T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MİKRO YAPI ELEMANLARININ KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

Ali MERCAN

DOKTORA TEZİ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Mekanik Programı

Danışman

Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU

Şubat, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MİKRO YAPI ELEMANLARININ KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

Ali MERCAN tarafından hazırlanan tez çalışması 01/02/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Murat ALTEKİN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Reha ARTAN, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. İrfan COŞKUN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Şenol ATAOĞLU, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi ____________________

Danışmanım Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Mikro Yapı Elemanlarının Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Statik ve Dinamik Analizi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ali MERCAN

İmza

Aileme

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam esnasında emeğini esirgemeyen ve tezimin her aşamasında titizlikle ilgilenen engin tecrübelerini ve bilgilerini benimle paylaşan danışmanım Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU'na teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tez çalışmam boyunca her türlü fedakârlığı gösteren sevgili anneme ve babama çok teşekkür ederim.

Ali MERCAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

U^B	Burkulma yükü için şekil değiştirme enerjisi
δW	Dış kuvvetlerinden kaynaklı dış kuvvet değişimi
$\boldsymbol{\Theta}$	Dönme vektörü
$\mathbf{w}$	Düşey yer değiştirme bileşeni
$\mathbf{q}$	Düzgün yaylı yük
N_θ	Eğilmeden kaynaklanan normal kuvvet
$\boldsymbol{\theta}$	Eğilmeden kaynaklı kesitte dönme
M_θ	Eğilmeden kaynaklı toplam moment
$\mathbf{u}$	Eksenel doğrultuda yer değiştirme
$\mathbf{P}$	Eksenel uç kuvvet
M_u	Eksenel uzamadan kaynaklanan moment
N_u	Eksenel uzamadan kaynaklanan normal kuvvet
$\mathbf{f}$	Eksenel yayılı yük
E	Elastisite modülü
$\boldsymbol{\sigma}$	Gerilme tensörü
$\boldsymbol{\chi}$	Gerilme çifti tensörünün deviatorik kısmı
γ	Kayma açısı
k_s	Kayma düzeltme faktörü
σ_{xz}	Kayma gerilmesi
G	Kayma modülü
b	Kesit genişliği
h	Kesit yüksekliği
T	Kesme kuvveti

Q	Kesme kuvveti
δT	Kinetik enerji değişimi
I	Kiriş atalet momenti
ω	Kiriş enine serbest titreşim frekansı
Ω	Kiriş etki alanı
L	Kiriş uzunluğu
M	Klasik eğilme momenti
U^S	Klasik gerilme ve gerilme çifti için şekil değiştirme enerjisi
δ	Kronecker deltası
$[\mathbf{M}]$	Kütle matrisi
ρ	Kütle yoğunluğu
λ	Lamé'nin birinci parametresi
μ	Lamé'nin ikinci parametresi (Kayma modülü)
ϕ_1, ϕ_2	Lineer şekil fonksiyonları
M_c	Mikro etkiden dolayı moment çifti
$[\mathbf{\Delta}]$	Nodal parametre vektörü
N	Normal kuvvet
υ	Poisson oranı
$[\mathbf{K}]$	Rijitlik matrisi
E_c, E_m	Seramik ve metal elastisite modülü
V_c, V_m	Seramik ve metal hacim oranı
α_c, α_m	Seramik ve metal termal genleşme katsayısı
ΔT	Sıcaklık değişimi
$\mathbf{m}$	Simetrik eğrilik tensörü
$[\mathbf{S}]$	Stabilite matrisi
δU	Şekil değiştirme enerjisi değişimi

$\boldsymbol{\varepsilon}$	Şekil değiştirme tensörü
α	Termal genleşme katsayısı
$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}$	Termal gerilme tensörü
ψ	Toplam dönme
l_m	Uzunluk ölçeği parametrisi
ε_{xx}	x ekseninde şekil değiştirme
χ_{xy}	xy düzleminin gerilme çiftinin deviatorik kısmı
ε_{xz}	xz düzleminde şekil değiştirme bileşeni
σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}	x, y ve z doğrultularındaki normal gerilmeler
$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$	x, y ve z eksenlerindeki yerdeğiştirme bileşenleri
H	Yatay kesme kuvveti
$\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{y}}$	y ekseninde dönme bileşeni
$[\mathbf{F}]$	Yük vektörü

KISALTMA LİSTESİ

ARE	Göreceli Ortalama Hata
BCs	Sınır Koşulları
DQM	Diferansiyel Quadrature Metot
FEM	Sonlu Elemanlar Yöntemi
FD	Fonksiyonel Derecelendirilmiş
FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
GDQM	Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Yöntemi
MGÇT	Modifiye Gerilme Çifti Teorisi
MEMs	Mikro-elektromekanik Sistemler
MFEM	Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi
NE	Düğüm Noktası Sayısı
NEMs	Nano-elektromekanik Sistemler

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

ÖZET

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Mikro Yapı Elemanlarının Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Statik ve Dinamik Analizi

Ali MERCAN

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU

Mikro-elektromekanik sistemlerin (MEMS) ortak bir bileşeni olan mikro kirişlerin mekanik tepkisini anlamak büyük bir önem taşımaktadır. Ayrıca, analizler genellikle temel denklemlerin karmaşıklığı nedeniyle karmaşık sayısal yöntemler gerektirmektedir. Böylece daha etkili ve sağlam bir sayısal yönteme ihtiyaç duyulmuştur. Bu çalışmada, modifiye gerilme çifti teorisine (MGÇT) dayanan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) Timoshenko mikro kirişlerin statik eğilme, serbest titreşim ve burkulma analizleri ve bu mekanik davranışlar üzerindeki termal etkiler yeni bir fonksiyonel ve karışık sonlu elemanlar yöntemi (MFEM) çerçevesinde sunulmuştur. Yeni fonksiyonel, FD Timoshenko mikro-kirişler için Gâteaux diferansiyeline dayanan bilimsel bir prosedürle oluşturulmuştur. Boyut etkisi, modifiye gerilme çifti teorisi ile dikkate alınmıştır. Bununla birlikte, yönetici denklemler ve sınır koşulları, Gateaux yaklaşımının temel yapısını oluşturan Hamilton prensibi ile elde edilmiştir. C^0 tipi sürekli şekil fonksiyonlarına izin veren karışık sonlu elemanlar formülasyonunun detaylı formülasyon çıkartılımı verilmiştir. Çeşitli sınır koşulları altında düz bir FD mikro kirişinin statik eğilme, temel titreşim frekansı ve kritik burkulma yükü için MFE formülasyonunun sonuçları elde edilip mevcut literatürle karşılaştırılmıştır. Basit C^0 tipi şekil fonksiyonlarıyla, çeşitli sınır koşulları ve malzeme parametreleri için kayma kilitlenmesi tamamen önlenerek kısmen kalın FD mikro kirişlerin boyutsuz temel titreşim frekanslarının ve kritik burkulma yükü varyasyonlarının etkin bir şekilde yakalanabileceği gösterilmiştir. Üstelik geliştirilmiş sonlu elemanlar formülasyonu, farklı kuvvet yasası (derecelendirme) parametreleri, en boy oranları, sınır koşulları için FD Timoshenko mikro kirişlerin statik eğilmesi, serbest titreşimi ve burkulma yükleri üzerindeki homojen ve değişken (kalınlık doğrultusu) termal yüklerin etkilerini incelemek için kullanılmıştır. Ayrıca, FD konik mikro kirişler çok yönlülüğün bir göstergesi olarak analiz edilmiştir. Yeni formülasyonun bir diğer ayırt edici özelliği, kesit momentinin çift moment (boyut etkisi) ve klasik bölümlerinin ayrı katkılarının tanımlanması imkânıdır. Yeni fonksiyonel ve karışık sonlu elemanlar formülasyonu, bu çalışmanın özgün katkılarıdır.

Anahtar Kelimeler: Mikro-kiriş, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Termal etki, karışık sonlu elemanlar yöntemi, modifiye gerilme çifti teorisi

ABSTRACT

Static and Dynamic Analysis of Functionally Graded Microstructure Elements with Mixed Finite Element Method

Ali MERCAN

Department of Civil Engineering

Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU

Understanding the mechanical response of micro-beams, a common component of micro-electro mechanical systems (MEMS), is of great importance and analyses often require sophisticated numerical tools due to complexity of the underlying equations. Thus a more effective and robust numerical tool is ever needed. In this study, static bending, free vibration and buckling of functionally graded (FG) Timoshenko micro-beams based on modified couple stress theory (MCST) and thermal effects on these mechanical behaviors are presented under the framework of a new functional and mixed finite element method (MFEM). The new functional has been constituted for FG Timoshenko micro-beams through a scientific procedure based on the Gâteaux differential. Size effects are taken into consideration via modified couple stress theory and governing equations and boundary conditions are derived via Hamilton's principle which constitutes the basic structure of Gateaux approach. Detailed derivation of mixed finite element formulation which allows C^0 type continuous shape functions is given. The results of MFEM formulation for static bending, fundamental vibration frequency and critical buckling load of a straight FG micro-beam under various boundary conditions are obtained and compared with the existing literature. It is shown that, with simple C^0 type shape functions it is possible to effectively capture variations of dimensionless fundamental frequencies and critical buckling load of moderately thick FG micro-beams for various boundary conditions and material parameters by completely avoiding the shear locking. In addition, novel finite element formulation is used to study the effects of homogenous and variable (through thickness) thermal loads on the static bending, free vibration and buckling of FG Timoshenko micro-beams for different power law parameters, aspect ratios, boundary conditions. Also FG tapered micro-beams are analyzed as a demonstration of versatility. Another distinctive feature of the new formulation is its capability of identification of the separate contributions of the coupled and the classical parts of the section moment. The new functional and the mixed finite element formulation are the original contributions of this study.

Keywords: Micro-beam, functionally graded material, thermal effect, mixed finite element method, modified couple stress theory

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

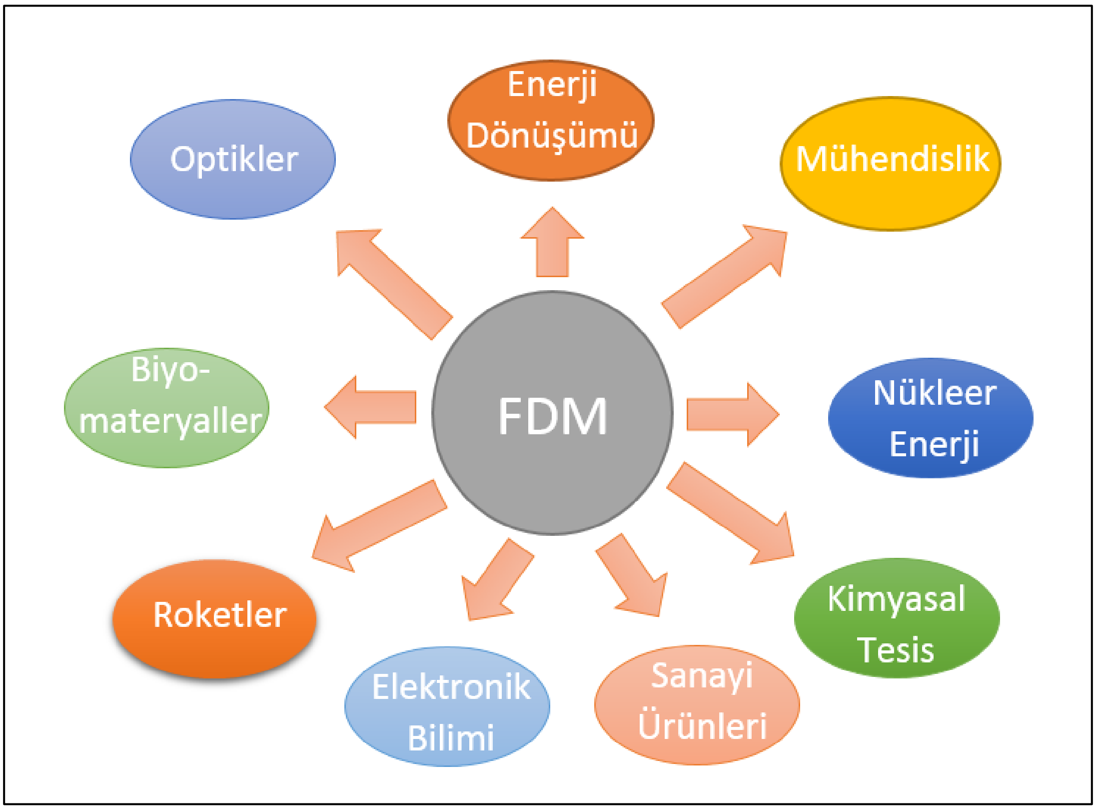
1.1.1 Mikro Kirişler

Mikro kirişler hacimli kirişlere kıyasla daha küçük boyutlu, düşük ağırlıklı, düşük enerji tüketimli ve yüksek dayanımlı malzeme özelliklerine sahip oldukları için son yıllarda çalışma alanları artmıştır. Mikro kirişlerden çoğunlukla mikro elektromekanik sistemler (MEMs), mikro ölçekli yapılar ve aletler alanında faydalanılmıştır. Mikro elektromekanik sistemlerin (MEMs) kullanıldığı yerlere örnek olarak titreşim sensörleri, atomik kuvvet mikroskopları, biyosensörler, süzgeçler ve mikro aktüatörler verilebilir. Mikro kirişlerin boyut etkilerinden dolayı yapı elemanlarının mekanik ve fiziksel özelliklerini doğru değerlendirmede artık klasik kiriş teorileri yeterli olmamaktadır. Bundan dolayı, araştırmacılar küçük ölçekli boyut etkilerini de bünyesinde barındıran yüksek mertebeli sürekli ortam teorilerine dayandırılan yeni kiriş teorileri geliştirmiştir. Bu teorilerin en genel olanları şunlardır: Mikropolar teorisi (micropolar theory), Eringen yerel olmayan elastisite teorisi (the Eringen's nonlocal elasticity theory), gerinim gradyan teorisi (strain gradient theory), gerilme çifti teorisi (couple stress theory) ve modifiye gerilme çifti teorisi (modified couple stress theory). Modifiye gerilme çifti teorisi, kirişlerde boyut etkisini statik ve dinamik tepkiler açısından inceleyen araştırmacıların en çok kullanmayı tercih ettikleri teorilerden biridir [1-13]. Babaei vd. (2017), modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılan fonksiyonel derecelendirilmiş mikro kirişin serbest titreşimini incelemiştir. Bu çalışma galerkin yöntemi kullanılarak Euler-Bernoulli kirişine uygulanmıştır. Bu çalışmanın sonuçları, sıcaklık ve malzeme derecelendirilmesinin mikro kirişlerin dinamik davranışları üzerinde çok büyük etkilerinin olduğunu göstermiştir [14]. Galerkin yöntemi kullanılarak MGÇT'ye dayalı hareketli parçacığa maruz kalan elastik olarak bağlı bir çift Timoshenko mikrokiriş sisteminin doğrusal olmayan enine titreşimi

Hadian vd. (2020) tarafından incelenmiştir [15]. Hava ortamında eksenel yüke maruz kalan temassız modda piezoelektrik tabakaya sahip atomik kuvvet mikroskobu (AFM) mikro konsolunun frekansı Korayem ve arkadaşları tarafından ayrıntılı olarak analiz edilmiştir [16]. Yao vd. (2020), yerel olmayan teori ve Timoshenko kiriş teorisine göre eksenel harekete maruz kalan FD mikro kirişlerinin enine serbest titreşimini ve dalga yayılımını araştırmıştır [17]. Li vd. (2019), deneysel ve analitik çözümler kullanarak konsol mikro kirişlerinin süper harmonik rezonansını incelemişlerdir [18]. Karamanlı ve Aydoğdu (2019), sonlu elemanlar yöntemi kullanarak MÇGT'ye daynan lamine kompozit ve sandviç mikro kirişlerin serbest titreşim ve burkulma davranışını araştırmıştır [19]. Mustapha KB (2020), modifiye gerilme çifti ve Rayleigh-Love ve Timoshenko teorilerinin bir kombinasyonuna dayanan keyfi olarak yönlendirilmiş mikro ölçekli çerçevelerin titreşim davranışını incelemek için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüş bir model önermiştir [20]. Dehrouyeh-Semnani ve Bahrami (2016), 4 serbestlik dereceli ve aynı zamanda 6 serbestlik dereceli kiriş elemanlarını bünyesinde içeren sonlu elemanlar yöntemi kullanarak farklı sınır koşulları altında Timoshenko mikro kirişlerin güvenirliğini ve doğruluğunu statik eğilmesi açısından incelemiştir. Bu çalışma sonucunda, 6 serbestlik kiriş elemanının, 4 serbestlik kiriş elemanına göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Aynı zamanda, yakınsaklık oranınındaki artış, boyut etkisindeki artışa dayandırıldığı gözlemlenmiştir [21]. Ma vd. (2008) varyasyonel formülasyon kullanarak boyut etkisini Timoshenko mikro kirişler üzerinde dikkate almıştır. Bu çalışmada statik eğilme ve serbest titreşim, basit mesnetli bir kiriş için çalışılmıştır. Ayrıca nümerik sonuçlar, analitik çözümlerle karşılaştırıldığında çökme ve dönme analizleri için daha iyi tahminler vermiştir [22]. Kahrobaiyan M.H. vd. (2014), sonlu elemanlar yöntemi ile yer değiştirme sonuçlarını deneysel sonuçlarla karşılaştırarak elektrostatik olarak çalıştırılan bir ankastre mikro kirişin çekme gerilimini ve statik sapmasını çalışmıştır. Böylece, yer değiştirme temelli FEM sonuçlarının deneysel sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir [23]. Abadi M.M. ve Daneshmehr A.R. (2014), fourier serisi açılım tekniğini kullanarak kompozit lamine mikro kirişlerin burkulmasını araştırmıştır [24]. Şimşek M. ve Reddy J.N. (2013), çeşitli malzeme bileşimleri altında modifiye gerilme çifti teorisine dayanan FD mikro-kirişlerin statik eğilmesini ve serbest titreşimini sayısal olarak gözlemleyerek malzeme uzunluk ölçeği parametresinin etkilerini incelemişlerdir [25]. Sourki R. ve Hoseini S.A.H. (2016), çeşitli Poisson oranları altında çatlak bir mikro kirişin serbest titreşiminin analizini araştırmışlardır [26]. Ghadiri M. vd. (2016), ilk defa, diferansiyel quadrature eleman yöntemini (DQEM) uygulayarak modifiye gerilme çifti teorisine dayanan dönen bir FD konik mikro kirişinin titreşim davranışını araştırmıştır [27]. Shafiei N. vd. (2016) modifiye gerilme çifti teorisine dayanan FD Euler-Bernoulli ve Timoshenko mikro kirişlerinin boyutuna bağlı titreşim davranışı incelemiştir. Denklemler, genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yönteminden faydalınarak çözülmüştür [28]. Mohammadi-Alasti B. vd. (2011) termal değişikliklere ve doğrusal olmayan elektrostatik basınca maruz kalan bir FD konsol mikro kirişinin mekanik davranışını araştırmak için sonlu fark yöntemi ve adım adım doğrusallaştırma yöntemini kullanmıştır [29]. Nateghi A. vd. (2012) modifiye gerilme çifti teorisine dayanan FD mikro-kirişlerin burkulmasını analiz etmek için klasik, birinci ve üçüncü dereceden kesme deformasyon teorileri olmak üzere üç farklı kiriş teorisi üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmada, FD mikro-kirişinin burkulma analizi sonuçları, genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemi (GDQM) kullanılarak çeşitli sınır koşulları altında elde edilmiştir. Burkulma yüklerinin sonuçlarına bakıldığında özellikle ince kirişler için klasik elastisite teorisinden ziyade modifiye gerilme çifti teorisi ile daha doğru tahmin edildiği gösterilmiştir. Ayrıca, FD mikro kirişlerin boyut etkisine bağlı davranışları izotropik homojen mikro kirişlerle karşılaştırıldığında önemli ölçüde değişiklik göstermiştir [30]. Wang L. vd. (2013) dinamik rijitlik matrisi ve transfer matrisi tekniğini kullanarak modifeye gerilme çifti teorisine dayanan üç boyutlu silindirik mikro kirişlerin eksenel, eğilme ve burulma titreşimlerini incelemiştir [31]. Şimşek M. vd. (2013) modifiye gerilme çifti teorisi (MGÇT) kullanarak statik eğilme analizi için fonksiyonel olarak derecelendirilmiş Timoshenko mikro ölçekli kiriş geliştirmiştir. Basit mesnetli bir kiriş analitik olarak tekil ve düzgün yayılı yükler altında çözülmüştür. Sonuç olarak, modifiye gerilme çifti teorisi her zaman mikro kirişler için klasik kiriş teorilerine kıyasla daha küçük çökme değerleri verdiği gözlemlenmiştir [32]. Akgoz B. ve Civalek O. (2011) gerinim gradyan elastisitesine ve modifiye gerilme çifti teorisine dayanan mikro ölçekli kirişlerin stabilitesini araştırmıştır. Bu çalışmada, bu iki boyuta bağlı teoriler için bir Euler-Bernoulli nano boyutlu kiriş analitik olarak çözülmüştür [33]. Dehrouyeh-Semnani ve Bahrami (2015) çeşitli sınır koşullarında klasik ve birinci kesme deformasyon kiriş teorileri için modifiye gerilme çifti teorisine dayanan boyuta bağlı mikro kirişlerin statik eğilme, serbest titreşim ve burkulma davranışlarını incelemiştir [34]. Salamat-talab M. vd. (2012) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş mikro kirişler için modifiye gerilme çifti teorisine dayanan üçüncü dereceli kesme deformasyon kiriş teorisi geliştirmiştir. Kirişin statik ve dinamik tepkileri boyut etkisinin gösterilmesi için incelenmiştir. Ayrıca, basit mesnetli kirişin statik ve dinamik davranışı analitik olarak fourier serisi açılımıyla çözülmüştür [35]. Asghari M. vd. (2011) FD ankastre ve basit mesnetli kirişlerin statik ve serbest titreşimini araştırmak için modifiye gerilme çifti teorisine dayanan bir FD Timoshenko mikro kirişini sunmuştur [36]. Shafiei N. vd. (2017) iki boyutlu fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli nano ve mikro kirişlerin titreşim analizini ilk kez Timoshenko kiriş teorisi kullanarak incelemiştir. Modifiye gerilme çifti ve Eringen yerel olmayan elastisite teorileri, çeşitli sınır koşullarına sahip nano ve mikro kirişler için kullanılıp formülasyon elde edilmiştir. Bu formülasyon, genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntem (GDQM) kullanılarak çözülmüştür [37]. Mohammadabadi vd. [38], genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemini (GDQM) kullanarak, modifiye gerilme çifti teorisine dayanan çeşitli sınır koşulları altında kompozit mikro kirişlerin boyuta bağlı burkulma analizi üzerindeki termal etkisini araştırmıştır.

1.1.2 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme

Birçok araştırmacı, bu çalışmayla ilgili son yıllarda kompozitlerin özgün bir türü olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerle ilgilenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) bir kavram olarak ilk defa 1984 yılında Japonya'da bir uzay aracı projesi için dikkate alınmıştır. Bu homojen olmayan malzemeler genellikle iki veya daha fazla malzeme karışımından oluşup malzeme özellikleri belirli bir doğrultu içerisinde devamlı olarak değişmektedir. Bu doğrultu genellikle düzlemsel yapı elemanları için kalınlık doğrultusudur. Yüksek mukavemetli – düşük termal dayanımlı metallerin ve yüksek termal dayanımlı – düşük mukavemetli seramiklerin malzeme özelliklerinden dolayı karışımları kompozitlerin özel bir türüdür. Bu tür kompozit malzemeler biyotıp, optik, elektronik alanlarında ve uzay, nükleer, otomotiv gibi çoğu yüksek teknolojik endüstriler içerisinde tercih edilmektedir. Bu optimum özelliklere ve özgün bir kombinasyona sahip olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler çoğu araştırmacıyı kompozit malzemelerin bu türünü incelemeye yönlendirmiştir. Bu malzeme özellikleri homojen malzemeler üzerinde yapı bütünlüğünün sürdürülebilir olmasına olanak sağlamaktadır [39-51]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin (FDM) mekanik tepkilerinin değerlendirilmesi açısından ortaya koyulan çalışmaların sayısında hızlıca artışlar gözlemlenmiştir. Burada bu çalışmaların bazılarından bahsedilecektir. Ebrahimi ve Mokhtari [52], yarı analitik diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak dönen gözenekli FD Timoshenko kirişin serbest titreşimini incelemişlerdir. Khorshidi ve Shariati [53], çeşitli sınır koşulları ve farklı kayma kiriş teorileri için GDQM kullanarak MCST dayanan sigmoid FD nanokirişlerinin serbest titreşimini incelemiştir. Poisson'un ν oranı, en / boy oranı L/h ve kuvvet yasası (karışım) indeksi p'nin etkileri yeni problemleri açısından araştırılmış ve yorumlanmıştır. Mohammadabadi vd. [54], çeşitli sınır koşulları için Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) mikro-kirişlerin termal ortamda serbest titreşimini incelemiştir. Eltaher vd. [55] sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak modifiye edilmiş bir gözeneklilik modeliyle FD nanokirişlerinin statik eğilme ve titreşim sonuçlarını incelemiştir. Ayrıca, bu çalışma için Euler kiriş teorisi kullanılmış olup sonucunda gözeneklilik, malzeme derecelendirilmesi ve nano ölçek parametrelerinin eğilme ve temel frekans üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Chakraborty vd. (2003) üstsel ve kuvvet yasası değişkenleriyle ilişkilendirilen malzeme özellik dağılımını kullanılarak farklı gerilme değişimlerini incelenmiştir. Metal ve seramik karışımından oluşan fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş, homojen malzemeler ile karşılaştırıldığında statik, serbest titreşim ve dalga yayılım oluşumu açısından çok farklı davranış gösterdiği tespit edilmiştir [56]. Fang vd. [57], varsayılan mod ayrıklaştırma yöntemini sayısal bir yöntem olarak kullanarak, çeşitli sınır koşulları altında dönen FDM mikro kirişlerinin boyuta bağlı titreşim tepkisi üzerindeki termal etkisini araştırmıştır. Akgöz ve Civalek [58] analitik bir yöntem kullanarak FD mikro kirişlerinin titreşim tepkisi üzerindeki termal ve kayma deformasyon etkilerini araştırmışlardır. Trinh vd. [59] mekanik ve termal yükler altında durum uzayı yaklaşımını kullanarak FD kirişlerin serbest titreşimi ve burkulması için kesin çözümler elde etmiştir. Enayat S vd. [60] yerel olmayan gerinim gradyan teorisi ile birlikte farklı kiriş teorileri altında elastik bir temel üzerine oturan FD gözenekli nanokirişlerin mekanik analizi ile ilgili kapsamlı bir çalışma önermiştir. Rajasekaran ve Khaniki [61], sonlu elemanlar yöntemi ile lokal olmayan gerilme gradyanı teorisine dayanan FD lineer olmayan nanokirişlerin eğilmesi, frekansı ve burkulmasını incelemişlerdir. Şimşek M. (2010) FDM kirişlerin üzerinde hareketli bir kütlenin dinamik etkilerini incelemek için çeşitli kesme deformasyonu kiriş teorilerini kullanarak farklı sınır koşullarına sahip FDM Timoshenko kirişlerinin doğrusal olmayan titreşimini çalışmıştır [62]. Çeşitli sınır koşullarına sahip homojen ve fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin burkulma ve serbest titreşim analizleri için analitik çözümler incelenip yeni bir yüksek mertebeli kayma deformasyon teorisi önerilmiştir [63]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kullanım alanları Şekil 1.1'de gösterildiği gibi şematikleştirilmiştir.



Şekil 1.1 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin çeşitli kullanım alanları [84]

1.1.3 Analiz Yöntemleri

Fonksiyonel derecelendirilmiş mikro kirişlerin statik ve dinamik analizleri nümerik ve analitik yöntemlerle çözülmektedir. Analitik yöntemler genellikle homojen olmayan malzeme özelliklerine ve karmaşık bünye denklemlerine sahip yapıların çözümlenmesinde sınırlı kalmaktadır. Böylece, araştırmacılar farklı sınır koşullarına ve malzeme özelliklerine sahip keyfi karmaşık geometri elemanlarını çözümlemede nümerik yöntemlere başvurmuştur. Literatürde fonksiyonel derecelendirilmiş mikro kirişlere uygulanan pek çok nümerik yöntem bulunmaktadır. Bunlardan bazıları şu şekilde aşağıdaki gibi sıralanabilir;

a) Diferansiyel quadrature yöntemi (differential quadrature method)
b) Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemi (generalized differential quadrature method)
c) Rayleigh-Ritz yöntemi (Rayleigh-Ritz method)
d) Galerkin yöntemi (Galerkin's method)
e) Sonlu farklar yöntemi (finite difference method)
f) Sonlu elemanlar yöntemi (finite element method)
g) Karışık sonlu elemanlar yöntemi (the mixed finite element method) [64-72].

Karamanlı ve Vo (2018) modifiye gerilme çifti teorisine dayanan malzeme özellikleri hem kalınlık doğrultusunda hem de eksenel doğrultuda değişen bir FDM kirişinin statik eğilme analizini gerçekleştirmiştir. Yer değiştirme alanı açısından düzeltilmiş, kayma ve normal deformasyonlar için dört parametre içeren yarı-3D kiriş formülasyonu kullanılmıştır. Her düğüm için 7 serbestlik derecesine sahip C^1 (Hermite) enterpolasyon fonksiyonlarının kullanımını içeren iki düğümlü bir sonlu eleman kiriş modeli önerilmiştir. Bunun neticesinde sayısal sonuçlar, kullanılan kiriş formülasyonunun üstün yakınsama özelliklerini göstermiştir [66]. Yu vd. (2019), 2 yönlü boyuta bağlı FDM kirişlerinin formülasyonu için izogeometrik çerçeve içinde NURBS (ağırlıklı B-spline fonksiyonları) uygulamıştır. Yer değiştirme alanı bir yarı-3D teorisine ve boyut etkileri modifiye gerilme çifti teorisine (MGÇT) dayandırılmıştır. Polinom derecesi 3 olan ve 4 Gauss Quadrature noktaları ile integrasyonlanmış NURBS kullanımı, kirişlerin geometrisinin tanımında üstün yakınsama özelliklerine ve üstün ölçümlere sahip NURBS elementleri ile sonuçlanmıştır. NURBS, yer değiştirme bazlı formülasyonların C^1 süreklilik şartlarını doğrudan karşılamıştır [67]. Yu vd. (2019) MGÇT'ye dayanan boyuta bağlı tek yönlü FD bir kirişin statik beğilme ve serbest titreşim tepkisini analiz etmiştir. Yine izogeometrik çerçevede polinom derecesi 3 olan ve düğüm başına 4 değişkenli NURBS elementleri kullanılmıştır. Yarı-3D formülasyonları daha yüksek dereceli bir kayma deformasyon formülasyonlarıdır ve daha gerçekçi kayma deformasyonları tanımı avantajına sahiptir. Bu nedenle, daha yüksek dereceli teoriler gibi, daha karmaşık formülasyonlara rağmen kayma düzeltme faktörünün kullanılmasından kaçınılmıştır [68]. Bununla birlikte, kirişin kalınlığı boyunca sürekli kayma gerilimi nedeniyle kayma düzeltme faktörü gerektiren Timoshenko kiriş teorisi, daha yüksek dereceli teorilerle karşılaştırıldığında çok yakın sonuçlar vermiştir [69]. Lei vd. (2013) boyut etkisine bağlı bir FDM kirişinin eğilme ve titreşim analizi için gerinim gradyan teorisine ve sinüzoidal kayma deformasyon teorisine dayanan Navier çözüm tekniğini uygulamıştır [70]. Yine Lei vd. (2013) nikel mikro kirişinin karakteristik uzunluğunun değerlendirilmesi için deneysel bir yöntem kullanıp boyuta bağlı parametrelerin kalibrasyonu için, gerilme gradyanı teorisine (GGT) ve ayrıca MGÇT'ye dayanan en az kare yöntemiyle DQM'yi kullanılmıştır. MGÇT için uzunluk skalası parametresinin, GGT için uzunluk skalası parametresinden önemli ölçüde daha büyük verim sağladığı sonucuna varılmıştır. Çünkü birinci teoride, uzama gradyanının dilatasyon gradyanı ve deviatorik kısmı dikkate alınmamıştır [71]. Li vd. (2018) uzunluk ölçeği parametrelerinin tanımlanması için sistematik bir deneysel yaklaşım önermiştir. Ayrıca, LDV ölçümlerine dayanan bakır ve titanyum mikro kirişleri için elde edilen deneysel veriler teorik (MGÇT) verilere uyum göstermiştir [72]. Lei vd. (2019) 2-yönlü kusurlu FDM kirişlerinin burkulma sonrası davranışının analizi için üçüncü mertebe kesme deformasyon teorisi kullanmıştır. Von-Karman doğrusalsızlığı varsayımına dayandırılarak doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için Newton-Raphson yöntemiyle GDQM kullanılmıştır [73]. Fonksiyonel derecelendirilmiş mikro kiriş analizi için karışık sonlu eleman yönteminden faydalanan çalışmaların sayısı diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında nispeten daha sınırlıdır. Kwon Young-Rok ve Lee Byung-Chai (2016) modifiye gerilme çifti teorisine dayanan boyuta bağlı kirişler için Lagrange çarpan yöntemine dayanan 2D karışık sonlu bir eleman önermiştir [74]. Nguyen vd.

(2015) karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanarak Euler-Bernoulli nano kirişlerin statik analizi için nümerik bir çözüm sunmuştur. Bu yöntem ilk defa yerel olmayan tekil yüklü bir kiriş probleminde kullanılmıştır. Yer değiştirmeye bağlı sonlu elemanlar formülasyonu, yerel olmayan kirişler için önemli ölçüde sınırlı olduğu görülmüştür [75]. Deng G. ve Dargush G. F. (2016), tutarlı boyuta bağlı gerilme çifti teorisinin elastodinamik tepkisi için yeni bir karışık Lagrangian formülasyonu geliştirmiştir. Ayrıca, bu formülasyon ilk defa tutarlı çift gerilme teorisinin tanımını sunmuştur [76, 77]. Lepe vd. (2014) homojen olmayan Timoshenko kirişinin eğilme problemlerini çözmek için bir karışık sonlu elemanlar formülasyonu çalışmıştır. Karışık sonlu elemanlar yönteminde, standart sonlu elemanlar yönteminin aksine kayma kitlenmesi problemiyle karşılaşılmamaktadır [78]. Özütok ve Madenci (2017) yüksek mertebeli kayma deformasyon teorisine dayandırılan katmanlı kompozit kirişlerin statik analizi için karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanmıştır [79].

1.1.4 Termal Etki

FD mikro yapılarının termal serbest titreşim ve burkulma analizi birçok araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Kullanım süresi boyunca, FDM mikro kirişler yoğun termal etkilere ve hatta imalat sırasında termal yüklere maruz kalabilirler. Bu nedenle, termal yükler belirli durumlarda birincil tasarım faktörü olarak önemli bir rol oynar. Ayrıca sıcaklık etkileri geometrik değişikliklere neden olabilir [80]. Ke vd. (2011) modifiye gerilme çifti teorisine dayanan Timoshenko mikro kirişlerinin serbest titreşim ve burkulma üzerindeki termal etkilerini, ankastre-ankastre ve mafsallı-mafsallı sınır koşulları için diferansiyel quadrature yöntemini (DQM) kullanarak incelemiştir [81]. Nateghi vd. (2013), modifiye gerilme çifti teorisine dayanan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) mikro kirişlerin burkulma ve serbest titreşim davranışı üzerindeki termal etkiyi sunmuştur. Bununla beraber genelleştirilmiş diferansiyel quadrature (GDQ) yöntemi kullanılarak farklı sınır koşulları altında FD mikro kirişinin kritik burkulma yükü ve doğal frekansı analiz edilmiştir [48]. Ayrıca, Ansari vd. (2013), genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodunu (GDQM) kullanarak modifiye gerinim gradyan teorisine (MGÇT) dayalı olarak termal yüklere maruz kalan FD mikro kirişlerinin termal burkulma sonrası özelliklerini incelemiştir [82]. Farklı kiriş teorileri altında modifiye gerinim gradyanı teorisine (MGÇT) dayalı FD gözenekli mikrokirişin serbest titreşim analizi üzerindeki termal etki, Zanoosi tarafından Navier yöntemi kullanılarak incelenmiştir [83].

1.2 Tezin Amacı

Sonlu elemanlar yöntemi diğer nümerik yöntemler içerisinde keyfi karmaşık geometrileri, malzeme özelliklerini, yükleme çeşitlerini ve sınır koşullarını çözmek için daha etkili olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan karışık sonlu elemanlar yöntemi yer değiştirme değişkenlerine bağlı formülasyonlar üzerinde birçok avantaj sunmaktadır. Kayma kitlenme tepkisinin oluşmaması ve daha basit şekil fonksiyonlarının kullanımına izin vermesi bu avantajlardan bazılarıdır. Literatürde, sonlu elemanlar yöntemi fonksiyonel derecelendirilmiş mikro yapı analizi alanı içinde sınırlıdır ve karışık sonlu elemanlar yöntemiyle çok daha nadiren faydalanılmaktadır. Bu çalışma kapsamında modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılan FD konik Timoshenko mikro kirişin karışık sonlu elemanlar analizi için özgün bir formülasyon elde edilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, farklı Poisson oranları altında iki farklı sınır koşulu için modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılan FD Timoshenko mikro kirişinin boyuta bağlı burkulma ve serbest titreşim davranışı üzerindeki termal etkiyi incelemek için karışık sonlu elemanlar formülasyonunun geliştirilmesi öngörülmektedir.

1.3 Hipotez

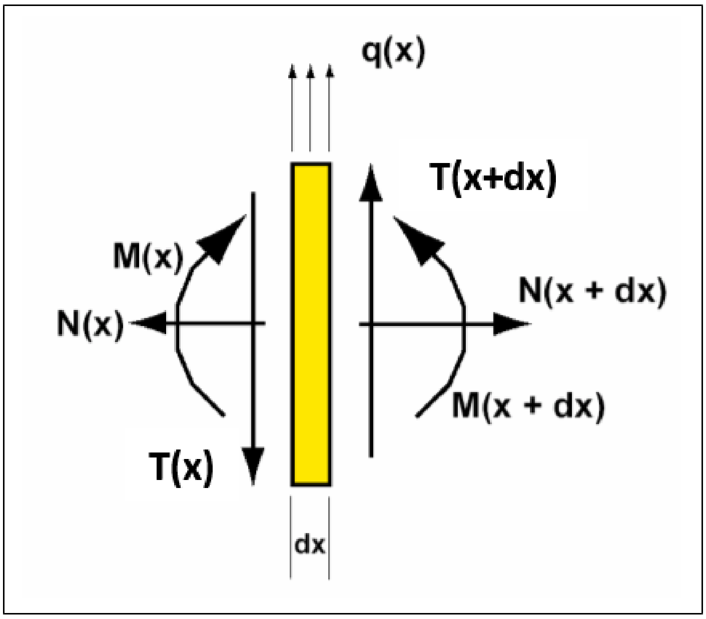
Bu çalışma kapsamında Gateaux diferansiyeli, yeni fonksiyonel ve sonucunda ortaya çıkan çok serbestlik dereceli kiriş elemanını elde etmek için kullanılabilir. Yeni fonksiyonel kullanılarak elde edilen karışık sonlu elemanlar formülasyonun güvenilirliği, literatürde var olan farklı yöntemlerle çözümlenmiş statik ve dinamik sonuçlarla karşılaştırılarak ispatlanır. Ayrıca, karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak çeşitli sınır koşulları altında değişken kuvvet yasası (derecelendirme) oranları k, koniklik oranları h_f/h_i ve en-boy oranları L/h için FD konik Timoshenko mikro kirişinin boyutsuz temel frekansı ve burkulması elde edilip literatüre esaslı bir katkıda bulunulabilir. Üstelik yeni formülasyon, kesit momentine ve normal kuvvetine hangi nicelikte farklı katkıların olduğunun gösterilmesini sağlar. Böylelikle çeşitli parametreler için kirişin kesit momenti ve normal kuvveti üzerindeki mikro ölçek etkilerinin, FD malzeme değişimlerinin "miktarını" hesaplamak mümkündür. Elde edilen yeni formülasyon ile statik ve dinamik analizler üzerindeki termal etki incelenebilmektedir. Buna ek olarak, kiriş kesitine kalınlık doğrultusunda doğrusal ve doğrusal olmayan sıcaklık değişimleri verilerek kesitte meydana gelen çökmeler, moment diyagramları ve normal kuvvet diyagramları elde edilebilir.

