

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖNGERİLMELİ DAİRESEL BİLEŞİK
SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGA YAYILIMI**

Yüksek Fizikçi Ayhan ÖZTÜRK

**F.B.E. Fizik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi: 05 Ekim 2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (YTÜ)

2. Danışman : Yrd. Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ (YTÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İdris GÜMÜŞ (Maltepe Ü)

: Prof. Dr. Kubilay KUTLU (YTÜ)

: Prof .Dr. Oya OĞUZ (İ. Ticaret Ü)

: Prof .Dr. Mehmet ŞİRİN (YTÜ)

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÇİZELGE LİSTESİ.....	viii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	11
1 GİRİŞ.....	1
1.1 Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler	1
1.2 Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti	2
1.3 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği	6
1.4 Yapılan Araştırmaların Amaçları	7
2 ÖNGERİLMELİ BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ YAYILMASI VE DİSPERSİYONU.....	8
2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu	8
2.2 Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi.....	12
2.3 Öngerilmeli Bileşik Silindirin Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi.....	16
2.3.1 Asimptotik Yaklaşım: Uzun Dalgaboyu Limiti ve Ona Ön Gerilmenin Etkisi.....	17
2.3.2 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması.....	20
2.4 İçi Boş Bileşik Silindirlerin Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi	52
2.4.1 Asimptotik Yaklaşım: Uzun Dalgaboyu Limiti ve Ona Ön Gerilmenin Etkisi.....	55
2.4.2 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması	58
3 ÖNGERİLMELİ ÇOK KATLI SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ YAYILMASI VE DİSPERSİYONU	69
3.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu	69
3.2 Çok Katlı Silindirlerde Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi	73
3.3 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesive Yorumlanması.....	82
4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ	101
KAYNAKLAR	103
ÖZGEÇMİŞ	107

KISALTMA LİSTESİ

ÜDEDYT Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Bileşik silindir	8
Şekil 2.2 Bileşik silindirin dispersiyon diyagramının ilk dört modu.....	22
Şekil 2.3 Bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk üç modu	
(1. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$, 2. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.004$, 3. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$)	24
Şekil 2.4 Bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk üç modu (1. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.0$	
2. $\Psi^{(1)} = 0.008$, $\Psi^{(2)} = 0.0$, 3. $\Psi^{(1)} = 0.0$, $\Psi^{(2)} = 0.008$, 4. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$)	24
Şekil 2.5 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin	
ilk dört modu ($h/R=0.1$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$)	26
Şekil 2.6 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin	
ilk dört modu ($h/R=0.5$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$)	26
Şekil 2.7 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin	
ilk dört modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$)	27
Şekil 2.8 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin birinci mod dispersiyon	
eğrilerinin h/R ye bağımlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$)	27
Şekil 2.9 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin ikinci mod dispersiyon	
eğrilerinin h/R ye bağımlı değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$)	28
Şekil 2.10 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$)	28
Şekil 2.11 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$)	29
Şekil 2.12 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$)	29
Şekil 2.13 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$)	30
Şekil 2.14 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım	
hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$)	30
Şekil 2.15 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$)	31
Şekil 2.16 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$)	32
Şekil 2.17 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$)	32
Şekil 2.18 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga	
yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$)	33
Şekil 2.19 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım	
hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$)	33
Şekil 2.20 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım	
hızına öngerilmelerin etkisinin ilk üç modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$)	34
Şekil 2.21 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga	
yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$)	35
Şekil 2.22 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga	
yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$)	35
Şekil 2.23 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga	
yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$)	36
Şekil 2.24 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga	
yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$)	36
Şekil 2.25 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga	
yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$)	37

Şekil 2.26 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$)	37
Şekil 2.27 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h/R=0.3$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0$)	39
Şekil 2.28 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0$)	39
Şekil 2.29 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin birinci mod dispersiyon eğrilerinin h/R ye bağımlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0$)	40
Şekil 2.30 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin ikinci mod dispersiyon eğrilerinin h/R ye bağımlı değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0$)	40
Şekil 2.31 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).....	41
Şekil 2.32 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).....	41
Şekil 2.33 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).....	42
Şekil 2.34 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$).....	42
Şekil 2.35 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0.008$)	43
Şekil 2.36 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).....	44
Şekil 2.37 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).....	44
Şekil 2.38 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).....	45
Şekil 2.39 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$).....	45
Şekil 2.40 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0.008$)	46
Şekil 2.41 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin ilk üç modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0.008$)	47
Şekil 2.42 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$)	47
Şekil 2.43 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$)	48
Şekil 2.44 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$)	48
Şekil 2.45 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$)	49
Şekil 2.46 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$)	49
Şekil 2.47 Çelik- Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$)	50
Şekil 2.48 İçi boş bileşik silindir	52
Şekil 2.49 İçi boş bileşik silindirin dispersiyon diyagramının ilk üç modu	59
Şekil 2.50 Bronz -Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)}=0$)	60

Şekil 2.51 Bronz -Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$ ve $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$)	60
Şekil 2.52 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.1$)	61
Şekil 2.53 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$)	61
Şekil 2.54 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=1.0$)	62
Şekil 2.55 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.1$)	62
Şekil 2.56 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$)	63
Şekil 2.57 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=1.0$)	63
Şekil 2.58 Çelik- Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.1$)	65
Şekil 2.59 Çelik- Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$)	65
Şekil 2.60 Çelik- Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=1.0$)	66
Şekil 2.61 Çelik- Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.1$)	66
Şekil 2.62 Çelik- Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$)	67
Şekil 2.63 Çelik- Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=1.0$)	67
Şekil 3.1 Çok katlı silindir	69
Şekil 3.2 Bronz -Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirin dispesiyon eğrilerinin ilk dört modu ($H/R=0.4$, $\Psi^{(u)}=0=0$)	83
Şekil 3.3 Bronz -Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=2$, $H/R=0.4$)	83
Şekil 3.4 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=4$, $H/R=0.4$)	84
Şekil 3.5 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=6$, $H/R=0.4$)	84
Şekil 3.6 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=2$, $H/R=0.4$)	85
Şekil 3.7 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=4$, $H/R=0.4$)	85
Şekil 3.8 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=6$, $H/R=0.4$)	86
Şekil 3.9 Bronz -Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=2$, $H/R=1.0$)	86
Şekil 3.10 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=4$, $H/R=1.0$)	87
Şekil 3.11 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=6$, $H/R=1.0$)	87
Şekil 3.12 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=2$, $H/R=1.0$)	88

Şekil 3.13 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=4$, $H/R=1.0$)	88
Şekil 3.14 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=6$, $H/R=1.0$)	89
Şekil 3.15 Bronz -Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=2$, $H/R=1.5$)	89
Şekil 3.16 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=4$, $H/R=1.5$)	90
Şekil 3.17 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=6$, $H/R=1.5$)	90
Şekil 3.18 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=2$, $H/R=1.5$)	91
Şekil 3.19 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=4$, $H/R=1.5$)	91
Şekil 3.20 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin ($N=6$, $H/R=1.5$)	92
Şekil 3.21a Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	93
Şekil 3.21b Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	94
Şekil 3.21c Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	94
Şekil 3.22a Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	95
Şekil 3.22b Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	96
Şekil 3.22c Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	96
Şekil 3.23 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=2$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	97
Şekil 3.24 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	97
Şekil 3.25 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki birinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=6$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	98
Şekil 3.26 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=2$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	98
Şekil 3.27 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci i mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=4$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	99
Şekil 3.28 Bronz-Prinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirideki ikinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=6$, $\Psi^{(m)}=0.008$)	99

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 3.1 Malzemelere ait mekanik özellikler ve üçüncü dereceden elastisite sabitlerine ait değerler	25
---	----

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı yöneten ve çalışma boyunca karşılaştığım problemlerin çözümünde yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV' a teşekkür ederim. Ayrıca katkılarından dolayı Yrd. Doç.Dr Arzu ÇİLLİ' ye teşekkür ederim.

ÖZET

Bilindiği üzere öngerilmeler yapı elemanlarında farklı birçok nedenden dolayı oluşabilmektedir. Bu öngerilmelerin olduğu ortamların dalga yayılımına etkisinin incelenmesi teorik ve uygulama açısından çok önemlidir. Tez kapsamında yapılan araştırmalar, genel olarak öngerilmeli bileşik silindirdeki dalga yayılımına bu öngerilmelerin etkisinin incelenmesine aittir. Yapılan çalışmaların özel konusu ise öngerilmeli bileşik silindirdeki burulma dalgalarının dispersiyonudur.

Bu çalışmada, parçalı cisim modeli çerçevesinde öngerilmeli cisimlerde üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga yayılımı teorisi uygulanarak öngerilmeli bileşik, içi boş bileşik ve çok katlı bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımı araştırılmıştır. Öngerilmelerin burulma dalga yayılımına etkisi geometrik ve fiziksel parametreler için incelenmiştir. Silindirlerin bileşenlerinin malzeme özellikleri Murnaghan potansiyeli ile verilmiştir. Bir özel durum olarak silindirlerin lineer elastik malzemelerden olduğu durumlarda incelemeler yapılmıştır. Bileşik ve içi boş bileşik silindirlerde, öngerilmenin olmadığı özel durumlar için elde edilen sonuçlar tekrar elde edildi. Aynı zamanda bu sonuçlar öngerilmeli bileşik silindirler için geliştirildi.

Çok sayıda yeni sayısal sonuçları elde etmek için gerekli algoritma ve programlar Fortran programlama dilinde tarafımızdan yapılmıştır.

Yapılan çalışmalar, öngerilmeli bileşik silindirlerdeki burulma dalga yayılımına ait ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

Anahtar kelimeler: Burulma dalga yayılımı, dispersiyon, öngerilme, bileşik silindir, Murnaghan potansiyeli

ABSTRACT

It is well known that initial stress can occur in construction materials for many reasons. Investigating the effect of those kinds of stresses on wave propagation is very important in theory and application. The research presented in this thesis studies the effect of initial stresses on wave propagation in pre-stressed compound cylinder, in particular the dispersion of the torsional waves on pre-stretched compound cylinder.

In the present study, within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional linearized theory of elastic waves in initially stressed body, the torsional wave propagation in the pre-stressed compound, hollow compound and many layered cylinders are investigated. The influence of the initial stresses to the torsional wave propagation is investigated for geometrical and physical parameters. It is assumed that the elasticity relations of the materials of the cylinders' components are given through the Murnaghan potential. For a special case, the cylinders that were made of linear elastic materials were also investigated. For particular cases, the result obtained by the other research studies for the compound and hollow compound cylinders without initial stresses are also attained again. Furthermore, these results are developed for the compound cylinders with initial stresses.

The algorithms and software programs that are used to obtain a large amount of new numerical results are developed by the author in Fortran programming language.

The research presented herein are the first attempt to investigate torsional wave propagation in pre-stressed compound cylinders.

Keywords: Torsional wave propagation; Dispersion; Initial stress; Compound cylinder, Murnaghan potential

GİRİŞ

Öngerilmeli ortamlarda Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÜDEDYT) uygulanarak çok katlı silindirik cisimlerde burulma dalgalarının dispersiyonu ve bu dispersiyona silindirdeki öngerilmelerin, geometrik ve fiziksel parametrelerin etkisi incelenmektedir. Çok katlı silindirin bileşenlerinin şekil değiştirme enerjisi Murnaghan potansiyeli ile verilmektedir.

Tez Konusuna Ait Genel Bilgiler

Elastik ortamlarda dalga yayılımı elastisite teorisinin önemli problemlerinden biridir. Navier' in 1821 yılında yayınladığı elastik cisimlerin titreşim ve denge denklemlerinin türetildiği araştırma, elastik ortamlarda dalga yayılımı çalışmalarının başlangıcı olarak kabul edilir (Love (1944) ve Graff (1991)). Bu çalışmada, moleküller maddesel noktalar olarak gözönüne alınarak birbirlerine elastik yaylarla bağlı oldukları ve iki molekül arasındaki kuvvetin bunlar arasındaki uzaklığın değişimi ile orantılı olduğu kabul edilmiştir (Love (1944)). 1822'de Cauchy matematiksel elastisite teorisinin temellerini atmıştır (Graff (1991)). Cauchy yaptığı çalışmalarda, elastik bir ortamın hareket denklemlerini yerdeğiştirmeler cinsinden elde ederek gerilme ve şekil değiştirme kavramlarını ortaya atmış ve izotrop ortamlar için gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını, bu bağıntıların lineer olduğu ve gerilmelerin asal düzlemlerinin şekil değiştirmelerin asal eksenlerine dik oldukları varsayımlarını kullanarak elde etmiştir. Poisson 1828' deki elastik ortamlarla ilgili ilk çalışmasını sunmuştur. Poisson denge denklemlerini gerilme bileşenleri cinsinden elde etmiştir. Daha sonra bu denklemler ile elastik dalgaların izotrop bir ortamda yayılmasını incelemiş, dalga kaynağından uzakta enine ve boyuna dalgaların varlığını göstermiştir (Love (1944)). Cauchy 1830' da benzer sonuçlara ulaşmıştır (Graff (1991)). Daha sonra 1837' de Green elastisite denklemlerini enerjinin korunumu ilkesini kullanarak türetmiştir (Love (1944)). 1876' da Pochhammer silindirik bir çubukta dalga yayılımını incelemiştir. 1889' da Chree Pochhammer'la aynı sonuçlara ulaşmıştır (Eringen ve Şuhubi (1975b) , Graff (1991) ve Miklowitz (1960)). Elastik dalgalarla ilgili bir gelişme de 19.yy sonlarında olmuştur. 1887' de Rayleigh homojen izotrop elastik yarı-uzayın serbest yüzünde yüzey dalgalarının yayılabileceğini göstermiştir. Hem dispersif hem dispersif olmayan lineer elastik dalgalar ile ilgili çalışmalar 19. yüzyılın ortalarından bugüne kadar pek çok incelemenin konusu olmuşlardır ve olmaya devam etmektedirler. Elastisite teorisinin temelleri ile ilgili çalışmaların geniş özeti Love (1944), Eringen ve Şuhubi (1975a, 1975b), Milkowitz (1960) ve Pao (1983) kaynaklarında verilmiştir.

Elastik dalgaların yayılmasına lineer olmayan etkilerin incelenmesi 20 yy. ortalarından itibaren başlamıştır. Günümüz teknolojisinin tüm dallarında elastisite teorisinin dinamik problemleri ile karşılaşıldığından bu alandaki bilimsel incelemeler artarak devam etmektedir. Mühendislik bilimleri ve temel bilimlerin ihtiyaçları doğrultusunda dalga yayılımı problemlerinin araştırılmasında lineer olmayan dinamik etkilerin’de gözönüne alınması gerekmektedir. Öngerilmeli ortamların dinamiği lineer olmayan problemlerden biridir. Yapı elemanlarındaki öngerilmeler bu elemanların hazırlanması ve montajı sırasında farklı nedenlerden oluşabilmektedir. Kompozit malzemelerin hazırlanmasında uygulanan teknolojik gereksinimlerden dolayı da öngerilmeler oluşmaktadır. Bundan başka yerin farklı katmanlarındaki jeolojik etkiler sonucunda öngerilmeler ortaya çıkmaktadır. Bir çok alanda varolan bu öngerilmelerin etkisinin gözönüne alınmasının gerekliliği açıktır. Söylenenlerden dolayı öngerilmeli ortamlarda dalga yayılımına ait problemlerin araştırılması güncel ve çok önemlidir. Tezde ele alınan araştırmalar’da bu konuya ait olup, öngerilmeli çok katlı sonsuz uzunluklu dairesel silindirlerde burulma dalgalarının yayılımını parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde ÜDEYD uygulanarak incelenmektedir. Bu araştırmaların şimdiye kadar yapılan uygun araştırmalar arasındaki yerini ve önemini belirlemek için, tez konusu ile ilgili çalışmaların kısa özetini ele alalım.

Tez Konusuna Ait Araştırmaların Kısa Özeti

Sonsuz uzun dairesel silindirdeki dalga yayılımı Pochhammer ve Chree tarafından birbirlerinden bağımsız olarak incelenmiştir (Eringen ve Şuhubi (1975b), Graff (1991)). İçi dolu silindir ve içi boş silindirlerde (Kudlicka (2006)) dalga yayılımı birçok çalışmaya konu olmuştur. Bileşik silindirlerdeki dalga yayılımı problemi hakkında bir çok çalışma vardır. Bu çalışmalar lineer elastisite teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Armenakas (1965, 1967, 1970, 1971), Armenakas ve Keck (1970) ve Keck ve Armenakas (1971) çalışmalarında üç boyutlu lineer elastisite teorisi çerçevesinde sonsuz uzun, homojen, izotrop malzemelerden oluşan bileşik ve içi boş bileşik silindir için geometrik ve fiziksel parametrelere bağlı olarak dalga yayılımı problemi ele alınmıştır. Armenakas (1965) makalesinde, lineer elastisite teorisi çerçevesinde bileşik silindirde burulma dalgalarının yayılımını malzemelerin geometrik (örtük silindirin kalınlığının (h) içteki silindirin yarıçapına (R) oranına (h/R)) ve fiziksel parametrelerine bağlı olarak incelemiş ve yerdeğiştirme fonksiyonunun fiziksel parametrelere bağlı değişimini göstermiştir. Bununla birlikte bu makalede içi dolu ve içi boş silindirlerde dispersif olmayan burulma dalgalarının birinci modunun bileşik silindirde dispersif hale

geldiği ifade edilmiştir. Bu çalışmanın devamı olarak Armenakas (1970) makalesinde, burulma dalgalarının yanısıra boyuna dalgalarında bileşik silindirlerde yayılımını incelemiştir. Armenakas ve Keck (1970) makalesinde, bileşik silindirdeki dalga yayılımı problemini kısa dalgaboyu yaklaşımında simetrik olmayan dalgalar için analitik olarak incelemiş ve dispersiyonu fiziksel ve geometrik parametrelere bağlı olarak incelemiştir. Armenakas (1967, 1971) makalelerinde içi boş bileşik silindirde dalga yayılımını üç boyutlu lineer elastisite teorisi çerçevesinde fiziksel ve geometrik parametrelere göre incelemiştir. Bileşik silindirdeki gibi içi boş bileşik silindirde’de birinci modun dispersif olduğunu vurgulamıştır. Keck ve Armenakas (1971) makalesinde Armenakas (1967, 1971) çalışmalarının devamı olarak üç farklı malzemeden oluşmuş içi boş bileşik silindirdeki dalga yayılımı problemini incelemiştir. Reuter (1969) çalışmasında, üç boyutlu lineer elastisite teorisi çerçevesinde bileşik silindirdeki burulma dalgalarının dispersiyon denklemini elde etmiş ve bu denklemden uzun dalga boyu limiti koşulu altında elde edilen birinci modun faz hızını veren analitik ifadeyi elde ederek, birinci mod için fiziksel ve geometrik parametrelere bağlı olarak faz hızının değişimini incelemiştir. Haines ve Lee (1970, 1971) çalışmalarında, bileşik silindirdeki burulma dalgalarını yaklaşık dalga teorileri çerçevesinde fiziksel ve geometrik parametrelerin dispersiyona etkilerini incelemiş ve bu sonuçlar üç boyutlu lineer elastisite teorisi sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Thurston (1976) makalesinde, lineer elastisite teorisi çerçevesinde bileşik silindirde burulma dalga yayılımını geometrik parametrelere bağlı olarak araştırmıştır. Kaul vd. (1982) makalesinde, bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımını yaklaşık dalga teorileri çerçevesinde incelemenin yanında grup hızı ve enerji akısı problemlerini’de ele almışlardır. Kleczewski ve Parnes (1987) çalışmasında, sonsuz elastik ortam içerisinde bulunan silindirdeki burulma dalgalarının yayılımını ele almıştır. Bu inceleme $c_2^{(1)} < c < c_2^{(2)}$ koşulu altında yapılmıştır. Burada c yayılan dalgaın faz hızını, μ Lamé sabitini ve ρ ortamın yoğunluğunu göstermek üzere $c_2^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$ ve $c_2^{(2)} = \sqrt{\mu^{(2)}/\rho^{(2)}}$ ise (1) ve (2) ortamlarda yayılan enine dalgaların hızlarını ifade etmektedir. Bu ifadelerdeki (1) üst indisi silindiri, (2) üst indisi ise silindiri çevreleyen sonsuz elastik ortamı temsil etmektedir. Dispersiyon eğrileri fiziksel ve geometrik parametrelere göre incelenmiştir. Berger v.d. (2000) çalışmasında, bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımını temas koşullarına bağlı olarak incelemiştir. İdeal temas durumunun sonuçlarının Armenakas (1965) sonuçları ile aynı olduğunu vurgulamış, ideal temas koşullarından uzaklaştıkça, verilen bir dalga sayısı için frekansın düştüğünü ve bu düşüşün küçük dalga sayılarında daha etkin olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmaların tamamı lineer elastisite teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Bileşik silindirdeki

dalga yayılımının geniş özeti Thurston (1978) makalesinde verilmiştir. Buraya kadar özeti verilen çalışmalarda öngerilmeler gözönüne alınmamıştır.

Tez kapsamında yapılan araştırmalar esasen öngerilmeli elastik ortamlardaki dinamik olaylara ait olduğundan, şimdi de öngerilmeli ortamlardaki dalga yayılımını içeren çalışmaların özetini ele alalım. Öngerilmeli dinamik problemlerin klasik elastisite teorisi çerçevesinde incelenemeyeceğini belirtmek gerekir. Bu güne kadar öngerilmeli durumlarla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Şimdiye kadar öngerilmeli ortamlar için yapılan ve bu ortamlarda dalga yayılımına ait olan çalışmalarda, öngerilmelerin dalga yayılımından dolayı oluşan gerilmelerden çok büyük olduğu varsayılmıştır. Öngerilmeli ortamlardaki elastik dalgaların yayılmasına öngerilmelerin etkisinin incelenmesi problemleri teorik ve uygulama açısından güncel ve gereklidir. Bu problemler, öngerilmelerin dalga yayılımından oluşan gerilmelerden değerce çok büyük olması koşulu çerçevesinde incelenebilir. Bu koşul lineer olmayan elastodinamik alan denklemlerinin doğrusallaştırılmasına olanak vermiştir. Doğrusallaştırma iki tür yaklaşım çerçevesinde uygulanmaktadır.

Birinci tür yaklaşım iki ve üç boyutlu problemlerin sırasıyla tek ve iki boyutlu problemlere dönüştürülmesi ile gerçekleştirilir. Bu teoriler yaklaşık doğrusallaştırılmış teoriler olarak adlandırılır ve bunların uygulanmasında problem boyutlarının küçültülmesi için Kirchhoff-Love ve Timoshenko hipotezleri gibi yaklaşık teoriler kullanılır.

İkinci tür yaklaşımda ise, uygun problemlerin incelenebilmesi için kesin üç boyutlu doğrusallaştırılmış teoriler uygulanmaktadır. Bu teoriler öngerilmeli ortamlarda Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi olarak adlandırılırlar (ÜDEDYT).

Şimdiye kadar ÜDEDYT (Akbarov (2006 a, b, c, d, e) , Akbarov ve Özaydın (2001 a, b) ve Akabrov v.d.(2005) v.s. bu gibi araştırmaların dışında) esasen dalga yayılımı problemlerinin incelenmesine uygulanmıştır. Biot (1940) makalesinde, öngerilmenin hidrostatik olması ve elastik ortamların öngerilmenin olmadığı durumlarda homojen ve izotrop olması koşulları altında dalga yayılımına öngerilmenin etkisini incelemiştir. Tang (1967) çalışmasında, lineer olmayan elastisite teorisinden doğrusallaştırılarak elde edilen doğrusallaştırılmış elastisite teorisiyle öngerilmeli elastik cisimlerde dalga ve titreşimleri incelemiştir. Bu incelemede sonsuz ortamdaki dalga yayılımını üç durum için ele almıştır. Bunlar, hidrostatik basınç ve çekme, tek eksenli çekme ve basınç ve homojen kayma gerilmesi durumlarıdır.

Pertürbasyonla elde edilen denklemlerin klasik elastisite teorisinden farklı olduğu vurgulanmıştır. Hidrostatik basınç durumunda, yayılan dalganın hızı basıncın artmasıyla arttığı belirtilmiştir. Bu çalışmada gösterilmiştir'ki, tek eksenli gerilme durumunda, dalga yayılımı hızı öngerilmenin yön ve değerine bağlıdır. Thurston ve Brugger (1964) çalışmalarında, öngerilmeli ortamlarda küçük genlikli ses dalgalarının yayılım hızlarından yararlanarak üçüncü dereceden elastisite sabitlerinin belirlenebileceğini ifade etmişlerdir. Bu yöndeki araştırmaların geniş özeti Guz ve Markhort (2000) makalesinde verilmiştir. Chadwick ve Yarvis (1979 a, 1979 b) ve Dowaikh ve Ogden (1991) makalelerinde, iki farklı elastik malzemeden oluşan düzlemlerin arayüzünde oluşan dalgaların (Stoneley Dalgaları) yayılmasına öngerilmenin etkisini incelemişlerdir. Bu dalgalar her tür malzeme çifti için oluşmamaktadır. Bu dalgaların oluşması için malzemelerin mekanik özelliklerinin belirli kısıtlamaları sağlaması gerekir. Bu çalışmalardan öngerilmelerin Stoneley dalgalarının hızına ve söz konusu kısıtlamalara etkisi öğrenilmiştir. Ogden ve Sotiropoulos (1998) makalelerinde homojen öngerilmenin sıkıştırılamayan izotrop elastik yarı düzlemde dalga yayılımına ve yansımaya etkisi incelenmiştir. Rogerson ve Sandiford (2000 a, 2000 b, 2002) makalelerinde sırası ile iki katlı, dört katlı ve periyodik çok katlı öngerilmeli sıkışmaz elastik levhalarda dalga yayılımı parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde ÜDEYD uygulanarak incelenmiştir. İnceleme sonucunda büyük ve küçük dalga boyu durumlarında dalga dispersiyonu için asimptotik ifadeler bulunmuştur. Ancak elde edilen sonuçlardan ön gerilmenin dispersiyona etkisi hakkında bir açıklama veya önerme yapılmasına imkan sağlamamaktadır.

Akbarov ve Özışık (2003, 2004) ve Özışık ve Akbarov (2003) makalelerinde öngerilmeli tabaka ile örtülü öngerilmeli yarı düzlemdeki genelleşmiş Rayleigh dalgalarının dispersiyonu incelenmiştir. Bu çalışmalarda lineer elastik malzeme çiftleri için çekme (basınç) öngerilmesinin genelleşmiş Rayleigh dalgalarının hızlarını arttırdığını (azalttığını), üçüncü mertebeden elastisite sabitlerinin gözönüne alınması durumunda ise, seçilen malzeme çiftlerine bağlı olarak değiştiği gösterilmiştir.

Ön gerilmeli silindirik cisimlerde elastik dalgaların yayılması ile ilgili yapılan ilk çalışma Green (1961) makalesidir. Green (1961) çalışmasında öngerilmeli silindirde küçük burulma titreşimlerini incelemiştir. Elastik deformasyon teorisi ile termal etkiler gözönüne alınarak temel denklemler türetilmiştir. Silindirik sistemlerle ilgili olarak; Şuhubi (1965) makalesinde ön çekmeli izotrop elastik silindirde boyuna küçük titreşimleri incelemiştir. Bu çalışmada

öngerilmeli ortamdaki dalga yayılım hızının öngerilmenin olmadığı durumdaki dalga yayılım hızına oranının basınçla arttığı ifade edilmiştir. Demiray ve Şuhubi (1970) makalesinde önburulmalı silindirdeki küçük burulma salınımlarını incelemişlerdir. Makalede dalgaların yayılım hızına önburulmanın etkisi ve bu önburulmadan dolayı burulma salınımlarının boyuna salınımlarla birlikte var olabileceği gösterilmiştir.

Öngerilmeli bileşik silindirde dalga yayılımı hakkında sadece bir makale vardır (Akbarov ve Guz (2004)). Bu makalede öngerilmeli bileşik silindirde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı, yukarıda kaydedilen çalışmalar gibi parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde ÜDEDT uygulanarak incelenmiştir. İncelemeler Murnaghan potansiyeli gözönüne alınarak yapılmıştır.

Belirtmek gerekir'ki bazı araştırmalarda ön gerilmenin dalga yayılımına etkisi yaklaşık teoriler çerçevesinde yapılmıştır. Buna örnek olarak Chai ve Wang (2006) makalesini verebiliriz. Bu makalede karbon nanotüplerde enine dalga yayılımına öngerilmenin etkisi incelenmiştir. Bu çalışmada öngerilmelerin termal etkiler ve farklı malzemelerin uygun olmayan bir şekilde birleşmelerinden kaynaklandığı gözönüne alınarak karbon nanotüplerde enine dalgaların yayılmasına ve titreşimlerine öngerilmelerin etkisi yüksek frekanslar için incelenmiştir. Basınç öngerilmesinin enine dalga yayılımının hızını azalttığını ve çekme öngerilmesinin dalga yayılımının hızını arttırdığını gösterilmiştir.

Öngerilmeli ortamlarda dalga yayılımına ait araştırmaların sistematik incelenmesi Guz'un (1986a,1986b, 2004) kitaplarında verilmiştir. Bu çalışmaların geniş bir özeti Guz ve Makhort (2000) ve Guz (2002) makalelerinde incelenmiştir. Yukarıda yapılan özetlemelerden görüldüğü gibi şimdiye kadar öngerilmeli bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımına öngerilmenin etkisi incelenmemiştir. Tez kapsamında yapılan araştırmalar bu yöndeki ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde üç boyutlu doğrusallaştırılmış dalga yayılımı teorisi (ÜDEDT) uygulanarak öngerilmeli bileşik silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonu incelenmiştir. Bu çalışmada, mekanik özellikleri Murnaghan potansiyeli ile belirlenen lineer olmayan malzemeler ve lineer elastik malzemeler için araştırmalar

yapılmıştır. Çağdaş endüstrinin bir çok alanında bileşik silindirlerin uygulanması ve bu silindirlerin dinamik burulma yüklenmelerine maruz kalması tez konusunu hem teorik, hemde pratik açıdan gerekli ve güncel kılmaktadır.

Yapılan Araştırmaların Amaçları

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir.

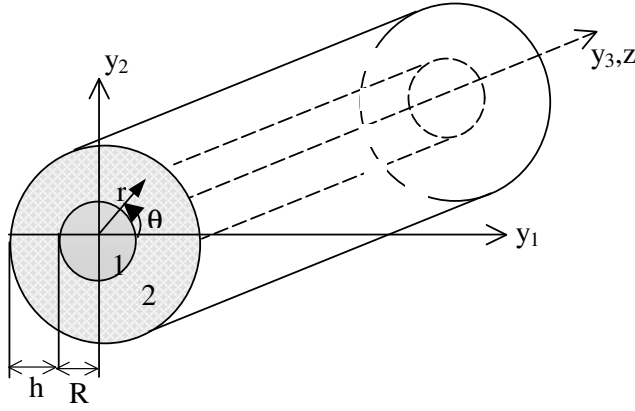
1. Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde üç boyutlu doğrusallaştırılmış dalga yayılımı teorisi (ÜDEDT) uygulanarak öngörilmeli bileşik silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonunu ve bu dispersiyona silindirdeki öngörilmelerin, geometrik ve mekanik parametrelerin etkisinin incelenmesi,
2. Bileşik silindir, içi boş bileşik silindir ve çok katlı silindirler için dispersiyon denklemlerinin mekanik özelliklerinin Murnaghan potansiyeli ile verilen lineer olmayan malzemeler için elde edilmesi ve bu denklemlerin çözülmesi için gerekli algoritma ve programların yapılması,
3. 1. ve 2. de yapılan çalışmaların özel hali olarak, öngörilmesiz durumu ele alarak bulunan sonuçların lineer elastisite teorisine göre yapılmış uygun çalışmalarda sonuçlarla karşılaştırılması ve oluşturulan çözüm algoritmasının test edilmesi,
4. Bileşik silindir, içi boş bileşik silindir ve çok katlı silindirlerdeki burulma dalgalarının dispersiyonuna ait sayısal sonuçların elde edilmesi ve yorumlanması.

2. ÖNGERİLMELİ BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ YAYILMASI VE DİSPERSİYONU

Bu bölümde, öngerilmeli bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılması problemi ele alınmıştır. Silindirlerin, Murnaghan potansiyeli ile belirlenen lineer olmayan elastik malzemelerden oluştuğu kabul edilmiştir. İçteki silindire ait büyüklükler (1) üst indisi, dıştaki örtük silindire ait büyüklükler (2) üst indisi ile gösterilmiştir. Öngerilmeli durum “0” üst indisi ile ifade edilmektedir. İncelenen problemin matematiksel formülasyonu parçalı cisim modeli çerçevesinde öngerilmeli ortamlarda üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga yayılımı teorisinin (ÜDEDYT) hareket denklemleri çerçevesinde yapılmaktadır. Farklı malzeme çiftleri için öngerilmelerin dispersiyon eğrilerine etkisini gösteren sonuçlar grafikler halinde verilmektedir.

2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Yarıçapı R olan bir silindir üzerine yerleştirilmiş, kalınlığı h olan örtük bir silindirden oluşan bileşik silindiri gözönüne alalım (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Bileşik silindir.

Silindirlerdeki bir noktanın uzaydaki konumu $Oy_1y_2y_3$ kartezyen koordinat veya $Or\theta y_3$ silindirik koordinat sisteminde tanımlanan Lagrange koordinatları ile verilmektedir. Ortamın doğal, öngerilme (başlangıç) ve pertürbe edilmiş durumları ayrı ayrı ele alınmaktadır. Doğal durum denirken ortamda gerilme ve yerdeğiştirmelerin sıfır olduğu varsayılır. Öngerilme (Başlangıç) durumunda ise ortamda dış statik kuvvetlerin etkisinde ortamda statik gerilme ve

yerdeğiştirme durumunun var olduğu kabul edilir. Ortam malzemesi yeterli derecede sert olduğunda doğal ve öngerilme (başlangıç) durumlarının koordinatları aynı kabul edilir ve başlangıç durumundaki gerilme ve yerdeğiştirmeler klasik lineer elastisite teorisi çerçevesinde belirlenir. Ortamın pertürbe edilmiş durumunu öngerilme durumundaki gerilme ve yerdeğiştirmelere eklenen küçük dinamik pertürbasyonlar, yani {öngerilme durumu + pertürbasyonlar} oluşturmaktadır. Pertürbasyonların öngerilme durumundaki uygun büyüklüklerden çok küçük olduğu varsayılarak {öngerilme durumu + pertürbasyonlar} durumu için sürekli ortamlar teorisinin lineer olmayan alan denklemleri yazılarak bu denklemler pertürbasyonlara göre lineerize edilir (doğrusallaştırılır). Bu doğrusallaştırılmış denklemler Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÜDEDYT) denklemleri olarak bilinir. ÜDEDYT' in alan denklemlerinin elde edilmesi prosedürlerinin geniş biçimde açıklaması Biot (1965) ve Guz (1986 a, 1986 b, 2004) kaynaklarında verilmektedir. Burada ise ÜDEDYT'in tezde yapılan çalışmalara uygun olan özel bir duruma ait alan denklemlerini ele alacağız. Söylenen özel durumu ise aşağıdaki gibi tanımlayacağız. Ele alınan silindirlerdeki ön gerilmeler

$$\sigma_{zz}^{(m),0} = \text{sabit}_m, \quad m=1,2 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{rr}^{(m),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(m),0} = \sigma_{rz}^{(m),0} = \sigma_{\theta z}^{(m),0} = \sigma_{r\theta}^{(m),0} \equiv 0$$

ile verilmektedir. Silindirler birleştirilmeden önce ayrı ayrı Oy_3 eksenini boyunca çekildikten (öngerilme uygulayıp) sonra birleştirildikleri kabul edilir. Bu durumda ÜDEDYT hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(m)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\theta\theta}^{(m)}) + \sigma_{zz}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_r^{(m)}}{\partial z^2} &= \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_r^{(m)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(m)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(m)} + \sigma_{zz}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial z^2} &= \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(m)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(m)} + \sigma_{zz}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_z^{(m)}}{\partial z^2} &= \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_z^{(m)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ile ifade edilir. Geometrik bağıntılar ise,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{rr}^{(m)} &= \frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial r}, \epsilon_{r\theta}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(m)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(m)}}{r} \right), \epsilon_{rz}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial z} \right) \\
\epsilon_{\theta\theta}^{(m)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(m)}}{r}, \epsilon_{\theta z}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(m)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial \theta} \right), \epsilon_{zz}^{(m)} = \frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

biçiminde yazılır. Mekanik bağıntılar (Elastisite bağıntıları),

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(m)} &= A_{11}^{(m)} \epsilon_{rr}^{(m)} + A_{12}^{(m)} \epsilon_{\theta\theta}^{(m)} + A_{13}^{(m)} \epsilon_{zz}^{(m)}, \sigma_{\theta\theta}^{(m)} = A_{21}^{(m)} \epsilon_{rr}^{(m)} + A_{22}^{(m)} \epsilon_{\theta\theta}^{(m)} + A_{23}^{(m)} \epsilon_{zz}^{(m)} \\
\sigma_{zz}^{(m)} &= A_{31}^{(m)} \epsilon_{rr}^{(m)} + A_{32}^{(m)} \epsilon_{\theta\theta}^{(m)} + A_{33}^{(m)} \epsilon_{zz}^{(m)}, \sigma_{rz}^{(m)} = 2\mu_{13}^{(m)} \epsilon_{rz}^{(m)}, \\
\sigma_{r\theta}^{(m)} &= 2\mu_{12}^{(m)} \epsilon_{r\theta}^{(m)}, \sigma_{\theta z}^{(m)} = 2\mu_{23}^{(m)} \epsilon_{\theta z}^{(m)}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ile verilmektedir.

