

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM BİLGİ TEORİSİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Emriye ERSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fizik Anabilim Dalı
Fizik Programı

Danışman
Prof. Dr. Zeynel YALÇIN

Temmuz, 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM BİLGİ TEORİSİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Emriye ERSOY tarafından hazırlanan tez çalışması 10.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Fizik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Zeynel YALÇIN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Zeynel YALÇIN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Reyhan KAYA, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Önder EYECİOĞLU, Üye
Nişantaşı Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Zeynel YALÇIN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan KUANTUM BİLGİ TEORİSİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Emriye ERSOY

İmza

Sevgili kızım Zehra' ya

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimi döneminde ve tez yazma sürecinde ilgisini eksik etmeyen, tecrübesinden ve bilgisinden yararlandığım değerli hocam Prof. Dr. Zeynel YALÇIN' a teşekkürü borç bilirim. Bütün hayatım boyunca verdikleri emek ve destek için annem Sevim ERSOĞAN, babam Recai ERSOĞAN, kardeşlerim İbrahim ERSOĞAN, Esin ERSOĞAN ve İsmail ERSOĞAN' a çok teşekkür ederim. Tez yazma sürecinde maddi ve manevi destek olan eşim Muhammed ERSOY' a çok teşekkür ederim. Ayrıca tezi yazma sürecinde beni teşvik eden arkadaşlarım Hilal, Çiğdem ve Bengisu' ya teşekkür ederim.

Emriye ERSOY

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
2 MATEMATİKSEL TEMELLER	3
2.1 Vektör Uzayı	3
2.2 İç Çarpım	4
2.3 Dış Çarpım	4
2.4 Tensör Çarpım	5
2.5 Operatörler	5
2.5.1 Pauli Matrisleri	6
3 KUANTUM BİLGİ TEORİSİ	9
3.1 Kübit	9
3.1.1 Bloch Küresi	10
3.2 Yoğunluk Operatörü	11
3.2.1 Saf Durum İçin Yoğunluk Operatörü	11
3.2.2 Karışık Durumun Yoğunluk Operatörü	12
3.3 Kısmi İz ve İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcisi	13
3.4 Süperoperatör ve Kraus Gösterimi	13
4 ÖLÇÜM	16
4.1 Genelleştirilmiş Ölçüm	16

4.2	Projeksiyon Ölçümü	17
4.2.1	Bileşik Sistemlerde Ölçüm	22
4.3	Pozitif Operatör Değerli Ölçümler(POVM)	23
5	ENTROPİ	25
5.1	Shannon Entropisi	25
5.2	Von Neumann Entropisi	26
5.2.1	Ölçüm ve Entropi	29
6	DEKOHERANS	30
6.1	Tek Kübit Üzerinde Dekoherans Örnekleri	30
6.1.1	Bit-flip Kanalı	30
6.1.2	Faz-flip Kanalı	31
6.1.3	Bit-faz-flip Kanalı	33
6.1.4	Depolarizasyon Kanalı	34
6.1.5	Genlik azaltma Kanalı	35
6.1.6	Faz Azaltma Kanalı	37
7	SONUÇ VE ÖNERİLER	39
	Referanslar	43
	Tezden Üretilmiş Yayınlar	43

SİMGE LİSTESİ

$\langle A \rangle$	A Operatörünün Beklenen Değeri
I	Birim Operatörü
$\langle u $	Bra Vektörü
$ u\rangle\langle v $	Dış Çarpım
$\langle u, v \rangle$	İç Çarpım
Tr	İz Fonksiyonu
$ u\rangle$	Ket Vektörü
E_k	Kraus Operatörü
$\mathbb{C}^n$	n Boyutlu Kompleks Sayılar Kümesi
M_m	Ölçüm Operatörü
P	Projeksiyon Operatörü
S	Süperoperatör
$\otimes$	Tensör Çarpım
$U^\dagger$	U Operatörünün Hermityeni
U^{-1}	U operatörünün Tersi
$ u $	u vektörünün uzunluğu
σ_x	X Pauli Operatörü
σ_y	Y Pauli Operatörü
ρ	Yoğunluk Operatörü
σ_z	Z Pauli Operatörü

KISALTMA LİSTESİ

POVM Positive Operator-Valued Measurement

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	Tek kübitin gösterimi	11
Şekil 6.1	Bloch küresinin x eksenli elipsoide dönüşümü	31
Şekil 6.2	Bloch küresinin z eksenli elipsoide dönüşümü	33
Şekil 6.3	Bloch küresinin y eksenli elipsoide dönüşümü	34
Şekil 6.4	Bloch küresinde küçülme	35

KUANTUM BİLGİ TEORİSİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Emriye ERSOY

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Zeynel YALÇIN

Bu çalışmada son yıllarda üzerinde oldukça fazla çalışma yapılan kuantum bilgi teorisi incelenecektir. İlk olarak kuantum mekaniğinin matematiksel olarak açıklanmasına yardımcı olan lineer cebir kavramları gösterilecektir. Okuyucuya kuantum bilgi teorisine dair genel bir izlenim kazandırmak için kübit, Bloch küresi, yoğunluk operatörü, Kraus operatörü ve süperoperatör kavramları açıklanacaktır. Kuantum sistemleri üzerinde ölçüm çeşitleri ve iki farklı sistem üzerinde bazı uygulamaları gösterilecektir. Sistem üzerindeki belirsizliği ölçmek için entropi kavramı ele alınacaktır. Shannon entropisi ve Von Neumann entropisine ait özelliklere yer verilecektir. Son olarak sistemin çevre ile etkileşim sürecini açıklayan dekoherans kavramı ve tek kübit üzerindeki örnekleri incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Kuantum bilgi teorisi, yoğunluk operatörü, ölçüm, entropi, dekoherans

ABSTRACT

A STUDY ON QUANTUM INFORMATION THEORY

Emriye ERSOY

Department of Physics
Master of Science Thesis

Advisor: Prof. Dr. Zeynel YALÇIN

There are a lot of studies on quantum information theory in recent years. In this thesis we will examine quantum information theory. Firstly, we will study on lineer algebra which helps us to understand quantum mechanics. We will show qubit, Bloch sphere, density operator, Kraus operator and superoperator to give general information about quantum information theory. There will be several types of measurements on quantum systems. Also, we apply some measurements for two different systems. We will examine Shannon entropy and Von Neumann entropy to measure uncertainty of the system. Then, we will see decoherence which explains the process of system and environment interaction. We will give examples of decoherence on single qubit.

Keywords: Quantum information theory, density operator, measurement, entropy, decoherence

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Doğanın kanunlarını anlamada klasik fizik yetersiz kalmaktadır. Atom ve atomaltı parçacıkların dünyasına girdiğimiz zaman kuantum mekaniğinin açıklamalarına ihtiyaç duyuyoruz. Kuantum mekaniği matematik temeli oldukça güçlü olan bir teoridir. Özellikle lineer cebirden kuantum fiziğinin kavramlarını tanımlamak için faydalanılmıştır. Kuantum mekaniği güçlü ve karmaşık bir teoridir. Bunun sebeplerinden bir tanesi klasik fizikte karşılaşmadığımız süperpozisyon ilkesidir. Bu ilkeye göre bir kuantum durumu iki farklı durumun belli olasılıklarla lineer bileşiminden oluşabilir. Başka bir deyişle aynı anda iki duruma ait özelliği taşımaktadır. Kuantum mekaniğinin matematiksel açıklaması güçlü olmasına rağmen, bu teoride kavramsal problemler vardır. Bunlardan bir tanesi ölçüm problemidir (Pahlavani, 2012). Ölçüm yapıldıktan sonra sistemin durum vektöründe çökme olur ve sistem süperpozisyon özelliğini kaybeder. Bu aşamada kuantum dünyasından klasik dünyaya geçiş olur. Kuantum mekaniği ve klasik mekanik arasındaki ilişkiyi anlamak adına çalışmalar devam etmektedir. Bu ilişkiyi anlamamıza yardımcı olan kavramlardan bir tanesi dekoheransdır (Zurek, 2005). Sistemin çevre ile etkileşimi sonucu sistemde meydana gelen değişiklikler dekoherans teorisi ile tanımlanmıştır. Bir sistemden elde edilebilecek ortalama bilgi miktarını ölçmek için entropi kavramı üzerinde çalışma yapılmalıdır. Klasik bilgi teorisinde kullanılan Shannon entropisi ile kuantum bilgi teorisinde kullanılan Von Neumann entropisi arasında bazı benzerlikler bulunmaktadır.

Bu çalışmanın ilk bölümünde temel matematiksel bilgiler verilecektir. İkinci bölümde kuantum bilgi teorisindeki temel kavramlar üzerindeki çalışmalara yer verilecektir. Bu bölümde kübit, Bloch küresi ve yoğunluk operatörleri incelenecektir. Ayrıca açık kuantum sistemlerini tanımlamak için Kraus gösterimi açıklanacaktır. Üçüncü bölümde kuantum sistemleri üzerinde ölçüm ile ilgili bilgiler verilecektir. Birkaç sistem üzerinde ölçüm uygulanacak ve hesaplamalar yapılacaktır. Dördüncü bölümde entropi kavramı ele alınacaktır. Kuantum bilgi teorisinde kullanılan Von Neumann entropisini

anlamak için önce klasik bilgi teorisindeki Shannon entropisi incelenecektir. Tezin son bölümünde ise dekoherans kavramı açıklanacaktır.

