

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYARLAMALI OPTİK SİSTEMLER İÇİN SABİT DERECELİ
H SONSUZ ALT OPTİMAL KONTROLÇÜ
GELİŞTİRİLMESİ

Bilal EROL

DOKTORA TEZİ
Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı
Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Danışman
Doç. Dr. Akın DELİBAŞI

Haziran, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**UYARLAMALI OPTİK SİSTEMLER İÇİN SABİT DERECELİ H SONSUZ
ALT OPTİMAL KONTROLÇÜ GELİŞTİRİLMESİ**

Bilal EROL tarafından hazırlanan tez çalışması 08.06.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Akın DELİBAŞI
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Akın DELİBAŞI, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Şeref Naci ENGİN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi İlker ÜSTOĞLU, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Janset DAŞDEMİR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Akın DELİBAŞI sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Uyarlamalı Optik Sistemler için Sabit Dereceli H Sonsuz Alt Optimal Kontrolcü Geliştirilmesi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Bilal EROL

İmza



Bu alışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir, Proje No: 118E224.

*Bu tez babam Mehmet Reşit EROL
ile annem Zübeyde EROL'a adanmıştır*



TEŞEKKÜR

Doktora tezimi sonlandırmakla birlikte lisansüstü eğitime başlama nedenlerimden biri olan kariyerime akademik katkı sağlama hedefine ulaşmanın mutluluğunu yaşıyorum. Bununla birlikte tez çalışmam sırasında edindiğim bilgi, birikim ve tecrübelerin çalışma hayatım boyunca bana katkı sağlayacağından eminim.

Tezin oluşumunda en büyük katkıya sahip, dersler dâhil her an yanımda olan değerli hocama, doktora eğitimi boyunca elde ettiğim tüm başarılarımın ortağı olan danışmanım sevgili hocam Doç. Dr. Akın DELİBAŞI'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez sürecinde birlikte çalışma fırsatı bulduğum ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli arkadaşım Berk ALTINER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan başta eşim Ebru KAYA EROL olmak üzere aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

Bilal EROL

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	viii
KISALTMA LİSTESİ	ix
ŞEKİL LİSTESİ	x
TABLO LİSTESİ	xiii
ÖZET	xiv
ABSTRACT	xvi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	8
1.3 Hipotez	10
2 ÇOK GİRİŞ ÇOK ÇIKIŞ (ÇGÇÇ) SİSTEMLER İÇİN ÇOK TERİMLİ TABANLI SABİT DERECEDE $\mathcal{H}_\infty$ KONTROLCÜ TASARIMI	11
2.1 Problemin Tanımı	15
2.2 İç Konveks Kestirim İle Tasarım	21
2.2.1 $\mathcal{H}_\infty$ Kontrol Probleminin ÇG-ÇÇ Sistemlere Genişletilmesi . . .	22
2.3 Geliştirilen ÇG-ÇÇ Yöntemin Uygulanması	24
3 UYARLAMALI OPTİK SİSTEMİN MODELLENMESİ	29
3.1 Dalga Cephesi Algılayıcıları (WFS)	29
3.1.1 Girişim Ölçer (Interferometric) WFS'ler	30
3.1.2 Eğrilik (Curvature) Algılayıcıları	31
3.1.3 Piramit Dalga Cephesi Algılayıcıları	31
3.1.4 Shack-Hartmann Dalga Cephesi Algılayıcısı	31
3.2 Dalga Cephesi Doğrultucu; Deforme Edilebilir Ayna (DM)	33
3.2.1 Deforme Edilebilen Aynaların Sınıflandırılması	34
3.2.2 Deforme Edilebilir Aynanın Modellenmesi	39

4	ATMOSFERİK TÜRBÜLANS MODELİNİN OLUŞTURULMASI	54
4.1	Atmosferik Türbülans Parametreleri	55
4.1.1	C_N^2 Sintilasyon Yapı Sabiti	55
4.1.2	Seeing Etkisi	56
4.1.3	Dış (Outer) ve İç (Inner) Ölçekleri	57
4.2	Atmosferik Türbülans Modelleri	58
4.3	Atmosferik Türbülansın Zamansal Cevabının Modellenmesi	61
4.3.1	Sistem Kestirim Teknikleri İle Atmosferik Türbülansın Modellenmesi:	61
4.3.2	Zernike Polinomu ile Atmosferik Türbülansın Modelenmesi: . .	61
5	UYARLAMALI OPTİK SİSTEMLER İÇİN $\mathcal{H}_\infty$ KONTROLCÜ TASARIMI	68
5.1	Problemin Tanımı ve $\mathcal{H}_\infty$ Kontrolcü Tasarımı	70
5.2	Simülasyon Sonuçları	73
6	SONUÇ VE ÖNERİLER	88
	KAYNAKÇA	90
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	99

SİMGE LİSTESİ

ρ	Ayna Yüzeyinin Noktasal Yoğunluğu
N_a	Ayna Yüzeyi Altındaki Eyleyici Sayısı
M_{xy}, M_{yx}	Burulma Momentleri
M_x, M_y	Eğilme Momentleri
r_0	Fried Parametresi
τ_{xy}, τ_{yx}	Kayma Gerilmeleri
F_x, F_y	Kayma Kuvvetleri
$\otimes$	Kronecker Çarpımı
σ_x, σ_y	Normal Gerilmeler
C_N^2	Sintilasyon Yapı Sabiti
$\mathcal{H}_\infty$	Sonsuz Norm
$\dagger$	Sözde Ters

KISALTMA LİSTESİ

AO	Adaptive Optic
CCD	Charged Coupled Device
ÇGÇÇ	Çok Giriş Çok Çıkış
DM	Deformable Mirror
DME	Doğrusal Matris Eşitsizliği
FEM	Finite Element Method
FWBMR	Frequency Weighted Balanced Model Reduction
FWHM	Full Width at Half Magnitude
HANSO	Hybrid Algorithm for Non-Smooth Optimization
MFDM	Magnetic Fluid Deformable Mirror
MEMS	Microelectromechanical Systems
MIMO	Multi Input Multi Output
ODE	Ordinary Differential Equation
PDE	Partial Differential Equation
PID	Oransal (Proportional)-İntegral (Integral)-Türevsel (Derivative)
ROWHC	Reduced Order Weighted $\mathcal{H}_\infty$ Controller
SH	Shack Hartmann
SISO	Single Input Single Output
TDA	Tekil Değer Ayrışımı
TGTÇ	Tek Giriş Tek Çıkış
UWHC	Unweighted $\mathcal{H}_\infty$ Controller
WFS	Wave Front Sensor
WHC	Weighted $\mathcal{H}_\infty$ Controller

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1	Işık dalga cephesindeki bozulma	2
Şekil 1.2	Neptün gezegeninin kızılötesi ışıkla, AO sistem kullanılmadan ve AO sistem kullanılarak görüntülenmesi (Claire E. Max, UCSC)	3
Şekil 1.3	Uranüs gezegeninin Hubble Uzay Teleskobu ve AO ile desteklenmiş Keck Teleskobu kullanılarak görüntülenmesi (Claire E. Max, UCSC)	3
Şekil 1.4	Dalga cephesinin DM ile düzeltilmesi	4
Şekil 1.5	Uyarlamalı optik sistemlerin temel yapısı	5
Şekil 1.6	Klasik AO Kontrol Sistemi	5
Şekil 1.7	ÇGÇÇ yapıdaki merkezi kontrolcü kurgusu ve dağıtılmış kontrolcü kurgusu	7
Şekil 2.1	$\mathcal{D}$ -kararlılık bölgesi	18
Şekil 2.2	Standart P sistemi ile kontrolör bağlantısı	22
Şekil 3.1	Shack-Hartmann algılayıcısı temel yapısı	33
Şekil 3.2	Bölümlü yüzey formlarındaki DM'ler	34
Şekil 3.3	Sürekli yüzey formlarındaki DM'ler	34
Şekil 3.4	Membran ayna	36
Şekil 3.5	Stacked mirror deforme edilebilen ayna	36
Şekil 3.6	Bimorph deforme edilebilir ayna	37
Şekil 3.7	ThorLabs firmasının üretmiş olduğu DMP40 ve eyleyici yerleşimi	38
Şekil 3.8	DMP40'da piezoya uygulanan gerilimle aynanın aldığı form	38
Şekil 3.9	3228 eyleyiciye sahip elektromanyetik sürüslü deforme edilebilir ayna	39
Şekil 3.10	ThorLabs firmasının üretmiş olduğu DM140A ve eyleyici yerleşimi	40
Şekil 3.11	Ayna yüzeyi	40
Şekil 3.12	Sonsuz küçük boyutlu $hdx dy$ elemanını etkileyen kayma kuvveti, burulma momenti, eğilme momenti ve dış kuvvetler	40
Şekil 3.13	Dikdörtgensel Sonlu Eleman	47
Şekil 3.14	Köşesinden yukarı yönde kuvvet uygulanmasıyla DM'nin aldığı form	50
Şekil 3.15	Köşesinden yukarı yönde kuvvet uygulanmasıyla DM'nin x eksenindeki eğimin aldığı form	51
Şekil 3.16	Köşesinden yukarı yönde kuvvet uygulanmasıyla DM'nin y eksenindeki eğimin aldığı form	51

Şekil 3.17 DM ile oluşturulan Tip/Tilt bozulma modu	52
Şekil 3.18 DM ile oluşturulan Focus bozulma modu	52
Şekil 3.19 DM ile oluşturulan Astigmatizm bozulma modu	53
Şekil 4.1 Kolmogorov Türbülans Modelinde Enerji yayılımı (Claire E. Max, UCSC)	55
Şekil 4.2 AO ile desteklenen ve desteklenmeyen noktasal kaynağın ışık şiddeti (Claire E. Max, UCSC)	56
Şekil 4.3 Işık şiddeti dağılımı	57
Şekil 4.4 Farklı türbülans modellerinin güç spektrumları	60
Şekil 4.5 ANSI8028 standardı çerçevesinde Zernike Polinomlarının tanımladığı bozulmalar	62
Şekil 4.6 Elde edilen ilk 5 Zernike katsayısının zamana göre değişimi	67
Şekil 4.7 8. saniyede elde edilen Zernike katsayılarıyla oluşturulan türbülans yüzeyi	67
Şekil 5.1 Standart <i>P-K</i> konfigürasyonu	71
Şekil 5.2 AO sistem bileşenleri	72
Şekil 5.3 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin tip tilt modlarına karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	74
Şekil 5.4 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin focus moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	75
Şekil 5.5 Açık çevrim (kırmızı),WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin astigmatizm moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	75
Şekil 5.6 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin coma moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	76
Şekil 5.7 Açık çevrim (kırmızı),WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin trefoil moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	76
Şekil 5.8 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin spherical moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	77
Şekil 5.9 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin ikincil derece astigmatizm moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	77
Şekil 5.10 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin quadrafoil moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü	78
Şekil 5.11 Türbülans yüzey şekli	79
Şekil 5.12 WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli	79
Şekil 5.13 ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli	80
Şekil 5.14 Tip/Tilt modlarının ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.21$	81

Şekil 5.15 Tip/Tilt modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$	82
Şekil 5.16 Tip/Tilt modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$	82
Şekil 5.17 Astigmatism ve Focus modlarının ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.69$	83
Şekil 5.18 Astigmatism ve Focus ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.94$	83
Şekil 5.19 Astigmatism ve Focus ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$	84
Şekil 5.20 Koma ve Trefoil modlarının ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.66$	84
Şekil 5.21 Koma ve Trefoil modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.86$	85
Şekil 5.22 Koma ve Trefoil modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.98$	85
Şekil 5.23 Yüksek modlarının ($n = 4$) ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.77$	86
Şekil 5.24 Yüksek modlarının ($n = 4$) ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.94$	86
Şekil 5.25 Yüksek modlarının ($n = 4$) ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$	87

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1	Temel problem için performans sonuçları	25
Tablo 2.2	Süspansiyon sistemi için performans sonuçları	26
Tablo 2.3	Denklem 2.35’de verilen model için performans sonuçları	27
Tablo 2.4	Denklem 2.37’de verilen sistem için performans sonuçları	28
Tablo 4.1	İlk 15 Zernike polinomu	64
Tablo 5.1	1m boyunda alınan DM’nin parametreleri	71
Tablo 5.2	Açık çevrim sistem ile sırasıyla ağırlıklandırılmış ve düşük dereceden sistemler için tasarlanan kontrolcüler altında kapalı çevrim sistemlerin, (CL_{WE}) , (CL_{RO}) , Zernike modlarına karşılık gelen çıkışlarının ve giriş olarak uygulanan sistemin iki normları . .	78

Uyarlamalı Optik Sistemler için Sabit Dereceli H Sonsuz Alt Optimal Kontrolcü Geliştirilmesi

Bilal EROL

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Akın DELİBAŞI

Atmosferik türbülans, optik imalat hataları, ısı kaynaklı bozulmalar görüntüde lekelenmelere, lazer demetinin hedeften sapmasına veya hedefteki tepe ışın yoğunluk değerinin düşmesine sebep olur. Uyarlamalı optik sistemler (Adaptive Optics-AO), türbülans etkisinin azaltılması ve böylece ışınlardaki bozulmaları düzelterek optik sistemlerin etkinliğini arttırmak için kullanılmaktadır. Atmosfer, yapısı gereği içerisinde çeşitli nem ve sıcaklık değerlerine sahip boyutları birbirinden farklı hava baloncukları barındırır. Işın demeti atmosfer içinde ilerlemesiyle kırılma indeksi olarak adlandırılan farklı yapılara sahip değişkenler tarafından kırılıma uğrar.

AO sistemlerin temel bileşenleri deforme edilebilir ayna (DM), dalga cephesi algılayıcısı (WFS) ve kontrol birimidir. Sistemin temel çalışma prensibi, algılama, hesaplama ve etkinleştirme biçimindedir. İlk olarak dalga cephesi DM tarafından karşılanır ve dalga cephesindeki bozulma algılayıcı ile tespit edilir. Daha sonra kontrol birimi de dalga cephesindeki hatayı giderecek şekilde deforme edilebilir aynayı sürer ve aynadan yansıyan dalganın cephesi düzeltilmiş olur. Bu tür sistemlerdeki olması gereken kontrol stratejisi ayna yüzey şeklinin uygun tayini üzerinedir.

Bu çalışmanın amacı, uyarlamalı optik sistemlerin sabit dereceli kontrolcü ile $\mathcal{H}_\infty$ alt-optimal kontrolünü sağlamaktır. Standart optimal $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü derecesinin en az sistem derecesinde olması gerekmektedir. Literatürde bu tipteki kontrolcülere tam dereceli kontrolcüler denmektedir. Bu tasarım kısıtından dolayı nihai kapalı çevrim sistemin derecesi bir kat daha artmaktadır. Mühendisler, yüksek dereceli sistemlerin, parametrelerinde olabilecek değişimlere karşı yüksek duyarlılığa sahip

olmalarından ötürü, tam dereceli kontrolcülerini kullanmaktan kaçınmaktadırlar. Sabit dereceli kontrolcü tasarımıındaki en büyük güçlük de ifade edilen bölgenin konveks olmayan bir formda olmasıdır. Bunun üstesinden gelmek ve önem arz eden frekans aralığına odaklanmak amacıyla model indirgeme tekniklerine (FWBMR) başvurulmuştur. Böylece herhangi bir ağırlıklandırma filtresinin sebep olacağı yüksek dereceden sistemle ile uğraşmak yerine, hedeflenen frekans bölgesinde düşük dereceden kontrolcü gerçekleştirebilecektir. Ağırlıklandırma filtrelerinin kullanımı ile tasarlanan $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü hem çok yüksek dereceden olmakta hem de bu noktalara kontrolcünün odaklanması sağlanmaktadır, halbuki FWBMR sayesinde bu bant genişliğinde elde edilen sistem ile direk bu noktalara odaklanılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Uyarlamalı Optik Sistemler, Sabit-Dereceli Kontrolcü, Alt-Optimal $\mathcal{H}_\infty$ Kontrolcü, MIMO Sistemler, Atmosferik Türbülans



Fixed Order Sub Optimal H Infinity Controller Design For Adaptive Optic Systems

Bilal EROL

Department of Control and Automation Engineering

Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Akın DELİBAŞI

The wavefront aberrations due to the atmospheric turbulence, optical fabrication errors, thermally induced distortions degrade the performance of applications based on imaging, laser beam focusing etc. In order to eliminate the effects of atmospheric turbulence and to enhance the capability of optical systems by actively compensating for aberrations, adaptive optic (AO) systems are used. The atmospheric turbulence phenomenon occurs due to the displacement of the air bubbles in the earth atmosphere which are composed of different humidity and temperature values. The airflows in the atmosphere, the pressure, the wind and many other factors have a significant role for the displacement of air bubbles. When the light beam propagates through the atmosphere, it is refracted by these varying indices which are called the refractive indices. In order to cope with such distortions adaptive optic systems are resorted for a long time. The principal uses for adaptive optics are improving image quality in astronomical telescopes, imaging and tracking rapidly moving space objects, and compensating laser beam distortion through the atmosphere.

The main components of AO systems are the deformable mirror (DM), the wavefront sensor (WFS) and the control unit. The basic operating principle of adaptive optics system is detection, calculation and activation. Firstly, the distorted phase is compensated by the deformable mirror, and WFS measures the error. Then, the control unit enforce DM to take appropriate shape in order to cancel out the phase error. Hence, the main control strategy is to determine the shape of the DM.

The aim of this work is to provide fixed-order $\mathcal{H}_\infty$ sub-Optimal Controller for Adaptive

Optical Systems. The order of standard optimal $\mathcal{H}_\infty$ controller needs to be at least the same as of the system. This type of controller is named as full order controller in the literature. Due to the limitation in design, the final degree of closed loop system is doubled. Engineers, always avoid using high order controller, because high order systems can be highly sensitive to changes in the parameters. The main difficulty in the development of fixed-order controllers is that the associated stability region in the space of coefficients of the closed-loop characteristic polynomial is non-convex in general. In order to cope with this problem and to concentrate on a specific frequency band for disturbance attenuation, Frequency Weighted Balanced Model Reduction (FWBMR) is resorted. The proposed controller design procedure uses the FWBMR for the high order system rather than adding the filters. The purpose of usage of the filters in $\mathcal{H}_\infty$ control is to make the controller focus on predefined frequency band. On the other hand, the FWBMR allows designers to obtain an accurate model in a specific frequency band.

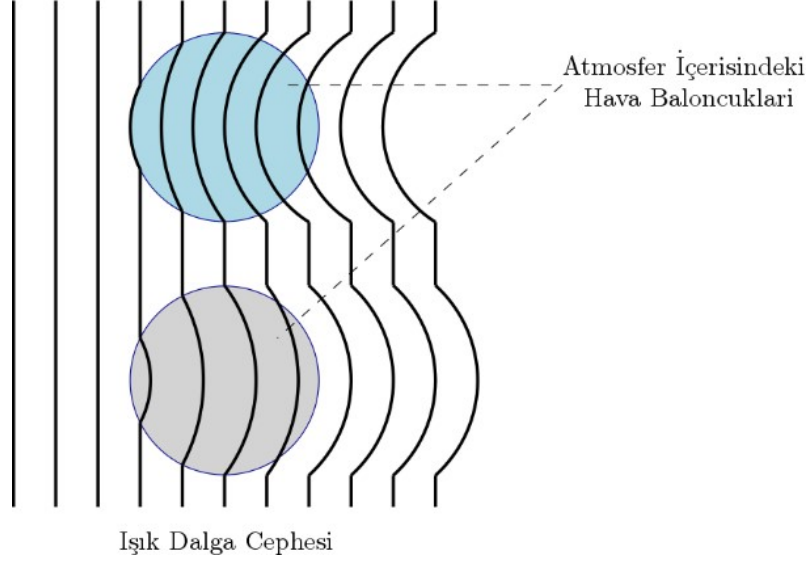
Keywords: Adaptive Optic System, Fixed Order Controller, Sub-Optimal $\mathcal{H}_\infty$ Control, MIMO Systems, Atmospheric Turbulence

1.1 Literatür Özeti

Uyarlamalı optik (Adaptive Optics-AO), ışınlardaki bozulmaları düzelterek optik sistemlerin etkinliğini ve yeteneklerini geliştirmek için kullanılır. Atmosferik türbülans, optik imalat hataları, ısı kaynaklı bozulmalar veya lazer cihaz hataları gibi sapmalar, hedefteki tepe ışın yoğunluk değerinin düşmesine, görüntüde lekelenmelere veya lazer demetinin hedeften sapmasına sebep olur. Atmosferik türbülans etkisi günlük hayatımızda da görülmektedir. Gece yıldızlara bakıldığında görüntünün kırışması, sıcak bölgelerde ufuk boyundaki görüntülerin dalgalanması atmosferik türbülans etkisi sonucu bozulmalara örnektir.

Atmosfer yapısı gereği içerisinde çeşitli nem ve sıcaklık değerlerine sahip boyutları birbirinden farklı hava baloncukları barındırır. Atmosfer içerisindeki hava akışı sebebiyle bu baloncuklar sürekli olarak hareket halindedir. Işık atmosfer içerisinde ilerlerken bu hava baloncukları içerisinde geçerek kırılmaya uğrar. Çeşitli nem ve sıcaklık değerlerine sahip hava kütlelerinin ışığı kırma indisleri de birbirinden farklıdır. Farklı kırılma indisleri sebebiyle atmosfer içerisinde ilerleyen ışığın dalga cephesinde bozulmalar oluşur [1]. Şekil 1.1’de atmosfer içerisinde yer alan farklı kırılma indislerine sahip hava baloncuklarının ışık dalga cephesinde yapmış olduğu bozulmalar gösterilmektedir.

1971 yılında ünlü matematikçi Andrey Nikolaevich Kolmogorov günümüzde kullanılan atmosferik türbülans modellerinin temelini atmıştır. Kolmogorov’un öncü olduğu bu alanda literatürde pek çok türbülans modeli bulunmaktadır. Yüzeyler üzerinde oluşan bozulmaları tanımlamanın en çok tercih edilen yolu bu bozulmaları temel fonksiyonların toplamı şeklinde ifade etmektir. Birim daire üzerinde tanımlı ve birbirine ortogonal olan polinom serilerinden, Zernike polinomları, bu alanda yaygın olarak kullanılmaktadır [2], [3], [4]. Türbülans sebebiyle oluşan yüzeysel bozulmalar sonsuz sayıda Zernike polinomunun toplamı şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca bozulma tanımlanırken kullanılacak Zernike polinomlarının sayısı için bir sınır yoktur. Ancak ilk



Şekil 1.1 Işık dalga cephesindeki bozulma

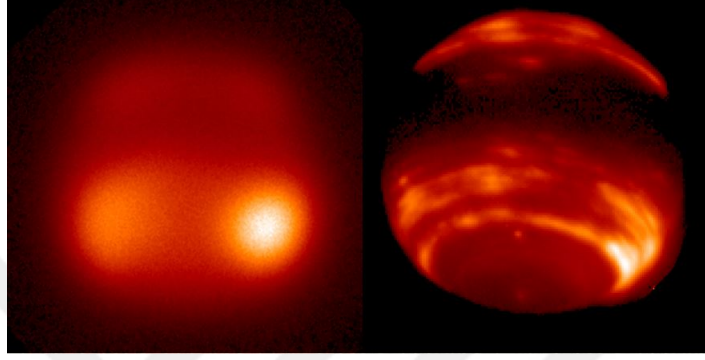
15 Zernike polinom serisi atmosferik türbülansların %92'sini göstermek için yeterlidir.

Bu bozulmaların tamamı uzun yıllardır uyarlamalı optik elemanlar ile çözülmektedir. Uyarlamalı optik sistemler temel olarak görüntü kalitesini arttırmak için büyük çaptaki gözlem teleskoplarında, hızlı hareket eden sistemlerin takibi için hedef takip sistemlerinde ve özellikle haberleşme sistemlerindeki lazer demetinin dağınımını gerçek zamanlı olarak kontrol etmekte kullanılmaktadır. Şekil 1.2 ve 1.3'de, AO sistemlerin astronomideki uygulamaları gösterilmiştir. Bu şekillerde AO ile desteklenmiş sistemin performansı görülmektedir. AO ile donatılmış Keck teleskobu ile elde edilen görüntü, Hubble uzay teleskobundan elde edilene kıyasla daha iyi çözünürlüğe sahiptir. AO sistemlerinin uygulama alanlarını;

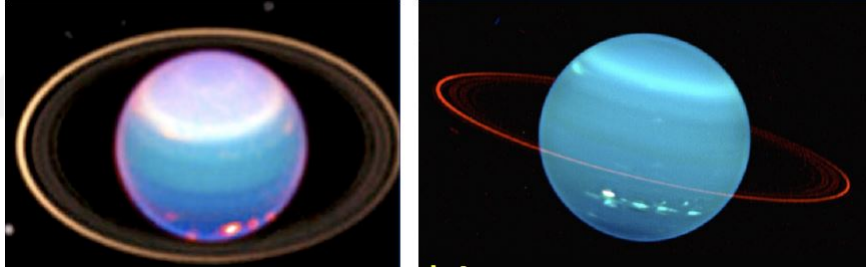
- Astronomi: Yüksek çözünürlükteki yer teleskoplarında,
- Ophtalmoloji: Göz bozukluklarının tanısı ve düzeltilmesinde,
- Lithografi: Zaman değişimi ile oluşan hataları kompanze etmek için,
- Mikroskopi: Canlı hücrelerdeki diffraksiyon endeksinin değişimini kompanze etmek için,
- Uzak mesafe kameraları: Havadaki türbülans etkisinin kompanze edilmesi için,
- Lazerler: Mesafe / güç ilişkisini iyileştirmek için,

olarak sınıflandırabiliriz. Uyarlamalı optik sistem temel olarak 3 parçadan oluşmaktadır. Bunlar; şekil değiştirebilen bir dalga cephesi doğrultucusu çoğunlukla

bu işlem için kullanılan deforme edilebilir ayna (DM), dalga cephesindeki bozulmaları ölçen dalga cephesi algılayıcıları (WFS) ve gelen-giden bilgiyi işleyip ilgili düzeltici sinyali üretilir, bu doğrultuda DM'yi süren kontrol birimidir. Sistemin temel çalışma prensibi, algılama, hesaplama ve etkinleştirme biçimindedir. İlk olarak dalga cephesi DM tarafından karşılanır, ve dalga cephesindeki bozulma da algılayıcı ile tespit edilir. Daha sonra kontrol birimi de dalga cephesindeki hatayı giderecek şekilde deforme edilebilir aynayı sürer ve aynadan yansıyan dalganın cephesi düzeltilmiş olur.



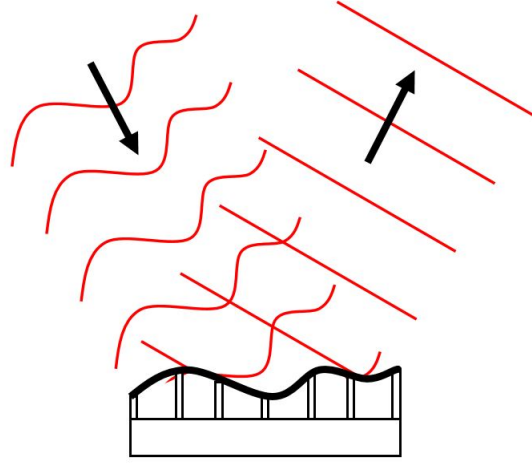
Şekil 1.2 Neptün gezegeninin kızılötesi ışıla, AO sistem kullanılmadan ve AO sistem kullanılarak görüntülenmesi (Claire E. Max, UCSC)



Şekil 1.3 Uranüs gezegeninin Hubble Uzay Teleskobu ve AO ile desteklenmiş Keck Teleskobu kullanılarak görüntülenmesi (Claire E. Max, UCSC)

Şekil 1.4'de dalga cephesinin, deforme edilebilir ayna ile nasıl düzeltilebildiği görülmektedir. Dalga cephesi herhangi bir sebep ile bozulmuş ışık dalgası, yüzeyi bu bozulmuş formu düzeltmek için deforme edilmiş aynaya çarpar ve düzgün bir şekilde yansıtılır.

Tarih boyunca uyarlamalı optik sistemlerin kullanımı teknolojik yetersizlikler sebebiyle kısıtlı kalmıştır. Bu alanda çalışan en başarılı bilim insanları bile bu sistemlerin önemini fark edememiştir. Isaac Newton, 18. yy başlarında yazmış olduğu Opticks adlı eserinde, astronomi alanında atmosferik türbülansın getirdiği kısıtlamalara çözüm bulamadığını belirtmiştir. Isaac Newton teleskoplarda oluşan görüntü bozukluğunu, atmosferik sarsıntılara bağlamış ve optik enstrümanların kalitesi ne kadar yüksek olursa olsun bozulmamış bir görüntü elde edemeyeceğimizi belirtmiştir [5]. Ayrıca Isaac Newton çıplak gözle bakıldığında yıldızların neden



Şekil 1.4 Dalga cephesinin DM ile düzeltilmesi

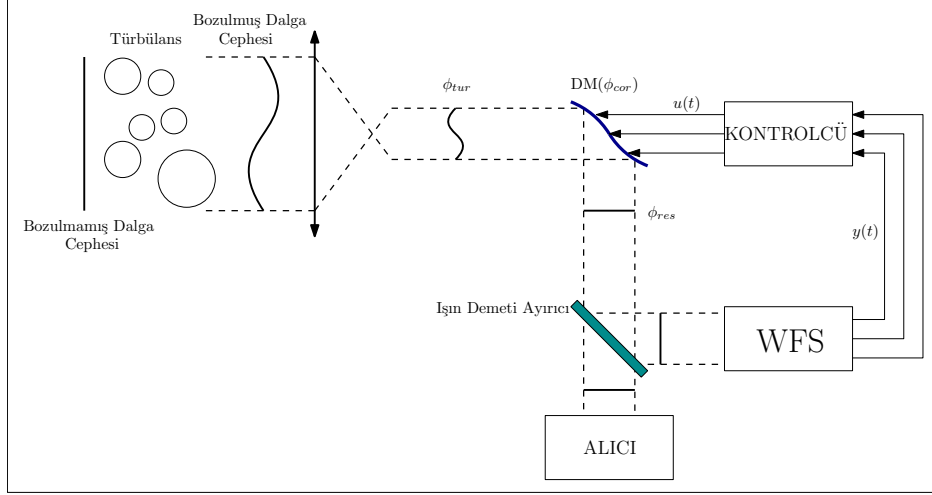
yanıp söndüğünü de bu etki ile açıklamıştır. Bu sorunlara çözüm olarak teleskopların yüksek dağ tepelerine kurulmasını önermiştir [6]. Bunun dışında uzun yıllar boyunca, optik aletlerin eksikliği dolayısıyla, bozulan görüntüyü düzeltmek için bir çalışma yapılmamıştır.

Tarihte ilk AO uygulaması, 1953 yılında Horace Babcock tarafından, dalga cephesi algılayıcısı ile sürülen deforme edilebilen ayna elemanı kullanarak, atmosferik türbülansın teleskop görüntüleri üzerindeki bozucu etkileri kompanze edilmiştir [7]. Bu sistem günümüzde bilinen en eski AO sistemdir [8].

AO sistemlerin temel yapısı Şekil 1.5’de verilmiştir. Sistem içerisinde yer alan DM ile oluşturulan ϕ_{cor} fazı, atmosferik türbülans sebebiyle oluşan ϕ_{tur} fazından çıkartılır. WFS dalga formunun ayna yüzeyinden yansımından sonra geriye kalan $\phi_{res} \triangleq \phi_{tur} - \phi_{cor}$ bozulma fazını ölçer ve y çıkış sinyalini oluşturur [9]. DM’nin yapısında bulunan eyleyicilerin kontrolü için gerekli olan u sinyali, WFS’den alınan ölçümler, (y sinyali), ile kontrolcü yapısı içerisinde gerçek zamanlı olarak işlenerek oluşturulur. Bu bozulmaları bertaraf etmek adına ayna yüzeyi şekil değiştirir, böylece eyleyicilerin yönelimleriyle dalga cephesi kontrol edilir. İstenilen düzeyde bir iyileştirme elde edilebilmesi için uygun bir kontrol metodunun kullanılması elzemdir.

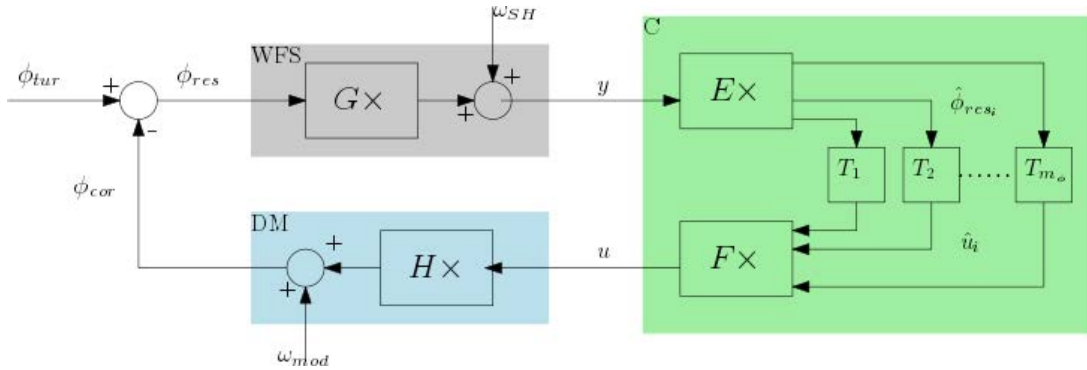
Uyarlamalı optik sistemlerin kontrolünde izlenen bir çok yol bulunmaktadır. Kullanılan kontrolcülerini temel olarak üç gruba ayırabiliriz; PID tipi kontrolcüler, uyarlamalı kontrolcüler ve optimal kontrolcülerdir.

