birim kuaterniyon $\mathbf{q}$ aşağıdaki biçimi alır:

$$\mathbf{q} = \underbrace{\cos\frac{\theta}{2}}_{q_0} + \underbrace{\mathbf{I}\sin\frac{\theta}{2}}_{\mathbf{q}_1} \tag{2.8}$$

Bir P noktasının konumu, kuaterniyonlar cinsinden üç boyutlu bir vektör olarak,

$$\mathbf{q}_P = 0 + x_\mathbf{i} + y_\mathbf{j} + z_\mathbf{k} \tag{2.9}$$

biçiminde gösterilir ve xyz sistemindeki bu vektör, $\mathbf{I}$ birim vektörü etrafında θ açısı kadar döndürülürse, XYZ sistemindeki yeni konum vektörü

$$X_\mathbf{i} + Y_\mathbf{j} + Z_\mathbf{k} = \mathbf{q}\,(x_\mathbf{i} + y_\mathbf{j} + z_\mathbf{k})\,\mathbf{q}^* \tag{2.10}$$

elde edilir. Burada, $\mathbf{q}^*$ terimi ($\mathbf{q}^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$) eşlenik kuaterniyonu ifade etmektedir. Benzer biçimde, iki koordinat vektörü arasındaki ilişki $[X\ \ Y\ \ Z]^T = \mathbf{R}[x\ \ y\ \ z]^T$ eşitliği ile ifade edildiğinde, Eşitlik 2.10'daki ifadeye karşılık gelen (Eşitlik 2.2'de ise Euler açıları ile ifade edilen) $\mathbf{R}$ dönüklük matrisinin birim kuaterniyonlar cinsinden ifadesi aşağıdaki gibi olur [24, 25, 70]:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

2.2 Kuaterniyon Tabanlı Üç Boyutlu Koordinat Dönüşümü

Bir önceki bölümde ifade edilen kuaterniyon gösterimi, çok sayıda 3B benzerlik dönüşümü çalışmasında ele alınmıştır (bkz. Shen vd. [65], Akyılmaz [66, 67], Kanatani ve Niitsuma [13], Chang vd. [69], Mercan vd. [70], Uygur vd. [24]). Bunlara ek olarak, Aydar vd. [68] 3B ortogonal dönüşüm ve Uygur vd. [25], çalışmanın ilerleyen bölümlerinde detaylandırılacak olan, 9p afin dönüşümü için kuaterniyon tabanlı çözümü irdelemiştir. Çalışma kapsamında, 7p dönüşüm modelinin çözümü için Mercan vd. [70] ve Uygur vd. [24]'te verilen metodoloji izlenmiştir. Bu metodoloji, Uygur vd. [25] tarafından 9p afin dönüşümünü içine alacak şekilde genişletilmiştir. Mercan vd. [70]'te verilen kuaterniyon tabanlı dönüşüm algoritması, problemin simetrik ya da asimetrik olarak ele alınmasından bağımsız olarak, önemli üstünlüklere sahiptir [24, 25]:

- Çözüm, Gauss-Helmert modeli altında ele alınır (Asimetrik çözüm için ise Gauss-Helmert modeli, Gauss-Markoff modeline dönüşür). Böylece, varyans bileşen kestirimi, uyuşumsuz ölçü araştırması, vb. analiz yöntemlerinin çözüme kolaylıkla entegre edilmesi mümkün olur.

- Aydın vd. [64], Andrei [4] ve Fang [38]'de verilen çözümlerin tersine, fonksiyonel modelin doğrusallaştırılması için dönüşüm parametrelerinin yaklaşık değerlerine ihtiyaç duyulmaz (Bununla beraber, ileride anlatılacağı üzere, $9p$ afin dönüşüm modeli için bazı olağan dışı durumlarda iteratif çözümde yakınsama problemleri ile karşılaşılabilmektedir. Böylesi durumlar için, yaklaşık değer belirleme problemi 3B afin modeli için göz önüne alınmaktadır).
- Koordinat kovaryans matrisleri, pozitif tanımlı olmak dışında herhangi bir kısıt gözetilmeksizin olduğu gibi kullanılır.
- Algoritma, nümerik açıdan oldukça kararlı ve hızlı çalışmaktadır.
- İlgili dönüşüm modelini oluşturmak için herhangi bir koşul denklemine ihtiyaç duyulmaz.
- 3B benzerlik dönüşümünde bir eksene ilişkin koordinatların sıfır olması durumunda nümerik hata ile karşılaşılmaz. Bu özellik sayesinde, 2B benzerlik dönüşümü için yeni bir model tanımına ihtiyaç duyulmaz.

Bu özellikleri göz önünde bulundurulduğunda, Mercan vd. [70] tarafından önerilen kuaterniyon tabanlı 3B koordinat dönüşüm çözümünün genel bir çözümü tanımladığı görülmektedir [24].

2.2.1 Kuaterniyon Tabanlı Yedi Parametreli Benzerlik Dönüşümü

3B benzerlik dönüşümünde başlangıç ve hedef sistemleri arasındaki matematiksel ilişki, dönüklük matrisinin Euler açıları ile gösterildiği klasik yaklaşımda; üç öteleme (t_x, t_y, t_z), üç dönüklük $(\varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z)$ ve bir ölçek (k) parametresi olmak üzere toplam 7 dönüşüm parametresi ile tanımlanır. Birim kuaterniyonlar ile dönüklükler dört parametre (q_0, q_1, q_2, q_3) ile ifade edildiğinden, yeni modelde 8 dönüşüm parametresi söz konusu olur. Dolayısıyla, dönüklüklerin kuaterniyonlar ile gösterimi, dönüşüm modelinin parametrizasyonunun yeniden ele alınmasını gerektirir. Bu amaçla, dönüklük matrisinin ölçeklendirilmesiyle elde edilen yeni bir dönüklük matrisi tanımlanır [13, 24, 70]:

$$\mathbf{R}_k = k\mathbf{R} \tag{2.12}$$

Böylece, $7p$ koordinat dönüşümüne ilişkin matematiksel model, kuaterniyon tabanlı çözüm için $k = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ koşulu altında, aşağıdaki yapıya dönüşür:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t} + \mathbf{R}_k\mathbf{X}_1 \tag{2.13}$$

Dönüklük matrisinde geçen kuaterniyon elemanları, ölçekli kuaterniyon elemanlarıdır [70]:

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}^T \sqrt{k} = \begin{pmatrix} q_0' & q_1' & q_2' & q_3' \end{pmatrix}^T \tag{2.14}$$

Gösterim kolaylığı açısından, çalışmanın geri kalanında kuaterniyon elemanları, q_i (i=0, 1, 2, 3) biçiminde gösterilecektir.

2.2.2 Kuaterniyon Tabanlı Dokuz Parametreli Afin Dönüşümü

Eşitlik 2.3'te verilen 9p afin koordinat dönüşüm modelini birim kuaterniyonlar kullanarak yeniden oluşturabilmek için, 7p dönüşüm modelinde izlenen metodoloji yeniden ele alınır. Dönüklüklerin Euler açıları ile ifade edildiği klasik modelde; üç öteleme ve üç dönüklük parametresine ek olarak, x, y, z eksenleri boyunca

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

şeklinde ifade edilen üç ölçek çarpanı ile beraber toplam 9 parametre söz konusudur. Dönüklükler dört parametreli birim kuaterniyonlar cinsinden ifade edilmek istendiğinde, model parametrizasyonunun Bölüm 2.2.1'de ifade edildiği şekilde yeniden gözden geçirilmesi gerekir. Bu amaçla, Eşitlik 2.3'te geçen **RK** çarpımında **K** yerine,

$$\mathbf{L}_k = k_x^{-1}\mathbf{K} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 1 & k_y/k_x & k_z/k_x \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 1 & \mu_y & \mu_z \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

biçimindeki bağıl ölçek çarpanları vektörü ve ölçek çarpanı ile dönüklük matrisinin çarpımı yerine de,

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}k_x \tag{2.17}$$

biçiminde ifade edilen ölçekli dönüklük matrisi yazılarak, kuaterniyon tabanlı 9p afin dönüşüm modeli elde edilir [25]:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t} + \mathbf{R}_k\mathbf{L}_k\mathbf{X}_1 \tag{2.18}$$

Bu durumda, ölçeklendirilmiş kuaterniyon elemanları için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$k_x = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{2.19}$$

Bu eşitlikte geçen kuaterniyon elemanları,

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}^T \sqrt{k_x} = \begin{pmatrix} q_0' & q_1' & q_2' & q_3' \end{pmatrix}^T \tag{2.20}$$

biçimindeki k_x ölçek çarpanını içeren ölçekli kuaterniyon elemanlarıdır.

$7p$ dönüşümde olduğu gibi, çalışmanın geri kalanında kuaterniyon elemanları, q_i (i=0, 1, 2, 3) biçiminde gösterilecektir. Son olarak, bu bölümde ifade edilen eşitliklerde kolaylık açısından x eksenine ilişkin ölçek çarpanı (k_x) kullanılmıştır. Ancak, x, y, z eksenlerine ilişkin ölçek çarpanlarının herhangi birine göre de bu eşitlikler uyarlanabilir.

2.2.3 Dengeleme Modelinin Oluşturulması

3B koordinat dönüşümü probleminde başlangıç ($\mathbf{X}_1$) ve hedef ($\mathbf{X}_2$) sistemleri arasındaki ilişki, n sayıda kontrol noktası için, en genel biçimde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Lambda})\mathbf{X}_1 = \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{H}\mathbf{X}_1 \qquad (2.21)$$

Eşitlikte geçen $\mathbf{U}$, elemanları 3×3 boyutlu ($\mathbf{I}_3$) birim matristen oluşan $3n \times 3$ boyutlu matrise; $\otimes$, Kronecker çarpımına (bkz. Koch [81]; s.18) ve $\mathbf{H}$, $3n \times 3n$ boyutlu, köşegen elemanları dönüklük matrisi ile ölçek matrisinin çarpımından ($\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}_k\mathbf{L}_k$) oluşan blok-köşegen bir matrise karşılık gelmektedir. Bu dönüşüm eşitliği doğrusal yapıda değildir. Eşitlikte hedef sistem koordinatlarına ilişkin rasgele hata vektörü ($\mathbf{e}_2$) göz önünde bulundurulur ve Taylor açınımı uygulanırsa, EKK dengelemesi için gereken doğrusal fonksiyonel model elde edilir:

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 = f(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) + \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{t}^T}\right|_{\tilde{\mathbf{t}}} (\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{t}}) + \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\xi}^T}\right|_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} (\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \qquad (2.22)$$

Burada, "~", yaklaşık değeri ve $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}\mathbf{t}^T & \boldsymbol{\xi}^T\end{pmatrix}^T$, bilinmeyen parametre vektörünü göstermektedir. Parametre vektörü, öteleme parametrelerini içeren $\mathbf{t}$ ve ölçekli kuaterniyon elemanları ve/veya bağıl ölçek çarpanlarını içeren $\boldsymbol{\xi}$ olmak üzere, iki alt vektörden oluşmaktadır. $7p$ ve $9p$ koordinat dönüşümlerine ilişkin fonksiyonel modeller, yukarıdaki gibi oluşturulur.

2.2.3.1 Üç Boyutlu Benzerlik Dönüşümüne İlişkin Dengeleme Modeli

Kuaterniyon tabanlı 3B benzerlik dönüşümü için Eşitlik 2.21'de verilen $\mathbf{H}$ matrisi, ölçekli dönüklük matrisini içermektedir:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{R}_k \qquad (2.23)$$

Burada $\mathbf{I}_n$, $n \times n$ boyutlu birim matristir. Bu modele ilişkin 7×1 boyutlu (bilinmeyen) parametre vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x & t_y & t_z & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}^T \tag{2.24}$$

Eşitlik 2.23, Eşitlik 2.21'de göz önünde bulundurulur, Eşitlik 2.22 ile verilen Taylor açınımı yukarıda verilen parametre vektörüne göre uygulanır ve eşitlikler düzenlenirse, doğrusal dengeleme modeli elde edilir:

$$\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \tilde{\mathbf{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ q_0 - \tilde{q}_0 \\ q_1 - \tilde{q}_1 \\ q_2 - \tilde{q}_2 \\ q_3 - \tilde{q}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \tag{2.25}$$

Burada, $\mathbf{A}$, $3n \times 7$ boyutlu katsayılar (data) matrisine; $\mathbf{e}_2$, $3n \times 1$ boyutlu hedef sistemi koordinatlarına ilişkin rasgele hata vektörüne karşılık gelir. $\tilde{\mathbf{J}}$ matrisi ise ölçekli dönüklük matrisinin kuaterniyon elemanlarına göre ($\tilde{\mathbf{J}}_j = \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial q_j}$, $j = 0, 1, 2, 3$)

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial q_0} = 2\begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_1 = \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial q_1} = 2\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \end{bmatrix} \tag{2.26a}$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial q_2} = 2\begin{bmatrix} -q_2 & q_1 & q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_3 = \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial q_3} = 2\begin{bmatrix} -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \tag{2.26b}$$

şeklinde kısmi türevleri alınarak elde edilen, $\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin $3n \times 4$ boyutlu alt matrisidir [24, 70]:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_0\mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_1\mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_2\mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_3\mathbf{X}_{1,i} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Eşitlik 2.25 ile verilen model, nokta sayısının $n \geq 3$ olması durumunda Gauss-Markoff modeli altında ele alınarak, EKK dengelemesi ile parametre kestirimi gerçekleştirilir [81]:

$$\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{e}_2 = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \ , \ \ \mathbf{P} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_2^{-1} \tag{2.28}$$

Burada, $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{X}_1)$, $3n \times 1$ boyutlu küçültülmüş gözlem vektörünü; $\mathbf{C}_2$ ve $\mathbf{P}$, hedef sistem koordinatlarına ilişkin $3n \times 3n$ boyutlu kovaryans ve ağırlık matrislerini ve σ_0^2 birim ağırlıklı ölçünün varyansını (bilinmeyen varyans bileşenini) ifade etmektedir.

2.2.3.2 Dokuz Parametreli Afin Dönüşümüne İlişkin Dengeleme Modeli

Kuaterniyon tabanlı $9p$ afin dönüşümü için Eşitlik 2.21'de verilen $\mathbf{H}$ matrisi, ölçekli kuaterniyon elemanları ile bağıl ölçek çarpanlarının fonksiyonudur:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{R}_k \mathbf{L}_k) \tag{2.29}$$

Bu dönüşüm modeli için 9×1 boyutlu (bilinmeyen) parametre vektörü ise aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x & t_y & t_z & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \mu_y & \mu_z \end{pmatrix}^T \tag{2.30}$$

Eşitlik 2.21'de bu kez $\mathbf{H} = \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{R}_k \mathbf{L}_k)$ göz önünde bulundurulur ve fonksiyonel model doğrusallaştırılırsa, doğrusal dengeleme modeli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \tilde{\mathbf{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ q_0 - \tilde{q}_0 \\ q_1 - \tilde{q}_1 \\ q_2 - \tilde{q}_2 \\ q_3 - \tilde{q}_3 \\ \mu_y - \tilde{\mu}_y \\ \mu_z - \tilde{\mu}_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \tag{2.31}$$

Burada, $\mathbf{A}$, $3n \times 9$ boyutlu katsayılar matrisine; $\tilde{\mathbf{J}}$ ise $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \tilde{\mathbf{R}}_k \tilde{\mathbf{L}}_k$ çarpımının ölçekli kuaterniyon elemanlarına ve bağıl ölçek parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak ($\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., 6$)

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_0 \mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_1 \mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_2 \mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_3 \mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_y \mathbf{X}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_z \mathbf{X}_{1,i} \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

biçiminde elde edilen, $\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin $3n \times 6$ boyutlu alt matrisine karşılık gelmektedir. $\mathbf{J}$ matrisinin elemanları şu şekilde belirlenir [25]:

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial q_0} = 2 \begin{bmatrix} q_0 & -q_3\mu_y & q_2\mu_y \\ q_3 & q_0\mu_y & -q_1\mu_z \\ -q_2 & q_1\mu_y & q_0\mu_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_1 = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial q_1} = 2 \begin{bmatrix} q_1 & q_2\mu_y & q_3\mu_z \\ q_2 & -q_1\mu_y & -q_0\mu_z \\ q_3 & q_0\mu_y & -q_1\mu_z \end{bmatrix} \tag{2.33a}$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial q_2} = 2 \begin{bmatrix} -q_2 & q_1\mu_y & q_0\mu_z \\ q_1 & q_2\mu_y & q_3\mu_z \\ -q_0 & q_3\mu_y & -q_2\mu_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_3 = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial q_3} = 2 \begin{bmatrix} -q_3 & -q_0\mu_y & q_1\mu_z \\ q_0 & -q_3\mu_y & q_2\mu_z \\ q_1 & q_2\mu_y & q_3\mu_z \end{bmatrix} \tag{2.33b}$$

$$\mathbf{J}_y = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mu_y} = \begin{bmatrix} 0 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 0 \\ 0 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 0 \\ 0 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_z = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mu_z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 0 & 0 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 0 & 0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2.33c}$$

Nokta sayısının $n \geq 4$ olması durumunda, Gauss-Markoff kestirim modeli, Eşitlik 2.28'de olduğu gibi oluşturulur; ancak, i. nokta için küçültülmüş gözlem vektörü aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \mathbf{X}_{2,i} - \tilde{\mathbf{R}}_k \tilde{\mathbf{L}}_k \mathbf{X}_{1,i} = \mathbf{X}_{2,i} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}_i \mathbf{X}_{1,i} \tag{2.34}$$

2.2.4 En Küçük Kareler Dengelemesi ile Parametre Kestirimi

Gauss-Markoff modeli altında ele alınan kuaterniyon tabanlı 3B koordinat dönüşümü probleminin çözümü (ağırlıklı) EKK dengelemesi ile gerçekleştirilir. En uygun parametre kestirimi ($\hat{\boldsymbol{\beta}}$) için hedef sistem koordinatlarına ilişkin rasgele hata vektörünün ağırlıklı kareleri toplamını minimum yapan, diğer bir deyişle

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{e}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{e}_2 \tag{2.35}$$

şeklinde ifade edilen hedef fonksiyonunu minimize eden çözüm aranır [108]. Buradan hareketle, hedef fonksiyonunun bilinmeyen parametrelere göre birinci mertebeden türevlerinin alınması, sıfıra eşitlenmesi ve ikiye bölünmesi ile normal denklemler elde edilir [108]:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{A})^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{2.36}$$

Böylece hedef fonksiyonunu mininum yapan en uygun parametre kestirimi elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{y} \tag{2.37}$$

Gözlenen büyüklüklere ilişkin rasgele hata vektörü ise aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_2^{-1}) \mathbf{y} \tag{2.38}$$

Elde edilen bu hata vektörünün elemanlarının (ağırlıklı) kareleri toplamından bilinmeyen varyans bileşeni (sonsal varyans)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{e}_2}{f} \tag{2.39}$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlikte geçen f terimi, ölçü sayısı ile bilinmeyen sayısının farkına karşılık gelen serbestlik derecesidir. Sırasıyla, $9p$ ve $7p$ dönüşüm modelleri için serbestlik dereceleri, n nokta sayısı olmak üzere, $f = 3n - 9$ ve $f = 3n - 7$ şeklinde belirlenir. EKK dengelemesi sonucu kestirilen parametre vektörüne ilişkin kovaryans matrisi ise

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} \tag{2.40}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada $\mathbf{Q}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ vektörünün ağırlık katsayıları matrisidir.

2.2.5 Dönüşüm Parametrelerinin ve Kovaryans Matrisinin Belirlenmesi

Yukarıda ifade edilen çözüm sonucu elde edilen parametre kestirimleri ve bunların kovaryans matrisi, öteleme parametreleri dışında dönüşüme ilişkin esas parametreleri temsil etmez. Dönüklüklerin ve ölçek çarpanlarının elde edilmesi için çözüm sonrasında bir dizi işlem gerçekleştirilir. Bu işlemler $7p$ ve $9p$ dönüşümler için aşağıda verilmektedir:

2.2.5.1 Benzerlik Dönüşümünde Parametrelerin ve Kovaryans Matrisinin Belirlenmesi

$7p$ benzerlik dönüşümü sonucu elde edilen ölçekli kuaterniyon elemanlarının kestirim değerleri kullanılarak ölçek çarpanı belirlenir:

$$\hat{k} = \hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 \tag{2.41}$$

Birim kuaterniyonlar cinsinden dönüklük matrisinin ifadesi şu şekildedir:

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{k}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_k \tag{2.42}$$

Eşitlik 2.42 ile elde edilen dönüklük matrisinin elemanları kullanılarak birim kuaterniyon elemanlarının hesabı aşağıdaki gibi gerçekleştirilir [70, 109]:

$$\hat{q}_0 = \pm\frac{\sqrt{1 + \hat{r}_{11} + \hat{r}_{22} + \hat{r}_{33}}}{2} \tag{2.43a}$$

$$\hat{q}_1 = \frac{\hat{r}_{32} - \hat{r}_{23}}{4\hat{q}_0} \tag{2.43b}$$

$$\hat{q}_2 = \frac{\hat{r}_{13} - \hat{r}_{31}}{4\hat{q}_0} \tag{2.43c}$$

$$\hat{q}_3 = \frac{\hat{r}_{21} - \hat{r}_{12}}{4\hat{q}_0} \tag{2.43d}$$

Dengeleme sonucu Eşitlik 2.40 ile elde edilen parametrelerin kovaryans matrisi öteleme parametrelerine ve ölçekli kuaterniyon elemanlarına ilişkindir [24]:

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{q}} \\ \mathbf{C}_{\hat{q}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{q}\hat{q}} \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Elde edilen bu dönüşüm parametrelerini içeren yeni bir parametre vektörü tanımlansın:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}' = \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}' \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Burada, $\hat{\boldsymbol{\xi}}'$ vektörü, ölçek çarpanını ve birim kuaterniyon elemanlarını içeren, $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$ vektörünün alt vektörüne karşılık gelmektedir:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}' = \begin{pmatrix} \hat{k} & \dfrac{\hat{q}_0}{\sqrt{\hat{k}}} & \dfrac{\hat{q}_1}{\sqrt{\hat{k}}} & \dfrac{\hat{q}_2}{\sqrt{\hat{k}}} & \dfrac{\hat{q}_3}{\sqrt{\hat{k}}} \end{pmatrix}^T \tag{2.46}$$

Eşitlik 2.45'te, Eşitlik 2.41 göz önünde bulundurulur, ölçekli kuaterniyon elemanlarına göre kısmi türevleri alınır ($\mathbf{F}_\xi = \dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}'}{\partial \hat{q}_j}$, $j = 0, 1, 2, 3$) ve kovaryans yayılma kuralı uygulanırsa; Eşitlik 2.40 ile verilen kovaryans matrisinden ötelemeler, ölçek çarpanı ve birim kuaterniyon elemanlarına ilişkin yeni kovaryans matrisi elde edilir:

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}'\hat{\beta}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{q}} \\ \mathbf{C}_{\hat{q}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{q}\hat{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\xi^T \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Burada, $\mathbf{F}_\xi$, 5×4 boyutlu Jacobi matrisine karşılık gelmektedir:

$$\mathbf{F}_\xi = \begin{pmatrix} 2\hat{q}_0 & 2\hat{q}_1 & 2\hat{q}_2 & 2\hat{q}_3 \\ \dfrac{\hat{k} - \hat{q}_0^2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_1}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_3}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} \\ -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_1}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & \dfrac{\hat{k} - \hat{q}_1^2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_3}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} \\ -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & \dfrac{\hat{k} - \hat{q}_2^2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_2\hat{q}_3}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} \\ -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_3}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_3}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & -\dfrac{\hat{q}_2\hat{q}_3}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} & \dfrac{\hat{k} - \hat{q}_3^2}{\hat{k}\sqrt{\hat{k}}} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

2.2.5.2 Afin Dönüşümünde Parametrelerin ve Kovaryans Matrisinin Belirlenmesi

$9p$ afin dönüşümü için dengeleme sonrası dönüşüm parametrelerine ilişkin izlenen yol bağıl ölçek çarpanlarını da içerecek şekilde genişletilir. Bu dönüşüm modeli için, önceki bölümlerde de açıklandığı üzere, birim kuaterniyonlar ve dönüklük matrisi x koordinat eksenine ilişkin ölçek çarpanı kullanılarak ölçeklendirilmiştir. Bu nedenle Eşitlik 2.41, afin dönüşümü için aşağıdaki yapıya dönüşür:

$$\hat{k}_x = \hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 \tag{2.49}$$

Eşitlik 2.49 ile elde edilen $\hat{k}_x$ ölçek çarpanı yardımıyla birim kuaterniyonlar cinsinden dönüklük matrisi hesaplanır:

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{k}_x^{-1}\hat{\mathbf{R}}_k \tag{2.50}$$

Elde edilen ortogonal dönüklük matrisinden birim kuaterniyon elemanları Eşitlik 2.43 ile hesaplanır. Eşitlik 2.16 ile verilen bağıl ölçek çarpanlarından, y ve z koordinat eksenlerine ilişkin ölçek çarpanları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{k}_y = \hat{k}_x \hat{\mu}_y \tag{2.51a}$$

$$\hat{k}_z = \hat{k}_x \hat{\mu}_z \tag{2.51b}$$

Dengeleme işlemi sonucu Eşitlik 2.40 ile elde edilen parametre vektörünün kovaryans matrisi, öteleme parametreleri ve ölçekli kuaterniyon elemanlarıyla birlikte bağıl ölçek çarpanlarını içermektedir (bkz. Eşitlik 2.30):

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{\xi}} \\ \mathbf{C}_{\hat{\xi}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{\xi}\hat{\xi}} \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

9p dönüşüm modeli için, Eşitlik 2.45 ile verilen dönüşüm parametrelerine ilişkin yeni parametre vektörünün $\hat{\boldsymbol{\xi}}'$ alt vektörü, şu şekilde oluşturulur:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}' = \begin{pmatrix} \hat{k}_x & \hat{k}_y & \hat{k}_z & \dfrac{\hat{q}_0}{\sqrt{\hat{k}_x}} & \dfrac{\hat{q}_1}{\sqrt{\hat{k}_x}} & \dfrac{\hat{q}_2}{\sqrt{\hat{k}_x}} & \dfrac{\hat{q}_3}{\sqrt{\hat{k}_x}} \end{pmatrix}^T \tag{2.53}$$

Bir önceki bölümde ele alındığı üzere, yeni parametre vektöründe Eşitlik 2.49 ile Eşitlik 2.51 göz önünde bulundurulur, dengeleme sonucu elde edilen parametre vektörünün elemanlarına göre kısmi türevleri alınır ($\mathbf{F}_\xi = \dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}'}{\partial \hat{\xi}_j}$, $j = 1, \ldots, 6$) ve kovaryans yayılma kuralı uygulanırsa yeni parametre vektörünün kovaryans matrisi

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}'\hat{\beta}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{t}\hat{\xi}} \\ \mathbf{C}_{\hat{\xi}\hat{t}} & \mathbf{C}_{\hat{\xi}\hat{\xi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\xi^T \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{F}_\xi$, 7×6 boyutlu Jacobi matrisine karşılık gelmektedir:

$$\mathbf{F}_\xi=\begin{pmatrix} 2\hat{q}_0 & 2\hat{q}_1 & 2\hat{q}_2 & 2\hat{q}_3 & 0 & 0 \\ 2\hat{q}_0\hat{\mu}_y & 2\hat{q}_1\hat{\mu}_y & 2\hat{q}_2\hat{\mu}_y & 2\hat{q}_3\hat{\mu}_y & \hat{k}_x & 0 \\ 2\hat{q}_0\hat{\mu}_z & 2\hat{q}_1\hat{\mu}_z & 2\hat{q}_2\hat{\mu}_z & 2\hat{q}_3\hat{\mu}_z & 0 & \hat{k}_x \\ \dfrac{\hat{k}_x-\hat{q}_0^2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_1}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_3}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_1}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & \dfrac{\hat{k}_x-\hat{q}_1^2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_3}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & \dfrac{\hat{k}_x-\hat{q}_2^2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_2\hat{q}_3}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\hat{q}_0\hat{q}_3}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_1\hat{q}_3}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & -\dfrac{\hat{q}_2\hat{q}_3}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & \dfrac{\hat{k}_x-\hat{q}_3^2}{\hat{k}_x\sqrt{\hat{k}_x}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

2.2.6 Euler Dönüklük Açılarının ve Kovaryans Matrisinin Belirlenmesi

Dönüklüklerin kuaterniyonlar ile gösteriminin nümerik açıdan getirdiği önemli avantajlara rağmen, kuaterniyon parametrizasyonunun geometrik ifadesi oldukça karmaşıktır. Dahası, jeodezik literatürde dönüklüklerin gösterimindeki klasik yaklaşımın Euler açılarının kullanımı olduğu da göz önünde bulundurulursa, dengeleme sonucu elde edilen rotasyon matrisinden Euler dönüklük açılarının belirlenmesi oldukça önemlidir.

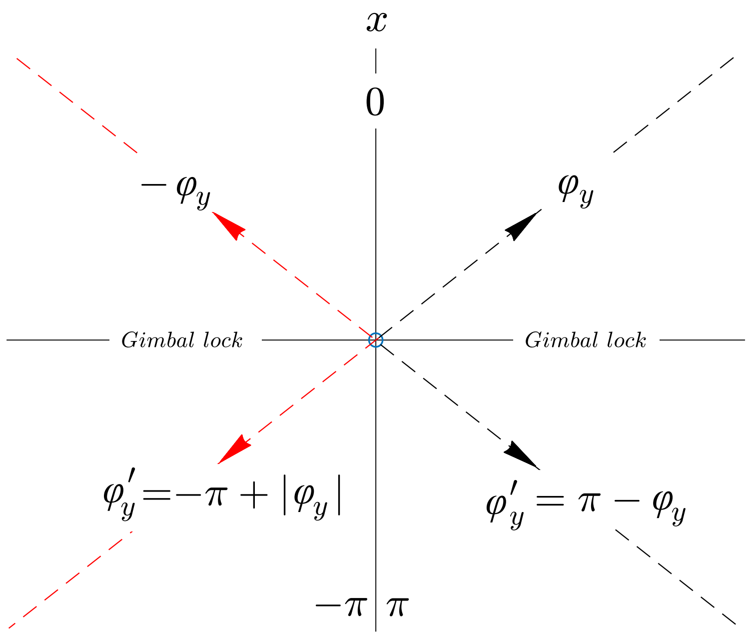
Şekil 2.1 üzerinde de görüldüğü üzere, Euler dönüklük açıları, $[-\pi,\pi]$ aralığında tanımlıdır. Bu açılar, Eşitlik 2.2 ile verilen dönüklük matrisi elemanları aracılığıyla hesaplanır. Dönüklük açıları ile ilgili genel düşünce tek bir çözümün olduğudur. Ancak, 3B uzayda Euler dönüklük açıları için iki çözüm söz konusudur [110]. Bu çözümler, y ekseni etrafındaki φ_y dönüklük açısı ile ilişkilidir. İlk çözüm, Eşitlik 2.2'den aşağıdaki gibi elde edilir [24]:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_x\\ \hat{\varphi}_y\\ \hat{\varphi}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{atan2}(-\hat{r}_{32},\hat{r}_{33})\\ \sin^{-1}\hat{r}_{31}\\ \mathrm{atan2}(-\hat{r}_{21},\hat{r}_{11})\end{pmatrix}\quad (|\hat{r}_{31}|\neq 1 \text{ ise}) \tag{2.56}$$

Burada, *atan2*, dört bölgeli *arctan* ters-trigonometrik fonksiyonuna karşılık gelmektedir [111]:

$$atan2(y,x)=\begin{cases} =+\frac{\pi}{2} & \Rightarrow\quad y>0 \text{ ve } x=0\\ =-\frac{\pi}{2} & \Rightarrow\quad y<0 \text{ ve } x=0\\ =\tan^{-1}\frac{y}{x} & \Rightarrow\quad x>0\\ =\tan^{-1}\frac{y}{x}+\pi & \Rightarrow\quad x<0 \text{ ve } y>0\\ =\tan^{-1}\frac{y}{x}-\pi & \Rightarrow\quad x<0 \text{ ve } y<0; \text{vb.}\end{cases} \tag{2.57}$$

$\sin\varphi_y=\sin(\pi-\varphi_y)$ ve $\cos\varphi_y=-\cos(\pi-\varphi_y)$ trigonometrik eşitliklerinden dolayı



Şekil 2.1 y ekseni etrafındaki φ_y dönüklük açısı ve tüm olası çözümleri [24]

dönüklük açıları için ikinci bir çözüm söz konusudur:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}' = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_x' \\ \hat{\varphi}_y' \\ \hat{\varphi}_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{atan2}(\hat{r}_{32}, -\hat{r}_{33}) \\ \text{sgn}(\pi) - \hat{\varphi}_y \\ \text{atan2}(\hat{r}_{21}, -\hat{r}_{11}) \end{pmatrix} \quad (|\hat{r}_{31}| \neq 1 \text{ ise}) \tag{2.58}$$

Burada, sgn, işaret fonksiyonunu ifade eder. Eğer $\varphi_y \geq 0$ ise $\text{sgn}(\pi) = \pi$; eğer $\varphi_y < 0$ ise $\text{sgn}(\pi) = -\pi$ olarak elde edilir. $\text{sgn}(\pi)$ fonksiyonu kullanılarak $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlı bir çözüm elde edilmesi sağlanır [24].

Eşitlik 2.56 ve 2.58 ile elde edilen çözümlerin her ikisi de doğrudur. Bu nedenle, y ekseni etrafındaki φ_y dönüklük açısı için herhangi bir ön bilgi söz konusu değilse, hangi çözümün doğru olup olmadığını sorgulamak anlamsızdır. φ_y açısının $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında tanımlı olduğunun bilindiği durumda, Eşitlik 2.58 ile verilen çözüm tanımlı aralığın dışında kaldığından, Eşitlik 2.56 ile verilen ilk çözüm dikkate alınır. Pratikte, genellikle bu varsayım göz önünde bulundurulur (bkz. Zeng [73]).

Yukarıda verilen her iki çözüm de $|r_{31}| \neq 1$ koşulu altında geçerlidir. φ_y dönüklük açısının $\pm\frac{\pi}{2}$ değerlerini alması durumunda ($|r_{31}| = 1$), kadran kilitlenmesi (*gimbal lock*) adı verilen, x ve z eksenlerinin birbirine paralel hale gelmesi ile dönüklük matrisinin serbestlik derecesinin bir azaldığı, özel bir durum meydana gelir (bkz. Velsink [6]). Bu durumda, Eşitlik 2.56 ve 2.58'de geçen tüm $\hat{r}$ elemanları sıfır değerini alır ve sonsuz sayıda çözüm söz konusu olur. x ve z eksenleri etrafındaki dönüklük açılarının belirlenebilmesi amacıyla, bu iki açıdan biri bilinen bir değere atanır [24]. Örneğin, φ_z dönüklük açısının 0 olduğu varsayılırsa Eşitlik 2.2'den dönüklük açıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_x \\ \hat{\varphi}_y \\ \hat{\varphi}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{atan2}(\hat{r}_{12}, -\hat{r}_{13}) \\ \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\hat{r}_{31} = 1 \text{ ise}) \tag{2.59a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_x \\ \hat{\varphi}_y \\ \hat{\varphi}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{atan2}(-\hat{r}_{12}, \hat{r}_{13}) \\ -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\hat{r}_{31} = -1 \text{ ise}) \tag{2.59b}$$

Daha önce dengelemeli çözüm sonucunda Eşitlik 2.40 ile hesaplanan kovaryans matrisinden, birim kuaterniyon elemanları ve ölçek çarpanı veya çarpanlarını içeren dönüşüm parametrelerinin kovaryans matrisinin nasıl elde edileceği gösterilmiştir. Sonraki bölümde, esas dönüşüm parametrelerinin (ötelemelerin, Euler dönüklük açılarının, ölçek çarpanlarının) kovaryans matrisinin kestirim sonuçları kullanılarak doğrudan nasıl elde edileceği açıklanmaktadır.

2.2.6.1 Benzerlik Dönüşümünde Parametrelerin Kovaryans Matrisinin Hesabı

Dengeleme sonucu elde edilen parametre kestirimleri ile hesaplanan Euler dönüklük açıları ve ölçek çarpanına ilişkin yeni $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$ parametre vektörünün Eşitlik 2.45 ile verilen alt vektörü $\hat{\boldsymbol{\xi}}'$ aşağıdaki yapıyı alır:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}' = \begin{pmatrix} \hat{k} & \hat{\varphi}_x & \hat{\varphi}_y & \hat{\varphi}_z \end{pmatrix}^T \tag{2.60}$$

Dönüşüm parametrelerinin kovaryans matrisini hesaplamak için, Eşitlik 2.47'de belirtildiği şekilde, varyans-kovaryans yayılma kuralı uygulanır. Bu eşitlikte geçen $\mathbf{F}_\xi$ Jacobi matrisinin Eşitlik 2.60 için düzenlenmiş hali Tablo 2.1'de verilmektedir.

Tablo 2.1 4×4 boyutlu $\mathbf{F}_\xi$ Jacobi matrisinin elemanları [24]

∂	q_0	q_1	q_2	q_3
k	$2\hat{q}_0$	$2\hat{q}_1$	$2\hat{q}_2$	$2\hat{q}_3$
φ_x	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_1\hat{c}_x + \hat{q}_0\hat{s}_x)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_0\hat{c}_x - \hat{q}_1\hat{s}_x)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_3\hat{c}_x - \hat{q}_2\hat{s}_x)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_2\hat{c}_x + \hat{q}_3\hat{s}_x)$
φ_y	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{s}_y)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(-\hat{q}_3 + \hat{q}_1\hat{s}_y)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_0 + \hat{q}_2\hat{s}_y)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(-\hat{q}_1 + \hat{q}_3\hat{s}_y)$
φ_z	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_3\hat{c}_z + \hat{q}_0\hat{s}_z)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_2\hat{c}_z + \hat{q}_1\hat{s}_z)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_1\hat{c}_z - \hat{q}_2\hat{s}_z)$	$-\frac{2}{\hat{k}\hat{c}_y}(\hat{q}_0\hat{c}_z - \hat{q}_3\hat{s}_z)$

Tablo 2.1'de, $\hat{q}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ ölçekli kuaterniyon elemanlarının kestirim değerine; $\hat{k}$, ölçek çarpanının kestirim değerine; c_j ve s_j, sırasıyla, $\cos\hat{\varphi}_j$ ve $\sin\hat{\varphi}_j$'ye karşılık gelmektedir $(j = x, y, z)$. $\mathbf{F}_\xi$ matrisinin elde edilişi Uygur vd. [24] içinde Ek-B'de verilmektedir.