Burada $A_{ij}^{(m)}$ ve $\mu_{ij}^{(m)}$ mekanik özelliklere ve öngerilmelere bağımlı sabitlerdir. $\sigma_{rr}^{(m)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(m)}$, $\sigma_{zz}^{(m)}$, $\sigma_{r\theta}^{(m)}$, $\sigma_{\theta z}^{(m)}$, $\sigma_{rz}^{(m)}$ ’ler gerilme tensörünün, $\epsilon_{rr}^{(m)}$, $\epsilon_{\theta\theta}^{(m)}$, $\epsilon_{zz}^{(m)}$, $\epsilon_{r\theta}^{(m)}$, $\epsilon_{\theta z}^{(m)}$, $\epsilon_{rz}^{(m)}$ ’ler şekil değiştirme tensörünün, u_r , u_z ve u_θ ’ler ise yerdeğiştirme vektörünün bileşenleridir. Yazılan denklemler, ele alınan silindirik ortam durumunda bir çok dinamik olayın oluşumunun matematiksel modellemesini içermektedir. Bu tezde, öngerilmeleri (2.1)’de belirlenen ve geometrisi Şekil 2.1’de gösterilen bileşik silindirde burulma dalgalarının yayılımı inceleneceğinden

$$u_r^{(m)} \equiv 0, u_z^{(m)} \equiv 0 \text{ ve } u_\theta^{(m)} = u_\theta^{(m)}(r, z, t) \tag{2.5}$$

olduğu varsayılacaktır. Burulma dalgasının (2.5) tanımına göre, göz önüne alınan sistem için hareket denklemi;

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(m)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(m)} + \sigma_{zz}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial z^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

şeklini alır. Bu özel durumdaki geometrik ilişkiler,

$$\varepsilon_{r\theta}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(m)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(m)}}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z}^{(m)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_{\theta}^{(m)}}{\partial z} \quad (2.7)$$

mekanik ilişkiler

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = 2\mu_{r\theta}^{(m)} \varepsilon_{r\theta}^{(m)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(m)} = 2\mu_{\theta z}^{(m)} \varepsilon_{\theta z}^{(m)} \quad (2.8)$$

bağıntıları ile ifade edilirler. Böylece , ele alınan bileşik silindirde burulma dalgalarının yayılması (2.6) hareket denklemi , (2.7) geometrik ve (2.8) mekanik ifadeleri aracılığı ile yapılacaktır. Kabul edelimki, silindir malzemelerindeki gerilme ve şekil değiştirme tansörleri arasındaki ilişki Murnaghan potansiyeli ile verilmektedir. Bu potansiyel (Murnaghan (1951))

$$\Phi^{(m)} = \frac{1}{2} \lambda^{(m)} (A_1^{(m)})^2 + \mu^{(m)} A_2^{(m)} + \frac{a^{(m)}}{3} (A_1^{(m)})^3 + b^{(m)} A_1^{(m)} A_2^{(m)} + \frac{c^{(m)}}{3} A_3^{(m)} \quad (2.9)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Burada, $\lambda^{(m)}$ ve $\mu^{(m)}$ m. Malzemenin Lamé' sabitlerini ve $a^{(m)}$, $b^{(m)}$ ve $c^{(m)}$ üçüncü mertebeden elastisite sabitlerini göstermektedir. $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$ ve $A_3^{(m)}$ sırasıyla Green şekil değiştirme tansörlerinin birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden cebirsel invariantlarıdır. Bu invariantlar Green şekil değiştirme tansörü bileşenleri ile

$$\begin{aligned} A_1^{(m)} &= \varepsilon_{rr}^{(m)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)} + \varepsilon_{zz}^{(m)} \\ A_2^{(m)} &= (\varepsilon_{rr}^{(m)})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta}^{(m)})^2 + (\varepsilon_{zz}^{(m)})^2 + 2(\varepsilon_{r\theta}^{(m)})^2 + 2(\varepsilon_{\theta z}^{(m)})^2 + 2(\varepsilon_{rz}^{(m)})^2 \\ A_3^{(m)} &= (\varepsilon_{rr}^{(m)})^3 + (\varepsilon_{\theta\theta}^{(m)})^3 + (\varepsilon_{zz}^{(m)})^3 + 3(\varepsilon_{r\theta}^{(m)})^2 (\varepsilon_{rr}^{(m)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)}) + \\ &\quad 3(\varepsilon_{\theta z}^{(m)})^2 (\varepsilon_{\theta\theta}^{(m)} + \varepsilon_{zz}^{(m)}) + 3(\varepsilon_{rz}^{(m)})^2 (\varepsilon_{rr}^{(m)} + \varepsilon_{zz}^{(m)}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

biçiminde verilirler. Bilindiği üzere, potansiyel verildiğinde gerilme ve şekil değiştirme arasındaki ilişkiler

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(m)} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{rr}^{(m)}} \Phi^{(m)}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)}} \Phi^{(m)}, \quad \sigma_{zz}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{zz}^{(m)}} \Phi^{(m)} \\ \sigma_{rz}^{(m)} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{rz}^{(m)}} \Phi^{(m)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\theta z}^{(m)}} \Phi^{(m)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{r\theta}^{(m)}} \Phi^{(m)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ifadeleri ile yazılmaktadır. (2.11) ifadeleri Guz (2004)'de gösterildiği gibi doğrusallaştırılarak, (2.8) de bulunan $\lambda^{(m)}$ ve $\mu^{(m)}$ ' ler için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}\mu_{r\theta}^{(m)} &= \left[\frac{\partial}{\partial A_2^{(m),0}} + \frac{3}{2} (\varepsilon_{rr}^{(m),0} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(m),0}) \frac{\partial}{\partial A_3^{(m),0}} \right] \Phi^{(m),0} \\ \mu_{\theta z}^{(m)} &= \left[\frac{\partial}{\partial A_2^{(m),0}} + \frac{3}{2} (\varepsilon_{\theta\theta}^{(m),0} + \varepsilon_{zz}^{(m),0}) \frac{\partial}{\partial A_3^{(m),0}} \right] \Phi^{(m),0}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Burada, ele alınan (2.1) öngerilmeler için

$$\varepsilon_{rr}^{(m),0} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(m),0} = -\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}} \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{(3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(m),0} + \varepsilon_{zz}^{(m),0} = -\frac{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})\sigma_{zz}^{(m),0}}{2\mu^{(m)}(3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})}\quad (2.13)$$

yazılabilir. Yukarıda söylendiği gibi, öngerilme durumu klasik lineer elastisite teorisi çerçevesinde bulunduğundan (2.13)'de $\varepsilon_{rr}^{(m),0}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(m),0}$ ve $\varepsilon_{zz}^{(m),0}$ ve $\sigma_{zz}^{(m),0}$ 'la belirlenmesinde (2.9)'daki 3. mertebeden elastik sabitler gözönüne alınmaktadır. (2.9), (2.10), (2.12) ve (2.13)'de $\mu_{r\theta}^{(m)}$ ve $\mu_{\theta z}^{(m)}$ için aşağıdaki ifadeleri buluruz,

$$\begin{aligned}\mu_{r\theta}^{(m)} &= \mu^{(m)} \left[1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{3K_0^{(m)}\lambda^{(m)}} \left(b^{(m)} - \frac{\lambda^{(m)}}{2\mu^{(m)}} c^{(m)} \right) \right], \quad \mu_{r\theta}^{(m)} = \mu^{(m)} K_{12}^{(m)} \\ \mu_{\theta z}^{(m)} &= \mu^{(m)} \left[1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \frac{1}{3K_0^{(m)}} \left(b^{(m)} + \frac{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})c^{(m)}}{4\mu^{(m)}} \right) \right], \quad \mu_{\theta z}^{(m)} = \mu^{(m)} K_{23}^{(m)}\end{aligned}\quad (2.14)$$

burada $K_0^{(m)} = \lambda^{(m)} + \frac{2}{3}\mu^{(m)}$ 'dır. Böylece aşağıda yapılacak incelemelerde (2.8)'deki $\mu_{r\theta}^{(m)}$ ve $\mu_{\theta z}^{(m)}$ sabitleri (2.14) ifadeleri yardımı ile hesaplanacaktır.

2.2 Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

Bilindiği üzere ele alınan bileşik silindirde z yönünde yayılan harmonik burulma dalgalarının gösterimi

$$u_{\theta}^{(m)} = u_{\theta}^{(m)}(r, z, t) = \phi^{(m)}(r) \exp i(kz - \omega t) \quad (2.15)$$

şeklindedir. (2.15) ifadesinin (2.7) ve (2.8) de yerine yazılmasıyla geometrik bağıntılar,

$$\begin{aligned}\epsilon_{r\theta}^{(m)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial r} - \frac{\phi^{(m)}}{r} \right) e^{i(kz - \omega t)}, \\ \epsilon_{\theta z}^{(m)} &= \frac{1}{2} \phi^{(m)} (ik) e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}\quad (2.16)$$

ve mekanik bağıntılar,

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(m)} &= \mu_{r\theta}^{(m)} \left(\frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial r} - \frac{\phi^{(m)}}{r} \right) e^{i(kz - \omega t)} \\ \sigma_{\theta z}^{(m)} &= \mu_{\theta z}^{(m)} \phi^{(m)} (ik) e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}\quad (2.17)$$

şeklinde ifade edilirler. (2.15), (2.16), (2.17), ifadeleri kullanılarak (2.6)'nin yeniden $\phi^{(m)}(r)$ ile yazılmasıyla

$$\frac{\partial^2 \phi^{(m)}(kr)}{\partial (kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{\partial^{(m)} \phi(kr)}{\partial (kr)} - \frac{\phi^{(m)}(kr)}{(kr)^2} + \left[c^2 \frac{\rho^{(m)}}{\mu_{r\theta}^{(m)}} - \frac{\mu_{\theta z}^{(m)}}{\mu_{r\theta}^{(m)}} - \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu_{r\theta}^{(m)}} \right] \phi^{(m)}(kr) = 0 \quad (2.18)$$

denklemini elde edilir. Burada $c = \frac{\omega}{k}$ yayılan dalganın faz hızını, $\rho^{(m)}$ malzeme yoğunluğunu göstermektedir. Denklem (2.18)'de

$$q^{(m)} = c^2 \frac{\rho^{(m)}}{\mu_{r\theta}^{(m)}} - \frac{\mu_{\theta z}^{(m)}}{\mu_{r\theta}^{(m)}} - \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu_{r\theta}^{(m)}} = \frac{1}{K_{12}^{(m)}} \left[\left(\frac{c}{c_2^{(m)}} \right)^2 - K_{23}^{(m)} - \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \right] \quad (2.19)$$

tanımlaması yapalım. (2.19) ifadesinde aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır.

$$\mu_{r\theta}^{(m)} = \mu^{(m)} K_{12}^{(m)}, \quad K_{12}^{(m)} = 1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{3K_0 \lambda^{(m)}} \left(b^{(m)} - \frac{\lambda^{(m)}}{2\mu^{(m)}} c^{(m)} \right),$$

$$\mu_{\theta z}^{(m)} = \mu^{(m)} K_{23}^{(m)}, \quad K_{23}^{(m)} = 1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \frac{1}{3K_0} \left(b^{(m)} + \frac{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})c^{(m)}}{4\mu^{(m)}} \right) \quad (2.20)$$

$c_2^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu^{(m)}}{\rho^{(m)}}}$ uygun lineer elastik izotrop ortamdaki enine dalgaların yayılma hızıdır,

$\Psi^{(m)} = \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}}$ öngerilmelerin normalize edilmiş değerini belirlemektedir.

Yukarıda verilen tanımlamalarla (2.18) denkleminde $\bar{r}^{(m)} = (kr)\sqrt{q^{(m)}}$ dönüşümünün yapılmasıyla (2.18)

$$\frac{\partial^2 \phi^{(m)}}{\partial (\bar{r}^{(m)})^2} + \frac{1}{\bar{r}^{(m)}} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial (\bar{r}^{(m)})} + \left(1 - \frac{1}{(\bar{r}^{(m)})^2} \right) \phi^{(m)} = 0 \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilir (Watson (1958)). Bu denklem birinci dereceden Bessel denklemi olup genel çözümleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \phi^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \quad , \quad q^{(m)} > 0 \\ \phi^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \quad , \quad q^{(m)} < 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2.22)'de $J_1(x)$ ve $Y_1(x)$ birinci dereceden, birinci (Bessel) ve ikinci tür (Neumann) Bessel fonksiyonları; $I_1(x)$ ve $K_1(x)$ Modifiye Bessel fonksiyonlarıdır. Bu tez kapsamında incelenecek olan sistemlerin sınır koşulları, bileşik silindir için;

$$u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R} \quad \text{ve} \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h} = 0 \quad (2.23)$$

ve içi boş bileşik silindir için;

$$u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r=R+h_1} = u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R+h_1} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = 0 \quad (2.24)$$

ile verilmektedirler. (2.22)'nin (2.15) ve (2.17) ifadelerinde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(m)}(r, z, t) &= \left[A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} > 0 \\
u_{\theta}^{(m)}(r, z, t) &= \left[A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} < 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$q^{(m)} > 0$ için,

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{q^{(m)}} \left(\frac{\partial \left[A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \right]}{\partial \bar{r}} - \frac{\left[A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \right]}{\bar{r}} \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$q^{(m)} < 0$ için,

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{|q^{(m)}|} \left(\frac{\partial \left[A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \right]}{\partial \bar{r}} - \frac{\left[A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \right]}{\bar{r}} \right) e^{i(kz - \omega t)} \tag{2.26}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{q^{(m)}} \left[A^{(m)} \left(\frac{\partial J_1(\bar{r}^{(m)})}{\partial \bar{r}} - \frac{J_1(\bar{r}^{(m)})}{\bar{r}} \right) + B^{(m)} \left(\frac{\partial Y_1(\bar{r}^{(m)})}{\partial \bar{r}} - \frac{Y_1(\bar{r}^{(m)})}{\bar{r}} \right) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} > 0$$

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{|q^{(m)}|} \left[A^{(m)} \left(\frac{\partial I_1(\bar{r}^{(m)})}{\partial \bar{r}} - \frac{I_1(\bar{r}^{(m)})}{\bar{r}} \right) + B^{(m)} \left(\frac{\partial K_1(\bar{r}^{(m)})}{\partial \bar{r}} - \frac{K_1(\bar{r}^{(m)})}{\bar{r}} \right) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} < 0$$

bu ifadede Bessel fonksiyonlarının aşağıda verilen tekrarlılama bağıntıları

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x)$$

$n=1$ için ifadesi

$$J'_1(x) - \frac{1}{x} J_1(x) = -J_2(x)$$

ve benzer şekilde

$$Y'_1(x) - \frac{1}{x} Y_1(x) = -Y_2(x), \tag{2.27}$$

$$K'_1(x) - \frac{1}{x} K_1(x) = -K_2(x),$$

$$I'_1(x) - \frac{1}{x} I_1(x) = I_2(x)$$

kullanılarak

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{q^{(m)}} \left[-A^{(m)} J_2(\bar{r}^{(m)}) - B^{(m)} Y_2(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} > 0$$

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{q^{(m)}} \left[A^{(m)} I_2(\bar{r}^{(m)}) - B^{(m)} K_2(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} < 0 \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{(m)} &= \mu_{\theta z}^{(m)} \left[A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \right] (ik) e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} > 0 \\ \sigma_{\theta z}^{(m)} &= \mu_{\theta z}^{(m)} \left[A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \right] (ik) e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} < 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

ifadeleri elde edilir.

2.3 Öngerilmeli Bileşik Silindirin Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

Göz önüne alınan sistemde $r = 0$ da Y_I ve K_I tanımlı olmadığından, sistemi temsil eden dalga fonksiyonları

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(\bar{r}^{(1)}) &= A^{(1)} E_1^{(1)}(\bar{r}^{(1)}) \\ \phi^{(2)}(\bar{r}^{(2)}) &= A^{(2)} E_1^{(2)}(\bar{r}^{(2)}) + B^{(2)} F_1^{(2)}(\bar{r}^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

ile verilir, burada

$$\begin{aligned} E_1^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= \begin{cases} J_1(\bar{r}^{(m)}) & , \quad q^{(m)} > 0 \\ I_1(\bar{r}^{(m)}) & , \quad q^{(m)} < 0 \end{cases} \quad m = 1, 2 \\ F_1^{(2)}(\bar{r}^{(2)}) &= \begin{cases} Y_1(\bar{r}^{(2)}) & , \quad q^{(2)} > 0 \\ K_1(\bar{r}^{(2)}) & , \quad q^{(2)} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

olacak şekilde düzenlenirler. Sınır koşulları (2.23) denkleminde (2.25), (2.28), (2.30), (2.31) bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned} A^{(1)} \alpha_{11} - A^{(2)} \alpha_{12} - B^{(2)} \alpha_{13} &= 0 \\ A^{(1)} \alpha_{21} - A^{(2)} \alpha_{22} - B^{(2)} \alpha_{23} &= 0 \\ A^{(2)} \alpha_{32} + B^{(2)} \alpha_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$A^{(1)}$, $A^{(2)}$ ve $B^{(2)}$ bilinmeyen sabitleri için lineer denklem takımı elde ederiz. Bu denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması onun bilinmeyenlerinden oluşan katsayılar

determinantının sıfıra eşit olmasını gerektirir. Bu eşitlik ise dispersiyon denklemini oluşturur. Bileşik silindir için adı geçen determinant 3x3 boyutundadır ve bu determinant

$$\det \|\alpha_{ij}\| = 0, \quad i,j=1,2,3 \quad (2.33)$$

biçiminde yazılır. Bu denklemdeki α_{ij}

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \begin{cases} J_1(kR\sqrt{q^{(1)}}) & , q^{(1)} > 0 \\ I_1(kR\sqrt{|q^{(1)}|}) & , q^{(1)} < 0 \end{cases}, \quad \alpha_{12} = \begin{cases} -J_1(kR\sqrt{q^{(2)}}) & , q^{(2)} > 0 \\ -I_1(kR\sqrt{|q^{(2)}|}) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}, \\ \alpha_{13} &= \begin{cases} -Y_1(kR\sqrt{q^{(2)}}) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_1(kR\sqrt{|q^{(2)}|}) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}, \quad \alpha_{21} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(1)}\sqrt{q^{(1)}}J_2(kR\sqrt{q^{(1)}}) & , q^{(1)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(1)}\sqrt{|q^{(1)}|}I_2(kR\sqrt{|q^{(1)}|}) & , q^{(1)} < 0 \end{cases} \\ \alpha_{22} &= \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)}\sqrt{q^{(2)}}J_2(kR\sqrt{q^{(2)}}) & , q^{(2)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(2)}\sqrt{|q^{(2)}|}I_2(kR\sqrt{|q^{(2)}|}) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}, \quad \alpha_{23} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)}\sqrt{q^{(2)}}Y_2(kR\sqrt{q^{(2)}}) & , q^{(2)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(2)}\sqrt{|q^{(2)}|}K_2(kR\sqrt{|q^{(2)}|}) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \\ \alpha_{31} &= 0, \quad \alpha_{32} = \begin{cases} J_2\left(kR\sqrt{q^{(2)}}\left(1+\frac{h}{R}\right)\right) & , q^{(2)} > 0 \\ I_2\left(kR\sqrt{|q^{(2)}|}\left(1+\frac{h}{R}\right)\right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}, \\ \alpha_{33} &= \begin{cases} Y_2\left(kR\sqrt{q^{(2)}}\left(1+\frac{h}{R}\right)\right) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_2\left(kR\sqrt{|q^{(2)}|}\left(1+\frac{h}{R}\right)\right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

şeklinde verilir.

2.3.1 Asimptotik İnceleme: Uzun Dalgaboyu Limiti ve Ona Öngerilmenin Etkisi

Dalga boyunun çok büyük olduğu ($kR \rightarrow 0$) asimptotik durumda Bessel fonksiyonlarının seri açılımlarından yararlanarak bileşik silindir için, burulma dalgalarının birinci modunun $kR \rightarrow 0$ daki limit değerini veren analitik bir ifadeyi elde etmek için bulduğumuz katsayılar determinantını $kR \rightarrow 0$ koşulu altında seriye açalım.

$$\begin{vmatrix} J_1(kR\sqrt{q^{(1)}}) & -J_1(kR\sqrt{q^{(2)}}) & -Y_1(kR\sqrt{q^{(2)}}) \\ \frac{\mu_{r\theta}^{(1)}\sqrt{q^{(1)}}}{\mu_{r\theta}^{(2)}\sqrt{q^{(2)}}} J_2(kR\sqrt{q^{(1)}}) & -J_2(kR\sqrt{q^{(2)}}) & -Y_2(k\sqrt{q^{(2)}}) \\ 0 & J_2[kR\sqrt{q^{(2)}}(1+\frac{h}{R})] & Y_2[kR\sqrt{q^{(2)}}(1+\frac{h}{R})] \end{vmatrix} = 0 \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} & J_1(kR\sqrt{q^{(1)}}) \left\{ J_2 \left[kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h}{R} \right) \right] Y_2(kR\sqrt{q^{(2)}}) - J_2(kR\sqrt{q^{(2)}}) Y_2 \left[kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h}{R} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{\mu_{r\theta}^{(1)}\sqrt{q^{(1)}}}{\mu_{r\theta}^{(2)}\sqrt{q^{(2)}}} J_2(kR\sqrt{q^{(1)}}) \left\{ J_2 \left[kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h}{R} \right) \right] Y_1(kR\sqrt{q^{(2)}}) - \right. \\ & \left. J_1(kR\sqrt{q^{(2)}}) Y_2 \left[kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h}{R} \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Bu denklemi $kR \rightarrow 0$ 'da seriye açmak için, Bessel fonksiyonlarının $x \ll 1$ için

$$J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \quad (2.37)$$

$$Y_\nu(x) \rightarrow -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^\nu, \quad \Gamma(\nu+1) = \nu! \quad (2.38)$$

ile tanımlanan ifadelerinin $\nu=1$ ve $\nu=2$

$$J_1(x) \rightarrow \left(\frac{x}{2} \right), \quad J_2(x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2, \quad Y_1(x) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right) \quad \text{ve} \quad Y_2(x) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^2 \quad (2.39)$$

terimlerinin (2.36) de yerine yazılarak düzenlenmesiyle

$$\xi^4 - 1 = \frac{\mu_{r\theta}^{(1)}\sqrt{q^{(1)}}}{\mu_{r\theta}^{(2)}\sqrt{q^{(2)}}} (kR\sqrt{q^{(1)}}) (kR\sqrt{q^{(2)}}) \left\{ \frac{\xi^4}{8} - \frac{1}{(kR\sqrt{q^{(2)}})^2} \right\}, \quad \xi = 1 + \frac{h}{R} \quad (2.40)$$

$$\xi^4 - 1 = \frac{\mu_{r\theta}^{(1)}(q^{(1)})}{\mu_{r\theta}^{(2)}} (kR)^2 \left\{ \frac{\xi^4}{8} - \frac{1}{(kR)^2 (q^{(2)})} \right\} \quad (2.41)$$

$$\xi^4 - 1 = \frac{\mu_{r\theta}^{(1)}(q^{(1)})}{\mu_{r\theta}^{(2)}} \left\{ \frac{\xi^4}{8} (kR)^2 - \frac{1}{(q^{(2)})} \right\} \quad (2.42)$$

bağıntısı elde edilir. $kR \ll 1$ kabul edildiğinden $(kR)^2$ terimi ihmal edilmek suretiyle

$$\xi^4 - 1 = -\frac{\mu_{r\theta}^{(1)}}{\mu_{r\theta}^{(2)}} \frac{q^{(1)}}{q^{(2)}}$$

$$\frac{q^{(1)}}{q^{(2)}} = -\frac{\mu_{r\theta}^{(2)}}{\mu_{r\theta}^{(1)}} \alpha, \quad \alpha = (\xi^4 - 1), \quad \xi = 1 + \frac{h}{R} \quad (2.43)$$

bulunur. Burada $q^{(m)} = \frac{1}{K_{12}^{(m)}} \left[\left(\frac{c}{c_2^{(m)}} \right)^2 - K_{23}^{(m)} - \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \right]$, $m=1,2$ dir.

$q^{(m)}$ ifadesinin (2.43) de yerine yazılıp yeniden düzenlenmesiyle, malzeme özellikleri Murnaghan potansiyeli ile verilen bileşik silindirdaki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde) ifadesi, mekanik ve geometrik parametrelere bağlı olarak

$$c = \left\{ \frac{\mu^{(1)}(K_{23}^{(1)} + \Psi^{(1)}) + \mu^{(2)}\alpha(K_{23}^{(2)} + \Psi^{(2)})}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}\alpha} \right\}^{1/2} \quad (2.44)$$

ile verilir. Burada

$$\Psi^{(1)} = \frac{\sigma_{zz}^{(1),0}}{\mu^{(1)}}, \quad \Psi^{(2)} = \frac{\sigma_{zz}^{(2),0}}{\mu^{(2)}}, \quad c_2^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu^{(m)}}{\rho^{(m)}}},$$

$$\xi = 1 + \frac{h}{R}, \quad \alpha = \xi^4 - 1$$

$$K_{12}^{(m)} = 1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{3K_0^{(m)}\lambda^{(m)}} \left(b^{(m)} - \frac{\lambda^{(m)}}{2\mu^{(m)}} c^{(m)} \right),$$

$$K_{23}^{(m)} = 1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \frac{1}{3K_0^{(m)}} \left(b^{(m)} + \frac{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})c^{(m)}}{4\mu^{(m)}} \right)$$

tanımlamaları yapılmıştır. Bu genel ifadede Murnaghan katsayılarının $b^{(m)} = c^{(m)} = 0$ alınmasıyla elde edilen öngerilmeli lineer elastik malzemelerin burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde) ifadesi

$$c = \left\{ \frac{\mu^{(1)}(1 + \Psi^{(1)}) + \mu^{(2)}\alpha(1 + \Psi^{(2)})}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}\alpha} \right\}^{1/2}, \quad \alpha = \xi^4 - 1, \quad \xi = 1 + \frac{h}{R} \quad (2.45)$$

şekline gelir. (2.45) denkleminde öngerilmelerin artışının faz hızını arttıracığı verilmektedir. Öngerilmeler $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.0$ alındığında, burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde)

$$c = \left\{ \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}\alpha} \right\}^{1/2}, \quad \alpha = \xi^4 - 1, \quad \xi = 1 + \frac{h}{R} \quad (2.46)$$

ile ifade edilir. Sayısal sonuçlarımızla uygunluk göstermesi için bu ifadede $\rho^{(m)} = \frac{\mu^{(m)}}{(c_2^{(m)})^2}$

bağıntısı kullanılarak denklemin yeniden düzenlenmesiyle

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left\{ \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha \left(c_2^{(1)} / c_2^{(2)} \right)^2} \right\}^{1/2}, \quad \alpha = \xi^4 - 1, \quad \xi = 1 + \frac{h}{R} \quad (2.47)$$

şeklinde ifade edilir.

Böylece bu alt bölümde, bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızının Armenakas (1965), Reuter (1969), Haines ve Lee (1971) ve Thurston (1976) makalelerinde verilen ($kR \rightarrow 0$ limitinde) (2.46) analitik ifadesi elde edilmiştir. Öngerilmeli bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde) (2.44) ifadesi ile genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme malzeme özellikleri Murnaghan potansiyeli ile verilen lineer olmayan malzemeler için yapılmış ve bunun bir özel durumu olarak 3.mertebeden elastisite sabitlerinin $b^{(m)} = c^{(m)} = 0$ alınmasıyla elde edilen öngerilmeli lineer elastik malzemelerin burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ise (2.45) bağıntısıyla ifade edilmiştir. Bu ifadeler, yani (2.44) ve (2.45), öngerilmelerin gözönüne alınmadığı

($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.0$) durumunda, Armenakas (1965), Reuter (1969), Haines ve Lee (1971), Thurston (1976) makalelerindeki ifadelerle çakışmaktadır.

2.3.2 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

Bileşik silindirdeki burulma dalgalarının dispersiyonunu incelemek elde edilen (2.33) denkleminin c 'ye (dalga yayılım hızına) göre (kR 'ye bağımlı olarak) çözülmesiyle mümkündür. (2.35) denkleminin $kR \rightarrow 0$ ve $kR \rightarrow \infty$ limitleri dışında analitik çözümlerinin elde edilmesi olanaksız olduğundan sayısal çözümleri yapılacaktır. İlk önce (2.33) dispersiyon denkleminin sayısal olarak çözülmesinin gerektirdiği algoritmayı inceleyelim. Bu dispersiyon denkleminin belirttiği determinantın terimleri olan α_{ij} ler, (2.34) deki ifadelerinde gözüktüğü gibi, kR , $c = \omega/k$, h/R , $\rho^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$, $b^{(m)}$, $c^{(m)}$ parametrelerine bağlıdır. Burada c ve kR dışındaki parametreler malzemelerin mekanik özelliklerini ($\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$ -Lame sabitlerini, $\rho^{(m)}$ malzemenin yoğunluğunu, $b^{(m)}$ ve $c^{(m)}$ 3.mertebeden elastisite sabitlerini, $m=1, 2$) ve h/R sistemin geometrik bir parametresini göstermektedir. Dolayısıyla incelediğimiz bileşik silindir için dispersiyon denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

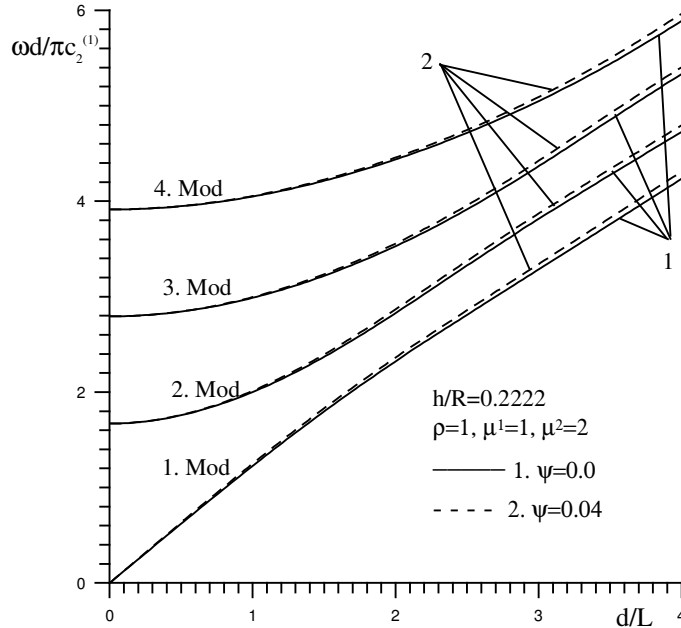
$$\det \left\| \alpha_{ij} \left(kR, \frac{c}{c_2^{(1)}}, \frac{h}{R}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \rho^{(1)} / \rho^{(2)}, \mu^{(1)} / \mu^{(2)}, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)}, c^{(1)}, c^{(2)} \right) \right\| = 0 \quad (2.48)$$

Görüldüğü gibi (2.48) dispersiyon denkleminde bulunan parametrelerden kR ve c dışındakilerin hepsi önceden verilmektedir. Burada kR boyutsuz dalga sayısını ve c ise burulma dalgalarının faz hızını göstermektedir.

Dispersiyon denkleminin (2.48) çözülmesi için aşağıdaki algoritma uygulanmaktadır. kR parametresine başlangıçta değer verilerek (2.48) denklemini sağlayan c değeri aranır. Bu değeri bulmak için c ye mümkün olduğunca en küçük sınırdan başlanarak değerler verilir ve seçilenler için (2.48) denkleminin sol tarafındaki determinantın işareti bulunur. c nin seçilen değerleri küçük farklarla artırılır. Determinantın c nin ardışık gelen iki değerindeki işareti farklı ise (2.48) denkleminin bu aralıkta bir kökünün olduğunu varsayarak ve adım büyüklüğünü küçülterek istenen hassasiyet çerçevesinde bir kök bulunur. Bulunan bu kök değerinden daha büyük değerlerde sonraki kökler bulunur. Daha sonra kR değeri artırılıp

yukarıdaki işlemler tekrar ettirilir. Böylece kR değerine bağlı olarak dalganın c faz hızı bulunmuş olur. Açıklanan bu algoritma Fortran yazılım dilinde yazılarak PC de çalıştırılmıştır.

Yapılan sayısal algoritmayı test etmek amacı ile Armenakas (1970) ve Thurston (1976) makalelerinde incelenmiş durumları tekrar ele alalım. Yani, bu çalışmalardaki mekanik ve geometrik parametreler için dispersiyon diyagramlarına tezde geliştirilmiş sayısal algoritmayı uygulayarak tekrar elde edelim. Armenakas (1970) çalışmasında, $b^{(1)}=b^{(2)}=c^{(1)}=c^{(2)}=0$, $h/R=0.2222$, $\rho = \rho^{(1)} / \rho^{(2)}=1.0$, $\mu = \mu^{(1)} / \mu^{(2)}=0.5$ ($\mu^{(1)}=1.0$, $\mu^{(2)}=2.0$) koşulları altında $\omega d / \pi c_2^{(1)}$ ve d / L arasındaki dispersiyon diyagramları verilmiştir. Burada, ω açısal frekans, d bileşik silindirin dış yarıçapı, λ dalgaboyu olmak üzere $L = \lambda / 2$ olarak tanımlanmıştır. Armenakas (1970) makalesinde verilen sonuçlar sadece öngerilmelerin olmadığı durumu içerir. Elde ettiğimiz sonuçlarda öngerilmelerin olmadığı durum (1. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$) ve öngerilmeli durum (2. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.04$) olarak Şekil 2.2' deki dispersiyon diyagramında verilmiştir. Böylece sayısal algoritmamızla Armenakas (1970) makalesindeki sonuçlar elde edilmiş ve öngerilmenin dispersiyon diyagramına etkisi ilk dört mod için gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Bileşik silindirin dispersiyon diyagramının ilk dört modu.

Thurston (1976) makalesinde $b^{(1)}=b^{(2)}=c^{(1)}=c^{(2)}=0.0$, $h/R=1.0$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=1.0728$, $c_2^{(2)}/c_2^{(1)}=1.0383$ koşulları altında $(c-c_2^{(1)})/(c_2^{(2)}-c_2^{(1)})$ ve $\omega/\omega_{c\infty}$ arasındaki dispersiyon eğrileri verilmiştir. Burada

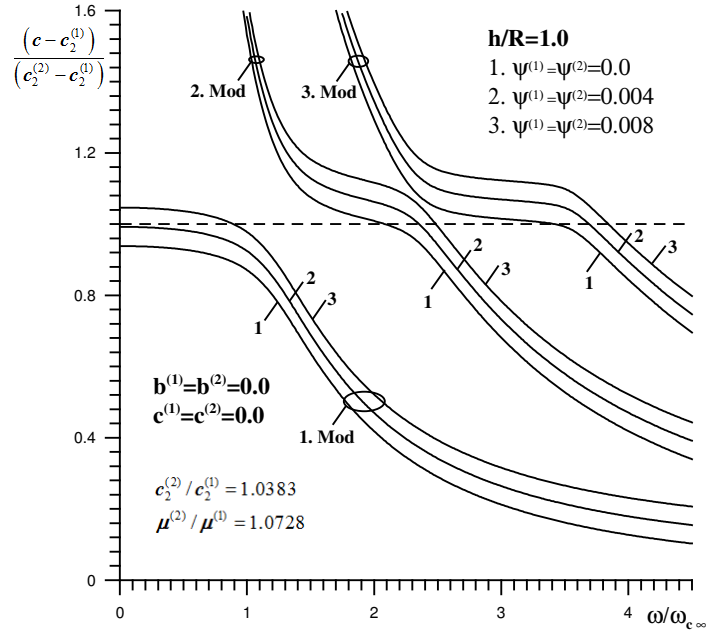
$$\omega_{c\infty} = \frac{c_2^{(2)} x_c \left[\left(c_2^{(2)} / c_2^{(1)} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2}}{2\pi R} \quad (2.49)$$

(2.49) ifadesindeki x_c

$$xJ_0(x) + \frac{2(\mu^{(2)} - \mu^{(1)})}{\mu^{(1)}} J_1(x) = 0 \quad (2.50)$$

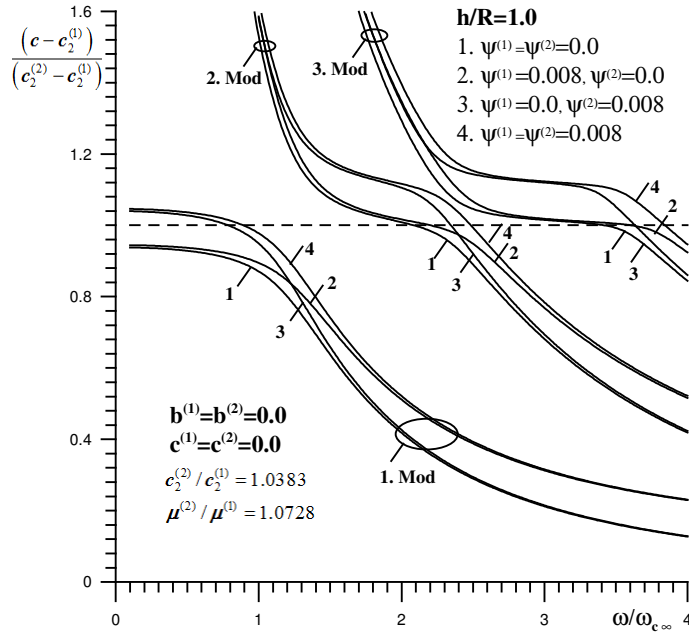
(2.50) denkleminin ilk (minimum) kökü olarak verilmektedir. Burada $J_0(x)$ ve $J_1(x)$ Bessel fonksiyonlarının sıfıncı ve birinci dereceden ifadeleridir. Thurston (1976) makalesinde verilen sonuçlar sadece öngerilmelerin olmadığı durumu içerir. Öngerilmelerin olmadığı durum Şekil 2.3 ve Şekil 2.4' de 1. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.0$ ile belirtilmektedir ve Thurston (1976) makalesinde verilen mekanik ve geometrik parametreler için aynı sonuçlar elde edilmiştir. Buna ilave olarak, verilen koşullarda öngerilmelerin dispersiyona etkisi tarafımızdan incelenmiştir. Öngerilmelerin sadece içteki veya sadece dıştaki örtük silindirlerde ve her iki silindirde aynı zamanda uygulandığı durumları ayrı ayrı ele alalım. Şekil 2.3'de bileşik silindire uygulanan öngerilme değerleri (1. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.0$, 2. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.004$ ve 3. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.008$) için dispersiyon eğrilerinin ilk üç modu verilmiştir. Şekil 2.3' de öngerilmelerin burulma dalgalarının faz hızını, yani $c(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})$ 'i arttırdığı görülmektedir. Şekil 2.4'de bileşik silindirin bileşenlerine uygulanan farklı öngerilme değerleri (1. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.0$, 2. $\Psi^{(1)}=0.008$, $\Psi^{(2)}=0.0$, 3. $\Psi^{(1)}=0.0$, $\Psi^{(2)}=0.008$, 4. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.008$) için dispersiyon eğrilerinin ilk üç modu verilmiştir. Şekil 2.4'de, içteki silindire öngerilme uygulandıktan sonra dıştaki örtük silindire birleştirilmesinden elde edilen bileşik silindirde (2. $\Psi^{(1)}=0.008$, $\Psi^{(2)}=0.0$) yayılan burulma dalgalarının faz hızı $c(\Psi^{(1)}, 0)$ (Bu durum Şekil 2.4'de 2. ile tanımlanmıştır), $\omega/\omega_{c\infty} \rightarrow 0$ değerinde öngerilmeksiz durumdaki dalga yayılım hızına ($c(0,0)$) yaklaşmaktadır, artan $\omega/\omega_{c\infty}$ ile $c(0,0)$ 'dan farklarının arttığı ve $\omega/\omega_{c\infty} \rightarrow \infty$ değerinde $c(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})$ değerine yaklaşmaktadır. Dıştaki örtük silindire öngerilme uygulandıktan sonra içteki silindire birleştirilmesinden elde edilen bileşik silindirde ise (3. $\Psi^{(1)}=0.0$, $\Psi^{(2)}=0.008$) yayılan burulma dalgalarının faz hızı $c(0, \Psi^{(2)})$ (Bu

durum Şekil 2.4'de 3. ile gösterilmiştir) $\omega/\omega_{c\infty} \rightarrow 0$ da $c(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})$ değerine yaklaşılmaktadır ve artan $\omega/\omega_{c\infty}$ ile $c(0,0)$ 'dan farklarının azaldığı ve $\omega/\omega_{c\infty} \rightarrow \infty$ değerine $c(0,0)$ yaklaşılmaktadır. Armenakas (1970) ve Thurston (1976) makalelerinin sonuçlarının tekrar elde edilmesi ve önerilme için geliştirilmesinin bilinen fiziksel görüşlerle uyuşması sayısal sonuçlarımızın doğruluğunu göstermektedir.