PID tipi kontrolcüler endüstride mühendisler tarafından hala tercih edilmesinin sebebi bu kontrolcülerin basit yapısından dolayıdır. Burada kullanıcının tek yapması gereken performans isterlerini göz önünde tutarak, üç parametrenin ayarlamaktan ibarettir. Birçok uyarlamalı optik sistemlerde, PID tipi kontrolcülere başvurulmuştur [10], [11],



Şekil 1.5 Uyarlamalı optik sistemlerin temel yapısı

[12], [13], [14], [15]. Bu tür çalışmalarda temel amaç, WFS dalga formunun ayna yüzeyinden yansımından sonra geriye kalan bozulma fazının minimize edilip, sıfıra götürülmesidir. Klasik uyarlamalı optik sistem kontrol yaklaşımlarında kontrolcü, statik eşlemenin ve paralel tek giriş tek çıkışlı geri-besleme döngülerinin seri bağlantısı biçimindedir. Klasik uyarlamalı optik kontrol sistemi Şekil 1.6'da gösterilmektedir. Bu şekilde C ile gösterilen yeşil kısım sistemin kontrolcüsünü sembolize etmektedir. Burada SH algılayıcısının her bir merceğinden elde edilen sapma miktarları uygun statik eşleme matrisi E ile çarpılarak paralel tek giriş tek çıkışlı kontrolcülere tabi tutulmuş ve çıkışları da F gibi statik bir eşleme ile çarpılarak deforme edilebilir aynanın kontrol sinyalini oluşturmuştur. Ortaya konan bu yapı hali hazırdaki bir çok teleskop sisteminde kullanılmaktadır. Örneğin, Hawaii'deki Keck teleskobunun SH algılayıcısının 304 alt merceği ile DM'sinin 349 eyleyicisi bu tipte bir yapı ile kontrol edilmektedir [12]. Literatürde bu şemadaki kompanzatörlerin kararlı hal hatasını yok etmek için basit integratörlerle tasarlandığı görülmektedir.



Şekil 1.6 Klasik AO Kontrol Sistemi

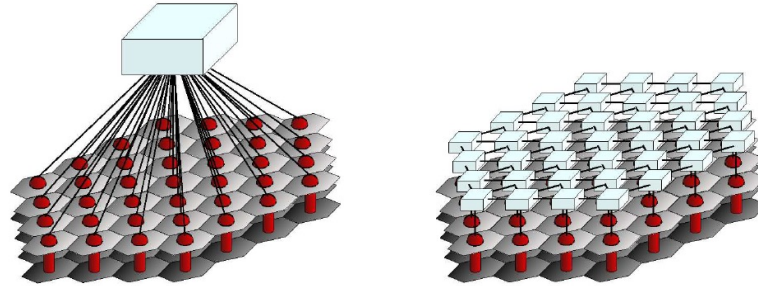
Uyarlamalı optik sistemlerinde, üzerinde çalışılan bozulmaların doğal dinamik yapılarından dolayı, bu alanda çalışan araştırmacıların dalga cephesi kontrolü için, sistemde bulunan belirsizliklerle beraber zamanla değişim gösteren dalga cephesi şekillerini de takip etmeleri gerekmektedir. Sistem yapısındaki belirsizlikler ve zamanla değişen yapılardan dolayı, online olarak kontrolcü parametrelerinin ayarlanması gerekmektedir. Bu tür ihtiyaçlar doğrultusunda, literatürde uyarlamalı kontrolcülerin de kullanıldığı çalışmalara rastlamak mümkündür [16], [17], [18].

Basit PI veya PID tipi kontrolcüler, yapıları gereği her ne kadar tercih edilse de, artan performans isteklerine cevap verememektedir. Bozucu bastırma, gürültü etkisinin azaltılması, kapalı çevrim sistem kararlılığı gibi performans kriterlerinin aynı anda geleneksel yöntemlerle sağlanması mümkün olamamaktadır. Ayrıca bu yöntemler kullanılırken, üzerinde çalışılan sistemin modelinin tam olarak elde edildiği, yani bütün belirsizliklerin, sistemi etkileyen gürültülerin modellendiği varsayılır. Halbuki gerçek hayatta bu pek mümkün değildir. Bu durumda, uyarlanabilir optik sistemleri geleneksel yöntemlerden ziyade, gelişen modern kontrol yaklaşımları tarafından ele alınmasıyla kullanılabilirliği ve güvenirliliği artacaktır. Optimal yaklaşımda maksat, istenilen performans kriterleriyle dalga cephesi hatasını minimize edilmesini sağlayacak uygun bir matematiksel optimizasyon kuramı yardımıyla kontrolcünün parametrelerinin çıkarılmasıdır.

AO sistemlerinin kontrolü için birçok optimizasyon yöntemine başvurulmuştur. Özellikle yüksek frekanstaki veya belirli bir bant genişliğindeki gürültü sinyallerine cevap verme gerekliliği tasarımcıları Doğrusal Karesel Gaussian kontrolcülere (LQG) yöneltmiştir [9], [19], [20], [21], [22], [23], [24]. LQG tipi kontrolcü tasarımında sistemin alt bileşenlerinin de modellerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sayede amaç doğrultusunda iyileştirme yapılabilmektedir. Bu alandaki ilk çalışmalar [19], [20] yapmış olduğu çalışmalardır. DM modeli, birinci dereceden gecikme filtresi ile, türbülans modeli de yine derecesi bir olan sürekli zamanda tanımlı yapı ile dikkate alınarak LQG tasarımı yapılmıştır. Bu alandaki ilk laboratuvar çalışması boyutundaki uygulamaları ise [25] yılında yapmış oldukları çalışmada görmekteyiz. Az da olsa bazı araştırmacılar, DM'lerin eyleyicilerini daha fazla dikkate alındığı çalışmalara yönelmişlerdir. [26] yılındaki çalışmasında DM eyleyicilerin doyum sınırları gözetilmiştir. Literatürde tüm alt sistemlerin dinamiklerinin de dikkate alınması gerekliliği belirmiş ve türbülansa dair dinamiklerin de daha detaylı olarak irdelendiği minimum varyans kontrolü tipinde performansı yüksek kontrolcüler geliştirebilmiştir [22], [24].

$\mathcal{H}_\infty$ kontrolcülerin bozucu bastırmada yetkinliğinden dolayı, araştırmacılar için bu

tür sistemlerin kontrolünde $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü yapısı oldukça önem arz etmektedirler. [27] çalışmalarında uyarlamalı optik sistem için direk çok girişli çok çıkışlı (MIMO) kontrolcü geliştirmek yerine, önce sistemi statik ve dinamik kısımlara ayırmış, daha sonra dinamik sistem için $\mathcal{H}_\infty$ loop-shaping ile kontrolünü sağlarken, statik sistem için PI tipinde kontrolcü geliştirmişlerdir. Benzer yapıda bir çalışma [28] tarafından da ele alınmıştır. Burada her bir mod için kontrolcü diagonal olarak elde edilmiştir. Bazı özel problemlerde, ilk iki mod olan tip-tilt modları önemli bir yere sahiptir. Bundan dolayı söz konusu bu çalışmada tip-tilt modlarına öncelik verilmiş, böylece bu iki mod için optimal $\mathcal{H}_2$ kontrolcü çıkarılmış, diğer modlar integratörle kontrol edilmiştir. [29] laser uygulama çalışmalarında, 18. mertebeden sistem modeli için Matlab altında bulunan hinfstruct fonksiyonunu kullanılarak çıkarılan 8. mertebeden $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü başarımı gösterilmiştir. Bu durumlarda bazı tutuculuk etkileri ortaya çıkmaktadır. Tutuculuk ile belirtilen kavram ise 18. mertebeden bir sisteme 8. mertebeden bir sistem geliştirildiğinde elde edilen performans indeksi ile 18. mertebeden geliştirilen kontrolcü ile elde edilen optimal performans indeksi arasındaki farktır. Burada esasen yapılması elzem olan, istenilen mertebeden kontrolcü geliştirilirken bunun o mertebede iyi olmasını sağlamaktır.



Şekil 1.7 ÇGÇÇ yapıdaki merkezi kontrolcü kurgusu ve dağıtılmış kontrolcü kurgusu

Yukarıda bahsedilen kontrol metotlarının yanı sıra, AO sistemlerin çok giriş çok çıkışlı yapıda olması ve model mertebesinin de yüksek olması, tasarımcıları farklı kontrol mimarilerine de yönlendirmiştir. Bunlar; dağıtılmış ve merkezi kontrol mimarileridir. Ayırıklaştırma ile beraber, her bir alt sistem tek giriş tek çıkış olarak düşünülüp, her bir alt sistem için kontrolcü tasarlanmaktadır. Her ne kadar uygulanması kolay olsa da, performansı sınırlı olmaktadır. Şekil 1.7’de bu köşegenleştirme probleminin ortadan kaldırılabilmesi için önerilen iki yöntem gösterilmektedir. Soldaki uygulamada çok giriş çok çıkışlı (MIMO) kontrolcü kurgusunun kullanıldığı merkezi kontrolcü yapısı gösterilmiştir. Sağda ise kendi bölgesindeki WFS bilgisi ile birlikte komşu bölgelerdeki kontrolcüler ile de haberleşen dağıtılmış kontrolcü kurgusu gösterilmektedir. Genel çözüm elbette solda verilen kurgu gibidir. Ancak hesaplama maliyetini düşürmek ve bakım maliyetlerini azaltmak için dağıtılmış kurgunun da tercih edilmesi mümkündür.

[1]. Yüzeyi sürekli olan DM'lerde iki eyleyicinin birbirinin etki alanına müdahalesi ayrıştırılamaz biçimdedir. Bu yüzden günümüz DM'leri için merkezi MIMO tipte kontrolcü kullanılması performansı ciddi oranda iyileştirmektedir. Fakat burada da hesaplama külfeti ortaya çıkacaktır, bilhassa bu hesaplama külfetinin sebep olabileceği kırılganlıklar kaçınılmazdır.

AO sistemlerde performansın iyileştirilmesinin yanında hesaplama külfetlerinin azaltılması önem arz etmektedir. Bu tür hızlı ve çok boyutlu sistemleri uygun bir şekilde kontrol edilmesi, araştırmacıları minimum varyans tabanlı kontrolörlere yönlendirmiştir [9], [30], [31], [32], [33] . Fakat burada da gerçek zamanlı veri işleme önemli derecede hesaplama külfetini beraberinde getirmektedir. Model kestirim ile hesaplama külfeti arasındaki ödünleşme probleminin uygun bir şekilde yönetilmesi gerekmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Uyarlamalı optik sistem ile ilintili kontrol problemlerindeki standart yaklaşım, ölçülen dalga cephesi ile tam olarak örtüşmeyi sağlayacak deforme edilebilir aynanın eyleyici girişlerini bulmaktır. Bu problemlerde yaygın olarak kullanılan klasik PI tipi kontrolcülerin hızlı reaksiyonun bulunmadığı uygulamalarda her ne kadar iyi çalıştığı gözükse de, artan performans isteklerine cevap sunamamaktadır. Kontrol parametrelerinin tayininde, bozucu bastırma, gürültü etkisinin azaltılması, kapalı çevrim kararlılığın sağlanması gibi performans kriterleri arasında ödünleşme problemi ortaya çıkmaktadır. Ayrıca geleneksel yöntemlerle tasarımda, sistemin tam olarak modellendiği var sayılır, fakat bu yaklaşım uyarlamalı optik gibi hassas sistemlerde her zaman uygulanabilir sonuçlar verememektedir. Uyarlanabilir optik sistemleri geleneksel yöntemlerden ziyade, gelişen modern kontrol yaklaşımları tarafından ele alınmasıyla kullanılabilirliği ve güvenilirliği artmıştır. AO sistemlerde daha fazla eyleyici ve algılayıcı kullanmak yerine, öncelikle söz konusu sistemin performansının arttırılması gerekliliği literatürde karşımıza çıkmaktadır [34], [35]. Her ne kadar teknolojik gelişmelerle, gelişmiş sensörler ve eyleyiciler üretilse de performans iyileştirmesinin bunlarla beraber basit kontrolcülerle tam olarak sağlanamayacaktır. Örneğin, önemli buluşlar arasında olan magnetic-fluid-deforme edilebilir ayna (MFDM) ilk zamanlarda, uygun bir şekilde kontrol edilememesi, özellikle medikal ürünlerdeki pratik kullanımına engel olmuştur [35].

Yapılan çalışmalar göstermiştir ki LQG tipi yaklaşımın başarısı DM ve atmosferik

türbülansın iyi modellenmesine bağlıdır. Bundan dolayı DM'lerin modellenmesi Euler Bernolli'nin esnek çubuk denkleminin, iki boyutlu yüzeylere genelleştirilmiş formu olan Kirchhoff-Love yüzey teorisi ile ifade edilmiştir. Ancak bu yeni gösterim kısmi türevli diferansiyel denklemler (PDE) barındırması sebebiyle sonsuz boyutlu (Infinite Dimensional) sistemler sınıfına girerek yeni zorluklar ortaya çıkarmıştır. Sonsuz boyutlu modeller her ne kadar modal analiz ile sonlu karşılıklarına indirgense de bu tip sistemlerde başarılı yaklaşımlar için 8-10. doğal frekansa kadar ilerlenmesi gerektiği görülmüştür [3]. Atmosferik türbülans modeli de devreye girince tüm sistemin boyutu 50. mertebelere yükselmektedir. Bilindiği gibi AO sistemlerinin başlıca amacı bozucu etkilerinin sistem performansına etkisini en aza indirmektedir. Bu alandaki başlıca kontrol tekniği ise bozucu girişi ile performans çıkışı arasındaki kazancın tüm frekanslardaki en büyük değerini minimize eden $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrolcü tasarımıdır.

Uyarlamalı optik sistemlerin karmaşık hassas yapıları, ayrıca bu tür sistemlerde bulunan deforme edilebilir aynalar için kullanılması gerekecek çok sayıda sensör ve eyleyicilerden dolayı kontrolcü tasarımı oldukça kompleks uğraş gerektirmektedir. Sistem mertebesinin yüksek ve ayrıca giriş çıkış sayısının fazla olduğu bu tür sistemlere modern yöntemlerle $\mathcal{H}_\infty$ tabanlı kontrolcü çıkarımı için farklı yaklaşımlara başvurulmuştur. Sonuçta, yüksek mertebeden sistemler için bu tip bir kontrolcü tasarlanmak istenildiğinde en az sistem mertebesinde kontrolcü tasarlanması gerekmektedir [36]. Özellikle yüksek mertebeden sistemlerin kontrolünde tam mertebeli kontrolcülerin kullanılması, uygulama açısından sıkıntılar içermektedir. Her ne kadar günümüz teknolojisinden yararlanarak yüksek mertebeli kontrolcüler gerçekleştirilebilir olsa da sistem parametrelerindeki değişimlere karşı yüksek hassasiyet yaratması ve olası modellenemeyen gürültülerde global optimum değerden uzaklaşılmasının muhtemel olması sebebiyle tercih edilmemektedir. Bir çok uzay ve havacılık uygulamasında hali hazırda düşük mertebeli kontrolcüler kullanılmaktadır. Bu durumda düşük mertebeli kontrolcü tasarımına gitmek kaçınılmazdır.

Tezin ilk aşaması, ana motivasyonlarımızdan biri olan sabit dereceden $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı üzerinedir. Tek giriş tek çıkış (SISO) sistemler için daha önce geliştirilen çok terimli tabanlı, bilinen bir yöntem ele alınmış, ve bu yöntem ölçülebilen çıkış ile kontrol girişinin tek olduğu, performans çıkış ile bozucu girişlerinin birden çok olduğu MIMO sistemlere uyarlanmıştır. Bu geliştirilen yöntem literatürde var olan bazı problemlere uygulanmış ve benzer yöntemlere kıyasla üstünlüğü gösterilmiştir.

Tezin ikinci aşaması, uyarlamalı optik sistemlerin en önemli elemanı olan deforme edilebilir aynanın uygun modellenmesini takiben, elde yüksek mertebeli MIMO

sistemin uygun kontrol edilmesi üzerinedir. Bu doğrultuda deforme edilebilir aynanın sonsuz boyutlu kısmi diferansiyel denklem (PDE) modeli, sonlu boyutlu adi diferansiyel denkleme (ODE) indirgenmiş modeli için $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanmıştır. Doğrudan $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımının aksine, kullanıcı için önem arz eden frekans aralığında bu kontrolcünün tasarımı gerçekleştirilmiştir. Frekans aralığının seçimi özellikle belirli dalga şekilleri (Zernike Modları) üzerinde çalışan kullanıcılar için tasarım esnekliğinin sağlanması adına önem arz etmektedir.

1.3 Hipotez

Uyarlanabilir optik sistemin temel elemanı olan deforme edilebilir ayna ile yegane bozucu kaynağı atmosferik türbülansın durum uzay modeli çıkarılabilir. Elde edilen bu model için uygulama özelinde önem arz eden frekans aralığında sistemin en yüksek genlikteki karşılığı olan sonsuz normunun minimizasyonu yapılabilir. Böylece olabilecek en kötü senaryonun, yani bozucunun performans çıkışında etkisinin daha fazla olduğu durumun iyileştirilmesi sağlanabilir.

ÇOK GİRİŞ ÇOK ÇIKIŞ (ÇGÇÇ) SİSTEMLER İÇİN ÇOK TERİMLİ TABANLI SABİT DERECEDE $\mathcal{H}_\infty$ KONTROLCÜ TASARIMI

Bozucu bastırma, maksimum üst aşım, yerleşme zamanı gibi performans isteklerinin kontrol sistemleri ile gerçekleştirilmesi için $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı, kapalı çevrim kutupların yerlerine kısıt koyarak gerçekleyebiliriz. Standart $\mathcal{H}_\infty$ kontrol teorisine göre bu amaç doğrultusunda tasarlanan kontrolcü derecesinin en az sistem derecesinde olması gerekmektedir. Literatürde bu tipteki kontrolcülere tam dereceli kontrolcüler denmektedir. Bu tasarım kısıtından dolayı nihai kapalı çevrim sistemin derecesi iki kat artmaktadır. Endüstride mühendisler, yüksek dereceli sistemlerin, parametrelerinde olabilecek değişimlere karşı yüksek duyarlılığa sahip olmalarından ötürü tam dereceli kontrolcülerini kullanmaktan kaçınmaktadırlar. Ayrıca tam-dereceli kontrolcülerini gömülü sistemler ile gerçeklemek oldukça güçtür. Bundan dolayı, bilgisayar destekli sistemlerin kontrolünde ortaya çıkan önemli problemlerden biri sabit dereceli kontrolcülerin tasarımıdır.

Geri-besleme kontrolcülerinde, sabit dereceli veya yapısal formda olanlar endüstride, kullanım kolaylığı sağlaması ve kolaylıkla yeniden ayarlanabilmeleri sebebiyle oldukça yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Yapısal kontrolcülerin en bilinen ve yaygın kullanımdaki şekli Oran-İntegral-Türev (PID) tipi yapılarıdır. Endüstrideki kullanıcılar, hemen hemen tüm kontrol problemlerinde, kararlılığını garanti edemeseler dahi, bu yapıdaki kolay kurulum ve kullanım imkânı sağlayan sabit dereceli kontrolcülerini tercih etmektedirler. Ancak, tasarım ihtiyaçları sonucunda ortaya çıkan bazı performans gereksinimlerini garanti edebilecek yapıyı oluşturmakta güçlük çekmektedirler. Bunların başında bozucu ve gürültü girişleri ile sistemin performans çıkışları arasındaki $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ normlarının en aza indirgenmesini hedefleyen sentez problemi ve sistem dinamik cevabına ilişkin bazı temel parametreler (üst aşım, yerleşme zamanı gibi) gelmektedir. Klasik $\mathcal{H}_\infty$ çıkış geri-besleme sentezi için kullanılan tasarım yöntemleri ile elde edilen kontrolcüler, en az sistem derecesine eşit dereceye sahip

olmaktadır ve bu tip kontrolcülere tam dereceli kontrolcüler denmektedir [37]. Bu şekilde kontrolcü ile beraber sistemi kapalı çevrim olarak ele aldığımızda sistem derecesi bir kat daha artmış olmakta, buda sistem de meydana gelebilecek bir hatanın daha olumsuz sonuçlara neden olabileceği gerçeğini ortaya çıkarmaktadır. Endüstride mühendisler, yüksek dereceli sistemlerin, parametrelerinde olabilecek değişimlere karşı yüksek duyarlılığa sahip olmalarından ötürü tam dereceli kontrolcülerini kullanmaktan kaçınmaktadırlar. İlk etapta bunun düşük dereceli sistemler için uygulanabilir olduğu düşünülse de, istenilen performansı elde etmek için sistemin girişine ve çıkışına konulması gerekebilecek filitreler beraberinde sistemin derecesini arttıracaktır. Bu nedenlerden dolayı son yıllarda gerek akademik gerekse endüstri alanında düşük ve sabit dereceli kontrolcü tasarımı üzerine ilgi artmış ve bu konu önemli çalışmalar arasında yerini almıştır. [38] çalışmasında kararlılığı sağlayacak düşük dereceli kontrolcü için gerekli şartları sunmuş, daha sonraki yıllarda [39] düşük dereceden $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü çıkarımı için bir takım Doğrusal Matris Eşitsizliklerinin (DME) yanında rank koşulunun da yerine getirilmesinin gerektiğini göstermiştir. Optimal kontrolcü çıkarımı için eklenen bu koşulun sağlanması gerekliliği, tasarım probleminin konveks olmayan kümelerde tanımlı olmasına neden olmaktadır ve hali hazırda da konveks olmayan kümeler için bir çözüm bulunamaması, tasarımının oldukça zor bir uğraş olmasına neden olmaktadır.

Düşük dereceli kontrolcü tasarımına çözüm sunabilmek adına üç temel yaklaşım üzerinde durulmuştur. Öncelikle sistem derecesinin düşürülüp, böylece elde edilen düşük dereceli sistem üzerinden geleneksel yöntemlerle istenilen düşük dereceden kontrolcü çıkarımı hedeflenmiştir [40], [41]. Bu yaklaşım özellikle yüksek dereceden sistemler üzerinde oldukça olumlu sonuçlar vermektedir. Bir diğer yaklaşımda ise ilk olarak tam dereceden kontrolcü elde edilmiş, daha sonra bu kontrolcüye yaklaşık performansı sağlayacak düşük dereceden kontrolcüler kademe kademe çıkarılmıştır. Buna ek olarak ayrıca model indirgeme tekniklerinin de kontrolöre uygulandığı çalışmalar da mevcuttur [42], [43]. Ancak sistemin veya kontrolcünün derecesinin düşürülmesine yönelik çalışmalarda her zaman kapalı çevrim performansın sağlanmadığı görülmüştür. Bundan dolayıdır ki, araştırmacılar direk olarak sabit, düşük dereceden kontrolcü çıkarımı üzerine daha çok eğilim göstermişlerdir. Düşük dereceli kontrolcü tasarımında literatürde önemli yere sahip olan belli başlı çalışmalar: [44] çalışmalarında alternatif izdüşüm algoritmasını sunmuşlardır. Bu algoritma, konveks olmayan rank sınırlaması ile beraber konveks doğrusal matris eşitsizlikleri üzerine izdüşümler alınıp, bu izdüşümlerin kesişim noktasının saptanması üzerinedir. Bu çalışmada öncelikle tam dereceden kontrolcü çıkarılmış, daha sonra alternatif izdüşümün yakınsaması ve performans istekleri baz alınarak kademeli olarak kontrolcü derecesi düşürülmüştür. Sonraki

yıllarda bu alanda [45] yaptığı çalışmada daha pratik bir yönelim seçilmesiyle söz konusu algoritmanın yakınsama probleminin iyileştirilmesi ve bu yakınsamanın da hızlandırılması amaçlanmıştır. Yine de bu algoritmalar yakınsamayı her zaman garanti edememektedir.

Konveks olmayan düşük dereceden kontrolcü tasarımı problemini bilineer matris eşitsizliklerin (BME) yardımıyla çözüme gidildiği birçok çalışma literatürde mevcuttur. Bunların içinde [45] çalışmasında dallandırma (branch) ve sınırlandırma (bound) algoritmasıyla BME'leri çözme yoluna gitmiştir. Bu algoritma adından da anlaşıldığı gibi, global optimum noktanın alt ve üst sınırlarını tayin etmek için, çalışılan küme küçük parçalara ayrılmaktadır. Üst sınırlar bir parametrenin sabitlenmesiyle elde edilirken, her bir bölge için alt sınırlar ise yarı tanımlı programlamanın (SDP) çözümüyle elde edilir. Benzer yaklaşımlar içeren çalışmalar için [46], [47], [48] içerdiği referanslar ile beraber bakılabilir. BME'lerin çözümü için [49] çalışmasında bariyer metodu sunulmuştur. Bu çalışmada statik durum geri beslemesi için doğrusal olmayan SDP algoritması geliştirilmiştir. Söz konusu bu yöntem kısmen arttırılmış Lagrangian metodu tabanlı olup, arama algoritması olarak da gelişmiş Newton metodu kullanılmıştır. Daha sonraki yıllarda YALMIP arayüzüyle çalışan PENBMI adında bir algoritma geliştirilmiştir.

[50] çalışmasında düşük dereceden kontrolcü tasarımındaki konveks olmayan birimin gevşetilmesi, kısmen arttırılmış Lagrangian fonksiyonunun ikinci dereceden Taylor yaklaşımını iteratif olarak minimize edilmesiyle sağlanmıştır. Her bir iterasyonda Gradient ve Hessian tayini gerektiğinden yoğun bir hesaplama yüküne ihtiyaç duyulmaktadır. Dayanıklı kontrol problemleri için arama yönü tayini için gelişmiş Newton metodu kullanılmıştır [51]. Daha sonra ki yıllarda bu amaç doğrultusunda, her bir iterasyonda konveks SDP çözümünden yararlanılmıştır [52].

[53] çalışmalarında düşük dereceden kontrolcü tasarımı için alternatif izdüşüme benzer bir metot sunulmuştur. Bu yöntem sadece kontrol problemleri için geliştirilmemiş, DME ler ve rank sınırlaması içeren her türlü problemde kullanılabilir hale getirilmiştir. Aynı ekip tarafından bu yöntem kullanılarak, YALMIP arayüzüyle çalışan LMIRANK adından bir çözücü geliştirilmiştir.

Kapalı çevrim transfer fonksiyonlarla uğraşmak yerine, sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu üzerinde çalışılması tasarım problemlerini kolaylaştıran bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Çevrim Şekillendirme yaklaşımı, duyarlılık (sensitivity) ve tamamlayıcı duyarlılık (complementary sensitivity) fonksiyonlarıyla ilintili performans isteklerini garanti etmek adına sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun tekil değerlerinin uygun modellenmesine

dayalıdır. [54] çalışmasında öncelikle açık çevrim transfer fonksiyonunun tekil değerlerini istenilen frekans bandında incelemek için denkleştiriciler (compensator) kullanılmıştır. Çevrim şekillendirmenin başarılı bir şekilde yapılmasını takiben arzu edilen performans indeksine bağlı optimizasyon teknikleri kullanılmıştır. Söz konusu bu çalışmada yapılan optimizasyon, performans çıkışı ile bozucu girişi arasındaki transfer fonksiyonun sonsuz normunun minimizasyonudur. [55] çalışmasında, PID katsayılarını $\mathcal{H}_\infty$ optimizasyon tabanlı Çevrim Şekillendirme yaklaşımıyla çıkarmışlardır. [56] çalışmasında çok girişli çok çıkışlı sistemler için, durum uzay tabanlı sabit dereceden ve önceden belirlenmiş yapıda $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı gerçekleştirmiştir. Bu bağlamda Matlab, Robust Control Toolbox altında loopsyn fonksiyonu mevcuttur.

DME tabanlı yaklaşımlara ilaveten, literatürde konveks olmayan bir gövdede tanımlı problem için numerik optimizasyon tekniklerinden, bir başka deyiş ile non-smooth optimizasyon tekniklerinden yararlanılmıştır. [57] çalışmasında non-smooth, çok yönlü arama metodunu kullanarak, kapalı çevrim sistemin sonsuz normunu minimize edecek aynı zamanda sistemi kararlı kılacak kontrolcünün tasarımı sunulmuştur. Bu türden algoritmalar iteratif olarak ilerlemekte ve başlangıç koşulları verilmediği sürece rastlantısal bir başlangıç noktası ile çalışmaktadır. Sonraki yıllarda MATLAB, Robust Control Toolbox altına, bu yöntem tabanlı hinfstruct adında bir fonksiyon eklenmiştir. HIFOO, sabit dereceden kontrolcü çıkarımı için MATLAB altında [58] tarafından geliştirilen, “Hybrid Algorithm for Non-Smooth Optimization” (HANSO) diye isimlendirilen non-smooth bir optimizasyon tekniğinin kullanıldığı bir başka araç kutusu olarak karşımıza çıkmaktadır. HIFOO, hinfstruct da olduğu gibi başlangıç noktası verilmediğinde, rastgele bir noktada başlar. Bu yazılımın temel olarak iki fazı bulunmaktadır. Bunlar kararlı kılma ve optimizasyon. Yazılım başlangıçta, kısıtsız doğrusal olmayan optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan bir numerik optimizasyon tekniği olan Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) algoritması ile gradient örneklemenin bir kombinasyonunu, kapalı çevrim sistemin spektraller abscissas’ın maksimum değerine uygular. Başlangıç noktası girilmemiş ise sınırlı sayıdaki iterasyon kadar rastlantısal başlangıç değeri ile bu kombinasyon algoritmayı çalıştırır ve sistemi kararlı kılacak bir kontrolcü arar. Eğer maksimum iterasyona ulaşılmış ve hala kararlı kılan bir kontrolcü bulunamamış ise algoritma sonlanır. Ancak kararlı kılma işlemi başarılı olmuş ise ikinci faza geçilir. Optimizasyon fazında (ikinci faz) yine başlangıç noktaları girilmiş ise buradan, girilmemiş ise rastlantısal üretilenler içerisinde en iyisinden başlayıp, bir sonsuz norm değeri de atayarak yine iteratif olarak numerik optimizasyon yapar. Yazılım numerik optimizasyon yapmakta ve başlangıç noktasının belirlenmesinin kritik önemi altında tutuculuğunu korumaktadır.

$\mathcal{H}_\infty$ problemi üzerine yapılan çalışmaların çoğunluğu durum-uzay tabanlıdır. [59]

çalışmasında durum uzay yaklaşımı yerine çokterimli gösterim kullanmıştır. Bu gösterimde direkt sistemin transfer fonksiyonu katsayıları kullanılmaktadır. Bu yaklaşım, çok terimli ifadenin pozitifliği ve transfer fonksiyonun da kesin reel pozitifliği üzerine kurulmuştur. Bu çalışmada [60] da gösterilen bölgesel kutup tayini kullanılarak bir iç konveks alt bölge oluşturarak kararlılık problemi için sabit dereceden kontrolcü tasarlanmıştır. Daha sonra bu çalışmaya [61] tarafından $\mathcal{H}_\infty$ norm minimizasyonu gerçekleştirilmiş, yalnız burada bazı geometrik kısıtlamalar mevcut olduğundan, [62] çalışmasında bu geometrik kısıtlamalar da ortadan kaldırılıp, sabit dereceli $\mathcal{H}_\infty$ problemine çözüm sunulmuştur. Böylece önceden belirlenen $\mathcal{D}$ -Bölgesinde, kapalı çevrim sistemin kararlılığı ve $\mathcal{H}_\infty$ normunun minimizasyonu, sabit dereceli kontrolcü ile sağlanmıştır. Bu yöntemin en büyük handikapı merkezi çok terimli seçiminin tutuculuğa, dolayısıyla kontrolcü tasarımına olan etkisidir. [63] çalışmasında söz konusu bu yöntemi, bir bakıma çok giriş çok çıkış (MIMO) sistemlerde kullanılabilmesi için uygun form geliştirmişlerdir. Bu çalışmaları, temel manada kapalı çevrim kararlılığın sağlanması ve farklı kanallar arasındaki etkileşimin minimize edilmesine dayalıdır. Burada ki önemli kısıtlardan biri performans çıkışının düşünülmemesi, yani bütün çıkışların ölçülebilir çıkışlar olarak kontrolöre tabi tutulmasıdır. Diğer önemli kısıt ise bu yöntemin ancak ayrıştırılabilmiş sistemler, yani her bir girişin sadece bir çıkış ile ilintili olduğu sistemler için geçerli olmasıdır. Böylelikle bu yöntem ancak ölçülebilir çıkış sayısının, sistemin kontrol girişi sayısına eşit olduğu sistemlere uygulanabilmektedir. Her bir kontrolör çıkışının sadece bir girişe bağlı olması da istenilen performans ölçütlerinin sağlanmasını güçleştirmektedir. [62] çalışmalarına benzer bir yaklaşımla KYP Lemma kullanılarak transfer fonksiyonun kesin reel pozitifliğine dayalı ve durum uzay tabanlı bir yöntem [64] çalışmalarında sunulmuştur. Sonraki çalışmalarında buna sonsuz norm minimizasyonu probleminin çözümü de eklenilmiştir [65]. Söz konusu bu çalışmada da en önemli sınırlama, [62] çalışmasındaki merkezi çok terimlinin seçimine benzer, kararlı bir merkezi matris ile tekil olmayan bir yardımcı matrisin seçimi olmaktadır. Bunların uygun seçimi kontrolcü performansı açısından oldukça önem arz etmektedir.