1.2 Tezin Amacı

Kuantum bilgi teorisi adına temel bilgileri vermektir. Kuantum sistemleri üzerinde ölçüm uygulamasını göstererek sistem hakkında bilgi elde etmektir. Ayrıca sistemde hataya sebep olan gürültü kavramını tanımlamaktır.

1.3 Hipotez

Kuantum sistemleri süperpozisyon özelliği ile klasik sistemlerden daha güçlüdür. Fakat dekoherans sonucu bu özellik kaybolmaktadır. Süperpozisyon özelliğini korumak için dekoherans sorunu çözülmelidir.

2 MATEMATİKSEL TEMELLER

Kuantum mekaniğini iyi anlamak için temel lineer cebir bilgisine ihtiyacımız vardır. Bunun için öncelikle lineer cebirdeki bazı kavramları inceleyeceğiz.

2.1 Vektör Uzayı

Tanım 2.1. Toplama ve skaler çarpma işlemine göre kapalı olan kümeye vektör uzayı denir.

Kuantum hesaplama için önemli olan uzaylardan bir tanesi n boyutlu karmaşık sayılar uzayıdır. $\mathbb{C}^n$ ile gösterilir.

Kuantum hesaplamada vektörleri ifade etmek için ket $| \rangle$ ve bra $\langle |$ notasyonları kullanılır.

c_i karmaşık katsayılar kümesi ve $|v_i\rangle$ vektör kümesi olsun.

$$\sum_{i=1}^n c_i |v_i\rangle = c_1 |v_1\rangle + c_2 |v_2\rangle + \dots + c_n |v_n\rangle \quad (2.1)$$

şeklindeki gösterimine $|v_i\rangle$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

V bir vektör uzayı olsun. V uzayına ait bütün vektörler $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$ vektör kümesindeki elemanların lineer bileşimi şeklinde yazılabiliyorsa bu vektör kümesi V vektör uzayını gerer denir (Benetti ve Casati, 2004).

Eğer $c_1 |v_1\rangle + c_2 |v_2\rangle + \dots + c_n |v_n\rangle = 0$ ve en az bir tane c_i sıfırdan farklı ise $\{|v_i\rangle\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Yani bu kümedeki her bir vektör diğer vektörlerin lineer bileşimi şeklinde yazılabilir. Lineer bağımlı olmayan kümeye lineer bağımsız denir (McMahon, 2007).

$\{|v_i\rangle\}$ kümesi V uzayını geriyor ve lineer bağımsız ise $\{|v_i\rangle\}$ kümesine, V uzayının bazı denir. Vektör uzayının boyutu bazı kümesinin eleman sayısı kadardır.

2.2 İç Çarpım

İki vektörün iç çarpımı bir karmaşık sayıya eşittir. $u, v \in C^n$ için iç çarpım $\langle u, v \rangle$ şeklinde yazılır. Bir vektörün kendisiyle iç çarpımının karekökü o vektörün normunu verir (Benetti ve Casati, 2004).

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (2.2)$$

$(|u\rangle)^\dagger = \langle u^*|$ vektörü, $|u\rangle$ vektörünün transpozu ve karmaşık eşleniği alınmış halidir. $(|u\rangle)^\dagger = \langle u^*|$ brasına, $|u\rangle$ vektörünün hermitiyeni denir.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* & \dots & u_n^* \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

İki vektörün iç çarpımı için birinci vektörün hermitiyeni alınır. u ve v vektörlerinin iç çarpımı şu şekilde yazılır:

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* & \dots & u_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i \quad (2.4)$$

2.3 Dış Çarpım

Ket ve branın $| \rangle \langle |$ çarpımına dış çarpım denir. Dış çarpımın matris gösterimini inceleyelim:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

olmak üzere dış çarpımı

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

olur.

2.4 Tensör Çarpım

Çok parçalıklı kuantum sistemlerin durumunu ifade etmek için tensör çarpıma ihtiyaç duyarız.

U, V sırasıyla n, m boyutlu iki Hilbert uzayı olsun. Bu iki uzayın bileşiminden tensör çarpım ile daha büyük bir uzay elde edilir.

$W = U \otimes V$ şeklinde ifade edilir.

W uzayının boyutu $n.m$ olur. W uzayındaki vektörler U ve V uzayındaki vektörlerin tensör çarpımından oluşur. $|u_i\rangle, |v_j\rangle$ sırasıyla U ve V uzaylarının bazıları olsun. a, b vektördür. $a \in U, b \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dir.

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |u_i\rangle, \quad |b\rangle = \sum_{j=1}^m \beta_j |v_j\rangle \quad (2.7)$$

$$|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle \quad (2.8)$$

$|w_{ij}\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$ W uzayı için baz kümesini oluşturur.

2.5 Operatörler

Operatör (işlemci) bir fonksiyonu başka bir fonksiyona dönüştürür. Büyük harf ile gösterilir.

Örneğin; A operatörü $|\psi\rangle$ vektörüne uygulanırsa başka bir vektör elde edilir. Şöyle yazılır:

$$A|\psi\rangle = |\phi\rangle \quad (2.9)$$

Tanım 2.2. Karmaşık eşleniğinin transpozesi kendisine eşit olan operatörlere hermityen operatör denir. Şu şekilde gösterilir:

$$U = U^\dagger \quad (2.10)$$

Tanım 2.3. Hermityeni ile tersi birbirine eşit olan operatörlere üniter operatör denir ve şöyle gösterilir (Kaye vd., 2006):

$$U^{-1} = U^\dagger \quad (2.11)$$

Tanım 2.4. n boyutlu bir baz kümesindeki vektörlerin kendileriyle dış çarpımlarının toplamı birim operatörüne eşittir. Bu duruma tamlık bağıntısı denir.

$$\sum_i^n |u_i\rangle\langle u_i| = I \quad (2.12)$$

Tamlik bağıntısı kullanılarak operatörler matris formunda yazılabilir. Burada hangi bazın kullanıldığı önemlidir. Operatör farklı bir bazda yazılırsa yeni bir matris elde edilir.

A operatörünün $|u_i\rangle$ bazına göre matris gösterimini inceleyelim:

$$\begin{aligned} A &= I A I = \left(\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| \right) A \left(\sum_j |u_j\rangle\langle u_j| \right) = \sum_{i,j} \langle u_i|A|u_j\rangle |u_i\rangle\langle u_j| \\ &= \begin{pmatrix} \langle u_1|A|u_1\rangle & \langle u_1|A|u_2\rangle & \dots & \langle u_1|A|u_n\rangle \\ \langle u_2|A|u_1\rangle & \langle u_2|A|u_2\rangle & \dots & \langle u_2|A|u_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_n|A|u_1\rangle & \langle u_n|A|u_2\rangle & \dots & \langle u_n|A|u_n\rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.5.1 Pauli Matrisleri

Pauli operatörleri $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y$ ve σ_z dir. Kapalı kuantum sistemlerin zamanla değişimi üniter operatörle olur. Bir kübite etki eden üniter operatöre 1-qubit kapı denir. 2x2 matrislerle gösterilir. Pauli operatörleri kuantum kapıları olarak kullanılabilir. Pauli kapıları baz durumlarına etki ederek onları değiştirir. Başlangıçta bazların lineer bileşiminden oluşan kübit, Pauli kapısı uygulandıktan sonra değişen bazların lineer bileşiminde bulunur. σ_x kuantum değil kapısı olarak bilinir. Bu kapının $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ bazlarına etkisi şu şekilde olur (Kaye vd., 2007):

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma_x|1\rangle = |0\rangle \quad (2.14)$$

Değil kapısının, $|0\rangle$ bazının matris gösterimine etkisi şu şekildedir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Diğer Pauli operatörlerinin $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarına etkisi şu şekilde olur:

$$\sigma_0|0\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_0|1\rangle = |1\rangle \quad (2.16)$$

$$\sigma_y|0\rangle = -i|1\rangle, \quad \sigma_y|1\rangle = i|0\rangle \quad (2.17)$$

$$\sigma_z|0\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_z|1\rangle = -|1\rangle \quad (2.18)$$

Pauli operatörlerinin matris gösterimleri şöyledir (Mermin, 2007):

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Tanım 2.5. Bir operatörün verilen bir kuantum durumuna göre ortalama değerine beklenen değer denir. A operatörünün $|\psi\rangle$ durumuna göre beklenen değeri $\langle A \rangle$ ile gösterilir:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (2.23)$$

Tanım 2.6. Bir operatörünün matris gösterimindeki köşegen elemanların toplamına o operatörün izi denir (Watrous, 2018). $\text{Tr}(A)$ ile gösterilir.

A işlemci, $|u_i\rangle$ baz vektörleri olmak üzere A operatörünün izi aşağıdaki gibi yazılır:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n \langle u_i | A | u_i \rangle \quad (2.24)$$

3

KUANTUM BİLGİ TEORİSİ

Bilgi, bilgi işleme makineleriyle fiziksel ortamlarda saklanır. Bilginin iletimi de fiziksel kaynakla olur. Bilgi işleme makinelerinin özellikleri fizik yasalarına göre belirlenir. Günümüzdeki bilgisayarlar klasik fiziğin kurallarına göre oluşturulmuştur. Klasik bilgisayarları daha güçlü yapmak için transitör sayısını arttırmak gereklidir. Transitörlerin yakın zamanda en küçük boyutlarına ulaşacakları görülüyor. Daha fazla küçültmek istendiğinde atomik boyutlara ineceği ve elektronları durduramayacağı öngörülüyor. Atom, foton ve elektron gibi küçük parçacıklarda klasik fiziğin kuralları geçerli değildir. Bu parçacıkların davranışlarını anlamak için kuantum fiziğine ihtiyaç vardır. Bu yüzden kuantum mekaniği ile klasik bilgiyi yeniden formüle ederek kuantum bilgi kuramı oluşturuluyor.