3B dönüşüm örneklerinde, y eksenine ilişkin φ_y dönüklük açısı genellikle daha yüksek doğrulukla belirlenir. Bunun temel sebebi, Eşitlikler 2.56, 2.58 ve 2.59'da da açıkça görüldüğü üzere, φ_y açısının, dönüklük matrisinin diğer elemanlarından bağımsız olarak belirlenmesidir. Bu durum Tablo 2.1'de de açık biçimde görülmektedir. Jacobi matrisinin φ_x, φ_y ve φ_z'ye karşılık gelen elemanları incelendiğinde, φ_x ve φ_z'ye ilişkin katsayıların φ_y'den $\cos\varphi_y$'nin tersi kadar etkilendiği, bununla beraber φ_y dönüklük açısının ise bu açılar arasından yalnızca kendi tarafından etkilendiği görülmektedir.

2.2.6.2 Afin Dönüşümünde Parametrelerin Kovaryans Matrisinin Hesabı

$9p$ afin dönüşümü için $x,\ y,\ z$ eksenlerine ilişkin ölçek çarpanlarını ve Euler dönüklük açılarını içeren parametre alt vektörü

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}' = \begin{pmatrix} \hat{k}_x & \hat{k}_y & \hat{k}_z & \hat{\varphi}_x & \hat{\varphi}_y & \hat{\varphi}_z \end{pmatrix}^T \tag{2.61}$$

şeklini alır. Afin dönüşümü için Eşitlik 2.54 ile verilen kovaryans yayılma kuralı, bu yeni parametre vektörü için uyarlanırsa, yeni parametre vektörünün kovaryans matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}'\hat{\beta}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{\imath}\hat{\imath}} & \mathbf{C}_{\hat{\imath}\hat{\xi}'} \\ \mathbf{C}_{\hat{\xi}'\hat{\imath}} & \mathbf{C}_{\hat{\xi}'\hat{\xi}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\xi \end{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\xi^T \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Burada geçen $\mathbf{F}_\xi$ matrisi, üç ölçek çarpanının da göz önünde bulundurulduğu, Tablo 2.1'de verilen Jacobi matrisinin genişletilmiş halidir [25]:

$$\mathbf{F}_\xi = 2\left\{\begin{array}{cccccc} \hat{q}_0 & \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \hat{q}_3 & 0 & 0 \\ \hat{q}_0\hat{\mu}_y & \hat{q}_1\hat{\mu}_y & \hat{q}_2\hat{\mu}_y & \hat{q}_3\hat{\mu}_y & \dfrac{\hat{k}_x}{2} & 0 \\ \hat{q}_0\hat{\mu}_z & \hat{q}_1\hat{\mu}_z & \hat{q}_2\hat{\mu}_z & \hat{q}_3\hat{\mu}_z & 0 & \dfrac{\hat{k}_x}{2} \\ \dfrac{\hat{q}_1\hat{c}_x + \hat{q}_0\hat{s}_x}{w} & \dfrac{\hat{q}_0\hat{c}_x - \hat{q}_1\hat{s}_x}{w} & \dfrac{\hat{q}_3\hat{c}_x - \hat{q}_2\hat{s}_x}{w} & \dfrac{\hat{q}_2\hat{c}_x + \hat{q}_3\hat{s}_x}{w} & 0 & 0 \\ \dfrac{\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{s}_y}{w} & \dfrac{-\hat{q}_3 + \hat{q}_1\hat{s}_y}{w} & \dfrac{\hat{q}_0 + \hat{q}_2\hat{s}_y}{w} & \dfrac{-\hat{q}_1 + \hat{q}_3\hat{s}_y}{w} & 0 & 0 \\ \dfrac{\hat{q}_3\hat{c}_z + \hat{q}_0\hat{s}_z}{w} & \dfrac{\hat{q}_2\hat{c}_z + \hat{q}_1\hat{s}_z}{w} & \dfrac{\hat{q}_1\hat{c}_z - \hat{q}_2\hat{s}_z}{w} & \dfrac{\hat{q}_0\hat{c}_z - \hat{q}_3\hat{s}_z}{w} & 0 & 0 \end{array}\right\} \tag{2.63}$$

Burada, $w = -\hat{k}_x\hat{c}_y$'dir.

2.3 Küçültülmüş Koordinatlar ile Asimetrik Koordinat Dönüşümü

Koordinat dönüşümü probleminde matematiksel eşitliklerde geçen koordinat bileşenleri büyük değerlere sahip olabilir. Böylesi durumlarda, fonksiyonel modele bağlı olarak, normal denklemlerin çözümünde nümerik zorluklar ortaya çıkar. Eğer her bir iterasyon adımında normal denklem sistemine ilişkin katsayılar matrisi için kondisyon bozukluğu söz konusu ise, çalışmada ele alınan koordinat dönüşümü problemlerinin iteratif çözümü bu durumdan olumsuz olarak etkilenir.

Normal denklem katsayılar matrisinin kondisyonu, bu matrisin en büyük tekil değeri ile en küçük tekil değerinin oranına karşılık gelen kondisyon değeri ile ifade edilir. Koordinat dönüşümleri için normal denklem katsayılar matrisinin kondisyon değeri kontrol noktalarının dizilimine, koordinatlarına ve bu noktaların koordinat ağırlık katsayıları matrislerine bağlıdır [64]. Eğer bu kondisyon değeri büyükse, birbirini takip eden iki iterasyon sonucu elde edilen parametre kestirimleri arasındaki farklar artacaktır. Böylesi durumlarda oluşan bu fark, iteratif çözümlerde yakınsama hatası olarak isimlendirilir [64]. 3B simetrik jeodezik koordinat dönüşümü problemi için böylesi bir durum Zhou vd. [112] tarafından belirtilmiş olup; olası kondisyon hatalarının etkilerinin giderilmesi için Tikhonov regülizasyonu [113], kesikli tekil değer ayrıştırması [114], vb. yöntemler önerilmiştir. Ancak bu yöntemlerin iteratif çözüme uyarlanması ile, özellikle problemin simetrik yaklaşım altında ele alınması durumunda, hem hesap yükü artacak hem de algoritmalar daha karmaşık hale gelecektir. Bu problemin çözümü için, hem asimetrik hem de simetrik çözümlere oldukça kolay biçimde uyarlanabilen, Aydın vd. [64]'te belirtilen, koordinatların uygun biçimde küçültülmesi yolu izlenmiştir. Bu yöntemde, normal denklemler katsayılar matrisine konu olan başlangıç sistemi koordinatları, ağırlık merkezinin koordinatlarına göre ötelenir:

$$\begin{aligned} X_{1,c} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}, \quad x_{1,i} = X_{1,i} - X_{1,c} \\ Y_{1,c} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{1,i}, \quad y_{1,i} = Y_{1,i} - Y_{1,c} \\ Z_{1,c} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{1,i}, \quad z_{1,i} = Z_{1,i} - Z_{1,c} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Ancak, ağırlık merkezine ötelenmiş bu koordinatlar ile elde edilen kondisyon değeri yine büyük olabilir. Bu durumda, söz konusu ötelenmiş koordinatlar ayrıca, aşağıdaki gibi hesaplanan bir katsayı ile çarpılarak ölçeklendirilir:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1,i}^2 + y_{1,i}^2 + z_{1,i}^2\right)}} \tag{2.65}$$

Küçültülmüş koordinatlar ile çalışmak algoritmayı oldukça verimli hale getirmektedir. Örneğin, Grafarend ve Awange [71] tarafından verilen eşlenik nokta kümesi için 3B asimetrik benzerlik dönüşümü gerçekleştirildiğinde, normal denklemler katsayılar matrisinin kondisyon değeri, koordinatlar doğrudan kullanılırsa yaklaşık 1.2×10^{21}; ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlar kullanılırsa 3.1×10^{9}; koordinatların hem ötelenmesi hem de ölçeklendirilmesi durumunda ise yaklaşık 1.4×10^{2} olarak elde edilir.

Koordinatların bu şekilde küçültülmesi ile öteleme parametreleri elimine edilmez. Sadece fonksiyonel model bu ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlar ile oluşturularak ötelemeler yeniden tanımlanır. Diğer bir deyişle, küçültülmüş koordinatlar ile çalışırken dengeleme sonucu elde edilen parametre kestirimleri esas parametre vektörüne karşılık gelmez. Esas çözüm, her bir iterasyon adımında uygun matematiksel eşitlikler kullanılarak elde edilir.

Başlangıç sistemi koordinatlarının uygun biçimde küçültülmesi sonucu Eşitlik 2.21 ile verilen iki sistem arasındaki koordinat dönüşümü eşitliği aşağıdaki yapıyı alır:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t}_c + \mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{b} \otimes \mathbf{X}_{1,c}) = \mathbf{t}_c + \mathbf{H}\mathbf{x}_1 \tag{2.66}$$

Burada, $\mathbf{t}_c$, küçültülmüş koordinatlar için öteleme parametreleri vektörünü; $\mathbf{X}_{1,c}$ başlangıç sistemi için $\begin{pmatrix} X_{1,c} & Y_{1,c} & Z_{1,c} \end{pmatrix}^T$ ağırlık merkezi koordinat vektörünü; $\mathbf{x}_1$, küçültülmüş başlangıç sistemi koordinat vektörünü; $\mathbf{b}$, $n\times1$ boyutlu elemanları 1 olan sütun vektörü; $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ ise, sırasıyla, orjinal başlangıç ve hedef sistem koordinat vektörlerini belirtmektedir.

2.3.1 Küçültülmüş Koordinatlar ile Üç Boyutlu Benzerlik Dönüşümü

3B benzerlik dönüşümü için, koordinatların hem ağırlık merkezine ötelendiği hem de ölçeklendirildiği durumda, dönüşüme ilişkin fonksiyonel modele Taylor açınımı uygulanırsa, i noktası için

$$\underbrace{\mathbf{X}_{2,i} - \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{x}_{1,i}}_{\tilde{\mathbf{y}}} - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{J}_{c,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_c \\ \boldsymbol{\xi}_c - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{c,i}\boldsymbol{\beta}_c \tag{2.67}$$

doğrusal dönüşüm modeli elde edilir. Burada, $\mathbf{x}_{1,i}$, başlangıç sistemine ilişkin küçültülmüş koordinat vektörüne; $\boldsymbol{\beta}_c$,

$$\boldsymbol{\beta}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_c \\ \boldsymbol{\xi}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{c,x} & t_{c,y} & t_{c,z} & \delta q_0 & \delta q_1 & \delta q_2 & \delta q_3 \end{pmatrix}^T \tag{2.68}$$

şeklinde ifade edilen parametre vektörüne; $\mathbf{J}_{c,i}$ matrisi, Eşitlik 2.27 ile verilen $\mathbf{J}$ matrisinden farklı olarak, ağırlık merkezine ötelenmiş ve ölçeklendirilmiş koordinatlar ile oluşturulan, $\mathbf{A}_{c,i}$ katsayılar matrisinin 3×4 boyutlu alt matrisine karşılık gelmektedir:

$$\mathbf{J}_{c,i} = \eta \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_0\mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_1\mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_2\mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_3\mathbf{x}_{1,i} \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

Burada, $\mathbf{J}_{c,i}$ matrisinin elemanları $\tilde{\mathbf{J}}_{c,j} = \dfrac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial q_j}(\mathbf{X}_{1,i} - \mathbf{X}_{1,c})\eta = \tilde{\mathbf{J}}_j \mathbf{x}_{1,i}\eta$ şeklinde hesaplanır (j=0, 1, 2, 3). Buradan da görüldüğü üzere koordinatların η katsayısı ile ölçeklendirilmesi, fonksiyonel modelin parametre alt vektörü $\boldsymbol{\xi}$'ye göre doğrusallaştırılması sırasında gerçekleştirilmektedir. Küçültülmüş koordinatlar ile gerçekleştirilen $7p$ koordinat dönüşümü sonucu elde edilen parametre vektörü, esas koordinatlar ile elde edilen parametre kestirimlerine karşılık gelmeyeceğinden, Eşitlik 2.24 ile verilen parametre vektörünü elde etmek amacıyla aşağıdaki adımlar izlenir:

1. İlk olarak parametre vektörünün alt vektörü $\boldsymbol{\xi}_c$ ele alınır. Bu vektör aracılığıyla ölçekli kuaterniyon elemanlarını içeren $\boldsymbol{\xi}$ parametre alt vektörü aşağıda belirtildiği gibi hesaplanır:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \eta(\hat{\boldsymbol{\xi}}_c - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c) = \eta\begin{pmatrix}\delta\hat{q}_0 & \delta\hat{q}_1 & \delta\hat{q}_2 & \delta\hat{q}_3\end{pmatrix}^T \tag{2.70}$$

2. Daha sonra öteleme parametreleri ele alınır. Orjinal koordinatlara ilişkin öteleme parametrelerini elde etmek amacıyla, ilk olarak Eşitlik 2.66 ile verilen dönüşüm eşitliği

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t}_c + \mathbf{R}_k(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_{1,c}) \tag{2.71}$$

şeklinde yazılır ve eşitlik düzenlenirse, $\mathbf{t}$ esas öteleme parametreleri vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{t} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{R}_k\mathbf{X}_1 = \mathbf{t}_c - \mathbf{R}_k\mathbf{X}_{1,c} \tag{2.72}$$

Elde edilen $\mathbf{t}$ vektörüne ilişkin bu eşitlik (bilinmeyen) parametre vektörü $\boldsymbol{\beta}_c = \begin{pmatrix}\mathbf{t}_c^T & \boldsymbol{\xi}^T\end{pmatrix}^T$'ye göre doğrusallaştırılırsa, $\mathbf{t}$'nin kestirim değerleri cinsinden ifadesi

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_c - \tilde{\mathbf{R}}_k\mathbf{X}_{1,c} - \mathbf{J}_m\left(\hat{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}\right) \tag{2.73}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{J}_m$, Eşitlik 2.27 ile ağırlık merkezi koordinatları kullanılarak oluşturulur:

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{J}}_0\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_1\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_2\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_3\mathbf{X}_{1,c}\end{pmatrix} \tag{2.74}$$

3. Son olarak, küçültülmüş koordinatlar ile gerçekleştirilen dengeleme sonucu elde edilen kovaryans matrisi ele alınır. $\mathbf{C}_{\hat{\beta}_c\hat{\beta}_c}$ kovaryans matrisinden, kovaryans yayılma kuralı uygulanarak, Eşitlik 2.44'e karşılık gelen $\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ kovaryans matrisi elde edilir:

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \mathbf{F}_m\mathbf{C}_{\hat{\beta}_c\hat{\beta}_c}\mathbf{F}_m{}^T \tag{2.75}$$

Burada, 7×7 boyutlu $\mathbf{F}_m$ matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\mathbf{F}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\eta \mathbf{J}_m \\ \mathbf{0} & \eta \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

Bu bölümde başlangıç sistemi koordinatlarının uygun biçimde küçültülmesi ile 3B benzerlik dönüşümü probleminin ne şekilde ele alınacağı açıklanmıştır. Bununla beraber, her iki sistem koordinatlarının da ağırlık merkezi koordinatlarına göre ötelendiği durum Aydın vd. [64] tarafından irdelenmiştir. Bu durumda, esas öteleme parametreleri vektörü

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_c + \mathbf{X}_{2,c} - \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{X}_{1,c} - \mathbf{J}_m \left(\hat{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right) \tag{2.77}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{X}_{2,c}$, hedef sistemin ağırlık merkezinin koordinat vektörünü belirtmektedir. Her iki çözüm ile özdeş parametre kestirimleri elde edilmektedir.

2.3.2 Küçültülmüş Koordinatlar ile Üç Boyutlu Afin Dönüşümü

Bir önceki bölümde ele alınan metodoloji $9p$ afin dönüşümü için göz önünde bulundurulursa, i noktası için doğrusal dönüşüm modeli

$$\underbrace{\mathbf{X}_{2,i} - \tilde{\mathbf{R}}_k \tilde{\mathbf{L}}_k \mathbf{x}_{1,i}}_{\tilde{\mathbf{y}}} - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{J}_{c,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_c \\ \boldsymbol{\xi}_c - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{c,i} \boldsymbol{\beta}_c \tag{2.78}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlikte geçen $\boldsymbol{\beta}_c$,

$$\boldsymbol{\beta}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_c \\ \boldsymbol{\xi}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{c,x} & t_{c,y} & t_{c,z} & \delta q_0 & \delta q_1 & \delta q_2 & \delta q_3 & \delta \mu_y & \delta \mu_z \end{pmatrix}^T \tag{2.79}$$

şeklinde ifade edilen parametre vektörüne; $\mathbf{J}_{c,i}$ matrisi, Eşitlik 2.32 ile verilen $\mathbf{J}$ matrisinden farklı olarak, ağırlık merkezine öteleme ve ölçeklendirme yoluyla küçültülmüş koordinatlar ile oluşturulan, $\mathbf{A}_{c,i}$ katsayılar matrisinin 3×6 boyutlu alt matrisine karşılık gelmektedir:

$$\mathbf{J}_{c,i} = \eta \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_0 \mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_1 \mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_2 \mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_3 \mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_y \mathbf{x}_{1,i} & \tilde{\mathbf{J}}_z \mathbf{x}_{1,i} \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

Burada, $\mathbf{J}_{c,i}$ matrisinin elemanları, $\tilde{\mathbf{J}}_j = \dfrac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial \xi_j} (\mathbf{X}_{1,i} - \mathbf{X}_{1,c}) \eta = \tilde{\mathbf{J}}_j \mathbf{x}_{1,i} \eta$ şeklinde hesaplanır (j=1, . . ., 6). $9p$ afin dönüşümü için esas koordinatlara karşılık gelen parametre kestirimlerini ve kovaryans matrisini elde etmek için bir önceki bölümdeki izlenen adımlar, afin dönüşümü için uyarlanarak tekrar edilir:

1. Ölçekli kuaterniyon elemanlarını ve bağıl ölçek çarpanlarını içeren $\boldsymbol{\xi}$ parametre alt

vektörü aşağıda belirtildiği gibi hesaplanır:

$$\hat{\xi} - \tilde{\xi} = \eta(\hat{\xi}_c - \tilde{\xi}_c) = \eta\begin{pmatrix}\delta\hat{q}_0 & \delta\hat{q}_1 & \delta\hat{q}_2 & \delta\hat{q}_3 & \delta\hat{\mu}_y & \delta\hat{\mu}_z\end{pmatrix}^T \tag{2.81}$$

2. Öteleme parametreleri vektörü **t** belirlenir:

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_c - \tilde{\mathbf{R}}_k\tilde{\mathbf{L}}_k\mathbf{X}_{1,c} - \mathbf{J}_m\left(\hat{\xi} - \tilde{\xi}\right) \tag{2.82}$$

   Burada, $\mathbf{J}_m$, Eşitlik 2.32 ile belirtildiği şekilde ancak ağırlık merkezi koordinatları kullanılarak oluşturulur:

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{J}}_0\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_1\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_2\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_3\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_y\mathbf{X}_{1,c} & \tilde{\mathbf{J}}_z\mathbf{X}_{1,c}\end{pmatrix} \tag{2.83}$$

3. Son olarak, Eşitlik 2.52 ile verilen kovaryans matrisinin elde edilmesi için, Eşitlik 2.75'te belirtildiği şekilde kovaryans yayılma kuralı uygulanır. $9p$ dönüşüm modeli için, Eşitlik 2.69 ile verilen $\mathbf{F}_m$ Jacobi matrisi 9×9 boyutlu olur.

Her iki sistem koordinatlarının kendi ağırlık merkezlerine ötelenerek küçültülmüş olması durumunda, esas koordinatlara ilişkin öteleme parametreleri vektörü

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_c + \mathbf{X}_{2,c} - \tilde{\mathbf{R}}_k\tilde{\mathbf{L}}_k\mathbf{X}_{1,c} - \mathbf{J}_m\left(\hat{\xi} - \tilde{\xi}\right) \tag{2.84}$$

şeklinde elde edilir [25]. Bu çalışma kapsamında $9p$ dönüşüm modeli için yalnızca başlangıç sistemi koordinatları küçültülmüş olmakla beraber, her iki çözüm ile de özdeş parametre kestirimleri elde edilmektedir.

2.4 Yaklaşık Değer Belirleme Problemi

Üç boyutlu koordinat dönüşümü probleminin çözümü, daha önce de belirtildiği üzere, dönüklüklerin diferansiyel anlamda küçük ve ölçek çarpanlarının bire yakınsadığı durumlar dışında, doğrusal olmayan bir denklem sisteminin çözümünü gerektirir (İlerleyen bölümlerde ele alınacağı üzere, simetrik koordinat dönüşümü ise doğası gereği her durumda doğrusal değildir). Bu doğrusalsızlık nedeniyle parametre kestirimi, iteratif bir çözüm gerektirir.

Parametrelerin büyük olduğu durumlarda nümerik açıdan karşılaşılan en önemli zorluk, iterasyon için yaklaşık başlangıç değerlerinin belirlenmesidir. Kuaterniyon tabanlı koordinat dönüşümü algoritmasının en önemli avantajı bu yaklaşık değer belirleme problemini ortadan kaldırmasıdır. İteratif çözüm için ölçekli kuaterniyon elemanlarına ilişkin başlangıç değerleri

$$q_{0,0} = 1, \quad q_{1,0} = q_{2,0} = q_{3,0} = 0 \tag{2.85}$$

alınarak 3B benzerlik dönüşümü için her türlü dönüklük açısı ve ölçek çarpanı için nihai çözüm birkaç iterasyon sonucunda elde edilir [24, 70]. Bununla beraber, jeodezik koordinat dönüşümü problemlerinin çözümünde kondisyon bozukluğundan kaynaklı nümerik zorluklarla karşılaşılır. Bölüm 2.3'te verildiği şekilde, küçültülmüş koordinatlar ile çalışılarak bu kondisyon hatalarının üstesinden büyük ölçüde gelinebilmektedir. Bununla beraber, $9p$ afin dönüşümünde kontrol noktalarının dağılımının uygun olmadığı veya ölçek değişiminin oldukça büyük olduğu bazı olağan dışı durumlarda, küçültülmüş koordinatlar ile çalışılsa bile normal denklemler sisteminin çözümü mümkün olmayabilir ve iteratif çözüm nihai çözüme yakınsamayabilir. Bu gibi durumlarda çözüm elde edebilmek için, Eşitlik 2.85 yerine daha iyi belirlenmiş yaklaşık değerlere ihtiyaç duyulur. Bu özel durumlar nedeniyle çalışma kapsamında ele alınan $9p$ dönüşüm algoritmasında, $7p$ dönüşümden farklı olarak, yaklaşık değer belirleme problemi göz önünde bulundurulmaktadır. Burada, ölçekli kuaterniyon elemanlarına ve bağıl ölçek çarpanlarına ilişkin yaklaşık değerlerin belirlenmesinde aşağıdaki adımlar takip edilmektedir [25]:

1. Eşitlik 2.3 ile verilen $9p$ afin dönüşüm modelinden n sayıda kontrol noktasının başlangıç ve hedef sistemi koordinatları aracılığıyla ölçek çarpanlarının yaklaşık değerlerini belirlemek için, $n-1$ sayıda aşağıdaki gözlem eşitliği oluşturulur:

$$\begin{aligned} b_i =& \Delta X_{2,i}^2 + \Delta Y_{2,i}^2 + \Delta Z_{2,i}^2 = \begin{bmatrix} \Delta X_{1,i}^2 & \Delta Y_{1,i}^2 & \Delta Z_{1,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x^2 \\ k_y^2 \\ k_z^2 \end{bmatrix} \\ =& \mathbf{B}_i \boldsymbol{\zeta} \quad (i = 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.86}$$

   Burada, Δ, ağdaki ilk noktaya (ya da ağdaki herhangi bir noktaya) göre belirlenen koordinat farkını ifade etmektedir.

2. $n-1$ sayıda denklemden oluşan $(\mathbf{B}^T\mathbf{B})\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{B}^T\mathbf{b} = \mathbf{0}$ normal denklem sisteminin çözümü ile ölçek çarpanları belirlenir. Bu değerler yaklaşık değerler $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$ olarak alınarak, Eşitlik 2.16'dan bağıl ölçek çarpanlarının yaklaşık değerleri $(\tilde{\mu}_y, \tilde{\mu}_z)$ belirlenir.

3. Her bir $\mathbf{X}_{1,i}$ vektörü $\tilde{\mathbf{L}}_k = diag\begin{pmatrix} 1 & \tilde{\mu}_y & \tilde{\mu}_z \end{pmatrix}$ ile sağdan çarpılır. Elde edilen bu başlangıç sistemi koordinatları ile hedef sistemi koordinatları arasında kuaterniyon tabanlı (ağırlıksız) benzerlik dönüşümü gerçekleştirilerek, ölçekli kuaterniyon elemanları elde edilir (bkz. Uygur vd. [24]). Bu elemanlar yaklaşık değer olarak

atanarak, yaklaşık parametre vektörü belirlenir:

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 & \tilde{q}_1 & \tilde{q}_2 & \tilde{q}_3 & \tilde{\mu}_y & \tilde{\mu}_z \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

3
SİMETRİK KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ

Bir önceki bölümde 3B koordinat dönüşümü problemi yalnızca gözlenen büyüklüklerin (hedef sistem koordinat vektörünün) hatalarının göz önünde bulundurulduğu, asimetrik dönüşüm modeli altında ele alınmıştır. Ancak gerçekte, her iki sistem koordinatları da bir dengeleme hesabı sonucu elde edilmiş, dolayısıyla rasgele değişkenler olabilir. Bu bölümde, her iki sistem koordinat hatalarının da dikkate alındığı koordinat dönüşümü probleminin çözümü irdelenmiştir.

Başlangıç sistemi koordinat vektörü ($\mathbf{X}_1$) ve hedef sistemi koordinat vektörü ($\mathbf{X}_2$) arasındaki matematiksel ilişki n sayıda nokta için Eşitlik 2.21 ile tanımlanır. Yeterli sayıda kontrol noktası olması durumunda $\mathbf{t}$ vektörü ve $\boldsymbol{\Lambda}$ matrisinin elemanları en küçük kareler (EKK) yöntemiyle elde edilir. Bu eşlenik noktaların her iki sistemdeki koordinatları rasgele değişkendir. Bu nedenle, Eşitlik 2.21'deki koordinatlara -$\mathbf{e}$ kadar düzeltme getirilir ve her iki sistem koordinat hataları için öngörülen dağılım fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}) \qquad (3.1)$$

modeli elde edilir. Bu dönüşüm eşitliğinin her iki yanı koordinatların rasgele hatalarıyla yüklü olduğu için, uygulamada simetrik koordinat dönüşümü olarak adlandırılır [31].

Simetrik koordinat dönüşümü, doğrusal olmayan EKK dengelemesine dayanır [31]. Koordinat hatalarının istatistiksel hata dağılımları göz önüne alındığında, Eşitlik 3.1'den doğrusal olmayan Gauss-Helmert modeli bulunur. Pope [115] tarafından doğrusallaştırma işleminde dikkat çekilen noktalar göz önünde bulundurularak, Lenzmann ve Lenzmann [116], Nietzel ve Petrovic [117] ve Nietzel [52] en uygun doğrusallaştırma işlemini göstermişlerdir.

Simetrik koordinat dönüşümü, katsayıların da hatalı olduğu dengeleme modeli (EIV:Errors-in-Variables) şeklinde de gösterilebilir. Bu modelin fonksiyonel kısmı, Eşitlik 3.1'den aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{E})\boldsymbol{\beta} \tag{3.2}$$

Burada, **A**, başlangıç sistemi koordinatlarının bir fonksiyonu olan (simetrik koordinat dönüşümü problemlerinde genellikle data matris olarak adlandırılan) katsayılar matrisi; **E**, **A**'ya ilişkin hata matrisi ve $\boldsymbol{\beta}$, bilinmeyen dönüşüm parametreleri vektörüdür. EIV modeli altında bilinmeyen parametrelerin kestirimi, toplam EKK (TLS - Total Least Squares) adı verilen yöntemle gerçekleştirilir. Bu yöntem, ilk kez Golub ve van Loan [32] tarafından ortaya konmuş; jeodezik problemlerde ilk kez Felus [33] tarafından kullanılmış ve koordinat dönüşümü problemine ilk olarak Akyilmaz [34] tarafından uyarlanmıştır. Kısa bir süre sonra, Schaffrin ve Wieser [35], problemin çözümünde stokastik modele ilişkin kısıtlamaları ortadan kaldırarak, ağırlıklı toplam EKK (WTLS - Weighted TLS) çözümünü ortaya koymuştur. Bu çalışmadan sonra TLS çözüm algoritmalarına ilişkin oldukça fazla sayıda jeodezik çalışma yapılmıştır.

Toplam EKK yöntemi, Eşitlik 3.2'den elde edilen koşul denklemleri aracılığıyla hataların ağırlıklı karelerinin toplamını minimum yapan parametreleri, yani en uygun parametre kestirimi çözümünü sağlar. Bunun için bir Lagrange fonksiyonu kullanılır. Bu Lagrange fonksiyonundan elde edilen Euler koşul denklemlerinin doğrudan çözümü verecek özellikte olmaması nedeniyle, çözüm iteratif olarak yapılır. Jeodezide toplam EKK dengelemesi adı verilen bu iteratif çözüm işlemi için geliştirilen algoritmalar, iki alt başlık altında ele alınabilir:

1. Yalnızca parametre kestiriminin girdi ve çıktı olduğu iteratif algoritmalar (Schaffrin ve Wieser [35], Tong vd. [36] ve Snow [41]'in ilk algoritması)

2. Hem parametre kestiriminin hem de **E** hata matrisinin girdi ve çıktı olduğu iteratif algoritmalar (Amiri-Simkooei ve Jazaeri [45], Shen vd. [118] ve Snow [41]'in ikinci algoritması)

Her iki başlık altında kullanılan algoritmaların kestirim sonuçları, yakınsama hızları ve zamanları arasında anlamlı farklar yoktur. Bu algoritmalara ilişkin ayrıntılı bilgi Fang [37] ve Snow [41]'de verilmiştir. Bu algoritmalar ile çalışılırken önemli bir zorluk, **A** matrisi ve $\mathbf{X}_2$ koordinat vektörüne ilişkin bir ağırlık matrisine olan ihtiyaçtır. **A** data matrisinin bazı elemanları hatalı, bazıları hatasız ve bazıları birden fazla sayıda geçebildiği için, toplam EKK dengelemesinde stokastik modelin klasik EKK dengelemesine göre oluşturulması özel bir çabayı gerektirir. Koordinat dönüşümü problemleri için uygun ağırlık matrisi yapıları bulunmaktadır [37, 41]. Ayrıca, Xu vd. [42] tarafından ortaya konan kısmi EIV modeli de bu amaçla oluşturulmuş bir modeldir. Öte yandan, Nietzel [52] tarafından Eşitlik 3.1'deki model için tanımlanan iteratif EKK dengelemesinin toplam EKK dengelemesine eşit olduğu gösterilmiştir [53]. Söz konusu iteratif EKK dengelemesi, yukarıda belirtilen ikinci toplam EKK algoritmasına karşılık gelmektedir. Bu dengeleme işlemi simetrik koordinat dönüşümünde önemli bir avantaja sahiptir. Bu dengelemede her iki sisteme ilişkin bilinen kovaryans matrisleri, ek bir işleme gerek kalmaksızın dengelemenin stokastik modelinde doğrudan kullanılabilmektedir [64, 70]. Bu nedenle, (doğrusal olmayan) Gauss-Helmert modeli, toplam EKK dengelemesi için de oldukça uygun bir kestirim modelidir.

Bu bölümde, simetrik koordinat dönüşümünün toplam EKK çözümü irdelenmiş, asimetrik ve simetrik koordinat dönüşümleri kuramsal olarak karşılaştırılmış ve varyans bileşenlerinin bilinmeyen olduğu simetrik koordinat dönüşümü açıklanarak, söz konusu varyans bileşenlerinin nasıl çözüleceği ortaya konmuştur.

3.1 Simetrik Koordinat Dönüşümünde Toplam EKK Yöntemi

Simetrik koordinat dönüşümü probleminin çözümü toplam EKK olarak ifade edilmekle beraber, her iki sisteme ilişkin hataların göz önünde bulundurulduğu benzer bir dengeleme modeli, jeodezik literatürde genel EKK adı altında yer almaktadır. Genel EKK çözümüne ilişkin ayrıntılı bilgi Ghilani ve Wolf [54] tarafından verilmektedir. Genel EKK yöntemi aslında eksik bir doğrusallaştırma işlemine dayanmaktadır. Aydın [53]'te gösterildiği üzere bu yöntem, başlangıç sistemi koordinatlarının ve bilinmeyen parametrelerin doğrusallaştırılmasına denk bir çözüme ilişkindir. Daha doğru çözüm için, toplam EKK yöntemine eşit olduğu gösterilmiş olan aşağıdaki doğrusallaştırma adımlarına göre gerçekleştirilen iteratif bir EKK dengeleme yöntemi izlenir.

Eşitlik 3.1 aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_1) = \mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} = \mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_1) = (\mathbf{A}_\xi - \mathbf{E}_\xi)\boldsymbol{\xi} \tag{3.3}$$

Burada, $\boldsymbol{\xi}$, parametre vektörü $\boldsymbol{\beta}$'nın ölçek ve dönüklük elemanlarından oluşan alt vektörüdür. Bu eşitliğin doğrusal olmamasının asıl nedeni, $\mathbf{He}_1$ terimidir. Denklem sistemini doğrusal hale getirmek amacıyla Eşitlik 3.3'e Taylor açınımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 &= \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} + \partial \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\mathbf{e}}_1) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_1)}{\partial \boldsymbol{\xi}^T}\right|_{\tilde{\xi}, \tilde{\mathbf{e}}_1} (\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \\ &\quad + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_1)}{\partial \mathbf{e}_1^T}\right|_{\tilde{\xi}, \tilde{\mathbf{e}}_1} (\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_1) \\ &= \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} + \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{X}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_1) + (\mathbf{A}_\xi - \mathbf{E}_{\tilde{\xi}})(\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_1)\end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. Burada, "∼" indisi yaklaşık değeri ifade etmektedir. Eşitlik 3.4 yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1 &= \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} + (\mathbf{A}_\xi - \mathbf{E}_{\tilde{\xi}})(\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}) + (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{I} & (\mathbf{A}_\xi - \mathbf{E}_{\tilde{\xi}}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}}_{\beta'} + (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) \\
&= (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{E}})\boldsymbol{\beta}' + (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Bu eşitlikte,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{I} & (\mathbf{A}_\xi - \mathbf{E}_{\tilde{\xi}}) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

denirse,

$$\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1 - (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) = \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}' \tag{3.7}$$

bulunur. Elde edilen model Eşitlik 3.1 ile beraber göz önünde bulundurulursa, yaklaşık olarak doğrusallaştırılmış Gauss-Helmert modeli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1 - (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) = \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}', \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}) \tag{3.8}$$

Söz konusu Gauss-Helmert modelinde $\tilde{\mathbf{A}}$, yaklaşık olarak düzeltilmiş (başlangıç sistemi koordinatlarına göre oluşturulmuş) data matrisini göstermektedir. Eşitlik 3.8'de ölçüler $\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1$ ile ifade edilmektedir. EKK yöntemi ile bu eşitlikte hem $\mathbf{e}_1$ hem de $\boldsymbol{\beta}'$ kestirilir. Bir sonraki iterasyonda $\mathbf{e}_1$'in bu kestirim değerleriyle başlangıç sistemi koordinatları düzeltilerek, düzeltilmiş $\mathbf{A}$ matrisi belirlenir. $\boldsymbol{\beta}'$ ile de $\boldsymbol{\xi}$ elde edilir. Belirlenen $\boldsymbol{\xi}$ kullanılarak $\mathbf{H}$ matrisi yeniden oluşturulur. Yeni düzeltilmiş $\mathbf{A}$ ve belirlenen $\mathbf{H}$ ile Eşitlik 3.8'de verilen model yeniden oluşturularak, EKK yöntemi uygulanır. Bu şekilde iterasyon sürdürülerek, bir önceki iterasyondaki parametrelerle bulunan parametreler karşılaştırılır. Farklar küçükse iterasyon sonlandırılır. Böylesi bir iterasyon işlemi algoritması Tablo 3.1'de verilmiştir.