2.1 Problemin Tanımı

Kontrol teorisindeki gelişmeler ve uygulamalardaki ihtiyaçlarının artmasıyla, dinamik bir sistemin kararlılığının sağlanmasını takiben, bu sistemi belli performans ölçütleri baz alınarak kontrol edilmesi ortaya çıkmıştır. $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı problemi, bu performans ölçütlerinden, sistemin performans çıkışı üzerindeki bozucu etkisinin makul seviyelere indirilmesiyle ilintilidir. Bir sistemin sonsuz normu, o sistemin frekans bölgesinde verdiği en yüksek genlikteki cevabıdır. Bir başka deyişle, bu frekans bandındaki en yüksek tekil değeridir. Dolayısıyla, $\mathcal{H}_\infty$ optimasyon

yaklaşımında amaç, olabilecek en kötü durumun yani bozucunun performans çıkışında etkisinin daha fazla olduğu durumu düşünülüp, bunun düşürülmesine dayalıdır. Standart $\mathcal{H}_\infty$ tabanlı kontrol teorisinin temel yapısı [66] tarafından oluşturulmuş ve 19. yy. sonlarına doğru bu problem daha uygun formda [67] tarafından iki Riccati denkleminin çözümü şeklinde sunulmuştur. Daha sonraki yıllarda [39] çalışmalarında, bu kontrol problemini doğrusal matris eşitsizliğine indirgeyerek çözüme gitmişlerdir. Doğrusal matris eşitsizliklerin gelişimiyle beraber konveks yapıdaki bu tür kontrol problemlerinin çözümüne de olanak sağlanmıştır. Şekil 5.1’de gösterilen P sistemini ele alacak olursak. Bu sistemin girişleri w ve u sırasıyla bozucu girişi ve kontrol girişi, y ölçülebilen, z ise performans çıkışıdır. P sisteminin durum uzay gösterimi;

$$P : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

burada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ durum uzay matrisleridir.

P sisteminin ölçülebilen çıkışları, y , ile sistemin kontrol girişi olan, u arasına yerleştirilen dinamik K doğrusal kontrolcüsünün durum uzay gösterimi,

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklindedir. P sisteminin, K kontrolcüyle beraber kapalı çevrim formu;

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} x_{cl} + \begin{bmatrix} B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c \end{bmatrix} x_{cl} + \begin{bmatrix} D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{bmatrix} w \\ \dot{x}_{cl} &= A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z &= C_{cl} x_{cl} + D_{cl} w \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde olup, top yekûn bozucu girişi w ile performans çıkışı z arasındaki transfer fonksiyonu; $P_{cl}(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} + D_{cl}$ halini alır. Sonuç olarak bu kapalı çevrim sistemin $\mathcal{H}_\infty$ normu;

$$\|P_{cl}(s)\|_\infty = \underbrace{\sup}_w \overline{\sigma}(P_{cl}(jw)) \quad (2.4)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\overline{\sigma}$ en büyük tekil değeri göstermektedir. Sınırlı Gerçek Lemmayı kullanarak, $\|P_{cl}(s)\|_\infty < \gamma$ denklemini sağlayan pozitif γ bulunabilir.

Lemma 2.1. [39] Ancak ve ancak aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak bir $X = X^T \succ 0$ pozitif tanımlı simetrik matris bulunabildiği durumda, Denklem 2.3’de verilen sistemin $\mathcal{H}_\infty$ normu, pozitif bir skaler olan γ değerinden küçüktür ve A_{cl} matrisinin bütün özdeğerleri sol yarı düzlemedir,

$$(A_{cl}^T X + X A_{cl} + C_{cl}^T C_{cl}) + (X B_{cl} + C_{cl}^T D_{cl})(\gamma^2 I - D_{cl}^T D_{cl})^{-1}(B_{cl}^T X + D_{cl}^T C_{cl}) < 0. \quad (2.5)$$

Yukardaki eşitsizliği Doğrusal Matris Eşitsizliği (DME) formuna dönüştürmek için ifadenin Schur tümleyeni alındığında,

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X + X A_{cl} & X B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad X = X^T \succ 0, \quad (2.6)$$

ifadeye denk DME’ler ortaya çıkar.

Bozucu bastırma, maksimum üst aşım, yerleşme zamanı gibi performans isteklerinin kontrol sistemleri ile sağlanabilmesi için $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı probleminin çözümüne ilave olarak, kapalı çevrim kutuplarının yerlerine kısıt koyarak gerçekleyebiliriz. [60] çalışmasında, $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımına, $\mathcal{D}$ -kararlılık ekleyerek bu türden problemlere çözüm sunmuşlardır. Tasarımda düşünülen bu alanlar DME bölgelerdir. Şekil 2.1’de bir DME alan gösterilmiştir. Burada ki parametrelerden, μ dikey şerit, ζ sönümleme oranı, q bir diskin merkezi, r ise diskin yarı çapını göstermektedir. Söz konusu bu alanlar performans ölçütleri ve sistemin dinamik cevabı göz önünde tutularak, yarı düzlem, daire, konik, yatay şerit ve dikey şerit veya bunların kesişimleri olarak seçilebilir. Bir DME alan şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\} \quad (2.7)$$

burada $L = L^T$ ve M gerçel matrisler, s ise sistemin kutuplarıdır. $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = L + sM + \bar{s}M^T$ ise $\mathcal{D}$ -Bölgesinin sınırını gösteren fonksiyondur.

Lemma 2.2. [60] Denklem 2.3’de verilen sistem için aşağıdakiler birbirine denktir:

- $\mathcal{D}$ -Kararlıdır.
- Sistem matrisi A_{cl} ’nin özdeğerleri $\mathcal{D}$ -Bölgesi içindedir.
- $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(A_{cl}, X_{\mathcal{D}}) = L \otimes X_{\mathcal{D}} + M \otimes (A_{cl} X_{\mathcal{D}}) + M^T \otimes (X_{\mathcal{D}} A_{cl}^T) < 0$ için $X_D = X_D^T \succ 0$ bulunabilir.

çevrim sistemin derecesine eşit olması, $k = n$, gereği ortaya çıkmaktadır.

Teorem 2.1. [60] Sol yarı düzlemde herhangi bir $\mathcal{D}$ -Bölgesi tanımlansın ve Lemma 2.2'de belirtilen $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ ise bu bölgenin karakteristik fonksiyonu olsun. Denklem 2.8'de gösterilen ortak X matrisi problemi, ancak ve ancak aşağıda verilen DME'leri sağlayan $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, H , G , F ve T matrislerin var olması durumunda çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \quad R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.11)$$

$$L_i \otimes \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} + M_i \otimes \phi + M_i^T \otimes \phi^T < 0, \quad (2.12)$$

$i = 1, 2, \dots, r$ farklı alan kesişimi için,

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{21}^T \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

burada ϕ , ψ_{11} , ψ_{21} ve ψ_{22} şu şekildedir;

$$\phi \triangleq \begin{bmatrix} AR + B_u \mathcal{C}_c & A + B_u H C_y \\ T & SA + G C_y \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\psi_{11} \triangleq \begin{bmatrix} AR + RA^T + B_u F + F^T B_u^T & B_w + B_u H D_{yw} \\ (B_w + B_u H D_{yw})^T & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\psi_{21} \triangleq \begin{bmatrix} T + (A + B_u H C_y)^T & S B_w + G D_{yw} \\ C_z R + D_{zu} F & D_z w + D_{zu} H D_{yw} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\psi_{22} \triangleq \begin{bmatrix} A^T S + SA + G C_y + C_y^T G^T & (C_z + D_{zu} H C_y)^T \\ C_z + D_{zu} H C_y & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Teorem 2.1'de verilen bu DME'lerin uygun çözümü elde edildikten sonra kontrolcünün sistem matrislerini çekebilmek için sırasıyla aşağıdaki adımlar izlenir:

- Tekil Değer Ayrışımı (TDA) kullanılarak, Denklem 2.9'da verilen M ve N

matrislerini $MN^T = I - RS$ eşitliğinden çekilmeli,

- Denklem 2.10'de tanımlanan yeni değişkenler ve elde edilen M ve N matrislerini kullanarak, sırasıyla D_c , B_c , C_c ve son olarak A_c aşağıdaki denklemlerle elde edilir:

$$D_c = H, \quad (2.18)$$

$$B_c = N^{-1}G - N^{-1}SB_u D_c, \quad (2.19)$$

$$C_c = F(M^T)^{-1} - D_c C_y R(M^T)^{-1}, \quad (2.20)$$

$$A_c = N^{-1}(T - (NB_c C_y R + S(B_u C_c M^T + (A + B_u D_c C_y)R)))(M^T)^{-1}. \quad (2.21)$$

Kontrolcünün sistem matrisleri çekildikten sonra $K(s) = C_c(I - sA_c)^{-1}B_c + D_c$ sisteme uygulandığında, kapalı çevrim sistemin kutupları $\mathcal{D}$ -Kararlı Bölgesi'nde olacak ve bozucu girişi ile performans çıkışı arasındaki sonsuz norm pozitif skaler γ değerinden küçük, $\|P_{cl}(s)\|_\infty < \gamma$ olacaktır.

Sabit dereceli kontrolcü geliştirilmesi problemi 2000'li yıllarda temel iki kısma ayrılmıştır. Bunlar, konveks olmayan çözücüler ile yapılan gelişmeler ve konveks olmayan bu problem kümesine iç veya dış konveks kabuk giydirip konveks yaklaşımlar ile yapılan gelişmelerdir. $\mathcal{H}_\infty$ sentezi için konveks olmayan optimizasyon yöntemlerinin ortaya çıkması ile birlikte daha az tutucu çözümler türetilenmiştir [68]. Bu yöntemlerin yanında, kısmen arttırılmış Langrange metodu ile sabit dereceli kontrolcü tasarımının gerçekleştirildiği çalışma verimli sonuçlar ortaya çıkarmıştır [69]. Ancak bu yöntemlerde kullanılan doğrusal matris eşitsizliklerinin sağlanması için aranan şart Sınırlı Reel Lemma'daki gibi Lyapunov matrisi olmuş, direk kontrolcü katsayıları olmamıştır. Ayrıca başarılı bir sonuç elde edebilmek için başlangıç noktasının güzel seçilmiş olması önemli bir handikaptır. Direk kontrolcü katsayıları üzerinden çalışmaya imkân sağlayan çok terimli yaklaşımlarda, konveks olmayan bir kümede tanımlı bu problemin çözümü temelde ikiye ayrılmaktadır. Bunlar iç ve dış konveks kestirimdir. Dış konveks kestirim, konveks olmayan kümeye dışarıdan konveks bir küme yerleştirir, bu teknikteki çalışmalar literatürde oldukça fazladır ve bunlar ile ilgili bir tarama çalışmasını [70] gerçekleştirmiştir. Pratik olarak en yaygın ve efektif olarak kullanılan dış kestirim yöntemi Lasserre'in aşamalı sistemidir [71]. Bu kestirim yöntemi konveks olmayan kümenin konveks kabuğuna doğru asimptotik olarak yakınsamayı sağlar. Ancak bu teknik sadece gereklilik şartını sağlamaktadır. Dolayısıyla performansın sağlanması garanti edilemez.

2.2 İç Konveks Kestirim İle Tasarım

İç kestirim yöntem yeter şartı sağlamaktadır. İç konveks kestirim alt çözüm kümelerinde kalmasına karşın performansın gerçekleşmesi garanti edilebilmektedir. Çok terimli için iç konveks gövdeler üretmeden önce bazı tanımlamalar ile temel teoremin ortaya konması gerekmektedir. Kontrolcü ile birlikte sağlatılacak kapalı çevrim kararlılık her zaman kontrol sisteminde yeterli olmayabilir. İyi bir kontrolcü ayrıca yeteri kadar hızlı bir şekilde sonuca gidebilmelidir. Kapalı çevrim kutuplarını, önceden belirlenen bir kompleks alan içerisinde yer almasını sağlamak bu probleme çözüm olabilecek yollardan biridir. Tasarımda düşünülen bu alanlar DME alanlardır. Söz konusu bu alanlar performans ölçütleri ve sistemin dinamik cevabı göz önünde tutularak; yarı düzlem, daire, konik, yatay şerit ve dikey şerit veya bunların kesişimleri şeklindedir. Her hangi bir çok teriminin kararlılık bölgesini kompleks düzlemde

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}^* \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12}^* & d_{22} \end{bmatrix}}_{\Delta} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} < 0 \right\}, \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Standart olarak $\mathcal{D}$ bölgesini ayrık sistemler için birim disk olarak seçebiliriz ($d_{11} = -1$, $d_{12} = 0$, $d_{22} = 1$). Bu durumda $\mathcal{D}$ -kararlılık bölgemizin sınırları $\partial \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : d_{11} + d_{12}z + d_{12}^*z^* + d_{22}zz^* = 0\}$ şeklinde olacaktır. Eğer bir çok teriminin kökleri belirtilen bu $\mathcal{D}$ -Bölgesi içerisindeyse ona $\mathcal{D}$ -Kararlı denir. Benzer olarak z 'nin rasyonel bir fonksiyonunu $\partial \mathcal{D}$ boyunca uyguladığımızda reel kısmı pozitif oluyor ise $\mathcal{D}$ -kesin pozitif reel olarak isimlendirilir.

Lemma 2.3. [62] Verilen bir $\mathcal{D}$ -Kararlı $c(z)$ için eğer $\frac{d(z)}{c(z)}$ rasyonel fonksiyonu $\mathcal{D}$ -Kesin reel pozitif ise $d(z)$ 'de $\mathcal{D}$ -Kararlıdır.

$\frac{d(z)}{c(z)}$ ifadesinin $\mathcal{D}$ -kesin reel pozitifliğini çokterimlilerin pozitifliği ile gösterebiliriz. Pozitif reel küçük γ için kesin reel pozitiflik koşulunu

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d(z)}{c(z)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^*(z)}{c^*(z)} + \frac{d(z)}{c(z)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^*(z)c(z) + c^*(z)d(z)}{c^*(z)c(z)} \right) \geq \gamma. \quad (2.23)$$

biçiminde yazabiliriz. [62] çalışmasında, kapalı çevrim transfer fonksiyonunun paydasının normunun sınırlı, eklenebilir bir belirsizlikten etkilenmesinden yola çıkarak, Küçük Kazanç Teoreminden (Small Gain Theorem) yararlanılarak, söz konusu bu kararlılık problemine $\mathcal{H}_\infty$ normunun kısıtlanması eklenilmiştir.

Theorem 2.2. [62] Verilen $\mathcal{D}$ -Kararlı $c(s)$ çok terimli ile pozitif skaler γ için, kapalı çevrim transfer fonksiyonu $\frac{n(s)}{d(s)}$ $\mathcal{D}$ -Kararlı olması ve $\mathcal{H}_\infty$ norm performans kısıtını sağla-

ması ancak ve ancak

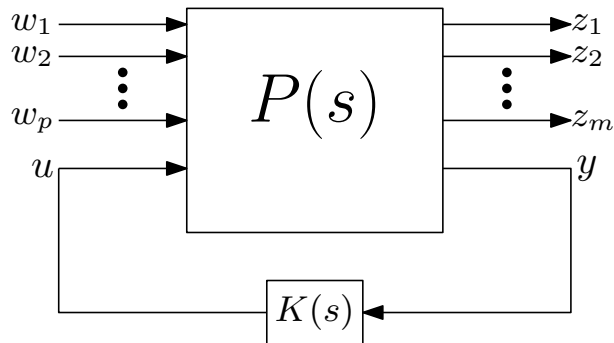
$$\begin{bmatrix} c^T d + d^T c - \Pi^T (\Delta \otimes Q) \Pi & n^T \\ n & \beta \gamma^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.24)$$

DME'sini sağlayan simetrik bir $Q = Q^T$ matrisi ve skaler bir β değeri bulunması durumunda sağlanmaktadır.

2.2.1 $\mathcal{H}_\infty$ Kontrol Probleminin ÇG-ÇÇ Sistemlere Genişletilmesi

Bu alt bölümde söz konusu yöntemi çok giriş çok çıkış kontrol problemine geliştirilmesi ele alınmıştır. Benzer bir yol [63] çalışmasında ele alınmış olsa da önemli kısıtlar barındırmaktadır. Bu çalışmada performans çıkışları üzerinden bir optimizasyona gidilmemiş, direk olarak çıkış geri besleme problemine bakılmıştır. Ayrıca bu yöntem ile bir girişin sadece bir çıkış ile ilintili olduğu sistemler için geçerli olmaktadır. Diğer önemli kısıt, hata sinyali ile sistem çıkışı arasında kalan sistemin transfer fonksiyonunda bilinmeyenlerin çarpımı bulunduğundan, konveks olmayan bir yapı elde edilmiştir. Bunun çözümü için sistem iki parça halinde ele alınarak bilinmeyenler birbirinden ayrılmıştır. Ortaya konan bu yaklaşım ise oldukça tutucu bir sonuç ortaya çıkarmaktadır.

Bu bölümde ele alınan çalışmada Şekil 2.2'de gösterildiği gibi $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü problemlerindeki sistemin genel hali düşünülmüştür. Performans çıkışları, ölçülen çıkışlardan bağımsız olarak ele alınmış, söz konusu bu performans çıkışlarından bozucu girişlerine olan transfer fonksiyonunun $\mathcal{H}_\infty$ normunun minimizasyonu amaçlanmıştır.



Şekil 2.2 Standart P sistemi ile kontrolör bağlantısı

Şekil 2.2’de ki modeli transfer fonksiyonlar şeklinde tanımlayacak olursak;

$$P(s) \triangleq \begin{bmatrix} P_{z_1 w_1}(s) & P_{z_1 w_2}(s) & \cdots & P_{z_1 w_p}(s) & P_{z_1 u}(s) \\ P_{z_2 w_1}(s) & P_{z_2 w_2}(s) & \cdots & P_{z_2 w_p}(s) & P_{z_2 u}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{z_m w_1}(s) & P_{z_m w_2}(s) & \cdots & P_{z_m w_p}(s) & P_{z_m u}(s) \\ P_{y w_1}(s) & P_{y w_2}(s) & \cdots & P_{y w_p}(s) & P_{y u}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Bu durumda kontrol ve bozucu girişlerinin çıkışlara etkisi,

$$\begin{aligned} z_i &= P_{z_i w_1}(s)w_1 + P_{z_i w_2}(s)w_2 + \cdots + P_{z_i w_p}(s)w_p + P_{z_i u}(s)u, \quad i = 1, \dots, m \\ y &= P_{y w_1}(s)w_1 + P_{y w_2}(s)w_2 + \cdots + P_{y w_p}(s)w_p + P_{y u}(s)u \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada $u = K(s)y$ alındığında performans çıkışları için aşağıdaki ifade elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} y &= \frac{P_{y w_1}(s)w_1 + P_{y w_2}(s)w_2 + \cdots + P_{y w_p}(s)w_p}{1 - P_{y u}(s)K(s)} \\ z_i &= P_{z_i w_1}(s)w_1 + P_{z_i w_2}(s)w_2 + \cdots + P_{z_i w_p}(s)w_p + P_{z_i u}(s)K(s)y, \quad i = 1, \dots, m, \\ z_i &= \frac{P_{z_i w_1}(s) - P_{z_i w_1}(s)P_{y u}(s)K(s) + P_{z_i u}(s)K(s)P_{y w_1}(s)}{1 - P_{y u}(s)K(s)}w_1 + \cdots \\ &+ \frac{P_{z_i w_p}(s) - P_{z_i w_p}(s)P_{y u}(s)K(s) + P_{z_i u}(s)K(s)P_{y w_p}(s)}{1 - P_{y u}(s)K(s)}w_p \\ z_i &= \sum_{j=1}^p \frac{P_{z_i w_j}(s) - P_{z_i w_j}(s)P_{y u}(s)K(s) + P_{z_i u}(s)K(s)P_{y w_j}(s)}{1 - P_{y u}(s)K(s)}w_j, \end{aligned} \quad (2.27)$$

burada her bir transfer fonksiyonu, $P_{ij}(s) \triangleq \frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)}$ ve kontrolörü, $K(s) \triangleq \frac{y_k(s)}{x_k(s)}$ şeklinde alıp, Denklem 2.27’de yerine yazarsak,

$$z_i = \sum_{j=1}^p \frac{b_{z_i w_j}(s)a_{y w_j}(s)(a_{y u}(s)a_{z_i u}(s)x_k(s) - b_{y u}(s)a_{z_i u}(s)y_k(s)) + b_{z_i u}(s)b_{y w_j}(s)a_{z_i w_j}(s)a_{y u}(s)y_k(s)}{a_{z_i w_j}a_{z_i u}a_{y w_j}(a_{y u}(s)x_k(s) - b_{y u}(s)y_k(s))} \quad (2.28)$$

$i = 1, \dots, m$, için m tane performans çıkışının ifadesini elde ederiz. Burada da açıktır ki kontrol girişi ve ölçülen çıkışlar olan u ve y ’nin birden çok olması durumu bilinmeyenlerin çarpımına neden olacağından, problemin dış büyüklüğünü bozmaktadır. Dolayısıyla bu yöntem sadece bir tane kontrol girişi ve bir tane ölçülen çıkış barındıran sistemlere uygulanacaktır.

Denklem 2.28’de verilen çok girişli çok çıkışlı sistemin performans çıkışları ile bozucu

girişleri arasında ki transfer fonksiyonu,

$$T_{z_i w_j}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.29)$$

şeklinde olsun, belirtilen transfer fonksiyonların $\mathfrak{D}$ -Bölgesinde kararlı ve $\mathcal{H}_\infty$ normlarının önceden belirlenen γ değerinden küçük olmasının sağlanması için Teorem 2.2'de ki DME'nin her bir transfer fonksiyonu için çözümü aranması gerekmektedir. Sonuç olarak her bir transfer fonksiyonun $\mathcal{H}_\infty$ normunun minimizasyonu, top yekün sistemin $\mathcal{H}_\infty$ norm minimizasyonunu da sağlamaktadır [37].

Teorem 2.3. Verilen $\mathfrak{D}$ -Kararlı $c_{ij}(s)$ çok terimli ile pozitif skaler γ için, her bir kapalı çevrim transfer fonksiyonu $\frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}$ $\mathfrak{D}$ -Kararlı olması ve $\mathcal{H}_\infty$ norm performans kısıtını sağlaması ancak ve ancak

$$\begin{bmatrix} c_{ij}^T d_{ij} + d_{ij}^T c_{ij} - \Pi^T (\Delta \otimes Q_{ij}) \Pi & n_{ij}^T \\ n_{ij} & \beta_{ij} \gamma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.30)$$

DME'lerini sağlayan simetrik $Q_{ij} = Q_{ij}^T$ matrislerinin ve skaler β_{ij} değerlerinin bulunması durumunda sağlanmaktadır.

2.3 Geliştirilen ÇG-ÇÇ Yöntemin Uygulanması

Bu bölümde, geliştirilen yöntemin başarımını göstermek ve diğer metotlarla karşılaştırmak için çeşitli yayınlardan seçilen bazı sistem modellerine başvurulmuştur. Burada kullanılan sistemlerin hepsi, sonlu boyutlu, doğrusal zamanla değişmeyen ve çok girişli çok çıkışlı (MIMO) sistemlerdir. Sabit dereceden kontrolcü çıkarımı üç farklı strateji üzerine kurgulanmıştır. İlk olarak tam dereceden kontrolcü çıkarımı için [39] çalışmasından yararlanılmıştır, ve bunun üzerinden LMIRANK konveks olmayan kısıtın gevşetilmesiyle sabit dereceden kontrolcü çıkarılmıştır. İkinci bir strateji olarak önce model indirgeme teknikleri uygulanmış, daha sonra elde edilen düşük dereceden model için tam dereceden kontrolcü elde edilmiştir. Son olarak sabit dereceden kontrolcü çıkarımının doğrudan çıkarmak adına açık kaynak kodlu HIF00, Matlab altında bulunan hinfstruct ve geliştirilen yönteme başvurulmuştur.

Tasarım problemi, Şekil 2.2'de gösterilen $P - K$ yapısı baz alınarak Denklem 2.27'deki sistem için, kapalı çevrim sistemin kararlılığının sağlanmasıyla beraber performans çıkışları ile bozucu girişleri arasında kalan sistemin $\mathcal{H}_\infty$ normunun minimize edilmesidir. Kullanılan sistemler ile oluşturulan kapalı çevrim sistemlerin performansları aşağıda verilmiştir.

Uygulama 1. Aşağıda sistem matrisleri verilen temel uygulama örneği [72]

çalışmasından alınmıştır. Model derecesi 2 olup, sistemin iki performans çıkışı, birer kontrol girişi, bozucu girişi ve ölçülebilen çıkışı bulunmaktadır. Farklı kontrolcülerle elde edilen kapalı çevrim sistemin normları Tablo 2.1’de verilmiştir. Burada merkezi çok terimliyi oluştururken, çok terimlinin kökleri olarak sistemin açık çevrim kutuplarının mutlak değerinin ters işaretlisi alınmıştır. Tablo 2.1’de de görüldüğü gibi sonuçlar birbirine çok yakındır, açık çevrim $\mathcal{H}_\infty$ normunun ∞ olduğu bu sistemin, kapalı çevrim sistemin $\mathcal{H}_\infty$ normu oldukça düşük bir seviyeye inmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Tablo 2.1 Temel problem için performans sonuçları

Kontrolör	$\mathcal{H}_\infty$ Norm
Tam Derece	1.0078
Geliştirilen Yöntem, $K = [-1.223]$	1.7338
hinfstruct, $K = [-1.291]$	1.7314
HIFOO, $K = [-1.291]$	1.7314
LMIRANK, $K = [-1.284]$	1.7313

Uygulama 2. Sistem matrisleri Denklem 2.33’de verilen süspansiyon sistemi [73] çalışmasından alınmıştır. Bu çalışmada, gerçek bir sistem üzerinden, süspansiyon modeli çıkarımı için sistem tanımlama teknikleri kullanılmıştır. 4. dereceden olan bu sistemin performans çıkışı olan aracın dikey yönündeki ivmelenmeyi, araç içindeki yolcuların hissedebileceği frekans aralığında irdelemek için sistemin ivme çıkışını ISO2361 ölçütleri çerçevesinde tasarlanan ikinci dereceden 4–8Hz bant aralığındaki filtreden geçirilmiştir. Böylece yeni sistemin derecesi 6 olmaktadır. Bu uygulamada da merkezi çok terimlinin kökleri, açık çevrim kutupların mutlak değerleri baz alınarak seçilmiştir. Bu mutlak değerlerin negatif işaretlisinin iki katı alınmıştır, ekstra olarak eklenmesi gereken iki kök olarak da açık çevrim sistem kutuplarının mutlak değerce en küçükleri alınmıştır. Merkezi çok terimli,

$$c(s) = s^8 + 366.7s^7 + 5.348 \times 10^4 s^6 + 3.968 \times 10^6 s^5 + 1.604 \times 10^8 s^4 + 3.566 \times 10^9 s^3 + 4.206 \times 10^{10} s^2 + 2.418 \times 10^{11} s + 5.298 \times 10^{11}, \quad (2.32)$$

şeklinde. Bu sistem için tasarlanan ikinci dereceden kontrolcüler ile tam dereceden kontrolcünün performansları Tablo 2.2’de verilmiştir. Bu tablodan da görüldüğü gibi ikinci dereceden kontrolcüler ile tam dereceden kontrolcüler benzer performans göstermişlerdir. Kontrolcüler gerçek sistem üzerinde test edilmemiştir. [74]

çalışmasında, bu yöntem tabanlı geliştirilen PID kontrolcü, hinfstruct fonksiyonu ile çıkarılan PID kontrolcü ve tam derece kontrolcü gerçek sistem üzerinde başarımları karşılaştırılmıştır. Geliştirilen yöntemle elde edilen PID kontrolcüsü diğerlerinden çok daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Tam dereceden kontrolcüyle beraber kapalı çevrim sistem 10. dereceye çıkmaktadır, bu tür yüksek dereceden sistemlerde olası ufak bir gürültü bile çıkışta ciddi sorunlara neden olabilmektedir. hinfstruct fonksiyonu ile çıkarılan PID kontrolcüsünün de geride kalmasının sebebi ise, bu fonksiyonun iteratif olarak ilerlemesi yani başlangıç koşulları verilmediği sürece rastlantısal bir başlangıç noktası ile çalışmasıdır. Bunların aksine iç kestirim tabanlı olan bu yöntem performansın gerçekleşmesini garanti etmektedir.

Bu sistem için model indirgeme tekniklerine başvurulmuş, küçük Hankel tekil değerlerinin atılmasıyla elde edilen 2. dereceden modelin orijinal sisteme benzer cevap verdiği söylenemez. Dolayısıyla bu ikinci dereceden model için çıkarılan kontrolcünün de başarımı pek iyi olmamıştır.

$$A = \begin{bmatrix} -19.7674 & 25.6571 & -40.6622 & 25.9981 \\ -4.1955 & -10.4602 & -34.7182 & -39.7065 \\ -9.9024 & -0.6211 & -41.4122 & -11.2298 \\ 7.5811 & 9.3144 & 23.5396 & 8.8044 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -69.3126 & 0.2581 \\ 40.0139 & 0.2074 \\ 52.8435 & 0.1746 \\ -29.9929 & -0.0457 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 19.7260 & 3.8051 & 29.5828 & -27.5216 \\ 0.0530 & -0.5588 & 1.2330 & 0.6870 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.33)

Tablo 2.2 Süspansiyon sistemi için performans sonuçları

Kontrolör	$\mathcal{H}_\infty$ Norm
Tam Derece	0.0165
Geliştirilen Yöntem, $K(s) = \frac{-4.058 \times 10^5 s^2 - 2.628 \times 10^6 s - 5.549 \times 10^7}{s^2 + 4.566 \times 10^4 s - 2.84 \times 10^5}$	0.0194
hinfstruct, $K(s) = \frac{-3.826 \times 10^5 s^2 - 2.478 \times 10^6 s - 5.229 \times 10^7}{s^2 + 4.307 \times 10^4 s - 2.677 \times 10^5}$	0.0168
HIFOO, $K(s) = \frac{-4.567 \times 10^4 s^2 - 2.949 \times 10^5 s - 6.286 \times 10^6}{s^2 + 5135 s - 3.102 \times 10^4}$	0.0931
LMIRANK, $K(s) = \frac{-1453 s^2 - 2.594 \times 10^4 s - 9.212 \times 10^4}{s^2 + 191.3 s + 2376}$	6.7314

Uygulama 3. Sistem matrisleri Denklem 2.35’de verilen model [75] çalışmasından alınmıştır. Bu model 4. dereceden olup, iki performans çıkışı ve iki bozucu girişi ile beraber bir ölçülen çıkış ve bir kontrol girişinden oluşmaktadır. Açık çevrim sistemin kararsız olduğu bu sistem için ikinci dereceden kontrolcü geliştirilen yöntemle çıkarılmıştır. Başvurulan tüm sabit dereceden kontrolcüler arasında sadece geliştirilen yöntem ile kapalı çevrim kararlılığı sağlayacak ve sonsuz normu belli bir seviyeye indirecek sabit dereceden kontrolcü çıkarılmıştır. hinfstruct ve HIFOO gibi

algoritmaların, başarımları uygun bir başlangıç noktasına bağlı olduğundan, bunlarla kararlılığı sağlayacak bir kontrolcü çıkarılamamıştır. Bu uygulamada merkezi çok terimli

$$c(s) = s^6 + 6.8778s^5 + 23.4968s^4 + 47.4879s^3 + 60.5338s^2 + 45.6486s + 17.0989, \quad (2.34)$$

şeklinde. Bu çok teriminin kökleri, açık çevrim sistemin sol yarı düzlemde bulunan iki kutbu bir birim sola kaydırarak elde edilmiştir. Bu sistem için tasarlanan ikinci dereceden kontrolcü ile tam dereceden kontrolcünün performansları Tablo 2.3'de verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1.5 & 1 \\ -1 & 3 & 2.1 & 2 \\ 1 & -1 & -0.6 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Tablo 2.3 Denklem 2.35'de verilen model için performans sonuçları

Kontrolör	$\mathcal{H}_\infty$ Norm
Tam Derece	20.0054
Geliştirilen Yöntem, $K(s) = \frac{-45.47s^2 - 13.36s - 56.9}{s^2 - 37.73s - 18.87}$	52.8092
hinfstruct	—
HIFOO	—
LMIRANK	—

Uygulama 4. Aşağıda sistem matrisleri verilen, temel manada Euler Bernoulli kışı içeren bu model [76] çalışmasından alınmıştır. Bu sistem 10. dereceden olup, iki performans çıkışı, 2 bozucu girişi, bir ölçülen çıkış ve bir kontrol girişinden oluşmaktadır. Bu uygulamada sönümleme katsayısı, $\zeta = 10^{-2}$ olarak seçilmiştir. Bu yüksek dereceden modelin asıl seçilme nedeni sabit düşük dereceden kontrolcünün pratikliğini göstermektir. Dolayısıyla 10. dereceden bir model için tam dereceden kontrolcü de eklendiğinde, top yekûn sistem 20. dereceden olacaktır.