2
ÇALIŞMA KAPSAMINDA KULLANILACAK GENEL İLKELER

2.1 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

Kiriş, boyutlarından birinin diğer ikisinden çok daha büyük olduğu bir yapı olarak tanımlanabilir. Kirişin ekseni, bu daha uzun boyut boyunca tanımlanır ve bu eksene normal kalan bir enine kesit, kiriş uzunluğu boyunca sorunsuz bir şekilde değiştiği varsayılır. Ayrıca, literatürde kiriş eksenine tarafsız eksen veya sıfır ekseni de denmektedir. Çeşitli varsayımlara dayalı olarak birkaç kiriş teorisi geliştirilmiştir. Bu kiriş teorilerinden elde edilen sonuçlar farklı hata oranlarına yol açabilirler. Bu teorilerin en basit ve en kullanışlılarından biri ilk olarak Euler ve Bernoulli tarafından tanımlanmış olup genellikle Euler-Bernoulli kiriş teorisi olarak adlandırılmıştır. Bu teorinin temel bir varsayımı, enine kesitin kirişin kendi düzleminde sonsuz rijitliği vardır, yani enine kesit düzleminde deformasyon meydana gelmez. Bu teoriye göre tek boyutlu bir cisim gibi varsayılan kirişte bağımlı değişken olarak kiriş kesitinin ağırlık merkezinin çökmesi alınır. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde şu kabuller kullanılır:

a) Kesit, kendi düzleminde sonsuz derecede rijittir.
b) Deformasyondan önce kiriş eksenine düzlem olan enine kesitler deformasyondan sonra düzlem olarak kalmaya devam ederler.
c) Deformasyondan önce kiriş eksenine dik olan kesitler deformasyondan (eğilmeden) sonra kiriş eksenine dikliklerini korurlar.



Şekil 2.1 Sonsuz küçük kiriş parçası üzerine etkiyen kuvvetler

Kiriş kesitinde dx kadarlık bir dilim üzerindeki denge ilişkileri incelendiğinde aşağıdaki bağıntılar çıkarılabilir:

Eksenel kuvvet dengesi:

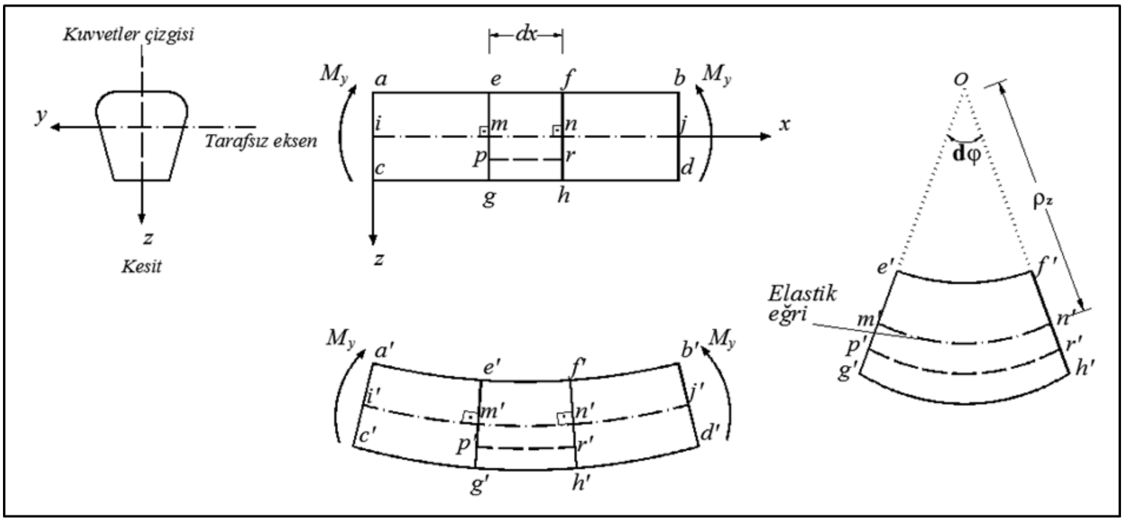
$$0 = N(x+dx) - N(x) \Rightarrow N(x) = \text{sabit} \tag{2.1}$$

Düşey kevvet dengesi:

$$\begin{aligned} 0 &= q(x)dx + T(x+dx) - T(x) \\ &= q(x)dx + (T(x) + T'(x)dx + o(dx)) - T(x) \\ 0 &= T'(x) + q(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

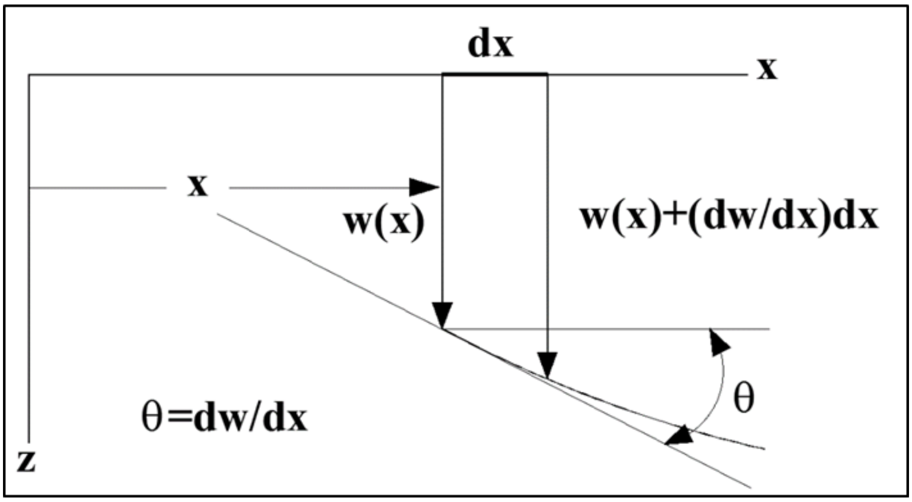
Moment dengesi $"x+dx"$ etrafında:

$$\begin{aligned} 0 &= T(x)dx + M(x+dx) - M(x) - (q(x)dx)dx \\ &= T(x)dx + (M(x) + M'(x)dx) - M(x) - (q(x)dx)\,dx/2 \\ &= dx[M'(x) + T(x) - q(x)\,dx/2 \Rightarrow \\ 0 &= M'(x) + T(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$



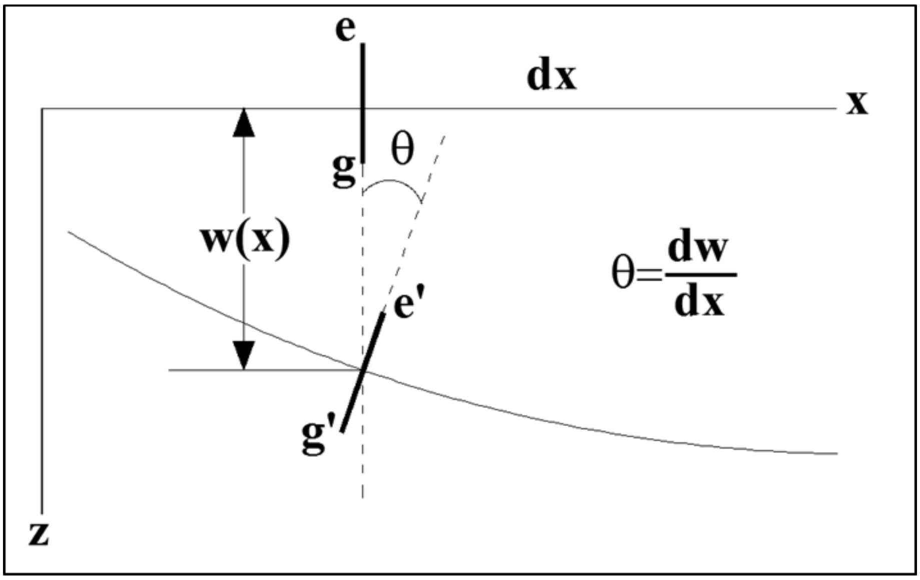
Şekil 2.2 Kiriş eğilmesi

Bernoulli –Navier hipotezlerine göre Şekil 2.2'de görülen harflendirilmiş liflerin bir kısmı uzarken bazıları kısalacak i-j çizgisi üzerinde kalan liflerde boy değişimi olmayacaktır. Bu çizgiye tarafsız eksen adı verilir. Tarafsız eksen basınç ve çekme bölgeleri arasındaki sınırı oluşturmaktadır. Ayrıca şekil değiştirmeler çok küçük olduğundan 1. mertebe teorisi geçerli olup süperposizyon ilkesi uygulanabilmektedir. Bunun sonucunda eğilme momentinden ve normal kuvvetten meydana gelen şekil değiştirmeler arasında etkileşimler görülmeyecektir [90].



Şekil 2.3 Euler-Bernoulli teorisine göre şekil değişimi [90]

Şekil 2.3'te görüldüğü gibi eğilmiş olan kiriş ekseni eğri bir form (elastik eğri) alacak ve elastik eğri x-z düzleminde yer alacaktır. Kirişte herhangi bir noktanın yer değiştirme vektörü $u = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}$ bağıntısıyla verilebilir. Burada 1, 2 ve 3 rakamları sırasıyla x, y ve z eksenlerini simgelemektedir. Sonuç olarak elde edilen yerdeğiştirme bağıntısı kullanılarak Euler-bernoulli hipotezine göre yer değiştirme bileşenleri elde edilecektir [90].



Şekil 2.4 Bernoulli-Navier hipotezine göre şekil değişimi ve birim şekil değişiminin geometrik gösterimi [90]

Euler-bernoulli kiriş teorisine göre bir e-g kesitindeki şekil değiştirme şekil 2.4'te açıkca gösterilmiştir. Burada e-g dik kesiti rijit olarak ötelenip döndüğü ve elastik eğriye dik konumlandığı görülmektedir. Ayrıca x eksenindeki şekil değişimi ötelenme ve dönmeden kaynaklanırken z eksenindeki şekil değişimi w(x) çökme fonksiyonu ile tanımlanacaktır. Düzlem durum için y ekseninde herhangi bir yer değiştirme oluşmayacaktır. Euler-bernoulli kiriş teorisine göre aşağıdaki şekil değiştirme bileşenlerine varılabilir:

$$u_1 = u^n + u^b \tag{2.4}$$

$$u_2 = 0 \tag{2.5}$$

$$u_3 = w(x) \tag{2.6}$$

Buradaki x eksenindeki şekil değiştirme bileşenleri normal kuvvetten ve eğilmeden kaynaklanmaktadır. Kaynaklarına göre birbirinden ayrı yazılarak *n* kuvvet indisi normal kuvvetten ve b kuvvet indisi ise eğilmeden kaynaklandığını göstermektedir. Bu eksenel şekil değiştirme bileşenleri Denk. (2.7-2.8) deki gibi ifade edilmiştir.

$$u^n = u \tag{2.7}$$

$$u^b = -z\frac{dw}{dx} = -zw,_x \tag{2.8}$$

Elastisitede kabul edilen şekil değiştirme varsayımları dikkate alındığında kolaylıkla birim şekil değiştirme bileşenlerine geçiş yapılabilir. Bernoulli – Navier hipotezine dayandırılan ve yer değiştirme alanları üzerinde gerekli türevleme işlemleri yapıldığında sadece ε_{xx} birim şekil değişimi elde edildiği diğer birim şekil değiştirmelerin sıfır kabul edildiği görülmüştür.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^n + \varepsilon_{xx}^b \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_{xx}^n = u,_x \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_{xx}^b = zw,_{xx} \tag{2.11}$$

Bu aşamadan sonra yapılan kabuller neticesinde elde edilen teoriye göre Hooke kanunu varsayılırsa σ_{xx}'den başka σ_{yy} ve σ_{zz} sıfırdan farklı olduğu anlaşılır. Kiriş liflerindeki şekil değiştirmelerin sadece eksenel doğrultuda olduğu göz önünde bulundurulursa *E* elastisite modülü olmak üzere Hooke kanunun en basit hali Denk. (2.13)'deki gibi oluşur.

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \tag{2.13}$$

Yukarıda gösterilen bünye bağıntısının bu tip kullanılması Poisson oranının (ν) sıfır kabul edilmesi anlamına gelmektedir. Bununla beraber pratikte Poissson oranı sıfır olmayan malzemelerde bile gerek deneysel sonuçlarla gerekse sayısal ve nümerik çözümlerle kontrol edildiğinde teori geçerli ve güvenilir sonuçlar vermektedir. Bunun sonucunda doğru varsayımlar kurularak σ_{xx} gerilmesinin dışında diğer eksenlerde meydana gelen gerilmelerin şekil değiştirme üzerindeki etkisi ihmal edilebileceği görülmüştür. Böylece bünye bağıntısı tanımlanmış olup sıra denge denklemlerinin belirlenmesine gelmiştir. Daha önceden tanımladığımız birim şekil değişimi, normal kuvvetten ve eğilmeden kaynaklanan oluşma sebeplerine göre iki parçadan ifade edilmişti. Simdi, σ_{xx} gerilmesi birim şekil değişiminde olduğu gibi iki parçadan oluşabilir.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{n} + \sigma_{xx}^{b} \tag{2.14}$$

Böylece x ekseninde denge denklemi elastisite teorisine göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{2.15}$$

$$\sigma_{xx,x}^{n} + \frac{f}{A} = 0 \tag{2.16}$$

Denk. (2.15)'te $\sigma_{ij,j}$, Kartezyen eksen takımındaki gerilme bileşenlerinin eksen değişkenlerine göre kısmi türevlerini b_i ise yine aynı eksen takımında birim hacime etkiyen kütle kuvvetlerini ifade etmektedir ve bu denklem elastisite teorisinde denge denklemleri olarak bilinmektedir. Bu denklem kullanılarak elde edilen Denk.(2.16)'daki *A*, kesit alanını ve f ise eksen boyunca birim uzunluğa gelen yayılı yükü göstermektedir. Diğer eksen takımlarında oluşan denge denklemleri eksenel gerilmenin eğilmeden kaynaklanan bileşeni ile ilişkilidir. Bu hipotez kapsamında eğilme ile düşey yayılı yük arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilmiştir.

$$\sigma_{xx,x}^{b} + \sigma_{xz,x} = 0 \tag{2.17}$$

$$\sigma_{zx,x} + \frac{q}{A} = 0 \tag{2.18}$$

Burada *q/A*, düşeyde uzunluk boyunca olan yayılı yükü hacimsel yüke dönüştürmeyi ifade etmektedir. (2.17) ve (2.18) denklem takımları, mühendislik teknik uygulamalarında daha kolay olan kesit tesirlerine dönüştürülebilmesi için kesit üzerinde aşağıda denklemlerle belirtilecek alan integrallerine alınmıştır.

$$\iint_A \sigma_{xx}^{n} dA = N \tag{2.19}$$

$$\iint_A \sigma_{xz} dA = T \tag{2.20}$$

$$\iint_A z\sigma_{xx}^{b} dA = M \tag{2.21}$$

Burada normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment sırasıyla (2.19), (2.20) ve (2.21) denklemlerinde olduğu gibi verilebilir. Bu durumda verilen bu integral bağıntıları kullanılarak (2.1), (2.2) ve (2.3) denklemlerinin sırasıyla karşılığı olan normal kuvvet dengesi, düşey denge ve moment dengesi sırasıyla (2.22), (2.23) ve (2.24) bağıntılarıyla ifade edilmiştir.

$$N_{,x} + f = 0 \tag{2.22}$$

$$T_{,x} + q = 0 \tag{2.23}$$

$$M_{,x} - T = 0 \tag{2.24}$$

Şekil 1'e göre yazılan eksenel, düşey ve moment dengesi denklemleri sonucunda sırasıyla (2.1), (2.2) ve (2.3) bağıntıları aynen elde edildiği daha önceki kısımlarında verilmişti. Böylece bünye bağıntılarını da integral yardımıyla kesit genelini ifade edecek şekle dönüştürmek mümkündür. Momenti oluşturan gerilme bağıntısı dikkate alınırsa gerekli alan integrali sonucunda (2.25) denklemi elde edilir. Bu bağıntıda I sabitine kesitin eğilme yönündeki eylemsizlik veya atalet momenti denir ve bu sabit kesit geometrisine bağlıdır. Ayrıca normal kuvvetle ilgili olan bünye bağıntısı da (2.26)'da gösterilmiştir.

$$M = -EIw_{,xx} \tag{2.25}$$

$$N = EAu_{,x} \tag{2.26}$$

Sınır koşulları, gerilmelerin ve yer değiştirmelerin sınırlarında daha önceden belirlenmiş değerleri aldıkları iki tipten oluşmaktadır. Birinci tip sınır koşulları dinamik veya kuvvet tipi sınır koşulları olarak bilinen gerilmelerin kesit üzerindeki bileşkeleri olan moment ve kesme kuvveti ile ilişkili bağıntılardır.

$$(M = \bar{M})\big|_{\sigma} \tag{2.27}$$

$$(T = \bar{T})\big|_{\sigma} \tag{2.28}$$

İkinci tip sınır koşulları, geometrik veya yer değiştirme tipi sınır koşulları olarak yine benzer şekilde aşağıdaki bağıntılarla ifade edilmiştir [90].

$$(u = \bar{u})\big|_{\varepsilon} \tag{2.29}$$

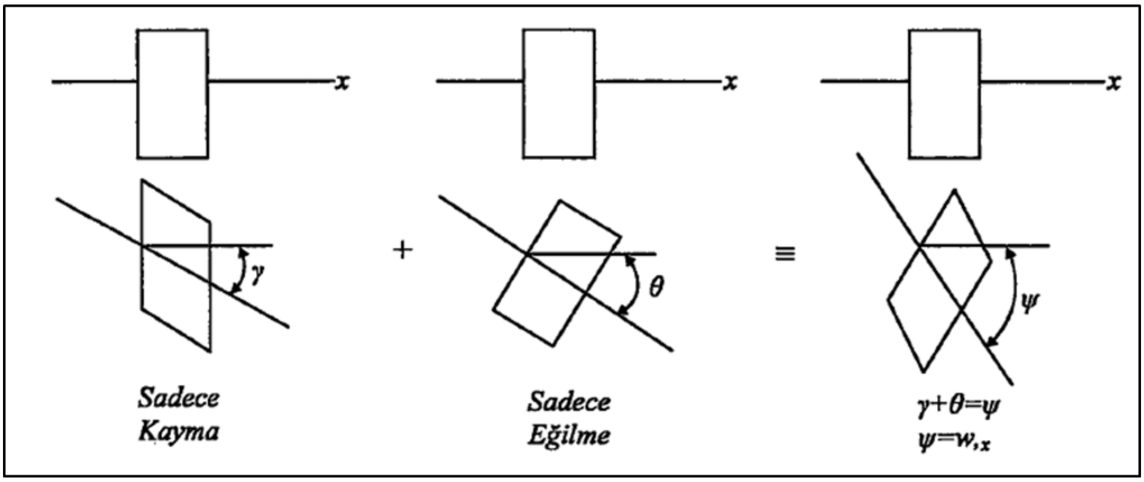
$$(w = \bar{w})\big|_{\varepsilon} \tag{2.30}$$

$$(w_{,x} = \bar{w}_{,x})\big|_{\varepsilon} \tag{2.31}$$

Buraya kadar Euler-Bernoulli kiriş teorisi kapsamında ayrı ayrı gerilme ve şekil değiştirme durumları ve bünye bağıntıları elde edilmiştir. Bu teori en basit kiriş teorisi olup bu çalışmada kullanılan Timoshenko kiriş teorisinin daha iyi anlaşılması için detaylı bir şekilde incelenmiştir.

2.2 Timoshenko Kiriş Teorisi

Euler Bernoulli kiriş teorisine göre çökme değeri $w(x)$ sadece eğilmeden dolayı hesaplanmaktadır. Kesme kuvvetinden kaynaklanan kayma gerilmelerinin oluşturduğu şekil değiştirme, yüksekliği uzunluğu karşısında küçük olan ince kirişler (alçak kirişler) için önemli bir etkiye sahip olmadığından göz ardı edilebilmektedir. Böylece bu tip kirişler için Euler-Bernoulli kiriş teorisi yeterli olduğu anlaşılabilir. Fakat yüksekliği (h) ve uzunluğu (L) arasındaki h/L oranı arttıkça bu tip yüksek kirişlerde artık sadece eğilme momentinin oluşturduğu şekil değiştirmelerin dikkate alındığı Euler-Bernoulli kiriş teorisi geçerliliğini yitirip kayma gerilmelerinin de etkisinin dikkate alındığı yeni bir kiriş teorisine ihtiyaç duyulmuştur. Timoshenko kiriş teorisi, kayma gerilmesinden meydana gelen şekil değiştirmelerin etkisini de bünyesinde barındıran pratik uygulamaları da nispeten kolay olan ve çalışmamızın ileriki bölümlerinde kullandığımız bir kiriş teorisidir. Bu kiriş teorisinde eğilmeden kaynaklı dönme Euler-Bernoulli kiriş teorisinde kabul ettidilen $\theta(x)$ ile gösterilip sadece kayma gerilmesinden meydana gelen dönme ise $\gamma(x)$ şeklinde bağımsız bir fonksiyonla gösterilmiştir [90].



Şekil 2.5 Timoshenko kirişinde şekil değişiminin süperpozisyonla elde edilişinin geometrik gösterimi [90]

Şekil değiştirmelerin küçük olmasından dolayı birinci mertebe teorisi dikkate alındığı düşünüldüğünde eğilmeden ve kaymadan meydana gelen dönmeler üzerinde süperpozisyon ilkesi uygulanması neticesinde yeni durum Denk. (2.32)'de görüleceği üzere elastik eğrinin eğimini vermektedir. Sonuç olarak Bernoulli-Navier hipotezinin " düzlem ve kiriş eksenine dik kesitler eğilme neticesinde kiriş eksenine düzlem kalmalarını muhafaza ederken artık dikliklerini koruyamazlar" şeklinde değiştirilmesi gerektiği Timoshenko kiriş teorisi için anlaşılmıştır. Böylece Timoshenko kiriş teorisi için yer değiştirme alanı (2.33-2.35) bağıntıları ile verilmiştir.

$$\theta(x) = w_{,x} - \gamma(x) \tag{2.32}$$

$$u_1 = u - z\theta(x) \tag{2.33}$$

$$u_2 = 0 \tag{2.34}$$

$$u_3 = w(x) \tag{2.35}$$

Bu şekilde verilen alan denklemlerinde (şekil değiştirme denklemlerinden) birim şekil değiştirme bağıntılarına Euler-Bernoulli teorisinde yapıldığı gibi geçiş yapmak mümkündür. Böylece bünye bağıntıları olarak da bilinen birim şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\varepsilon_{xx}^{n} = u,_{x} \tag{2.36}$$

$$\varepsilon_{xx}^{b} = -z\theta,_{x} \tag{2.37}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma(x) \tag{2.38}$$

Yukarıda ifade edilen bağıntılardan da anlaşılacağı üzere yine eğilme ve eksenel kuvvetten dolayı oluşan şekil değiştirmeler ayrı ayrı incelenmiştir. Ayrıca belirtilmemiş olan şekil değiştirme bileşenlerinin sıfır olacağı dikkate alınmalıdır. Lineer elastik homojen malzeme için Euler-Bernolli teorisinde olduğu gibi bünye bağıntıları aşağıdaki şekilde alınmıştır.

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \tag{2.39}$$

Gerçekte kayma gerilmesi kesit üzerinde sabit olmadığından kayma açısında derinlik doğrultusunda değişmektedir. Buradan da anlaşılacağı üzere kayma açısı $\gamma = \gamma(x,z)$ şeklinde bir fonksiyondur. Kayma açısının kesit üzerinde sabit olması problemlerin çözümünde oldukça kolaylık sağladığından değişken olan kayma açısı etkisine denk olacak eşdeğer yeni bir kayma açısı formülasyonu türetmek oldukça önemlidir. Bu söylenenler neticesinde analizlerde kullanılacak kayma açısı formülasyonu uzun yıllar araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Timoshenko [85] ilk kez kiriş titreşiminin türetilmesi sırasında dönel atalet momenti ile birlikte kayma deformasyonunu tanıtmıştır. Ayrıca enine kesit boyunca kayma gerilmesi değişimini hesaba katabilmek için bir kayma düzeltme katsayısı ortaya koymuştur. Timoshenko ilk çalışmasında bir dikdörtgen kesit için 2/3 düzeltme katsayısını kullanmıştır. Fakat çoğu yazar ileriki çalışmalarında farklı düzeltme katsayıları kullanmaya başlamıştır. Bu araştırmacılar içerisinde en detaylı çalışma Kaneko [85] tarafından yapılmıştır. Kaneko tüm kayma düzeltme katsayılarını en ince ayrıntısına kadar inceleyerek tüm kullanılan katsayıları mükemmel bir şekilde gözden geçirmiştir. Bunun sonucunda elde ettiği katsayısı değeri Timoshenko'nun problemlerine uygulanıp ve deneysel sonuçlara en yakın çıkan değer olarak bulunmuştur. Bu değerler, dairesel kesit için $k_s = (6+12v+6v^2)/(7+12v+4v^2)$ ve dikdörtgen kesit için $k_s = (5+5v)/(6+5v)$ olarak ifade edilmiştir. Böylece bu iki değer, dairesel ve dikdörtgen kesitler için Timoshenko kayma düzeltme katsayısı değerleri olarak adlandırılmıştır. Ayrıca Cowper [85] statik analizler üzerinde çeşitli en kesitler için kayma düzeltme katsayıları ileri sürmüştür. Onun bulduğu değerler yalnızca Poisson oranı sıfır kabul edildiğinde Timoshenko'nun değerleriyle uyumlu olduğu görülmüştür. Bizimde çalışmamızda kullanmış olduğumuz kayma düzeltme katsayısı $k_s = 5/6$ olarak alındığında deneysel sonuçlara mükemmel bir uyum sağladığı anlaşılmıştır. Sonuç olarak kayma gerilmesi bünye bağıntısı artık kesit şekline bağlı olacak şekilde aşağıdaki gibi formüle edilecektir.

$$\gamma(x,z) \cong k_s \gamma(x) \tag{2.40}$$

$$\sigma_{xz} = G k_s \gamma(x) \tag{2.41}$$

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde olduğu gibi Timoshenko kiriş teorisi için de moment ve düşey denge denklemleri gerekli integraller alınarak çıkartılabilir. Çıkartılacak bünye bağıntıların önceki bünye bağıntılarından farklı olarak kesme kuvvetinin de etkisi göz önünde bulundurulacağından bir takım değişiklikler yapmak gerekecektir. Böylece kiriş kesiti üzerinde gerekli integraller alınarak moment ve kesme kuvveti bünye bağıntıları (2.42, 2.43) denklemlerindeki gibi elde edilir. Normal kuvvet bünye bağıntısında herhangi bir değişiklik olmayacağından Euler-Bernoulli teorisindekiyle aynı kalmıştır.

$$M = -EI\theta_{,x} \tag{2.42}$$

$$T = GAk_s\gamma \tag{2.43}$$

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde geçerli olan dinamik sınır koşulları Timoshenko kiriş teorisinde de geçerliliğini sürdürecektir. Fakat Timoshenko kiriş teorisine, Euler-Bernoulli kiriş teorisinden farklı olarak kesme kuvvetinden kaynaklanan dönmenin de eklenmesiyle geometrik sınır koşullarında artık (2.44) bağıntısı da geçerli olacaktır [90].

$$(\theta = \bar{\theta})\big|_{\varepsilon} \tag{2.44}$$

Timoshenko kiriş teorisinde tanıtılan alan denklemleri ve bünye bağıntıları 3. bölümde çalışma formülasyonunun oluşturulmasında kullanılacaktır.

2.3 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu konu başlığı altında sonlu elemanlar yönteminin daha iyi anlaşılabilmesi için Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanan tek boyutlu dördüncü dereceden bir diferansiyel denklemin ve Timoshenko kiriş teorisine dayanan tek boyutlu ikinci dereceden diferansiyel denklemler çiftinin sonlu elemanlar formülasyonunun çıkarılması gösterilmiştir. Sonlu eleman denklemlerinin, yani birinci düğüm noktasındaki değişkenlerle ikinci düğüm noktasındaki değişkenlerin birbirleriyle ilişkilendiren cebirsel denklemlerin türetilmesi aşağıdaki gibi sırasıyla üç adımdan oluşmaktadır [91].

1. Diferansiyel denklemin ağırlıklı-artık veya zayıf formunun oluşturulması
2. Tipik bir sonlu eleman üzerinde yaklaşık çözüm şeklinin varsayılması
3. Yaklaşık çözümü, ağırlıklı-artık veya zayıf formun içerisine yerleştirerek sonlu eleman denklemlerinin çıkarılması.

2.3.1 Euler-Bernoulli Kiriş Elemanı

2.3.1.1 Yönetici Denklemin Zayıf Formu

Katı cisimler mekaniği problemlerinin zayıf formları, virtüel iş prensibinden veya yönetici diferansiyel denklemlerden faydanılarak geliştirilebilir. Burada Euler-Bernoulli kiriş elemanının dördüncü dereceden diferansiyel denklemi düşünülerek bu problemin zayıf formu elde edilmeye çalışılmıştır. İlk olarak çözülecek diferansiyel denklem bir ağırlık fonksiyonuyla çarpılarak tanımlı olduğu bölge üzerinde alınan integrali sıfıra eşitlemek suretiyle bir yaklaşık çözüm kriteri düşünülür ve bu yönteme ağırlıklı artık yöntemi denmektedir. Bu yöntem analitik yöntemlerde olduğu gibi kesin çözümü değil de yaklaşık bir çözümü ifade etmektedir. Artık yaklaşık bir $w(x)$ çözüldüğünden diferansiyel denklem sıfıra eşit olmayıp bir artık değere sahiptir. Bu artık (kalan) değerin sıfıra tanımlı olduğu bölge üzerindeki ağırlıklı integrali sıfıra eşitlenerek kesin değerine yaklaştırılmış olunur [91].

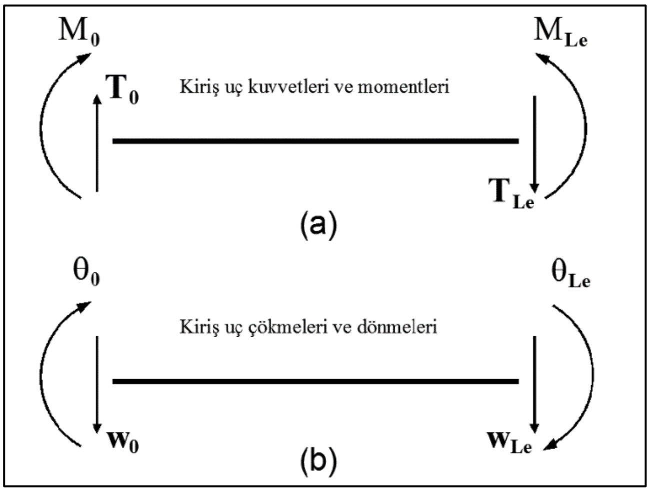
$$\int_0^{L_e} \Phi\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)-q\right]dx=0 \tag{2.45}$$

Burada Φ, x'e göre iki kez türevlenebilen bir ağırlık fonksiyonudur. Ağırlıklı integrali oluşturduktan sonra kısmi integrasyon ile yaklaşım fonksiyonu $w(x)$ üzerindeki türevlerin bir kısmını ağırlık fonksiyonu üzerine taşımak mümkündür. Bu sayede oluşacak sınır terimleri dinamik sınır koşullarını içerecek ve ayrıca artık yaklaşım fonksiyonları orijinal durumdaki diferansiyel denklemde gereken türevlenme şartlarına maruz kalmayacaktır. Bu forma zayıf form denir. Yukarıda verilen ağırlıklı integralin zayıf formu aşağıdaki gibi elde edilmiştir [91].

$$\begin{aligned}
&\int_0^{L_e} (EI\frac{d^4w}{dx^4} - q)\Phi dx = \int_0^{L_e} EI\frac{d^4w}{dx^4}\Phi - q\Phi dx = \\
&\int_0^{L_e} -EI\frac{d^3w}{dx^3}\frac{d\Phi}{dx} - q\Phi dx + EI\frac{d^3w}{dx^3}\Phi\Big|_0^{L_e} = \\
&\int_0^{L_e} EI\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\Phi}{dx^2} - q\Phi dx + EI\frac{d^3w}{dx^3}\Phi\Big|_0^{L_e} - EI\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d\Phi}{dx}\Big|_0^{L_e} = 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Zayıf form görüldüğü üzere sınır koşullarının bir kısmını içermektedir. Bu sınır koşullarının $-EI\frac{d^3w}{dx^3} = T$ ve $-EI\frac{d^2w}{dx^2} = M$ olduğu bilindiğinden elde edilen zayıf form tekrar düzenlenirse son şeklini aşağıdaki gibi alır.

$$\int_0^{L_e} EI\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\Phi}{dx^2} - q\Phi dx - T(L_e)\Phi(L_e) + T(0)\Phi(0) + M(L_e)\frac{d\Phi}{dx}\Big|_{x=L_e} - M(0)\frac{d\Phi}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \tag{2.47}$$



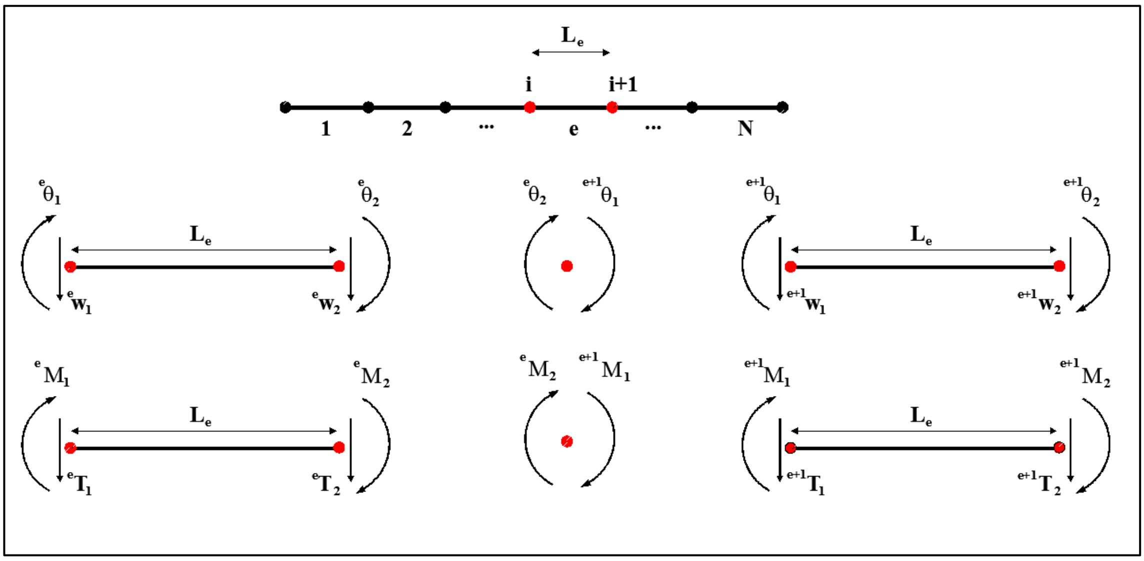
Şekil 2.6 Çubuk Uç **(a)** Kuvvet ve Momentlerinin İşaretleri **(b)** Çökme ve Dönmelerinin İşaretleri

Ayrıca $w(x)$ yaklaşık olarak çözüleceğinden bunun için de bir form önermek gereklidir. Genelde önerilen form bilinmeyen c_i parametreleri ile çarpılmış seçilecek $\phi_i(x)$ fonksiyonlarının lineer bir birleşeni şeklinde düşünülür. Böylece yaklaşık $w(x)$ artık aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$w(x) = \sum_{j=1}^{N} c_i \phi_i(x) + \phi_0(x) \tag{2.48}$$

Burada çözülecek yaklaşım fonsiyonunun formu c_i parametreleriyle yakından ilişkilidir. Bilinmeyen c_i parametreleri de ağırlıklı integralin sıfır olması şartından bulunacağından kaç parametreli bir çözüm öneriliyorsa (N) o sayıda seçilmelidir ve o sayıda da bağımsız ağırlıklı form kullanılması gerekmektedir. Çözümün doğal yani geometrik sınır koşullarını da içermesi gerekmektedir bu yüzden bunları sağlayacak seçikde bir yaklaşık çözüm seçilmesi gerekmektedir. Ayrıca dördüncü dereceden bir boyutlu diferansiyel denklem için en az 4 kere türevlenebilir olabilmelidir ki yaklaşık çözüm için sıfırdan farklı denklemler elde edilebilsin. Yaklaşım fonksiyonu $w(x)$ dördüncü dereceden bir fonksiyon olarak (2.49)'daki gibi seçilmiştir.

$$w(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \tag{2.49}$$



Şekil 2.7 Kiriş probleminin sonlu eleman gösterimi

Burada c_i ile gösterilen sabitler sınır koşullarından faydanılarak bulunup enterpolasyon fonksiyonlarının türetilmesi sağlanmıştır. Enterpolasyon fonksiyonlarının kolay bir şekilde elde edilebilmesi için Şekil (2.6)'daki kiriş elemanının sonlu elemanlar gösteriminin iyi anlaşılması gerekmektedir. Şekil (2.7)'ye göre kiriş N adet sonlu elemandan oluşmakta ve bu elemanların sınırlarını belirleyen N+1 adet düğüm noktasından oluşmaktadır. Komşu sonlu elemanların birbirleriyle etkileşimleri bu düğüm noktaları vasıtasıyla olmaktadır. Şekil (2.7)'de görüldüğü üzere bir e. eleman i ve i+1 düğüm noktaları arasında L_e boyunda alınmış olup eleman serbestlikleri ve iç kuvvetleri gösterilmiştir. Bu düğüm noktaları her ne kadar genel (global) olarak i ve i+1 düğüm noktaları olsa da yerel (lokal) olarak bunlar 1 ve 2 düğüm noktaları olarak adlandırılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde bir noktadaki serbestlikler çökme $w(x)$ ve dönme $\theta = dw(x)/dx$'den oluşmaktadır. Ayrıca kesme kuvveti çökme ile eğilme momenti ise dönme ile karşılıklı yer almaktadır. Şekil (2.7)'de görüldüğü gibi bunların yönleri öyle seçilmiştir ki bir yandaki komşu elemanla ortak noktada eğer bir dış kuvvet veya moment varsa elemanlardan gelen iç kuvvet ve momentin toplamı bunlara eşit olmaktadır (eğer dış etki yoksa toplam sıfır etmektedir). Yine çökme ve dönme serbestlikleri kiriş sürekli olduğu için iki elemanda da ortak noktada aynı değere sahiptir. Anlatılanların matematiksel ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. Bunlar ileride her eleman üzerinde tanımladığımız sayısal çözümleri birleştirmekte kullanılacaktır [91].

$$^{e}M_2 + {}^{e+1}M_1 = M \tag{2.50}$$

$$^{e}T_2 + {}^{e+1}T_1 = T \tag{2.51}$$

$$^{e}w_2 = {}^{e+1}w_1 = w_i \tag{2.52}$$

$$^{e}\theta_2 = {}^{e+1}\theta_1 = \theta_i \tag{2.53}$$

Enterpolasyon fonksiyonları, Denk. (2.49)'da tanımladığımız yaklaşım fonksiyonu üzerinden Şekil (2.7)'de gösterilen sonlu eleman serbestlik dereceleri kullanılarak bulunmuştur. İlk olarak bir sonlu elemanın düğüm noktalarının sınır değerleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Bu lokal sınır değerleri daha sonra enterpolasyon fonsiyonlarının bulunmasında kullanılmıştır.

$$w(x=0)=w_1 \tag{2.54}$$

$$w(x=L_e)=w_2 \tag{2.55}$$

$$\theta(x=0)=\theta_1 \tag{2.56}$$

$$\theta(x=L_e)=\theta_2 \tag{2.57}$$

Daha önce bahsettiğimiz gibi yönetici denklemler geometrik (doğal) sınır koşullarını bünyesinde barındırmaktadır. Bu yüzden yaklaşım fonksiyonunun öncelikle bu geometrik sınır koşullarını sağlayacak şekilde kurulması gerekir. Bu bağlam da aşağıdaki denklemler elde edilmiştir.

$$w(x=0)=c_1=w_1 \tag{2.58}$$

$$\theta(x=0)=c_2=\theta_1 \tag{2.59}$$

$$w(x=L_e)=c_1+c_2L_e+c_3L_e^{\,2}+c_4L_e^{\,3}=w_2 \tag{2.60}$$

$$\theta(x=L_e)=c_2+2c_3L_e+3c_4L_e^{\,2}=\theta_2 \tag{2.61}$$

Denk. (2.58-2.61) kullanılarak c_3 ve c_4 sabitleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$c_3=-\frac{3w_1}{L_e^2}+\frac{3w_2}{L_e^2}-\frac{2\theta_1}{L_e}-\frac{\theta_2}{L_e} \tag{2.62}$$

$$c_4=\frac{2w_1}{L_e^3}-\frac{2w_2}{L_e^3}+\frac{\theta_1}{L_e^2}+\frac{\theta_2}{L_e^2} \tag{2.63}$$

Şimdi bir eleman üzerindeki sayısal çözümü kurarken sonlu elemanların en önemli ve ayırt edici özelliğini de ifade edilecektir. Bu ayırt edici özellik yaklaşım fonksiyonlarının bilinmeyenleri önceden fiziksel anlamı olmayan c_i parametreleriyken şimdi artık düğüm noktasındaki serbestlikler olacaktır. Buna göre yaklaşım fonksiyonunun tüm sabitleri serbestlik dereceleri cinsinden bulunduktan sonra tekrardan Denk. (2.49)'da yerlerine yerleştirilirse aşağıdaki fonksiyon elde edilmiştir [91].

$$w(x) = w_1 + \theta_1 x + \left(-\frac{3w_1}{L_e^2} + \frac{3w_2}{L_e^2} - \frac{2\theta_1}{L_e} - \frac{\theta_2}{L_e} \right) x^2 + \left(\frac{2w_1}{L_e^3} - \frac{2w_2}{L_e^3} + \frac{\theta_1}{L_e^2} + \frac{\theta_2}{L_e^2} \right) x^3 \tag{2.64}$$

Bu denklem, Denk. (2.65)'te benzetilmeye çalışarak enterpolasyon fonksiyonları elde edilmiştir.

$$w(x) = \phi_1(x) w_1 + \phi_2(x)\theta_1 + \phi_3(x) w_2 + \phi_4(x)\theta_2 \tag{2.65}$$

$$w(x) = \phi_i^T w = \sum_{i=4}^{4} \phi_i w_i \tag{2.66}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

Denk. (2.66)'da gösterilen ϕ_i sembolü enterpolasyon fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca *T,* vektörün transpozunu göstermektedir. Burada görüleceği üzere 4 adet enterpolasyon fonksiyonu elde edilmiştir. Bu fonksiyonlar şu şekilde verilmiştir.