Bununla birlikte, $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_{\tilde{\xi}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ ve $\mathbf{E}_{\tilde{\xi}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{e}}_1$ olduğu için, Eşitlik 3.5 aşağıdaki biçimde de oluşturulabilir:

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{A}_{\tilde{\xi}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{t} + (\mathbf{A}_\xi - \mathbf{E}_{\tilde{\xi}})\boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}_{\tilde{\xi}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{e}}_1 + (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) \tag{3.9}$$

Tablo 3.1 Doğrusal olmayan Gauss-Helmert modelinin iteratif EKK dengelemesi biçimindeki toplam EKK algoritması

Başlangıç:($\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ ve $\tilde{\mathbf{e}}$)
$7p$ kuaterniyon tabanlı dönüşüm: $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$=(1 0 0 0)^T, $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$
$9p$ kuaterniyon tabanlı dönüşüm: $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ için bkz. Bölüm 2.4, $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$
Tekrarla i=0, 1, ...
$\mathbf{A}_{i-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{I}_c & (\mathbf{A}_{\xi} - \mathbf{E}_{\xi,i-1})\end{bmatrix}$ (düzeltme getirilmiş $\mathbf{x}_1$ koordinatları ile)
$\mathbf{H}_{i-1} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_{i-1}$, $\mathbf{y}_{i-1} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{H}_{i-1}\mathbf{X}_1$, $\mathbf{P}_{i-1} = (\mathbf{Q}_2 + \mathbf{H}_{i-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{H}_{i-1}^T)^{-1}$
$\boldsymbol{\beta}_i' = (\mathbf{A}_{i-1}^T\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{A}_{i-1})^{-1}\mathbf{A}_{i-1}^T\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{y}_{i-1}$
$\mathbf{e}_{1,i} = -\mathbf{Q}_1\mathbf{H}_{i-1}^T\mathbf{P}_{i-1}(\mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{A}_{i-1}\boldsymbol{\beta}_i')$ (bkz. Koch [81], s.214)
Eğer maks.($\lvert\boldsymbol{\beta}_i' - \boldsymbol{\beta}_{i-1}'\rvert$) $< 10^{-12}$ ise, $m = i$, iterasyonu sonlandır.
Toplam En Küçük Kareler Çözümü:
Parametre vektörü: $\hat{\boldsymbol{\beta}}' = \boldsymbol{\beta}_m'$
Hata vektörleri: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_{1,m}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_{m-1}(\mathbf{y}_{m-1} - \mathbf{A}_{m-1}\boldsymbol{\beta}_m')$
Sonsal Varyans: $\hat{\sigma}_0^2 = (\hat{\mathbf{e}}_1^T\mathbf{Q}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2^T\mathbf{Q}_2\hat{\mathbf{e}}_2)/f$

Eşitlik 3.9 düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{U}\otimes\mathbf{t} + (\mathbf{A}_{\xi} - \mathbf{E}_{\tilde{\xi}})\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1)\\ &= \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{U}\otimes\mathbf{I} & (\mathbf{A}_{\xi} - \mathbf{E}_{\tilde{\xi}})\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{E}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{t}\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1)\\ &= (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{E}})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1)\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Böylece, Eşitlik 3.8 ile verilen model aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{e}}_1 - (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) = \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}, \sigma_0^2\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2\end{bmatrix} = \sigma_0^2\mathbf{Q}) \tag{3.11}$$

Bu model için iteratif algoritma Tablo 3.1'deki ile özdeştir. Ancak, ölçü vektörü yerine $\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{e}}_1$ kullanılır ve $\boldsymbol{\beta}'$ yerine $\boldsymbol{\beta}$ kestirilir. Aydın vd. [64]'e göre, Eşitlik 3.8 modeli ile çalışmak, $\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1$ ölçü vektörü, $\mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{e}}_1$ ölçü vektörüne göre daha küçük olduğundan, normal denklem katsayılar matrisindeki kondisyon hatalarının sonuçlara daha az yansıması açısından nümerik olarak daha doğrudur. Söz konusu nümerik hatalar, Aydın vd. [53] tarafından verilen algoritmalara göre, $\mathbf{X}_1$ koordinatlarının uygun biçimde küçültülmesi ve ölçeklendirilmesi ile de giderilebilir (bkz. Bölüm 2.3). Eşitlik 3.11 biçimindeki doğrusallaştırılmış Gauss-Helmert modeli ile yapılan iteratif çözüm sonucunda (m. iterasyonda) bilinmeyen parametre vektörü,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}(\mathbf{X}_2 - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{e}}_1) \tag{3.12}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\tilde{\mathbf{A}}$, $(m-1)$. iterasyonda düzeltilmiş katsayılar matrisine karşılık gelir:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{m-1} \tag{3.13}$$

$\mathbf{P}$ ise, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{m-1}$ matrisine göre oluşturulmuş ağırlık matrisidir:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{Q}_2 + \hat{\mathbf{H}}^T\mathbf{Q}_1\hat{\mathbf{H}})^{-1} \tag{3.14}$$

Birim ağırlıklı ölçünün varyansı, Tablo 3.1'de gösterildiği gibi,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{f}(\hat{\mathbf{e}}_1^T\mathbf{Q}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2^T\mathbf{Q}_2\hat{\mathbf{e}}_2) \tag{3.15}$$

şeklinde belirlenir. $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{e}}_1$ hata vektörü,

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{X}_2 - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{3.16}$$

şeklinde de belirlenebilir. Bu hata vektörü ise, $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{E}}_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}}$ olduğu için, $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{E}}$ ile

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{3.17}$$

olur. Buna göre, Eşitlik 3.15 ile verilen varyans kestirimi, aşağıdaki biçimi alır:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{f}\hat{\boldsymbol{\gamma}}^T\mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{f}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T\mathbf{P}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{3.18}$$

Bilinmeyenlerin kovaryans matrisi ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_0^2(\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}) \tag{3.19}$$

3.2 Simetrik Koordinat Dönüşümünde Varyans Bileşenlerinin Kestirimi

3.2.1 Varyans Bileşen Kestirimi

Farklı kaynaklardan gelen ölçülerin bir dengeleme modelinde birleştirilmesi yalnız fonksiyonel modelde değil, stokastik modelde de düşünülmesi gereken bir problemdir. Bu amaçla, farklı kaynaklardaki bu ölçü gruplarının (ko)varyans bileşenleri de dengelemede bilinmeyen olarak geçer ve diğer bilinmeyenlerle birlikte kestirilirler. Böylece en uygun birleştirme sağlanır.

Varyans bileşenlerinin kestirimi ilk kez 19. yüzyılın sonlarında R. F. Helmert (1843-1917) tarafından ele alınmıştır. Literatürde "Helmert yöntemi" olarak adlandırılan bu yöntem halen kullanılmaktadır; Förstner yöntemi ile Horn ve Horn [78] tarafından önerilen IAUE (Iterative Almost Unbiased Estimation) aslında özdeş yöntemlerdir [87]. Varyans bileşenlerinin kestirimi, Rao [80] tarafından Helmert'ten yaklaşık bir yüzyıl sonra istatistikte ele alınmıştır. Rao'nun yöntemi MINQUE (Minimum Quadratic Unbiased Estimation) olarak adlandırılır. Bu yöntem, ölçülerin normal dağılımlı olması durumunda, Helmert ve IAUE yöntemleri ile özdeş sonuç verir. Jeodezi literatüründe yaygın olarak kullanılan yöntemlerden bir diğeri, BIQUE (Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation) yöntemidir [81]. İteratif çözümlerde bir takım farklılıklar oluşabilse de bu yöntemle yine Helmert ve IAUE yöntemleri ile özdeş sonuçlar elde edilir. Jeodezi literatüründe geçen önemli yöntemlerden bir diğeri ise LS-VCE (Least Squares-Variance Components Estimation) yöntemidir [82, 83]. Bu yöntem, yine ölçülerin normal dağılımlı olması durumunda, diğer yöntemler ile özdeş sonuçlar verir. Diğerlerinden farklı olarak, LS-VCE yönteminde bir veya birden fazla ölçü grubuna ilişkin varyans bileşeninin sabit olması koşulu probleme dahil edilebilmektedir [82, 95].

Varyans bileşen kestirimi ile en uygun birleştirme stratejisi birçok jeodezi çalışmasında kullanılmaktadır. Örneğin, Aydın [87], mikrogravite ağlarının dengelemesinde farklı bağıl gravite ölçülerinin varyans bileşenlerinin, zamansal ancak gelgitsel olmayan gravite değişimlerine etkisini incelemiştir. Aydın ve Demirel [88], varyans bileşenlerinin kestiriminin gravite deformasyon ağlarında önemini vurgulamaktadır. Koch ve Kusche [90], gravite ölçülerinin regülasyonunda yine Helmert yöntemini kullanmaktadırlar. Fotopoulos [92], jeoit hesaplamalarında farklı kaynaklardan gelen yükseklik bilgilerinin kullanımında varyans bileşen kestirimini önermektedir. Aydın [94], bağımsız ölçü gruplarına ilişkin dengeleme sonuçlarına bağlı olarak stokastik birleştirmenin nasıl yapılacağını göstermektedir. Bu strateji, ITU_GGC16 statik gravite alanı modeli (Akyılmaz vd. [119]) için GRACE ve GOCE çözümlerinin en uygun şekilde birleştirilmesinde göz önüne alınmıştır. Aydın vd. [96], GPS zaman serilerinde renkli gürültü genliklerinin kestirimini Amiri-Simkooei [82, 95]'de tanımlanan yaklaşıma bağlı olarak varyans bileşenleri kestirimi çerçevesinde ele almışlar ve bu kestirimin hız kestirimi sonuçlarına etkisini incelemişlerdir. Bahadur ve Nohutçu [97], Çoklu-GNSS ölçülerinin değerlendirilmesinde Helmert yöntemi ile farklı uydu gözlemlerinin varyans bileşenlerinin kestirimini önermişler; bu sayede, sonuçların hangi oranda iyileştiğini göstermişlerdir.

Varyans bileşenlerinin kestiriminde çeşitli nümerik sorunlarla karşılaşılır. Bunlardan ilki, dengeleme modelinde ölçü sayısının ve/veya bilinmeyen sayısının büyük olması durumunda oluşan hesaplama problemi ve model yetersizliğinden, gruplama stratejisinden ve kullanılan yöntemden kaynaklanan çözümsüzlük problemidir. Hesaplama problemleri, Lucas ve Dillinger [91], Crocetto [93], Koch ve Kusche [90] ve Aydın [94] tarafından farklı açılardan ele alınmıştır. Çözümsüzlük problemi ise iteratif olan varyans bileşen kestirimi algoritmalarında sonucun elde edilememesidir. Bu durum daha sıklıkla Gauss-Helmert modelinde ortaya çıkar. Böylesi bir problem, Helmert ve IAUE yöntemlerinde istenilen nümerik doğrulukta sonuca yakınsamama, BIQUE ve LS-VCE yöntemlerinde ise varyans bileşenlerinin herhangi bir iterasyonda eksi işaretli olması şeklinde kendini gösterir. Çözümsüzlük probleminin giderilmesi için iki yaklaşım bulunur. Bunlardan ilki, problemin birleştirme stratejisinin kendisinden ileri geldiğini öngörürken, diğeri ise kullanılan algoritmadan kaynaklandığını öne sürer. İlkinde ya farklı bir birleştirme stratejisi (farklı gruplandırma, stokastik modelin değiştirilmesi, güncellenmesi ve iyileştirilmesi) uygulanır ya da söz konusu gruplar için farklı bileşenlerin olamayacağı sonucuna varılarak birleştirme yalnızca fonksiyonel modelde sağlanır. Diğer yaklaşımda ise, ne olursa olsun, eksi işaret probleminin algoritmanın iyileştirilerek çözülebileceği öngörülür. Bunun için, varyans bileşenlerinin sıfır ya da büyük olması koşulu kestirim algoritmasına dahil edilir. Buna ilişkin önemli yöntemlerden biri Amiri-Simkooei [95] tarafından önerilmiş NNLS-VCE (Non-negative Least-Squares Variance Component Estimation) yöntemidir. Bu yöntem, Aydın vd. [96] tarafından GPS zaman serilerinde kullanılmıştır. Söz konusu yöntem, her zaman sıfır ya da artı işaretli varyans bileşen kestirimi sonucu verir. Ancak sonuçta elde edilen parametre kestirimi sonuçları, Helmert ya da IAUE yöntemleriyle sonuca yakınsanamamasına karşın devam edilecek parametre kestirim sonuçları ile hemen hemen özdeştir. Bir başka deyişle, çözümsüzlük problemi karşısında bunun model yetersizliğinden kaynaklandığını düşünüp farklı birleştirme stratejilerini incelemek daha makul bir yaklaşımdır. Bu çalışmada da çözümsüzlük problemi bu yaklaşım altında ele alınmaktadır.

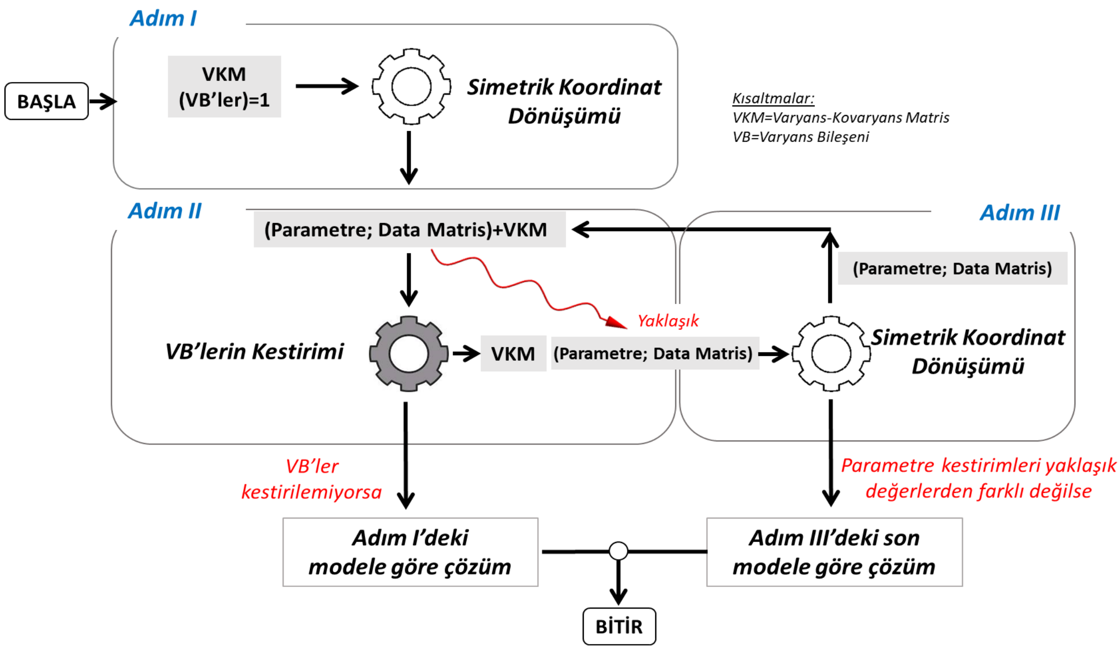
3.2.2 Varyans Bileşenleri Bilinmeyen Simetrik Koordinat Dönüşümü

Başlangıç ve hedef sistem koordinatları farklı sistem, farklı zaman ya da farklı kaynaklardan elde edilmiş olabilir. Bu durumda simetrik koordinat dönüşüm modeli, başlangıç ve hedef sistem koordinatlarının varyans bileşenlerinin (σ_1^2 ve σ_2^2'nin) de bilinmeyen olduğu simetrik koordinat dönüşüm modeline dönüşür. Söz konusu simetrik koordinat dönüşümü aşağıdaki gibi ele alınır:

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{Ut} + \mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_1), \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \sigma_1^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sigma_2^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \right) \tag{3.20}$$

Heterojen, yani varyansları farklı, ölçü gruplarına ilişkin kovaryans matrisleri ne kadar iyi bilinirse bilinsin, bunların bir dengeleme modelinde birleştirilmesinde esasen her zaman varyans bileşen kestirim metodolojisini düşünmek gerekir. Bir başka deyişle, yukarıdaki modelde geçen ağırlık katsayıları matrisleri, bağımsız dengelemelerden elde edilmiş kovaryans matrisleri (yani $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$) olarak da düşünülebilir.

Varyans bileşenleri bilinmeyen olan EIV model ve buradaki anlamıyla "varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik koordinat dönüşümü" jeodezi literatüründe ilk kez Amiri-Simkooei [46] tarafından ele alınmış, bu çalışmadan bağımsız eş zamanlı olarak Aydın ve Uygur [98] tarafından iki boyutlu benzerlik dönüşümü için uygulanmış, Uygur [99] iki boyutlu afin dönüşümünde Aydın ve Uygur [98]'in stratejisini incelemiştir. Amiri-Simkooei [46] ve Aydın ve Uygur [98] benzer bir algoritma kullanır. Ancak ilki, simetrik koordinat dönüşümünün çözümünde, aslında Snow [41]'in ikinci algoritması ile özdeş olan (bkz. Aydın vd. [51]) en küçük kareler tabanlı ağırlıklı toplam en küçük kareler yöntemini kullanırken, Aydın ve Uygur [98] ise Gauss-Helmert modeli biçiminde çözüm gerçekleştirmektedir.



Şekil 3.1 Varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik koordinat dönüşüm çözüm algoritması akış şeması

Simetrik koordinat dönüşümünde varyans bileşen kestirimini yapabilmek amacıyla birlikte çalışan iki iteratif algoritma kullanılır; çünkü, varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik koordinat dönüşümünde ne fonksiyonel model hatasız ne de stokastik model bilinen değildir. Simetrik koordinat dönüşümünde stokastik model bilinir olmalıyken, varyans bileşenlerinin kestiriminde fonksiyonel model hatasız olmalıdır. Bu amaçla oluşturulmuş söz konusu iki iteratif algoritmalı bir çözüm algoritması Şekil 3.1'de özetlenmiş, bu algoritmadaki aşamalar ise aşağıda açıklanmıştır:

- **Adım-1:** Başlangıç adımı olan bu adımda varyans bileşenleri 1 alınır. Buna göre oluşturulan kovaryans matrisi ($\mathbf{Q}_2 + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{Q}_1\tilde{\mathbf{H}}^T$) ve ağırlık matrisi değişmez kabul edilir. Böylece başlangıç doğrusallaştırılmış Gauss-Helmert modeli oluşturulur:

$$\tilde{\mathbf{y}} - (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \tilde{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = (\mathbf{Q}_2 + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{Q}_1\tilde{\mathbf{H}})^{-1} \tag{3.21}$$

Burada, $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1$ küçültülmüş ölçü vektörünü gösterir. Daha önce açıklanan EKK yaklaşımı ile yukarıdaki simetrik koordinat dönüşümü çözülür.

- **Adım-2:** Bu adımda, Adım-1'de çözüme ulaşılan son iterasyondaki elemanlar $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{J}}, \overline{\boldsymbol{\xi}})$ değişmez kabul edilirken, kovaryans matrisi bilinmeyen olarak ele alınır. Böylece, aşağıda verilen varyans bileşenleri bilinmeyen Gauss-Helmert modeli oluşturulur:

$$\overline{\mathbf{y}} - (\mathbf{e}_2 - \overline{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \overline{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\xi} - \overline{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \sigma_2^2\mathbf{Q}_2 + \sigma_1^2(\overline{\mathbf{H}}\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{H}}^T) \tag{3.22}$$

Varyans bileşenlerinin kestirimi için Gauss-Helmert modelinde IAUE yöntemi çözümde oldukça kolaylık sağlar. Kestirim için öncelikle yaklaşık kovaryans matrisi oluşturulur. Buna göre 3.22 modeli, aşağıdaki modele dönüşür:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{y}} - (\mathbf{e}_2 - \overline{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \overline{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\xi} - \overline{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 &= \sigma_{2,0}^2\mathbf{Q}_2 + \sigma_{1,0}^2(\overline{\mathbf{H}}\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{H}}^T) \\ &= \mathbf{Y}_{1,0} + \mathbf{Y}_{2,0} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Burada, $\sigma_{1,0}^2$ ve $\sigma_{2,0}^2$, yaklaşık varyans bileşenleridir (Varyans bileşen kestirimi bu ilk yaklaşık değerlere bağlı değildir; başlangıçta genellikle 1 seçilirler. Ancak, aşağıda açıklanmış Adım-3'ten sonra bu adıma dönüldüğünde, Adım-3'te değişmez kabul edilen varyans bileşenleri burada yaklaşık varyans bileşenleri olarak kullanılır). Varyans bileşenleri ile yaklaşık değerleri arasındaki varyans çarpanları oranı göz önüne alınır:

$$\theta_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1,0}^2}, \quad \theta_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2,0}^2} \tag{3.24}$$

Varyans çarpanları aşağıdaki biçimde kestirilir:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iz(\mathbf{M}_0\mathbf{Y}_{1,0}) & 0 \\ 0 & iz(\mathbf{M}_0\mathbf{Y}_{2,0}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{y}}^T\mathbf{M}_0\mathbf{Y}_{1,0}\mathbf{M}_0\overline{\mathbf{y}} \\ \overline{\mathbf{y}}^T\mathbf{M}_0\mathbf{Y}_{2,0}\mathbf{M}_0\overline{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Burada, $\mathbf{M}_0$, ortogonal bir matristir:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{C}_0^{-1}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{J}}(\overline{\mathbf{J}}^T\mathbf{C}_0^{-1}\overline{\mathbf{J}})^{-1}\overline{\mathbf{J}}^T\mathbf{C}_0^{-1}) \tag{3.26}$$

Böylece, Eşitlik 3.24'e göre varyans bileşenleri elde edilir:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \sigma_{1,0}^2 \hat{\theta}_1, \quad \hat{\sigma}_2^2 = \sigma_{2,0}^2 \hat{\theta}_2 \tag{3.27}$$

Varyans bileşen kestirimi algoritmaları ilk yaklaşık değerin seçimindeki keyfilik nedeniyle iteratif olarak çözülür. Genellikle ilk iterasyonda çözüme ulaşılmaz. Bu nedenle, Eşitlik 3.25 ile bulunan kestirim değerleri yeni yaklaşık değerler olarak öngörülür:

$$\sigma_{1,0}^2 = \hat{\sigma}_1^2, \quad \sigma_{2,0}^2 = \hat{\sigma}_2^2 \tag{3.28}$$

Eşitlik 3.28, Eşitlik 3.23'te düşünülerek yeni kovaryans matrisi oluşturulur ve Eşitlik 3.25 ile varyans çarpanları kestirilir. Varyans çarpanları 1'e yakınsamışsa işlem sonlandırılır ve Adım-3'e geçilir.

Çalışma boyunca varyans çarpanlarının kontrolü için 10^{-6} sınır değeri kullanılmıştır. Eğer varyans çarpanları 500 iterasyonda 1'e istenen doğrulukta yakınsamazsa varyans bileşenlerinin kestirilemeyeceği kararına varılarak, simetrik koordinat dönüşümü tek varyans bileşenli olarak alınır ve Eşitlik 3.21'deki modele göre çözüm gerçekleştirilir; iterasyon sonlandırılır ve 4. Adıma geçilir.

- **Adım-3:** Bu adımda, Adım-2'den elde edilen varyans bileşenleri bu sefer değişmez kabul edilerek ve ikinci adımdaki fonksiyonel modele ilişkin elemanlar ilk yaklaşık değer alınarak ($\tilde{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{J}} = \overline{\mathbf{J}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\boldsymbol{\xi}}$) aşağıdaki simetrik koordinat dönüşüm modeli oluşturulur:

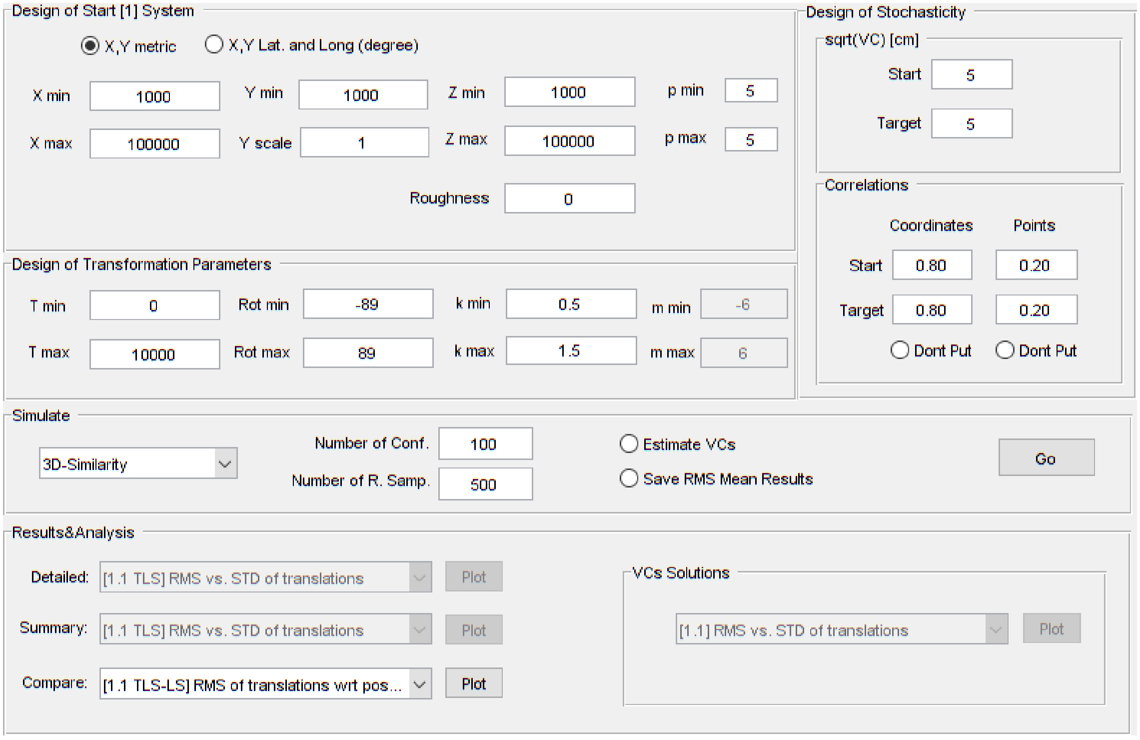
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} - (\mathbf{e}_2 - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \tilde{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \sigma_2^2 \mathbf{Q}_2 + \sigma_1^2 (\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{Q}_1 \tilde{\mathbf{H}}^T) \implies \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \end{aligned} \tag{3.29}$$

En küçük kareler yöntemiyle model iteratif olarak çözülür, bilinmeyen dönüşüm parametreleri ve koordinat hataları elde edilir. Son iterasyondaki elemanlar $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{J}}, \overline{\boldsymbol{\xi}})$ ile Adım-2'ye geçilir ve yeniden varyans bileşenleri kestirilerek Eşitlik 3.29'a göre yeni parametreler hesaplanır. Adım-3'e ilişkin bir önceki parametre kestirim sonuçları değişmez ise tüm kestirim işlemi sonlandırılır. Çalışma boyunca, işlemin sonlandırılmasında 10^{-12} sınır değeri kullanılmıştır.

- **Adım-4:** Elde edilen en son fonksiyonel model ve stokastik model ile dönüşüm parametreleri, standart sapmaları ve koordinat hataları elde edilir. Eğer varyans bileşenleri başarılı bir biçimde kestirilmişse dengeleme sonrası birim ağırlıklı ölçünün standart sapması, yukarıdaki varyans bileşen kestirimi algoritmasının bir özelliği olarak 1'e gider (İkinci adımda VBK algoritması ile sonuca ulaşılmamışsa, tek varyans bileşenli çözüme geçildiği için bu özellik sağlanmaz).

3.3 Simülasyon Yazılımı ve Test İşlemi

Simetrik koordinat dönüşümü için geliştirilen algoritmaların test edilmesi amacıyla MATLAB ortamında bir simülasyon yazılımı geliştirilmiştir. SimTrSim adı verilen bu yazılımın grafik arayüzü Şekil 3.2'de gösterilmiştir. Simülasyon tekniği, kaba hataların ve defor-



Şekil 3.2 Tez çalışmasında geliştirilen SimTrSim adlı simetrik koordinat dönüşümü simülasyon programının grafik arayüzü

masyonların belirlenmesi için kullanılan istatistiksel yöntemlerin güvenilirliğinin belirlenmesi [120] ve koordinat dönüşümlerinde uygulanan yöntemlerin geçerliliğinin belirlenmesi [64, 70] çalışmalarında kullanılmaktadır. Bu teknik, incelenen istatistiksel yöntemlerin karmaşık bir işlem akışı şeklinde gerçekleştirilmesi durumunda yöntemin davranışlarının ve özelliklerinin incelenmesinde oldukça kullanışlı ve pratiktir. Farklı yöntemlerin bir olgu karşısındaki etkinliği ya da kuramsal anlamdaki çıkarımların geçerli olup olmadığının belirlenmesi için de simülasyon tekniği vazgeçilmez bir araç olarak kullanılmaktadır.

Simülasyon çalışmalarında en önemli adımlardan biri, incelenen olaya ilişkin olası tüm durumları kapsayacak örnek uzayından örnekleri uygun biçimde rasgele olarak oluşturabilmektir. Genellikle, simülasyon çalışmaları tek bir deney tasarımı (örneğin tek bir jeodezik ağ ve ölçü ağırlıkları) altında incelenen olayın rasgele olarak oluşturulmasına dayanır. Bu çalışmada hem nokta dağılımı hem de onların kovaryans matrisleri de rasgele olarak oluşturulmaktadır. Bu nedenle bu çalışmadaki simülasyon, genişletilmiş örnekleme stratejisine sahiptir. Bu stratejinin algoritması Tablo 3.2'de verilmiştir.

Tablo 3.2 SimTrSim genel simülasyon stratejisi algoritması

for i=1,2,...,n	Dönüşüm örneğinin rasgele simülasyonu
*Nokta sayısının seçimi, dönüşüm parametrelerinin ve kovaryans matrislerinin rasgele oluşturulması	
for j=1,2,...,m	Koordinat hatalarının rasgele simülasyonu
*Verilen kovaryans matrislerine göre rasgele hataların oluşturulması ve koordinatlara eklenmesi	
*Koordinat dönüşümü ve VBK algoritmalarının çalıştırılması	
*Kestirim değerleri ile bilinen değerlerin karşılaştırılması	
end	
*Karşılaştırmalardan elde edilen istatistiklerin hesabı	
end	

3.3.1 Bir Dönüşüm Örneğinin Rasgele Simülasyonu

Bir dönüşüm örneğinin rasgele tasarımı (Tablo 3.2'deki dış döngü) oldukça önemlidir. Tamamen rasgele tasarım işlemlerde kondisyon hatalarına neden olur. Örneğin, kontrol noktaları bir çizgi üzerinde yer alabilir, ya da noktaların bir kısmı küçük bir alanda yığılmışken bazıları çok uzak bölgelerde kalabilir. Her ne kadar, Aydin vd. [64]'te gösterilen ağırlık merkezine öteleme ve ölçeklendirme algoritmaları ile söz konusu kötü kondisyon etkileri giderilebilse de, yukarıda değinilen nokta dağılımı hem gerçekçi değildir hem de çözüm hızına önemli ölçüde etki eder. Bu durumdan kaçınabilmek için ağ tasarımına özel önem vermek gerekir. Bir dönüşüm örneğinin rasgele tasarımı, sırasıyla, dört aşama altında ele alınmıştır.

3.3.1.1 Başlangıç Sistemi Noktalarının Dağılımı

Üç boyutlu örneklerde öncelikle; X, Y ve Z koordinatlarının minimum değerleri (X_{min}, Y_{min}, Z_{min}) ve $\Delta X = X_{maks} - X_{min}$, $\Delta Y = Y_{maks} - Y_{min}$, $\Delta Z = Z_{maks} - Z_{min}$ aralıkları tanımlanmaktadır. Başlangıç olarak (X_{min}, Y_{min}), ($X_{min} + \Delta X$, Y_{min}), ($X_{min} + \Delta X$, $Y_{min} + \Delta Y$) ve (X_{min}, $Y_{min} + \Delta Y$) koordinatları ile tanımlı dört nokta simüle edilen alanın köşe noktaları olarak ele alınmaktadır. Her seferinde bir kare ya da dikdörtgen şeklinde düzgün bir alan oluşturmamak için, rasgele seçilen iki köşe noktası $r_x \times (\Delta X/n)$ ve $r_y \times (\Delta Y/n)$ kadar yer değiştirilmektedir. Burada, r_x ve r_y, -1 ve 1 arasından seçilen normal dağılmış rasgele sayılar ve n ise, $\{5, \ldots, 50\}$ kümesinden rasgele olarak seçilen toplam kontrol noktası sayısıdır. Yerdeğiştirme ile koordinat aralıkları değiştiği için köşe noktalarının minimum ve maksimum koordinat değerleri, yani $X'_{min}, X'_{maks}, Y'_{min}, Y'_{maks}$, ve yeni aralıklar; $\Delta X' = X'_{maks} - X'_{min}$, $\Delta Y' = Y'_{maks} - Y'_{min}$ hesaplanmaktadır. Diğer $n-4$ adet kontrol noktası için iki küme oluşturulmaktadır: $K_x = \{X'_{min} + \Delta X' r_x, \ldots, X'_{min} + (n-1)\Delta X' r_x\}$ ve $K_y = \{Y'_{min} + \Delta Y' r_y, \ldots, Y'_{min} + (n-1)\Delta Y' r_y\}$. Geriye kalan noktaların X ve Y koordinatları her bir seferinde bir kez kullanılmak üzere bu kümeden seçilmektedir. Bu koordinatlar ve daha önce tespit edilen köşe noktaları n sayıda kontrol noktasının başlangıç sistemindeki koordinatlarını oluşturmaktadır. Bu yolla homojen nokta dağılımı rasgele olarak oluşturulabilmektedir. Dahası, ΔY aralığı ΔX'e göre $\Delta Y = \delta k \Delta X$ şeklinde ölçeklendirilerek tanımlandığı için, simülasyonun geniş ya da dar bir bölgede yapılması da sağlanabilmektedir.

X ve Y'den bağımsız olarak, kontrol noktalarının başlangıç sistemindeki Z koordinatları yine benzer yolla simüle edilir. Tanımlanmış olan $\Delta Z = Z_{maks} - Z_{min}$ aralığına bağlı olarak, n-2 sayıda kontrol noktası için Z koordinatları, her biri bir kez kullanılmak üzere, $K_z = \{Z_{min} + \Delta Z r_z, \ldots, Z_{min} + (n-1)\Delta Z r_z\}$ kümesinden rasgele olarak seçilir. Burada, r_z yine, -1 ile 1 arasından seçilen normal dağılmış rasgele sayılara karşılık gelmektedir.

Yazılımda, tercihe bağlı olarak; enlem, boylam ve elipsoidal yükseklik verileri de girdi olarak kullanılabilmektedir. Bu durumda, kontrol noktaları orta-enlem bölgesinde konumlanacak şekilde belirlenmektedir. Her bir kontrol noktasının enlem ve boylamı yukarıdaki biçimde oluşturulmaktadır. Yani metrik koordinatlar, yay derecesi cinsinden olmaktadır. Noktaların elipsoidal yükseklikleri ise, $K_h = \{h_{min},\ h_{min} + \Delta h/100, \ldots, h_{min} + \Delta h\}$ şeklinde tanımlanmış kümeden rasgele olarak seçilir. Böylece n sayıda kontrol noktasının başlangıç sistemindeki kartezyen koordinatları simüle edilmektedir.

3.3.1.2 Dönüşüm Parametrelerinin Üretilmesi

Başlangıç sistemi noktalarının gerçek koordinatlarının elde edilmesi ile beraber hedef sistem nokta koordinatlarının belirlenebilmesi için dönüşüm parametrelerine ilişkin gerçek değerlerin simülasyon işlemi gerçekleştirilmelidir. Bu amaçla; öteleme, ölçek ve dönüklük parametreleri için üç ayrı küme tanımlanmaktadır:

- Öteleme={0, 0+10 m, . . . , 10000 m}
- Ölçek={0.5, 0.5+100 ppm, . . . , 1.5 ppm}
- Dönüklük Açısı={$-\pi$, 0+0.1 radyan, . . . , π }

Her bir dönüşüm örneğinde, dönüşüm parametreleri ilgili kümelerden rasgele olarak seçilmektedir. Bu şekilde, belirlenen dönüşüm parametreleri kullanılarak, kontrol noktalarının hedef sistemindeki gerçek koordinatları Eşitlik 2.21 kullanılarak elde edilir.

3.3.1.3 Kovaryans Matrislerinin Oluşturulması

Bu aşamada, öncelikle koordinatların ağırlık katsayıları (Q), 0.2 ve 2/3 değerleri arasında rasgele oluşturulmaktadır. Bunun için $Q = 0.2 + (2/3 - 0.2)u$ fonksiyonu kullanılmaktadır.

Burada, u, 0 ve 1 arasındaki uniform dağılımlı rasgele sayıdır. Böylece, kontrol noktalarının bir sistemdeki konum hatalarının 0.8σ ile 1.4σ arasında olması sağlanmaktadır. Kontrol noktalarının ortalama konum hatası, böylece, 1.1σ olur.

Nokta koordinatları arasındaki korelasyonların oluşturulması için, $R_1 = \{-\rho_1, \rho_1 + 0.01, \ldots, \rho_1\}$ ve $R_2 = \{-\rho_2, \rho_2 + 0.01, \ldots, \rho_2\}$ olmak üzere iki küme tanımlanmaktadır. Burada, ρ_1 ve ρ_2 korelasyonları belirtmektedir. Bu aralıklardan ρ_{ij} korelasyonu rasgele seçilerek, ilgili elemanlar arasındaki ağırlık katsayıları $Q_{ij} = \rho_{ij}\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}$, ($i$=1, ..., n), (j=1, ..., n), $i \neq j$ şeklinde hesaplanır. Burada, Q_{ii} ve Q_{jj} i. ve j. koordinatların ağırlık katsayılarını göstermektedir. Böylece, kontrol noktalarına ilişkin ağırlık katsayılar matrisinin köşegen elemanlarının 0.8 ile 1.4 arasında, bir noktanın koordinatları arasındaki korelasyonların $-\rho_1$ ile ρ_1 arasında, farklı noktaların koordinat elemanları arasındaki korelasyonların ise $-\rho_2$ ile ρ_2 arasında olması sağlanmaktadır.

Yukarıdaki gibi oluşturulan ağırlık katsayıları matrisinin ($\mathbf{Q}^*$) pozitif tanımlı ve pozitif özdeğerli olacağının garantisi yoktur. Bu amaçla, Higham [121] tarafından verilen "*en yakın korelasyon matris*" algoritması (*the nearest correlation matrix algorithm*) kullanılmaktadır. Oluşturulan ağırlık katsayıları matrisinden korelasyon matrisi $\mathbf{R}^* = \mathbf{F}\mathbf{Q}^*\mathbf{F}$ şeklinde oluşturulabilir; $\mathbf{F}^* = \frac{1}{\sqrt{Q_{ii}}}$, ($i$=1, ..., n)'dir. Söz konusu algoritma oldukça hızlıdır ve sonuçta $\mathbf{R}^*$ korelasyon matrisini her zaman pozitif özdeğerlere sahip bir $\mathbf{R}$ matrisine dönüştürmektedir. Pozitif tanımlı ağırlık katsayılar matrisi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{F}\mathbf{R}\mathbf{F}^T + 0.01 \times \mathbf{I}_n$ eşitliğine göre yeniden oluşturulmaktadır. Bu eşitlikteki son terim, $\mathbf{R}$ korelasyon matrisindeki sıfıra yakın özdeğerler nedeniyle eklenmektedir. Sonuç kofaktör matrisi her zaman pozitif özdeğerlere sahiptir; orjinal $\mathbf{Q}^*$ matrisindeki kofaktör ve korelasyon büyüklüklerini korumaktadır. Böylece, istenen kofaktör ve korelasyon aralığında kofaktör matrisin rasgele oluşturulması sağlanabilmektedir.