Açık çevrim sistem kararlı olduğundan, merkezi çok terimli açık çevrim kutupları etrafında aranmıştır. Sonuç olarak merkezi çok terimli,

$$c(s) = s^{10} + 6.2s^9 + 3933s^8 + 1.789 \times 10^4 s^7 + 3.998 \times 10^6 s^6 + 1.238 \times 10^7 s^5 + 1.098 \times 10^9 s^4 + 2.041 \times 10^9 s^3 + 5.876 \times 10^{10} s^2 + 4.942 \times 10^{10} s + 2.228 \times 10^{11}, \quad (2.36)$$

şeklinde seçilmiştir. Bu çok teriminin kökleri, açık çevrim sistemin köklerinin iki katı alınıp, 0.4 birim sola kaydırılmasıyla elde edilmiştir. Bu sistem için tasarlanan

sıfırncı dereceden kontrolcüler ile tam dereceden kontrolcünün performansları Tablo 2.4’de verilmiştir. Sıfırncı dereceden kontrolcülerle optimal sonuca çok yakın performansların elde edilebileceği bu tablodan da görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 A = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -81 & -0.18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -256 & -0.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -625 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.9877 & 0 & 0.9877 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.3090 & 0 & -0.3090 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.8910 & 0 & -0.8910 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5878 & 0 & 0.5878 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix} \\
 C = & \begin{bmatrix} 0 & 0.8090 & 0 & -0.09511 & 0 & 0.3090 & 0 & 0.5878 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9877 & 0 & -0.3090 & 0 & -0.8910 & 0 & 0.5878 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9 \\ 0 & 1.9 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Tablo 2.4 Denklem 2.37’de verilen sistem için performans sonuçları

Kontrolör	$\mathcal{H}_\infty$ Norm
Tam Derece	3.1073
Geliştirilen Yöntem, $K = [-0.3433]$	3.1088
hinfstruct, $K = [-0.3394]$	3.1225
HIFOO, $K = [-0.3395]$	3.1223
LMIRANK	—

Temel amacı atmosferik türbülans kaynaklı deformasyon kontrolünün sağlanması olan uyarlamalı optik sistemler üç temel bileşenden oluşmaktadır. Bunlar yansıtıcı yüzeye sahip olan deforme edilebilir ayna (DM), dalga cephesi algılayıcısı (WFS) ve kontrol birimidir. Bu tür sistemlerin temel çalışma prensibi, algılama, hesaplama ve etkinleştirme biçimindedir. Öncelikle dalga cephesindeki bozulma, algılayıcı ile tespit edilir. Daha sonra kontrol birimi bu cephenin tersi formundaki cepheyi oluşturacak şekilde DM'yi sürer ve aynadan yansıyan dalganın cephesi düzeltilmiş olur. Tez çalışmasının bu bölümünde AO sistemi oluşturan WFS ile DM hakkında detaylı bilgi verilecektir.

3.1 Dalga Cephesi Algılayıcıları (WFS)

Dalga cephesinin fazı optik frekanslarda herhangi bir madde ile doğrudan etkileşime girmedeği için doğrudan ölçülmesi mümkün değildir [77]. Dalga cephesindeki faz kaymalarının çeşitli değişkenlerdeki etkilerini ölçecek algılayıcılar geliştirilmiştir. İlk gerçek zamanlı WFS örnekleri düşük dereceli bozulmalar olan defocus, tip ve tilt hatalarını ölçebilen optik takipçilerdir. Odaklanma algılayıcıları olarak bilinen bu algılayıcılar yüzeye gelen parlaklığı maksimize etme mantığına dayalı olarak çalışırlar. Gelen dalga cephesinin tilt açısını ölçmek için kullanılan başka bir yöntem ise quadrant algılayıcılarıdır [78]. Bu algılayıcılar üzerlerine bir ışın odaklandığında bir akım kaynağı gibi davranmaktadırlar. Eğer ışın algılayıcının tam ortasına odaklanmışsa, algılayıcının 4 kenarından aynı akım seviyesi ölçülür, ışın başka bir yere düşerse akım değerleri ilgili olarak değişir ve bu sayede gelen dalga cephesinin tilt açısı ölçülebilir. Düşük dereceden yaklaşımlar elde edilen görüntülerin düzeltilmesi için zamanla yetersiz kalmaya başlamışlardır. Bu sebeple yüksek dereceden algılayıcılara ihtiyaç duyulmuştur.

Yüksek dereceli algılayıcılardan bazıları bu düşük dereceli yöntemleri çok sayıda

alt görsele uygulayarak yüksek dereceden bir dalga cephesi şekli elde edebilirken, bir kısmı da klasik optik girişim tekniklerine dayanmaktadır. Yüksek dereceden algılayıcılar, genellikle dalga cephesinde oluşan bozulmaları bu etkinin neden olduğu parlaklık değişimleri aracılığıyla ölçer. Bu yaklaşımla algılayıcılar iki gruba ayrılabilir. Odak düzlemi üzerinde ölçüm yapanlar ve Pupil (yardımcı) düzlem üzerinde ölçüm yapanlar [79].

Odak üzerinde ölçüm yapan teknikler, objeden yayılan ışık mercekten geçtikten sonra odak düzlemi üzerinde düşer. Eğer kaynak noktasal ve tek renkli bir ışık kaynağı ise odak düzleminde nokta-dağılım fonksiyonu görülür (Point spread function). Bu nokta dağılım fonksiyonu ise Optical Transfer Fonksiyonun (Optical Transfer Function- Bu da aslında atmosferden giren ışığın görüntü oluşturmaya kadar değişimi temsil eden bir transfer fonksiyonu) Fourier dönüşümüdür. OTF içinde faz farkını içerdiğinden buradan dalga cephesi hesaplanabilir. Yardımcı düzlem kullanarak ölçüm yapan algılayıcılar ise uyarlamalı optik uygulamalarında en çok kullanılan algılayıcılar olarak karşımıza çıkmaktadır. Literatürde en çok karşılaşılan dalga cephesi algılayıcıları, girişim ölçer (interferometric) algılayıcıları, eğrilik (curvature) algılayıcıları, ve Shack–Hartman WFS’lerdir.

3.1.1 Girişim Ölçer (Interferometric) WFS’ler

Bu tip algılayıcılar girişim ölçme tekniğine, yani dalgaların farklı fazlarda toplanarak oluşturdukları girişim örüntülerini irdeleyerek dalgalar hakkında bilgi sunulmasına dayalıdır. Bu tür WFS’lerin en temel türü shearing girişim ölçerlerdir. Bu girişim ölçerler kendinden referanslıdır. Temel olarak gelen dalgayı iki parçaya ayırıp parçalardan birini belirli bir miktar kaydırıdıktan sonra iki dalgaya girişim yaptırma prensibine dayanır. Bu prensibe dayanan girişim ölçerleri dönel, radyal ve yanal olarak sınıflandırmak mümkündür.

Uyarlamalı optik sistemlerde en çok kullanılan girişim ölçerlerden biri yanal kayan girişim ölçerlerdir (Latering Shearing Interferometreler). Dalga cephesine kendisinin kaymış haliyle girişim yaptırılır. Gelen dalga ikiye ayrıldıktan sonra bir tanesi kayma sağlayacak düzlenek yardımıyla belirli bir miktar kaydırılır. İki dalga üst üste geldikleri yerlerde girişim yaparlar. Oluşan girişim saçakları kayma doğrultusunda faz kayması hakkında bilgi verirler. Bu bilgi yardımıyla dalga cephesinin şekli hesaplanabilir. Gerçek zamanlı uygulamalarda dalga cephesini ölçebilmek için iki tane girişim ölçere ihtiyaç duyulur. Sadece kayma doğrultusunda oluşan faz hakkında bilgi alınabilir. Dalga cephesini tamamıyla tekrar oluşturmak için ise birbirine dik iki düzlem üzerindeki faz farkı bilgisine ihtiyaç vardır.

3.1.2 Eğrilik (Curvature) Algılayıcıları

Eğrilik algılayıcısı Roddier tarafından 1988 yılında literatüre sunulmuştur [80]. Algılayıcının genel çalışma prensibi, görüntünün aynadan yansıyarak aynanın odak düzlemi üzerinde bir görüntü oluşmasına dayalıdır. Eğrilik algılayıcıları aynanın odak düzleminin önünde ve arkasında olmak üzere iki adet dedektör dizisi içerir. Gelen görüntü önce odağın l mesafe önündeki dedektör dizisi üzerine düşer ve parlaklık dağılımı kayıt altına alınır. Sonra odaktan l uzaklıktaki dedektör dizisi üzerine düşer ve parlaklığı kayıt altına alınır. Eğer dalga cephesi düz ise bu iki parlaklık dağılımı aynı olmalıdır. Eğer kıvrımlı bir dalga cephesi gelir ise bu iki dedektör dizisi üzerindeki parlaklık dağılımı aynı olmaz. Geometrik bir optik yaklaşımı kullanılarak iki düzlem arasındaki parlaklık dağılımının dalga cephesinin kıvrımını verdiği gösterilmiştir.

Eğrilik algılayıcılarda önemli bir seçim parametresi dedektörlerin aynanın odağından ne kadar uzaklığa yerleştirileceğidir. Bu l uzaklığının artması hassaslıkta bir azaltma yaratırken dinamik ölçüm aralığında artış sağlayacaktır. Hassaslıkta meydana gelen azalma algılayıcının düşük dereceden olan bozulmalara yaklaşımını etkiler. Eğer l uzaklığı en az olacak şekilde seçilirse eğrilik algılayıcıları sadece tilt açısını ölçebileceklerdir [79].

3.1.3 Piramit Dalga Cephesi Algılayıcıları

Yardımcı düzlem üzerinden ölçüm yapan bir diğer algılayıcı ise piramit dalga cephesi algılayıcılarıdır. Bu algılayıcılar 1996 yılında Ragazzoni tarafından literatüre sunulmuştur [81]. Bu algılayıcılarda merceğin odak noktasına piramit şeklinde bir prizma konulur. Bu piramitten geçen ışın 4 parçaya ayrılır. Bu sayede gelen görüntü 4 tane alt görüntüye ayrıştırılmış olur. Bu görüntüler yük bağlaşımlı aygıt (Charged-Coupled Device, CCD) algılayıcılar üzerine düşürülürler. Eğer dalga cephesi bozulmuş bir şekilde gelirse bu 4 alt görüntüde kaymalar meydana gelir ve bu kaymaların hesaplanması ile dalga cephesinin eğimi hesaplanabilir ve dalga cephesi tekrar oluşturulabilir.

3.1.4 Shack-Hartmann Dalga Cephesi Algılayıcısı

Geometrik optik prensiplerine dayanan algılayıcılardan ilki Shack-Hartmann (SH) algılayıcısıdır. Bu algılayıcının temelini oluşturan Hartmann testi uzun yıllardır bilinmektedir. Ayna ve lens gibi optik objelerin kalitesini ölçmek için kullanılır. Bu test uygulanırken test objesinin önü opak bir maske ile kapatılır. Bu maske üzerine delikler açılır. Optik nesneden yansıyan ışık bu deliklerden geçer ve CCD yardımı ile kayıt altına alınır. Kayıt altına alınmış noktaların pozisyonu ile deliklerin pozisyonu

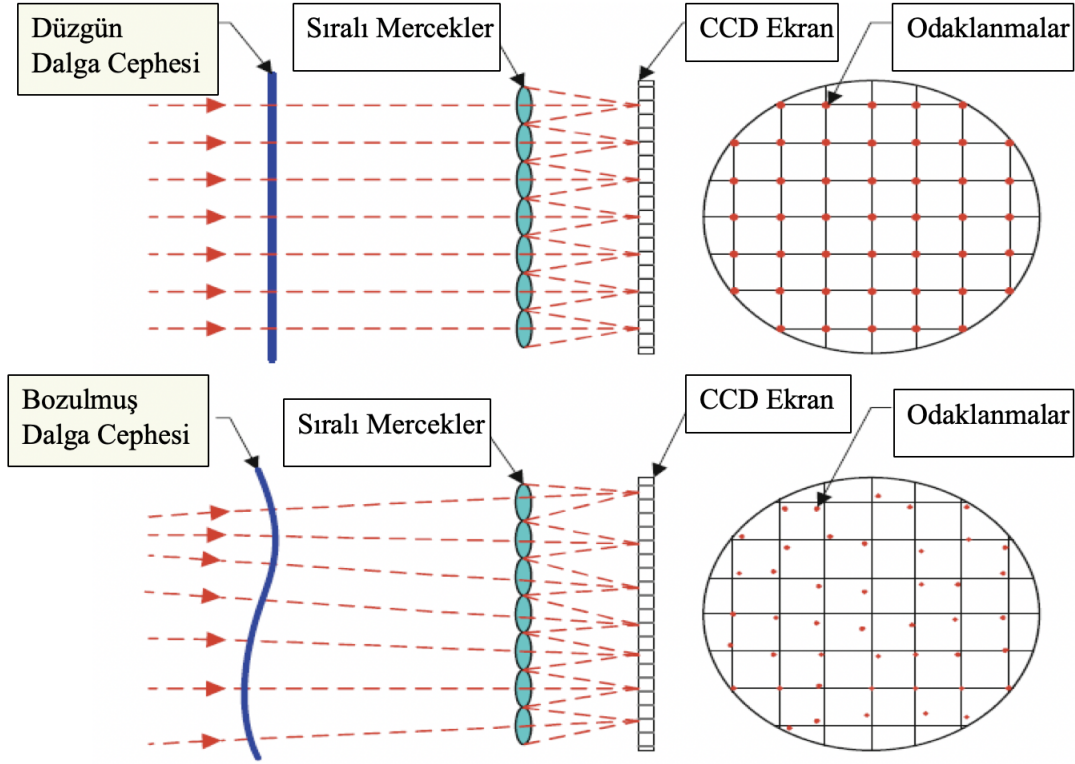
karşılaştırılarak optik objenin yansıttığı ışığın dalga cephesini ne kadar değişime uğradığı görülebilir.

1960 yılında Roland Shack ve Platt bu testi deliklerin yerine lensler koyarak geliştirmişlerdir. Gelen dalga cephesini 2 boyutlu karesel alt boyutlu görsellere indirgemişlerdir. Lenslerin gelen ışığı odaklaması sayesinde hem maskenin ışık toplama verimliliği arttırılmış hem de deliklerin kenarları yüzünden oluşan bozulmalar azaltılmıştır [2]. Eğer gelen dalga cephesinde bozulma yok ise lenslerden geçen ışık lenslerin odak noktası üzerine düşecektir, dalga cephesinde bozulma olduğu durumda ise düşen ışık odak noktasından kayacaktır. Bu kayma sayesinde dalga cephesinin eğimi (tilt) hesaplanabilir. Bu yöntemde gelen dalga cephesi ızgara halinde imal edilmiş bir çok lensten geçirilerek hesaplama yapılır. Lenslerin odak düzlemine ise CCD dizisi konularak pozisyon bilgisi alınır. Bu pozisyon bilgisi sayesinde tilt hesaplanır.

Pratikte gelen ışının ve kayma miktarının algılanabilmesi için en az 2x2 piksel boyutunda quadcell kullanılır. Lenslerin karşılık geldiği algılayıcı dışında başka bir algılayıcıyı etkilememesi için 1 piksel boyutunda koruyucu bir halka ile çevrilirler. Eğer bu algılayıcıların boyutu arttırılırsa algılayıcının dinamik ölçüm aralığı (dynamic range) artmış olur. Daha fazla piksel kullanarak daha büyük eğimler ölçülebilir fakat piksel sayısını arttırmak aynı zamanda gürültüyü ve okunma zamanını da arttırmaktadır. Keck teleskobunda 3x3 piksel boyutunda algılayıcılar kullanılmıştır [82]. Bazı sistemler ise her alt resim için 8x8 piksel kullanmaktadır. 8x8 piksel boyutundaki kareler gruplandırılarak daha az sayıda pikselden oluşmuş kareler gibi davranmaları sağlanabilir. Bu durumda daha büyük bir dinamik ölçüm aralığı elde edilirken fazla sayıda piksel kullanmanın dezavantajları da biraz azaltılmış olur. Ayrıca Shack-Hartman algılayıcıları akromatik algılayıcılardır yani ölçülen eğimler gelen ışığın dalga boyuna bağlı değildir.

Shack-Hartmann algılayıcısı için lens dizisi yapmak başlarda büyük bir problem olmuştur. Yeterince küçük boyutlarda ve hatasız lensler yapılamaz ise kaliteli bir ölçüm yapılamaz. Bu problem Shack-Hartmann algılayıcısının gelişiminde önemli bir sorun teşkil etmiştir. İlk lens dizisi Plack tarafından evinin mutfağında yapılmıştır [83].

Literatürde pek çok WFS olmakla birlikte Shack-Hartmann algılayıcıları AO sistemlerde en çok tercih edilenlerdir [9]. Yukarıda da değinildiği gibi dalga cephesindeki bozulmalar bu algılayıcı yapısı ile dolaylı yoldan ölçülebilmektedir. SH algılayıcısının temel çalışma kurgusu Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Algılayıcının ön yüzeyi küçük boyutlu ve sıralı monolitik merceklerden oluşmaktadır. Her bir mercek yerel olarak kendi üzerine düşen ışık demetini algılayıcının arka kısmında bulunan



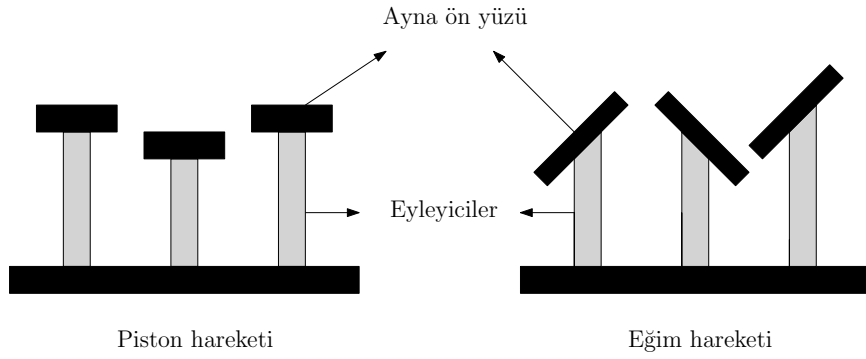
Şekil 3.1 Shack-Hartmann algılayıcısı temel yapısı

CCD algılayıcılardan oluşan yüzey üzerine odaklar. Her bir mercek, üzerine düşen ışık demetinin dalga yüzeyindeki bozulmasına bağlı olarak ışık demetini farklı bir noktada odaklar. Bu odaklanma noktalarının referans noktalara göre olan konumları kullanılarak ışığın dalga cephesindeki bozulma ölçülebilir [84].

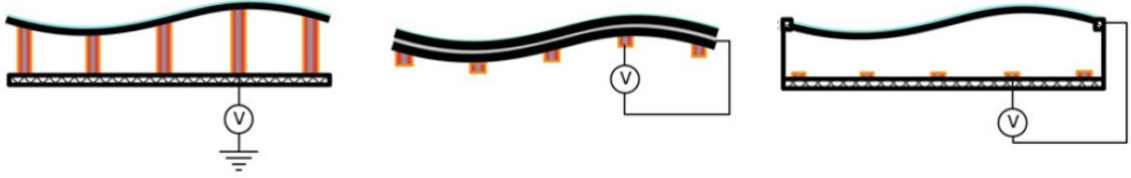
3.2 Dalga Cephesi Doğrultucu; Deforme Edilebilir Ayna (DM)

Temel manada işlevi, bozulan dalga cephesini düzeltmek olan dalga cephesi doğrultucuları uyarlamalı optik sistemlerin en kritik elemanlarından biridir. Bu amaçta birçok doğrultucu geliştirilse de, bunların içinde en çok başvurulan deforme edilebilir aynalardır. Bu tür aynalar şekil değiştirebilecek, yansıtıcı bir yüzeye sahip olmakta ve böylelikle yansıttığı ışığın formunu değiştirebilmektedir. DM'ler ihtiyaca binaen farklı yüzey ve eyleyici formlarında üretilebilmektedir. Şekil 3.2'de piston kullanılan bölümlü yüzeye sahip ve yine bölümlü fakat bu sefer tip/tilt özgürlüğü de bulunan DM'ler daha ziyade büyük ölçekli teleskop uygulamalarında kullanılmaktadır. Orta ölçekli çaplarda (cm aralığında), foton kayıpsız uygulama ihtiyacında ise elektrostatik veya piezo elemanlar ile üretilebilen sürekli yüzeye sahip DM'ler kullanılmaktadır. Şekil 3.3'de piezo elemanlar ile üretilmiş tek katlı (unimorph) ve çift katlı (bimorph) ile elektrostatik kuvvetler ile şekil alabilen DM'lerin

yüzey formları gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Bölümlü yüzey formlarındaki DM'ler



Şekil 3.3 Sürekli yüzey formlarındaki DM'ler

3.2.1 Deforme Edilebilen Aynaların Sınıflandırılması

90'lı yıllarda gelişen Mikro Elektromekanik (MEMS) teknolojisi deforme edilebilen ayna üretiminde kullanılmasıyla, uyarlamalı optik sistemlerde MEMS aynalar yer etmeye başlamıştır. Geleneksel üretimdeki aynalarla kıyaslandığında, MEMS aynalar düşük maliyeti, küçük boyutu sebebiyle kullanıcıların ilgisini çekmektedir. MEMS aynaların ortaya çıkmasıyla beraber, uyarlamalı optik sistemlerin kullanımı astronomiyle sınırlı kalmayıp, biyolojik görüntüleme ve lazer uygulamalarına da yayılmıştır. Polisilikon yüzey mikroişleme işlemleri kullanılarak üretilen bu aynalar son derece hafif ve kompakt, az enerji tüketimine sahip ve binlerce aktüatör dizisi için ölçeklenebilme özelliğine sahiptirler. Bu yeni sınıf silikon bazlı deforme edilebilen aynaların yüksek strok kapasitesi, yüksek bant genişliği ve en az maliyetle üretilebilmesiyle ilgili literatürde ilk olarak [85]'ten başlayarak birçok çalışma yapılmıştır. Daha detaylı bilgi için [86], [87], [88], [89] çalışmalarına ve buradaki referanslara başvurulabilir.

MEMS aynalar, sürekli ve segment (bölütlü) yapıda üretilebilmektedir. Segment aynalar, sadece piston ve tip-tilt hareketi yapabilen aynalar olarak ayrılırken; sürekli aynalar, membran ve sürekli facesheet olarak ayrılmaktadır [90]. Sürekli facesheet ve membran aynaların her ikisi de sürekli yapıya sahip olsalar da modelleme

aşamasında bir farklılık söz konusudur. Bu farklılığın sebebi facesheet aynanın kalınlık boyut oranıdır. Kalınlık (h) ve boyut (a) için $a/h \geq 80 \dots 100$ oranını sağlayan aynalar membran olarak tanımlanırken, $8 \dots 10 \leq a/h \leq 80 \dots 100$ oranına sahip yapılar ince plak olarak tanımlanmaktadır [91]. İlk olarak [92]'de tanıtılan membran aynalar; düşük kütlesi sebebiyle histeresiz problemini barındırmaması, düşük gerilim değerleriyle çalışması, yüksek rezonans frekanslarına sahip olması ve düşük maliyetlerle üretilebilmesi gibi avantajlara sahiptir. Genellikle $0.5-1.5 \mu m$ kalınlığında olan membran, polarlama gerilimine (V_0) sahip saydam bir elektrot ve $V_0 \pm V_{signal}$ voltajına sahip eyleyicilerden oluşan tampon bir bölge arasında yer alır. Membran aynaların şematik gösterimi Şekil 3.4'te verilmektedir. Membran aynalarda giriş çıkış ilişkisi birçok çalışmada Poisson denklemiyle

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \nabla^2 w + \frac{F(r, t)}{\sigma} \quad (3.1)$$

ifade edilmektedir [92], [93], [94]. Ancak, literatürde bu ilişkiyi biharmonik denklem olarak ifade eden çalışmalar da vardır [95]. Denklem (3.1)'de T yoğunlukla aynanın kalınlığının çarpımı, σ ise aynanın gerilim katsayısıyla kalınlığının çarpımıdır. Sürekli facesheet aynaların modellenmesinde, ilk olarak [96] çalışmasından başlayarak biharmonik plak denklemi kullanılmaktadır. Bu aynalar, Şekil 3.4'de gösterilen membran aynalarla aynı yapıdadırlar. Nokta tipi eyleyicili biharmonik plak denklemi

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (3.2)$$

$$f = \sum_{k=1}^{N_a} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) u_k(t)$$

şeklindeir. N_a eyleyici sayısı, $\delta(\cdot)$ dirac delta operatörü, (x_k, y_k) ise eyleyicinin ayna üzerindeki konumudur. E elastisite modülü, h ayna kalınlığı ve ν Poisson oranı olmak üzere sertlik katsayısı D ,

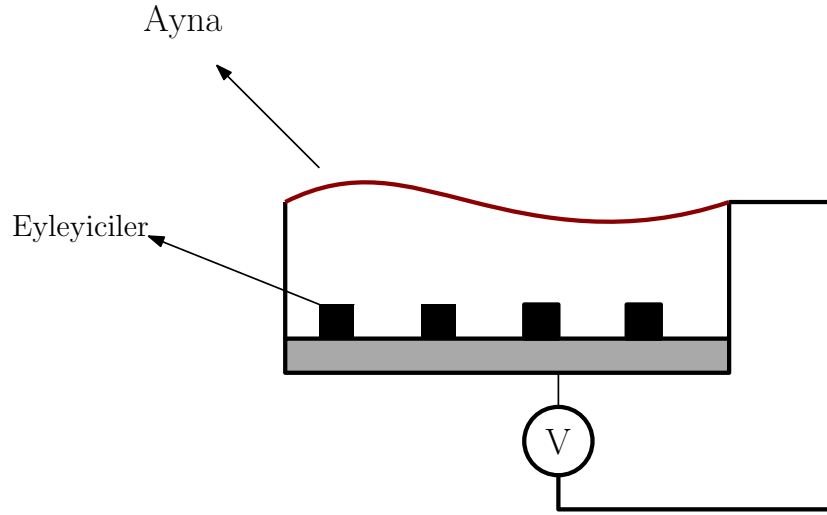
$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanmaktadır. ρ ise aynanın kesit yoğunluğudur.

3.2.1.1 Deforme Edilebilen Aynanın Sürüş Teknikleri

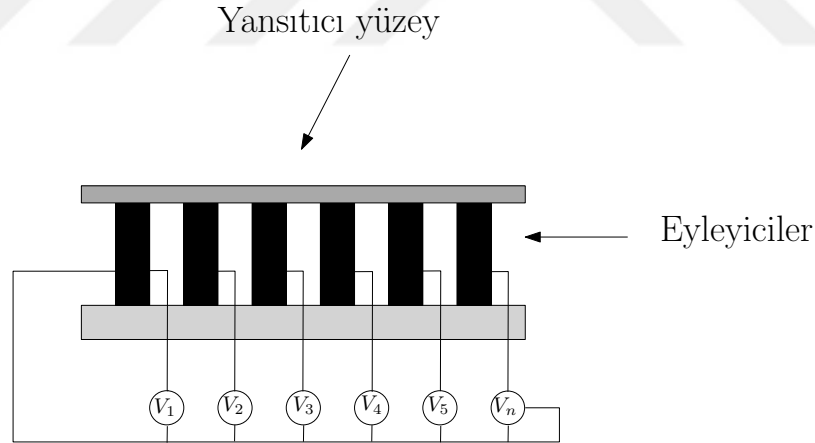
3.2.1.1.1 Piezoelektrik Sürüş Uyarlamalı optik sistemlerde, piezoelektrik sürüş biçimine sahip deforme edilebilir aynalar bimorph ve istifli dizi (stacked array) olarak iki şekilde görülebilir.

Stacked array aynalar, ince ve sürekli bir yansıtıcı yüzeyden ve piezoelektrik maddeden



Şekil 3.4 Membran ayna

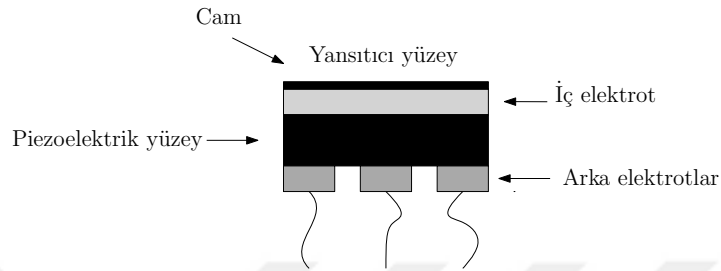
oluşan eyleyici bloklarından oluşmaktadır [97]. Şekil 3.5’de, stacked array aynaların şematik gösterimi verilmektedir. Yansıtıcı yüzeyin deforme edilmesi, eyleyiciye gerilim uygulanarak uzanımı ve büzülmesiyle gerçekleşir. Yüksek eyleyici sayısına sahip olması, hızlı yanıt oranı gibi avantajlarının yanında %5 ile %15 arası histerisiz sergilemesi, fazla yer işgal eden ve karmaşık elektronik aksama ihtiyaç duyması gibi dezavantajlara sahiptirler [98].



Şekil 3.5 Stacked mirror deforme edilebilen ayna

Bimorph deforme edilebilen aynalar genellikle bir cam levhaya iletken bir yapıştırıcıyla piezoelektrik seramik bir levhanın yapıştırılmasından oluşur. İki levha arasında sürekli, iletken bir elektrot bulunur. Piezoelektrik yüzeyin açıkta kalan kısmında da aynanın tasarımına göre değişken sayıda arka elektrotlar bulunmaktadır. Cam levhanın açıkta kalan kısmı ise optik yansıma özelliklerini sağlayacak şekilde kaplanmaktadır. Gerilim, piezoelektrik yüzeye uygulandığında bimorph yüzeyin şekli değişmektedir [99]. Şekil 3.6’da bimorph aynaların genel yapısı gösterilmektedir. Stacked array aynalara göre üretiminin daha kolay olması, düşük maliyeti ve yüksek

strok kapasitesi, özellikle 10 metre çapına kadar olan teleskoplarda kullanımını cazip kılmıştır. Gerilimin piezoelektrik yüzeye elektrotlar yoluyla iletilmesi ve bu elektrotların mekanik eyleyicilere göre daha sık aralıklarla yerleştirilebilmesi, bimorph aynalara dalga cephesi bozulmalarını daha etkin bir şekilde düzeltilebilme özelliğini sağlamıştır. Bu avantajlarının yanında düşük rezonans frekansı, yüksek elektronik askıya (rack) ihtiyaç duyması, eyleyici sayısının azlığı, piezoelektrik eyleyicilerin histeresiz problemi başlıca dezavantajlarıdır.

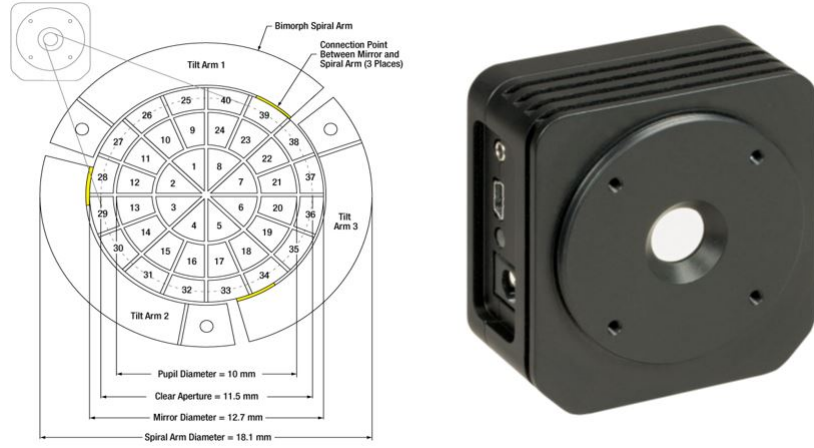


Şekil 3.6 Bimorph deforme edilebilir ayna

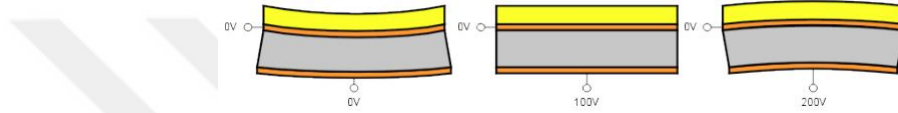
Genel yapı bu şekilde olmakla beraber farklı tipte tasarlanmış bimorph aynalar mevcuttur. [100] numaralı referansta bimorph ayna, iki adet piezoelektrik yüzeyin birleşmesinden oluşmuş ve modellenmesi incelenmiştir. Bimorph aynanın şekil değiştirmesi için her iki yüzeye zıt kutuplarda gerilim verilerek bükülme etkisi (bending effect) yaratılmıştır. Başka bir deyişle bimorph aynanın şekli; piezoelektrik yüzeyin ters yüzüne bir kutup uygulandığında genişleme, diğer kutup uygulandığında büzülme etkisi yaratılması yoluyla aynanın kalınlığı etkilenmeden değiştirilmiştir. İlk katmanı ayna, ikinci katmanı piezoelektrik eyleyiciler ve üçüncü katmanı piezoelektrik sensörlerden oluşan üç katmanlı dairesel bir bimorph aynanın modeli ve kontrolü [101], [3] çalışmalarında verilmiştir.