3.1 Kübit

Kuantum hesaplamada bilgiyi depolamak için kullanılan birime kübit ya da kuantum bit denir. Kübitler 2 seviyeli kuantum durumlarından oluşur. Elektronun belirli bir yöndeki spinleri kübit oluşturmak için kullanılabilir. Aşağı yöndeki spin $|0\rangle$, yukarı yöndeki spin $|1\rangle$ durumuna karşılık gelir. Ayrıca fotonun varlığı ve yokluğu sırasıyla $|1\rangle$ ve $|0\rangle$ durumlarını tanımlamak için kullanılabilir. Bunlar gibi birçok fiziksel sistemle kübit oluşturulabilir.

Kübit 2 boyutlu Hilbert uzayında bulunur. $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektörleri kuantum durumunu tanımlamak için baz vektörler olarak kullanılır (Rieffel and Polak, 2011). Bir kübitin durumu $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ bazlarının lineer bileşimi olarak gösterilir.

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $|\psi\rangle$ kübit durumu şu şekilde yazılır (Renes, 2015):

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.1)$$

İki kubitten oluşan bir sistemin durumunu inceleyelim. Bir kubit iki boyutlu karmaşık vektör uzayında bulunur. İki kubitli sistemin uzayı $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ yani $\mathbb{C}^4$ olur.

Bazları $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ olan iki kubit durumu yazalım:

$$|a\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle \quad (3.2)$$

$$|b\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle \quad (3.3)$$

Bu kubitlerden oluşan 4 boyutlu sistem için yeni bir baz bulalım:

$$u_1 = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle \quad (3.4)$$

$$u_2 = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle \quad (3.5)$$

$$u_3 = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle \quad (3.6)$$

$$u_4 = |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle \quad (3.7)$$

İki kubitten oluşan ψ durumunu bulduğumuz bazlarla yazalım:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \otimes (\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle) \\ &= \alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \beta_1\alpha_2|10\rangle + \beta_1\beta_2|11\rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.1.1 Bloch Küresi

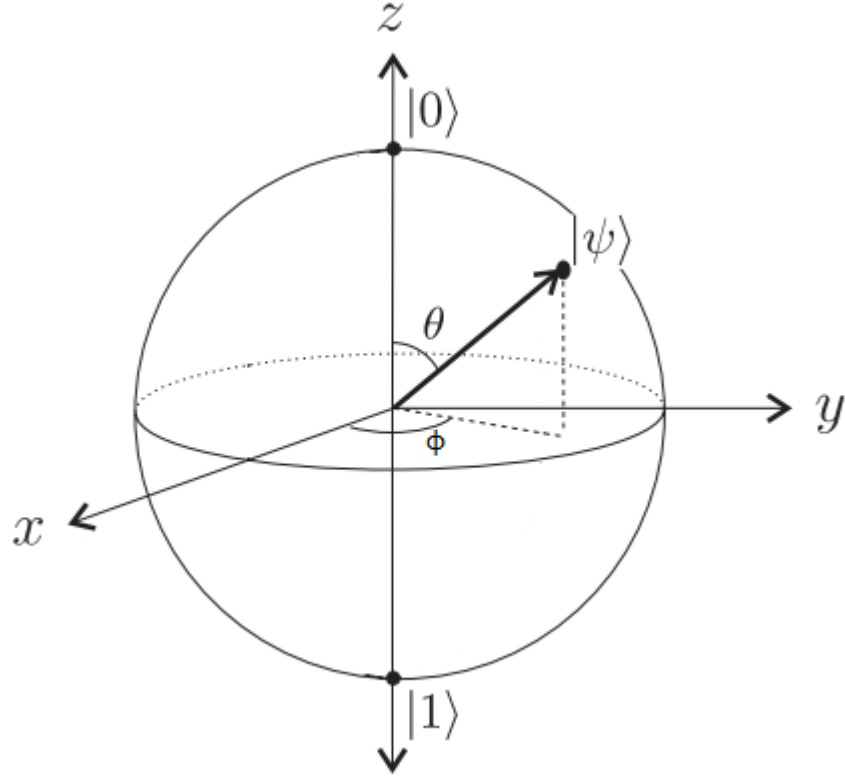
Saf durumdaki bir kubit Bloch küresinin yüzeyinde bir nokta belirtir. Kubitin durum vektörünü şu şekilde ifade edebiliriz:

$$|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (3.9)$$

Bu kubit için yoğunluk matrisini yazalım:

$$\rho(\theta, \phi) = |\psi(\theta, \phi)\rangle \langle \psi(\theta, \phi)| = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Herhangi bir 2x2 Hermisyen matrisi Pauli matrislerini ($I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) baz alarak



Şekil 3.1 Tek kübitin gösterimi

aşağıdaki gibi yazabiliriz (Benetti ve Casati, 2007).

$$\rho = \frac{1}{2}(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

3.2 Yoğunluk Operatörü

Bir kuantum sistemi bir veya daha fazla durumdan oluşabilir. Birden çok durumdan oluşan sisteme topluluk denir. Topluluktan oluşan sistemin durumu tam olarak bilinemez. Her durumun belli bir bulunma olasılığı vardır. Bu yüzden topluluk karışık duruma sahiptir. Tek durumdan oluşan sistem ise saf durumdadır. Saf durumdaki sistem durum vektörü veya yoğunluk operatörüyle tanımlanabilir. Karışık duruma sahip sistem ise sadece yoğunluk operatörüyle tanımlanabilir.

3.2.1 Saf Durum İçin Yoğunluk Operatörü

$|\psi\rangle$ durumunda bulunan bir sistemin yoğunluk operatörü ρ ile gösterilir ve şöyle yazılır:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (3.12)$$

Beklenen değeri yoğunluk operatörünü kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n c_k^* c_l \langle u_k | A | u_l \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle u_l | \psi \rangle \langle \psi | u_k \rangle \langle u_k | A | u_l \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle u_l | \rho | u_k \rangle \langle u_k | A | u_l \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle u_l | \rho I A | u_l \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle u_l | \rho A | u_l \rangle \\ &= \text{Tr}(\rho A) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.2 Karışık Durumun Yoğunluk Operatörü

n farklı durumdan oluşan bir topluluk düşünelim. $|\psi_i\rangle$ durumunun toplulukta bulunma olasılığı p_i olsun. $|\psi_i\rangle$ durumunun yoğunluk operatörü $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ dir. Bütün sistemin yoğunluk operatörü

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_{i=1}^n p_i \rho_i \quad (3.14)$$

şeklinde hesaplanır.

Yoğunluk operatörüne yoğunluk matrisi de denir. Karışık durumun yoğunluk matrisinde köşegen dışındaki elemanlar sıfırdır. Saf durumda ise sıfırdan farklı köşegen olmayan eleman bulunur. Bu terimlerin bulunması bir sistemin durumunun farklı bileşenleri ile etkileşiminin olduğunu gösterir. Köşegende bulunan elemanlar

durumların elde edilme olasılığını verir. Bütün olasılıkların toplamı 1 olacağı için

$$Tr(\rho) = 1 \quad (3.15)$$

olur.

3.3 Kısmi İz ve İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcisi

Birden fazla alt sistemden oluşan bileşik sistemler için kullanılan yoğunluk işlemcisine indirgenmiş yoğunluk işlemcisi denir.

Birbirinden uzakta bulunan ve haberleşmeye çalışan iki kişi düşünelim. Sistemin bir ucunda Ayşe, diğer ucunda Berk bulunsun. Ayşe' nin sistemine A , Berk' in sistemine B diyelim. Her iki kişi sadece kendi alt sistemine ait bilgiye sahip bulunuyor. Bütün durum ise iki alt sisteme ait bilgiyi içeriyor. Alt sisteme ait yoğunluk işlemcisine indirgenmiş yoğunluk işlemcisi denir. Burada öncelikle kısmi izin tanımını yapmamız gerekiyor.

$|a_1\rangle$ ve $|a_2\rangle$, A sisteminin uzayına ait; $|b_1\rangle$ ve $|b_2\rangle$, B sisteminin uzayına ait vektörler olsun. B sistemi üzerinden kısmi iz şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} Tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) &= |a_1\rangle\langle a_2| Tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \\ &= |a_1\rangle\langle a_2| \langle b_2|b_1\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bütün sistemin yoğunluk işlemcisine ρ diyelim. A sistemine ait yoğunluk işlemcisi

$$\rho^A = Tr_B(\rho) \quad (3.17)$$

3.4 Süperoperatör ve Kraus Gösterimi

Kapalı bir kuantum sisteminin zamanla değişimi üniter operatörle tanımlanır. Çevreyle etkileşimi olan sistemlere açık sistemler denir. Açık sistemlerin zamanla değişimi üniter operatörle sağlanamaz. Açık kuantum sistemlerinin değişimi ilgilenilen esas sistem ve onun etkileşimde olduğu çevrenin oluşturduğu büyük kapalı sistem üzerinden tanımlanır. Bu sistemden bütün sistem olarak bahsedeceğiz. Bütün sistem kapalı olduğu için zamanla değişimi üniter operatörle olacaktır (To, 2003).

$\rho_{\text{büt}}(t)$, $\rho_{\text{sis}}(t)$ ve $\rho_{\text{çev}}(t)$ sırasıyla bütün sistemi, esas sistemi ve çevreye ait sistemi tanımlayan yoğunluk operatörleridir.