Şekil 2.3 Bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk üç modu

(1. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$, 2. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.004$, 3. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$)



Şekil 2.4 Bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk üç modu (1. $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$,

2. $\Psi^{(1)}=0.008, \Psi^{(2)}=0.0$, 3. $\Psi^{(1)}=0.0, \Psi^{(2)}=0.008$, 4. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.008$).

Şimdi Çizelge 2.1’de verilen malzemeler için dispersiyon eğrilerini elde edip inceliyelim. Bu inceleme iki durum için yapılacaktır, birinci durumda bileşik silindirde içteki silindir Bronz ve dıştaki örtük silindir Çelik (Bronz+Çelik), ikinci durumda ise içteki silindir Çelik ve dıştaki örtük silindir Bronz (Çelik +Bronz) olarak ele alınacaktır. Öngerilmelerin faz hızına etkisini incelerken işlemlerimizi kolaylaştırmak için $c = c(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})$ notasyonunu kullanarak aşağıdaki tanımlamayı yapalım.

$$\eta(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) = \left(\frac{c(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) - c(\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0)}{c_2^{(1)}} \right) \quad (2.51)$$

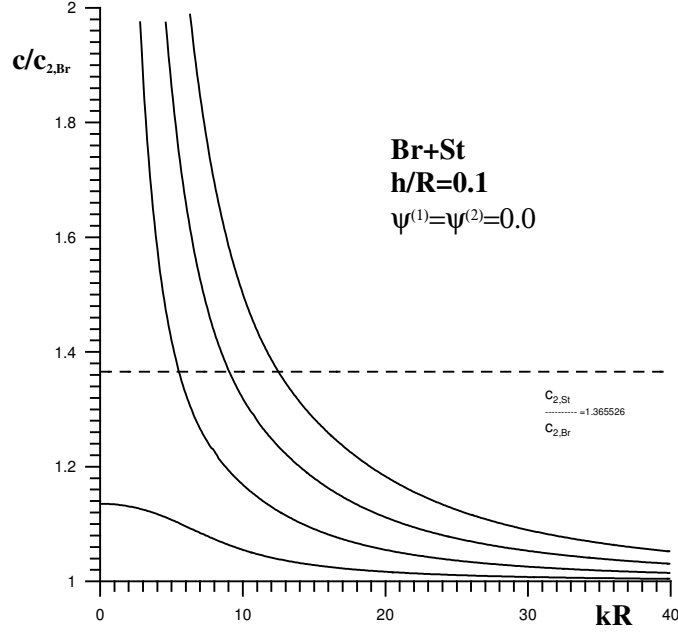
(2.51) tanımlamasından yararlanarak öngerilmenin bu malzeme çifti için bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımına etkisi araştırılmıştır. Aşağıdaki grafiklerde kesikli çizgilerle gösterilmiş olan eğriler 3.mertebeden elastisite sabitlerinin göz önüne alınmadığı ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) durumlara (I), sürekli çizgilerle gösterilmiş olan eğriler 3.mertebeden elastisite sabitlerinin göz önüne alındığı ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) durumlara (II), karşılık gelmektedir.

Çizelge 2.1 Malzemelere ait mekanik özellikler ve üçüncü dereceden elastisite sabitlerine ait değerler.

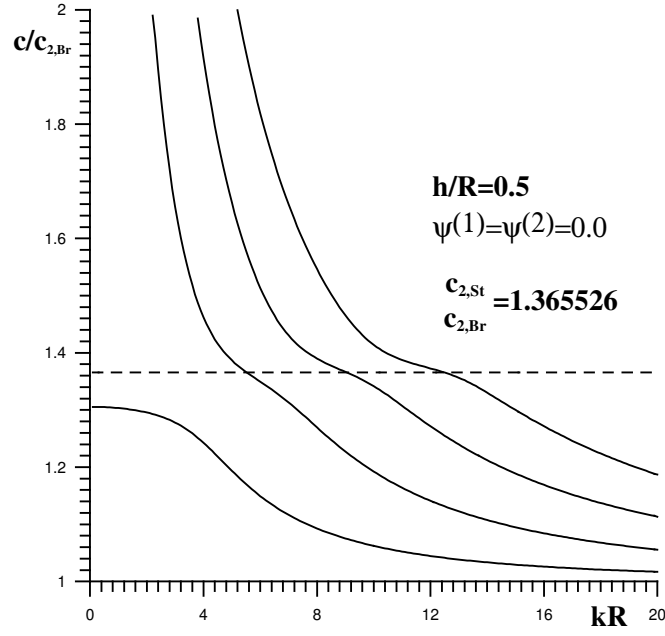
Malzeme	ρ (g/cm ³)	$\lambda \times 10^{-4}$ (MPa) $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\mu \times 10^{-4}$ (MPa) $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$	$b \times 10^{-5}$ (MPa)	$c \times 10^{-5}$ (MPa)
Çelik	7.795	9.26	7.75	-2.75	-4.90
Bronz	7.20	8.16	3.84	-3.10	4.80
Pirinç59	7.20	9.49	4.47	2.70	-3.40

İlk olarak (Bronz+Çelik) durumunu ele alalım. Dispersiyon eğrilerini h/R değerleri ve öngerilmelere bağlı olarak inceleyelim. Öngerilmelerin sadece içteki veya sadece dıştaki örtük silindirlerde ve her iki silindirde aynı zamanda uygulandığı durumları ayrı ayrı ele alalım. İlk

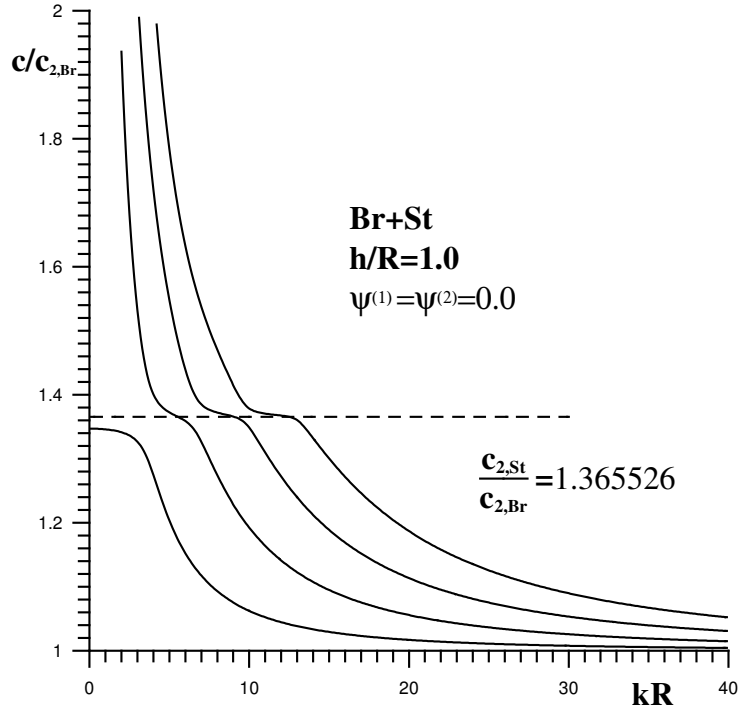
önce malzeme çiftleri için öngerilme olmadığı durumda h/R 'nin dispersiyon eğrilerine etkisini araştıralım. Bu dispersiyon eğrileri Şekil 2.5, 2.6 ve 2.7 ile ilk dört mod için sırasıyla $h/R=0.1$, 0.5 ve 1.0 için verilmektedir. Şekil 2.8 ve 2.9'da ise h/R 'nin 1. mod ve 2.mod'daki dispersiyon eğrilerine etkisi gösterilmektedir. Şekil 2.8' de bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızının artan h/R değerleri ile arttığı gözlenmektedir. Bu artış $kR \rightarrow 0$ 'da (2.44) denkleminin asimptotik değerine uygundur. Faz hızı artan kR değerleriyle azalmaktadır.



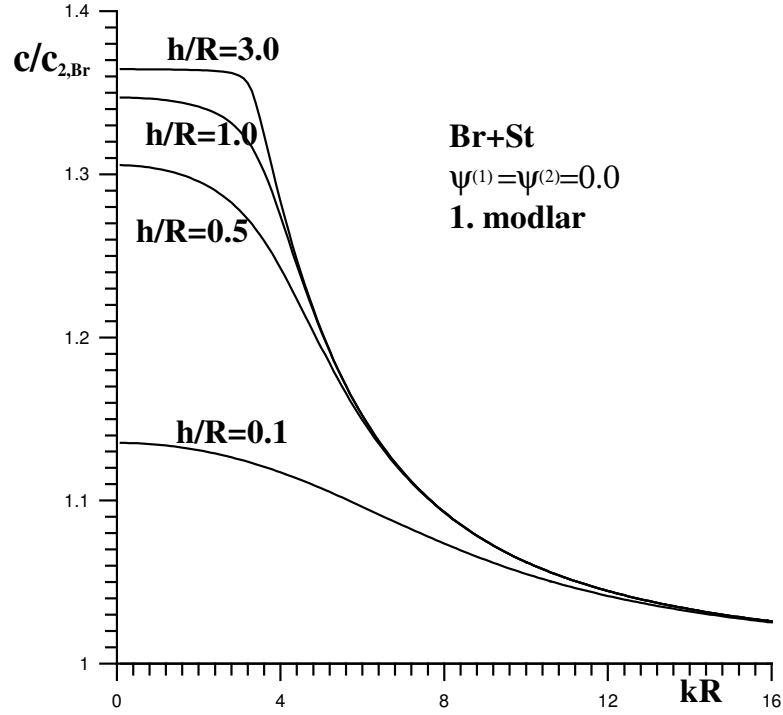
Şekil 2.5 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h/R=0.1$ ve $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$)



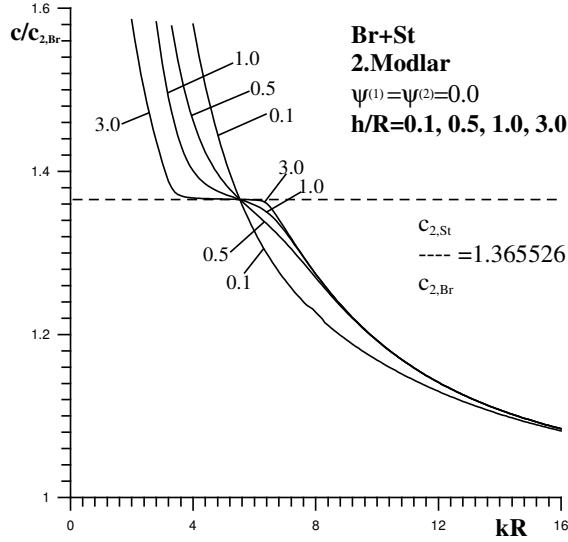
Şekil 2.6 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h/R=0.5$ ve $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$).



Şekil 2.7 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$).



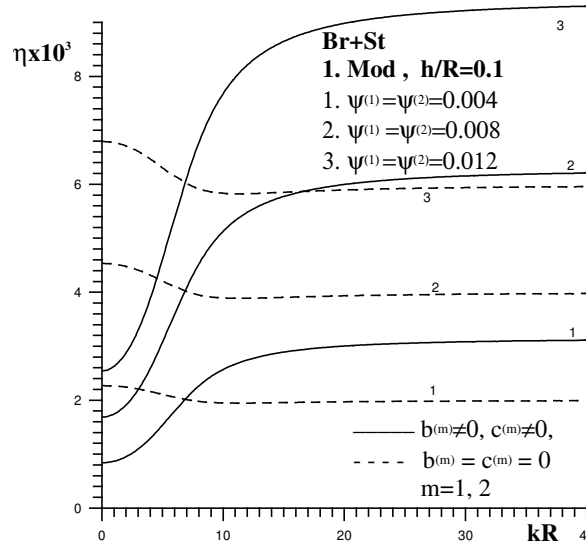
Şekil 2.8 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin birinci mod dispersiyon eğrilerinin h/R bağlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$).



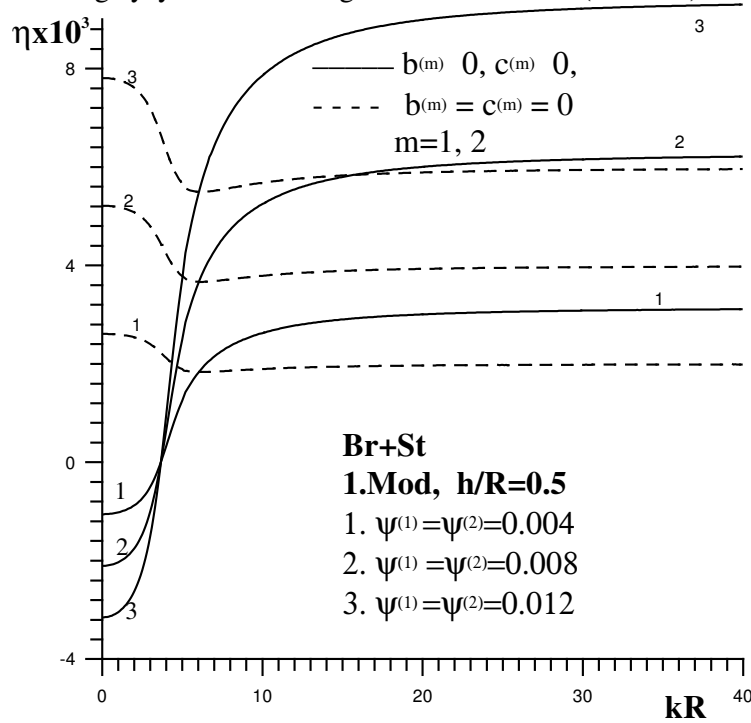
Şekil 2.9 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirin ikinci mod dispersiyon eğrilerinin h/R bağlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$).

Şekil 2.9'da ikinci modun h/R değerleri ile değişimi verilmektedir. Faz hızının $c > c_{2,St}$ değerlerinde h/R değerleri arttıkça faz hızı azalırken, $c < c_{2,St}$ değerlerinde h/R değerleri arttıkça faz hızı artmaktadır. h/R değerlerinin hepsi için, artan kR ile faz hızı azalmaktadır. h/R değerleri arttıkça $c = c_{2,St}$ değerinde dispersiv olmayan bölge oluşmakta ve bu bölge h/R 'nin

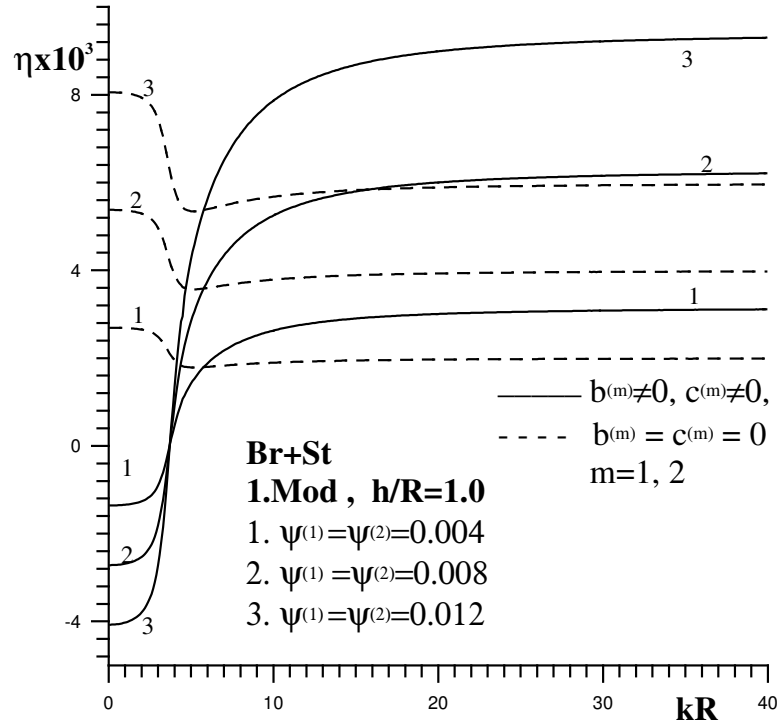
artan değerleriyle artmaktadır. Öngerilmenin faz hızına etkilerini (2.51) notasyonunu kullanarak inceleyelim



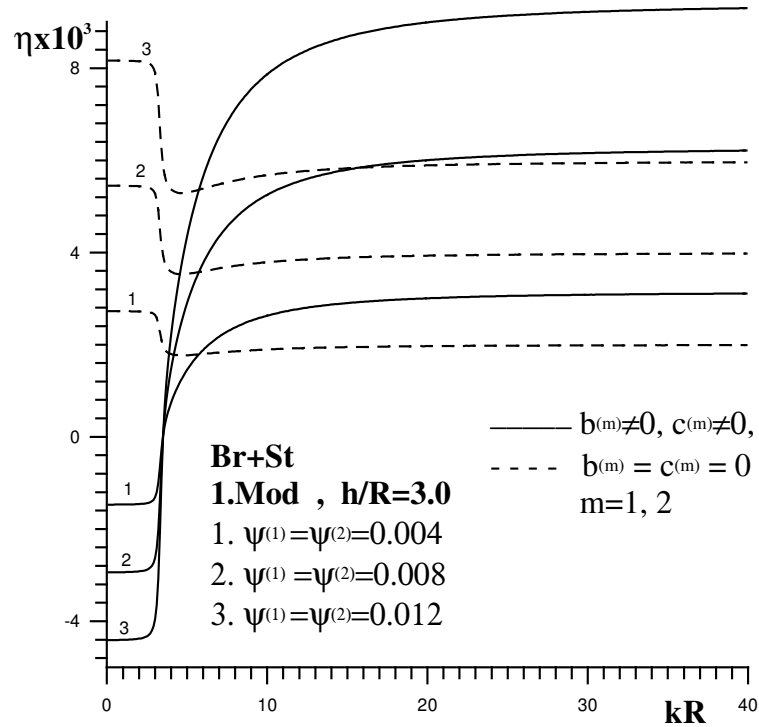
Şekil 2.10 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).



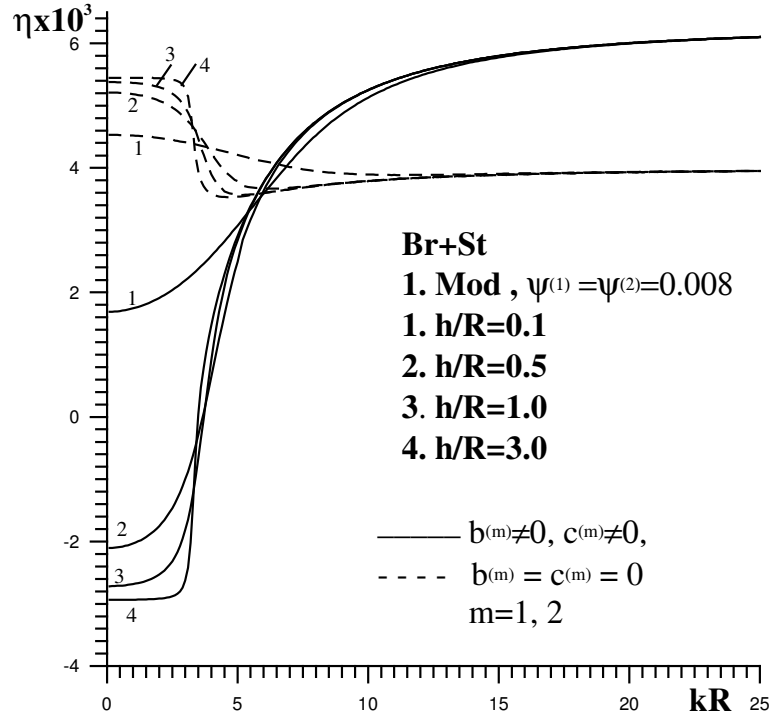
Şekil 2.11 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).



Şekil 2.12 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).

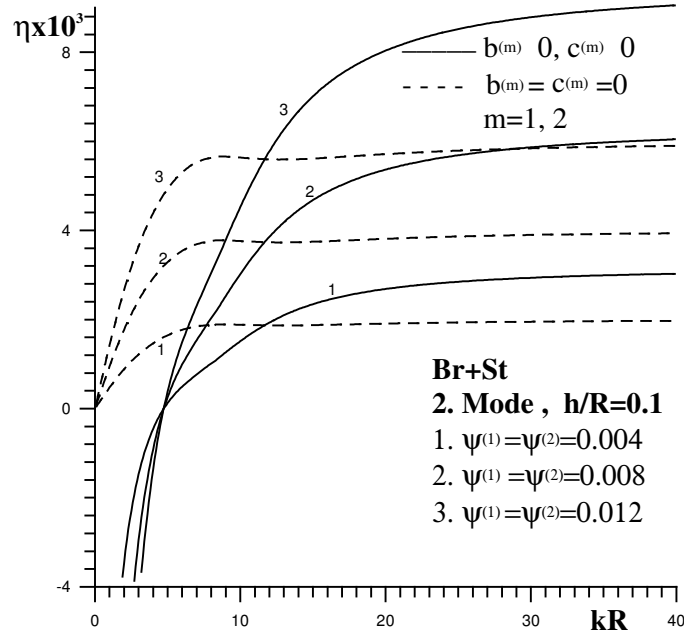


Şekil 2.13 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$).

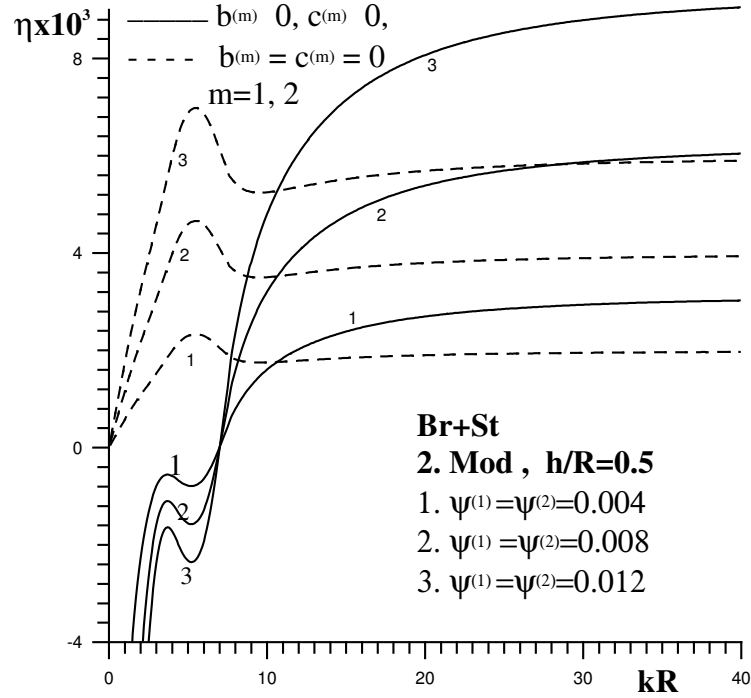


Şekil 2.14 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$).

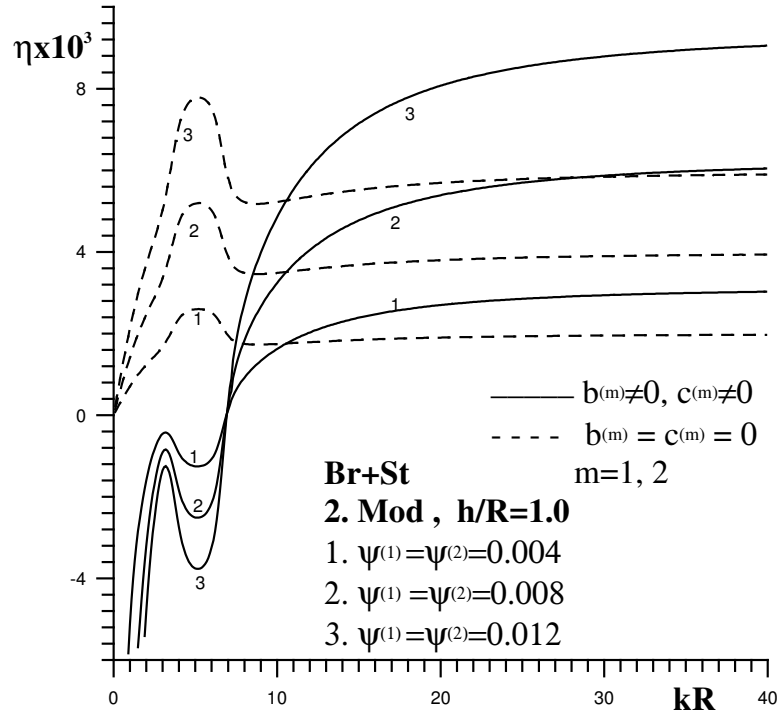
Şekil 2.10- Şekil 2.13' de verilen sayısal sonuçlarda farklı h/R ve öngerilme değerleri için birinci modun değişimi incelenmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise faz hızının küçük kR değerleri için azaldığı ve bir noktadan sonra faz hızının arttığı gözlemlenmiştir. Yani kR 'nin öyle bir $(kR)^*$ değeri vardır'ki, bu değerde $kR = (kR)^*$ öngerilmeler burulma dalgalarının yayılma hızına etki etmemektedir. Öngerilmelerin, $kR < (kR)^*$ için faz hızını düşürdüğü ve $kR > (kR)^*$ için faz hızını arttırdığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Şekil 2.14'de, öngerilme değeri $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$ alınarak, farklı h/R değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkileri verilmiştir. I. durumda küçük kR değerlerinde h/R artışının faz hızını arttırdığını ve artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. II. durumda küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)^*$) h/R artışının faz hızını azalttığı ve $kR > (kR)^*$ değerlerinde faz hızını arttırdığı ve saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür.



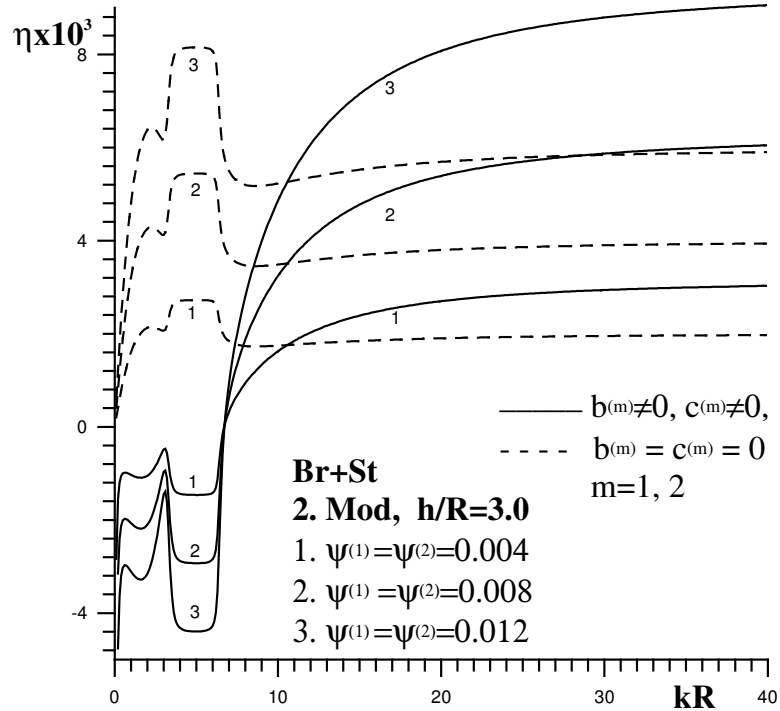
Şekil 2.15 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).



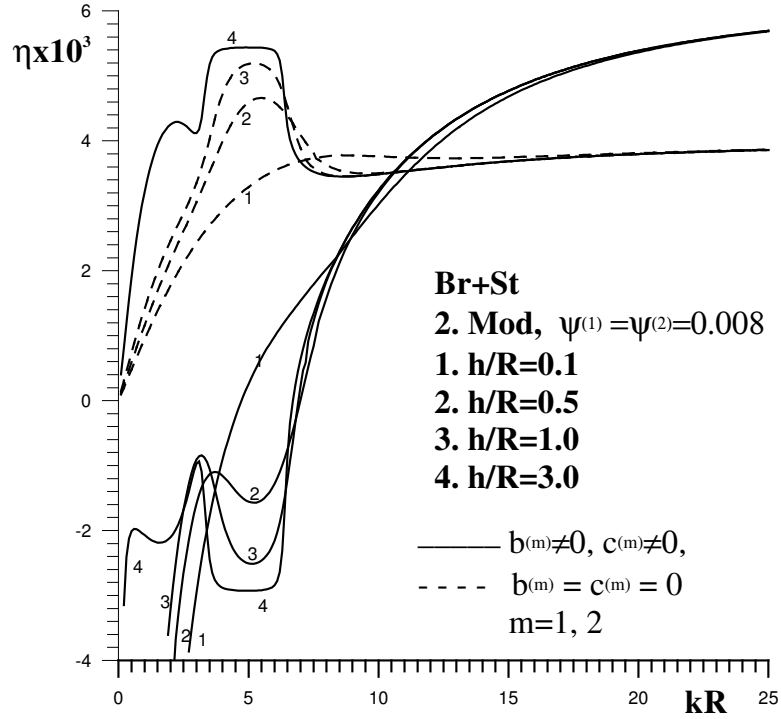
Şekil 2.16 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).



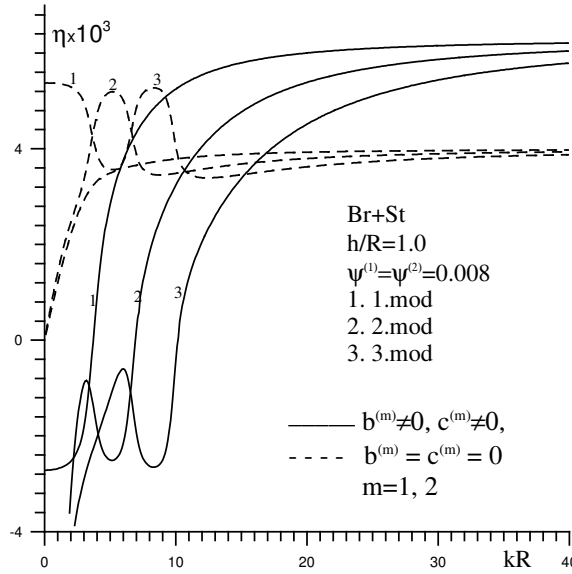
Şekil 2.17 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).



Şekil 2.18 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$).



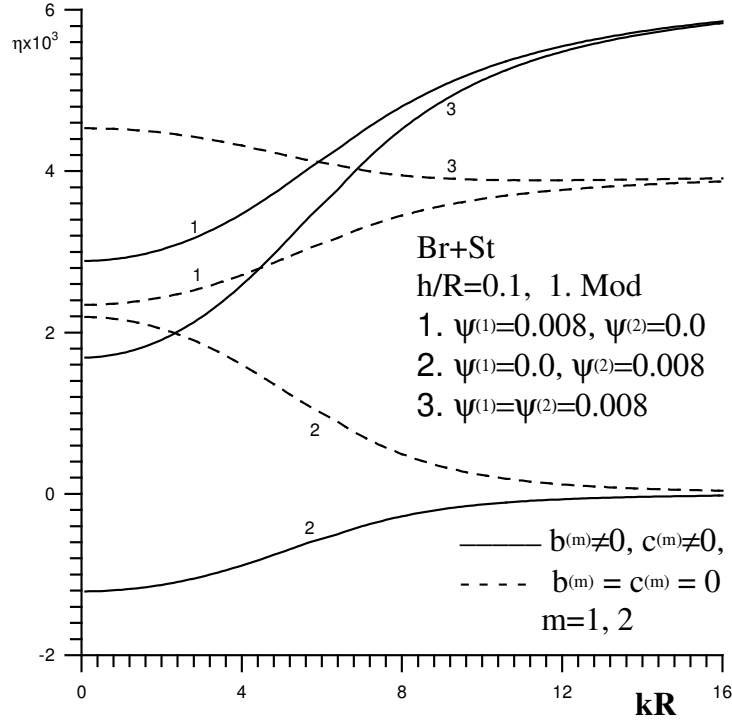
Şekil 2.19 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$).



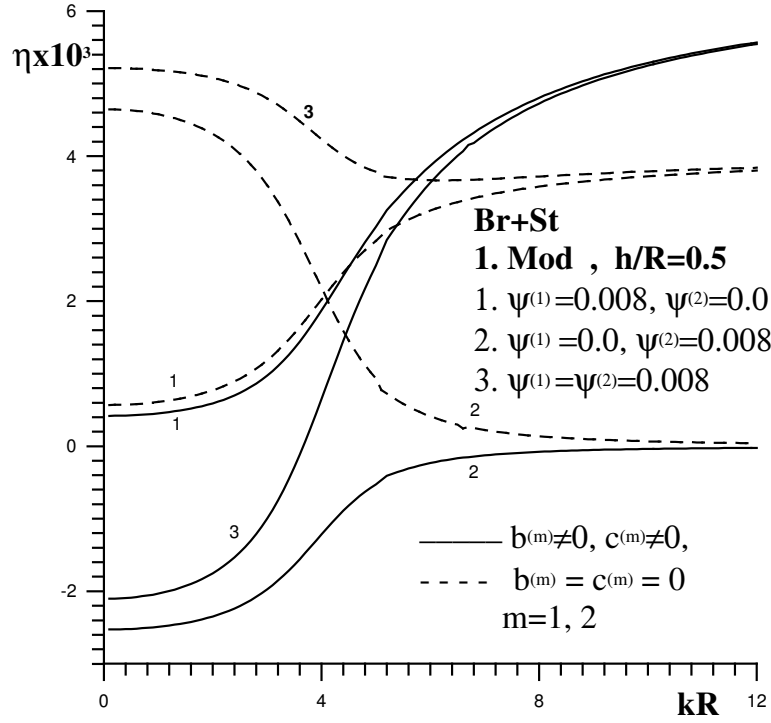
Şekil 2.20 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin ilk üç modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$).

Şekil 2.15- Şekil 2.18' de verilen sayısal sonuçlarda farklı h/R değerleri için ikinci modun öngerilmeye nasıl değiştiği incelenmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı'nda artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$,

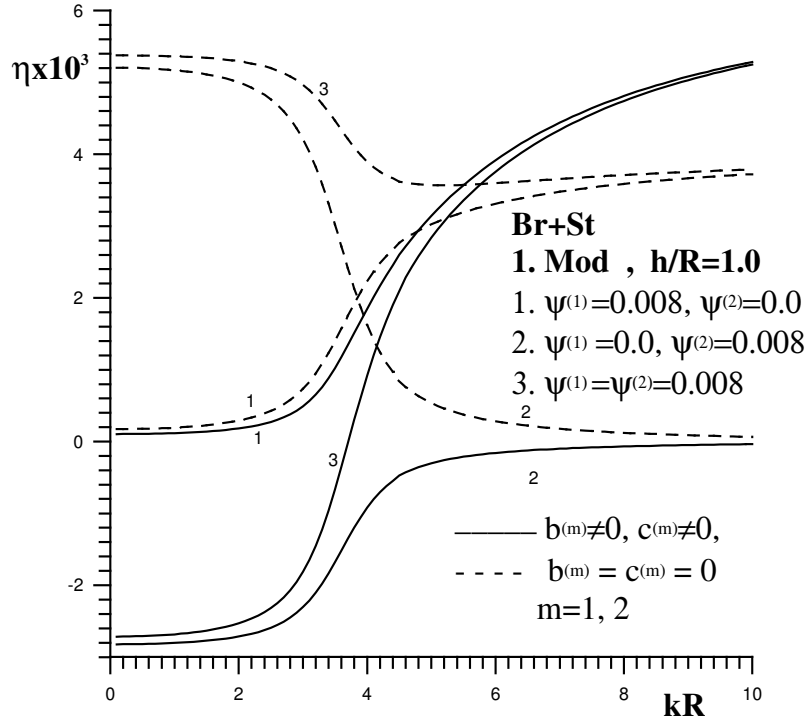
sürekli çizgiler) ise $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmelerin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Şekil 2.19’da, öngerilme değeri $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$ alınarak, farklı h/R değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkileri verilmiştir. I. durumda küçük kR değerlerinde h/R artışının faz hızını arttırdığını ve artan kR değerleriyle saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. II. durumda küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)^*$) h/R artışının faz hızını azalttığı ve $kR > (kR)^*$ değerlerinde faz hızını arttırdığı ve saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde) , öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür. Şekil 2.20 de $h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$ durumu için ilk üç modun dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisini gösteren eğriler verilmektedir. Burada, ikinci ve üçüncü (daha büyük) modların benzer davranışlar gösterdiği, üçüncü modun ikinci moda oranla daha büyük bir kR değerinde saturasyona ulaştığı gözlenmiştir. Şimdi bu malzeme çifti (Bronz-Çelik) için, öngerilmelerin sadece içteki veya sadece dıştaki örtük silindirlere ve her iki silindirde aynı zamanda uygulandığı durumları ele alalım.



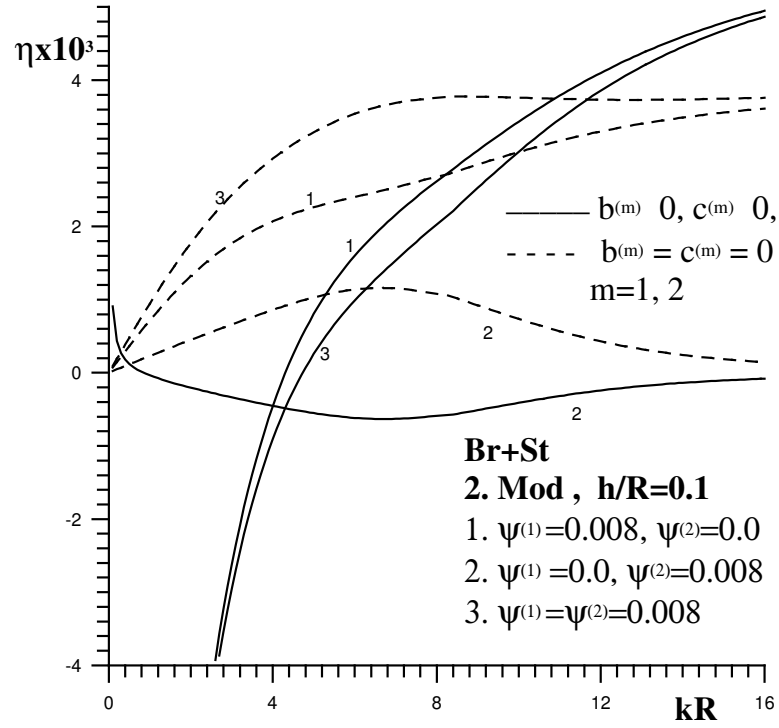
Şekil 2.21 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).



