

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİ İNDİRGEMESİ İLE ELDE EDİLEN YENİ
(2+1)-BOYUTLU İKİLİ-HAMİLTONİYEN SİSTEM VE
HAREKET SABİTLERİ

Salih YAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fizik Anabilim Dalı
Fizik Programı

Danışman
Prof. Dr. Devrim YAZICI

Şubat, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SİMETRİ İNDİRGEMESİ İLE ELDE EDİLEN YENİ (2+1)-BOYUTLU
İKİLİ-HAMİLTONİYEN SİSTEM VE HAREKET SABİTLERİ**

Salih YAMAN tarafından hazırlanan tez çalışması 24.02.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Fizik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Devrim YAZICI
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Devrim YAZICI, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ekrem AYDINER, Üye
İstanbul Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Devrim YAZICI sorumluluğunda tarafımca hazırlanan SİMETRİ İNDİRGEMESİ İLE ELDE EDİLEN YENİ (2+1)-BOYUTLU İKİLİ-HAMİLTONİYEN SİSTEM VE HAREKET SABİTLERİ başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Salih YAMAN

İmza

*Annem Hatice YAMAN ve babam Fahrettin YAMAN'a gurur,
yeğenim Alp Asaf YAMAN'a esin kaynağı olması dileğiyle...*

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca değerli bilgi birikimini, tecrübesini ve vaktini bana ayırarak akademik gelişimime katkıda bulunan tez danışmanım sayın Prof. Dr. Devrim YAZICI'ya; derslerini aldığım Fizik bölümünün değerli öğretim üyelerine; beni yetiştirerek bugünlere gelmemi sağlayan ve hayatımın her alanında maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Salih YAMAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
2 GENEL BİLGİLER	5
2.1 Lagrange Mekaniği	5
2.2 Hamilton Mekaniği	8
2.3 Dirac Bağ Analizi	11
2.4 İkili-Hamiltoniyen Yapı	15
2.5 Simetriler ve Noether Teoremi	18
3 (3+1)-BOYUTLU EVRİMSEL HİROTA TİPİ DENKLEMLERİN İKİLİ-HAMİLTONİYEN YAPISI	21
3.1 Evrimsel Hirota Tipi Denklem ve Euler Lagrange Formu	21
3.2 İki Bileşenli Gösterim	24
3.3 Birinci Hamiltoniyen Yapı	26
3.4 Tekrarlama Operatörü ve (3+1)-Boyutlu Yeni Sistem	29
4 SİMETRİLER, NOETHER TEOREMİ VE YENİ (2+1)-BOYUTLU İNTEGRE EDİLEBİLİR İKİLİ-HAMİLTONİYEN SİSTEM	35
4.1 Simetriler ve Simetri İndirgemesi	35
4.2 Dirac Bağ Analizi ve Birinci Hamiltoniyen Yapı	39
4.3 İndirgenmiş (2+1)-Boyutlu Sisteme ait Tekrarlama Operatörü	48

4.4	İndirgenmiş (2+1)-Boyutlu Sisteme ait İkinci Hamilton Operatörü . . .	52
4.5	Jacobi Özdeşliği	54
4.6	Magri Teoremi ve İndirgenmiş (2+1)-Boyutlu Sistemin İkili-Hamiltoniyen Yapısı	59
4.7	Simetriler, Noether Teoremi ve Hareket Sabitleri	61
5	SONUÇ VE ÖNERİLER	78
	KAYNAKÇA	81
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	84

SİMGE LİSTESİ

A_i, B_i	Asimetrik çarpım operatörleri
J_0	Birinci Hamilton operatörü
H_0	Birinci Hamiltoniyen yoğunluğu
I	Değişmezler (İnvaryantlar)
$\wedge$	Dış (Wedge) çarpım
ω	Diferansiyel n -form
ϕ_j	Dirac bağ koşulu (birincil)
χ	Dirac bağ koşulu (ikincil)
p_k	Eşlenik momentum
E	Euler operatörü
F	Euler-Lagrange formunda kısmi türevli diferansiyel denklem
S	Eylem integrali
D_F	Frechet türev operatörü
D_{F^*}	Frechet türev operatörünün eşleniği
$\dot{q}_k$	Genelleştirilmiş hız
q_k	Genelleştirilmiş koordinat
$PrV_{J\omega}$	Genişletilmiş evrimsel vektör alanı
τ	Grup parametresi
H	Hamiltoniyen yoğunluğu
H^*	Hamiltoniyen yoğunluğu
$\Gamma^\dagger$	Hermitik eşlenik Γ matrisi
J	I ve 0 matrislerinden oluşan simplektik matris
Θ	İkili-vektör

J_1	İkinci Hamilton operatörü
H_1	İkinci Hamiltoniyen yoğunluğu
r	İndirgenmiş sistem
Γ	J_0 ve J_1 doğrusal birleşimi
Π_u, Π_v	Kanonik momentumlar
δ_i^k	Kesikli Dirac delta fonksiyonu
∂_i	Kısmi türev operatörü
L	Lagrange yoğunluğu
X, Y	Lie nokta simetrileri
φ, ψ	Simetri karakteristikleri
K	Simplektik matris
$\delta(z - z')$	Sürekli Dirac delta fonksiyonu
R	Tekrarlama operatörü
H_T	Toplam Hamiltoniyen yoğunluğu
D_i	Toplam türev operatörü
K^T	Transpoze simplektik matris
z_i	Uzay koordinatları
δ	Varyasyon
δ_u, δ_v	Varyasyonel türev operatörleri
t	Zaman koordinatı

KISALTMA LİSTESİ

DP	Dirac parantezi
IST	Ters Saçılma Dönüşümü
KdV	Korteweg- de Vries denklemi
KP	Kadomtsev-Petviashvili denklemi
NLS	Doğrusal Olmayan Schrödinger denklemi
PP	Poisson parantezi
SDYM	Self Dual Yang Mills denklemleri
SGE	Sine-Gordon denklemi

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1	$(3+1)$ -boyutlu sisteme ait nokta simetrilerin sıra değiştirmeleri [41]	35
Tablo 4.2	$(2 + 1)$ -boyutlu sisteme ait nokta simetrilerin sıra değiştirmeleri . .	64

SİMETRİ İNDİRGEMESİ İLE ELDE EDİLEN YENİ (2+1)-BOYUTLU İKİLİ-HAMILTONİYEN SİSTEM VE HAREKET SABİTLERİ

Salih YAMAN

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Devrim YAZICI

Evrimsel tipte doğrusal-olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler doğada bulunan dinamik sistemleri başarılı bir şekilde modelleyebildikleri için literatürde sıklıkla yer alırlar. Bu tür denklemlerin tam çözümlerini elde edebilmek için araştırmalar uzun yıllardır süregelmektedir. Bu çalışmada, yakın zamanda keşfedilmiş ve $(3+1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen yapı oluşturduğu gösterilmiş olan evrimsel Hirota tipinde bir denklem ele alınmıştır. Lie cebiri yöntemleri kullanılarak, denklemi $(2+1)$ -boyutta elde edebilmek için özel bir simetri birleşimi seçimi ile simetri indirgemesi yapılmıştır. İndirgenmiş denklem $(2+1)$ -boyutlu yeni sistem oluşturan iki bileşenli gösterimde yazılmıştır. $(3+1)$ -boyutlu sisteme ait tüm parametreler aynı simetri seçimi ile indirgenmiştir. Helmholtz koşulunun sağlandığı gösterilerek indirgenmiş denklemin varyasyonel bir problemi temsil ettiği doğrulanmıştır. İndirgenmiş Euler-Lagrange denklemi için tanımlı Lagrange yoğunluğu Homotopi formülü kullanılarak elde edilip iki bileşenli gösterime göre yeniden düzenlenmiştir. Legendre dönüşümü kullanılarak birinci Hamiltoniyen yoğunluğu bulunmuştur. Dirac bağ analizi yardımıyla yeni sisteme ait simplektik ve birinci Hamilton operatörler bulunmuştur. Bu sisteme ait simetri koşulunun asimetric çarpanlar biçimine dönüştürülmesi sayesinde tekrarlama operatörü elde edilmiştir. Bu sayede, tekrarlama operatörü birinci Hamilton operatörüne uygulanarak ikinci Hamilton operatörüne ulaşılmıştır. Bu yöntem ile elde edilen $(2+1)$ -boyutlu tüm parametrelerin $(3+1)$ -boyuttan doğrudan indirgenerek elde edilen parametreler ile tam olarak aynı olduğu gözlenmiştir. Yeni sistemin Magri teoremine göre ikili-Hamiltoniyen yapı oluşturduğu gösterilmiştir. Noether teoremi

sayesinde, yeni sistem tarafından belirlenen akışa ait korunumlu nicelikler ortaya çıkarılmıştır. Son olarak, korunumlu nicelikler toplam diverjans formuna getirilerek gerçekten korunum yasalarını temsil ettikleri gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çözülebilirlik, ikili-Hamiltoniyen sistem, simetri indirgemesi, Noether teoremi, korunumlu nicelikler

ABSTRACT

NEW (2+1)-DIMENSIONAL BI-HAMILTONIAN SYSTEM OBTAINED BY SYMMETRY REDUCTION AND CONSTANTS OF MOTION

Salih YAMAN

Department of Physics
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Devrim YAZICI

Nonlinear partial differential equations of evolutionary type appear frequently in physics due to their utility in modeling dynamical phenomena in nature. Therefore, there has been an ongoing quest for decades in order to find exact solutions of these kind of equations. In this study, exact solutions of a recently discovered evolutionary Hirota type equation that is known to form a $(3 + 1)$ -dimensional bi-Hamiltonian system are investigated. By using methods of Lie algebra, symmetry reduction is performed with a specific choice of symmetry combination in order to get the equation in $(2 + 1)$ -dimension. The reduced equation is written in a two component form that composes the new $(2 + 1)$ -dimensional system. All parameters of the $(3 + 1)$ -dimensional system are reduced with the same symmetry choice. It is verified that the reduced equation represents a variational problem by showing that Helmholtz condition is satisfied. Lagrange function defined for the reduced Euler-Lagrange equation is obtained by Homotopy formula and rearranged according to two-component form. First Hamiltonian density is obtained by using Legendre transformation. Symplectic and first Hamilton operators belonging to the new system are found with the aid of Dirac constraint analysis. By converting the symmetry condition of the new system into skew factorized form, the recursion operator is obtained which in turn leads to the second Hamilton operator by applying the recursion operator to the first Hamilton operator. All the parameters in $(2 + 1)$ -dimension obtained with this method are observed to be exactly the same with the parameters obtained by direct reduction from $(3 + 1)$ -dimension. It is shown

that the new system forms a bi-Hamiltonian structure according to Magri's theorem. Constants of motion along the flow governed by the new system are revealed by utilizing Noether's theorem. Finally, constants of motion are cast into total divergence form in order to demonstrate that they indeed represent conservation laws.

Keywords: Integrability, bi-Hamiltonian system, symmetry reduction, Noether's theorem, conserved densities

1.1 Literatür Özeti

İntegre edilebilir sistemler çok sayıda simetri ve korunumlu nicelik içermeleri sayesinde temsil ettikleri probleme tam çözüm sunabilmektedir. Dolayısıyla bu tür sistemler kuramsal fizikte oldukça önemlidir. İntegre edilebilir sistemler tüm başlangıç koşulları için düzenli çözümlere sahiptir. Buna karşın, integre edilemeyen sistemler başlangıç koşullarına hassasiyetle bağımlı düzensiz çözümlere sahiptir [1]. Bir sistemin integre edilebilir olup olmadığını başlangıçta tahmin etmek zordur. Tarih boyunca farklı ekoller ve anlayışlar tarafından geliştirilmiş olduklarından evrensel bir tanım oluşmamıştır. “Tam çözüm” ya da “çözülebilirlik” kavramı, üzerinde çalışılan sisteme ve çalışan kişinin bakış açısına göre şekillenebilir. Örneğin bir anlayışa göre, genel çözümde kaldırılabilir kritik tekillik bulunmama durumunu ifade eden Painlevé özelliğine sahip adi diferansiyel denklemler integre edilebilirdir [2, 3]. Bu özelliğin kısmi diferansiyel denklemleri de içerecek şekilde genelleştirilebileceği gösterilmiştir [4, 5]. Painlevé özelliğine sahip her diferansiyel denklem integre edilebilir olmasına karşın, integre edilebilir her kısmi diferansiyel denklem bu özelliğe sahip olmayabilir [6]. Bir başka anlayışa göre ise, $2N$ boyutlu faz uzayında tanımlanan bir sistem, bu faz uzayının içerisinde birbiriyle involüsyon (Poisson parantezleri sıfır) durumunda bulunan N tane korunumlu niceliğe sahipse integre edilebilirdir. Bu durum Liouville integre edilebilirliği olarak adlandırılmıştır [7]. Magri tarafından yapılan çalışmalarla, evrimsel denklemlerin korunumlu nicelikleri ile simetrilerinin birbirlerine simplektik operator aracılığıyla bağlantısı sağlanmıştır [8, 9]. Bu yöntem ile bir evrimsel denklem sistemine ait birden çok Hamiltoniyen yoğunluğu bulunması, sistemin Magri teoremine göre integre edilebilir olması olarak yorumlanmıştır. Tarihte çözülen ilk integre edilebilir sistem, merkezi bir kuvvet alanında etkileşen iki cismin davranışını inceleyen Kepler’in iki cisim problemidir. Bu problemin çözümüyle beş korunumlu nicelik bulunmuştur [10]. İntegre edilebilir sistemler ile ilgili çalışmalar 18. ve 19. yüzyılda devam etmiştir. Fizikte topaç hareketi, simetri eksenini üzerindeki bir noktası sabit olan katı bir cismin yerçekimi etkisiyle presesyon hareketi yapması

olarak tanımlanır. Bu hareketin farklı özel koşullardaki durumunu modelleyen Euler ve Lagrange topaçları bu dönemde bulunan integre edilebilir sistemlere örnektir [7]. Bu ikisine ek olarak Kowalevski, Painlevé durumunda olduğu gibi tekillik analizi yaparak topaç hareketinin özel bir fiziksel koşulda integre edilebilir olduğunu göstermiştir. 1889 yılında yayınladığı bu ünlü çalışması o dönemin son integre edilebilirlik çalışmasıdır [11]. İki cisim problemi tam olarak çözülebilmesine rağmen, üç cisim probleminin tam çözümü için yapılan uğraşlar sonuç vermemiştir. Poincare, 1890 yılında yayınlanan çalışmasıyla üç cisim probleminin çözümünün düzensiz ve başlangıç koşullarına hassas bağımlı olduğunu, yani integre edilebilir olmadığını göstermiştir [12]. Ayrıca, dinamik sistemlerin genelinde integre edilebilirliğin nadir bulunan bir özellik olduğunu göstermesi nedeniyle bu alanda uzun süre çalışma yapılmamıştır.

1965 yılında Zabusky ve Kruskal, istatistiksel mekanik ile ilgili Fermi-Pasta-Ulam problemini çözmek amacıyla dar bir su kanalındaki dalga hareketini modelleyen Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin belli bir başlangıç değeriyle nümerik bir çalışma yürütmüştür [13]. Bu çalışmayla KdV denkleminin “soliton” adını verdikleri kararlı, parçacık benzeri davranış gösteren çözümlerini elde etmişlerdir. 1967 yılında Gardner, Green, Kruskal ve Miura, KdV denkleminin tüm başlangıç koşulları için analitik çözümünü, 1951 yılında Gelfand-Levitan-Marchenko tarafından geliştirilmiş, doğrusal olmayan denklemleri çözmede çok kullanışlı bir yöntem olan “Ters Saçılma Dönüşümü” (IST) kullanarak elde etmiştir [14]. Bu çalışmayla bağlantılı olarak Zakharov ve Fadeev’in 1971 yılında yayınlanan, KdV denkleminin integre edilebilir Hamiltoniyen sistem olduğunu gösteren çalışması, Kowalevski’nin 1889 yılındaki çalışmasından sonra integre edilebilir sistemler ile ilgili ilk çalışma olmuştur [15]. Böylece bu alanda yeni bir dönem başlamıştır. Gene bu zamanlarda Zakharov ve Shabat, doğrusal olmayan kırılma indisli ortamda ilerleyen düzlem dalgaları modelleyen doğrusal-olmayan Schrödinger denkleminin (NLS) soliton çözümlere sahip ve integre edilebilir olduğunu göstermiştir [16]. Diferansiyel geometri ile ilgili bir denklem olan Sine-Gordon denkleminin (SGE) de soliton çözümlere sahip olduğunun gösterilmesiyle 1970’li yıllarda bu denkleme ilgi artmıştır [17]. Bu çalışmalar kuramsal açıdan önemli olduğu gibi teknolojiye etkileri açısından da önemlidir. Örneğin NLS, dijital verilerin taşındığı fiber optik iletişim sistemlerinde ilerleyen ışığın bağlı olduğu denklemdir [18]. Sine-Gordon denklemi, süperiletken aygıtların yapımında kullanılan Josephson eklemlerini modelleyebilmektedir [19]. 1968 yılında Lax, korunumlu büyüklükleri bulunan evrimsel denklemlerin zaman evrimlerinin $\frac{d}{dt}L(t) = [A(t), B(t)]$ olarak ifade edilmesini sağlayan, Lax çifti olarak adlandırılan (A,B) operatör çiftinin bulunduğunu göstermiştir [20]. İlerleyen zamanlarda Lax çifti yöntemi integre edilebilir sistem araştırmalarında yaygın olarak

kullanılmıştır. Bu alanda yapılan çalışmalar genelde $(1 + 1)$ -boyuttadır. $(2 + 1)$ ve $(3 + 1)$ -boyutta integre edilebilir sistemlere literatürde daha az rastlanmaktadır. Literatürde bulunan ilk $(2 + 1)$ -boyuttaki integre edilebilir sistem KP denklemidir. KdV denkleminin genelleştirilmiş bir hali olan bu denklem 1970 yılında Kadomtsev ve Petviashvili tarafından bulunmuştur. 1974 yılında bu denklemin integre edilebilir olduğu Zakharov ve Shabat tarafından IST kullanılarak gösterilmiştir [21]. Kütleçekimsel fizikte önemli uygulamaları bulunan Self-Dual-Yang-Mills (SDYM) denklemlerinden KdV, SGE, NLS gibi belli başlı integre edilebilir sistemlerin türetilbildiğinin anlaşılmasıyla SDYM denklemleri oldukça ilgi çekmiştir [22]. Magri 1978 yılında evrimsel bir sistemin birden fazla Hamiltoniyen yapısına sahip olabileceğini gösterdikten sonra integre edilebilir sistemler alanında yapılan çalışmalar ivme kazanmış ve görelilik, plazma, akışkanlar gibi fiziğin farklı alanlarında yer alan pek çok doğrusal-olmayan (non-linear) diferansiyel denklemin çoklu Hamiltoniyen yapıda olduğunun keşfedilmesiyle Magri teoreminin gücü anlaşılmıştır [8].

Son yıllarda integre edilebilir sistemler alanındaki çalışmalara konu olan sistemlerden biri Evrimsel Hirota tipi denklemlerdir. Bu tür denklemler 1971 yılında Hirota'nın çoklu soliton çarpışmaları durumunda KdV denkleminin tam çözümünü elde etmek amacıyla yaptığı çalışmayla ortaya çıkmıştır [23]. KP denklemlerinin tam çözümü için de kullanılmaktadır. Evrimsel Hirota tipi denklemler belli koşullarda Simplektik Monge-Ampère formuna sahiptir [24–26]. Simplektik Monge-Ampère formundaki denklemlerin fizikteki önemi, Genel Görelilikte dört boyutta self-dual Ricci-düz uzay metriğini açıklayan heavenly denklemleri olarak ortaya çıkmalarıdır [27]. Yakın zamanda bu konuyla ilgili yapılan çalışmalara bir örnek Sheftel ve Yazıcı'nın 2019 yılında yayınlanan $(3 + 1)$ -boyutlu evrimsel Hirota tipi denklemlerin Magri teoremine göre integre edilebilirliğini incelediği çalışmadır [26]. Bu çalışmada her birinin ikili-Hamiltoniyen yapıda integre edilebilir sistem oluşturduğu gösterilmiş olan beş ayrı Monge-Ampère formulu denklem keşfedilmiştir.

Lie cebiri vasıtasıyla kısmi türevli diferansiyel denklemlerin simetrileri belirlenip bağımsız değişken sayısı azaltılabilir [28]. Doğru simetriler seçilip indirgeme yapıldığında denklemin çözümü değişmez kalır. Bu şekilde bir simetri indirgemesi yapılarak $(3+1)$ -boyutlu denklemlerin $(2+1)$ -boyuta indirgendiği örnekler literatürde bulunmaktadır [29–31]. Bu yöntem yeni integre edilebilir sistemler elde edilmesinde oldukça etkindir. Noether theoremi fizikteki her simetri durumuna karşılık gelen bir hareket sabiti bulunduğunu ifade eder [32]. Bu teoremin özelliğinden faydalanarak, integre edilebilir sistemin simetri indirgemesinde çözümün değişmez kalmasını sağlayan her simetri karakteristiğine karşılık bir hareket sabiti ortaya çıkartılabilir. Böylece elde edilen yeni integre edilebilir sisteme ait zaman içinde korunan

büyüklikler belirlenmiş olur.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, yakın zamanda keşfedilmiş evrimsel Hirota tipinde ve Simplektik Monge-Ampère biçiminde bulunan $(3 + 1)$ -boyutlu bir denklemin oluşturduğu integre edilebilir ikili-Hamiltoniyen sistemden $(2 + 1)$ -boyutlu yeni bir sistemi simetri indirgemesi yoluyla elde etmek ve bu sistemin oluşturduğu akışa ait hareket sabitlerini ortaya çıkarmaktır. Bölüm 1’de integre edilebilir sistemlerin tarihsel gelişim seyri ile birlikte konuya dair genel bir bakış açısı sunulmuştur. Literatürden örnekler verilip konunun önemi aktarılmıştır. Bölüm 2’de tez çalışmasının kuramsal altyapısını oluşturan Hamilton ve Lagrange formalizmleri, Dirac bağ analizi, Magri teoremi, simetriler ve Noether teoremi ele alınmıştır. Bölüm 3’te yakın zamanda yayınlanmış olan evrimsel Hirota tipi denklemlerin Hamiltoniyen yapısının incelendiği bir çalışma ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Söz konusu çalışma ile $(3 + 1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen yapı oluşturan bir denklem ilk defa literatüre sunulmuştur. Bölüm 4’te bir önceki bölümde ele alınan $(3 + 1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen sisteme simetri indirgemesi uygulanıp $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sistem elde edilmiştir. Seçili simetri indirgemesi altında yeni sistemin başlangıçtaki sistem gibi ikili-Hamiltoniyen yapıda olduğu gösterilmiştir. Yeni sistem tarafından belirlenen hareket sabitleri bulunmuş ve bunların toplam diverjans gösterimi elde edilerek geçerliliği kanıtlanmıştır.

1.3 Hipotez

Güncel literatürde karşılaşılan ve $(3 + 1)$ -boyutta ikili-Hamiltoniyen yapıda integre edilebilir sistem oluşturan evrimsel Hirota tipinde bir denklem belli bir simetri seçilip indirgeme yapıldığında $(2 + 1)$ -boyutlu yeni bir sistem oluşturacaktır ve bu sistem başlangıçtaki sistem gibi ikili-Hamiltoniyen yapıda olacaktır. Yeni sistemin oluşturduğu simetriler Noether teoremine göre yeni hareket sabitlerine karşılık gelecektir.

2.1 Lagrange Mekanığı

Varyasyon analizinin kurucularından olan Lagrange 18. yüzyılda, önceki yüzyılda geometrik yaklaşımlar içeren biçimde kurulmuş olan Newton mekaniğini tamamen analitik yaklaşımlarla daha kapsayıcı biçimde yeniden formüle etme çabası içinde bulunmuştur. "d'Alembert sanal iş ilkesi" üzerinden geliştirdiği hareket denklemleri "Analitik Mekanik" isimli ünlü eserinde yer almaktadır [33]. Günümüzde "Euler-Lagrange denklemleri" olarak bilinen bu denklemler N serbestlik derecesine sahip sistemler için

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (2.1)$$

olarak ifade ediliyor. Mekanik bir sistemin uzaysal konfigürasyonunu tam olarak tanımlayabilen değişkenler bütününe dinamik değişkenler denir. Dinamik değişkenler genelde doğrusal ve/veya açısal konum olarak seçilir. Kartezyen, kutupsal, küresel veya farklı bir koordinat sisteminin kullanılması tercihe bağlıdır. Dinamik değişkenlerin arasında birbirine bağımlı olanlar varsa sistemin hareket edebileceği eksenleri sınırlayan bağ koşulları var demektir. Geriye kalan bağımsız dinamik değişkenler q_k ($k = 1, \dots, N$) olarak yazılan genelleştirilmiş koordinatlardır. Genelleştirilmiş koordinatların sayısı N o sistemin serbestlik derecesidir. Serbestlik derecesi sistemin içsel bir özelliğidir. Sistemi tanımlamak için kullanılan dinamik değişken sayısı tercihe bağlı olarak değişebilir fakat genelleştirilmiş koordinat sayısı bellidir. Genelleştirilmiş koordinatların zamana göre türevi $\dot{q}_k$ ise genelleştirilmiş hızdır. T kinetik enerji, U potansiyel enerjiyi temsil eden skaler fonksiyonlar olmak üzere

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U \quad (2.2)$$

olarak tanımlanan genelleştirilmiş koordinatlar, genelleştirilmiş hızlar ve zamana bağlı Lagrange yoğunluğu L (2.1) denklemlerini sağlamaktadır [32]. (2.1) ifadesi N serbestlik derecesi sayısında denklem ihtiva eder. Tek başına fiziksel bir anlamı olmayan Lagrange yoğunluğu mekanik sistemlerin dinamiğinin elde edilmesinde

faydalı matematiksel bir araçtır. Newton mekaniğinden farklı olarak Lagrange mekaniğinde çözüm yapılırken kuvvetler dikkate alınmaz, enerji dikkate alınır. Newton mekaniği ile aynı hareket denklemlerine ulaşılır fakat çok sayıda kuvvetin etkin olduğu daha karmaşık sistemlerde Lagrange mekaniğinden yararlanmak daha uygundur. Ayrıca birden çok koordinata sahip sistemlerde Lagrange mekaniği genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden tanımlandığı için daha elverişlidir ve her koordinat için hareket denklemlerine ulaşılmasını sağlar. Euler-Lagrange denklemlerine ulaşmanın bir diğer yolu da "en az eylem" ilkesidir. İlk defa filozof Maupertius tarafından açıklanan bu ilke Lagrange'dan sonraki döneme tekabül eden 1834 ve 1835 yıllarında Hamilton'un yayınladığı çalışmalarla bilimsel bir zemine oturmuştur. Hamilton'un kendi ismiyle de anılan bu ilke şu şekilde tanımlanmıştır: "Belirli bir zaman aralığında belirli iki nokta arasında hareket eden bir dinamik sistem bu iki nokta arasında kinetik ve potansiyel enerji farkının zaman integralinin minimum olacağı yolu izler"[34]. Kinetik ve potansiyel enerji farkı (2.2) eşitliğinde tanımlandığı üzere Lagrange yoğunluğudur. Lagrange yoğunluğunun zamana göre integrali "eylem integrali" olarak adlandırılır ve şu şekilde ifade edilir:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (2.3)$$

Eylem integralinin minimum durumu için (2.3) denkleminin varyasyonu sıfır olmalıdır.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = 0 \quad (2.4)$$

Genelleştirilmiş hızın varyasyonu için

$$\delta \dot{q}_k = \delta \left(\frac{dq_k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_k \quad (2.5)$$

eşitliği yazılabilir. (2.5) dikkate alınıp (2.4) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terime kısmi integrasyon uygulandığında

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt \quad (2.6)$$

elde edilir. (2.6) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}$ olarak integralden çıkar. Sınır noktalarda varyasyon sıfır olduğu için bu terim sıfır olur ve

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir. (2.7) eşitliği (2.4)'de kullanıldığında

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt = 0 \quad (2.8)$$

elde edilir. δq_k bağımsız ve keyfi olduğu için köşeli parantez içindeki ifade sıfır olmalıdır. Bu ifade (2.1) ile aynı olduğu için Euler-Lagrange denklemleri elde edilmiş olur. q_k koordinatıyla ilişkili eşlenik momentum

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.9)$$

bağıntısıyla bulunabilir [10]. (2.9) bağıntısı Euler-Lagrange denklemlerinde (2.1) kullanıldığında

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (2.10)$$

elde edilir.

Bir mekanik sistem Lagrange yoğunluğuna (L) sahipse bu sisteme "varyasyonel problem" denir [28]. Varyasyonel problemi tanımlayan Lagrange denklemi

$$E(L) = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Euler operatörünü simgeleyen E

$$E_\alpha = \sum_J (-D)_J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (2.12)$$

denkleme ifade edilir ve burada $(-D)_J = (-1)^k D_J = (-D_{j_1})(-D_{j_2})\dots(-D_{j_k})$ şeklinde tanımlıdır [28]. Euler operatörü, δ_{u^α} varyasyonel türev operatörünün diğer bir adıdır. Toplam, tüm çoklu alt indisler $J = (j_1, \dots, j_k)$ üzerinden alınır. u^α konum ve zaman boyutlarına bağlı bilinmeyen bir fonksiyondur. Örneğin $\alpha = 1, 2$ değerlerini alıyorsa $u^1 = u$, $u^2 = v$ olur. J alt indisi fonksiyonun kısmi türevlerini temsil eder. Örneğin z_k konum, t zaman boyutu olmak üzere $u_1 = \frac{\partial u}{\partial z_1}$, $u_{t2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z_2}$.

Mekanik sistemin $u = u(t, z_1, z_2, z_3)$ fonksiyonuna bağlı Euler-Lagrange denklemi $F[u]$ ile temsil edilsin. Bu denklemin Frechet türev operatörü

$$D_F = \sum_J \frac{\partial F[u]}{\partial u_J} D_J \quad J = t, z_1, z_2, z_3, \dots, z_2 t, z_3 t, t t \quad (2.13)$$

denkleme bulunabilir ve eşlenik operatörü

$$D_F^* = \sum_J (-D)_J \frac{\partial F[u]}{\partial u_J} \quad J = t, z_1, z_2, z_3, \dots, z_2 t, z_3 t, t t \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlıdır [28]. Helmholtz koşuluna göre varyasyonel problemi temsil eden bir sistem için

$$D_F = D_F^* \quad (2.15)$$

sağlanmalı ve söz konusu sistemin Lagrange yoğunluğunu bulmak için

$$L[u] = \int_1^2 u.F[\lambda u] d\lambda \quad (2.16)$$

ile verilen Homotopi formülü kullanılır [28].