$\rho_{\text{büt}}(0)$, $\rho_{\text{sis}}(0)$ ve $\rho_{\text{çev}}(0)$ yoğunluk operatörleri sistemlerin başlangıç durumlarını gösterir.

$|e_k\rangle$ çevrenin durum uzayının ortonormal bazı olsun.

$$\rho_{\text{çev}}(0) = |e_0\rangle\langle e_0| \quad (3.18)$$

$$\rho_{\text{büt}}(0) = \rho_{\text{sis}}(0) \otimes \rho_{\text{çev}}(0) = \rho_{\text{sis}}(0) \otimes |e_0\rangle\langle e_0| \quad (3.19)$$

Bütün sistemin zamanla değişimini göstermek için U üniter operatörünü kullanalım.

$$\rho_{\text{büt}}(t) = U(t)\rho_{\text{büt}}(0)U^\dagger(t) \quad (3.20)$$

Esas sistemin değişimini bulmak için çevre üzerinden kısmi iz alınır.

$$\begin{aligned} \rho_{\text{sis}}(t) &= \text{Tr}_{\text{çev}}\{U(t)\rho_{\text{büt}}(0)U^\dagger(t)\} \\ &= \sum_k \langle e_k|U(t)\rho_{\text{büt}}(0)U^\dagger(t)|e_k\rangle \\ &= \sum_k \langle e_k|U(t)\rho_{\text{sis}}(0) \otimes |e_0\rangle\langle e_0|U^\dagger(t)|e_k\rangle \\ &= \sum_k \langle e_k|U(t)|e_0\rangle \rho_{\text{sis}}(0) \langle e_0|U^\dagger(t)|e_k\rangle \\ &= \sum_k E_k \rho_{\text{sis}}(0) E_k^\dagger \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$E_k = \langle e_k|U(t)|e_0\rangle \quad (3.22)$$

ifadesine Kraus operatörü denir.

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = I \quad (3.23)$$

şartını sağlamalıdır.

S lineer operatörden lineer operatöre bir dönüşüm olsun:

$$S : \rho_{\text{sis}}(0) \rightarrow \rho_{\text{sis}}(t) = \sum_k E_k \rho_{\text{sis}}(0) E_k^\dagger \quad (3.24)$$

dönüşümüne kuantum operasyonu ya da süperoperatör denir. Süperoperatör yoğunluk matrisini yoğunluk matrisine götürür (Benetti ve Casati, 2007).

$$\rho_{\text{sis}}(t) = \sum_k E_k \rho_{\text{sis}}(0) E_k^\dagger \quad (3.25)$$

ifadesi Kraus gösterimi ya da operatör-toplam gösterimi olarak bilinir.

Kuantum hesaplamada atom ve foton gibi hassas yapılar kullanıldığı için izole edilmiş bir sisteme ihtiyaç duyulur. Çevreyle etkileşimi olmayan böyle sistemlere kapalı sistemler denir. Fakat sistemde neler olduğunu görmek için gözlem yapılması gerekir. Ölçüm yapılırken sistemle ölçüm aracı arasında etkileşim olacağı için kuantum sistemi kapalı olma özelliğini artık tam anlamıyla sağlayamaz (Nielsan ve Chuang, 2010).

Klasik mekaniğin kurallarına göre oluşturulan sistemler belli bir durumda bulunurlar. Kuantum hesaplamada ilgilendiğimiz sistemler ise birden fazla durumun lineer bileşiminden oluşur. Her durumun bir bulunma olasılığı vardır. Bu sistem üzerinde ölçüm yapıldığı zaman süperpozisyon halinde bulunan durumlardan biri elde edilir. Ölçüm sonucu kuantum sisteminden klasik bir bilgi elde edilir. Ölçüm yapıldıktan sonra sistem elde edilen sonuçtaki durumda bulunur. Buna "çökme" denir. Ölçüm yapıldıktan sonra sistemi eski haline getirmek mümkün değildir.

4.1 Genelleştirilmiş Ölçüm

Kuantum sistemi üzerindeki ölçümü genel bir şekilde ifade etmek için ölçüm işlemcisi tanımlanır. $\{M_m\}$ ölçüm işlemcilerinin oluşturduğu küme olsun. Burada m ölçüm sonuçlarından birini temsil eder. M_m tamlik bağıntısını sağlamalıdır (Oskin, 2002).

$|\psi\rangle$ durumunda bulunan bir kuantum sisteminde, m durumunu elde etme olasılığı

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (4.1)$$

ile bulunur.

Ölçüm sonucunda sistemin durumu ise

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} \quad (4.2)$$

şeklinde olur (Nielsan ve Chuang, 2010).

Eğer sistem yoğunluk işlemcisiyle tanımlandıysa m sonucunun elde edilme olasılığı

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \quad (4.3)$$

ile hesaplanır.

4.2 Projeksiyon Ölçümü

Bir operatör için her öz duruma karşılık gelen tek bir özdeğer vardır. Fakat operatörün özdeğeri dejenere olmuş ise, farklı öz durumlar aynı özdeğere sahip olur.

John von Neumann'ın kuantum ölçüm üzerinde önemli çalışmaları vardır. Von Neumann ölçümü projeksiyon ölçümü olarak da bilinir. Projeksiyon ölçümü için iki postula vardır (Khrennikov, 2008).

Postula 1 A operatörünün özdeğeri dejenere olmamış ise, ölçüm sonrası sistemin durumu a özdeğerine karşılık gelen özvektör ile tanımlanır. a özdeğeri A gözlenebilirinin ölçüm sonucudur.

Postula 2 A operatörünün özdeğeri dejenere olmuş ise, ölçüm sonrası sistemin durumu tanımlanamaz. Bu durumu tanımlamak için özdeğeri dejenere olmamış başka bir gözlenebilir ile A gözlenebilirleri arasında ilişki kurularak, yeni gözlenebilir üzerinden ölçüm yapılmalıdır.

Lüders, Von Neumann'ın çalışmalarına katkıda bulunmuştur. Von Neumann ve Lüders'in projeksiyon postullarını inceleyelim (Ozawa, 2014):

Postula 1 ρ yoğunluk operatörü ile tanımlanmış sistem üzerinde A gözlenebilirleri için P ölçüm operatörü ile yapılan ölçümde a sonucu elde edildikten sonra sistemin durumu

$$\rho'(a) = \frac{P(a)\rho P(a)}{\text{Tr}(P(a)\rho)} \quad (4.4)$$

şeklinde olur.

a sonucunun elde edilme olasılığı ise

$$p(a) = \text{Tr}(P(a)\rho) \quad (4.5)$$

ile hesaplanır.

Postula 2 Sistem üzerinde aynı gözlenebilir ile ikinci kez ölçüm yapıldığında aynı sonuç elde edilir.

Ölçüm, projeksiyon işlemcisiyle yapılır. P ile gösterilir. Projeksiyon işlemcisi hermityendir ve karesi kendisine eşittir.

Sistem üzerinde olası bütün durumlar için yapılan ölçümlere karşılık gelen $\{P_i\}$ projeksiyon operatörleri tamlık ilişkisini sağlar (McMahon, 2007).

$$\sum_{i=1}^n P_i = I \quad (4.6)$$

İki farklı sistem üzerinde projeksiyon ölçümü uygulayalım:

1. Durum vektörü ile tanımlanmış saf duruma sahip sistem üzerinde iki ölçüm yapalım. İlk olarak baz durumlarında bulunma olasılıklarını hesaplayalım. Daha sonra bu sistem üzerinde bir gözlenebilir ile ölçüm yapalım.

$|u_i\rangle$ baz kümesine göre yazılmış $|\psi\rangle$ durum vektörü ile tanımlanmış sistemler için projeksiyon ölçümünü inceleyelim.

$$|\psi\rangle = c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle + \dots + c_i|u_i\rangle + \dots + c_n|u_n\rangle \quad (4.7)$$

Bu sistem üzerinde ölçüm yapıldığı zaman $|u_i\rangle$ durumunu elde etme olasılığı $p(i)$ ile gösterilir. Bu olasılığı hesaplamak için projeksiyon ölçüm operatörünü şu şekilde tanımlarız (McMahon, 2007):

$$P_i = |u_i\rangle\langle u_i| \quad (4.8)$$

$$p(i) = |P_i|\psi\rangle|^2 = \langle P_i|\psi\rangle^\dagger \langle P_i|\psi\rangle = \langle \psi|P_i^2|\psi\rangle = \langle \psi|P_i|\psi\rangle \quad (4.9)$$

Ölçüm sonrası sistemin durumu ise

$$|\psi'\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi|P_i|\psi\rangle}} \quad (4.10)$$

olur.

a)

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{5}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}|1\rangle \quad (4.11)$$

saf durumundan oluşan sistem üzerinde projeksiyon ölçümünü inceleyelim:

$|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarına karşılık gelen projeksiyon operatörleri sırasıyla

$P_0 = |0\rangle\langle 0|$ ve $P_1 = |1\rangle\langle 1|$ şeklinde gösterilir.