Sonuç olarak, başlangıç ve hedef sistem koordinatlarına ilişkin $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ kovaryans matrisleri, yukarıda tanımlanan şekilde üretilmiş $\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ matrislerinin belli aralıklarda seçilen varyans çarpanları ile ölçeklendirilmesi biçiminde elde edilir: $\mathbf{C}_1 = \sigma_1^2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{C}_2 = \sigma_2^2\mathbf{Q}_2$. Söz konusu kovaryans matrisleri, normal dağılımlı rasgele hataların üretilmesi için kullanılmaktadır.

3.3.1.4 Koordinatların Rasgele Hatalarla Yüklenmesi

Tablo3.2'de gösterilen ikinci döngüde gerçek koordinatlara $\mathbf{e}_1 \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_1 = \sigma_1^2\mathbf{Q}_1)$ ve $\mathbf{e}_2 \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_2 = \sigma_2^2\mathbf{Q}_1)$ rasgele hataları eklenmektedir. Bu amaçla *mvnrnd* adlı MATLAB fonksiyon dosyası kullanılmaktadır. Bu işlem, bir dönüşüm örneği (konfigürasyon) için m=500 kez tekrarlanmaktadır.

3.3.2 Koordinat Dönüşümü Algoritmalarının Performans Analizi

SimTrSim yazılımı ile yukarıda belirtildiği şekilde, her biri m sayıda rasgele örneklem içeren, s sayıda konfigürasyon (rasgele dönüşüm örneği) ele alınır. Bu çalışma kapsamında analizler; her biri m=500 rasgele örneklem içeren s=100 konfigürasyon için, toplam 50 bin örnek üzerinden gerçekleştirilmiştir. 3B koordinat dönüşümü için izlenen simülasyon stratejisi, bu çalışmaya özgü olarak Tablo 3.3'te verilmektedir.

Tablo 3.3 Çalışmaya ilişkin detaylı simülasyon stratejisi algoritması

for i=1,2,..., 100	Dönüşüm örneğinin rasgele simülasyonu - Ağ konfigürasyonu
*Nokta sayısı seçimi: 5 ile 25 arasında	
*Hatasız başlangıç sistemi ($\mathbf{X}_1$) koordinatları: <1000 ile 100000> m arasında.	
*Dönüşüm parametrelerinin rasgele seçimi:	
-Ötelemeler:<0 ile 10000 m> arasında; Dönüklükler:<-89 ve 89> derece arasında;	
-Ölçek parametreleri:<0.5 ve 1.5> arasında	
*Hatasız hedef sistem ($\mathbf{X}_2$) koordinatlarının elde edilmesi: $\Longrightarrow$ Eşitlik 2.21	
*$\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{Q}_2$ ağırlık katsayıları matrislerinin oluşturulması	
-Nokta koordinat bileşenleri arasındaki korelasyonlar <-0.80 ile 0.80> arasında	
-Ağ noktaları arasındaki korelasyonlar <-0.20 ile 0.20> arasında	
-İki sistem koordinatları arasında korelasyon yok.	
*$\mathbf{C}_1 = \sigma_1^2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{C}_2 = \sigma_2^2\mathbf{Q}_2$ kovaryans matrislerinin rasgele oluşturulması	
for j=1,2,..., 500	Koordinat hatalarının rasgele simülasyonu
*$\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ kovaryans matrislerine göre rasgele hataların oluşturulması	
*$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ koordinatlarına rasgele hataların eklenmesi	
*Koordinatların uygun biçimde küçültülmesi	
*Asimetrik ve simetrik koordinat dönüşümü uygulamaları	
*Varyans bileşen kestirimi uygulamaları	
*Kestirim sonucu elde edilen standart sapmalar ile bilinen değerlerden elde edilen karesel ortalama hataların karşılaştırırlması	
*Elde edilen varyans bileşenleri ile bilinen varyans bileşenlerinin karşılaştırılması	
end	
*Karşılaştırmalardan elde edilen istatistiklerin hesabı	
*Sonuçların grafik gösterimi	
end	

Parametre kestirimde önemli konulardan biri de, kestirilen parametrelerin doğruluğunun derecesidir. Parametre kestirimlerine ilişkin doğruluk bilgisi kovaryans matrisleri ile elde edilir. Klasik EKK yönteminde bir kovaryans matrisi normal denklem katsayılar matrisinin tersinin alınması yoluyla elde edilir. Toplam EKK yönteminde de, örneğin Amiri-Simkooei ve Jazaeri [45]'te, kovaryans matrisi benzer bir yaklaşım ile elde edilir. Hem çözüm yönteminin doğrusal olmayan yapısı hem de matematiksel modele konu olan elemanların rasgele hatalı olmaları nedeniyle, toplam EKK kestirim yöntemleri ile yaklaşık bir kovaryans matrisi belirlenir. Diğer bir deyişle, toplam EKK çözümü hem parametreler hem de kovaryans matrisi için, doğası gereği, *yanlı* (*"bias"lı*) çözüm vermektedir [35, 42, 118]. Ancak, jeodezik koordinat dönüşümü gibi koordinatların büyük standart sapmaların küçük (sinyal/gürültü oranının büyük) olduğu problemlerde bu bias ihmal edilebilir düzeydedir [43]. Diğer taraftan, başlangıç sistemi koordinat hatalarının göz ardı edilerek dönüşüm probleminin asimetrik çözüm altında ele alınması da yine sonuçların *biaslı* olmasına sebep olmaktadır [43].

Yukarıda bahsedilen sebeplerden ötürü, doğrusal olmayan Gauss-Helmert modeli altında ele alınan simetrik koordinat dönüşümü algoritmasının performans analizi için; dönüşüm sonucu elde edilen kovaryans matrislerinin, parametre kestirimlerinin hatalarının ifade edilmesinde geçerli olup olmadığının istatistiksel olarak sorgulanması gerekmektedir. Bu amaçla, ilk olarak her bir konfigürasyon için m sayıda örneklemden her bir parametre kestirimi için karesel ortalama hata (KOH) değerleri (deneysel standart sapmalar) hesaplanır [24]:

$$KOH = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_j^2\right)} \tag{3.30}$$

Burada δ_j, her bir j örneklemi için, ilgili dönüşüm parametresinin bilinen değeri ile kestirim değerinin farkına karşılık gelmektedir. Eğer çözüm için izlenen matematiksel yöntem doğru ise kestirim sonucu elde edilen parametre standart sapmalarının beklenen değeri, Eşitlik 3.30 ile elde edilen deneysel standart sapmalara eşit olmalıdır. Bu amaçla;

$$\begin{aligned} H_0 &: E(\hat{\sigma}) = KOH \\ H_k &: E(\hat{\sigma}) \neq KOH \end{aligned} \tag{3.31}$$

şeklinde çift yanlı hipotezler oluşturularak, sıfır hipotezi χ^2 testi ile (bkz. Koch [81], s. 287) alternatif hipoteze karşı test edilir. Eğer test büyüklüğü $T = \dfrac{\hat{\sigma}}{KOH}$, 1-$\alpha$ güven düzeyi ile $\sqrt{\dfrac{\chi^2_{f,\frac{\alpha}{2}}}{f}}$ ve $\sqrt{\dfrac{\chi^2_{f,1-\frac{\alpha}{2}}}{f}}$ aralığında ise H_0 hipotezi kabul edilir. Burada, $\chi^2_{(...)}$ χ^2 dağılımının sınır değerini ve f serbestlik derecesini belirtmektedir. Yanılma payı $\alpha = 0.05$ olmak üzere, sıfır hipotezinin doğru kabul edilme olasılığının beklenen değeri $1-\alpha = 0.95$'tir. m sayıda örneklem arasından sıfır hipotezinin gerçeklendiği v örneklem sayısı saydırılarak, bu olasılık değeri her bir konfigürasyon için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$1 - \hat{\alpha} = \frac{v}{m} \times 100 \tag{3.32}$$

Aradaki farkın mutlak değeri,

$$\Delta\alpha = |\alpha - \hat{\alpha}| \tag{3.33}$$

parametre kestirimindeki hatayı ifade eder. Hesaplanan bu istatistik değeri, çalışmada "*yanlış prediksiyon olasılığı (YPO)*" olarak isimlendirilmiştir. YPO değeri, simetrik ve asimetrik koordinat dönüşümü algoritmalarının hangi oranda yanlı çözüm verdiklerinin bir ölçütü olarak kullanılmıştır.

YPO değerleri, çift yanlı varyans testi uygulanarak, varyans bileşen (sonsal varyans) kestirimleri için de belirlenir. m kez kestirilmiş varyans bileşenlerinin, her bir örneklem için, aşağıdaki aralıkta yer alması olasılığı yine $1-\alpha$ kadardır:

$$\chi^2_{f,\frac{\alpha}{2}} < \frac{f\hat{\sigma}^2_m}{\sigma^2} < \chi^2_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \tag{3.34}$$

Burada, σ^2 bilinen varyans bileşenine karşılık gelmektedir.

Son olarak, dönüşüme ilişkin konum hatası değerlerinin test edilmesi için ağın ağırlık merkezi ele alınmıştır. Dengeleme sonucu elde edilen kestirim değerleri kullanılarak kovaryans yayılma kuralı ile hedef sistemin ağırlık merkezinin kovaryans matrisi aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\mathbf{C}_{\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_p} = \begin{bmatrix}\mathbf{U} & \hat{\mathbf{J}}\end{bmatrix} \mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} \begin{bmatrix}\mathbf{U} & \hat{\mathbf{J}}\end{bmatrix}^T = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}\hat{\mathbf{A}}^T \tag{3.35}$$

Burada $\hat{\mathbf{J}}_m$ matrisi, 3B benzerlik ve afin dönüşümleri için, sırasıyla, Eşitlikler 2.27 ve 2.32 ile belirtildiği şekilde, ancak, ağırlık merkezinin bilinen (hatasız) koordinatları ($\overline{\mathbf{X}}_{1,c}$) ile oluşturulur. Sırasıyla, $7p$ ve $9p$ dönüşümleri için, $\hat{\mathbf{J}}$ matrisleri Eşitlikler 3.36 ve 3.37'de verilmektedir:

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_k}{\partial \hat{q}_0}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_k}{\partial \hat{q}_1}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_k}{\partial \hat{q}_2}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_k}{\partial \hat{q}_3}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{\Lambda}}}{\partial \hat{q}_0}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{\Lambda}}}{\partial \hat{q}_1}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{\Lambda}}}{\partial \hat{q}_2}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{\Lambda}}}{\partial \hat{q}_3}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{\Lambda}}}{\partial \hat{\mu}_y}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} & \frac{\partial \hat{\mathbf{\Lambda}}}{\partial \hat{\mu}_z}\overline{\mathbf{X}}_{1,c} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Burada, $\hat{\mathbf{\Lambda}}$, $\hat{\mathbf{R}}_k\hat{\mathbf{L}}_k$ çarpımına karşılık gelen ölçekli dönüklük matrisinin kestirim değerini belirtmektedir. Kovaryans yayılma kuralı ile elde edilen kovaryans matrisinden konum hatası

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{iz(\mathbf{C}_{\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_p})} \tag{3.38}$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlikte geçen $iz(\mathbf{C}_{\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_p})$, $\mathbf{C}_{\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_p}$ matrisinin köşegen elemanlarının toplamını ifade etmektedir. Parametre kestirimlerinin fonksiyonu olarak elde edilen bu konum hatası değerinin, bilinen değerlerden aşağıda belirtildiği gibi hesaplanan deneysel konum hatası değerine (KOH değerine) eşit olup olmadığı (yukarıda açıklandığı şekilde) istatistiksel olarak test edilir:

$$KOH_p = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\Delta X_{c,j}^2 + \Delta Y_{c,j}^2 + \Delta Z_{c,j}^2\right)} \tag{3.39}$$

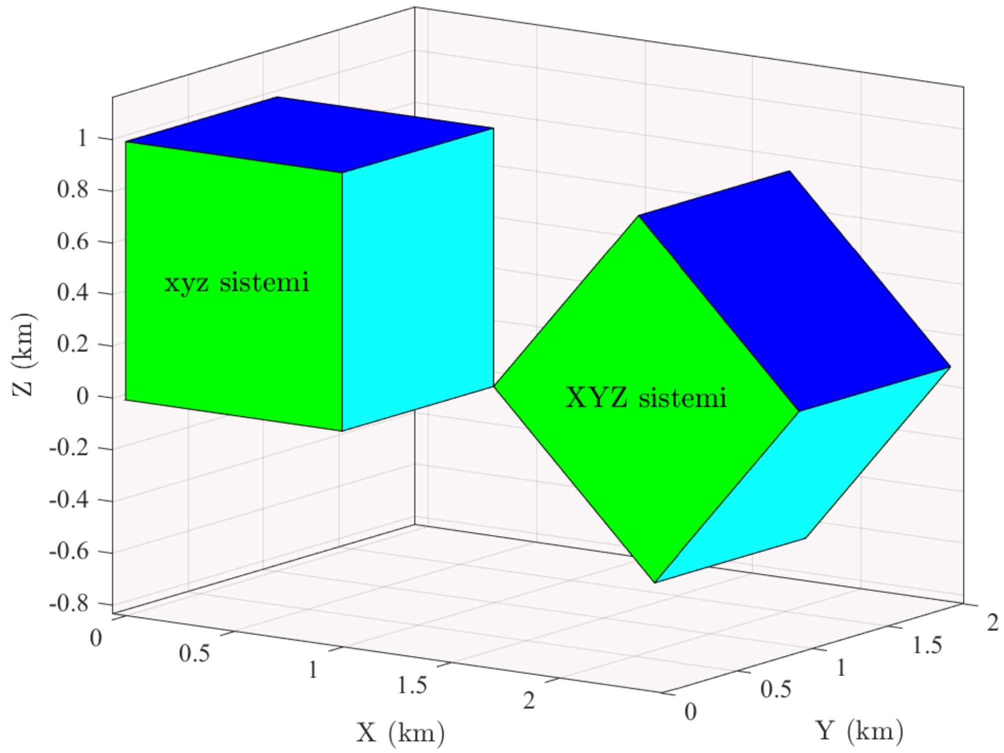
Burada, $\Delta X_{c,j}$, $\Delta Y_{c,j}$ ve $\Delta Z_{c,j}$, hedef sistem ağırlık merkezi koordinat bileşenlerinin, j. örneklem için, bilinen değerleri ile kestirim değerlerinin farklarına karşılık gelmektedir ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Delta \mathbf{X}_{c,j} = \begin{pmatrix} \Delta X_{c,j} \\ \Delta Y_{c,j} \\ \Delta Z_{c,j} \end{pmatrix} = \left(\overline{\mathbf{X}}_{2,c} - \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{\Lambda}}\overline{\mathbf{X}}_{1,c}\right)_j = \begin{pmatrix} \overline{X}_{2,c} - \widehat{X}_{2,c} \\ \overline{Y}_{2,c} - \widehat{Y}_{2,c} \\ \overline{Z}_{2,c} - \widehat{Z}_{2,c} \end{pmatrix}_j \tag{3.40}$$

4
SAYISAL UYGULAMALAR

4.1 Üç Boyutlu Asimetrik Benzerlik Dönüşümü Örneği

Kuaterniyon tabanlı 3B benzerlik dönüşümü algoritmasını asimetrik koordinat dönüşümü üzerinden test etmek amacıyla, *xyz* başlangıç sisteminde öncelikle bir küp örneği tasarlanmıştır. Küp, *y* ekseni etrafında -42 derece döndürülüp, *x* ve *y* eksenleri boyunca 1000 m ötelenmiştir. Şekil 4.1'de gösterilen küpün her iki sistemdeki köşe noktalarının koordinatları ve hedef sistemdeki noktaların ağırlık katsayıları ($Q_{x,i} = Q_{y,i} = Q_{z,i}$; i=1, ...,8) Tablo 4.1'de verilmektedir.



Şekil 4.1 Küpün başlangıç (*xyz*) ve hedef (*XYZ*) sistemindeki konumu

Tablo 4.1 Küpün köşe noktalarının başlangıç ve hedef sistemlerindeki koordinatları

	Başlangıç Sistemi (xyz)			Hedef Sistemi (XYZ)			
i	x (m)	y (m)	z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)	Q_i
1	1000	0	0	1743	1000	-669	0.5
2	1000	1000	0	1743	2000	-669	0.4
3	0	1000	0	1000	2000	0	0.9
4	0	0	0	1000	1000	0	0.6
5	1000	0	1000	2412	1000	74	0.5
6	1000	1000	1000	2412	2000	74	0.4
7	0	1000	1000	1669	2000	743	0.2
8	0	0	1000	1669	1000	743	0.9

EKK dengelemesi sonucu elde edilen koordinat hata vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{e}_X = \begin{bmatrix} -0.0011 & 0.0037 & 0.0505 & 0.0457 & -0.0435 & -0.0387 & 0.0081 & 0.0034 \end{bmatrix}^T_{(\mathrm{m})}$$

$$\mathbf{e}_Y = \begin{bmatrix} -0.0646 & 0.0673 & 0.0559 & -0.0759 & -0.0843 & 0.0476 & 0.0362 & -0.0956 \end{bmatrix}^T_{(\mathrm{m})}$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{bmatrix} 0.0350 & 0.0573 & 0.0149 & -0.0073 & -0.0118 & 0.0104 & -0.0320 & -0.0542 \end{bmatrix}^T_{(\mathrm{m})}$$

Öteleme parametreleri, ölçekli kuaterniyonlar elemanları, varyans bileşeni ve birim kuaterniyon elemanları için kestirim değerleri Tablo 4.2'de verilmektedir.

Tablo 4.2 Öteleme parametreleri, ölçekli kuaterniyon elemanları, varyans bileşeni ve birim kuaterniyon elemanları için kestirim değerleri

Öteleme parametreleri (m)		Ölçekli kuaterniyon elemanları (birimsiz)	
$\hat{t}_x$	999.95425±0.03034	$\hat{q}'_0$	0.933518874103
$\hat{t}_y$	1000.07592±0.03167	$\hat{q}'_1$	-0.000011223551
$\hat{t}_z$	0.00734±0.03166	$\hat{q}'_2$	0.358344320112
		$\hat{q}'_3$	-0.000001763788
Birim ağırlıklı ölçünün varyansı (m^2)		$\hat{\sigma}_0^2$	0.006085866680
Birim kuaterniyon elemanları (birimsiz)			
$\hat{q}_0 = 0.933580427000$		$\hat{q}_1 = -0.000011224291$	
$\hat{q}_2 = 0.358367948056$		$\hat{q}_3 = -0.000001763905$	

Eşitlik 2.41 ile elde edilen ölçek çarpanının ve Eşitlik 2.42'den elde edilen birim kuaterniyon elemanları cinsinden ortogonal dönüklük matrisinin kestirim değerleri Tablo 4.3'teki gibi elde edilmiştir.

Tablo 4.3 Ölçek çarpanı ve ortogonal dönüklük matrisi için kestirim değerleri

Ölçek çarpanı $\hat{k}$ =		0.999868140192±0.000021637631	
	0.743144827607	−0.000004751359	0.669130603977
$\hat{\mathbf{R}}$ =	−0.000011338346	0.999999999742	0.000019693304
	−0.669130603898	−0.000022221811	0.743144827361

Eşitlik 2.44'de verilen kovaryans matrisinin ölçekli kuaterniyon elemanlarına ilişkin alt matrisi $\mathbf{C}_{\hat{q}'\hat{q}'}$ ve Eşitlik 2.47'de belirtildiği şekilde kovaryans yayılma kuralı ile belirlenen birim kuaterniyon elemanlarına ilişkin kovaryans matrisi $\mathbf{C}_{\hat{q}\hat{q}}$ Tablo 4.4'te verilmektedir.

Tablo 4.4 Ölçekli ve birim kuaterniyon elemanlarına ilişkin kovaryans matrisleri ($\times 10^{-10}$)

Ölçekli kuaterniyon elemanlarının kovaryans matrisi $\mathbf{C}_{\hat{q}'\hat{q}'}$ =			
1.246484836746	0.021858991598	−0.197628985424	−0.084439420831
0.021858991598	1.683235292942	−0.056929294552	−0.148240989857
−0.197628985424	−0.056929294552	1.685462484914	0.219971266178
−0.084439420831	−0.148240989857	0.219971266178	1.921590250820
Birim kuaterniyon elemanlarının kovaryans matrisi $\mathbf{C}_{\hat{q}\hat{q}}$ =			
0.226232761171	0.021874142608	−0.589356225519	−0.084448628493
0.021874142608	1.683457273148	−0.056932092866	−0.148260539487
−0.589356225519	−0.056932092866	1.535324765228	0.220001015451
−0.084448628493	−0.148260539487	0.220001015451	1.921843664753

Son olarak, Euler dönüklük açılarının kestirim değerleri ve standart sapmaları, Eşitlikler 2.56 ve 2.58 ile verilen her iki çözüm için, Tablo 4.5'teki gibi elde edilmiştir. Matematiksel olarak iki çözüm mevcut olmakla beraber, y ekseni etrafındaki dönüklük açısının bilinen değeri ($\overline{\varphi}_y = -42°$) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında tanımlı olduğundan ilk çözüm geçerlidir.

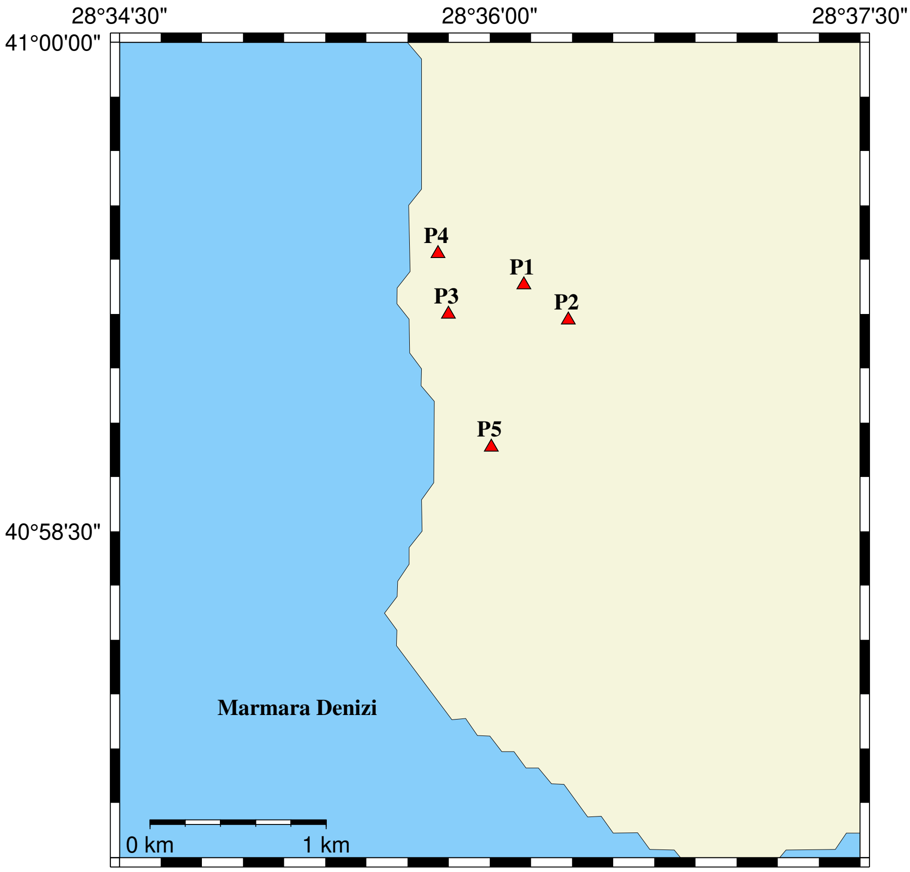
Tablo 4.5 Euler dönüklük açılarının kestirim değerleri

	Birinci Çözüm (°)	İkinci Çözüm (°)
$\hat{\varphi}_x$	0.001713281122±0.001959509700	-179.998286718878±0.001959509700
$\hat{\varphi}_y$	-41.999999810264±0.001520904081	-138.000000189736±0.001520904081
$\hat{\varphi}_z$	0.000874176029±0.002064191323	-179.999125823971±0.002064191323

Kuaterniyon tabanlı 3B asimetrik benzerlik dönüşümü sonucu dönüşüm parametrelerinin kestirim değerleri ile bilinen değerleri birbiri ile uyumlu şekilde edilmiştir. Bu sonuçlar, çözüm için izlenen metodolojinin doğru sonuçlar verdiğini göstermektedir.

4.2 Üç Boyutlu Benzerlik Dönüşümü - Jeodezik Ağ Örneği

Kuaterniyon tabanlı 3B benzerlik dönüşümü algoritmasını test etmek için Kanatani ve Niitsuma [13]'te ele alınmış veri seti kullanılmıştır. Heyelanların izlenmesi amacıyla oluşturulmuş bu GPS deformasyon ağına ilişkin Şekil 4.2'de gösterilmiş olan kontrol noktalarının iki periyot için koordinatları Tablo 4.6'da verilmektedir. Bu verilere ek olarak, ilgili veri seti için Kanatani ve Niitsuma [13] tarafından kullanılan blok-köşegen kovaryans matrisleri Tablo 4.8'de verilmektedir.



Şekil 4.2 Bir deformasyon izleme ağındaki kontrol noktalarının konfigürasyonu

İlgili eşlenik noktalar yardımıyla dönüşüm parametreleri hesaplanırken dört farklı değerlendirme stratejisi göz önünde bulundurulmuş ve sonuçlar Tablo 4.7'de sunulmuştur:

- Çözüm-1: Koordinatların birim ağırlıklı kabul edildiği asimetrik çözüm (Ç.1)
- Çözüm-2: Koordinatların birim ağırlıklı kabul edildiği simetrik çözüm (Ç.2)
- Çözüm-3: Yalnızca hedef sistem koordinatlarının kovaryans matrisinin göz önünde bulundurulduğu asimetrik çözüm (Ç.3)

- Çözüm-4: Koordinatların kovaryans matrislerinin göz önünde bulundurulduğu simetrik çözüm (Ç.4)

Tablo 4.6 Kontrol noktalarının başlangıç ve hedef sistemdeki koordinatları [13]

NN	Başlangıç Sistemi (1. Periyot) Koordinatları		
	x (m)	y (m)	z (m)
P1	4233187.8344	2308228.6785	4161469.1229
P2	4233190.6059	2308518.3249	4161336.2582
P3	4233429.1004	2307875.2240	4161292.4034
P4	4233259.8205	2307712.3025	4161553.4880
P5	4233770.4580	2308340.5240	4160740.3286
	Hedef Sistem (2. Periyot) Koordinatları		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
P1	4233187.8612	2308228.7042	4161469.1383
P2	4233190.6124	2308518.3166	4161336.2682
P3	4233429.1008	2307875.2239	4161292.4029
P4	4233259.8309	2307712.2990	4161553.5007
P5	4233770.4534	2308340.5219	4160740.3181

Tablo 4.7 Dört farklı değerlendirme stratejisi ile elde edilen parametre kestirimleri

Parametre	Çözüm 1	Çözüm 2	Çözüm 3	Çözüm 4
$\hat{t}_x$ (m)	-199.8586	-199.8604	-261.7468	-274.6708
$\hat{t}_y$ (m)	42.5263	42.5253	89.9883	100.2332
$\hat{t}_z$ (m)	143.6596	143.6579	134.5314	140.7879
$\hat{\varphi}_x$ ('')	0.3998	0.3998	0.4216	0.0890
$\hat{\varphi}_y$ ('')	-7.5320	-7.5320	-8.0272	-8.5386
$\hat{\varphi}_z$ ('')	2.8812	2.8812	5.7428	5.9289
$\hat{k}-1$ (ppm)	3.7028	3.7032	8.3981	8.5224

Tablo 4.7'deki sonuçlar incelendiğinde, Çözüm 1 ve Çözüm 2 sonuçlarının birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu durum, koordinat kovaryans matrislerinin birim matris olarak alınması durumunda asimetrik ve simetrik dönüşümler arasında bir fark olmadığını göstermektedir. Koordinat kovaryans matrislerinin dikkate alındığı simetrik dönüşüm sonuçları (Çözüm 4), Kanatani ve Niitsuma [13] ile özdeş olarak elde edilmiştir (bu sonuçlar Amiri-Simkooei [22] tarafından verilmiş çözümlerle de uyumludur. Ancak Amiri-Simkooei [22] dönüklük açı tanımını ters yönde almaktadır). Koordinat kovaryans matrislerinin dikkate alındığı Çözüm 3 (yalnız hedef sistem koordinatlarının kovaryans matrisinin düşünüldüğü asimetrik dönüşüm çözümü) ve Çözüm 4 (her iki sistemin kovaryans matrislerinin dikkate alındığı simetrik dönüşüm çözümü) birbirlerinden oldukça farklıdır. Bu durum, koordinatların kovaryans matrislerinin bilinmesi durumunda, dönüklük açıları diferansiyel anlamda küçük olsa da, simetrik koordinat dönüşümünün göz önüne

Tablo 4.8 Başlangıç ve hedef sistemi koordinatlarının blok-köşegen kovaryans matrisleri [13]

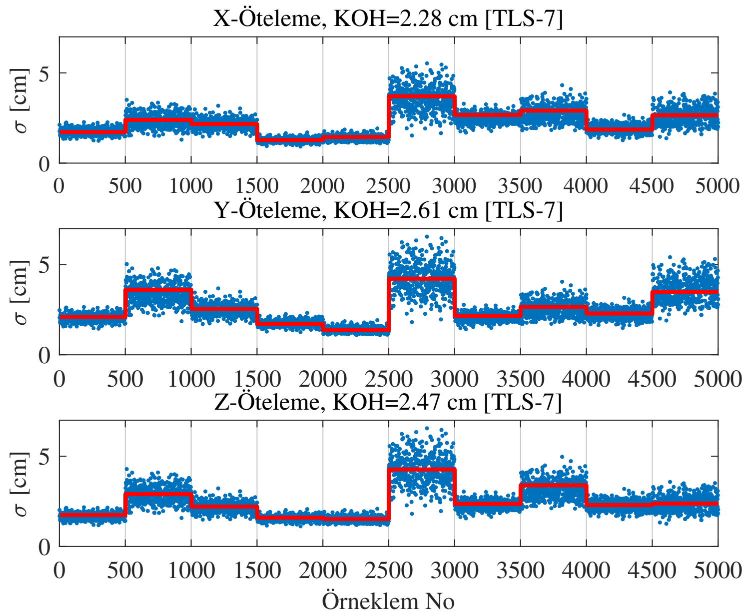
	Başlangıç Sistemi			Hedef Sistemi		
NN	$\mathbf{C}_x$			$\mathbf{C}_X$		
	34	10	17	51	18	23
P1	10	12	7	18	18	13
	17	7	33	23	13	30
	234	83	136	323	140	159
P2	10	97	58	140	148	100
	136	58	245	159	100	218
	24	8	12	41	14	19
P3	8	10	6	14	16	11
	12	6	25	19	11	28
	63	25	36	141	47	70
P4	25	28	16	47	49	38
	36	16	53	70	38	96
	22	8	12	59	20	29
P5	8	9	5	20	24	16
	12	5	23	29	16	43

alınması gerektiğini, yani başlangıç sistemi koordinatlarının hatalı olması durumunda bu hataları ihmal etmenin yanıltıcı sonuçlar üretebileceğini göstermektedir.

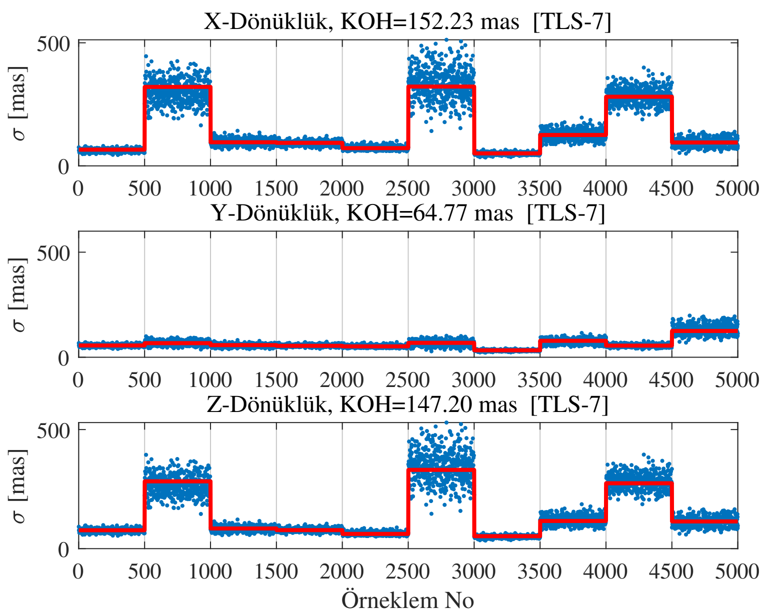
4.3 Üç Boyutlu Simetrik ve Asimetrik Benzerlik Dönüşümü Örnekleri

Bu bölümde simetrik koordinat dönüşümü algoritmasını test etmek amacıyla bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, Bölüm 3.3.2'de Tablo 3.3 ile verilen simülasyon stratejisi izlenmiştir. Bu kapsamda, her bir i konfigürasyonu için oluşturulan kofaktör matrislerinin $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 36$ cm^2'lik varyans çarpanları ile ölçeklendirilmesiyle elde edilen kovaryans matrislerinden $m = 500$ sayıda farklı $\mathbf{e}_1 \sim N(\mathbf{0}, 0.0036\ m^2)$ ve $\mathbf{e}_2 \sim N(\mathbf{0}, 0.0036\ m^2)$ rasgele hata vektörleri elde edilmiş ve hatasız koordinatlara bu rasgele hata vektörlerinin eklenmesiyle veri seti oluşturulmuştur.

Analizlerin yorumlanması aşamasında, simetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen kovaryans matrislerinden hesaplanan parametre standart sapmaları ile Eşitlik 3.30 ile parametrelerin bilinen ve kestirim değerleri kullanılarak elde edilen karesel ortalama hataları (deneysel standart sapmaları) karşılaştırılmıştır. 10 konfigürasyona indirgenmiş sonuçlar, sırasıyla, öteleme, dönüklük, ölçek parametreleri ve konum hataları için Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Aynı simülasyon verisi için problem asimetrik dönüşüm modeli altında ele alınmış ve dönüşüm parametlerine ve konum hatasına ilişkin sonuçlar Şekil 4.7, Şekil 4.8, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 üzerinde gösterilmiştir.