2.2 Hamilton Mekaniği

Hamilton mekaniği, ismini aldığı William Rowan Hamilton tarafından 19. yüzyılda Lagrange mekaniği yeniden formüle edilerek geliştirilmiştir. Klasik mekanik dışında istatistik mekanik ve kuantum mekaniğinin formülasyonu da Hamilton mekaniğine dayanmaktadır. Lagrange mekaniğinde dinamik değişkenler q ve $\dot{q}$ olarak alınırken, Hamilton mekaniğinde q ve p olarak alınmaktadır. p , (2.9) bağıntısıyla ifade edilen eşlenik momentumdur. N serbestlik dereceli bir mekanik sistem, N tane q_k genelleştirilmiş koordinat ve karşılığındaki N tane p_k eşlenik momentumun oluşturduğu $2N$ -boyutlu faz uzayında temsil edilir [10]. Sistemin bu faz uzayındaki akışı $H(q, p, t)$ ile gösterilen Hamiltoniyen yoğunluğu tarafından belirlenir. Lagrange mekaniğinde Euler-Lagrange denklemlerinin çözülmesiyle Newton mekaniği hareket denklemlerinin elde edilebilmesi gibi Hamilton mekaniğinde de

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (2.17)$$

olarak verilen Hamilton kanonik denklemlerinin çözülmesiyle aynı denklemler elde edilir. [10]. N serbestlik dereceli sistem için Lagrange mekaniğinde bulunan N tane Euler-Lagrange denklemine (2.1) karşın Hamilton mekaniğinde (2.17) ifadesinde görüldüğü üzere $2N$ tane Hamilton kanonik denklem bulunur. (2.17) denklemleri matrix formunda yazılabilir. Bu amaçla N serbestlik dereceli sistem için " η " ile temsil edilen $2N$ elemanlı sütun matrisinin elemanları

$$\eta_k = q_k, \quad \eta_{k+N} = p_k; \quad k \leq N \quad (2.18)$$

olacak şekilde tanımlanır. Buna göre, bu sistem için oluşacak " $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ " sütun matrisinin elemanları

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{k+N} = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad k \leq N \quad (2.19)$$

olur. Ayrıca " J " ile temsil edilen $2N \times 2N$ boyutlu, elemanları $N \times N$ boyutlu I birim ve 0 matrislerinden oluşan matris

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

olarak tanımlanır. (2.17) Hamilton kanonik denklemleri (2.18), (2.19) ve (2.20) tanımlamalarıyla

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (2.21)$$

matris formunda yazılabilir. (2.21) denklemi Hamiltoniyen yapının simplektik notasyonda gösterimidir [10]. Lagrange yoğunluğu bilinen bir sistemin Hamiltoniyen yoğunluğu

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^N \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}, t) \quad (2.22)$$

olarak verilen Legendre dönüşümü ile bulunabilir. Lagrange yoğunluğu zamana açık olarak bağlı değilse Hamiltoniyen yoğunluğu korunumlu bir büyüklüktür [32]. Kinetik enerjinin (T) genelleştirilmiş hızlara kuadratik olarak bağlı olması ve Potansiyel enerjinin (U) genelleştirilmiş hızlardan bağımsız olması koşuluyla Hamiltoniyen yoğunluğu (H)

$$T + U = E = H \quad (2.23)$$

olacak şekilde sistemin toplam enerjisini (E) temsil eder [34].

Mekanik sistemin faz uzayı üzerinde tanımlı, p ve q dinamik değişkenlerine bağlı herhangi bir F yoğunluğunun zaman evrimi

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \{F, H\} \quad (2.24)$$

bağıntısıyla verilir [7]. Bu tanıma göre Hamilton kanonik denklemleri (2.17)

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}, \quad \dot{p}_k = \{p_k, H\} \quad (2.25)$$

olarak ve simplektik notasyondaki gösterim (2.21)

$$\dot{\eta} = \{\eta, H\} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (2.26)$$

şeklinde yazılabilir [10]. Mekanik sistemin dinamik davranışı (2.26) denklemiyle

belirlenebiliyorsa bu sistem Hamiltoniyen yapı oluşturur. (2.24) denkleminin sağ tarafındaki ifade

$$\{F, G\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right) \quad (2.27)$$

tanımına göre işlem gören Poisson parantezidir [7]. F, G ve H faz uzayındaki fonksiyonlar olmak üzere, Poisson parantezlerinin sağlaması gereken özellikler

(i) İkili-doğrusallık

$$\{aF + bH, G\} = a\{F, G\} + b\{H, G\}, \quad \{F, aG + bH\} = a\{F, G\} + b\{F, H\} \quad (2.28a)$$

a, b sabitlerdir

(ii) Ters simetri

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (2.28b)$$

(iii) Leibniz kuralı (çarpım kuralı)

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\} \quad (2.28c)$$

(iv) Jacobi özdeşliği

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0 \quad (2.28d)$$

olarak sıralanır [28].

H Hamiltoniyen yoğunluğu olmak üzere, (2.25) ve (2.27) tanımlarına göre

$$\{F, H\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{dF}{dt} \quad (2.29)$$

denklemi yazılabilir. (2.17) Hamilton kanonik denklemleri, (2.29) denkleminde kullanıldığında

$$\sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{dF}{dt} \quad (2.30)$$

elde edilerek (2.24) doğrulanır. p ve q dinamik değişkenlerinin kendi aralarında Poisson parantezleri alındığında

$$\{q_k, q_l\} = 0, \quad \{p_k, p_l\} = 0, \quad \{p_k, q_l\} = \delta_{kl} \quad (2.31)$$

bağıntıları elde edilir.

$$\{F, H\} = 0 \quad (2.32)$$

bağıntısında olduğu gibi iki niceliğin birbiriyle Poisson parantezinin sıfır olması durumu söz konusu niceliklerin birbiriyle "Poisson yer değiştirebilir" olması olarak

adlandırılır. Hamiltoniyen yoğunluğu ile Poisson yer değiştirebilen yoğunlukların zaman evrimleri (2.24) denklemini göre sıfır olacağı için bu yoğunluklar korunumlu büyüklüklerdir. $2N$ boyutlu faz uzayında bulunan N serbestlik dereceli mekanik sistemde

$$\{F_k, F_l\} = 0 \quad (2.33)$$

bağıntısında gösterildiği gibi birbiriyle Poisson yer değiştirebilen N tane yoğunluk bulunuyorsa (involüsyon) bu sistem Liouville anlamında integre edilebilirdir [7]. Buna göre, bu sistem için tanımlı involüsyon halinde N adet farklı Hamiltoniyen yoğunluğu bulunuyorsa bu sistem integre edilebilir Hamiltoniyen sistem olarak kabul edilir.

2.3 Dirac Bağ Analizi

Standart formülasyonda Legendre dönüşümü (2.22) aracılığıyla Lagrange mekaniğinden Hamilton mekaniğine geçildiği zaman eşlenik momentum (p), genelleştirilmiş hızın ($\dot{q}$) fonksiyonu olur. Bu sayede hız ve momentum birbiri cinsinden yazılabilir ve Hamilton mekaniği (q, p) ikilisi üzerinden ifade edilebilir. Hamilton kanonik denklemler (2.17) ile Euler-Lagrange denklemlerinden (2.1) elde edilen hareket denklemleri birbiriyle tutarlı olur. Standart formülasyonda Lagrange yoğunluğu

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \right| \neq 0 \quad (2.34)$$

koşulunu sağlamalıdır. (2.34) denklemi, elemanları Lagrange yoğunluğunun bütün hız koordinatlarına göre ikinci dereceden kısmi türevlerinden oluşan Hessian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerektiğini ifade eder.

Lagrange yoğunluğu hıza doğrusal olarak bağlı olduğunda (2.9) denkleminde eşlenik momentumun genelleştirilmiş hıza bağıllığının olmayacağı görülür. Bu tür problemlerde hız ve momentum birbiri cinsinden yazılamaz. Bu durum, Hamilton mekaniğine geçildiğinde Hamilton kanonik denklemlerden elde edilen hareket denklemleri ile Euler-Lagrange denklemlerinden elde edilen hareket denklemleri arasında tutarsızlık olacağına işaret eder. Standart formülasyonun uygulanamayacağı bu durumda Lagrange yoğunluğu dejenere olarak nitelendirilir ve Hessian matrisinin determinanı

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \right| = 0 \quad (2.35)$$

koşulunu sağlar [35]. Dirac, bu durumda $\dot{q}$ aradan kaldırılabilceği için sistemdeki q ve p dinamik değişkenlerini birbirine bağlayan

$$\phi_j(q, p) \approx 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2.36)$$

şeklinde doğrusal bağımsız denklemler topluluğu bulunması gerektiğini öne sürmüştür [36]. Problemin başında Lagrange yoğunluğu ve eşlenik momentumdan elde edilen (2.36) denklemleri "birincil bağ koşulları" olarak adlandırılır. " $\approx$ " işareti zayıf eşitlik anlamında kullanılmaktadır. Bunun nedeni, bağ koşulları ile Poisson parantezi işlemleri yapıldığı sırada eşitlik durumunun kullanılmaması gerekliliğidir. İşlemlerden sonra eşitlik durumu dikkate alınır.

c_j , p ve q 'ya bağlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere; H Hamiltoniyen yoğunluğu ile benzer nitelikte fakat

$$H^* = H + c_j \phi_j \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanarak H 'dan farklılaşan bir H^* Hamiltoniyen yoğunluğu ile H arasında $c_j \phi_j = 0$ olması nedeniyle bir ayırım yapılamamaktadır. Bu durumda özgün bir Hamiltoniyen yoğunluğu ifadesi belirlenemediği için teori bu haliyle eksik kalmaktadır. Ayrıca, Hamiltoniyen yoğunluğu için verilen Legendre dönüşümü (2.22) ifadesinin varyasyonu

$$\delta H = \dot{q}_k \delta p_k + p_k \delta \dot{q}_k - \delta L \quad (2.38)$$

olarak ele alındığında H , (p, q) 'ya bağlı fonksiyon ve L , $(q, \dot{q})$ 'ya bağlı fonksiyon olduğu için (2.38) denklemi

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k = \dot{q}_k \delta p_k + p_k \delta \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \quad (2.39)$$

olarak yazılabilir. Bu denklem Lagrange yoğunluğu için tanımlı (2.9) ve (2.10) kullanılarak

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k = \dot{q}_k \delta p_k - \dot{p}_k \delta q_k \quad (2.40)$$

olarak düzenlendikten sonra

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta q_k + \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - \dot{q}_k \right) \delta p_k = 0 \quad (2.41)$$

şeklindeki hareket denklemi elde edilir. Konum (q) ve momentum (p) fonksiyonları birbirine bağ koşulu ile bağlı olduğu için δq_k ve δp_k varyasyonları ayrı ayrı sıfıra eşitlenemez. Teorinin koordinatların sıfır olduğu durumları da kapsamaması gerektiği için standart Hamilton yoğunluğu ifadesi yetersiz kalmaktadır. Dirac, bu eksikliği aşmak için Hamilton yoğunluğunun

$$H_T = H + u_j \phi_j \quad (2.42)$$

olarak genelleştirilmesi gerektiğini öne sürmüştür. Burada H_T toplam Hamiltoniyen yoğunluğu ifadesidir. u_j ise p ve q 'ya bağımlı olması gerekmeyen keyfi fonksiyonlardır

[36]. Toplam Hamiltoniyen yoğunluğu ifadesi (2.42) ve Legendre dönüşümü (2.22) dikkate alınarak eylem integrali (2.3)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_k p_k - H - u_j \phi_j) dt \quad (2.43)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin varyasyonuna ait denklem $\delta S = 0$ (2.4) ifadesi ve sınır koşullarda $\delta q_k = 0$ sağlanması gerektiği dikkate alınarak

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}_k \delta p_k - \dot{p}_k \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k - u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} \delta q_k - u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \delta p_k - \phi_j \delta u_j \right) dt = 0 \quad (2.44)$$

şeklinde yazılır. (2.44) denklemi katsayılarla göre düzenlenerek

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-\dot{p}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} - u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} - u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \phi_j \delta u_j \right] dt = 0 \quad (2.45)$$

($\phi_j = 0$) haline getirilir. Dirac tarafından belirlenen toplam Hamiltoniyen yoğunluğu ifadesi (H_T) sayesinde burada δq_k ve δp_k ayrı ayrı sıfır olarak ele alınabilir. (2.45) denkleminde göre

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} + u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} - u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} \quad (2.46)$$

hareket denklemleri elde edilir. Bağ koşulları

$$\dot{\phi}_j \approx 0 \quad (2.47)$$

denklemini sağlayacağı için korunumlu niceliktir. Dolayısıyla (2.24) bağıntısına göre hareket denklemi

$$\dot{\phi}_j \approx \{\phi_j, H_T\} = 0 \quad (2.48)$$

biçiminde de elde edilebilmelidir. Bağ koşulları q ve p 'ye bağlı fonksiyon olduğu için

$$\dot{\phi}_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \dot{p}_k \quad (2.49)$$

biçiminde yazılabilmelidir. (2.46) hareket denklemleri (2.49) denkleminde kullanıldığında

$$\dot{\phi}_j \approx \{\phi_j, H\} + u_{j'} \{\phi_j, \phi_{j'}\} = 0 \quad (2.50)$$

elde edilir. Bu denklem ile "Lagrange çarpanı" olarak isimlendirilen u_j fonksiyonlarının belirlenmesi mümkündür. ve Poisson parantezi işlemleri için tanımlı (2.28a) özelliği dikkate alınıp (2.48) ve (2.50) karşılaştırıldığında toplam Hamiltoniyen yoğunluğu

ifadesinin Dirac'ın belirlediği gibi $H_T = H + u_j \phi_j$ olduğu görülür.

Birincil bağ koşulları, eşlenik momentum için verilen $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ denkleminde kaynaklanan tutarsızlıkları gidermek için kullanılır. Örneğin, Lagrange yoğunluğu hızın birinci kuvvetine bağlı olduğu zaman eşlenik momentum denklemi sonucuna göre momentum ile hız arasında bir bağlantı kurulamaz ve tutarsızlık oluşur. Bu tutarsızlık birincil bağ koşullarıyla giderilir. Benzer şekilde, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$ şeklinde verilen Euler-Lagrange denklemi de tutarsızlıklara neden olabilir. Örneğin $L = q$ durumunda Euler Lagrange denklemi $1 = 0$ haline gelir. Bu gibi tutarsızlıkların önüne geçmek için Euler-Lagrange denklemi dikkate alınarak Lagrange yoğunluğuna bazı sınırlamalar getirilmelidir. Bu sınırlamalar getirildikten sonra (2.50) denklemi üç ayrı duruma dönüşebilir. İlki $0 = 0$ durumudur. Bu tutarsızlık durumu birincil bağ koşulları ile çözülebilir. İkinci durumda ise denklem u katsayılarından bağımsız, yani sadece q ve p 'ye bağımlı denkleme dönüşür. Bu denklem birincil bağ koşullarından bağımsız ise

$$\chi(q, p) = 0 \quad (2.51)$$

şeklinde, Hamilton değişkenlerine yeni sınırlamalar getiren ikincil bağ koşulları ile ifade edilebilir. Sistemde ikincil bağ koşulları bulunması halinde (2.50) denklemiyle benzerlik taşıyan

$$\{\chi, H\} + u_j \{\chi, \phi_j\} \approx 0 \quad (2.52)$$

şeklindeki denklem ortaya çıkar. Üçüncü durumda ise (2.50) denkleminde j ve j' indisleri farklı sayıda değer alır. Bu nedenle u katsayıları üzerine sınırlamalar getirilir. Bu durumda (2.50) ifadesinin homojen olmayan doğrusal denklemleri temsil ettiği ve u katsayılarının q ve p 'ye bağlı bilinmeyen fonksiyon olduğu kabul edildiğinde j indisi için bu denklemin çözümü

$$u_j(q, p) = U_j(q, p) + V_j(q, p) \quad (2.53)$$

şeklinde. Burada U_j , (2.50) ifadesinde homojen olmayan j indisli denklemin özel çözümü iken V_j aynı denklemin homojen kısmının genel çözümüdür [36].

Hem birincil hem de ikincil bağ koşulları kendi aralarında birinci sınıf ve ikinci sınıf olarak ikiye ayrılır. Birinci sınıf bağ koşulları olarak değerlendirilen bir toplulukta bağ koşullarının hepsinin diğer bir bağ koşuluya Poisson parantezi

$$\{\phi_i, \phi_j\} = 0 \quad (2.54)$$

bağıntısındaki gibi sıfırdır. İkinci sınıf bağ koşulları olarak değerlendirilen bir

toplulukta ise en az bir bağ koşulunun diğer bir bağ koşuluyla Poisson parantezi

$$\{\phi_i, \phi_j\} = c \quad (2.55)$$

bağıntısındaki gibi sıfırdan farklıdır.

(2.55) durumunda bulunan ikinci sınıf ϕ_i ve ϕ_j bağ koşullarının Poisson parantezine kanonik kuantizasyon uygulandığında

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j] = ci\hbar \quad (2.56)$$

sıra değiştirme bağıntısı elde edilir. (2.56) denkleminin sol tarafında bağ koşulları üzerinde bulunan şapka sembolü söz konusu parametrelerin artık operatör olduğunu ifade eder. Fiziksel durumlarda, bağ koşulları nedeniyle (2.56) denkleminin sol tarafının sıfır olması beklenirken sağ tarafın sıfır olmadığı açıktır. Bu tutarsızlık durumu kuantizasyon sürecinde genelleştirilmiş bir Poisson parantezine ihtiyaç duyulduğuna işaret eder. Bu parantez Dirac tarafından faz uzayındaki f, g fonksiyonları için

$$\{f, g\}_{DP} = \{f, g\}_{PP} - \sum_{i,j} \{f, \phi_i\}_{PP} J_{0(ij)} \{\phi_j, g\}_{PP} \quad (2.57)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu gösterimde parantez alt indisinde bulunan DP Dirac parantezini, PP Poisson parantezini ifade etmektedir. İkinci sınıf bağ koşulları cinsinden tanımlanan

$$K = \begin{pmatrix} \{\phi_i, \phi_i\} & \{\phi_i, \phi_j\} \\ \{\phi_j, \phi_i\} & \{\phi_j, \phi_j\} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

matrisi simplektik operatör olmak üzere $J_{0(ij)}$,

$$J_0 = K^{-1} \quad (2.59)$$

şeklinde simplektik operatörün tersi olarak tanımlanan birinci Hamilton operatörünün ij indisli elemanıdır. Dirac parantezi, Poisson parantezlerinin sağladığı özellikleri (2.28) sağlamalı ve bağ koşulu bulunmayan sistemlerde Poisson parantezine indirgenmelidir. Ek olarak, ikinci sınıf bir bağ koşulunun farklı herhangi bir nicelik ile Dirac parantezi sıfır olmalıdır [37].

2.4 İkili-Hamiltoniyen Yapı

Bir mekanik sistemin integre edilebilirliğini incelemek için kullanılan yöntemlerden biri Magri teoremidir. Magri, yaptığı çalışmalarla sonsuz boyutlu Hamilton

denklemlerin tam çözümünü elde etmeyi sağlayacak bir teori geliştirmiştir [8]. 1978 yılında yayınlanan ve yeni integre edilebilir sistemler keşfedilmesine olanak sağlayan bu çalışmayla Hamilton denklemlerin korunumlu nicelikleri ile simetrileri arasında simplektik operatörler aracılığıyla geçiş sağlanmıştır. J , (2.20) ifadesinde tanımlı matris olmak üzere

$$K^T J K = J \quad (2.60)$$

eşitliğini sağlayan K matrisi simplektik operatördür. T üst indisi transpoze (devrik) anlamındadır. Söz konusu mekanik sistem için Dirac bağ koşulları tanımlıysa simplektik operatör (2.58) gösteriminde olduğu gibi bağ koşullarının Poisson parantezi cinsinden yazılabilir. Mekanik sistemlerin faz uzayı simplektik yapıya sahiptir. Simplektik yapının oluşması için M^{2n} çift boyutlu türevlenebilir manifold üzerinde bulunan kapalı ve dejenere-olmayan diferansiyel 2-form ω

$$d\omega = 0 \quad (2.61)$$

olarak tanımlanan kapalılık koşulunu sağlamalıdır. Simplektik yapının genel formülü

$$\omega = \sum_{k=1}^N dp_k \wedge dq_k \quad (2.62)$$

ile verilir [38]. Burada $\wedge$ dış çarpım (wedge çarpımı) simgesidir. K matrisinin (2.58) simplektik yapısı için verilen formül

$$\omega = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} du^i \wedge K_{ij} du^j \quad (2.63)$$

şeklinde dir. Bu ifadenin hacim integrali (2.61) koşulunu sağlamalıdır [26]. Burada $u^1 = u$ ve $u^2 = v$ olarak tanımlıdır. ω n -form, v m -form, f 0-form fonksiyon olmak üzere diferansiyel formlar için

$$d(d\omega) = 0, \quad (2.64a)$$

$$d(\omega + v) = d\omega + dv, \quad (2.64b)$$

$$d(\omega \wedge v) = d\omega \wedge + (-1)^n \omega \wedge dv, \quad (2.64c)$$

$$d(f d\omega) = df \wedge d\omega, \quad (2.64d)$$

$$\omega \wedge v = (-1)^{nm} v \wedge \omega, \quad (2.64e)$$

$$\omega \wedge \omega = 0 \quad (2.64f)$$

$$\omega \wedge (v + \psi) = \omega \wedge v + \omega \wedge \psi, \quad (2.64g)$$

$$(v + \psi) \wedge \omega = v \wedge \omega + \psi \wedge \omega. \quad (2.64h)$$

bağıntıları tanımlıdır [39]. (2.64f) bağıntısı n tek iken geçerlidir.

Evrimsel denklemlerin Hamiltoniyen yapısı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = J_0 \delta_u H \quad (2.65)$$

formunda oluşur. Burada δ_u u 'ya göre varyasyonel türev (Euler türevi), J_0 Hamilton operatörü ve H Hamiltoniyen yoğunluğudur. (2.65) denklemi tarafından karakterize edilen harekete akış denir. Poisson parantezleri için tanımlı ters simetri (anti-simetri) (2.28b) ve Jacobi özdeşliği (2.28d) koşullarını sağlayan operatörler Hamilton operatörü olarak nitelendirilir. J_n Hamilton operatörü ise bu operatöre ait Poisson parantezi işlemi her F, G fonksiyoneli için

$$\{F, G\} = \int \delta F \cdot J_n \cdot \delta G \, dx \quad (2.66)$$

şeklinde tanımlıdır [28]. İki bağımlı değişken (u, v) bulunan sistemlerde ise Hamiltoniyen yapı

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H \\ \delta_v H \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

şeklinde tanımlanır [26]. Bu mekanik sistem için tekrarlama operatörü R tanımlanırsa ikinci Hamilton operatörüne (J_1) geçiş

$$J_1 = R J_0 \quad (2.68)$$

denkleminin ifade ettiği gibi tekrarlama operatörü (R) birinci Hamilton operatörüne (J_0) uygulanarak gerçekleşir.

$$N_1 = \frac{\partial u}{\partial t} = J_0 \delta_u H_1 = J_1 \delta_u H_0 \quad (2.69)$$

denklemini sağlayan iki Hamiltoniyen yoğunluğu (H_1, H_0) bulunması halinde söz konusu sistem ikili-Hamiltoniyen yapı oluşturur ve Magri teoremine göre integre edilebilir sistem olarak kabul edilir [8]. (2.69) denkleminde N_1 , bu denklemin hiyerarşideki ilk denklem olduğunu ifade eder. Hiyerarşideki üst denklemlere aynı tekrarlama operatörüyle

$$N_{n+1} = R N_n \quad (2.70)$$

şeklinde geçilebilir. Bu sayede (2.69) denkleminin genel formu olan

$$N_n = \frac{\partial u}{\partial t} = J_0 \delta_u H_n = J_1 \delta_u H_{n-1} \quad (2.71)$$

denklemleriyle karakterize edilen hiyerarşideki üst akışlar elde edilebilir. J_0 (2.59) denkleminde göre simplektik operatörden elde edilen birinci Hamilton operatör ve J_1 buna bağlı olarak elde edilen ikinci Hamilton operatör olmak üzere iki bileşenli (u, v) sistemlerde ikili-Hamiltoniyen yapı

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_n \\ \delta_v H_n \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_{n-1} \\ \delta_v H_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

matris denkleminde göre oluşur [26]. J_0 ve J_1 operatörlerinin

$$\Gamma = \alpha J_0 + \beta J_1 \quad (2.73)$$

şeklindeki doğrusal birleşimi olarak tanımlanan Γ operatörü de J_0 ve J_1 gibi Hamilton operatörü olmalıdır. Bunun için gerekli olan ters simetri özelliği Γ matrisinin

$$\Gamma^\dagger = -\Gamma \quad (2.74)$$

denkleminde ifade edildiği hermitik eşleniğinin ters işaretlisine eşit olması durumunda sağlanır. Jacobi özdeşliği için (2.66) denklemini kullanmak çok uzun işlemler gerektirebilir. Bunun yerine Olver tarafından kanıtlanan teoremi kullanmak daha elverişlidir. Olver'e göre Jacobi özdeşliği

$$PrV_{\Gamma\omega}(\Theta) = 0 \quad (2.75)$$

koşulunda sağlanır. Bu denkleminde Θ , alt indiste bulunan operatöre ait ikili-vektör olarak tanımlıdır ve

$$\Theta = \frac{1}{2} \int (\omega \wedge \Gamma\omega) dx \quad (2.76)$$

şeklinde ifade edilir. $PrV_{\Gamma\omega}(\Theta) = 0$ ifadesi ise alt indiste bulunan karakteristiğe sahip genişletilmiş evrimsel vektör alanı anlamını taşır ve Einstein toplama notasyonunda yazılmış olan

$$PrV_{\Gamma\omega} = D_J (\Gamma_{\alpha\beta} \omega^\beta) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (2.77)$$

denklemleriyle belirlenir. Burada $J = z_1, z_2, \dots, z_3 z_3$; $u^1 = u$, $u^2 = v$ şeklinde tanımlıdır [28].

2.5 Simetriler ve Noether Teoremi

Diferansiyel denklem sistemlerin bağımlı ve bağımsız değişkenlerine belirli dönüşümler uygulandığında çözüm uzayında bir değişiklik olmaz. Böyle dönüşüm gruplarına simetri grubu adı verilir ve Lie teorisi altında incelenir. Bu dönüşümler

sayesinde diferansiyel denklemlerin değişken sayısı azlatılıp temsil ettikleri mekanik sistemlerin boyutu indirgenebilir. $u^1 = u$, $u^2 = v$ olmak üzere bir mekanik sistem için tanımlanan

$$X = \sum_i \xi^i \partial_{x^i} + \sum_\alpha \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} \quad (2.78)$$

biçimindeki vektör alanları Lie cebiri oluşturmaları halinde simetri üretici olarak nitelendirilir. (2.78)'de ξ^i ve η^α katsayılarıdır. Örneğin $X = z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + u \partial_u$ şeklindeki vektör alanında $\xi^1 = z_1$, $\xi^2 = z_2$, $\eta^1 = u$ olarak alınır. Lie parantezi

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i \quad (2.79)$$

olarak tanımlanan sıra değiştirme (komütatör) operatörüdür. Lie parantezi ikili-doğrusallık, ters simetri ve Jacobi özdeğliği özelliklerini sağlamalıdır. Lie cebirinin baz vektör kümesi $\{X_1, \dots, X_n\}$ olarak tanıtıldığında, kümenin tüm elemanlarının birbiriyle Lie parantezi

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c^k X_k \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.80)$$

olarak yazılabildiğinde bu baz vektör kümesi Lie cebiri yapısıyla uyumlu olur. Burada c^k herhangi bir sabit olabilir. Sıra değiştirme tablosu oluşturarak Lie cebiri yapısına uyum gözlenebilir. n elemanlı baz vektör kümesinin oluşturduğu Lie cebiri için $(n \times n)$ -boyutlu bir tablo oluşturulur. i . satır ve j . sütun kesişimindeki hücreye Lie parantezi işleminin (2.79) sonucu yazılır. Tablonun ters simetrik ve hücre içindeki ifadelerin (2.80) formunda olmasına dikkat edilir.

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m} \quad (2.81)$$

formundaki simetri üreticine karşılık gelen

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \dots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)} \quad (2.82)$$

formunda bir karakteristik denklem bulunur. (2.82) integre edilerek sisteme ait değişmezler (invariant) elde edilir. (2.78) formundaki simetri üreticine karşılık gelen simetri karakteristikleri ise

$$\varphi^\alpha = \eta^\alpha - u_i^\alpha \xi^i \quad (2.83)$$

formundadır [28]. Bu denklem Einstein toplama kuralına göre yazılmıştır. Noether, 1918 yılında yayınladığı çalışmasıyla her simetri durumuna karşılık bir korunum yasası bulunması gerektiğini göstermiştir [40]. Noether teoremine göre, sürekli bir simetri dönüşümü altında sistemin Lagrange yoğunluğu sabit kalıyorsa dönüşümdeki her bir

parametre için bu simetriye karşılık gelen korunumlu bir nicelik vardır. Korunumlu nicelik yerine hareket sabiti ve birinci integral terimleri de literatürde kullanılmaktadır. Fizikte bilinen bütün korunum yasaları Noether teoremiyle açıklanabilmektedir. Örneğin öteleme simetrisi çizgisel momentum korunumunu ve dönme simetrisi açısıl momentum korunumunu ortaya çıkarır [32]. Noether teoremine göre varyasyonel problemi temsil eden Euler Lagrange denklemlerine ait simetri üreticilerine karşılık gelen simetri karakteristikleri aynı zamanda bu denklemlere ait korunum yasaları için de tanımlanabilmektedir [28]. Buna göre (2.83) ile bulunan simetri karakteristikleri sisteme ait korunum yasalarını bulmaya imkan sağlar. Grup parametresi τ kullanılarak karakteristikler

$$u_{\tau}^{\alpha} = \varphi^{\alpha} \quad (2.84)$$

Lie denklemleri olarak yazılabilir [30]. (2.84) ifadesi $\alpha = 1$ durumunda $u_{\tau} = \varphi$ ve $\alpha = 2$ durumunda $v_{\tau} = \psi$ denkleminde karşılık gelir. İki bileşenli Hamiltoniyen yapı denkleminde (2.67) t yerine τ yazılıp (2.84) kullanıldığında

$$\begin{pmatrix} \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_i \\ \delta_v H_i \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

şeklinde Noether teoreminin Hamilton biçimi elde edilir. Burada φ_i ve ψ_i ifadeleri, i alt indisli simetri üreticine karşılık gelen karakteristikleri temsil etmektedir. H_i ise aynı simetri üreticine karşılık gelen birinci integraldir. Örneğin X_1 üreticine karşılık $\alpha = 1, 2$ durumunda (φ_1, ψ_1) karakteristik çifti ve H_1 birinci integrali gelir. (2.85) denkleminde bulunan birinci integraller (H_i) , dinamik sistemlerde korunum yasalarını veren

$$D_t H + \text{Div} A = 0 \quad (2.86)$$

denkleminde uygun olarak yazılabilmelidir [28]. D_t t 'ye göre toplam türev, H_i 'ler korunan büyüklükler (first integrals), Div uzay koordinatları $z = (z_1, \dots, z_n)$ 'e göre toplam diverjans, akı olan $A = (A_1, \dots, A_n)$ z, t, u ve u 'nun kısmi türevlerine bağlı fonksiyondur.