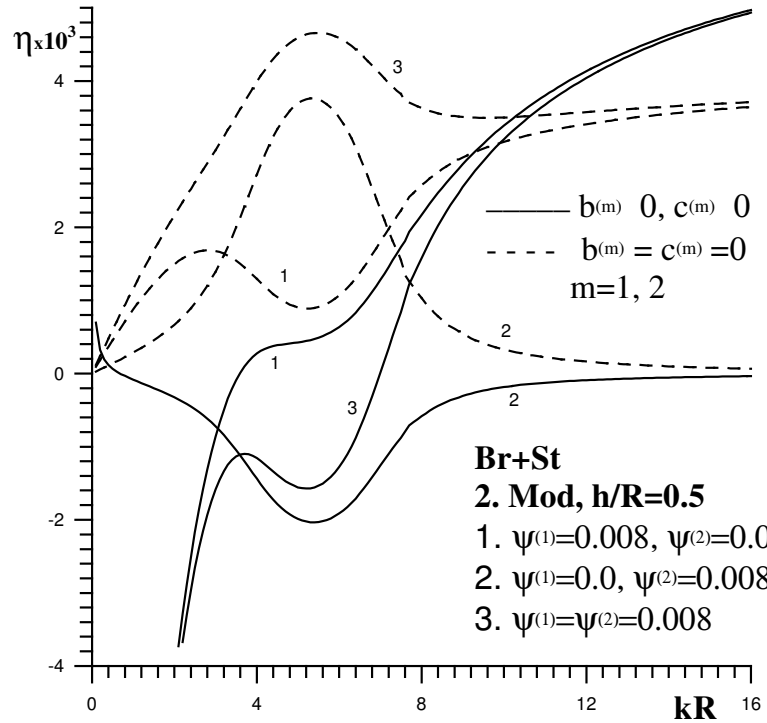
Şekil 2.22 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$)



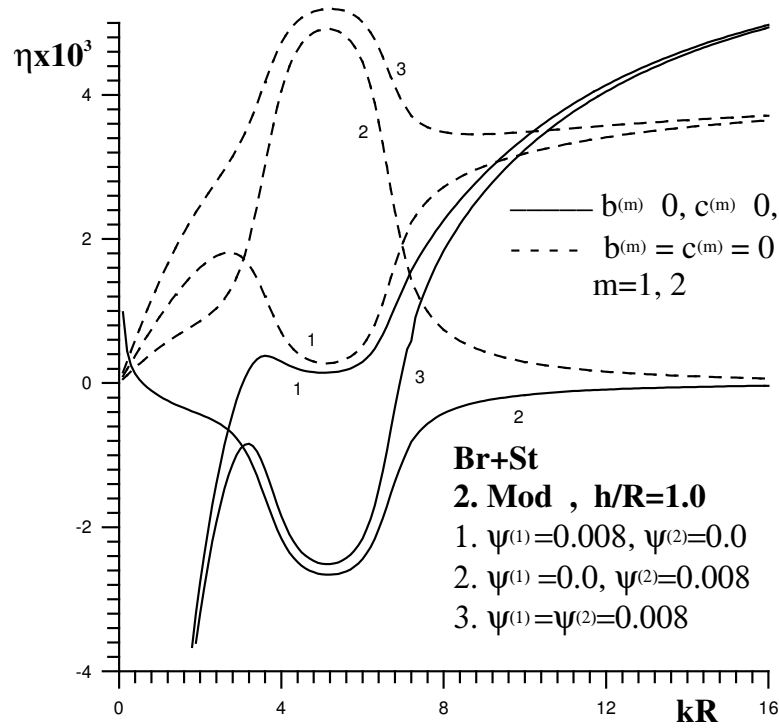
Şekil 2.23 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).



Şekil 2.24 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).



Şekil 2.25 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).



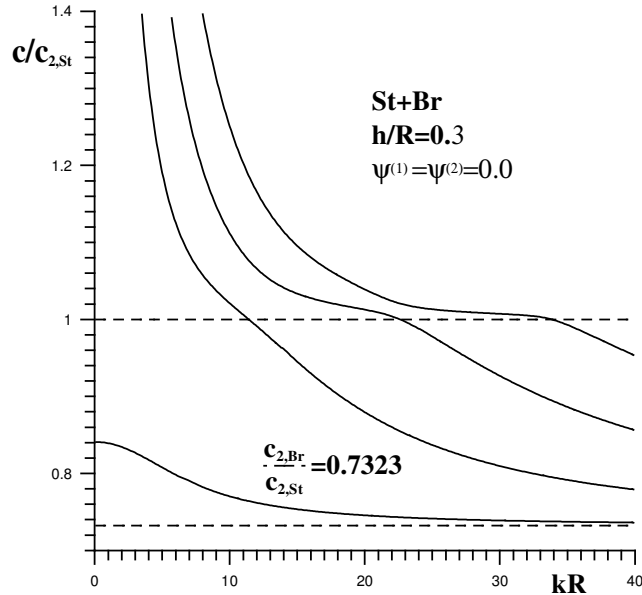
Şekil 2.26 Bronz-Çelik malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).

Şekil 2.21-Şekil 2.23' de verilen sayısal sonuçlarda, içteki silindir ve dıştaki örtük silindirlerden sadece birine birleştirilmeden önce öngerilme uygulanması sonucu oluşturulan bileşik silindirler ve bileşik silindire öngerilme uygulanması durumunda öngerilmelerinin ve farklı h/R değerlerinin dalga yayılım hızına etkisi birinci mod için incelenmiştir. Sadece dıştaki örtük silindire (Çelik) öngerilme uygulanması (grafiklerde 2. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi, kR değeri büyüdükçe I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) faz hızının azaldığı, II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) faz hızının azaldığı ve büyük kR değerinde öngerilmenin dalga yayılım hızına etkisinin olmadığı farklı h/R değerleri için elde edilmiştir. Sadece içteki silindire öngerilme uygulaması (grafiklerde 1. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi, büyüyen kR değerleriyle I. ve II. durumlarda faz hızının arttığı ve büyük kR değerlerinde saturasyona ulaştığı gözlenmektedir. Büyük kR değerlerinde, sadece içteki silindire öngerilme uygulaması ile elde edilen bileşik silindir (grafiklerde 1. ile gösterilmiştir) ve bileşik silindire öngerilme uygulaması ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$, grafiklerde 3. ile gösterilmiştir) durumundaki faz hızına etkileri birbirlerine yaklaşmaktadır. Şekil 2.24-Şekil 2.26' de verilen sayısal sonuçlarda, içteki silindir ve dıştaki örtük silindirlerden sadece birine birleştirilmeden önce öngerilme uygulanması sonucu oluşturulan bileşik silindir ve bileşik silindire öngerilme uygulanması durumunda

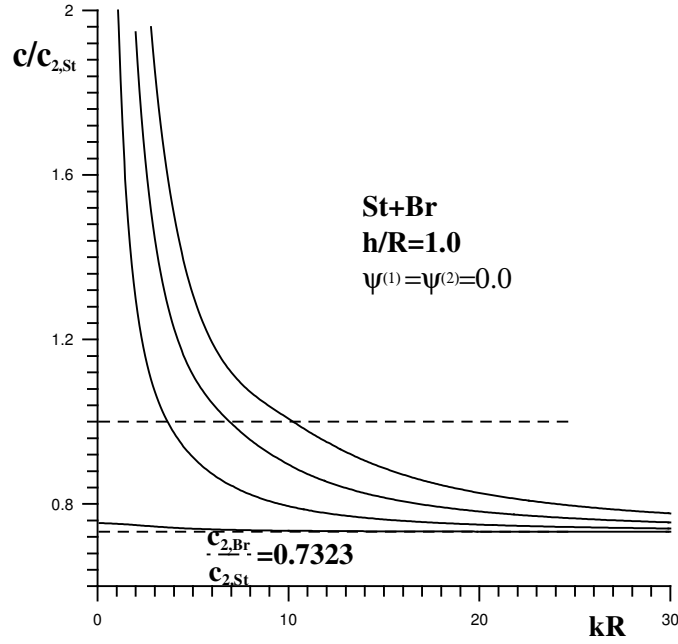
öngerilmelerinin ve farklı h/R değerlerinin dispersiyona etkisi ikinci mod için gösterilmiştir. Sadece dıştaki malzemeye (Çelik) öngerilme uygulanması (grafiklerde 2. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi, kR değeri büyüdükçe I. durum ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) için faz hızının arttığı, II. durum için ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) faz hızının azaldığı ve büyük kR değerinde öngerilmenin dalga yayılım hızına etkisinin olmadığı farklı h/R değerleri için elde edilmiştir. Sadece içteki malzemeye öngerilme uygulaması (grafiklerde 1. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi; büyüyen kR değerleriyle I. durumda faz hızının arttığı, II. durumda ise $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı ve büyük kR değerlerinde saturasyona ulaştıkları gözlenmektedir. Büyük kR değerlerinde, sadece içteki malzemeye öngerilme uygulaması ile elde edilen bileşik silindir ve bileşik silindire öngerilme uygulaması ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$, grafiklerde 3. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkileri birbirlerine yaklaşmaktadır.

İkinci olarak bileşik silindirde içteki silindiri Çelik ve dıştaki örtük silindiri Bronz olarak ele alalım (Çelik+Bronz). Bu incelemeyi h/R değerleri ve öngerilmelere bağlı olarak inceleyelim.

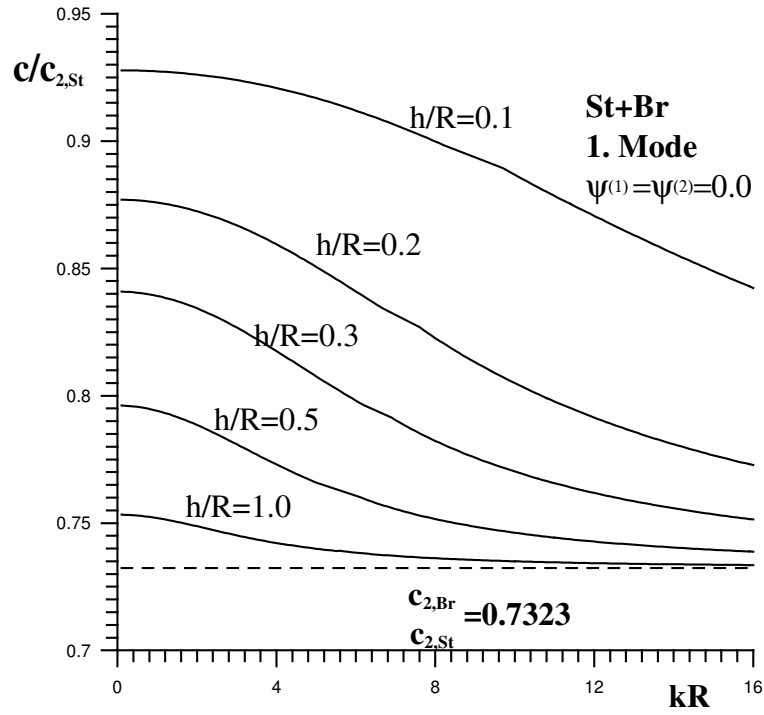
Öngerilmelerin sadece içteki veya sadece dıştaki örtük silindirlerde ve her iki silindirde aynı zamanda uygulandığı durumları ayrı ayrı ele alalım. İlk önce malzeme çiftleri için öngerilme olmadığı durumda h/R 'nin dispersiyon eğrilerine etkisini araştıralım. Bu dispersiyon eğrileri Şekil 2.27 ve 2.28 ile ilk dört mod için sırası ile $h/R=0.3$ ve 1.0 için verilmektedir.



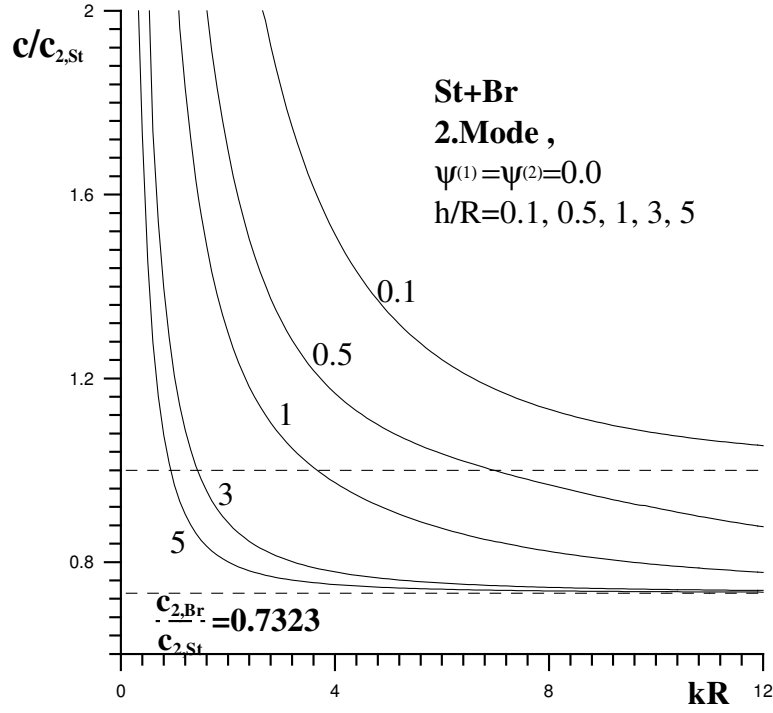
Şekil 2.27 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h/R=0.3$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$).



Şekil 2.28 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$).

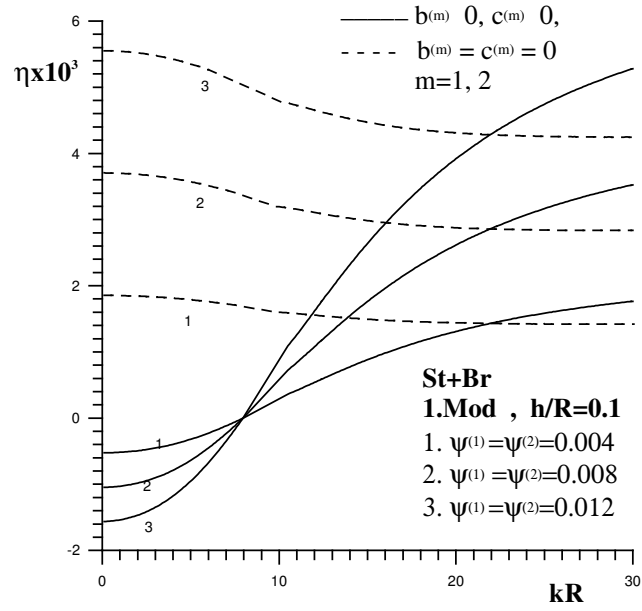


Şekil 2.29 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin birinci mod dispersiyon eğrilerinin h/R bağlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$).

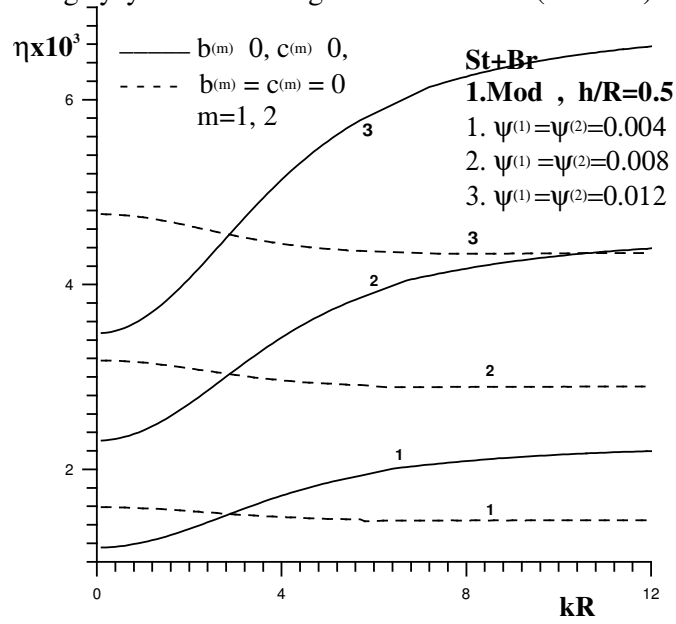


Şekil 2.30 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin ikinci mod dispersiyon eğrilerinin h/R bağılı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$).

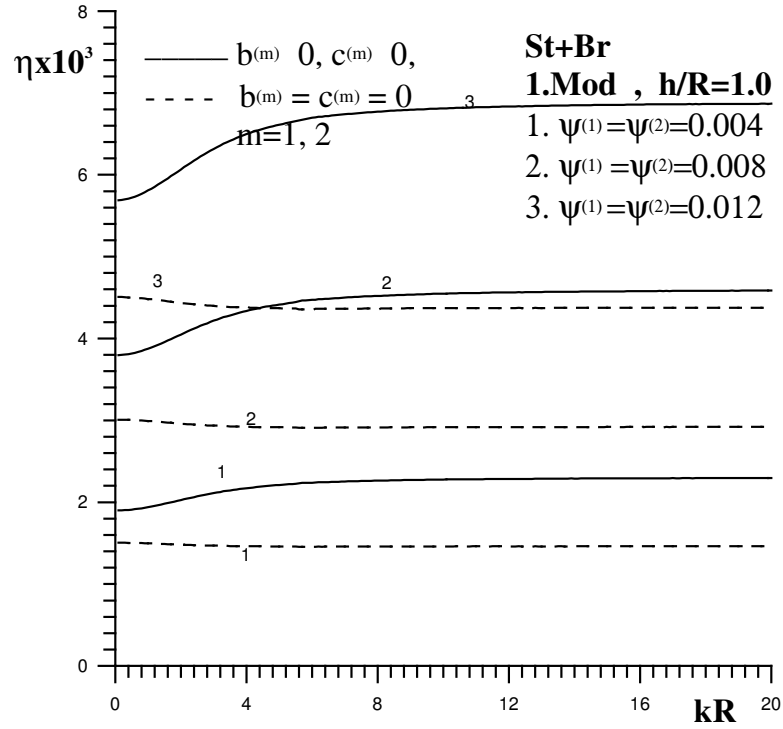
Şekil 2.29 ve 2.30'da ise h/R 'nin 1. mod ve 2.mod'daki dispersiyon eğrilerine etkisi gösterilmektedir. Şekil 2.29'da bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızının artan h/R değerleri ile azaldığı gözlenmektedir. Bu azalma $kR \rightarrow 0$ 'da (2.44) denkleminin asimptotik değerine uygundur. Faz hızı artan kR değerleriyle azalmaktadır. Şekil 2.30'da bileşik silindirdeki burulma dalgalarının ikinci modunun faz hızının artan h/R ve kR değerleri ile azaldığı gözlenmektedir.



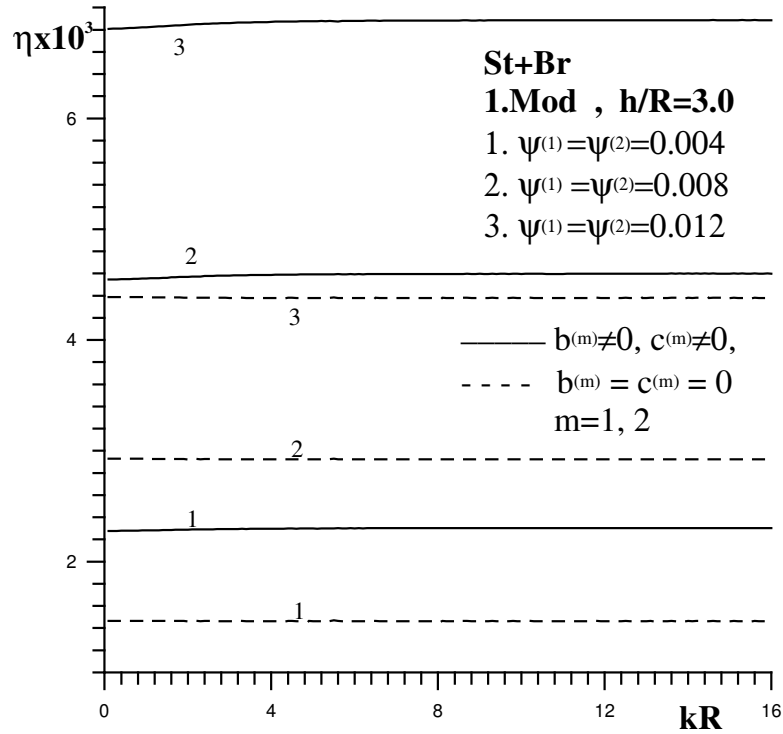
Şekil 2.31 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).



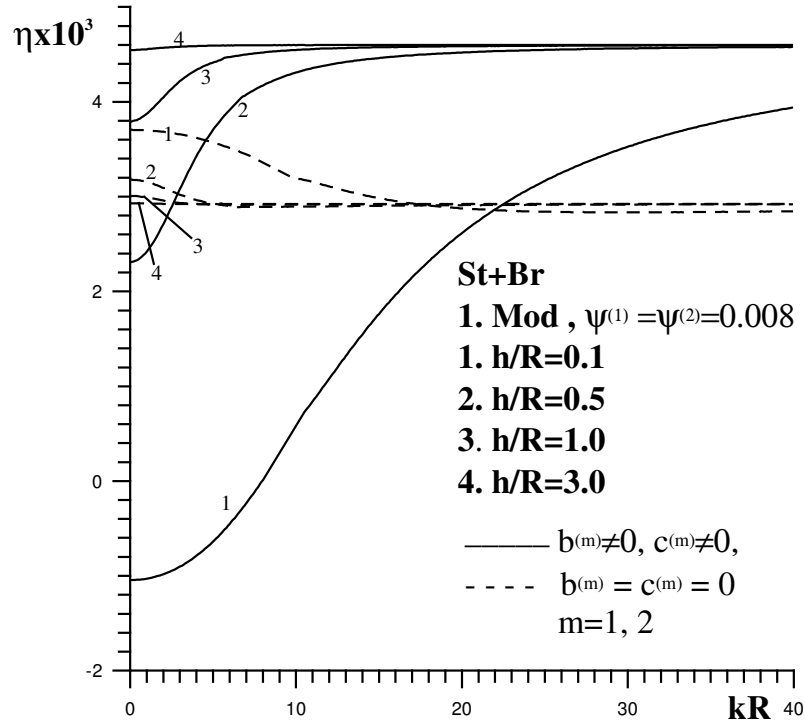
Şekil 2.32 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).



Şekil 2.33 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).



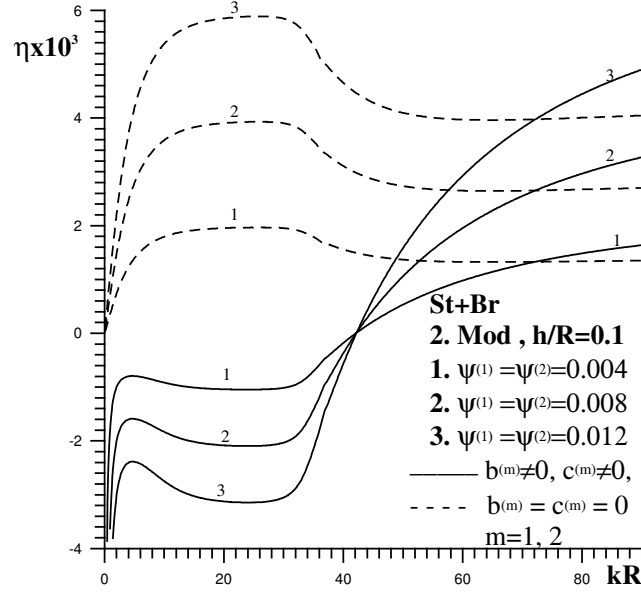
Şekil 2.34 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$).



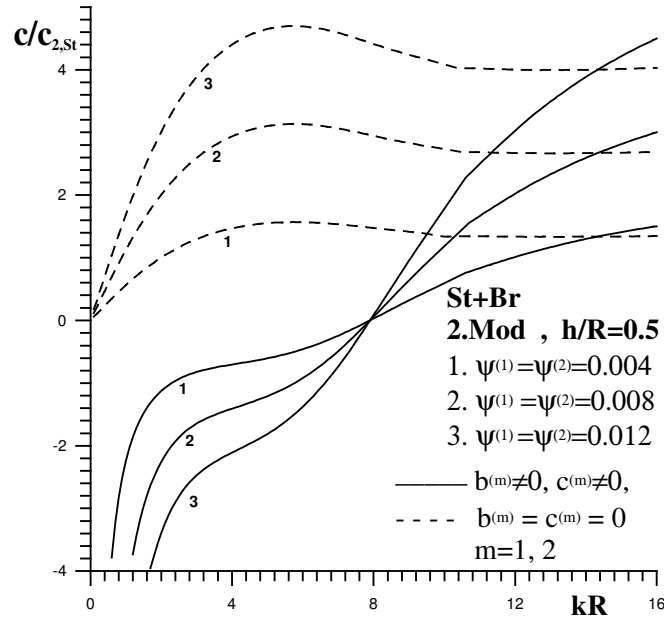
Şekil 2.35 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$).

Şekil 2.31- Şekil 2.34' de verilen sayısal sonuçlarda farklı h/R ve öngerilme değerleri için birinci modun değişimi gösterilmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise faz hızının küçük kR değerleri için azaldığı ve bir noktadan sonra faz hızının arttığı gözlemlenmiştir. Yani kR 'nin öyle bir $(kR)^*$ değeri vardır'ki, bu değerde ($kR = (kR)^*$) öngerilmeler burulma dalgalarının yayılma hızına etki etmemektedir. Öngerilmelerin, $kR < (kR)^*$ için faz hızını düşürdüğü ve $kR > (kR)^*$ için faz hızını arttırdığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Artan h/R değerleriyle $(kR)^*$ değerinin daha küçük kR değerlerine doğru değiştiğini ve büyük h/R değerlerine doğru gidildikçe birinci modun dispersive olmayan bir duruma geldiğini gözlemlemekteyiz. Şekil 2.35'de, öngerilme değeri $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$ alınarak, farklı h/R değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkileri verilmiştir. I. durumda, küçük kR değerlerinde h/R artışının faz hızını azalttığı ve artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. II. durumda, küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)^*$) h/R artışının faz hızını azalttığı ve $kR > (kR)^*$ değerlerinde faz hızını arttırdığı ve saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Büyük h/R

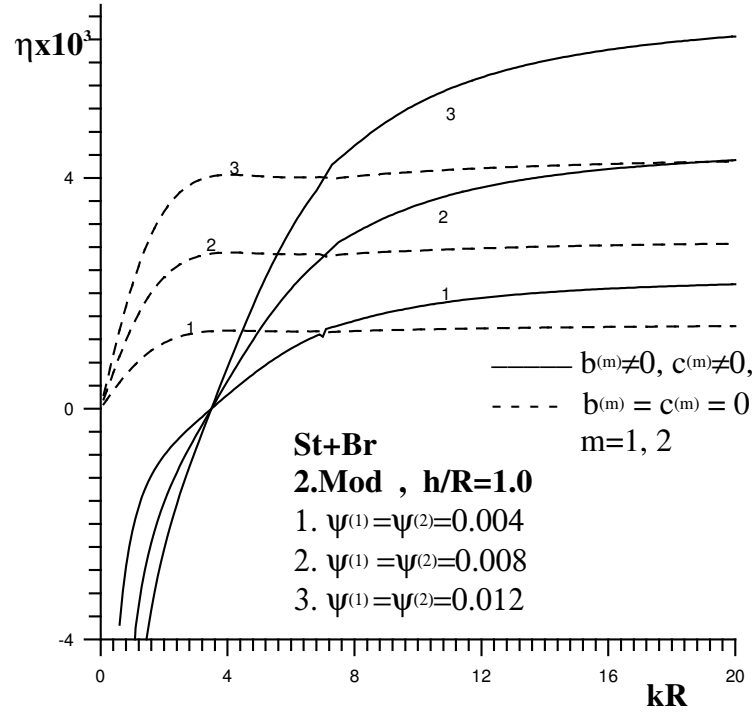
değerlerinde birinci modun dispersive olmayan bir duruma geldiğini gözlemlemekteyiz. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür. Şekil 2.36- Şekil 2.40' de verilen sayısal sonuçlarda farklı h/R ve öngerilme değerleri için ikinci modun değişimi incelenmiştir



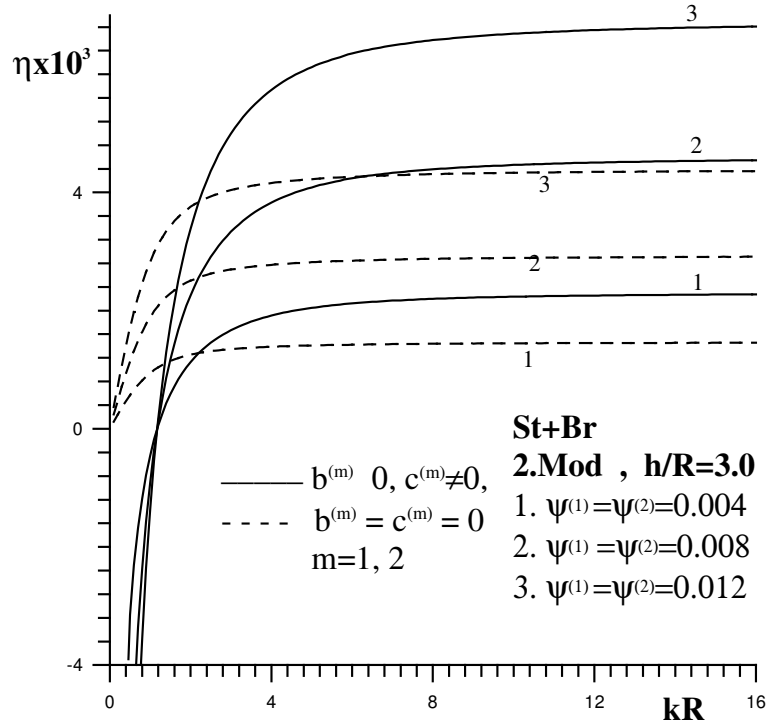
Şekil 2.36 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi($h/R=0.1$).



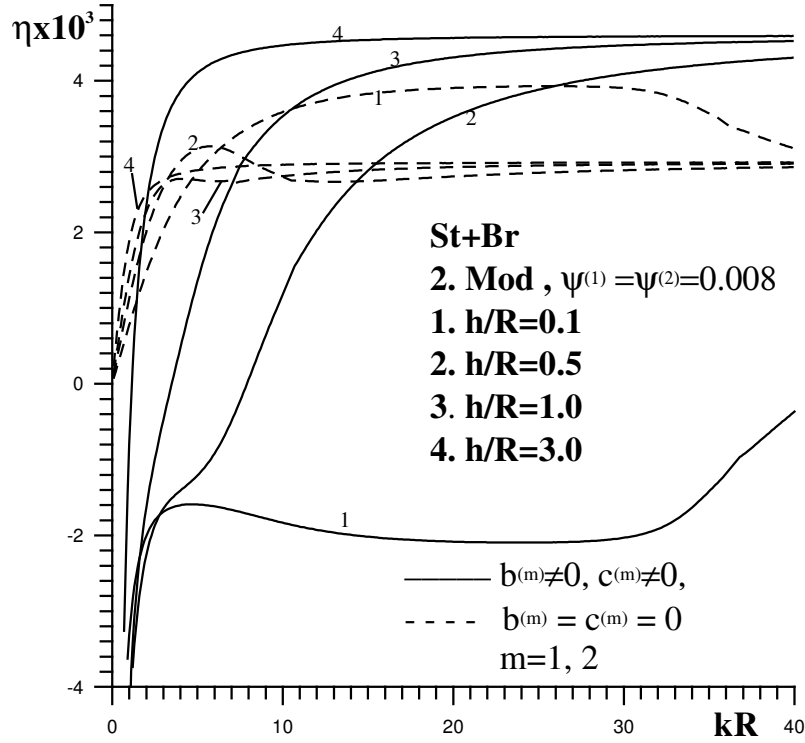
Şekil 2.37 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).



Şekil 2.38 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).



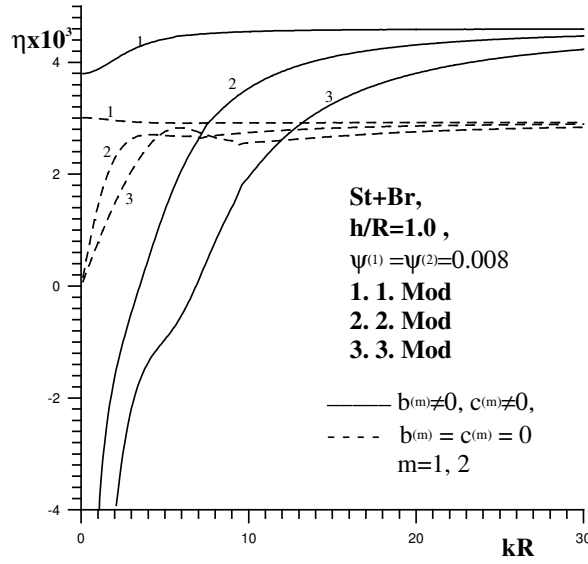
Şekil 2.39 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h/R=3.0$).



Şekil 2.40 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin h/R 'ye bağlı olarak değişimi ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$).

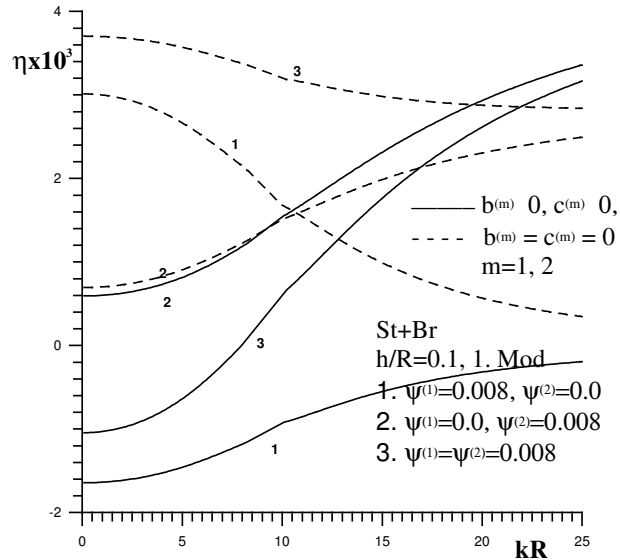
Şekil 2.36- Şekil 2.40' de verilen sayısal sonuçlarda farklı h/R değerleri için ikinci modun öngerilmeyle nasıl değiştiği incelenmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı'nda artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Artan h/R değeriyle $(kR)^*$ değerinin daha küçük kR değerlerine düştüğü gözlenmektedir. Şekil 2.40'da, öngerilme değeri $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$ alınarak, farklı h/R değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkileri verilmiştir. I. durumda, küçük kR değerlerinde h/R artışının faz hızını arttırdığını ve artan kR değerleriyle saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. II. durumda, küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)^*$) h/R artışının faz hızını azalttığı ve $kR > (kR)^*$ değerlerinde faz hızının arttırdığı ve saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür. Şekil 2.41 de $h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$ durumu için ilk üç modun dispersiyonu verilmektedir. Burada, ikinci ve üçüncü (daha büyük) modların benzer davranışlar gösterdiği, üçüncü modun ikinci moda oranla daha büyük bir kR değerinde

saturasyona ulaştığı gözlenmiştir. Şimdi bu malzeme çifti (Bronz-Çelik) için, öngerilmelerin sadece içteki veya sadece dıştaki örtük silindirlere ve her iki silindirde aynı zamanda uygulandığı durumları ele alalım.

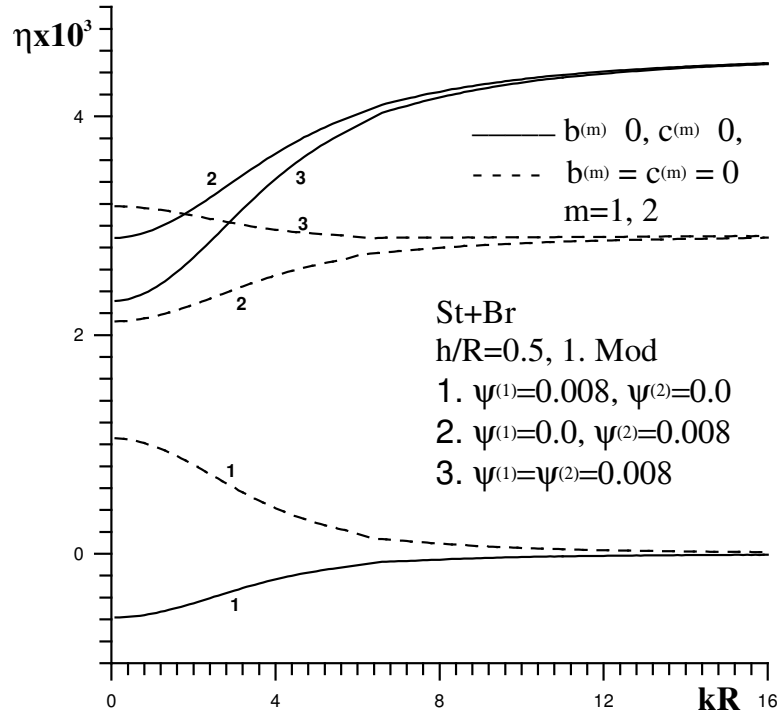


Şekil 2.41 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirin dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisinin ilk üç modu ($h/R=1.0$ ve $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.008$).

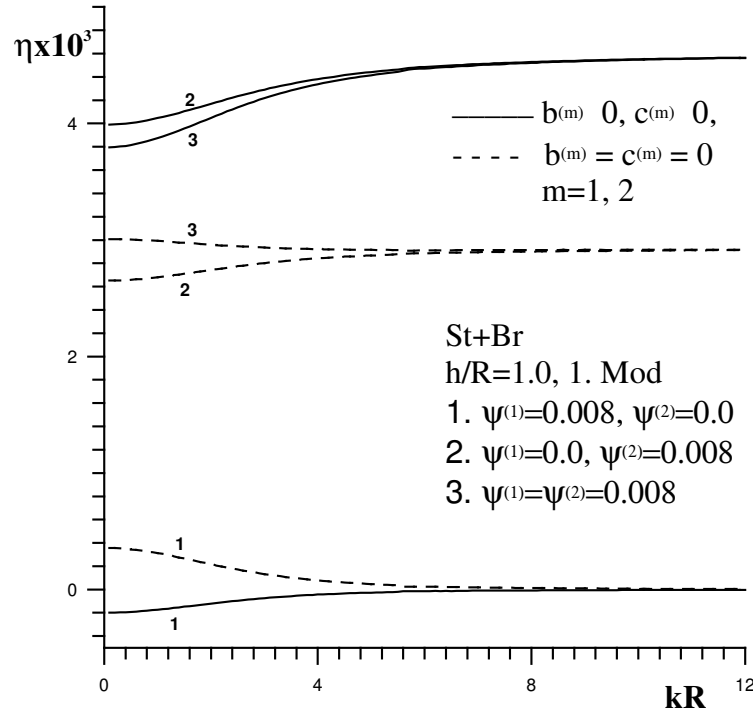
Şimdi bu malzeme çifti (Çelik-Bronz) için, öngerilmelerin sadece içteki veya sadece dıştaki örtük silindirlere ve her iki silindirde aynı zamanda uygulandığı durumları ele alalım.



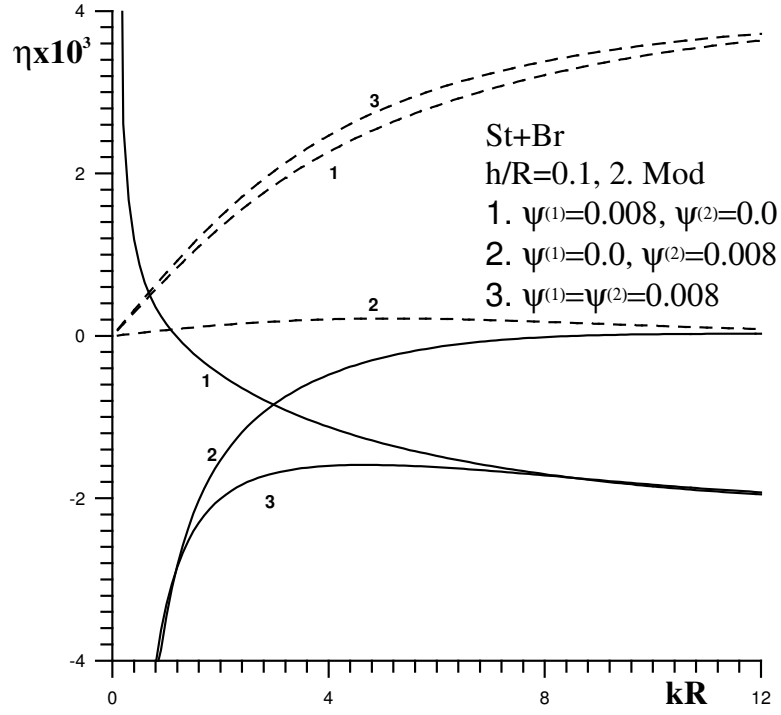
Şekil 2.42 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).