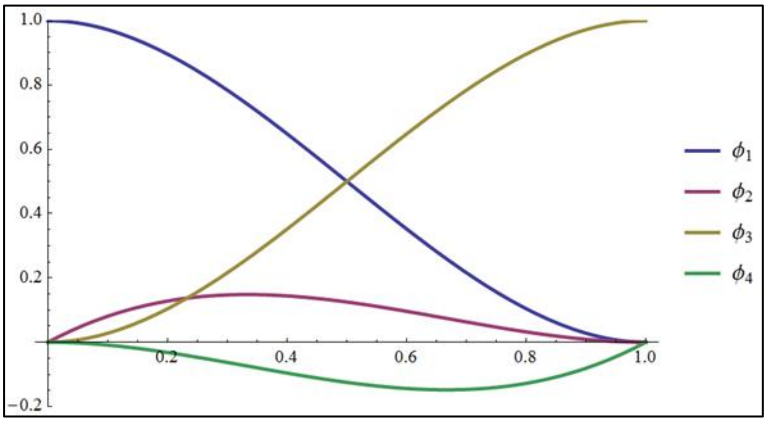
$$\phi_1 = 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3} \tag{2.68}$$

$$\phi_2 = x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} \tag{2.69}$$

$$\phi_3 = \frac{3x^2}{L_e^2} - \frac{2x^3}{L_e^3} \tag{2.70}$$

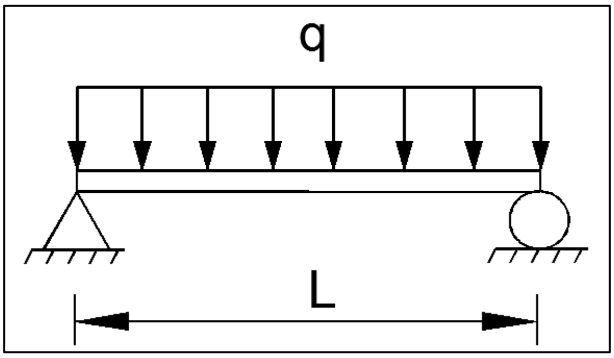
$$\phi_4 = -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} \tag{2.71}$$

Bu şekilde elde edilen enterpolasyon fonksiyonlarının grafikleri Şekil (2.8)'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8 Kübik şekil fonksiyonlarının grafikleri

Şimdi bu enterpolasyonlar kullanılarak nasıl rijitlik ve yük matrislerinin elde edildiği basit mesnetli bir kiriş üzerinde matematiksel olarak ifade edilecektir.



Şekil 2.9 Düzgün yayılı yük etkisindeki basit kiriş

Şekil (2.9)'da gösterilen kirişin mesnetleme durumundan dolayı artık bu uç noktalarında mesnet tepkileri oluşacağından kuvvet ve moment yazmak mümkün değildir. Son durumda zayıf formda belirtilen dinamik sınır koşulları yok olacağından aşağıdaki formu almıştır.

$$-T(L_e)\Phi(L_e)+T(0)\Phi(0)=0 \tag{2.72}$$

$$M(L_e)\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=L_e}-M(0)\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=0}=0 \tag{2.73}$$

$$\int_0^{L_e} EI\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\Phi}{dx^2}-q\Phi dx=0 \tag{2.74}$$

Artık daha önceden seçilen yaklaşım ve ağırlık fonksiyonları kullanılarak çözüme gidilebilir. Bu şekilde bir çözüm yani zayıf form üzerine kurulu çözüm **Rayleigh-Ritz** yöntemi olarak bilinir. Ayrıca yaklaşım fonsiyonuyla enterpolasyon fonksiyonu aynı fonsiyon seçilebilir. Bu yönteme **Galerkin** yöntemi denir. Bu sayede artık yaklaşım **Galerkin Rayleight-Ritz** tipi bir çözümde kullanabilir. Eleman üzerinde zayıf form tekrardan yazılırsa ve elde edilen enterpolasyon fonksiyonlar sırasıyla yerine yazılırsa:

$$\int_0^{L_e} EI \frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\phi_1}{dx^2} - q\phi_1 dx - T_1 = 0 \tag{2.75}$$

$$\int_0^{L_e} EI \frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\phi_2}{dx^2} - q\phi_2 dx - M_1 = 0 \tag{2.76}$$

$$\int_0^{L_e} EI \frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\phi_3}{dx^2} - q\phi_3 dx - T_2 = 0 \tag{2.77}$$

$$\int_0^{L_e} EI \frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\phi_4}{dx^2} - q\phi_4 dx - M_2 = 0 \tag{2.78}$$

Bu şekilde denklemler elde edilir. Bu sistemin indis notasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^{4} {}^eK_{ij}\, {}^ew_j = {}^eF_i \quad \rightarrow \quad i = 1,2,3,4 \tag{2.79}$$

$$K_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2} dx \tag{2.80}$$

$$F_i = \int_{x_1}^{x_2} q\phi_i dx + f_i \tag{2.81}$$

$$f = \begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

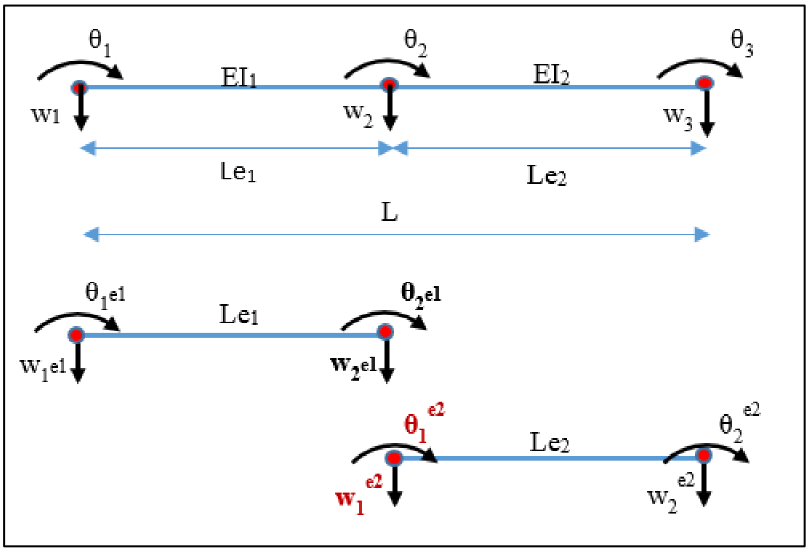
Bu indis notasyonunu matris ve vektör notasyonuyla da göstermek mümkündür. Eleman rijitlik matrisi (K_{ij}^e) simetrik matristir dolayısıyla $K_{ij}^e = K_{ji}^e$ formunda da gösterilebilir. K_{ij}^e matris notasyonu formunda aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^e \\ w_2^e \\ w_3^e \\ w_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{Bmatrix} \tag{2.83}$$

Basit mesnetli kiriş için gerekli matematiksel işlemler yapılıp Denk. (2.83)'te yerlerine yerleştirilirse Denk. (2.84) elde edilir.

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} \\ -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L_e q}{2} \\ \frac{L_e^2 q}{12} \\ \frac{L_e q}{2} \\ -\frac{L_e^2 q}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{2.84}$$

Eleman bazında elde edilen rijitlik matrisi ve yük vektörü Denk. (2.84)'te ifade edilmiştir. Şimdi eleman üzerindeki yaklaşık çözümleri birleştirip geometrik sınır koşullarını serbestlikler üzerinde sağlatılıp genel çözüm elde edilmeye çalışılacaktır. Burada anlatılmak istenen lokal olarak yani bir eleman üzerinde elde edilen çözümler kaç elemana bölündüyse hepsinin birleştirilerek global (genel) çözümün aranmasıdır. Dikkat edilmesi gereken bir nokta da üst üste gelen serbestliklerin o noktadaki global serbestlikle ifade edilip üst üste gelen rijitliklerin de toplanmasıdır. Bu basit bir örnek üzerinden açıklayacak olursa bir boyutlu bir çubuk iki elemana bölünsün Şekil (2.10)'daki gibi:



Şekil 2.10 İki elemandan oluşan Kiriş Sonlu Eleman Gösterimi

Global olarak bu iki elemanlı kiriş matris ve vektör gösterimi şu şekilde ifade edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^{e1} & K_{1,2}^{e1} & K_{1,3}^{e1} & K_{1,4}^{e1} & 0 & 0 \\ K_{2,1}^{e1} & K_{2,2}^{e1} & K_{2,3}^{e1} & K_{2,4}^{e1} & 0 & 0 \\ K_{3,1}^{e1} & K_{3,2}^{e1} & K_{1,1}^{e2}+K_{3,3}^{e1} & K_{1,2}^{e2}+K_{3,4}^{e1} & K_{1,3}^{e2} & K_{1,4}^{e2} \\ K_{4,1}^{e1} & K_{4,2}^{e1} & K_{2,1}^{e2}+K_{4,3}^{e1} & K_{2,2}^{e2}+K_{4,4}^{e1} & K_{2,3}^{e2} & K_{2,4}^{e2} \\ 0 & 0 & K_{3,1}^{e2} & K_{3,2}^{e2} & K_{3,3}^{e2} & K_{3,4}^{e2} \\ 0 & 0 & K_{4,1}^{e2} & K_{4,2}^{e2} & K_{4,3}^{e2} & K_{4,4}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 = w_1^{e1} \\ \theta_1 = \theta_1^{e1} \\ w_2 = w_2^{e1} = w_1^{e2} \\ \theta_2 = \theta_2^{e1} = \theta_1^{e2} \\ w_3 = w_2^{e2} \\ \theta_3 = \theta_2^{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{e1} \\ F_2^{e1} \\ F_1^{e2}+F_3^{e1} \\ F_2^{e2}+F_4^{e1} \\ F_3^{e2} \\ F_4^{e2} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Daha önce ifade edildiği gibi üst üste gelen rijitlikler ve yük matrisleri toplanırken serbestlikler birbiriyle eşit olmaktadır. Eleman sayısı artırılırsa bu işlem aynı şekilde uygulanacaktır. Bu durumda N eleman için (N+1) düğüm noktası oluşurken 2(N+1) serbestlik meydana gelmiştir. Dolayısıyla global sistem 2(N+1)x2(N+1) boyutunda olmalıdır. Basit kiriş için elde edilen matris ve vektörler kullanılarak uygulamada elde edilen sonuçlar incelenmiştir. Öncelikle tek eleman için gerçek çözüme ne kadar yaklaştığı incelenecektir. Çözüm gerçekleştirilirken ilk olarak sıfır olan sınır koşulları tespit edilerek o kolonlar ve satırlar işleme herhangi bir katkısı olmadığından silinecektir. Bu etkisi olmayan kısımlar kırmızı renkle gösterilip hangi satır ve kolonların silineceği Denk. (2.86)'da gösterilmiştir. Geriye kalan kısımla θ_1, θ_2 hesaplanabilir [91].

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{\mathrm{Le}^3} & \frac{6}{\mathrm{Le}^2} & -\frac{12}{\mathrm{Le}^3} & \frac{6}{\mathrm{Le}^2} \\ \frac{6}{\mathrm{Le}^2} & \frac{4}{\mathrm{Le}} & -\frac{6}{\mathrm{Le}^2} & \frac{2}{\mathrm{Le}} \\ -\frac{12}{\mathrm{Le}^3} & -\frac{6}{\mathrm{Le}^2} & \frac{12}{\mathrm{Le}^3} & -\frac{6}{\mathrm{Le}^2} \\ \frac{6}{\mathrm{Le}^2} & \frac{2}{\mathrm{Le}} & -\frac{6}{\mathrm{Le}^2} & \frac{4}{\mathrm{Le}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{Le}q}{2} \\ \frac{\mathrm{Le}^2 q}{12} \\ \frac{\mathrm{Le}q}{2} \\ -\frac{\mathrm{Le}^2 q}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

$$EI \begin{bmatrix} \frac{4}{\mathrm{Le}} & \frac{2}{\mathrm{Le}} \\ \frac{2}{\mathrm{Le}} & \frac{4}{\mathrm{Le}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{Le}^2 q}{12} \\ -\frac{\mathrm{Le}^2 q}{12} \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

Denk. (2.86)'da görüldüğü üzere sınır şartları uygulanırsa çökmeler $w_1 = w_2 = 0$ ve momentler $M_1 = M_2 = 0$ olduğundan w_1, w_2 nin katsayılarını içeren satırlar ve sütunlar bilinmeyen θ_1, θ_2'nin bulunması için gerekli denklemlere katkı yapmayacağından silinmiştir (kırmızı kısım). Çözümde artık $L_e = L$ olarak alınmıştır.

$$\theta_1 = \frac{L^3 q}{24EI} \tag{2.88}$$

$$\theta_2 = -\frac{L^3 q}{24EI} \tag{2.89}$$

Dolayısıyla

$$w(x) = \theta_1 \phi_2 + \theta_2 \phi_4 \tag{2.90}$$

Tek çözüm için yaklaşım fonksiyonu:

$$w(x) = \frac{L^3 qx}{24EI} - \frac{L^2 qx^2}{24EI} \tag{2.91}$$

Moment ve kesme kuvveti elde edilen yaklaşım fonksiyonu kullanılarak hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} -EIw''(x) &= M(x) = \frac{L^2 q}{12} \\ -EIw'''(x) &= T(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Elde edilen çözüm incelendiğinde tek elemanla yapılan hesaplamalarda moment sabit olarak bulunurken kesme kuvveti sıfır olarak hesaplanmıştır. Bu durumda eleman sayısı artırılarak daha gelişmiş çözümler elde edilebilir. Uygulamanın rahat anlaşılabilmesi için eleman sayısı 2 alınarak işleme devam edilmiştir [91].

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} & -\frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{24EI}{L_e^3} & 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} \\ \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & 0 & \frac{8EI}{L_e} & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_e q}{2} \\ \frac{L_e^2 q}{12} \\ L_e q \\ 0 \\ \frac{L_e q}{2} \\ -\frac{L_e^2 q}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^{e1} \\ M_1^{e1} \\ T_2^{e1} + T_1^{e2} \\ M_2^{e1} + M_1^{e2} \\ T_1^{e2} \\ M_1^{e2} \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

İki eleman için yazılan denklem basit mesnet sınır koşulları tanımlandığında $(w_1 = w_3 = 0, \quad M_1^{e1} = M_2^{e2} = 0)$ aşağıda gösterildiği gibi Denk. (2.96)'a indirgenebilir.

$$T_2^{e1} + T_1^{e2} = 0 \tag{2.94}$$

$$M_2^{e1} + M_1^{e2} = 0 \tag{2.95}$$

Geometrik sınır koşullarının sıfır olduğu satır ve sütunlar silinip indirgenmiş matris takımı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L_e} & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & 0 \\ -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{24EI}{L_e^3} & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} \\ \frac{2EI}{L_e} & 0 & \frac{8EI}{L_e} & \frac{2EI}{L_e} \\ 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & \frac{4EI}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_e^2 q}{12} \\ L_e q \\ 0 \\ -\frac{L_e^2 q}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

$L_e = L/2$ olduğu bilindiğinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\theta_1 = \frac{L^3 q}{24EI}, \quad \theta_2 = 0, \quad w_2 = \frac{5L^4 q}{384EI}, \quad \theta_3 = -\frac{L^3 q}{24EI} \tag{2.97}$$

Yaklaşım fonksiyonu $w(x)$ iki parçadan oluşacak şekilde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} w^{e1}(x) &= \theta_1 \phi_2 + w_2 \phi_3 \\ w^{e2}(x) &= w_2 \phi_1 + \theta_3 \phi_4 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Bu koşullar altında her eleman için kendi sınırları içerisinde çökme, moment ve kesme kuvveti değerleri bulunabilir.

$$w(x) = \begin{cases} 0 \le x \le L/2 \rightarrow w^{e1}(x) = \theta_1 \phi_2 + w_2 \phi_3 \\ L/2 \le x \le L \rightarrow w^{e2}(x) = w_2 \phi_1 + \theta_3 \phi_4 \end{cases} \tag{2.99}$$

$$w^{e1}(x) = \frac{qLx(4L^2 - Lx - 4x^2)}{96EI} \tag{2.100}$$

$$w^{e2}(x) = -\frac{qL(L-x)(L^2 - 9Lx + 4x^2)}{96EI} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned} M^{e1}(x) &= \frac{qL(L-12x)}{48} \\ M^{e2}(x) &= \frac{qL(13L-12x)}{48} \\ T^{e1}(x) &= -\frac{qL}{4} \\ T^{e2}(x) &= -\frac{qL}{4} \end{aligned} \tag{2.102}$$

Yukarıda bulunan çökme ve moment değerleri x=L/2 için hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} w^{e1}(L/2) &= \frac{5L^4 q}{384EI} \\ w^{e2}(L/2) &= \frac{5L^4 q}{384EI} \\ M^{e1}(L/2) &= -\frac{5L^2 q}{48} \\ M^{e2}(L/2) &= \frac{7L^2 q}{48} \\ M_2(L/2) &= -\frac{5L^2 q}{48} + \frac{7L^2 q}{48} = \frac{L^2 q}{24} \end{aligned} \tag{2.103}$$

Buradan anlaşılacağı üzere tek eleman için hesaplanan kirişin çökme değeri kesin çözümle eşit çıkmasına karşın kirişte meydana gelen süreksizlikler neticesinde moment değerlerinin kesin çözüm değeriyle ($L^2q/8$) farklılık göstermiştir. Bu durum da eleman sayısı artırılarak kesin çözüme yaklaşılabilir. Sonlu elemanları en güçlü kılan özelliklerden birisi de eleman sayısı kolaylıkla artırılarak sistematik olarak elektronik ortamda algoritmasının oluşturulabilmesidir.

2.3.2 Sınır Koşullarının Lagrange Yöntemi Kullanılarak Tanımlanması

Sınır koşullarının uygulanmasında katsayılar matrisinin indirgenmesi her zaman pratik bir uygulama değildir. Matris takımının boyutları büyüdükçe indirgeme yönteminin yerine daha pratik uygulama olan Lagrange yöntemi seçilebilir. Lagrange çarpanlarının kullanıldığı bu uygulama bilgisayar uygulamalarında sınır koşullarının tanımlanmasında büyük bir kolaylık sağlamaktadır. Buna göre global rijitlik matrisinin boyutları göz önüne alınması gereken sınır koşulları sayısınca artırılarak genişletilmelidir. Bu yeni satırlara ilgili sınır şartları yazılırak böylece denklemlerin beraber çözülmesi sonucu bu şartlar da sağlanmış olur. Bu yöntem esasında eşdeğer olan toplam potansiyel enerjinin minimazisyonu ifadesinde minimize etmeden önce sınır şartlarını Lagrange çarpanlarıyla eklemekle eşdeğerdir. Basit kiriş probleminde sınır koşulları $w_1=0$ $w_{2N+2}=0$ olduğundan aşağıdaki şekilde ek terimler bilinmeyen λ_1 ve λ_2 ile çarpılarak eklenirse minimizasyon için varyasyon alındığında bunların da sağlatıldığı görülmektedir.

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \Pi + \lambda_1(w_1) + \lambda_2(w_{N+1}) \\ \delta\Pi^* &= \delta\Pi + \delta\lambda_1(w_1) + \lambda_1(\delta w_1) + \delta\lambda_2(w_{N+1}) + \lambda_2(\delta w_{N+1}) = 0 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Yukaradaki Denk. (2.104)'ü ifade etmek gerekirse ilk denklem oluşturulurken δw_1 parantezinde sonlu elemanlar ile ilgili kısımlardan başka bir de λ_1 gelecek bunun katsayısı ise 1 olacaktır. Bu 1 katsayılı terim bir değişle sınır koşullarının matris takımına tanıtılmasını ifade edecek ve her bir sınır koşulu terimi için matris takımı 1x1 boyutun da genişletilecektir. Aynı şey δw_{N+1} ve λ_2 için söz konusu olacaktır. Bu durumun şematik olarak anlatımı Şekil (2.10)'da görüleceği üzere şu şekilde ifade edilmiştir. Buna göre siyah olan kısım orijinal rijitlik matrisini kırmızı olan kısım ise Lagrange çarpanları yani eklenecek sınır koşulu kısımını oluşturmuştur. Ayrıca matris sistemi (2N+2)x(2N+2) boyutlarında iken artık (2N+2+2)x(2N+2+2) boyutlarına genişletilmiştir. Ekstra iki denklem hem sınır şartlarını sağlarken hem de bunları dâhil etmekte kullanılmış olan bilinmeyen λ_1 ve λ_2 çarpanlarının hesabında kullanılmış olacağından denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı yine aynı olur ve sistem çözülebilir.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
w_1 & \theta_1 & w_2 & \dots & \dots & \theta_{N+1} & w_{N+1} & \lambda_1 & \lambda_2 \\
 & & & & & & & & \\
K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & \dots & K_{1\,2N+1} & K_{1\,2N+2} & 1 & 0 \\
K_{12} & K_{22} & K_{23} & \dots & \dots & K_{2\,2N+1} & K_{2\,2N+2} & 0 & 0 \\
 & & & & \dots\dots & & & & \\
K_{2N+1\,1} & K_{2N+1\,2} & K_{2N+1\,3} & \dots & \dots & K_{2N+1\,2N+1} & K_{2N+1\,2N+2} & 0 & 0 \\
K_{2N+1\,1} & K_{2N+1\,2} & K_{2N+1\,3} & \dots & \dots & K_{2N+1\,2N+1} & K_{2N+1\,2N+2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Şekil 2.11 Global matris takımına Langrage çarpanlarının uygulanmasının şematik gösterimi

Bu sistematik durumun verdiği avantajla eleman sayısı arttırılarak gerçek çözüme ne oranda yaklaşıldığı görülebilir. Aynı sayısal değerler kullanılırsa ve sadece düğüm noktalarındaki çökme, moment ve kesme kuvvetleri gösterilirse pratik bir karşılaştırma elde edilmiş olunur. Sonlu eleman sayısının artmasıyla moment ve kesme kuvveti gibi türeve bağlı değerlerin de hızla gerçek çözüme yaklaştığı görülmektedir. Sonlu elemanların sistematikleştirilip bilgisayarda otomatik çözüm sunmaya yatkınlığı yanında en önemli diğer özelliği de bir eleman için özelliklerin ayrı ayrı tanımlanabilmesi imkânından doğan çok daha karmaşık problemlere çözüm üretmeyi kolaylaştırmasıdır. Bu şekilde karmaşık problemler sistematik olarak çok daha basit bir şekilde çözümlenmesi sağlanmış olunur.

2.3.3 Timoshenko Kiriş Elemanı

2.3.3.1 Timoshenko Kirişinin Yönetici Denklemi

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre eğilmeden önce kirişin tarafsız eksenine düzlem ve dik olan enine kesitler eğilmeden sonra dik ve düzlem kalırlar. Bu varsayım tüm kayma gerilmelerinin sıfır olduğunu vurgulamaktadır. Timoshenko kiriş teorisinde enine kesitler eğilmeden sonra tarafsız eksene (uzunluk eksenine) düzlem kalmaya devam ederler fakat artık dik kalmazlar. Ayrıca kayma gerilmesi ε_{xz} sıfır değildir. Bundan dolayı, y ekseni etrafında enine normal düzlemin dönmesi $-dw/dx$'e eşit değildir. Bu varsayımlara dayalı kiriş teorisine birinci derededen kayma deformasyon teorisi denir. Genellikle bu teori Timoshenko kiriş teorisi olarakta bilinir. Bağımsız bir $\Psi(x)$ fonksiyonu ile y ekseni etrafındaki dönme ifade edilmektedir. Timoshenko kirişin yönetici denge denklemleri şu şekilde verilmiştir [91].

$$\frac{d}{dx}\left[GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]+f=0 \tag{2.105}$$

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\Psi}{dx}\right)-GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)=0 \tag{2.106}$$

Burada ikinci denklemdeki $GAk_s(\Psi+dw/dx)$ yerine $EI(d\Psi/dx)$ alınıp birinci denklemde yerine yazılırsa ve $\Psi=-dw/dx$ olarak alınırsa Euler-Bernoulli kiriş teorisinin yönetici denklemi elde edilir.

2.3.3.2 Yönetici Denklemin Zayıf Formu

Timoshenko kirişinin yönetici denkleminin zayıf formu, bir eleman alanı $\Omega^e=(x_A,x_B)$ üzerinde olağan prosedür kullanılarak çıkarılmıştır. Birinci denklem ağırlık fonksiyonu ***-w₁*** ve ikinci denklem ağırlık fonksiyonu ***-w₂*** ile çarpılıp eleman üzerinde integrali aşağıdaki gibi alınır.

$$0=\int_{x_A}^{x_B}-w_1\left\{\frac{d}{dx}\left[GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]+f\right\}dx \tag{2.107}$$

$$0=\int_{x_A}^{x_B}-w_2\left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\Psi}{dx}\right)-GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx \tag{2.108}$$

Ağırlık fonksiyonlarıyla çarpılan yönetici denklemlerin zayıf formunun elde edilmesi için her bir denkleme kısmi integrasyon uygulanır. Bunun neticesinde aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$0=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{dw_1}{dx}GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)-w_1 f\right]dx-\left[w_1 GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]_{x_A}^{x_B} \tag{2.109}$$

$$0=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{dw_2}{dx}EI\frac{d\Psi}{dx}+w_2 GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx-\left[w_2 EI\frac{d\psi}{dx}\right]_{x_A}^{x_B} \tag{2.110}$$

Sınır integrallerinde w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonlarının katsayıları şöyle ifade edilebilir.

$$GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\equiv V \tag{2.111}$$

$$EI\frac{d\Psi}{dx}\equiv M \tag{2.112}$$

Burada V kesme kuvvetini M ise eğilme momentini ifade etmektedir. Bu katsayılar zayıf formun ikincil değişkenlerini oluşturur. w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonları, w_1V ve w_2M iş birimlerine sahip fiziksel yorumlar vermelidir. Açıkça, w_1 enine çökme varyasyonuna w, w_2 ise dönmenin varyasyonuna Ψ'e denk olmalıdır.

$$w_1 \sim w, \qquad w_2 \sim \Psi \tag{2.113}$$

Dolayısıyla, formülasyonun birincil değişkenleri w ve Ψ'dir. Elemanın uç noktalarındaki kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri aşağıdaki ifadelerle gösterilmiştir [91].

$$\begin{aligned}
Q_1^e &\equiv -\left[GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]\Big|_{x_A}\\
Q_2^e &\equiv -\left(EI\frac{d\Psi}{dx}\right)\Big|_{x_A}\\
Q_3^e &\equiv \left[GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]\Big|_{x_B}\\
Q_4^e &\equiv \left(EI\frac{d\Psi}{dx}\right)\Big|_{x_B}
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Zayıf formun son şekli aşağadaki formu alır:

$$0=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{dw_1}{dx}GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)-w_1 f\right]dx-w_1(x_A)Q_1^e-w_1(x_B)Q_3^e \tag{2.115}$$

$$0=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{dw_2}{dx}EI\frac{d\Psi}{dx}+w_2GAk_s\left(\Psi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx-w_2(x_A)Q_2^e-w_2(x_B)Q_4^e \tag{2.116}$$

Denk. (2.115)'teki terimler yakından incelendiğinde *w* ve Ψ yalnızca x'e göre türev alındığı görülmüştür. Birincil değişkenler bağımlı bilinmeyenlerin kendileri olduğundan (ve türevlerini içermediğinden), *w* ve Ψ'nin Lagrange enterpolasyonu burada uygundur. Minimum kabul edilebilir enterpolasyon derecesi lineerdir. *w* ve Ψ değişkenleri aynı fiziksel birimlere sahip değildir; genel olarak farklı enterpolasyon dereceleriyle enterpolasyon yapılabilir. *w* ve Ψ'nin Lagrange enterpolasyonu şu şekilde ele alalınabilir [91].

$$w=\sum_{j=1}^{m}w_j\psi_j^{(1)},\qquad \Psi=\sum_{j=1}^{m}s_j\psi_j^{(2)} \tag{2.117}$$

$\psi_j^{(1)}$ ve $\psi_j^{(2)}$ Lagrange enterpolasyon fonksiyonların dereceleri sırasıyla *m*-1 ve *n*-1 olarak alınır. Genellikle *m=n* yaygın olarak kullanılmasına rağmen *m* ve *n* burada birbirinden bağımsız değişkenlerdir. Bununla birlikte, m = n = 2 (yani, doğrusal enterpolasyon kullanılır), *w*'nın türevi:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^e=\frac{w_2^e-w_1^e}{L_e} \tag{2.118}$$

Doğrusal olan dönme fonksiyonu Ψ, *w*(x) için tahmin edilen fonksiyonla tutarlılık göstermemektedir. İnce uzun kirişler için kayma deformasyonu ihmal edilip Ψ=-dw/dx olarak alınırsa

$$s_1^e\frac{x_B-x}{L_e}+s_2^e\frac{x-x_A}{L_e}=-\frac{w_2^e-w_1^e}{L_e} \tag{2.119}$$

Veya eşdeğer olarak (her iki taraftaki benzer katsayıları eşitleyerek),

$$s_1^e x_B-s_2^e x_A=-(w_2^e-w_1^e),\qquad s_2^e-s_1^e=0 \tag{2.120}$$

$$s_1^e=s_2^e=-\frac{(w_2^e-w_1^e)}{L_e} \tag{2.121}$$

Bu Ψ(x)'in sabit olduğu anlamına gelir:

$$\Psi(x) = s_1^e \frac{x_B - x}{L_e} + s_2^e \frac{x - x_A}{L_e} = s_1^e (= s_2^e) \tag{2.122}$$

Bununla birlikte Ψ(x) sabitine izin verilmez çünkü kirişin eğilme enerjisi şu şekilde verilir:

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{EI}{2} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 dx \tag{2.123}$$

Ve bu enerjinin sonucu sıfıra eşittir. Bu nümerik problem kayma kilitlemesi olarak bilinir.

a) *w* ve Ψ için tutarlı bir enterpolasyon fonksiyonu kullanılmalıdır ki dw/dx ve Ψ aynı dereceden polinomlar olsun (m=n+1).

b) *w* ve Ψ için eşit enterpolasyonlar kullanılır fakat eğilme enerjisi Ψ'nin gerçek enterpolasyonu ile kayma enerjisi ise bir derece daha düşük polinom ile değerlendirilir.

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{GAk_s}{2} \left(\frac{dw}{dx} + \Psi \right)^2 dx \tag{2.124}$$

Denk. (2.123-2.124)'de bulunan Ψ teriminin farklı enterpolasyonlar kullanmadan da hesaplamalı olarak yukarıda b maddesinde ifade edilen duruma ulaşılabilinir. (2.124)'deki integralin nümerik değerlendirmesinde quadrature yöntemi kullanılır. İntegrali tamamen hesaplamak için bu yönteme ihtiyaç duyulmaktadır.

$$\int_{x_A}^{x_B} GAk_s \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \tag{2.125}$$

w ve Ψ'nin lineer enterpolasyonları kullanıldığında Denk. (2.124)'ün değerlendirilmesinde tek-noktalı quadrature yöntemi kullanılır. Çünkü *GA*=sabit olduğunda tek-noktalı quadrature yöntemi (2.125)'deki integralin kesin değerini verir. İndirgenmiş entegrasyon kullanımı (yani (2.124) integrali üzerinde tek-noktalı quadrature yöntemi) Ψ'nin yaklaşımında lineer terimin kayma enerjisine katkıda bulunmamasıyla sonuçlanmıştır [91].

w ve Ψ'nin Lagrange enterpolasyonu, Timoshenko krişinin zayıf formuna yerleştirilirse ve $w_1 = \psi_i^{(1)}, \quad w_2 = \psi_i^{(2)}$ alınırsa sonlu elemanlar denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{m} K_{ij}^{11} w_j + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{12} s_j - F_i^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
0 &= \sum_{j=1}^{m} K_{ij}^{21} w_j + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{22} s_j - F_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{2.126}
$$

Burada

$$
\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= \int_{x_A}^{x_B} GAk_s \frac{d\psi_i^{(1)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(1)}}{dx} dx \\
K_{ij}^{12} &= \int_{x_A}^{x_B} GAk_s \frac{d\psi_i^{(1)}}{dx} \psi_j^{(2)} dx = K_{ij}^{21} \\
K_{ij}^{22} &= \int_{x_A}^{x_B} \left(EI \frac{d\psi_i^{(2)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(2)}}{dx} + GAk_s \psi_i^{(2)} \psi_j^{(2)} \right) dx \\
F_i^1 &= \int_{x_A}^{x_B} f \psi_i^{(1)} dx + Q_{2i-1}, \qquad F_i^2 = Q_{2i}
\end{aligned}
\tag{2.127}
$$

Yukarıdaki denklemler matris formunda şu şekilde yazılır

$$
\begin{bmatrix} \left[K^{11}\right] & \left[K^{12}\right] \\ \left[K^{21}\right] & \left[K^{22}\right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix}
\tag{2.128}
$$

Tutarlı enterpolasyonların kullanımını göstermek için $\psi_i^{(1)}$ terimini quadrature polinom $\psi_i^{(2)}$ terimini ise lineer polinom formunda seçilir. Bu enterpolasyon seçimi için K^{11} matrisi 3x3, K^{12} matrisi 3x2 ve K^{22} matrisi ise 2x2 boyutlarında olur. *EI* ve *GAk_s* katsayıları sabit alınırsa matrislerin açık formları şu şekilde ifade edilmiştir.

$$
\left[K^{11}\right] = \frac{GAk_s}{3L_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}
\tag{2.129}
$$

$$
\left[K^{12}\right] = \frac{GAk_s}{6} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}
\tag{2.130}
$$

$$\left[K^{22}\right]=\frac{EI}{L_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{GAk_sL_e}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{2.131}$$

Eleman denklemi şu şekli alır:

$$\begin{bmatrix}
\frac{7GAk_s}{3L_e} & -\frac{8GAk_s}{3L_e} & \frac{GAk_s}{3L_e} & -\frac{5GAk_s}{6} & -\frac{GAk_s}{6}\\
-\frac{8GAk_s}{3L_e} & \frac{16GAk_s}{3L_e} & -\frac{8GAk_s}{3L_e} & \frac{4GAk_s}{6} & -\frac{4GAk_s}{6}\\
\frac{GAk_s}{3L_e} & -\frac{8GAk_s}{3L_e} & \frac{7GAk_s}{3L_e} & \frac{GAk_s}{6} & \frac{5GAk_s}{6}\\
-\frac{5GAk_s}{6} & \frac{4GAk_s}{6} & \frac{GAk_s}{6} & \frac{EI}{L_e}+\frac{GAk_sL_e}{3} & -\frac{EI}{L_e}+\frac{GAk_sL_e}{6}\\
-\frac{GAk_s}{6} & -\frac{4GAk_s}{6} & \frac{5GAk_s}{6} & -\frac{EI}{L_e}+\frac{GAk_sL_e}{6} & \frac{EI}{L_e}+\frac{GAk_sL_e}{3}
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1\\ w_3\\ w_2\\ s_1\\ s_1\end{Bmatrix}^e=\begin{Bmatrix}f_1\\ f_3\\ f_2\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}^e+\begin{Bmatrix}Q_1\\ \hat{Q}\\ Q_3\\ Q_2\\ Q_4\end{Bmatrix}^e \tag{2.132}$$

$\hat{Q}$, 3. düğüm noktasında bir enine kuvvetti ve Q_1, Q_3 kesme kuvvetlerini ve Q_2, Q_4 ise 1. ve 2. düğüm noktasındaki eğilme momentlerini ifade etmektedir.