$|0\rangle$ durumunun elde edilme olasılığı

$$\begin{aligned} p(0) &= \langle\psi|P_0|\psi\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\langle 0| + \frac{\sqrt{11}}{4}\langle 1|\right)\left(|0\rangle\langle 0|\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}|1\rangle\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\langle 0|0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}\langle 1|0\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\langle 0|0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}\langle 0|1\rangle\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4}\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{5}{16} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ölçüm sonrası sistemin durumu

$$|\psi'\rangle = \frac{P_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_0|\psi\rangle}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}|0\rangle}{\sqrt{\frac{5}{16}}} = |0\rangle \quad (4.13)$$

$|1\rangle$ durumunun elde edilme olasılığı

$$\begin{aligned} p(1) &= \langle\psi|P_1|\psi\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\langle 0| + \frac{\sqrt{11}}{4}\langle 1|\right)\left(|1\rangle\langle 1|\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}|1\rangle\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\langle 0|1\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}\langle 1|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\langle 1|0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}\langle 1|1\rangle\right) \\ &= \frac{\sqrt{11}}{4}\frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{11}{16} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ölçüm sonrası sistemin durumu

$$|\psi'\rangle = \frac{P_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_1|\psi\rangle}} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{4}|1\rangle}{\sqrt{\frac{11}{16}}} = |1\rangle \quad (4.15)$$

Olası bütün sonuçların elde edilme olasılıkların toplamı 1 oluyor :

$$\frac{5}{16} + \frac{11}{16} = 1 \quad (4.16)$$

b) Kuantum mekaniğinde enerji ve momentum gibi fiziksel değişkenlere gözlenebilirler denir. Kuantum bilgi teorisinde gözlenebilirleri tanımlamak için hermityen ve üniter operatörler kullanılır. Pauli matrisleri bu özelliklere sahip olduğundan dolayı gözlenebilirleri temsil etmek için kullanılabilir. (4.11) ile tanımlanan sistem üzerinde σ_y matrisini kullanarak ölçüm yapalım.

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

σ_y matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$u_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

şeklindedir.

Ölçümün olası sonuçları σ_y matrisinin özdeğerleridir. Burada sadece $\lambda = 1$ sonucunun elde edilme olasılığını inceleyelim. Bu sonuca karşılık gelen projeksiyon operatörü özvektörün kendisi ile dış çarpımından elde edilir.

$$P_1 = |u_1\rangle\langle u_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{5}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{11}}{4}|1\rangle = \frac{\sqrt{5}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{11}}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \sqrt{11} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
p(1) &= \langle \psi | P_1 | \psi \rangle \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{11} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \sqrt{11} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{11} \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{11}i \\ \sqrt{7}i + \sqrt{11} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{32} (5 - \sqrt{55}i + \sqrt{55}i + 11) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

2. Karışık durumda bulunan bir sistem üzerinde ölçüm yapmak için öncelikle sistemin yoğunluk operatörü hesaplanır. Sonra projeksiyon operatörü ile ölçüm yapılır.

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{4.23}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{4.24}$$

$\frac{2}{5}$ olasılıkla $|\psi_1\rangle$ durumunda, $\frac{3}{5}$ olasılıkla $|\psi_2\rangle$ durumunda bulunan bir sistem düşünelim. Sistemin yoğunluk operatörünü şu şekilde yazarız (McMahon, 2007):

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{2}{5} |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \frac{3}{5} |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \\
&= \frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0| + \langle 1|) + \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0| - \langle 1|) \\
&= \frac{2}{10} (|0\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \\
&+ \frac{3}{10} (|0\rangle \langle 0| - |0\rangle \langle 1| - |1\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \\
&= \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| - \frac{1}{10} |0\rangle \langle 1| - \frac{1}{10} |1\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1|
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Sistemin $|0\rangle$ durumunda bulunma olasılığı

$$\begin{aligned}
p(0) &= \text{Tr}(P_0 \rho) = \text{Tr}(\rho |0\rangle\langle 0|) = \langle 0|\rho|0\rangle \\
&= \langle 0|(\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| - \frac{1}{10}|0\rangle\langle 1| - \frac{1}{10}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|)|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Ölçüm sonrası yoğunluk işlemcisi

$$\rho' = \frac{P_0 \rho P_0}{\text{Tr}(\rho P_0)} = \frac{\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|}{\frac{1}{2}} = |0\rangle\langle 0| \tag{4.27}$$

4.2.1 Bileşik Sistemlerde Ölçüm

İki kübitten oluşan $|\psi\rangle$ bileşik sistemini inceleyelim:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{4}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle \tag{4.28}$$

Sadece birinci kübit üzerinde ölçüm yapılmak isteniyorsa, ölçüm işlemcimizi ikinci kübiti değiştirmeyecek biçimde seçeriz. Örneğin; birinci kübitin ölçüm sonucunda $|0\rangle$ durumunda bulunma olasılığını bulmak için projeksiyon işlemcisi ve birim işlemcisinden yararlanabiliriz. Ölçüm işlemcisi

$$M = P_0 \otimes I \tag{4.29}$$

olur (McMahon, 2007).

Ölçüm operatörü $|\psi\rangle$ durumuna şu şekilde uygulanır:

$$\begin{aligned}
M|\psi\rangle &= (P_0 \otimes I)(\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{4}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle) \\
&= \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 0|0\rangle \otimes |1\rangle \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}|0\rangle\langle 0|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 0|1\rangle \otimes |1\rangle \\
&= \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|01\rangle
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$|0\rangle$ durumunun elde edilme olasılığı

$$\begin{aligned}
p(0) &= \langle \psi | P_0 | \psi \rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} \langle 00 | + \frac{\sqrt{3}}{4} \langle 01 | + \frac{\sqrt{2}}{4} \langle 10 | + \frac{\sqrt{3}}{4} \langle 11 | \right) \left(\frac{1}{2} | 00 \rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} | 01 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ile elde edilir.

Sistemin ölçümden sonraki durumu

$$|\psi'\rangle = \frac{P_0 |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_0 | \psi \rangle}} = \frac{\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} |01\rangle}{\sqrt{\frac{7}{16}}} = \frac{2}{\sqrt{7}} |00\rangle + \sqrt{\frac{3}{7}} |01\rangle \tag{4.32}$$

olur.

4.3 Pozitif Operatör Değerli Ölçümler(POVM)

Buraya kadar incelediğimiz ölçümler mümkün sonuçlardan birinin elde edilme olasılığı ve ölçüm sonrası sistemin durumu ile ilgili hesaplamalar yapmamızı sağlar. POVM (Positive Operator-Valued Measurement) ise ölçüm sonuçlarının bulunma olasılıkları üzerinde durur (Nielsen and Chuang, 2010). Ölçüm sonrası sistemin durumuyla ilgilenmediği için sistem üzerinde tekrar ölçüm yapma olanağı sağlar. Projeksiyon işlemcisinin daha genel halidir. Projeksiyon işlemcisinin kullanılmadığı durumlarda POVM uygulanabilir (McMahon, 2007).

Ölçüm pozitif işlemci ile yapılır. POVM de ölçüm işlemcileri projeksiyon işlemcisiyle veya herhangi bir ölçüm işlemcisiyle oluşturulabilir. Genelde E_m ile gösterilir. m mümkün ölçüm sonuçlarını temsil eder.

$$E_m = M_m^\dagger M_m \tag{4.33}$$

$|\psi\rangle$ durumundaki bir sistemde m sonucunun elde edilme olasılığı

$$p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle \tag{4.34}$$

ile bulunur (McMahon, 2007).

ρ işlemcisiyle tanımlanan karışık bir sistemde m sonucunun elde edilme olasılığı

$$p(m) = \text{Tr}(E_m \rho) \quad (4.35)$$

şeklinde gösterilir (McMahon, 2007).

5.1 Shannon Entropisi

Entropi fiziksel sistemin durumundaki belirsizliği ölçmenin bir yoludur. Klasik bilgi teorisinde Shannon entropisi kullanılır. Bir X rastgele değişkeni için X ' in değeri bilinmiyorken entropi ile X üzerindeki belirsizlik ölçülür. Ayrıca X ' in değeri öğrenildikten sonra elde edilebilecek maksimum bilgi miktarı da entropi ile ölçülür. X değişkeninin aldığı değerlerin entropi için bir anlamı yoktur. Entropi X rastgele değişkeninin mümkün sonuçların olasılıklarının fonksiyonu şeklinde tanımlanır. $p_1, p_2, \dots, p_n$ olasılık dağılımından oluşan bir rastgele X değişkeni için Shannon entropisi şu şekilde yazılır (Kak, 2006):

$$H(X) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (5.1)$$

Burada logaritma 2 tabanında alınır.

Entropi ile bilgiyi tanımlamak için gereken minimum fiziksel kaynak miktarı belirlenir. Klasik bilgi teorisinde en az entropi miktarı kadar bit kullanılarak bilgi kodlanabilir.

Düzgün olasılık dağılımı varsa yani bütün durumların olasılıkları birbirine eşitse entropi en büyük değerini alır. Eşit olasılıklı n duruma sahip bir sistemin entropisi $\log_2 n$ olur. Bir durumun olasılığının 1, diğerlerinin olasılığının 0 olduğu durumda ise entropi 0 olur. Bu durumda belirsizlik yoktur. Entropinin en küçük değeri sıfırdır (Çetinkaya, 1986).

İki rastgele değişkenden oluşan sistem için belirsizlik miktarı bileşik Shannon entropisi ile hesaplanır. X ve Y rastgele değişkenlerinden oluşan bir sistem düşünelim. $X = x_i$ ve $Y = y_i$ olma olasılığı $p(x_i, y_i)$ ile gösterilir. Bu sistem için bileşik Shannon entropisi şu şekilde yazılır (Gray, 2013):

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p(x_i, y_i) \log p(x_i, y_i) \quad (5.2)$$

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (5.3)$$

Bileşik Shannon entropisi birbirine bağımlı X ve Y rastgele değişkenlerinin ayrı ayrı entropilerinin toplamından küçüktür. Eğer X ve Y birbirinden bağımsızsa (5.3) de eşitlik sağlanır.