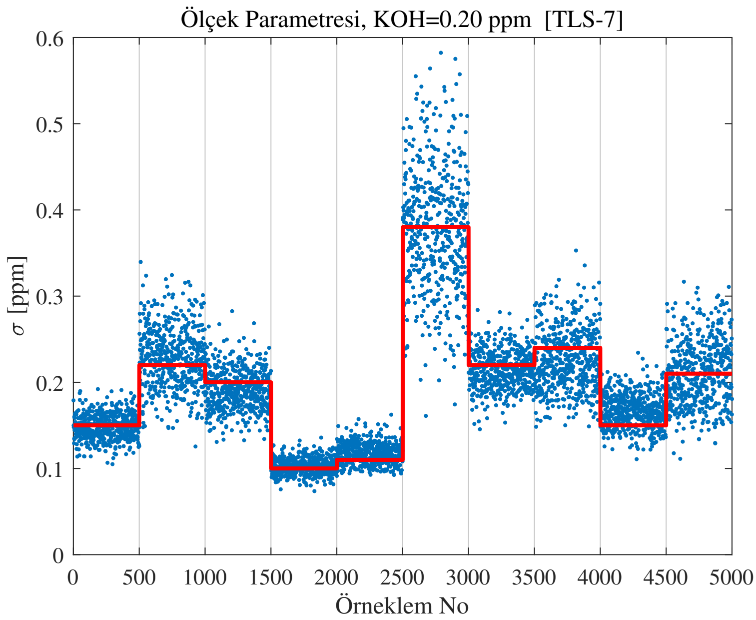


Şekil 4.3 Simetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen öteleme parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

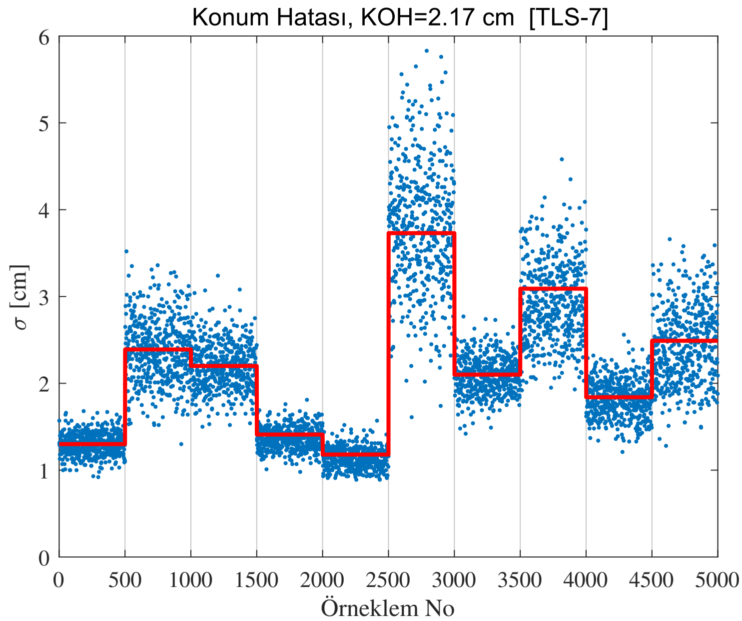


Şekil 4.4 Simetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen dönüklük parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

Şekillerde yatay kırmızı çizgiler karesel ortalama hata (KOH) değerlerine karşılık gelirken,

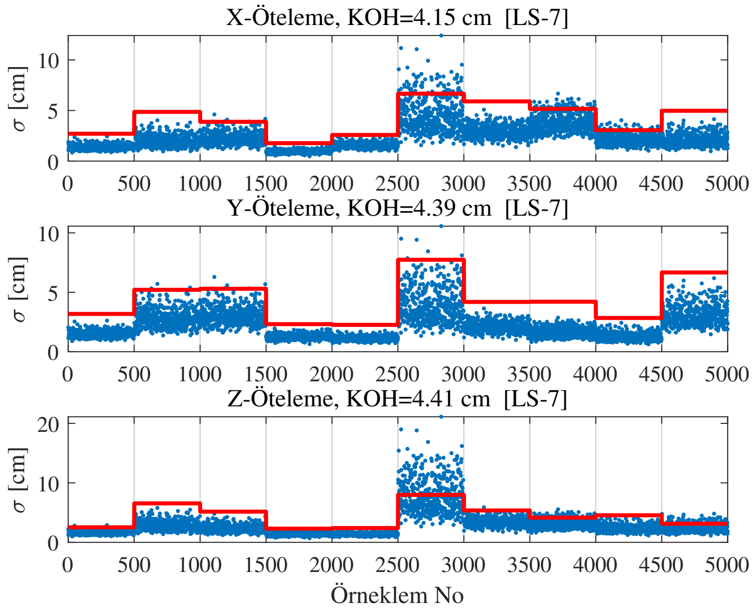


Şekil 4.5 Simetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen ölçek çarpanlarının standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

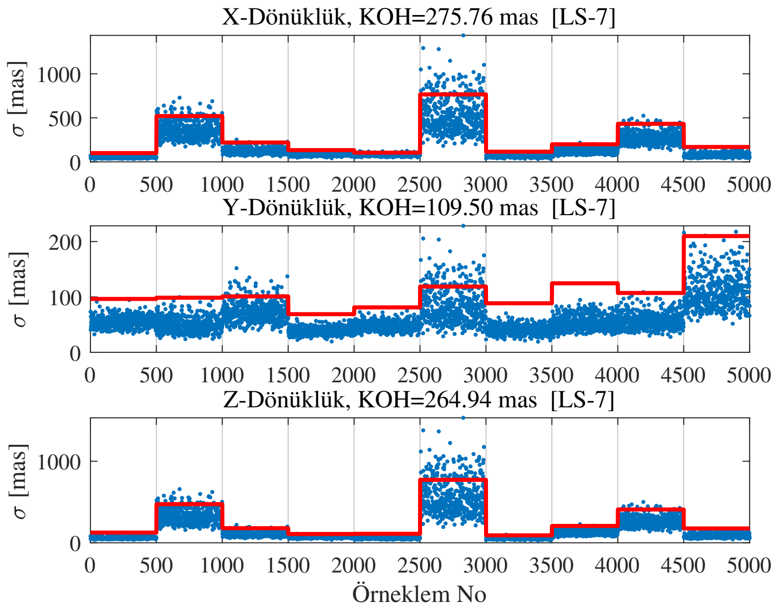


Şekil 4.6 Simetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen ağırlık merkezinin konum hataları ile deneysel konum hatalarının karşılaştırılması

mavi noktalar standart sapma (SS) değerlerini ifade etmektedir. Koordinat setlerine ilişkin stokastik modelin doğru olduğu varsayımı altında, problemin çözümünde kullanılan matematiksel model doğru ise kovaryans kestirimlerinden elde edilen standart sapmaların beklenen değerleri karesel ortalama hata değerlerine eşit olmalıdır. Diğer bir deyişle, eğer çözüm yöntemi yansız bir kestirici ise hesaplanan SS değerleri, KOH değerleri etrafında düzgün bir dağılım gösterir. Grafik sonuçlar yorumlanacak olursa, her iki sistem



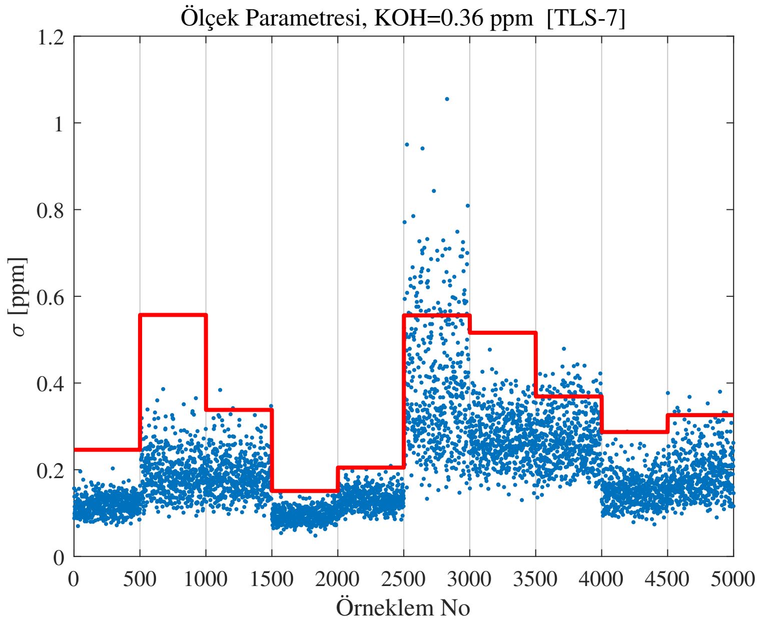
Şekil 4.7 Asimetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen öteleme parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması



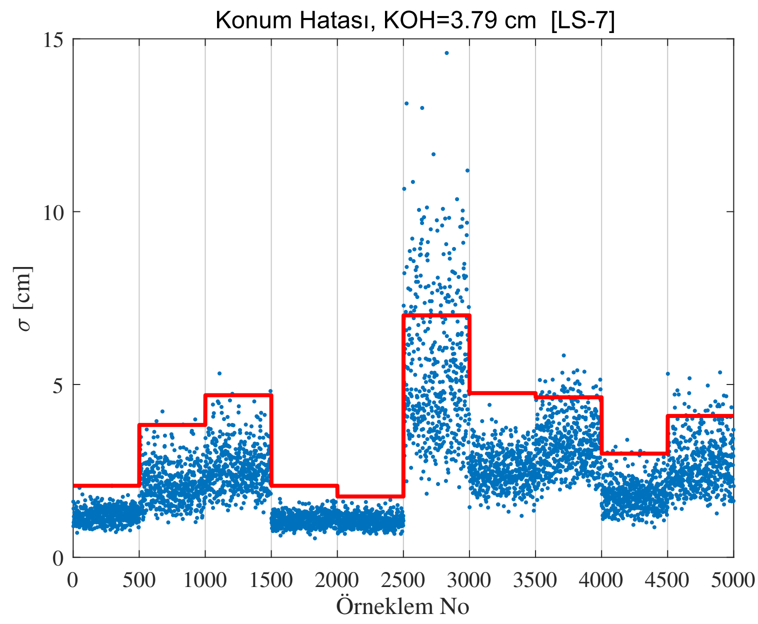
Şekil 4.8 Asimetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen dönüklük parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

koordinatlarının da rasgele hatalı olduğu durumlarda, toplam EKK çözümü yansız kestirici davranışı göstermektedir. Ancak, klasik EKK çözümüne ilişkin sonuçların belirgin biçimde yanlı olduğu görülmektedir (Şekil 4.7-4.10).

Sonuçların daha kolay yorumlanabilmesi için, daha önce belirtildiği gibi, grafikler 10 konfigürasyon için verilmiştir. Dönüşüm parametreleri, varyans çarpanı ve konum hatası için



Şekil 4.9 Asimetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen ölçek çarpanlarının standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması



Şekil 4.10 Asimetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen ağırlık merkezinin konum hataları ile deneysel konum hatalarının karşılaştırılması

her biri 500 örneklemi kapsayan 100 farklı konfigürasyondan (toplam 50 bin örneklemden) elde edilen KOH ve SS değerlerinin ortalamaları, Tablo 4.9'da verilmektedir. Tabloda verilen değerler öteleme ve dönüklük parametreleri için *x, y, z* eksenlerine ilişkin parametre kestirimlerinin ortalaması şeklindedir. Örneğin, simetrik dönüşüm modeline ilişkin olarak dönüklük açıları için hesaplanan KOH ve SS değerleri; $\mathrm{KOH}_{\varphi_x} = 163.8976, \mathrm{KOH}_{\varphi_y} = 56.9061, \mathrm{KOH}_{\varphi_z} = 161.9039$ ve $\hat{\sigma}_{\varphi_x} = 160.7036, \hat{\sigma}_{\varphi_y} = 56.2400, \hat{\sigma}_{\varphi_z} = 158.8388$ şeklinde iken Tablo 4.9'da kolaylık açısından bu değerlerin ortalamaları verilmiştir. Simetrik ve asimetrik dönüşüm sonucu parametrelere ilişkin standart sapma değerleri oldukça yakındır. Yalnızca standart sapma değerleri göz önünde bulundurulursa her iki çözüm yönteminin yakın doğruluklara sahip olduğu düşünülebilir. Başka bir deyişle, hesap yükü de dikkate alınırsa, problemi simetrik dönüşüm modeli altında ele almanın gereksiz olduğu düşünülebilir. Ancak, parametrelerin gerçek değerleri kullanılarak hesaplanan KOH değerleri ile dengeleme sonucu elde edilen kovaryans matrislerinden hesaplanan SS değerleri her iki dönüşüm modeli için de incelendiğinde; simetrik dönüşüm sonucu her iki değer neredeyse özdeş iken, asimetrik dönüşüm sonucu elde edilen SS'lerin KOH değerleri ile uyuşmadığı ve çözümün biaslı olduğu görülmektedir.

Tablo 4.9 Üç boyutlu asimetrik ve simetrik benzerlik dönüşümü sonuçlarının parametre bazında karşılaştırılması

Parametre	Simetrik Dönüşüm Modeli		Asimetrik Dönüşüm Modeli	
	KOH	**SS**	**KOH**	**SS**
Öteleme (cm)	2.51	2.47	4.57	2.58
Dönüklük (mas)	127.57	125.26	217.58	127.14
Ölçek (ppm)	0.21	0.21	0.39	0.21
Konum Hatası (cm)	2.21	2.18	4.05	2.27

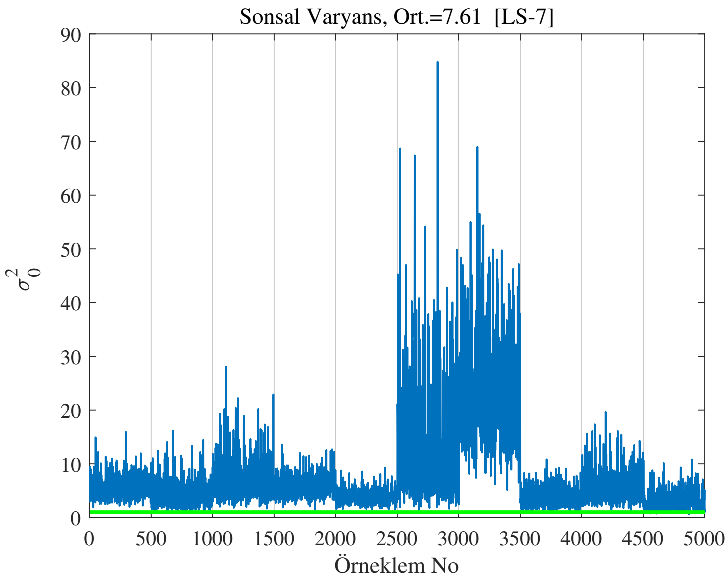
Bölüm 3.3.2'de belirtildiği üzere, toplam EKK algoritmaları da yanlı çözümler üretmektedir. Ancak sinyal/gürültü oranının yüksek (koordinatların büyük, standart sapmaların küçük) olduğu problemlerde çözümdeki "yanlılık" göz ardı edilebilir seviyelerdedir [43]. Pratikte sinyal/gürültü oranının bilinmesi pek mümkün olmadığından, yine Bölüm 3.3.2'de ele alınan χ^2 testi uygulanarak parametre kestirimleri, varyans çarpanları ve konum hataları için yanlış kestirim olasılıkları hesaplanmış ve ortalama sonuçlar Tablo 4.10'da gösterilmiştir.

Tablo 4.10 Üç boyutlu asimetrik ve simetrik benzerlik dönüşümü sonuçlarına ilişkin yanlış kestirim olasılıkları

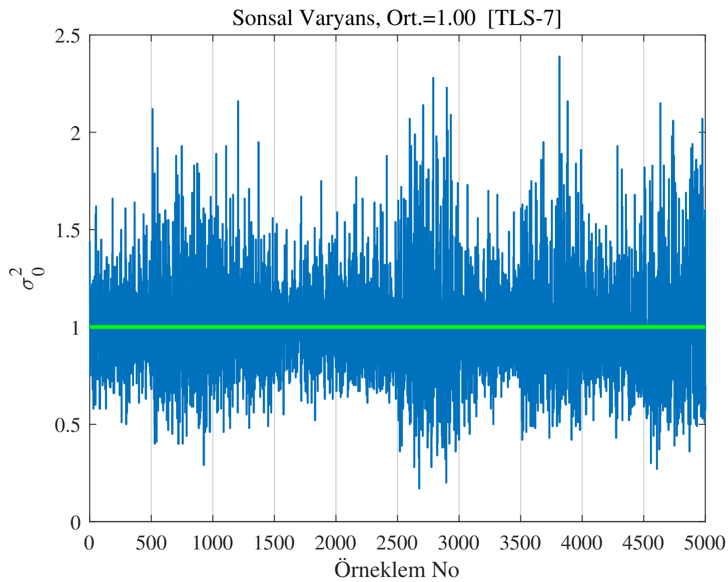
Parametre	Simetrik Model	Asimetrik Model
Öteleme	%1.42	%78.57
Dönüklük	%1.44	%76.69
Ölçek	%1.31	%80.12
Konum Hatası	%1.06	%79.50
Varyans Bileşeni	%0.84	%87.94

Tablo 4.10'da verilen sonuçlar, dönüşüm probleminin asimetrik dönüşüm modeli altında ele alınması durumunda, parametre kestirimlerinin biaslı olacağını ortaya koymaktadır.

Çözüme ilişkin bias miktarı sonsal varyanslarda daha da belirgindir. Simetrik ve asimetrik koordinat dönüşümleri için sırasıyla, Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 incelendiğinde, asimetrik dönüşüm için elde edilen sonsal varyans değerleri açık biçimde biaslı iken simetrik koordinat dönüşümünde bu değerler, doğru olduğu bilinen "1" değeri etrafında düzgün olarak dağılmaktadır.

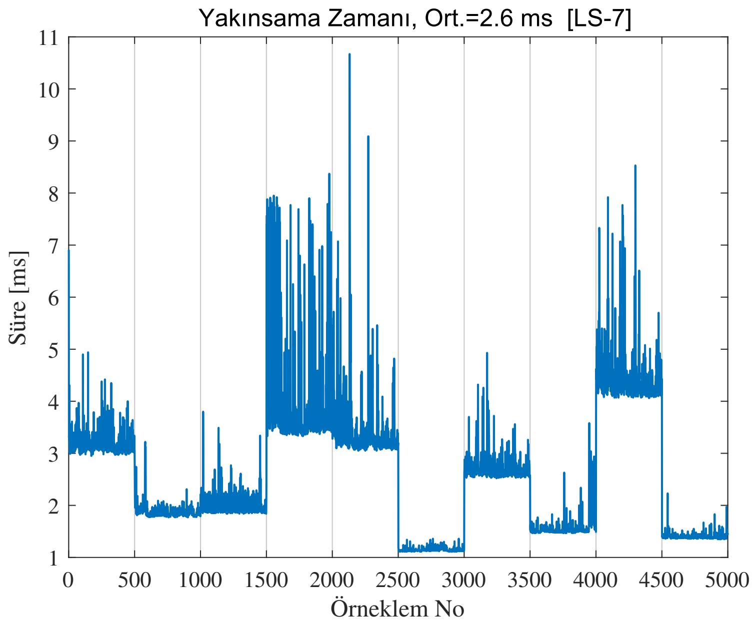


Şekil 4.11 Asimetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen sonsal varyanslar

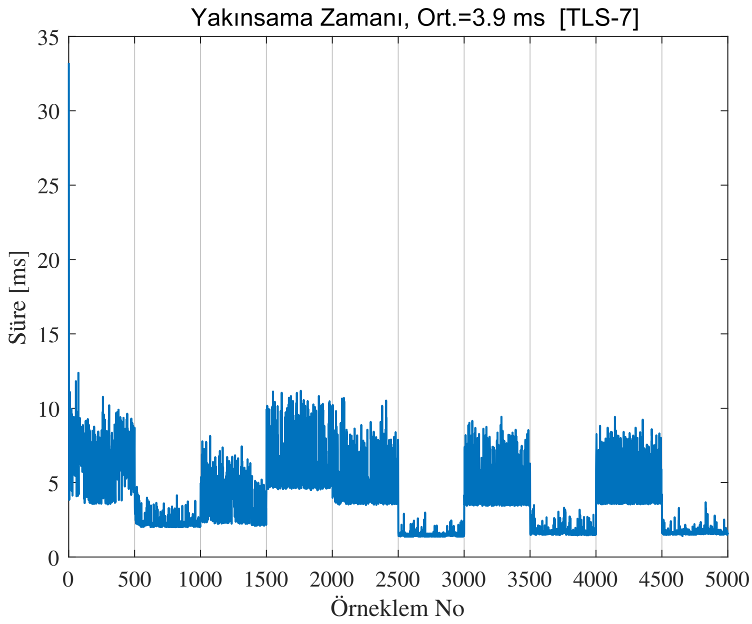


Şekil 4.12 Simetrik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen sonsal varyanslar

Bu uygulama kapsamında elde edilen sonuçlar, başlangıç ve hedef sistem koordinatlarının aynı seviyede rasgele hatalarla yüklü -ancak farklı kovaryans matrislerine sahip- olduğu duruma ilişkindir. Benzer sonuçlar, konum hataları ve sonsal varyanslar için Uygur vd. [122]'de de elde edilmiştir. Bir sonraki uygulamada ele alınacağı üzere, başlangıç sisteminin hedef sistemine göre doğruluğu arttıkça bu bias oranının azalacağı beklenmektedir.



Şekil 4.13 Asimetrik koordinat dönüşümü için hesaplama süreleri



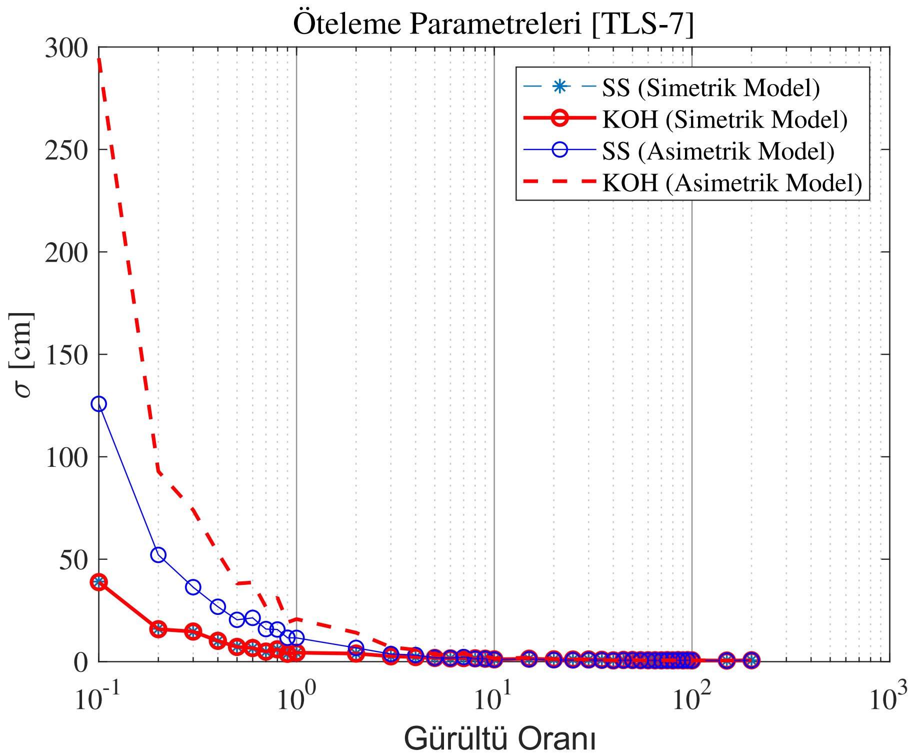
Şekil 4.14 Simetrik koordinat dönüşümü için hesaplama süreleri

Son olarak, algoritmaların toplam 5000 örneklem içeren 10 konfigürasyon için hesaplama süreleri Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'te gösterilmiştir. Beklendiği gibi, asimetrik dönüşüm ile hesap yükü ile orantılı olarak daha kısa sürede sonuca gidilmektedir. Bununla beraber, her iki algoritma da ortalama birkaç mili-saniye içinde çözüme yakınsamaktadır.

4.4 Farklı Gürültü Seviyelerine İlişkin Üç Boyutlu Simetrik ve Asimetrik Benzerlik Dönüşümü Örnekleri

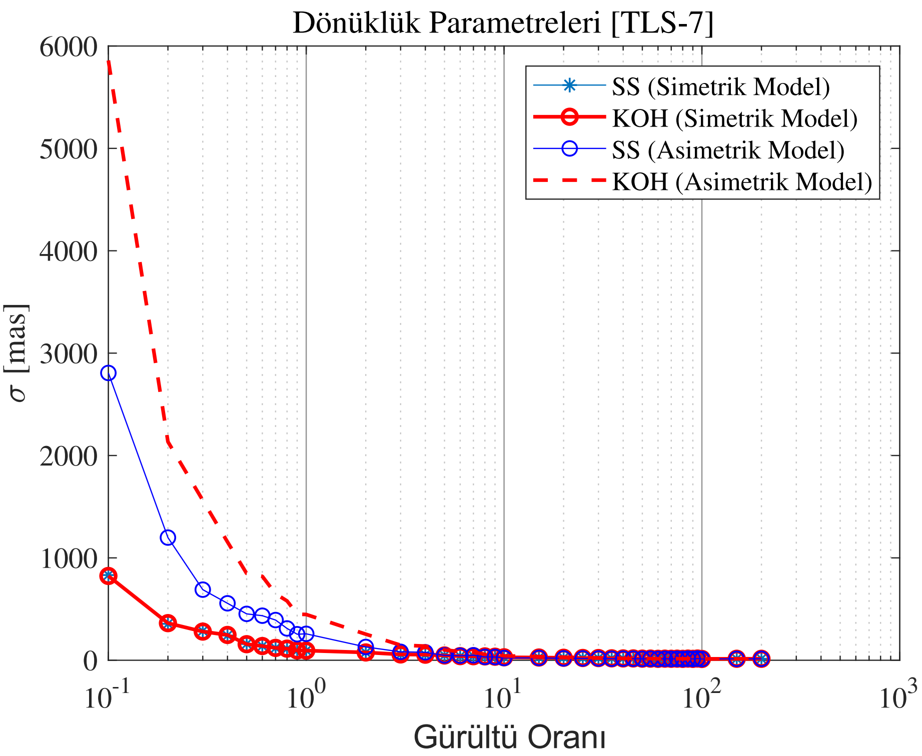
Bu bölümde, 3B benzerlik dönüşümü problemi için farklı gürültü seviyeleri için simetrik ve asimetrik koordinat dönüşümlerinin performansı incelenmiştir. Bu amaçla, Uygur vd. [122]'de olduğu şekilde, dönüklük açılarının diferansiyel anlamda küçük ve ölçek parametresinin 1'e yakınsadığı 20 noktalı bir jeodezik ağ tasarımı oluşturulmuştur. Kovaryans matrisleri, Bölüm 3.3.2'de gösterildiği gibi her iki sisteme ilişkin kofaktör matrislerinin σ_1^2 ve σ_2^2 varyansları ile ölçeklendirilmesiyle oluşturulmuştur ($\mathbf{C}_1 = \sigma_1^2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{C}_2 = \sigma_2^2\mathbf{Q}_2$). İlgili varyans çarpanları ile aynı zamanda veri setinin gürültü seviyesi de tanımlanmış olur.

Analizler için hedef sisteme ilişkin varyansların karekökü $\sigma_2 = 6$ cm (sabit) alınarak, başlangıç sistemi varyans çarpanları, $n_x = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = (0.1, \ldots, 200)$ oranından belirlenip, her bir oran için 1000 rasgele örneklem göz önünde bulundurulmuştur. Öteleme, dönüklük ve ölçek parametreleri ile konum hatalarının farklı gürültü seviyeleri için kestirim değerlerinin ortalamaları, sırasıyla, Şekil 4.15, 4.16, 4.17 ve 4.18'de gösterilmiştir.



Şekil 4.15 Farklı gürültü seviyeleri için öteleme parametrelerine ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-jeodezik konfigürasyon

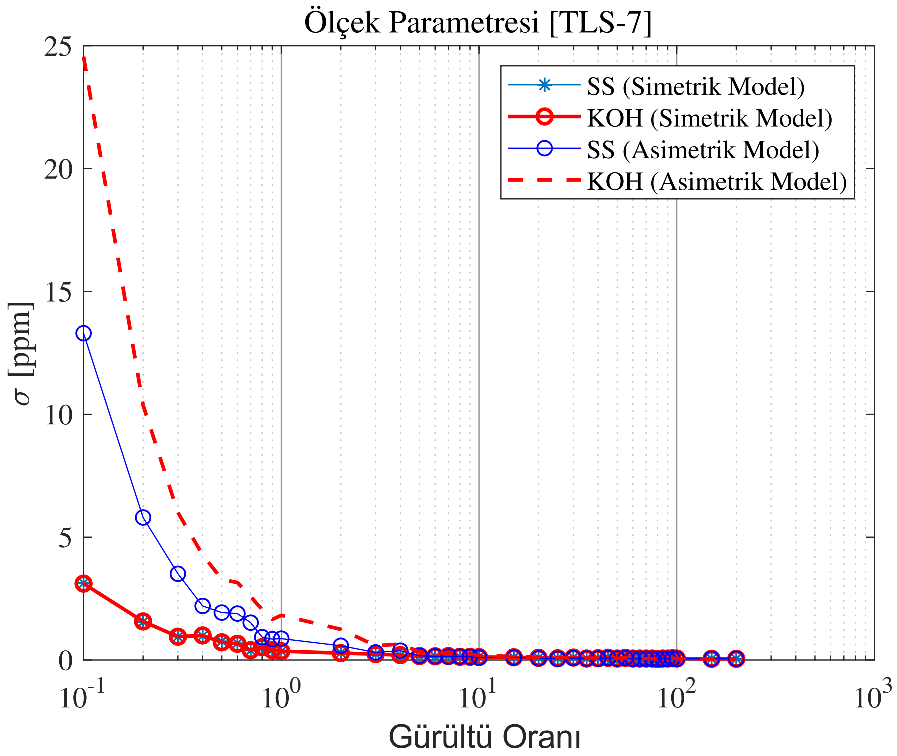
Grafik sonuçlara göre $n_x = 10^{-1}$ iken, yani başlangıç sistemi koordinatları hedef sistem koordinatlarına göre 10 kat daha az doğru iken asimetrik çözüm, ilgili matematiksel modeli



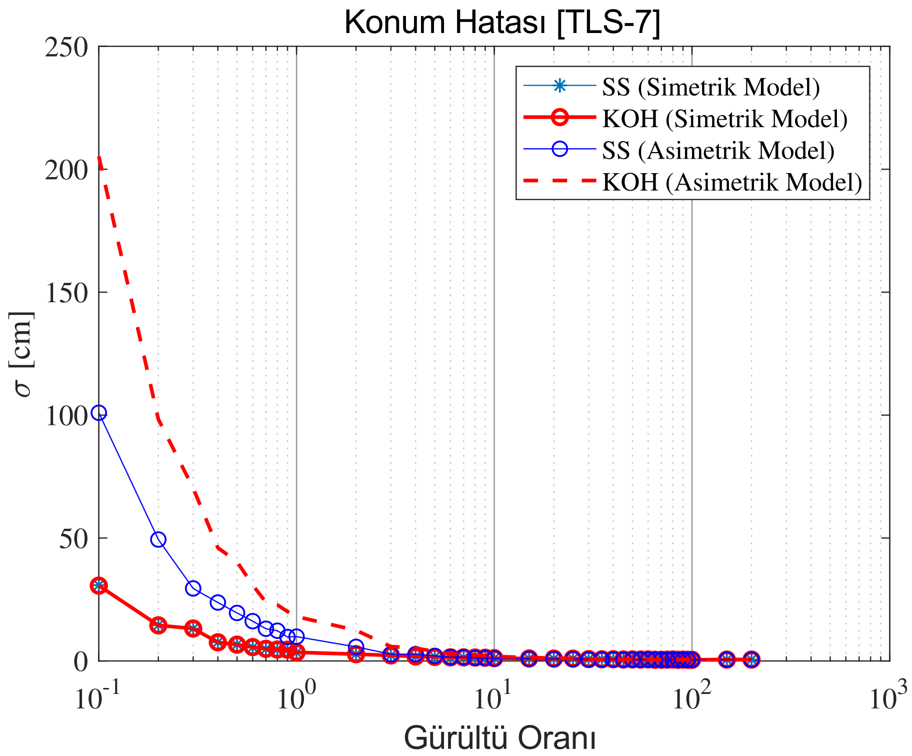
Şekil 4.16 Farklı gürültü seviyeleri için dönüklük parametrelerine ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-jeodezik konfigürasyon

ifade edemediğinden sonuçlar oldukça biaslıdır. Bununla beraber, simetrik çözüm için elde edilen KOH ve SS değerleri bu senaryoda oldukça uyumludur. Diğer taraftan, başlangıç sistemi koordinatları, hedef sistem koordinatlarına göre 10 kat veya daha fazla doğru ise asimetrik ve simetrik koordinat dönüşümleri için özdeş parametre kestirimleri elde edilir. Elde edilen bu sonuçlar pratik açıdan oldukça önemli olmakla beraber; sonuçların dönüşüm parametrelerinin büyüklüğüne bağlı olup olmadıklarını incelemek için, analizler dönüşüm parametrelerinin büyük olduğu bir konfigürasyon için tekrar edilmiştir. Bu senaryoda, dönüklük açılarının ve ölçek çarpanının bilinen değerleri $\overline{\varphi}_x = 64.7°, \overline{\varphi}_y = 53.3°, \overline{\varphi}_z = 51.3°, \overline{k} = 1.9893$ şeklindedir. Analiz sonuçları benzer biçimde, öteleme, dönüklük, ölçek parametreleri ve konum hatası için, sırasıyla, Şekil 4.19, 4.20, 4.21 ve 4.22'de gösterilmiştir.

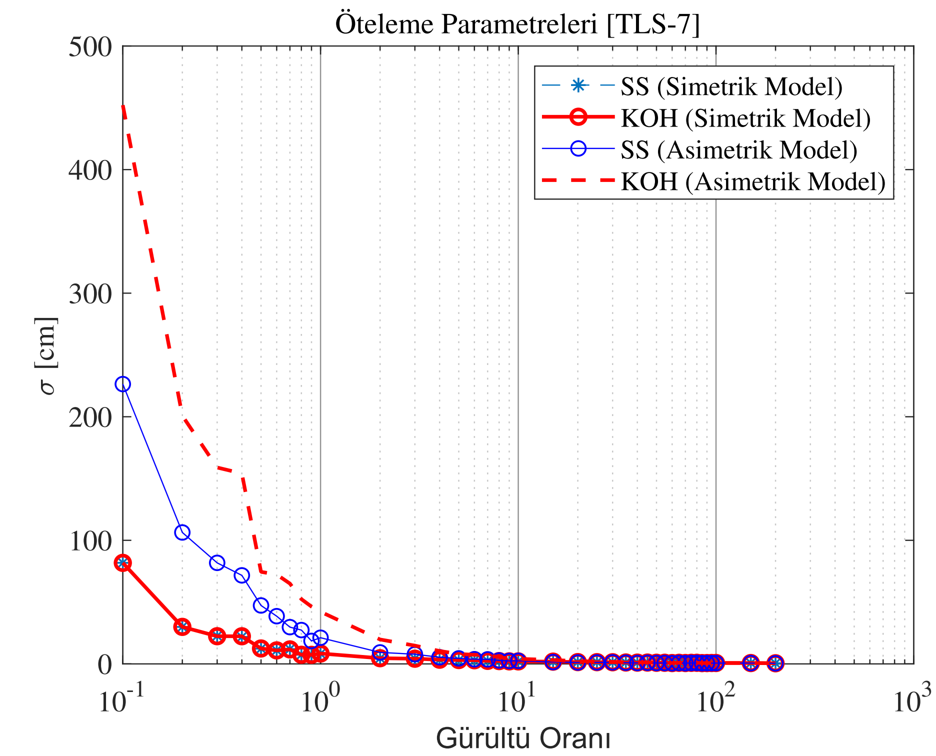
Buradan, asimetrik ve simetrik dönüşüm modellerinin büyük dönüşüm parametreli örnekler için de yukarıda ifade edilen davranışa sahip oldukları görülmektedir. Dolayısıyla, dönüşüm parametrelerinin büyüklüğünden bağımsız olarak, eğer başlangıç sistemi koordinatları hedef sistem koordinatlarına göre 10 kat veya daha fazla doğru ise iki çözüm ile özdeş parametre kestirimleri elde edilecektir. Aksi durumda, asimetrik dönüşüm biaslı çözüm üretecektir.