ThorLabs firmasının üretmiş olduğu 40 eyleyiciye sahip çift katlı piezo elemanları ile desteklenmiş DM Şekil 3.7’de, Şekil 3.8’de ise piezoya uygulanan gerilime göre aynanın aldığı form gösterilmiştir.

3.2.1.1.2 Elektromanyetik Sürüş Literatürde elektromanyetik sürüşe sahip deforme edilebilen aynalar, genellikle membran veya continuous facesheet yapıda üretilmektedir. Ayna yüzeyinin deforme edilmesi; alt tarafına yerleştirilen mıknatısların, bobine uygulanan gerilimin işaretine bağlı olarak oluşan manyetik alan sayesinde itici ve çekici kuvvet uygulamasıyla sağlanmaktadır. Eyleyiciler ve ayna arasında üretilen kuvvet, bobinin içinde oluşturulan manyetik alanla orantılıdır. Dahası, eyleyicilerden ortaya çıkan kuvvet bobine uygulanan akıma doğrusal olarak bağlıdır.



Şekil 3.7 ThorLabs firmasının üretmiş olduğu DMP40 ve eyleyici yerleşimi



Şekil 3.8 DMP40'da piezoya uygulanan gerilimle aynanın aldığı form

Bu tipte sürülen aynalar; histerisiz olmadan, düşük gerilim ile yüksek miktarda deformasyon elde edilebilmesi gibi avantajlara sahiptir. Bunun yanında mikro bobin üretimindeki ve mıknatısların yerleşimindeki zorluklar, yüksek enerji tüketimi ve açığa çıkan ısı bu aynaların dezavantajlarıdır [102]. Şekil 3.9'da ALPAO firmasının üretmiş olduğu 3228 eyleyiciye sahip elektromanyetik sürüşlü deforme edilebilir ayna gösterilmiştir.

3.2.1.1.3 Elektrostatik Sürüş Elektrostatik eyleyiciler iki adet yarı iletken levhadan oluşmaktadır. Ayna, bir alt katman üzerine yerleştirilmiş ayna ve paralel levha kapasitörleri arasında bir potansiyel farkın uygulanmasıyla oluşturulan elektrostatik kuvvetlerle deforme olur. MEMS aynanın performansı elektrostatik eyleyicilerin dinamik davranışına bağlıdır. Elektromekanik "snap through" veya paralel levhaların pull-in kararsızlık durumu eyleyicilerin gerekli strok miktarına ulaşmasını olumsuz anlamda etkilemektedir.

[90] ve [103] çalışmalarında yüksek strok amaçlanarak çeşitli tasarım teknikleri önerilmiştir. Düşük maliyeti, düşük enerji tüketimi, histerisiz olmadan sürüş sağlaması gibi avantajları yanında, eyleyici dinamiklerinin doğrusal olmayan davranışı modelleme ve kontrol aşamasında zorluklar getirmiştir. Çekici kuvvet aynaya etki eden tek kuvvettir, dışbükey deformasyon zordur ve elde edilen yer



Şekil 3.9 3228 eyleyiciye sahip elektromanyetik sürüslü deforme edilebilir ayna
değiştirme miktarı küçüktür.

Elektrostatik eyleyicilerin doğrusal olmayan davranışı, [96] çalışmasında

$$f_{i,j} = \frac{k^2 \epsilon V(t)^2}{2(g - w(x_i, y_i, t))^2} \quad (3.4)$$

olarak modellenmiştir. ϵ vakum geçirgenliği, k havanın dielektrik sabiti, $V(t)$ uygulanan voltaj ve g iletken levhalar arasındaki boşluktur. [104] çalışmasında ayna ve elektrostatik eyleyicilerden oluşan deforme edilebilir ayna modeli elde edilmiştir.

ThorLabs firmasının üretmiş olduğu 140 eyleyiciye sahip elektrostatik DM Şekil 3.10'da verilmiştir.

3.2.2 Deforme Edilebilir Aynanın Modellenmesi

Piezoelektrik eyleyicili DM'nin yüzeyi Love tarafından 1888 yılında geliştirilen matematiksel modelle gösterilebilir. Love bu teoriyi geliştirirken Kirchhoff tarafından ortaya konulan kabulleri kullandığı için bu teori Kirchhoff-Love yüzey teorisi olarak bilinmektedir. Bu model ise tek boyutlu Euler-Bernolli çubuğu modelinden genelleştirilerek elde edilmiştir [105]. Esnek bir katman altında hareket eden eyleyicilerden oluşan sistemin yüzeyine ait gerçekçi model, zamanla birlikte uzamsal değişimi de barındırmaktadır.

Şekil 3.11’de gösterilen esnek bir yüzeye ait sonsuz küçük bir $hdx dy$ kesitini etkileyen kayma kuvvetleri (shear force), eğilme momentleri (bending moment), burulma momentleri (twisting moment) ve dış kuvvetler Şekil 3.12’de verilmiştir. σ_x , σ_y , normal gerilmelerin sonucu birim uzunluk başına düşen M_x , M_y eğilme momentleri ve τ_x , τ_y kayma gerilmeleri sonucu M_{xy} , M_{yx} burulma momentleri oluşmaktadır. Birim uzunluk başına düşen kayma kuvvetleri, F_x , F_y de kayma gerilmeleri, τ_{xy} , τ_{yx} sonucu oluşur. Sonuç olarak küçük boyutlu $hdx dy$ kesitine ait hareket denklemleri, $x, y, t \geq 0 \in \mathcal{R}$ için aşağıdaki gibi yazılabilir [106];

$$\begin{aligned} & -F_x dy + \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dy - F_y dx + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy \right) dx + f dx dy \\ & = \rho h dx dy \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_y dx + M_{xy} dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - F_y dx dy = 0, \quad (3.6)$$

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - F_x dx dy = 0. \quad (3.7)$$

Yukarıdaki denklem takımında gerekli sadeleştirmeyi yapacak olursak,

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + f(x, y, t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) - F_y = 0 \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) - F_x = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir. (3.9) ile (3.10) denklemlerini, F_x , F_y için çözülüp, Denklem (3.8)’de yerine yazacak olursak,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + f(x, y, t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.11)$$

ifadesi elde edilir. Yüzeydeki noktasal yer değiştirme ve birim uzunluğa düşen moment arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir;

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.13)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.14)$$

burada $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ayna yüzeyinin bükülme direncini, E Young sabitini, ν Poisson

sabitini, h DM kalınlığını, ρ yüzey yoğunluğunu sembolize etmektedir [107]. N eyleyicili aynaya uygulanan kuvvet $f(x, y, t)$ ise şu şekilde tanımlanabilir;

$$f(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) u_j(t). \quad (3.15)$$

Sonuç olarak ince bir yüzey iki boyutlu olarak, aynanın isotropik ve homojen olduğu varsayımı altında aşağıdaki gibi modellenenebilir;

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t). \quad (3.16)$$

3.2.2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi DM Modellenmesi

Nümerik bir yöntem olan Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY), karmaşık geometri ve sınır koşullarına sahip problemler için etkili bir yöntemdir. SEY’de genel fikir, ilgili yüzeyi alt yüzeylerin toplamı biçiminde ifade edip, bu alt yüzeyleri kendi içerisinde çözüp, birleştirme işlemi yapılarak ana çözüme gidilmesidir. Problemin karmaşık yüzeyini daha basit parçalara bölen alt yüzeylere sonlu eleman adı verilmektedir.

Özellikle esnek plakların dahil olduğu elastisite problemlerinde, sonlu eleman şekilleri ve interpolasyon fonksiyonlarının seşimleri son derece önemlidir. Birleştirme aşamasındaki uyumluluğun sağlanması ve hatanın en aza indirgenmesi adına sonlu elemanların yüzeyle uyumlu şekillerde (dikdörtgen, üçgen, dörtgen vb.) seşilmesi gerekmektedir. Bununla beraber interpolasyon fonksiyonları, sistemin sonsuz sayıdaki serbestlik derecesini sonlu sayıda polinomla ifade etmeye çalışmaktadır. Sonlu eleman yaklaşımının yakınsaklığı, algoritmanın dayanıklılığı, sürekliliğin sağlanması gibi faktörler, seçilen interpolasyon fonksiyonlarına bağlıdır. Çünkü birleştirme aşamasında nodlardaki sürekliliğin sağlanması bazı serbestlik dereceleri için sağlanırken bazıları için ihlal ediliyor olabilir. Bu problemin üstesinden gelebilecek interpolasyon fonksiyonlarının seçimi aşamasında, seçilen fonksiyonların [108] numaralı referansta Bölüm 10’da gösterilen yama testindeki (patch test) şartları sağlaması gerekmektedir.

SEY ile yaklaşım üç ana adımda aşağıdaki gibi özetlenebilir;

1. Tüm yüzeyin alt parçalara ayrılması
2. Her alt parçalara, nodal noktalar ve interpolasyon polinomlarının doğrusal kombinasyonu biçiminde ifade edilip çözüm elde edilmesi,
3. Bütünü elde etmek adına bu parçaların birleştirilmesi.

3.2.2.1.1 Deforme Edilebilir Aynanın Sonlu Boyutlu Modelinin Elde Edilmesi

Bir önceki bölümde deforme edilebilen aynaların tipleri sınıflandırılmış, literatürde bu aynaların eyleyicilerle olan ilişkisi ortaya koyan modellerden bahsedilmiştir. Deforme edilebilen aynaların eyleyicilerle olan ilişkisinin tipine göre biharmonik denklem veya Poisson denklemi olarak bilinen kısmi diferansiyel denklemlerle (KDD) ifade edilmesi, aynaların esnek yapısından kaynaklanmaktadır. Eyleyici veya eyleyicilerden uygulanan voltaj sonrası aynanın davranışını dinamik olarak ele aldığımızda, deforme miktarındaki değişim sadece zamana bağlı olarak değişmemektedir. Aynı zamanda aynanın iki boyutlu sürekli yüzeyi üzerinde konumsal olarak da değişmektedir. Bu durum, deforme edilebilen aynaları sonsuz boyutlu veya dağıtımlı parametrelili sistemler olarak anılan sistem sınıfına sokmaktadır. Sonsuz boyutlu sistemler, adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemlerin aksine, $\frac{\cosh\sqrt{s}}{\sinh\sqrt{2s}}$ gibi sonsuz adet kutup ve sifıra sahip irrasyonel transfer fonksiyonlarına sahiptir. Zaman düzleminde ise sistem durumları sonsuz boyutlu bir vektör uzayının, çoğunlukla Hilbert uzayı, elemanıdır [109]. Sistemde gecikme ifadesinden ($e^{-\tau s}$) de bilindiği gibi, aksi durumlar mevcut olsa da sistem içindeki irrasyonel ifadeler kontrol ve benzetim çalışmaları için sonlu bir yaklaşıma ihtiyaç duyar. Denklem 3.16'da elde edilen aynanın modelini tekrardan ele alacak olursak, bu aynanın kenarlarından mesnetli olduğunu ifade eden sınır koşulları beraber sistemin modeli,

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (3.17)$$

$$w|_{x=0,L} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0,L} = 0, \quad (3.18)$$

$$w|_{y=0,L} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0,L} = 0. \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

DM'nin sonlu boyutlu modelini elde etmek için, öncelikle PDE'nin zayıf formunu elde edilmesi gerekmektedir. Zayıf formun genel gösterimi,

$$a(u, w) = f(u)$$

şeklinde olup, burada u test fonksiyonu ve w da bağımlı değişkendir. DM modelin zayıf formu, Denklem 3.11'de verilen PDE modelini test fonksiyonu, $u(x, y, t)$ ile çarpıp,

tanım kümesi içerisinde integrali alınarak elde edilmektedir;

$$\int_{\Omega_e} \left(u(x, y, t) \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + u(x, y, t) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t} \right) dx dy - \int_{\Omega_e} u(x, y, t) f(x, y, t) = 0. \quad (3.20)$$

Ana denkleme yaklaşık çözüm sunabilmek adına diferansiyelin maksimum derecesi test fonksiyonuyla paylaşılması gerekmektedir. Bu işlem için kısmi integrasyon yöntemine başvurulmaktadır.

$$\frac{\partial(M_x u)}{\partial x} = \frac{\partial M_x}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} M_x \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2(M_x u)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} u + 2 \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} M_x \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} u = \frac{\partial^2(M_x u)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} M_x \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial(M_y u)}{\partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial y} u + \frac{\partial u}{\partial y} M_y \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2(M_y u)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} u + 2 \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} M_y \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} u = \frac{\partial^2(M_y u)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} M_y \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial(M_{xy} u)}{\partial x} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} M_{xy} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2(M_{xy} u)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} u + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} M_{xy} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (3.28)$$

$$2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} u = 2 \frac{\partial^2(M_{xy} u)}{\partial y \partial x} - 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} M_{xy} \quad (3.29)$$

3.23, 3.26 ve 3.29 verilen denklemleri 3.20'de yerine yazıp, daha sonra 3.12, 3.13, 3.14 denklemlerindeki moment ifadelerini de eklediğimizde zayıf form yapısı,

$$\int_{\Omega_e} D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} & -\rho h \int_{\Omega_e} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2 \int_{\Omega_e} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) dx dy \\ & + \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial^2 (M_x u)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (M_{xy} u)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 (M_y u)}{\partial y^2} \right) dx dy - \int_{\Omega_e} u f dx dy = 0, \end{aligned}$$

halini almaktadır. Zayıf form bize başlangıç koşullarını kullanma imkanı sağlamaktadır. Böylelikle Gradient ve Divergence teoremlerini de kullanarak, Denklem 3.30'da, kartezyen formda verilen son iki terimi, normal ve tanjant koordinatlarına dönüştürebiliriz. Ana denklemin zayıf veya varyasyonel formun avantajlarından biri varyasyonel form içerisinde sınır koşullarını kullanabilmeye olanak tanınmasıdır. Buradaki denklemde son iki terim sınır koşullarıyla ilişkilendirilebilir. Sınır koşullarına geçerken yüzey integrallerinden sınır integrallerine geçmek gerekmektedir. Bu geçiş divergence ve gradient teoremiyle sağlanmaktadır. Mesnetli ayna için teğet ve normal ekseninde ifade edilen sınır koşulları

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (3.31)$$

şeklinde ifade edilebilir. Varyasyonel formdaki son iki ifade için gradient ve divergence theoremi kullanarak kartezyen koordinatlardan sınır koordinatlarına (teğet ve normal) geçilip, sınır koşulları uygulanırsa Denklem 3.30 aşağıdaki forma indirgenmiş olur;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy + \rho h \int_{\Omega_e} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} u dx dy - \int_{\Omega_e} u f dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Denklem 3.32'de verilen yapı sistemin genel zayıf veya varyasyonel formu olarak adlandırılmaktadır. PDE ifadesinin sonlu boyutlu kütle yay modeline indirgenebilmesi için,

$$M\ddot{q} + Kq = F,$$

denkleminde ki rijitlik matrisi (K) ve kütle matrisinin (M) elde edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, çözüm $w(x, y, t)$ ve test $u(x, y, t)$ fonksiyonlarını aşağıda verilen şekilde

tanımlayalım,

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(x, y) \quad (3.33)$$

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \varphi_j(x, y) \quad (3.34)$$

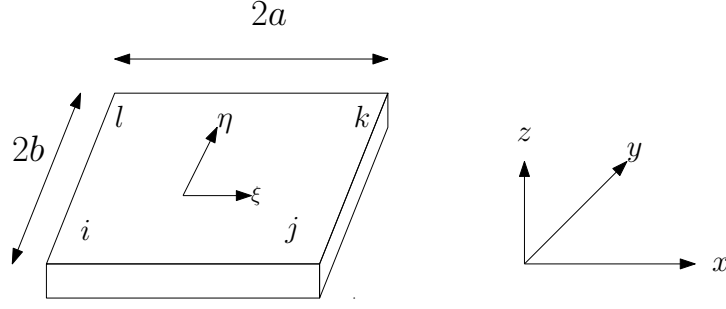
burada q düğüm değerleri ve φ ise interpolasyon fonksiyonlarıdır. Bu ifadeleri Denklem 3.32'de yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} D \left(\sum_{j=1}^n q_j(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \sum_{i=1}^n q_i(t) + \nu \left(\sum_{j=1}^n q_j(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \sum_{i=1}^n q_i(t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j=1}^n q_j(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \sum_{i=1}^n q_i(t) \right) + \sum_{j=1}^n q_j(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \sum_{i=1}^n q_i(t) \right. \\ & \quad \left. + 2(1 - \nu) \sum_{j=1}^n q_j(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \sum_{i=1}^n q_i(t) \right) dx dy \\ & + \rho h \int_{\Omega_e} \sum_{j=1}^n q_j(t) \varphi_j \varphi_i \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t) dx dy - \int_{\Omega_e} \sum_{j=1}^n q_j(t) \varphi_j f dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

burada $q_j(t)$ parantezine alacak olursak,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n q_j(t) \left(\sum_{i=1}^n q_i(t) \left(\int_{\Omega_e} D \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \right) dx dy \right) \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t) \left(\rho h \int_{\Omega_e} \varphi_j \varphi_i dx dy \right) - \int_{\Omega_e} \varphi_j f dx dy \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$q_j(t)$ 'leri sadeleştirdikten sonra, bu ifadeden aradığımız matrisler olan kütle, rijitlik ve



Şekil 3.13 Dikdörtgensel Sonlu Eleman

kütle matrislerini aşağıda verilen şekilde elde ederiz,

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} D \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (3.37)$$

$$M_{ij}^e = \rho h \int_{\Omega_e} \varphi_j \varphi_i dx dy, \quad (3.38)$$

$$F_j^e = \int_{\Omega_e} \varphi_j f dx dy = \int_{\Omega_e} \varphi_j \sum_{k=1}^{N_a} \delta(x-x_k) \delta(y-y_k) u_k(t) = \sum_{k=1}^{N_a} \varphi_j(x_k, y_k) u_k(t). \quad (3.39)$$

Bu matrisleri daha uygun formda elde etmek adına,

$$B := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad C := \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

tanımlamalarını kullanacak olursak,

$$K^{(e)} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b B^T C B dx dy \quad (3.41)$$

$$M^{(e)} = \rho h \int_{-a}^a \int_{-b}^b N^T N dx dy \quad (3.42)$$

şeklinde elde ederiz [110], [105].

Şekil 3.13'de olduğu gibi bir DM'yi 4 düğüm noktasına sahip dikdörtgensel sonlu elemanlar ile ayrıklaştıralım. Bu durumda her düğümde de 3 bilinmeyen bulunmakta ve böylece bir sonlu elemanda serbestlik derecemiz 12 olacaktır.

$$q(t) = \begin{Bmatrix} q_i(t) \\ q_j(t) \\ q_k(t) \\ q_l(t) \end{Bmatrix}, \quad q_i(t) = \begin{Bmatrix} w_i(t) \\ \theta_y(t) \\ \theta_x(t) \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

burada w_i 'ler z yönündeki yer değiştirme bir başka deyişle çökme miktarını, $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ y ekseninde eğimi ve $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ise x eksenindeki eğimi ifade etmektedir. Daha önce de bahsi geçen, interpolasyon fonksiyonunun, $\varphi(x, y)$, seçimi, sonlu elemanlar arası sürekliliğin sağlanması açısından önem arz etmektedir. Literatürde bu fonksiyon seçimi için, $w(x, y, t)$ 'nin çokterimli ifadesinden yararlanılmıştır [108]. Bu çokterimli ifade,

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3, \quad (3.44)$$

ve matris formu

$$w = P\alpha \quad (3.45)$$

$$P = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3) \quad (3.46)$$

şeklindedir. i. nod için bu çokterimli ifade;

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_9 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + \alpha_{12} xy^2 \quad (3.48)$$

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = -\alpha_2 - 2\alpha_4 x - \alpha_5 y - 3\alpha_7 x^2 - 2\alpha_8 xy - 2\alpha_9 y^2 - 3\alpha_{11} x^2 y - \alpha_{12} y^3 \quad (3.49)$$

şeklini alır, bunun da matris formu,

$$q_i(t) = L\alpha \quad (3.50)$$

$$\alpha = L^{-1}q_i(t) \quad (3.51)$$

şeklinde elde edilir. Burada L 12×12 'lik ve nodal koordinatlara dayalı bir matristir.

3.45 ve 3.51 denklemlerini de kullanarak interpolasyon fonksiyonu,

$$w = \varphi(x, y)q(t) = PL^{-1}q_i(t) \quad (3.52)$$

şeklinde elde edilir. Burada elde edilen şekil fonksiyonları global koordinatlara sahiptir. Deforme edilebilen ayna, Şekil 3.13'de gösterilen sonlu elemanı (bu durumda $a = b$) kullanarak birbirine eş alt bölgelere ayrılacağından, şekil fonksiyonlarının normalleştirilmesi işlem kolaylığı sağlayacaktır. Yani, eş sonlu elemanların koordinatı $(-a, a)$ aralığından $(-1, 1)$ aralığına çekilecektir. Bu işlem, P matrisinde (x, y) parametrelerini $(a\xi, b\eta)$ parametreleriyle dönüşüm yaparak yerine getirilir. Aynı işlem dizisi takip edilerek normalleştirilmiş yerel koordinatlara göre elde edilen şekil fonksiyonları elde edilir. Sonuç olarak 3.41 ve 3.42 denklemlerinde rijitlik ve kütle matrislerinin ifadeleri verilmişti, geriye kalan tek eleman sisteme uygulanan eyleyici kuvvetlerdir. Eyleyici tarafından yüzeye uygulanan kuvvetin yapısı Denklem 3.15'de tanımlanmıştır, bunun matris formu,

$$F = \int_{\Omega_e} \varphi_j(x, y) \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) f_i(t) dx dy \quad (3.53)$$

$$= \varphi_j(x_i, y_i) f_i(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.54)$$

şeklinde elde edilir. Bu noktadan sonra katkı matrisleri sonlu eleman özelinde hesaplanarak, birleştirme adımına geçilir [111]. Birleştirme işlemi yerine getirildikten sonra denklem (3.17) aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem olarak elde edilir.

$$M\ddot{x}_{dm}(t) + \mathcal{B}\dot{x}_{dm}(t) + Kx_{dm}(t) = Fu(t), \quad (3.55)$$

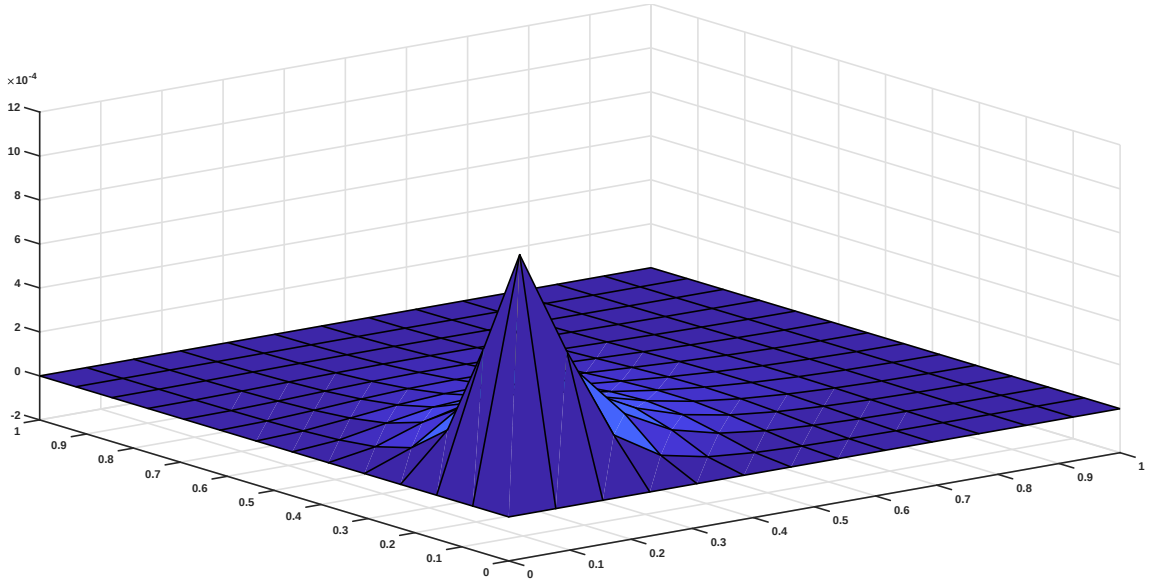
$$x_{dm}(t) = \begin{bmatrix} w_i & \theta_{y_i} & \theta_{x_i} \end{bmatrix}', \quad i = 1, \dots, n \quad (3.56)$$

$$\theta_{y_i} \triangleq \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_{x_i} \triangleq -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.57)$$

Burada $M, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kütle ve rijitlik matrisidir. $F \in \mathbb{R}^{n \times N_a}$ ise kuvvet matrisidir. Denklem (3.17) herhangi bir yapısal sönüme sahip değildir. Ayna yapısal bir sönüme sahip olduğundan daha gerçekçi bir model elde etmek için Rayleigh sönüm faktörü ($\mathcal{B} = \alpha M + \beta K$) modele eklenmektedir. α ve β sistemin sönüm değerine uygun katsayılarıdır. Denklem (3.55), durum uzay formunda

$$\dot{x}_{dm}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\mathcal{B} \end{bmatrix}}_{A_{dm}} x_{dm}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F \end{bmatrix}}_{B_{dm}} u, \quad (3.58)$$

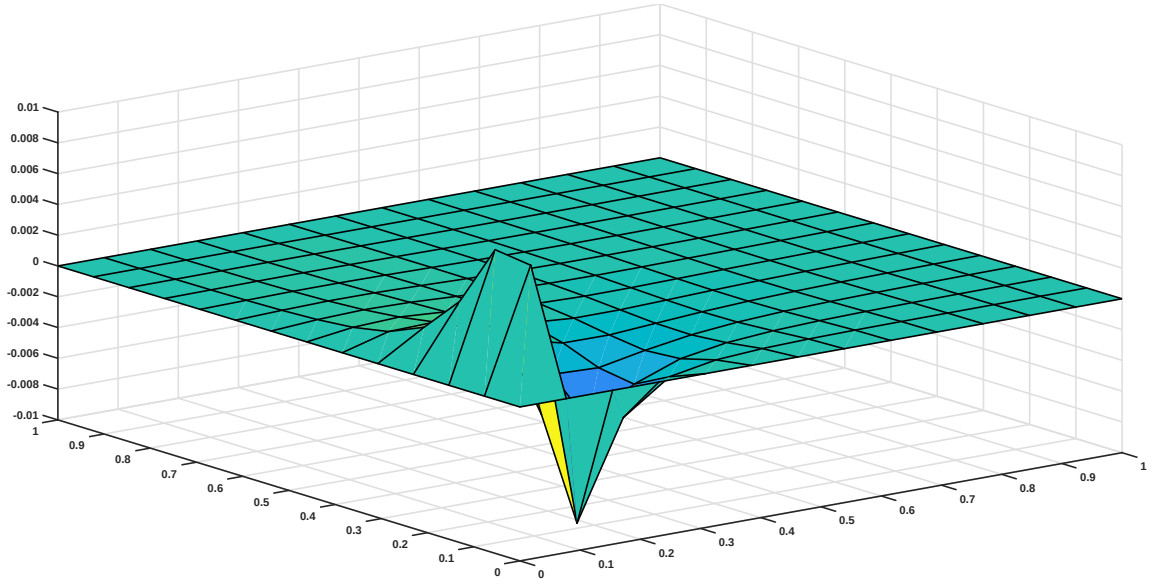
$$y_{dm}(t) = C_{dm}x_{dm}(t)$$



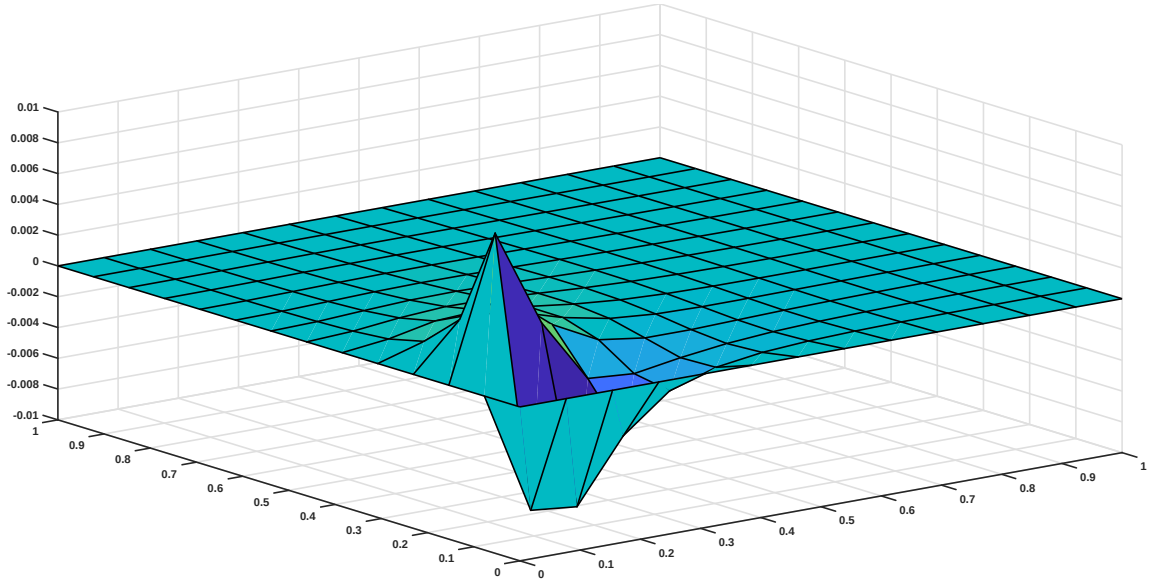
Şekil 3.14 Köşesinden yukarı yönde kuvvet uygulanmasıyla DM'nin aldığı form

şeklinde de yazılabilir.

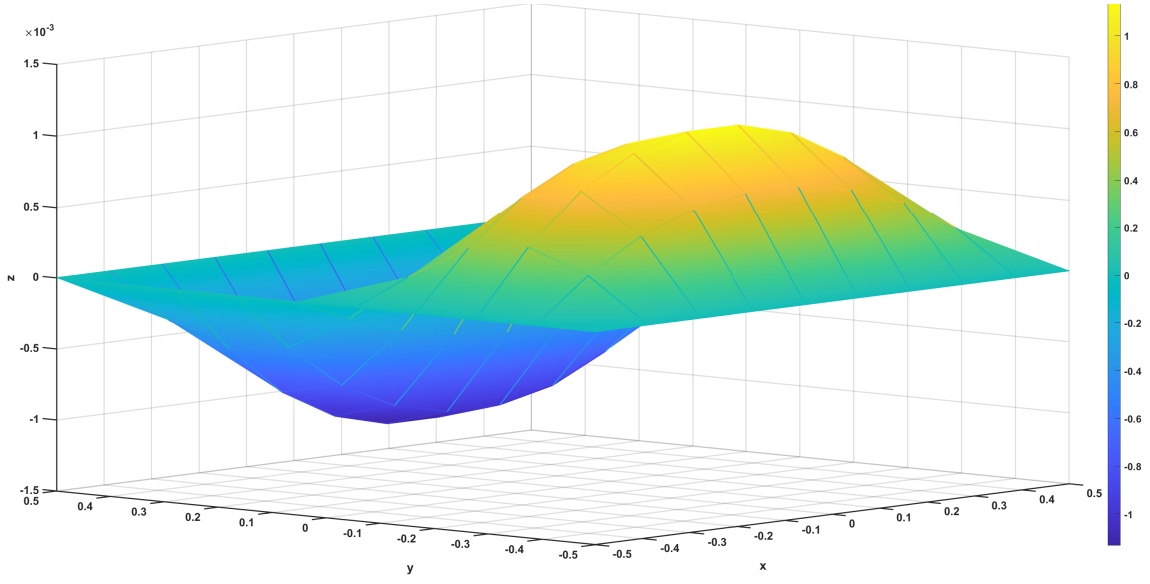
Hesaplamalar sonucu elde edilen modelin anlam ifade edip etmediğini test etmek için, statik durum için aynanın bir köşesinden yukarı yönde kuvvet uygulayıp aynanın aldığı form incelenmiştir. Şekil 3.14-3.16'da görüldüğü gibi, eğimler ve aynanın kuvvet sonucu aldığı form, öngörümüzü destekler niteliktedir. Bununla birlikte elde edilen ayna modeli üzerinden yaygın kullanılan bozulma modları da oluşturularak, model test edilmiştir. Tip/Tilt, Focus ve Astigmatizm bozulma modlarına ilişkin DM'nin aldığı formlar sırasıyla Şekil 3.17, 3.18 ve 3.19'de gösterilmiştir.