Elemanın orta düğüm noktasındaki 3. nodun diğer eleman nodlarıyla bir ilişkisi bulunmamaktadır. Bu nedenle, elemanın farklı düğümlerinde farklı sayıda serbestlik derecesi vardır. Bu nedenle bu elemanların birleştirilmesi ve bir bilgisayarda uygulanması zorlaşmıştır. Bundan dolayı eleman denklem sistemi içerisinde 3. düğüm noktasındaki serbestliği w_3 sistemin dışında bırakılarak 3. nod elenir. Böylece eleman denklem sistemi indirgenmiş olur.

Eşit enterpolasyon (*m=n*) kullanılırsa tüm (2.132)'deki altmatrisler aynı boyutta *n x n* olurlar. K_{ij}^{11} ve K_{ij}^{12}, K_{ij}^{22}'nin ilk kısmında olduğu gibi aynen değerlendirilir. K_{ij}^{22}'nin ikinci kısmı azaltılmış integrasyon kullanılarak değerlendirilmiştir. Doğrusal enterpolasyon seçimi yapılarak fonksiyonlar ve GAk_s'lerin ve EI'nın sabit değerleri için matrisler aşağıdaki gibi açık değerlere sahiptir:

$$\left[K^{11}\right]=\frac{GAk_s}{L_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{2.133}$$

$$\left[K^{12}\right]=\frac{GAk_s}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{2.134}$$

$$\left[K^{22}\right]=\frac{EI}{L_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{GAk_sL_e}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{2.135}$$

$\left[K^{11}\right]$'nın ikinci kısmını değerlendirmek için tek noktalı entegrasyon kullanılmıştır. GAk_s'lerin ve EI'nın sabit değerleri için $\left[K^{11}\right]$, $\left[K^{12}\right]$ ve $\left[K^{22}\right]$'ın ilk kısmı aynı şekilde tek-noktalı quadrature yöntemi ile değerlendirilmiştir. Bu nedenle $\left[K^{\alpha\beta}\right]$ için tek tip tek-noktalı entegrasyon tüm gereksinimleri karşılamıştır. Böylece, indirgenmiş yeni matris takımı aşağıdaki gibi elde edilmiştir [91].

$$\begin{bmatrix}\frac{GAk_s}{L_e} & -\frac{GAk_s}{2} & -\frac{GAk_s}{L_e} & -\frac{GAk_s}{2}\\ -\frac{GAk_s}{2} & \frac{GAk_sL_e}{4}+\frac{EI}{L_e} & \frac{GAk_s}{2} & \frac{GAk_sL_e}{4}-\frac{EI}{L_e}\\ -\frac{GAk_s}{L_e} & \frac{GAk_s}{2} & \frac{GAk_s}{L_e} & \frac{GAk_s}{2}\\ -\frac{GAk_s}{2} & \frac{GAk_sL_e}{4}-\frac{EI}{L_e} & \frac{GAk_s}{2} & \frac{GAk_sL_e}{4}+\frac{EI}{L_e}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1\\ s_1\\ w_2\\ s_2\end{Bmatrix}^e \tag{2.136}$$

Ayrıca, yaklaşım derecesi ve eleman sayısı artırılırsa kayma kitlenmesi problemini ortadan kaldırmak için integrasyonun indirgenmesine ihtiyaç duyulmayacaktır [91].

3
TEORİ VE FORMÜLASYON

3.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Mikro Kiriş Formülasyonu

3.1.1 Klasik Karışım Kuralı

FD mikro kiriş iki farklı malzemeden (genellikle seramik ve metal) yapılır. Malzeme fazlarının hacim oranının klasik karışım kuralına dayandığı varsayılır. Bir malzemenin hacimsel oranının, kalınlık doğrultusunda sürekli olarak değiştiği varsayılır ve malzeme dağılımı aşağıdaki gibi tanımlanır [45].

$$\begin{aligned} V_m &= \left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^k \\ V_c &= 1 - V_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada c ve m alt indisleri sırasıyla seramik ve metal fazları gösterdiği durumda, V_m ve V_c sırasıyla seramik ve metal hacimsel oranları ifade etmiştir. “z”, kirişin kalınlığı doğrultusundaki koordinat olup Şekil 3.1 ve Denk. (3.1)’e bakıldığında kirişin üst yüzeyinin saf seramikten ve kirişin alt yüzeyinin saf metalden oluştuğu gösterilmiştir. Buna ek olarak, k, z doğrultusu boyunca değişim yoğunluğunu kontrol eden malzeme dağılımının kuvvet yasası indeksidir. Poisson oranının kalınlık doğrultusu boyunca sabit olduğu varsayılırken, Denk. (3.1) FD kirişin homojen olmayan malzeme özellikleri olan yerel efektif elastisite modülünün (E) ve yoğunluğunun (ρ) elde edilmesi için uygulanmıştır. Klasik karışım kuralı Denk. (3.2) 'deki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} E(z) &= E_c \cdot V_c + E_m \cdot V_m \\ \rho(z) &= \rho_c \cdot V_c + \rho_m \cdot V_m \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.2 Birinci Dereceden Kayma Deformasyon Teorisi

Bu çalışmada, FD mikro-kirişlerin burkulması ve titreşimi, birinci dereceden kayma deformasyon teorisi (FSBT) olarak da bilinen Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak incelenmiştir. Bu teori için yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x,t) - z\theta(x,t) \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= w(x,t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Burada u_1, u_2 ve u_3, sırasıyla x (eksenel), y (genişlik) ve z (kalınlık) doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleridir ve t, zamanı gösterir. Ek olarak $u(x)$, $w(x)$ ve $\theta(x)$ sırasıyla orta düzlemin eksenel yer değiştirmesini, FD mikro-kirişinin z doğrultusundaki çökmesini ve y ekseni etrafındaki dönme açısını ifade etmektedir. Aşağıdaki denklemler için, notasyonlar $f_{,i}$ fonksiyonu i = 1,2,3 değişkenine göre f fonksiyonunun farklılaşmasını belirtmektedir. Buradaki i = 1,2,3 üç uzamsal koordinatı $(x \to 1, y \to 2, z \to 3)$ simgeler ve $\dot{f}$ ifadesi f fonksiyonunun zamana göre türevini gösterir. Klasik şekil değiştirme (ε), Cauchy gerilmesi (σ), çift gerilmenin deviatorik kısmı (χ) ve simetrik eğrilik (m), Denk. (3.3) 'te verilen yer değiştirme alanı kullanılarak elde edilmiştir. Üstelik, bu tansörler her zamanki gibi aşağıdaki formülasyonların bir sonucu olarak elde edilebilir [48]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^{T}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \varepsilon_{ji} \tag{3.4}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(z) tr\left(\varepsilon_{ij}\right)\delta_{ij} + 2\mu(z)\varepsilon_{ij} \tag{3.5}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla\Theta + (\nabla\Theta)^{T}\right) = \frac{1}{2}\left(\Theta_{i,j} + \Theta_{j,i}\right) \tag{3.6}$$

$$m_{ij} = 2l^2\mu(z)\chi_{ij} \tag{3.7}$$

Burada u_i ve Θ_i, sırasıyla yer değiştirme alanı ve dönme vektörü bileşenleridir. Dönme vektörü Θ_i, şu şekilde tanımlanabilir:

$$\Theta = \frac{1}{2} curl\ u \tag{3.8}$$

Ayrıca, Lame modülü olan $\lambda(z)$ ve $\mu(z)$, Denk. (3.2) 'de verilen yerel efektif malzeme parametreleri ile aşağıdaki formüllerdeki gibi tanımlanabilir:

$$\lambda(z)=\frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)},\quad \mu(z)=\frac{E(z)}{2(1+v)} \tag{3.9}$$

Burada v, Poisson oranıdır. Yönetici denklem, başlangıç ve sınır koşulları, Hamilton prensibinin aşağıdaki gibi kullanımından çıkarılmıştır:

$$\delta\int_{t_2}^{t_1}\left(T-U+W\right)dt=0 \tag{3.10}$$

Burada, *T*, *U* ve *W* sırasıyla kinetik enerjiyi, şekil değiştirme enerjisini ve uygulanan dış kuvvetler tarafından yapılan işi ifade etmektedir. FD mikro kirişi burkulma yüküne maruz kalırsa, şekil değiştirme enerjisi iki farklı bölümden oluşabilir: burkulma yükü nedeniyle oluşan şekil değiştirme enerjisi ve kirişin kesit reaksiyonlarından kaynaklanan şekil değiştirme enerjisi. Dolayısıyla, bu enerji şöyle tanımlanabilir:

$$U=U^S+U^B \tag{3.11}$$

Denk. (3.11) içindeki U^S bir lineer elastik izotropik malzeme için kirişin klasik gerilme ve çift gerilme alanlarından kaynaklanan şekil değiştirme enerjisinin bir parçasıdır ve U^B uygulanan burkulma yükünden dolayı oluşan şekil değiştirme enerjisinin bir parçasıdır. Bunlar şöyle tanımlanabilir:

$$U^S=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+m_{ij}\chi_{ij}\right)dv\quad\left(i,j=1,2,3\right) \tag{3.12}$$

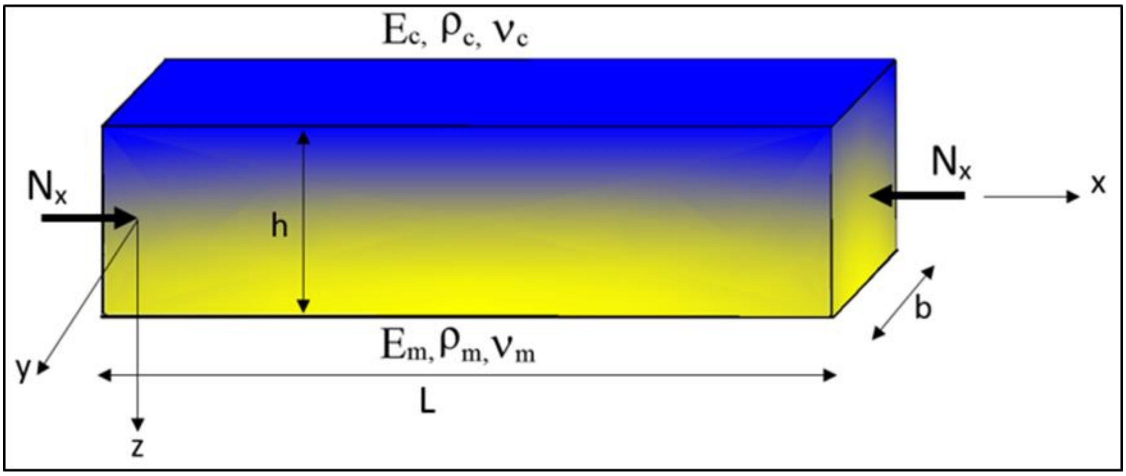
$$U^B=-\frac{1}{2}\int_0^L P\left(w,_x\right)^2dx \tag{3.13}$$

Buradaki Ω, etki alanıdır yani kiriş bölgesidir. Ayrıca, FD kirişin kinetik enerjisi şu şekilde elde edilebilir:

$$T=\frac{1}{2}\int_\Omega\rho(z)\left[\left(\dot{u}_1\right)^2+\left(\dot{u}_2\right)^2+\left(\dot{u}_3\right)^2\right]dv \tag{3.14}$$

Dış kuvvetler tarafından yapılan iş şu şekilde verilebilir:

$$W = \int_{\Omega} qw\, dv + \int_{\Omega} fu\, dv + M\theta\Big|_0^L + M_c w_{,x}\Big|_0^L + \mathrm{P\,u}\Big|_0^L \tag{3.15}$$



Şekil 3.1 Fonksiyonel derecelendirilmiş mikro kiriş

Birinci dereceden kesme deformasyon teorisi (FSBT) için Denk. (3.3)'ün yer değiştirme alan bileşenleri Denk. (3.4) ve (3.7)'deki gerilme şekil değiştirme ifadelerinin içine yerleştirilirse aşağıdaki gibi şekil değiştirme, dönme ve eğrilik bileşenleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \mathrm{u}_{,x} - z\theta_{,x} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(-\theta + w_{,x}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\Theta_y = -\frac{1}{2}\left(\theta + w_{,x}\right) \tag{3.17}$$

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{4}\left(w_{,xx} + \theta_{,x}\right) \tag{3.18}$$

Buradaki, Denk. (3.16), (3.17) ve (3.18)'deki bağıntılar (3.5) ve (3.7)'deki denklemlerde yerlerine yerleştirilirse gerilme ve gerilme çiftlerinin sıfır olmayan bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda(\mathrm{z}) + 2\mu(\mathrm{z}))(\mathrm{u}_{,x} - z\psi_{,x}) \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = -k_s\mu(\mathrm{z})(\psi - w_{,x}) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \lambda(\mathrm{z})(\mathrm{u}_{,x} - z\psi_{,x}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$m_{xy} = -\frac{1}{2}\mu(z)l^2\left(w_{,xx} + \theta_{,x}\right) \tag{3.20}$$

Burada k_s, kayma düzeltme faktörüdür ve dikdörtgen bir kesit için k_s değeri 5 / 6'ya eşit alınmıştır. Bu bağlamda, (3.16) ve (3.18)'deki denklemler Denk. (3.12) de yerine yerleştirilirse, toplam şekil değiştirme enerjisi elde edilir. Verilen şekil değiştirme enerjisinin ilk varyasyonu alınarak ve kısmi integrasyon uygulanarak aşağıdaki bağıntıya varılır:

$$\begin{aligned}
\delta U = &-\int_0^L \left((\lambda_0 + 2\mu_0)\mathrm{u}_{,xx} - (\lambda_1 + 2\mu_1)\theta_{,xx}\right)\delta u\, dx \\
&-\int_0^L ((\lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_0 l^2)\theta_{,xx} - k_s\mu_0\theta - (\lambda_1 + 2\mu_1)\mathrm{u}_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx} + k_s\mu_0 w_{,x})\delta\theta dx \\
&+\int_0^L (\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxxx} + (-k_s\mu_0 + P)w_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2\theta_{,xxx} + k_s\mu_0\theta_{,x})\delta w\, dx \\
&+((\lambda_0 + 2\mu_0)\mathrm{u}_{,x} - (\lambda_1 + 2\mu_1)\theta_{,x})\delta u\Big|_0^L \\
&+((\lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_0 l^2)\theta_{,x} - (\lambda_1 + 2\mu_1)\mathrm{u}_{,x} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx})\delta\theta\Big|_0^L \\
&+(-\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx} + \left(k_s\mu_0 - P\right)w_{,x} - \frac{1}{4}\mu_0 l^2\theta_{,xx} - k_s\mu_0\theta)\delta w\Big|_0^L \\
&+(\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2\theta_{,x})\delta\left(w_{,x}\right)\Big|_0^L
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Burada $i = 0,1,2$ için $[\lambda_i, \mu_i] = b\int_{-h/2}^{h/2}[\lambda(z), \mu(z)]z^i dz$ ve b kirişin genişliğidir.

Dış işin ilk varyasyonu basit olarak şu şekilde elde edilir:

$$\delta\mathrm{W} = \int_0^L f\,\delta u + q\delta w dx + \left(P\delta\mathrm{u}\Big|_0^L + \hat{Q}\,\delta\mathrm{w}\Big|_0^L + \hat{M}\,\delta\theta\Big|_0^L + \hat{M}_c\delta\left(w_{,x}\right)\Big|_0^L\right) \tag{3.22}$$

$\hat{M}$ ve $\hat{M}_c$ sırasıyla normal gerilme bileşeni σ_{xx} ve çift gerilme bileşeni m_{xy} nedeniyle oluşan klasik ve mikro dış eğilme momentlerini simgelemektedir. *P* ve $\hat{Q}$ eksenel ve kesme uç kuvvetleridir, *f(x)* ve *q(x)* sırasıyla yayılı eksenel ve düşey kuvvetlerdir. Kinetik enerjinin ilk varyasyonu şu şekilde verilebilir:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[\left(I_0\ddot{\mathrm{u}} - I_1\ddot{\theta}\right)\delta\mathrm{u} + \left(I_2\ddot{\theta} - I_1\ddot{\mathrm{u}}\right)\delta\theta + I_0\ddot{w}\delta w\right]dx\, dt \tag{3.23}$$

Burada $i=0,1,2$ için $I_i=b\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)z^i dz$. Sonuç olarak, Denk. (3.10)'da tanımlanan Hamilton ilkesi ve temel lemma sabitleri kullanılarak FD mikro-kirişinin yönetici denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta \mathrm{u}:(\lambda_0+2\mu_0)\mathrm{u}_{,xx}-(\lambda_1+2\mu_1)\theta_{,xx}+f=I_0\ddot{\mathrm{u}}-I_1\ddot{\theta} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\delta\theta:&\left(\lambda_2+2\mu_2+\frac{1}{4}\mu_0 l^2\right)\theta_{,xx}-k_s\mu_0\theta-(\lambda_1+2\mu_1)\mathrm{u}_{,xx}\\&+\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx}+k_s\mu_0 w_{,x}=I_2\ddot{\theta}-I_1\ddot{\mathrm{u}}\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\delta w:\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxxx}+(-k_s\mu_0+P)w_{,xx}+\frac{1}{4}\mu_0 l^2\theta_{,xxx}+k_s\mu_0\theta_{,x}-q=-I_0\ddot{w} \tag{3.26}$$

Ve sınır koşulları şu şekilde verilir:

$$x=0 \text{ ve } x=L \text{ için}\rightarrow(\lambda_0+2\mu_0)\mathrm{u}_{,x}-(\lambda_1+2\mu_1)\theta_{,x}=P \quad \text{ya da } \mathrm{u}=\hat{\mathrm{u}} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}&x=0 \text{ ve } x=L \text{ için}\rightarrow\left(\lambda_2+2\mu_2+\frac{1}{4}\mu_0 l^2\right)\theta_{,x}-(\lambda_1+2\mu_1)\mathrm{u}_{,x}+\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx}=\hat{M}\\&\text{ya da}\quad \theta=\hat{\theta}\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}&x=0 \text{ ve } x=L \text{ için}\rightarrow-\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx}+(k_s\mu_0-P)w_{,x}-\frac{1}{4}\mu_0 l^2\theta_{,xx}-k_s\mu_0\theta=\hat{Q}\\&\text{ya da}\quad w=\hat{w}\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$x=0 \text{ ve } x=L \text{ için}\rightarrow\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx}+\frac{1}{4}\mu_0 l^2\theta_{,x}=\hat{M}_c \quad \text{ya da} \quad w_{,x}=\hat{w}_{,x} \tag{3.30}$$

Serbest titreşim problemi durumunda, her zamanki kararlı hal durum tepkisi varsayılabilir:

$$\begin{aligned}w(x,t)&=w(x)\cdot\sin(\omega t)\\ \mathrm{u}(x,t)&=\mathrm{u}(x)\cdot\sin(\omega t)\\ \theta(x,t)&=\theta(x)\cdot\sin(\omega t)\end{aligned} \tag{3.31}$$

Burada ω doğal serbest titreşim frekansıdır. Doğal frekans hesaplanırken (3.26)'daki yönetici denklemin sol tarafında bulunan burkulma kuvveti (P) sıfıra eşitlenmelidir. Diğer yandan, bir burkulma problemini analiz ederken doğal frekans sıfıra eşitlenmelidir. Son olarak statik eğilme problemlerini çözerken doğal frekans ve burkulma yüklerinin her ikisi de sıfıra eşitlenmelidir. Yönetici denklemler (3.24, 3.26), eksenel ve düşey doğrultular boyunca denge koşullarını kontrol ederken Denk. (3.25) kesitin dönme dengesini kontrol etmektedir. Bir sonraki bölümde sezgisel ancak sistematik bir yaklaşım kullanarak bu denklemlerin nasıl ayrıştırılabileceği ve tam bir karakteristik alan denklemleri kümesi haline getirilebileceği gösterilmiştir. Bu alan denklemleri daha sonra karışık sonlu elemanlar formülasyonunun temelini oluşturan yeni fonksiyonelin elde edilmesinde kullanılmıştır.

3.2 Gateaux Diferansiyeli ve Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi

Yeni fonksiyonel Gateaux diferansiyeliyle elde edilmiştir. Fonksiyonelin türetilmesi, problemin tüm alan denklemlerini gerektirmektedir. Bu denklemleri tanımlamak ve kurmak için aşağıda ifade edileceği gibi biraz sezgisel fakat sistematik bir yaklaşım önerilmiştir.

3.2.1 Gateaux Diferansiyeli

Öncelikle, meydana geliş sebeplerine göre kesit momentleri ve kuvvetleri tanımlanması gerekmektedir. Klasik mukavemette olduğu gibi, eğilmeye bağlı klasik moment, $M = -EI\theta_{,x}$ olarak verilen kesitin orta yüzeyin dönmesi ile iyi bilinen bir ilişkiye sahiptir. Burada E elastisite modülü, I eylemsizlik momenti olup θ yalnızca eğilme nedeniyle oluşan kesitin dönmesidir. Bu doğrultuda hareket etmek için ψ toplam dönmesi parçalara ayrılmıştır.

$$w_{,x} = \psi \tag{3.32}$$

$$\psi = \gamma + \theta \tag{3.33}$$

Burada γ kesme deformasyonundan kaynaklanan kesitin orta kısmında oluşan dönmedir. Simdi bu bölümde klasik moment, Denk. (3.24.b)'deki moment denge denklemi incelenerek benzer şekilde tanımlanabilir.

$$M_\theta = -E_2\theta_{,x} \tag{3.34}$$

M_θ, toplam momentin sadece eğilmeden kaynaklı kısmını oluşturur. E_2 , P-dalga modülünün ikinci dereceden karşılığı olarak veya $E_2 = \lambda_2 + 2\mu_2$ ile kesit üzerine entegre edilen sınır modülü olarak ifade edilmiştir. Benzer şekilde, eksenel doğrultuda uzamadan kaynaklanan moment bileşeni de aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$M_u = E_1 u_{,x} \tag{3.35}$$

Burada M_u eksenel uzamadan kaynaklanan moment katkısı olup ve E_1 , P-dalga modülünün birinci dereceden karşılığı olarak veya $E_1 = \lambda_1 + 2\mu_1$ ile kesit üzerine entegre edilen sınır modülü olarak ifade edilmiştir. E_1'in homojen bir malzeme durumunda yok olacağına dikkat edilmesi gerekir. Devam eden incelemelere göre diğer terimlerin karakteristik uzunluk ölçeği ile momente katkı sağladığı görülür. Böylece mikro etkiler nedeniyle moment çifti katkısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$M_c = -G_0 l_m^2 \frac{\theta_{,x} + \psi_{,x}}{2} \tag{3.36}$$

Burada M_c, toplam momente moment çifti katkısını ifade eder ve E_0 , P-dalga modülünün sıfırıncı dereceden karşılığı olarak veya $E_0 = \lambda_0 + 2\mu_0$ ile kesit üzerine entegre edilen sınır modülü olarak ifade edilmiştir. Şimdi toplam moment basitçe şu şekilde verilebilir:

$$M = M_c + M_\theta + M_u \tag{3.37}$$

Benzer bir akıl yürütme Denk. (3.24)'de ifade edilen eksenel denge denklemleri üzerinde kullanılmıştır. Mukavemetteki klasik normal kuvvetin $N = EAu_{,x}$ olarak verilebileceği iyi bilinmektedir. Burada N normal kuvveti, E elastisite modülünü ve A kesit alanını ifade etmektedir. Benzer şekilde, uzamadan kaynaklanan toplam normal kuvvete katkısı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$N_u = E_0 u_{,x} \tag{3.38}$$

Burada N_u , eksenel uzama nedeniyle oluşan toplam normal kuvvete normal kuvvet katkısıdır ve E_0 daha önce tanımlanmıştır. Benzer şekilde, N_θ eğilmeye bağlı normal kuvvet katkısı olarak verilebilir:

$$N_\theta = -E_1\theta_{,x} \tag{3.39}$$

Böylece toplam normal kuvvet aşağıdaki terimlerin toplamı olarak yazılabilir:

$$N = N_u + N_\theta \tag{3.40}$$

Klasik kesme kuvveti *T*, klasik mukavemette olduğu gibi (her zaman döndürülmüş kesite paralel olan) kayma dönmesi γ ve kayma düzeltme faktörü k_s ile doğrudan hesaplanabilir.

$$T = G_0 k_s \gamma \tag{3.41}$$

Boyut etkileri içeren bir kesme kuvveti, aşağıdaki gibi her zaman deforme olmamış x eksenine dik olarak alınan bir kesit üzerinde tanımlanabilir.

$$H = T + M_{c,x} - P\psi \tag{3.42}$$

Yukarıda tanımlanan (3.24), (3.25) ve (3.26)'daki denklemler eksenel, düşey ve dönme denge denklemleridir. Bu denklemler kararlı hal durum koşulları farz edilerek yukarıda tanımlanan (3.38), (3.39)'deki kesit kuvvetleri ve (3.34), (3.35), (3.36)'daki momentler cinsinden sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$N_{u,x} + N_{\theta,x} + f = -\omega^2 I_0 \mathrm{u} + \omega^2 I_1 \theta \tag{3.43}$$

$$H_{,x} + q = -\omega^2 I_0 \mathrm{w} \tag{3.44}$$

$$T - M_{u,x} - M_{\theta,x} - M_{c,x} = \omega^2 I_1 \mathrm{u} - \omega^2 I_2 \theta \tag{3.45}$$

Buraya kadar problemin tüm alan denklemleri çıkarılmıştır. Bu bağıntılar aşağıdaki gruplara göre yeniden düzenlenebilir: Kurucu denklemler (Bünye denklemleri) (3.34), (3.35), (3.36), (3.38), (3.39) ve (3.41) sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\frac{M_\theta}{E_2} + \theta_{,x} = 0, \qquad \frac{M_u}{E_1} - u_{,x} = 0, \qquad \frac{M_c}{G_0 l_m^2} + \frac{\theta_{,x} + \psi_{,x}}{2} = 0$$

$$\frac{N_u}{E_0} - u_{,x} = 0, \qquad \frac{N_\theta}{E_1} + \theta_{,x} = 0, \qquad T - G_0 k_s \gamma = 0$$

Kinematik uygunluk denklemleri (3.32) ve (3.33) sırasıyla:

$$\psi - w' = 0, \qquad \gamma + \theta - \psi = 0$$

Denge denklemleri (3.42), (3.43), (3.44) ve (3.45) sırasıyla:

$$H - T + P\psi - M_{c,x} = 0$$

$$f + I_0\omega^2 u - I_1\omega^2\theta + N_{u,x} + N_{\theta,x} = 0$$

$$q + I_0\omega^2 w + H_{,x} = 0$$

$$T - I_1\omega^2 u + I_2\omega^2\theta - M_{c,x} - M_{u,x} - M_{\theta,x} = 0$$

Alan denklemlerindeki bu parçalanmaya göre mikro kiriş 12 serbestlik derecesine sahiptir. Bunlar $M_\theta, M_u, M_c, N_u, N_\theta, H, T, u, w, \theta, \psi$ *ve* γ 'dan oluşmaktadır. Bu sayı, fonksiyonel elde edildikten ve basitleştirmeler için bazı temel yerine yerleştirmeler uyguladıktan sonra 10'a indirgenmiştir. Devam edilebilmesi için sınır koşullarının da tanımlanması gerekmektedir. Mühendislik uygulamalarının çoğu için tüm sınır koşullarına ihtiyaç olup olmadığına bakılmaksızın genel koşullar dâhil edilmelidir. Böylece geometrik tipi çökme ($w = \hat{w}$), uzama ($u = \hat{u}$) ve dönme ($\theta = \hat{\theta}, \psi = \hat{\psi}$) ve dinamik tipi kuvvet ($N = \hat{N}, H = \hat{H}$) ve moment ($M = \hat{M}, M_c = \hat{M}_c$) koşulları hali hazırda mevcuttur. Burada *M* ve *N*, sırasıyla denklem (3.37) ve (3.40)'da tanımlandığı gibi toplam kesit momenti ve kesit normal kuvvetidir. Böylece geometrik koşullar aşağıdaki gibi oluşturulmuştur. Sınır denklemler (3.46-3.53)'deki $\sqrt{2}$ faktörü, sonraki sayfalarda açıklanacağı gibi fonksiyonelin gelişiminde tutarlılık için gereklidir.

$$\Gamma_\theta \quad \text{üzerinde} \quad -\frac{\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{2}} = 0 \tag{3.46}$$

$$\Gamma_\psi \quad \text{üzerinde} \quad -\frac{\psi}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{\psi}}{\sqrt{2}} = 0 \tag{3.47}$$

$$\Gamma_\mathrm{u} \quad \text{üzerinde} \quad \frac{\mathrm{u}}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{\mathrm{u}}}{\sqrt{2}} = 0 \tag{3.48}$$

$$\Gamma_w \quad \text{üzerinde} \quad \frac{w}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{w}}{\sqrt{2}} = 0 \tag{3.49}$$

Dinamik veya doğal (kuvvet) koşullar aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

$$\Gamma_H \quad \text{üzerinde} \quad -\frac{H}{\sqrt{2}}+\frac{\hat{H}}{\sqrt{2}}=0 \tag{3.50}$$

$$\Gamma_N \quad \text{üzerinde} \quad -\frac{N_{\mathrm{u}}}{\sqrt{2}}-\frac{N_\theta}{\sqrt{2}}+\left(\frac{\bar{N}_{\mathrm{u}}}{\sqrt{2}}+\frac{\bar{N}_\theta}{\sqrt{2}}\right)=0 \tag{3.51}$$

$$\Gamma_{M_c} \quad \text{üzerinde} \quad \frac{M_c}{\sqrt{2}}-\frac{\hat{M}_c}{\sqrt{2}}=0 \tag{3.52}$$

$$\Gamma_M \quad \text{üzerinde} \quad \frac{M_c}{\sqrt{2}}+\frac{M_{\mathrm{u}}}{\sqrt{2}}+\frac{M_\theta}{\sqrt{2}}-\left(\frac{\hat{M}_c}{\sqrt{2}}+\frac{\hat{M}_{\mathrm{u}}}{\sqrt{2}}+\frac{\hat{M}_\theta}{\sqrt{2}}\right)=0 \tag{3.53}$$

Çoğu zaman, bir dizi yönetici denklemler için ağırlıklı bir artık form veya zayıf bir form elde etmek kolaydır. Fakat ilk varyasyonunun sınır koşulları da dâhil olmak üzere bir problemin yönetici denklemlerine eşdeğer olacak şekilde ilişkili bir fonksiyon elde etmek her zaman mümkün değildir. Verilen sınır koşullarına sahip bir yönetici denklemler sisteminin bir ortak fonksiyonele aktarılıp aktarılamayacağı, denklemler sistemi ve sınır koşulları üzerine yazılan operatör formunun yapısına bağlıdır. Eldeki problem için diferansiyel operatörün matris formu şu şekilde verilebilir.

$$Q(\nu,F)=R.\nu+F \tag{3.54}$$

$$R=\begin{bmatrix} R_{dd} & 0 \\ 0 & R_{bb} \end{bmatrix},\ \nu=\begin{bmatrix} \nu_{dd} \\ \nu_{bb} \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} F_{dd} \\ F_{bb} \end{bmatrix}$$

Burada Q operator olup alt matrisler R_{dd}, R_{bb} ve alt vektörler ν_{dd}, ν_{bb}, F_{dd}, F_{bb} bileşenlerinin açık formları aşağıda verilmiştir.

$$
R_{dd}=\begin{bmatrix}
1/E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d/dx & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d/dx & 0\\
0 & 0 & 1/G_0 l_m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d/dx & d/dx & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/E_0 & 0 & 0 & 0 & -d/dx & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d/dx & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d/dx & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & d/dx & d/dx & 0 & 0 & \omega^2 I_0 & 0 & 0 & -\omega^2 I_1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d/dx & 0 & 0 & \omega^2 I_0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -d/dx & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & P & 0 & 0\\
-d/dx & -d/dx & -d/dx & 0 & 0 & 0 & 1 & -\omega^2 I_1 & 0 & 0 & \omega^2 I_2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_0 k_s
\end{bmatrix}
$$

$$
R_{bb}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\nu_{dd}=\begin{bmatrix} M_\theta\\ M_u\\ M_c\\ N_u\\ N_\theta\\ H\\ T\\ u\\ w\\ \psi\\ \theta\\ \gamma \end{bmatrix},\qquad
\nu_{bb}=\begin{bmatrix} \left(M_c+M_\theta+M_u\right)/\sqrt{2}\\ M_c/\sqrt{2}\\ \left(N_\theta+N_u\right)/\sqrt{2}\\ H/\sqrt{2}\\ w/\sqrt{2}\\ u/\sqrt{2}\\ \psi/\sqrt{2}\\ \theta/\sqrt{2} \end{bmatrix},\qquad
F_{dd}=\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\f\\q\\0\\0\\0 \end{bmatrix},\qquad
F_{bb}=\begin{bmatrix} \hat{\theta}/\sqrt{2}\\ \hat{\psi}/\sqrt{2}\\ -\hat{u}/\sqrt{2}\\ -\hat{w}/\sqrt{2}\\ \hat{H}/\sqrt{2}\\ \left(\hat{N}_\theta+\hat{N}_u\right)/\sqrt{2}\\ -\hat{M}_c/\sqrt{2}\\ -\left(\hat{M}_c+\hat{M}_\theta+\hat{M}_u\right)/\sqrt{2} \end{bmatrix}
$$

Denklem (3.54) tüm alan denklemlerini ve sınır koşullarını içerir. Her bir R_{dd} satırı, 12 alan denkleminden birine karşılık gelir. 1. sıradaki Denk. (3.34)'e, 2. sıradaki Denk. (3.38)'e, 3. sıradaki Denk. (3.36)'ya, 4. sıradaki Denk. (3.39)'a, 5. sıradaki Denk. (3.35)'e, 6. sıradaki Denk. (3.32)'ye, 7. sıradaki Denk. (3.33)'e, 8. sıradaki Denk. (3.43)'e, 9. sıradaki Denk. (3.44)'e, 10. sıradaki Denk. (3.42)'ye, 11. sıradaki Denk. (3.45)'e ve son olarak 12. sıradaki Denk. (3.41)'e karşılık gelmektedir. Bu düzen sıradan gibi görünüyor olsa da operatörün ilişkili bir fonksiyonel forma geçip geçemeyeceği ile yakından ilişkilidir. Diğer bir deyişle, bir operatörün potansiyel olup olmadığı Gateaux türevi aracılığıyla test edilebilir [86]. Q operatörünün homojen formu şu şekilde verilebilir:

$$\widehat{Q}(\nu) = R.\nu \tag{3.55}$$

Gateaux türevi şu şekilde tanımlanır:

$$d\widehat{Q}(\nu,\widehat{\nu}) = \lim_{\zeta \to 0}\left(\frac{1}{\zeta}\left(\widehat{Q}(\nu+\zeta\widehat{\nu}) - \widehat{Q}(\nu)\right)\right) \tag{3.56}$$

Operatör doğrusal olduğu için aşağıdaki bağıntıyı elde etmek kolaydır.

$$d\widehat{Q}(\nu,\widehat{\nu}) = \widehat{Q}(\widehat{\nu}) \tag{3.57}$$

Şimdi potansiyel operatörün koşulu [86] referansında bir iç çarpanı temsil eden $\langle a,b \rangle = a.b$ ile Denk. (3.58)'deki gibi verilmiştir.

$$\left\langle d\widehat{Q}(\nu,\widehat{\nu}),\tilde{\nu} \right\rangle = \left\langle d\widehat{Q}(\nu,\tilde{\nu}),\widehat{\nu} \right\rangle \tag{3.58}$$

Veya Denklemler (3.55) ve (3.57) kullanılarak Denk. (3.58)'in yerine eşdeğer olan aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\left(R.\widehat{\nu}\right)^t \tilde{\nu} = \left(R.\tilde{\nu}\right)^t \widehat{\nu} \tag{3.59}$$

Burada t transpozisyonu göstermiştir. Denk. (3.59)'da tüm girdiler sabitse matris operatörünün ana köşegene göre simetrik olması gerekmektedir. Şimdiki durumda, R'deki birinci mertebeden (d/dx) diferansiyel bileşenler kısmi integrasyon gerektirir, böylece (3.58) bu terimleri tutar ve kısmi integrasyondan kaynaklanan ilişkili sınır terimleri antisimetrik olmalıdır. Bunun böyle olduğu (dolayısıyla denklemlerin satır sırası ve sınır koşullarındaki faktör $\sqrt{2}$) daha önce verilen R'nin açık ifadelerinde görülmüştür. Bu nedenle (3.54)'de Q ifadesi potansiyel bir operatör olup ilk varyasyonları, problemin yönetici denklemlerine ve sınır koşullarına karşılık gelen ilişkili fonksiyonel formdur. Bu ilişkili fonksiyonel [86]'ya göre aşağıdaki gibi verilebilir:

$$J\left(v\right)=\int_{0}^{1}\left\langle Q\left(\eta v,F\right),v\right\rangle d\eta \tag{3.60}$$

Denk. (3.60)'daki operatör uygulanılırsa hali hazırdaki problem için aşağıdaki fonksiyonel, alan terimleri için $\left[a\,b\right]=\int_0^L a\,b\,dx$ ifadesi ile sınır terimleri için $\left[a\,\bar{b}\,\right]=a\,\bar{b}\Big|_0^L$ ifadesi ile elde edilir.