Y değişkeninin sonucu öğrenildiği zaman X değişkeninin belirsizliğini hesaplamak için koşullu Shannon entropisi kullanılır. Koşullu Shannon entropisi şöyle yazılır (Bellac, 2006):

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (5.4)$$

X ve Y değişkenlerinin içerdiği ortak bilgi miktarı $I(X : Y)$ ile gösterilir. $I(X : Y)$ koşullu entropi kullanılarak şöyle yazılır (Lo vd., 1998):

$$I(X : Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (5.5)$$

5.2 Von Neumann Entropisi

Shannon entropisi genelleştirilerek Von Neumann entropisi elde edilir. Kuantum bilgi teorisinde entropiyi tanımlamak için olasılık dağılımları yerine yoğunluk operatörü kullanılır.

ρ kuantum durumu için Von Neumann entropisi şu şekilde yazılır (Vedral, 2008):

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) \quad (5.6)$$

ρ yoğunluk operatörünün özdeğerleri ile Von Neumann entropisi farklı bir şekilde şöyle yazılabilir:

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (5.7)$$

Hesaplamalar için ikinci formül daha kullanışlıdır.

n boyutlu Hilbert uzayında bulunan bir kuantum sistemi için tamamen karışık bir durumun entropisi $\log_2 n$ olur. Bu entropinin en büyük değeridir. Saf durumdaki bir sistem için entropi en küçük değerini alarak sıfır olur. Kübit 2 boyutlu Hilbert uzayında bulunduğu için entropinin en büyük değeri $\log_2 2 = 1$ olur (Passerini, 2012).

Karışık duruma sahip sistemin yoğunluk matrisindeki köşegen elemanlar mümkün durumların olasılıkları verdiğinden dolayı kübit için yoğunluk matrisini şu şekilde yazabiliriz:

$$\rho = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Burada p , $|0\rangle$ durumunun; $(1-p)$, $|1\rangle$ durumunun elde edilme olasılığıdır.

Kübit için Von Neumann entropisini şu şekilde de yazabiliriz:

$$S(\rho) = -p \log p - (1-p) \log (1-p) \quad (5.9)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

durumu tamamen karışık duruma sahip sistem için örnek verilebilir. Bu sistem için Von Neumann entropisini hesaplayalım (McMahon, 2007):

$$S(\rho) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1 \quad (5.11)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{6}{15} & 0 \\ 0 & \frac{9}{15} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

ile tanımlanan sistem ise karışık durumdadır. Sistemin entropisinin 0 ile 1 arasında bir değer çıkmasını bekliyoruz. Bu sistemin entropisini hesaplayalım:

$$S(\rho) = -\frac{6}{15} \log \frac{6}{15} - \frac{9}{15} \log \frac{9}{15} = 0.28 \quad (5.13)$$

Son olarak saf duruma sahip bir sistemi inceleyelim:

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle \quad (5.14)$$

durum vektörüyle tanımlanan sistemin yoğunluk vektörünü bulalım:

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1|\right) \\ &= \frac{4}{5}|0\rangle\langle 0| + \frac{2}{5}|0\rangle\langle 1| + \frac{2}{5}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{5}|1\rangle\langle 1| \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

ρ operatörünün özdeğerleri 0 ve 1 dir. Bu sistemin entropisini özdeğerleri kullanarak hesaplayalım:

$$S(\rho) = -1\log 1 - 0\log 0 = 0 \quad (5.17)$$

Burada

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0 \quad (5.18)$$

olduğunu belirtelim.

Birden fazla sistemden oluşan birleşik kuantum sistemleri için bileşik kuantum entropisini ve koşullu kuantum entropisini Shannon entropisine benzer şekilde tanımlayabiliriz. A ve B sistemlerinin oluşturduğu ρ^{AB} ile tanımlanan kuantum sistemi için bileşik kuantum entropisi şu şekilde yazılır (Nielsen and Chuang, 2010):

$$S(A, B) = -\text{Tr}(\rho^{AB} \log \rho^{AB}) \quad (5.19)$$

Bu sistem için koşullu entropi şöyle yazılır:

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B) \quad (5.20)$$

A ve B sistemlerinin içerdiği ortak bilgi miktarı

$$S(A : B) = S(A) - S(A|B) \quad (5.21)$$

şeklinde yazılır.

A ve B sistemlerinden oluşan birleşik sistem için şöyle bir eşitsizlik yazılabilir:

$$S(A, B) \leq S(A) + S(B) \quad (5.22)$$

A ve B sistemleri arasında bir korelasyon yoksa (5.22) de eşitlik sağlanır. A ve B sistemleri arasında korelasyon varsa bütün sistemdeki belirsizlik miktarı sistemlerin belirsizliklerinin toplamından küçüktür. Bütün sistem, A ve B sisteminin ayrı ayrı verdiği bilginin toplamından daha fazla bilgi verir.

5.2.1 Ölçüm ve Entropi

P_i ortogonal projeksiyon operatörleri kümesi, ρ yoğunluk operatörü olsun. Ölçümden sonraki sistemin entropisi en az ölçüm öncesi sistemin entropisi kadar büyüktür.

Projeksiyon ölçümü sonrası sistemin durumu

$$\rho' = \sum_i P_i \rho P_i \quad (5.23)$$

şeklinde olur.

$$S(\rho') \geq S(\rho) \quad (5.24)$$

olur.

Projeksiyon ölçümü entropiyi arttırır. Genelleştirilmiş ölçüm ise entropiyi azaltır.

Çevreden tamamen izole edilmemiş kuantum sistemlerine açık sistemler denir. Bir kuantum sistemi sıcaklık, radyasyon, ses, manyetik alan ve ölçüm gibi sebeplerden dolayı çevre ile etkileşir. Bu etkileşim sistemin kuantum davranışında bozulmaya sebep olur. Sistemin çevre ile etkileşme süreci dekoherans olarak tanımlanır. Çevrenin etkisine kuantum gürültü de denir. Kuantum algoritmalarının güçlü olmasını sağlayan asıl kaynaklardan biri olan süperpozisyon hali dekoherans sonucu bozulur. Kuantum bilgisayarlarına güç veren diğer kaynak ise dolanıklıktır. Dekoherans sürecinde sistemin dolanıklığı bozulur ve sistem çevre ile dolanık olmaya başlar. Durumların koherenti üzerinde taşınan bilgide kayıp olur. Kayıp olan bilgi sistem-çevre korelasyonları arasında saklı kalır. Diğer bir ifadeyle sistemden çevreye bilgi sızımı olur (Benetti ve Casati, 2007).

Kübitler belli bir süre koherent özelliğini koruyabilir. Sistemin koherent özelliğini koruduğu süre içerisinde hesaplama işlemlerinin yapılması üzerindeki çalışmalar sürmektedir.

6.1 Tek Kübit Üzerinde Dekoherans Örnekleri

6.1.1 Bit-flip Kanalı

Bu kanal ile kübitin durumu p olasılıkla $|0\rangle$ dan $|1\rangle$ e, $|1\rangle$ den $|0\rangle$ a dönüşür. Başlangıçta $\rho = |0\rangle\langle 0|$ ve $\rho = |1\rangle\langle 1|$ olan yoğunluk operatörleri sırasıyla

$$\rho' = p|1\rangle\langle 1| + (1-p)|0\rangle\langle 0| \quad (6.1)$$

$$\rho' = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1| \quad (6.2)$$

olur.

Bu kanalın sisteme etkisiyle yoğunluk operatörünün son hali şu şekilde olur:

$$\rho' = S(\rho) = p\sigma_x\rho\sigma_x^\dagger + (1-p)\rho \quad (6.3)$$

Bu kanal için Kraus operatörleri şöyledir:

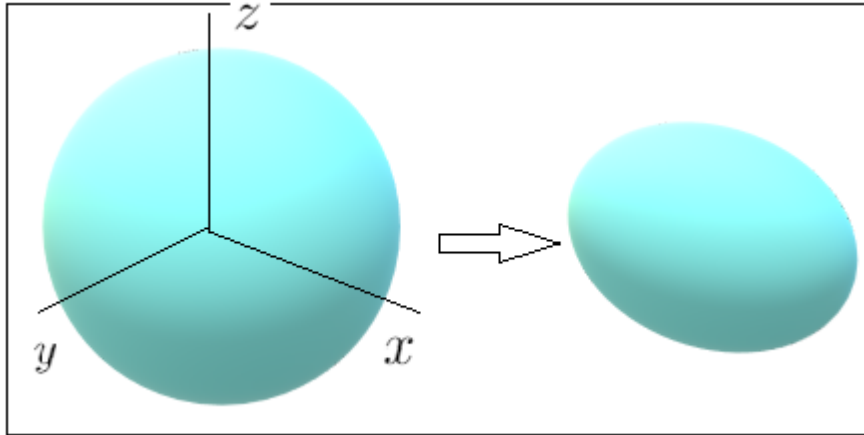
$$E_0 = \sqrt{1-p}I = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$E_1 = \sqrt{p}\sigma_x = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Bloch küresinin koordinatları şu şekilde değişir:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= (1-2p)y \\ z' &= (1-2p)z \end{aligned} \quad (6.6)$$

Yeni koordinatlara göre Bloch küresi x simetri eksenli bir elipsoide dönüşür (Nielsen ve Chuang, 2010).



Şekil 6.1 Bloch küresinin x eksenli elipsoide dönüşümü

6.1.2 Faz-flip Kanalı

Bu kanal ile p olasılıkla faz hatası oluşur.

$$|\psi_+\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (6.7)$$

durumu p olasılıkla

$$|\psi_{-}\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle \quad (6.8)$$

durumuna dönüşür. Bu kanalın klasik bilgisayarlarda karşılığı yoktur.