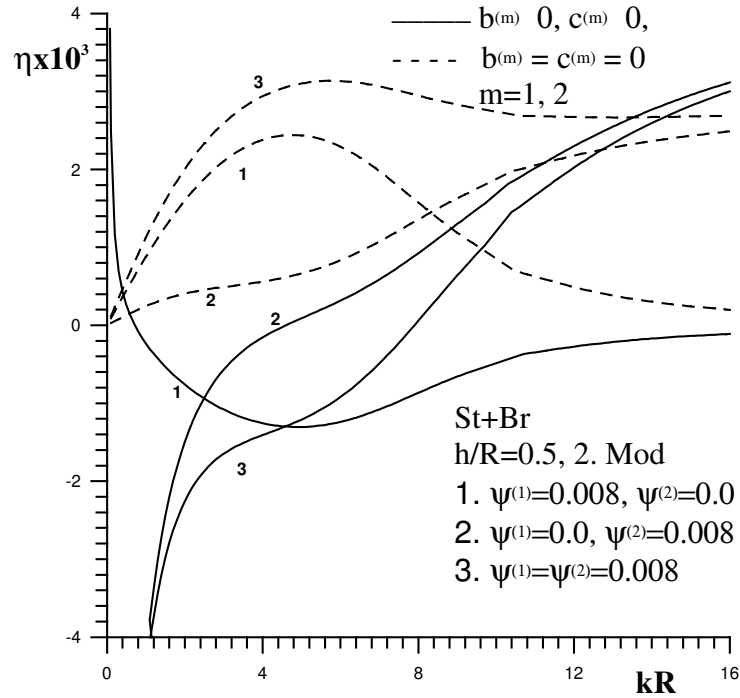
Şekil 2.43 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).



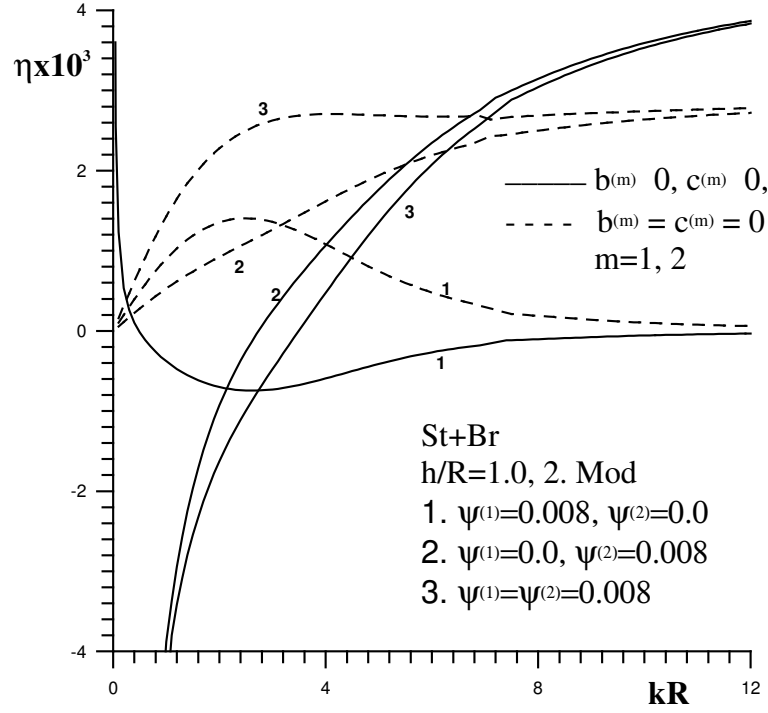
Şekil 2.44 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).



Şekil 2.45 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.1$).



Şekil 2.46 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=0.5$).



Şekil 2.47 Çelik-Bronz malzeme çifti için bileşik silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına farklı öngerilmelerin etkisi ($h/R=1.0$).

Şekil 2.38-Şekil 2.43 'de verilen sayısal sonuçlarda içteki silindir ve örtük silindirden sadece birine öngerilme uygulanması durumu ve bileşik silindire öngerilme uygulanması durumunda, öngerilmelerin dalga yayılım hızına etkisi incelenmiştir. Sadece içteki malzemeye (Çelik) öngerilme uygulanması ($\Psi^{(1)}=0.008, \Psi^{(2)}=0.0$) durumunda kR değeri büyüdükçe öngerilmenin etkisi azalmaktadır. h/R değeri arttıkça sadece dıştaki malzemeye öngerilme uygulaması ($\Psi^{(1)}=0.0, \Psi^{(2)}=0.008$) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi, bileşik silindire öngerilme uygulaması ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisine yaklaşmaktadır. Şekil 2.42-Şekil 2.44' de verilen sayısal sonuçlarda, içteki silindir ve dıştaki örtük silindirlerden sadece birine birleştirilmeden önce öngerilme uygulanması sonucu oluşturulan bileşik silindirler ve bileşik silindire öngerilme uygulanması durumunda öngerilmelerinin ve farklı h/R değerlerinin dispersiyona etkisi birinci mod için gösterilmiştir. Sadece içteki silindire (Çelik) öngerilme uygulanması (grafiklerde 1. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi, kR değeri büyüdükçe I. durum ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) için faz hızının azaldığı, II. durum için ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) faz hızının azaldığı ve büyük kR değerinde öngerilmenin dalga yayılım hızına etkisinin olmadığı farklı h/R değerleri için elde edilmiştir. Sadece dıştaki örtük silindire öngerilme uygulaması

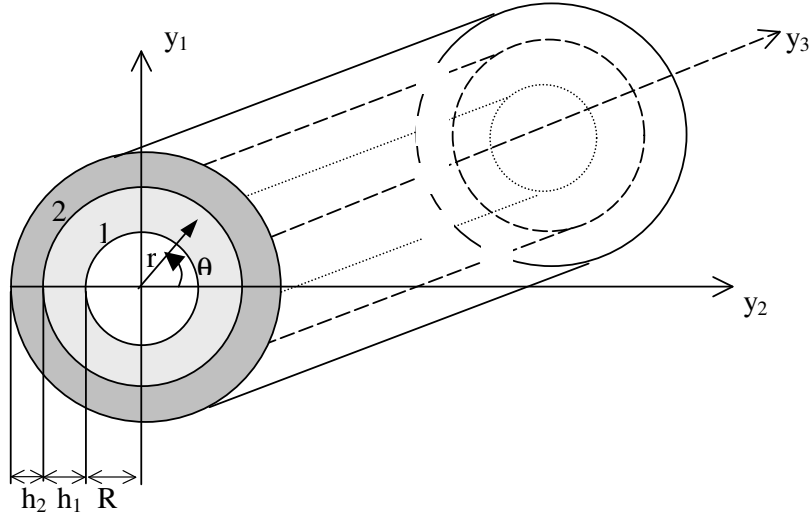
(grafiklerde 2. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi ; büyüyen kR değerleriyle I. ve II. durumlarda faz hızının arttığı ve büyük kR değerlerinde saturasyona ulaştığı gözlenmektedir. Büyük kR değerlerinde, sadece dıştaki örtük silindire öngerilme uygulanması ile elde edilen bileşik silindir (grafiklerde 2. ile gösterilmiştir) ve bileşik silindire öngerilme uygulanması ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$, grafiklerde 3. ile gösterilmiştir) durumundaki faz hızına etkileri birbirlerine yaklaşmaktadır. Şekil 2.45-Şekil 2.47' de verilen sayısal sonuçlarda, içteki silindir ve dıştaki örtük silindirlerden sadece birine birleştirilmeden önce öngerilme uygulanması sonucu oluşturulan bileşik silindir ve bileşik silindire öngerilme uygulanması durumunda öngerilmelerinin ve farklı h/R değerlerinin dispersiyona etkisi ikinci mod için gösterilmiştir. Sadece içteki silindire (Çelik) öngerilme uygulanması (grafiklerde 1. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi , kR değeri büyüdükçe I. durum ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) için faz hızının arttığı, II. durum için ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) faz hızının azaldığı ve büyük kR değerinde öngerilmenin dalga yayılım hızına etkisinin olmadığı farklı h/R değerleri için elde edilmiştir. Sadece dıştaki örtük silindire öngerilme uygulanması (grafiklerde 2. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkisi ; büyüyen kR değerleriyle I. durumda faz hızının arttığı, II. durumda ise $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı ve büyük kR değerlerinde saturasyona ulaştıkları gözlenmektedir. Büyük kR değerlerinde, sadece dıştaki örtük silindire öngerilme uygulanması ile elde edilen bileşik silindir ve bileşik silindire öngerilme uygulanması ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.008$, grafiklerde 3. ile gösterilmiştir) durumundaki öngerilmenin faz hızına etkileri birbirlerine yaklaşmaktadır.

Bu kısımda Çizelge 2.1 verilen Bronz ve Çelik'ten oluşturulmuş bileşik silindirdeki dalga yayılımına öngerilmelerin etkisi incelenmiştir. İlk önce içteki silindir Bronz, dıştaki silindir Çelik (Bronz-Çelik) seçilmiş ve daha sonra içteki silindir Çelik, dıştaki silindir Bronz (Çelik-Bronz) seçilerek sonuçlar grafiklerle verilmiştir. Bronz-Çelik durumunda, bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modun faz hızı artan h/R değerleri ile arttığı gösterilmektedir, h/R nin artmasıyla bileşik silindir içindeki Çelik'in toplam hacim içindeki oranının artması ve $c_{2,Br} < c_{2,St}$ olmasından dolayı $c/c_{2,Br}$ değerinin artmasına neden olmaktadır. Çelik- Bronz durumunda ise bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modun faz hızının artan h/R değerleri ile azaldığı gösterilmiştir ve h/R nin artmasıyla bileşik silindir içindeki Bronz'un toplam hacim içindeki oranının artması ve $c_{2,Br} < c_{2,St}$ olmasından dolayı $c/c_{2,St}$ değerinin

düşmesine neden olmaktadır. Bu sonuçlar $kR \rightarrow 0$ 'da (2.44) denkleminin asimptotik değerine yaklaşmaktadır. Bronz-Çelik ve Çelik-Bronz bileşik silindirlerinde, dalga yayılımına öngerilmelerin etkisi (η), birinci mod için I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) $kR \rightarrow 0$ 'da maksimum değere ulaşırken, II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) büyük kR değerlerinde maksimuma ulaşmaktadır ve ikinci mod için I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) belli bir kR değerinde maksimum değere ulaşırken, II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) büyük kR değerlerinde maksimuma ulaşmaktadır. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür.

2.4 İçi Boş Bileşik Silindirlerin Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

R yarıçaplı h_1 kalınlıklı içi boş bir silindir üzerine h_2 kalınlıklı bir içi boş silindir kaplanmıştır. (Şekil 2.3)



Şekil 2.48 İçi boş bileşik silindir.

2.1 ve 2.2 alt başlıklarında elde edilen sonuçlardan yararlanarak, ele alınan bu sistemi temsil eden dalga fonksiyonları

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(\bar{r}^{(1)}) &= A^{(1)} E_1^{(1)}(\bar{r}^{(1)}) + B^{(1)} F_1^{(1)}(\bar{r}^{(1)}) \\ \phi^{(2)}(\bar{r}^{(2)}) &= A^{(2)} E_1^{(2)}(\bar{r}^{(2)}) + B^{(2)} F_1^{(2)}(\bar{r}^{(2)})\end{aligned}\quad (2.52)$$

ile verilir, burada

$$\begin{aligned}
 E_1^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= \begin{cases} J_1(\bar{r}^{(m)}) & , q^{(m)} > 0 \\ I_1(\bar{r}^{(m)}) & , q^{(m)} < 0 \end{cases} \quad m=1,2 \\
 F_1^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= \begin{cases} Y_1(\bar{r}^{(m)}) & , q^{(m)} > 0 \\ K_1(\bar{r}^{(m)}) & , q^{(m)} < 0 \end{cases} \quad m=1,2
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

olacak şekilde düzenlenirler. Sınır koşulları (2.24) denklemlerinde, (2.25), (2.28), (2.52), (2.53) bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 A^{(1)}\alpha_{11} + B^{(1)}\alpha_{12} - A^{(2)}\alpha_{13} - B^{(2)}\alpha_{14} &= 0 \\
 A^{(1)}\alpha_{21} + B^{(1)}\alpha_{21} - A^{(2)}\alpha_{23} - B^{(2)}\alpha_{24} &= 0 \\
 A^{(1)}\alpha_{31} + B^{(1)}\alpha_{32} &= 0 \\
 A^{(2)}\alpha_{43} + B^{(2)}\alpha_{44} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

$A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(1)}$ ve $B^{(2)}$ bilinmeyen sabitleri için lineer denklem takımı elde ederiz. Bu denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması onun bilinmeyenlerinden oluşan katsayılar determinantının sıfıra eşit olmasını gerektirir. Bu eşitlik ise dispersiyon denklemini oluşturur. İçi boş bileşik silindir için adı geçen determinant 4x4 boyutundadır ve bu determinant

$$\det \|\alpha_{ij}\| = 0, \quad i,j=1,2,3,4 \tag{2.55}$$

elde edilir. Bu denklemdeki α_{ij}

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \begin{cases} J_1\left(kR\sqrt{q^{(1)}}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(1)} > 0 \\ I_1\left(kR\sqrt{|q^{(1)}|}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases}, \quad \alpha_{12} = \begin{cases} Y_1\left(kR\sqrt{q^{(1)}}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(1)} > 0 \\ K_1\left(kR\sqrt{|q^{(1)}|}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases} \\
 \alpha_{13} &= \begin{cases} -J_1\left(kR\sqrt{q^{(2)}}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(2)} > 0 \\ -I_1\left(kR\sqrt{|q^{(2)}|}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}, \quad \alpha_{14} = \begin{cases} -Y_1\left(kR\sqrt{q^{(2)}}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_1\left(kR\sqrt{|q^{(2)}|}\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21} &= \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(1)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(1)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(1)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{22} &= \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(1)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(1)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(1)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{23} &= \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{24} &= \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{31} &= \begin{cases} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(1)}} \right) & , q^{(1)} > 0 \\ I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(1)}|} \right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases} , \alpha_{32} = \begin{cases} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(1)}} \right) & , q^{(1)} > 0 \\ -K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(1)}|} \right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{33} &= 0, \quad \alpha_{34} = 0 \\
\alpha_{41} &= 0, \quad \alpha_{42} = 0 \\
\alpha_{43} &= \begin{cases} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{44} &= \begin{cases} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \tag{2.56}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

2.4.1 Asimptotik İnceleme: Uzun Dalgaboyu Limiti ve Ona Ön Gerilmenin Etkisi

Dalga boyunun çok büyük olduğu ($kR \rightarrow 0$) gözönüne alındığı durumlarda Bessel fonksiyonlarının seri açılımlarından yararlanarak içi boş bileşik silindir için, burulma dalgalarının birinci modunun $kR \rightarrow 0$ daki limit değerini veren analitik bir ifadeyi elde etmek için bulduğumuz katsayılar determinantını $kR \rightarrow 0$ koşulu altında seriye açalım.

$$\begin{vmatrix} J_1(x_3) & Y_1(x_3) & -J_1(x_4) & -Y_1(x_4) \\ \beta J_2(x_3) & \beta J_2(x_3) & -J_2(x_4) & -Y_2(x_4) \\ J_2(x_1) & Y_2(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2(x_5) & Y_2(x_5) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.57)$$

Burada aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}}}{\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}}}, \quad \xi_1 = 1 + \frac{h_1}{R}, \quad \xi_2 = 1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R}, \\ x_1 &= kR\sqrt{q^{(1)}}, \quad x_2 = kR\sqrt{q^{(2)}}, \quad x_3 = kR\sqrt{q^{(1)}} \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) = x_1 \xi_1 \\ x_4 &= kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) = x_2 \xi_1, \quad x_5 = kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R}\right) = x_2 \xi_2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} &-J_2(x_5) \{ \beta Y_1(x_4) (J_2(x_1) Y_2(x_3) - J_2(x_3) Y_2(x_1)) + Y_2(x_4) (Y_2(x_1) J_1(x_3) - Y_1(x_3) J_2(x_1)) \} \\ &+ Y_2(x_5) \{ \beta J_1(x_4) (J_2(x_1) Y_2(x_3) - J_2(x_3) Y_2(x_1)) + J_2(x_4) (Y_2(x_1) J_1(x_3) - Y_1(x_3) J_2(x_1)) \} = 0 \\ &\beta (J_2(x_1) Y_2(x_3) - J_2(x_3) Y_2(x_1)) (J_1(x_4) Y_2(x_5) - J_2(x_5) Y_1(x_4)) + \\ &(Y_2(x_1) J_1(x_3) - Y_1(x_3) J_2(x_1)) (J_2(x_4) Y_2(x_5) - J_2(x_5) Y_2(x_4)) = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklemi $kR \rightarrow 0$ 'da seriye açmak için Bessel fonksiyonlarının $x \ll 1$ için

$$J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (2.60)$$

$$Y_\nu(x) \rightarrow -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \quad \Gamma(\nu+1) = \nu! \quad (2.61)$$

ile tanımlanan ifadelerinin $\nu = 1$ ve $\nu = 2$ için aşağıda verilen

$$J_1(x) \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right), \quad J_2(x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad Y_1(x) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{ve} \quad Y_2(x) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^2 \quad (2.62)$$

terimleri (2.59) denkleminde yerine yazılıp düzenlenmesiyle

$$\beta \left(\frac{\xi_1^4 - 1}{\xi_1^2} \right) \left(4 \frac{1}{kR\sqrt{q^{(2)}}} \frac{\xi_1}{\xi_2^2} - \frac{kR\sqrt{q^{(2)}}}{2} \frac{\xi_2^2}{\xi_1} \right) + \left(\frac{\xi_2^4 - \xi_1^4}{\xi_1^2 \xi_2^2} \right) \left(4 \frac{\xi_1}{kR\sqrt{q^{(1)}}} - \frac{kR\sqrt{q^{(1)}}}{2\xi_1} \right) = 0, \quad (2.63)$$

elde edilen (2.63) denkleminde, $kR \ll 1$ kabul edildiğinden $(kR)^2$ terimlerinin ihmal edilmesiyle

$$\begin{aligned} \beta (\xi_1^4 - 1) \frac{1}{\xi_1^2 \xi_2^2} \left(\frac{4\xi_1}{\sqrt{q^{(2)}}} \right) + (\xi_2^4 - \xi_1^4) \frac{1}{\xi_1^2 \xi_2^2} \left(\frac{4\xi_1}{\sqrt{q^{(1)}}} \right) &= 0 \\ \frac{\mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}}}{\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}}} (\xi_1^4 - 1) &= -(\xi_2^4 - \xi_1^4) \left(\frac{\sqrt{q^{(2)}}}{\sqrt{q^{(1)}}} \right) \\ \frac{q^{(1)}}{q^{(2)}} &= -\frac{(\xi_2^4 - \xi_1^4)}{(\xi_1^4 - 1)} \frac{\mu_{r\theta}^{(2)}}{\mu_{r\theta}^{(1)}} \\ \frac{q^{(1)}}{q^{(2)}} &= -\alpha \frac{\mu_{r\theta}^{(2)}}{\mu_{r\theta}^{(1)}}, \quad \alpha = \frac{(\xi_2^4 - \xi_1^4)}{(\xi_1^4 - 1)}, \quad \xi_1 = 1 + \frac{h_1}{R}, \quad \xi_2 = 1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \end{aligned} \quad (2.64)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $q^{(m)} = \frac{1}{K_{12}^{(m)}} \left[\left(\frac{c}{c_2^{(m)}} \right)^2 - K_{23}^{(m)} - \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \right]$, $m=1,2$ dir.

$q^{(m)}$ ifadesinin (2.64)' de yerine yazılıp yeniden düzenlenmesiyle, malzeme özellikleri Murnaghan potansiyeli ile verilen içi boş bileşik silindirin burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde) mekanik ve geometrik parametrelere bağlı olarak

$$c = \left\{ \frac{\mu^{(1)} (K_{23}^{(1)} + \Psi^{(1)}) + \mu^{(2)} \alpha (K_{23}^{(2)} + \Psi^{(2)})}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)} \alpha} \right\}^{1/2} \quad (2.65)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\Psi^{(1)} = \frac{\sigma_{zz}^{(1),0}}{\mu^{(1)}}, \quad \Psi^{(2)} = \frac{\sigma_{zz}^{(2),0}}{\mu^{(2)}}, \quad c_2^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu^{(m)}}{\rho^{(m)}}},$$

$$\alpha = \frac{(\xi_2^4 - \xi_1^4)}{(\xi_1^4 - 1)}, \quad \xi_1 = 1 + \frac{h_1}{R}, \quad \xi_2 = 1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R},$$

$$K_{12}^{(m)} = 1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{3K_0^{(m)} \lambda^{(m)}} \left(b^{(m)} - \frac{\lambda^{(m)}}{2\mu^{(m)}} c^{(m)} \right),$$

$$K_{23}^{(m)} = 1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \frac{1}{3K_0^{(m)}} \left(b^{(m)} + \frac{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})c^{(m)}}{4\mu^{(m)}} \right)$$

tanımlamaları yapılmıştır. Bu genel ifadede Murnaghan katsayılarının $b^{(m)} = c^{(m)} = 0$ alınmasıyla elde edilen öngerilmeli lineer elastik malzemelerin burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde) ifadesi

$$c = \left\{ \frac{\mu^{(1)}(1 + \Psi^{(1)}) + \mu^{(2)}\alpha(1 + \Psi^{(2)})}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}\alpha} \right\}^{1/2} \quad (2.66)$$

şekline gelir. Bu ifadede öngerilmeler artmasıyla faz hızının artacağı sonucuna ulaşmaktayız. Öngerilmeler $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.0$ alındığında, burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı

$$c = \left\{ \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha}{\rho^{(1)} + \rho^{(2)}\alpha} \right\}^{1/2}, \quad \alpha = \frac{(\xi_2^4 - \xi_1^4)}{(\xi_1^4 - 1)}, \quad \xi_1 = 1 + \frac{h_1}{R}, \quad \xi_2 = 1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \quad (2.67)$$

ile ifade edilir. Bu ifadede $\rho^{(m)} = \frac{\mu^{(m)}}{(c_2^{(m)})^2}$ bağıntısını kullanıp denklemin yeniden

düzenlenmesiyle

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left\{ \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\alpha \left(c_2^{(1)} / c_2^{(2)} \right)^2} \right\}^{1/2} \quad (2.68)$$

şeklinde verilir.

Böylece bu alt bölümde, öngerilmeli içi boş bileşik silindirdaki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızının ($kR \rightarrow 0$ limitinde) analitik ifadesi (2.65) malzeme özellikleri

Murnaghan potansiyeli ile verilen lineer olmayan malzemeler için elde edilmiştir. Bunun özel durumu olarak, 3.mertebeden elastisite sabitlerinin $b^{(m)} = c^{(m)} = 0$ alınmasıyla elde edilen öngerilmeli lineer elastik malzemelerin burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ise (2.66) bağıntısıyla ifade edilmiştir. Öngerilmelerin gözönüne alınmadığı ($\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0.0$) durumda (2.67) bağıntısı elde edilmiştir. Bu analitik ifadenin elde edilmesini veren bir çalışmaya ulaşamamıştır.

2.4.2 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

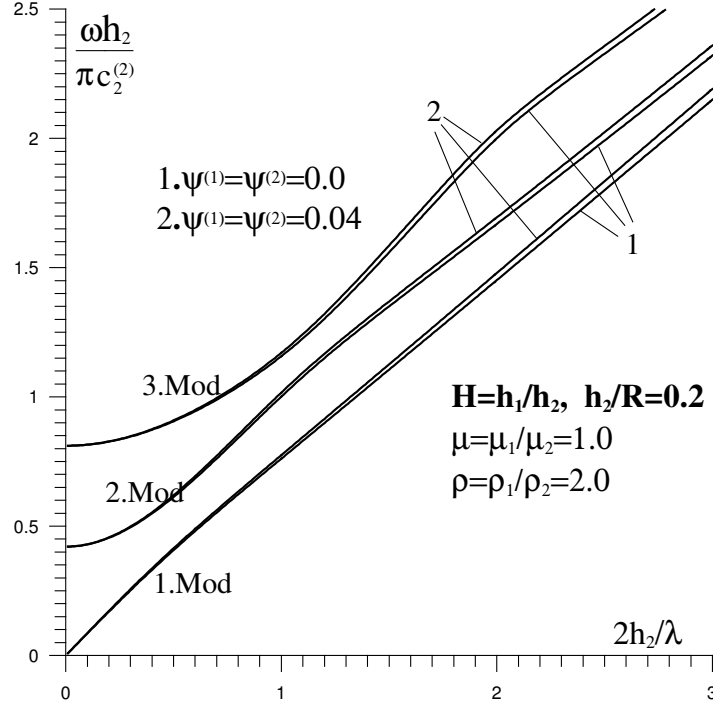
Dispersiyon denkleminin (2.55) terimleri olan α_{ij} ler; kR , $c = \omega/k$, h_1/R , h_2/R , $\rho^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$, $b^{(m)}$, $c^{(m)}$ parametrelerine bağlıdır. Burada c ve kR dışındaki parametreler malzemelerin mekanik özelliklerini ($\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$ -Lame sabitlerini, $\rho^{(m)}$ malzemenin yoğunluğunu, $b^{(m)}$ ve $c^{(m)}$ Murnaghan sabitlerini, $m=1, 2$) göstermektedir. Dolayısıyla içi boş bileşik silindir için dispersiyon denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\det \left\| \alpha_{ij} \left(kR, \frac{c}{c_2^{(1)}}, \frac{h_1}{R}, \frac{h_2}{R}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \rho^{(1)}/\rho^{(2)}, \mu^{(1)}/\mu^{(2)}, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)}, c^{(1)}, c^{(2)} \right) \right\| = 0 \quad (2.69)$$

Görüldüğü gibi (2.69) dispersiyon denkleminde bulunan parametrelerden kR ve c dışındakilerin hepsi önceden verilmektedir. Burada kR boyutsuz dalga sayısını ve c ise burulma dalgalarının faz hızını göstermektedir.

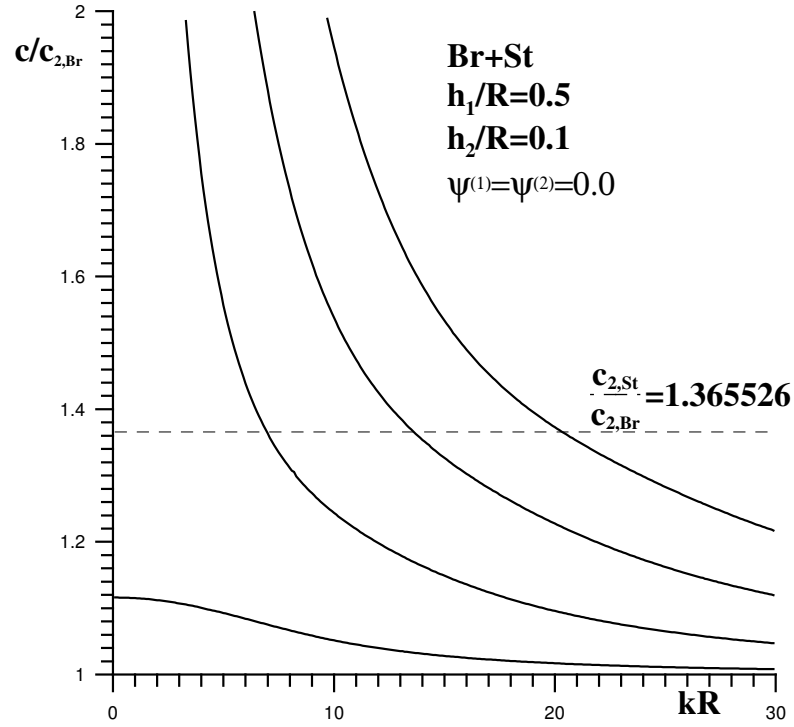
Yapılan sayısal algoritmayı test etmek amacı ile Armenakas (1971) makalesinde incelenmiş durumları tekrar ele alalım. Yani, bu çalışmadaki mekanik ve geometrik parametreler için dispersiyon diyagramlarını tezde geliştirilmiş sayısal algoritma uygulayarak tekrar elde edelim. Armenakas (1971) makalesinde $b^{(1)}=b^{(2)}=c^{(1)}=c^{(2)}=0$, $H = h_1/h_2=1.0$, $h_2/R=0.2$, $\rho = \rho^{(1)}/\rho^{(2)}=2.0$, $\mu = \mu^{(1)}/\mu^{(2)}=1.0$ koşulları altında $\omega h_2 / \pi c_2^{(1)}$ ve $2h_2 / \lambda$ arasındaki dispersiyon diyagramı verilmiştir. Burada, ω açısal frekans, h_2 içi boş bileşik silindirin dışındaki silindirin kalınlığı, $c_2^{(1)}$ içteki silindirdeki enine dalgaların yayılma hızı, λ dalgaboyu olarak tanımlanmıştır. Armenakas (1971) makalesinde verilen sonuçlar sadece öngerilmelerin olmadığı durumu içerir. Elde ettiğimiz sonuçlarda öngerilmelerin olmadığı durum (1. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0$) ve öngerilmeli durum (2. $\Psi^{(1)}=\Psi^{(2)}=0.04$) olarak Şekil 2.49' daki dispersiyon diyagramında verilmiştir. Böylece sayısal algoritmamızla Armenakas (1970)

makalesindeki sonuçlar elde edilmiş ve öngerilmenin dispersiyon diyagramına etkisi ilk üç mod için gösterilmiştir. Armenakas (1971) makalesinin sonuçlarının tekrar elde edilmesi ve öngerilme için geliştirilmesinin bilinen fiziksel görüşlerle uyuşması sayısal sonuçlarımızın doğruluğunu göstermektedir.

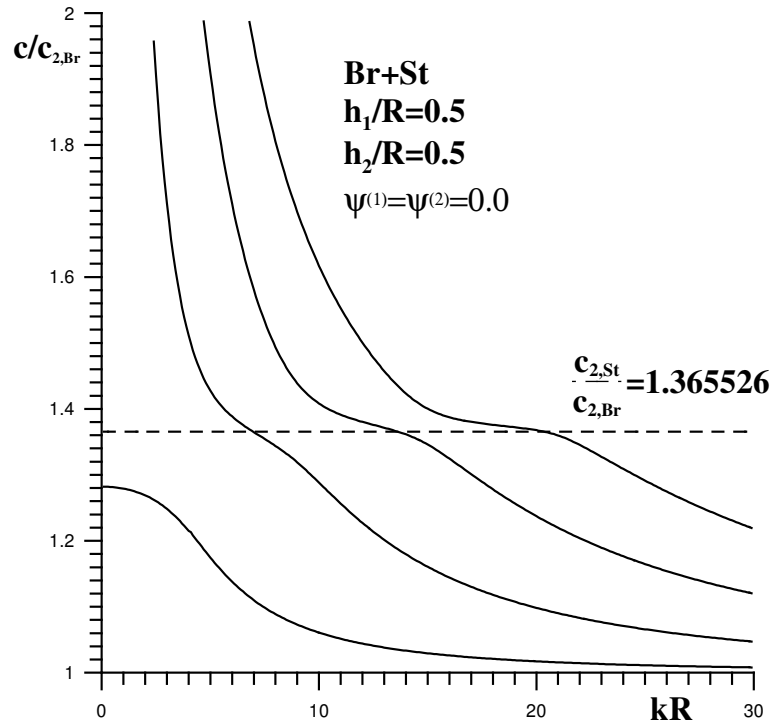


Şekil 2.49 İçi boş bileşik silindirin dispersiyon diyagramının ilk üç modu.

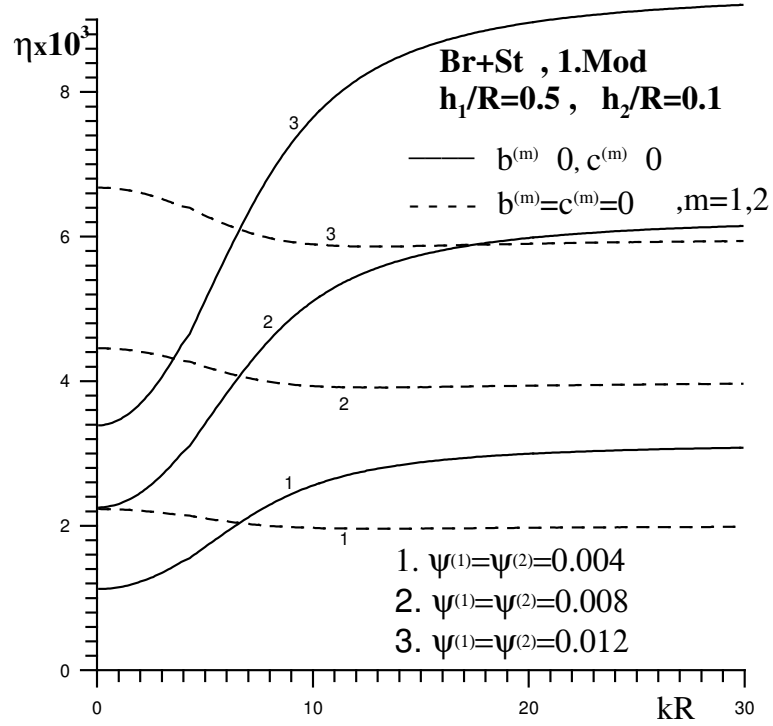
Şimdi Çizelge 2.1' verilen malzemeler için dispersiyon eğrilerini elde edip inceleyelim. Bu inceleme iki durum için yapılacaktır, birinci durumda içi boş bileşik silindirde içteki silindir Bronz ve dıştaki silindir Çelik (Bronz+Çelik), ikinci durumda ise içteki silindir Çelik ve dıştaki silindir Bronz (Çelik+Bronz) olarak ele alınacaktır. İlk olarak (Bronz+Çelik) durumunu ele alalım. Dispersiyon eğrilerini h/R değerleri ve öngelilmelere bağlı olarak inceleyelim. Bu dispersiyon eğrileri Şekil 2.50 ve 2.51 ile ilk dört mod için sırası ile $h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.1$ ve $h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$ verilmektedir.



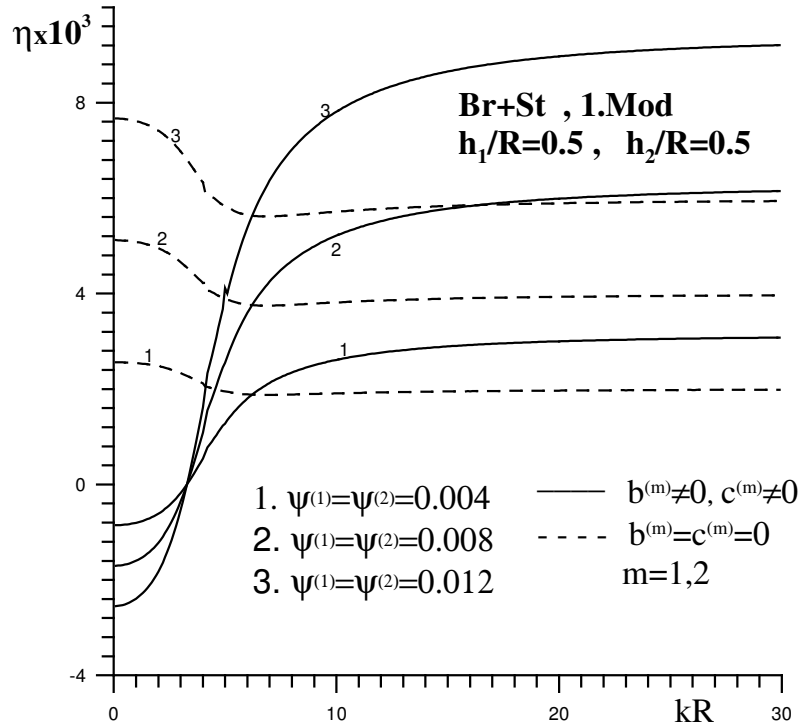
Şekil 2.50 Bronz– Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h_1/R=0.5$ $h_2/R=0.1$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$).



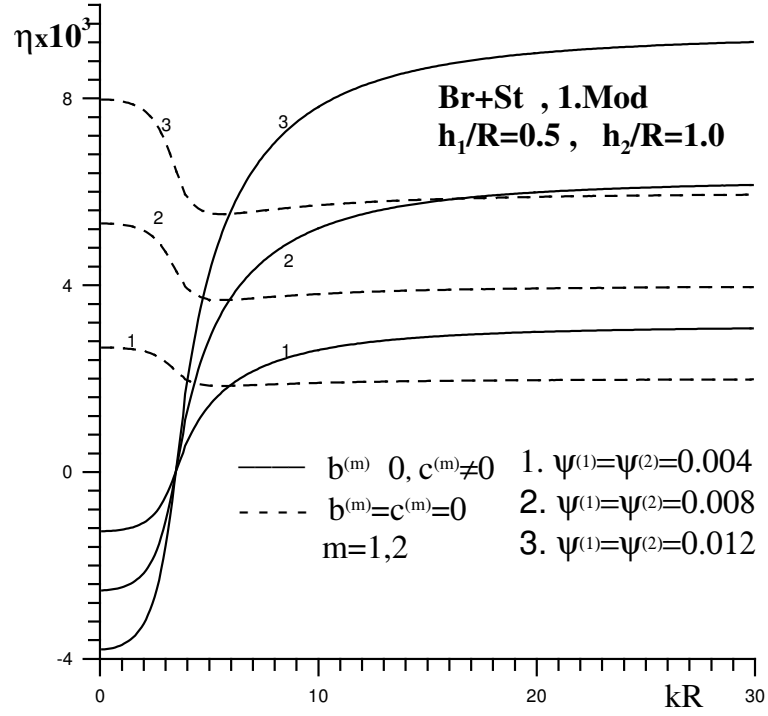
Şekil 2.51 Bronz– Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($h_1/R=0.5$ $h_2/R=0.5$ ve $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = 0$).



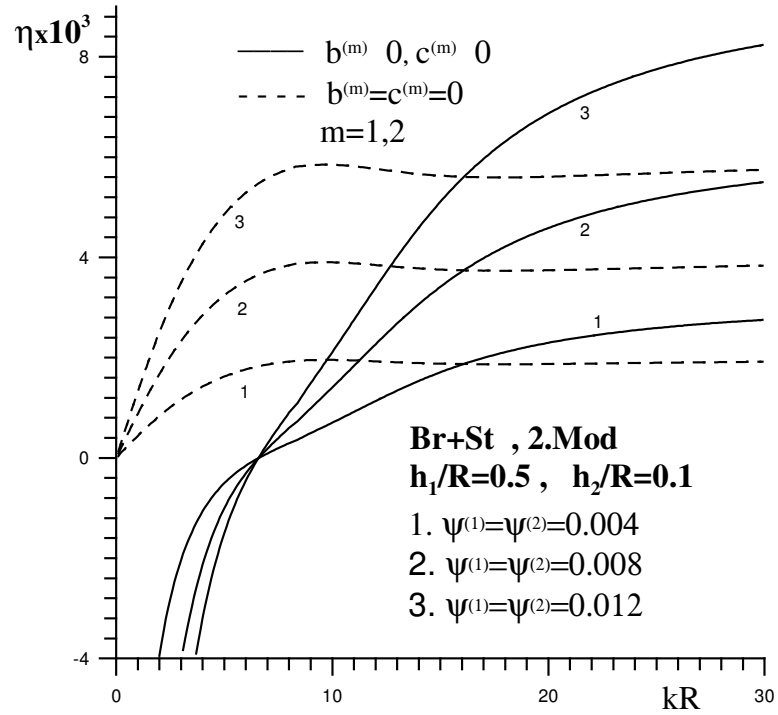
Şekil 2.52 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.1$).