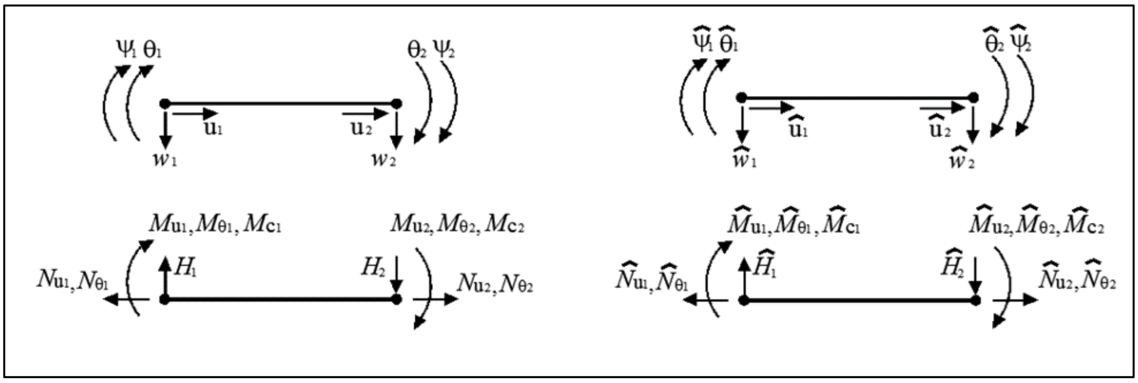
$$\begin{aligned}
J(v)=&\left[\frac{2M_c^{\,2}}{G_0 l_m^2}\right]+\left[\frac{M_\theta^{\,2}}{2E_2}\right]+\left[\frac{N_u^{\,2}}{2E_0}\right]+\left[\frac{M_u\,N_\theta}{E_1}\right]-\frac{1}{2}\left[N_u\,\hat{u}\right]-\frac{1}{2}\left[N_\theta\,\hat{u}\right]-\frac{1}{2}\left[H\,\hat{w}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\hat{\theta}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[M_u\,\hat{\theta}\right]+\frac{1}{2}\left[M_\theta\,\hat{\theta}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\hat{\psi}\right]+\left[f\,u\right]+\frac{1}{2}\left[\hat{N}_u\,u\right]+\frac{1}{2}\left[\hat{N}_\theta\,u\right]+\frac{1}{2}\left[I_0\omega^2u^2\right]+\left[q\,w\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\hat{H}\,w\right]+\frac{1}{2}\left[I_0\omega^2w^2\right]+\left[T\,\gamma\right]-\frac{1}{2}\left[G_0K_s\gamma^2\right]-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_c\,\theta\right]-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_u\,\theta\right]-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_\theta\,\theta\right]+\left[T\,\theta\right]\\
&-\left[I_1\omega^2u\,\theta\right]+\frac{1}{2}\left[I_0\omega^2\theta^2\right]+\left[H\,\psi\right]-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_c\,\psi\right]-\left[T\,\psi\right]+\frac{1}{2}\left[P\psi^2\right]+\frac{1}{2}\left[wH_{,x}\right]-\frac{1}{2}\left[\theta\,M_{c,x}\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[\psi\,M_{c,x}\right]-\frac{1}{2}\left[\theta\,M_{u,x}\right]-\frac{1}{2}\left[\theta\,M_{\theta,x}\right]+\frac{1}{2}\left[u\,N_{u,x}\right]+\frac{1}{2}\left[u\,N_{\theta,x}\right]-\frac{1}{2}\left[N_u\,u_{,x}\right]-\frac{1}{2}\left[N_\theta\,u_{,x}\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[H\,w_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\theta_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_u\,\theta_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_\theta\,\theta_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\psi_{,x}\right]
\end{aligned}\tag{3.61}$$

(3.42) ve (3.44)'deki $T=H+P\psi-M_{c,x}$ ve $\gamma=\psi-\theta$ denklemleri sırasıyla T ve γ için Denk. (3.61) içine tanıtılarak bir basitleştirmeye gidilebilir. Böylece T ve γ'nın ortadan kaldırılmasıyla fonksiyonelin daha basit bir formu (J^*) elde edilir. J^* fonksiyoneli, 10 bağımsız değişkenden $v^*=\{M_\theta, M_u, M_c, N_u, N_\theta, H, w, u, \theta, \psi\}$ meydana gelmiştir.

$$\begin{aligned}
J^*(v^*)=&\left[\frac{2M_c^{\,2}}{G_0 l_m^2}\right]+\left[\frac{M_\theta^{\,2}}{2E_2}\right]+\left[\frac{N_u^{\,2}}{2E_0}\right]+\left[\frac{M_u\,N_\theta}{E_1}\right]-\frac{1}{2}\left[N_u\,\hat{u}\right]-\frac{1}{2}\left[N_\theta\,\hat{u}\right]-\frac{1}{2}\left[H\,\hat{w}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\hat{\theta}\right]+\frac{1}{2}\left[M_u\,\hat{\theta}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[M_\theta\,\hat{\theta}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\hat{\psi}\right]+\left[f\,u\right]+\frac{1}{2}\left[\hat{N}_u\,u\right]+\frac{1}{2}\left[\hat{N}_\theta\,u\right]+\frac{1}{2}\left[I_0\omega^2u^2\right]+\left[q\,w\right]+\frac{1}{2}\left[\hat{H}\,w\right]+\frac{1}{2}\left[I_0\omega^2w^2\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[G_0K_s(\psi-\theta)^2\right]-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_c\,\theta\right]-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_u\,\theta\right]-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_\theta\,\theta\right]-\left[I_1\omega^2u\,\theta\right]+\frac{1}{2}\left[I_0\omega^2\theta^2\right]+\left[H\,\psi\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[\hat{M}_c\,\psi\right]+\frac{1}{2}\left[P\psi^2\right]+\frac{1}{2}\left[wH_{,x}\right]-\frac{1}{2}\left[\theta\,M_{c,x}\right]-\frac{1}{2}\left[\psi\,M_{c,x}\right]-\frac{1}{2}\left[\theta\,M_{u,x}\right]-\frac{1}{2}\left[\theta\,M_{\theta,x}\right]+\frac{1}{2}\left[u\,N_{u,x}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[u\,N_{\theta,x}\right]-\frac{1}{2}\left[N_u\,u_{,x}\right]-\frac{1}{2}\left[N_\theta\,u_{,x}\right]-\frac{1}{2}\left[H\,w_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\theta_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_u\,\theta_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_\theta\,\theta_{,x}\right]+\frac{1}{2}\left[M_c\,\psi_{,x}\right]
\end{aligned}\tag{3.62}$$

3.2.2 Karışık Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Karışık formülasyon, tüm alanlar için şekil fonksiyonlarının tanıtılmasıyla elde edilebilir. Fonksiyonellin yakından incelenmesi neticesinde doğrusal şekil fonksiyonlarının kullanılabileceği görülmüştür. Böylece C^0 tipi şekil fonksiyon yaklaşımı kullanılmıştır. Düğüm noktalarındaki serbestlik dereceleri Şekil (3.2)'de görüldüğü gibi nodal yer değiştirmelerden, dönmelerden, momentlerden ve kuvvetlerden ($M_\theta, M_u, M_c, N_\theta, N_u, H, w, u, \theta, \psi$) oluşmuştur.



Şekil 3.2 Karışık sonlu elemanlar için düğüm noktalarının serbestlik dereceleri: a) düğüm bilinmeyenleri b) öngörülen koşullar

Bilinen şekil fonksiyonları olan ϕ_1 ve ϕ_2'yi kullanarak *i=1,2* değerleri için $M_{\theta i}, M_{ui}, M_{ci}, N_{\theta i}, N_{ui}, H_i, w_i, u_i, \theta_i, \psi_i$ elemanlarının nodal değerleri üzerinde yaklaşımlar tanıtılabilir.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L_e}, \quad \phi_2(x) = \frac{x}{L_e}$$

$$\begin{gathered}
M_\theta(x) = \sum_{i=1}^{2} M_{\theta_i}\phi_i \qquad M_{\mathrm{u}}(x) = \sum_{i=1}^{2} M_{\mathrm{u}_i}\phi_i \qquad M_c(x) = \sum_{i=1}^{2} M_{c_i}\phi_i \\
N_\theta(x) = \sum_{i=1}^{2} N_{\theta_i}\phi_i \qquad N_{\mathrm{u}}(x) = \sum_{i=1}^{2} N_{\mathrm{u}_i}\phi_i \qquad H(x) = \sum_{i=1}^{2} H_i\phi_i \\
\theta(x) = \sum_{i=1}^{2} \theta_i\phi_i \quad \mathrm{u}(x) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{u}_i\phi_i \quad w(x) = \sum_{i=1}^{2} w_i\phi_i \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{2} \psi_i\phi_i
\end{gathered} \tag{3.63}$$

Denk. (3.63), Denk. (3.62)'in içine yerleştirilip fonksiyonel üzerine kararlı hal durumu tanıtılırsa eleman denklemleri aşağıda verildiği gibi matris formunu alır:

$$[K][\Delta] = [F] \tag{3.64}$$

$$\{[K]+P[S]\}[\Delta]=0 \tag{3.65}$$

$$\{[K]-\omega^2[M]\}[\Delta]=0 \tag{3.66}$$

Burada $[\Delta]=[M_{\theta 1}\,M_{u1}\,M_{c1}\,N_{u1}\,N_{\theta 1}\,H_1\,u_1\,w_1\,\psi_1\,\theta_1\;M_{\theta 2}\,M_{u2}\,M_{c2}\,N_{u2}\,N_{\theta 2}\,H_2\,u_2\,w_2\,\psi_2\,\theta_2\,]^t$ bilinmeyen nodal parametrelerin bir vektörüdür. Ayrıca $[K]$, $[S]$ ve $[M]$ sırasıyla eleman davranışının, stabilitesinin ve kütlesinin simetrik matrisleridir. Son olarak $[F]$ yük vektörü olup tanıtılan matrisler aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$[K]_{i;j}=\left.\frac{\partial^2 J^*}{\partial\Delta_i\partial\Delta_j}\right|_{\substack{\omega=0\\P=0}}\quad [M]_{i;j}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial\Delta_i\partial\Delta_j}\right)\quad [S]_{i;j}=\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial\Delta_i\partial\Delta_j}\right)\quad [F]_i=-\left.\frac{\partial J^*}{\partial\Delta_i}\right|_{\substack{\Delta_j=0\\ j=1,2,..,N}}$$

Bileşenlerin açık formları şu şekilde verilmiştir.

$[F]=[F]^1\cup[F]^2$ ve q ve f eleman bazındaki sabitler için

$$[F]^1=\frac{1}{2}\left[\hat{\theta}_1\;\hat{\theta}_1\;(\hat{\theta}_1+\hat{\psi}_1)-\hat{u}_1-\hat{u}_1-\hat{w}_1-(fL_e+\hat{N}_1)-(qL_e+\hat{H}_1)-\hat{M}_{c1}-\hat{M}_1\;\right]$$

$$[F]^2=\frac{1}{2}\left[-\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_2-(\hat{\theta}_2+\hat{\psi}_2)\;\hat{u}_2\;\hat{u}_2\;\hat{w}_2-(fL_e+\hat{N}_2)-(qL_e+\hat{H}_2)-\hat{M}_{c2}-\hat{M}_2\;\right]$$

$[S]_{9;9}=[S]_{1;9}=2[S]_{9;19}=L_e/3$ ve diğer elemanlar için $[S]_{i;j}=0$ 'dır $i,j=1,2,...,20$

$$[M]_{7;7}=[M]_{8;8}=[M]_{17;17}=[M]_{18;18}=2[M]_{7;17}=2[M]_{8;18}=I_0L_e/3$$
$$[M]_{10;10}=[M]_{20;20}=2[M]_{10;20}=I_2L_e/3$$
$$[M]_{7;10}=[M]_{17;20}=2[M]_{10;17}=2[M]_{7;20}=-I_1L_e/3$$

ve diğer elemanlar için $[M]_{i;j}=0$ 'dır $i,j=1,2,...,20$

$$
\begin{aligned}
&[K]_{1;1}=[K]_{11;11}=2[K]_{1;11}=L_e/(3E_2)\\
&[K]_{3;3}=[K]_{13;13}=2[K]_{3;13}=4L_e/(3G_0l_m^2)\\
&[K]_{2;5}=[K]_{12;15}=2[K]_{2;15}=L_e/(3E_1)\\
&[K]_{4;4}=[K]_{14;14}=2[K]_{4;14}=L_e/(3E_0)\\
&[K]_{6;9}=[K]_{16;19}=2[K]_{6;19}=2[K]_{9;16}=L_e/3\\
&[K]_{9;9}=[K]_{10;10}=-[K]_{9;10}=-G_0k_sL_e/3\\
&[K]_{19;19}=[K]_{20;20}=-[K]_{19;20}=-G_0k_sL_e/3\\
&[K]_{9;19}=-[K]_{9;20}=-[K]_{10;19}=[K]_{10;20}=-G_0k_sL_e/6\\
&[K]_{1;20}=[K]_{2;20}=[K]_{3;19}=[K]_{3;20}=[K]_{7;14}=[K]_{7;15}=[K]_{8;16}=1/2\\
&[K]_{4;17}=[K]_{5;17}=[K]_{6;18}=[K]_{9;13}=[K]_{10;11}=[K]_{10;12}=[K]_{10;13}=-1/2\\
&\text{ve diğer elemanlar için}[K]_{i;j}=0\text{ 'dır }\ i,\,j=1,2,\ldots,20
\end{aligned}
$$

Denk. (50.a) statik deformasyon analizini, Denk. (50.b) stabilite analizini ve Denk. (50.c) serbest titreşim analizini vermektedir. Sonlu elemanları birleştirme prosedürü her zamanki gibi gerçekleştirilebilir. Kritik burkulma yüklerini ve serbest titreşim frekanslarını elde eden öz değer analizi için uygun herhangi bir yöntem kullanılabilir.

3.3 Termal Etkinin Formülasyona Uygulanması

Termal etkinin formülasyona uygulanabilmesi için ilk olarak elastisite modülünün, malzeme yoğunluğunun ve termal genleşme katsayısının (α) klasik karışım kuralına göre aşağıdaki gibi tanımlanması gerekir:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{V_c}=\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{h}}+\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k}}\\
&\mathrm{V_m}=1-\mathrm{V_c}
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E(z)}=\mathrm{E_c}\cdot\mathrm{V_c}+\mathrm{E_m}\cdot\mathrm{V_m}\\
&\rho(\mathrm{z})=\rho_{\mathrm{c}}\cdot\mathrm{V_c}+\rho_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{V_m}\\
&\alpha(\mathrm{z})=\alpha_{\mathrm{c}}.\mathrm{V_c}+\alpha_{\mathrm{m}}.\mathrm{V_m}
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Birinci dereceden kayma deformasyon alan denklemleri daha önce ifade edildiği gibi kullanılarak termal gerilmeninde (σ^T) dâhil edildiği yeni gerilme bağıntıları Denk. (3.69)'daki gibi elde edilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{ij}} = \lambda(z)tr\left(\varepsilon_{ij}\right)\delta_{ij} + 2\mu(z)\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha(\mathrm{z})\,\Delta T\,\delta_{ij} \\
&\sigma_{xx} = -\Delta T\alpha(z)\left(3\lambda(\mathrm{z}) + 2\mu(\mathrm{z})\right) + \left(\lambda(\mathrm{z}) + 2\mu(\mathrm{z})\right)(\mathrm{u}_{,x} - z\psi_{,x}) \\
&\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = -k_s\mu(\mathrm{z})(\psi - \mathrm{w}_{,x}) \\
&\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\Delta T\alpha(\mathrm{z})\left(3\lambda(\mathrm{z}) + 2\mu(\mathrm{z})\right) + \lambda(\mathrm{z})\left(\mathrm{u}_{,x} - z\psi_{,x}\right)
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

σ_{ij}, termal etkininde dâhil edildiği en genel gerilme ifadesidir. i,j=x,y,z değişkenleri yerlerine yazılıp sıfır olmayan değerler Denk. (3.69)'da gösterilmiştir. Denklem (3.69) kullanılarak, Cauchy gerilme tensörü Duhamel-Neumann termoelastik kurucu yasadan bulunmuştur [87]. Ayrıca, Cauchy gerilmesinin termal (sıcaklık) kısmı Denk. (3.70)'de gösterilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij}^{T} = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha(\mathrm{z})\,\Delta T\,\delta_{ij} \\
&\sigma_{xx}^{T} = \sigma_{yy}^{T} = \sigma_{zz}^{T} = \Delta T\alpha(z)\left(3\lambda(\mathrm{z}) + 2\mu(\mathrm{z})\right)
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Termal etkinin gerilme halinde formülasyona dâhil edilmesiyle şekil değiştirme enerjisi tekrardan Denk. (3.71)'deki gibi ifade edilmiştir.

$$U = U^{S} + U^{BT} \tag{3.71}$$

U^{S}, doğrusal elastik bir izotropik malzeme için kirişin gerilme ve gerilme çifti alanlarından kaynaklanan şekil değiştirme enerjisinin bir parçası olup U^{BT} ise uygulanan burkulma yükünden ve sıcaklık değişimlerinden kaynaklanan şekil değiştirme enerjisinin bir parçasını simgelemektedir. Her iki farklı parça şu şekilde tanımlanabilir:

$$U^{S} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij} - \sigma_{ij}^{T}\varepsilon_{ij}\right)dv \quad \left(i, j = 1, 2, 3\right) \tag{3.72}$$

$$U^{BT} = -\frac{1}{2}\int_{0}^{L}\left(P + N^{T}\right)\left(w,_{x}\right)^{2} dx \tag{3.73}$$

Ve

$$N^{T} = b\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{E(z)}{1-2v}\right)\alpha(z)\,\Delta T\,dx \tag{3.74}$$

Burada Ω ve ΔT sembolleri sırasıyla kiriş etki alanını ve sıcaklık değişimini ifade etmektedir. Ayrıca, FD kirişin kinetik enerjisi Denk. (3.14)'de tanımlandığı gibi kalmıştır. Dış kuvvetler tarafından yapılan iş termal etkinin dâhil edilmesiyle Denk. (3.75)'deki gibi tekrardan tanımlanır:

$$\mathrm{W} = \int_{\Omega} qw\, dv + \int_{\Omega} \left(f + C_0\, \Delta T \right) u\, dv + P\, \mathrm{u}\Big|_0^L + Q\, w\Big|_0^L + M\, \theta\Big|_0^L + M_c\, w_{,x}\Big|_0^L \tag{3.75}$$

Bu bölümde, yönetici denklemler, başlangıç ve sınır koşulları referans [48] 'e benzer şekilde türetilmiştir. Sonuç olarak, termal etkinin de dâhil edildiği yeni şekil değiştirme enerjisinin ifadesi şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
\delta U = & -\int_0^L \left((\lambda_0 + 2\mu_0)\mathrm{u}_{,xx} - (\lambda_1 + 2\mu_1)\theta_{,xx} \right) \delta u\, dx - \int_0^L ((\lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_0 l^2)\theta_{,xx} - k_s\mu_0\theta \\
& -(\lambda_1 + 2\mu_1)\mathrm{u}_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx} + k_s\mu_0 w_{,x})\delta\theta dx + \int_0^L (\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxxx} + (-k_s\mu_0 + P + C_0\Delta T) w_{,xx} \\
& + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 \theta_{,xxx} + k_s\mu_0\theta_{,x})\delta w\, dx + ((\lambda_0 + 2\mu_0)\mathrm{u}_{,x} - (\lambda_1 + 2\mu_1)\theta_{,x})\delta u\Big|_0^L \\
& + ((\lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_0 l^2)\theta_{,x} - (\lambda_1 + 2\mu_1)\mathrm{u}_{,x} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx})\delta\theta\Big|_0^L \\
& + (-\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx} + \left(k_s\mu_0 - P - C_0\Delta T \right) w_{,x} - \frac{1}{4}\mu_0 l^2 \theta_{,xx} - k_s\mu_0\theta)\delta w\Big|_0^L \\
& + (\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 \theta_{,x})\delta\left(w_{,x} \right)\Big|_0^L
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Burada $C_i = b\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{E(z)}{1-2v} \right) \alpha(z)\, z^i\, dz, \rightarrow i = 0,1$ şeklinde tanımlanmıştır. Dış kuvvetlerin ilk varyasyonu şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
\delta \mathrm{W} = & \int_0^L \left(f + C_0\, \Delta T \right) \delta u + q\delta w dx - C_1\, \Delta T\, \delta\theta dx \\
& + \left(P\delta \mathrm{u}\Big|_0^L + \hat{Q}\, \delta w\Big|_0^L + \hat{M}\, \delta\theta\Big|_0^L + \hat{M}_c \delta\left(w_{,x} \right)\Big|_0^L \right)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Son olarak, Hamilton ilkesi ve temel lemma sabitleri kullanılarak termal etkinin dâhil edildiği yeni yönetici denklemler ve sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta \mathrm{u}: \left(\lambda_0 + 2\mu_0 \right) \mathrm{u}_{,xx} - \left(\lambda_1 + 2\mu_1 \right) \theta_{,xx} + C_0\Delta T + f = I_0 \ddot{\mathrm{u}} - I_1 \ddot{\theta} \tag{3.78}$$

$$\delta\theta: \left(\lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 \right) \theta_{,xx} - k_s\mu_0\theta - \left(\lambda_1 + 2\mu_1 \right) \mathrm{u}_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx} + k_s\mu_0 w_{,x} - C_1\Delta T = I_2\ddot{\theta} - I_1\ddot{\mathrm{u}} \tag{3.79}$$

$$\delta w : \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxxx} + \left(-k_s\mu_0 + P + C_0\Delta T\right) w_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 \theta_{,xxx} + k\mu_0\theta_{,x} - q = -I_0\ddot{w} \tag{3.80}$$

$$x=0 \text{ ve } x=L \text{ için} \rightarrow \left(\lambda_0 + 2\mu_0\right)\mathrm{u}_{,x} - \left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\theta_{,x} = P \quad \text{ya da} \quad \mathrm{u} = \hat{\mathrm{u}} \tag{3.81}$$

$$\begin{gathered} x=0 \text{ ve } x=L \text{ için} \rightarrow \left(\lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_0 l^2\right)\theta_{,x} - \left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\mathrm{u}_{,x} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx} = \hat{M} \\ \text{ya da} \quad \theta = \hat{\theta} \end{gathered} \tag{3.82}$$

$$\begin{gathered} x=0 \text{ ve } x=L \text{ için} \rightarrow -\frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xxx} + \left(k_s\mu_0 - P + C_0\,\Delta T\right) w_{,x} - \frac{1}{4}\mu_0 l^2 \theta_{,xx} \\ -k_s\mu_0\theta = \hat{Q} \quad \text{ya da} \quad \text{için} \;\; w = \hat{w} \end{gathered} \tag{3.83}$$

$$x=0 \text{ ve } x=L \text{ için} \rightarrow \frac{1}{4}\mu_0 l^2 w_{,xx} + \frac{1}{4}\mu_0 l^2 \theta_{,x} = \hat{M}_c \quad \text{ya da} \quad w_{,x} = \hat{w}_{,x} \tag{3.84}$$

Termal etkinin dâhil edilebilmesi için Denklemler (3.78), (3.79), (3.80) daha önce ifade edildiği gibi gerilme bileşenleri cinsinden tekrardan tanımlanmıştır.

$$N_{u,x} + N_{\theta,x} + f + C_0\,\Delta T = -\omega^2 I_0 u + \omega^2 I_1\theta \tag{3.85}$$

$$H_{,x} + q = -\omega^2 I_0 w \tag{3.86}$$

$$T - M_{u,x} - M_{\theta,x} - M_{c,x} - C_1\,\Delta T = \omega^2 I_1 u - \omega^2 I_2\theta \tag{3.87}$$

Yukarıda elde edilen termal etki dâhil edilmiş yeni yöneteci denklemler kullanılarak daha önce FD mikro kiriş için elde edilen fonksiyonelde izlenen prosedür aynen tatbik edilmiştir. Böylece termal etki dâhil edilmiş Denk. (3.88)'deki yeni fonsiyonel elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} J^*(v^*) = & \left[\frac{2M_c^{\,2}}{G_0 l_m^2}\right] + \left[\frac{M_\theta^{\,2}}{2E_2}\right] + \left[\frac{N_\mathrm{u}^{\,2}}{2E_0}\right] + \left[\frac{M_\mathrm{u}\,N_\theta}{E_1}\right] - \frac{1}{2}\left[N_\mathrm{u}\,\hat{\mathrm{u}}\right] - \frac{1}{2}\left[N_\theta\,\hat{\mathrm{u}}\right] - \frac{1}{2}\left[H\,\hat{w}\right] + \frac{1}{2}\left[M_c\,\hat{\theta}\right] + \frac{1}{2}\left[M_u\,\hat{\theta}\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[M_\theta\,\hat{\theta}\right] + \frac{1}{2}\left[M_c\,\hat{\psi}\right] + \left[f\,\mathrm{u}\right] + \left[C_0\,\Delta T\,\mathrm{u}\right] + \frac{1}{2}\left[\hat{N}_\mathrm{u}\,\mathrm{u}\right] + \frac{1}{2}\left[\hat{N}_\theta\,\mathrm{u}\right] + \frac{1}{2}\left[I_0\omega^2\mathrm{u}^2\right] + \left[q\,w\right] + \frac{1}{2}\left[\hat{H}\,w\right] + \frac{1}{2}\left[I_0\omega^2 w^2\right] \\ & - \left[C_1\,\Delta T\,\theta\right] - \frac{1}{2}\left[G_0 K_s(\psi-\theta)^2\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{M}_c\,\theta\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{M}_\mathrm{u}\,\theta\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{M}_\theta\,\theta\right] - \left[I_1\omega^2\mathrm{u}\theta\right] + \frac{1}{2}\left[I_2\omega^2\theta^2\right] + \left[H\psi\right] \\ & - \frac{1}{2}\left[\hat{M}_c\,\psi\right] + \frac{1}{2}\left[P\psi^2\right] + \frac{1}{2}\left[C_0\,\Delta T\,\psi^2\right] + \frac{1}{2}\left[wH_{,x}\right] + \left[\theta\left(H + (P + C_0\,\Delta T)\,\psi - M_{c,x}\right)\right] - \left[\psi\left(H + (P + C_0\,\Delta T)\,\psi - M_{c,x}\right)\right] \\ & + \left[\left(-\theta+\psi\right)\left(H + (P + C_0\,\Delta T)\,\psi - M_{c,x}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\theta\,M_{c,x}\right] - \frac{1}{2}\left[\psi\,M_{c,x}\right] - \frac{1}{2}\left[\theta\,M_{u,x}\right] - \frac{1}{2}\left[\theta\,M_{\theta,x}\right] + \frac{1}{2}\left[\mathrm{u}\;N_{\mathrm{u},x}\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[\mathrm{u}\,N_{\theta,x}\right] - \frac{1}{2}\left[N_\mathrm{u}\,\mathrm{u}_{,x}\right] - \frac{1}{2}\left[N_\theta\,\mathrm{u}_{,x}\right] - \frac{1}{2}\left[H\,w_{,x}\right] + \frac{1}{2}\left[M_c\,\theta_{,x}\right] + \frac{1}{2}\left[M_\mathrm{u}\,\theta_{,x}\right] + \frac{1}{2}\left[M_\theta\,\theta_{,x}\right] + \frac{1}{2}\left[M_c\,\psi_{,x}\right] \end{aligned} \tag{3.88}$$

Bu yeni fonksiyonel kullanılarak karışık sonlu elemanlar formülasyonu daha önce türedildiği gibi yine aynı şekilde termal etkiye sahip yeni sonlu elemanlar formülasyonu türetilmiştir. Ayrıca yeni oluşan karışık sonlu elemanların rijitlik, stabilite ve kütle matrikslerinin ve yük vektörünün açık formları şu şekilde verilir:

Termal etkili yük vektörü:

$\left[F\right]=\left[F\right]^{1}\bigcup\left[F\right]^{2}$ ve q ve f eleman bazındaki sabitler için

$$\left[F\right]^{1}=\frac{1}{2}\left[\hat{\theta}_{1}\;\hat{\theta}_{1}\;(\hat{\theta}_{1}+\hat{\psi}_{1})-\hat{u}_{1}-\hat{u}_{1}-\hat{w}_{1}-(fL_{e}+\hat{N}_{1}+C_{0}L_{e}\Delta T)-(qL_{e}+\hat{H}_{1})-\hat{M}_{c1}-(\hat{M}_{1}+C_{1}L_{e}\Delta T)\right]$$

$$\left[F\right]^{2}=\frac{1}{2}\left[-\hat{\theta}_{2}-\hat{\theta}_{2}-(\hat{\theta}_{2}+\hat{\psi}_{2})\;\hat{u}_{2}\;\hat{u}_{2}\;\hat{w}_{2}-(fL_{e}+\hat{N}_{2}+C_{0}L_{e}\Delta T)-(qL_{e}+\hat{H}_{2})-\hat{M}_{c2}-(\hat{M}_{2}+C_{1}L_{e}\Delta T)\right]$$

Stabilite matrisi:

$$\left[S\right]_{9;9}=\left[S\right]_{1;9}=2\left[S\right]_{9;19}=L_{e}/3 \text{ ve diğer elemanlar için } \left[S\right]_{i;j}=0 \text{ 'dır } \; i,j=1,2,...,20$$

Kütle matrisi:

$$\left[M\right]_{7;7}=\left[M\right]_{8;8}=\left[M\right]_{17;17}=\left[M\right]_{18;18}=2\left[M\right]_{7;17}=2\left[M\right]_{8;18}=I_{0}L_{e}/3$$
$$\left[M\right]_{10;10}=\left[M\right]_{20;20}=2\left[M\right]_{10;20}=I_{2}L_{e}/3$$
$$\left[M\right]_{7;10}=\left[M\right]_{17;20}=2\left[M\right]_{10;17}=2\left[M\right]_{7;20}=-I_{1}L_{e}/3$$
$$\text{ve diğer elemanlar için } \left[M\right]_{i;j}=0 \text{ 'dır } \; i,j=1,2,...,20$$

Termal etkili rijitlik matrisi:

$$\left[K\right]_{1;1}=\left[K\right]_{11;11}=2\left[K\right]_{1;11}=L_{e}/(3E_{2})$$
$$\left[K\right]_{3;3}=\left[K\right]_{13;13}=2\left[K\right]_{3;13}=4L_{e}/(3G_{0}l_{m}^{2})$$
$$\left[K\right]_{2;5}=\left[K\right]_{12;15}=2\left[K\right]_{2;15}=L_{e}/(3E_{1})$$
$$\left[K\right]_{4;4}=\left[K\right]_{14;14}=2\left[K\right]_{4;14}=L_{e}/(3E_{0})$$
$$\left[K\right]_{6;9}=\left[K\right]_{16;19}=2\left[K\right]_{6;19}=2\left[K\right]_{9;16}=L_{e}/3$$
$$\left[K\right]_{9;9}=\left[K\right]_{10;10}=-\left[K\right]_{9;10}=-G_{0}k_{s}L_{e}/3+C_{0}L_{e}\Delta T/3$$
$$\left[K\right]_{19;19}=\left[K\right]_{20;20}=-\left[K\right]_{19;20}=-G_{0}k_{s}L_{e}/3+C_{0}L_{e}\Delta T/3$$
$$\left[K\right]_{9;19}=-\left[K\right]_{9;20}=-\left[K\right]_{10;19}=\left[K\right]_{10;20}=-G_{0}k_{s}L_{e}/6+C_{0}L_{e}\Delta T/6$$
$$\left[K\right]_{1;20}=\left[K\right]_{2;20}=\left[K\right]_{3;19}=\left[K\right]_{3;20}=\left[K\right]_{7;14}=\left[K\right]_{7;15}=\left[K\right]_{8;16}=1/2$$
$$\left[K\right]_{4;17}=\left[K\right]_{5;17}=\left[K\right]_{6;18}=\left[K\right]_{9;13}=\left[K\right]_{10;11}=\left[K\right]_{10;12}=\left[K\right]_{10;13}=-1/2$$
$$\text{ve diğer elemanlar için } \left[K\right]_{i;j}=0 \text{ 'dır } \; i,j=1,2,...,20$$

4
SAYISAL UYGULAMALAR VE SONUÇLAR

4.1 Sayısal Uygulamalar

Bu bölümde, Karışık sonlu elemanlar formülasyonu, statik eğilme, serbest titreşim ve kritik burkulma yükleri açısından önceki çalışmalar ile karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Karşılaştırma yapmak için çökme $\bar{w}$, moment $\bar{M}$, normal kuvvet $\bar{N}$, doğal frekans $\bar{\omega}$ ve burkulma yükü $\bar{P}_{cr}$ için aşağıdaki boyutsuz nicelikler kullanılmıştır.

$$\bar{w} = \frac{w}{L} \qquad \bar{M} = \frac{M}{qL^2} \qquad \bar{N} = \frac{N}{qL}$$

$$\bar{\omega} = \omega \,.\, \sqrt{\frac{\rho_c \,.\, A \,.\, L^4}{E_c \,.\, I}} \qquad \bar{P}_{cr} = P_{cr} \,.\, \frac{L^2}{E_c \,.\, I}$$

Aşağıdaki genel sınır koşulları, ankastre-ankastre (C-C), mafsallı-mafsallı (H-H), ankastre-serbest (C-F konsol), ankastre-mafsal (C-H) ve mafsal-serbest (H-S) sınır tipleri için tanımlanmıştır.

$$\text{Ankastre} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{u} = 0 \\ w = 0 \\ \psi = w_{,x} = 0 \end{cases} \quad \text{Mafsal} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{u} = 0 \\ w = 0 \\ M = M_C = 0 \end{cases} \quad \text{Serbest} \rightarrow \begin{cases} N = 0 \text{ ya da } P_{cr} \text{(stabilite problemleri için)} \\ H = 0 \\ M = M_C = 0 \end{cases}$$

4.1.1 Formülasyonun Doğrulanması

Tüm doğrulama hesaplamalarında (statik, serbest titreşim, burkulma) kirişin genişliği kirişin kalınlığının iki katı olarak seçilip ($b = 2h$) uzunluk skala parametresi [48]'de olduğu gibi (lm = 17,6 μm) alınmıştır. Kayma düzeltme faktörü (k_s), dikdörtgen kesitler için $k_s = 5/6$ olduğu varsayılmıştır. Üstelik doğrulama statik çökme senaryosuyla başlamıştır. Homojen malzemeden yapılmış bir konsol kiriş (E=1.44 GPa, ν=0.38), F=10^{-4} N'luk bir uç kuvveti ile yüklenmiştir. Konsol kirişin boyutsuz uç çökmesi ($\bar{w}_{max}$), referans [88]'de verilen analitik çözüm vasıtasıyla hesaplanmış olup şimdiki karışık sonlu elemanlar formülasyonu sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma 5, 10, 20, 50 arasında değişen *L/h* değerleri ve 1, 2/3 ve 1/3 arasında değişen *lm/h* değerleri için yapılmıştır. Bu değerler Tablo 4.1'de görülebilmektedir. Ayrıca, göreceli ortalama hata yüzdesi (ARE%), meş belirleme için hesaplanmış olup Tablo 4.1'de verilmiştir. Kesin çözüme kıyasla 10 sonlu eleman için ARE%'nin 0,5'ten az olduğu ve 80 eleman için 0.006'ya düştüğü gözlemlenmiştir [88].

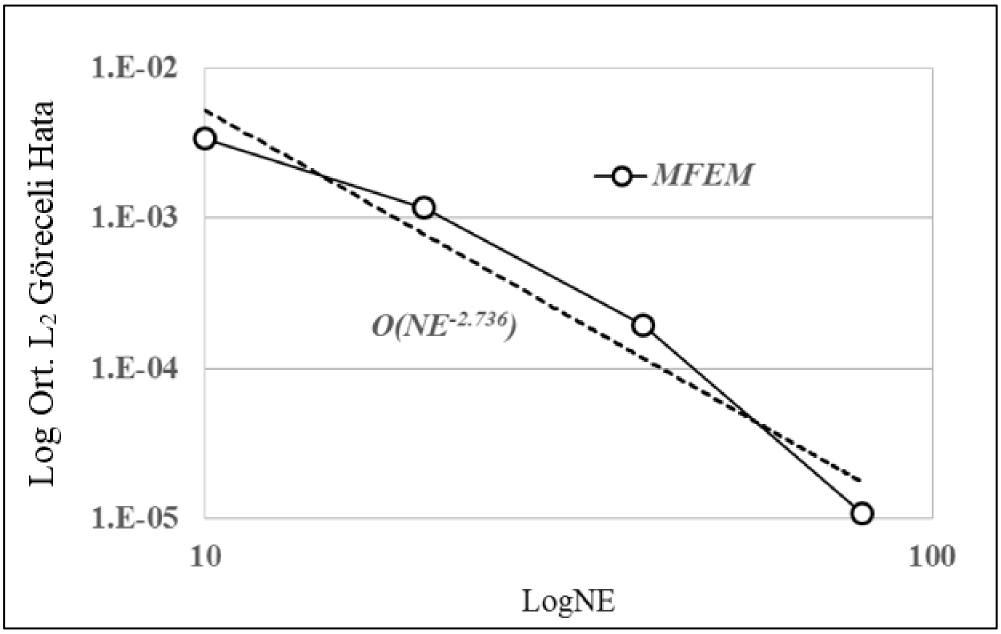
Tablo 4.1 Bu çalışma ile bir konsol mikro kirişi için elde edilen statik eğilme sonuçlarının kesin çözümlerle karşılaştırılması

$\bar{w}_{maks}$		**Kesin**	**Bu Çalışma**			
L/h	***l_m/h***	**-**	**NE=10**	**NE=20**	**NE=40**	**NE=80**
5	1	0.00194	0.00195	0.00195	0.00194	0.00194
	2/3	0.00139	0.00140	0.00139	0.00139	0.00139
	1/3	0.00056	0.00056	0.00056	0.00056	0.00056
10	1	0.00735	0.00738	0.00736	0.00736	0.00735
	2/3	0.00532	0.00534	0.00533	0.00532	0.00532
	1/3	0.00215	0.00215	0.00215	0.00215	0.00215
20	1	0.02898	0.02908	0.02901	0.02899	0.02898
	2/3	0.02104	0.02111	0.02106	0.02104	0.02104
	1/3	0.00849	0.00852	0.00850	0.00849	0.00849
50	1	0.18037	0.18097	0.18052	0.18041	0.18038
	2/3	0.13104	0.13148	0.13115	0.13107	0.13105
	1/3	0.05292	0.05309	0.05296	0.05293	0.05292
ARE (%)			**0.362**	**0.097**	**0.026**	**0.006**

Tablo 4.2 Malzeme özellikleri [48]

	Elastisite modülü E (GPa)	**Yoğunluk ρ (kg/m³)**	**Poisson oranı ν**
Aluminum	70	2700	0,23
Alumina	380	3800	0,23

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş mikro kirişler için serbest titreşim ve burkulma karşılaştırması, literatürde iyi bilinen başka bir sayısal yönteme göredir: Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadratür Yöntemi (GDQM). Karşılaştırma için referans [48]'de GDQ metodu kullanılan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş mikro kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerinden faydalanılmıştır. [48]'de olduğu gibi, mafsallı-mafsallı ve ankastre-ankastre mikro kirişler, Tablo 4.2'de verilen malzeme özellikleri ile seçilmiştir. GDQM deneme sayısı için, yakınsama çalışması üzerinde daha fazla gelişme görülmediği gözlemlendiğinden noktalar 80 olarak seçilmiştir. 20, 40 ve 80 eleman kullanılan bu çalışmada GDQM ve karışık sonlu elemanlar yöntemi formülasyonu için Tablo 4.3 boyutsuz serbest titreşim $\bar{\omega}$ karşılaştırması ve Tablo 4.4 boyutsuz burkulma yükü $\bar{P}_{cr}$ karşılaştırması gösterilmiştir. Tekrardan *5, 10, 20, 50* değerleri arasında değişen *L/h* değerleri ve *1, 2/3, 1/3* arasında değişen l_m/h değerleri için karşılaştırma yapılmıştır. Ayrıca, derecelendirme parametresi k= 2,5 olarak ayarlanmıştır. *ARE%* 'den gözlendiği gibi, bu çalışmanın karışık sonlu elemanlar sonuçlarının, 80 noktalı GDQM'ye göre hesaplanmasında mükemmel bir uyum bulunmuştur. Göreceli ortalama hata oranı (% ARE), 20 elemanlı mafsallı- mafsallı sınır koşulu için 0.025'ten az 40 ve 80 eleman için bu orandan daha düşük olup fakat bu değere yakın görülmüştür. Böylece, bu çalışmanın bu durum için varsayılan önemli hane sayıları dâhilinde yakınsamaya ulaştığı sonucuna varılmıştır. Ankastre-Ankastre sınır koşulu için mevcut eleman sayısının artmasıyla birlikte, 20 elemanın kullanımı için ARE% 0,06'dan daha az ve 80 eleman kullanılarak % 0.003'ten daha düşük ARE ürettiği görülmektedir. Ayrıca, eleman sayısına (NE) göre göreceli hatanın ortalama L_2 normu, Tablo 4.1'deki statik eğilme çözümlerine dayanarak Şekil 4,3'te verilmiştir. Log-Log grafiği içerisindeki eğim çizgisi, $O(NE^{-2.736})$'nın yakınsama oranını ya da tipik eleman boyutu *le* kullanarak eşdeğer olarak $O({l_e}^{2.736})$'nın yakınsama oranını göstermiştir.