(3+1)-BOYUTLU EVRİMSEL HIROTA TİPİ DENKLEMLERİN İKİLİ-HAMILTONİYEN YAPISI

3.1 Evrimsel Hirota Tipi Denklem ve Euler Lagrange Formu

Bu bölümde 2019 yılında yayınlanan bir çalışmada incelenen $(3+1)$ -boyutlu evrimsel Hirota tipi denklemlerin ikili-Hamiltoniyen yapısı ele alınacaktır [26]. Evrimsel Hirota tipindeki denklemler

$$F = f - u_{tt}g = 0 \quad (3.1)$$

genel formunda tanımlanır. Burada u , uzay (z_1, z_2, z_3) ve zaman t değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyondur. Alt indisler u 'nun kısmi türevlerinin hangi değişkenlere bağlı olarak alındığını gösterir. Örneğin $u_{12} = \partial^2 u / \partial z_1 \partial z_2$, $u_{t1} = \partial^2 u / \partial t \partial z_1$. f ve g , u 'nun ikinci dereceden kısmi türevlerine bağlı fonksiyondur. (3.1) denkleminde açıkça u_{tt} bulunmasının nedeni $u_t = v$ alınıp denklem iki bileşenli biçimde yazıldığında zaman evrimini sağlamasıdır. $u_{tt} = f/g$ Euler-Lagrange formuna sahip iken $u_{tt} = f$ bu forma sahip olmayabilir. Bu nedenle $g \neq 0$ fonksiyonu çarpan olarak bu denklemde yer almaktadır. (3.1) biçimindeki denklemlerle kütleçekimsel fizik, diferansiyel geometri, integre edilebilir sistemler gibi çeşitli alanlarda karşılaşılmaktadır. Bu çalışmada ayrıca dört boyutta (3.1) biçimindeki denklemlerin Euler-Lagrange formunda olmaları halinde simplektik Monge Ampere formuna sahip olacakları gösterilmiştir. Simplektik Monge Ampere denklemi u 'nun Hessian matrisinin tüm minörleri arasında bulunan doğrusal bir ilişki olarak tanımlanır [24]. Euler-Lagrange formuna sahip olan evrimsel Hirota tipi (3.1) denklemi belirlemek için Helmholtz koşulu (2.15) kullanılır. Bu amaçla (3.1) denkleminin uyan Frechet türev operatörü (2.13)

$$\begin{aligned}
D_F = & -gD_t^2 + (f_{u_{t1}} - u_{tt}g_{u_{t1}})D_tD_1 + (f_{u_{t2}} - u_{tt}g_{u_{t2}})D_tD_2 \\
& + (f_{u_{t3}} - u_{tt}g_{u_{t3}})D_tD_3 + (f_{u_{11}} - u_{tt}g_{u_{11}})D_1^2 \\
& + (f_{u_{12}} - u_{tt}g_{u_{12}})D_1D_2 + (f_{u_{13}} - u_{tt}g_{u_{13}})D_1D_3 \\
& + (f_{u_{22}} - u_{tt}g_{u_{22}})D_2^2 + (f_{u_{23}} - u_{tt}g_{u_{23}})D_2D_3 + (f_{u_{33}} - u_{tt}g_{u_{33}})D_3^2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde verilir. D sembolü alt indisinde bulunan değişkene göre toplam türev ifadesidir. Bu tez çalışmasında uzay koordinatlarına (z_1, z_2, z_3) bağlı türevler sırası ile

$$D_{z_1} = D_1, \quad D_{z_2} = D_2, \quad D_{z_3} = D_3 \tag{3.3}$$

şeklinde gösterilecektir. f ve g 'nin alt indisleri ise kısmi türevlere karşılık gelir. Örneğin $f_{u_{t1}}$ ve $g_{u_{13}}$ sırası ile $f_{u_{t1}} = \partial f / \partial u_{t1}$ ve $g_{u_{13}} = \partial g / \partial u_{13}$ anlamı taşır. (3.2) ifadesine karşılık gelen eşlenik Frechet operatörü (2.14) ise

$$\begin{aligned}
D_F^* = & -D_t^2g + D_tD_1(f_{u_{t1}} - u_{tt}g_{u_{t1}}) + D_tD_2(f_{u_{t2}} - u_{tt}g_{u_{t2}}) \\
& + D_tD_3(f_{u_{t3}} - u_{tt}g_{u_{t3}}) + D_1^2(f_{u_{11}} - u_{tt}g_{u_{11}}) \\
& + D_1D_2(f_{u_{12}} - u_{tt}g_{u_{12}}) + D_1D_3(f_{u_{13}} - u_{tt}g_{u_{13}}) \\
& + D_2^2(f_{u_{22}} - u_{tt}g_{u_{22}}) + D_2D_3(f_{u_{23}} - u_{tt}g_{u_{23}}) + D_3^2(f_{u_{33}} - u_{tt}g_{u_{33}})
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak yazılmıştır. $D_F = D_F^*$ olarak tanımlanan Helmholtz koşulu gereğince (3.2) ile (3.4) eşitlendiğinde sıfıra eşit olması gereken beş denklem

$$-2D_t[g] + D_1[f_{u_{t1}}] + D_2[f_{u_{t2}}] + D_3[f_{u_{t3}}] = 0 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& D_t[f_{u_{t1}}] + 2D_1[f_{u_{11}}] - 2u_{tt}D_1[g_{u_{11}}] - 2u_{tt1}g_{u_{11}} + D_2[f_{u_{12}}] - u_{tt}D_2[g_{u_{12}}] \\
& - u_{tt2}g_{u_{12}} + D_3[f_{u_{13}}] - u_{tt}D_3[g_{u_{13}}] - u_{tt3}g_{u_{13}} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
& D_t[f_{u_{t2}}] + 2D_2[f_{u_{22}}] - 2u_{tt}D_2[g_{u_{22}}] - 2u_{tt2}g_{u_{22}} + D_1[f_{u_{12}}] - u_{tt}D_1[g_{u_{12}}] \\
& - u_{tt1}g_{u_{12}} + D_3[f_{u_{23}}] - u_{tt}D_3[g_{u_{23}}] - u_{tt3}g_{u_{23}} = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
& D_t[f_{u_{t3}}] + 2D_3[f_{u_{33}}] - 2u_{tt}D_1[g_{u_{33}}] - 2u_{tt3}g_{u_{33}} + D_1[f_{u_{13}}] - u_{tt}D_1[g_{u_{13}}] \\
& - u_{tt1}g_{u_{13}} + D_2[f_{u_{23}}] - u_{tt}D_2[g_{u_{23}}] - u_{tt2}g_{u_{23}} = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& -D_t^2[g] + D_tD_1[f_{u_{t1}}] + D_tD_2[f_{u_{t2}}] + D_tD_3[f_{u_{t3}}] + D_1^2[f_{u_{11}} - u_{tt}g_{u_{11}}] \\
& + D_1D_2[f_{u_{12}} - u_{tt}g_{u_{12}}] + D_1D_3[f_{u_{13}} - u_{tt}g_{u_{13}}] + D_2^2[f_{u_{22}} - u_{tt}g_{u_{22}}] \\
& + D_2D_3[f_{u_{23}} - u_{tt}g_{u_{23}}] + D_3^2[f_{u_{33}} - u_{tt}g_{u_{33}}] = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde bulunur [26]. Bu denklemlerin genel çözümü ise Euler-Lagrange formunda olan evrimsel Hirota tipindeki

$$\begin{aligned}
F = & a_1\{u_{tt}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) - u_{t1}(u_{t1}u_{22} - u_{t2}u_{12}) + u_{t2}(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11})\} \\
& + a_2\{u_{tt}(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) - u_{t1}(u_{t1}u_{33} - u_{t3}u_{13}) + u_{t3}(u_{t1}u_{13} - u_{t3}u_{11})\} \\
& + a_3\{u_{tt}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_{t2}(u_{t2}u_{33} - u_{t3}u_{23}) + u_{t3}(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22})\} \\
& + a_4\{u_{tt}(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) - u_{t1}(u_{t1}u_{23} - u_{t2}u_{13}) + u_{t3}(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11})\} \\
& + a_5\{u_{tt}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) - u_{t1}(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22}) + u_{t2}(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12})\} \\
& + a_6\{u_{tt}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) - u_{t2}(u_{t1}u_{33} - u_{t3}u_{13}) + u_{t3}(u_{t1}u_{23} - u_{t3}u_{12})\} \\
& + a_7(u_{tt}u_{11} - u_{t1}^2) + a_8(u_{tt}u_{12} - u_{t1}u_{t2}) + a_9(u_{tt}u_{13} - u_{t1}u_{t3}) \\
& + a_{10}(u_{tt}u_{22} - u_{tt}^2) + a_{11}(u_{tt}u_{23} - u_{t2}u_{t3}) + a_{12}(u_{tt}u_{33} - u_{t3}^2) + a_{13}u_{tt} \\
& + b_1\{u_{t1}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) - u_{t2}(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + u_{t3}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)\} \\
& + b_2\{u_{t1}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) - u_{t2}(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + u_{t3}(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13})\} \\
& + b_3\{u_{t1}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_{t2}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) + u_{t3}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})\} \\
& + b_4\{u_{11}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_{12}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) + u_{13}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})\} \\
& + c_1(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11}) + c_2(u_{t1}u_{13} - u_{t3}u_{11}) + c_3(u_{t1}u_{22} - u_{t2}u_{12}) \\
& + c_4(u_{t1}u_{23} - u_{t2}u_{13}) + c_5(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22}) + c_6(u_{t1}u_{33} - u_{t3}u_{13}) \\
& + c_7(u_{t2}u_{33} - u_{t3}u_{23}) + c_8(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12}) + c_8'(u_{t1}u_{23} - u_{t3}u_{12}) \\
& + c_9(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + c_{10}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) + c_{11}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) \\
& + c_{12}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_{13}(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + c_{14}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) \\
& + c_{15}u_{t1} + c_{16}u_{t2} + c_{17}u_{t3} + c_{18}u_{11} + c_{19}u_{12} + c_{20}u_{13} + c_{21}u_{22} + c_{22}u_{23} \\
& + c_{23}u_{33} + c_{24} = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

denkleminde ulaşılmasını sağlar [26]. (3.10) denkleminin bir özelliği de simplektik Monge Ampere formunda olmasıdır. Dolayısıyla, bu sonuç ile evrimsel Hirota tipi denklemlerin (3.1) Lagrange yoğunluğuna sahip olmaları durumunda simplektik Monge Ampere yapıda olduğu gösterilmiştir. Bu denklemde bulunan a_i , b_i ve c_i integral sabitidir. Bu denkleme ait Langrange yoğunluğu ifadesi, genel formda bulunan (3.1) denkleminde Homotopi formülü (2.16) uygulanarak

$$\begin{aligned}
L = & \frac{u}{4} \langle a_1 \{u_{tt}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) - u_{t1}(u_{t1}u_{22} - u_{t2}u_{12}) + u_{t2}(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11})\} \\
& + a_2 \{u_{tt}(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) - u_{t1}(u_{t1}u_{33} - u_{t3}u_{13}) + u_{t3}(u_{t1}u_{13} - u_{t3}u_{11})\} \\
& + a_3 \{u_{tt}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_{t2}(u_{t2}u_{33} - u_{t3}u_{23}) + u_{t3}(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22})\} \\
& + a_4 \{u_{tt}(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) - u_{t1}(u_{t1}u_{23} - u_{t2}u_{13}) + u_{t3}(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11})\} \\
& + a_5 \{u_{tt}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) - u_{t1}(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22}) + u_{t2}(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12})\} \\
& + a_6 \{u_{tt}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) - u_{t1}(u_{t2}u_{33} - u_{t3}u_{23}) + u_{t3}(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12})\} \\
& + b_1 \{u_{t1}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) - u_{t2}(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + u_{t3}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)\} \\
& + b_2 \{u_{t1}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) - u_{t2}(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + u_{t3}(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13})\} \\
& + b_3 \{u_{t1}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_{t2}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) + u_{t3}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})\} \\
& + b_4 \{u_{11}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_{12}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) + u_{13}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})\} \rangle \\
& + \frac{u}{3} \{a_7(u_{tt}u_{11} - u_{t1}^2) + a_8(u_{tt}u_{12} - u_{t1}u_{t2}) + a_9(u_{tt}u_{13} - u_{t1}u_{t3}) \\
& + a_{10}(u_{tt}u_{22} - u_{t2}^2) + a_{11}(u_{tt}u_{23} - u_{t2}u_{t3}) + a_{12}(u_{tt}u_{33} - u_{t3}^2) \\
& + c_1(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11}) + c_2(u_{t1}u_{13} - u_{t3}u_{11}) + c_3(u_{t1}u_{22} - u_{t2}u_{12}) \\
& + c_4(u_{t1}u_{23} - u_{t2}u_{13}) + c_5(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22}) + c_6(u_{t1}u_{33} - u_{t3}u_{13}) \\
& + c_7(u_{t2}u_{33} - u_{t3}u_{23}) + c_8(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12}) + c_{8'}(u_{t1}u_{23} - u_{t3}u_{12}) \\
& + c_9(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + c_{10}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) + c_{11}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) \\
& + c_{12}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_{13}(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + c_{14}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2)\} \\
& + \frac{u}{2} (a_{13}u_{tt} + c_{15}u_{t1} + c_{16}u_{t2} + c_{17}u_{t3} + c_{18}u_{11} + c_{19}u_{12} + c_{20}u_{13} \\
& + c_{21}u_{22} + c_{22}u_{23} + c_{23}u_{33}) + c_{24}u
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilir.

3.2 İki Bileşenli Gösterim

(3.10) denklemi için $u_t = v$ dönüşümü yapılarak bu denklem iki bileşenli formda;

$$\begin{aligned}
u_t &= v, \\
v_t &= \frac{1}{\Delta} \left\langle a_1(v_1^2 u_{22} + v_2^2 u_{11} - 2v_1 v_2 u_{12}) + a_2(v_1^2 u_{33} + v_3^2 u_{11} - 2v_1 v_3 u_{13}) \right. \\
&+ a_3(v_2^2 u_{33} + v_3^2 u_{22} - 2v_2 v_3 u_{23}) + a_4\{v_1(v_1 u_{23} - v_2 u_{13}) - v_3(v_1 u_{12} - v_2 u_{11})\} \\
&+ a_5\{v_1(v_2 u_{23} - v_3 u_{22}) - v_2(v_2 u_{13} - v_3 u_{12})\} \\
&+ a_6\{v_2(v_1 u_{33} - v_3 u_{13}) - v_3(v_1 u_{23} - v_3 u_{12})\} + a_7 v_1^2 + a_8 v_1 v_2 + a_9 v_1 v_3 \\
&+ a_{10} v_2^2 + a_{11} v_2 v_3 + a_{12} v_3^2 \\
&- b_1\{v_1(u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) - v_2(u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) + v_3(u_{11} u_{22} - u_{12}^2)\} \\
&- b_2\{v_1(u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) - v_2(u_{11} u_{33} - u_{13}^2) + v_3(u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13})\} \\
&- b_3\{v_1(u_{22} u_{33} - u_{23}^2) - v_2(u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) + v_3(u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22})\} \\
&- b_4\{u_{11}(u_{22} u_{33} - u_{23}^2) - u_{12}(u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) + u_{13}(u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22})\} \\
&- c_1(v_1 u_{12} - v_2 u_{11}) - c_2(v_1 u_{13} - v_3 u_{11}) - c_3(v_1 u_{22} - v_2 u_{12}) \\
&- c_4(v_1 u_{23} - v_2 u_{13}) - c_5(v_2 u_{23} - v_3 u_{22}) - c_6(v_1 u_{33} - v_3 u_{13}) \\
&- c_7(v_2 u_{33} - v_3 u_{23}) - c_8(v_2 u_{13} - v_3 u_{12}) - c_9(v_1 u_{23} - v_3 u_{12}) \\
&- c_{10}(u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) - c_{11}(u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) - c_{12}(u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) \\
&- c_{13}(u_{11} u_{22} - u_{12}^2) - c_{14}(u_{11} u_{33} - u_{13}^2) - c_{15}(u_{22} u_{33} - u_{23}^2) \\
&- c_{16} v_1 - c_{17} v_2 - c_{18} v_3 - c_{19} u_{11} - c_{20} u_{12} - c_{21} u_{13} \\
&- c_{22} u_{22} - c_{23} u_{23} - c_{24} u_{33} - c_{25} \rangle
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
\Delta &= a_1(u_{11} u_{22} - u_{12}^2) + a_2(u_{11} u_{33} - u_{13}^2) + a_3(u_{22} u_{33} - u_{23}^2) \\
&+ a_4(u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) + a_5(u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) + a_6(u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) \\
&+ a_7 u_{11} + a_8 u_{12} + a_9 u_{13} + a_{10} u_{22} + a_{11} u_{23} + a_{12} u_{33} + a_{13}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ile verilir. (3.12) ifadesinde sırasıyla u_t ve v_t için yazılan iki denklem (3+1)-boyutlu bir sistem oluşturmaktadır. Lagrange yoğunluğu da iki bileşenli gösterime göre yeniden düzenlenmelidir. Sınır koşullarda Lagrange yoğunluğunun varyasyonunun sıfır olması gerektiği için toplam türev şeklinde yazılan terimler sıfır olur. Bu nedenle toplam türevli terimler atlanarak düzenlenmiş olan iki bileşenli Lagrange yoğunluğu

$$\begin{aligned}
L = & \left(u_t v - \frac{1}{2} v^2 \right) \{ a_1 (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) + a_2 (u_{11} u_{33} - u_{13}^2) + a_3 (u_{22} u_{33} - u_{23}^2) \\
& + a_4 (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) + a_5 (u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) + a_6 (u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) \\
& + a_7 u_{11} + a_8 u_{12} + a_9 u_{13} + a_{10} u_{22} + a_{11} u_{23} + a_{12} u_{33} + a_{13} \} \\
& + \frac{u_t}{4} \{ b_1 \{ u_1 (u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) - u_2 (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) + u_3 (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \} \\
& + b_2 \{ u_1 (u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) - u_2 (u_{11} u_{33} - u_{13}^2) + u_3 (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) \} \\
& + b_3 \{ u_1 (u_{22} u_{33} - u_{23}^2) - u_2 (u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) + u_3 (u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) \} \} \\
& - b_4 \frac{u}{4} \{ u_{11} (u_{22} u_{33} - u_{23}^2) - u_{12} (u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) + u_{13} (u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) \} \\
& + \frac{u_t}{3} \{ c_1 (u_1 u_{12} - u_2 u_{11}) + c_2 (u_1 u_{13} - u_3 u_{11}) + c_3 (u_1 u_{22} - u_2 u_{12}) \\
& + c_4 (u_1 u_{23} - u_2 u_{13}) + c_5 (u_2 u_{23} - u_3 u_{22}) + c_6 (u_1 u_{33} - u_3 u_{13}) \\
& + c_7 (u_2 u_{33} - u_3 u_{23}) + c_8 (u_2 u_{13} - u_3 u_{12}) + c_8' (u_1 u_{23} - u_3 u_{12}) \} \\
& - \frac{u}{3} \{ c_9 (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) + c_{10} (u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}) + c_{11} (u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) \\
& + c_{12} (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) + c_{13} (u_{11} u_{33} - u_{13}^2) + c_{14} (u_{22} u_{33} - u_{23}^2) \} \\
& + \frac{u_t}{2} (c_{15} u_1 + c_{16} u_2 + c_{17} u_3) \\
& - \frac{u}{2} (c_{18} u_{11} + c_{19} u_{12} + c_{20} u_{13} + c_{21} u_{22} + c_{22} u_{23} + c_{23} u_{33}) - c_{24} u
\end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklini alır.

3.3 Birinci Hamiltoniyen Yapı

Legendre dönüşümü (2.22) ile birinci Hamiltoniyen yoğunluğunu bulmak için kanonik momentumların bilinmesi gerekmektedir. (2.9) denklemi kullanılarak her iki değişkene göre kanonik momentumlar sırası ile;

$$\begin{aligned}
\Pi_u &= \frac{\partial L}{\partial u_t} = v\{a_1(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + a_2(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + a_3(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) \\
&+ a_4(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + a_5(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) + a_6(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) \\
&+ a_7u_{11} + a_8u_{12} + a_9u_{13} + a_{10}u_{22} + a_{11}u_{23} + a_{12}u_{33} + a_{13}\} \\
&+ \frac{1}{4}\langle b_1\{u_1(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) - u_2(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + u_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)\} \\
&+ b_2\{u_1(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) - u_2(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + u_3(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13})\} \\
&+ b_3\{u_1(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_2(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) + u_3(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})\}\rangle \\
&+ \frac{1}{3}\{c_1(u_1u_{12} - u_2u_{11}) + c_2(u_1u_{13} - u_3u_{11}) + c_3(u_1u_{22} - u_2u_{12}) \\
&+ c_4(u_1u_{23} - u_2u_{13}) + c_5(u_2u_{23} - u_3u_{22}) + c_6(u_1u_{33} - u_3u_{13}) \\
&+ c_7(u_2u_{33} - u_3u_{23}) + c_8(u_2u_{13} - u_3u_{12}) + c_{8'}(u_1u_{23} - u_3u_{12})\} \\
&+ \frac{1}{2}(c_{15}u_1 + c_{16}u_2 + c_{17}u_3), \\
\Pi_v &= \frac{\partial L}{\partial v_t} = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak hesaplanır. Lagrange yoğunluğu (3.14) dejenere olduğu için Dirac bağ analizi kullanılır. Bunun için momentumlara (3.15) bağlı olarak belirlenen

$$\begin{aligned}
\phi_u &= \Pi_u - v\{a_1(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + a_2(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + a_3(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) \\
&+ a_4(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + a_5(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) + a_6(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) \\
&+ a_7u_{11} + a_8u_{12} + a_9u_{13} + a_{10}u_{22} + a_{11}u_{23} + a_{12}u_{33} + a_{13}\} \\
&- \frac{1}{4}\langle b_1\{u_1(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) - u_2(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + u_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)\} \\
&+ b_2\{u_1(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) - u_2(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + u_3(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13})\} \\
&+ b_3\{u_1(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_2(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) + u_3(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})\}\rangle \\
&- \frac{1}{3}\{c_1(u_1u_{12} - u_2u_{11}) + c_2(u_1u_{13} - u_3u_{11}) + c_3(u_1u_{22} - u_2u_{12}) \\
&+ c_4(u_1u_{23} - u_2u_{13}) + c_5(u_2u_{23} - u_3u_{22}) + c_6(u_1u_{33} - u_3u_{13}) \\
&+ c_7(u_2u_{33} - u_3u_{23}) + c_8(u_2u_{13} - u_3u_{12}) + c_{8'}(u_1u_{23} - u_3u_{12})\} \\
&- \frac{1}{2}(c_{15}u_1 + c_{16}u_2 + c_{17}u_3),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\phi_v = \Pi_v$$

bağ koşulları tanımlanır. Simplektik operatör için verilen (2.58) tanımına göre hesaplanan

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ -K_{12} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

K matris operatörünün elemanları

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(a1)} &= 2(v_1 u_{22} - v_2 u_{12})D_1 + 2(v_2 u_{11} - v_1 u_{12})D_2 + v_{11}u_{22} + v_{22}u_{11} \\
&- 2v_{12}u_{12}, \quad K_{12}^{(1)} = -(u_{11}u_{22} - u_{12}^2), \quad K_{11}^{(a2)} = 2(v_1 u_{33} - v_3 u_{13})D_1 \\
&+ 2(v_3 u_{11} - v_1 u_{13})D_3 + v_{11}u_{33} + v_{33}u_{11} - 2v_{13}u_{13}, \\
K_{12}^{(2)} &= -(u_{11}u_{33} - u_{13}^2), \quad K_{11}^{(a3)} = 2(v_2 u_{33} - v_3 u_{23})D_2 \\
&+ 2(v_3 u_{22} - v_2 u_{23})D_3 + v_{22}u_{33} + v_{33}u_{22} - 2v_{23}u_{23}, \quad K_{12}^{(3)} = -(u_{22}u_{33} - u_{23}^2). \\
K_{11}^{(a4)} &= (2v_1 u_{23} - v_2 u_{13} - v_3 u_{12})D_1 + (v_3 u_{11} - v_1 u_{13})D_2 + (v_2 u_{11} - v_1 u_{12})D_3 \\
&+ v_{11}u_{23} + v_{23}u_{11} - v_{12}u_{13} - v_{13}u_{12}, \quad K_{12}^{(4)} = -(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) \\
K_{11}^{(a5)} &= (v_2 u_{23} - v_3 u_{22})D_1 + (v_1 u_{23} - 2v_2 u_{13} + v_3 u_{12})D_2 + (v_2 u_{12} - v_1 u_{22})D_3 \\
&+ v_{12}u_{23} + v_{23}u_{12} - v_{13}u_{22} - v_{22}u_{13}, \quad K_{12}^{(5)} = -(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) \\
K_{12}^{(6)} &= -(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}), \quad K_{11}^{(a6)} = (v_2 u_{33} - v_3 u_{23})D_1 + (v_1 u_{33} - v_3 u_{13})D_2 \\
&+ (2v_3 u_{12} - v_1 u_{23} - v_2 u_{13})D_3 + v_{12}u_{33} + v_{33}u_{12} - v_{13}u_{23} - v_{23}u_{13} \\
K_{11}^{(a7)} &= 2v_1 D_1 + v_{11}, \quad K_{12}^{(7)} = -u_{11}, \quad K_{11}^{(a8)} = v_2 D_1 + v_1 D_2 + v_{12}, \\
K_{12}^{(8)} &= -u_{12}, \quad K_{11}^{(a9)} = v_3 D_1 + v_1 D_3 + v_{13}, \quad K_{12}^{(9)} = -u_{13} \\
K_{11}^{(a10)} &= 2v_2 D_2 + v_{22}, \quad K_{12}^{(10)} = -u_{22}, \quad K_{11}^{(a11)} = v_3 D_2 + v_2 D_3 + v_{23} \\
K_{12}^{(11)} &= -u_{23}, \quad K_{11}^{(a12)} = 2v_3 D_3 + v_{33}, \quad K_{12}^{(12)} = -u_{33}, \quad K_{11}^{(a13)} = 0 \\
K_{12}^{(13)} &= -1, \\
K_{11}^{(b1)} &= (u_{13}u_{22} - u_{12}u_{23})D_1 + (u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13})D_2 - (u_{11}u_{22} - u_{12}^2)D_3 \\
K_{11}^{(b2)} &= (u_{13}u_{23} - u_{12}u_{33})D_1 + (u_{11}u_{33} - u_{13}^2)D_2 - (u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13})D_3 \\
K_{11}^{(b3)} &= -(u_{22}u_{33} - u_{23}^2)D_1 + (u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23})D_2 - (u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})D_3 \\
K_{11}^{(1)} &= u_{11}D_2 - u_{12}D_1, \quad K_{11}^{(2)} = u_{11}D_3 - u_{13}D_1, \quad K_{11}^{(3)} = u_{12}D_2 - u_{22}D_1 \\
K_{11}^{(4)} &= u_{13}D_2 - u_{23}D_1, \quad K_{11}^{(5)} = u_{22}D_3 - u_{23}D_2, \quad K_{11}^{(6)} = u_{13}D_3 - u_{33}D_1 \\
K_{11}^{(7)} &= u_{23}D_3 - u_{33}D_2, \quad K_{11}^{(8)} = u_{12}D_3 - u_{13}D_2, \quad K_{11}^{(8')} = u_{12}D_3 - u_{23}D_1 \\
K_{11}^{(15)} &= -D_1, \quad K_{11}^{(16)} = -D_2, \quad K_{11}^{(17)} = -D_3
\end{aligned} \tag{3.18}$$

tanımlamaları ile birlikte

$$K_{11} = \sum_{i=1}^{13} a_i K_{11}^{(ai)} + \sum_{i=1}^3 b_i K_{11}^{(bi)} + \sum_{i=1}^{8'} c_i K_{11}^{(i)} - \sum_{i=1}^3 c_{i+14} D_i, \quad K_{12} = \sum_{i=1}^{13} a_i K_{12}^{(i)} \tag{3.19}$$

şeklinde bulunur [26]. K operatörünün $d\omega = 0$ (2.61) koşuluna göre simplektik yapıda olduğu kanıtlanmıştır. Böylece, K operatörünün tersi olarak tanımlanan J_0 birinci Hamilton operatörü

$$J_0 = K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -K_{12}^{-1} \\ K_{12}^{-1} & K_{12}^{-1} K_{11} K_{12}^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

şeklinde bulunur. (3.12) denklemleriyle tanımlanan bu sistem için Legendre dönüşümü olarak yazılan

$$H_1 = \Pi_u u_t + \Pi_v v_t - L \quad (3.21)$$

denklemine (3.15), (3.12) ve (3.14) yerleştirilerek elde edilen birinci Hamiltoniyen yoğunluğu ifadesi

$$\begin{aligned} H_1 = & -\frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^{13} a_i K_{12}^{(i)} \\ & + b_4 \frac{u}{4} \{u_{11}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) - u_{12}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) + u_{13}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})\} \\ & + \frac{u}{3} \{c_9(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + c_{10}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) + c_{11}(u_{12}u_{33} - u_{13}u_{23}) \\ & + c_{12}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_{13}(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + c_{14}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2)\} \\ & + \frac{u}{2} (c_{18}u_{11} + c_{19}u_{12} + c_{20}u_{13} + c_{21}u_{22} + c_{22}u_{23} + c_{23}u_{33}) + c_{24}u \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde verilir. Hamiltoniyen yapıyı oluşturan

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

denklemine ilgili ifadeler (3.12), (3.20), (3.22) yerleştirilerek yapılan hesaplamalar sonucunda (3 + 1)-boyutlu bu sistemin (3.12) Hamiltoniyen yapıda olduğu anlaşılır [26].

3.4 Tekrarlama Operatörü ve (3+1)-Boyutlu Yeni Sistem

Tek bileşenli Euler Lagrange formundaki denklem (3.10) için simetri koşulu, bu denklemin $u_\tau = \varphi$ (2.84) dikkate alınarak

$$(u_t)_\tau - (u_\tau)_t = 0 \quad (3.24)$$

Lie denklemi biçiminde yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \{a_7(L_{t1(1)}D_t - L_{t1(t)}D_1) + a_8(L_{t1(2)}D_t - L_{t1(t)}D_2) + a_9(L_{t1(3)}D_t - L_{t1(t)}D_3) \\
& + a_{10}(L_{t2(2)}D_t - L_{t2(t)}D_2) + a_{11}(L_{t2(3)}D_t - L_{t2(t)}D_3) + a_{12}(L_{t3(3)}D_t - L_{t3(t)}D_3) \\
& + c_1(L_{12(1)}D_t - L_{12(t)}D_1) + c_2(L_{13(1)}D_t - L_{13(t)}D_1) + c_3(L_{12(2)}D_t - L_{12(t)}D_2) \\
& + c_4(L_{12(3)}D_t - L_{12(t)}D_3) + c_5(L_{23(2)}D_t - L_{23(t)}D_2) + c_6(L_{13(3)}D_t - L_{13(t)}D_3) \\
& + c_7(L_{23(3)}D_t - L_{23(t)}D_3) + c_8(L_{23(1)}D_t - L_{23(t)}D_1) + c_{8'}(L_{13(2)}D_t - L_{13(t)}D_2) \\
& + c_9(L_{12(3)}D_1 - L_{12(1)}D_3) + c_{10}(L_{23(2)}D_1 - L_{23(1)}D_2) + c_{11}(L_{23(3)}D_1 - L_{23(1)}D_3) \\
& + c_{12}(L_{12(2)}D_1 - L_{12(1)}D_2) + c_{13}(L_{13(3)}D_1 - L_{13(1)}D_3) + c_{14}(L_{23(3)}D_2 - L_{23(2)}D_3) \\
& + a_{13}D_t^2 + c_{15}D_tD_1 + c_{16}D_tD_2 + c_{17}D_tD_3 + c_{18}D_1^2 + c_{19}D_1D_2 + c_{20}D_1D_3 + c_{21}D_2^2 + c_{22}D_2D_3 \\
& + c_{23}D_3^2\}\varphi = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $L_{ij(k)}$, denklemin daha kısa halde yazılmasını sağlayan

$$L_{ij(k)} = u_{jk}D_i - u_{ik}D_j \tag{3.26}$$

olarak tanımlanmış bir operatördür ve

$$L_{ij(k)}D_l - L_{ij(l)}D_k = L_{ij(k)}\frac{1}{u_{jk}}L_{lk(j)} + D_j\frac{1}{u_{jk}}(u_{jk}u_{il} - u_{ik}u_{jl})D_k, \tag{3.27a}$$

$$L_{ij(k)}D_l - L_{ij(l)}D_k = L_{lk(j)}\frac{1}{u_{jk}}L_{ij(k)} + D_k\frac{1}{u_{jk}}(u_{jk}u_{il} - u_{ik}u_{jl})D_j, \tag{3.27b}$$

$$L_{ij(k)}D_l - L_{ij(l)}D_k = L_{ij(l)}\frac{1}{u_{jl}}L_{lk(j)} + D_j\frac{1}{u_{jl}}(u_{jk}u_{il} - u_{ik}u_{jl})D_l, \tag{3.27c}$$

$$L_{ij(k)}D_l - L_{ij(l)}D_k = L_{li(j)}\frac{1}{u_{ij}}L_{kj(i)} - L_{ki(j)}\frac{1}{u_{ij}}L_{lj(i)} + D_i\frac{1}{u_{ij}}(u_{jk}u_{il} - u_{ik}u_{jl})D_j \tag{3.27d}$$

bağıntılarını sağlar [26]. İkinci Hamiltoniyen yapıyı elde etmek için (3.25) simetri denkleminde tekrarlama bağıntısını elde etmek gerekmektedir. Kaynak [26]'da detaylıca anlatıldığı gibi (3.25) denklemi ters simetrik çarpanlar seçilerek yazılamamaktadır. Bu nedenle ters simetrik çarpanlar şeklinde yazılabilecek terimler seçilerek beş farklı (3 + 1)-boyutlu denklem bulunmuştur. Bu tezde sadece elde edilen ilk denklemin simetri indirgemesi yapılacağından diğer denklemlere yer verilmeyecektir. Kaynak [41]'de "*Sistem-1*" olarak adlandırılan bu denklem (3.10)'da a_{11} , c_4 , c_8 , c_9 ve c_{10} dışındaki tüm sabitlerin sıfır seçilmesiyle

$$\begin{aligned}
& a_{11}(u_{tt}u_{23} - u_{t2}u_{t3}) + c_4(u_{t1}u_{23} - u_{t2}u_{13}) + c_5(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22}) \\
& + c_8(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12}) + c_9(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + c_{10}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde elde edilmiştir. $a_{11} = 1$ seçilerek (3.28) denkleminde ait simetri koşulu

$$\begin{aligned} & \{L_{t2(3)}D_t - L_{t2(t)}D_3 + c_4(L_{12(3)}D_t - L_{12(t)}D_3) + c_5(L_{23(2)}D_t - L_{23(t)}D_2) \\ & + c_8(L_{23(1)}D_t - L_{23(t)}D_1) + c_9(L_{12(3)}D_1 - L_{12(1)}D_3) + c_{10}(L_{23(2)}D_1 - L_{23(1)}D_2)\}\varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

olarak yazılır. 1, c_4 ve c_9 katsayılı terimler için (3.27a), c_5 ve c_{10} katsayıları için (3.27b), c_8 katsayıları için (3.27d) bağıntısı kullanıldığında (3.29)

$$\begin{aligned} & \left\{L_{t2(3)}\frac{1}{u_{23}}L_{t3(2)} + c_4L_{12(3)}\frac{1}{u_{23}}L_{t3(2)} + c_5L_{t2(3)}\frac{1}{u_{23}}L_{23(2)} + c_8L_{t2(3)}\frac{1}{u_{23}}L_{13(2)} \right. \\ & - c_8L_{12(3)}\frac{1}{u_{23}}L_{t3(2)} + c_9L_{12(3)}\frac{1}{u_{23}}L_{13(2)} + c_{10}L_{12(3)}\frac{1}{u_{23}}L_{23(2)} + D_2\frac{1}{u_{23}}[u_{23}u_{tt} - u_{t3}u_{t2} \\ & + c_4(u_{t1}u_{23} - u_{t2}u_{13}) + c_5(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22}) + c_8(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12}) + c_9(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) \\ & \left. + c_{10}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22})]D_3\right\}\varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklini alır. Bu denklemin sonunda köşeli parantez içerisindeki ifade (3.28) denklemini ile aynıdır ve sıfıra eşittir. Bu durum sayesinde (3.30) denklemini

$$\left\{L_{t2(3)}\frac{1}{u_{23}}(L_{t3(2)} + c_5L_{23(2)} + c_8L_{13(2)}) + L_{12(3)}\frac{1}{u_{23}}[(c_4 - c_8)L_{t3(2)} + c_9L_{13(2)} + c_{10}L_{23(2)}]\right\}\varphi = 0 \quad (3.31)$$

olarak yazılabilir. Bu denklem sıfıra eşit olduğu için sol tarafın $1/u_{23}$ ile çarpılması sonucu etkilemez. Buna göre;

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{u_{23}}L_{t2(3)}, & B_1 &= \frac{1}{u_{23}}\{(c_4 - c_8)L_{t3(2)} + c_9L_{13(2)} + c_{10}L_{23(2)}\}, \\ A_2 &= -\frac{1}{u_{23}}L_{12(3)}, & B_2 &= \frac{1}{u_{23}}(c_5L_{23(2)} + c_8L_{13(2)} + L_{t3(2)}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

seçimi yapıldığında (3.31) simetri koşulunun

$$(A_1B_2 - A_2B_1)\varphi = 0 \quad (3.33)$$

şeklinde asimetric çarpanlar (skew-factorized) olarak yazılabileceği görülür. A_1 , A_2 , B_1 ve B_2 operatörlerinin

$$[A_1, A_2] = 0, \quad [A_1, B_2] - [A_2, B_1] = 0, \quad [B_1, B_2] = 0 \quad (3.34)$$

komütatör bağıntılarını sağlaması koşulunda asimetric çarpanlar (3.33) biçiminde yazılan simetri koşulları

$$A_1\tilde{\varphi} = B_1\varphi, \quad A_2\tilde{\varphi} = B_2\varphi \quad (3.35)$$

şeklindeki tekrarlama bağıntılarının elde edilmesini sağlar. Bu sayede tekrarlama operatörü elde edilebilir. Bu bölüme konu edilen çalışmada (3.28) ile beraber belirlenen beş ayrı denklemin her birinin simetri koşulunun asimetrik çarpanlar (3.33) biçiminde yazılmasını sağlayan A_1 , A_2 , B_1 ve B_2 operatörleri bulunmuş ve hepsinin komütatör koşullarını (3.34) sağladığı belirlenmiştir.