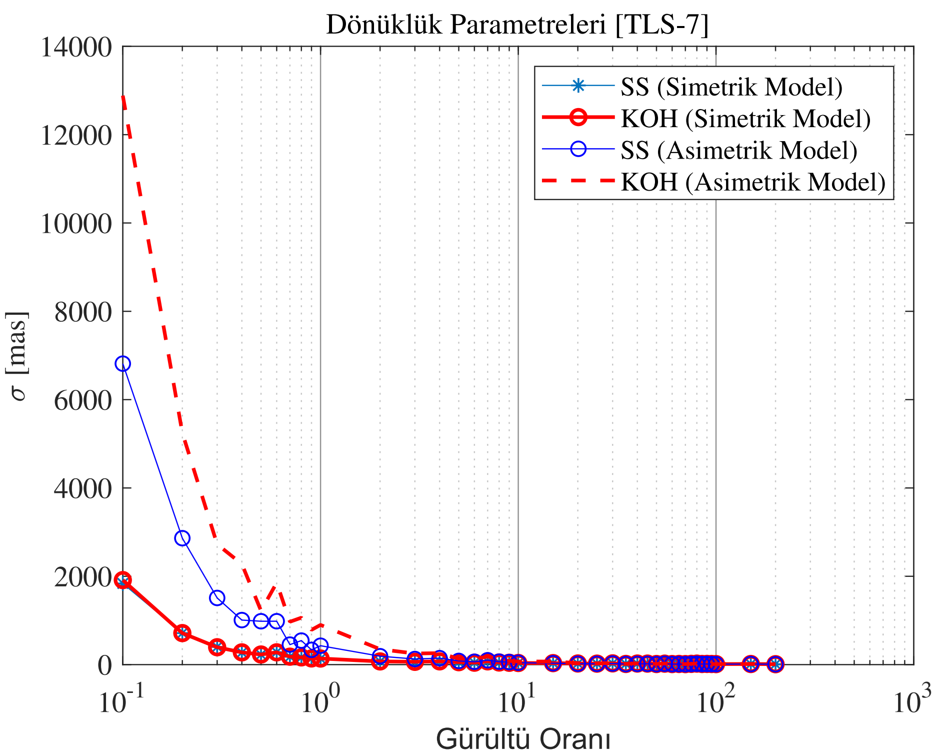
Şekil 4.17 Farklı gürültü seviyeleri için ölçek çarpanlarına ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-jeodezik konfigürasyon



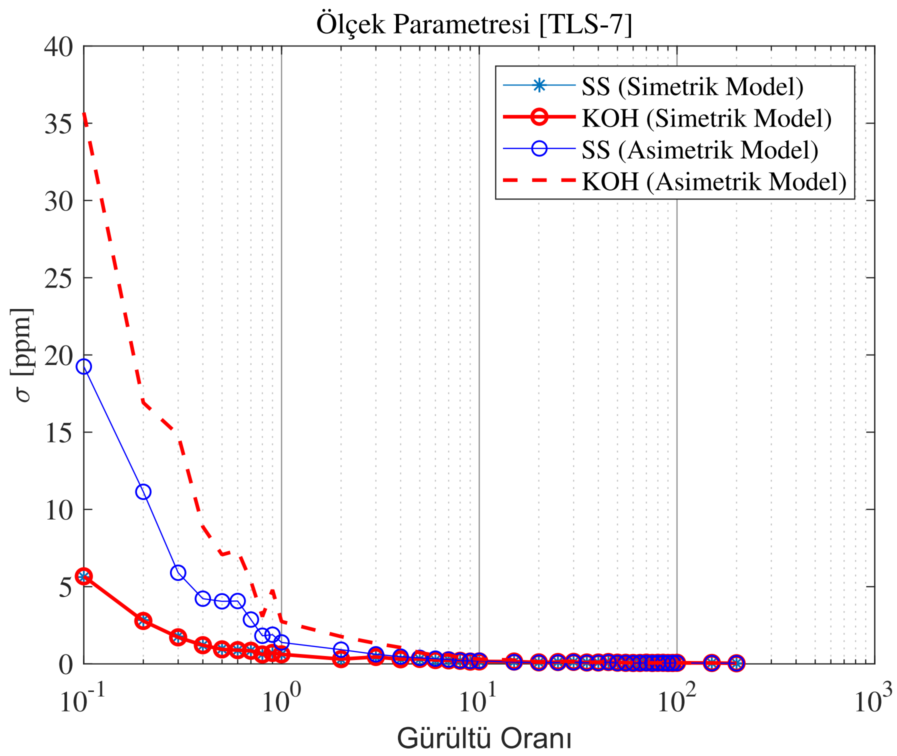
Şekil 4.18 Farklı gürültü seviyeleri için konum hatalarına ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-jeodezik konfigürasyon



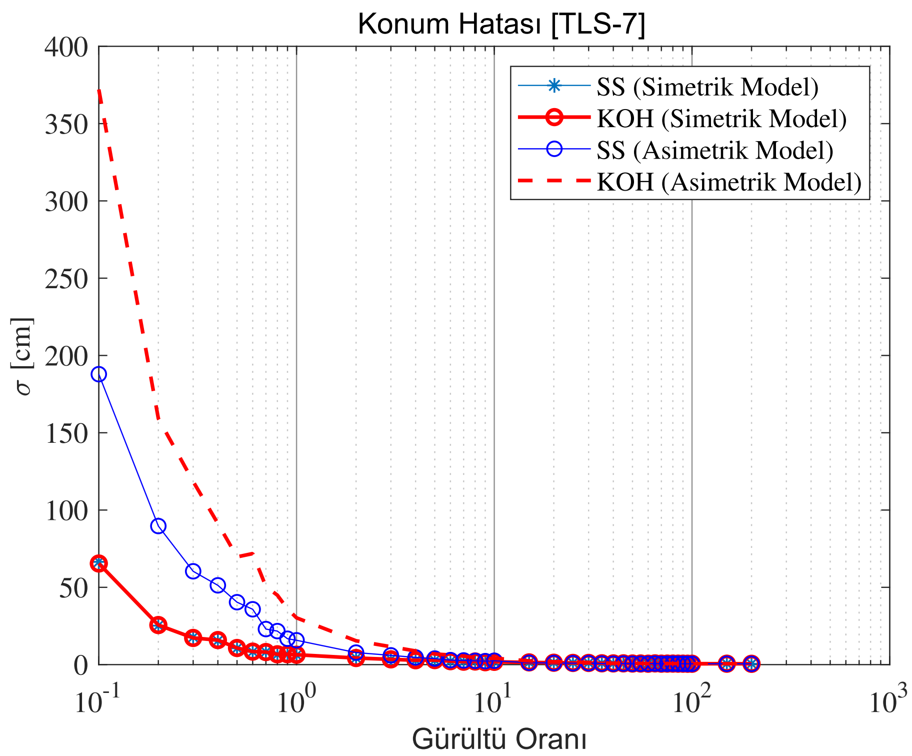
Şekil 4.19 Farklı gürültü seviyeleri için öteleme parametrelerine ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-dönüşüm parametrelerinin büyük olduğu konfigürasyon



Şekil 4.20 Farklı gürültü seviyeleri için dönüklük parametrelerine ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-dönüşüm parametrelerinin büyük olduğu konfigürasyon



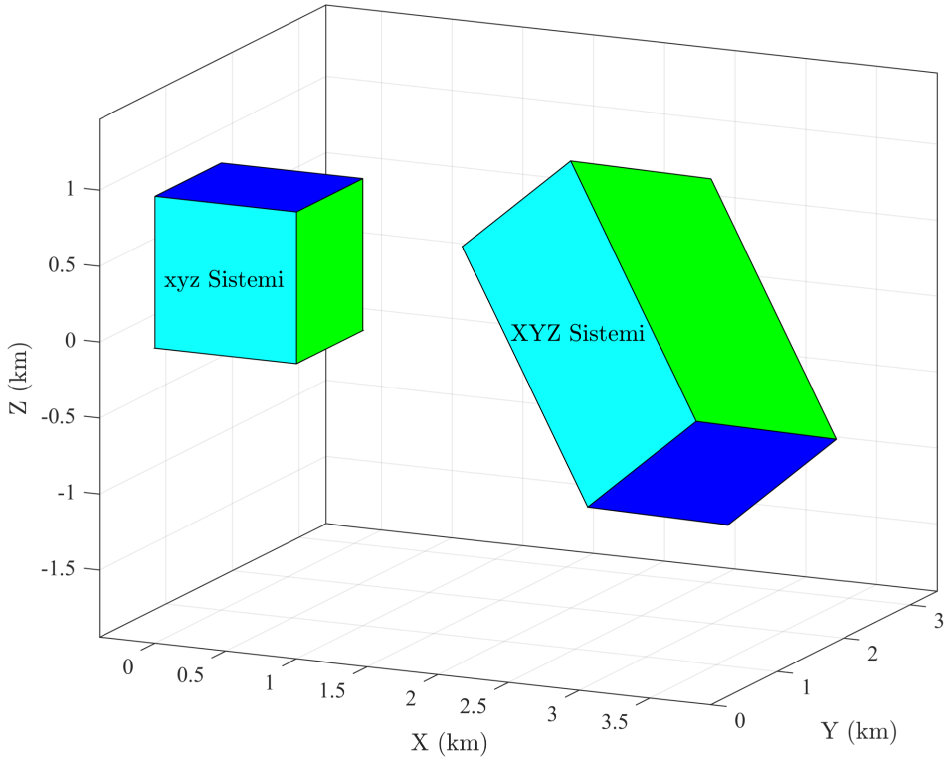
Şekil 4.21 Farklı gürültü seviyeleri için ölçek çarpanlarına ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-dönüşüm parametrelerinin büyük olduğu konfigürasyon



Şekil 4.22 Farklı gürültü seviyeleri için konum hatalarına ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-dönüşüm parametrelerinin büyük olduğu konfigürasyon

4.5 Üç Boyutlu Asimetrik Afin Dönüşümü Örneği

Kuaterniyon tabanlı $9p$ afin dönüşümü algoritmasını asimetrik koordinat dönüşümü üzerinden test etmek amacıyla, xyz başlangıç sisteminde bir küp örneği tasarlanmıştır. Küp, sırasıyla, x ve y eksenleri etrafında $-20°$ ve $-140°$ döndürülüp, x ve y eksenleri boyunca 2000 m ve z ekseni boyunca 1000 m ötelenmiştir. x, y, z eksenleri boyunca ölçek çarpanlarının bilinen değerleri ise, $\overline{k}_x = 1$, $\overline{k}_y = 1.5$, $\overline{k}_z = 2$ şeklinde tanımlanmıştır. Şekil 4.23'te gösterilen küpün her iki sistemdeki köşe noktalarının koordinatları ve hedef sistemdeki noktaların ağırlık katsayıları ($Q_{x,i} = Q_{y,i} = Q_{z,i}$; i=1, ...,8) Tablo 4.11'de verilmektedir.



Şekil 4.23 Küpün başlangıç (xyz) ve hedef (XYZ) sistemindeki konumu

Asimetrik dönüşüm sonucu elde edilen hedef sistem koordinatlarının hata kestirimleri ve sonsal varyans değeri Tablo 4.12'de, öteleme parametreleri ile ölçek çarpanları için elde edilen kestirim değerleri Tablo 4.13'te ve dönüklük parametrelerinin (Euler dönüklük açılarının) kestirim değerleri Tablo 4.14'te verilmektedir.

Tablo 4.11 Küpün köşe noktalarının başlangıç ve hedef sistemlerindeki koordinatları

	Başlangıç Sistemi (xyz)			Hedef Sistemi (XYZ)			
i	x (m)	y (m)	z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)	Q_i
1	1000	0	0	1233.9	2000.0	357.3	1
2	1000	1000	0	1563.7	3409.4	-35.9	2
3	0	1000	0	2329.8	3409.6	607.1	3
4	0	0	0	1999.9	2000.0	999.9	4
5	1000	0	1000	2442.0	1316.1	-1082.5	4
6	1000	1000	1000	2771.7	2725.5	-1475.5	3
7	0	1000	1000	3537.8	2725.6	-832.6	2
8	0	0	1000	3208.1	1316.0	-439.7	1

Tablo 4.12 Hedef sistem koordinatlarına ilişkin hata vektörü elemanları ve sonsal varyans

NN	e_X (m)	e_Y (m)	e_Z (m)
1	-0.0308	0.0091	0.0840
2	0.0534	-0.1165	-0.1248
3	0.0700	0.0609	0.0577
4	-0.1142	-0.0135	-0.1335
5	-0.0012	0.1059	-0.0115
6	-0.0169	-0.0197	-0.0203
7	-0.0003	0.0577	0.0622
8	0.0154	-0.0167	-0.0289
$\hat{\sigma}_0^2 =$		0.00293 m^2	

Tablo 4.13 Öteleme ve ölçek parametrelerinin kestirim değerleri

Öteleme Parametreleri (m)	Ölçek Çarpanları (Birimsiz)
$\hat{t}_x$ = 2000.01424 ± 0.05777	$\hat{k}_x$ = 1.0000490468 ± 0.0000579317
$\hat{t}_y$ = 2000.01346 ± 0.04706	$\hat{k}_y$ = 1.4999723182 ± 0.0000541541
$\hat{t}_z$ = 1000.03347 ± 0.03991	$\hat{k}_z$ = 2.0000086817 ± 0.0000543190

Tablo 4.14'te görüldüğü gibi, matematiksel olarak iki çözüm mevcut olmakla beraber, y ekseni etrafındaki dönüklük açısının bilinen değeri ($\overline{\varphi}_y = -140°$), $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığının dışında olduğundan ikinci çözüm geçerlidir.

Tablo 4.14 Euler dönüklük açılarının kestirim değerleri

	Birinci Çözüm (°)	İkinci Çözüm (°)
$\hat{\varphi}_x$	160.0003298448±0.0000363235	-19.9996701552±0.0000363235
$\hat{\varphi}_y$	-39.9998748586±0.0000269276	-140.0001251414±0.0000269276
$\hat{\varphi}_z$	179.9983099336±0.0000391837	-0.0016900664±0.0000391837

Tablo 4.13 ve Tablo 4.14'teki sonuçlara göre, kuaterniyon tabanlı çözüm algoritması $9p$ afin dönüşümü için uyumlu sonuçlar vermektedir: Dönüşüm parametreleri, bilinen değerleri ile oldukça iyi biçimde örtüşmektedir.

Tez çalışması kapsamında ele alınan bu algoritma, Andrei [4]'te verilen 20 noktalı bir jeodezik ağın global ve yerel referans çerçevesindeki koordinatları arasındaki dönüşüm probleminin çözümünde kullanılmıştır. Elde edilen sonuçların, Andrei [4] tarafından verilen çözüm ile oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. İlgili çalışmanın sonuçları Uygur vd. [25]'te verilmektedir.

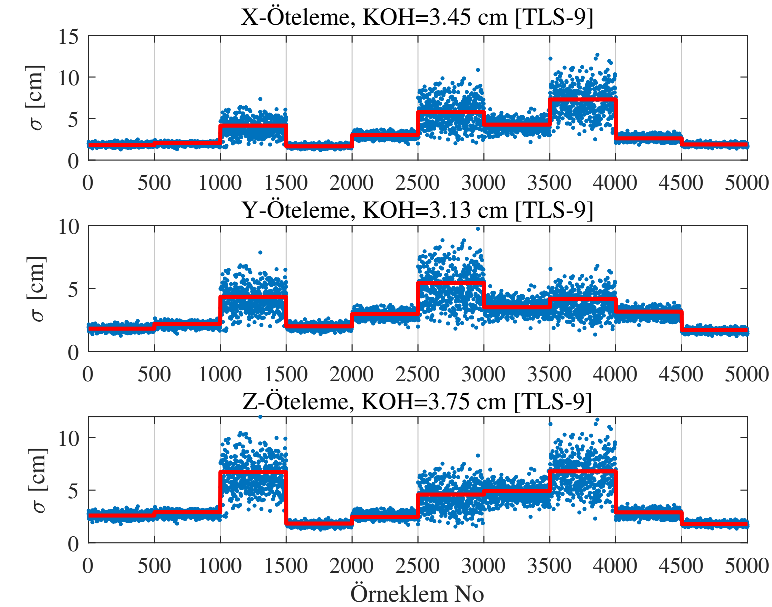
Dönüşüm parametrelerinin oldukça büyük olduğu böylesi bir afin dönüşümü probleminde, geliştirilen kuaterniyon tabanlı algoritma oldukça iyi çalışmaktadır. Bölüm 2.4 altında ele alınan yaklaşık değer belirleme algoritması, bu derece büyük ölçek ve dönüklük parametreleri için, oldukça kararlı çalışmakta ve dönüşüm algoritmasının performansını arttırmaktadır.

4.6 Üç Boyutlu Simetrik ve Asimetrik Afin Dönüşümü Örnekleri

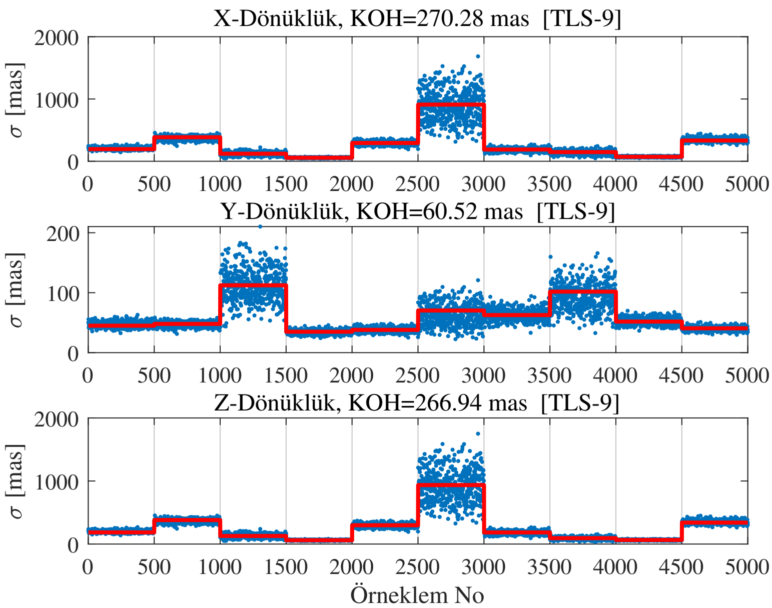
Bu bölümde kuaterniyon tabanlı $9p$ afin dönüşümü algoritmasını test etmek amacıyla, Bölüm 4.3'te ele alınana benzer biçimde bir simülasyon çalışması tasarlanmıştır. Bölüm 3.3.2'de Tablo 3.3 ile verilen simülasyon stratejisi izlenmiştir. Rasgele hatalar için, $\mathbf{e}_1 \sim N(\mathbf{0}, 0.0036\ m^2)$ ve $\mathbf{e}_2 \sim N(\mathbf{0}, 0.0036\ m^2)$ alınmıştır.

Analizlerin yorumlanması aşamasında, simetrik koordinat dönüşümü sonucu kovaryans matrisinden elde edilen parametre standart sapmaları ile Eşitlik 3.30'dan parametrelerin bilinen ve kestirim değerleri kullanılarak elde edilen karesel ortalama hataları karşılaştırılmıştır. 10 konfigürasyona indirgenmiş sonuçlar, sırasıyla, öteleme, dönüklük, ölçek parametreleri ve konum hataları için Şekil 4.24, Şekil 4.25, Şekil 4.26 ve Şekil 4.27'de gösterilmiştir. Aynı veri için problem, asimetrik dönüşüm modeli altında ele alınmış ve dönüşüm parametrelerine ve konum hatasına ilişkin sonuçlar Şekil 4.28, Şekil 4.29, Şekil 4.30 ve Şekil 4.31'de gösterilmiştir.

Şekillerde yatay kırmızı çizgiler gerçek değerler kullanılarak elde edilen KOH değerlerine karşılık gelirken, mavi noktalar kestirilen kovaryans matrisleri aracılığıyla hesaplanan

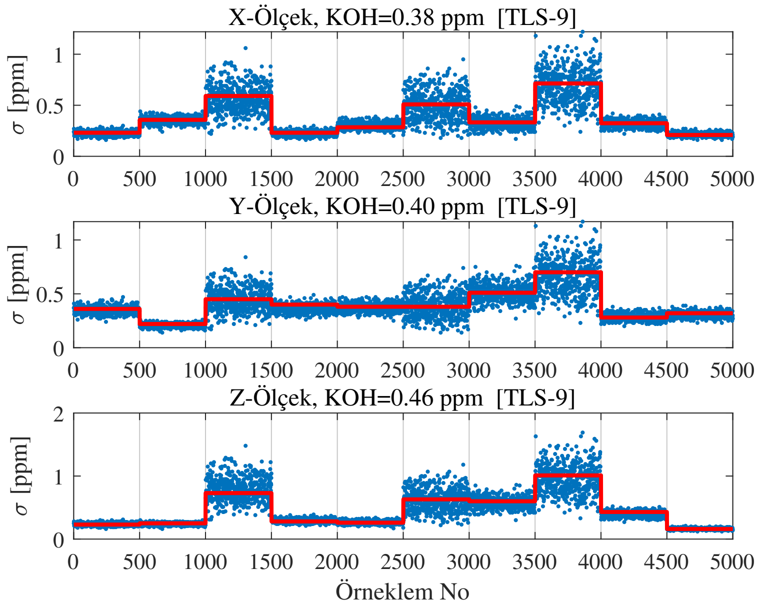


Şekil 4.24 Simetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen öteleme parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

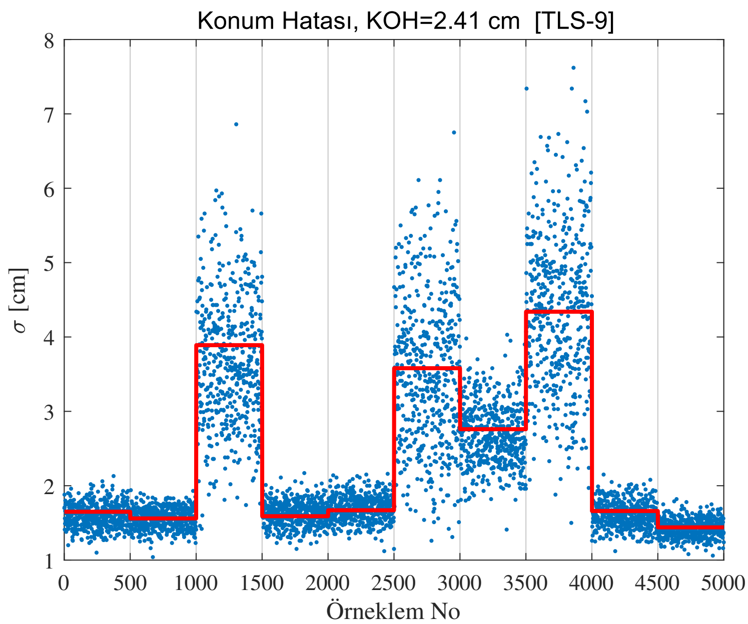


Şekil 4.25 Simetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen dönüklük parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

SS değerlerini ifade etmektedir. 3B benzerlik dönüşümü örneklerinde olduğu gibi, her iki sistem koordinatlarının da rasgele hatalı olduğu durumlarda, toplam EKK çözümü (sinyal/gürültü oranı yeteri kadar yüksek ise) yansız kestirici davranışı göstermektedir. Bununla beraber, klasik EKK çözümü ile elde edilen parametre kestirimlerine ilişkin bias oldukça belirgindir.

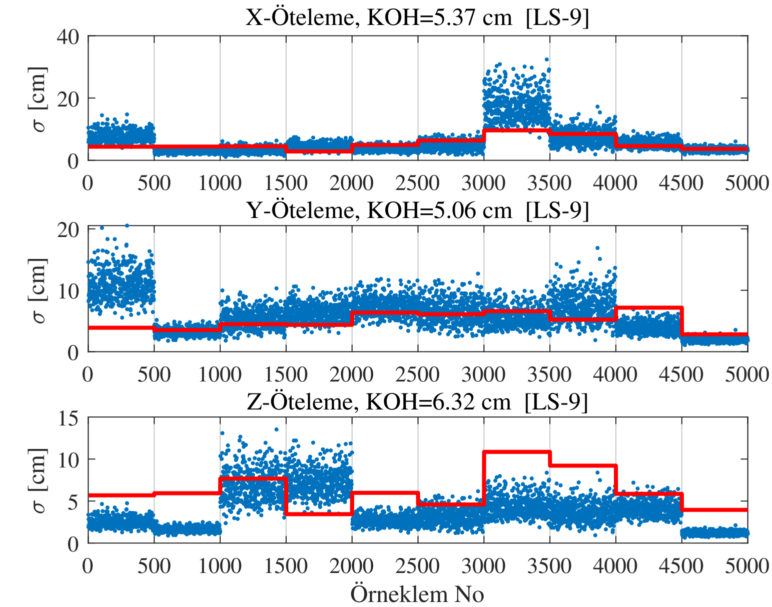


Şekil 4.26 Simetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen ölçek çarpanlarının standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

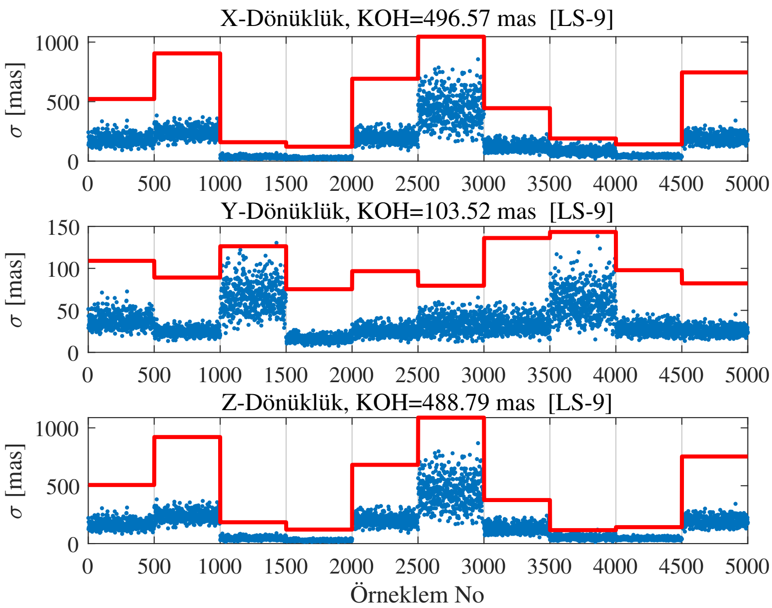


Şekil 4.27 Simetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen ağırlık merkezinin konum hataları ile deneysel konum hatalarının karşılaştırılması

Daha geniş bir örneklemde elde edilen bulguları doğrulayabilmek amacıyla, uygulama, her biri 500 örneklemi kapsayan 100 farklı konfigürasyon için genişletilmiştir. Dönüşüm parametreleri, sonsal varyans (birim ağırlıklı ölçünün varyansı) ve konum hatası için toplam 50 bin örneklemden elde edilen KOH ve SS değerlerinin ortalamaları Tablo 4.15'te verilmektedir. Tabloda verilen değerler öteleme, dönüklük ve ölçek parametreleri için *x, y, z* eksenlerine ilişkin parametre kestirimlerinin ortalaması şeklindedir (bkz. Bölüm 4.3).

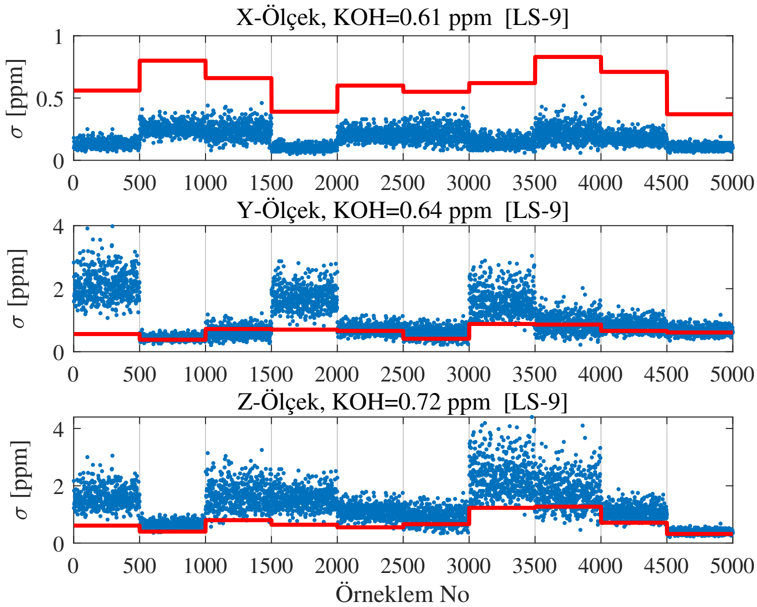


Şekil 4.28 Asimetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen öteleme parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

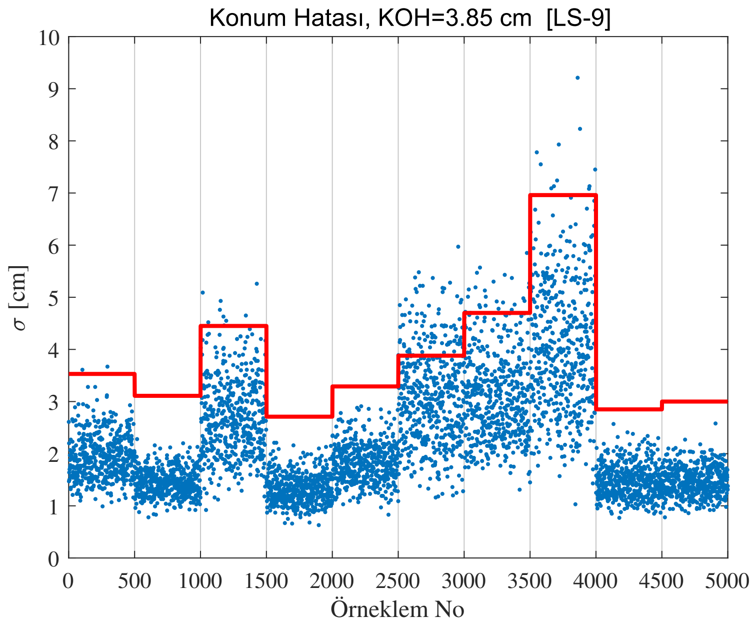


Şekil 4.29 Asimetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen dönüklük parametrelerinin standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması

Parametrelerin simetrik dönüşüm sonucu elde edilen KOH değerleri ile SS değerleri birbiri ile oldukça uyumlu iken, asimetrik dönüşüm sonucu elde edilen SS'lerin KOH değerleri ile uyuşmadığı ve çözümün biaslı olduğu görülmektedir. Buradan hareketle, söz konusu bias için bir ölçüt oluşturabilmek amacıyla parametre kestirimleri, sonsal varyans ve konum hataları için yanlış kestirim olasılıkları hesaplanmış ve ortalama sonuçlar Tablo 4.16'da gösterilmiştir.



Şekil 4.30 Asimetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen ölçek çarpanlarının standart sapmaları ile karesel ortalama hatalarının karşılaştırılması



Şekil 4.31 Asimetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen ağırlık merkezinin konum hataları ile deneysel konum hatalarının karşılaştırılması

Tablo 4.16'da verilen sonuçlar, dönüşüm probleminin asimetrik dönüşüm modeli altında ele alınması durumunda, parametre kestirimlerinin biaslı olacağını açık biçimde ortaya koymaktadır. Çözüme ilişkin bias miktarı, benzerlik dönüşümü probleminde olduğu gibi, sonsal varyansta daha da belirgindir. Simetrik ve asimetrik koordinat dönüşümleri için sırasıyla, Şekil 4.32 ve Şekil 4.33 incelendiğinde; asimetrik dönüşüm için elde edilen sonsal varyans değerleri açık biçimde biaslı iken simetrik koordinat dönüşümünde ise bu

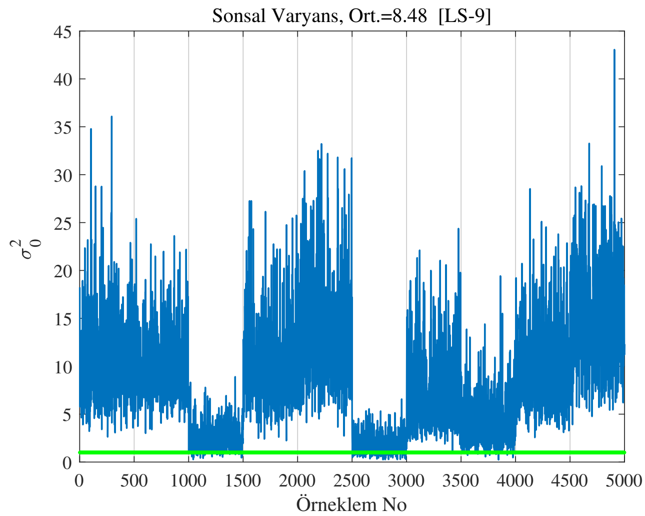
Tablo 4.15 Üç boyutlu asimetrik ve simetrik afin dönüşümü sonuçlarının parametre bazında karşılaştırılması

Parametre	Simetrik Dönüşüm Modeli		Asimetrik Dönüşüm Modeli	
	KOH	SS	KOH	SS
Öteleme (cm)	3.19	3.16	5.67	5.31
Dönüklük (mas)	126.71	126.01	241.80	78.93
Ölçek (ppm)	0.39	0.39	0.71	0.86
Konum Hatası (cm)	2.24	2.21	3.99	2.29

Tablo 4.16 Üç boyutlu asimetrik ve simetrik afin dönüşümü sonuçlarına ilişkin yanlış kestirim olasılıkları

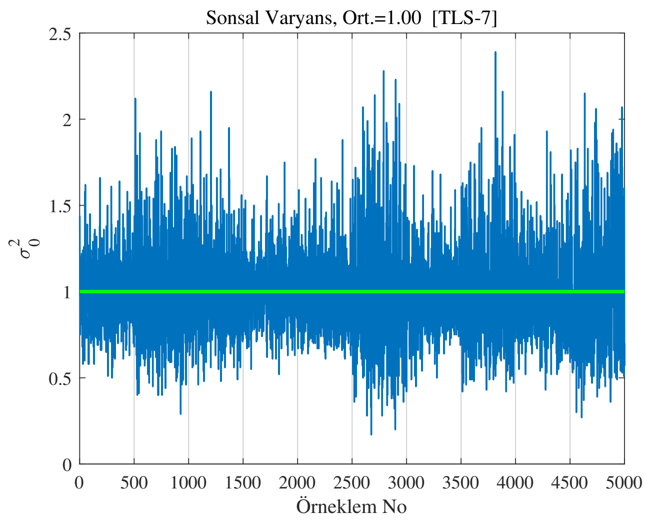
Parametre	Simetrik Model	Asimetrik Model
Öteleme	%1.38	%64.51
Dönüklük	%1.38	%89.87
Ölçek	%1.38	%72.41
Konum Hatası	%0.83	%76.46
Varyans Bileşeni	%0.64	%88.62

değerlerin ortalaması, sonsal varyansın beklenen değeri 1'e gitmektedir. Elde edilen tüm bulgular, $7p$ dönüşüme ilişkin elde edilen sonuçlar ile tutarlıdır.

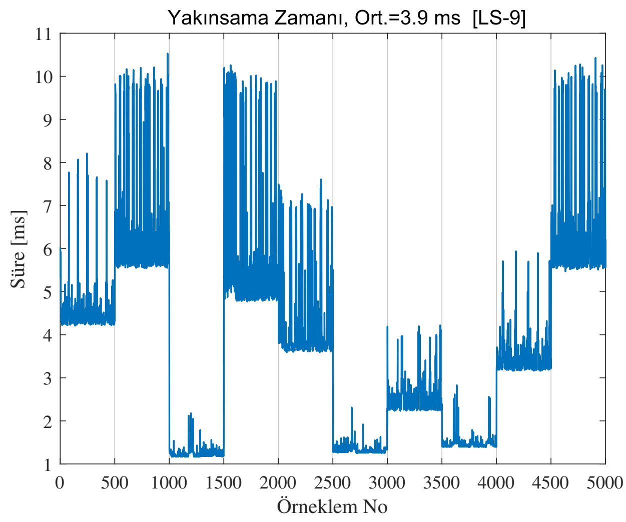


Şekil 4.32 Asimetrik afin koordinat dönüşümü sonucu elde edilen sonsal varyanslar

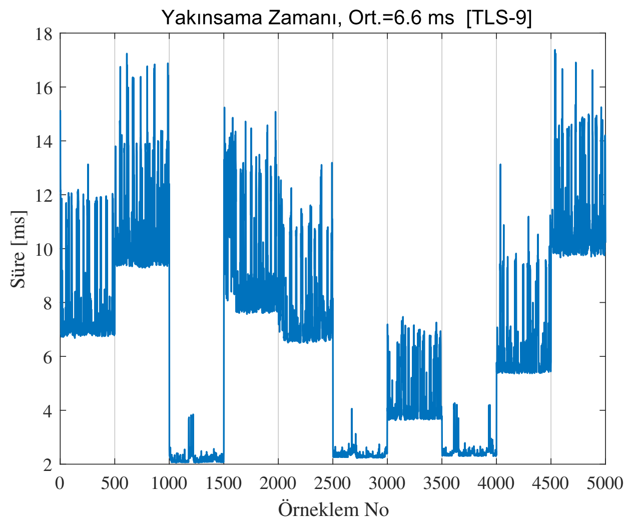
Son olarak, algoritmaların toplam 5000 örneklem içeren 10 konfigürasyon için hesaplama süreleri Şekil 4.34 ve Şekil 4.35'te gösterilmiştir. Beklendiği gibi, asimetrik dönüşüm ile hesap yükü ile orantılı olarak daha kısa sürede sonuca gidilmekle beraber, afin dönüşüm modelinde hesaplama süresi her iki çözüm yöntemi için de benzerlik dönüşümüne göre daha uzundur. Bunun temel sebebi ise, afin dönüşümünde algoritmaya dahil edilen yaklaşık değer belirleme algoritmasıdır.



Şekil 4.33 Simetrik afin koordinat dönüşümü sonucu elde edilen sonsal varyanslar



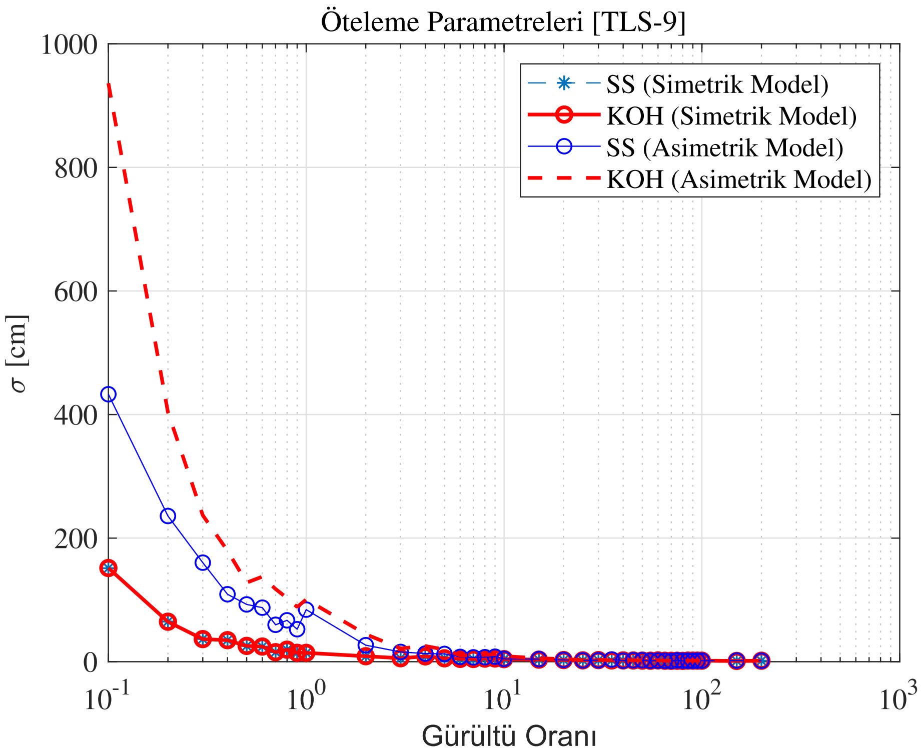
Şekil 4.34 Asimetrik afin koordinat dönüşümü için hesaplama süreleri



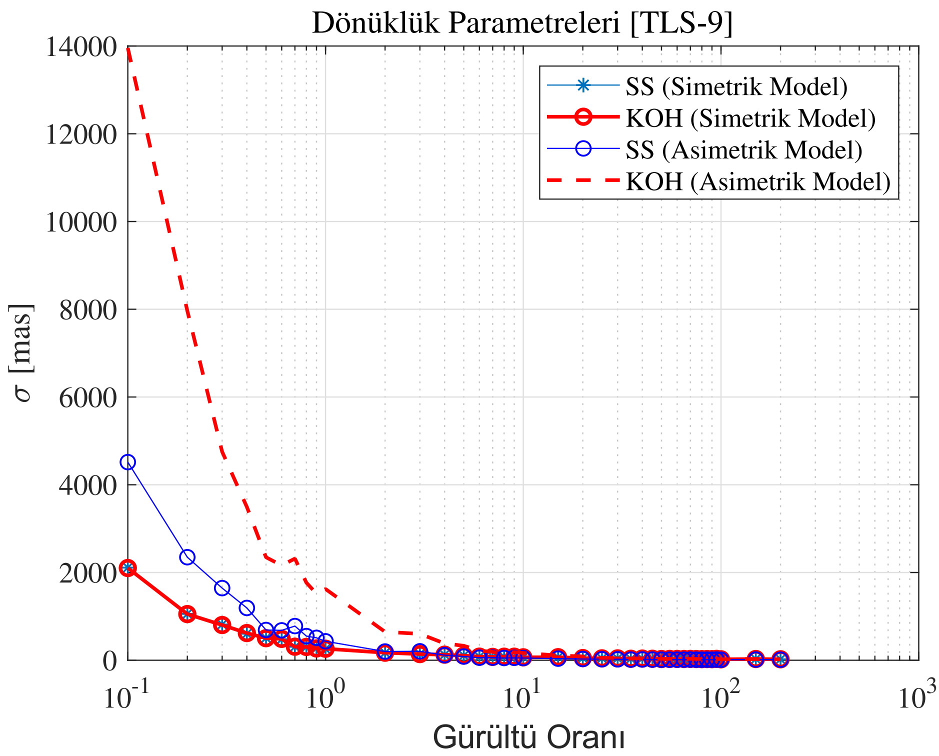
Şekil 4.35 Simetrik afin koordinat dönüşümü için hesaplama süreleri

4.7 Farklı Gürültü Seviyelerine İlişkin Üç Boyutlu Simetrik ve Asimetrik Afin Dönüşümü Örnekleri

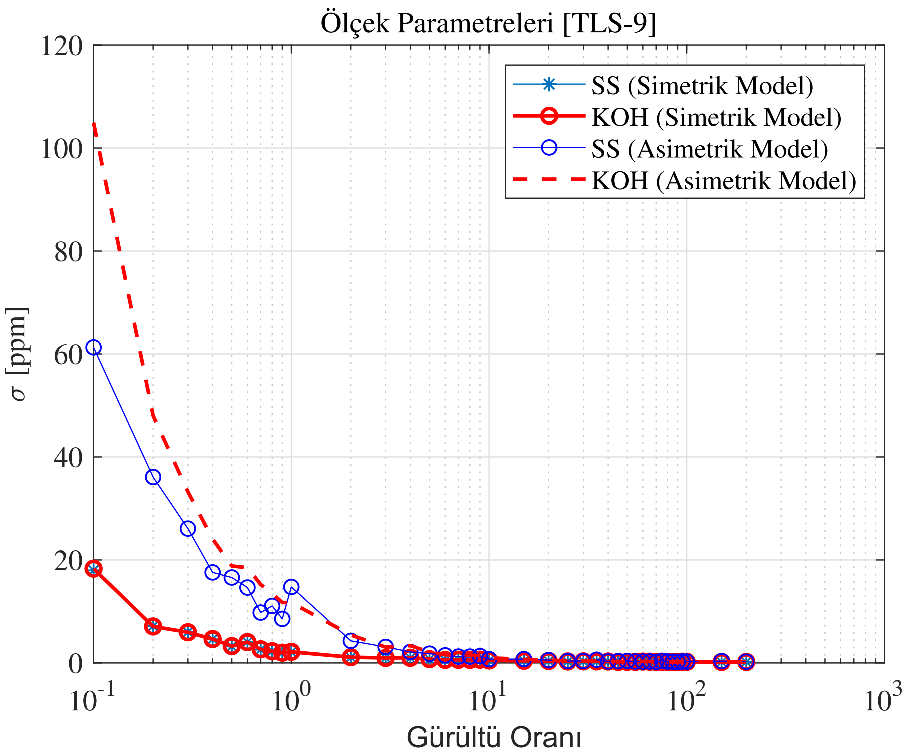
3B benzerlik dönüşümü örnekleri üzerinden (Bölüm 4.4) farklı gürültü seviyelerinde gerçekleştirilen analizler sonucunda; başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarından 10 kat veya daha fazla doğru olması durumunda simetrik ve asimetrik koordinat dönüşümlerinin özdeş parametre kestirimi verdikleri görülmüştür. Bu bölümde, benzer sonucun 3B afin dönüşümü için de geçerli olup olmadığı incelenmektedir. Bu amaçla, Bölüm 4.4'te verilen strateji takip edilmiş, ancak hedef sisteme ilişkin $\sigma_2 = 10$ cm alınarak stokastik yapı değiştirilmiştir. Her bir n_x oranı için, oluşturulan konfigürasyona ilişkin yine 1000 farklı örneklemde analizler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen SS ve KOH değerlerinin her bir n_x oranı için öteleme, dönüklük, ölçek parametreleri ve konum hatalarına ilişkin ortalamaları, Şekil 4.36, 4.37, 4.38 ve 4.39'de gösterilmiştir.