Şekil 4.1 Eleman Sayısına (NE) Karşı Log-Log Ortalama L2 Göreceli Hata Grafiği

Tablo 4.3 Mafsallı-mafsallı ve ankastre-ankastre FD mikro kirişleri için MFE yöntemiyle elde edilen boyutsuz temel frekansların GDQ yöntemi sonuçları ile karşılaştırılması (*k=2,5*)

$\bar{\omega}$		Mafsallı-Mafsallı				Ankastre-Ankastre			
		GDQM	Bu Çalışma			GDQM	Bu Çalışma		
L/h	l_m/h	N=80	NE=20	NE=40	NE=80	N=80	NE=20	NE=40	NE=80
5	1	19.936	19.912	19.912	19.912	36.781	36.797	36.778	36.776
	2/3	15.003	15.002	15.002	15.002	28.906	28.922	28.907	28.906
	1/3	10.645	10.645	10.645	10.645	20.701	20.720	20.703	20.701
10	1	21.349	21.348	21.348	21.348	44.591	44.631	44.596	44.592
	2/3	15.823	15.823	15.823	15.823	33.588	33.613	33.592	33.589
	1/3	11.138	11.137	11.138	11.138	23.590	23.610	23.593	23.590
20	1	21.805	21.786	21.786	21.786	47.983	48.011	47.989	47.984
	2/3	16.057	16.062	16.063	16.063	35.417	35.432	35.421	35.417
	1/3	11.277	11.276	11.277	11.277	24.623	24.633	24.626	24.624
50	1	21.918	21.916	21.916	21.916	49.159	49.166	49.162	49.160
	2/3	16.133	16.133	16.133	16.133	36.021	36.024	36.022	36.021
	1/3	11.317	11.317	11.317	11.317	24.951	24.953	24.952	24.951
ARE (%)			0.0229	0.0224	0.0224		0.0512	0.0097	0.0027

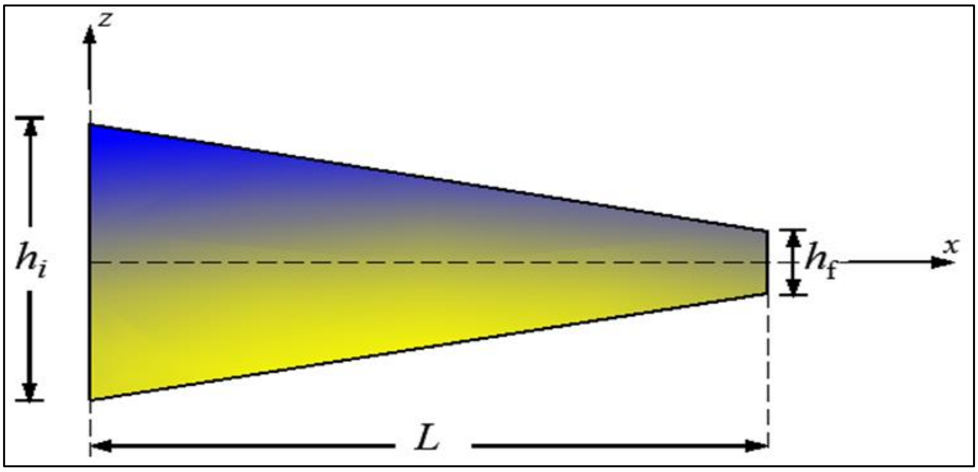
Benzer şekilde, burkulma yükü hesaplamaları için mevcut çalışma, 20 elemanlı mafsallı-mafsallı sınır koşulu için %0.04'ten daha düşük bir ARE% üretmiştir. Üstelik, ARE% değerleri 40 ve 80 eleman için bu değere yakınsamıştır. Dolayısıyla, serbest titreşim durumunda olduğu gibi bu çalışmanın H-H konfigürasyonu için öngörülen önemli basamak sayısında yakınsamaya ulaştığı sonucuna varılmıştır. Ankastre-Ankastre sınır koşulu için mevcut eleman sayısındaki artışla birlikte, sadece 20 eleman kullanılarak ARE% 0,015'ten daha az ve 80 eleman kullanarak % 0.003'ten daha düşük ARE% ürettiği görülmüştür.

Tablo 4.4 Mafsallı-mafsallı ve ankastre-ankastre FD mikro kirişleri için MFE yöntemiyle elde edilen boyutsuz kritik burkulma yüklerini GDQ yöntemi sonuçları ile karşılaştırılması (*k=2,5*)

$\overline{P}_{cr}$		**Mafsallı-Mafsallı**				**Ankastre-Ankastre**			
		GDQM	**Bu Çalışma**			**GDQM**	**Bu Çalışma**		
L/h	***l_m/h***	**N=80**	**NE=20**	**NE=40**	**NE=80**	**N=80**	**NE=20**	**NE=40**	**NE=80**
5	**1**	37.412	37.470	37.471	37.471	103.172	103.150	103.156	103.157
	2/3	21.373	21.371	21.371	21.371	63.623	63.619	63.623	63.624
	1/3	10.804	10.796	10.796	10.796	32.885	32.882	32.884	32.885
10	**1**	42.643	42.642	42.642	42.642	148.608	148.600	148.613	148.614
	2/3	23.436	23.436	23.436	23.436	83.843	83.840	83.847	83.848
	1/3	11.615	11.614	11.615	11.615	41.289	41.285	41.288	41.289
20	**1**	44.196	44.197	44.198	44.198	168.522	168.503	168.519	168.520
	2/3	24.029	24.025	24.026	24.026	91.561	91.551	91.560	91.561
	1/3	11.840	11.841	11.841	11.841	44.203	44.197	44.201	44.201
50	**1**	44.689	44.655	44.656	44.656	175.212	175.195	175.213	175.214
	2/3	24.205	24.196	24.197	24.197	94.018	94.010	94.019	94.020
	1/3	11.908	11.906	11.906	11.906	45.099	45.095	45.099	45.099
ARE (%)			**0.0337**	**0.0327**	**0.0325**		**0.0102**	**0.0028**	**0.0027**

4.1.2 Konik Mikro Kirişler

Sonlu elemanlar formülasyonunun avantajlarını ve çok yönlülüğünü göstermek için fonksiyonel olarak derecelendirilmiş konik mikro kirişler modellenmiştir. Kirişin başlangıç kalınlığı (h_i) ve kirişin bitiş kalınlığı (h_f), Şekil 4.2'de gösterildiği gibi kirişin uzunluğu eksenel eksen boyunca doğrusal ve sürekli olarak değişmektedir. H-H, C-C, C-H ve C-F (ankastre kiriş) sınır konfigürasyonları için boyutsuz serbest titreşim değerleri ve boyutsuz burkulma yükleri sırasıyla Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da verilmiştir. k parametresi 0 (saf metal), 0.5, 1, 2 ve 4 değerleri arasında, koniklik oranı (h_f /$\mathrm{h_i}$) 1/6, 1/3, 2/3 ve 1 değerleri arasında, boy-en oranı (L/h) 5 ile 50 değerleri arasında seçilip $h=(h_i+h_f)/2$ olarak kabul edilmiştir. Ayrıca önceden bahsedildiği gibi $h_i=2l_m$ ve l_m=17.6 μm olarak alınmıştır. Son olarak, metal faz ve seramik fazdan oluşan FD Timoshenko mikro kirişlerinin malzeme özellikleri Tablo 4.2'de belirtildiği gibi seçilmiştir. Seçilen senaryolar için yeterli yakınsama çalışması yapıldığı gözlendiğinden, sonraki hesaplamalarda sonlu eleman sayısı 80'e ayarlanmıştır.



Şekil 4.2 Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş konik mikro kiriş konfigürasyonu

FD konik mikro-kirişin bazı malzeme özellikleri aşağıdaki formda elde edilmiştir.

Tablo 4.5 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin boyutsuz temel frekanslarının değişimi

$\bar{\omega}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
		L/h=5	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*
k	h_f/h_i								
0	**1/6**	9.188	10.577	16.909	24.165	14.457	19.006	6.160	6.925
	1/3	8.440	9.756	15.292	22.247	12.624	16.784	4.736	5.293
	2/3	7.184	8.549	12.528	19.290	10.001	13.851	3.249	3.626
	1	6.243	7.744	10.533	17.383	8.254	12.045	2.468	2.764
0.5	**1/6**	13.532	15.599	24.833	35.122	21.204	27.607	8.936	10.000
	1/3	12.452	14.422	22.467	32.273	18.511	24.349	6.860	7.634
	2/3	10.618	12.674	18.412	27.850	14.663	20.048	4.694	5.216
	1	9.233	11.499	15.482	24.982	12.105	17.403	3.558	3.968
1	**1/6**	14.921	17.145	27.447	38.577	23.424	30.308	9.819	10.944
	1/3	13.712	15.818	24.834	35.411	20.443	26.699	7.532	8.349
	2/3	11.672	13.849	20.353	30.477	16.181	21.924	5.147	5.697
	1	10.138	12.527	17.114	27.265	13.350	18.984	3.898	4.329
2	**1/6**	16.051	18.383	29.604	41.499	25.263	32.595	10.573	11.757
	1/3	14.727	16.919	26.785	38.079	22.042	28.694	8.108	8.966
	2/3	12.508	14.753	21.950	32.739	17.437	23.522	5.538	6.115
	1	10.852	13.303	18.457	29.259	14.379	20.333	4.192	4.644
4	**1/6**	16.841	19.262	31.104	43.675	26.551	34.306	11.135	12.387
	1/3	15.438	17.705	28.139	40.088	23.166	30.203	8.542	9.449
	2/3	13.097	15.409	23.059	34.496	18.325	24.761	5.837	6.447
	1	11.357	13.876	19.389	30.856	15.109	21.404	4.421	4.898

Tablo 4.6 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin değişimi

$\overline{P}_{cr}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
k	**h_f/h_i**	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***
0	**1/6**	5.644	7.305	14.446	28.043	9.048	14.677	2.445	2.787
	1/3	5.070	6.527	12.984	25.704	8.193	13.258	1.987	2.235
	2/3	3.831	5.221	9.163	20.644	5.998	10.626	1.346	1.510
	1	2.930	4.325	6.531	17.040	4.436	8.792	0.965	1.085
0,5	**1/6**	13.912	18.064	35.474	67.684	22.179	35.485	5.892	6.670
	1/3	12.534	16.204	31.894	61.630	20.066	31.888	4.761	5.317
	2/3	9.499	13.028	22.506	48.885	14.687	25.358	3.198	3.557
	1	7.273	10.826	16.041	39.951	10.870	20.869	2.280	2.541
1	**1/6**	17.946	23.173	45.940	86.837	28.698	45.543	7.552	8.517
	1/3	16.122	20.682	41.315	78.781	25.936	40.760	6.083	6.766
	2/3	12.170	16.488	29.151	62.054	18.950	32.168	4.066	4.502
	1	9.301	13.615	20.777	50.423	14.012	26.314	2.890	3.204
2	**1/6**	21.949	28.182	56.435	106.297	35.243	55.743	9.240	10.406
	1/3	19.652	25.019	50.760	96.301	31.831	49.781	7.434	8.256
	2/3	14.770	19.771	35.815	75.649	23.222	39.112	4.960	5.483
	1	11.265	16.221	25.525	61.331	17.152	31.871	3.521	3.896
4	**1/6**	25.189	32.265	64.911	122.628	40.550	64.280	10.663	12.023
	1/3	22.513	28.571	58.382	111.223	36.625	57.438	8.587	9.549
	2/3	16.886	22.490	41.194	87.564	26.710	45.155	5.739	6.352
	1	12.867	18.402	29.360	71.122	19.720	36.803	4.078	4.519

Beklenen bazı sonuçlar, yukarıdaki tablo değerlerinden çıkarılabilir. Tablo 4.5'te, k ve L/h parametreleri arttığında, FD mikro kirişlerinin boyutsuz temel frekanslarının değerinin de arttığı gözlemlenmiştir. Çünkü k'daki artış, daha yüksek bir elastisite modülüne ve buna karşılık gelen rijitlikte bir artışa sahip olan daha fazla seramik ile sonuçlandığı gözlemlenmiştir. Ayrıca L/h'daki artış, rijitlik tepkisi açısından kayma deformasyonunun katkısında bir azalma ile sonuçlanmıştır. Üstelik FD Timoshenko mikro kirişlerinin (h_f/h_i) koniklik oranı azaldığında frekanslarında da azalma görülmüştür. Sınır koşullarının FD mikro kirişlerinde önemli bir rol oynadığı gözlemlenmiştir. Özellikle, Ankastre-Ankastre FD mikro kirişleri daha yüksek frekans ve burkulma yükü değerleri gösterdiği gibi en rijit konfigürasyonuda sunmuştur ve aynı zamanda en boy oranından ($L/h=5$'den $L/h=50$'e) diğer sınır koşullarına kıyasla daha çok etkilenmiştir.

Tablo 4.6'da verilen boyutsuz kritik burkulma yükü sonuçları üzerinde Tablo 4.5'teki gibi benzer gözlemler yapılmıştır. k ve L/h parametrelerinin değerleri arttığında FD mikro-kirişlerinin boyutsuz kritik burkulma yükleri değerinin de buna göre arttığı gözlemlenmiştir. Çünkü basit olarak k'deki artış, daha yüksek modüllü seramik kısmın kütle oranındaki artış anlamına gelirken L/h'daki artış, kayma deformasyonun ve rijitlik tepkisinin daha az katkısının olduğu anlamına gelmektedir. Üstelik FD Timoshenko mikro kirişlerin (h_f/h_i) koniklik oranı azalırsa, boyutsuz burkulma yükleri azaldığı görülmüştür. Ayrıca, Ankastre-Ankastre sınır koşulunun, yapısal rijitliği önemli ölçüde arttırdığı için boyutsuz kritik burkulma yükü üzerinde en büyük etkiye sahip olduğu görülmüştür. $L/h=5$ ve $L/h=50$ boy-en oranları arasındaki farklılık diğer sınır koşullarıyla karşılaştırıldığında, Ankastre-Ankastre sınır koşulları için önemli ölçüde daha belirgin olduğu anlaşılmıştır.

Tablo 4.7 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 2. boyutsuz temel frekanslarının değişimi

$\overline{\omega}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
		L/h=5	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*
k	h_f/h_i								
0	**1/6**	24.7525	44.1621	39.1254	66.9443	36.5129	57.2716	17.1441	29.9155
	1/3	22.0997	39.7705	34.9349	61.0356	32.0217	51.2021	13.6945	25.2021
	2/3	17.8977	34.1007	28.1201	52.5479	25.5289	43.3314	9.71314	20.078
	1	14.9455	30.6874	23.1687	47.1518	21.1317	38.5406	7.4728	17.1682
0.5	**1/6**	35.0632	64.267	57.6258	97.3924	53.8063	83.3024	25.0725	43.439
	1/3	31.1355	57.7134	51.4616	88.6089	47.1984	74.324	20.0298	36.512
	2/3	24.9616	49.1973	41.4556	75.919	37.6459	62.6215	14.1943	28.9562
	1	20.6677	44.0459	34.2154	67.8246	31.1589	55.4708	10.9048	24.6608
1	**1/6**	38.8706	70.6334	63.7258	107.039	59.5202	91.5361	27.7744	47.689
	1/3	34.5225	63.3461	56.9052	97.2735	52.2037	81.5688	22.1895	40.0344
	2/3	27.6808	53.8409	45.827	83.1206	41.624	68.5365	15.7288	31.6698
	1	22.9152	48.0741	37.7854	74.0753	34.4454	60.5574	12.0873	26.9117
2	**1/6**	42.4485	75.9981	68.7227	115.178	64.1932	98.486	30.0391	51.2923
	1/3	37.7602	68.1296	61.365	104.625	56.2943	87.7147	23.9984	43.039
	2/3	30.3655	57.8505	49.4064	89.3119	44.8702	73.6116	17.0165	34.0141
	1	25.1965	51.6064	25.9805	79.518	37.1349	64.9711	13.0836	28.8793
4	**1/6**	45.1582	79.9618	72.159	121.199	67.3947	103.636	31.6088	53.9906
	1/3	40.2444	71.7221	64.4336	110.135	59.0975	92.331	25.2509	45.3212
	2/3	32.477	60.9697	51.8719	94.0979	47.0967	77.5414	17.908	35.8474
	1	27.0317	54.4439	42.722	83.8493	38.9838	68.4881	13.7741	30.459

Tablo 4.8 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 2. boyutsuz kritik burkulma yüklerinin değişimi

$\overline{P}_{cr}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
k	***h_f/h_i***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***
0	**1/6**	14.0334	28.4564	19.1129	57.1284	16.7657	42.6112	10.3925	17.1647
	1/3	12.910	25.7834	18.0099	51.9648	15.6919	38.693	9.30253	15.2218
	2/3	9.1612	20.6456	12.7462	41.4645	11.1073	30.942	6.65915	11.8933
	1	6.53064	17.0403	9.00517	34.0171	7.87864	25.4744	4.84478	9.66972
0,5	**1/6**	34.5526	68.8624	46.8218	138.028	41.1918	102.952	25.4261	41.3692
	1/3	31.756	61.9074	44.2906	124.719	38.6391	92.8786	22.7385	36.449
	2/3	22.5067	48.8996	31.3913	98.3222	27.3649	73.4153	16.2484	28.1356
	1	16.0406	39.9513	22.1799	79.9144	19.4072	59.9076	11.8115	22.6542
1	**1/6**	44.7182	88.3867	60.5485	177.188	53.3215	132.148	32.8639	53.0335
	1/3	41.1245	79.1517	57.4073	159.515	50.1044	118.766	29.3739	46.5586
	2/3	29.1507	62.0737	40.7246	124.9	35.5052	93.2193	20.9672	35.6957
	1	22.9152	50.4232	28.7763	100.97	25.1798	75.6406	15.2331	28.581
2	**1/6**	54.8635	108.158	74.3369	216.945	65.4681	161.786	40.3432	64.8987
	1/3	50.495	96.7326	70.5464	195.03	61.5744	145.177	36.0509	56.8965
	2/3	35.8098	75.6689	50.0644	152.305	43.6486	113.61	25.7221	43.5067
	1	25.5255	61.331	35.377	122.862	30.9557	91.9591	18.6832	34.7586
4	**1/6**	63.0389	124.682	85.5414	250.229	75.2807	186.603	46.4334	74.8877
	1/3	58.0469	111.676	81.1219	225.212	70.7831	167.628	41.5007	65.7278
	2/3	41.1843	87.5812	57.5543	176.255	50.1748	131.433	29.621	50.368
	1	29.3597	71.1223	40.669	142.43	35.5859	106.548	21.5194	40.3126

Tablo 4.9 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 3. boyutsuz temel frekanslarının değişimi

$\bar{\omega}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
		L/h=5	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*
k	***h_f/h_i***								
0	**1/6**	31.6332	98.6518	50.6885	130.719	50.6884	116.49	21.9866	74.1556
	1/3	27.9142	88.6988	44.6586	118.488	44.6585	104.375	18.2093	64.6553
	2/3	22.5179	75.8532	35.8505	101.435	35.8505	88.6605	13.6886	53.7788
	1	18.8815	68.0168	28.9373	90.572	24.1652	78.9905	10.8254	47.4227
0.5	**1/6**	46.7396	143.641	72.741	190.3	72.5145	169.561	32.3421	107.863
	1/3	41.2632	128.935	63.737	172.121	63.4007	151.587	26.774	93.816
	2/3	33.3009	109.816	50.4561	146.657	50.0603	128.134	20.1188	77.6411
	1	27.9222	98.0821	41.3995	130.415	35.5232	113.643	15.9126	68.1558
1	**1/6**	51.658	157.905	80.8005	209.247	80.5517	186.419	35.7313	118.538
	1/3	45.602	140.04	70.8493	189.04	70.469	166.453	29.5633	102.965
	2/3	36.7965	120.214	56.1664	160.663	55.6606	140.326	22.1906	84.9818
	1	30.8502	107.098	46.1331	142.549	39.4675	124.161	17.5352	74.419
2	**1/6**	55.6342	169.907	87.952	225.209	87.7624	200.625	38.5152	127.549
	1/3	49.1039	152.197	77.2589	203.374	76.9604	179.053	31.8577	110.739
	2/3	39.6124	129.077	61.52	172.684	61.0423	150.797	23.8994	91.306
	1	33.2092	114.863	40.7028	153.089	42.8683	133.316	18.8771	79.8872
4	**1/6**	58.3427	178.75	93.055	236.959	92.9554	211.096	40.4478	134.22
	1/3	51.4851	160.146	81.8749	214.068	81.7147	188.47	33.4591	116.581
	2/3	41.524	135.896	65.4797	181.923	65.1636	158.871	25.1044	96.213
	1	34.8108	121.012	53.57	161.409	45.2041	140.58	19.8319	84.2543

Tablo 4.10 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 3. boyutsuz kritik burkulma yüklerinin değişimi

$\overline{P}_{cr}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
k	**h_f/h_i**	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*
0	**1/6**	20.4965	62.9677	26.3399	109.54	22.9378	83.4703	17.5479	45.0847
	1/3	19.5451	57.1744	25.8279	99.6633	22.1922	75.8144	16.3833	40.6339
	2/3	13.7931	45.6011	18.6292	79.0526	15.8612	60.3104	11.5056	32.1847
	1	9.70822	37.4097	13.2364	64.334	11.2345	49.3013	8.11093	26.3302
0,5	**1/6**	50.1193	152.539	64.1225	264.796	56.0246	201.77	42.9965	108.821
	1/3	48.0484	137.749	63.2878	239.424	54.5092	182.121	40.2917	97.437
	2/3	33.9907	108.762	45.7913	187.79	39.0531	143.28	28.3406	76.2486
	1	23.933	88.5269	32.558	151.538	27.672	116.155	19.984	61.7886
1	**1/6**	64.7478	195.803	82.6236	340.015	72.3052	259.064	55.6179	139.618
	1/3	62.2673	176.149	81.8589	306.376	70.5953	232.991	52.2289	124.56
	2/3	44.1124	138.124	59.3361	238.783	50.6557	182.087	36.7702	96.8124
	1	30.8502	111.817	42.2051	191.739	35.9014	146.849	25.9317	78.0229
2	**1/6**	79.4624	239.553	101.299	416.349	88.6896	317.204	68.2959	170.909
	1/3	76.515	215.115	100.513	374.658	86.7211	284.861	64.1872	152.263
	2/3	54.2369	168.124	72.9101	291.281	62.2687	222.008	45.2049	118.032
	1	38.1999	135.751	51.868	233.438	44.136	178.643	31.8819	94.9191
4	**1/6**	91.4708	276.072	116.712	480.185	102.11	365.834	78.587	197.164
	1/3	87.9923	248.097	115.664	432.572	99.743	328.878	73.8095	175.853
	2/3	62.3443	194.188	83.8509	336.984	71.5887	256.797	51.9667	136.614
	1	43.907	156.989	59.6438	270.497	50.7386	206.939	36.6491	110.056

Tablo 4.11 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 4. boyutsuz temel frekanslarının değişimi

$\overline{\omega}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
k	***h_f/h_i***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***
0	**1/6**	47.8661	173.478	67.3657	214.078	64.6851	195.548	41.0182	138.695
	1/3	40.8517	155.801	56.4702	193.268	55.308	175.237	34.7818	122.414
	2/3	30.4759	132.807	39.0951	164.578	36.6462	148.698	27.1753	97.1314
	1	22.2695	118.543	29.891	146.153	29.891	132.128	22.4183	74.7281
0.5	**1/6**	70.1924	252.049	98.9728	311.823	95.0581	284.766	59.1262	201.894
	1/3	60.0882	225.702	83.5956	280.912	81.7178	254.564	49.9356	177.757
	2/3	44.8243	191.099	57.742	238.133	54.1868	214.791	38.5664	143.068
	1	32.7452	169.384	42.7282	210.654	41.3974	189.695	31.3451	110.11
1	**1/6**	77.8172	277.213	109.299	343.018	105.077	313.221	65.6344	221.991
	1/3	66.7968	247.942	92.3214	308.674	90.2704	279.676	55.4642	195.204
	2/3	49.9583	209.415	63.8521	261.052	60.2037	235.414	42.8931	158.327
	1	36.5538	185.251	47.1868	230.476	46.1247	207.515	34.8967	121.861
2	**1/6**	84.555	298.57	117.882	369.269	113.379	337.179	71.3306	238.927
	1/3	72.5884	266.973	99.6126	332.166	97.3783	300.959	60.3568	210.002
	2/3	54.377	225.4	69.0129	280.688	65.3059	253.173	46.8478	170.841
	1	39.8447	199.395	50.9371	247.647	50.7673	223.135	38.2715	131.476
4	**1/6**	89.4184	314.348	123.903	388.51	119.152	354.763	75.3718	251.398
	1/3	76.6002	281.25	104.702	349.611	102.326	316.801	63.8502	221.062
	2/3	57.3492	237.801	72.6012	295.683	68.714	266.809	49.7339	179.406
	1	42.0325	210.711	54.3323	261.081	54.3269	235.476	40.8229	138.042

Tablo 4.12 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 4. boyutsuz kritik burkulma yüklerinin değişimi

$\overline{P}_{cr}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
k	**h_f/h_i**	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***	***L/h=5***	***L/h=50***
0	**1/6**	26.5405	109.874	31.9238	162.382	29.1083	136.12	23.5682	85.906
	1/3	25.9012	99.7244	31.7974	147.228	28.8119	123.499	22.7101	77.7212
	2/3	18.6392	79.0526	23.5397	115.835	21.090	97.5615	16.1482	61.524
	1	13.2364	64.334	16.9562	93.3757	15.1038	79.0505	11.4012	50.1312
0,5	**1/6**	64.677	265.778	77.3987	392.927	70.7607	329.261	57.4833	207.545
	1/3	63.494	239.655	77.5442	354.152	70.472	296.934	55.7473	186.58
	2/3	45.8186	187.8	57.6196	275.762	51.7494	232.097	39.7579	146.001
	1	32.558	151.538	41.5625	220.632	37.0937	186.604	28.0843	117.919
1	**1/6**	83.3154	341.311	99.4908	504.817	91.0576	422.93	74.1524	266.417
	1/3	82.1117	306.686	100.015	453.505	91.017	380.107	72.1822	238.662
	2/3	59.3704	238.797	74.4742	351.051	66.9729	295.284	51.5687	185.544
	1	36.5538	191.739	53.7628	279.632	48.0344	236.293	36.4376	149.089
2	**1/6**	102.093	417.9	121.862	618.278	111.556	517.937	90.9545	326.189
	1/3	100.795	375.016	122.667	554.728	111.67	464.87	88.6685	291.811
	2/3	72.9496	291.296	91.4177	428.422	82.2446	360.239	63.3907	226.29
	1	51.868	233.438	66.0147	340.664	59.0041	287.713	44.7959	181.462
4	**1/6**	117.578	481.884	140.512	712.954	128.55	597.28	104.755	376.238
	1/3	115.967	432.94	141.287	640.336	128.534	536.641	101.999	336.958
	2/3	83.8943	336.995	105.223	495.465	94.6145	416.634	72.8797	261.841
	1	59.6438	270.497	75.9651	394.539	67.8695	333.232	51.4967	210.318

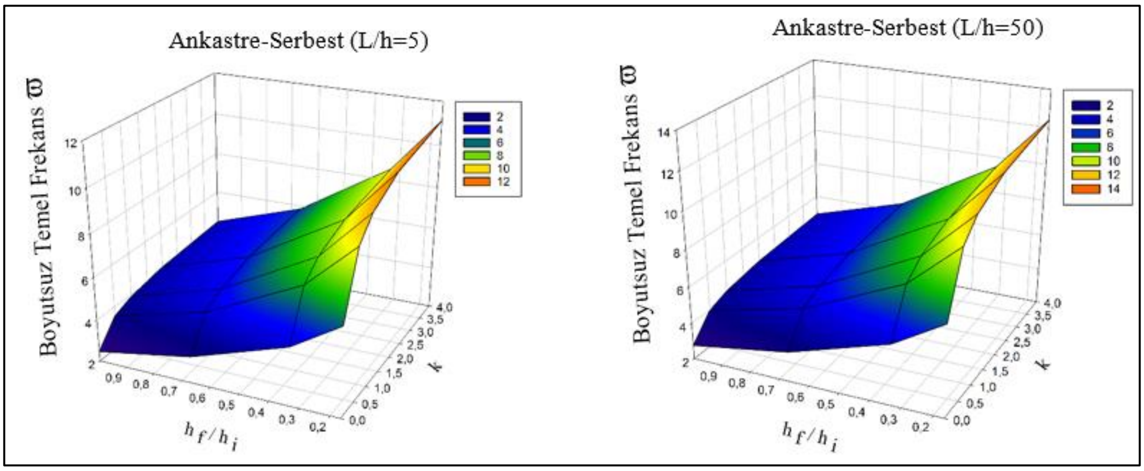
Tablo 4.13 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 5. boyutsuz temel frekanslarının değişimi

$\overline{\omega}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
k	h_f/h_i	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*
0	**1/6**	50.6885	247.525	70.0865	247.525	69.8854	247.525	47.1064	171.441
	1/3	44.6585	220.998	60.5877	220.998	57.9758	220.998	40.088	136.946
	2/3	35.8505	178.978	48.7256	178.978	45.2829	178.978	29.1306	102.918
	1	28.5019	149.456	39.4395	149.456	33.2795	149.456	23.4878	91.1916
0.5	**1/6**	72.5553	361.736	103.461	364.71	103.147	364.375	69.6013	252.617
	1/3	63.3421	323.46	88.8274	325.624	85.3041	325.178	59.297	201.799
	2/3	50.2634	262.45	71.6569	263.708	66.5835	263.094	45.7313	148.768
	1	41.2357	219.464	59.1673	220.219	49.0146	219.759	34.7846	131.196
1	**1/6**	80.8234	400.331	114.325	403.641	114.12	403.275	76.9488	279.58
	1/3	70.4129	357.968	98.2063	360.383	94.4277	359.897	65.532	223.336
	2/3	55.8295	290.445	79.0766	291.859	73.5555	291.169	50.5235	162.947
	1	46.0458	242.808	64.8747	243.721	53.9404	243.146	38.5418	143.356
2	**1/6**	88.1561	433.001	123.449	435.492	123.187	435.224	82.9018	301.637
	1/3	76.9528	387.013	106.034	388.821	102.049	388.464	70.5649	240.951
	2/3	61.1784	313.837	85.1961	314.89	79.3551	314.378	54.3695	175.105
	1	50.1521	262.253	69.2106	262.951	58.0099	262.507	41.6368	153.943
4	**1/6**	93.2372	455.976	129.827	457.24	129.526	457.105	86.9603	316.697
	1/3	81.726	407.328	111.494	408.238	107.298	408.059	73.9923	252.977
	2/3	65.2659	330.088	89.4816	330.616	83.4105	330.359	56.9692	184.46
	1	52.7334	275.737	72.1916	276.083	60.9133	275.865	43.6969	162.337

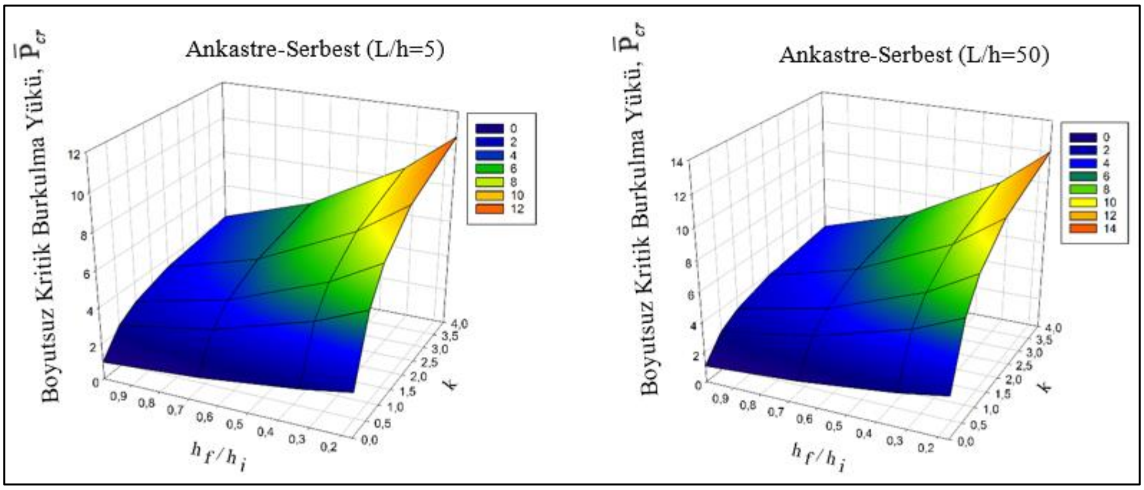
Tablo 4.14 Çeşitli sınır koşulları ve farklı kuvvet yasası parametreleri için FD mikro kirişlerin 5. boyutsuz kritik burkulma yüklerinin değişimi

$\overline{P}_{cr}$		H-H		C-C		C-H		C-F	
k	***h_f/h_i***	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*	*L/h=5*	*L/h=50*
0	**1/6**	32.8244	167.894	39.318	235.332	35.6411	199.158	29.2453	138.502
	1/3	32.7413	152.179	40.3291	213.071	36.1071	180.389	29.1509	125.362
	2/3	24.2137	119.72	30.7205	166.206	27.1522	141.34	21.2894	98.7394
	1	17.433	96.506	22.4142	132.568	19.6994	113.37	15.2414	79.8494
0,5	**1/6**	79.5305	406.621	94.8285	569.975	86.1826	482.183	72.0385	334.923
	1/3	79.8555	366.525	97.8327	513.253	87.8281	434.288	71.4616	301.319
	2/3	59.2925	285.552	74.8926	396.642	66.3298	337.00	52.3019	234.792
	1	42.7472	228.56	54.7693	314.32	48.2111	268.474	37.4264	188.369
1	**1/6**	102.181	522.4	121.526	732.645	110.596	619.662	92.6815	430.142
	1/3	102.979	469.324	125.787	657.734	113.09	556.336	92.2893	385.687
	2/3	76.6372	363.483	96.5597	505.597	85.6229	429.281	67.6883	298.709
	1	46.0458	289.655	70.7085	399.119	62.3011	340.573	48.4658	238.535
2	**1/6**	125.127	639.651	148.674	897.482	135.364	759.009	113.562	526.746
	1/3	126.279	573.856	154.084	804.772	138.602	680.587	113.251	471.696
	2/3	94.0622	443.331	118.409	617.338	105.045	523.969	83.1312	364.457
	1	67.8935	352.617	86.753	486.579	76.4668	414.982	59.5371	290.502
4	**1/6**	144.292	737.391	171.598	1034.75	156.153	875.148	130.906	607.474
	1/3	145.436	662.143	177.656	928.751	159.714	785.493	130.387	544.562
	2/3	108.253	512.385	136.403	713.653	120.956	605.775	95.6451	421.572
	1	78.1174	408.063	99.8945	563.201	88.0207	480.385	68.4862	336.534

Tablo 4.5 ve 4.6'daki FD mikro kirişlerinin boyutsuz temel frekansının ve kritik burkulma yükünün sonuçları 3D grafiklere dâhil edilmiştir. Böylece koniklik oranı ve derecelendirme parametresi k ile ilgili sürekli varyasyonlardaki eğilimler görsel olarak gözlemlenmiştir. Şekil 4.3 ve 4.4'te Ankastre-serbest sınır koşulu altında L/h=5, 50 en boy oranları için sırasıyla boyutsuz temel frekans ve burkulma yük değişimlerini içermiştir.

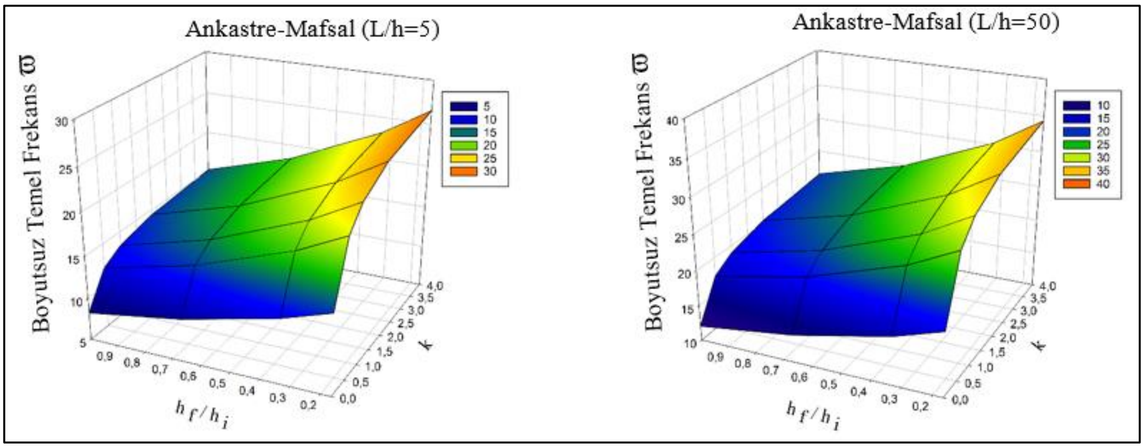


Şekil 4.3 FD mikro kirişinin boyutsuz temel frekansının, Ankastre-Serbest sınır koşulu için farklı L/h değerlerine göre değişimi

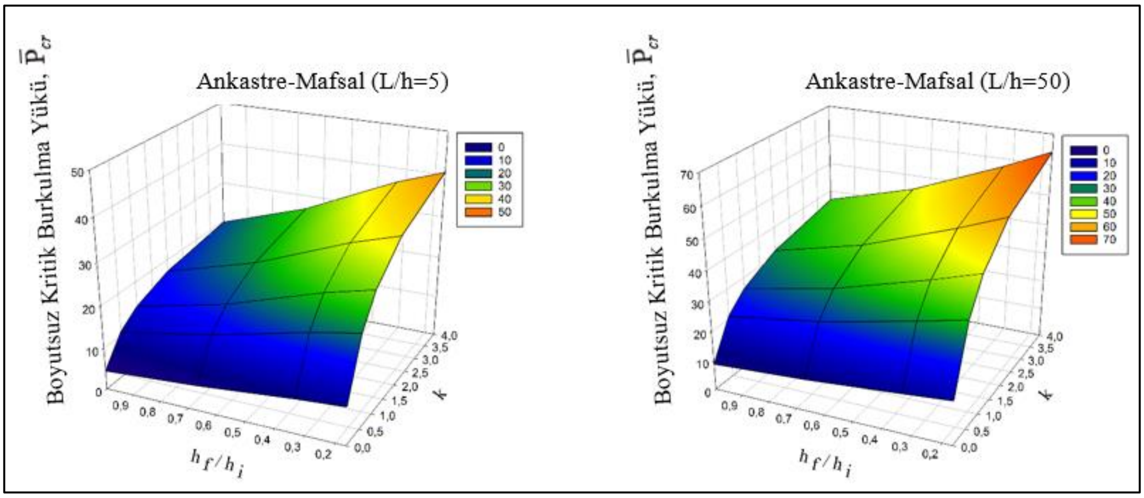


Şekil 4.4 FD mikro kirişinin boyutsuz burkulma yükünün, Ankastre-Serbest sınır koşulu için farklı L/h değerlerine göre değişimi

Benzer şekilde, Tablo 4,5 ve 4,6'da Ankastre-Mafsal sınır koşulu için sonuçlar 3D grafiklere dâhil edilmiştir. Şekil 4,5 ve 4,6'da Ankastre-Mafsal sınır koşulunun *L/h=5, 50* en-boy oranları için sırasıyla boyutsuz temel frekans ve burkulma yük değişimlerini içermiştir. Genel eğilim, koniklik oranı arttıkça konik kirişler için *k* derecelendirme parametresindeki artışın sonuçlar üzerinde daha belirgin bir etkiye sahip olduğunu görülmüştür.