(3.32) operatörleri kullanılarak *Sistem-1* için (3.35) tekrarlama bağıntıları

$$\begin{aligned} u_{23}\tilde{\varphi}_t - u_{t3}\tilde{\varphi}_2 &= (c_4 - c_8)(u_{23}\varphi_t - u_{t2}\varphi_3) + (c_9L_{13(2)} + c_{10}L_{23(2)})\varphi, \\ -L_{12(3)}\tilde{\varphi} &= (c_5L_{23(2)} + c_8L_{13(2)})\varphi + a_{11}(u_{23}\varphi_t - u_{t2}\varphi_3) \end{aligned} \quad (3.36)$$

olarak elde edildikten sonra bu bağıntılar $u_t = v$, $\varphi_t = \psi$ ve $\tilde{\varphi}_t = \tilde{\psi}$ dikkate alınarak

$$u_{23}\tilde{\psi} - v_3\tilde{\varphi}_2 = (c_4 - c_8)(u_{23}\psi - v_2\varphi_3) + (c_9L_{13(2)} + c_{10}L_{23(2)})\varphi, \quad (3.37)$$

$$-L_{12(3)}\tilde{\varphi} = (c_5L_{23(2)} + c_8L_{13(2)})\varphi + a_{11}(u_{23}\psi - v_2\varphi_3) \quad (3.38)$$

şeklinde iki bileşenli biçimde yazılabilir. (3.37) denklemini $\tilde{\psi}$ için çözülerek

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{u_{23}}\{v_3D_2\tilde{\varphi} + (c_8 - c_4)v_2D_3\varphi + (c_9L_{13(2)} + c_{10}L_{23(2)})\varphi\} + (c_4 - c_8)\psi \quad (3.39)$$

elde edilir. (3.38) denklemini de $\tilde{\varphi}$ için çözülerek

$$\tilde{\varphi} = -L_{12(3)}^{-1}(c_5L_{23(2)} + c_8L_{13(2)} - a_{11}v_2D_3)\varphi - a_{11}L_{12(3)}^{-1}u_{23}\psi \quad (3.40)$$

denklemini elde edilir. (3.39) ve (3.40) denklemleri

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

matris formuna getirildikten sonra tekrarlama operatörü R

$$R = \begin{pmatrix} -L_{12(3)}^{-1}(c_5L_{23(2)} + c_8L_{13(2)} - v_2D_3) & -L_{12(3)}^{-1}u_{23} \\ R_{21} & -\frac{v_3}{u_{23}}D_2L_{12(3)}^{-1}u_{23} + c_4 - c_8 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$R_{21} = \frac{1}{u_{23}}[(c_8 - c_4)v_2D_3 + c_9L_{13(2)} + c_{10}L_{23(2)} - v_3D_2L_{12(3)}^{-1}(c_5L_{23(2)} + c_8L_{13(2)} - v_2D_3)]$$

şeklinde ortaya çıkar.

(3.28) denklemi iki bileşenli gösterimde

$$\begin{aligned}
u_t &= v \\
v_t &= \frac{1}{u_{23}} \{ v_2 v_3 + c_4(u_{13} v_2 - u_{23} v_1) + c_5(u_{22} v_3 - u_{23} v_2) + c_8(u_{12} v_3 - u_{13} v_2) + c_9(u_{13} u_{12} - u_{23} u_{11}) \\
&\quad + c_{10}(u_{22} u_{13} - u_{23} u_{12}) \} = q
\end{aligned} \tag{3.43}$$

olarak yazılmaktadır. İki denklemin oluşturduğu bu sistem "*Sistem-1*" olarak adlandırılmıştır [41]. $L_{ij(k)} = u_{jk} D_i - u_{ik} D_j$ operatörü ile *Sistem-1* daha kapalı biçimde

$$\begin{aligned}
u_t &= v \\
v_t &= \frac{1}{u_{23}} \{ v_2 v_3 - c_4 L_{12(3)}[v] - c_5 L_{23(2)}[v] - c_8 L_{23(1)}[v] - c_9 L_{12(3)}[u_1] - c_{10} L_{23(2)}[u_1] \} = q
\end{aligned} \tag{3.44}$$

şeklinde de yazılabilir. u bilinmeyen üç uzay (z_1, z_2, z_3) ve bir zaman (t) değişkenine bağlı olduğu için *Sistem-1* $(3 + 1)$ -boyutludur.

Sistem-1'e ait Lagrange yoğunluğu

$$\begin{aligned}
L &= u_{23} \left(u_t v - \frac{1}{2} v^2 \right) + c_4 \frac{u_t}{3} (u_1 u_{23} - u_2 u_{13}) + c_5 \frac{u_t}{3} (u_2 u_{23} - u_3 u_{22}) + c_8 \frac{u_t}{3} (u_2 u_{13} - u_3 u_{12}) \\
&\quad - c_9 \frac{u}{3} (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) - c_{10} \frac{u}{3} (u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22}),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

ve birinci Hamiltoniyen yoğunluğu H_1 Legendre dönüşümü ile

$$H_1 = \frac{1}{2} u_{23} v^2 + \frac{u}{3} [c_9 (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) + c_{10} (u_{12} u_{23} - u_{13} u_{22})], \tag{3.46}$$

şeklinde bulunur. Simplektik operatör K ise (3.19) denkleminde *Sistem-1* için uygun katsayılar seçilerek (3.18) tanımlamalarına göre

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & -u_{23} \\ u_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

$$K_{11} = v_3 D_2 + D_3 v_2 - c_4 L_{12(3)} - c_5 L_{23(2)} - c_8 L_{23(1)}$$

olarak belirlenir. K_{11} matris elemanının ters simetrik biçimde olduğu açıktır. Birinci Hamilton operatör J_0 ise $J_0 = K^{-1}$ bağıntısından hareketle

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u_{23}} \\ -\frac{1}{u_{23}} & \frac{1}{u_{23}} K_{(11)} \frac{1}{u_{23}} \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlar Hamiltoniyen yapıyı oluşturan denklemde (3.23) kullanıldığında $(3 + 1)$ -boyutlu sistemin (3.43) Hamiltoniyen sistem olduğu anlaşılmıştır. Tekrarlama operatörünün birinci Hamilton operatörüne $J_1 = RJ_0$ şeklinde uygulanmasıyla ikinci Hamilton operatörü J_1

$$J_1 = \begin{pmatrix} L_{12(3)}^{-1} & -(L_{12(3)}^{-1}D_2v_3 + c_8 - c_4)\frac{1}{u_{23}} \\ \frac{1}{u_{23}}(v_3D_2L_{12(3)}^{-1} + c_8 - c_4) & J_{1(22)} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$J_{1(22)} = \frac{1}{u_{23}}(c_9L_{13(2)} + c_{10}L_{23(2)})\frac{1}{u_{23}} - \frac{v_3}{u_{23}}D_2L_{12(3)}^{-1}D_2\frac{v_3}{u_{23}} \\ + \frac{c_4 - c_8}{u_{23}}\{D_2v_3 + v_3D_2 - (c_4L_{12(3)} + c_5L_{23(2)} + c_8L_{23(1)})\}$$

olarak bulunur. Son olarak,

$$c_8c_{10} = c_5c_9 \quad (3.50)$$

koşulu sağlandığında $(3 + 1)$ -boyutlu sistem (3.43) için ikinci Hamiltoniyen yoğunluğu H_0

$$H_0 = -k \left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{c_9}{2c_8}[2u_1v + (c_4 - c_8)u_1^2] \right\} u_{23} \quad (3.51)$$

şeklinde olur. (3.51) ifadesinde $k = \frac{c_8}{c_8(c_8 - c_4) + c_9}$ sabittir. Böylece, $(3 + 1)$ -boyutlu iki bileşenli *Sistem-1*'in

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_o \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

şeklinde yazılmasıyla bu sistemin Magri teoremine göre ikili-Hamiltoniyen yapıya sahip olduğu gösterilir.

Sonraki bölümde (3.43)'te verilen *Sistem-1*'e simetri indirgemesi yapılarak $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sistemin nasıl elde edilebileceği ele alınacaktır.

SİMETRİLER, NOETHER TEOREMİ VE YENİ (2+1)-BOYUTLU İNTEGRE EDİLEBİLİR İKİLİ-HAMİLTONİYEN SİSTEM

4.1 Simetriler ve Simetri İndirgemesi

3. bölümde konu edilen çalışmanın ardından yayınlanan başka bir çalışmada üç uzay (z_1, z_2, z_3) ve bir zaman (t) değişkenine bağlı olan ve 3.4 alt bölümünde (3.28) ile verilen $(3+1)$ -boyutlu

$$u_{tt}u_{23} - u_{t2}u_{t3} + c_4(u_{t1}u_{23} - u_{t2}u_{13}) + c_5(u_{t2}u_{23} - u_{t3}u_{22}) \\ + c_8(u_{t2}u_{13} - u_{t3}u_{12}) + c_9(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + c_{10}(u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22}) = 0$$

denkleminde ait nokta simetriler REDUCE 1 isimli yazılım aracılığıyla

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = u\partial_u + v\partial_v, \quad X_3 = \partial_t, \quad X_4 = t\partial_t + z_1\partial_1 + z_2\partial_2 + u\partial_u, \\ X_a = a(z_3)\partial_u, \quad Y_b = b(z_3)\partial_3, \quad X_{(c,e)} = c(\zeta)\partial_2 + e(\zeta)\partial_u \quad (4.1)$$

olarak elde edilmiştir ($\partial_i = \partial_{z_i}$) [41]. Burada a, b, c, e keyfi fonksiyonlar ve $\zeta = c_5z_1 - c_8z_2$ olarak tanımlanmıştır. (4.1) nokta simetrilerinin her birinin bir diğeriyle Lie parantezi (2.79) işlem sonucu i . satır ve j . sütun kesişimindeki hücre $[X_i, X_j]$ işlemini gösterecek şekilde tablo halinde aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tablo 4.1 $(3+1)$ -boyutlu sisteme ait nokta simetrilerin sıra değiştirmeleri [41]

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_a	Y_b	$X_{(c,e)}$
X_1	0	0	0	X_1	0	0	$c_5X_{(c',e')}$
X_2	0	0	0	0	$-X_a$	0	$-X_{(0,e)}$
X_3	0	0	0	X_3	0	0	0
X_4	$-X_1$	0	$-X_3$	0	$-X_5$	0	$X_{(\tilde{c},\tilde{e})}$
X_a	0	X_a	0	X_5	0	0	0
Y_b	0	0	0	0	0	0	0
$X_{(\sigma,\varepsilon)}$	$-c_5X_{(\sigma',\varepsilon')}$	$X_{(0,\varepsilon)}$	0	$-X_{(\tilde{\sigma},\tilde{\varepsilon})}$	0	0	$X_{(\hat{c},\hat{e})}$

Tabloda $\tilde{c} = \zeta c' - c$, $\tilde{e} = \zeta e' - e$, $\hat{c} = \sigma c' - c\sigma'$, $\hat{e} = \varepsilon e' - e\varepsilon'$ olarak alınmıştır. Benzer notasyon $\tilde{\sigma}$ ve $\tilde{\varepsilon}$ için de geçerlidir [41]. Tablodan anlaşıldığı üzere (4.1) nokta simetrisi Lie cebiri yapısıyla uyumludur. Dolayısıyla simetri üretici olarak ele alınabilirler. Bu tez çalışmasında (4.1) simetrisi arasından özel olarak seçilen

$$X = X_1 + X_{(1,0)} - Y_1 \quad (4.2)$$

simetri birleşimiyle $(3 + 1)$ -boyutlu (3.28) denklemi indirgenerek elde edilen $(2 + 1)$ -boyutlu denklemin yeni bir ikili-Hamiltoniyen sistem oluşturma durumu araştırılacaktır. Burada yapılan seçimdeki çok küçük değişimler elde edilecek sistemin ikili-Hamiltoniyen yapısını bozar. Eğer çok daha genel simetrisi kullanılırsa indirgenmiş ikili-Hamiltoniyen sistem bulmak mümkün olmamaktadır [42]. (4.2) gösterimi (4.1) üreticilerinin arasından seçilen X_1 , $X_{(1,0)}$ ve Y_1 nokta simetrisinin $(1, 1, -1)$ katsayılarıyla doğrusal birleşimini ifade eder. Burada $X_{(1,0)}$ (4.1)'de bulunan $X_{(c,e)}$ nokta simetrisinde $c(\zeta)$ ve $e(\zeta)$ fonksiyonları için sırasıyla 1 ve 0 sabit değerlerinin seçildiğini ifade eder. Y_1 ise gene (4.1)'de bulunan Y_b nokta simetrisinde $b(z_3)$ fonksiyonu için sabit 1 değerinin seçildiğini ifade eder. Bu durumda (4.2) gösterimine karşılık gelen denklem

$$X = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_3} \quad (4.3)$$

şeklinde. (4.2) simetri üreticisine karşılık gelen karakteristik denklem (2.82)'e göre

$$\frac{dz_1}{1} = \frac{dz_2}{1} = -\frac{dz_3}{1} \quad (4.4)$$

şeklinde. (4.4) integre edilerek bulunan integrasyon sabitlerine göre (4.2) simetrisine ait I değişmezleri (invariantlar) sırayla;

$$\begin{aligned} I_1 &\rightarrow T = t, \\ I_2 &\rightarrow Z_1 = z_1 - z_2, \\ I_3 &\rightarrow Z_2 = z_2 + z_3, \\ I_4 &\rightarrow U(T, Z_1, Z_2) = u(t, z_1, z_2, z_3) \\ I_5 &\rightarrow V(T, Z_1, Z_2) = v(t, z_1, z_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak belirlenir. Burada I_2 ve I_3 (4.4) denklemlerinden elde edilen değişmezlerdir. I_1 , I_4 ve I_5 keyfi olarak belirlenmiştir. (4.5) dikkate alınarak

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_1} = 1, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial z_2} = -1, \quad \frac{\partial Z_2}{\partial z_2} = 1, \quad \frac{\partial Z_2}{\partial z_3} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 1 \quad (4.6)$$

bağıntıları yazılabilir. $i = z_1, z_2, z_3, t$ ve ∂_i alt indiste bulunan değişkene göre türev

operatörü olmak üzere, (4.5) dikkate alındığında ∂_i operatörleri seçili (4.2) simetrisi tarafından

$$\partial_{z_1} = \frac{\partial Z_1}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial Z_1}, \quad \partial_{z_2} = \frac{\partial Z_1}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial Z_1} + \frac{\partial Z_2}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial Z_2}, \quad \partial_{z_3} = \frac{\partial Z_2}{\partial z_3} \frac{\partial}{\partial Z_2}, \quad \partial_t = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} \quad (4.7)$$

bağıntılarına uygun olarak dönüşüme uğrar. (4.6) bağıntıları (4.7)'de yerlerine konulduğunda ∂_i dönüşümleri

$$\partial_{z_1} = \partial_{Z_1}, \quad \partial_{z_2} = \partial_{Z_2} - \partial_{Z_1}, \quad \partial_{z_3} = \partial_{Z_2}, \quad \partial_t = \partial_T \quad (4.8)$$

olarak elde edilir. (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.8)'de eski değişkenler z_1, z_2, z_3, t, u, v ve yeni değişkenler Z_1, Z_2, T, U, V ile temsil edilmektedir. Başlangıçtaki sisteme ait notasyonu kullanabilmek amacıyla yeni değişkenler

$$U \rightarrow u, \quad V \rightarrow v, \quad T \rightarrow t, \quad Z_1 \rightarrow z_1, \quad Z_2 \rightarrow z_2 \quad (4.9)$$

olarak yeniden adlandırılır. Simetri indirgemesi ile elde edilen (4.8) dönüşümleri kullanılarak 3.4 alt bölümünde tanımlanan $(3 + 1)$ -boyutlu sistemin nasıl $(2 + 1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen sisteme indirgeneceğini göstermek için iki farklı yöntem kullanılır. Bu yöntemlerin birbiri ile tutarlı olması gerekmektedir. İlk yöntem doğrudan indirgeme yöntemidir. Bu yöntem ile $(3 + 1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen sisteme ait bütün değerlere (4.8) dönüşümleri uygulanarak $(2 + 1)$ -boyutlu sisteme ait değerler bulunur.

Doğrudan indirgeme yöntemi ile $(3 + 1)$ -boyutlu (3.28) denklemi $(2 + 1)$ -boyuta

$$F = u_{tt}u_{22} - u_{tt}u_{12} - u_{t2}^2 + u_{t1}u_{t2} + a(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11}) + b(u_{t2}u_{12} - u_{t1}u_{22}) + c(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) = 0 \quad (4.10)$$

denklemi olarak indirgenir. Burada sabit katsayılar

$$a = c_5 - c_8, \quad b = c_5 - c_4, \quad c = c_{10} - c_9 \quad (4.11)$$

olarak tanımlıdır.

(3.43) ile verilen iki bileşenli $(3 + 1)$ -boyutlu sistem de benzer şekilde indirgeniğinde

$$\begin{aligned} u_t^r &= v \\ v_t^r &= \frac{1}{\Delta} \{ v_2^2 - v_1 v_2 + a(v_2 u_{11} - v_1 u_{12}) + b(v_1 u_{22} - v_2 u_{12}) + c(u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \} \equiv q \end{aligned} \quad (4.12)$$

biçimindeki iki bileşenli $(2 + 1)$ -boyutlu sistem elde edilir. Burada r üst indisi indirgenmiş sistemi temsil etmektedir. Yazım kolaylığı açısından

$$\Delta = u_{22} - u_{12} \quad (4.13)$$

tanımlaması yapılmıştır.

(2 + 1)-boyutlu Lagrange yoğunluğu (3.45) denkleminde

$$L^r = \left(u_t v - \frac{1}{2} v^2 \right) \Delta + \frac{u_t}{3} [b(u_2 u_{12} - u_1 u_{22}) + a(u_1 u_{12} - u_2 u_{11})] + \frac{u}{3} c(u_{11} u_{22} - u_{12}^2), \quad (4.14)$$

birinci Hamiltoniyen yoğunluğu (3.46) denkleminde

$$H_1^r = \frac{1}{2} \Delta v^2 + \frac{u}{3} c(u_{12}^2 - u_{11} u_{22}), \quad (4.15)$$

simplektik operatör (3.47) denkleminde

$$K^r = \begin{pmatrix} K_{11}^r & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$K_{11}^r = (2v_2 - v_1)D_2 - v_2 D_1 + v_{22} - v_{12} + a(u_{11} D_2 - u_{12} D_1) + b(u_{22} D_1 - u_{12} D_2),$$

birinci Hamilton operatörü (3.48) denkleminde

$$J_0^r = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{1}{\Delta} & J_{0(22)}^r \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$J_{0(22)}^r = \frac{1}{\Delta} \{v_{22} + 2v_2 D_2 - v_{12} - v_2 D_1 - v_1 D_2 + a(u_{11} D_2 - u_{12} D_1) + b(u_{22} D_1 - u_{12} D_2)\} \frac{1}{\Delta},$$

şeklinde doğrudan indirgenir.

Simetri koşulunun

$$(A_1^r B_2^r - A_2^r B_1^r) \varphi = 0 \quad (4.18)$$

antisimetrik çarpanlar biçiminde yazılmasını sağlayan operatörler (3.32) denklemlerinden

$$\begin{aligned} A_1^r &= \frac{1}{\Delta} (L_{t2(2)} + L_{1t(2)}), & A_2^r &= -\frac{1}{\Delta} L_{12(2)}, \\ B_1^r &= \frac{1}{\Delta} [(c_4 - c_8)(L_{2t(1)} + L_{t2(2)}) + c(L_{12(1)} + L_{21(2)})], \\ B_2^r &= \frac{1}{\Delta} [a(L_{12(1)} + L_{(21)2}) + L_{2t(1)} + L_{t2(2)}], \end{aligned} \quad (4.19)$$

tekrarlama operatörü (3.42) denkleminde

$$R^r = \begin{pmatrix} L_{12(2)}^{-1}[aL_{21(1)} + (v_2 - v_1)D_2] + a & -L_{12(2)}^{-1}\Delta \\ R_{(21)}^r & -\frac{v_2}{\Delta}(D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1}\Delta + c_4 - c_8 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$R_{21}^r = \frac{1}{\Delta}[(c_8 - c_4)(v_2 - v_1)D_2 + c(L_{21(2)} + L_{12(1)})] \\ - \frac{v_2}{\Delta}(D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1}[a(L_{21(2)} + L_{12(1)}) + (v_1 - v_2)D_2],$$

birinci Hamilton operatörü (3.49) denkleminde

$$J_1^r = \begin{pmatrix} L_{12(2)}^{-1} & -\{L_{12(2)}^{-1}(D_2 - D_1)v_2 + c_8 - c_4\}\frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta}\{v_2(D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1} + c_8 - c_4\} & J_{1(22)}^r \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$J_{1(22)}^r = \frac{1}{\Delta}\{c_9(L_{21(1)} + L_{12(2)}) + c_{10}(L_{21(2)} + L_{12(1)}) - v_2(D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1}(D_2 - D_1)v_2 \\ + (c_4 - c_8)[(D_2 - D_1)v_2 + v_2(D_2 - D_1) - c_4L_{12(2)} - c_5(L_{21(2)} + L_{12(1)}) - c_8L_{21(1)}]\}\frac{1}{\Delta},$$

şeklinde doğrudan indirgenir. $k = \frac{c_8}{c_8(c_8 - c_4) + c_9}$ sabit olmak üzere ikinci Hamiltoniyen yoğunluğu (3.51) denkleminde

$$H_0^r = -k \left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{c_9}{2c_8}[2u_1v + (c_4 - c_8)u_1^2] \right\} \Delta \quad (4.22)$$

olarak indirgenir ve $c_8c_{10} = c_5c_9$ koşulu (3.50) H_0^r için de geçerlidir. İndirgemiş sistem için elde edilen sonuçlar ile ikili-Hamiltoniyen yapı

$$\begin{pmatrix} u_t^r \\ v_t^r \end{pmatrix} = J_o^r \begin{pmatrix} \delta_u H_1^r \\ \delta_v H_1^r \end{pmatrix} = J_1^r \begin{pmatrix} \delta_u H_0^r \\ \delta_v H_0^r \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

matris denklemini sağlar.

4.2 Dirac Bağ Analizi ve Birinci Hamiltoniyen Yapı

4.1 alt bölümünde $(3 + 1)$ -boyuttan doğrudan indirgeme ile elde edilen ve ikili-Hamiltoniyen yapıyı sağlayan denklemlerin $(2 + 1)$ -boyutta Lagrange yoğunluğundan itibaren Dirac bağ analizi takip edilerek elde edilebilmesi gereklidir. 4.1 alt bölümünde Simetri indirgemesi ile elde edilen (4.10) denkleminde bu kısımda (2.15) koşulu uygulanarak denklemin Euler-Lagrange formunda olduğu görülecektir. Bu durumda doğrudan indirgeme ile elde edilen (4.14) L^r denklemi, (4.10)

denklemine (2.16) Homotopi formülü uygulanarak da elde edilebilmelidir.

(2.13) Frechet türev operatörü, (4.10) denklemine uygulandığında

$$\begin{aligned} D_F = & (-au_{t2} - cu_{22})D_1D_1 + (-u_{tt} + au_{t1} + bu_{t2} + 2cu_{12})D_1D_2 \\ & + (u_{tt} - bu_{t1} - cu_{11})D_2D_2 + (u_{t2} + au_{12} - bu_{22})D_tD_1 \\ & + (-2u_{t2} + u_{t1} - au_{11} + bu_{12})D_tD_2 + (u_{22} - u_{12})D_tD_t \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. (2.14) Eşlenik Frechet türev operatörü, (4.10) denklemine uygulandığında ise

$$\begin{aligned} D_F^* = & D_1D_1[-au_{t2} - cu_{22}] + D_1D_2[-u_{tt} + au_{t1} + bu_{t2} + 2cu_{12}] \\ & + D_2D_2[u_{tt} - bu_{t1} - cu_{11}] + D_tD_1[u_{t2} + au_{12} - bu_{22}] \\ & + D_tD_2[-2u_{t2} + u_{t1} - au_{11} + bu_{12}] + D_tD_t[u_{22} - u_{12}] \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. Toplam türev işlemleri yapıldıktan sonra (4.24) ve (4.25) eşit bulunmaktadır. Bu durumda Helmholtz koşuluna göre (4.10) (2 + 1)-boyutlu denklemin gerçekten Euler-Lagrange denklemi olduğu anlaşılır. Bu durumda (2.16) Homotopi formülü, (4.10) denklemine

$$L^r = \int_1^2 u\lambda^2 [u_{tt}u_{22} - u_{tt}u_{12} - u_{t2}^2 + u_{t1}u_{t2} + a(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11}) + b(u_{t2}u_{12} - u_{t1}u_{22}) + c(u_{12}^2 - u_{11}u_{22})] d\lambda \quad (4.26)$$

olarak uygulandığında indirgenmiş Lagrange yoğunluğu

$$L^r = \frac{u}{3} [u_{tt}u_{22} - u_{t2}^2 + u_{t1}u_{t2} - u_{tt}u_{12} + a(u_{t1}u_{12} - u_{t2}u_{11}) + b(u_{t2}u_{12} - u_{t1}u_{22}) + c(u_{12}^2 - u_{11}u_{22})] \quad (4.27)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemde kısmi integrasyon uygulandığında toplam türev terimleri ile birlikte

$$\begin{aligned} L^r = & \frac{1}{3} [D_t(uu_tu_{22}) - D_2(uu_tu_{t2})] - \frac{1}{2} u_t^2 u_{22} + \frac{1}{3} [D_2(uu_{t1}u_t) - D_t(uu_tu_{12})] + \frac{1}{2} u_t^2 u_{12} \\ & + \frac{1}{3} \{ a [D_1(uu_tu_{12}) - u_1u_tu_{12} - D_2(uu_tu_{11}) + u_2u_tu_{11}] + c(uu_{12}^2 - uu_{11}u_{22}) \\ & + b [D_2(uu_tu_{12}) - u_2u_tu_{12} - D_1(uu_tu_{22}) + u_1u_tu_{22}] \} \end{aligned} \quad (4.28)$$

denklemine ulaşılır. Lagrange yoğunluğu için toplam türev halindeki terimlerin sınırlarda sıfır olduğu bilinmektedir. Geri kalan terimlerin tamamı işaret değişimi ile yazıldığında yazıldığında L^r için

$$L^r = \frac{1}{2}(u_t^2 u_{22} - u_t^2 u_{12}) + \frac{1}{3}[a(u_2 u_t u_{11} - u_1 u_t u_{12}) + b(u_1 u_t u_{22} - u_2 u_t u_{12}) + c(u u_{12}^2 - u u_{11} u_{22})] \quad (4.29)$$

ifadesi bulunur. Lagrange yoğunluğunun iki bileşenli sistemi verebilmesi için uygun terimlerde $u_t = v$ dönüşümü yapılarak (4.29) ifadesi iki bileşenli gösterimde

$$L^r = \left(u_t v - \frac{1}{2}v^2\right) \Delta + \frac{u_t}{3}[a(u_1 u_{12} - u_2 u_{11}) + b(u_2 u_{12} - u_1 u_{22})] + \frac{u}{3}c(u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \quad (4.30)$$

olarak elde edilir. Bu yöntemle elde edilen (2+1)-boyutlu Lagrange yoğunluğu (4.30) ile doğrudan simetri indirgemesi ile elde edilen Lagrange yoğunluğu (4.14) aynı ifadeye sahiptir. Bu Lagrange yoğunluğu ile elde edilen Euler-Lagrange denklemleri

$$\begin{aligned} u_t &= v \\ v_t &= \frac{1}{\Delta}\{v_2^2 - v_1 v_2 + a(v_2 u_{11} - v_1 u_{12}) + b(v_1 u_{22} - v_2 u_{12}) + c(u_{11} u_{22} - u_{12}^2)\} \equiv q \end{aligned} \quad (4.31)$$

şeklinde bulunur. (4.31) denklemleri ile (2 + 1)-boyutlu sistemi oluşturan (4.12) denklemlerinin aynı olduğu görülür.