Yoğunluk işlemcisinin son hali

$$\rho' = S(\rho) = p\sigma_z\rho\sigma_z^{\dagger} + (1-p)\rho \quad (6.9)$$

Kraus operatörleri

$$E_0 = \sqrt{1-p}I = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$E_1 = \sqrt{p}\sigma_z = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

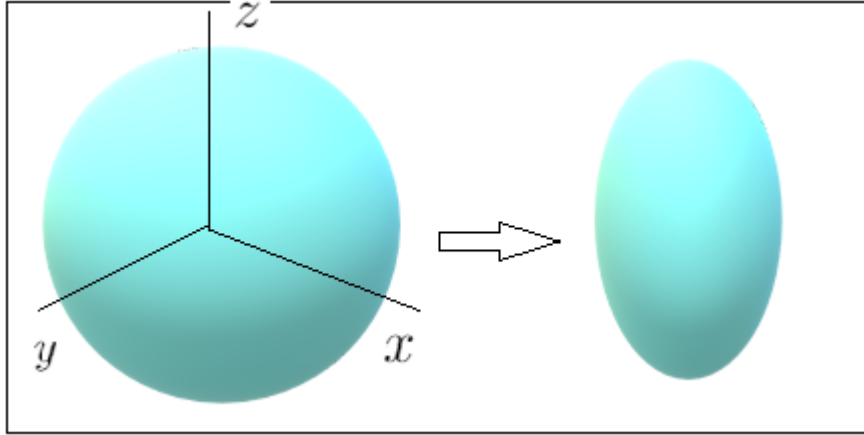
şeklinde olur.

Bloch küresinin yeni koordinatları

$$\begin{aligned} x' &= (1-2p)x \\ y' &= (1-2p)y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (6.12)$$

olur.

Bloch küresi z eksenli bir elipsoide dönüşür (Nielsan ve Chuang, 2010).



Şekil 6.2 Bloch küresinin z eksenli elipsoide dönüşümü

6.1.3 Bit-faz-flip Kanalı

Bu kanal ile

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (6.13)$$

durumu p olasılıkla

$$|\psi'\rangle = a|1\rangle - b|0\rangle \quad (6.14)$$

durumuna dönüşür.

Bu kanal ile sistemin yoğunluk operatörü şu şekilde değişir:

$$\rho' = S(\rho) = p\sigma_y\rho\sigma_y^\dagger + (1-p)\rho \quad (6.15)$$

Kraus operatörleri

$$E_0 = \sqrt{1-p}I = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$E_1 = \sqrt{p}\sigma_y = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

biçimindedir.

$$\sigma_y = i\sigma_x\sigma_z \quad (6.18)$$

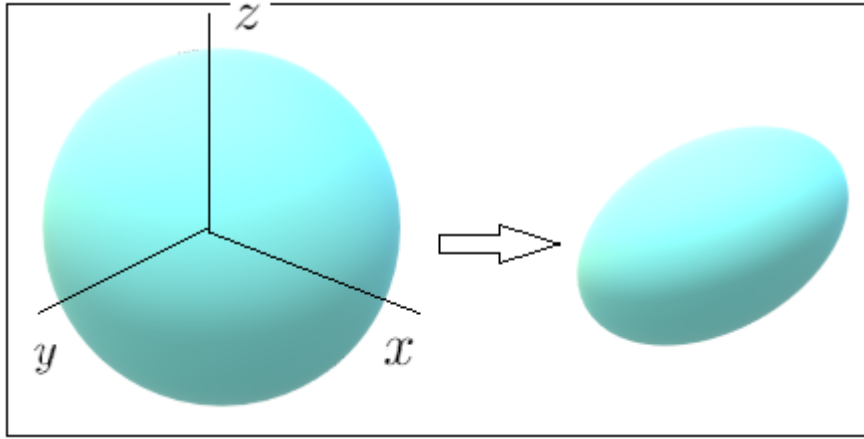
eşitliğinden de anlaşılacağı üzere bu kanal bit-flip ve faz-flip kanallarının kombinasyonundan oluşur.

Bloch küresinin koordinatları

$$\begin{aligned}x' &= (1-2p)x \\y' &= y \\z' &= (1-2p)z\end{aligned}\tag{6.19}$$

şeklinde değişir.

Bloch küresi y eksenli bir elipsoide dönüşür (Nielsan ve Chuang, 2010).



Şekil 6.3 Bloch küresinin y eksenli elipsoide dönüşümü

6.1.4 Depolarizasyon Kanalı

Başlangıçta ρ tanımlanan sistem bu kanal ile şu şekilde değişir:

$$\rho' = (1-p)\rho + \frac{p}{3} [\sigma_x \rho \sigma_x^\dagger + \sigma_y \rho \sigma_y^\dagger + \sigma_z \rho \sigma_z^\dagger]\tag{6.20}$$

Burada ρ durumu $1-p$ olasılıkla değişmeden kalır. $\frac{p}{3}$ olasılıkla σ_x , σ_y ve σ_z uygulanır (Nielsan ve Chuang, 2010).

Kraus operatörleri şunlardır:

$$E_0 = \sqrt{1-p}I = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

$$E_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_x = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_y = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

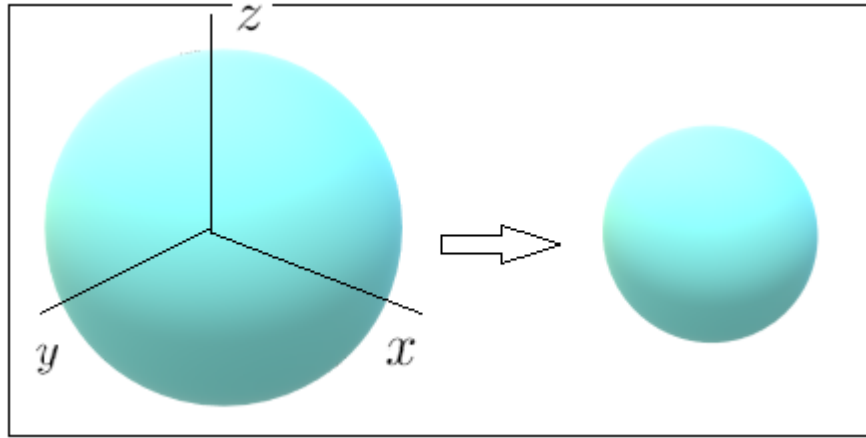
$$E_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_z = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Bloch küresi gösterimi

$$r' = (1 - \frac{4}{3}p)r \quad (6.25)$$

şeklinde olur (Benetti ve Casati, 2007).

Bloch küresi merkez noktası sabit kalacak şekilde küçülüyor (Nielsan ve Chuang, 2010).



Şekil 6.4 Bloch küresinde küçülme

6.1.5 Genlik azaltma Kanalı

Bu kanal ile p olasılıkla uyarılmış durumda bulunan atom taban durumuna geçer. Bu bozulma sonucu foton yayılır. Çevreye enerji geçişi olur. Bu enerji ile çevrenin durumu $|0\rangle$ ' dan $|1\rangle$ ' e geçer. $|0\rangle$ durumu fotonun olmadığını, $|1\rangle$ durumu fotonun olduğunu gösteriyor (Preskil, 1998).

Kraus operatörleri

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

şeklindedir.

E_0 operatörü $|0\rangle$ durumunu değiştirmiyor. $|1\rangle$ durumunun genliğini azaltıyor. Burada çevreye enerji kaybı olmuyor. E_1 operatörü ise $|1\rangle$ durumunu $|0\rangle'$ a çevirir. Bu durum çevreye verilen enerjinin fiziksel sürecine karşılık gelir (Nielsen ve Chuang, 2010).

Yoğunluk operatörünün zamanla değişimi

$$\rho' = S(\rho) = E_0 \rho E_0^\dagger + E_1 \rho E_1^\dagger = \begin{pmatrix} \rho_{00} + p\rho_{11} & \sqrt{1-p}\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & (1-p)\rho_{11} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

şeklinde olur.

ρ_{ij} yoğunluk operatörünün $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ bazlarına göre matris gösterimidir (Benetti ve Casati, 2007).

n kez bu kanal uygulanırsa ρ_{11} matris elemanı eksponansiyel bir şekilde bozulmaya başlar:

$$\rho_{11}^{(n)} = (1-p)^n \rho_{11} = e^{n \ln(1-p)} \rho_{11} \quad (6.29)$$

$|1\rangle$ durumunun $|0\rangle$ durumuna dönüşünü şu şekilde ifade edelim:

$$\rho_1^{(n)} = (1-p)^n \rho_1^0 = e^{n \ln(1-p)} \rho_1^0 \quad (6.30)$$

$$n \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad \rho^\infty = |0\rangle\langle 0| \quad (6.31)$$

olur.

Genellikle kuantum gürültü sonucunda saf durumlar karışık durumlara dönüşür. Fakat bu kanal ile başlangıç durumunun nasıl olduğu fark etmeksizin sonsuz iterasyon sonucu saf durum elde edilir (Benetti ve Casati, 2007).

Bloch küresinin koordinatları

$$\begin{aligned}x' &= \sqrt{1-p}x \\y' &= \sqrt{1-p}y \\z' &= p + (1-p)z\end{aligned}\tag{6.32}$$

şeklinde değişir.

Bloch küresi $(0,0,p)$ merkezli, z eksenli bir elipsoide dönüşür (Benetti ve Casati, 2007).