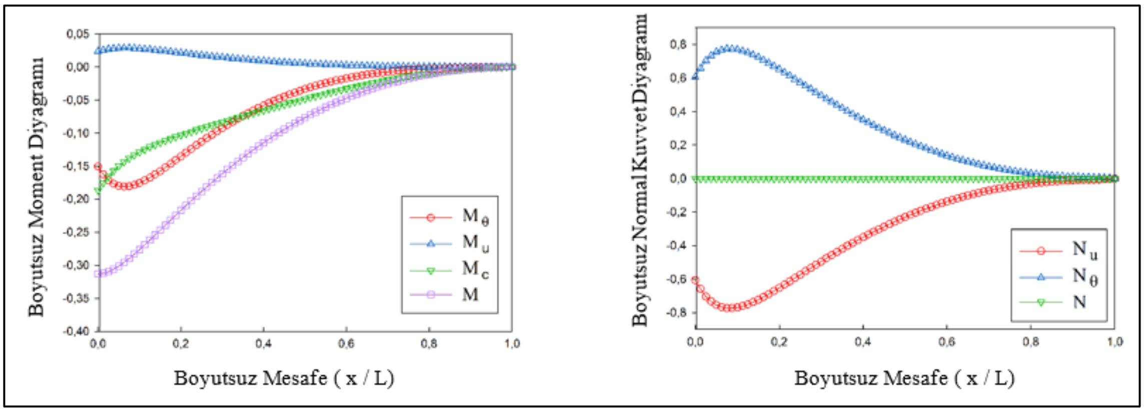


Şekil 4.5 FD mikro kirişinin boyutsuz temel frekansının, Ankastre-Mafsal sınır koşulu için farklı L/h değerlerine göre değişimi

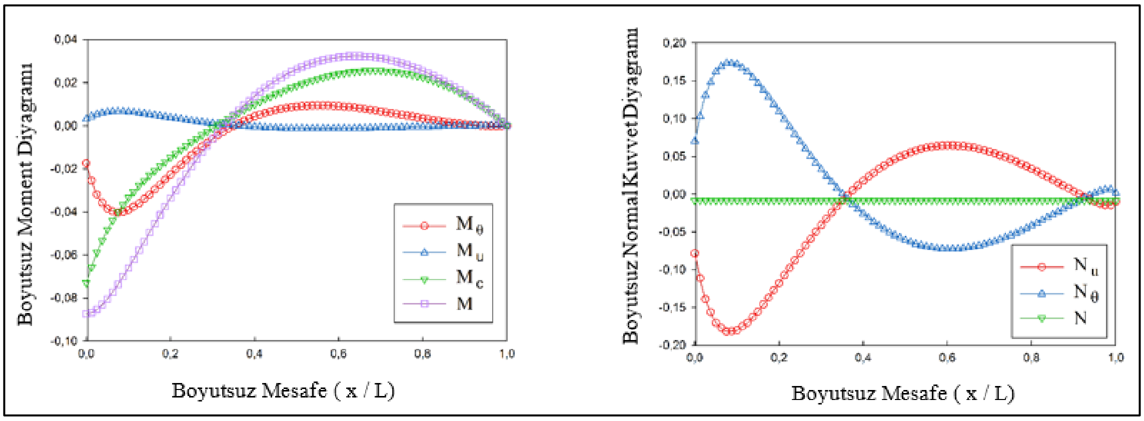


Şekil 4.6 FD mikro kirişinin boyutsuz burkulma yükünün, Ankastre-Mafsal sınır koşulu için farklı L/h değerlerine göre değişimi

Formülasyonun başka bir ayırt edici özelliği, kesit normal kuvvetleri ve eğilme momentleri için farklı kaynakların ayrı ayrı hesaplanmasıdır. Ankastre-Serbest ve Ankastre-Mafsal FD konik mikro kirişlerin moment ve normal kuvvet diyagramları sırasıyla farklı kaynaklardan katkılarla Şekil 4.7 ve 4.8'de verilmiştir. Değerlendirme için $k=1$ derecelendirme parametresi ve Tablo 4.2'nin malzeme özellikleri kullanılmıştır. $L/h=5$ en boy oranıyla h_f/h_i =1/3 koniklik oranı seçilmiştir. Her biri, kirişin ekseni üzerindeki tipik bir elemanın merkezinin konumuna göre sabit kalınlığa sahip 80 sonlu eleman kullanılmıştır. Kiriş, düzgün yayılı q yükü ile yüklenmiş ve kirişin ekseni boyunca boyutsuz mesafeye (x/L) göre boyutsuz moment ($\bar{M}$) ve normal kuvvet ($\bar{N}$) katkıları elde edilmiştir. Grafikler temel olarak sırasıyla eğilme, uzama ve mikro boyut etkisine göre M_θ, M_u, M_c moment katkılarının değişimlerini ve yine sırasıyla eğilme ve uzama etkilerine göre N_θ, N_u normal kuvvet katkılarının değişimlerini göstermiştir. Ayrıca, Denk. (4.31) ve Denk. (4.34) 'e göre kesit üzerinde toplam eğilme momenti M ve toplam normal kuvvet N de verilmiştir. Ankastre-Mafsal kiriş için eğilme ve uzama nedeniyle normal kuvvetin değiştiği görülürken Ankastre-Serbest kiriş için durum böyle gözlemlenmemiştir. Aynı sonuç moment katkıları için de görülmüştür. Ayrıca, toplam momentin önemli bir kısmının Ankastre-Mafsal kiriş için boyuta bağlı kısım M_c 'den geldiği sonucuna varılmıştır. Oysa bu etki Ankastre-Serbest kiriş için daha az belirginlik göstermiştir. Uzama nedeniyle oluşan moment katkısı her zaman zıt işaretli gibi görünmekte olup her iki durum için toplam momentin nispeten küçük bir kısmını oluşturmuştur. Bu özellik, tasarım sürecinde farklı konfigürasyonların tepki özelliklerini ele almak için kullanılmıştır. Böylece mikro boyut etkilerin nicel ölçümü özgül olarak incelenebilmiştir.



Şekil 4.7 Ankastre-Serbest mesnetli FD mikro kirişlerin boyutsuz moment ve normal kuvvet diyagramları



Şekil 4.8 Ankastre-Mafsal mesnetli FD mikro kirişlerin boyutsuz moment ve normal kuvvet diyagramları

4.1.3 Termal Etkinin İncelenmesi

Bu başlık altında, daha önceden elde ettiğimiz termal etkiye sahip yeni formülasyon kullanılmıştır. Modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılan FD mikro kirişinin, statik eğilme, serbest titreşim ve burkulma davranışı üzerindeki termal etkiyi araştırmak için çeşitli sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Üstelik FD mikro kirişlerin sonuçları üzerindeki termal etki, mevcut formülasyonun doğrulanması için önceki benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca, karşılaştırma yapmak için aşağıdaki boyutsuz paremetreler kullanılmıştır.

$$\bar{\omega} = \omega \, . \sqrt{\frac{\rho_m \, . A \, . L^4}{E_m \, . I}}, \qquad \bar{P}_{cr} = P_{cr} \, . \, \frac{L^2}{E_m \, . I}$$

Bu çalışmada kullanılan FD mikro kirişinin termal malzeme özelikleri Tablo 4.15’te sunulmuştur. Bu malzeme özellikleri, mevcut çalışmanın doğruluğunu göstermek için referans [48]'de olduğu gibi uygun şekilde seçilmiştir. Bu çalışma kulanılarak h/l=1, h/l=3, h/l=5 ve h/l=10 değerleri için izotropik homojen Timoshenko mikro kirişlerinin serbest titreşimi hesaplanıp analitik yöntemin [22] ve başka bir sayısal yöntem olan GDQM’in sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Tablo 4.16’de kullanılan FD mikro kirişlerinin fiziksel parametreleri $L=10h$, $b=2h$ ve $l_m=17.6$ µm olarak alınmıştır. Kayma düzeltme faktörü k_s daha önce belirtildiği gibi 5/6 olarak kabul edilmiştir.

Tablo 4.15 Termal katsayılı malzeme özellikleri

Malzeme Özelliği	Elastisite modülü E (GPa)	Yoğunluk ρ (kg/m^3)	Poisson oranı ν	Termal katsayı α x 10^{-6} (1/°C)
Epoxy [48]	1,44	1220	0,38	-
Aluminium	70	2700	0,23	23
Alumina	380	3800	0,23	7,4

Tablo 4.16 MFEM kullanılarak elde edilen doğal frekansların (MHz) mafsallı-mafsallı mikro kirişler için analitik ve sayısal çözümlerle karşılaştırılması

Teori	Analiz	Eleman No.	h/l=1	h/l=3	h/l=5	h/l=10
FSBT	Analytical [22]	-	4.224183	0.874130	0.488940	0.236552
	GDQM	15	4.224180	0.874130	0.488940	0.236552
	MFEM	20	4.224160	0.874124	0.488937	0.236550
	MFEM	40	4.224180	0.874130	0.488940	0.236552
	MFEM	80	4.224180	0.874130	0.488940	0.236552

GDQM sonuçları 15 nokta için verilmiştir. Bu çalışmanın sonuçları, doğruluğunu ve yakınsamayı göstermek için 20, 40 ve 80 sonlu elemanlar için üretilmiştir. Tablo 4.16’den hem GDQM'nin hem de mevcut çalışmanın (MFEM) analitik sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca, bu özel problemin yakınsama çalışması incelendiğinde 40 elemanın yeterli olduğunu görülmüştür.

Tablo 4.17 Çeşitli sıcaklık varyasyonları için GDQM ve MFEM kullanılarak mafsallı-mafsallı FD mikro kirişlerinin doğal frekansları (MHz)

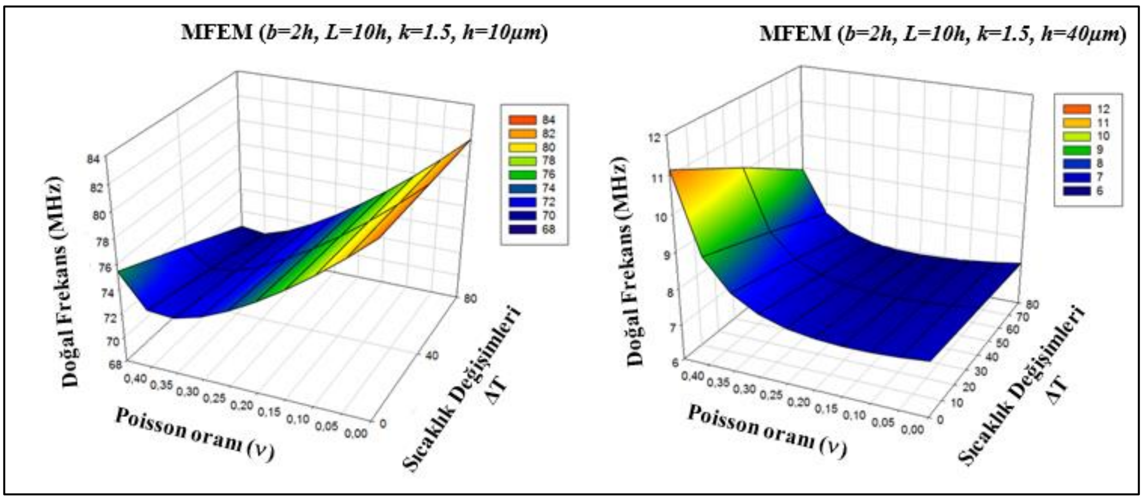
ΔT	h(μm)	ν 0 (DQM)	0 (MFEM)	0.2 (DQM)	0.2 (MFEM)	0.4 (DQM)	0.4 (MFEM)	ν_{min}	ω_{min}
0	10	81,791	81,791	75,352	75,354	72,761	72,762	0.37	72,541
	20	22,999	23,001	21,731	21,731	23,110	23,110	0.26	21,638
	30	11,651	11,650	11,293	11,292	12,992	12,991	0.20	11,293
	40	7,518	7,518	7,437	7,437	9,014	9,014	0.15	7,393
40	10	81,575	81,576	74,956	74,964	71,541	71,542	0.39	71,531
	20	22,807	22,810	21,391	21,391	22,138	22,138	0.28	21,193
	30	11,481	11,481	11,001	11,001	12,216	12,217	0.21	10,998
	40	7,370	7,370	7,187	7,186	8,383	8,383	0.16	7,176
80	10	81,354	81,360	74,572	74,572	70,299	70,301	0.42	70,223
	20	22,613	22,616	21,046	21,046	21,123	21,122	0.32	20,668
	30	11,310	11,310	10,700	10,701	11,389	11,389	0.26	10,661
	40	7,220	7,220	6,927	6,927	7,699	7,699	0.21	6,926

Çeşitli sıcaklık değişimleri, farklı kiriş kalınlık değerleri ve FSBT'ye dayalı Poisson oranları için mafsallı-mafsallı FD mikro kirişlerinin doğal frekansları Tablo 4.17'de gösterilmiştir. Ayrıca sıcaklık değişimlerinde termal etkiler de dikkate alınmıştır. GDQM ve mevcut çalışmanın (MFEM) birbirleriyle mükemmel bir uyum içinde olduğu görülmüştür. Tablo 4.17 için $l_m = 15\mu m$, $k = 1.5$, $b = 2h$ ve $L = 10h$ değerleri kullanılmıştır. Tablo 4.17'un son iki sütunu, minimum doğal frekansları ve karşılık gelen Poisson oranlarını göstermektedir. Kiriş üzerindeki termal etki detaylı olarak incelendiğinde, sıcaklık değişimi arttıkça küçük de olsa sonuçlar üzerinde bir fark oluştuğu görülmüştür. Öte yandan, kirişin kalınlık (h) değerinin Tablo 4.17'de görüldüğü gibi frekans değerleri üzerinde çok daha büyük bir etkisi vardır. Dahası, doğal frekans değerlerinde kiriş kalınlığının (h) termal etkiye kıyasla daha büyük değerleri için daha belirgin bir azalma göstermiştir. Aynı şekilde, Tablo 4.18, belirtilen koşullarda FD mikro kirişlerinin burkulma yükleri için oluşturulmuştur. Burkulma yükü hesabı için frekans hesaplanmasında olduğu gibi aynı parametreler kullanılmıştır. Tablo 4.18'den de görüldüğü gibi sıcaklık farkı arttıkça burkulma yükleri azalmıştır. Ancak burada da frekans sonuçlarında olduğu gibi kalınlık (h) değeri sonuçlar üzerinde en dikkat çekici etkiye sahiptir; h arttıkça burkulma yükleri önemli ölçüde artarmıştır. Poisson oranının değeri arttıkça dinamik sonuçların değerlerinde azalma olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, GDQM ve mevcut çalışmanın (MFEM) sonuçlarına bakılarak bu iki yöntemin iyi bir uyum içinde olduğu bir kez daha gösterilmiştir.

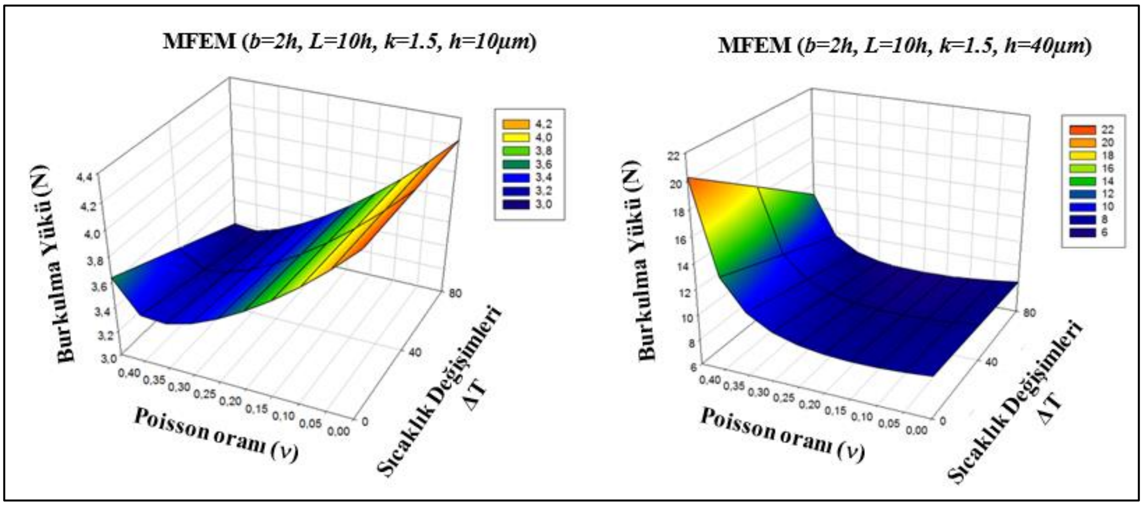
Tablo 4.18 Çeşitli sıcaklık varyasyonları için GDQM ve MFEM kullanılarak mafsallı-mafsallı FD mikro kirişlerinin burkulma yükleri (N)

ΔT	h(μm)	v						v_{min}	ω_{min}
		0 (DQM)	0 (MFEM)	0.2 (DQM)	0.2 (MFEM)	0.4 (DQM)	0.4 (MFEM)		
0	10	4,281	4,283	3,634	3,635	3,388	3,388	0.37	3,367
	20	5,426	5,426	4,843	4,843	5,474	5,474	0.25	4,802
	30	7,048	7,048	6,617	6,622	8,759	8,759	0.20	6,617
	40	9,278	9,277	9,077	9,077	13,327	13,328	0.15	8,972
40	10	4,259	4,260	3,597	3,597	3,275	3,275	0.39	3,274
	20	5,336	5,336	4,693	4,693	5,023	5,024	0.28	4,606
	30	6,845	6,845	6,279	6,284	7,746	7,746	0.21	6,277
	40	8,917	8,916	8,477	8,476	11,525	11,526	0.17	8,451
80	10	4,236	4,238	3,559	3,560	3,162	3,163	0.43	3,152
	20	5,246	5,246	4,542	4,543	4,573	4,573	0.32	4,380
	30	6,643	6,643	5,941	5,946	6,732	6,732	0.25	5,901
	40	8,557	8,556	7,876	7,875	9,723	9,724	0.21	7,873

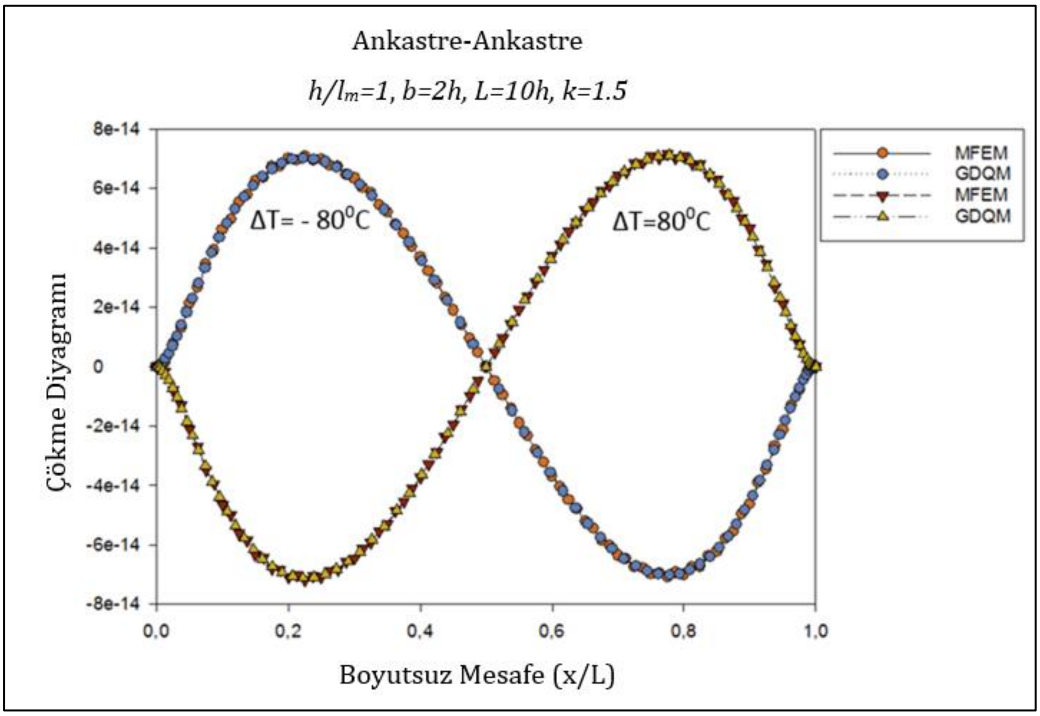
Sonuçların daha iyi anlaşılması kapsamında doğal frekans ve burkulma yükü için mevcut çalışmanın 3D yüzey grafikleri aşağıdaki gibi Tablo 4.17 ve 4.18'e göre verilmiştir.



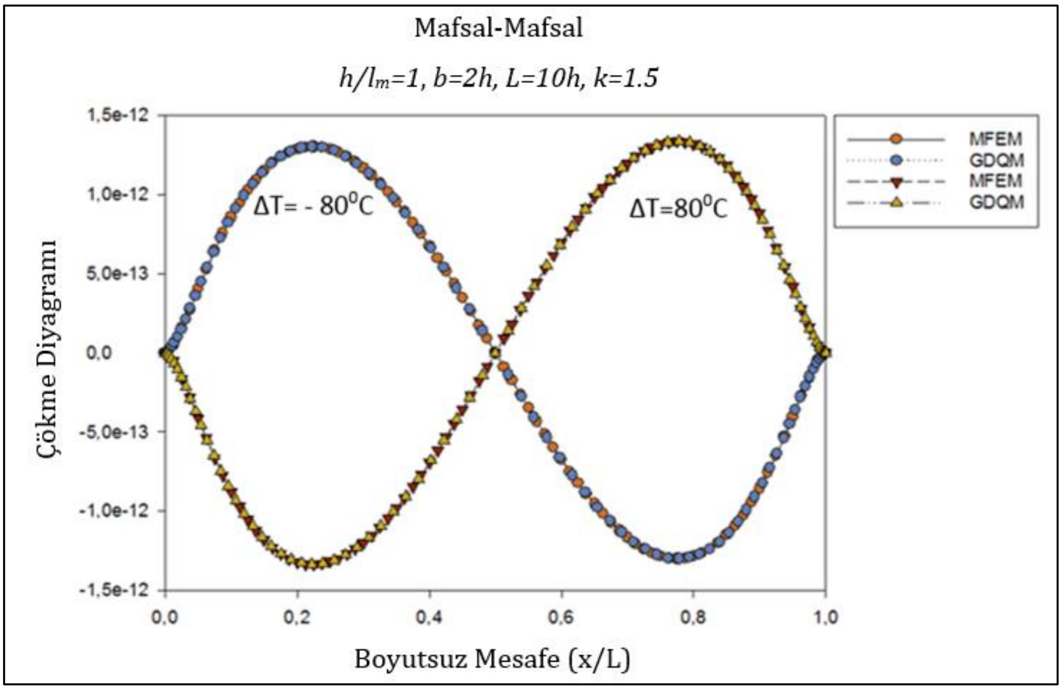
Şekil 4.9 Mafsallı-mafsallı mesnetli FD mikro kirişlerin farklı *h* değerlerine göre doğal frekanslarındaki değişim



Şekil 4.10 Mafsallı-mafsallı mesnetli FD mikro kirişlerin farklı *h* değerlerine göre burkulma yüklerindeki değişim

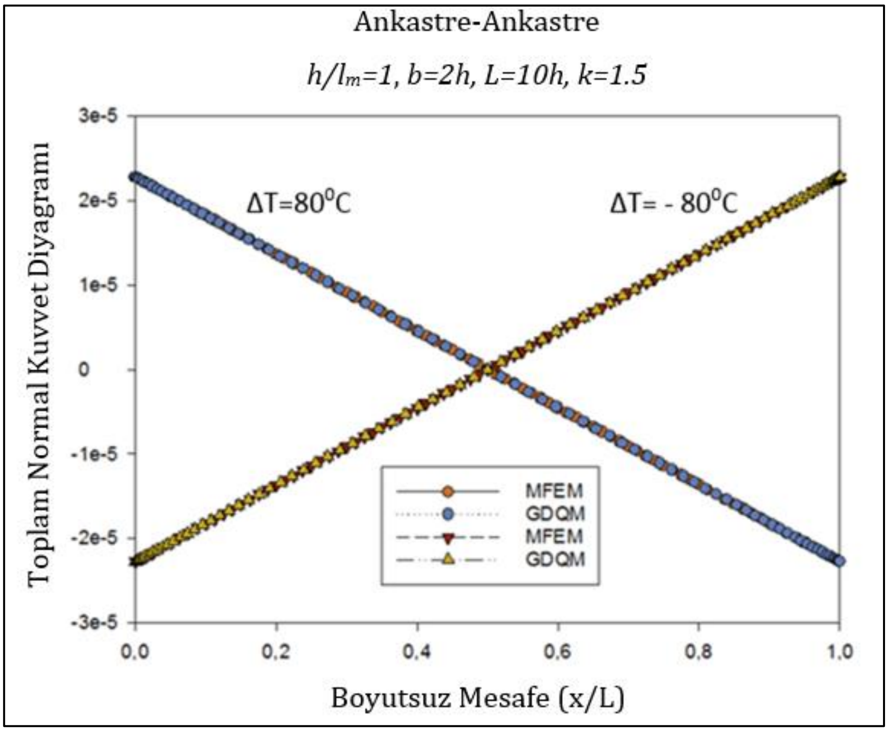


Şekil 4.11 Farklı ΔT değerlerine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak ankastre-ankastre FD mikro kirişlerinin çökme değişimi

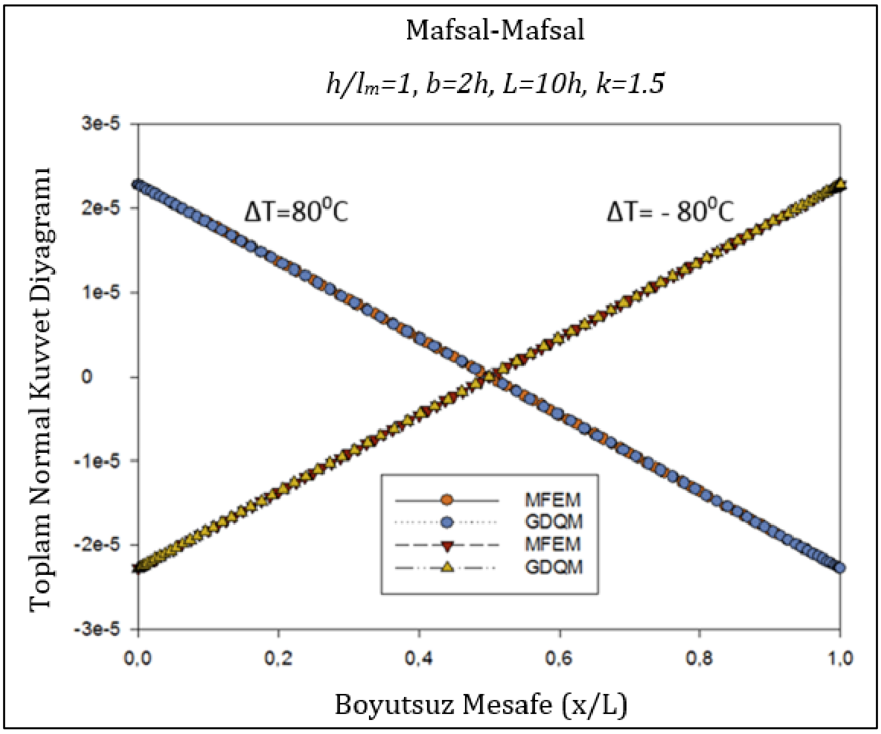


Şekil 4.12 Farklı ΔT değerlerine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak mafsallı-mafsallı FD mikro kirişlerinin çökme değişimi

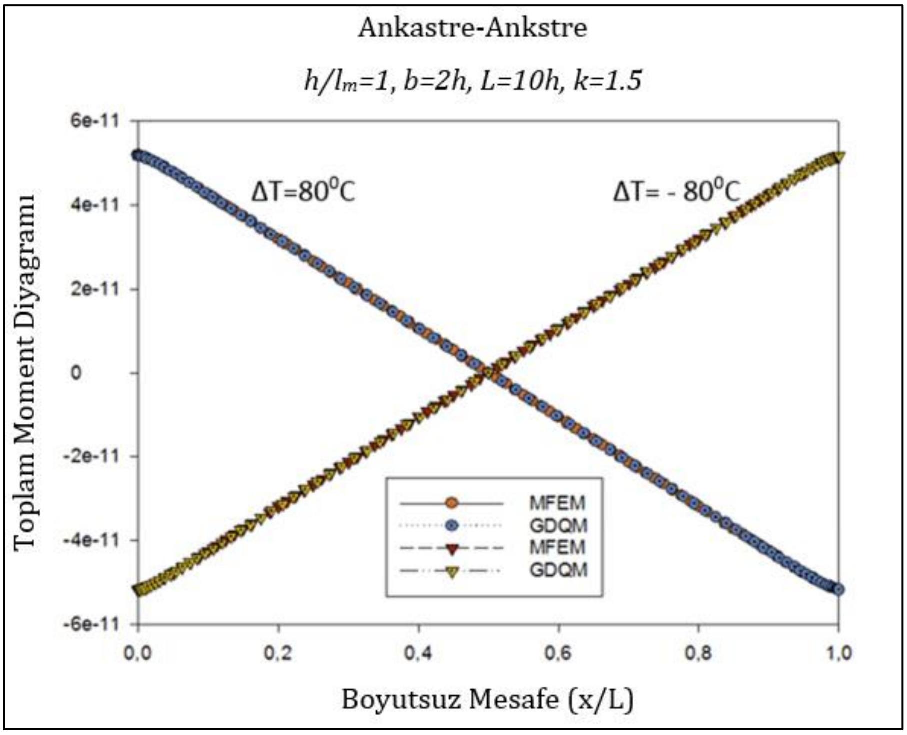
Yalnızca termal etkilere dayalı statik deformasyon sonuçları, kiriş ekseni boyunca boyutsuz mesafeye (x/L) göre elde edilmiştir. Sonuç olarak, FD mikro kirişlerinin çökme diyagramları, farklı sınır koşullarında ΔT=80 ^{0}C ve ΔT= -80 ^{0}C için mevcut çalışma (MFEM) ve GDQ yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Ek olarak, MFEM ve GDQM'den elde edilen sonuçlar sırasıyla 80 sonlu eleman ve 81 nokta alınarak oluşturulmuştur. Beklenildiği gibi aynı miktarda sıcaklık artışı veya düşüşünün antimetrik grafikler ürettiği görülmüştür. Normal kuvvet değerlerinde ankastre-ankastre ve mafsallı-mafsallı sınır koşulları karşılaştırıldığında bir fark görülmezken, moment sonuçları büyük ölçüde etkilenmiştir. Sıcaklığın etkileri küçük sayılsa da termal bir ortamda çok yüksek hassasiyetler gerektiren bazı uygulamalarla karşılaşıldığında burada sunulan analizlerden faydalanabilinir. Ayrıca, GDQM ile bu çalışmadan elde edilen sonuçlar birbiriyle mükemmel bir uyum içinde olduğu görülmüştür.



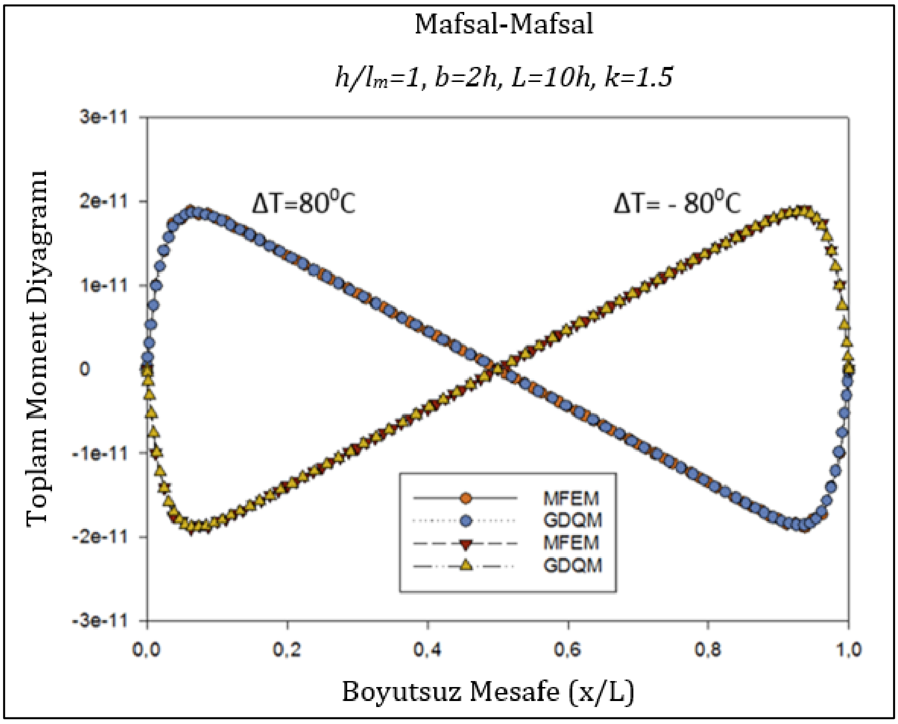
Şekil 4.13 Farklı ΔT değerlerine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak ankastre-ankastre FD mikro kirişlerinin toplam normal kuvvet değişimi



Şekil 4.14 Farklı ΔT değerlerine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak mafsallı-mafsallı FD mikro kirişlerinin toplam normal kuvvet değişimi

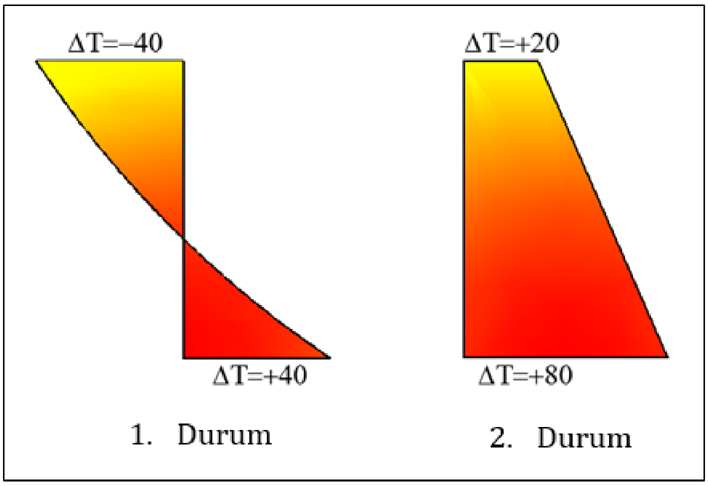


Şekil 4.15 Farklı ΔT değerlerine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak ankastre-ankastre FD mikro kirişlerinin toplam moment değişimi

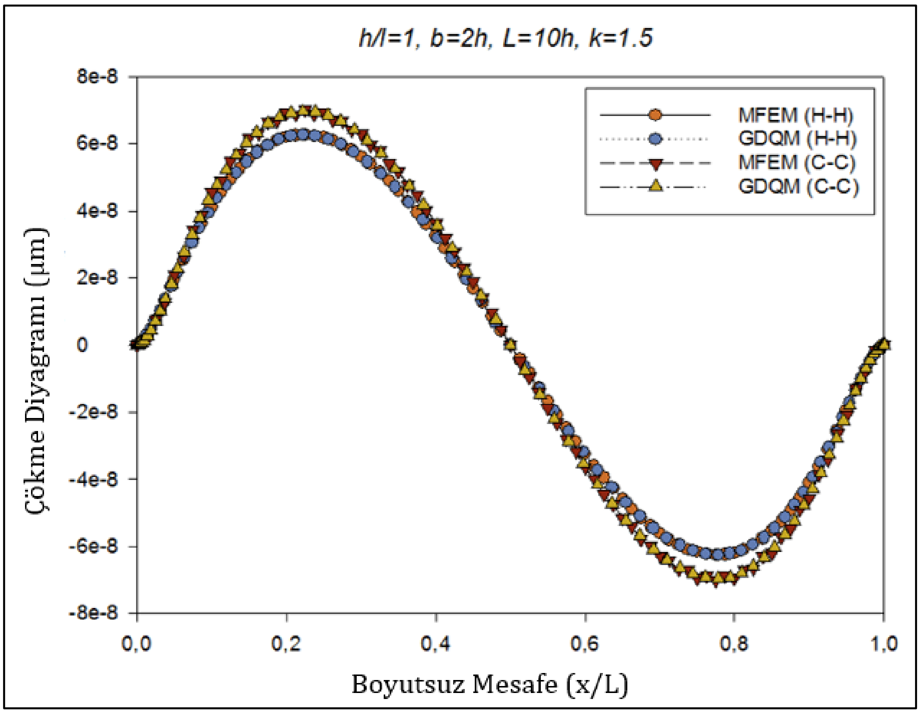


Şekil 4.16 Farklı ΔT değerlerine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak mafsallı-mafsallı FD mikro kirişlerinin toplam moment değişimi

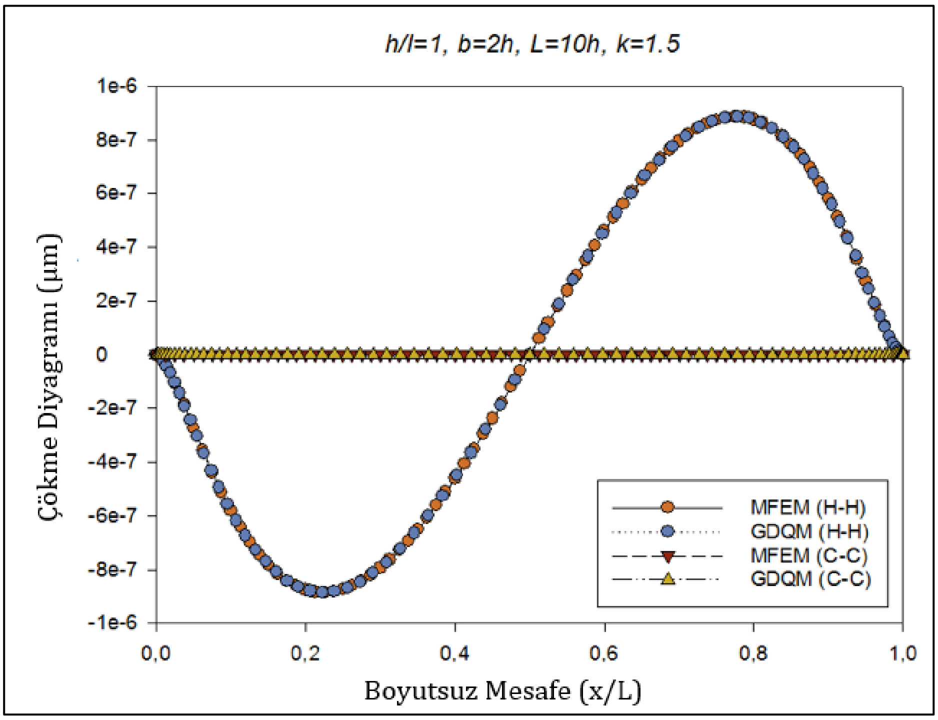
Şekil 4.17'deki 1. durum incelenirse kirişin enine kesitinde kalınlık boyunca sıcaklık doğrusal olmayan bir şekilde -40^{0}C 'den +40^{0}C'ye değiştiği görülmektedir. Ayrıca kirişin üst yüzeyinde -40^{0}C sıcaklık, kirişin alt yüzeyinde ise +40^{0}C sıcaklık oluşmuştur. Bu sıcaklık değişimi için ankastre-ankastre ve mafsallı-mafsallı sınır koşulları altındaki mikro kirişlerin statik deformasyon, moment ve normal kuvvet sonuçları elde edilmiştir. Üstelik, Bu çalışma ve GDQM, daha önce karşılaştırıldığındaki gibi benzer sonuçlar verip Şekil 4.18-23'den görülebileceği gibi mükemmel bir uyum sağlamıştır. 1. Durum göz önüne alındığında ankastre-ankastre sınır koşulu ve mafsallı-mafsallı sınır koşulu normal kuvvet için aynı sonuçları vermesine rağmen ankastre-ankastre sınır koşulu çökme ve moment değerleri için nispeten daha büyük sonuçlar vermiştir. Aynı şekilde, şekil 4.17'deki 2. durumu incelenirse kirişin enine kesitinde kalınlık boyunca sıcaklığın doğrusal olarak +20^{0}C'den +80^{0}C'ye kadar değiştiği görülmüştür. Ayrıca kirişin üst yüzeyinde +20^{0}C sıcaklık, kirişin alt yüzeyinde ise +80^{0}C sıcaklık oluşmuştur. Bu sıcaklık değişiminin bir sonucu olarak, ankastre-ankastre ve mafsallı-mafsallı sınır koşulları arasındaki statik deformasyon ve moment değişimi farkı, 1. durumdaki sıcaklık değişimine kıyasla daha belirgindir. Ancak, normal kuvvet değerleri her iki teori ve iki sınır koşulu için aynı kalmıştır.