Genel formülü (2.22) ile verilen Legendre dönüşümü, ilgilendiğimiz sistem için

$$H_1^r = \Pi_u^r u_t + \Pi_v^r v_t - L^r \quad (4.32)$$

olarak yazılabilir. u_t ve v_t genelleştirilmiş hızlara karşılık gelmektedir. (2.9) bağıntısına göre u ve v değişkenlerine göre kanonik momentumlar

$$\Pi_u^r = \frac{\partial L^r}{\partial u_t} = v \Delta + \frac{b}{3}(u_2 u_{12} - u_1 u_{22}) + \frac{a}{3}(u_1 u_{12} - u_2 u_{11}), \quad \Pi_v^r = \frac{\partial L^r}{\partial v_t} = 0 \quad (4.33)$$

olarak bulunur. (4.12), (4.33) ve (4.14) denklemleri (4.32) denkleminde yerlerine konulduğunda indirgenmiş sisteme ait birinci Hamiltoniyen yoğunluğu

$$H_1^r = \frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{c}{3}u(u_{12}^2 - u_{11} u_{22}), \quad (4.34)$$

olarak bulunur. Bu yöntemle bulunan H_1^r ile orijinal sistemden doğrudan indirgenerek bulunan H_1^r (4.15) ifadeleri birbiriyle tutarlıdır.

Kanonik momentum denklemleri (4.33) incelendiğinde momentum ve hızın her ikisinin de diğerine bağlı bir fonksiyon olarak yazılamayacağı görülür. Bu durum L^r (4.14) ifadesinde u_t fonksiyonunun sadece birinci dereceden kuvvetinin bulunmasından da anlaşılır. Dolayısıyla, Dirac bağ teorisi takip edilerek (2.36) ifadesine uygun ikinci sınıf bağ koşulları (4.33) momentum denklemlerinden

$$\phi_u^r = \Pi_u^r - v\Delta - \frac{b}{3}(u_2u_{12} - u_1u_{22}) - \frac{a}{3}(u_1u_{12} - u_2u_{11}), \quad \phi_v^r = \Pi_v^r \quad (4.35)$$

şeklinde türetilir. Bağ koşulları uzay ve momentuma bağlı fonksiyon olduğu için birbiriyle Poisson parantezleri alınırken

$$\{\Pi_i(z), u^k(z')\} = \delta_i^k \delta(z - z'), \quad \{\Pi_i(z), \Pi_k(z')\} = 0, \quad \{u^i(z), u^k(z')\} = 0 \quad (4.36)$$

bağıntıları geçerli olur ve $\Pi_1 = \Pi_u$, $\Pi_2 = \Pi_v$, $u^1 = u$, $u^2 = v$, $z = (z_1, z_2)$, $z' = (z'_1, z'_2)$ ile tanımlanır. (4.36) ifadesinde yer alan $\delta(z - z')$ sürekli Dirac delta fonksiyonu

$$\int_a^b f(z) \delta(z - z') dz = f(z') \quad (4.37)$$

özelliğini sağlar. z , $[a, b]$ kapalı aralığı içinde bulunmalıdır. f , integrali hesaplayabilmek için kullanılan bir deneme fonksiyonudur. Sürekli Dirac fonksiyonun bir diğer özelliği ise çift fonksiyon olmasıdır:

$$\delta(-z) = \delta(z). \quad (4.38)$$

Yeni sisteme ait simplektik matris, bağ koşullarının Poisson parantezleri cinsinden

$$K^r = \begin{pmatrix} \{\phi_u^r(z), \phi_{u'}^r(z')\} & \{\phi_u^r(z), \phi_{v'}^r(z')\} \\ \{\phi_v^r(z), \phi_{u'}^r(z')\} & \{\phi_v^r(z), \phi_{v'}^r(z')\} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

olarak tanımlanır. Bağ denklemleri(4.35) yerlerine konularak bu matrisin elemanları hesaplanır.

Böylece K_{11}^r için

$$\begin{aligned} K_{11}^r = \{\phi_u^r(z), \phi_{u'}^r(z')\} = & \{\Pi_u^r - vu_{22} + vu_{12} - \frac{b}{3}(u_2u_{12} - u_1u_{22}) - \frac{a}{3}(u_1u_{12} - u_2u_{11}), \\ & \Pi_{u'}^r - v'u'_{22} + v'u'_{12} - \frac{b}{3}(u'_2u'_{12} - u'_1u'_{22}) - \frac{a}{3}(u'_1u'_{12} - u'_2u'_{11})\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Poisson parantezi yazılır. (4.36) bağıntılarına göre sadece momentum fonksiyonun yanına alt indisinde bulunan değişkene eş fonksiyon geldiği durumda Poisson parantezi sıfırdan farklı olur. Diğer durumları işleme dahil etmeye gerek yoktur çünkü sonuç sıfırdır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
K_{11}^r = & -v'\{\Pi_u^r, u_{22}'\} + v'\{\Pi_u^r, u_{12}'\} + \frac{b}{3}(-\{\Pi_u^r, u_2'\}u_{12}' - u_2'\{\Pi_u^r, u_{12}'\} + \{\Pi_u^r, u_1'\}u_{22}' + u_1'\{\Pi_u^r, u_{22}'\}) \\
& + \frac{a}{3}(-\{\Pi_u^r, u_1'\}u_{12}' - u_1'\{\Pi_u^r, u_{12}'\} + \{\Pi_u^r, u_2'\}u_{11}' + u_2'\{\Pi_u^r, u_{11}'\}) - v\{u_{22}, \Pi_{u'}^r\} + v\{u_{12}, \Pi_{u'}^r\} \\
& + \frac{b}{3}(-\{u_2, \Pi_{u'}^r\}u_{12} - u_2\{u_{12}, \Pi_{u'}^r\} + \{u_1, \Pi_{u'}^r\}u_{22} + u_1\{u_{22}, \Pi_{u'}^r\}) \\
& + \frac{a}{3}(-\{u_1, \Pi_{u'}^r\}u_{12} - u_1\{u_{12}, \Pi_{u'}^r\} + \{u_2, \Pi_{u'}^r\}u_{11} + u_2\{u_{11}, \Pi_{u'}^r\})
\end{aligned} \tag{4.41}$$

olur ve (4.36) bağıntıları kullanılarak (4.41) şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
K_{11}^r = & v'\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'2'}(z_2 - z_2') - v'\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') + \frac{b}{3}[\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2')u_{12}' \\
& + u_2'\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') - \delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')u_{22}' - u_1'\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'2'}(z_2 - z_2')] \\
& + \frac{a}{3}[\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')u_{12}' + u_1'\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') - \delta(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2')u_{11}' \\
& - u_2'\delta_{1'1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')] - v\delta(z_1' - z_1)\delta_{22}(z_2' - z_2) + v\delta_1(z_1' - z_1)\delta_2(z_2' - z_2) \\
& + \frac{b}{3}[-\delta(z_1' - z_1)\delta_2(z_2' - z_2)u_{12} - u_2\delta_1(z_1' - z_1)\delta_2(z_2' - z_2) + \delta_1(z_1' - z_1)\delta(z_2' - z_2)u_{22} \\
& + u_1\delta(z_1' - z_1)\delta_{22}(z_2' - z_2)] + \frac{a}{3}[-\delta_1(z_1' - z_1)\delta(z_2' - z_2)u_{12} - u_1\delta_1(z_1' - z_1)\delta_2(z_2' - z_2) \\
& + \delta(z_1' - z_1)\delta_2(z_2' - z_2)u_{11} + u_2\delta_{11}(z_1' - z_1)\delta(z_2' - z_2)].
\end{aligned} \tag{4.42}$$

(4.42) denklemi 11. terimden itibaren yeniden düzenlenerek

$$\begin{aligned}
K_{11}^r = & v'\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'2'}(z_2 - z_2') - v'\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') + \frac{b}{3}[\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2')u_{12}' \\
& + u_2'\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') - \delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')u_{22}' - u_1'\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'2'}(z_2 - z_2')] \\
& + \frac{a}{3}[\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')u_{12}' + u_1'\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') - \delta(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2')u_{11}' \\
& - u_2'\delta_{1'1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')] - v\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'2'}(z_2 - z_2') + v\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') \\
& + \frac{b}{3}[\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2')u_{12} - u_2\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') - \delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')u_{22} \\
& + u_1\delta(z_1 - z_1')\delta_{2'2'}(z_2 - z_2')] + \frac{a}{3}[\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta(z_2 - z_2')u_{12} - u_1\delta_{1'}(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2') \\
& - \delta(z_1 - z_1')\delta_{2'}(z_2 - z_2')u_{11} + u_2\delta_{1'1'}(z_1 - z_1')(z_2 - z_2')]
\end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklinde yazılabilir. Bu düzenlemede (4.38) özelliğinden yararlanılmıştır. Türevi alınan parantez içerisindeki değişkenin işareti dikkate alınarak tek dereceden türev

içeren terimlerde zıt işaret, çift dereceden türev içeren terimlerde aynı işaret yazılmıştır. Bu düzenlemeden sonra (4.42) denkleminde (4.37) ve (4.38) özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
K_{11}^r = & \int \int \left\{ v' f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'2'}(z_2 - z'_2) - v' f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) \right. \\
& + \frac{b}{3} [u'_{12} f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) + u'_2 f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) \\
& - u'_{22} f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta(z_2 - z'_2) - u'_1 f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'2'}(z_2 - z'_2)] \\
& + \frac{a}{3} [u'_{12} f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta(z_2 - z'_2) + u'_1 f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) \\
& - u'_{11} f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) - u'_2 f(z'_1, z'_2) \delta_{1'1'}(z_1 - z'_1) \delta(z_2 - z'_2)] \\
& - v f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'2'}(z_2 - z'_2) + v f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) \} dz'_1 dz'_2 \\
& + \frac{b}{3} [u_{12} \int \int f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2 \\
& - u_2 \int \int f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2 \\
& - u_{22} \int \int f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2 \\
& + u_1 \int \int f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'2'}(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2] \\
& + \frac{a}{3} [u_{12} \int \int f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2 \\
& - u_1 \int \int f(z'_1, z'_2) \delta_{1'}(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2 \\
& - u_{11} \int \int f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1) \delta_{2'}(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2 \\
& + u_2 \int \int f(z'_1, z'_2) \delta_{1'1'}(z_1 - z'_1) \delta(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2]
\end{aligned} \tag{4.44}$$

integrali oluşturulur. (4.44) denkleminde (4.37) özelliği ve türev derecesine bağlı işaret değişimi dikkate alınıp integraller çözülerek

$$\begin{aligned}
K_{11}^r = & D_2 D_2 (vf) - D_1 D_2 (vf) + \frac{b}{3} [-D_2 (u_{12}f) + D_1 D_2 (u_2f) + D_1 (u_{22}f) - D_2 D_2 (u_1f)] \\
& + \frac{a}{3} [-D_1 (u_{12}f) + D_1 D_2 (u_1f) + D_2 (u_{11}f) - D_1 D_1 (u_2f)] - v D_2 D_2 f + v D_1 D_2 f \\
& + \frac{b}{3} [-u_{12} D_2 f - u_2 D_1 D_2 f + u_{22} D_1 f + u_1 D_2 D_2 f] \\
& + \frac{a}{3} [-u_{12} D_1 f - u_1 D_1 D_2 f + u_{11} D_2 f + u_2 D_1 D_1 f]
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir.

Toplam türev işlemleri gerçekleştirilerek

$$\begin{aligned}
K_{11}^r = & (v_{22}f + 2v_2 D_2 f + v D_2 D_2 f) - (v_{12}f + v_2 D_1 f + v_1 D_2 f + v D_1 D_2 f) + \frac{b}{3} [-(u_{122}f + u_{12} D_2 f) \\
& + (u_{122}f + u_{22} D_1 f + u_{12} D_2 f + u_2 D_1 D_2 f) + (u_{122}f + u_{22} D_1 f) - (u_{122}f + u_{12} D_2 f + u_{12} D_2 f \\
& + u_1 D_2 D_2 f)] + \frac{a}{3} [-(u_{112}f + u_{12} D_1 f) + (u_{112}f + u_{12} D_1 f + u_{11} D_2 f + u_1 D_1 D_2 f) \\
& + (u_{112}f + u_{11} D_2 f) - (u_{112}f + 2u_{12} D_1 f + u_2 D_1 D_1 f)] - (v D_2 D_2 f) + (v D_1 D_2 f) \\
& + \frac{b}{3} [-(u_{12} D_2 f) - (u_2 D_1 D_2 f) + (u_{22} D_1 f) + (u_1 D_2 D_2 f)] \\
& + \frac{a}{3} [-(u_{12} D_1 f) - (u_1 D_1 D_2 f) + (u_{11} D_2 f) + (u_2 D_1 D_1 f)]
\end{aligned} \tag{4.46}$$

bulunur. Sadeleştirme ve katsayılara göre düzenleme yapıp deneme fonksiyonu olan f kaldırıldığında sonuç

$$K_{11}^r = (2v_2 - v_1)D_2 - v_2 D_1 + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1) + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + v_{22} - v_{12} \tag{4.47}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
K_{12}^r = \{ \phi_u^r(z), \phi_{v'}^r(z') \} &= -\Delta \{ v, \Pi_{v'} \} = -\Delta \delta(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2) \\
&= -\Delta \delta(z_1 - z'_1) \delta(z_2 - z'_2).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

δ fonksiyonunun (4.37) özelliğine göre

$$K_{12}^r = -\Delta \int \int f(z'_1, z'_2) \delta(z_1 - z'_1)(z_2 - z'_2) dz'_1 dz'_2 = -\Delta f. \tag{4.49}$$

Deneme fonksiyonu f sonuçtan kaldırıldığında

$$K_{12}^r = -\Delta = u_{12} - u_{22} \tag{4.50}$$

bulunur. Poisson parantezi işleminin ters simetri (2.28b) özelliğine göre

$$K_{21}^r = -K_{(12)}^r = \Delta = u_{22} - u_{12} \quad (4.51)$$

olur ve (4.36) bağıntılarına göre

$$K_{22}^r = \{\phi_v^r(z), \phi_{v'}^r(z')\} = \{\Pi_v^r, \Pi_{v'}^r\} = 0 \quad (4.52)$$

sonucu aşıkardır.

Elde edilen (4.47), (4.50), (4.51), (4.52) elemanlarıyla kurulan

$$K^r = \begin{pmatrix} K_{11}^r & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$K_{11}^r = (2v_2 - v_1)D_2 - v_2D_1 + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1) + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + v_{22} - v_{12}$$

matris denklemi, (3 + 1)-boyutlu (3.47) matris denkleminin doğrudan indirgenen (4.16) matris denklemiyle aynıdır. K_{11}^r ters simetrik biçimde

$$K_{11}^r = -\frac{1}{2}(D_1v_2 + v_2D_1) + D_2\left(v_2 - \frac{v_1}{2}\right) + \left(v_2 - \frac{v_1}{2}\right)D_2 + a(D_2u_{11} - D_1u_{12}) + b(D_1u_{22} - D_2u_{12}) \quad (4.54)$$

şeklinde yazılarak K^r matris operatörün ters simetri özelliğine sahip olduğu kolaylıkla görülür. Simplektik operatörün diferansiyel 2-forma sahip olması gereklidir. Bu sonuçlar ile K^r için diferansiyel 2-form $\omega = \frac{1}{2}du^i \wedge K_{ij}^r du^j$ denkleminde göre

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{1}{2}[(2v_2 - v_1)du \wedge du_2 - v_2du \wedge du_1 + b(u_{22}du \wedge du_1 - u_{12}du \wedge du_2) \\ & + a(u_{11}du \wedge du_2 - u_{12}du \wedge du_1) + 2\Delta dv \wedge du] \end{aligned} \quad (4.55)$$

şeklinde kurulur. (4.55) denkleminin diferansiyeli (2.64) bağıntıları kullanılarak toplam türevler biçiminde

$$\begin{aligned} d\omega = & D_2[2dv \wedge du \wedge du_2 - dv \wedge du \wedge du_1 + b(du_2 \wedge du \wedge du_1) \\ & + D_1[a(du_1 \wedge du \wedge du_2) - dv \wedge du \wedge du_2] = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin hacim integrali alındığında toplam türev terimleri sınır koşullarda sıfır olacağı için (4.56) denkleminin sonucu sıfırdır. Bu durumda $d\omega = 0$ koşulu sağlandığı için K^r operatörünün gerçekten simplektik yapıda olduğu anlaşılmaktadır.

(2.59) $K^{-1} = J_0$ tanımına göre simplektik operatörün tersi olan birinci Hamilton

operatörü indirgenmiş sistem için

$$J_0^r = \frac{1}{K^r} = \frac{1}{\sqrt{\det(K^r)}} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & K_{11}^r \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\det(K^r)}} \quad (4.57)$$

şeklinde yazılır. K^r matrisinin elemanları olan (4.47), (4.50), (4.51) ve (4.52) ifadeleri

$$\det(K^r) = K_{(11)}^r K_{(22)}^r - K_{(21)}^r K_{(12)}^r = \Delta^2 \quad (4.58)$$

bağıntısında yerlerine konulduğunda

$$\frac{1}{\sqrt{\det(K^r)}} = \pm \frac{1}{\Delta} \quad (4.59)$$

elde edilir. (4.59), (4.57) denkleminde yerleştirildiğinde

$$J_0^r = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{1}{\Delta} & J_{0(22)}^r \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$J_{0(22)}^r = \frac{1}{\Delta} \{a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1) + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + 2v_2D_2 - v_2D_1 - v_1D_2 + v_{22} - v_{12}\} \frac{1}{\Delta} \quad (4.61)$$

elde edilir. Bu matris (3 + 1)-boyuttan (3.48) doğrudan indirgenerek elde edilen matrisin (4.17) aynısıdır. $J_{0(22)}^r$ ters simetrik formda

$$J_{0(22)}^r = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{2} (D_1 v_2 + v_2 D_1) + D_2 \left(\frac{v_1}{2} - v_2 \right) + \left(\frac{v_1}{2} - v_2 \right) D_2 + a(D_1 u_{12} - D_2 u_{11}) + b(D_2 u_{12} - D_1 u_{22}) \right\} \frac{1}{\Delta} \quad (4.62)$$

şeklinde yazılır. Böylece J_0^r matrisinin de ters simetri özelliğine sahip olduğu görülür. Elde edilen u_t^r , v_t^r , J_0^r , H_1^r iki bileşenli evrimsel sistemlerde Hamiltoniyen yapıyı oluşturan (2.67) ifadesine göre yazılan

$$\begin{pmatrix} u_t^r \\ v_t^r \end{pmatrix} = J_0^r \begin{pmatrix} \delta_u H_1^r \\ \delta_v H_1^r \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

denklemini sağlıyorsa (2 + 1)-boyutlu yeni sistem (4.12) Hamiltoniyen sistemdir. (4.15) ve (4.34) denklemlerinde

$$H_1^r = \frac{1}{2} \Delta v^2 + \frac{c}{3} u(u_{12}^2 - u_{11}u_{22})$$

şeklinde ifade edilmiş olan birinci Hamiltoniyen yoğunluğuna u 'ya göre olan varyasyonel türev operatörü (2.12) şu şekilde uygulanır:

$$\frac{\delta H_1^r}{\delta u} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \partial_1^2 \frac{\partial}{\partial u_{11}} + \partial_1 \partial_2 \frac{\partial}{\partial u_{12}} + \partial_2^2 \frac{\partial}{\partial u_{22}} \right) H_1^r. \quad (4.64)$$

H_1^r üzerinde gerekli işlemler ve düzenlemeler yapıldıktan sonra (4.64) denklemi

$$\frac{\delta H_1^r}{\delta u} = c(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) + v_2^2 + v v_{22} - v_1 v_2 - v v_{12} \quad (4.65)$$

olarak sonuçlanır. Birinci Hamiltoniyen yoğunluğuna (4.34) v'ye göre olan varyasyonel türev operatörü ise

$$\frac{\delta H_1^r}{\delta v} = \frac{\partial H_1^r}{\partial v} \quad (4.66)$$

şeklinde uygulanır ve işlemin

$$\frac{\delta H_1^r}{\delta v} = v \Delta \quad (4.67)$$

olarak sonuçlanacağı kolaylıkla görülür.

(4.63) ifadesine göre

$$u_t^r = J_{0(11)}^r \delta_u H_1^r + J_{0(12)}^r \delta_v H_1^r \quad (4.68)$$

denklemi yazılır. J_0^r matrisinin (4.60) birinci satır elemanları ile (4.65) ve (4.67) denklemlerinin sonuçları (4.68) denkleminde yerleştirilince

$$u_t^r = \frac{1}{\Delta} \frac{\delta H_1^r}{\delta v} = \frac{1}{\Delta} v \Delta = v \quad (4.69)$$

elde edilmektedir. Benzer şekilde;

$$v_t^r = J_{0(21)}^r \delta_u H_1^r + J_{0(22)}^r \delta_v H_1^r \quad (4.70)$$

denklemi yazılır. J_0^r matrisinin (4.60) ikinci satır elemanları ile (4.65) ve (4.67) denklemlerinin sonuçları (4.70) denkleminde yerleştirilerek

$$v_t^r = \frac{1}{\Delta} [v_2^2 - v_1 v_2 + a(v_2 u_{11} - v_1 u_{12}) + b(v_1 u_{22} - v_2 u_{12}) + c(u_{11} u_{22} - u_{12}^2)] \quad (4.71)$$

bulunur. u_t^r (4.69) ve v_t^r (4.71) için bulunan ifadeler indirgenmiş sistem için tanımlanan ifadelerle (4.12) aynıdır. Bu durumda (4.63) sağlandığı için (2 + 1)-boyutlu sistemin Hamiltoniyen yapı oluşturduğu gösterilmiştir.

4.3 İndirgenmiş (2+1)-Boyutlu Sisteme ait Tekrarlama Operatörü

(3 + 1)-boyutlu sistemin simetri koşulu (3.29) Lie denklemi olarak yazılmıştı [26]. Benzer şekilde (2 + 1)-boyutlu sistem için simetri koşulu, tek bileşenli (4.10)

denkleminde yola çıkılarak

$$\begin{aligned}
& [u_{tt}D_2D_2 + u_{22}D_tD_t - u_{tt}D_1D_2 - u_{12}D_tD_t - u_{t2}D_2D_2 - u_{t2}D_tD_2 + u_{t1}D_tD_2 + u_{t2}D_tD_1 \\
& + a(u_{t1}D_1D_2 + u_{12}D_tD_1 - u_{t2}D_1D_1 - u_{11}D_tD_2) + b(u_{t2}D_1D_2 + u_{12}D_tD_2 - u_{t1}D_2D_2 - u_{22}D_tD_1) \\
& + c(u_{12}D_1D_2 + u_{12}D_1D_2 - u_{11}D_2D_2 - u_{22}D_1D_1)]u_\tau = 0
\end{aligned} \tag{4.72}$$

şeklinde elde edilir. $u_\tau = \varphi$ (2.84) olarak tanımlanmış olan Lie denklemi ve $L_{ij(k)} = u_{jk}D_i - u_{ik}D_j$ operatörü kullanılarak (4.72) daha kısa halde

$$\begin{aligned}
& [L_{2t(t)}D_2 + L_{t2(2)}D_t + L_{t1(t)}D_2 + L_{1t(2)}D_t + a(L_{21(t)}D_1 + L_{12(1)}D_t) \\
& + b(L_{12(t)}D_2 + L_{21(2)}D_t) + c(L_{12(1)}D_2 + L_{21(2)}D_1)]\varphi = 0
\end{aligned} \tag{4.73}$$

olarak yazılabilir. (4.73) denklemi, indirgeme ile edilmiş olan ve (4.19)'da

$$\begin{aligned}
A_1^r &= \frac{1}{\Delta}(L_{t2(2)} + L_{1t(2)}), & A_2^r &= -\frac{1}{\Delta}L_{12(2)}, \\
B_1^r &= \frac{1}{\Delta}[(c_4 - c_8)(L_{2t(1)} + L_{t2(2)}) + c(L_{12(1)} + L_{21(2)})], \\
B_2^r &= \frac{1}{\Delta}[a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + L_{2t(1)} + L_{t2(2)}]
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen operatörler kullanılarak $(A_1^rB_2^r - A_2^rB_1^r)\varphi = 0$ asimetric çarpanlar biçiminde yazılabilir. Bu durumda A_1^r, A_2^r, B_1^r ve B_2^r

$$[A_1^r, A_2^r] = 0, \quad [A_1^r, B_2^r] - [A_2^r, B_1^r] = 0, \quad [B_1^r, B_2^r] = 0 \tag{4.74}$$

komütatör bağıntılarını sağlamalıdır. İlgili komütatör bağıntılarının $(3 + 1)$ -boyutta sağlandığı bilinmektedir [26]. İndirgenmiş sistem için de aynı durum beklenir. Örnek olarak ilk komütatör bağıntısının sağlandığı şu şekilde gösterilebilir:

$$[A_1^r, A_2^r] = A_1^rA_2^r - A_2^rA_1^r \tag{4.75}$$

$$A_1^rA_2^r = \frac{1}{\Delta}(u_{22}D_t - u_{t2}D_2 + u_{t2}D_1 - u_{12}D_t)\frac{1}{\Delta}(u_{12}D_2 - u_{22}D_1) \tag{4.76}$$

$$A_2^rA_1^r = \frac{1}{\Delta}(u_{12}D_2 - u_{22}D_1)\frac{1}{\Delta}(u_{22}D_t - u_{t2}D_2 + u_{t2}D_1 - u_{12}D_t) \tag{4.77}$$

(4.76) ve (4.77) eşitlikleri (4.75) komütatör bağlantısında yerlerine konulup terimler sonlarındaki toplam türev operatörüne göre gruplandırıldığında

$$\begin{aligned}
[A_1^r, A_2^r] = & \left[\left(-\frac{u_{22}}{\Delta} D_t \frac{u_{22}}{\Delta} + \frac{u_{t2}}{\Delta} D_2 \frac{u_{22}}{\Delta} - \frac{u_{t2}}{\Delta} D_1 \frac{u_{22}}{\Delta} + \frac{u_{12}}{\Delta} D_t \frac{u_{22}}{\Delta} \right) - \left(\frac{u_{12}}{\Delta} D_2 \frac{u_{t2}}{\Delta} - \frac{u_{22}}{\Delta} D_1 \frac{u_{t2}}{\Delta} \right) \right] D_1 \\
& + \left[\left(\frac{u_{22}}{\Delta} D_t \frac{u_{12}}{\Delta} - \frac{u_{t2}}{\Delta} D_2 \frac{u_{12}}{\Delta} + \frac{u_{t2}}{\Delta} D_1 \frac{u_{12}}{\Delta} - \frac{u_{12}}{\Delta} D_t \frac{u_{12}}{\Delta} \right) - \left(-\frac{u_{12}}{\Delta} D_2 \frac{u_{t2}}{\Delta} + \frac{u_{22}}{\Delta} D_1 \frac{u_{t2}}{\Delta} \right) \right] D_2 \\
& - \left[\frac{u_{12}}{\Delta} D_2 \frac{u_{22}}{\Delta} - \frac{u_{12}}{\Delta} D_2 \frac{u_{12}}{\Delta} - \frac{u_{22}}{\Delta} D_1 \frac{u_{22}}{\Delta} + \frac{u_{22}}{\Delta} D_1 \frac{u_{12}}{\Delta} \right] D_t
\end{aligned} \tag{4.78}$$

elde edilir. Burada $\Delta = u_{22} - u_{12}$ olduğu hatırlanarak bir kaç işlemten sonra (4.78) denklemi

$$\begin{aligned}
[A_1^r, A_2^r] = & \frac{1}{\Delta^3} \{ [(u_{22}^2 u_{t22} - u_{22}^2 u_{t12} - u_{22}^2 u_{t22} + u_{22} u_{t22} u_{12} + u_{t2} u_{222} u_{22} - u_{t2} u_{222} u_{12} \\
& - u_{t2} u_{222} u_{22} + u_{t2} u_{122} u_{22} - u_{t2} u_{122} u_{22} + u_{t2} u_{122} u_{12} + u_{122} u_{22} u_{t2} - u_{112} u_{22} u_{t2} + u_{12} u_{t22} u_{22} \\
& - u_{12} u_{t22} u_{12} - u_{12} u_{t22} u_{22} + u_{12} u_{t12} u_{22}) - (u_{12} u_{t22} u_{22} - u_{12} u_{t22} u_{12} - u_{222} u_{12} u_{t2} + u_{12} u_{122} u_{t2} \\
& - u_{22} u_{t12} u_{22} + u_{22} u_{t12} u_{12} + u_{22} u_{t2} u_{122} - u_{22} u_{t2} u_{112})] D_1 \\
& + [(u_{22} u_{t12} u_{22} - u_{22} u_{t12} u_{12} - u_{22} u_{t22} u_{12} + u_{22} u_{t12} u_{12} - u_{t2} u_{122} u_{22} + u_{t2} u_{122} u_{12} + u_{t2} u_{222} u_{12} \\
& - u_{t2} u_{122} u_{12} + u_{t2} u_{112} u_{22} - u_{t2} u_{112} u_{12} - u_{t2} u_{122} u_{12} + u_{t2} u_{112} u_{12} - u_{12} u_{t12} u_{22} + u_{12} u_{t12} u_{12} \\
& + u_{12} u_{t22} u_{12} - u_{12} u_{t12} u_{12}) - (-u_{12} u_{t22} u_{22} + u_{12} u_{t22} u_{12} + u_{12} u_{t2} u_{222} - u_{12} u_{t2} u_{122} + u_{22} u_{t12} u_{22} \\
& - u_{22} u_{t12} u_{12} - u_{22} u_{t2} u_{122} + u_{22} u_{t2} u_{112})] D_2 \\
& - [u_{12} u_{222} u_{22} - u_{12} u_{222} u_{12} - u_{12} u_{222} u_{22} + u_{12} u_{122} u_{22} - u_{12} u_{122} u_{22} + u_{12} u_{122} u_{12} + u_{12} u_{12} u_{222} \\
& - u_{12} u_{12} u_{122} - u_{22} u_{122} u_{22} + u_{22} u_{122} u_{12} + u_{22} u_{22} u_{122} - u_{22} u_{22} u_{112} + u_{22} u_{112} u_{22} - u_{22} u_{112} u_{12} \\
& - u_{22} u_{122} u_{12} + u_{22} u_{112} u_{12}] D_t \} = 0
\end{aligned} \tag{4.79}$$

şeklini alır. (4.79) denklemi incelendiğinde D_1 , D_2 ve D_t önlerindeki terimlerin hepsinin sadeleştiği görülür. Böylece $[A_1^r, A_2^r] = 0$ komütatör bağıntısı sağlanır.