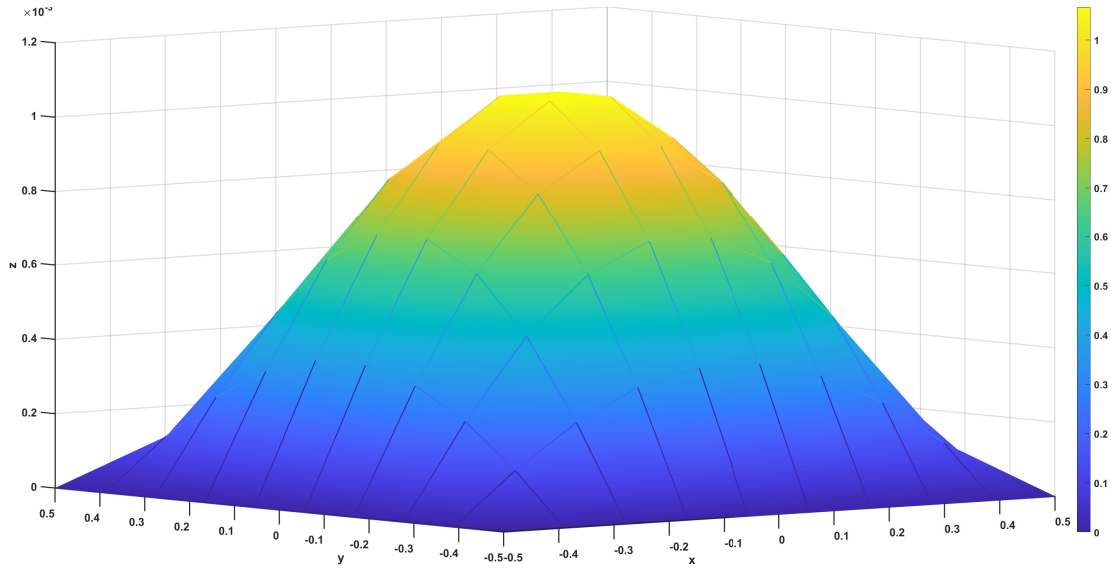
Şekil 3.15 Köşesinden yukarı yönde kuvvet uygulanmasıyla DM'nin x eksenindeki eğimin aldığı form



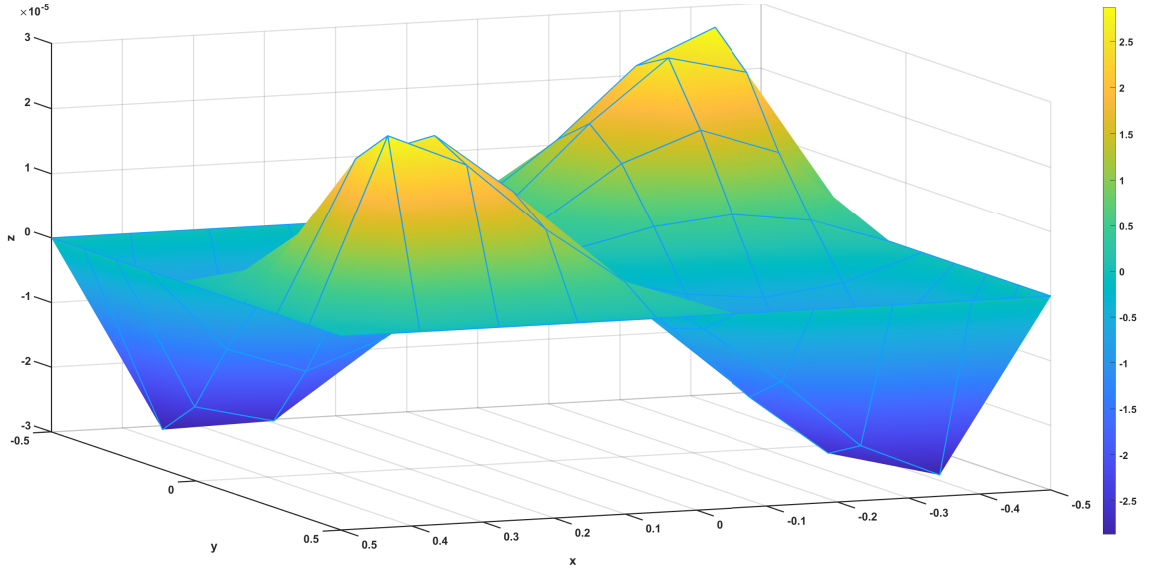
Şekil 3.16 Köşesinden yukarı yönde kuvvet uygulanmasıyla DM'nin y eksenindeki eğimin aldığı form



Şekil 3.17 DM ile oluşturulan Tip/Tilt bozulma modu



Şekil 3.18 DM ile oluşturulan Focus bozulma modu



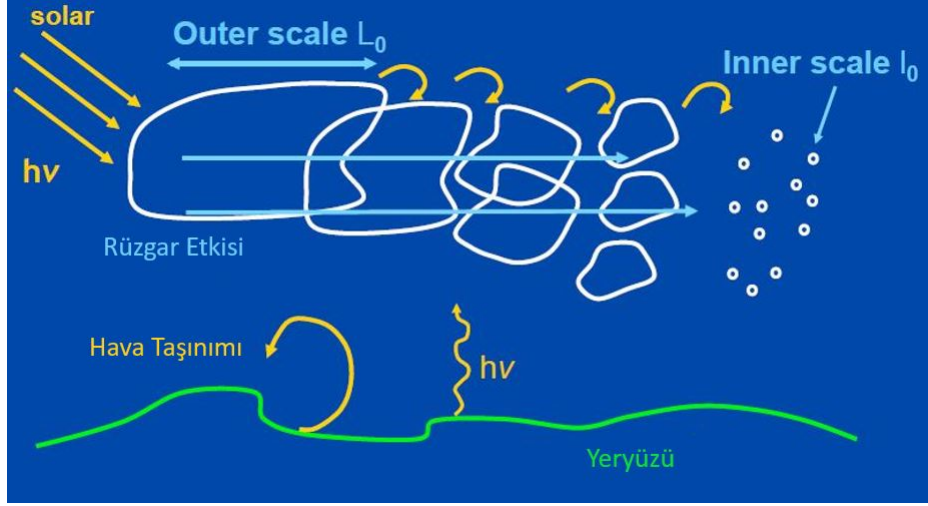
Şekil 3.19 DM ile oluşturulan Astigmasim bozulma modu

4

ATMOSFERİK TÜRBÜLANS MODELİNİN OLUŞTURULMASI

Atmosfer yapısı gereği içerisinde çeşitli nem ve sıcaklık değerlerine sahip boyutları birbirinden farklı hava baloncukları barındırır. Atmosfer içerisindeki hava akışı sebebiyle bu baloncuklar sürekli olarak hareket halindedir. Işık atmosfer içerisinde ilerlerken bu hava baloncukları içerisinde geçerek kırılmaya uğrar. Gökyüzündeki yıldızlardaki kırışımlar, özellikle yaz aylarında meydana gelen görüş bozuklukları atmosferik türbülans kaynaklanmaktadır. Bu tür sorunların üstesinden gelmek adına kullanılması elzem olan AO sistemlerin etkin çalışabilmesi için atmosferik türbülansın uygun bir modelinin çıkarılması gerekmektedir. Atmosfer, sıcaklık, basınç, rüzgar hızı, nem ve daha birçok birim tarafından değişime uğrayabilen bölgesel olarak homojen bir tabaka olarak tanımlayabiliriz.

Bu tür dalgalanmaları modellemek için Kolmogorov'un atmosferik türbülansa yönelik istatistiksel yaklaşımı oldukça kullanışlıdır. 1941 yılında ünlü matematikçi Andrey Nikolaevich Kolmogorov günümüzde kullanılan atmosferik türbülans modellerinin temelini atmıştır. Türbülanslı ortamda enerji yayılımı ilgili 1941 yılındaki çalışması bu alana öncülük etmektedir [112]. Şekil 4.1'de gösterildiği gibi, türbülans büyük dış ölçekli (Outer Scale) yapılarda meydana gelir ve daha küçük ölçekli yapılara yayılımı gerçekleşir. Bu enerji iletimi yeterince küçük ölçekli bir yapıya ulaştığında viskozite kuvvetleri ile ısı olarak kaybolmaktadır. Daha sonraki yıllarda Tatarskii, türbülans akışındaki bu enerji transferini yöntemi de kullanarak, bir türbülans katmanındaki elektromanyetik dalga yayılımı teorisini geliştirmiştir [113]. Takip eden yıllarda, Kolmogorov ve Tatarskii'nin çalışmalarından da esinlenerek, Fried atmosferik türbülansın şiddetinin karakterize etmek adına kullanılabilecek ölçülebilir parametreleri sunmuştur [114].



Şekil 4.1 Kolmogorov Türbülans Modelinde Enerji yayılımı (Claire E. Max, UCSC)

4.1 Atmosferik Türbülans Parametreleri

Atmosferik türbülansın analizine başlamadan önce, bu bölümde türbülansın yapı taşlarını oluşturan parametreler ele alınmıştır.

4.1.1 C_N^2 Sintilasyon Yapı Sabiti

Birimi $m^{-2/3}$ olan C_N^2 yapı sabiti kırılmanın gücünü karakterize etmektedir. Böylece atmosferin şiddetini ölçme de kullanılan bir sabittir. Bu yapı sabiti yükseklikle ve zamanla beraber bölgesel olarak da değişim göstermektedir [115]. Şöyle ki sıcaklığın da etkisiyle gündüz ölçümleri üst değerlerde, gece boyunca sabit, gün batımı ve doğumunda ise minimum değerlerde seyretmektedir. C_N^2 sabitinin ölçümü üzerine birçok çalışmaya literatürde rastlanmaktadır. Bu çalışmalarda genel olarak bölgesel ölçümler baz alınıp, yapılan deney ve gözlemlere de dayanarak C_N^2 ile irtifa arasındaki denklem ilişkisi ortaya konulmuştur. Hali hazırda bu ilişkiyi logaritmik üstel olarak ifade edenlerden başlıcaları;

$$C_N^2(h) = A \left[2.2 \times 10^{-53} h^{10} \left(\frac{w}{27} \right)^2 e^{-\frac{h}{1000}} + 1 \times 10^{-16} e^{-\frac{h}{1500}} \right], \quad (4.1)$$

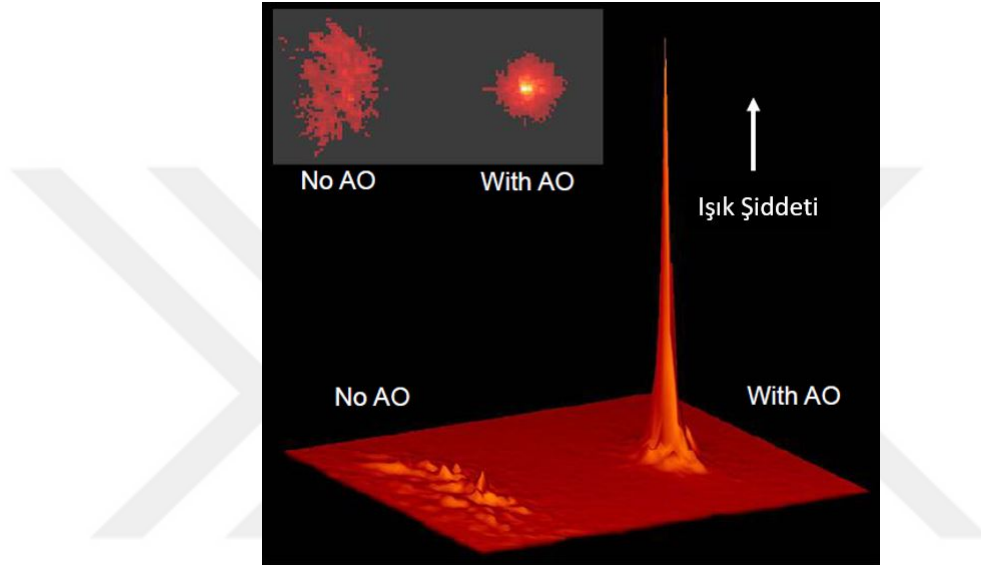
burada Hufnagel referans yüksekliği 3km olarak almış, bu yükseklik üstünden ölçümlerden esinlenerek modeli oluşturmuştur [116]. Daha sonra [117] çalışmasında yer yüzeyi etkisini ekleyerek şu şekilde elde etmiştir;

$$C_N^2(h) = A \left[2.2 \times 10^{-53} h^{10} \left(\frac{w}{27} \right)^2 e^{-\frac{h}{100}} + 1 \times 10^{-16} e^{-\frac{h}{1500}} \right] + B e^{-\frac{h}{100}}. \quad (4.2)$$

Son yıllarda teknolojiye de faydalanılarak elde edilen ölçümlerle C_N^2 profiline yönelik

modeller çıkarılmıştır. [118] çalışmalarında birçok bölgesel noktada meteorolojik verileri, basınç, sıcaklık, rüzgar, nem, ölçerek yer yüzünden 30km yüksekliği içeren C_N^2 profilini çıkarmışlardır. Bir diğer tercih edilen profil [119] çalışmalarında geliştirilmiştir. Bu ekip Şili, Cerro Pachon dan bulunan gözlemevinden yaptıkları uzun soluklu ölçümler ve gerçekleştirilen deneylerle bir çift üstel fonksiyonların kombinasyonunu içeren şu denklemi elde etmişlerdir;

$$C_N^2(h) = Ae^{-\frac{h}{h_0}} + Be^{-\frac{h}{h_1}}. \quad (4.3)$$



Şekil 4.2 AO ile desteklenen ve desteklenmeyen noktasal kaynağın ışık şiddeti (Claire E. Max, UCSC)

4.1.2 Seeing Etkisi

Gökyüzündeki yıldızların gözlem esnasında kırıştığını görürüz. Dolayısıyla görüntü net değil de hareket ediyormuş gibi gelir, bu da görüntünün bulanık olarak gözlenmesine sebep olur. Astronomide görüntüde ki bu bulanıklığa atmosferik seeing denmektedir. Atmosferin şiddet gücü hakkında bilgi verdiğinden, astronomide görüntüdeki bozulmayı belirlemede kullanılan geleneksel yöntem seeing ölçümü olmaktadır. Bir yıldızdan gelen ışığı ele alalım, eğer atmosferik türbülans olmasa Şekil 4.2’de gösterildiği gibi bunun ışık şiddeti grafiği çok daha dar bir gösterime sahip olacakken, türbülans etkisiyle yayılmaktadır. Bu yayılımın miktarı ölçmek adına ışık şiddeti grafiğinde maksimum şiddetin yarısına denk gelen tam aralık (full width at half-maximum, FWHM) ifadesi kullanılmaktadır. Bir yıldızın, teleskobun odak noktasındaki FWHM şiddeti atmosferik seeing karşılık gelmektedir [115]. Birçok yaklaşık değerlerle ifade edilmesine rağmen, genel olarak C_N^2 indisinin ışığın yayılma yönündeki integraliyle elde edilir. Bu ifadenin denklemi Fried tarafından şöyle

verilmiştir;

$$\varepsilon_{FWHM} = 0.98 \frac{\lambda}{r_0} \quad (4.4)$$

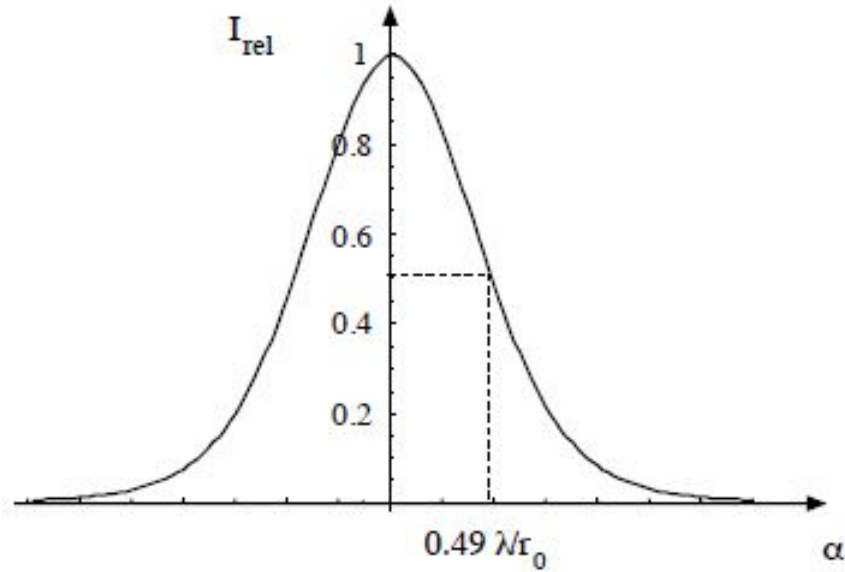
burada λ dalga uzunluğunu, r_0 ise Fried parametresini,

$$r_0 = \left(16.7 \lambda^{-2} \int_0^\infty C_N^2(h) dh \right)^{-3/5} \quad (4.5)$$

vermektedir. Bu parametre de yerine yazıldığında

$$\varepsilon_{FWHM} = 5.25 \lambda^{-1/5} \left(\int_0^\infty C_N^2(h) dh \right)^{3/5}, \quad (4.6)$$

olarak elde edilir [114]. Bu ifade için çok küçük değerlerden bahsedildiğinden dolayı, birim olarak *arcsec* kullanılır. *arcsec* açısal bir birim olmakla beraber, *arcminute*'in 1/60'ına denk gelir. *arcminute* ise derecenin altmışta birine denk gelmektedir. Dolayısıyla *arcsec* 1/3600 derece, 1/1296000 bir tam tur veya $\pi/648000$ (yaklaşık olarak 1/206265) radyan'a karşılık gelmektedir.



Şekil 4.3 Işık şiddeti dağılımı

4.1.3 Dış (Outer) ve İç (Inner) Ölçekleri

Atmosferik türbülans üzerine bazı çalışmalarda, atmosferi katmanlara ayırmışlardır. Bu ayırım genelde üç bölgeden oluşmaktadır; yer yüzeyi, sınır katmanı ve troposfer, stratosfer gibi yeryüzünün sürtünme etkisi altında olmayan serbest atmosfer katmanı. Bunların sınırları da çalışmalara göre farklılık göstermektedir. Her bir katmanda, akış bir dış ölçekle, L_0 sınırlanmaktadır [120]. Bu ölçek optik bozulmayla ters orantılıdır.

Her bir katmandaki dış ölçeğin dalga cephesine etkisi de dalga cephesi uzamsal faz uyumluluğu dış ölçeği ile ifade edilmektedir [121];

$$\mathcal{L}_0 = \left(\frac{\int_0^\infty L_0^{-1/3} C_N^2(h) dh}{\int_0^\infty C_N^2(h) dh} \right)^{-3}. \quad (4.7)$$

$\mathcal{L}_0$ değeri ölçümlerden ölçümlere farklılık gösterse de 20-30 m arasında değişmektedir [118].

Bölümün başında da bahsedildiği gibi, enerjinin büyük ölçeklerden küçük ölçeklere akışı sırasında, yeteri miktarda küçük bir ölçekte enerji viskozite sürtünmelerinden artık ısıya dönüşmektedir. Kolmogorov akışının sınırlayan bu birime iç ölçek l_0 , denir. Yapılan ölçümler incelendiğinde iç ölçek, l_0 , 2-12 mm arasında değiştiği gözlemlenmektedir [122].

4.2 Atmosferik Türbülans Modelleri

Kolmogorov'un öncü olduğu bu alanda pek çok türbülans modeli bulunmaktadır. Bu modeller gereksinimler doğrultusunda, araştırmacılar tarafından uzamsal ve zamansal karakteristikleri ele alınmıştır. Kolmogorov atmosferik türbülansı modellerken başvurduğu temel çıkış noktası, aralarında r uzaklığı bulunan uzayda tanımlanan iki nokta arasındaki hız farkıdır. Bu hız farkı kullanılarak, türbülans fazının uzamsal karakteristiği yapı fonksiyonu, D_ϕ , ile tanımlanır,

$$D_\phi(r) = \langle |\phi(r_1) - \phi(r_2)|^2 \rangle, \quad (4.8)$$

bu yapı fonksiyonunu kovaryans fonksiyonu cinsinden yazacak olursak,

$$D_\phi(r) = 2(\sigma^2 - C_\phi(r)) \quad (4.9)$$

burada $C_\phi(r) = \langle \phi(r_1), \phi(r_2) \rangle$ türbülans fazına ilişkin kovaryans fonksiyonu, σ_ϕ ise varyansıdır. Kolmogorov türbülans teorisine göre r uzaklıktaki türbülans fazının yapı fonksiyonu,

$$D_\phi(r) = 6.88(|r|/r_0)^{5/3} \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir [79]. Burada r_0 atmosferin gücünü gösteren Fried parametresidir. Kolmogorov'un bu modeline ilaveten, literatürde deneysel verilerle elde edilen dış

ölçeğinde, $\mathfrak{L}_0$, eklenmesiyle elde edilen von Karman yapı fonksiyonu,

$$D_\phi(r) = \left(\frac{\mathfrak{L}_0}{r_0}\right)^{5/3} \frac{\Gamma(11/6)}{2^{11/6}\pi^{8/3}} \left(\frac{24}{5}\Gamma(5/6)\right)^{5/6} \left(\frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - \left(\frac{2\pi r}{\mathfrak{L}_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi r}{\mathfrak{L}_0}\right)\right) \quad (4.11)$$

şeklinde olup burada $K_{5/6}(\cdot)$ Bessel fonksiyonu, Γ ise Gamma fonksiyonudur.

Hesaplamalar doğrultusunda elde edilen Kolmogorov'un uzamsal güç spektrumu,

$$\mathfrak{S}_{Kolmogorov}(f) = \frac{0.0229}{r_0^{5/3}} f^{-11/3}, \quad (4.12)$$

şeklinde [2]. Kolmogorov'un çıkardığı bu modele ilaveten, yukarıda da bahsi geçen ve deneysel verilerle elde edilen iç l_0 ve dış $\mathfrak{L}_0$ ölçeklerinde kullanılmasıyla yaygın iki model daha elde edilmiştir. Bunlardan von Karman güç spektrumu,

$$\mathfrak{S}_{vonKarman}(f) = \frac{0.0229}{r_0^{5/3}} (f^2 + \mathfrak{L}_0^{-2})^{-11/6} e^{-l_0^2 f^2}, \quad (4.13)$$

şeklinde olup [123], daha çok yüksek frekanslarda iç ölçeğin etkisini nispeten görülebilecek olan Hills-Adrew güç spektrumu ise,

$$\mathfrak{S}_{HillsAdrew}(f) = \frac{0.0229}{r_0^{5/3}} (f^2 + \mathfrak{L}_0^{-2})^{-11/6} \left(1 + 3.43 f l_0 + 0.538 (f l_0)^{7/6}\right) e^{-3.625 l_0^2 f^2}, \quad (4.14)$$

şeklinde [124]. Bu üç spektrum Şekil 4.4'de verilmiştir. Burada dalga uzunluğu $\lambda = 500nm$ olarak kabul edilmiş, $\mathfrak{L}_0$, l_0 ve C_N^2 değerleri ise [118], [119] çalışmasından alınmıştır.

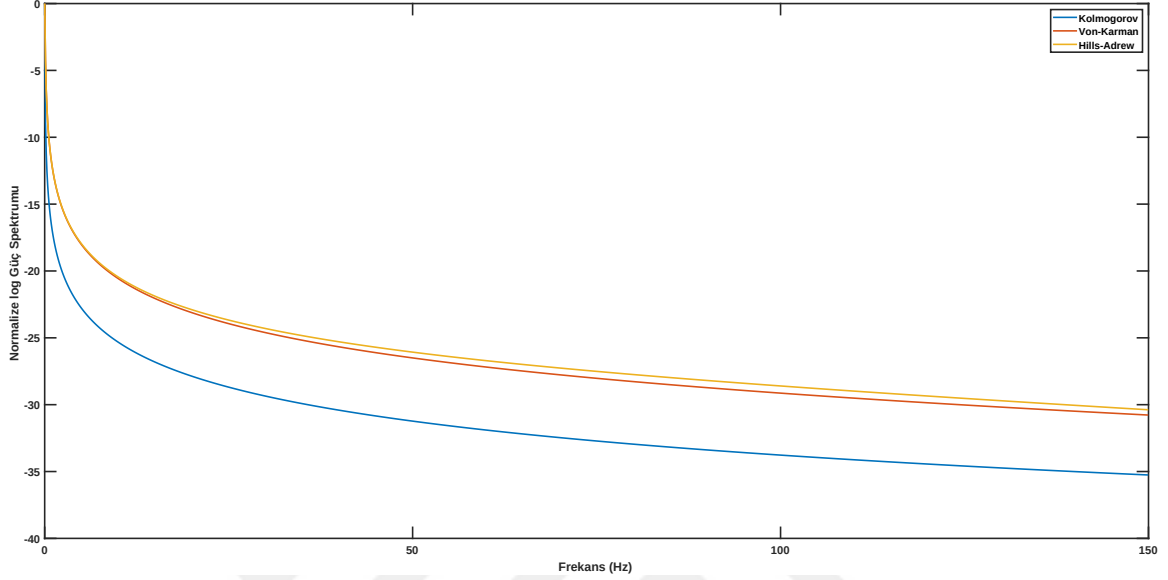
Şimdiye kadar atmosferik türbülansın uzamsal özellikleri ele alınmıştır. Türbülansın zamansal değişimi ise birçok uygulama için elzemdir. Türbülansın zamansal karakteristiğini incelemeye başvurulmuş temel yaklaşım Taylor (frozen-flow) dondurulmuş akış hipotezidir [6], [79]. Bu yaklaşım kısa bir süreliğine atmosferik türbülansın değişmemesi üzerine kuruludur. Burada temel kabul sabit hızda alınan rüzgara dayanmaktadır. Rüzgar hızını v olarak aldığımızda dalga cephesinin dalgalanması,

$$\phi(r, t + \tau) = \phi(r - v\tau, t) \quad (4.15)$$

kısa bir süre için eşit olarak alınacaktır. Böylece zamansal yapı fonksiyonu,

$$D_\phi(\tau) = \langle |\phi(r, t) - \phi(r - v\tau, t)|^2 \rangle = 6.88(|v\tau|/r_0)^{5/3} \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 4.4 Farklı türbülans modellerinin güç spektrumları

Atmosferik türbülansa ait yukarıda anlatılan temel parametreler ışığında uyarlamalı optik sistemlerinde, bu etkinin minimizasyonunu bir kontrol problemi olarak ele almak için bu bozucunun zamansal cevabının uygun şekilde modellenmesi gerekmektedir. Atmosferik türbülansın modellenmesinde birçok farklı yaklaşım literatürde bulunmaktadır. Bazı çalışmalarda, araştırmacılar atmosferik türbülansın, dinamik cevabını ihmal ederek sabit olarak almışlardır [125]. Bazılarında ise basit yapıda birinci dereceden otoregresif model kullanmışlardır. Bazen de bu tür modeller gerçek zamanda elde edilen ölçümler çerçevesinde oluşturulmuştur [126]. Bunların yanında atmosferik türbülans modellenirken genellikle yüzeyde tanımlanan birbirine ortogonal çok terimlilerden faydalanılmıştır. Fourier serilerine benzer şekilde sonsuz sayıda bu çok terimlilerin belli katsayılarla toplanması sonucu tüm atmosferik türbülans bozulmaları modellenebilir. Bu bağlamda atmosferik türbülans modellenmesi iki başlık altında incelenmiştir.

4.3 Atmosferik Türbülansın Zamansal Cevabının Modellenmesi

4.3.1 Sistem Kestirim Teknikleri İle Atmosferik Türbülansın Modellenmesi:

AO sistemlerin verimli bir şekilde çalışması için kapsamlı bir dalga cephesi bozulması bilgisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bundan dolayı AO sistemlerin temel bozucusu olan atmosferik türbülansın uygun modellenmesi gerekmektedir. Atmosferik türbülansın yapısındaki parametrelerin belirsizlikleri bilhassa bunların zaman ve mekanla değişim göstermesi, bazı araştırmacıları online olarak bu parametrelerin hesaplanmasına yönlendirmiştir. [126] çalışmasında anlık işlenen veriler ile altuzay (subspace) sistem modeli çıkarım tekniklerinden yararlanılarak, atmosferik türbülans modeli çıkarılmıştır,

$$S : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Kv_k \\ r_k = \Sigma_1 Cx_k + v_k \\ \psi_k = Cx_k + e_k \end{cases} \quad (4.17)$$

burada $e_k = \Sigma^{-1}(v_k - U_1^T \eta_k)$ beyaz Gaussian gürültü, η_k dalga cephesi algılayıcısının çıkışındaki, r_k ise ölçmeden kaynaklanan gürültüdür, A , K ve C sistem matrisleridir. SSARX stokastik altuzay algoritmasıyla bozucu modeli elde edilmiş. Böylece elde edilen bu bozucu modeli, uzamsal ve zamansal istatistiki bilgeleri sunmaktadır. Bu bozucu modelinin validasyonu iki farklı gerçek data üzerinde gerçekleştirilmiştir, ve istenilen hedef değerlerine ancak 256 dereceden yüksek modellerde ulaşılabildiğine değinilmiştir.

Bir başka çalışmada birinci ve ikincil dereceden otoregresif yaklaşımlarla atmosferik türbülans modeli çıkarılmıştır [30]. Geçmişteki iki durumdan oluşan bu yapı,

$$\phi(k+1) = A_{R1}\phi(k) + A_{R2}\phi(k-1) + v(k) \quad (4.18)$$

burada $v(k)$ beyaz Gaussian gürültü, A_{R1} ve A_{R2} model katsayılarıdır. [127] çalışmasından elde edilen sonuçlar doğrultusunda Fried parametresini $r_0 = 0.53$ ve dış ölçeği de $L_0 = 25m$ alarak, $A_{R1} = 1.98$, $A_{R2} = -0.99$ şeklinde deneysel olarak çıkarılmıştır [30]. [33] çalışmasında ise bu parametreler Kolmogorov spektrum ve Taylor (frozen-flow) dondurulmuş katman yaklaşımından yararlanılarak hesaplanmıştır. [128] çalışmasında farklı rüzgar koşulları altında türbülans modelini oluşturan bu katsayılar kestirilmiştir.

4.3.2 Zernike Polinomu ile Atmosferik Türbülansın Modelenmesi:

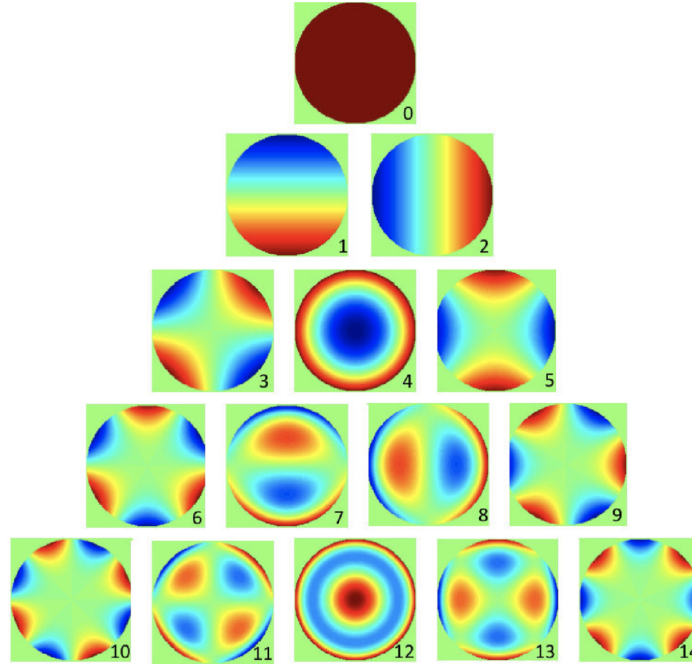
Atmosferik türbülans modellenirken genellikle birim yüzeyde tanımlanan Zernike polinomlarından faydalanılır. Fourier serilerine benzer şekilde sonsuz sayıda

Zernike polinomunun belirli katsayılarla toplanması sonucu tüm atmosferik türbülans bozulmaları modellenenir. Ancak Zernike polinomlarının derecesi arttıkça atmosfer içerisinde bulunma frekansları azalır. İki boyutlu Zernike polinomları $Z_j(r, \theta)$ ile gösterilmektedir. Bu ifadedeki j indisi ilgili Zernike moduna işaret etmekte kullanılmaktadır,

$$j = \frac{n(n+2)+m}{2} \quad (4.19)$$

şeklinde olup, $0 \leq n$ ve $|m| \leq n$ olmak üzere radyal derece ve açılal frekanstır. Polinomların oluşturulması konusunda ayrıntılı bilgiye Noll'un 1976 yılındaki çalışmasından ulaşılabilir. Daha sonraki yıllarda bu polinomların sıralanması için belli standartlar geliştirilmiştir. Noll'un çalışmasından farklı olarak literatürde kullanılan yaygın standart ANSI8028 standardıdır [129]. Yukarıda tanımlanan j indisi de bu standarda dayalıdır. Çalışmamızda ANSI8028 standardı kullanılacaktır, bunun Noll'un çalışmasından farklı yanları Tablo 4.1'de gösterilmiştir. Bu standart çerçevesinde Zernike polinomları ile tanımlanabilir bozulmalar Şekil 4.5'de görölmektedir. Mavi renk tepeyi gösterirken kırmızı renk çukuru göstermektedir.