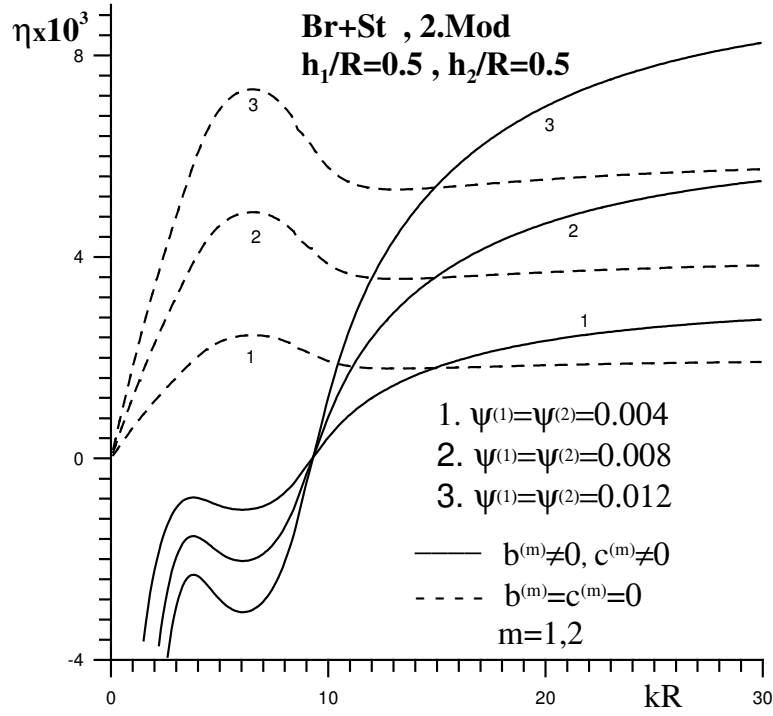
Şekil 2.53 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$).



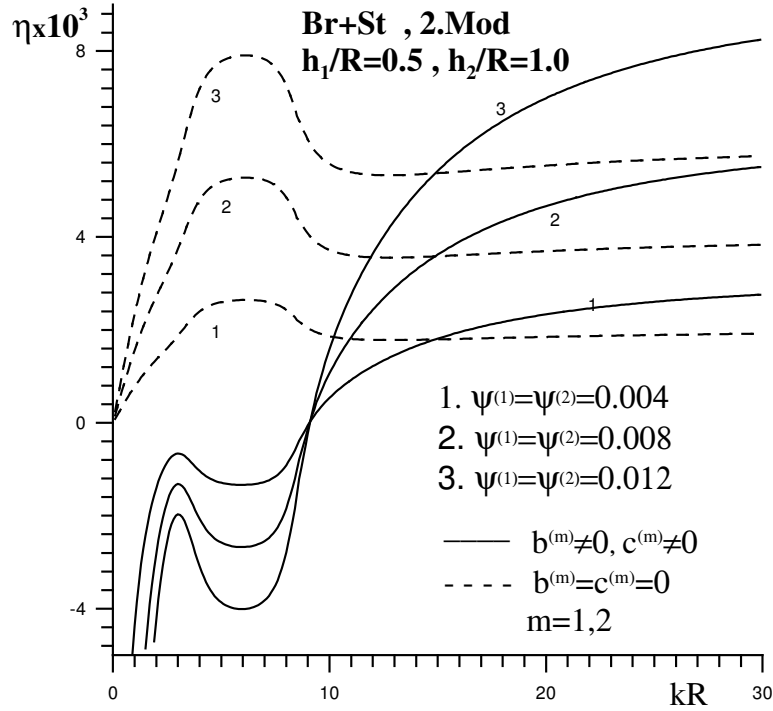
Şekil 2.54 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=1.0$).



Şekil 2.55 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.1$).



Şekil 2.56 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=0.5$).



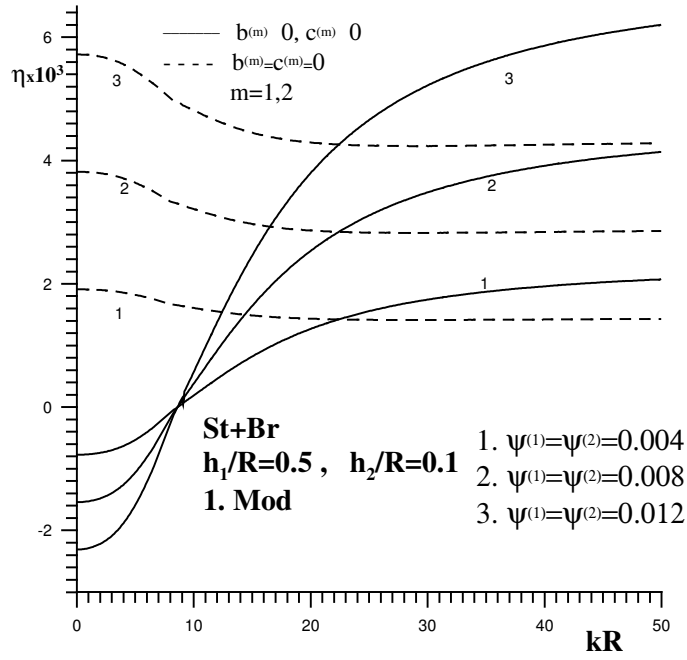
Şekil 2.57 Bronz-Çelik malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5$, $h_2/R=1.0$).

Şekil 2.52- Şekil 2.54’ de verilen sayısal sonuçlarda $h_1/R=0.5$ alınarak farklı h_2/R ve öngerilme değerleri için birinci modun değişimi gösterilmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise faz hızının küçük kR değerleri için azaldığı ve bir noktadan sonra faz hızının arttığı gözlemlenmiştir. Yani kR ’nin öyle bir $(kR)^*$ değeri vardır’ki, bu değerde $kR=(kR)^*$ öngerilmelerin burulma dalgalarının yayılma hızına etki etmemektedir. Öngerilmelerin, $kR < (kR)^*$ için faz hızını düşürdüğü ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttırdığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür.

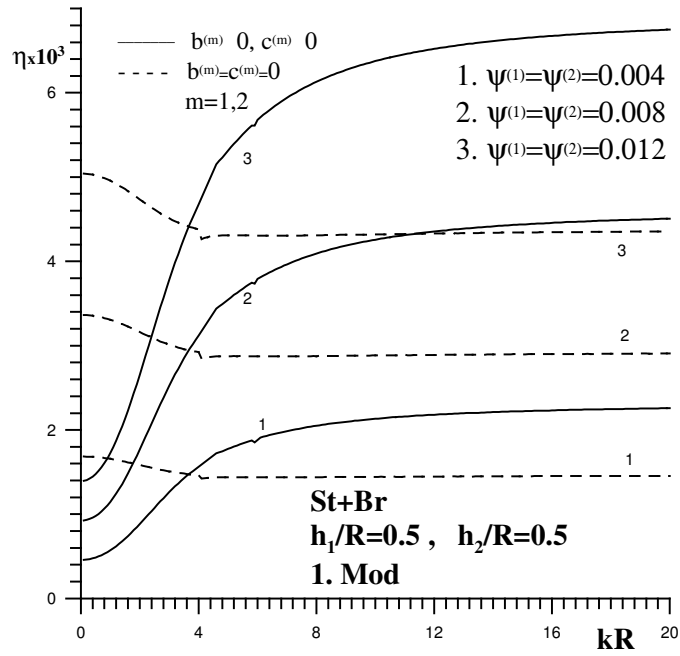
Şekil 2.55- Şekil 2.57’ de verilen sayısal sonuçlarda farklı $h_1/R=0.5$ alınarak farklı h_2/R ve öngerilme değerleri için ikinci modun öngerilmeyle nasıl değiştiği incelenmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızını arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri büyüdükçe faz hızı artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür.

İkinci durum olarak, içteki silindir çelik, dıştaki silindir bronz olarak (Çelik+Bronz) ele alınmıştır. Şekil 2.58- Şekil 2.60’ da verilen sayısal sonuçlarda $h_1/R=0.5$ alınarak farklı h_2/R ve öngerilme değerleri için birinci modun değişimi incelenmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise faz hızının küçük kR değerleri için azaldığı ve bir noktadan sonra faz hızının arttığı gözlemlenmiştir. Öngerilmelerin, $kR < (kR)^*$ için faz hızını düşürdüğü ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttırdığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde),

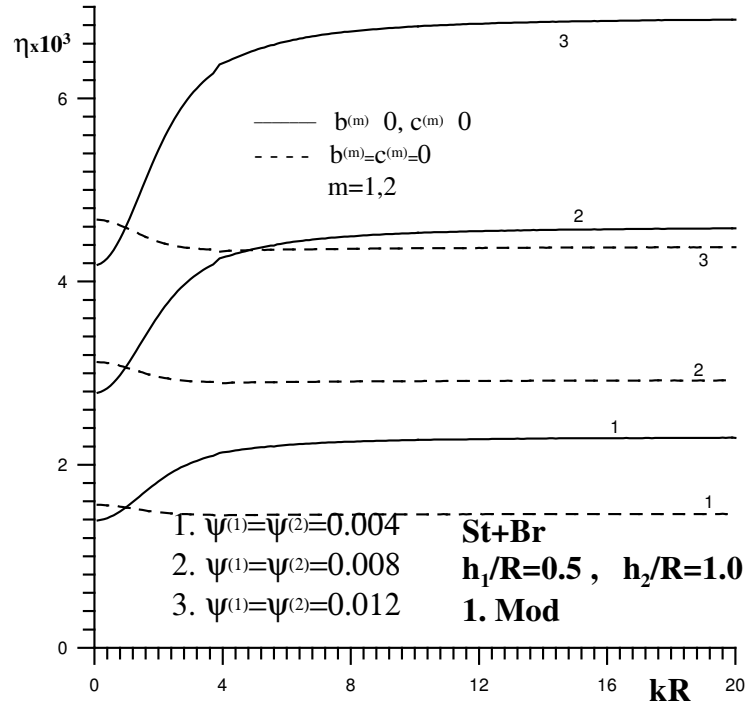
öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür.



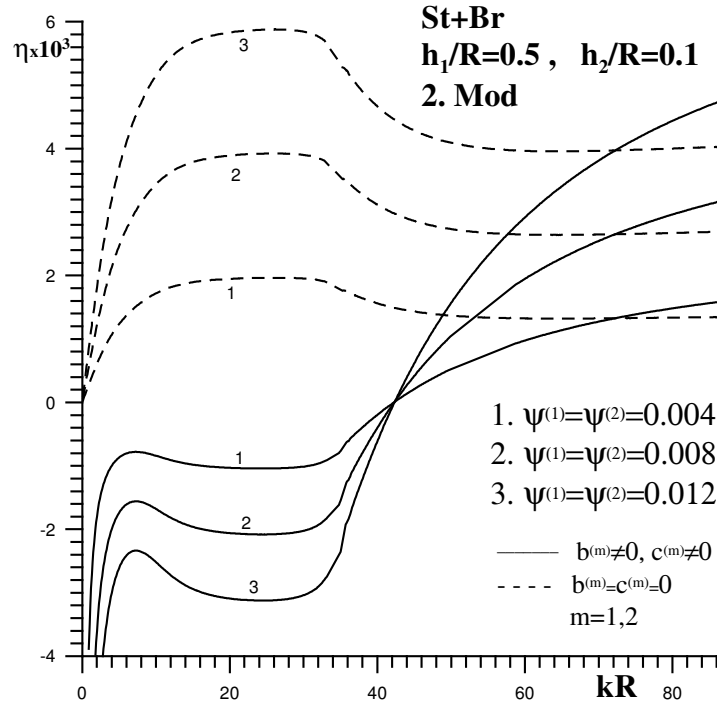
Şekil 2.58 Çelik-Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5, h_2/R=0.1$).



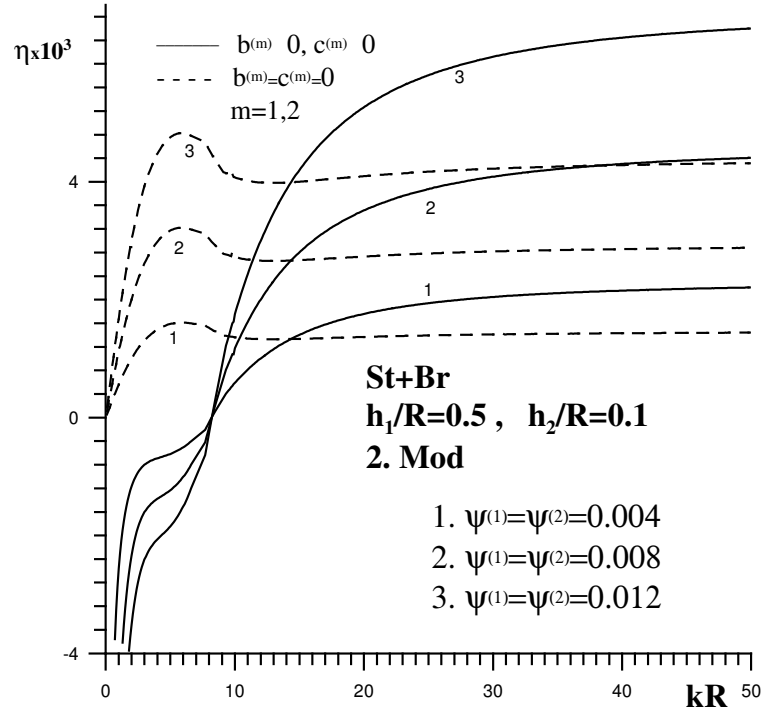
Şekil 2.59 Çelik-Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5, h_2/R=0.5$).



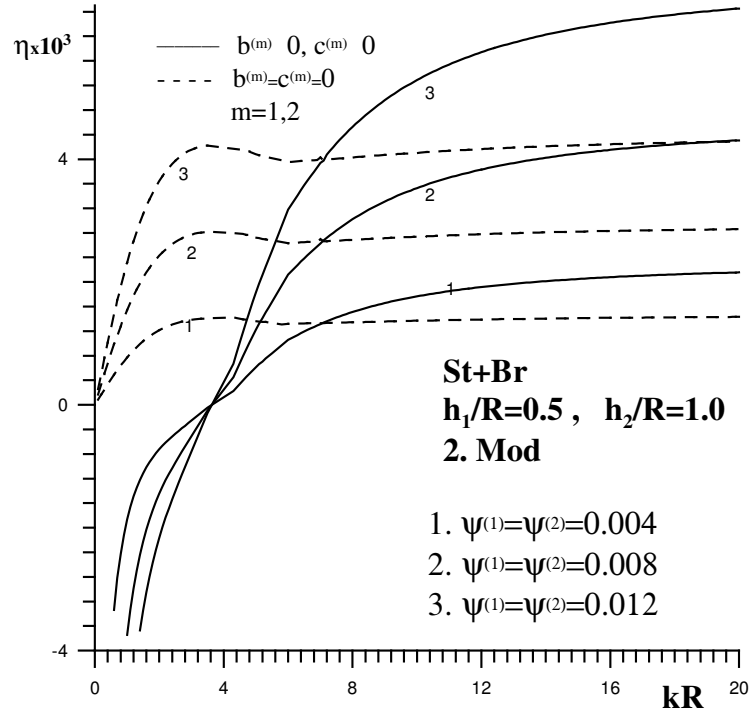
Şekil 2.60 Çelik-Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5, h_2/R=1.0$).



Şekil 2.61 Çelik-Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5, h_2/R=0.1$).



Şekil 2.62 Çelik-Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5, h_2/R=0.5$).



Şekil 2.63 Çelik-Bronz malzeme çifti için içi boş bileşik silindirdaki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($h_1/R=0.5, h_2/R=1.0$).

Şekil 2.61- Şekil 2.63’ de verilen sayısal sonuçlarda $h_1/R=0.5$ alınarak farklı h_2/R ve öngerilme değerleri için ikinci modun değişimi incelenmiştir. I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise faz hızının küçük kR değerleri için azaldığı ve bir noktadan sonra faz hızının arttığı gözlemlenmiştir. Öngerilmelerin, $kR < (kR)_*$ için faz hızını düşürdüğü ve $kR > (kR)_*$ için faz hızının arttırdığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)_*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)_*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngerilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür.

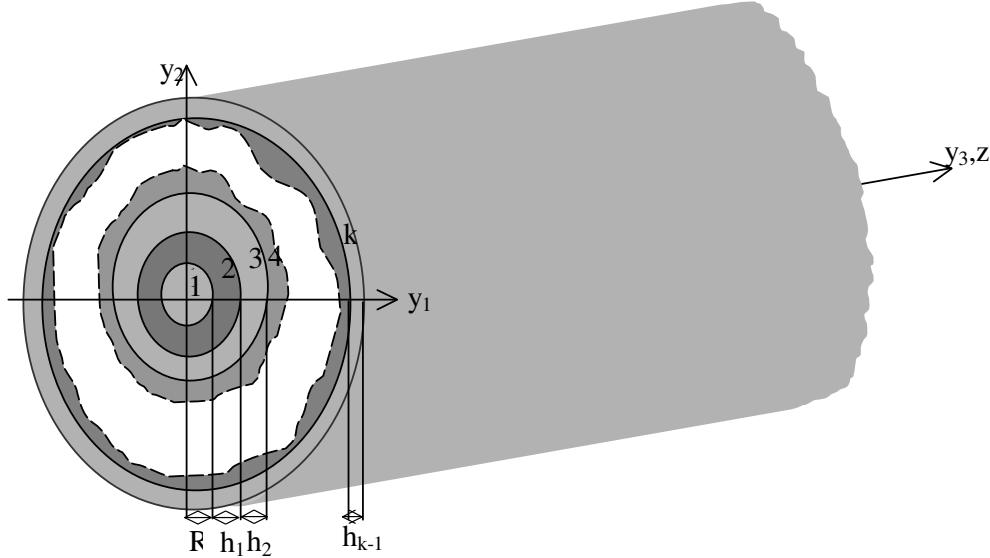
Elde edilen sonuçlardan, bileşik silindir ve içi boş bileşik silindirlerde dalga yayılım hızına öngerilmelerin ve geometrik parametrelerin etkisinin nitelik açısından bir farklılık göstermediği ancak nicelik açısından farklılıklar gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır.

3 ÖNGERİLMELİ ÇOK KATLI SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGALARININ YAYILMASI VE DISPERSİYONU

Bu bölümde, öngerilmeli çok katlı silindirdeki burulma dalgalarının yayılması problemi ele alınmıştır. Çok katlı (katman sayısı ikiden fazla) silindirlerde, içteki silindire ait büyüklükler (1) üst indisi, dıştaki örtük silindire ait büyüklükler ise sırayla (2, 3, 4, 5, 6, 7) üst indisi ile gösterilmiştir (Şekil 3.1). Öngerilmeli durum “0” üst indisi ile ifade edilmektedir. İncelenen problemin matematiksel formülasyonu parçalı cisim modeli çerçevesinde öngerilmeli ortamlarda üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga yayılımı teorisi (ÜDEDYT) hareket denklemleri çerçevesinde yapılmaktadır. Farklı malzemeler için öngerilmelerin dispersiyon eğrilerine etkisini gösteren sonuçlar grafikler halinde verilmektedir.

3.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Yarıçapı R olan bir silindir üzerine yerleştirilmiş, kalınlıkları h_k ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6...$) olan örtük silindirlerden oluşan çok katlı silindiri gözönüne alalım (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Çok katlı silindir.

Çok katlı silindirdeki öngerilmeler

$$\sigma_{zz}^{(m),0} = \text{sabit}_m, \quad m=1,2,3,..,k. \quad (3.1)$$

$$\sigma_{rr}^{(m),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(m),0} = \sigma_{rz}^{(m),0} = \sigma_{\theta z}^{(m),0} = \sigma_{r\theta}^{(m),0} \equiv 0$$

ile verilmektedir. Bu bölümde ise öngörilmeleri (3.1)' de belirlenen ve geometrisi Şekil 3.1'de gösterilen çok katlı silindirdeki burulma dalgalarının yayılımı inceleneceğinden

$$u_r^{(m)} \equiv 0, u_z^{(m)} \equiv 0 \text{ ve } u_\theta^{(m)} = u_\theta^{(m)}(r, z, t) = \phi^{(m)}(r) \exp i(kz - \omega t) \quad (3.2)$$

olduğu varsayılacaktır. Burulma dalgasının (3.2) tanımına göre, göz önüne alınan sistem için hareket denklemi;

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(m)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(m)} + \sigma_{zz}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial z^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. Bu özel durumdaki geometrik ilişkiler,

$$\varepsilon_{r\theta}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(m)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(m)}}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z}^{(m)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta^{(m)}}{\partial z} \quad (3.4)$$

mekanik ilişkiler,

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = 2\mu_{r\theta}^{(m)} \varepsilon_{r\theta}^{(m)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(m)} = 2\mu_{\theta z}^{(m)} \varepsilon_{\theta z}^{(m)} \quad (3.5)$$

bağıntıları ile ifade edilirler. Silindir malzemeleri Murnaghan potansiyeli ile verildiğinde, $\mu_{r\theta}^{(m)}$ ve $\mu_{\theta z}^{(m)}$, nin 3. mertebeden elastisite sabitleri ile ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mu_{r\theta}^{(m)} &= \mu^{(m)} \left[1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{3K_0^{(m)} \lambda^{(m)}} \left(b^{(m)} - \frac{\lambda^{(m)}}{2\mu^{(m)}} c^{(m)} \right) \right] \\ \mu_{\theta z}^{(m)} &= \mu^{(m)} \left[1 + \frac{\sigma_{zz}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \frac{1}{3K_0^{(m)}} \left(b^{(m)} + \frac{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})c^{(m)}}{4\mu^{(m)}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Burada $K_0^{(m)} = \lambda^{(m)} + \frac{2}{3}\mu^{(m)}$ dır.

Göz önüne alınan sistemlerdeki burulma dalga yayılımı (3.3), (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak incelenecektir. İkinci bölümde detaylı olarak incelenen çözümlerden yararlanarak çok katlı silindirdeki burulma dalgalarının yayılımına ait genel ifadeler aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(m)}(r, z, t) &= \left[A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} > 0 \\
u_{\theta}^{(m)}(r, z, t) &= \left[A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} < 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^{(m)} &= \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{q^{(m)}} \left[-A^{(m)} J_2(\bar{r}^{(m)}) - B^{(m)} Y_2(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} > 0 \\
\sigma_{r\theta}^{(m)} &= \mu_{r\theta}^{(m)} k \sqrt{|q^{(m)}|} \left[A^{(m)} I_2(\bar{r}^{(m)}) - B^{(m)} K_2(\bar{r}^{(m)}) \right] e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} < 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta z}^{(m)} &= \mu_{\theta z}^{(m)} \left[A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \right] (ik) e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} > 0 \\
\sigma_{\theta z}^{(m)} &= \mu_{\theta z}^{(m)} \left[A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \right] (ik) e^{i(kz - \omega t)}, \quad q^{(m)} < 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

verilmektedir. Bu bölümde incelenecek sistemi temsil eden sınır koşulları

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(m)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+\dots+h_{m-1}} &= u_{\theta}^{(m+1)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+\dots+h_{m-1}} \\
\sigma_{r\theta}^{(m)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+\dots+h_{m-1}} &= \sigma_{r\theta}^{(m+1)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+\dots+h_{m-1}} \\
\sigma_{r\theta}^{(m)} \Big|_{r=R+h_1+\dots+h_{m-1}} &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak tanımlanır.

Sınır koşullarının açık ifadelerini yazarsak; m =1, içteki silindirden başlamak üzere silindir sayısını temsil eder. İki malzeme için (m=1, 2, bileşik silindir) ikinci bölümde detaylı olarak incelenmiştir. Bileşik silindir üzerine üçüncü bir örtük silindirin ilave edilmesiyle m=1 indisi merkezdeki silindiri, m=2, h_1 kalınlıklı örtük silindiri ve m=3, h_2 kalınlıklı örtük silindiri temsil etmek üzere,

3 silindirden oluşan sistemin sınır koşulları;

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} &= u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \quad u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1} \\
\sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} &= \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, \quad \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = 0
\end{aligned}$$

4 silindirden oluşan sistemin sınır koşulları;

$$u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \quad u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, \quad u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = u_{\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = \sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2++h_3} = 0$$

5 silindirden oluşan sistemin sınır koşulları;

$$u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = u_{\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$u_{\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3} = u_{\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1++h_2+h_3}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = \sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3} = \sigma_{r\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4} = 0$$

6 silindirden oluşan sistemin sınır koşulları;

$$u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = u_{\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$u_{\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3} = u_{\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1++h_2+h_3}, u_{\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4} = u_{\theta}^{(6)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = \sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = \sigma_{r\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}, \sigma_{r\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3} = \sigma_{r\theta}^{(6)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(6)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5} = 0$$

7 silindirden oluşan sistemin sınır koşulları;

$$u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = u_{\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$u_{\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3} = u_{\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1++h_2+h_3}, u_{\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4} = u_{\theta}^{(6)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4}$$

$$u_{\theta}^{(6)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5} = u_{\theta}^{(7)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=R} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R}, \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=R+h_1} = \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1}, \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} = \sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(4)} \Big|_{r=R+h_1+h_2} &= \sigma_{r\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2}, \sigma_{r\theta}^{(5)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3} = \sigma_{r\theta}^{(6)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4} \\ \sigma_{r\theta}^{(6)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5} &= \sigma_{r\theta}^{(7)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5} \\ \sigma_{r\theta}^{(7)} \Big|_{r=R+h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6} &= 0\end{aligned}$$

olarak belirlenirler.

3.2 Çok Katlı Silindirlerde Dispersiyon Denkleminin Elde Edilmesi

Kalınlıkları h_k ($n=1, 2, 3, 4, 5, 6$) olan örtük silindirlerin, yarıçapı R olan içi dolu bir silindir üzerine yerleştirilmeleriyle oluşan çok katlı silindiri gözönüne alalım. (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) denklemlerinden elde edilen çözümler (3.7)

$$\begin{aligned}\phi^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= A^{(m)} J_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} Y_1(\bar{r}^{(m)}) \quad , \quad q^{(m)} > 0 \\ \phi^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= A^{(m)} I_1(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} K_1(\bar{r}^{(m)}) \quad , \quad q^{(m)} < 0\end{aligned}$$

şeklinde. Bu çözüm yöntemi ikinci bölümde detaylı olarak verilmiştir. (3.7) de $J_1(x)$ ve $Y_1(x)$ birinci dereceden, birinci (Bessel) ve ikinci tür (Neumann) Bessel fonksiyonları; $I_1(x)$ ve $K_1(x)$ Modifiye bessel fonksiyonlarıdır. Sistemi temsil eden dalga fonksiyonları $r = 0$ ' da Y_I ve K_I tanımlı olmadığından

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(\bar{r}^{(1)}) &= A^{(1)} E_1^{(1)}(\bar{r}^{(1)}) \\ \phi^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= A^{(m)} E_1^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) + B^{(m)} F_1^{(m)}(\bar{r}^{(m)})\end{aligned} \tag{3.11}$$

burada

$$\begin{aligned}E_1^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= \begin{cases} J_1(\bar{r}^{(m)}) & , \quad q^{(m)} > 0 \\ I_1(\bar{r}^{(m)}) & , \quad q^{(m)} < 0 \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ F_1^{(m)}(\bar{r}^{(m)}) &= \begin{cases} Y_1(\bar{r}^{(m)}) & , \quad q^{(m)} > 0 \\ K_1(\bar{r}^{(m)}) & , \quad q^{(m)} < 0 \end{cases} \quad m = 2, 3, 4, 5, 6, 7\end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak verilirler. Sınır koşulları (3.10) denklemlerinde (3.8), (3.11), (3.12) bağıntıları kullanılarak, $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(N)}$ ve $B^{(2)}, B^{(3)}, \dots, B^{(N)}$ bilinmeyen sabitleri için lineer denklem takımı elde ederiz. Bu denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması onun bilinmeyenlerinden oluşan katsayılar determinantının sıfıra eşit olmasını gerektirir. Bu eşitlik ise dispersiyon denklemini oluşturur. Bu determinant

$$\det \|\alpha_{ij}\| = 0, \quad i,j=1,2,3, \dots, k \quad (3.16)$$

ile ifade edilir.

Örnek olarak, bileşik silindir üzerine üçüncü bir örtük silindirin ilave edilmesiyle $m=1$ indisi içteki silindiri, $m=2$, h_1 kalınlıklı örtük silindiri ve $m=3$, h_2 kalınlıklı örtük silindiri temsil etmek üzere (3.10) denklemlerinde (3.11), (3.12) kullanılarak, 3 silindirden oluşan çok katlı silindir için

$$\begin{aligned} A^{(1)}\alpha_{11} - A^{(2)}\alpha_{12} - B^{(2)}\alpha_{13} &= 0 \\ A^{(2)}\alpha_{22} + B^{(2)}\alpha_{23} - A^{(3)}\alpha_{24} - B^{(3)}\alpha_{25} &= 0 \\ A^{(1)}\alpha_{31} - A^{(2)}\alpha_{32} - B^{(2)}\alpha_{33} &= 0 \\ A^{(2)}\alpha_{42} + B^{(2)}\alpha_{43} - A^{(3)}\alpha_{44} - B^{(3)}\alpha_{45} &= 0 \\ A^{(3)}\alpha_{54} + B^{(3)}\alpha_{55} &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, B^{(2)}$ ve $B^{(3)}$ bilinmeyen sabitleri için lineer denklem takımı elde ederiz. Bu denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması onun bilinmeyenlerinden oluşan katsayılar determinantının sıfıra eşit olmasını gerektirir. Bu eşitlik ise dispersiyon denklemini oluşturur. 3 silindirden oluşan çok katlı silindir için adı geçen determinant 5x5 boyutundadır. Bu denklemdeki α_{ij}

$$\alpha_{11} = \begin{cases} J_1(kR\sqrt{q^{(1)}}) & , q^{(1)} > 0 \\ I_1(kR\sqrt{|q^{(1)}|}) & , q^{(1)} < 0 \end{cases}, \alpha_{12} = \begin{cases} -J_1(kR\sqrt{q^{(2)}}) & , q^{(2)} > 0 \\ -I_1(kR\sqrt{|q^{(2)}|}) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{13} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} , \quad \alpha_{14} = 0 , \quad \alpha_{15} = 0 , \quad \alpha_{21} = 0$$

$$\alpha_{22} = \begin{cases} J_1 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ I_1 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} , \quad \alpha_{23} = \begin{cases} Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{24} = \begin{cases} -J_1 \left(kR\sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -I_1 \left(kR\sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} , \quad \alpha_{25} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{31} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(1)}} \right) & , q^{(1)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{|q^{(1)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(1)}|} \right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{32} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \right) & , q^{(2)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{33} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} Y_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} K_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} , \quad \alpha_{34} = 0 , \quad \alpha_{35} = 0 , \quad \alpha_{41} = 0$$

$$\alpha_{42} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{43} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} Y_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} K_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{44} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{q^{(3)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{|q^{(3)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{45} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{q^{(3)}} Y_2 \left(kR\sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{|q^{(3)}|} K_2 \left(kR\sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_{51} = 0, \alpha_{52} = 0, \alpha_{53} = 0 \\
& \alpha_{54} = \begin{cases} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \\
& \alpha_{55} = \begin{cases} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde 4, 5, 6 malzemeler için yazılır.

7-silindirden oluşan sistem için ise;

$$\begin{aligned}
& \alpha_{11} = \begin{cases} J_1 \left(kR \sqrt{q^{(1)}} \right) & , q^{(1)} > 0 \\ I_1 \left(kR \sqrt{|q^{(1)}|} \right) & , q^{(1)} < 0 \end{cases}, \alpha_{12} = \begin{cases} -J_1 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -I_1 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \\
& \alpha_{13} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \right) & , q^{(2)} > 0 \\ -K_1 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}, \alpha_{14} = 0, \alpha_{15} = 0, \alpha_{16} = 0, \alpha_{17} = 0 \\
& \alpha_{18} = 0, \alpha_{19} = 0, \alpha_{110} = 0, \alpha_{111} = 0, \alpha_{112} = 0, \alpha_{113} = 0 \\
& \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = \begin{cases} J_1 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ I_1 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases}, \alpha_{23} = \begin{cases} Y_1 \left(kR \sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} > 0 \\ K_1 \left(kR \sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(2)} < 0 \end{cases} \\
& \alpha_{24} = \begin{cases} -J_1 \left(kR \sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(3)} > 0 \\ -I_1 \left(kR \sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(3)} < 0 \end{cases}, \alpha_{25} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR \sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(3)} > 0 \\ -K_1 \left(kR \sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(3)} < 0 \end{cases} \\
& \alpha_{26} = 0, \alpha_{27} = 0, \alpha_{28} = 0, \alpha_{29} = 0, \alpha_{210} = 0, \alpha_{211} = 0, \alpha_{212} = 0, \alpha_{213} = 0 \\
& \alpha_{31} = 0, \alpha_{32} = 0, \alpha_{33} = 0
\end{aligned}$$

$$\alpha_{34} = \begin{cases} J_1 \left(kR\sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(3)} > 0 \\ I_1 \left(kR\sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(3)} < 0 \end{cases}, \alpha_{35} = \begin{cases} Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(3)} > 0 \\ K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{36} = \begin{cases} -J_1 \left(kR\sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(4)} > 0 \\ -I_1 \left(kR\sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(4)} < 0 \end{cases}, \alpha_{37} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(4)} > 0 \\ -K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right), & q^{(4)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{38} = 0, \alpha_{39} = 0, \alpha_{310} = 0, \alpha_{311} = 0, \alpha_{312} = 0, \alpha_{313} = 0$$

$$\alpha_{41} = 0, \alpha_{42} = 0, \alpha_{43} = 0, \alpha_{44} = 0, \alpha_{45} = 0$$

$$\alpha_{46} = \begin{cases} J_1 \left(kR\sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(4)} > 0 \\ I_1 \left(kR\sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(4)} < 0 \end{cases},$$

$$\alpha_{47} = \begin{cases} Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(4)} > 0 \\ K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(4)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{48} = \begin{cases} -J_1 \left(kR\sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(5)} > 0 \\ -I_1 \left(kR\sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(5)} < 0 \end{cases},$$

$$\alpha_{49} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(5)} > 0 \\ -K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right), & q^{(5)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{410} = 0, \alpha_{411} = 0, \alpha_{412} = 0, \alpha_{413} = 0$$

$$\alpha_{51} = 0, \alpha_{52} = 0, \alpha_{53} = 0, \alpha_{54} = 0, \alpha_{56} = 0, \alpha_{57} = 0,$$

$$\alpha_{58} = \begin{cases} J_1 \left(kR \sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(5)} > 0 \\ I_1 \left(kR \sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(5)} < 0 \end{cases},$$

$$\alpha_{59} = \begin{cases} Y_1 \left(kR \sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(5)} > 0 \\ K_1 \left(kR \sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(5)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{510} = \begin{cases} -J_1 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(6)} > 0 \\ -I_1 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(6)} < 0 \end{cases},$$

$$\alpha_{511} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(6)} > 0 \\ -K_1 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right), & q^{(6)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{512} = 0, \alpha_{513} = 0$$

$$\alpha_{61} = 0, \alpha_{62} = 0, \alpha_{63} = 0, \alpha_{64} = 0, \alpha_{65} = 0, \alpha_{67} = 0, \alpha_{68} = 0, \alpha_{69} = 0$$

$$\alpha_{610} = \begin{cases} J_1 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right), & q^{(6)} > 0 \\ I_1 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right), & q^{(6)} < 0 \end{cases},$$

$$\alpha_{611} = \begin{cases} Y_1 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right), & q^{(6)} > 0 \\ K_1 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right), & q^{(6)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{612} = \begin{cases} -J_1 \left(kR\sqrt{q^{(7)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) , q^{(7)} > 0 \\ -I_1 \left(kR\sqrt{|q^{(7)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) , q^{(7)} < 0 \end{cases} ,$$

$$\alpha_{613} = \begin{cases} -Y_1 \left(kR\sqrt{q^{(7)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) , q^{(7)} > 0 \\ -K_1 \left(kR\sqrt{|q^{(7)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) , q^{(7)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{71} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{q^{(1)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(1)}} \right) , q^{(1)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(1)} \sqrt{|q^{(1)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(1)}|} \right) , q^{(1)} < 0 \end{cases} , \alpha_{72} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \right) , q^{(2)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \right) , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{73} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} Y_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \right) , q^{(2)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} K_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \right) , q^{(2)} < 0 \end{cases} , \quad \alpha_{74} = 0, \quad \alpha_{75} = 0, \quad \alpha_{76} = 0, \quad \alpha_{77} = 0, \quad \alpha_{78} = 0,$$

$$\alpha_{79} = 0, \quad \alpha_{710} = 0, \quad \alpha_{711} = 0, \quad \alpha_{712} = 0, \quad \alpha_{713} = 0$$

$$\alpha_{81} = 0,$$

$$\alpha_{82} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) , q^{(2)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{83} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{q^{(2)}} Y_2 \left(kR\sqrt{q^{(2)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) , q^{(2)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(2)} \sqrt{|q^{(2)}|} K_2 \left(kR\sqrt{|q^{(2)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) , q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{84} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{q^{(3)}} J_2 \left(kR\sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) , q^{(3)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{|q^{(3)}|} I_2 \left(kR\sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) , q^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{85} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{q^{(3)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(3)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{|q^{(3)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \right) & , q^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{86} = 0, \alpha_{87} = 0, \alpha_{88} = 0, \alpha_{89} = 0, \alpha_{810} = 0, \alpha_{811} = 0, \alpha_{812} = 0, \alpha_{813} = 0$$

$$\alpha_{91} = 0, \alpha_{92} = 0, \alpha_{93} = 0,$$

$$\alpha_{94} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{q^{(3)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(3)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{|q^{(3)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{95} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{q^{(3)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(3)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(3)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(3)} \sqrt{|q^{(3)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(3)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{96} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{q^{(4)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(4)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{|q^{(4)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(4)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{97} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{q^{(4)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(4)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{|q^{(4)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} \right) \right) & , q^{(4)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{98} = 0, \alpha_{99} = 0, \alpha_{910} = 0, \alpha_{911} = 0, \alpha_{912} = 0, \alpha_{913} = 0$$

$$\alpha_{101} = 0, \alpha_{102} = 0, \alpha_{103} = 0, \alpha_{104} = 0, \alpha_{105} = 0,$$

$$\alpha_{106} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{q^{(4)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(4)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{|q^{(4)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(4)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{107} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{q^{(4)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(4)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(4)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(4)} \sqrt{|q^{(4)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(4)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(4)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{108} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{q^{(5)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(5)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{|q^{(5)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(5)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{109} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{q^{(5)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(5)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{|q^{(5)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right) \right) & , q^{(5)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{1010} = 0, \alpha_{1011} = 0, \alpha_{1012} = 0, \alpha_{1013} = 0$$

$$\alpha_{111} = 0, \alpha_{112} = 0, \alpha_{113} = 0, \alpha_{114} = 0, \alpha_{115} = 0, \alpha_{116} = 0, \alpha_{117} = 0$$

$$\alpha_{118} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{q^{(5)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(5)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{|q^{(5)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(5)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{119} = \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{q^{(5)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(5)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(5)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(5)} \sqrt{|q^{(5)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(5)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(5)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{1110} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{q^{(6)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(6)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{|q^{(6)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(6)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{1111} = \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{q^{(6)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(6)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{|q^{(6)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} \right) \right) & , q^{(6)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{1112} = 0, \alpha_{1213} = 0$$

$$\alpha_{121} = 0, \alpha_{122} = 0, \alpha_{123} = 0, \alpha_{124} = 0, \alpha_{125} = 0, \alpha_{126} = 0, \alpha_{127} = 0, \alpha_{128} = 0, \alpha_{129} = 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1210} &= \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{q^{(6)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(6)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{|q^{(6)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(6)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{1211} &= \begin{cases} \mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{q^{(6)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(6)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(6)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{|q^{(6)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(6)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(6)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{1212} &= \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(7)} \sqrt{q^{(7)}} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(7)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(7)} > 0 \\ \mu_{r\theta}^{(6)} \sqrt{|q^{(7)}|} I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(7)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(7)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{1213} &= \begin{cases} -\mu_{r\theta}^{(7)} \sqrt{q^{(7)}} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(7)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(7)} > 0 \\ -\mu_{r\theta}^{(7)} \sqrt{|q^{(7)}|} K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(7)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} \right) \right) & , q^{(7)} < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\alpha_{131} = 0, \alpha_{132} = 0, \alpha_{133} = 0, \alpha_{134} = 0, \alpha_{135} = 0, \alpha_{136} = 0, \alpha_{137} = 0, \alpha_{138} = 0, \alpha_{139} = 0, \alpha_{1310} = 0$$

$$\alpha_{1311} = 0$$

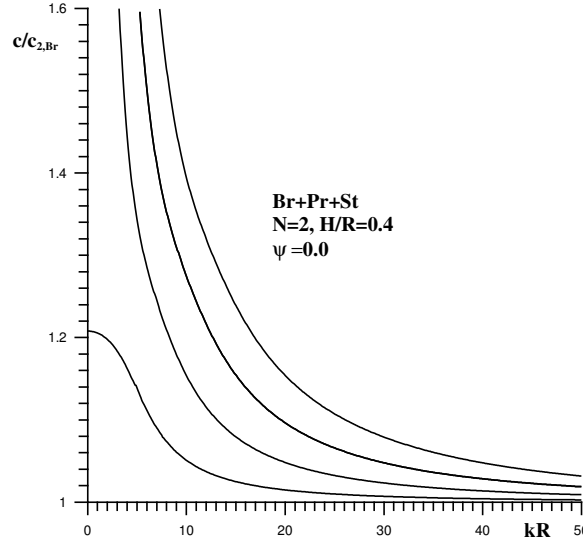
$$\begin{aligned}
\alpha_{1312} &= \begin{cases} J_2 \left(kR \sqrt{q^{(7)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} + \frac{h_6}{R} \right) \right) & , q^{(7)} > 0 \\ I_2 \left(kR \sqrt{|q^{(7)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} + \frac{h_6}{R} \right) \right) & , q^{(7)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{1313} &= \begin{cases} Y_2 \left(kR \sqrt{q^{(7)}} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} + \frac{h_6}{R} \right) \right) & , q^{(7)} > 0 \\ -K_2 \left(kR \sqrt{|q^{(7)}|} \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} + \frac{h_4}{R} + \frac{h_5}{R} + \frac{h_6}{R} \right) \right) & , q^{(7)} < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

3.2 Çok Katlı Silindirlerde Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi

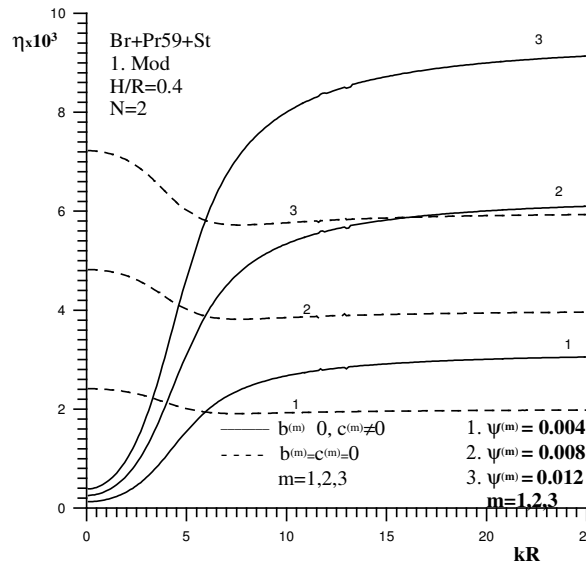
Bu bölümde içi dolu silindir üzerine ilave edilmiş örtük silindirlerden oluşturulmuş çok katlı silindirdeki burulma dalga yayılımı incelenecektir. Birinci durumda içteki silindir üzerindeki toplam kalınlık ($H=h_1+h_2+...+h_n$) sabit tutularak katman sayısı değiştirilerek incelenecektir.