Simetri koşulunun asimetrik çarpanlar biçimde yazılabilmesi sayesinde

$$A_1^r \tilde{\varphi} = B_1^r \varphi, \quad A_2^r \tilde{\varphi} = B_2^r \varphi \tag{4.80}$$

tekrarlama bağıntıları ortaya çıkar. Burada φ simetriyse $\tilde{\varphi}$ da simetri olmalıdır. Tersisi durum da geçerlidir [26]. A_1^r ve B_1^r (4.19) operatörleri $A_1^r \tilde{\varphi} = B_1^r \varphi$ bağıntısında yazılıp her iki tarafta ortak olan $1/\Delta$ katsayısı sadeleştirildiğinde

$$(L_{t2(2)} + L_{1t(2)}) \tilde{\varphi} = [(c_4 - c_8)(L_{2t(1)} + L_{t2(2)}) + c(L_{12(1)} + L_{21(2)})] \varphi \tag{4.81}$$

elde edilir. Bu denklem daha açık halde

$$(u_{22}D_t - u_{t2}D_2 + u_{t2}D_1 - u_{12}D_t)\tilde{\varphi} = [(c_4 - c_8)(u_{t1}D_2 - u_{12}D_t + u_{22}D_t - u_{t2}D_2) + c(L_{12(1)} + L_{21(2)})]\varphi \quad (4.82)$$

olarak da yazılabilir. $u_t = v$ tanımlaması dikkate alınarak (2.84) ifadesine göre φ ile ψ arasında

$$\varphi_t = \psi \quad (4.83)$$

bağıntısı kurulur. Buna göre, $u_t = v$ ve $D_t\varphi = \psi$ bağıntıları göz önünde bulundurularak (4.82) denklemi

$$\Delta\tilde{\psi} + v_2(D_1 - D_2)\tilde{\varphi} = (c_4 - c_8)[\Delta\psi + (v_1 - v_2)D_2\varphi] + c(L_{12(1)} + L_{21(2)})\varphi \quad (4.84)$$

şeklini alır ve (4.84) denklemi $\tilde{\psi}$ için şu şekilde çözülür:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\Delta}[(c_4 - c_8)(v_1 - v_2)D_2\varphi + c(L_{12(1)} + L_{21(2)})\varphi + v_2(D_2 - D_1)\tilde{\varphi}] + (c_4 - c_8)\psi. \quad (4.85)$$

Benzer şekilde A_2^r ve B_2^r (4.19) operatörleri $A_2^r\tilde{\varphi} = B_2^r\varphi$ bağıntısında kullanılıp ortak terim sadeleştirilerek

$$L_{21(2)}\tilde{\varphi} = [a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + L_{2t(1)} + L_{t2(2)}]\varphi \quad (4.86)$$

yazılır. Bu denklem daha açık halde

$$L_{21(2)}\tilde{\varphi} = [a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + u_{t1}D_2 - u_{12}D_t + u_{22}D_t - u_{t2}D_1]\varphi \quad (4.87)$$

şeklinde yazılarak (4.87) denkleminde $u_t = v$ ve $D_t\varphi = \psi$ tanımlamaları kullanılıp

$$L_{21(2)}\tilde{\varphi} = a(L_{12(1)} + L_{21(2)})\varphi + \Delta\psi + (v_1 - v_2)D_2\varphi \quad (4.88)$$

elde edilir. (4.88), $\tilde{\varphi}$ için şu şekilde çözülür:

$$\tilde{\varphi} = L_{21(2)}^{-1}[a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + (v_1 - v_2)D_2]\varphi + L_{21(2)}^{-1}\Delta\psi. \quad (4.89)$$

(4.89) denklemi (4.85) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & \frac{1}{\Delta}\{(c_4 - c_8)(v_1 - v_2)D_2\varphi + c(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + av_2(D_2 - D_1)L_{21(2)}^{-1}(L_{12(1)} + L_{21(2)})\varphi \\ & + v_2(D_2 - D_1)L_{21(2)}^{-1}[(v_1 - v_2)D_2\varphi + \Delta\psi]\} + (c_4 - c_8)\psi \end{aligned} \quad (4.90)$$

elde edilir. φ ve ψ içeren terimler ayrılarak bu denklem

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & \frac{1}{\Delta} \{ (c_4 - c_8)(v_1 - v_2)D_2 + c(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + v_2(D_2 - D_1)L_{21(2)}^{-1} [a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) \\ & + (v_1 - v_2)D_2] \} \varphi + \left[\frac{v_2}{\Delta} (D_2 - D_1)L_{21(2)}^{-1} \Delta + c_4 - c_8 \right] \psi \end{aligned} \quad (4.91)$$

biçiminde yazılır. (4.89) ve (4.91) denklemleri birlikte

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = R^r \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

şeklindeki matris formunda yazılabilir ve $(2 + 1)$ -boyutlu sisteme ait tekrarlama operatörünün

$$R^r = \begin{pmatrix} L_{21(2)}^{-1} [a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + (v_1 - v_2)D_2] & L_{21(2)}^{-1} \Delta \\ R_{21}^r & \frac{v_2}{\Delta} (D_2 - D_1)L_{21(2)}^{-1} \Delta + c_4 - c_8 \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} R_{21}^r = & \frac{1}{\Delta} \{ (c_4 - c_8)(v_1 - v_2)D_2 + c(L_{12(1)} + L_{21(2)}) \\ & + v_2(D_2 - D_1)L_{21(2)}^{-1} [a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + (v_1 - v_2)D_2] \} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu şekilde elde edilen R^r (4.93) ile doğrudan indirgenerek elde edilen R^r (4.20) birbiriyle uyumludur.

4.4 İndirgenmiş $(2+1)$ -Boyutlu Sisteme ait İkinci Hamilton Operatörü

Tekrarlama operatörünün bulunması (2.68) denklemine göre ikinci Hamilton operatörüne geçişi sağlar. Buna göre, indirgenmiş sistem için

$$J_1^r = R^r J_0^r \quad (4.94)$$

matris denklemi

$$J_1^r = \begin{pmatrix} R_{11}^r & L_{21(2)}^{-1} \Delta \\ R_{21}^r & \frac{v_2}{\Delta} (D_2 - D_1)L_{21(2)}^{-1} \Delta + c_4 - c_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{1}{\Delta} & J_{0(22)}^r \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

olarak yazılır. İşlemler sırasında $L_{ij(k)} = u_{jk}D_i - u_{ik}D_j$ olarak tanımlanan operatörün

$$\begin{aligned} L_{ij(k)} &= -L_{ji(k)} \\ L_{ij(k)}^{-1} L_{ij(k)} &= 1 \end{aligned} \quad (4.96)$$

özelliklerini kullanmak kolaylık sağlar. (4.95) matris çarpımında

$$J_{1(11)}^r = 0 - L_{21(2)}^{-1} \Delta \frac{1}{\Delta} = L_{12(2)}^{-1} \quad (4.97)$$

sonucu kolayca bulunur.

$$\begin{aligned} J_{1(12)}^r &= L_{21(2)}^{-1} [a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + (v_1 - v_2)D_2] \frac{1}{\Delta} \\ &+ L_{21(2)}^{-1} \Delta \frac{1}{\Delta} (v_{22} + 2v_2D_2 - v_{12} - v_2D_1 - v_1D_2 + aL_{21(1)} + bL_{12(2)}) \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \quad (4.98)$$

denkleminde (4.96) özelliklerinden yararlanılarak yapılan işlemler sonucunda

$$J_{1(12)}^r = [c_4 - c_8 + L_{21(2)}^{-1} (D_2 - D_1)v_2] \frac{1}{\Delta} \quad (4.99)$$

bulunur. $J_{1(21)}^r$ için yazılan

$$J_{1(21)}^r = 0 + \left[\frac{v_2}{\Delta} (D_2 - D_1) L_{21(2)}^{-1} \Delta + c_4 - c_8 \right] \left(-\frac{1}{\Delta} \right) \quad (4.100)$$

işleminin sonucunda

$$J_{1(21)}^r = \frac{1}{\Delta} [v_2(D_1 - D_2) L_{21(2)}^{-1} + c_8 - c_4] \quad (4.101)$$

bulunur. (4.99) ve (4.101) karşılaştırması J_1^r matrisinin ters simetrik olduğuna işaret eder. En çok terim barındıran $J_{1(22)}^r$ elemanı için yazılan

$$\begin{aligned} J_{1(22)}^r &= \frac{1}{\Delta} \{ (c_4 - c_8)(v_1 - v_2)D_2 + c(L_{12(1)} + L_{21(2)}) \\ &+ v_2(D_2 - D_1) L_{21(2)}^{-1} [a(L_{12(1)} + L_{21(2)}) + (v_1 - v_2)D_2] \} \frac{1}{\Delta} \\ &+ \left[\frac{v_2}{\Delta} (D_2 - D_1) L_{21(2)}^{-1} \Delta + c_4 - c_8 \right] \frac{1}{\Delta} (v_{22} + 2v_2D_2 - v_{12} - v_2D_1 - v_1D_2 \\ &+ aL_{21(1)} + bL_{12(2)}) \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \quad (4.102)$$

eşitliğinde (4.96) özelliklerinden yararlanılarak yapılan işlemler sonucunda

$$\begin{aligned}
J_{1(22)}^r &= \frac{c_4 - c_8}{\Delta} [v_2(D_2 - D_1) + (D_2 - D_1)v_2 - c_4 L_{12(2)} + c_5(L_{21(1)} + L_{12(2)}) - c_8 L_{21(1)}] \frac{1}{\Delta} \\
&+ \frac{1}{\Delta} [c_9(L_{21(1)} + L_{12(2)}) + c_{10}(L_{12(1)} + L_{21(2)})] \frac{1}{\Delta} \\
&+ \frac{v_2}{\Delta} (D_2 - D_1) L_{21(2)}^{-1} (D_2 - D_1) v_2 \frac{1}{\Delta}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

bulunur ve bu sonuçlar ile elde edilen matris

$$J_1^r = \begin{pmatrix} L_{12(2)}^{-1} & -\{L_{12(2)}^{-1}(D_2 - D_1)v_2 + c_8 - c_4\} \frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} \{v_2(D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1} + c_8 - c_4\} & J_{1(22)}^r \end{pmatrix} \tag{4.104}$$

şeklinde olur.

J_1^r için bulunan (4.97), (4.99), (4.101) ve (4.103) elemanlarına bakılarak matrisin ters simetrik özellikte olduğu anlaşılır. Ayrıca bu şekilde elde edilen J_1^r matrisi $(3+1)$ -boyuttan $(2+1)$ -boyuta doğrudan simetri indirgemesi yapılarak bulunan J_1^r (4.21) ile aynıdır.

4.5 Jacobi Özdeşliği

Hamilton operatörleri J_0^r ve J_1^r ters simetrik ve ayrı ayrı Jacobi özdeşliğini sağlamalıdır. Ayrıca α ve β sabit olmak üzere iki operatörün

$$\Gamma^r = \alpha J_0^r + \beta J_1^r \tag{4.105}$$

şeklinde doğrusal birleşimi olan Γ^r operatörü de Jacobi özdeşliğini sağlamalıdır. $(3+1)$ -boyutlu sistem için Jacobi özdeşliğinin sağlandığı bilinmektedir [26]. İndirgenmiş sistem için de bu özelliğin sağlanması beklenmektedir fakat Γ^r matrisi için bu hesaplamalar yapıldığında $J_{1(22)}^r$ elemanı nedeniyle tez içeriğine dahil edilemeyecek kadar fazla sayıda terim gelmektedir. Bu nedenle Γ^r yerine üzerinde çalışılması nispeten daha elverişli olan J_0^r için bu özellik gösterilecektir. J_1^r için benzer işlemlerle yeterince uzun çalışılarak bu özellik J_0^r ve Γ^r için de gösterilebilir. Θ ikili vektör olmak üzere (2.75)'de verilen Olver teoremine göre

$$PrV_{J_0^r \omega}(\Theta) = 0 \tag{4.106}$$

koşulunda J_0^r için Jacobi özdeşliği sağlanır. (2.76)'da verilen ikili vektör tanımlamasına göre J_0^r operatörü için ikili vektör

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \int (\omega \wedge J_0^r \omega) dz_1 dz_2 \quad (4.107)$$

olarak ifade edilir. (4.107)'de $\omega^1 = \eta$ ve $\omega^2 = \theta$ olarak alınarak birinci Hamilton operatörüne ait ikili vektör denklemi

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \int [(\eta \wedge J_{0(11)}^r \eta) + (\eta \wedge J_{0(12)}^r \theta) + (\theta \wedge J_{0(21)}^r \eta) + (\theta \wedge J_{0(22)}^r \theta)] dz_1 dz_2 \quad (4.108)$$

şeklinde yazılır. (4.108) denkleminin sağ tarafındaki üçüncü terim

$$\theta \wedge J_{0(21)}^r \eta = -\eta \wedge J_{0(21)}^r \theta = \eta \wedge J_{0(12)} \theta \quad (4.109)$$

eşitliğine göre yeniden yazılabilir.

(4.108) denkleminin sağ tarafındaki son terim

$$\theta \wedge J_{0(22)}^r \theta = \theta \wedge \left[\frac{1}{\Delta^2} (AD_1 + BD_2) + C \right] \theta \quad (4.110)$$

şeklinde yazıldığında işlemlerde kolaylık sağlanır. $J_{0(22)}$ (4.61) için A, B, C katsayıları

$$A = bu_{22} - au_{12} - v_2, \quad B = au_{11} - bu_{12} + 2v_2 - v_1, \quad C = \frac{1}{\Delta} \left[A \left(\frac{1}{\Delta} \right)_1 + B \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 + \frac{v_{22} - v_{12}}{\Delta} \right] \quad (4.111)$$

olarak belirlenmiştir. (4.109) ve (4.110) kullanılarak (4.108) denklemi

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \int \left\{ \eta \wedge J_{0(11)}^r \eta + 2\eta \wedge J_{0(12)}^r \theta + \theta \wedge \left[\frac{1}{\Delta^2} (AD_1 + BD_2) + C \right] \theta \right\} dz_1 dz_2 \quad (4.112)$$

haline getirilir ($\theta \wedge \theta = 0$). (4.112) denkleminde $J_{0(11)}^r = 0$ ve $J_{0(12)}^r = 1/\Delta$ elemanları kullanılarak

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \int \left(2\eta \wedge \frac{\theta}{\Delta} + \theta \wedge \frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \theta \wedge \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 \right) dz_1 dz_2 \quad (4.113)$$

yazılır. Bu denklem A ve B katsayılarının (4.111) açık halleriyle

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \int \left[2\eta \wedge \frac{\theta}{\Delta} + \theta \wedge \frac{1}{\Delta^2} (bu_{22} - au_{12} - v_2) \theta_1 + \theta \wedge \frac{1}{\Delta^2} (au_{11} - bu_{12} + 2v_2 - v_1) \theta_2 \right] dz_1 dz_2 \quad (4.114)$$

olarak yazılır. (4.106) Jacobi özdeşliğinin sağlandığını görmek amacıyla

$$\begin{aligned}
PrV_{J_0^r\omega}(\Theta) &= \frac{1}{2} \int \int \left\{ 2\eta \wedge PrV_{J_0^r\omega}\left(\frac{1}{\Delta}\right) \wedge \theta + \theta \wedge AprV_{J_0^r\omega}\left(\frac{1}{\Delta^2}\right) \wedge \theta_1 \right. \\
&+ \theta \wedge \frac{1}{\Delta^2} [bPrV_{J_0^r\omega}(u_{22}) - aPrV_{J_0^r\omega}(u_{12}) - PrV_{J_0^r\omega}(v_2)] \wedge \theta_1 + \theta \wedge BPrV_{J_0^r\omega}\left(\frac{1}{\Delta^2}\right) \wedge \theta_2 \\
&+ \left. \theta \wedge \frac{1}{\Delta^2} [aPrV_{J_0^r\omega}(u_{11}) - bPrV_{J_0^r\omega}(u_{12}) + 2PrV_{J_0^r\omega}(v_2) - PrV_{J_0^r\omega}(v_1)] \wedge \theta_2 \right\} dz_1 dz_2
\end{aligned} \tag{4.115}$$

denklemini kurulum. (4.115) denkleminde $J_0^r\omega$ karakteristiğine sahip olan $PrV_{J_0^r\omega}$, (4.114) Θ ikili-vektör ifadesinde bulunan her değişkene ayrı ayrı etki etmiştir. Bu değişkenlere ait genişletilmiş evrimsel vektör alanı ifadeleri (2.77) formülüne göre

$$\begin{aligned}
PrV_{J_0^r\omega}(u_{11}) &= D_1^2\left(\frac{\theta}{\Delta}\right), \quad PrV_{J_0^r\omega}(u_{12}) = D_1D_2\left(\frac{\theta}{\Delta}\right), \\
PrV_{J_0^r\omega}(u_{22}) &= D_1D_2\left(\frac{\theta}{\Delta}\right), \\
PrV_{J_0^r\omega}(v_1) &= D_1\left(-\frac{1}{\Delta}\eta + \frac{1}{\Delta^2}A\theta_1 + \frac{1}{\Delta^2}B\theta_2 + C\theta\right), \\
PrV_{J_0^r\omega}(v_2) &= D_2\left(-\frac{1}{\Delta}\eta + \frac{1}{\Delta^2}A\theta_1 + \frac{1}{\Delta^2}B\theta_2 + C\theta\right), \\
PrV_{J_0^r\omega}\left(\frac{1}{\Delta}\right) &= -\frac{1}{\Delta^2}PrV_{J_0^r\omega}(\Delta) = \frac{1}{\Delta^2}(D_1D_2 - D_2D_1)\left(\frac{\theta}{\Delta}\right), \\
PrV_{J_0^r\omega}\left(\frac{1}{\Delta^2}\right) &= -\frac{2}{\Delta^3}PrV_{J_0^r\omega}(\Delta) = \frac{2}{\Delta^3}(D_1D_2 - D_2D_1)\left(\frac{\theta}{\Delta}\right)
\end{aligned} \tag{4.116}$$

olarak bulunur. Elde edilen sonuçlar (4.115) denkleminde yerleştirilerek

$$\begin{aligned}
PrV_{J_0^r\omega}(\Theta) &= \frac{1}{2} \int \int \left\{ 2\eta \wedge \frac{1}{\Delta^2}(D_1D_2 - D_2D_1)\left(\frac{\theta}{\Delta}\right) \wedge \theta + \theta \wedge \frac{2A}{\Delta^3}(D_1D_2 - D_2D_1)\left(\frac{\theta}{\Delta}\right) \wedge \theta_1 \right. \\
&+ \theta \wedge \frac{1}{\Delta^2} \left[bD_2D_2\left(\frac{\theta}{\Delta}\right) - aD_1D_2\left(\frac{\theta}{\Delta}\right) - D_2\left(-\frac{\eta}{\Delta} + A\frac{\theta_1}{\Delta^2} + B\frac{\theta_2}{\Delta^2} + C\theta\right) \right] \wedge \theta_1 \\
&+ \theta \wedge \frac{2B}{\Delta^3}(D_1D_2 - D_2D_1)\left(\frac{\theta}{\Delta}\right) \wedge \theta_2 + \theta \wedge \frac{1}{\Delta^2} \left[aD_1D_1\left(\frac{\theta}{\Delta}\right) - bD_1D_2\left(\frac{\theta}{\Delta}\right) \right. \\
&+ \left. \left. 2D_2\left(-\frac{\eta}{\Delta} + A\frac{\theta_1}{\Delta^2} + B\frac{\theta_2}{\Delta^2} + C\theta\right) - D_1\left(-\frac{\eta}{\Delta} + A\frac{\theta_1}{\Delta^2} + B\frac{\theta_2}{\Delta^2} + C\theta\right) \right] \wedge \theta_2 \right\} dz_1 dz_2
\end{aligned} \tag{4.117}$$

bulunur. Bu denklemini çözmek için η içeren terimler ile η içermeyen terimler ayrı ayrı ele alınacaktır. (4.117) denkleminin η içeren kısmı için kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
PrV_{J_0^r\omega}(\Theta)_{(\eta,\theta)} = & \frac{1}{2} \int \int \left\{ \frac{2}{\Delta^2} \eta \wedge \left(\frac{\theta_1}{\Delta} - \frac{\theta \Delta_1}{\Delta^2} \right)_2 \wedge \theta - \frac{2}{\Delta^2} \eta \wedge \left(\frac{\theta_2}{\Delta} - \frac{\theta \Delta_2}{\Delta^2} \right)_2 \wedge \theta \right. \\
& + D_2 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_1 \right] - \left(\frac{\theta}{\Delta^2} \right)_2 \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_1 - \frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_{12} - D_2 \left[\frac{2\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_2 \right] \\
& + 2 \left(\frac{\theta}{\Delta^2} \right)_2 \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_2 + 2 \frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_{22} + D_1 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_2 \right] - \left(\frac{\theta}{\Delta^2} \right)_1 \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_2 \\
& \left. - \frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_{12} \right\} dz_1 dz_2 = 0
\end{aligned}
\tag{4.118}$$

bulunur. (4.118) içerisindeki toplam türev olan terimler

$$\frac{1}{2} \int \int \left\{ D_2 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_1 \right] - D_2 \left[\frac{2\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_2 \right] + D_1 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \frac{\eta}{\Delta} \wedge \theta_2 \right] \right\} dx dy = 0
\tag{4.119}$$

şeklinde. İntegral altında ikili-vektör ve genişletilmiş evrimsel vektör alanları içerisinde bulunan toplam türev terimlerinin sıfır olduğu bilinmektedir (mod tot div) [43]. Kalan terimler de

$$\begin{aligned}
PrV_{J_0^r\omega}(\Theta)_{(\eta,\theta)} = & \frac{1}{2} \int \int \left\{ \frac{2}{\Delta^2} \eta \wedge \left[\frac{\theta_{12}}{\Delta} - \frac{\theta_1 \Delta_2}{\Delta^2} - \frac{\theta_2 \Delta_1}{\Delta^2} + \theta \left(\frac{1}{\Delta} \right)_{12} \right] \wedge \theta \right. \\
& - \frac{2}{\Delta^2} \eta \wedge \left[\frac{\theta_{22}}{\Delta} - \frac{\theta_2 \Delta_2}{\Delta^2} - \frac{\theta_2 \Delta_2}{\Delta^2} + \theta \left(\frac{1}{\Delta} \right)_{22} \right] \wedge \theta - \frac{\theta_2}{\Delta^3} \wedge \eta \wedge \theta_1 + \frac{2\Delta_2}{\Delta^4} \theta \wedge \eta \wedge \theta_1 \\
& - \frac{\theta}{\Delta^3} \wedge \eta \wedge \theta_{12} - \frac{4\Delta_2}{\Delta^4} \theta \wedge \eta \wedge \theta_2 + \frac{2\theta}{\Delta^3} \wedge \eta \wedge \theta_{22} - \frac{\theta_1}{\Delta^3} \wedge \eta \wedge \theta_2 + \frac{2\Delta_1}{\Delta^4} \theta \wedge \eta \wedge \theta_2 \\
& \left. - \frac{\theta}{\Delta^3} \wedge \eta \wedge \theta_{12} \right\} dz_1 dz_2 = 0
\end{aligned}
\tag{4.120}$$

şeklinde düzenlenip tüm terimlerin kendi aralarında sadeleştiği tespit edilerek denklem sıfıra eşitlenir. (4.117) denkleminin sadece θ içeren terimleri için kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
PrV_{J_0^r \omega} \Theta_{(\theta)} = & \frac{1}{2} \int \int \left\{ \frac{2A}{\Delta^3} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{12} \theta + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 \theta_1 + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_1 \theta_2 + \frac{\theta_{12}}{\Delta} \right] \wedge \theta_1 \right. \\
& - \frac{2A}{\Delta^3} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{22} \theta + 2 \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 \theta_2 + \frac{\theta_{22}}{\Delta} \right] \wedge \theta_1 + \frac{b}{\Delta^2} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{22} \theta + 2 \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 \theta_2 + \frac{\theta_{22}}{\Delta} \right] \wedge \theta_1 \\
& - \frac{a}{\Delta^2} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{12} \theta + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 \theta_1 + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_1 \theta_2 + \frac{\theta_{12}}{\Delta} \right] \wedge \theta_1 - D_2 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_1 \right] \\
& + \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)_2 \theta \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_1 + \frac{\theta_2}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_1 \\
& + \frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_{12} + \frac{2B}{\Delta^3} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{12} \theta + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 \theta_1 + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_1 \theta_2 + \frac{\theta_{12}}{\Delta} \right] \wedge \theta_2 \\
& - \frac{2B}{\Delta^3} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{22} \theta + 2 \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 \theta_2 + \frac{\theta_{22}}{\Delta} \right] \wedge \theta_2 + \frac{a}{\Delta^2} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{11} \theta + 2 \left(\frac{1}{\Delta} \right)_1 \theta_1 + \frac{\theta_{11}}{\Delta} \right] \wedge \theta_2 \\
& - \frac{b}{\Delta^2} \theta \wedge \left[\left(\frac{1}{\Delta} \right)_{12} \theta + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_2 \theta_1 + \left(\frac{1}{\Delta} \right)_1 \theta_2 + \frac{\theta_{12}}{\Delta} \right] \wedge \theta_2 + D_2 \left[\frac{2\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 \right] \\
& - 2 \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)_2 \theta \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 - \frac{2}{\Delta^2} \theta_2 \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 \\
& - \frac{2\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_{22} - D_1 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 \right] \\
& + \frac{\theta_1}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 + \theta \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)_1 \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 \\
& \left. + \frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_{12} \right\} dz_1 dz_2 = 0
\end{aligned}
\tag{4.121}$$

bulunur. Gerekli terimlere integrasyonlar uygulanarak (4.121) denklemi toplam türevler olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \int \int \left\{ -D_2 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_1 \right] + D_2 \left[\frac{2\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 \right] \right. \\
& \left. - D_1 \left[\frac{\theta}{\Delta^2} \wedge \left(\frac{A}{\Delta^2} \theta_1 + \frac{B}{\Delta^2} \theta_2 + C \theta \right) \wedge \theta_2 \right] \right\} dz_1 dz_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.122}$$

Toplam türevler integre edilince tüm terimler sınır değerlerinde sıfır olur. (4.115) ve (4.121) sıfır bulunduğu için bu iki denklemin oluşturduğu (4.106) denkleminin sonucu da sıfırdır. Böylece, J_0^r karakteristiğine göre genişletilmiş evrimsel vektör alanının sıfır olduğu bulunmuş olup Olver teoremine göre Jacobi özdeşliğinin (2.28d) J_0^r için sağlandığı gösterilmiştir [28].

4.6 Magri Teoremi ve İndirgenmiş (2+1)-Boyutlu Sistemin İkili-Hamiltoniyen Yapısı

Elde edilen $u_t^r, v_t^r, J_0^r, J_1^r, H_1^r$ ve H_0^r iki bileşenli evrimsel sistemlerde ikili-Hamiltoniyen yapıyı oluşturan (2.72) ifadesine göre yazılan

$$\begin{pmatrix} u_t^r \\ v_t^r \end{pmatrix} = J_0^r \begin{pmatrix} \delta_u H_1^r \\ \delta_v H_1^r \end{pmatrix} = J_1^r \begin{pmatrix} \delta_u H_0^r \\ \delta_v H_0^r \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

denklemini sağlıyorsa Magri teoremine göre ikili-Hamiltoniyen integre edilebilir sistemdir [8]. 4.2 alt bölümünde (4.123) denkleminin sol ve orta tarafı olan (4.63) denkleminin sağlandığı gösterilmiş ve (2 + 1)- boyutlu yeni sistemin Hamiltoniyen yapıya sahip olduğu anlaşılmıştı. Buna göre (4.123) denkleminin sol ve sağ tarafı olan

$$\begin{pmatrix} u_t^r \\ v_t^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{12(2)}^{-1} & -\{L_{12(2)}^{-1}(D_2 - D_1)v_2 + c_8 - c_4\}\frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta}\{v_2(D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1} + c_8 - c_4\} & J_{1(22)}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_u H_0^r \\ \delta_v H_0^r \end{pmatrix} \quad (4.124)$$

denkleminin sağlanması halinde sistemin ikili-Hamiltoniyen yapıya sahip olduğu anlaşılır. (3 + 1)-boyuttan indirgenerek bulunan ikinci Hamiltoniyen yoğunluğunun (H_0^r) (4.22) u 'ya göre varyasyonel türevi

$$\frac{\delta H_0^r}{\delta u} = -\partial_1 \frac{\partial H_0^r}{\partial u_1} + \partial_1 \partial_2 \frac{\partial H_0^r}{\partial u_{12}} + \partial_2^2 \frac{\partial H_0^r}{\partial u_{22}} \quad (4.125)$$

ile bulunur.

(4.22) burada yerine konularak yazılan

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_0^r}{\delta u} = & -\partial_1 \left\{ -k \frac{c_9}{c_8} v \Delta - k \frac{c_9}{c_8} (c_4 - c_8) u_1 \Delta \right\} + \partial_1 \partial_2 \left\{ k \frac{v^2}{2} + k \frac{c_9}{2c_8} [2u_1 v + (c_4 - c_8) u_1^2] \right\} \\ & + \partial_2^2 \left\{ -k \frac{v^2}{2} - k \frac{c_9}{2c_8} [2u_1 v + (c_4 - c_8) u_1^2] \right\} \end{aligned} \quad (4.126)$$

denklemini $L_{ij(k)}$ operatörü ile

$$\frac{\delta H_0^r}{\delta u} = k \frac{c_9}{c_8} \{ L_{12(2)}[v] + (c_4 - c_8) L_{12(2)}[u_1] - (D_2 - D_1) v_2 u_1 \} + k (D_1 - D_2) v_2 v \quad (4.127)$$

halini alır. İkinci Hamiltoniyen yoğunluğunun (4.22) v 'ye göre varyasyonel türevi

$$\frac{\delta H_0^r}{\delta v} = \frac{\partial H_0^r}{\partial v} \quad (4.128)$$

denklemini ile bulunur. (4.22) burada yerine konularak

$$\frac{\delta H_0^r}{\delta v} = -kv\Delta - k\frac{c_9}{c_8}u_1\Delta \quad (4.129)$$

elde edilir. (4.124) matris denkleminde göre u_t^r için

$$u_t^r = L_{12(2)}^{-1} \frac{\delta H_0^r}{\delta u} - [L_{12(2)}^{-1}(D_2 - D_1)v_2 + c_8 - c_4] \frac{1}{\Delta} \frac{\delta H_0^r}{\delta v} \quad (4.130)$$

denklemini yazılır. (4.127) ve (4.129) bu denkleme yerleştirilip $L_{ij(k)}$ ile ilgili özellik (4.96) kullanıldığında, sadeleştirmelerin ardından

$$u_t^r = vk \left(\frac{c_9}{c_8} + c_8 - c_4 \right) \quad (4.131)$$

elde edilir. H_0^r (4.22) için tanımlanan k sabiti ifadesine göre

$$\frac{1}{k} = \frac{c_9}{c_8} + c_8 - c_4 \quad (4.132)$$

olarak yazılan denklem (4.131) denkleminde kullanıldığında nihai olarak

$$u_t^r = v \quad (4.133)$$

elde edilir. Bu denklem iki bileşenli $(2 + 1)$ -boyutlu sistemdeki (4.12) u_t^r ifadesi ile aynıdır.

(4.124) matris denkleminde göre v_t^r için

$$\begin{aligned} v_t^r = & \frac{1}{\Delta} [v_2(D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1} + c_8 - c_4] \left\{ k\frac{c_9}{c_8} \{ L_{12(2)}[v] + (c_4 - c_8)L_{12(2)}[u_1] - (D_2 - D_1)v_2u_1 \} \right. \\ & + k(D_1 - D_2)v_2v \} + \left\{ \frac{1}{\Delta} [c_9(L_{21(1)} + L_{12(2)}) + c_{10}(L_{21(2)} + L_{12(1)})] \frac{1}{\Delta} \right. \\ & - \frac{v_2}{\Delta} (D_2 - D_1)L_{12(2)}^{-1}(D_2 - D_1) \frac{v_2}{\Delta} + \frac{c_4 - c_8}{\Delta} [(D_2 - D_1)v_2 + v_2(D_2 - D_1) - c_4L_{12(2)} \\ & \left. - c_5(L_{21(2)} + L_{12(1)}) - c_8L_{21(1)}] \frac{1}{\Delta} \right\} \left[-kv\Delta - k\frac{c_9}{c_8}u_1\Delta \right] \end{aligned} \quad (4.134)$$

denklemini yazılır. Bu denklemi iki bileşenli $(2 + 1)$ -boyutlu sistemdeki (4.12) v_t^r ifadesi ile karşılaştırmak için sadece v içeren terimler, sadece u içeren terimler, hem u hem v içeren terimler ayrı ayrı gruplandırılır. (4.134) denkleminde sadece v içeren terimler

$$v_t(v) = \frac{k}{\Delta} \left(\frac{c_9}{c_8} + c_8 - c_4 \right) (v_2^2 - v_1v_2) \quad (4.135)$$

olarak bulunmuştur.

(4.132) kullanılarak

$$v_t(v) = \frac{v_2^2 - v_1 v_2}{\Delta} \quad (4.136)$$

elde edilir. (4.134) denkleminde sadece u içeren terimler

$$v_t(u) = \frac{k}{\Delta} \left[-\frac{c_9}{c_8} (c_8 - c_4)^2 - \frac{c_9^2}{c_8} + \frac{c_{10} c_9}{c_8} - \frac{c_4 c_9 (c_8 - c_4)}{c_8} + \frac{(c_8 - c_4)}{c_8} \frac{c_5 c_9}{c_8 c_{10}} \right] (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \quad (4.137)$$

olarak bulunmuştur. Bu denklem H_0^r için tanımlanan $c_5 c_9 = c_8 c_{10}$ koşulu ve (4.132) kullanılarak

$$v_t(u) = \frac{1}{\Delta} (c_{10} - c_9) (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \quad (4.138)$$

haline getirilir. (4.134) denkleminde hem u hem v içeren terimler

$$\begin{aligned} v_t(u, v) = & \frac{k}{\Delta} \left[c_5 \left(\frac{c_9}{c_8} + c_8 - c_4 \right) - c_8 \left(\frac{c_9}{c_8} + c_8 - c_4 \right) \right] (v_2 u_{11} - v_1 u_{12}) \\ & + \frac{k}{\Delta} \left[c_5 \left(\frac{c_9}{c_8} + c_8 - c_4 \right) - c_4 \left(\frac{c_9}{c_8} + c_8 - c_4 \right) \right] (v_1 u_{22} - v_2 u_{12}) \end{aligned} \quad (4.139)$$

olarak bulunmuştur. Burada da (4.132) kullanılarak (4.139) denklemini

$$v_t(u, v) = \frac{1}{\Delta} [(c_5 - c_8)(v_2 u_{11} - v_1 u_{12}) + (c_5 - c_4)(v_1 u_{22} - v_2 u_{12})] \quad (4.140)$$

haline getirilir.