Türbölans modeli içerisinde kullanılan Zernike polinomlarını dairesel lensler için



Şekil 4.5 ANSI8028 standardı çerçevesinde Zernike Polinomlarının tanımladığı bozulmalar

aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} Z_{cift\ j}(r, \theta) &\triangleq \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\cos(m\theta), & m \neq 0 \\ Z_{tek\ j}(r, \theta) &\triangleq \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\sin(m\theta), & m \neq 0 \\ Z_j &\triangleq \sqrt{n+1}R_n^0(r), & m = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Denklem içerisinde bulunan ve r koordinatına bağlı, $R_n^m(r, \theta)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$R_n^m(r) \triangleq \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! [\frac{n+m}{2} - k]! [\frac{n-m}{2} - k]!} r^{n-2k}. \quad (4.21)$$

Zernike polinomları ile elde edilen ve Şeki 4.5'de gösterilen 15 form birbirine ortogondur. Bu şekilde de gözüktüğü gibi, Z_1 ve Z_2 tip, tilt moduna karşılık gelmektedir. Bu modların görüntü üzerinde etkisi az olduğundan genelde birçok çalışmada ihmal edilebilmektedir [3], [130]. Diğer modlardan Z_4 defocus, Z_3 ile Z_5 birbirine ortogonal astigmatizm, Z_7 - Z_8 birbirine ortogonal coma, Z_6 ile Z_9 aynı şekilde birbirine ortogonal trefoil, Z_{12} küresel, Z_{11} ile Z_{13} ikincil dereceden astigmatizm ve Z_{10} ile Z_{14} ikincil dereceden trefoil bozulmalarına denk gelmektedir. Fourier serisine benzer şekilde atmosferik bozulmaların %92'si bu formların doğrusal kombinasyonu ile elde edilebilir. Noll'un çalışmasında bu 15 form için tablo oluşturulmuş ve her bir bozulma Noll indeksi olan j ile gösterilmiştir [131]. Polar koordinatlar ve buna karşılık kartezyen koordinatlarda tanımlı ilk 15 Zernike polinomu Tablo 4.1'de verildiği gibidir. Sonuç olarak türbülans fazı yani atmosferik bozulma sonucu oluşan dalga cephesi formu zernike polinomlarının toplamı

$$\phi(r, \theta, t) \approx \sum_{j=0}^{14} a_j(t) Z_j(r, \theta) \quad (4.22)$$

biçiminde gösterilebilir. Burada j Noll indeksini, $a_j(t)$ zamanla rastgele değişen $\phi(r, \theta, t)$ ifadesinin Z_j üzerindeki iz düşümü ile ilgili katsayıyı göstermektedir. Birim daire içerisinde seçilen ve zamanla değişen bir bozulma yüzeyini, Zernike polinomlarının toplamı şeklinde ifade etmek için bu polinom katsayılarını da aşağıda verilen denklem kullanılarak hesaplanabilir;

$$a_j(t) = \int \int \phi(r, \theta, t) Z_j(r, \theta) r dr d\theta. \quad (4.23)$$

Atmosferik türbülansa maruz kalmış dalga cephesi elde edebilmek için, Zernike

katsayılarını Gaussian rastgele değişkenler cinsinden oluşturulmalıdır. Bu durumda Zernike katsayılarının istatistiksel özelliklerinin irdelenmesi gerekmektedir. Bu katsayıların kovaryansı

$$\langle a_j a_k \rangle = \left\langle \int \int \phi(r, \theta, t) Z_j(r, \theta) r dr d\theta \int \int \phi(r, \theta, t) Z_k(r, \theta) r dr d\theta \right\rangle, \quad (4.24)$$

şeklindedir. Kolmogorov'un atmosferik türbülansa ilişkin güç spektrumunu kullanarak, Zernike katsayılarının kovaryansı aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\langle a_j a_k \rangle = c_{jk} (D/r_0)^{5/3}, \quad (4.25)$$

burada radyal derece ve açısal frekansa bağlı olan c_{jk} fonksiyonun analitik açılımı ilk olarak Noll'un [131] çalışmasında çıkarılmıştır,

$$c_{jk} = 0.0072 (-1)^{(n_i+n_j-2 \times m_i)/2} \pi^{8/3} \sqrt{(n_i+1)(n_j+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n_i+n_j-\frac{5}{3}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_i-n_j+\frac{17}{3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_j-n_i+\frac{17}{3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_i+n_j+\frac{23}{3}}{2}\right)}. \quad (4.26)$$

Tablo 4.1 İlk 15 Zernike polinomu

ANSI j	Noll j	n	m	Polar Koordinat Z_j	Kartezyen Koordinat Z_j
0	1	0	0	1	1
1	3	1	-1	$2r \sin(\theta)$	y
2	2	1	1	$2r \cos(\theta)$	x
3	5	2	-2	$r^2 \sin(2\theta)$	$2xy$
4	4	2	0	$\sqrt{3}(2r^2 - 1)$	$2x^2 + 2y^2 - 1$
5	6	2	2	$\sqrt{6}r^2 \cos(2\theta)$	$x^2 - y^2$
6	9	3	-3	$\sqrt{8}r^3 \sin(3\theta)$	$3x^2y - y^3$
7	7	3	-1	$\sqrt{8}(3r^3 - 2r) \sin(\theta)$	$3x^2y + 3y^3 - 2y$
8	8	3	1	$\sqrt{8}(3r^3 - 2r) \cos(\theta)$	$3x^3 + 3xy^2 - 2x$
9	10	3	3	$\sqrt{8}r^3 \cos(3\theta)$	$x^3 - 3xy^2$
10	15	4	-4	$\sqrt{10}r^4 \sin(4\theta)$	$4x^3y - 4xy^3$
11	13	4	-2	$\sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \sin(2\theta)$	$8x^3y + 8xy^3 - 6xy$
12	11	4	0	$\sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$	$6x^4 + 12x^2y^2 - 6x^2 + 6y^4 - 6y^2 + 1$
13	12	4	2	$\sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \cos(2\theta)$	$4x^4 - 3x^2 - 4y^4 + 3y^2$
14	14	4	4	$\sqrt{10}r^4 \cos(4\theta)$	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

4.3.2.1 Atmosferik Türbülansın Durum Uzak Modelinin Oluşturulması

Basit manada atmosferik türbülans modeli otoregresif model olarak oluşturulabilir,

$$\phi_{k+1} = A_{tur} \phi_k + v_k \quad (4.27)$$

burada v kovaryansı Σ_v olan Gaussian beyaz gürültüdür. Zernike modlarının her biri kendi arasında ortogonal olduğundan, her bir mod ile ilişkilendirecek şekilde sistem matrisi $A_{tur} = \text{diag}(a_{ii})$ olarak seçilebilir. Burada a_{ii} her bir moda ilişkin kesim frekanslarını içerecek şekilde oluşturulabilir. İlk yıllarda yapılan gerek teorik gerekse deneysel araştırmalarda, Zernike polinomlarıyla oluşturulan atmosferik türbülansın spektrumuna ilişkim kesim frekansları $f_{c_j} \sim 0.3(n_j + 1)V/D$ denkleminde olduğu gibi radyal derece ve rüzgar ile doğru orantılıdır [132]. Bu çalışmanın sonuçları sonraki yıllarda birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır. Buradan çıkan sonuçlar çerçevesinde A_{tur} matrisinin köşegen terimleri,

$$a_{ii} = \exp\left(-\frac{0.3(n_j + 1)VT}{D}\right) \quad (4.28)$$

şeklinde olup, burada n_j radyal derece, V rüzgar hızı, T örnekleme zamanı ve D ise sistemin giriş mercek çapıdır. Böylece her Zernike moduna ilişkin türbülansın AR modeli elde edilebilmektedir. Bu sonuçlardan yola çıkarak atmosferik türbülansın durum uzak modeli çıkarılabilir. Bu türbülans fazının modellenmesi için sistem girişleri Gauss beyaz gürültüler $w_{tur} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{15}]^T$ olan, durum değişkenleri ise Zernike polinomlarının zamanla değişen katsayıları $x_{tur} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{15}]^T$ olan dinamik sisteme ihtiyaç duyulmaktadır,

$$\dot{x}_{tur} = A_{tur}x_{tur} + B_{tur}w_{tur}. \quad (4.29)$$

Türbülans fazının durum uzak gösterimi literatürde daha önce, [132] çalışmasından elde edilen sonuçları da kullanarak [3] tarafından gösterilmiştir. Atmosferik türbülans modeli için oluşturulan durum-uzak gösteriminin A_{tur} dinamik matrisinin köşegen terimleri yukarıda gösterildiği gibi Zernike polinomlarının oluşturduğu türbülans spektrumunun kesim frekanslarıyla ilişkilendirilebilir. Böylece her Zernike moduna ilişkin alçak-geçiren filtre yapısına sahip transfer fonksiyonu,

$$H_j(s) = \frac{2\pi f_{c_j}}{s + 2\pi f_{c_j}} \quad (4.30)$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu alçak-geçiren filtre yapılarının f_{c_j} kesim frekans değerleri daha önce de belirtildiği üzere,

$$f_{c_j} \cong 0.3(n_j + 1) \frac{V}{D} \quad (4.31)$$

şeklinde olup, V atmosfer rüzgar hızı, D sistem giriş mercek çapıdır. Türbülansın durum uzay modeli için B_{tur} matrisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu matris oluştururken özellikle türbülansı oluşturacak Zernike katsayılarının istatistiksel bilgilerini irdelenmesi önem taşımaktadır. Bundan dolayı [3] çalışmasının devamında B_{tur} giriş matrisi aşağıda verilen kararlı-hal Lyapunov denklemi kullanılarak bulunmuştur,

$$B_{tur} B'_{tur} = -(A_{tur} P_{\phi}(\infty) + P_{\phi}(\infty) A'_{tur}). \quad (4.32)$$

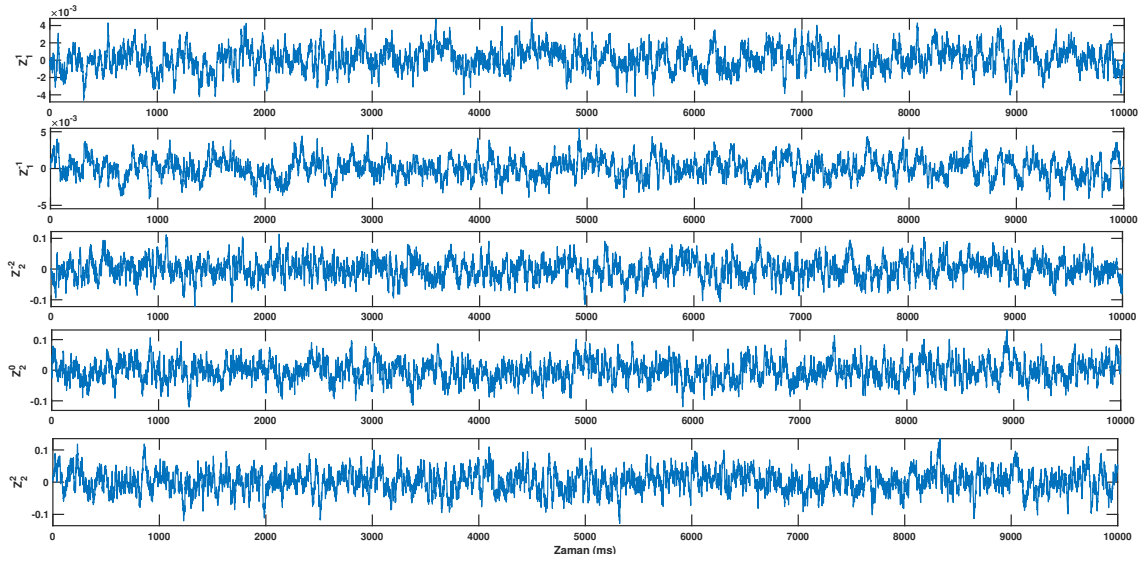
Bu Lyapunov denkleminin çözüm matrisini $P_{\phi}(\infty)$, elde etmek için ise Zernike katsayılarının kovaryans bilgisine başvurulmuştur. Bu doğrultuda Denklem (4.25)'de de gösterildiği gibi Lyapunov denkleminin çözüm matrisi,

$$P_{\phi}(\infty) = \langle a_j a_k \rangle = 0.0072 (-1)^{(n_i + n_j - 2 \times m_i)/2} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \pi^{\frac{8}{3}} \sqrt{(n_i + 1)(n_j + 1)} \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n_i + n_j - \frac{5}{3}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_i - n_j + \frac{17}{3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_j - n_i + \frac{17}{3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_i + n_j + \frac{23}{3}}{2}\right)} \quad (4.33)$$

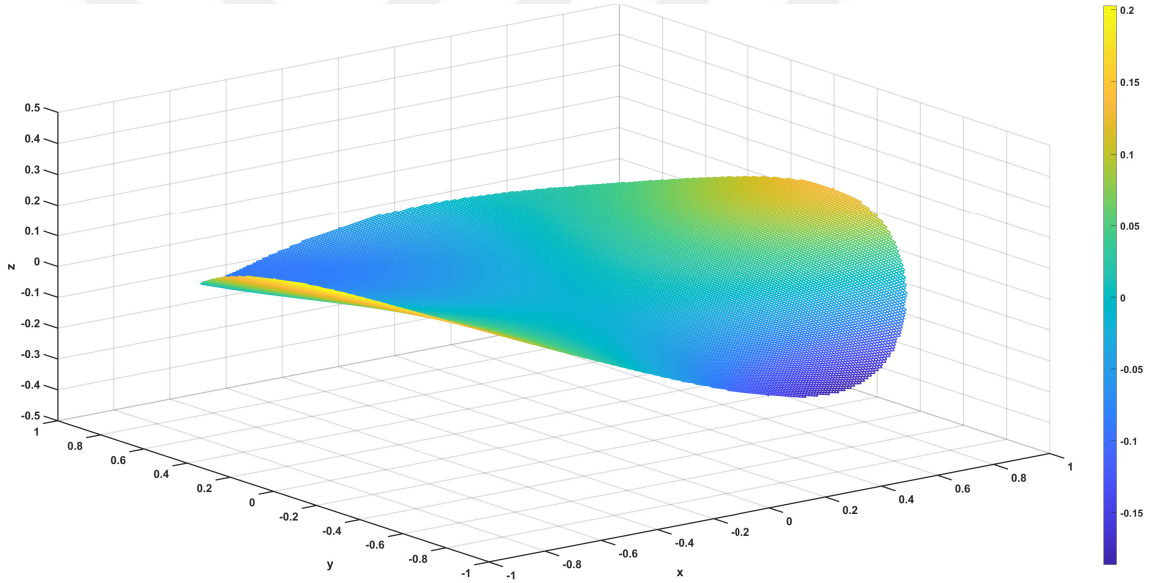
şeklinde seçilmiştir. Böylece Kolmogorov'un öne sürdüğü türbülans modeline bağlı kalınarak, Zernike polinomlarından oluşan atmosferik türbülansın durum uzay modeli elde edilmektedir. Atmosferik türbülansı oluşturacak Zernike katsayılarına ilişkin durum uzay modeli,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{tur} &= A_{tur} x_{tur} + B_{tur} w \\ y_{tur} &= C_{tur} x_{tur} \end{aligned} \quad (4.34)$$

şeklinde elde etmiş olduk, burada $C_{tur} \in \mathbb{R}^{14 \times 14}$ her bir katsayıyı gözlemlemek adına birim matris şeklindedir. Atmosferik türbülans modelini oluşturmak için üçü parametre olmak üzere dört girişe ihtiyaç duyulmaktadır. Bunlar atmosferin gücünü karakterize eden Fried parametresi r_0 , rüzgar hızı V , mercek çapı D ve modele giriş olarak uygulanacak beyaz Gaussian gürültüdür. Bu parametreleri $r_0 = 0.1$, $V = 15 \text{ m/s}$, $D = 1 \text{ m}$ olacak şekilde kabul edildiğinde simülasyon sonuçları Şekil 4.6-4.7'da gösterilmiştir. Şekil 4.6'te sırasıyla tip, tilt, defocus, astigmatizm modlarının zamanla değişimi verilmiştir. Zamanla değişen bu katsayıların 8. saniyede anlık olarak oluşturduğu atmosferik türbülans Şekil 4.7'da gözlenebilir.



Şekil 4.6 Elde edilen ilk 5 Zernike katsayısının zamana göre değişimi



Şekil 4.7 8. saniyede elde edilen Zernike katsayılarıyla oluşturulan türbülans yüzeyi

5

UYARLAMALI OPTİK SİSTEMLER İÇİN $\mathcal{H}_\infty$ KONTROLCÜ TASARIMI

Önceki bölümde atmosferik türbülans genel hatlarıyla ele alınıp, Zernike polinomlarının toplamı şeklinde tanımlanarak, buna ilişkin durum uzay modeli elde edilmiştir. Bölüm 3’de deforme edilebilir ayna için sonlu elemanlar yöntemiyle sonlu boyutlu ODE modeli oluşturulmuştur. Bu bağlamda uyarlamalı optik sistemin kapalı çevrim formu Şekil 5.2’de verilmiştir. Bu şekilde de gözüktüğü iki ayrı sistemden elde edilen çıkışların ifade ettikleri birimlerin birbirinden farklı olmasından dolayı birim eşleme bloku bulunmaktadır. Deforme edilebilir aynanın çıkışında çökme ve bunlara ilişkin eğim bilgileri okunmaktadır. Atmosferik türbülans modelinde de çıkış olarak Zernike katsayıları alınmaktadır. Bundan dolayı çıkışların birbiriyle uyumunu sağlamak adına birim eşlemesinin yapılması elzemdir. Bu durumda DM çıkışında elde edilen çıkışların Zernike polinomları cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir.

Atmosferik bozulma sonucu oluşan dalga cephesini formu Zernike polinomlarının toplamı cinsinden ifade etmiştik, bu denklemi kartezyen koordinatlarda tekrardan ele alacak olursak,

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{14} a_i Z_i(x, y) \quad (5.1)$$

burada $Z_i(x, y)$ i. Zernike polinomu ve a_i ’ler de Zernike katsayılarıdır. Dikkat edilmesi gereken bir husus da, Zernike polinomlarının sıralamasında ANSI8028 standardı kullanılacaktır, burada $i = 0$ sabit (piston) moduna denk gelmektedir, ve bu tez çalışmasında ihmal edilmiştir. AO sistemin çıkışında her bir düğüme karşılık gelen çökme ve eğim bilgilerini okunmaktadır. Dolayısıyla $N_a \times N_a$ düğümden oluşan dikdörtgensel bir düzlem içinde Zernike polinomlarının tanımlanması gerekmektedir. Ters Zernike dönüşümü olarak da adlandırılan bu işleme özellikle Shack-Harmartman algılayıcılarının kullanıldığı uygulamalarda başvurulmaktadır [133], [134]. Bu

doğrultuda Deklem 5.1'i ele alacak olursak, bu denklemin gradienti,

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{14} a_i \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \\ S_y &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{14} a_i \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde elde edilir, bunu matris formunda

$$S_{xy} = \Theta_{xy} a \quad (5.3)$$

olarak tanımlanabilir, burada S_{xy} dalga cephesinin x, y noktaları için ölçülen gradient vektörüdür,

$$S_{xy} = \left[\frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial y_1} \quad \dots \quad \frac{\partial W(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} \quad \frac{\partial W(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} \right]^T, \quad (5.4)$$

Θ_{xy} ise Zernike modlarının kısmi türevleridir,

$$\Theta_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_1(x_1, y_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial Z_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Z_{14}(x_1, y_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Z_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial Z_2(x_1, y_1)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Z_{14}(x_1, y_1)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial Z_1(x_2, y_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial Z_2(x_2, y_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial Z_{14}(x_2, y_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Z_1(x_2, y_2)}{\partial y_2} & \frac{\partial Z_2(x_2, y_2)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial Z_{14}(x_2, y_2)}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Z_1(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} & \frac{\partial Z_2(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} & \dots & \frac{\partial Z_{14}(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} \\ \frac{\partial Z_1(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} & \frac{\partial Z_2(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} & \dots & \frac{\partial Z_{14}(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ve a ise Zernike katsayılarını barındıran vektördür,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{14} \end{bmatrix}.$$

Yukarıda sadece eğimleri kullandık, buna çökmelerde rahatlıkla eklenebilir, bu durumda

$$S = \Theta a \quad (5.6)$$

olarak tanımlanabilir, burada S dalga cephesinin x, y noktaları için ölçülen gradient ve çökme vektörüdür,

$$S_{xy} = \left[W(x_1, y_1) \quad \frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial y_1} \quad \dots \quad W(x_{N_a}, y_{N_a}) \quad \frac{\partial W(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} \quad \frac{\partial W(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} \right]^T, \quad (5.7)$$

Θ ise,

$$\Theta = \begin{bmatrix} Z_1(x_1, y_1) & Z_2(x_1, y_1) & \cdots & Z_{14}(x_1, y_1) \\ \frac{\partial Z_1(x_1, y_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial Z_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Z_{14}(x_1, y_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Z_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial Z_2(x_1, y_1)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Z_{14}(x_1, y_1)}{\partial y_1} \\ Z_1(x_2, y_2) & Z_2(x_2, y_2) & \cdots & Z_{14}(x_2, y_2) \\ \frac{\partial Z_1(x_2, y_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial Z_2(x_2, y_2)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial Z_{14}(x_2, y_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Z_1(x_2, y_2)}{\partial y_2} & \frac{\partial Z_2(x_2, y_2)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial Z_{14}(x_2, y_2)}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{14}(x_{N_a}, y_{N_a}) & Z_2(x_{N_a}, y_{N_a}) & \cdots & Z_{14}(x_{N_a}, y_{N_a}) \\ \frac{\partial Z_1(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} & \frac{\partial Z_2(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} & \cdots & \frac{\partial Z_{14}(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial x_{N_a}} \\ \frac{\partial Z_1(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} & \frac{\partial Z_2(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} & \cdots & \frac{\partial Z_{14}(x_{N_a}, y_{N_a})}{\partial y_{N_a}} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda Zernike katsayıları aynı kalacaktır. Denklem 5.6'dan Zernike katsayılarının çekilmesi gerekmektedir. Bunun çözümü için en küçük kareler yöntemine başvurulduğundai Θ matrisinin tersine ihtiyaç olacaktır, bu matris kare olmadığından, çözüm için sözde-tersinin hesaplanmasına gidilebilir. Sonuç olarak çıkış olarak elimizde çökme ve eğim değerleri olduğundan buradan Zernike katsayıları,

$$a = \Theta^\dagger S \quad (5.9)$$

ifadesi ile hesaplanabilir, burada $\Theta^\dagger$, Θ 'nın sözde-tersidir.

5.1 Problemin Tanımı ve $\mathcal{H}_\infty$ Kontrolcü Tasarımı

Deforme edilebilir aynanın genel modeli Denklem 3.58'de verilmiştir. Bu ayna modeli 144 (12×12) eyleyiciye sahiptir. Sistemin girişi her bir eyleyiciye uygulanan çökme, çıkışı da aynadan elde edilen çökme ve eğim bilgileridir. Atmosferik türbülans modeliyle aynı cevapları almak adına Denklem 5.9'da elde edilen dönüşüm uygulanarak, durum değişkenleri Zernike katsayıları cinsinden elde edilmiştir. Gerekli dönüşüm ve işlemlerden sonra, dinamik uyarlamalı optik sistemin top yekûn durum uzay gösterimi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{dm} \\ \dot{x}_{tur} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{dm} & 0 \\ 0 & A_{tur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{dm} \\ x_{tur} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{dm} & 0 \\ 0 & B_{tur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{dm} \\ w_{tur} \end{bmatrix}$$

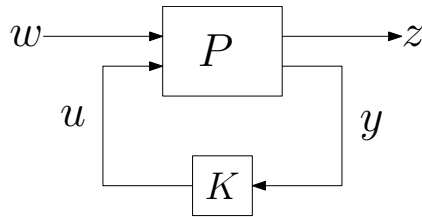
$$y_{ao} = \begin{bmatrix} -C_{dm} & I_{tur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{dm} \\ x_{tur} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

şeklinde elde edilmektedir. Elde edilecek modelde kullanılacak deforme edilebilir aynaya ilişkin parametreler Tablo 5.1’de verilmiştir.

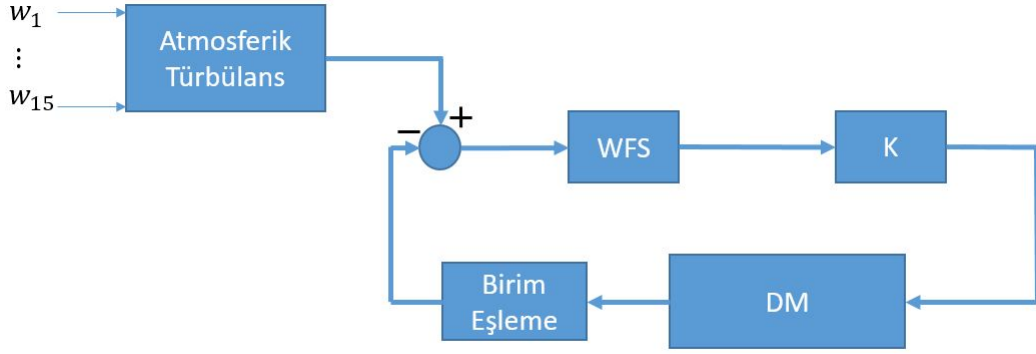
Tablo 5.1 1m boyunda alınan DM’nin parametreleri

Parametre	Tanım	Değer
E	Young Sabiti	63×10^9 Pa
ν	Poisson sabiti	0.2
ρ	Yüzey Yoğunluğu	2.23×10^3 kg/m ³
h	Kalınlık	2 mm

Dinamik bir sistemi karşılayacak uygun modelin çıkarılmasını takiben, bu sistemin belli performans ölçütleri baz alınarak kontrol edilmesi, bozucu etkisinin en aza indirilmesi ve sistem eğer kararsız ise kararlılaştırma gereklilikleri boy göstermektedir. Sistemin bütün frekanslardaki cevabının en büyüğüne karşılık gelen $\mathcal{H}_\infty$ normunun minimizasyonu ile bu ölçütler karşılanabilmektedir. $\mathcal{H}_\infty$ kontrol probleminin standart formu Şekil 5.1’de verilmiştir. Burada P , Denklem 5.10’da verilmiş olan sistemin genel formudur. Bu çalışmada Denklem 5.10’da verilmiş olan sistem için, performans çıkışları ile bozucu girişleri arasındaki transfer fonksiyonunun sonsuz normunu en iyileştirmeye yönelik $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanmıştır. Burada performans çıkışı olarak Zernike polinomu katsayıları, bozucu girişi atmosferik türbülans bozulmalarıdır. Sistemin bozucusunu oluşturan atmosferik türbülans olarak sisteme 14 adet beyaz Gaussian gürültü uygulanmıştır. Kapalı çevrim sistemi kararlılaştıracak, performans çıkışları ile bozucu girişleri arasındaki transfer fonksiyonunun sonsuz normunu önceden belirlenen pozitif bir γ değerinden küçük kılacak, $\|P_{CL}(s)\|_\infty < \gamma$, $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcüsü [39] çalışmasından yararlanılarak tasarlanmıştır.



Şekil 5.1 Standart P - K konfigürasyonu



Şekil 5.2 AO sistem bileşenleri

Uyarlamalı optik sistemin kapalı çevrim formu Şekil 5.2’de verilmiştir. Dalga cephesindeki bozulmaları ölçen WFS’den ölçümlerin alındığı kabulü altında, buna ilişkin blok birim matris olarak alınmıştır. Daha önce de değinildiği gibi, temel strateji atmosferik türbölansın istenilmeyen etkilerini sistem çıkışında en aza indirmektir. Burada performans çıkışı, $z(t) = y_{ao}(t) = \phi_{res}(t)$, şeklindedir. Bölüm 4’de, AO sistemlerin temel bozucu kaynağı olan atmosferik türbölans genel hatlarıyla ele alınmış, frekans spektrumu verilmiştir. Her bir Zernike moduna ilişkin kesim frekansları çıkarılmıştır. Bu bilgiler ışığında, bu frekans bandına odaklanmak için ikinci mertebeden bant geçiren filtre, atmosferik türbölansın çıkışına eklenmiştir,

$$W_i(s) = \frac{150.8s + 1}{s^2 + 75.4s + 3948}, \quad i = 1, 2, \dots, 14. \quad (5.11)$$

Deforme edilebilir ayna modeli için sonlu elemanlarla tasarıma başvurulmuştur, elde edilen yüksek dereceden model durum değışkenleri değıştirilerek Zernike katsayıları cinsinden ifade edilmiştir. Bu durumda 28. mertebeden bir model elde edilmiştir. Atmosferik türbölansı oluştururken de ilk 14 Zernike çok terimlisine başvurulmuştur. Bunlar göz önünde alınıp, atmosferik türbölansı oluşturan her bir çıkışı için tasarlanan ikinci mertebeden filtrelerde eklenildiğinde, top yekün sistemin mertebesi 70 olmaktadır. Böylelikle tasarlanan tam dereceden kontrolcünün de mertebesi 70 olacaktır.

Sabit dereceden alt-optimal $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı için Bölüm 2’de kullanılan yöntemlere başvurulmuştur. Bu tez çalışmasında hedeflerden biri, bu bölümde önerilen yöntem çerçevesinde kontrolcü tasarlamaktır. Fakat AO sistemlerin giriş ve çıkış sayısının çok fazla olmasından dolayı büyük ölçekli sistemler sınıfındadır, bundan dolayı önerilen bu yöntemden yararlanılması imkansız kılınmıştır. Bunun yanında, AO sisteminin karmaşık yapısından dolayı kullanılan diğer yöntemlerle de

tatminkar bir sonuç elde edilememiştir. Alternatif olarak, bu çalışmada frekans tabanlı model indirgeme (FWBMR) tekniğine başvurulmuştur. FWBMR teknikleri tasarımcıya çalışmak istediği frekans bandında daha düşük mertebeden sistem modelini sunmaktadır [135], [36]. Böylelikle filtre ile beraber artan sistem modelini kullanmaktansa, kullanıcı daha düşük dereceden ve istediği frekans bandında sistem modeli üzerinde tasarım yapma fırsatı elde etmektedir. Literatürde birçok model indirgeme teknikleri mevcuttur. Bu çalışmada pratikliği ve kullanım kolaylığı olması açısından, dengelenmiş indirgeme tekniği kullanılmıştır. Dengelenmiş indirgeme tekniği Hankel tekil değerler üzerine kurulmuştur. Dengelenmiş bir sistemin Hankel tekil değerleri, o sistemin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik enerjisini aynı anda ifade eder. Dolayısıyla, düşük Hankel tekil değerlerine karşılık gelen durumların, sistem üzerinde etkisi az olduğundan, çıkarılması sistemin cevabı üzerinde yaygın bir kaybı neden olmayacaktır. Dengelenmiş model indirgeme tekniği temelde, bütün frekans aralığını kapsayacak şekilde sistemin mertebesini düşürmektedir. Fakat, bu çalışmada filtre kullanmak yerine istenilen frekans bandında model derecesini indirmek hedeflenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, belli frekans bandı için ağırlıklandırılmış dengelenmiş model indirgeme tekniği kullanılmıştır. FWBMR tekniği tanımlanan frekans bandı dışında ki dinamikleri sistemden atmaktadır.

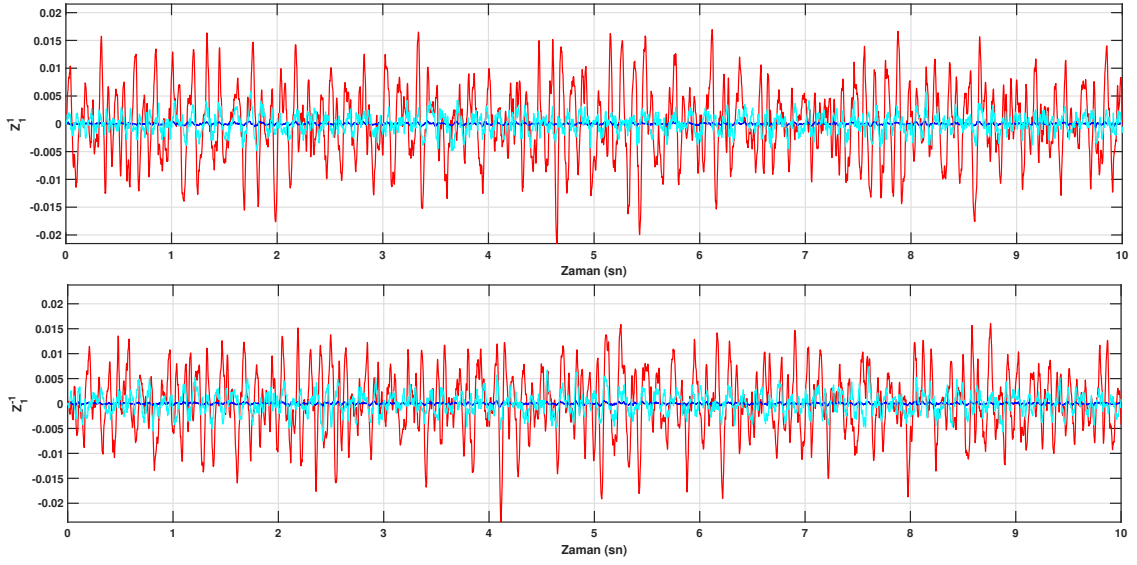
Atmosferik türbülansın etkin olduğu frekans bandını da göz önünde bulundurarak, 30. mertebeden sistem modeli elde edilmiştir. Modelin mertebesi, Hankel tekil değerleri göz önünde bulundurarak 30 olarak seçilmiştir. Bu indirgenmiş sistem için yine aynı dereceden bir kontrolcü tasarlanmıştır. Kontrolcü mertebesi yarı yarıya düşürülmüş, böylelikle yüksek mertebeden dolayı olası hesaplama külfeti ve sistemin olası hataları karşı kırılğanlığı düşürülmüş, sistemin güvenilirliği arttırılmıştır.