6.1.6 Faz Azaltma Kanalı

Bu kanal ile enerji kaybı olmadan kuantum bilgi kaybının nasıl olduğunu tanımlanıyor. Başlangıçta

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle\tag{6.33}$$

saf durumuna sahip olan sistemde zamanla dekoherans gerçekleşir. Bu sürecin sonucunda sistem süperpozisyonunu kaybeder ve artık

$$\rho' = |a|^2|0\rangle\langle 0| + |b|^2|1\rangle\langle 1|\tag{6.34}$$

durumunda bulunur. Bu kanal kuantum dünyasından klasik dünyaya geçmede önemli bir rol oynar. Bu kanal klasik dünyada süperpozisyon özelliğinin olmamasını açıklamamıza yardımcı olur.

Sistemin çevreyle etkileşimini Bloch küresinde z eksenli bounca θ açısı kadar rotasyon ile tanımlıyoruz (Benetti ve Casati, 2007).

Rotasyon matrisi şu şekildedir:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}\tag{6.35}$$

Rotasyon sonrası yoğunluk matrisi (Nielsan ve Chuang, 2010)

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\theta)|\psi\rangle\langle\psi|R_z^\dagger(\theta)e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}}d\theta = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^*e^{-\lambda} \\ a^*be^{-\lambda} & |b|^2 \end{pmatrix}\tag{6.36}$$

olur.

Köşegen dışı elemanlar zamanla eksponansiyel şekilde azalarak sıfır olur.

Kraus operatörleri şu şekildedir:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

E_0 operatörü genlik azaltmama kanalında olduğu gibi $|0\rangle$ durumunu değiştirmiyor, $|1\rangle$ durumunun genliğini azaltıyor. E_1 operatörü ise $|0\rangle$ durumunu $|1\rangle$ durumuna çevirir ve $|1\rangle$ durumunun genliğini azaltır (Nielsan ve Chuang, 2010).

Bloch küresinin koordinatları

$$\begin{aligned} x' &= e^{-\lambda} x \\ y' &= e^{-\lambda} y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (6.39)$$

olur.

Bloch küresi z eksenli elipsoide dönüşür. Bu kanal Bloch küresinin koordinatlarına göre faz-flip kanalına benzerdir (Benetti ve Casati, 2007).

Kuantum gürültü kanalları için kuantum doğrulama kodları yazılır. Bu çalışmalar kuantum hata düzeltme adı altında yapılır (Bennett and Shor, 1998). Tek kübit hataları I, σ_x, σ_y ve σ_z operatörlerinin lineer bileşiminden oluşur. Eğer bit-flip, faz-flip ve onların çarpımı doğrulanabilirse, tek kübit üzerindeki bütün üniter hatalar doğrulanabilir (Wolf, 2018).

7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Lineer cebir kuantum mekaniğinin matematiksel alt yapısını oluşturur. Bra ve ket gösterimi kullanılarak kuantum sistemleri durum vektörleriyle tanımlanır. Kuantum bilgisayarların bilgi depolama birimi olan kübit Bloch küresi kullanılarak gösterilebilir. Yoğunluk operatörü kullanılarak farklı durumlara sahip sistem tanımlanabilir. Yoğunluk işlemcisinin köşegen elemanlarının ölçüm sonuçlarının elde edilme olasılıklarını verdiği fark edildi. Kuantum sistemlerin çevre ile etkileşime geçmesiyle kapalı sistem açık sisteme dönüşür. Bu sistemlerin değişimini açıklamak için süperoperatör ve Kraus operatörü kullanılır. Kuantum sisteminde neler olup bittiğini anlamak için uygulanan ölçüm işlemi sistemin durumunda değişikliğe sebep olur. Sistem üzerinde aynı ölçüm yinelenildiğinde benzer sonuç elde edildiği görülür. Sistemin bir özelliği üzerinde ölçüm yapmak için üniter ve hermityen bir operatör kullanılır. Bu operatörün özdeğerleri elde edilmek istenen ölçüm sonuçlarını verir. Öz durumlar ise sistemin ölçüm sonrası durumunu verir. Sistemin ölçüm sonrası durumunu tanımlamak için iz fonksiyonundan yararlanılır. Shannon entropisi ile klasik bilgi teorisinde sistem üzerindeki belirsizlik miktarı ölçülüyor. Sistemden elde edilebilecek en fazla bilgi miktarına entropi kullanılarak ulaşılabilir. Bu amaçları kuantum bilgi teorisinde gerçekleştirmek için Von Neumann entropisi kullanılıyor. Shannon entropisi ve Von Neumann entropisi benzer şekilde tanımlanıyor. Fakat Shannon entropisi olasılık dağılımları ile Von Neumann entropisi yoğunluk operatörü ile belirleniyor. Birden fazla durumdan oluşan sistemler için bileşik entropi tanımlanıyor. Böylece bütün sistemin içerdiği bilgi miktarı hakkında yorum yapılabilir. İki duruma sahip bir sistemde bir durum biliniyorken diğer durum hakkında elde edilebilecek bilgi miktarı koşullu entropi ile belirleniyor. Ayrıca koşullu entropi kullanılarak iki farklı durumun içerdiği ortak bilgi miktarı entropi ile ölçülebilir. Von Neumann entropisi 0 ile 1 arasında değer alıyor. Saf durumdaki sistemin entropisi 0 oluyor. Sistem karışık duruma sahip ise entropi 0 ile 1 arasında bir değer alıyor. Eğer sistemin durumu tamamen karışık bir durum ise entropi 1 oluyor. Son olarak dekoherans kavramı gösterildi. Çevrenin sisteme etkisi anlamına gelen kuantum gürültünün tek kübit üzerindeki örnekleri incelendi. Bit-flip

kanalının değil operatörü gibi etki ettiği görüldü. Kuantum gürültü kanallarının Bloch küresini elipsoide dönüştürme veya Bloch küresinin boyutunu küçültme gibi etkileri vardır. Bloch küresindeki değişiklikler resimlerle gösterildi. Kuantum gürültü süreci dekoherans kavramı ile tanımlanır. Kuantum gürültüyü yok etmek veya azaltmak için hata doğrulama kodları yazılmalıdır.

KAYNAKLAR

Bellac, M., (2006), A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation, Cambridge University Press, New York

Benetti G., and Casati G., (2004), Principles of Quantum Computation and Information Volume I: Basic Concepts, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA

Benetti G., and Casati G., (2007), Principles of Quantum Computation and Information Volume II: Basic Tools and Special Topics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA

Bennett, C.H and Shor, P.W., (1998), Quantum Information Theory, IEEE Trans. Inf. Theory.

Çetinkaya, O.Z., (1986), " Belirsizliğin Ölçülmesi ve Entropi ", İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Mecmuası, cilt.44, no.4, ss.323-335

Gray, R. M., (2013), Entropy and Information Theory, Springer Verlag, New York

Gruska, J., (1999), Quantum Computing, McGraw-Hill Book Co Ltd

Kak, S., (2006), " Quantum Information and Entropi ", arXiv:quant-ph60509v1

Kaye, P, Laflamme, R., Mosca, M., (2007), An Introduction to Quantum Computing, Oxford University Press, New York

Khrennikov, A., (2008), " Analysis of the Role of Von Neuman's Projection Postulate in the Canonical Scheme of Quantum Teleportation and Main Quantum Algorithms ", arXiv:0805.3258v2

Lo, H., Popescu, S., Spiller, T., (1998), Introduction to Quantum Computation and Information, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore

McMahon, D., (2007), Quantum Computing Explained, A John Wiley Sons, Inc., Publication, New Jersey

- Mermin, N.D., (2007), Quantum Computer Science, Cambridge University Press, New York
- Nielsen, M.A. and Chuang, I.L., (2010), Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge
- Oskin, M., (2002), Quantum Computing-Lecture Notes, Department of Computer Science and Engineering University of Washington
- Ozawa, M., (2014), " Mathematical Foundations of Quantum Information: Measurement and Foundations ", arXiv:1201.5334v2
- Pahlavani, M.R., (2012), Measurements in Quantum Mechanics, InTech, Croita
- Passerini F., 2012, " The Von Neumann Entropy of Networks ", arXiv:0812.2597 [cond-mat.dis-nn]
- Preskill, J., (1998) Lecture Notes for Physics 229 Quantum Information and Computation, California Institute of Technology
- Renes, J.M., (2015), Quantum Information Theory, Lecture Notes Revision:f402a9be866
- Rieffel, E., Polak, W., (2011), Quantum Computing A Gentle Introduction, The MIT Press, Cambridge
- Tong, D. M., Chen, J-L, Kwek, L. C. and Oh, C. H., (2003), " Kraus Representation for Density Operator of Arbitrary Open Qubit System ", arXiv: quant-ph/0311091v2
- Vedral V., (2008), " The Role of Relative Entropy in Quantum Information Theory ", arXiv:quant-ph/0102094v1
- Watrous, J.,(2018), The Theory of Quantum Information, Cambridge University Press., Cambridge
- Wolf, R., (2018), Quantum Computing: Lecture Notes, Amsterdam
- Zurek, W.H., (2005), Decoherence and the Transition from Quantum to Classical-Revisited, Seminaire Poincare, Los Alamos

Tezden Üretilmiş Yayınlar

İletişim Bilgileri: emriye.ersogn@gmail.com

Konferans Bildirisi

1. ERSOY, Emriye, YALÇIN, Zeynel, "Kuantum Bilgi Teorisinde Bazı Saf ve Saf Olmayan Sistemler Üzerinde Ölçümler", 2. Uluslararası İstatistik Matematik ve Analitik Yöntemler Kongresi, 2019, İstanbul