(4.136), (4.138) ve (4.140) denklemlerinin toplamı

$$v_t = \frac{1}{\Delta} [v_2^2 - v_1 v_2 + (c_{10} - c_9)(u_{11} u_{22} - u_{12}^2) + (c_5 - c_8)(v_2 u_{11} - v_1 u_{12}) + (c_5 - c_4)(v_1 u_{22} - v_2 u_{12})] \quad (4.141)$$

olarak elde edilir. (4.141) ile $(2 + 1)$ -boyutlu sistemin iki bileşenli gösterimindeki (4.12) v_t^r denklemlerinin aynı olduğu görülmektedir. Bu sonuçlara göre (4.123) matris denklemini sağlanmaktadır. Böylece, üzerinde çalıştığımız yeni $(2 + 1)$ -boyutlu sistemin Magri teoremine göre ikili-Hamiltoniyen integre edilebilir sistem olduğu sonucuna varılır.

4.7 Simetriler, Noether Teoremi ve Hareket Sabitleri

Bu kısımda (4.12)'de ifade edilen $(2 + 1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen sistemin simetrileri bulunarak bu sisteme ait hareket sabitleri elde edilecektir. Bu hareket sabitleri sistemin yeni korunan büyüklüklerine karşılık gelir.

(4.12)'de verilen sistemin simetrilerinin hesaplanması için REDUCE programında LIEPDE paketi kullanılarak

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial_2, & X_2 &= u\partial_u + v\partial_v, \\
X_3 &= (ab + 2c)(-z_1\partial_1 + z_2\partial_2) - a^2z_2\partial_1 + (b^2 + 4c)z_1\partial_2 + [(2a - b)z_1]\partial_t, \\
X_4 &= \partial_1, & X_5 &= z_1\partial_1 + z_2\partial_2 + t\partial_t - v\partial_v, \\
X_6 &= \partial_t, & X_7 &= z_2\partial_u, \\
X_8 &= t\partial_u + \partial_v, & X_9 &= z_1\partial_u, & X_{10} &= \partial_u
\end{aligned} \tag{4.142}$$

bulunur [44].

(4.142) simetrilerinin sıfırdan farklı Lie parantezleri $[X_i, X_j]$ şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
[X_1, X_3] &= \partial_2\{(ab + 2c)(-z_1\partial_1 + z_2\partial_2) - a^2z_2\partial_1 + (b^2 + 4c)z_1\partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2]\partial_t\} \\
&\quad - \{(ab + 2c)(-z_1\partial_1 + z_2\partial_2) - a^2z_2\partial_1 + (b^2 + 4c)z_1\partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2]\partial_t\}\partial_2 \\
[X_1, X_3] &= (ab + 2c)\partial_2 - a^2\partial_1 + a\partial_t = (ab + 2c)X_1 - a^2X_4 + aX_6, \\
[X_1, X_5] &= \partial_2(z_1\partial_1 + z_2\partial_2 + t\partial_t - v\partial_v) - (z_1\partial_1 + z_2\partial_2 + t\partial_t - v\partial_v)\partial_2 = \partial_2 = X_1, \\
[X_1, X_7] &= \partial_2(z_2\partial_u) - (z_2\partial_u)\partial_2 = \partial_u = X_{10}, \\
[X_2, X_7] &= (u\partial_u + v\partial_v)z_2\partial_u - z_2\partial_u(u\partial_u + v\partial_v) = -z_2\partial_u = -X_7, \\
[X_2, X_8] &= (u\partial_u + v\partial_v)(t\partial_u + \partial_v) - (t\partial_u + \partial_v)(u\partial_u + v\partial_v) = -t\partial_u - \partial_v = -X_8, \\
[X_2, X_9] &= (u\partial_u + v\partial_v)z_1\partial_u - z_1\partial_u(u\partial_u + v\partial_v) = -z_1\partial_u = -X_9, \\
[X_2, X_{10}] &= (u\partial_u + v\partial_v)\partial_u - \partial_u(u\partial_u + v\partial_v) = -\partial_u = -X_{10}, \\
[X_3, X_4] &= \{(ab + 2c)(-z_1\partial_1 + z_2\partial_2) - a^2z_2\partial_1 + (b^2 + 4c)z_1\partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2]\partial_t\}\partial_1 \\
&\quad - \partial_1\{(ab + 2c)(-z_1\partial_1 + z_2\partial_2) - a^2z_2\partial_1 + (b^2 + 4c)z_1\partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2]\partial_t\} \\
[X_3, X_4] &= (ab + 2c)\partial_1 - (b^2 + 4c)\partial_2 - (2a - b)\partial_t = (ab + 2c)X_4 - (b^2 + 4c)X_1 - (2a - b)X_6, \\
[X_3, X_7] &= \{(ab + 2c)(-z_1\partial_1 + z_2\partial_2) - a^2z_2\partial_1 + (b^2 + 4c)z_1\partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2]\partial_t\}z_2\partial_u \\
&\quad - z_2\partial_u\{(ab + 2c)(-z_1\partial_1 + z_2\partial_2) - a^2z_2\partial_1 + (b^2 + 4c)z_1\partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2]\partial_t\} \\
[X_3, X_7] &= (ab + 2c)z_2\partial_u + (b^2 + 4c)z_1\partial_u = (ab + 2c)X_7 + (b^2 + 4c)X_9,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X_3, X_8] &= \{(ab + 2c)(-z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2) - a^2 z_2 \partial_1 + (b^2 + 4c)z_1 \partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2] \partial_t\} (t \partial_u + \partial_v) \\
&\quad - (t \partial_u + \partial_v) \{(ab + 2c)(-z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2) - a^2 z_2 \partial_1 + (b^2 + 4c)z_1 \partial_2 \\
&\quad + [(2a - b)z_1 + az_2] \partial_t\} = (2a - b)z_1 \partial_u + az_2 \partial_u \\
[X_3, X_8] &= (2a - b)X_9 + aX_7, \\
[X_3, X_9] &= \{(ab + 2c)(-z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2) - a^2 z_2 \partial_1 + (b^2 + 4c)z_1 \partial_2 + [(2a - b)z_1 + az_2] \partial_t\} z_1 \partial_u \\
&\quad - z_1 \partial_u \{(ab + 2c)(-z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2) - a^2 z_2 \partial_1 + (b^2 + 4c)z_1 \partial_2 \\
&\quad + [(2a - b)z_1 + az_2] \partial_t\} = (ab + 2c)(-z_1 \partial_u) + a^2(-z_2 \partial_u) \\
[X_3, X_9] &= -(ab + 2c)X_9 - a^2X_7, \\
[X_4, X_5] &= \partial_1(z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) - (z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) \partial_1 = \partial_1 = X_4, \\
[X_4, X_9] &= \partial_1(z_1 \partial_u) - (z_1 \partial_u) \partial_1 = \partial_u = X_{10}, \\
[X_5, X_6] &= (z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) \partial_t - \partial_t(z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) = -\partial_t = -X_6, \\
[X_5, X_7] &= (z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) z_2 \partial_u - z_2 \partial_u(z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) = z_2 \partial_u = X_7, \\
[X_5, X_8] &= (z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v)(t \partial_u + \partial_v) - (t \partial_u + \partial_v)(z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) \\
[X_5, X_8] &= t \partial_u + \partial_v = X_8, \\
[X_5, X_9] &= (z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) z_1 \partial_u - z_1 \partial_u(z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + t \partial_t - v \partial_v) = z_1 \partial_u = X_9, \\
[X_6, X_8] &= \partial_t(t \partial_u + \partial_v) - (t \partial_u + \partial_v) \partial_t = \partial_u = X_{10} \\
[X_3, X_1] &= -[X_1, X_3] = -(ab + 2c)X_1 + a^2X_4 - aX_6, \\
[X_5, X_1] &= -[X_1, X_5] = -X_1, \quad [X_7, X_1] = -[X_1, X_7] = -X_{10}, \quad [X_7, X_2] = -[X_2, X_7] = X_7, \\
[X_8, X_2] &= -[X_2, X_8] = X_8, \quad [X_9, X_2] = -[X_2, X_9] = X_9, \quad [X_{10}, X_2] = -[X_2, X_{10}] = -X_{10}, \\
[X_4, X_3] &= -[X_3, X_4] = -(ab + 2c)X_4 + (b^2 + 4c)X_2 + (2a - b)X_6, \\
[X_7, X_3] &= -[X_3, X_7] = -(ab + 2c)X_7 - (b^2 + 4c)X_9, \\
[X_8, X_3] &= -[X_3, X_8] = -(2a - b)X_9 - aX_7, \\
[X_9, X_3] &= -[X_3, X_9] = (ab + 2c)X_9 + a^2X_7, \\
[X_5, X_4] &= -[X_4, X_5] = -X_4, \quad [X_9, X_4] = -[X_4, X_9] = -X_{10}, \quad [X_6, X_5] = -[X_5, X_6] = X_6, \\
[X_7, X_5] &= -[X_5, X_7] = -X_7, \quad [X_8, X_5] = -[X_5, X_8] = X_8, \quad [X_9, X_5] = -[X_5, X_9] = -X_9, \\
[X_8, X_6] &= -[X_6, X_8] = -X_{10}.
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Elde edilen sonuçlar, (2.80) denklemi tarafından belirlenen Lie cebiri yapısıyla uyumludur. Dolayısıyla, $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sistem için belirlenen nokta simetrisi (4.142) baz vektör kümesi olarak ele alındığında Lie cebiri oluşturmada ve simetri üretici niteleği kazanmaktadır. Lie cebiri yapısının gözlenebilmesi için bu sonuçlar (4.143) sonraki sayfada tablo halinde yazılmıştır. Tabloda i . satır ile j . sütunun kesişiminde yer alan hücre $[X_i, X_j]$ Lie parantezi sonucunu göstermektedir.

Tablo 4.2 (2 + 1)-boyutlu sisteme ait nokta simetrilerin sıra değiştirmeleri

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	0	0	$\tilde{X}_{(1,4,6)}$	0	X_1	0	X_{10}	0	0	0
X_2	0	0	0	0	0	0	$-X_7$	$-X_8$	$-X_9$	$-X_{10}$
X_3	$-\tilde{X}_{(1,4,6)}$	0	0	$\bar{X}_{(1,4,6)}$	0	0	$\tilde{X}_{(7,9)}$	$\bar{X}_{(7,9)}$	$\hat{X}_{(7,9)}$	0
X_4	0	0	$-\bar{X}_{(1,4,6)}$	0	X_4	0	0	0	X_{10}	0
X_5	$-X_1$	0	0	$-X_4$	0	$-X_6$	X_7	X_8	X_9	0
X_6	0	0	0	0	X_6	0	0	X_{10}	0	0
X_7	$-X_{10}$	X_7	$-\tilde{X}_{(7,9)}$	0	$-X_7$	0	0	0	0	0
X_8	0	X_8	$-\bar{X}_{(7,9)}$	0	$-X_8$	$-X_{10}$	0	0	0	0
X_9	0	X_9	$-\hat{X}_{7,9}$	$-X_{10}$	$-X_9$	0	0	0	0	0
X_{10}	0	X_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabloda gsterim kolaylığı açısından

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{(1,4,6)} &= (ab + 2c)X_1 - a^2X_4 + aX_6, & \tilde{X}_{(7,9)} &= (ab + 2c)X_7 + (b^2 + 4c)X_9, \\
 \bar{X}_{(1,4,6)} &= -(b^2 + 4c)X_1 + (ab + 2c)X_4 + (b - 2a)X_6, & \bar{X}_{(7,9)} &= aX_7 + (2a - b)X_9, \\
 \hat{X}_{(7,9)} &= -a^2X_7 - (ab + 2c)X_9
 \end{aligned} \tag{4.144}$$

notasyonu gz nne alınmıştır.

(2 + 1)-boyutlu sistemde iki bağımlı değişken (u, v) bulunduğu iin her simetri reteci karşılık gelen iki simetri karakteristiği (φ, ψ) bulunur [28]. Simetri reteci (2.78) ve simetri karakteristiği (2.83) genel denklemlerinde

$$\begin{aligned}
 x^1 &= t, & x^2 &= z_1, & x^3 &= z_2, & u_1^1 &= u_t, & u_2^1 &= u_1, & u_3^1 &= u_2, & u_1^2 &= v_t, & u_2^2 &= v_1, \\
 u_3^2 &= v_2, & \eta^1 &= \eta^u, & \eta^2 &= \eta^v, & \varphi^1 &= \varphi, & \varphi^2 &= \psi, & u_t &= v, & v_t &= q
 \end{aligned} \tag{4.145}$$

alınarak (4.142) retelerine karşılık gelen karakteristikler sırasıyla

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -u_2, & \psi_1 &= -v_2, & \varphi_2 &= u, & \psi_2 &= v, \\
 \varphi_3 &= -v(2a - b)z_1 + u_1[(ab + 2c)z_1 + a^2z_2] - u_2[(b^2 + 4c)z_1 + (ab + 2c)z_2], \\
 \psi_3 &= -q(2a - b)z_1 + v_1[(ab + 2c)z_1 + a^2z_2] - v_2[(b^2 + 4c)z_1 + (ab + 2c)z_2], \\
 \varphi_4 &= -u_1, & \psi_4 &= -v_1, & \varphi_5 &= -vt - u_1z_1 - u_2z_2, \\
 \psi_5 &= -v - qt - v_1z_1 - v_2z_2, & \varphi_6 &= -v, & \psi_6 &= -q, & \varphi_7 &= z_2, & \psi_7 &= 0, \\
 \varphi_8 &= t, & \psi_8 &= 1, & \varphi_9 &= z_1, & \psi_9 &= 0, & \varphi_{10} &= 1, & \psi_{10} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.146}$$

olarak bulunur. Bu karakteristiklerden yola çıkarak (2 + 1)-boyutlu yeni sistemin

(4.12) temsil ettiği akışa ait korunum yasaları (birinci integraller) Noether teoremi ile bulunabilir. Noether teoreminin Hamilton biçiminde (2.85) Hamilton operatörü olarak indirgenmiş birinci Hamilton operatörü J_0^r ve birinci integral olarak (2 + 1)-boyutlu yeni sistem için belirlenen (4.142) X_i simetri üreticisine karşılık gelen birinci integral H_i^r getirilerek

$$\begin{pmatrix} \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} = J_0^r \begin{pmatrix} \delta_u H_i^r \\ \delta_v H_i^r \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.147)$$

yazılır. $J_0^r = 1/K^r$ bağıntısı dikkate alınıp (4.147) matris denklemi ters Noether teoremi adı altında yeniden düzenlenerek

$$\begin{pmatrix} \delta_u H_i^r \\ \delta_v H_i^r \end{pmatrix} = K^r \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \quad (4.148)$$

matris denklemi yazılır. K^r matrisi (4.16) elemanları ile yazılarak ters Noether teoremi (4.148) daha açık halde

$$\begin{pmatrix} \delta_u H_i^r \\ \delta_v H_i^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^r & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \quad (4.149)$$

olarak ifade edilir. Ters Noether teoremindeki matris çarpımlarına göre yazılan

$$\delta_u H_i^r = K_{11}^r \varphi_i - \Delta \psi_i \quad (4.150)$$

$$\delta_v H_i^r = \Delta \varphi_i \quad (4.151)$$

denklemlerinden $\delta_u H_i^r$ ve $\delta_v H_i^r$ ifadeleri elde edildikten sonra Euler operatörünün yapısı (2.12) dikkate alınarak korunan büyüklükler H_i^r hesaplanır. Bu işlemler $i = 1, 2, \dots, 10$ değerleri için sırası ile yapılır. (4.16) matris elemanları ve ilgili (4.146) simetri karakteristikleri, (4.150) denklemine yerleştirilerek $\delta_u H_i^r$ için;

$i = 1$ durumunda

$$\begin{aligned} \delta_u H_1^r = & \{(2v_2 - v_1)D_2 - v_2D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) \\ & + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1)\}(-u_2) - (u_{22} - u_{12})(-v_2) \end{aligned} \quad (4.152)$$

denklemi yazılır. Türev işlemleri yapıldıktan sonra (4.152) denklemi

$$\delta_u H_1^r = au_{12}^2 + (v_1 - v_2 - au_{11})u_{22} + (v_{12} - v_{22})u_2 \quad (4.153)$$

şeklinde düzenlenebilir.

$\delta_v H_1^r$ için ise (4.151) denkleminde

$$\delta_v H_1^r = -(u_{22} - u_{12})u_2 \quad (4.154)$$

yazılır. (2.12) Euler operatörü genel formülüne göre (4.154) denklemi sadece $\partial H_1^r / \partial v$ kısmi türev terimine karşılık gelmelidir. Buna göre H_1^r için

$$H_1^r = -u_2 v (u_{22} - u_{12}) + h_1[u] \quad (4.155)$$

çıkarmı kolayca yapılabilir. Burada $h_1[u]$ sadece u 'nın fonksiyonlarını içeren ve hesaplanması gereken bir terimdir. (4.155) denkleminin u 'ya göre varyasyonel türevi alınarak

$$\delta_u H_1^r = \partial_2(u_{22} - u_{12})v + \partial_1 \partial_2(u_2 v) - \partial_2^2(u_2 v) + \delta_u h_1[u] \quad (4.156)$$

bulunur. Bu denklemdeki kısmi türevler alındıktan sonra

$$\delta_u H_1^r = u_{22}(v_1 - v_2) + u_2(v_{12} - v_{22}) + \delta_u h_1[u] \quad (4.157)$$

elde edilir. (4.153) ile (4.157) karşılaştırıldığında v bulunan terimlerin tutarlı olduğu görülür ve sadece u içeren terimlerin

$$\delta_u h_1[u] = a(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) \quad (4.158)$$

denklemini sağlaması gerektiği anlaşılır. Buradan $h_1[u]$ için

$$h_1[u] = \frac{a}{3}u(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) \quad (4.159)$$

sonucu belirlenir. Buna göre, (4.159) ifadesi (4.155) ifadesine yerleştirilerek H_1^r için

$$H_1^r = vu_2(u_{12} - u_{22}) + \frac{a}{3}u(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) \quad (4.160)$$

elde edilir. H_1^r 'nin doğruluğunu kontrol etmek amacıyla (4.160) denkleminin u 'ya göre varyasyonel türevi alındığında (4.153) ile aynı denklem bulunmaktadır. Bu yöntem sırayla diğer H_i nicelikleri için de izlenecektir.

$i = 2$ için (4.150) denkleminde

$$\begin{aligned} \delta_u H_2^r = & \{(2v_2 - v_1)D_2 - v_2D_1 + v_{22} - v_{12} + (c_5 - c_4)(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) \\ & + (c_5 - c_8)(u_{11}D_2 - u_{12}D_1)\}(u) - (u_{22} - u_{12})(v) \end{aligned} \quad (4.161)$$

yazılır. Türev işlemlerinden sonra bu denklem

$$\begin{aligned}\delta_u H_2^r = & (2v_2 - v_1)u_2 - v_2u_1 + v_{22}u - uv_{12} + a(u_{11}u_2 - u_{12}u_1) + b(u_{22}u_1 - u_{12}u_2) \\ & - (u_{22} - u_{12})v\end{aligned}\quad (4.162)$$

olarak elde edilir. $\delta_v H_2^r$ için ise (4.151) denkleminde

$$\delta_v H_2^r = (u_{22} - u_{12})u \quad (4.163)$$

yazılır.

(4.163) denkleminde dayanarak H_2^r için

$$H_2^r = (u_{22} - u_{12})uv + h_2[u] \quad (4.164)$$

çıkarımı yapılır. Bu ifadenin u 'ya göre varyasyonel türevi

$$\delta_u H_2^r = (u_{22} - u_{12})v - \partial_1 \partial_2 (uv) + \partial_2^2 (uv) + \delta_u h_2[u] \quad (4.165)$$

denkleminde göre alınarak

$$\delta_u H_2^r = 2v(u_{22} - u_{12}) + 2v_2u_2 + uv_{22} - u_1v_2 - u_2v_1 - uv_{12} + \delta_u h_2[u] \quad (4.166)$$

elde edilir. (4.166) ile (4.162) denklemleri karşılaştırıldığında v bulunan terimlerin farklı olduğu görülür. Tutarsız olan bu duruma göre X_2 simetrisine karşılık gelen H_2^r korunumlu niceliğinin bulunmadığı sonucuna varılır.

$i = 3$ için (4.150) denkleminde

$$\begin{aligned}\delta_u H_3^r = & \{(2v_2 - v_1)D_2 - v_2D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1)\} \\ & \{- (2a - b)z_1 + u_1[(ab + 2c)z_1 + a^2z_2] - u_2[(b^2 + 4c)z_1 + (ab + 2c)z_2]\} \\ & - (u_{22} - u_{12})\{- (2a - b)qz_1 + v_1[(ab + 2c)z_1 + a^2z_2] - v_2[(b^2 + 4c)z_1 + (ab + 2c)z_2]\}\end{aligned}\quad (4.167)$$

ifadesi yazılır. Türev işlemleri yapılarak bu denklem

$$\begin{aligned}
\delta_u H_3^r = & (2a - b)[-v_2^2 z_1 + v_2 v_1 z_1 + v_2 v - v_{22} v z_1 + v v_{12} z_1 + a u_{12} v + b(-u_{22} v + u_{12} v_2 z_1 - v_2 u_{12} z_1) \\
& + c(u_{11} u_{22} z_1 - u_{12}^2 z_1)] + (b^2 + 4c)[-v_2 u_{22} z_1 + v_1 u_{22} z_1 + v_2 u_2 - v_{22} u_2 z_1 + v_{12} u_2 z_1 - b u_{22} u_2 \\
& + a(-u_{11} u_{22} z_1 + u_{12}^2 z_1 + u_{12} u_2)] + (ab + 2c)[v_2 u_{12} z_1 - 2v_2 u_{22} z_2 - 2v_2 u_2 + v_1 u_{22} z_2 + v_1 u_2 \\
& - v_2 u_{11} z_1 - v_2 u_1 + v_2 u_{12} z_2 + v_{22} u_1 z_1 - v_{22} u_2 z_2 - v_{12} u_1 z_1 + v_{12} u_2 z_2 - u_{22} v_1 z_1 + u_{22} v_2 z_1 \\
& + a(-u_{11} u_{22} z_2 - u_{11} u_2 + u_{11} u_{12} z_2 - u_{12} u_1) + b(u_{22} u_{11} z_1 + u_{22} u_1 - u_{12}^2 z_1 + u_{12} u_2)] \\
& + a^2[2v_2 u_{12} + 2v_2 u_1 - v_1 u_{12} z_2 - v_1 u_1 - v_2 u_{11} z_2 + v_{22} u_1 z_2 - v_{12} u_1 z_2 - u_{22} z_2 + u_{12} z_2 + a u_{11} u_1 \\
& + b(u_{22} u_{11} z_2 - u_{12}^2 z_2 - u_{12} u_1)]
\end{aligned} \tag{4.168}$$

şeklindeki açık haline getirilir. $\delta_v H_3^r$ için ise (4.151) denkleminde

$$\delta_v H_3^r = \Delta\{-(2a-b)vz_1 + u_1[(ab+2c)z_1 + a^2z_2] - u_2[(b^2+4c)z_1 + (ab+2c)z_2]\} \tag{4.169}$$

yazılır. Bu ifadenin sadece v değişkenine göre kısmi türev terimi bulundurması gerektiği dikkate alınarak H_3^r

$$H_3^r = \Delta\left\{-(2a-b)\frac{v^2}{2}z_1 + v u_1[(ab+2c)z_1 + a^2z_2] - v u_2[(b^2+4c)z_1 + (ab+2c)z_2]\right\} + h_3[u] \tag{4.170}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin u 'ya göre varyasyonel türevi (4.168) ile karşılaştırmak amacıyla aşağıdaki gibi alınır:

$$\begin{aligned}
\delta_u H_3^r = & -\partial_1(u_{22} - u_{12})v[(ab+2c)z_1 + a^2z_2] + \partial_2(u_{22} - u_{12})v[(b^2+4c)z_1 + (ab+2c)z_2] \\
& - \partial_1 \partial_2 \left\{-(2a-b)\frac{v^2}{2}z_1 + v u_1[(ab+2c)z_1 + a^2z_2] - v u_2[(b^2+4c)z_1 + (ab+2c)z_2]\right\} \\
& + \partial_2^2 \left\{-(2a-b)\frac{v^2}{2}z_1 + v u_1[(ab+2c)z_1 + a^2z_2] - v u_2[(b^2+4c)z_1 + (ab+2c)z_2]\right\} + \delta_u h_3[u].
\end{aligned} \tag{4.171}$$

Buradak türev işlemleri yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}
\delta_u H_3^r = & (ab+2c)(-u_{22} v_1 z_1 - v_{12} u_1 z_1 - v_2 u_{11} z_1 - v_2 u_1 + v_{12} u_2 z_2 + v_1 u_{22} z_2 + v_1 u_2 + v_{22} u_1 z_1 \\
& + 2v_2 u_{12} z_1 - v_{22} u_2 z_2 - 2v_2 u_2 - 2v u_{22} - v_2 u_{22} z_2) + a^2(-u_{22} v_1 z_2 - v_{12} u_1 z_2 - v_2 u_{11} z_2 - v_1 u_1 - v u_{11} \\
& + v_{22} u_1 z_2 + v_2 u_{12} z_2 + 2v_2 u_1 + v_2 u_{12} z_2 + 2v u_{12}) + (b^2+4c)(u_{22} v_2 z_1 - u_{12} v_2 z_1 + v_{12} u_2 z_1 + v_2 u_{12} z_1 \\
& + v_2 u_2 + v_1 u_{22} z_1 + v u_{22} - v_{22} u_2 z_1 - 2v_2 u_{22} z_1) + (2a-b)(v_1 v_2 z_1 + v v_{12} z_1 + v v_2 - v_2^2 z_1 - v v_{22} z_1) \\
& + \delta_u h_3[u]
\end{aligned} \tag{4.172}$$

elde edilir. (4.172) ile (4.168) karşılaştırıldığında terimlerin farklı olduğu görülür. Dolayısıyla H_3^r niceliği bulunamaz.

$i = 4$ için (4.150) denkleminde

$$\begin{aligned} \delta_u H_4^r = & [(2v_2 - v_1)]D_2 - v_2 D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1)](-u_1) \\ & - (u_{22} - u_{12})v_1 \end{aligned} \quad (4.173)$$

ifadesi yazılır. Buradaki işlemler yapılarak bu ifade

$$\delta_u H_4^r = -2v_2 u_{12} + v_2 u_{11} - u_1 v_{22} + u_1 v_{12} + v_1 u_{22} + b(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) \quad (4.174)$$

haline getirilir. (4.151) denklemine göre $\delta_v H_4^r$ için

$$\delta_v H_4^r = (u_{22} - u_{12})(-u_1) \quad (4.175)$$

yazılır. Buna göre H_4^r için

$$H_4^r = (u_{12} - u_{22})u_1 v + h_4[u] \quad (4.176)$$

ifadesi belirlenir. (4.176) denkleminin u 'ya göre varyasyonel türevi olarak yazılan

$$\delta_u H_4^r = -\partial_1(u_{12} - u_{22})v + \partial_1 \partial_2(u_1 v) - \partial_2^2(u_1 v) + \delta_u h_4[u] \quad (4.177)$$

denklemini işlemlerin ardından

$$\delta_u H_4^r = v_1 u_{22} - v_{22} u_1 - 2v_2 u_{12} + v_{12} u_1 + v_2 u_{11} + \delta_u h_4[u] \quad (4.178)$$

haline gelir. Bu denklem ile $\delta_u H_4^r$ için verilen (4.174) denklemini karşılaştırıldığında v içeren terimlerin aynı olduğu görülür. Tutarlılık sağlandığı için H_4^r arayışına devam edilir.

Yapılan karşılaştırmaya göre

$$\delta_u h_4[u] = b(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) \quad (4.179)$$

denklemini ortaya çıkar. Bu denklemi sağlayacak olan $h_4[u]$ ifadesi

$$h_4[u] = \frac{1}{2} b u_{22} u_1^2 \quad (4.180)$$

şeklinde tahmin edilir. (4.176) denkleminde bulunan $h_4[u]$ terimi yerine (4.180)

denklemini yerleştirilerek H_4^r için

$$H_4^r = u_1(u_{12} - u_{22})v + \frac{1}{2}bu_{22}u_1^2 \quad (4.181)$$

bulunur. (4.181) denkleminde yola çıkılarak $\delta_u H_4^r$ hesaplandığında (4.174) ifadesi yeniden elde edilir. X_4 simetrisine karşılık gelen korunumlu H_4^r niceliği (4.181) olarak belirlenmiştir.

$i = 5$ durumu için (4.150) denkleminde

$$\begin{aligned} \delta_u H_5^r = & [(2v_2 - v_1)D_2 - v_2D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1)] \\ & (-vt - u_1z_1 - u_2z_2) - (u_{22} - u_{12})(-v - qt - v_1z_1 - v_2z_2) \end{aligned} \quad (4.182)$$

yazılır. Bu denklemde bulunan q yerine (4.12)'de verilen

$$q = \frac{1}{\Delta} \{v_2^2 - v_1v_2 + a(v_2u_{11} - v_1u_{12}) + b(v_1u_{22} - v_2u_{12}) + c(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)\}$$

denklemini yerleştirilerek (4.182) denklemini

$$\begin{aligned} \delta_u H_5^r = & [(2v_2 - v_1)D_2 - v_2D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1)] \\ & (-vt - u_1z_1 - u_2z_2) + \Delta \left\{ \frac{1}{\Delta} [v_2^2 - v_1v_2 + a(v_2u_{11} - v_1u_{12}) + b(v_1u_{22} - v_2u_{12}) \right. \\ & \left. + c(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)]t + v + v_1z_1 + v_2z_2 \right\} \end{aligned} \quad (4.183)$$

haline getirilir. Bu denklemde düzenlemeler yapıldıktan sonra $\delta_u H_5^r$ için

$$\begin{aligned} \delta_u H_5^r = & -v_2u_{11}z_1 - 2v_2u_1 - 2v_2u_{12}z_2 + v_1u_{22}z_2 + v_1u_2 + v_1u_1 + v_1u_{12}z_2 - vv_{22}t - v_{22}u_1z_1 \\ & - v_{22}u_2z_2 + v_{12}vt + v_{12}u_1z_1 + v_{12}u_2z_2 + v_2^2t - v_1v_2t + vu_{22} - vu_{12} + v_1z_1u_{22} + v_2z_2u_{22} - v_2z_2u_{12} \\ & + c(u_{11}u_{22}t - u_{12}^2t) \end{aligned} \quad (4.184)$$

ifadesi elde edilir. (4.151) denklemine göre de

$$\delta_v H_5^r = (u_{22} - u_{12})(-vt - u_1z_1 - u_2z_2) \quad (4.185)$$

yazılır. Buna göre, eğer H_5^r bulunuyorsa

$$H_5^r = (u_{22} - u_{12}) \left(-\frac{v^2}{2}t - u_1z_1v - u_2z_2v \right) + h_5[u] \quad (4.186)$$

biçiminde olmalıdır. Bu ifadenin u 'ya göre varyasyonel türevi

$$\begin{aligned}\delta_u H_5^r = & -\partial_1[(u_{12} - u_{22})z_1 v] - \partial_2[(u_{12} - u_{22})z_2 v] + \partial_1 \partial_2 \left(\frac{v^2}{2} t + u_1 z_1 v + u_2 z_2 v \right) \\ & - \partial_2^2 \left(\frac{v^2}{2} t + u_1 z_1 v + u_2 z_2 v \right) + \delta_u h_5[u]\end{aligned}\quad (4.187)$$

denklemine uygun olarak alındığında

$$\begin{aligned}\delta_u H_5^r = & u_{22} z_1 v_1 + v_1 v_2 t + v v_{12} t + u_{11} z_1 v_2 + u_1 v_2 + u_1 z_1 v_{12} + u_{22} z_2 v_1 + u_2 v_1 + u_2 z_2 v_{12} \\ & - v^2 t - v v_{22} t - 2u_{12} z_1 v_2 - u_1 z_1 v_{22} - 2u_2 v_2 - u_{22} z_2 v_2 - u_2 z_2 v_{22} + \delta_u h_5[u]\end{aligned}\quad (4.188)$$

elde edilir. Bu $\delta_u H_5^r$ ifadesi ile (4.184) denklemindeki $\delta_u H_5^r$ ifadesi tutarlı değildir. Bu sonuca göre H_5^r bulunmamaktadır.