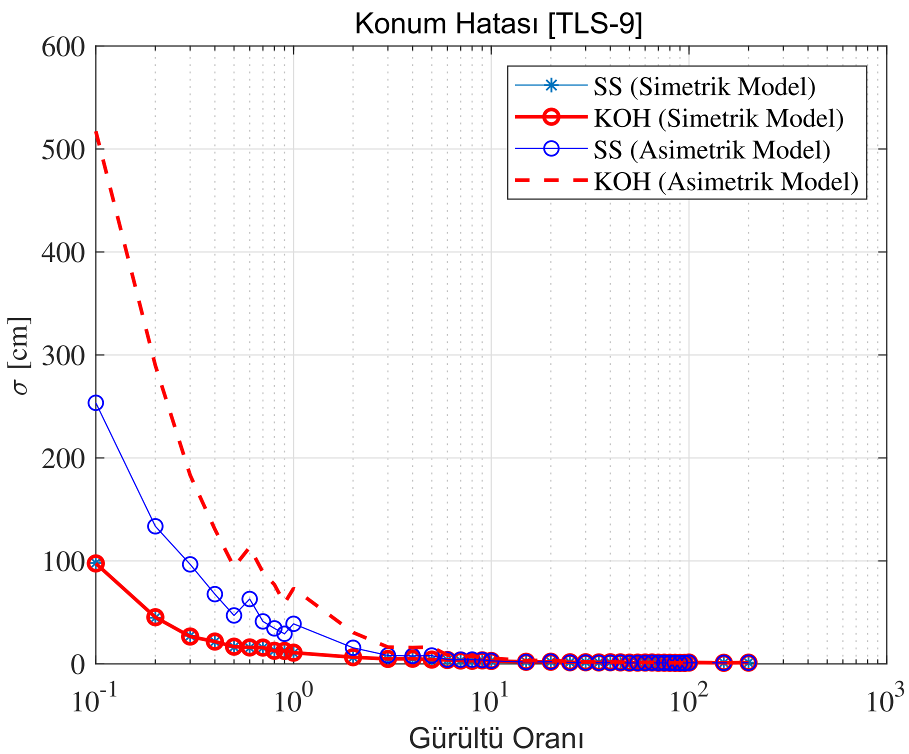
Şekil 4.36 Farklı gürültü seviyeleri için öteleme parametrelerine ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-afin dönüşümü örneği



Şekil 4.37 Farklı gürültü seviyeleri için dönüklük parametrelerine ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-afin dönüşümü örneği



Şekil 4.38 Farklı gürültü seviyeleri için ölçek çarpanlarına ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-afin dönüşümü örneği



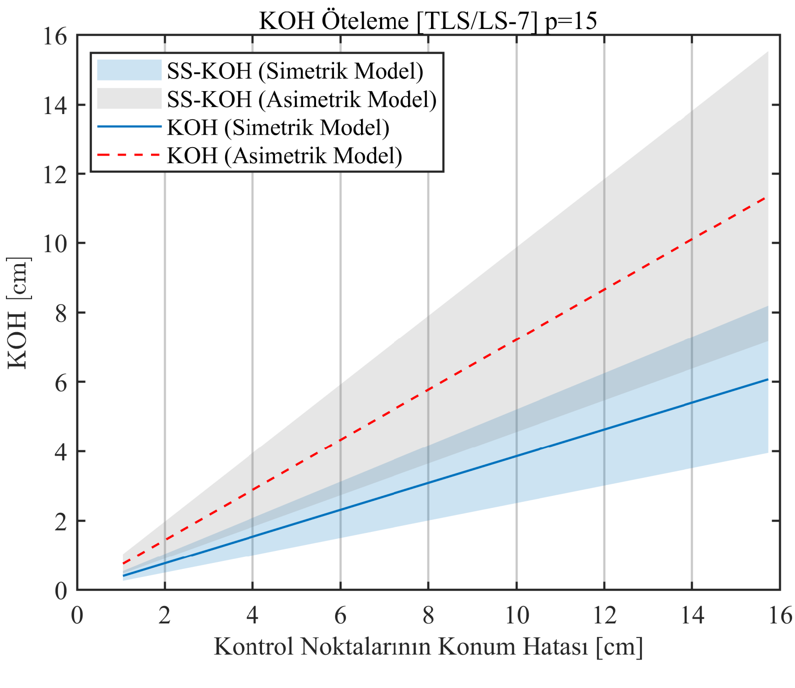
Şekil 4.39 Farklı gürültü seviyeleri için konum hatalarına ilişkin simetrik ve asimetrik dönüşümler sonucu elde edilen KOH ve SS değerlerinin karşılaştırılması-afin dönüşümü örneği

Afin dönüşümüne ilişkin söz konusu grafikler incelendiğinde, başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistemi koordinatlarına göre en az 10 kat daha doğru olması durumunda simetrik koordinat dönüşümü yerine hesap yükü daha az olan asimetrik dönüşüm modelinin kullanılabileceği ortaya çıkmaktadır. Aksi durumda, asimetrik afin dönüşümü biaslı çözüm üretmektedir.

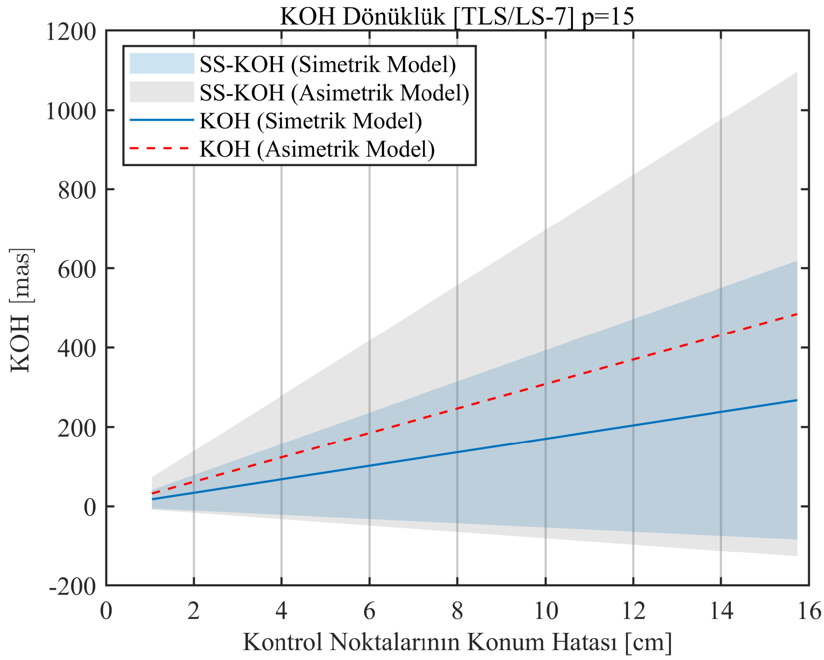
4.8 Kontrol Noktalarının Doğruluklarının Parametre Kestirimlerine ve Konum Hatalarına Etkisi

Bu bölümde, $7p$ asimetrik ve simetrik benzerlik dönüşümleri için, kontrol noktalarının doğruluğuna (konum hatalarına) bağlı olarak, parametre kestirimlerinin ve merkez noktasının konum doğruluğunun değişimi incelenmektedir. Başlangıç ve hedef sistemlerine ilişkin oluşturulan ağırlık katsayıları matrisleri $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ortak varyansları ile ölçeklendirilmiş ve her bir varyans için Tablo 3.3'te verilen simülasyon stratejisi takip edilerek analizler gerçekleştirilmiştir. Her biri 500 farklı örneklem içeren 100 farklı konfigürasyon için toplam 50 bin örnek üzerinden gerçekleştirilen analizler sonucu; her bir varyans için öteleme, dönüklük, ölçek parametreleri ile konum hatasının KOH değerleri, bu 50 bin örneğin her biri için hesaplanan değerlerin aritmetik ortalamaları alınarak belirlenmiştir. Bu irdelemenin konum hatasına ilişkin kısmı Uygur vd [122] tarafından ele alınmış olup, burada analizler dönüşüm parametrelerini de içerecek şekilde genişletilmiştir. Analiz sonuçları, sırasıyla, öteleme, dönüklük, ölçek parametreleri ve konum hatası için Şekil 4.40, Şekil 4.41, Şekil 4.42 ve Şekil 4.43'te verilmektedir.

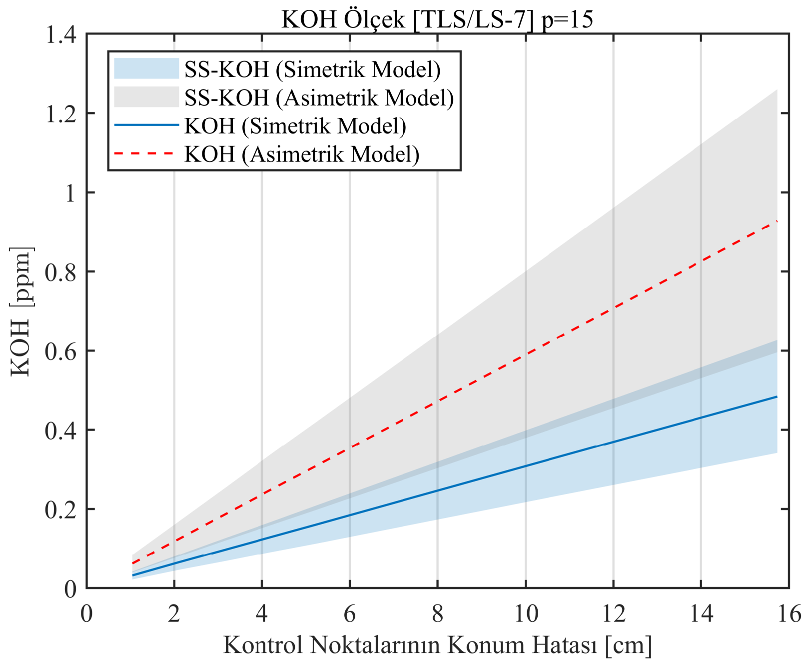
Şekiller incelendiğinde, iki çözüm ile elde edilen parametre kestirimlerinin, kontrol noktalarının standart sapmalarının küçük olması durumunda, birbirine yakın oldukları görülmektedir. Ancak, kontrol noktalarının her iki sistemdeki koordinat standart sapmalarının artması durumunda, simetrik ve asimetrik çözümlere ilişkin parametre kestirimlerinin ve predikte edilen nokta konum hatalarının arttığı görülmektedir. Bu durum, başlangıç sistemi koordinat hatalarının göz ardı edilmesi durumunda daha da belirgindir. Özellikle Şekil 4.43 incelendiğinde, simetrik koordinat dönüşümü ile yeni noktaların prediksiyonunda asimetrik çözüme göre daha doğru sonuçlar elde edildiği görülmektedir [122]. Bu sonuçlar 9p simetrik ve asimetrik afin dönüşümleri için de geçerlidir (bkz. Ek A).



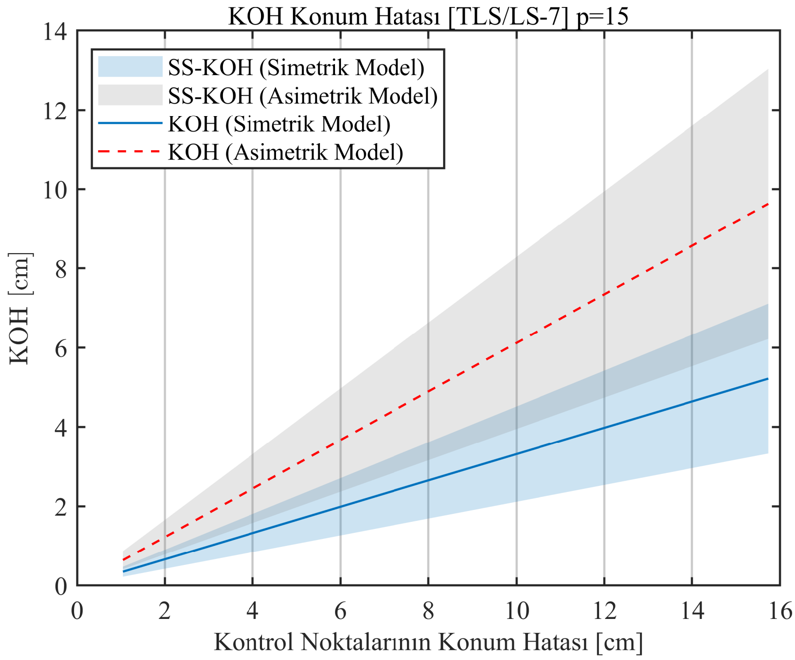
Şekil 4.40 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık öteleme parametrelerinin KOH değerlerinin değişimi



Şekil 4.41 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık dönüklük parametrelerinin KOH değerlerinin değişimi



Şekil 4.42 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık ölçek çarpanlarının KOH değerlerinin değişimi

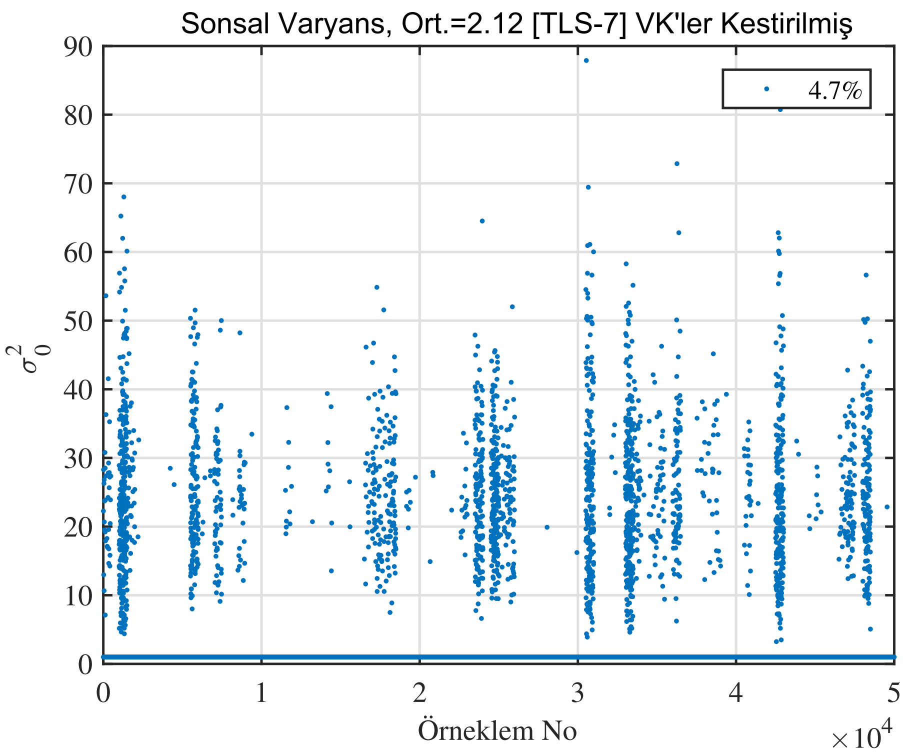


Şekil 4.43 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık merkez noktanın konum hatalarının KOH değerlerinin değişimi [122]

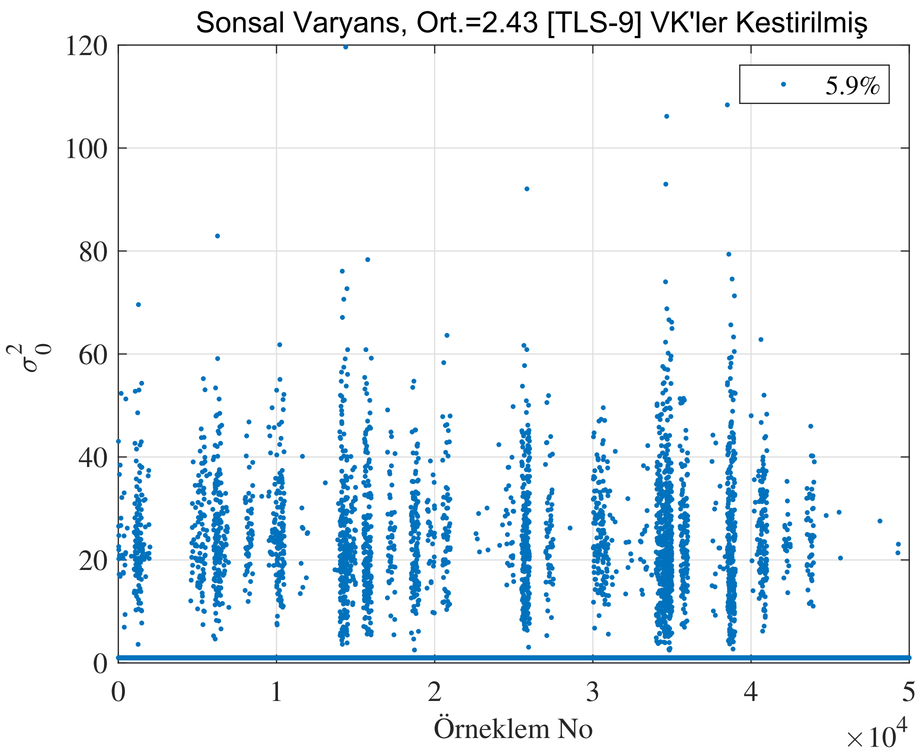
4.9 Varyans Bileşenleri Bilinmeyen Simetrik Koordinat Dönüşümü Örnekleri

Buraya kadar ele alınan tüm uygulamalarda, oluşturulan stokastik model ($\mathbf{C}_1 = \sigma_1^2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{C}_2 = \sigma_2^2\mathbf{Q}_2$) doğru kabul edilerek tek varyans bileşenli çözümler gerçekleştirilmiştir. Ancak bu varsayım her zaman doğru değildir. Koordinat dönüşümüne konu olan kontrol nokta kümeleri farklı tür ölçme yöntemleri ile belirlenmiş ya da farklı hesaplama teknikleri ile elde edilmiş olabilir. Bu gibi durumlarda tek varyans bileşeni öngörmek, stokastik modelin hatalı olarak oluşturulmasına neden olur. Dolayısıyla dönüşüm problemi, Bölüm 3.2.2'de ele alınan başlangıç ve hedef sistem koordinatlarının varyans bileşenlerinin (σ_1^2 ve σ_2^2'nin) de bilinmeyen olduğu simetrik koordinat dönüşüm modeli altında ele alınmalıdır.

Simetrik koordinat dönüşümünde VBK yönteminin başarısını test etmek amacıyla yine Tablo 3.3.2'de verilen strateji izlenerek bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Nokta sayısının 5 ile 25 arasında rasgele değiştiği konfigürasyonlar için başlangıç ve hedef sistem koordinat kofaktör matrisleri özdeş varyans değerleri ile ölçeklendirilerek kovaryans matrisleri oluşturulmuştur ($\mathbf{C}_1 = 0.0025m^2\mathbf{Q}_1$ ve $\mathbf{C}_2 = 0.0025m^2\mathbf{Q}_2$). Özdeş simülasyon stratejileri için varyans bileşenleri bilinmeyen kuaterniyon tabanlı $7p$ ve $9p$ simetrik koordinat dönüşümlerinin çözüm performansları, sırasıyla, Şekil 4.44 ve Şekil 4.45'te verilmektedir. VBK algoritması ile varyans bileşenleri başarılı şekilde kestirildiğinde temel beklenti, dengeleme sonrası birim ağırlıklı ölçü varyansının (sonsal varyansın) "1"'e gitmesidir.



Şekil 4.44 Varyans bileşenlerinin bilinmeyen olduğu 3B simetrik benzerlik dönüşümünde sonsal varyans değerleri



Şekil 4.45 Varyans bileşenlerinin bilinmeyen olduğu 3B simetrik afin dönüşümünde sonsal varyans değerleri

Şekiller incelendiğinde, benzerlik dönüşümü için tüm örneklemin %95.3'ünde, afin dönüşümü için ise %94.1'inde sonsal varyansların "1"e gittiği görülmektedir. Oranlar başarılı gibi görünmekle beraber, VBK algoritmasının her durumda başarılı kestirimler gerçekleştirmediği de ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, algoritmanın performansını etkileyen durumların araştırılması amacıyla çeşitli analizler gerçekleştirilmiştir. Hem benzerlik dönüşümü hem de afin dönüşümü için hedef sistem koordinatlarına 5 kat daha fazla gürültü yüklenerek ($\sigma_2 = 5\sigma_1$) analizler tekrar edilmiştir. Başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarına göre 5 kat daha doğru olduğu bu örneklemde, çözüm başarısı benzerlik dönüşümü için %79'a, afin dönüşümü içinse %77.7'ye düşmüştür. Söz konusu analizlerden çözüm performasını etkileyen iki durumun söz konusu olduğu öngörülmüştür: Bunlardan ilki, sistemler arasındaki gürültü (noise) oranı, diğeri ise ağdaki kontrol noktalarının sayısıdır.

Gürültü oranı ve ağın nokta sayısı değiştirilerek, her biri 500 farklı örneklem içeren 10 rasgele konfigürasyon için toplam 5 bin örneklem üzerinden gerçekleştirilen analizler sonucu elde edilen VBK çözüm başarı oranları, benzerlik ve afin dönüşümleri için, sırasıyla, Tablo 4.17 ve Tablo 4.18'de verilmektedir.

Tablo 4.17 Üç boyutlu simetrik benzerlik dönüşümü örnekleri için VBK çözüm başarı oranları

Nokta Sayısı	**Model 1:** $\sigma_2 = \sigma_1$	**Model 2:** $\sigma_2 = 2\sigma_1$	**Model 3:** $\sigma_2 = 5\sigma_1$
$n = 5$	%59	%53.9	%43.7
$n = 10$	%96	%88.9	%64.8
$n = 15$	%99.8	%98.4	%83
$n = 20$	%100	%99.6	%89.8
$n = 25$	%100	%100	%93.2

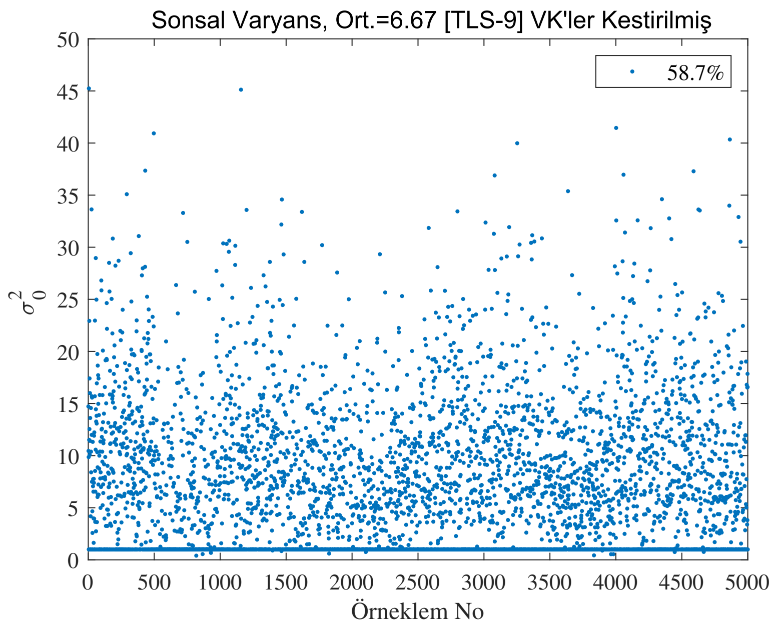
Tablo 4.18 Üç boyutlu simetrik afin dönüşümü örnekleri için VBK çözüm başarı oranları

Nokta Sayısı	**Model 1:** $\sigma_2 = \sigma_1$	**Model 2:** $\sigma_2 = 2\sigma_1$	**Model 3:** $\sigma_2 = 5\sigma_1$
$n = 5$	%44.6	%41.3	%34.5
$n = 10$	%94.6	%87.2	%60.5
$n = 15$	%99.6	%98.7	%85.3
$n = 20$	%100	%99.9	%92.2
$n = 25$	%100	%100	%96.7

Değerlendirme sonuçlarına göre, gürültü oranının 1 olması (iki sistemdeki koordinatların doğruluklarının yaklaşık aynı olması) durumunda VBK çözüm başarı oranı daha yüksektir. Gürültü oranı arttıkça (başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarına göre doğruluğu arttıkça) algoritmanın başarısı düşmektedir. Aslında her durumda, kontrol noktalarının sayısının oldukça önemli olduğu görülmektedir.

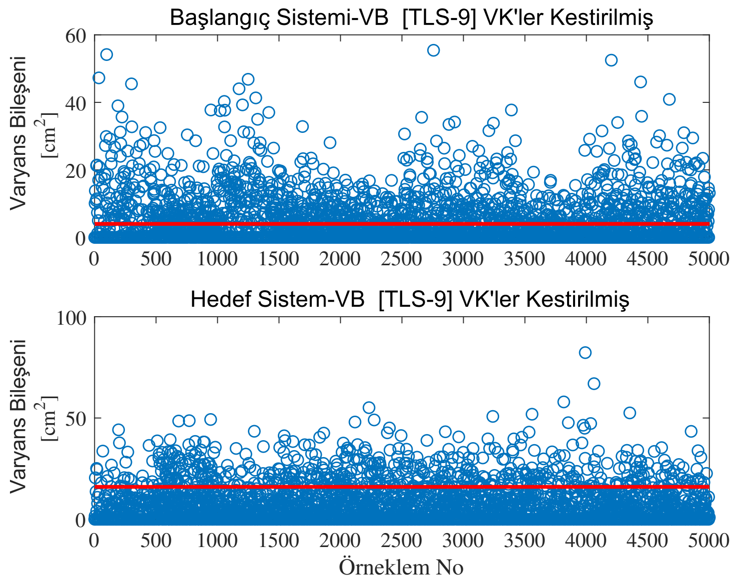
VBK başarısının düşük olması durumu, yöntemin başarısızlığından ziyade modeli ifade edecek yeterli bilginin mevcut olmamasına (modelin yetersizliğine) bağlıdır. Bu gibi durumlarda, farklı kaynaklardan gelen bu koordinat verilerinin doğruluğuna ilişkin ön bilgiye sahip olunması oldukça önemlidir.

Bölüm 3.2.2'de belirtildiği gibi, koordinat dönüşümlerinde VBK çözüm algoritması (bkz. Şekil 3.1), çözümsüzlük durumunda modeli tek varyans bileşenli olarak ele almakta ve dönüşümü buna göre gerçekleştirmektedir. Algoritmanın çözümsüzlük durumunda nasıl davrandığını daha iyi anlamak için $\sigma_1 = 2$ cm, $\sigma_2 = 4$ cm ve n=5 alınan örnek (Tablo 4.18'deki %41.3 başarı oranının elde edildiği durum) daha yakından incelenmiştir. Bu örnek için elde edilmiş VBK çözüm başarı oranları Şekil 4.46'da, algoritmadan elde edilen varyans bileşenleri ise Şekil 4.47'de gösterilmiştir.



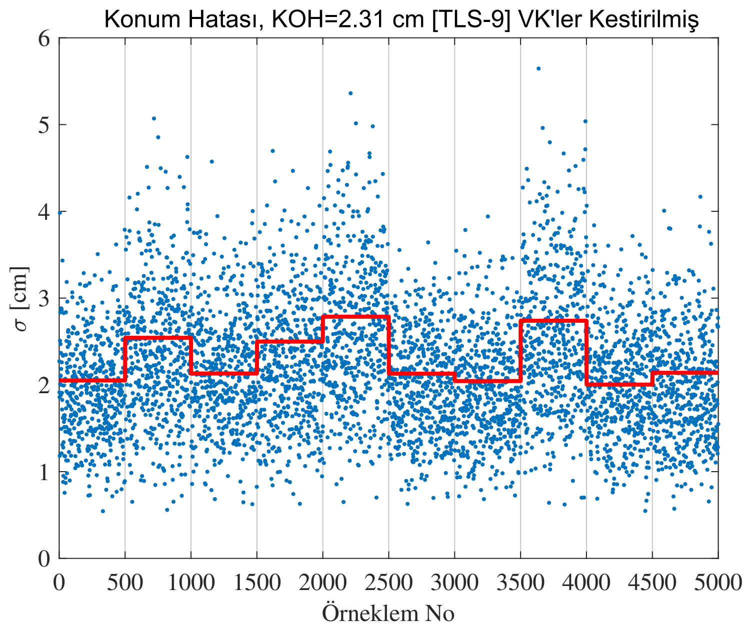
Şekil 4.46 n=5 için VBK sonucu elde edilen sonsal varyanslar (Düz çizgi VBK algoritmasının çözüme yakınsadığı %41.3 örneklemin sonsal varyanslarını göstermektedir)

Şekil 4.47'de görüldüğü gibi, başlangıç ve hedef sistem koordinatlarının varyans bileşenleri, 5000 örneklemin %58.7'sindeki çözümsüzlük nedeniyle kırmızı düz çizgiyle ifade edilmiş gerçek varyans bileşenleri olan $\sigma_1^2 = 4\ cm^2$ ve $\sigma_2 = 16\ cm^2$ değerleri etrafında düzgün olarak dağılmamaktadır. Bir başka deyişle, çözüme yakınsanmadığında algoritmanın geçtiği tek varyans bileşenli modelin çözüm sonucundaki kestirilen tek varyans bileşenleri, doğal olarak, böylesi bir dağılıma neden olmaktadır. Söz konusu örnek için algoritmadan elde edilen merkez noktasının konum hataları (KOH ve SS'ler) Şekil 4.48'de, varyans bileşenlerinin bilinmesi durumundaki (olması gereken) konum hataları ise Şekil 4.49'da gösterilmiştir. Şekil 4.48 hem kendi içinde hem de Şekil 4.49 ile karşılaştırıldığında sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle,

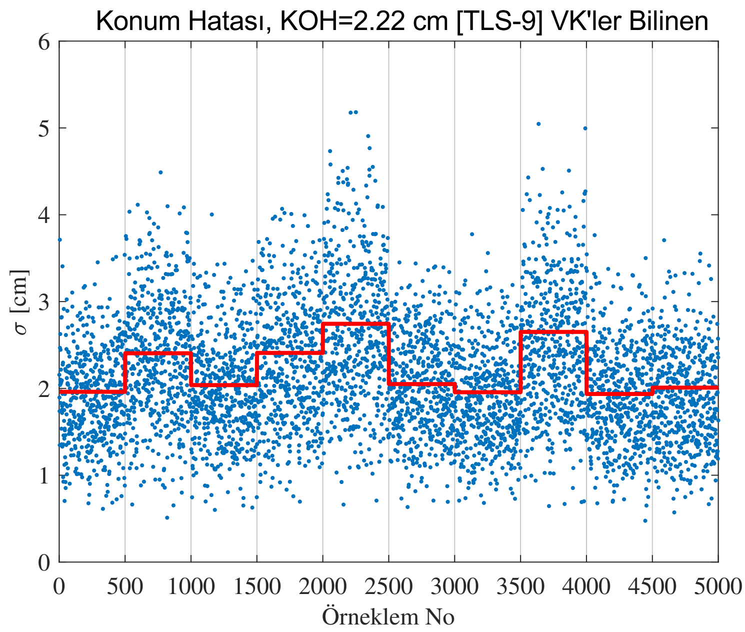


Şekil 4.47 Başlangıç ve hedef sisteme ilişkin varyans bileşenlerinin kestirim değerleri (n=5)

çözümsüzlük durumunda VBK algoritmasında tek varyans bileşenine geçerek ilerlemiş olmanın doğru bir yaklaşım olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Elbette, çözümsüzlüğün sıfıra yakın olduğu durumlarda (bkz. Tablo 4.17 ve Tablo 4.18) algoritma, gerçeğe daha da yakın parametre kestirimleri vermektedir. Sonuç olarak, Bölüm 3.2.2'de verilmiş algoritma ile çalışarak simetrik koordinat dönüşümlerinde stokastik modelin daha doğru bir biçimde ele alınması sağlanmaktadır.



Şekil 4.48 Varyans bileşenleri bilinmeyen simetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen konum hatası değerleri (n=5)



Şekil 4.49 Varyans bileşenleri bilinen simetrik afin dönüşümü sonucu elde edilen konum hataları (n=5)

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma kapsamında, kuaterniyon tabanlı simetrik ve asimetrik üç boyutlu benzerlik ve afin dönüşümlerinin performansları oldukça geniş bir örneklem aralığında gerçekleştirilen simülasyon çalışmaları yardımıyla incelenmiştir. Dönüklüklerin kuaterniyon ile gösteriminin koordinat dönüşümü probleminin çözümünde sağladığı avantajlar gösterilmiştir. Algoritmanın en önemli avantajı iteratif çözüm için yaklaşık değer belirleme probleminin söz konusu olmamasıdır. Kuaterniyon tabanlı dönüşüm algoritması, dönüşüm parametrelerinin büyüklüğünden bağımsız olarak oldukça hızlı ve stabil çalışmaktadır. Bununla beraber, 3B afin dönüşümüne ilişkin simülasyon çalışmalarında, bazı olağan dışı durumlarda yakınsama problemi ile karşılaşılmış ve afin dönüşümü için yaklaşık değer belirleme problemi göz önüne alınmıştır. Dönüklük açılarının büyük olduğu durumlar da dahil olmak üzere, (özellikle Euler dönüklük açılarının trigonometrik fonksiyonları düşünüldüğünde) oldukça hızlı ve doğru biçimde yaklaşık değerler belirlenebilmektedir. Kuaterniyon tabanlı koordinat dönüşümü sonucu elde edilen dönüşüm parametreleri, ötelemeler, ölçekli kuaterniyon elemanları ve 3B afin dönüşümü için bu parametrelere ek olarak bağıl ölçek çarpanlarıdır. Bu parametrelerden, birim kuaterniyon elemanlarının, esas ölçek çarpanlarının ve Euler dönüklük açıları ile bunların standart sapmalarının ne şekilde elde edileceği çalışmada ayrıntılı biçimde açıklanmıştır. 3B benzerlik ve afin asimetrik ve simetrik koordinat dönüşümleri programları, bu tez kapsamında yayımlanmış Uygur vd. [24] ve Uygur vd. [25] çalışmalarında verilmiştir.

Gerçek veriler ile gerçekleştirilen jeodezik koordinat dönüşümü sonucu elde edilen sonuçlar incelendiğinde; dönüklük açılarının diferansiyel büyüklükler ve her iki sistem koordinat ağırlık matrislerinin birim matris olduğu durumlarda, asimetrik ve simetrik çözümlerin birbirine özdeş sonuçlar verdiği görülmüştür. Bununla beraber, her iki sistem koordinatları da rasgele hatalıyken, yalnızca hedef sistem koordinat kovaryans matrislerinin göz önünde bulundurulmasının sonuçları ne şekilde etkilediği geniş örneklemde gerçekleştirilen simülasyon çalışmaları ile ortaya konmuştur. Her iki çözüm yöntemi için de parametrelere ilişkin yanlış kestirim olasılıkları hesaplanmış ve parametrelerin kestirim değerleri, bilinen değerleri aracılığıyla KOH değerleri üzerinden istatistiksel olarak test edilmiştir. Sonuç olarak, başlangıç sistemi koordinat hatalarını göz ardı ederek gerçekleştirilen asimetrik çözüme ilişkin parametre kestirimlerinin belirgin biçimde yanlı olduğu görülmektedir. Asimetrik çözüm ile elde edilen standart sapma değerleri, parametrelerin bilinen değerlerinden hesaplanan KOH değerlerine karşılık gelmemektedir. Diğer bir deyişle, asimetrik çözüm sonucu elde edilen kovaryans matrisleri kestirilen parametrelerin doğruluklarını ifade etmemektedir. Buna karşılık, problemin simetrik dönüşüm modeli altında ele alınması durumunda toplam EKK çözümü, yansız kestirici davranışı göstermektedir. Ancak, şunu belirtmek gerekir ki, simetrik koordinat dönüşümü algoritması doğası gereği yanlı çözümler vermekle beraber bu bias, sinyal/gürültü oranının yüksek olduğu jeodezik koordinat dönüşümü gibi problemlerde ihmal edilebilir düzeydedir. Simetrik koordinat dönüşümü örneklerinde hesaplanmış yanlış kestirim olasılıklarının beklendiği gibi düşük olması da bunu doğrulamaktadır. Ele alınan başlangıç ve hedef sistemi koordinatları yüksek doğruluğa sahip olduğundan, simetrik koordinat dönüşümü probleminin çözümüne ilişkin herhangi bir bias düzeltmesinin bu çalışma kapsamında göz önünde bulundurulmasına gerek duyulmamıştır. Ancak, daha düşük doğruluklu koordinatlar söz konusu ise simetrik koordinat dönüşümünde parametre kestirimlerine ilişkin bias düzeltmesi algoritmalarının dikkate alınması gerekebilir (bkz. Amiri-Simkooei [47]).