$H/R=0.4, 1.0$ ve 1.5 alınarak içi dolu Bronz silindir üzerine sırasıyla Pirinç59 ve Çelik'ten

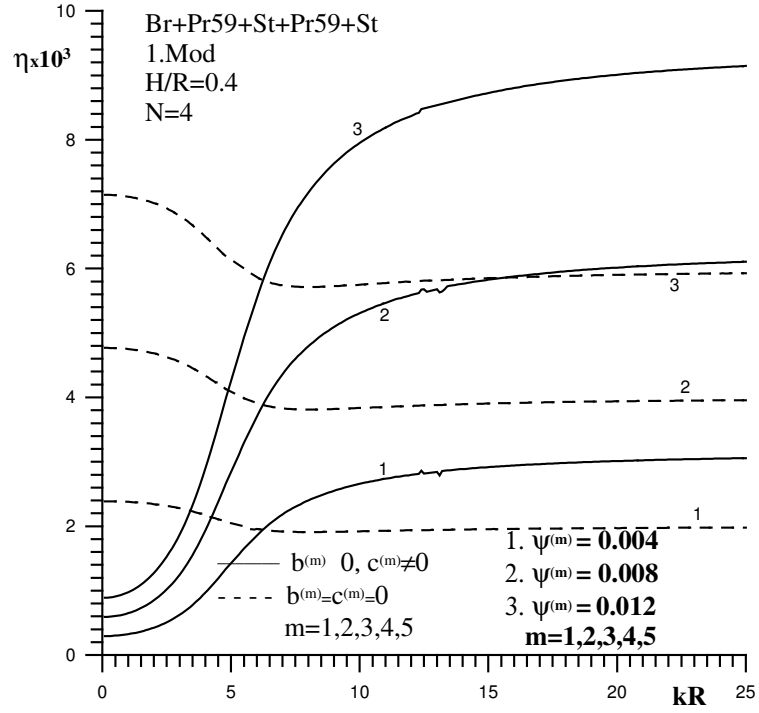
örtük silindirler yerleştirilerek iki katmanlı ($N=2$) bir çok katlı silindir oluşturulmuştur. Daha sonra toplam kalınlık (H) değiştirilmeden bronz silindir üzerine sırasıyla pirinç59-çelik-pirinç59-çelik'ten oluşan örtük silindirler yerleştirilerek (her bir katmanın kalınlığı eşittir) katman sayısı 4 ve daha sonra 6 ya çıkarılmıştır. $H/R=0.4$, 1.0 ve 1.5 için katman sayısı $N=2$, 4, 6 alınarak birinci mod ve ikinci modun dalga yayılım hızına öngörilmelerin etkileri için incelenmiştir. Bu malzemelere ait mekanik parametreler ve Murnaghan katsayıları Çizelge 2.1'de verilmektedir.



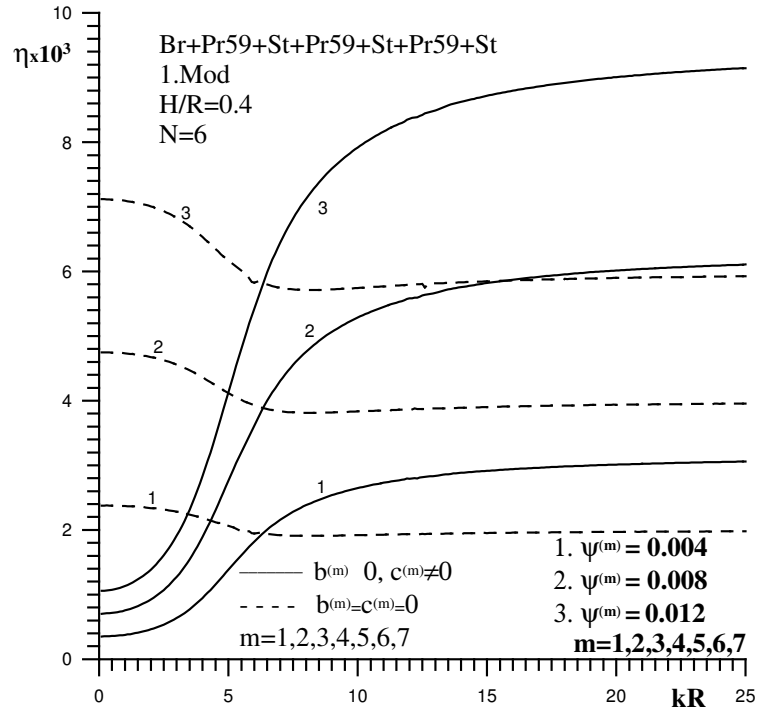
Şekil 3.2 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirin dispersiyon eğrilerinin ilk dört modu ($H/R=0.4$ ve $\Psi^{(m)}=0$, $m=1,2,3$)



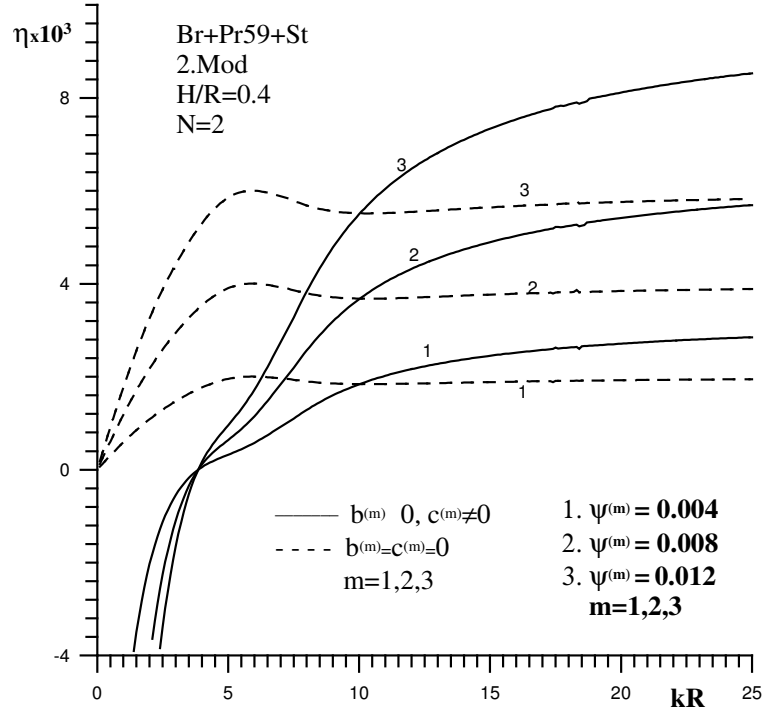
Şekil 3.3 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngörilmelerin etkisi ($N=2$, $H/R=0.4$).



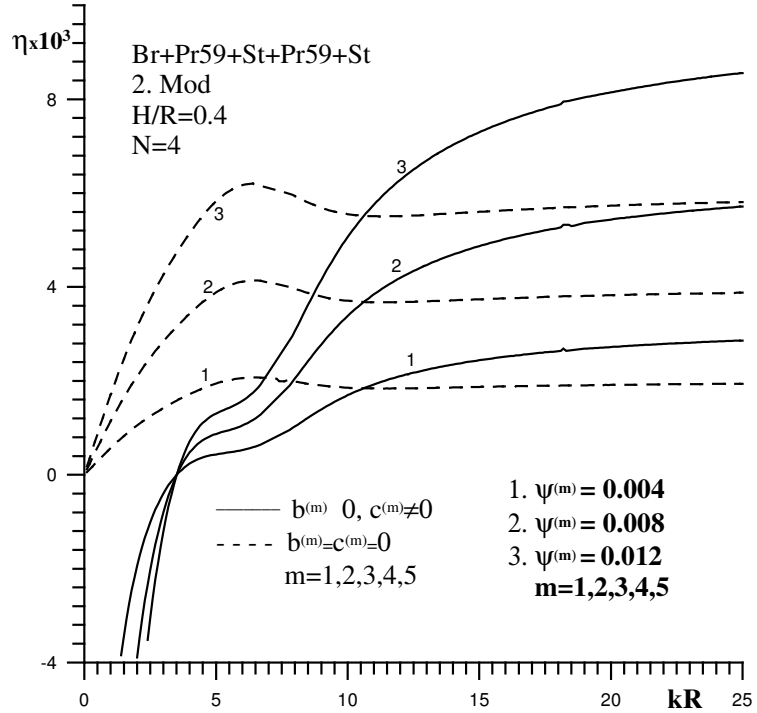
Şekil 3.4 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=4, H/R=0.4).



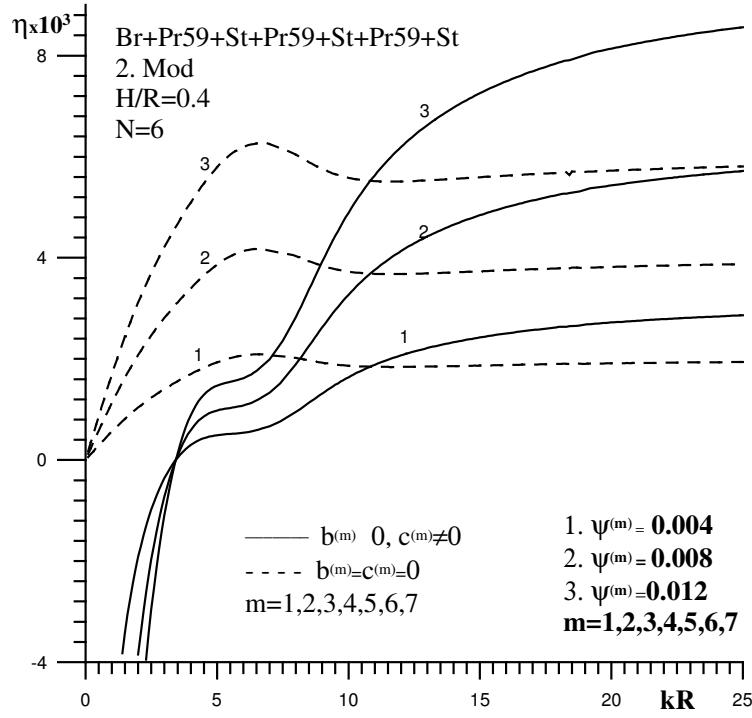
Şekil 3.5 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=6, H/R=0.4).



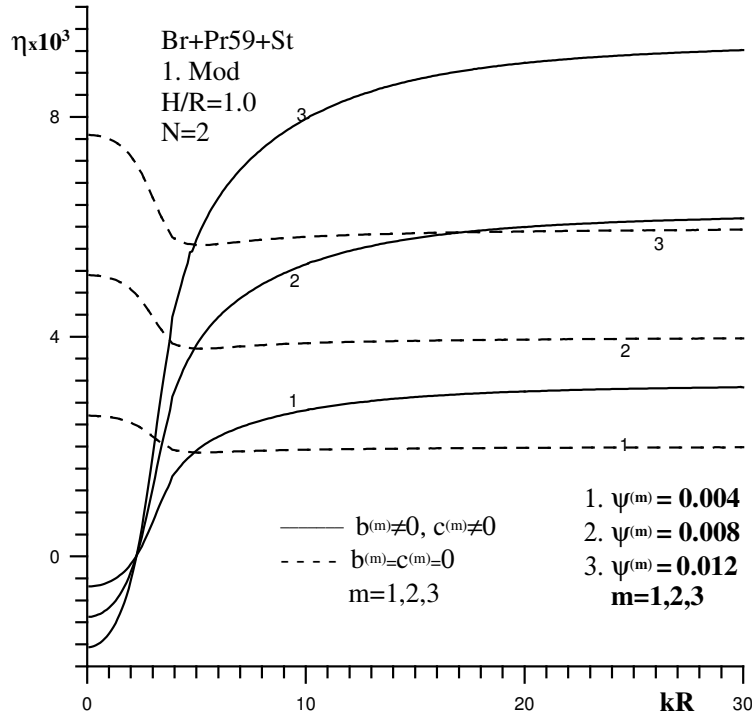
Şekil 3.6 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=2 H/R=0.4).



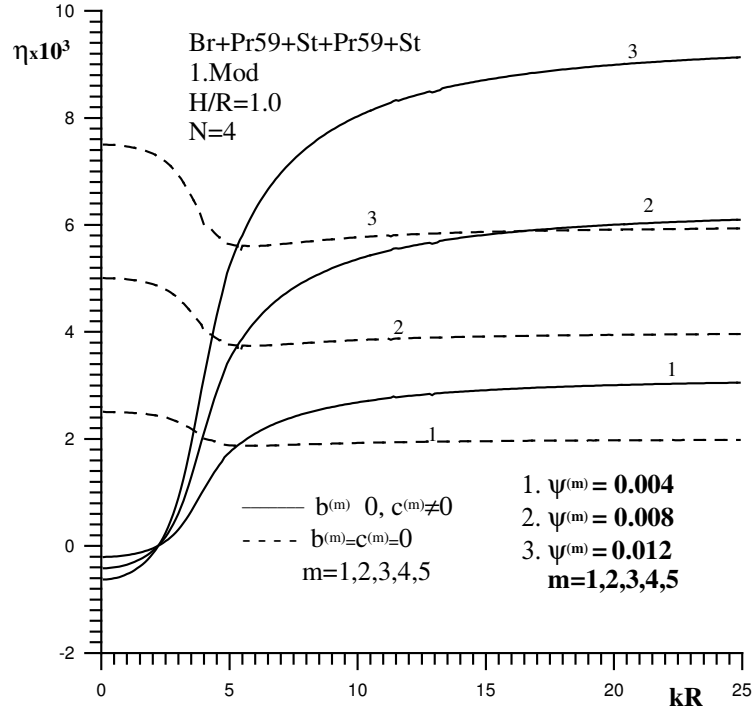
Şekil 3.7 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=4, H/R=0.4).



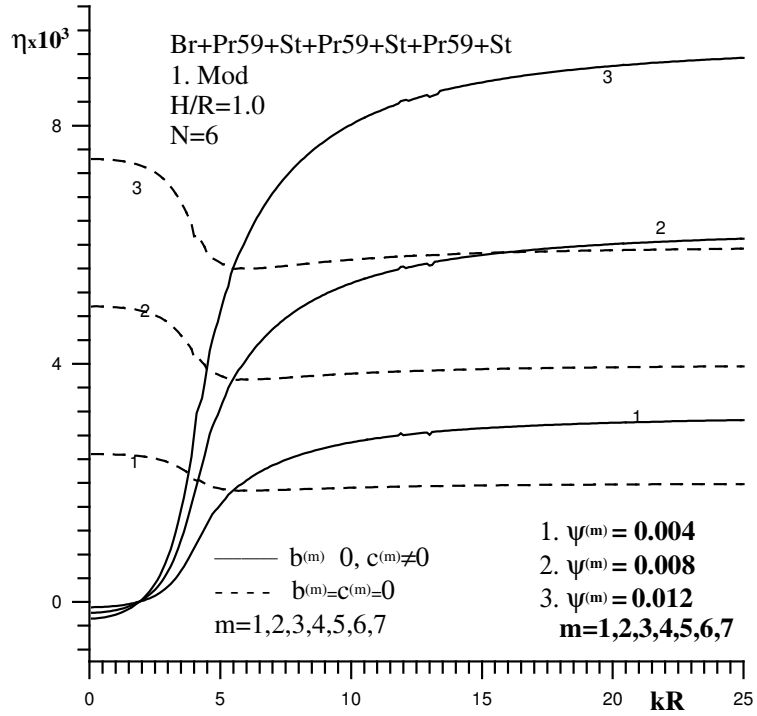
Şekil 3.8 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=6, H/R=0.4).



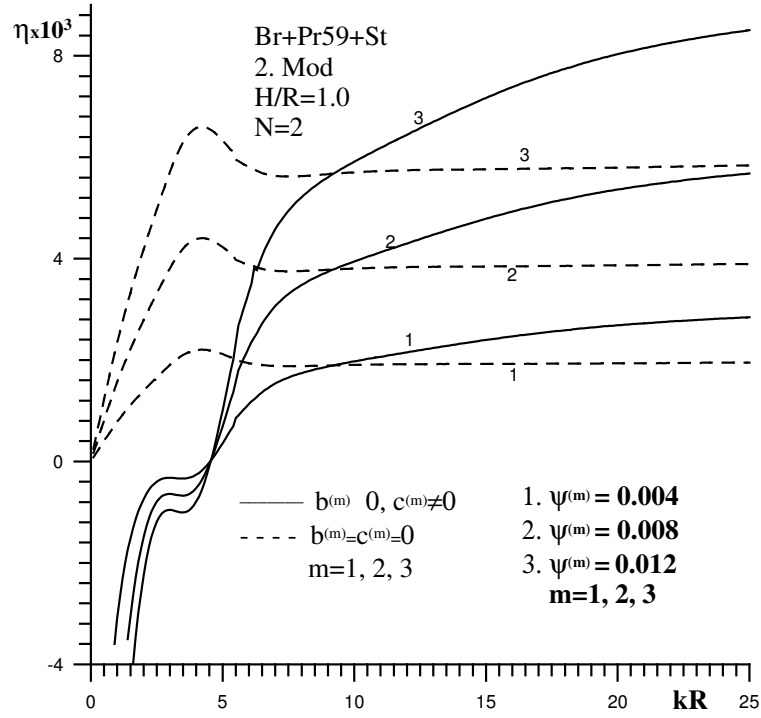
Şekil 3.9 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=2, H/R=1.0).



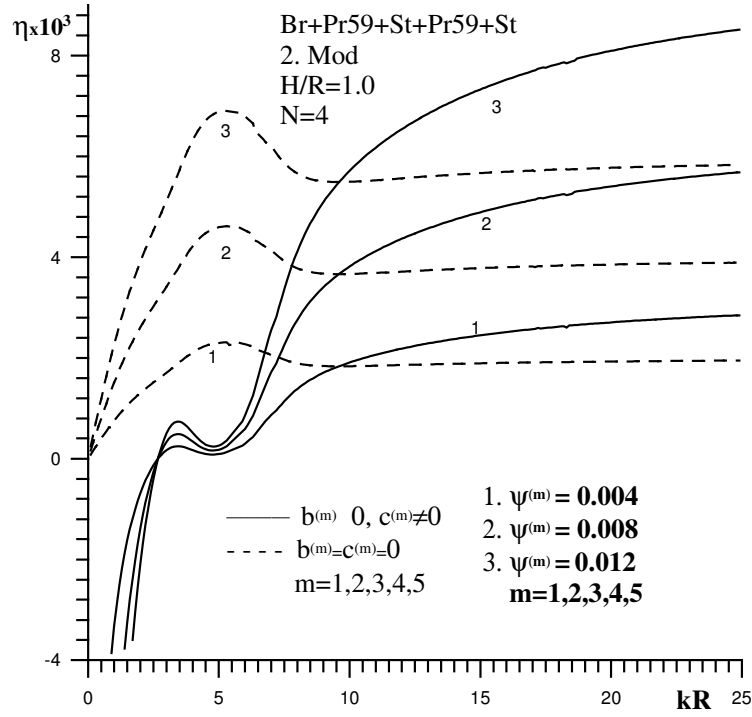
Şekil 3.10 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=4, H/R=1.0).



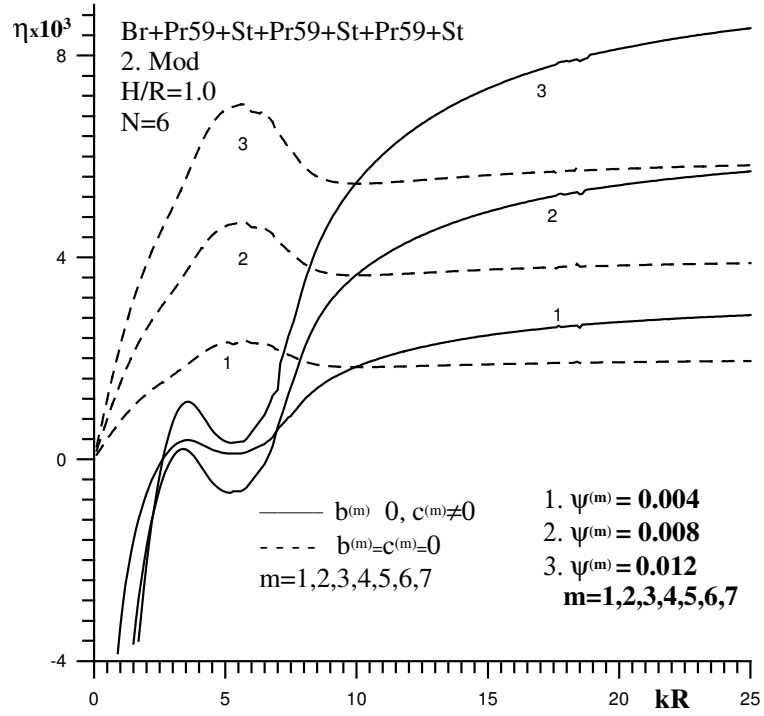
Şekil 3.11 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=6, H/R=1.0).



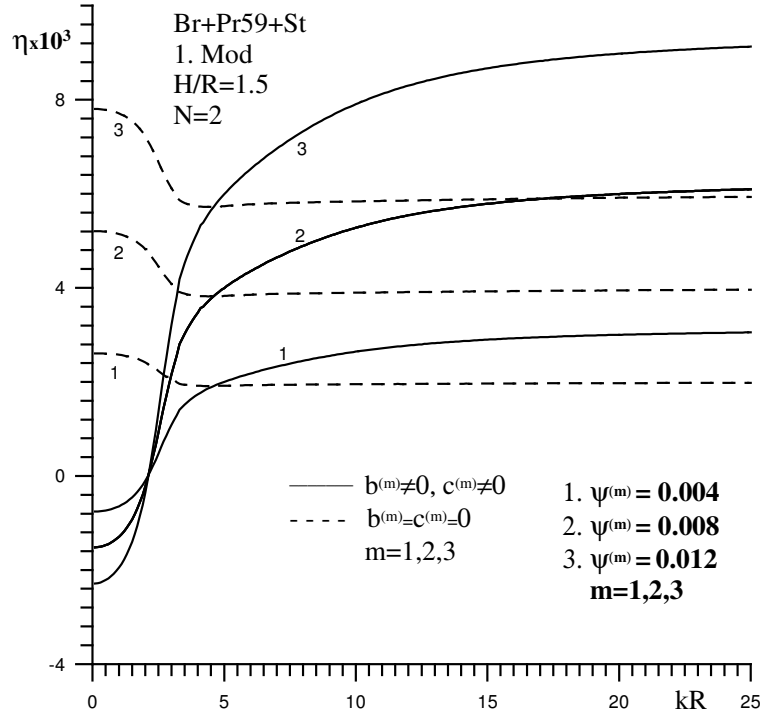
Şekil 3.12 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=2, H/R=1.0).



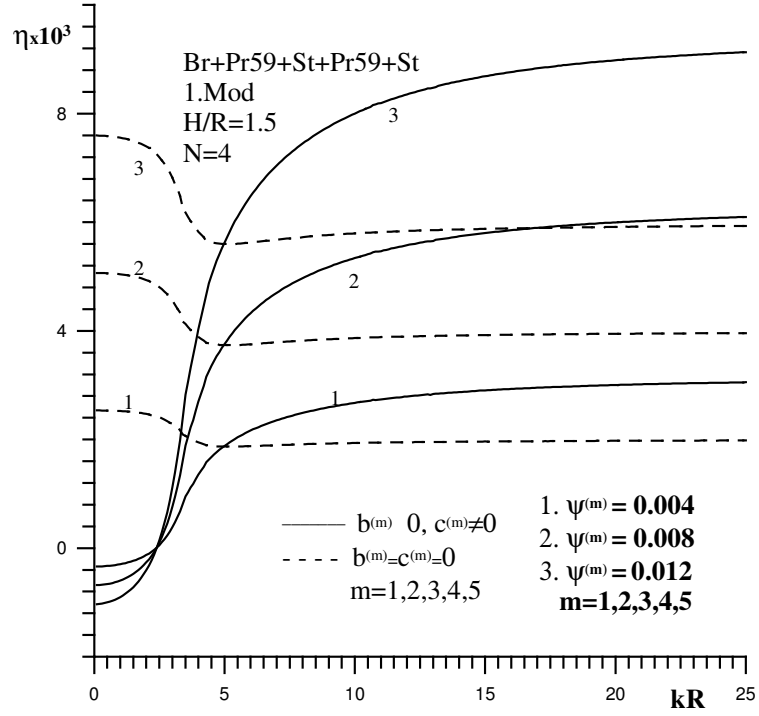
Şekil 3.13 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=4, H/R=1.0).



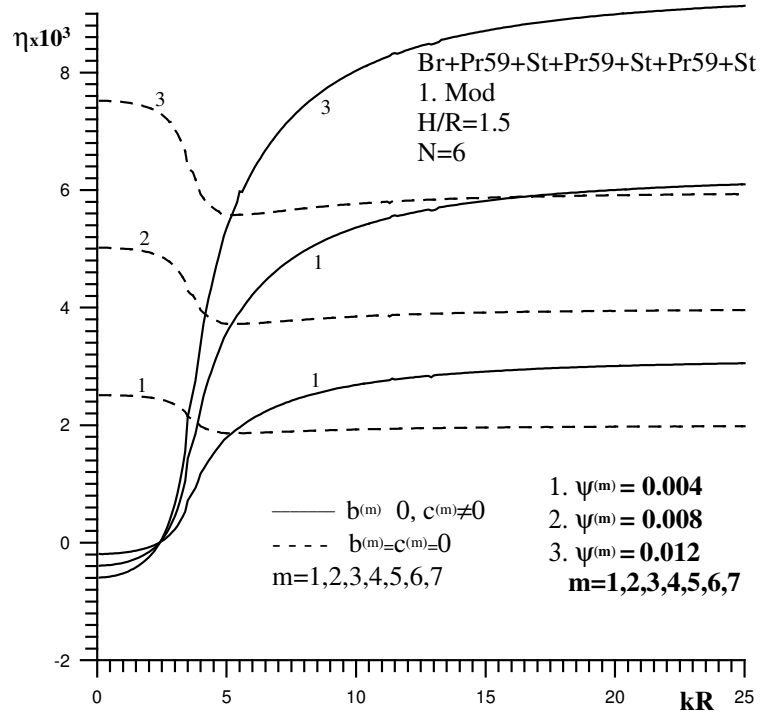
Şekil 3.14 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=6, H/R=1.0).



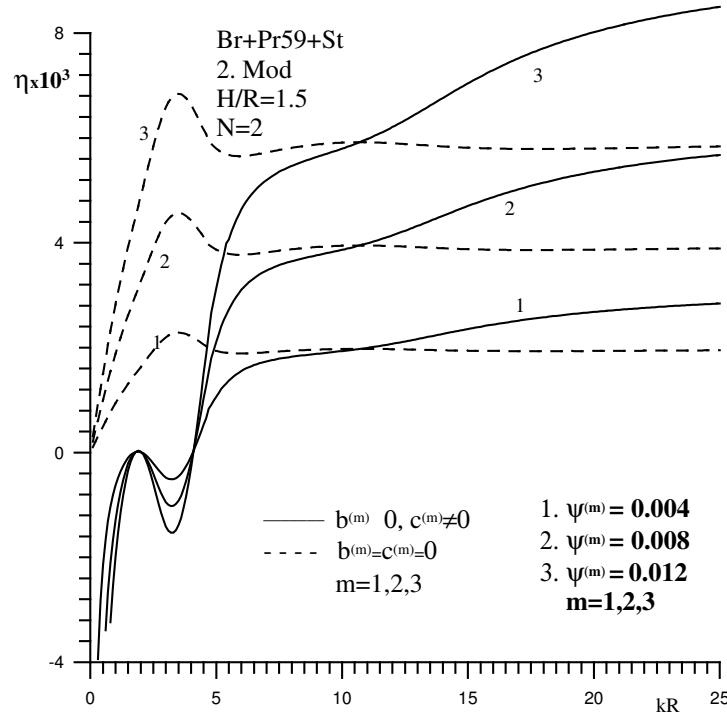
Şekil 3.15 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=2, H/R=1.5).



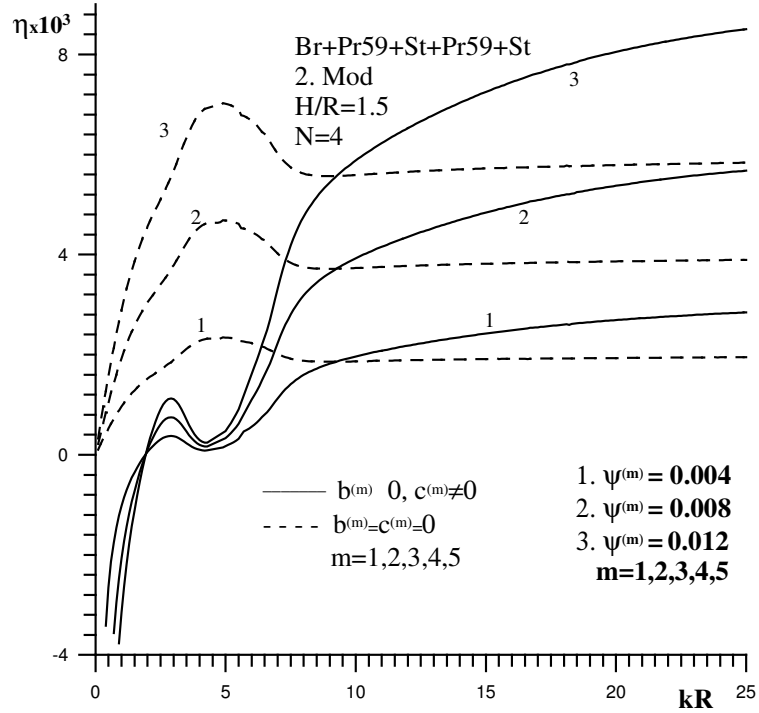
Şekil 3.16 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=4, H/R=1.5).



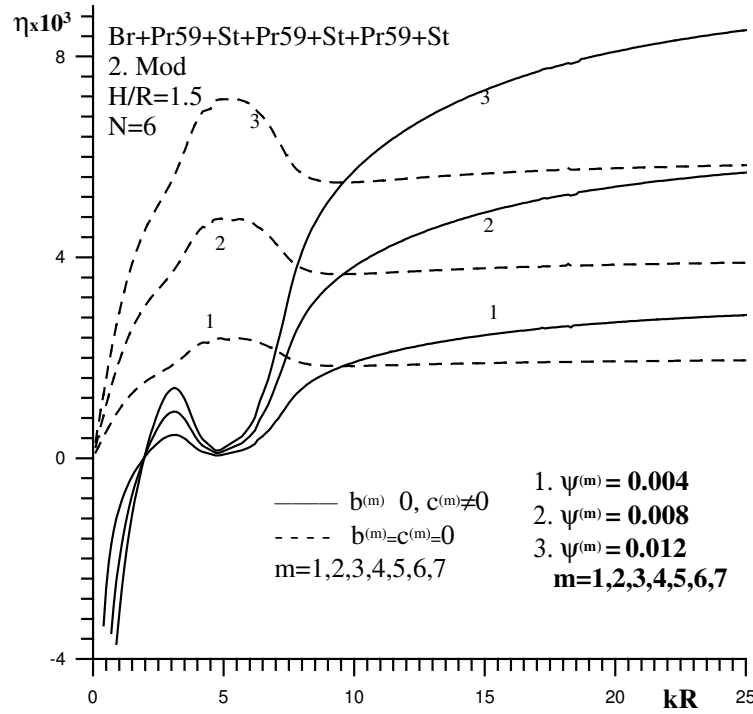
Şekil 3.17 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=6, H/R=1.5).



Şekil 3.18 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=2, H/R=1.5).



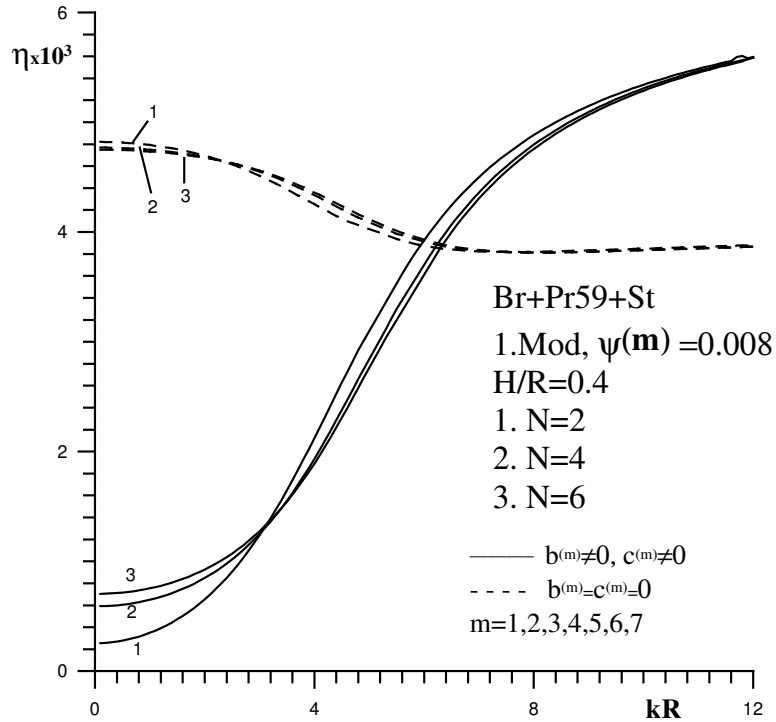
Şekil 3.19 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi (N=4, H/R=1.5).