$i = 6$ için (4.150) denkleminde

$$\begin{aligned}\delta_u H_6^r = & \{(2v_2 - v_1)D_2 - v_2 D_1 + v_{22} - v_{12} + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1) + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2)\}(-v) \\ & - (u_{22} - u_{12})(-q)\end{aligned}\quad (4.189)$$

yazılır. Burada q yerine yukarıdaki gibi açık ifadesi yazılarak (4.189) denklemi

$$\delta_u H_6^r = -v_2^2 + v_1 v_2 - v v_{22} + v v_{12} + c(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) \quad (4.190)$$

olarak düzenlenir. $\delta_v H_6^r$ ifadesi ise (4.151) denklemine göre

$$\delta_v H_6^r = (u_{22} - u_{12})(-v) \quad (4.191)$$

olarak yazılır.

Buna göre, H_6^r bulunması halinde

$$H_6^r = \frac{v^2}{2}(u_{12} - u_{22}) + h_6[u] \quad (4.192)$$

biçiminde yazılabilmelidir. (4.190) ile karşılaştırma yapmak için (4.192) denkleminin u 'ya göre varyasyonel türevi

$$\delta_u H_6^r = \partial_1 \partial_2 \left(\frac{v^2}{2} \right) - \partial_2^2 \left(\frac{v^2}{2} \right) + \delta_u h_6[u] \quad (4.193)$$

denklemine uygun olarak alınarak

$$\partial_u H_6^r = v_1 v_2 + v v_{12} - v_2^2 - v v_{22} + \delta_u h_6[u] \quad (4.194)$$

elde edilir. (4.194) ile (4.190) karşılaştırıldığında tutarlı oldukları görülür. Buna göre, H_6^r arayışına devam edilebilir. Aynı karşılaştırmaya göre sadece u içeren terimlerin

$$\delta_u h_6[u] = c(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) \quad (4.195)$$

denklemini sağlaması beklenir. Buradan $h_6[u]$ için uygun sonuç

$$h_6[u] = \frac{c}{3}u(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) \quad (4.196)$$

şeklinde bulunur. Böylece, (4.196) denklemi (4.192) denklemindeki $h_6[u]$ terimi yerine yerleştirildiğinde H_6^r için

$$H_6^r = \frac{v^2}{2}(u_{12} - u_{22}) + \frac{c}{3}u(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) \quad (4.197)$$

sonucu bulunur. H_6^r 'nin doğruluğunu kontrol etmek amacıyla (4.197) denkleminin u 'ya göre varyasyonel türevi alınır. Elde edilen sonuç başta verilen $\delta_u H_6^r$ (4.190) ifadesi ile aynıdır. Dolayısıyla X_6 simetrisine karşılık gelen (4.197) şeklinde H_6^r korunumlu niceliği bulunmaktadır.

$i = 7$ için (4.150) denkleminde

$$\delta_u H_7^r = [(2v_2 - v_1)D_2 - v_2 D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_1)]z_2 \quad (4.198)$$

yazılır. Buradaki türev işlemleri yapıldıktan sonra denklem

$$\delta_u H_7^r = 2v_2 - v_1 + (v_{22} - v_{12})z_2 - bu_{12} + au_{11} \quad (4.199)$$

şeklinde düzenlenir. (4.151) denkleminde $\delta_v H_7^r$ için

$$\delta_v H_7^r = (u_{22} - u_{12})z_2 \quad (4.200)$$

yazılır. Buna göre, H_7^r bulunması halinde

$$H_7^r = (u_{22} - u_{12})z_2 v + h_7[u] \quad (4.201)$$

biçiminde olmalıdır.

u 'ya göre varyasyonel türev

$$\delta_u H_7^r = -\partial_1 \partial_2 (z_2 v) + \partial_2^2 (z_2 v) + \delta_u h_7[u] \quad (4.202)$$

denkleme göre alınarak

$$\delta_u H_7^r = 2v_2 - v_1 + z_2(v_{22} - v_{12}) + \delta_u h_7[u] \quad (4.203)$$

elde edilir. Bu ifade ile önceden verilen $\delta_u H_7^r$ ifadesi (4.199) uyumludur. (4.199) ile karşılaştırma sonucunda

$$\delta_u h_7[u] = au_{11} - bu_{12} \quad (4.204)$$

denkleminin sağlanması beklenir. Buna göre $h_7[u]$ için uygun sonuç

$$h_7[u] = \frac{1}{2}u(au_{11} - bu_{12}) \quad (4.205)$$

olarak belirlenir. (4.201) denkleminde bulunan $h_7[u]$ terimi yerine (4.205) ifadesi yerleştirilerek H_7^r niceliği için

$$H_7^r = z_2 v(u_{22} - u_{12}) + \frac{1}{2}u(au_{11} - bu_{12}) \quad (4.206)$$

ifadesi belirlenir. (4.206) denkleminde $\delta_u H_7^r$ hesaplandığında önceden yazılmış olan $\delta_u H_7^r$ denklemi (4.199) yeniden elde edilerek sonuç doğrulanır. Böylece, X_7 simetrisine karşılık gelen H_7^r korunumlu niceliği (4.206) bulunmuştur.

$i = 8$ için $\delta_u H_8^r$ için (4.150) denkleminde

$$\delta_u H_8^r = [(2v_2 - v_1)D_2 - v_2 D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22} D_1 - u_{12} D_2) + a(u_{11} D_2 - u_{12} D_1)]t - (u_{22} - u_{12}) \quad (4.207)$$

yazılır. Türev işlemlerinin ardından (4.207) denklemi

$$\delta_u H_8^r = (v_{22} - v_{12})t - u_{22} + u_{12} \quad (4.208)$$

olarak sadeleşir. $\delta_v H_8^r$ için ise (4.151) denkleminde

$$\delta_v H_8^r = (u_{22} - u_{12})t \quad (4.209)$$

yazılır. Bulunduğu varsayılan H_8^r korunumlu niceliği (4.209) denkleme bakılarak

$$H_8^r = (u_{22} - u_{12})tv + h_8[u] \quad (4.210)$$

biçiminde yazılır.

Bu denklemin u 'ya göre varyasyonel türevi

$$\delta_u H_8^r = \partial_1 \partial_2 (tv) + \partial_2^2 (tv) + \delta_u h_8[u] \quad (4.211)$$

denklemine göre alınarak

$$\delta_u H_8^r = (v_{22} - v_{12})t + \delta_u h_8[u] \quad (4.212)$$

elde edilir. Bu denklem ile (4.208) denklemi uyumludur. Bu durumda H_8^r arayışına devam edilir. (4.212) ile (4.208) karşılaştırılarak $\delta_u h_8[u]$ için

$$\delta_u h_8[u] = u_{12} - u_{22} \quad (4.213)$$

denklemi ve bu denklemi sağlayacak $h_8[u]$ ifadesi kolayca

$$h_8[u] = \frac{u}{2}(u_{12} - u_{22}) \quad (4.214)$$

şeklinde belirlenir. (4.210) denklemindeki $h_8[u]$ terimi yerine (4.214) yerleştirilerek H_8^r için

$$H_8^r = \left(vt - \frac{u}{2} \right) (u_{22} - u_{12}) \quad (4.215)$$

elde edilir. Bu denklemden yola çıkılarak bulunan $\delta_u H_8^r$ ile önceden yazılmış olan $\delta_u H_8^r$ denklemi (4.208) aynıdır. Böylece, X_8 simetrisine karşılık gelen H_8^r korunumlu niceliğinin bulunduğu ve (4.215) sonucunun geçerliliği doğrulanmış olur.

$i = 9$ için (4.150) denklemden

$$\delta_u H_9^r = [(2v_2 - v_1)D_2 - v_2 D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + a(u_{11}D_2 - u_{12}D_2)]z_1 \quad (4.216)$$

yazılır. Bu denklem düzenlenerek

$$\delta_u H_9^r = -v_2 + (v_{22} - v_{12})z_1 + bu_{22} - au_{12} \quad (4.217)$$

haline getirilir. (4.151) denklemden ise

$$\delta_v H_9^r = (u_{22} - u_{12})z_1 \quad (4.218)$$

yazılır. H_9^r bulunduğu takdirde (4.209) denklemine göre

$$H_9^r = (u_{22} - u_{12})z_1 v + h_9[u] \quad (4.219)$$

biçiminde olmalıdır.

Bu denklemin u 'ya göre varyasyonel türevi

$$\delta_u H_9^r[u] = -\partial_1 \partial_2 (z_1 v) + \partial_2^2 (z_1 v) + \delta_u h_9[u] \quad (4.220)$$

olarak alınarak

$$\delta_u H_9^r = -v_2 + (v_{22} - v_{12})z_1 + \delta_u h_9[u] \quad (4.221)$$

elde edilir. Bu denklem ile önceden yazılmış olan $\delta_u H_9^r$ denklemi (4.217) tutarlıdır. Bu durum H_9^r niceliğinin bulunduğuna işaret eder. (4.217) ile (4.221) karşılaştırıldığında

$$\delta_u h_9[u] = bu_{22} - au_{12} \quad (4.222)$$

denklemi ortaya çıkar. Bu denklemi sağlayacak $h_9[u]$ ifadesinin

$$h_9[u] = \frac{u}{2}(bu_{22} - au_{12}) \quad (4.223)$$

şeklinde olduğu açıktır. Bu denklem (4.219) denkleminde bulunan $h_9[u]$ terimi yerine getirilerek H_9^r için

$$H_9^r = z_1 v(u_{22} - u_{12}) + \frac{u}{2}(bu_{22} - au_{12}) \quad (4.224)$$

sunucu elde edilir. (4.224) denkleminde göre $\delta_u H_9^r$ hesaplandığında (4.217) ile aynı denklem elde edilir. Dolayısıyla elde edilen sonuç doğrudur.

Bu yöntem izlenerek son kez H_{10}^r niceliği için işlem yapılır. Bunun için $i = 10$ durumunda (4.150) denkleminde göre

$$\delta_u H_{10}^r = [(2v_2 - v_1)D_2 - v_2 D_1 + v_{22} - v_{12} + b(u_{22} D_1 - u_{12} D_2) + a(u_{11} D_2 - u_{12} D_2)]1 \quad (4.225)$$

yazılır. Denklem sonunda bulunan $\varphi_{10} = 1$ simetri karakteristiği sabit değer olduğu için toplam türevlerin hepsi sıfır sonucunu verir. Bu durumda denklem

$$\delta_u H_{10}^r = v_{22} - v_{12} \quad (4.226)$$

olarak sadeleşir.

(4.151) denkleminde göre ise

$$\delta_v H_{10}^r = u_{22} - u_{12} \quad (4.227)$$

yazılır. Bulunduğu varsayılan H_{10}^r niceliğinin (4.227) denkleminde göre

$$H_{10}^r = (u_{22} - u_{12})v + h_{10}[u] \quad (4.228)$$

biçiminde olması gerektiği kolayca anlaşılır. (4.228) denkleminin u 'ya göre

varyasyonel türevi

$$\delta_u H_{10}^r = -\partial_1 \partial_2 v + \partial_2^2 v + \delta_u h_{10}[u] \quad (4.229)$$

olarak alınarak

$$\delta_u H_{10}^r = v_{22} - v_{12} + \delta_u h_{10}[u] \quad (4.230)$$

elde edilir. (4.226) ile (4.230) denklemleri birbiriyle tutarlıdır. (4.226) denkleminde sadece u içeren terim bulunmadığından $h_{10}[u] = 0$ olur ve H_{10}^r korunumlu niceliği

$$H_{10}^r = (u_{22} - u_{12})v \quad (4.231)$$

olarak belirlenir. Böylece simetriler için elde edilen korunan büyüklükler sırasıya

$$\begin{aligned} H_1^r &= v u_2 (u_{12} - u_{22}) + \frac{a}{3} u (u_{12}^2 - u_{11} u_{22}) \\ H_4^r &= u_1 (u_{12} - u_{22}) v + \frac{1}{2} b u_{22} u_1^2 \\ H_6^r &= \frac{v^2}{2} (u_{12} - u_{22}) + \frac{c}{3} u (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \\ H_7^r &= z_2 v (u_{22} - u_{12}) + \frac{1}{2} u (a u_{11} - b u_{12}) \\ H_8^r &= \left(v t - \frac{u}{2} \right) (u_{22} - u_{12}) \\ H_9^r &= z_1 v (u_{22} - u_{12}) + \frac{u}{2} (b u_{22} - a u_{12}) \\ H_{10}^r &= (u_{22} - u_{12}) v \end{aligned} \quad (4.232)$$

şeklinde olur. Bu korunan büyüklüklerin karşılık olarak geldiği simetriler Noether teoremine göre "varyasyonel simetri" olarak nitelendirilir [28]. Buna karşın H_2^r, H_3^r, H_5^r bulunmadığı için X_2, X_3, X_5 varyasyonel simetri değildir.

Bulunan nicelikler gerçekten bir korunum yasasını gösteriyorsa, akışkanlar mekaniği ve elektromanyetik teori gibi fiziğin çeşitli alanlarında karşılaşılan süreklilik yasalarının da diverjans teoremi sayesinde benzer şekilde ifade edildiği korunum denkleminde (2.86) uygun olarak yazılabilmelidir [28]. Yeni bulunan $H_1^r, H_4^r, H_6^r, H_7^r, H_8^r, H_9^r, H_{10}^r$ niceliklerinin bu koşulu sağladığını onaylamak amacıyla her birinin zamana göre toplam türev ifadesi sırasıyla

$$\begin{aligned}
D_t H_1^r &= D_1 \left[-\left(\frac{1}{2}u_{22}v + bu_2u_{22} + \frac{a}{3}u_2u_{12} - \frac{a}{3}u_1u_{22} + au_2u_{12}\right)v \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{3}(u_{12}v_2 - u_{22}v_1)u - cu_2u_1u_{22} \right] \\
&\quad + D_2 \left[(u_2v_1 - u_2v_2 + \frac{1}{2}u_{12}v + bu_2u_{12} - \frac{a}{3}u_1u_{12} + \frac{a}{3}u_2u_{11} - au_{11}u_2)v \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{3}(u_{12}v_1 - u_{11}v_2)u + cu_2u_1u_{12} \right], \\
D_t H_4^r &= D_1 \left[\left(-\frac{1}{2}u_{22}v + au_1u_{12}\right)v - \frac{c}{2}u_1^2u_{22} \right] \\
&\quad + D_2 \left[(vv_1 - vv_2 - au_{11}v + \frac{c}{2}u_{12}u_1 + \frac{b}{2}v_2u_1)u_1 + \frac{1}{2}u_{12}v^2 \right], \\
D_t H_6^r &= D_1 \left[\frac{c}{3}(v_1u_{22} - v_2u_{12})u + \frac{c}{3}(u_{12}u_2 - u_1u_{22})v + \frac{1}{2}(v_2 + au_{12} - bu_{22})v^2 \right] \\
&\quad + D_2 \left[\frac{c}{3}(u_{11}v_{22} - u_{12}v_1)u + \left(\frac{c}{3}u_1u_{12} - \frac{c}{3}u_2u_{11}\right)v + \frac{1}{2}(bu_{12} - au_{11} - v_2)v^2 \right], \\
D_t H_7^r &= D_1 \left[-(v_2z_2 + az_2u_{12} + \frac{a}{2}u_1 - bz_2u_{22})v + \left(\frac{a}{2}v_1 - \frac{b}{2}v_2\right)u + cz_2u_1u_{22} \right] \\
&\quad + D_2 \left[c\left(\frac{1}{2}u_1 - z_2u_{12}\right)u_1 + (v_2z_2 - \frac{1}{2}v + az_2u_{11} - bz_2u_{12} + \frac{b}{2}u_1)v \right], \quad (4.233) \\
D_t H_8^r &= D_1 \left[(-avu_{12} + bvu_{22} + cu_1u_{22} - vv_2)t + \frac{1}{2}(uv_2 - vu_2) \right] \\
&\quad + D_2 \left[vv_2 + avu_{11} - bvu_{12} - cu_1u_{12} + \frac{1}{2}(vu_2 - uv_2) \right], \\
D_t H_9^r &= D_1 \left[-\frac{a}{2}uv_2 + (bz_1u_{22} - az_1u_{12} - z_1v_2)v + cu_1u_{22} \right] \\
&\quad + D_2 \left[(vv_2 + avu_{11} - bvu_{12})z_1 + \left(\frac{a}{2}v - cu_{12}\right)u_1 + \frac{1}{2}(v - bu_2)v + \frac{b}{2}v_2u \right], \\
D_t H_{10}^r &= D_1 [(-au_{12} + bu_{22})v + cu_1u_{22}] + D_2 [v_2 - v_1 + au_{11} - bu_{12})v - cu_1u_{12}]
\end{aligned}$$

denklemleri olarak toplam diverjans gösteriminde elde edilmiştir. Böylece, $(2 + 1)$ boyutlu yeni sistem için belirlenen korunumlu niceliklerin gerçekten bu sisteme ait korunum yasalarını temsil ettiği gösterilmiştir.

5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada evrimsel Hirota tipinde bulunan ve literatüre yeni girmiş olan $(3 + 1)$ -boyutlu doğrusal-olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem ele alınmıştır. Tezin 3. bölümünde konu edilen Hirota tipi denklemler genel görelilik, doğrusal-olmayan fizik, diferansiyel geometri, integre edilebilir sistemler gibi alanları içeren geniş bir yelpazede uygulama alanı bulabilmektedir. Seçilen özel bir simetri ile bu denklemin simetri indirgemesi yapıldığında $(2 + 1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen yapının oluştuğu gösterilmiş ve yeni sisteme ait korunumlu nicelikler elde edilmiştir.

1. bölümde integre edilebilir sistemler ile ilgili kavramsal açıklamalar yapılmıştır. Tarihsel süreçte bu konunun gelişim seyri aktarılmıştır. Dönüm noktası sayılabilecek çalışmalardan örnekler verilmiş ve konunun uygulama alanlarından bahsedilmiştir. Bu tez çalışmasında ele alınan sistemin integre edilebilirlik koşulu için kullanılan Magri teoremine değinilmiştir.

2. bölümde bu tez çalışmasının alt yapısını oluşturan konular özet halinde verilmiştir. 2.1 alt bölümünde Newton mekaniği ile aynı hareket denklemlerini veren fakat bunu farklı bir yaklaşımla sunan Lagrange mekaniği anlatılmıştır. Ele alınan denklem varyasyonel bir problemi temsil ettiği için bununla ilgili tanımlamalar yapılmış, Euler Lagrange denklemlerinin elde edilişi gösterilmiştir. 2.2 alt bölümünde Hamilton ile Lagrange mekanikleri arasındaki farklar anlatılmış, Euler-Lagrange denklemlerinin karşılığı olan Hamilton kanonik denklemleri farklı formlarda verilmiştir. Hamilton sistemlerin Liouville teoremine göre nasıl integre edilebilir olduğuna değinilmiştir. Lagrange mekaniğinden Hamilton mekaniğine geçiş yapılırken standart yöntemlerde bazen tutarsızlıklar yaşanmaktadır. Dirac bu tutarsızlıklara dikkat çekerek bağ analizi yöntemleri geliştirmiştir. 2.3 alt bölümünde tez çalışması sırasında Legendre dönüşümü ile Lagrange yoğunluğundan birinci Hamilton yoğunluğuna geçerken görülen tutarsızlıkları gidermek için kullanılan Dirac bağ analizi ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Burada verilen bağ denklemleri ile simplektik ve Hamilton operatörleri elde etmek mümkün olmuştur. 2.4 alt bölümünde evrimsel denklemlerin Magri teoremine göre çoklu Hamiltoniyen yapı oluşturmaları ve simplektik yapı ile ilgili bilgiler

verilmiştir. Hamilton operatörlerin sağlaması gereken Jacobi özdeşliğinin sınanması için Olver tarafından geliştirilen ve bu tez çalışmasında yararlanılan alternatif yöntem anlatılmıştır. 2.5 alt bölümünde bu çalışmada simetrilerin elde edilmesi için kullanılan Lie teorisi araçları ve simetrilere karşılık gelen korunumlu niceliklerin belirlenmesini sağlayan Noether teoremi ile ilgili bilgi verilmiştir.

3. bölümde 2019 yılında yayınlanan bir makalede bulunan sonuçlar ele alınmıştır. 3.1 alt bölümünde evrimsel Hirota tipinde $(3 + 1)$ -boyutlu denklemlerin genel formundan başlanarak elde edilen Euler Lagrange formundaki denklem verilmiştir. 3.2 alt bölümünde ise bu denklemin iki bileşenli gösterimi açıklanmıştır. 3.3 alt bölümünde bu denklemin birinci Hamiltoniyen yapısı gösterilmiştir. 3.4 alt bölümünde ise bu denklemden ikili-Hamiltoniyen yapıya sahip olacak şekilde beş ayrı denklemin türetilişi anlatılmıştır. Burada verilen *Sistem-1* olarak adlandırılmış denklem bu tez çalışmasının başlangıç noktası olmuştur.

4. bölümde 2. bölümde özet halinde sunulan bilgiler ışığında $(2 + 1)$ -boyutlu yeni ikili-Hamiltoniyen sistem oluşturulmuş ve bu sisteme ait korunumlu nicelikler açığa çıkarılmıştır. 4.1 alt bölümünde ise 3.4 alt bölümünde *Sistem-1* olarak verilen denklem ele alınmıştır. Bu denklem için verilen nokta simetriler arasından özel bir seçim ile bir simetri birleşimi belirlenmiştir. Bu simetri tarafından belirlenen toplam türev dönüşümleri kullanılarak denklem $(2 + 1)$ -boyuta indirgenmiştir. İndirgenmiş denklemin iki bileşenli gösterimde yazılmasıyla oluşan $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sistem bu tez çalışmasının asıl unsurunu teşkil etmektedir. Gene aynı simetri birleşimi ile 3 alt bölümünde $(3 + 1)$ -boyutlu sistem için verilen tüm parametreler $(2 + 1)$ -boyuta indirgenmiştir. 4.2 alt bölümünde indirgenmiş dejenere Lagrange yoğunluğundan başlanarak $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sisteme ait sırasıyla birinci Hamiltoniyen yoğunluğu, simplektik operatör, birinci Hamilton operatörü elde edilerek Hamiton yapının oluşması için gereken şartların sağlandığı gösterilmiştir. İki bileşenli gösterimin sağladığı yarar simplektik ve Hamilton operatörlerin elde edilmesine imkan tanınmasıdır. 4.3 alt bölümünde simetri koşulu asimetric çarpanlar gösterimi simetri indirgemesi ile bulunarak yazılmış, bu sayede oluşan tekrarlama ilişkisiyle $(2 + 1)$ -boyutlu sisteme ait tekrarlama operatörü elde edilmiştir. 4.4 alt bölümünde tekrarlama operatörü birinci Hamilton operatörüne uygulanarak ikinci Hamilton operatörü elde edilmiştir. Hamilton operatörlerin doğrusal birleşimlerinin sağlaması gereken ilk özellik olan ters simetrinin sağlandığı her iki operatörün yapısına bakılarak kolayca anlaşılmaktadır. Sağlanması gereken ikinci özellik olan Jacobi özdeşliği ise Olver tarafından geliştirilen yöntemle göre sadece J_0^r üzerinde işlem yapılarak kontrol edilmiştir. Jacobi özdeşliği ile ilgili işlemler 4.5 alt bölümünde konu olmuştur. 4.6 alt bölümünde $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sistemin ikili-Hamiltoniyen yapı oluşturularak Magri anlamında integre edilebilir sistem olduğu

gösterilmiştir. Gerçekleştirilen simetri indirgemesi bu bakımdan $(3 + 1)$ -boyutlu sistemin ikili-Hamiltoniyen yapısını korumuştur. 4.1 alt bölümünde $(3 + 1)$ -boyuttan simetri indirgemisi ile elde edilen parametreler ile 4.2, 4.3 ve 4.4 alt bölümlerinde $(2 + 1)$ -boyutlu sistem üzerinde çalışılarak elde edilen parametrelerin aynı olduğu gözlenmiştir. Bu durum seçili simetri indirgemesinin başarılı olduğunu gösterir. 4.7 alt bölümünde $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sisteme ait nokta simetriler verilmiştir. Bu simetrilerin Lie cebiri yapısına uygun olduğunu göstermek için Lie parantezleri alınıp sonuçlar sıra değiştirme (komütatör) tablosu halinde verilmiştir. Üzerinde çalışılan sistem Lagrange yoğunluğuna sahip olduğu için varyasyonel problemi temsil eder. Bu durumda Noether teoremine göre nokta simetrilere karşılık gelen karakteristikler korunum yasalarının da karakteristiğidir. Bu sayede $(2 + 1)$ -boyutlu yeni sistemin tanımladığı akışa ait korunumlu niceliklere ulaşılmıştır. İlave olarak, yeni korunumlu niceliklerin toplam diverjans gösterimi elde edilerek doğruluğu ispatlanmıştır.

KdV denklemi ile başlayan evrimsel denklemlerin tam çözümlerine yönelik araştırmalarda günümüze kadar oldukça yol katedilmiştir fakat literatürde $(2 + 1)$ ve $(3 + 1)$ -boyutlu denklemler az yer almaktadır. Bu tez çalışmasında literatürde henüz yeni olan söz konusu $(3 + 1)$ -boyutlu denklemden başarılı bir simetri indirgemesi ile elde edilen yeni $(2+1)$ -boyutlu ikili-Hamiltoniyen integre edilebilir sistem ve korunum yasaları ile bu alana katkı sunulduğu düşünülmektedir. Farklı simetri seçimleri ile yeni integre edilebilir sistemler elde edilip edilemeyeceği henüz bilinmemektedir. Farklı simetri indirgemeleri denenerek çoklu-Hamiltoniyen yapının korunduğu yeni integre edilebilir sistemler bulmak gelecekteki araştırmalara konu olabilir.

- [1] H. Flaschka, A. C. Newell, M. Tabor, "Integrability," in *What is Integrability?* (Ed: V.E. Zakharov), Springer Berlin, Heidelberg, 1991, p. 72.
- [2] F. Xing, L. Yang, "Introduction to the painlevé property, test and analysis," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1562, p. 24, 2013.
- [3] N. Ercolani, E. D. Siggia, "Painlevé property and integrability," in *What is Integrability?* (Ed: V.E. Zakharov), Springer Berlin, Heidelberg, 1991, p. 62.
- [4] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, "Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of painleve type," *Lettere al Nuovo Cimento*, vol. 23, pp. 333–338, 1978.
- [5] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, "The painlevé property for partial differential equations," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 24, p. 522, 1983.
- [6] K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos, A. Ramani, "Do all integrable evolution equations have the painlevé property?" *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, vol. 3, p. 073, 2007.
- [7] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [8] F. Magri, "A simple model of the integrable hamiltonian equation," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 19, p. 1156, 1978.
- [9] F. Magri, "A geometrical approach to the nonlinear solvable equations," in *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, in: Lecture notes in Physics* (Eds: M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani), Springer New York, 1980, pp. 233–263.
- [10] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2001.
- [11] S. Kowalevski, "Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe," *Acta Mathematica*, vol. 12, pp. 177–232, 1889.
- [12] H. Poincare, "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique," *Acta Mathematica*, vol. 13, pp. 1–270, 1890.
- [13] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, "Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states," *Physical Review Letters*, vol. 15 (6), pp. 240–243, 1965.
- [14] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, "Method for solving the korteweg-de vries equation," *Physical Review Letters*, vol. 19 (19), p. 1095, 1967.
- [15] V. E. Zakharov, L. D. Faddeev, "Korteweg-de vries equation: A completely integrable hamiltonian system," *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 5, pp. 280–287, 1971.

- [16] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of wave in nonlinear media," *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 34 (1), p. 62, 1972.
- [17] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "Method for solving the sine-gordon equation," *Physical Review Letters*, vol. 30 (25), p. 1262, 1973.
- [18] *A study of a nonlinear schrödinger equation for optical fibers*. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1612.00358> (visited on 2016).
- [19] J. J. Mazo, A. V. Ustinov, "The sine-gordon equation in josephson-junction arrays," in *The sine-Gordon Model and its Applications*(Eds: J.C. Maraver, P.G. Kevrekidis, F. Williams), Springer Cham, 2014, pp. 155–175.
- [20] P. D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 21 (5), pp. 467–490, 1968.
- [21] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, "A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. 1," *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 8, pp. 226–235, 1974.
- [22] M. J. Ablowitz, S. Chakravarty, H. R. G., "Integrable systems and reductions of the self-dual yang–mills equations," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 44, p. 3147, 2003.
- [23] R. Hirota, "Exact solution of the korteweg—de vries equation for multiple collisions of solitons," *Physical Review Letters*, vol. 27, p. 1192, 1971.
- [24] B. Doubrov, E. V. Ferapontov, "On the integrability of symplectic monge–ampère equations," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 60 (10), pp. 1604–1616, 2010.
- [25] *Integrability of dispersionless hirota type equations in 4d and the symplectic monge-ampere property*. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1707.08070> (visited on 2018).
- [26] M. B. Sheftel, D. Yazıcı, "Lax pairs, recursion operators and bi-hamiltonian representations of $(3 + 1)$ -dimensional hirota type equations," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 136, pp. 207–227, 2019.
- [27] J. F. Plebanski, "Some solutions of complex einstein equations," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 16, p. 2395, 1975.
- [28] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, 1986.
- [29] D. Yazıcı, S. M. B., "Symmetry reductions of second heavenly equation and $(2 + 1)$ -dimensional hamiltonian integrable systems," *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, vol. 15 (3), pp. 417–425, 2008.
- [30] D. Yazıcı, "Symmetry reduction of the first heavenly equation and $(2 + 1)$ -dimensional bi-hamiltonian system," *Turkish Journal of Physics*, vol. 42 (2), pp. 183–190, 2018.
- [31] D. Yazıcı, " $(2 + 1)$ -dimensional bi-hamiltonian system obtained from symmetry reduction of $(3 + 1)$ -dimensional hirota type equation," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2178, p. 030 049, 2019.
- [32] L. N. Hand, J. D. Finch, *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 1999.
- [33] J. L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Paris, Ve Courcier, 1811.

- [34] S. T. Thornton, J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole, 2003.
- [35] K. Sundermeyer, *Constrained dynamics*. Springer-Verlag, 1982.
- [36] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiva University Press, 1964.
- [37] *Dirac bracket*. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_bracket (visited on 2022).
- [38] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer New York, NY, 1978.
- [39] D. Bachman, *A Geometric Approach to Differential Forms*. Birkhäuser Boston, 2012.
- [40] E. Noether, “Invariante variationsprobleme,” *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1918, pp. 235–257, 1918.
- [41] M. B. Sheftel, D. Yazıcı, “Symmetries, integrals and hierarchies of new (3+1)-dimensional bi-hamiltonian systems of monge–ampère type,” *Journal of Geometry and Physics*, vol. 146, p. 103 513, 2019.
- [42] F. Neyzi, M. B. Sheftel, D. Yazıcı, “Symmetries, integrals, and three-dimensional reductions of plebański’s second heavenly equation,” *Physics of Atomic Nuclei*, vol. 70 (3), pp. 584–592, 2007.
- [43] M. B. Sheftel, D. Yazıcı, A. A. Malykh, “Recursion operators and bi-hamiltonian structure of the general heavenly equation,” *Journal of Geometry and Physics*, vol. 116, pp. 124–139, 2017.
- [44] T. Wolf, “An analytic algorithm for decoupling and integrating systems of nonlinear partial differential equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 60 (3), pp. 437–446, 1985.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. Yazıcı D., Yaman S. "Symmetry Reduction of Monge Ampère Type Equation and (2+1)-Dimensional Bi-Hamiltonian System" Turkish Physical Society 38th International Physics Congress, Muğla, Türkiye, 31 Ağustos - 04 Eylül 2022, ss.239