Farklı gürültü seviyeleri için gerçekleştirilen analiz sonuçlarına göre, asimetrik dönüşüm için söz konusu olan bias miktarı, başlangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarına göre doğruluğunun artmasıyla azalmaktadır. Eğer başlangıç sistemi koordinatları hedef sistem koordinatlarından 10 kat veya daha fazla doğruluğa sahip ise, başlangıç sistemine ilişkin koordinat hatalarının ihmal edilmesinin parametre kestirimlerini etkilemediği, her iki çözüm yöntemi ile özdeş parametre kestirimleri elde edildiği görülmüştür. Bu sonuç pratik çalışmalarda önemli olmakla beraber, daha ayrıntılı olarak araştırılmaya ihtiyaç duymaktadır.

Kontrol noktalarının doğruluğuna (konum hatalarına) bağlı olarak, parametre kestirimlerinin ve merkez noktasının konum doğruluğunun değişimi incelenmiştir. Kontrol noktalarının her iki sistemdeki koordinat standart sapmalarının artması durumunda, beklendiği üzere, simetrik ve asimetrik çözümlere ilişkin parametre kestirimlerinin ve predikte edilen nokta konum hatalarının arttığı görülmektedir. Söz konusu artış, başlangıç sistemi koordinat hatalarının göz ardı edilmesi durumunda daha belirgin olarak karşımıza çıkmaktadır.

Son olarak, başlangıç ve hedef sistem koordinatlarının varyans bileşenlerinin de bilinmeyen olarak ele alındığı varyans bileşenleri bilinmeyen 3B simetrik koordinat dönüşümü algoritması oluşturulmuştur. Algoritmanın performansı, hem 3B benzerlik hem de 3B afin örnekleri üzerinden incelenmiştir. VBK işleminin çözüm başarısı gürültü (noise) oranı arttıkça (baslangıç sistemi koordinatlarının hedef sistem koordinatlarına göre doğruluğu arttıkça) düşmektedir. Ayrıca, VBK işleminin başarısının kontrol noktalarının sayısına bağlı olduğu görülmüştür. Nokta sayısı arttıkça çözüm başarı oranlarının yükseldiği gösterilmiştir. VBK çözüm başarı oranının bazı örneklerde düşük olması, yöntemin başarısızlığından ziyade modeli ifade edecek yeterli bilginin mevcut olmamasına (modelin yetersizliğine) bağlıdır. Söz konusu VBK algoritması, çözümsüzlük durumunda tek varyans bileşenli alışıldık simetrik koordinat dönüşümü problemine geçmektedir. Ele alınan başarı oranının düşük olduğu örneklerde, böylesi bir yaklaşımın parametre kestirimi açısından doğru olduğu gösterilmiştir. Böylece, 3B benzerlik ve afin simetrik koordinat dönüşümünde stokastik modelin söz konusu algoritma yoluyla doğru biçimde ele alınabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] J.-Y. Han, T. Soler, J. Guo, “Utilizing non-iterative linear transformations between non-uniformly dilated 3d frames,” *Scientific Research and Essays*, vol. 6(31), pp. 6435–6443, 2011.

[2] L. Alfred, R. Lev, D. Tatarnikov, *GPS Satellite Surveying*. 4th edition. John Wiley and Sons Inc., New Jersey, 2015.

[3] P. Vanicek, E. J. Krakiwsky, *Geodesy: The Concepts*. 2nd Edition, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, Amsterdam, 1986.

[4] C.-O. Andrei, “3d affine coordinate transformations,” Masters of Science Thesis in Geodesy, No. 3091, School of Architecture and the Built Environment Royal Institute of Technology (KTH) Stockholm, Sweden, 2006.

[5] I. Kashani, “Application of generalized approach to datum transformation between local classical and satellite-based geodetic networks,” *Survey Review*, vol. 38:299, pp. 412–422, 2006.

[6] H. Velsink, “Extendable linearised adjustment model for deformation analysis,” *Survey Review*, vol. 47:345, pp. 397–410, 2015.

[7] E. M. Mikhail, J. S. Bethel, J. C. McGlone, *Introduction to Modern Photogrammetry*. 1st edition. John Wiley and Sons Inc., New York, 2001.

[8] Y. Reshetyuk, “Self-calibration and direct georeferencing in terrestrial laser scanning,” Doctoral thesis in Infrastructure, Geodesy, Department of Transport and Economics, Division of Geodesy, Royal Institute of Technology (KTH), Sweden, 2009.

[9] D. D. Lichti, M. P. Stewart, M. Tsakiri, A. J. Snow, “Calibration and testing of a terrestrial laser scanner,” in *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Vol. XXXIII, Part B5*, ISPRS, Amsterdam, The Netherlands, 2000, pp. 485–492.

[10] N. El-Sheimy, “The development of vısat - a mobile survey system for gıs applications,” Ph.D. Dissertation, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, 1996.

[11] M. De Agostino, A. Lingua, M. Piras, “Soldeo: A new solution for 3d gıs data recording,” in *Proceedings of FIG Working Week 2012 – Territory, environment, and cultural heritage, Rome, Italy, 6-10 May*, FIG, 2012.

[12] C. Fraser, T. Yamakawa, “Applicability of the affine model for ıkonos image orientation over mountainous terrain,” in *Proceedings of Joint International Workshop on "High Resolution Mapping from Space", Hanover, Germany, 6-8 October*, ISPRS/EARSeL, 2003, pp. 6–6.

[13] K. Kanatani, H. Niitsuma, "Optimal computation of 3-d similarity: Gauss-newton vs. gauss-helmert," *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 56(12), pp. 4470–4483, 2012.

[14] K. Kanatani, C. Matsunaga, "Computing internally constrained motion of 3-d sensor data for motion interpretation," *Pattern Recognition*, vol. 46, pp. 1700–1709, 2013.

[15] G. Cernica, S. F. de Boer, A. Diaz, R. A. Fenstermaker, M. B. Podgorsak, "Dosimetric accuracy of a staged radiosurgery treatment," *Physics In Medicine and Biology*, vol. 50, no. 9, pp. 1991–2002, 2005. doi: `10.1088/0031-9155/50/9/005`.

[16] G. Yujun, R. Sivaramakrishna, C.-C. Lu, J. S. Suri, S. Laxminarayan, "Breast image registration techniques: A survey," *Medical and Biological Engineering and Computing*, vol. 44, no. 1, pp. 15–26, 2006.

[17] S. Klein, M. Staring, K. Murphy, M. A. Viergever, J. P. W. Pluim, "Elastix: A toolbox for ıntensity-based medical ımage registration," *IEEE Trans Med Imaging*, vol. 29, no. 1, pp. 196–205, 2010. doı: `10.1109/TMI.2009.2035616`.

[18] J.-H. Park, H.-T. Chung, D. G. Kim, Y.-H. Kim, J. H. Han, C.-Y. Kim, C. W. Oh, T. S. Suh, "Coordinate transformation after stereotactic frame reapplication in gamma knife radiosurgery," *hysica Medica: European Journal of Medical Physics*, vol. 30, no. 2, pp. 171–177, 2014. doı: `10.1016/j.ejmp.2013.05.002`.

[19] D. Gebre-Egziabher, "Magnetometer autocalibration leveraging measurement locus constraints," *Journal of Aircraft*, vol. 44, no. 4, pp. 1361–1368, 2007. doı: `10.2514/1.27118`.

[20] F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*. 1st Edition, Springer-Verlag New York, 2014.

[21] R. Lehmann, "Transformation model selection by multiple hypotheses testing," *Journal of Geodesy*, vol. 88, pp. 1117–1130, 2014.

[22] A. R. Amiri-Simkooei, "Parameter estimation in 3d affine and similarity transformation: İmplementation of variance component estimation," *Journal of Geodesy*, vol. 92, pp. 1285–1297, 2018.

[23] G. Even-Tzur, "Invariance property of coordinate transformation," *Journal of Spatial Science*, vol. 63:1, pp. 23–34, 2018.

[24] S. Ö. Uygur, C. Aydin, O. Akyilmaz, "Retrieval of euler rotation angles from 3d similarity transformation based on quaternions," *Journal of Spatial Science*, 2020. doı: `https://doi.org/10.1080/14498596.2020.1776170`.

[25] S. Ö. Uygur, O. Akyilmaz, C. Aydin, "Solution of nine-parameter affine transformation based on quaternions," *Journal of Surveying Engineering*, 2021. doı: `https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000364`.

[26] K. Kraus, *Photogrammetry: Geometry from Images and Laser Scans*. 2nd English Edition, Walter de Gruyter GmbH & Co., Berlin, Germany, 2007.

[27] G. Even-Tzur, "Coordinate transformation with variable number of parameters," *Survey Review*, vol. 52:370, pp. 62–68, 2020.

[28] P. Vanicek, R. R. Steeves, "Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums," *Journal of Geodesy*, vol. 70, pp. 740–745, 1996.

[29] E. M. Mikhail, *Observations and least squares*. IEP/A. Dun-Donelley Publisher, New York, 1976.

[30] M. Ligas, D. Prochniewicz, "Procrustes based closed-form solution to the point-wise weighted rigid-body transformation in asymmetric and symmetric cases," *Journal of Spatial Science*, 2019. doi: `https://doi.org/10.1080/14498596.2019.1684394`.

[31] P. Teunissen, "The geometry of the geodetic inverse linear mapping and non-linear adjustment," 1985, pp. 1–186. [Online]. Available: `http://resolver.tudelft.nl/uuid:3dbe4d31-8b97-44d5-8831-f85b3b0781a7`.

[32] G. H. Golub, C. F. van Loan, "An analysis of the total least-squares problem," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 17(6), :883–893, 1980.

[33] Y. A. Felus, "Application of total least squares for spatial point process analysis," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 130, no. 3, pp. 126–133, 2004. doi: `10.1061/(ASCE)0733-9453(2004)130:3(126)`.

[34] O. Akyilmaz, "Total least squares solution of coordinate transformation," *Survey Review*, vol. 39, no. 303, pp. 68–80, 2007. doi: `10.1179/003962607X165005`.

[35] B. Schaffrin, A. Wieser, "On weighted total least-squares adjustment for linear regression," *Journal of Geodesy*, vol. 82, pp. 415–421, 2008. doi: `10.1007/s00190-007-0190-9`.

[36] X. Tong, Y. Jin, L. Li, "An ımproved weighted total least squares method with applications in linear fitting and coordinate transformation," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 137, no. 4, pp. 120–128, 2011. doi: `10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000055`.

[37] X. Fang, "Weighted total least squares solutions for applications in geodesy," Ph.D. Dissertation, Nr. 294, Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Germany, 2011.

[38] X. Fang, "A total least squares solution for geodetic datum transformations," *Acta Geodaetica et Geophysica*, vol. 49, no. 2, pp. 189–207, 2014. doi: `10.1007/s40328-014-0046-8`.

[39] X. Fang, "Weighted total least-squares with constraints: A universal formula for geodetic symmetrical transformations," *Journal of Geodesy*, vol. 89, no. 5, pp. 459–469, 2015. doi: `10.1007/s00190-015-0790-8`.

[40] V. Mahboub, "On weighted total least-squares for geodetic transformations," *Journal of Geodesy*, vol. 86, no. 5, pp. 359–367, 2012. doi: `10.1007/s00190-011-0524-5`.

[41] K. Snow, "Topics in total least-squares adjustment within the errors-ın-variables model: Singular cofactor matrices and prior ınformation," Ph.D. Thesis, Graduate Program in Geodetic Science and Surveying School of Earth Sciences, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 2012.

[42] P. Xu, J. Liu, C. Shi, "Total least squares adjustment in partial errors-in-variables models: Algorithm and statistical analysis," *Journal of Geodesy*, vol. 86, pp. 661–675, 2012. doi: `10.1007/s00190-012-0552-9`.

[43] P. Xu, J. Liu, W. Zeng, Y. Shen, "Effects of errors-in-variables on weighted least squares estimation," *Journal of Geodesy*, vol. 88, no. 7, pp. 705–716, 2014. doi: 10.1007/s00190-014-0716-x.

[44] P. Xu, "The effect of errors-in-variables on variance component estimation," *Journal of Geodesy*, vol. 90, no. 8, pp. 681–701, 2016. doi: 10.1007/s00190-016-0902-0.

[45] A. Amiri-Simkooei, S. Jazaeri, "Weighted total least squares formulated by standard least squares theory," *Journal of Geodetic Science*, vol. 2, no. 2, pp. 113–124, 2012. doi: doi:10.2478/v10156-011-0036-5.

[46] A. R. Amiri-Simkooei, "Application of least squares variance component estimation to errors-in-variables models," *Journal of Geodesy*, vol. 87, no. 10, pp. 935–944, 2013. doi: 10.1007/s00190-013-0658-8.

[47] A. R. Amiri-Simkooei, F. Zangeneh-Nejad, J. Asgari, "On the covariance matrix of weighted total least-squares estimates," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 142, no. 3, 2016, doi:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000153.

[48] X. Fang, B. Li, H. Alkhatib, W. Zeng, Y. Yao, "Bayesian inference for the Errors-In-Variables model," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 61, no. 1, pp. 35–52, 2017. doi: 10.1007/s11200-015-6107-9.

[49] J. Han, S. Zhang, Y. Li, X. Zhang, "A general partial errors-in-variables model and a corresponding weighted total least-squares algorithm," *Survey Review*, vol. 52, no. 371, pp. 126–133, 2020. doi: 10.1080/00396265.2018.1530332.

[50] L. Wang, Y. Zhao, "Unscented transformation with scaled symmetric sampling strategy for precision estimation of total least squares," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 61, no. 3, pp. 385–411, 2017. doi: 10.1007/s11200-016-1113-0.

[51] C. Aydın, M. Uygur, S. Ö. Uygur, "Ağırlıklı toplam en küçük kareler çözümü: üç farklı algoritma ve 2-boyutlu afin dönüşümüne uygulanması," *Harita Dergisi*, vol. 152, pp. 1–11, 2014.

[52] F. Nietzel, "Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2d similarity transformation," *Journal of Geodesy*, vol. 84, pp. 751–762, 2010.

[53] C. Aydın, "How to solve errors-in-variables model for coordinate transformations in a classical adjustment way?" *Journal of Geodesy and Geoinformation*, vol. 3, no. 1, pp. 15–23, 2016.

[54] C. D. Ghilani, P. Wolf, *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis*. 4th Edition, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey, USA, 2018.

[55] M. Burša, "The theory for the determination of the non-paralelism of the minor axis of the reference ellipsoid and the inertial polar axis of the earth, and the planes of the initial astronomic and geodetic meridians from observations of artificial earth satellites," *Studia Geophysica et Geodatica*, vol. 6, no. 3, pp. 209–214, 1962.

[56] H. Wolf, "Geometric connection and re-orientation of three-dimensional triangulation nets," *Bulletin Geodesique*, vol. 68, no. 1, pp. 165–169, 1963. doi: 10.1007/BF02526150.

[57] J. Badekas, “Establishment of an ıdeal world geodetic system,” Doktora Tezi, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 1969.

[58] E. J. Krakiwsky, D. B. Thomson, “Mathematical models for the combination of terrestrial and satellite networks,” *The Canadian Surveyor*, vol. 28, no. 5, pp. 606–615, 1974. doı: `10.1139/tcs-1974-0105`.

[59] A. Leick, B. H. van Gelder, “On similarity transformations and geodetic network distortions based on doppler satellite observations,” Department of Geodetic Science/Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, Report No. 235, 1975.

[60] T. Soler, “On differential transformations between cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates,” Department of Geodetic Science/Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, Report No. 236, 1976.

[61] D. B. Thomson, “Combination of geodetic networks,” Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Frederiction, N.B., Canada, Technical Report No. 30, 1976.

[62] W. E. Featherstone, “A comparison of existing coordinate transformation models and parameters in australia,” *Cartography*, vol. 26, no. 1, pp. 3–25, 1997. doı: `10.1080/00690805.1997.9714042`.

[63] Y. Yang, “Robust estimation of geodetic datum transformation,” *Journal of Geodesy*, vol. 73, no. 5, pp. 268–274, 1997. doı: `10.1007/s001900050243`.

[64] C. Aydin, H. Mercan, S. Ö. Uygur, “Increasing numerical efficiency of iterative solution for total least-squares in datum transformations,” *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 92, pp. 223–242, 2018.

[65] Y. Z. Shen, Y. Chen, D. H. Zheng, “A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm,” *Journal of Geodesy*, vol. 80, no. 5, pp. 233–239, 2006, doi:10.1007/s00190-006-0054-8.

[66] O. Akyilmaz, “A new approach to geodetic datum transformations,” in *Prof. Dr. Tevfik Ayan Geodesy Colloquium*, Istanbul Technical University, Faculty of Civil Engineering, Maslak, Istanbul/Turkey, 2010.

[67] O. Akyilmaz, “Solution of the heteroscedastic datum transformation problems,” in *Abstracts of the 1st International Workshop on the Quality of Geodetic Observation and Monitoring Systems (QuGOMS’11)*, IAG International Workshop, Garching/Munich, Germany, 2011.

[68] U. Aydar, M. Altan, O. Akyılmaz, D. Akca, “Co-registration of 3d point clouds by using an errors-ın-variables model,” in *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Vol. XXXIX, Part B5*, ISPRS, Melbourne, Australia, 2012, pp. 151–155.

[69] G. Chang, T. Xu, Q. Wang, M. Liu, “Analytical solution to and error analysis of the quaternion based similarity transformation considering measurement errors in both frames,” *Measurement*, vol. 110, pp. 1–10, 2017, doi: 10.1016/j.measurement.2017.06.013.

[70] H. Mercan, O. Akyilmaz, C. Aydin, “Solution of the weighted symmetric similarity transformations based on quaternions,” *Journal of Geodesy*, vol. 92(10), pp. 1113–1130, 2018.

[71] E. W. Grafarend, J. L. Awange, "Nonlinear analysis of the three-dimensional datum transformation [conformal group $\mathbb{C}_7(3)$]," *Journal of Geodesy*, vol. 77, no. 1, pp. 1432–1394, 2003. doi: 10.1007/s00190-002-0299-9.

[72] J.-Y. Han, "Noniterative approach for solving the indirect problems of linear reference frame transformations," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 136(4), pp. 150–156, 2010.

[73] H. Zeng, "Analytical algorithm of weighted 3D datum transformation using the constraint of orthonormal matrix," *Earth, Planets and Space*, vol. 67, no. 1, p. 105, 2015. doi: 10.1186/s40623-015-0263-6.

[74] J. L. Awange, K.-H. Bae, S. J. Claessens, "Procrustean solution of the 9-parameter transformation problem," *Earth Planets Space*, vol. 60, pp. 529–537, 2008, doi: 10.1186/BF03353115.

[75] B. Paláncz, P. Zaletnyik, J. L. Awange, B. Heck, "Extension of the abc-procrustes algorithm for 3d affine coordinate transformation," *Earth Planets and Space*, vol. 62, pp. 857–862, 2010, doi: 10.5047/eps.2010.10.004.

[76] G. Chang, "On least-squares solution to 3d similarity transformation problem under gauss–helmert model," *Journal of Geodesy*, vol. 89, no. 6, pp. 573–576, 2015, doi: 10.1007/s00190-015-0799-z.

[77] F. Helmert, *Die ausgleichungsrechnung nach der methode der kleinsten quadrate*. 2. Auflage, Verlag von BG Teubner, Leipzig/Berlin, 1907.

[78] S. D. Horn, R. A. Horn, "Comparison of estimators of heteroscedastic variances in linear models," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 70, no. 352, pp. 872–879, 1975. doi: 10.1080/01621459.1975.10480316.

[79] S. D. Horn, R. A. Horn, D. B. Duncan, "Estimating heteroscedastic variances in linear models," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 70, no. 350, pp. 380–385, 1975. doi: 10.1080/01621459.1975.10479877.

[80] C. Rao, "Minimum variance quadratic unbiased estimation of variance components," *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 1, no. 4, pp. 445–456, 1971. doi: https://doi.org/10.1016/0047-259X(71)90019-4.

[81] K. Koch, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1999.

[82] A. R. Amiri-Simkooei, "Least-squares variance component estimation: Theory and gps applications," Doktora Tezi, Delft Institute of Earth Observation and Space Systems, Delft Univ. of Technology, Delft, Netherlands, 2007.

[83] P. J. G. Teunissen, A. R. Amiri-Simkooei, "Least-squares variance component estimation," *Journal of Geodesy*, vol. 82, no. 2, pp. 65–82, 2008. doi: 10.1007/s00190-007-0157-x.

[84] K. R. Koch, "Maximum likelihood estimate of variance components," *Bulletin Geodésique*, vol. 60, no. 4, pp. 329–338, 1986. doi: 10.1007/BF02522340.

[85] J. Grodecki, "Estimation of variance-covariance components for geodetic observations and ımplications on deformation trend analysis," Department of Geodesy and Geomatics Engineering/University of New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canada, Report No. 186, 1997.

[86] G. Fotopoulos, "An analysis on the optimal combination of geoid, orthometric and ellipsoidal height data," Doktora Tezi, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, 2003.

[87] C. Aydın, "Marmara bölgesi gravite değişimlerinin belirlenmesi için model tasarımı," Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2007.

[88] C. Aydın, H. Demirel, "Effect of estimated variance components for different gravity meters on analysis of gravity changes," in *Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Carl-Erhard Gerstenecker, Technische Universitaet Darmstadt, Germany, December*, 2007, pp. 1–11.

[89] R. Hsu, "Helmert method as equivalent of ıterated almost unbiased estimation," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 127, no. 3, pp. 17–40, 2001. doı: `10.1061/(ASCE)0733-9453(2001)127:3(79)`.

[90] K.-R. Koch, J. Kusche, "Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components," *Journal of Geodesy*, vol. 76, no. 5, pp. 259–268, 2002. doı: `10.1007/s00190-002-0245-x`.

[91] J. R. Lucas, W. H. Dillinger, "Mınque for block diagonal bordered systems such as those encountered in vlbı data analysis," *Journal of Geodesy*, vol. 72, no. 6, pp. 343–349, 1998. doı: `10.1007/s001900050173`.

[92] G. Fotopoulos, "Calibration of geoid error models via a combined adjustment of ellipsoidal, orthometric and gravimetric geoid height data," *Journal of Geodesy*, vol. 79, no. 1, pp. 111–123, 2005. doı: `10.1007/s00190-005-0449-y`.

[93] N. Crocetto, M. Gatti, P. Russo, "Simplified formulae for the bıque estimation of variance components in disjunctive observation groups," *Journal of Geodesy*, vol. 74, no. 6, pp. 447–457, 2000. doı: `10.1007/s001900000109`.

[94] C. Aydin, "Estimation of variance components using a step-by-step approach," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 137, no. 2, pp. 40–46, 2011. doı: `10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000043`.

[95] A. R. Amiri-Simkooei, "Non-negative least-squares variance component estimation with application to gps time series," *Journal of Geodey*, vol. 90, no. 5, pp. 451–466, 2016. doı: `10.1007/s00190-016-0886-9`.

[96] C. Aydin, H. Duman, Ö. Günes, D. U. Sanli, "Effect of stochastic model errors on significance test for velocities in analysis of gps position time series," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 147, no. 1, p. 04 020 025, 2021. doı: `10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000341`.

[97] B. Bahadur, M. Nohutcu, "Integration of variance component estimation with robust kalman filter for single-frequency multi-gnss positioning," *Measurement*, vol. 173, p. 108 596, 2021.

[98] C. Aydın, S. Ö. Uygur, "Iki boyutlu benzerlik dönüşümünde her iki sistem koordinatlarının varyans bileşenlerinin kestirimi," in *HKMO Mühendislik Ölçmeleri STB Komisyonu 7. Ulusal Mühendislik Ölçmeleri Sempozyumu, Çorum, 15-17 Ekim*, Hitit Üniversitesi, 2014, pp. 1–7.

[99] M. Uygur, "Katsayıların da rasgele hatalı olduğu dengeleme modeli için çözüm yöntemleri," Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2016.

[100] V. Mahboub, "Variance component estimation in errors-in-variables models and a rigorous total least-squares approach," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 58, no. 1, pp. 17–40, 2014. doi: 10.1007/s11200-013-1150-x.

[101] L. Wang, G. Xu, "Variance component estimation for partial errors-in-variables models," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 60, no. 1, pp. 35–55, 2016. doi: 10.1007/s11200-014-0975-2.

[102] Z. Lv, L. Sui, "Variance-covariance component estimation for structured errors-in-variables models with cross-covariances," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 63, no. 4, pp. 485–508, 2019. doi: 10.1007/s11200-019-1021-1.

[103] Y. A. Felus, R. J. Burtch, "On symmetrical three-dimensional datum conversion," *GPS Solutions*, vol. 13, pp. 65–74, 2009.

[104] E. Salamin, "Applications of quaternions to computation with rotations," Stanford University, Stanford, CA, USA, Internal Report, 1979.

[105] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions and Double Groups*. Oxford University Press, New York, 1986.

[106] Q. Wang, G. Chang, T. Xu, Y. Zou, "Representation of the rotation parameter estimation errors in the helmert transformation model," *Survey Review*, vol. 50, no. 538, pp. 69–81, 2018, doi: 10.1080/00396265.2016.1234806.

[107] K. Kanatani, *3D Rotations: Parameter Computation and Lie Algebra based Optimization*. 1st edition, Chapman and Hall/CRC, 2020.

[108] K. Snow, *Class notes for advanced adjustment computations*, Lecture Notes for Geodetic Science 762, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 2021.

[109] S.-C. Wu, G. Kruizinga, W. Bertiger, "Algorithm theoretical basis document for grace level-1b data processing v1.2," Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, California, USA, Level 1B Documentation GRACE 327-741, 2006.

[110] G. Slabaugh, "Computing Euler angles from a rotation matrix," *Retrieved on August*, vol. 6, no. 2000, pp. 39–63, 1999.

[111] F. Dunn, I. Parberry, *3D Math Primer for Graphics and Game Development*. 2nd edition, Taylor & Francis Group, CRC Press, London, New York, 2011.

[112] Y. Zhou, X. Kou, J. Li, X. Fang, "Comparison of structured and weighted total least-squares adjustment methods for linearly structured errors-in-variables models," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 143, no. 1, p. 04 016 019, 2017. doi: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000190.

[113] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*. V. H. Winston & Sons, 1977, pp. xiii+258.

[114] P. Xu, "Truncated SVD methods for discrete linear ill-posed problems," *Geophysical Journal International*, vol. 135, no. 2, pp. 505–514, Nov. 1998. doi: 10.1046/j.1365-246X.1998.00652.x.

[115] A. J. Pope, "Some pitfalls to be avoided in the iterative adjustment of nonlinear problems," in *In Proceedings of the 38th Annual Meeting of the American Society of Photogrammetry, 12–17 March, Washington DC, USA*, American Society of Photogrammetry, 1972, pp. 449–477.

[116] L. Lenzmann, E. Lenzmann, "Strenge auswertung des nichtlinearen gauß-helmert-modells," *AVN-Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, vol. 111:2, pp. 68–73, 2004.

[117] F. Nietzel, S. Petrovic, "Total least squares (tls) im kontext der ausgleichung nach kleinsten quadraten am beispiel der ausgleichenden geraden," *ZFV - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, vol. 133:3, pp. 141–148, 2008.

[118] Y. Shen, B. Li, Y. Chen, "An iterative solution of weighted total least-squares adjustment," *Journal of Geodesy*, vol. 85, pp. 229–238, 2011. doi: `doi:10.1007/s00190-010-0431-1`.

[119] O. Akyilmaz, A. Ustun, C. Aydin, N. Arslan, S. Doganalp, C. Guney, H. Mercan, S. Uygur, M. Uz, O. Yagci, "ITU_GGC16 the combined global gravity field model including GRACE & GOCE data up to degree and order 280," *GFZ Data Services*, 2016. doi: `10.5880/icgem.2016.005`.

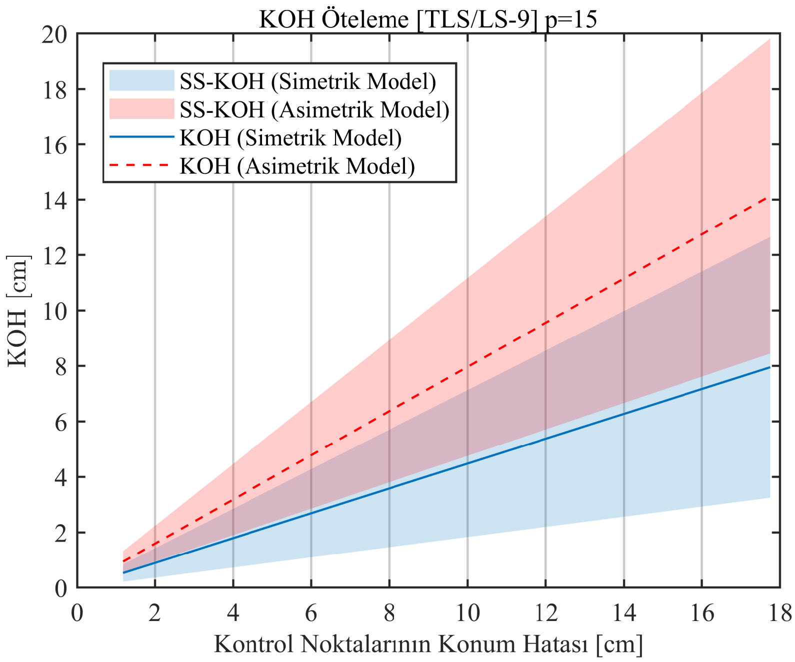
[120] S. Hekimoglu, K. R. Koch, "How can reliability of the robust methods be measured?" İn *Proceedings of the Third Turkish German Joint Geodetic Days, Altan and Gründing (Eds)*, Istanbul Technical University, 1999, pp. 179–196.

[121] N. J. Higham, "Computing the nearest correlation matrix - a problem from finance," *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 22(3), pp. 329–343, 2002.

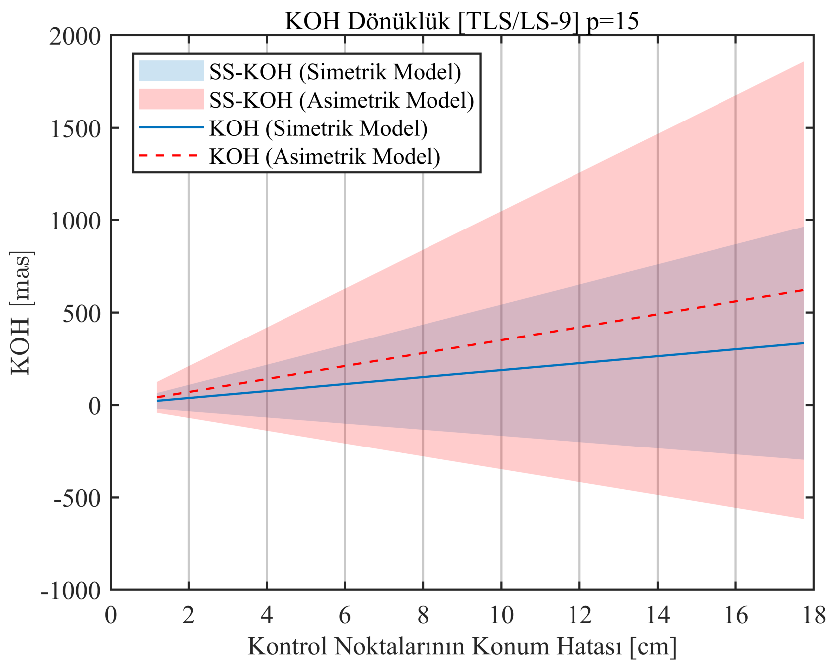
[122] S. Ö. Uygur, C. Aydın, O. Akyılmaz, "Simetrik jeodezik koordinat dönüşümü: 3 boyutlu benzerlik dönüşümü örnekleri üzerinden bir irdeleme," in *18. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, 26-29 Mayıs*, TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, Ankara, Türkiye, 2021, pp. 1–7.

A
KONTROL NOKTALARININ DOĞRULUKLARININ PARAMETRE KESTİRİMLERİNE ve KONUM HATALARINA ETKİSİ

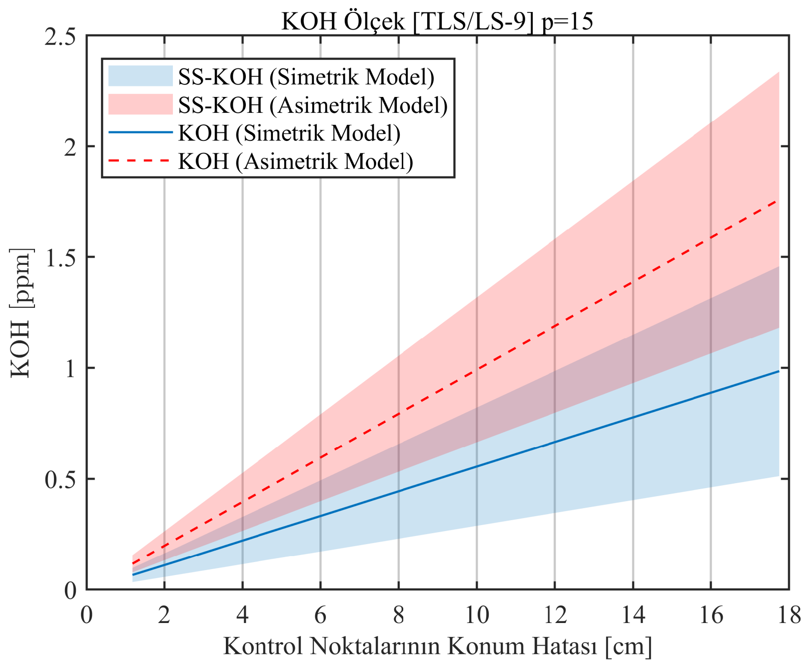
Bu bölümde, Bölüm 4.8'de ele alınan simülasyon çalışmasının 9p afin dönüşümüne ilişkin grafik sonuçları verilmektedir.



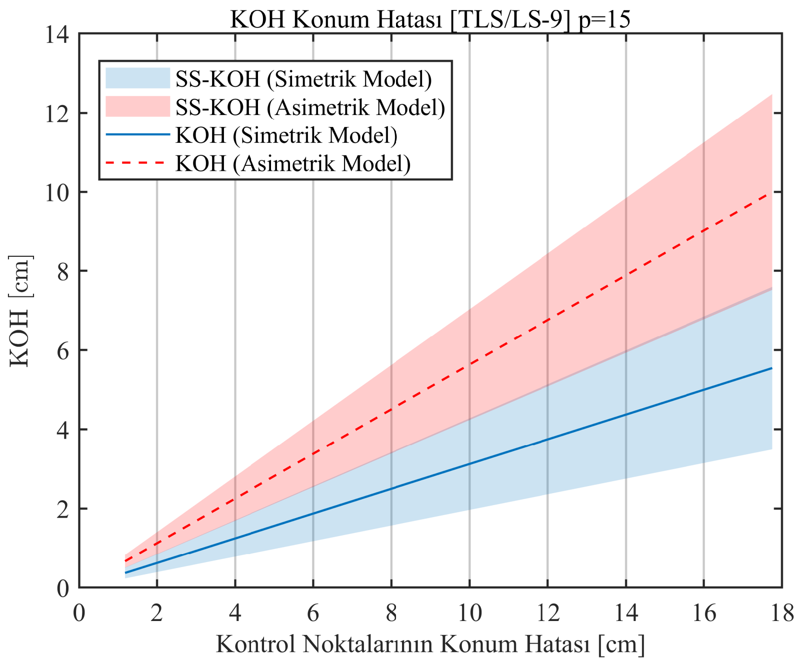
Şekil A.1 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık öteleme parametrelerinin KOH değerlerinin değişimi



Şekil A.2 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık dönüklük parametrelerinin KOH değerlerinin değişimi



Şekil A.3 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık ölçek çarpanlarının KOH değerlerinin değişimi



Şekil A.4 Kontrol noktalarının standart sapmalarına karşılık merkez noktanın konum hatalarının KOH değerlerinin değişimi

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgileri:

Makale

1. C. Aydin, H. Mercan, S. Ö. Uygur, “Increasing numerical efficiency of iterative solution for total least-squares in datum transformations,”Studia Geophysica et Geodaetica, vol. 92, pp. 223–242, 2018. DOI: 10.1007/s11200-017-1003-0

2. Ö. Uygur, C. Aydin, O. Akyilmaz, “Retrieval of euler rotation angles from 3d similarity transformation based on quaternions,”Journal of Spatial Science, 2020. DOI: 10.1080/14498596.2020.1776170.

3. Ö. Uygur, O. Akyilmaz, C. Aydin, “Solution of nine-parameter affine transformation based on quaternions, ”Journal of Surveying Engineering, 2021. DOI: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000364.

Konferans Bildirisi

1. S. Ö. Uygur, C. Aydın, O. Akyılmaz, "Simetrik jeodezik koordinat dönüşümü: 3 boyutlu benzerlik dönüşümü örnekleri üzerinden bir irdeleme, " 18. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, 26-29 Mayıs, TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, Ankara, Türkiye, 2021.