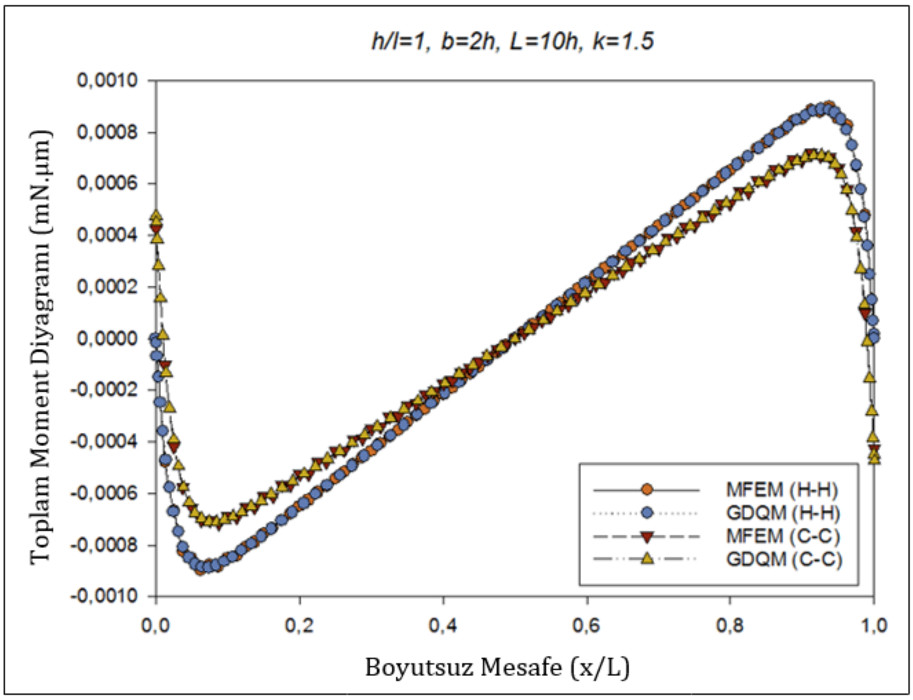
Şekil 4.17 Kiriş kesitindeki sıcaklık değişimleri



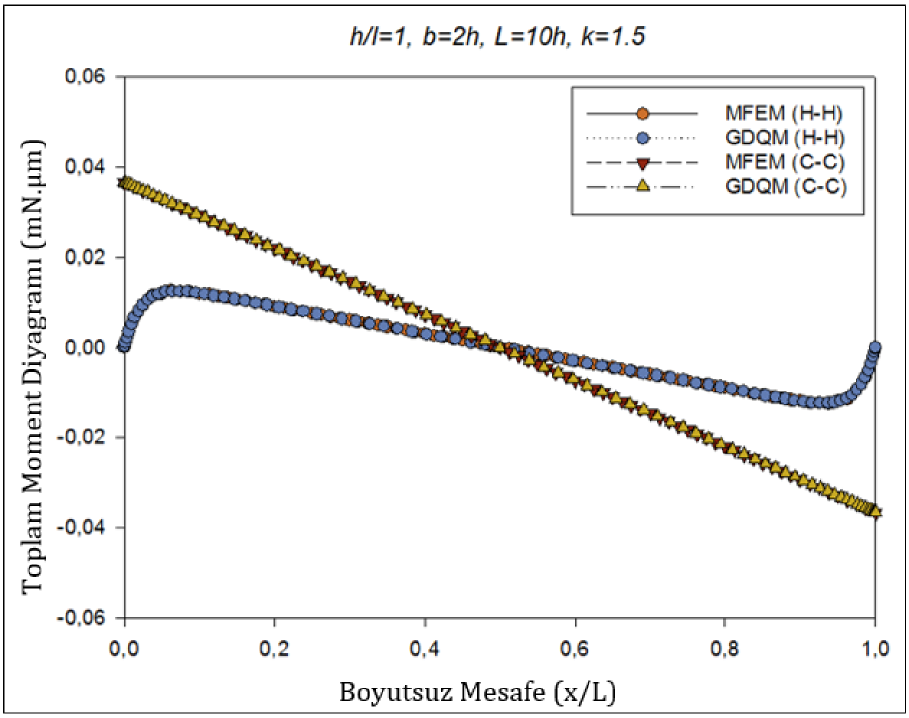
Şekil 4.18 Durum 1'deki sıcaklık değişimine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak C-C ve H-H sınır koşulları altında FD mikro kirişlerinin çökme değişimi



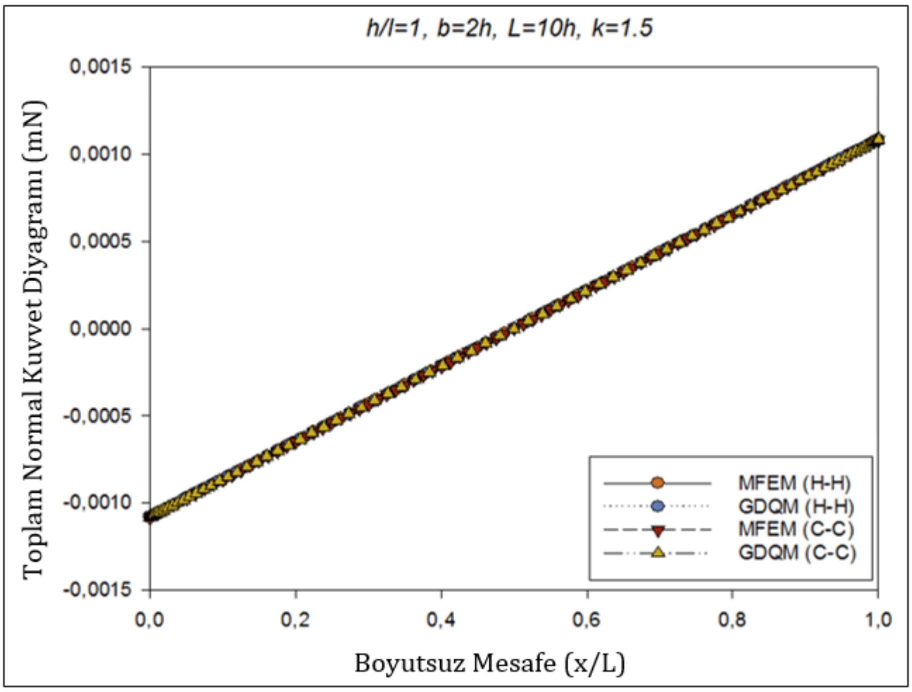
Şekil 4.19 Durum 2'deki sıcaklık değişimine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak C-C ve H-H sınır koşulları altında FD mikro kirişlerinin çökme değişimi



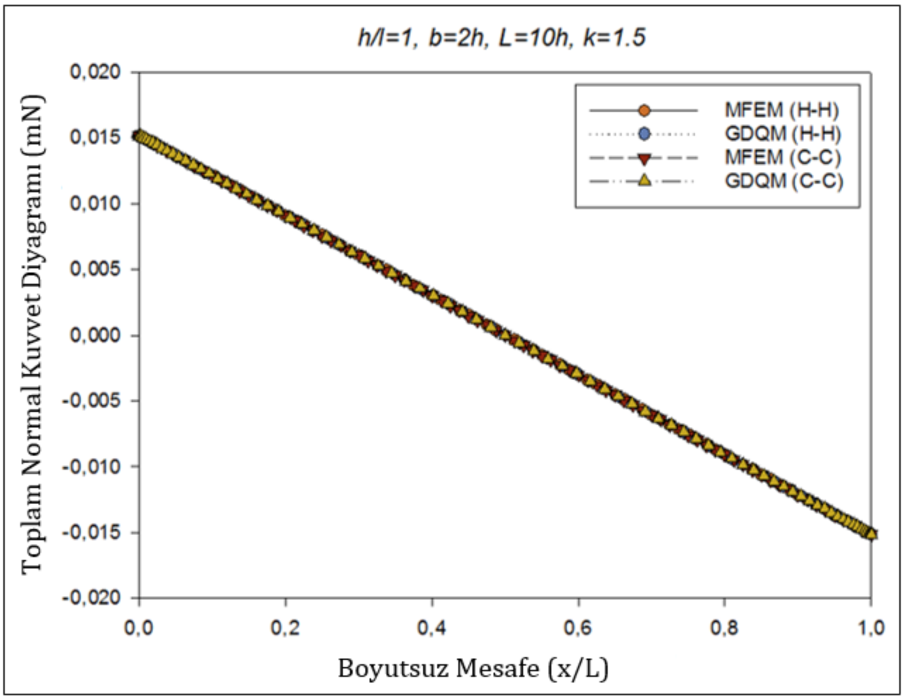
Şekil 4.20 Durum 1'deki sıcaklık değişimine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak C-C ve H-H sınır koşulları altında FD mikro kirişlerinin toplam moment değişimi



Şekil 4.21 Durum 2'deki sıcaklık değişimine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak C-C ve H-H sınır koşulları altında FD mikro kirişlerinin toplam moment değişimi



Şekil 4.22 Durum 1'deki sıcaklık değişimine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak C-C ve H-H sınır koşulları altında FD mikro kirişlerinin toplam normal kuvvet değişimi



Şekil 4.23 Durum 2'deki sıcaklık değişimine göre hem MFEM hem de GDQM kullanılarak C-C ve H-H sınır koşulları altında FD mikro kirişlerinin toplam normal kuvvet değişimi

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Sonuç ve Öneriler

Çeşitli sınır koşulları altında FD konik Timoshenko mikro kirişlerinin statik eğilmesi, serbest titreşimi ve burkulma davranışı, yeni bir sayısal çerçeve altında modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılarak incelenmiştir. Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi dikkate alındığında, yönetici denklemler ve sınır koşulları Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Gateaux türevi ile tamamen yeni bir fonksiyonelin türetilmesi için tüm alan denklemleri üzerinde bilimsel bir prosedür geliştirilmiştir. Farklı sınır koşullarına sahip FD mikro kirişlerin statik eğilme, serbest titreşim ve burkulma problemlerinin formülasyonu için C^0 tipi doğrusal şekil fonksiyonlarına izin veren basit bir karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Bu çalışmanın sonuçları literatürdeki mevcut analitik ve sayısal (GDQM) sonuçlarla karşılaştırılmış ve mükemmel yakınsama özellikleri gösterilmiştir. Bu çalışmada sunulan yöntemin özgün katkıları ile ilgili sonuçların ardından FD mikro kiriş tepkisi için beklenen öngörüler (malzeme uzunluk ölçek parametresindeki, malzeme derecelendirme parametresindeki ve en boy oranındaki artış/azalma için temel frekanslarda ve burkulma yüklerinde artma / azalma) aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Mevcut formülasyon, yer değiştirmeye dayalı formülasyonların ortak bir problemi olan ve tutarlı enterpolasyon veya azaltılmış entegrasyon tekniklerinin kullanımı gibi özel hususlar gerektiren kayma kilitleme fenomenlerinden bağımsızdır [89].
- Elde edilen fonksiyonel, bilinmeyen nodal parametrelerin ilk türevlerini kapsamaktadır. Bu nedenle, uygulama ve çözüm prosedürlerini büyük ölçüde kolaylaştıran C^0 tipi basit doğrusal şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Eleman davranışı bileşenleri tarafından kanıtlandığı gibi matrisler seyrek olarak doldurulmuştur.

- Kuvvet tipi değişkenlerin düğüm serbestlik dereceleri olarak tanıtılması, kuvvet tipi öngörülen sınır koşullarının uygulanmasında daha fazla esneklik sağlamış ve bu da sayısal şemaya doğrudan entegrasyonuna izin vermiştir.
- C^0 tipi elemanların (NE = 20), kesin analitik veya GDQM (80 eleman noktası) tabanlı sayısal çözümlerle karşılaştırıldığında mühendislik uygulamaları için kabul edilebilir sonuçlar sağladığı gösterilmiştir.
- Formülasyonun genel sağlamlığı ve yakınsama özellikleri, farklı derecelendirme parametrelerini k, uzunluk ölçeği parametrelerini l_m, en boy oranlarını L/h ve sınır koşullarını içeren yalnızca statik eğilmeler için değil, aynı zamanda serbest titreşim ve burkulmalar için de çok çeşitli senaryolar kullanılarak oluşturulmuştur.
- Yöntemin bir uygulaması konik bir kiriş problemi ile gösterilmiştir. Sonlu elemanlar prosedürü, mühendislik tasarımlarında karşılaşılabilecek geometrik ve/veya malzeme bozukluklarının işlenmesinde oldukça uygun olduğundan, yöntem konik kiriş uygulaması ile umut vericidir.
- Formülasyonun ilginç ve ayırt edici bir özelliği, genel kiriş analizine katkıda bulunan farklı kaynakların açık bir tezahürüdür. Mikro ölçeğe bağlı eğilme momenti katkısından, eğilme dönmesinden ve eksenel deformasyondan oluşan eğilme momentlerinin ve eksenel kuvvetlerinin hepsi ayrı ayrı hesaplanabilmiştir. Bunun neticesinde, mikro boyut etkilerinin niceliksel olarak değerlendirilmesiyle tasarım konfigürasyonları hakkında çeşitli bilgiler elde edilebilir.

Ayrıca, FD Timoshenko mikro kirişlerinin dinamik davranışları üzerindeki termal etki modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılarak incelenmiştir. Termal etkinin dâhil edildiği yeni formülasyon kullanılarak elde edilen sonuçlar şu şekide sıralanabilir:

- Analitik [22] ve GDQM (15 eleman noktası) tabanlı sayısal çözümlerle [48] karşılaştırıldığında, C^0 tipi elemanların (NE = 20) mafsallı-mafsallı FD mikro kirişlerin doğal frekansları için kabul edilebilir sonuçlar sağladığı görülmüştür.

- Kiriş üzerindeki Poisson oranı ve kalınlık etkileri dikkate alınarak kirişin serbest titreşimi ve kritik burkulma yükü farklı termal değişimler için analiz edilmiştir. Mevcut çalışmanın çok yönlülüğünü göstermek için çeşitli senaryolar kullanılarak bulunan sonuçlar literatürdeki mevcut sayısal yöntem (GDQM) ile ayrıntılı şekilde karşılaştırılmıştır.
- Sıcaklık değişiminin frekans ve burkulma yükü üzerindeki etkileri göz ardı edilebilirken kalınlık değerinin (h), bu dinamik tepkiler üzerinde göz ardı edilemeyecek etkiye sahip olduğu görülmüştür.
- Ayrıca, Poisson oranının etkileri de incelenmiş ve Poisson oranının belirli değerleri için frekans ve burkulma yükünün minimum bir değer aldığı gösterilmiştir.
- Yapısal sıcaklık yükü, hassas MEMs üretiminde hassasiyet için önemli olabilecek çökme ve iç kuvvetler oluşturur. Bunlar, Şekil 4.11-16'dan görülebileceği gibi, mevcut yöntemle tam olarak hesaplanabilmiştir. Bu sonuçlar, GDQM ile yakın uyum içindedir ve dolayısıyla mevcut sonucun başka bir doğrulamasıdır.
- Kirişin enine kesitindeki farklı sıcaklık değişimlerinin statik deformasyon, moment ve normal kuvvet üzerindeki etkileri incelenmiştir. FD malzeme varyasyonuna dayalı tahmin edilebilir termal varyasyon (Şekil 4.17'deki 1. durum), doğrusal bir termal varyasyonla karşılaştırıldığında önemli ölçüde farklı sonuçlar üretmiştir (Şekil 4.17'deki 2. durum).
- Karışık sonlu elemanların literatüre en büyük katkılarından biri, Şekil 4.18-23'te gösterildiği gibi enine kesitte kalınlık yönünde keyfi sıcaklık değişimleri verilerek moment, normal kuvvet ve çökme diyagramlarının kolayca elde edilebilmesidir.

5.2 Araştırma Olanakları ve İleriki Çalışmalar

Bu tez çalışması kapsamında, modifiye gerilme çifti teorisine dayandırılan fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko mikro kirişinin statik ve dinamik davranışları incelenmiştir. Ayrıca, bu mekanik davranışlar üzerindeki termal etki incelenip sonuçlar detaylar bir şekilde sunulmuştur. Bu analizler, tezin özgünlüğünü sağlayan karışık sonlu elemanlar yöntemi (MFEM) kullanılarak çözülmüştür. Karışık sonlu elemanlar yöntemi (MFEM), karmaşık problemlerin çözümünde diğer çözüm yöntemlerine kıyasla birçok avantaj sunmaktadır. Sonuç olarak, bu çözüm yönteminin formülasyonu pek çok karmaşık problem için geliştirilebilir ve sonuçları literatüre esaslı katkıda bulunabilir. İleride yapılacak çalışmalar için aşağıdaki araştırma konuları önerilebilir.

- Elastik zemine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) Timoshenko mikro kirişin statik eğilme, burkulma ve serbest titreşim üzerindeki sıcaklık ve gözeneklilik etkisinin karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmesi.
- Karışık sonlu elemanlar formülasyonu geliştirilerek farlı mikro kiriş problemleri için dinamik stabilite davranışı araştırılabilir.
- Çift yönlü FD gözenekli mikro/nano kirişlerin boyut etkilerinin mekanik analizler üzerindeki etkisi MFEM kullanılarak kolaylıkla incelenebilir.
- Karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak pek çok kiriş teorisini ve farklı malzeme özelliklerini (çift yönlü FD ve sandviç malzeme gibi) bir arada içinde barındıran kiriş problemleri incelenerek statik, dinamik ve dinamik stabilite analizleri yapılabilir.
- FD mikro plaklar ve kabuklar, statik ve dinamik davranışları açısından karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülebilir. Ayrıca, malzeme özellikleri açısından çift yönlü fonksiyonel derecelendirilmiş homojen olmayan malzeme davranışlarının incelenmesinde de bu çözüm yöntemi etkili bir şekilde uygulanabilir.

KAYNAKÇA

[1] E. K. Kakhkia, S. M. Hosseinib, and M. Tahania, “An analytical solution for thermoelastic damping in a micro-beam based on generalized theory of thermoelasticity and modified couple stress theory,” Appl. Math. Model., vol. 40, pp.3164-3174, 2016.

[2] M. Younis, “Micro-beams, MEMS linear and nonlinear statics and dynamics,” Springer US, 2011, pp. 251–357

[3] M. H. Mahdavi, A. Farshidianfar, M. Tahani, S. Mahdavi, and H. Dalir, “A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever,” J. Ultramicroscopy. Vol. 109, pp. 54–60, 2008.

[4] F. Y. Lun, P. Zhang, F. B. Gao, and H. G. Jia, “Design and fabrication of micro-optomechanical vibration sensor,” Microfabrication. Technol., Vol. 120, pp. 61–64, 2006.

[5] M. Asghari, M. H. Kahrobaiyan, M. T. Ahmadian, “ A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory,” Int. J. Eng. Sci., vol. 48, pp. 1749–61, 2010.

[6] M. R. Ilkhani, and S. H. Hosseini-Hashemi, “Size dependent vibro-buckling of rotating beam based on modified couple stress theory,” Compos. Struct., vol. 143, pp. 75-83, 2016.

[7] Y-G. Wangn, W-H. Lin, N. Liu, “Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple stress theory,” Phys. E, vol. 47, pp. 80-85, 2013.

[8] A. V. Krysko, J. Awrejcewicz, M. V. Zhigalov, S. P. Pavlov, and V. A. Krysko, "Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams,” Int. J. Non-Linear. Mech., vol. 93, pp. 106-121, 2017.

[9] J. Zhang, and Y. Fu, “Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic micro-beams based on a modified couple stress theory,” Meccanica., vol. 47, pp. 1649–1658, 2012.

[10] J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, M. V. Zhigalov, and A. V. Krysko, “Mathematical model of a three-layer micro- and nano-beams based on the hypotheses of the Grigolyuk–Chulkov and the modified couple stress theory,” Int. J. Solids Struct., vol. 117, pp. 39-50, 2017

[11] K. Kiani, “Large deformation of uniaxially loaded slender micro-beams on the basis of modified couple stress theory: Analytical solution and Galerkin-based method,” Phys. E, vol. 93, pp. 301-312, 2017.

[12] N. Ding, X. Xu, Z. Zheng, and E. Li, “Size-dependent nonlinear dynamics of a micro-beam based on the modified couple stress theory,” Acta. Mech., vol. 228, pp. 3561-3579, 2017.

[13] A. R. Askari, and M. Tahani, “Size-dependent dynamic pull-in analysis of beam-type MEMS under mechanical shock based on the modified couple stress theory,” Appl. Math. Model., vol. 39, pp. 934-946, 2015.

[14] A. Babaei, M-R. S. Noorani, and A. Ghanbari, “Temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded micro-beams based on the modified couple stress theory,” Microsyst. Technol., vol. 23, pp. 4599–4610, 2017.

[15] M. Hadian, K. Torabi, and S. Hadian Jazi, “Nonlinear vibration analysis of an elastically connected double-non-classical Timoshenko microbeam subject to moving particle based on the modified couple stress theory,” J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 42, pp. 246, 2020.

[16] A. H. Koreyem, A. Hafezi, and M. Abdi, “Investigation of the axial load effect on the vibration and topography of the AFM oblique four-layered piezoelectric micro-cantilever,” J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 41, pp. 520, 2019.

[17] L. Q. Yao, C. J. Ji, J. P. Shen, and C. Li, “Free vibration and wave propagation of axially moving functionally graded Timoshenko microbeams,” J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 42, pp. 137, 2020.

[18] Z. Li, Y. He, J. Lei, S. Guo, and D. Liu, “Experimental and analytical study on the superharmonic resonance of size-dependent cantilever microbeams,” J. Vib. Control., vol. 25, no. 21–22, pp. 2733–2748, 2019.

[19] A. Karamanli, and M. Aydogdu, “Free vibration and buckling analysis of laminated composites and sandwich microbeams using a transverse shear-normal deformable beam theory,” J. Vib. Control., vol. 26, no. 3–4, pp. 214–228, 2019.

[20] K. B. Mustapha, “Free vibration of microscale frameworks using modified couple stress and a combination of Rayleigh–Love and Timoshenko theories,” J. Vib. Control., vol. 26, no. 13–14, 1285–1310, 2020.

[21] A. M. Dehrouyeh-Semnani, and A. Bahrami, “On size-dependent Timoshenko beam element based on modified couple stress theory,” Int. J. Mech. Sci., vol. 107, pp. 134–148, 2016.

[22] H. M. Ma, X-L. Gao, and J. N. Reddy, “A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory,” J. Mech. Phys. Solids, vol. 56, pp. 3379–3391, 2008.

[23] M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, and M. T. Ahmadian, “A Timoshenko beam element based on the modified couple stress theory,” Int. J. Mech. Sci., vol. 79, pp. 75-83, 2014.

[24] M. M. Abadi, A. R. Daneshmehr, “An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler–Bernoulli and Timoshenko beams,” Int. J. Eng. Sci., vol. 75, pp. 40–53, 2014.

[25] M. Şimşek, and J. N. Reddy, “Bending and vibration of functionally graded micro-beams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory,” Int. J. Eng. Sci., vol. 64, pp. 37–53, 2013.

[26] R. Sourki, S. A. H. Hoseini, "Free vibration analysis of size-dependent cracked micro-beam based on the modified couple stress theory," Appl. Phys. A, vol. 122, pp. 413-424, 2016.

[27] M. Ghadiri, N. Shafiei, and S. A. Mousavi, "Vibration analysis of a rotating functionally graded tapered micro-beam based on the modified couple stress theory by DQEM," Appl. Phys A., vol. 122, pp. 837-851, 2016.

[28] N. Shafiei, A. Mousavi, and M. Ghadiri, "Vibration behavior of a rotating non-uniform FG micro-beam based on the modified couple stress theory and GDQEM," Compos. Struct., vol. 149, vol. 157-169, 2016.

[29] B. Mohammadi-Alasti, G. Rezazadeh, A-M. Borgheei, S. Minaei, and R. Habibifar, "On the mechanical behavior of a functionally graded micro-beam subjected to a thermal moment and nonlinear electrostatic pressure," Compos. Struct., vol. 93, pp. 1516-1525, 2011.

[30] A. Nateghi, M. Salamat-talab, J. Rezapour, and B. Daneshian, "Size dependent buckling analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory," Appl. Math. Model., vol. 36, pp. 4971-4987, 2012.

[31] L. Wang, Y. Y. Xu, and Q. Ni, "Size-dependent vibration analysis of three-dimensional cylindrical micro-beams based on modified couple stress theory: A unified treatment," Int. J. Eng. Sci., vol. 68, pp. 1-10, 2013.

[32] M. Şimşek, T. Kocatürk, and Ş. D. Akbaş, "Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple stress theory," Compos. Struct., vol. 95, pp. 740-747, 2013.

[33] B. Akgöz, Ö. Civalek, "Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams," Int. J. Eng. Sci., vol. 49, pp. 1268-1280, 2011.

[34] A. M. Dehrouyeh-Semnani, and M. Nikkhah-Bahrami, "The influence of size-dependent shear deformation on mechanical behavior of microstructures-dependent beam based on modified couple stress theory," Compos. Struct., vol. 123, pp. 325-336, 2015

[35] M. Salamat-talab, A. Nateghi, and J. Torabi, "Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple stress theory," Int. J. Mech. Sci., vol. 57, pp. 63-73, 2012.

[36] M. Asghari, M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, and M. T. Ahmadian, "The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation," Mater. Des.,vol. 32, pp. 1435-1443, 2011.

[37] N. Shafiei, S. S. Mirjavadi, B. MohaselAfshari, S. Rabby, and M. Kazemi, "Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams," Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 322, pp. 615-632, 2017.

[38] M. Mohammadabadi, A. R. Daneshmehr, and M. Homayounfard, "Size-dependent thermal buckling analysis of micro composite laminated beams using modified couple stress theory," Int. J. Eng. Sci., vol. 92, pp. 47–62, 2015.

[39] X-F. Li, "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams," J. Sound. Vib., vol. 318, pp. 1210-1229, 2008.

[40] M. Şimşek, "Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions," Compos. Struct., vol. 149, pp. 304-314, 2016.

[41] V. Kahya, and M. Turan, "Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory," Compos. Part B, vol. 109, pp. 108-115, 2017.

[42] S. D. Akbaş, "Fonksiyonel derecelendirilmiş ortotropik bir kirişin statik ve titreşim davranışlarının incelenmesi," J. BAUN. Inst. Sci. Technol., 2017, pp. 1-14.

[43] J. N. Reddy, "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams," J. Mech. Phys. Solids, vol. 59, pp. 2382-2399, 2011.

[44] A. Arbind, J. N. Reddy, and A. R. Srinivasa, "Modified Couple Stress-Based Third-Order Theory for Nonlinear Analysis of Functionally Graded Beams," Lat. Am. Solids Struct., vol. 11, pp. 459-487, 2014.

[45] M. Şimşek, "Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method," Int. J. Eng. Appl. Sci., vol. 3, pp. 1-11, 2009.

[46] M. Ghadiri, and N. Shafiei, "Vibration analysis of rotating functionally graded Timoshenko micro-beam based on modified couple stress theory under different temperature distributions," Acta Astronaut., vol. 121, pp. 221-240, 2016.

[47] J. Fang, J. Gu, and H. Wang, "Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded micro-beams based on a modified couple stress theory," Int. J. Mech. Sci.,vol. 136, pp. 188-199, 2018.

[48] A. Nateghi, and M. Salamat-talab, "Thermal effect on size dependent behavior of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory," Compos. Struct., vol. 96, pp. 97-110, 2013.

[49] R. Ansari, M. Faghih Shojaei, V. Mohammadi, R. Gholami, and H. Rouhi, "Nonlinear vibration analysis of microscale functionally graded Timoshenko beams using the most general form of strain gradient elasticity," J. Mech., vol. 30, pp. 161-172, 2014.

[50] M. Şimşek, and J. N. Reddy, "A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded micro-beam embedded in elastic medium using modified couple stress theory," Compos. Struct.,vol. 101, pp. 47-58, 2013.

[51] N. Shafiei, M. Kazemi, and M. Ghadiri, "On size-dependent vibration of rotary axially functionally graded micro-beam," Int. J. Eng. Sci., vol. 101, pp. 29-44, 2016.

[52] F. Ebrahimi, and M. Mokhtari, "Transverse vibration analysis of rotating porous beam with functionally graded microstructure using the differential transform method," J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 37, pp. 1435–1444, 2015.

[53] M. A. Khorshidi, and M. Shariati, "Free vibration analysis of sigmoid functionally graded nanobeams based on a modified couple stress theory with general shear deformation theory," J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 38, pp. 2607–2619, 2016.

[54] H. J. Mohammadabadi, O. Zargar, M. Baghani, "Size-Dependent Vibration Analysis of FG Microbeams in Thermal Environment Based on Modified Couple Stress Theory," IJST-T. Mech. Eng., vol. 43, pp. 761–771, 2019.

[55] M. A. Eltaher, N. Fouda, T. El-midany, A. M. Sadoun, "Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams," J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 40, pp. 141, 2018.

[56] A. Chakrabortya, S. Gopalakrishnana, and J. N. Reddy, "A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials," Int. J. Mech. Sci., vol. 45, pp. 519–539, 2003.

[57] J. Fang, J. Gu, H. Wang, and X. Zhang, "Thermal effect on vibrational behaviors of rotating functionally graded microbeams," Eur. J. Mech., vol. 75, pp. 497–515, 2019.

[58] B. Akgöz, and Ö. Civalek, "Effects of thermal and shear deformation on vibration response of functionally graded thick composite microbeams," Compos. Part B, vol. 129, pp. 77–87, 2017.

[59] L. C. Trinh, T. P. Vo, H. T. Thai, T-K. Nguyen, "An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads," Compos. Part B, vol. 100, pp. 152-163, 2016.

[60] S. Enayat, M. Hashemian, D. Toghraie, and E. Jaberzadeh, "A comprehensive study for mechanical behavior of functionally graded porous nanobeams resting on elastic foundation," J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 42, pp. 420, 2020.

[61] S. Rajasekaran, and H. B. Khaniki, "Bending, buckling and vibration analysis of functionally graded non-uniform nanobeams via finite element method," J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 40, pp. 549, 2018.

[62] M. Şimşek, "Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load," Compos. Struct., vol. 92, pp. 2532-2546, 2010.

[63] T-K. Nguyen, TT-P. Nguyen, T. P. Vo, and H-T. Thai, "Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory," Compos. Part B, vol. 79, pp. 273-285, 2015.

[64] Y. Aköz, and F. Kadıoğlu, "The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams," Int. J. Numer. Meth., vol. 44, pp. 1909-1932, 1999.

[65] G. Deng, "Mixed Finite Element Methods for Size-dependent Skew-symmetric Couple-stress Mechanics," Ann Arbor, MI: ProQuest LLC, 2016.

[66] A. Karamanlı, and T. P. Vo, "Size dependent bending analysis of two directional functionally graded microbeams via a quasi-3D theory and finite element method," Compos. Part B, vol. 144, pp. 171-183, 2018.

[67] T. Yu, J. Zhang, H. Hu, and T. Q. Bui, "A novel size-dependent quasi-3D isogeometric beam model for two directional FG microbeams analysis," Compos. Struct., vol. 211, pp. 76-88, 2019.

[68] T. Yu, H. Hu, J. Zhang, and T. Q. Bui, "Isogeometric analysis of size-dependent effects for functionally graded microbeams by a non-classical quasi-3D theory," Thin-Walled Struct., vol. 138, pp. 1-14, 2019.

[69] M. Al-shujairi, and Ç. Mollamahmutoglu, "Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich micro-beams resting on elastic foundation by using nonlocal strain gradient theory in conjunction with higher order shear theories under thermal effect," Compos. Part B, vol. 154, pp. 292-312, 2018.

[70] J. Lei, Y. He, B. Zhang, Z. Gan, and P. Zeng, "Bending and vibration of functionally graded sinusoidal microbeams based on the strain gradient elasticity theory," Int. J. Eng. Sci., vol. 72, pp. 36-52, 2013.

[71] J. Lei, Y. He, S. Guo, Z. Li, and D. Liu, "Size-dependent vibration of nickel cantilever microbeams: Experiment and gradient elasticity," Aip Advances, vol. 6, no. 10, 105202, 2016.

[72] Z. Li, Y. He, J. Lei, S. Guo, D. Liu, and L. Wang, "A Standard experimental method for determining the material length scale based on modified couple stress theory," Int. J. Mech. Sci.,vol. 141, pp. 198-205, 2018.

[73] J. Lei, Y. He, Z. Li, S. Guo, and D. Liu, "Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory," Compos. Struct., vol. 209, pp. 811-829, 2019.

[74] Y-R. Kwon, and B-C. Lee, "A mixed element based on Lagrange multiplier method for modified couple stress theory," Comput. Mech., vol. 59, pp. 117-128, 2017.

[75] N-T. Nguyen, N-I. Kim, and J. Lee, "Mixed finite element analysis of nonlocal Euler–Bernoulli nanobeams," Finite Elem. Anal. Des., vol. 106, pp. 65-72, 2015.

[76] G. Deng, and G. F. Dargush, "Mixed Lagrangian formulation for size-dependent couple stress elastodynamic and natural frequency analyses," Int. J. Numer. Meth. Vol. 109, pp. 809-836, 2017.

[77] G. Deng, and G. F. Dargush, "Mixed Lagrangian formulation for size-dependent couple stress elastodynamic response," Acta Mech., vol. 227, pp. 3451–3473, 2016.

[78] F. Lepe, D. Mora, and R. Rodríguez, "Locking-free finite element method for a bending moment formulation of Timoshenko beams," Comput. Math. Appl., vol. 68, pp. 118-131, 2014.

[79] A. Özütok, and E. Madenci, "Static analysis of laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory by using mixed-type finite element method," Int. J. Mech. Sci., vol. 130, pp. 234-243, 2017.

[80] M. Ghadiri, A. Zajkani, and M. R. Akbarizadeh, "Thermal effect on dynamics of thin and thick composite laminated microbeams by modified couple stress theory for different boundary conditions," Appl. Phys. A, vol. 122, no. 12, pp. 1023-1045, 2016.

[81] L-L. Ke, Y-S. Wang, and Z-D. Wang, "Thermal effect on free vibration and buckling of size-dependent microbeams," Phys. E, vol. 43, no. 7, pp. 1387–1393, 2011.

[82] R. Ansari, M. Faghih Shojaei, R. Gholami, V. Mohammadi, and M. A. Darabi, "Thermal postbuckling behavior of size-dependent functionally graded Timoshenko microbeams," Int. J. Nonlin. Mech., vol. 50, pp. 127–135, 2013.

[83] A. A. P. Zanoosi, "Size-dependent thermo-mechanical free vibration analysis of functionally graded porous microbeams based on modified strain gradient theory," J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 42, pp. 236, 2020.

[84] S. K. Bohidar, R. Sharma, and P. R. Mishra, "Functionally graded materials: A critical review," Int. J. Res., vol. 1, no. 7, pp. 289-301, 2014.

[85] J. R. Hutchinson, "Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory," J. Appl. Mech, vol. 68, no. 1, pp. 87-92, 2001.

[86] J. T. Oden, J. N. Reddy, "Variational methods in theoretical mechanics," Springer-Verlag, 1976.

[87] M. H. Sadd, "Elasticity: Theory, Applications and Numerics, 2nd Edn," Burlington, Academic Press, 2009.

[88] A. M. Dehrouyeh-Semnani, M. Nikkhah-Bahrami, "A discussion on incorporating the Poisson effect in micro-beam models based on modified couple stress theory," Int. J. Mech. Sci., vol. 86, pp. 20–25, 2015.

[89] J. N. Reddy, "Energy principles and variational methods in applied mechanics," John Wikey & Sons, INC. 2nd ed., 2002.

[90] Ç. Mollamahmutoğlu, "A new functional for eigenvalue analysis of Timoshenko beams and finite element formulation," *Graduate School of Natural and Applied Science, İstanbul Technical University*, 2014.

[91] J. N. Reddy, " An introduction to the finite element method, 2nd Edn," Texas, Academic Press, 1993.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgisi: alimrcn24@gmail.com

ali.mercan@ibu.edu.tr

Makaleler

1) Ç. Mollamahmutoğlu, and A. Mercan, "A novel functional and mixed finite element analysis of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory," Compos. Struct., vol. 223, pp. 110950, 2019.