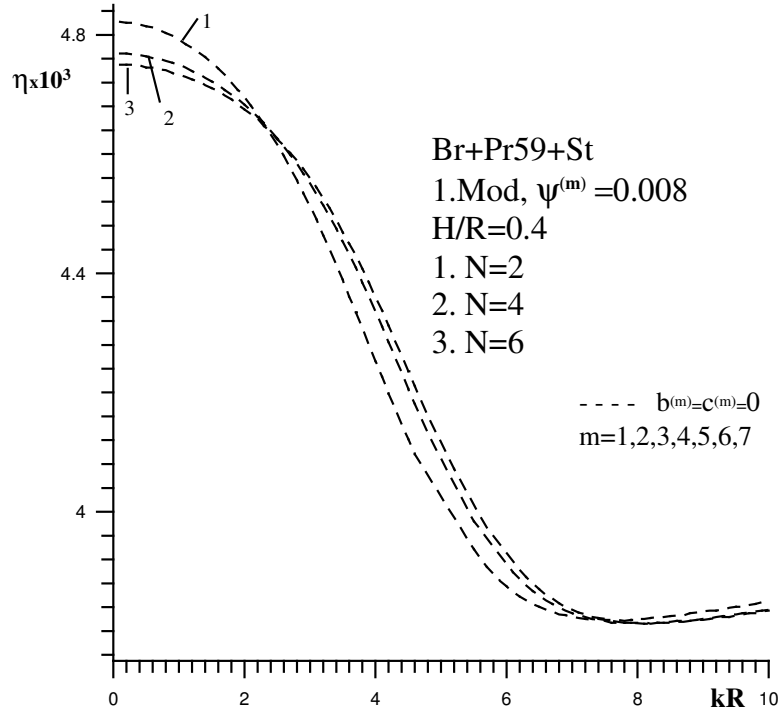
Şekil 3.20 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına öngerilmelerin etkisi ($N=6$, $H/R=1.5$).

Şekil 3.2 de $H/R=0.4$ için öngerilmenin olmadığı durumda çok katlı silindirde yayılan burulma dalgalarının ilk dört modu verilmiştir. Şekil 3.3-Şekil 3.20’ de verilen sayısal sonuçlarda $H/R=0.4$, 1.0 ve 1.5 alınarak (Toplam kalınlık (H) sabit tutularak) içi dolu Bronz silindir üzerine sırasıyla Pirinç59 ve Çelik’ten içi boş silindirler yerleştirilerek 2, 4, 6 katmanlı çok katlı silindirlerde birinci ve ikinci moda öngerilmelerin etkisi incelenmiştir. Birinci mod için; I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. İkinci mod için, I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça faz hızı’da artmaktadır. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Öngerilmenin değeri arttıkça, $kR < (kR)^*$ için faz hızının azaldığı ve $kR > (kR)^*$ için faz hızının arttığı sonucuna ulaşılmıştır.

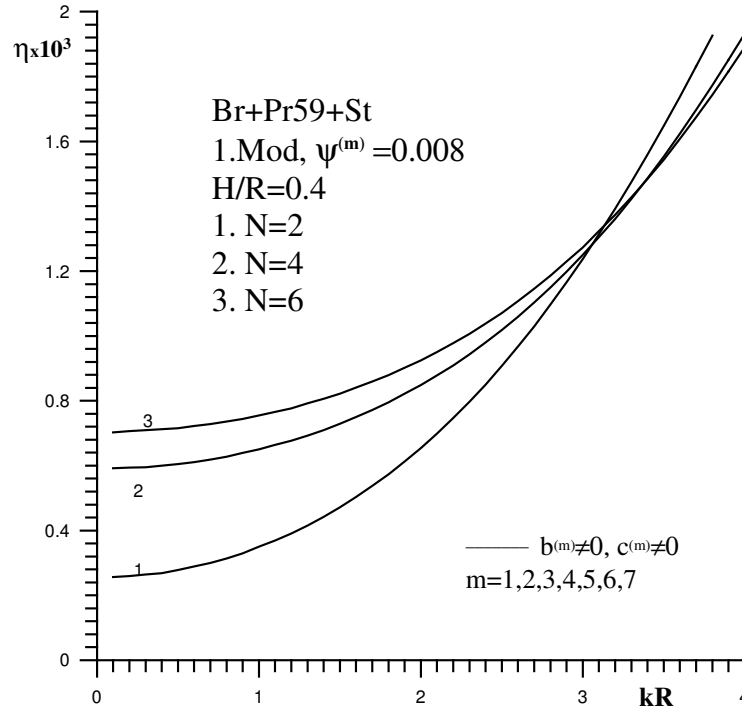
Şekil 3.21a, Şekil 3.21b ve Şekil 3.21c’de öngörilmeli çok katlı silindirde katman sayısının artmasının dalga yayılım hızına etkisi birinci mod için gösterilmiştir. Bu şekillerde toplam kalınlık $H/R=0.4$ alınarak ve öngerilme $\Psi^{(m)}=0.008$ alınarak katman sayısı arttırılmıştır. Burada katman kalınlıkları eşit alınmıştır. Bu grafiklerde; I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{I*}$) katman sayısının (N) artmasıyla faz hızının azaldığı, ve belli bir kR değerinden ($kR > (kR)_{I*}$) sonra katman sayısının artmasının faz hızını arttırdığı ve artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. Yani kR ’nin öyle $(kR)_{I*}$ ve $(kR)_{II*}$ değerleri vardır’ki, bu değerlerde $kR = (kR)_{I*}$ ve $(kR)_{II*}$ ’de katman sayısının burulma dalgalarının yayılma hızına etkisi değişmemektedir. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{II*}$) katman sayısının (N) artmasıyla faz hızının arttığı, $kR > (kR)_{II*}$ değerlerinde katman sayısının artmasının faz hızını azalttığı ve artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gösterilmiştir.



Şekil 3.21a Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$ $\Psi^{(m)}=0.008$).

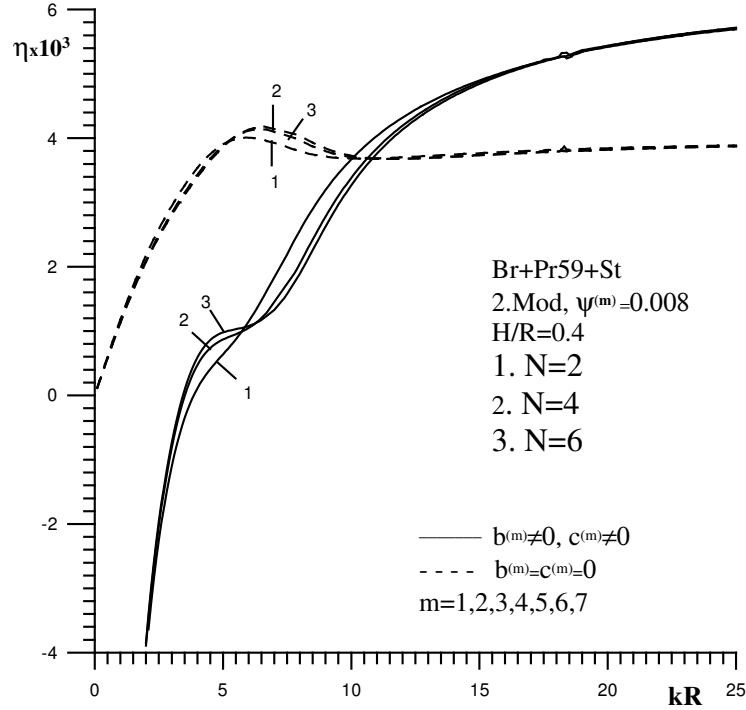


Şekil 3.21b Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$ $\Psi^{(m)}=0.008$).

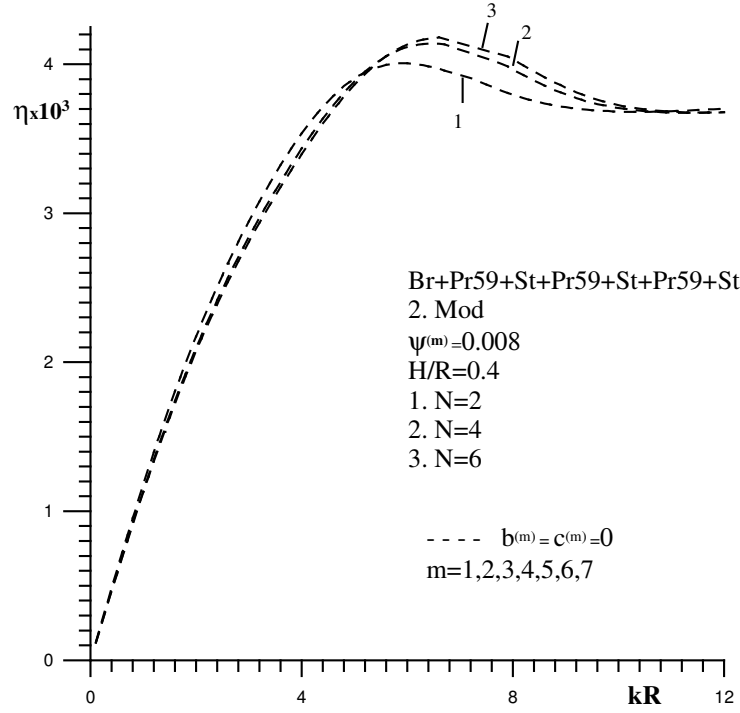


Şekil 3.21c Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$ $\Psi^{(m)}=0.008$).

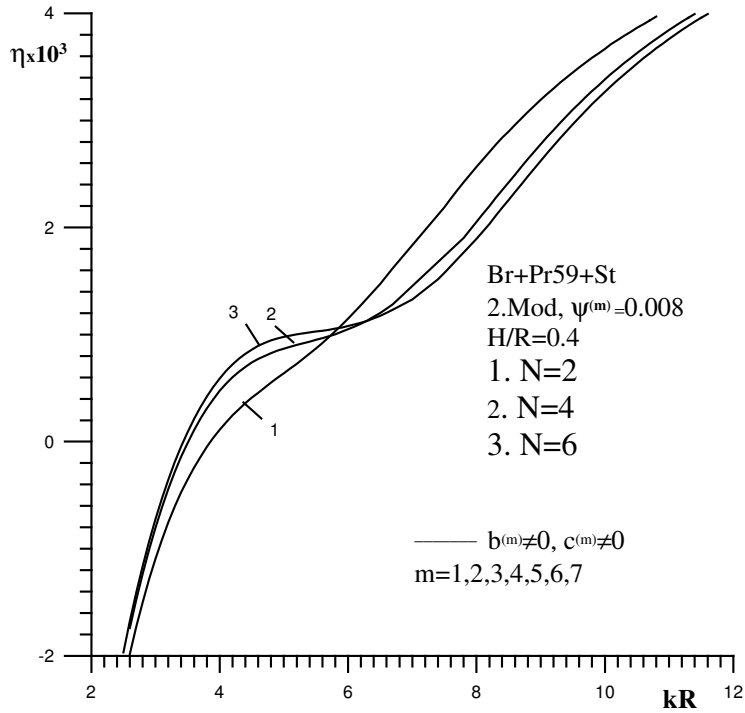
Şekil 3.22a, Şekil 3.22b ve Şekil 3.22c öngörümeli çok katlı silindirde katman sayısının artmasının dalga yayılım hızına etkisi ikinci mod için gösterilmiştir. Bu şekillerde toplam kalınlık $H/R=0.4$ alınarak ve öngörilme $\Psi^{(m)}=0.008$ alınarak katman sayısı arttırılmıştır. Burada katman kalınlıkları eşit alınmıştır. Bu grafiklerde; I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{I*}$) katman sayısının (N) artmasıyla faz hızının azaldığı, $kR > (kR)_{I*}$ değerlerinde katman sayısının artmasının faz hızını arttırdığı ve artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{II*}$) katman sayısının (N) artmasıyla faz hızının arttığı, $kR > (kR)_{II*}$ değerlerinde katman sayısının artmasının faz hızını azalttığı ve artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gösterilmiştir. Büyük kR değerlerinde (saturasyon bölgesinde), öngörilmelerin faz hızına etkisinin II. durumdaki değeri, I. durumdaki değerinden daha büyüktür.



Şekil 3.22a Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$ $\Psi^{(m)}=0.008$).

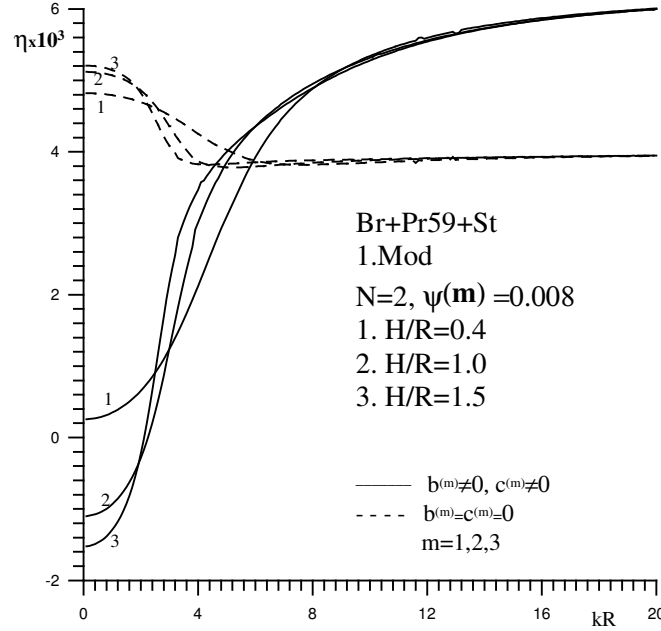


Şekil 3.22b Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$ $\Psi^{(m)}=0.008$).

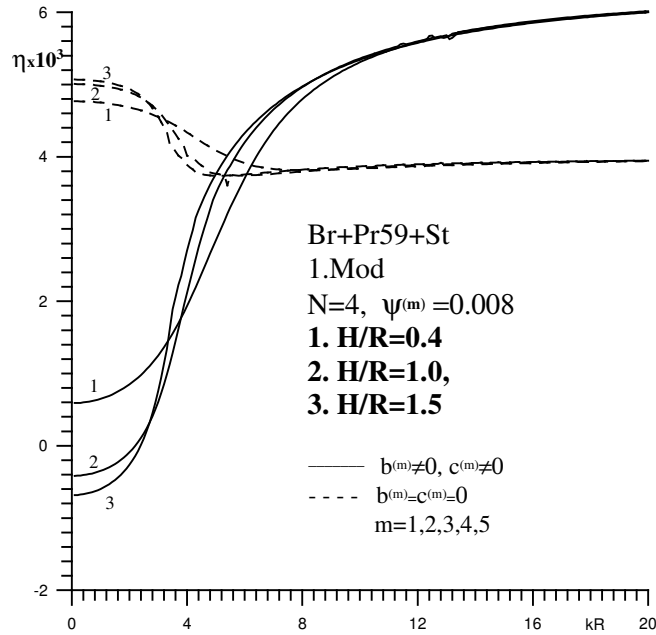


Şekil 3.22c Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızına katman sayısının etkisi ($H/R=0.4$ $\Psi^{(m)}=0.008$).

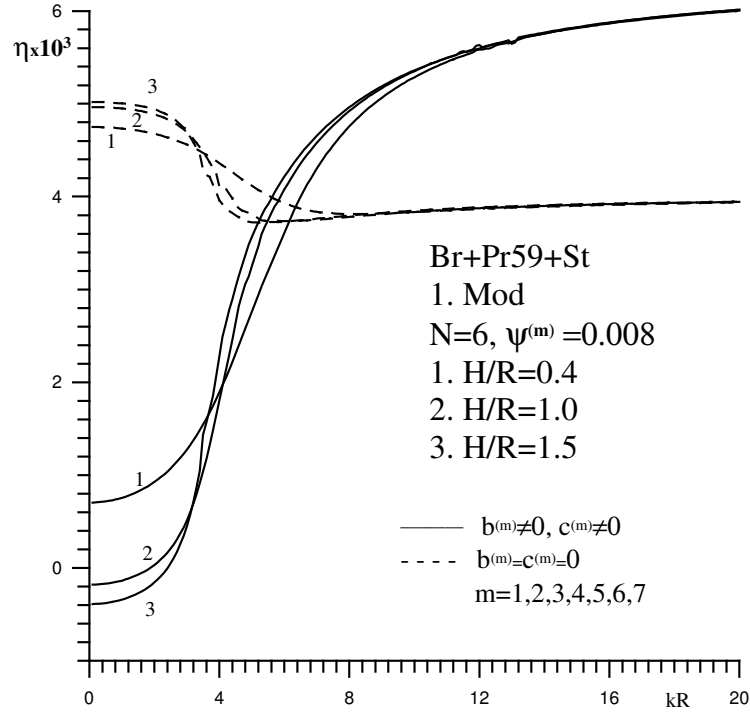
Bu kısımda ön gerilme sabit ($\Psi^{(m)}=0.008$) tutularak ve aynı katman sayısı ($N=2, 4, 6$) için toplam kalınlığın değişiminin dalga yayılımına etkisi incelenecektir.



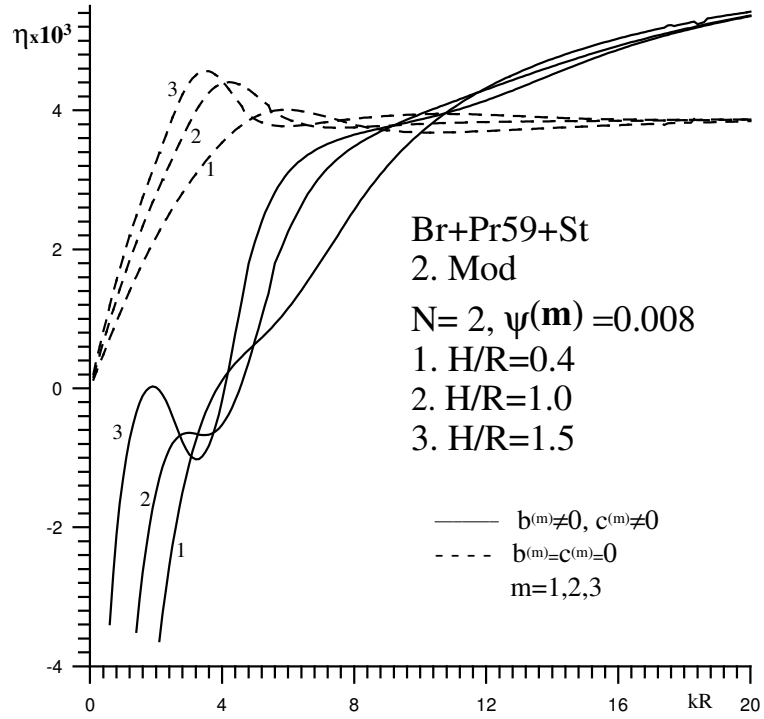
Şekil 3.23 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=2, \Psi^{(m)}=0.008$).



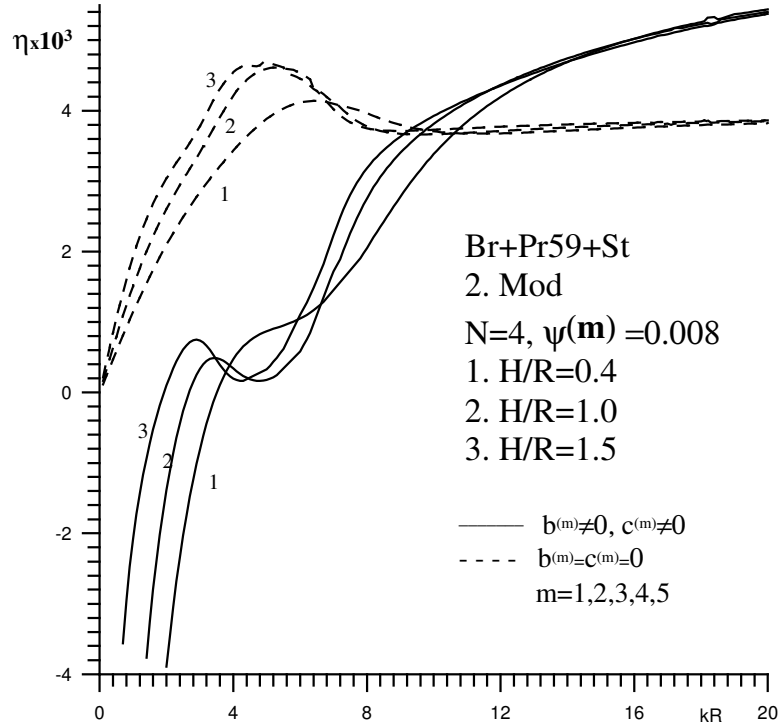
Şekil 3.24 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi ($N=4, \Psi^{(m)}=0.008$).



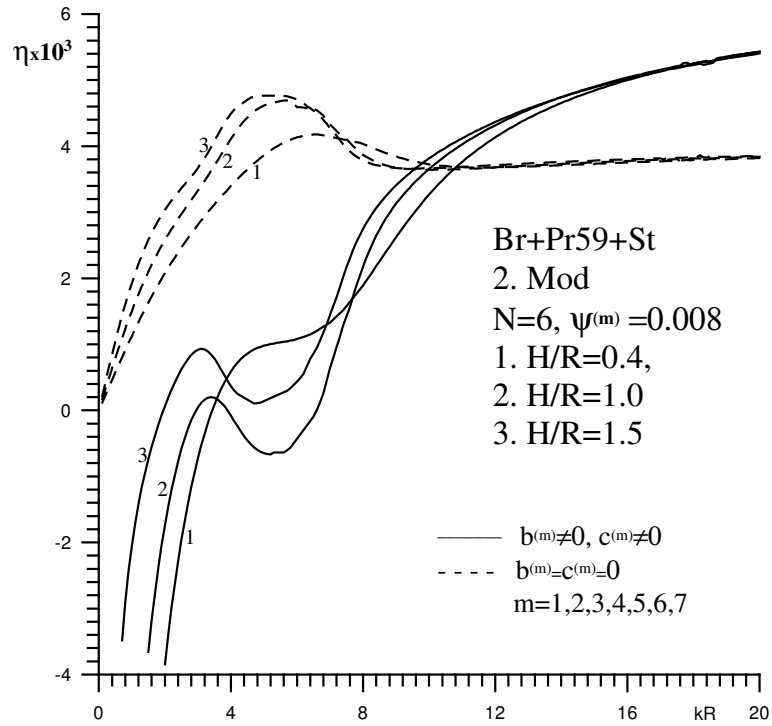
Şekil 3.25 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki birinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi (N=6, $\Psi^{(m)}=0.008$).



Şekil 3.26 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi (N=2, $\Psi^{(m)}=0.008$).



Şekil 3.27 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi (N=4, $\Psi^{(m)}=0.008$).



Şekil 3.28 Bronz-Pirinç59-Çelik malzemelerinden oluşan çok katlı silindirdeki ikinci mod dalga yayılım hızının toplam kalınlığa (H/R) bağlı değişimi (N=6, $\Psi^{(m)}=0.008$).

Şekil 3.23-Şekil 3.25’de öngerilme ve katman sayısı sabit tutularak çok katlı silindirdeki dalga yayılımına toplam kalınlık değişiminin etkisi birinci mod için verilmektedir. Bu şekillerde katman sayısı $N= 2, 4, 6$ ve öngerilme $\Psi^{(m)}=0.008$ alınarak toplam kalınlık arttırılmıştır. Bu grafiklerde; I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{I*}$) toplam kalınlığın artmasıyla faz hızının arttığı, $kR > (kR)_{I*}$ değerlerinde toplam kalınlığın artmasının faz hızını düşürdüğü ve artan kR değerleriyle faz hızının azaldığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{II*}$) toplam kalınlığın artmasıyla faz hızının azaldığı, $kR > (kR)_{II*}$ değerlerinde toplam kalınlığın artmasının faz hızını arttırdığı ve artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gösterilmiştir

Şekil 3.26-Şekil 3.28’de öngerilme ve katman sayısı sabit tutularak çok katlı silindirdeki dalga yayılımına toplam kalınlık değişiminin etkisi ikinci mod için verilmektedir. Bu şekillerde katman sayısı $N= 2, 4, 6$ ve öngerilme $\Psi^{(m)}=0.008$ alınarak toplam kalınlık arttırılmıştır. Bu grafiklerde, I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$, kesikli çizgiler) küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{I*}$) toplam kalınlığın artmasıyla faz hızının arttığı, $kR > (kR)_{II*}$ değerlerinde toplam kalınlığın artmasının faz hızını düşürdüğü ve artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gözlemlenmiştir. II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$, sürekli çizgiler) ise küçük kR değerlerinde ($kR < (kR)_{II*}$) toplam kalınlığın artmasıyla faz hızının azaldığı, $kR > (kR)_{II*}$ değerlerinde toplam kalınlığın artmasının faz hızını arttırdığı ve artan kR değerleriyle faz hızının arttığı ve bir noktadan sonra saturasyona ulaştığı gösterilmiştir.

4 SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ

Tezde yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

1. Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÜDEDYT) denklemleri uygulanarak Murnaghan potansiyeli ile belirlenen lineer olmayan elastik malzemeden oluşmuş öngerilmeli bileşik, içi boş bileşik ve çok katlı silindirlerde burulma dalgalarının yayılımına ait problemin matematiksel formülasyonu yapılmış ve aranan büyüklüklerin analitik ifadeleri elde edilmiştir. Bu ifadeler uygulanarak dispersiyon denklemleri elde edilmiştir.
2. Öngerilmeli bileşik silindir ve içi boş bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızının $kR \rightarrow 0$ 'daki analitik ifadeleri elde edilmiştir. Bu ifadeler malzeme özellikleri Murnaghan potansiyeli ile verilen lineer olmayan malzemeler için yapılmış ve bunun özel durumu olarak 3.mertebeden elastisite sabitlerinin $b^{(m)} = c^{(m)} = 0$ alınmasıyla elde edilen öngerilmeli lineer elastik malzemelerin burulma dalgalarının birinci modunun faz hızının $kR \rightarrow 0$ 'da asiptotik ifadeleri elde edilmiştir. Bu ifadeler öngerilmelerin gözönüne alınmadığı durumda, bileşik silindirdeki burulma dalgalarının birinci modunun faz hızının $kR \rightarrow 0$ 'daki Armenakas (1965), Reuter (1969), Haines ve Lee (1971), Thurston (1976) makalelerindeki ifadelerle çakışmaktadır.
3. Dispersiyon denklemlerinin sayısal çözümü için uygun algoritmalar geliştirilmiş ve Fortran programlama dili kullanılarak PC aracılığıyla sayısal incelemeler yapılmıştır.
4. Yapılan sayısal algoritmayı test etmek amacı ile bileşik silindir için Armenakas (1970) ve Thurston (1976) ve içi boş bileşik silindir için Armenakas (1971) makalelerinde incelenmiş durumlar tekrar ele alınıp, bu çalışmalardaki mekanik ve geometrik parametreler için dispersiyon diyagramları tezde geliştirilmiş sayısal algoritma uygulanarak tekrar elde edilmiş ve öngerilmeler için geliştirilmiştir.
5. Sayısal incelemenin yapıldığı malzemelerin fiziksel özellikleri Çizelge 2.1' de verilmektedir. Bu malzemeler için elde edilen sonuçlar grafikler halinde gösterilmiştir. Bu sonuçlardan yararlanarak aşağıdaki açıklamaları yapabiliriz.

-Lineer elastik malzemeler için bileşik, içi boş bileşik ve çok katlı silindirlerde, öngerilmelinin burulma dalgalarının yayılım hızını arttırdığı, malzeme özellikleri Murnaghan potansiyeli ile verilen lineer olmayan elastik malzemeler için ise öngerilmelinin burulma dalgalarının yayılım

hızına etkisi seçilen malzemelerin 3.mertebeden elastisite sabitlerinin ($b^{(m)}$, $c^{(m)}$) değerine bağlıdır.

-Seçilen malzemeler için, bileşik, içi boş bileşik ve çok katlı silindirlerde, malzeme özellikleri Murnaghan potansiyeli ile verilen lineer olmayan elastik malzemeler için öngerilmenin burulma dalgalarının yayılım hızına etkisinin saturasyon (büyük kR değerlerinde) bölgesindeki değeri, lineer elastik malzemeler için elde edilen değerden daha büyüktür.

-Bileşik silindirlerde, dalga yayılımına öngerilmelerin etkisi (η), birinci mod için, I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) $kR \rightarrow 0$ 'da maksimum değere ulaşırken, II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) büyük kR değerlerinde maksimuma ulaşmaktadır ve ikinci mod için I. durumda ($b^{(m)} = c^{(m)} = 0$) belli bir kR değerinde maksimum değere ulaşırken, II. durumda ($b^{(m)} \neq 0$ ve $c^{(m)} \neq 0$) büyük kR değerlerinde maksimuma ulaşmaktadır.

Tezde yapılan bilimsel araştırmalar ve elde edilen sonuçlar tahribatsız öngerilme belirlenmesinde (Guz (2001), Guz ve Makhort (2000)) ve üçüncü mertebeden elastisite sabitlerinin bulunmasında (Chiroiu v.d.(1997)) geniş bir biçimde uygulama alanı bulabilir. Yapılan araştırmalarda elde edilen sonuçlar Guz (2006), Guz, A.N. ve Guz, I.A. (2006) ve Zhuk, Ya A. ve Guz, I.A. makalelerinde verilen kısıtlamalar gözönüne alınarak nano kompozitlere uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S.D. (2006 a), "On the Dynamical Problems of the Elastic Body with Initial (Residual) Stresses", *Sigma Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi*, 3: 1-45
- Akbarov, S.D. (2006 b), "The Influence of the Third order Elastic Constants on the Dynamical interface Strees Field in a Half-space Covered with a Pre-strechd Layer", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41: 417-425
- Akbarov, S.D. (2006 c), "Dynamical (time-harmonic) Axisymmetric Interface Stress Field in the Finite Pre-strained Half-space Covered with the Finite Pre-stretched Layer", *International Journal of Engineering Science*, 44 : 93-112
- Akbarov, S.D. (2006 d), "On the Diynamical Axisymmetric Stress Field in the Finite Pre-stretched Bilayered Slab Resting on the Rigid Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, 294: 221-237
- Akbarov, S.D. (2006 e), "Frequency Response of the Axisymmetrically Finite Pre-stretched Slab from Incompressible Functionally Graded Material on a Rigid Foundation", *International Journal of Engineering Science*, 44: 484-500
- Akbarov, S.D. ve Guz, A. N. (2004), "Axisymmetric Longitudinal Wave Propagation in Pre-stressed Compound Circular Cylinders", *International Journal of Engineering Science*, 42: 769–791
- Akbarov, S.D. ve Ozisik, M. (2003), "The Influence of the Third order Elastic Constants to the Generalized Rayleigh Wave Dispersion in a Pre-stressed Stratified half-plane" *International Journal of Engineering Science*, 41: 2047–2061
- Akbarov, S.D. ve Ozisik, M. (2004), "Dynamic Interaction of a Prestressed Nonlinear Elastic Layer and a Half-plane", *International Applied Mechanics*, 40(9): 1056-1063
- Akbarov, S.D. ve Ozaydin, O. (2001 a), "Lamb's Problem for an Initially Stressed Stratified Half-plane", *International Applied Mechanics*, 37(10): 1363-1367
- Akbarov, S.D. ve Ozaydin, O. (2001 b), "The Effect of Initial Stresses on Harmonic Stress Fields Within the Stratified Half-plane", *Eur.. Journal of. Mechanics. A/Solids*, 20: 385–396
- Akbarov, S.D., Emiroglu, I. ve Tasci ,F. (2005), "The Lamb's Problem for a Half-space Covered with the Pre-stretched Layer" *International Journal of Mechanical Sciences*, 47: 1326–1349
- Armenakas, A.E. (1965), "Torsinal Wave in Composite Rods", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 38: 439-446
- Armenakas, A.E. (1970), "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Rods", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 47: 822-837
- Armenakas, A.E ve Keck, H.E. (1970), "Harmonic Nonaxisymmetric Waves with Short Wavelengths Propagating in Composite Rods", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 48: 1160-1169
- Armenakas, A.E. (1967), "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular-Cylindrical Shells. I: Theoretical Investigation", *AIAA Journal*, 5: 740-744
- Armenakas, A.E. (1971), "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Shells. Part II: Numerical Investigation", *AIAA Journal*, 9: 599-605
- Biot, M.A. (1940), "The influence of initial stress on elastic waves", *Journal of Applied Physics*, 11(8): 522-530

- Biot, M. A. (1965), "Mechanics of Incremental Deformation", New York: Wiley.
- Berger, J. R., Martin, P. A. ve Mc Caffery, S. J. (2000), "Time-harmonic torsional waves in a composite cylinder with an imperfect interface", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107 (3): 1161-1167
- Cai, H. ve Wang, X. (2006), "Effects of initial stress on transverse wave propagation in carbon nanotubes based on Timoshenko laminated beam models", *Nanotechnology*, (17): 45-53
- Chadwick, P. ve Yarvis, D.A. (1979), "Interfacial Waves in a Pre-strained Neo-Hookean body, I:biaxial states of strain", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 32: 387-399
- Chadwick, P. ve Yarvis, D.A. (1979), "Interfacial Waves in a Pre-strained Neo-Hookean Body, II: Triaxial States of Strain", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 32: 401-418
- Chiroiu, V., Delsant, P.P., Munteanu, L., Rugina, C. ve Scalerandi, M. (1997), "Determination of the Second- and Third-Order Elastic Constants in Al from the Natural Frequencies", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(1): 193-198
- Demiray H. ve Suhubi E.S. (1970), "Small Torsional Oscillations of an Initially Twisted Circular Rubber Cylinder", *International Journal of Engineering Science*, 8: 19-30
- Dowaik, M.A. ve Ogden, R.W. (1991), "Interfacial Waves and Deformations in Pre-stressed Elastic Media", *Proceedings of the Royal Society of London*, A433: 313-328
- Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S. (1975a), "Elastodynamics, Volume I, Finite Motions" Academic Pres, New York
- Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S. (1975b), "Elastodynamics, Volume II, Linear Theory" Academic Pres, New York
- Graff, K.F. (1991), "Wave Motion in Elastic Solids", Dover Publication, New York
- Guz, A.N. (1986 a), "Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses, I. General Theory", Kiev, Naukova Dumka, (Rusça)
- Guz, A.N. (1986 b), "Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses, II. Propagation Laws", Kiev, Naukova Dumka, (Rusça)
- Guz, A.N. (2004), "Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses", Kiev, A.C.K. (Rusça)
- Guz A.N. (2001), "On Foundation of Non-destructive Method of Determination of Three-Axial Stresses in Solids", *International Applied Mechanics*, 37: 78-84
- Guz, A.N. (2002), "Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses", *International Applied Mechanics*, 38(1): 35-77
- Guz, A. N. ve Makhort, F. G. (2000), "The Physical Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Stress Analysis of Solids", *International Applied Mechanics*, 36(9): 3-34
- Guz, A.N. (2006), "Three-Dimensional Theory of Stability of a Carbon Nanotube in Matrix" *International Applied Mechanics*, 42(1): 19-31
- Guz, A.N. ve Guz, I.A. (2006), "On Models in the Theory of Multiwalled Carbon Nanotube in Matrix", *International Applied Mechanics*, 42(6): 617-628
- Green, A.E. (1961), "Torsional Vibrations of an Initially Stressed Circular Cylinder," In "Problems of Continuum Mechanics", (Muskhelishvili Anniversary Vol.) Society for

Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, Pennsylvania, pp. 148–154

Haines D.W. ve Lee, P.C.Y. (1971), “Axially Symmetric Torsional Waves in Circular Composite Cylinders”, *Journal of Applied Mechanics*, 38: 1042-1044

Haines D.W. ve Lee, P.C.Y. (1971), “Approximate Theory of Torsional Wave Propagation in Elastic Circular Composite Cylinders”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 49(1): 211-219

Kaul, R.K., Shaw, R.P. ve Muller, W. (1981), “Torsional Waves in an Axially Homogeneous Bimetallic Cylinder”, *International Journal of Solids and Structures*, 17: 379-394

Kudlicka, J. (2006), “Dispersion of Torsional Waves in Thick-Walled Transversely Isotropic Circular Cylinder of Infinite Length”, *Journal of Sound and Vibration*, 294: 368-373

Keck, H.E. ve Armenakas, A.E. (1971), “Dispersion of Axially Symmetric Waves in Three-Layered Elastic Shells”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 49: 1511-1520

Kleczewski, D. ve Parnes, R. (1987), “Torsional Dispersion Relation in a Radially Elastic Medium”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 81(1): 30-36

Love, A.E.H. (1944), “*Mathematical Theory of Elasticity*”, Dover Publication, New York

Miklowitz, J. (1960), “Recent Developments Elastic wave propagation”, *ASME Applied Mechanics Review*, 13 (12): 865-878

Murnaghan, F.D.(1951), “*Finite Deformation of an Elastic Solid*”, John Wiley&Sons, inc.

Ogden, R.W. ve Sotiropoulos, D.A. (1998), “Reflection of Plane Waves From the Boundary of a Pre-stressed Compressible Elastic Half-space”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 61: 61-90

Ozisk M. ve Akbarov S.D. (2003), “Rayleigh Wave Propagation in a Half-plane Covered with Prestressed Layer Under Complete and Incomplete Interfacial Contact”, *Mechanics of Composite Materials*, 39(2): 183-188

Parnes, R. (1982), “Torsional Dispersion Relation of Waves in an Infinitely Long Clad Cylindrical Rod”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 71(6): 1347-1351

Pao, Y.H. (1983), “Elastic Waves in Solids”, *Journal of Applied Mechanics*, 50: 1152-1164

Reuter, R. C. (1969), “First-branch Dispersion of Torsional waves in Bimaterial Rods”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 46: 821-823

Rogerson, G.A. ve Sandiford , K. J. (2000), “Asymptotic Representations of the Dispersion Relation for two-ply, Pre-stressed Incompressible Elastic Laminate”, *Acta Mechanica*, 143: 179-201

Rogerson, G.A. ve Sandiford, K.J. (2000), “The Effect of Finite Primary Deformations on Harmonic Waves in Layered Elastic Media”, *International Journal of Solids and Structures*, 37: 2059-2087

Rogerson, G.A. ve Sandiford, K. J. (2002), “Some Comments on the Dispersion Relation for Periodically Layered Pre-stressed Elastic Media”, *International Journal of Engineering Science*, 40: 23-49

Suhubi, E.S. (1965), “Small Longitudinal Vibration of an Initially Stretched Circular Cylinder”, *International Journal of Engineering Science*, 2: 509-517

Tang, S. (1967), “Wave Propagation in Initially-Stressed Elastic Solids”, *Acta Mechanica*, 4(1): 92-106

Thurston R.N. (1976), "Torsional Acoustic Modes in Clad Rods", IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics", SU-23(3): 154-161

Thurston R.N. (1978), "Elastic Waves in Rods and Clad Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 64(1): 1-37

Thurston R.N. ve Brugger, K. (1964), "Third-order Elastic Constants and Velocity of Small Amplitude Elastic Waves in Homogeneously Stressed Media", Physical Review, 133(6A): A1604-A1610

Watson, G.N. (1958), "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge

Zhuk, Ya A. ve Guz, I.A. (2006), "Influence of Prestress on the Velocities of Waves Propagating Normally to the Layers of Nanocomposites", International Applied Mechanics, 42(7): 729-743

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	09.11.1965	
Doğum yeri	Mazgirt/TUNCELİ	
Lise	1979-1982	Kalan Lisesi
Lisans	1982-1986	İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü
Yüksek Lisans	1986-1989	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans	1994-1997	Illinois Institute of Technology, Graduate School of Science, Physics Dept., Chicago, IL, USA
Doktora	1992-1993 2000-2001 2005-.....	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1987-1993	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Ede. Fakültesi Fizik Bölümü Araştırma Görevlisi
1998-1999	MEF Okulları, Fizik Öğretmeni, İstanbul
1999-2000	Beykent Okulları, Fizik Öğretmeni, İstanbul
2000-2003	Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi Fizik Bölümü Araştırma Görevlisi