5.2 Simülasyon Sonuçları

Öne sürülen çalışmanın etkinliğini göstermek adına, üç farklı kontrolcü çıkarım tekniğine başvurulmuştur. Kullanılan filtre ile beraber 70. mertebeden model ve belirlenen frekans bandında model indirgeme teknikleriyle elde edilen 30. mertebeden model, için bilinen geleneksel $\mathcal{H}_\infty$ kontrol metoduyla iki farklı kontrolcü çıkarılmıştır. Son olarak doğrudan düşük dereceden kontrolcü çıkarmak adına açık kaynak kodlu HIF00, Matlab altında bulunan hinfstruct ve önerilen yöntemle başvurulmuştur. Fakat bu sistem için Matlab altında bulunan hinfstruct ile kararlılığı sağlayacak bir kontrolcü çıkarılamamıştır. Bunun yanında her ne kadar HIF00 ile kontrolcü çıkarılsa da, elde edilen kontrolcünün performansı oldukça düşük çıkmıştır. Elde edilen her bir kontrolcü orijinal sisteme uygulanmıştır. Bu çalışmada sistemin bozucusunu oluşturan atmosferik türbülans olarak sisteme 14 adet beyaz

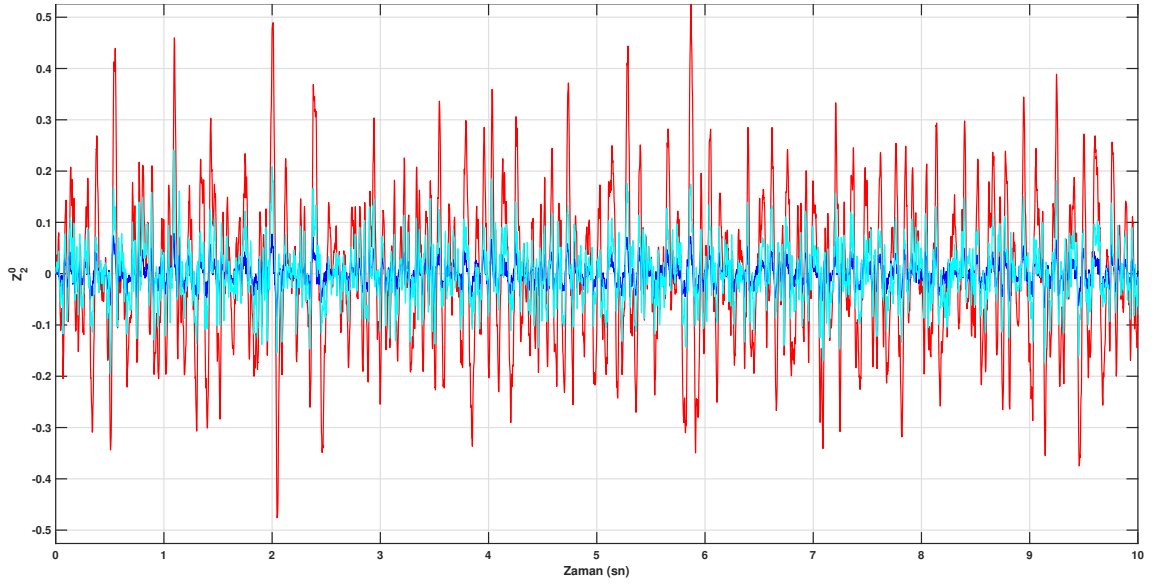
Gaussian gürültü uygulanmıştır. Atmosferik türbülansı gerçek manada simule etmek için, modelin çıkışını yukarıda belirtilen filtreden geçirilmiştir. Literatürde bulunan birçok uygulamada Tip/Tilt bozulma modları ihmal edilmiştir, bu çalışmamızda da bu modların, oluşturulacak türbülans üzerinde etkinlikleri kısıtlanmıştır. Şekil 5.3-5.11,'lerinde, tasarlanan her bir kontrolcünün açık çevrim sisteme karşı başarımı gösterilmiştir.

Şekil 5.3'de Zernike tip tilt moduna karşılık gelen dalga cephesi hatası gösterilmiştir. Düşük dereceden sistem için tasarlanan kontrolcü (ROWHC), ağırlıklandırılmış sistem için tasarlanan $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcüsüne (WHC) göre oldukça daha iyi sonuç vermiştir.

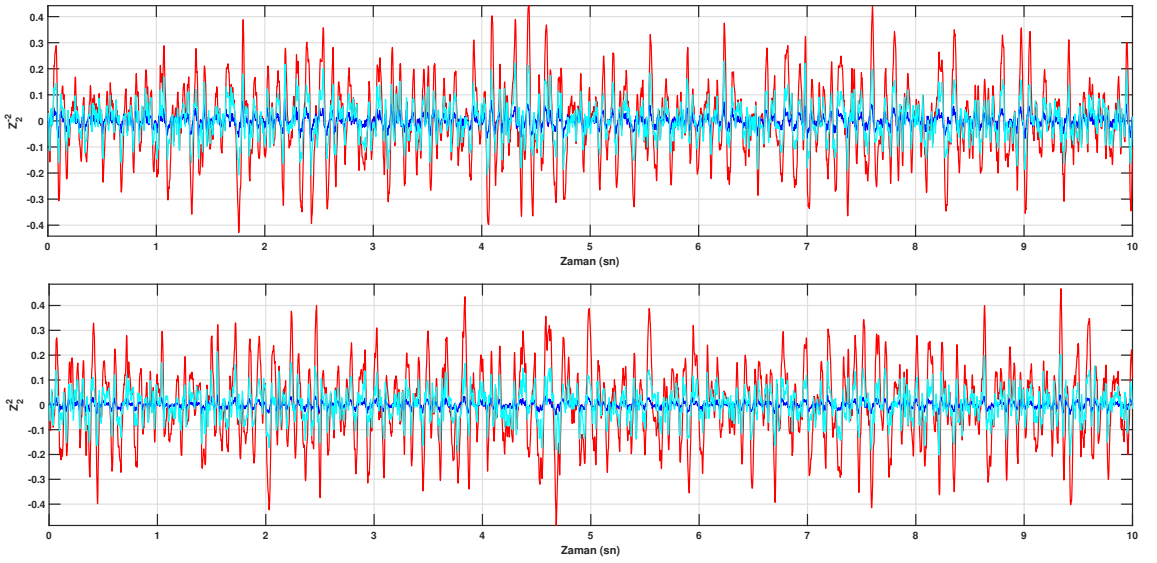


Şekil 5.3 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin tip tilt modlarına karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü

Şekil 5.4 ve 5.5'de görüldüğü gibi, kontrolcülerle desteklenmiş AO sistemin Zernike'nin focus ve astigmatism modlarına karşılık gelen hata makul seviyelerde seyretmektedir. Bunlar arasında ROWHC'nin başarımı aşikardır.

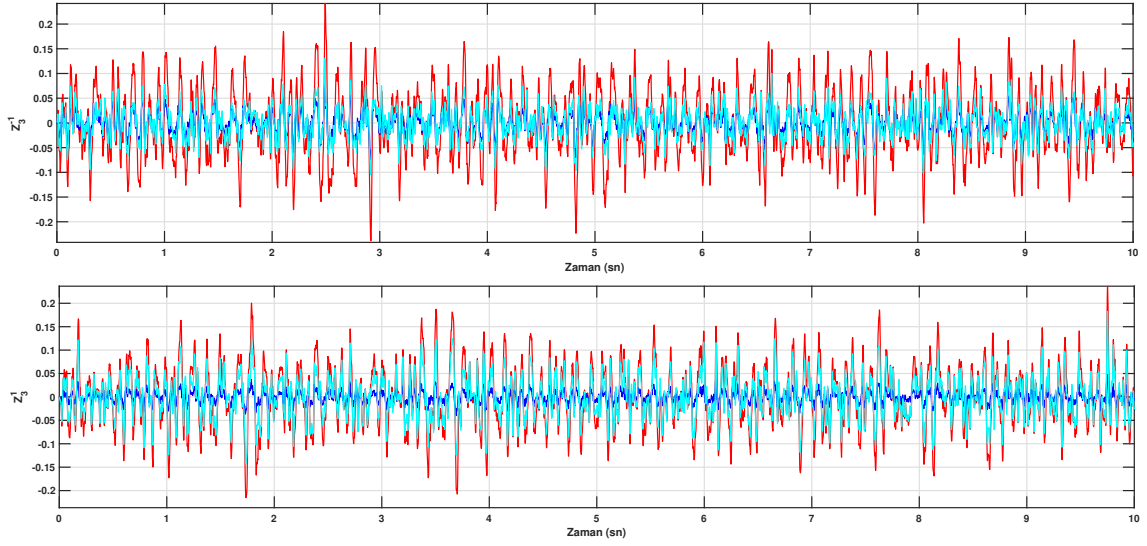


Şekil 5.4 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin focus moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü



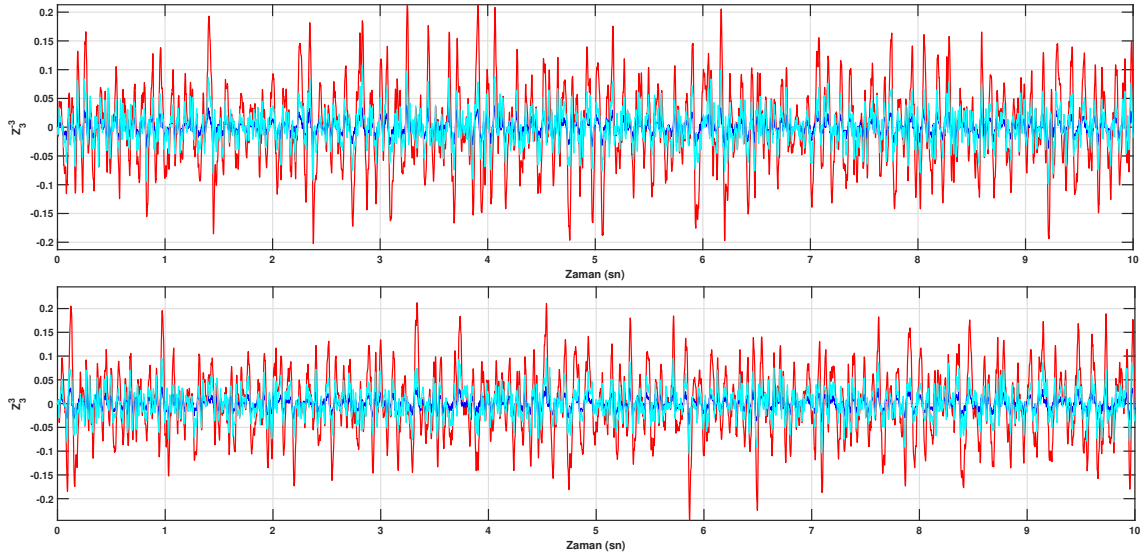
Şekil 5.5 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin astigmatism moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü

Tasarlanan her bir kontrolcünün Zernike'nin Koma moduna karşılık gelen performansları Şekil 5.6'da gösterilmiştir. Burada ROWHC oldukça tatminkar sonuçlar sağlamıştır.

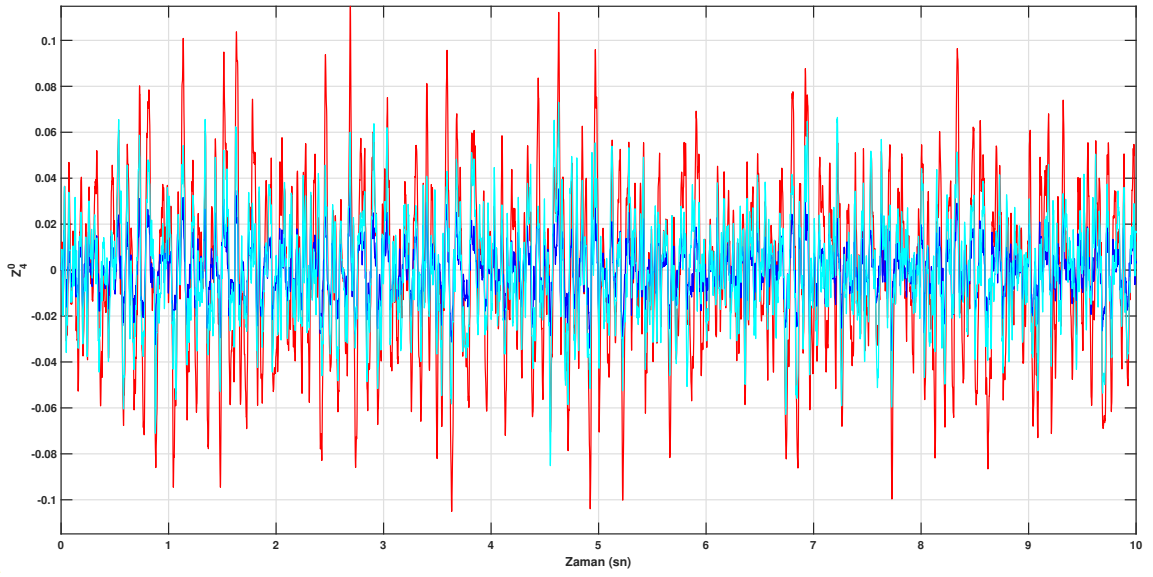


Şekil 5.6 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin coma moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü

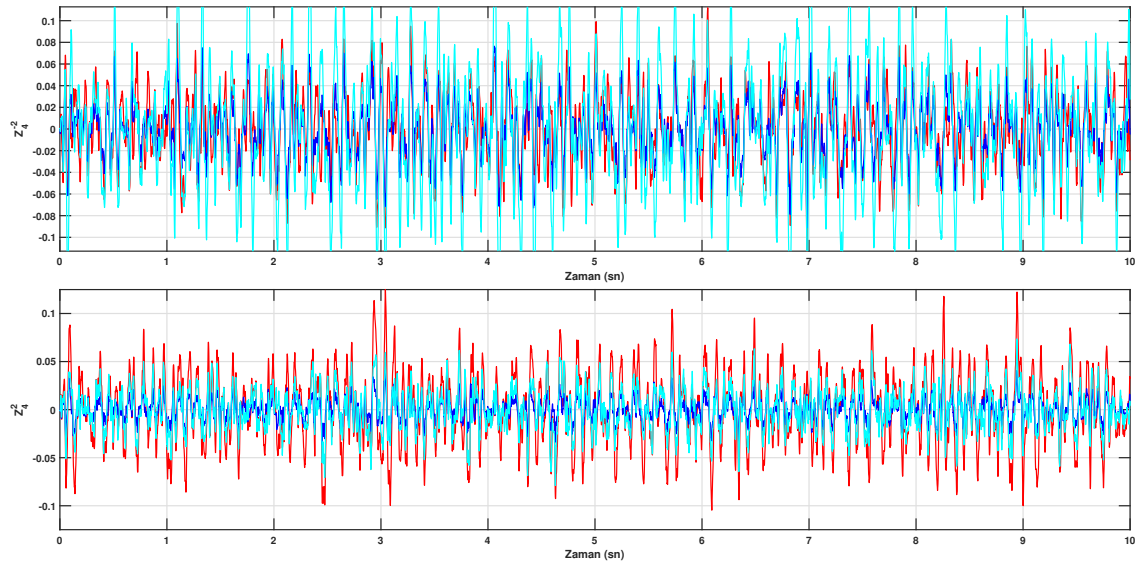
Kontrolcülerin Zernike'nin diğer modlarındaki; trefoil, spherical, ikincil derece astigmatism ve quadrafoil, başarımları sırasıyla Şekil 5.7, 5.8, 5.9 ve 5.10'da gösterilmiştir. ROWHC'nin bozucuyu kompanse etmedeki başarımı aşıkardır.



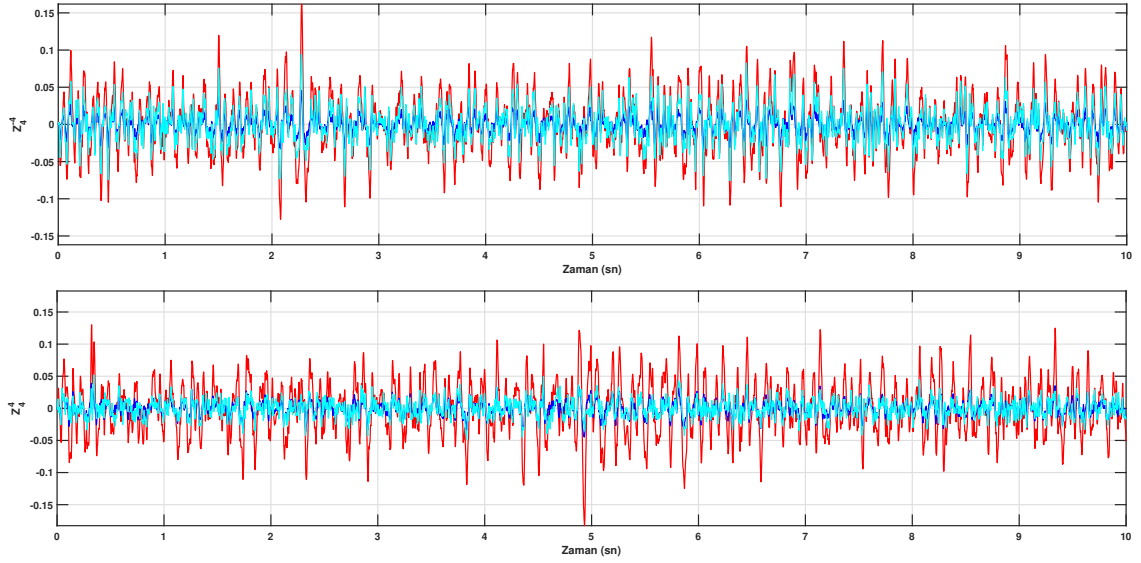
Şekil 5.7 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin trefoil moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü



Şekil 5.8 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin spherical moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü



Şekil 5.9 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin ikincil derece astigmatism moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü

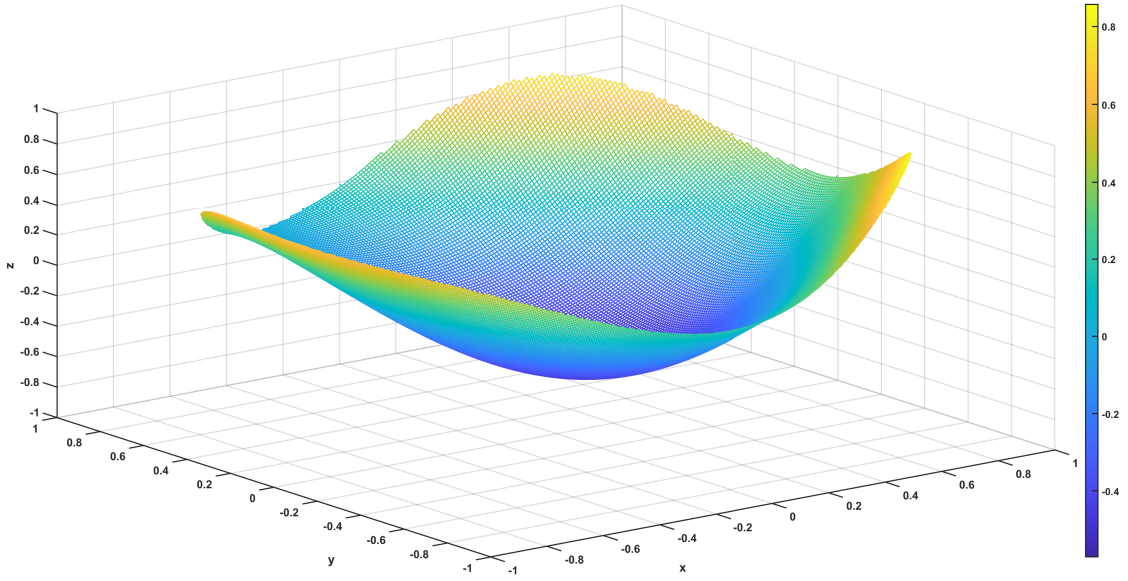


Şekil 5.10 Açık çevrim (kırmızı), WHC (cyan) ve ROWHC (mavi) sistemlerinin Zernike'nin quadrafoil moduna karşılık gelen bozulmaların büyüklüğü

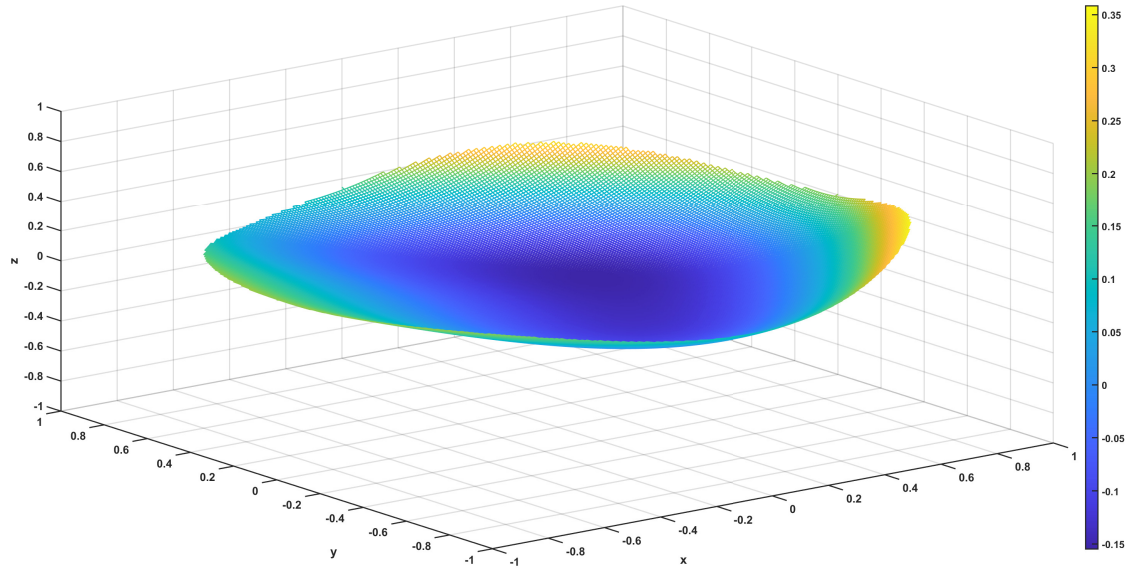
Tablo 5.2 Açık çevrim sistem ile sırasıyla ağırlıklandırılmış ve düşük dereceden sistemler için tasarlanan kontrolcüler altında kapalı çevrim sistemlerin, (CL_{WE}), (CL_{RO}), Zernike modlarına karşılık gelen çıkışlarının ve giriş olarak uygulanan sistemin iki normları

Zernike Mode	$\ w\ _2$	$\ OL\ _2$	$\ CL_{WE}\ _2$	$\ CL_{RO}\ _2$
Tip	1.3736	0.6413	0.1603	0.0170
Tilt	1.3744	0.6239	0.1997	0.0179
X Astigmatism	133.9842	14.2250	7.0561	2.2263
Focus	133.3270	14.2059	5.9454	2.2106
Y Astigmatism	135.6949	14.9435	6.3982	1.2513
X Trefoil	133.4915	6.8930	3.0135	1.1700
X Coma	135.9577	6.9030	3.1955	2.1497
Y Coma	130.0369	6.5670	4.5126	1.1491
Y Trefoil	134.4042	6.9052	3.0863	1.1793
X Quadrafoil	128.9512	3.9456	2.4362	1.0890
X İkincil Astigmatism	131.8881	3.4349	5.5058	2.6022
Küresel	134.1547	3.5566	2.2958	1.1403
Y İkincil Astigmatism	140.7418	3.6831	2.2249	1.1621
Y Quadrafoil	131.9186	4.1411	1.3675	1.1318

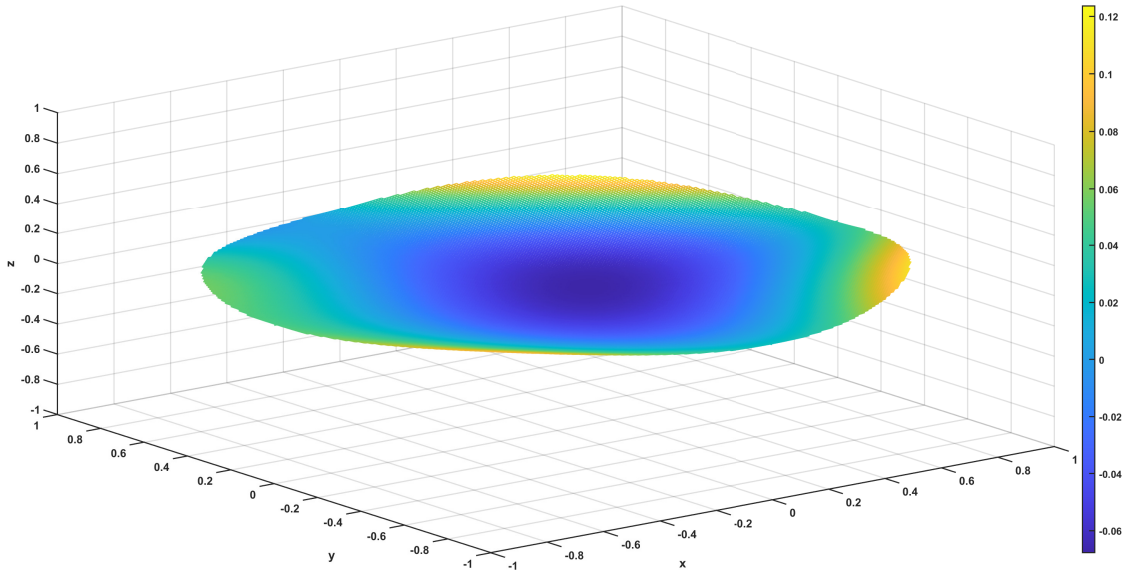
Tablo 5.2'de açık çevrim ile her bir kontrolcü ile desteklenmiş sistemin çıkışlarının iki normları gösterilmiştir. Bu tablodan görüldüğü gibi, $\|CL_{WE}\|_2$ ve $\|CL_{RO}\|_2$ kapalı çevrim sistemleri arasında büyük bir fark bulunmamaktadır. Her ne kadar ROWHC kontrolcüsü merteye açısından WHC çok düşük olsa da, çoğu modda daha iyi olmak üzere, benzer başarıyı sağlamıştır.



Şekil 5.11 Türbülans yüzey şekli



Şekil 5.12 WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli



Şekil 5.13 ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli

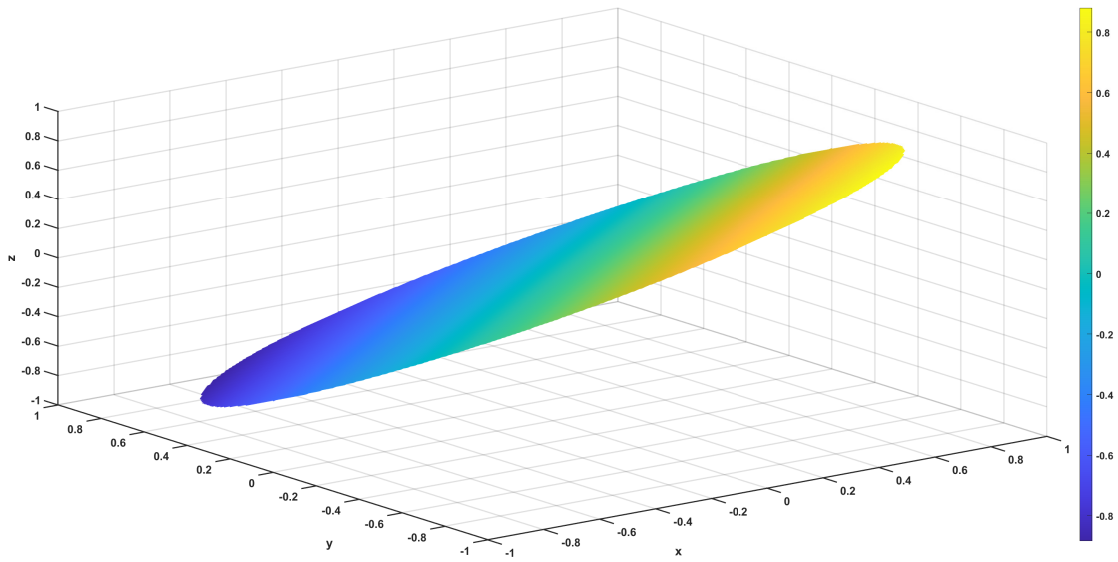
Tasarlanan kontrolcüler altında, anlık olarak alınan Zernike katsayılarından oluşturulan dalga cephesi şekilleri Şekil 5.11, 5.12 ve 5.13’de gösterilmiştir. Uyarlamalı optik sistemlerin baz alındığı yayınlarda, yapılan iyileştirmeyi göstermek adına başvuru performans metriği Strehl Ratio (SR) olarak adlandırılan bir orandır. Bu performans metriği 0–1 arasında değer alır ve atmosferik bozulmanın görüntü üzerindeki etkisiyle ilgilidir. $0.8 \leq SR$ olduğunda yapılan iyileştirme makul görülmektedir, düzeltmenin çok iyi olduğu durumda $0.97 \leq SR$ şeklindedir [4]. Hesaplanması için birçok yaklaşım vardır. Bunlardan biri de bu metriğin Zernike polinomları ile ilişkilendirmesi üzerinedir. SR’ın Zernike polinomları cinsinden yaklaşık ifadesi,

$$SR = 1 - \sum_{n,m} \frac{(a_n^m)^2}{\varepsilon_m(n+1)}, \quad (5.12)$$

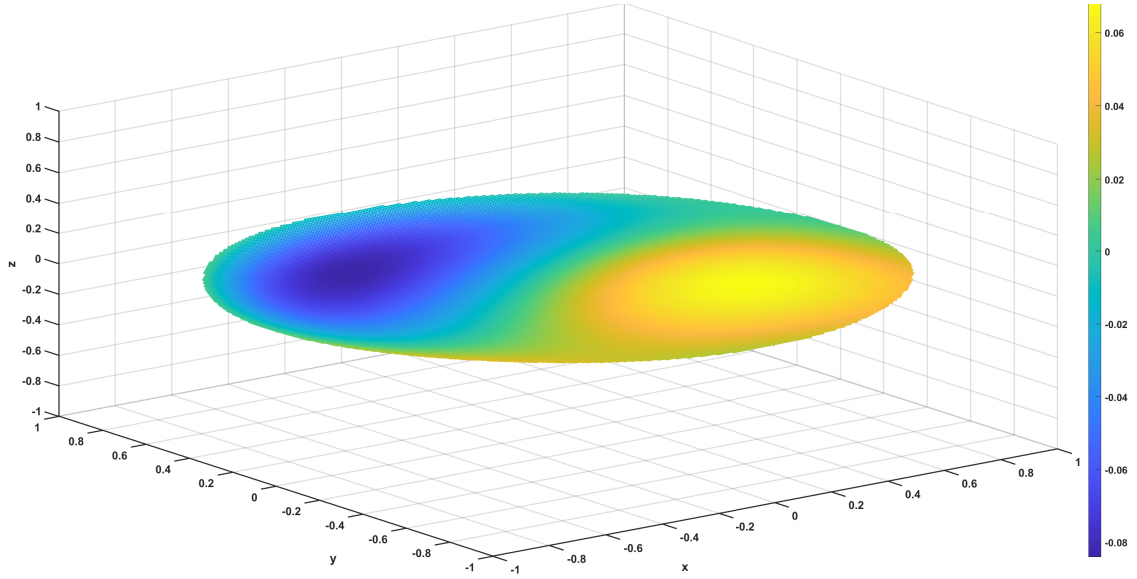
şeklindedir [136]. Burada a Zernike katsayıları, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = 1$, Neumann sembolüdür. Şekil 5.11, 5.12 ve 5.13’de gösterilen dalga cephelerini oluşturan Zernike katsayılarından yola çıkarak, bunların SR değerleri sırasıyla $SR_{\text{türbölans}} = 0.6192$, $SR_{CLWE} = 0.9533$, $SR_{CLRO} = 0.9937$ şeklindedir. Bu bağlamda öne sürülen kontrolcü ile sağlanan iyileştirme oldukça iyidir.

Uygulama özelinde bazı bozulma modları önem arz etmektedir. Örneğin astronomi uygulamalarında düşük bozulma modları önemliyken, hemodak (confocal) veya yüksek enerjili laser uygulamalarında yüksek modlara odaklanmak daha mühimdir. Bundan dolayı son olarak bazı bozulma modlarının ön plana çıktığı uygulamalara odaklanılmıştır. Bu doğrultuda Tip/Tilt modunun ağırlıklandırılmış şekilde oluşturulan atmosferik bozulma yüzeyi Şekil 5.14’de gösterildiği gibi oluşturulmuştur,

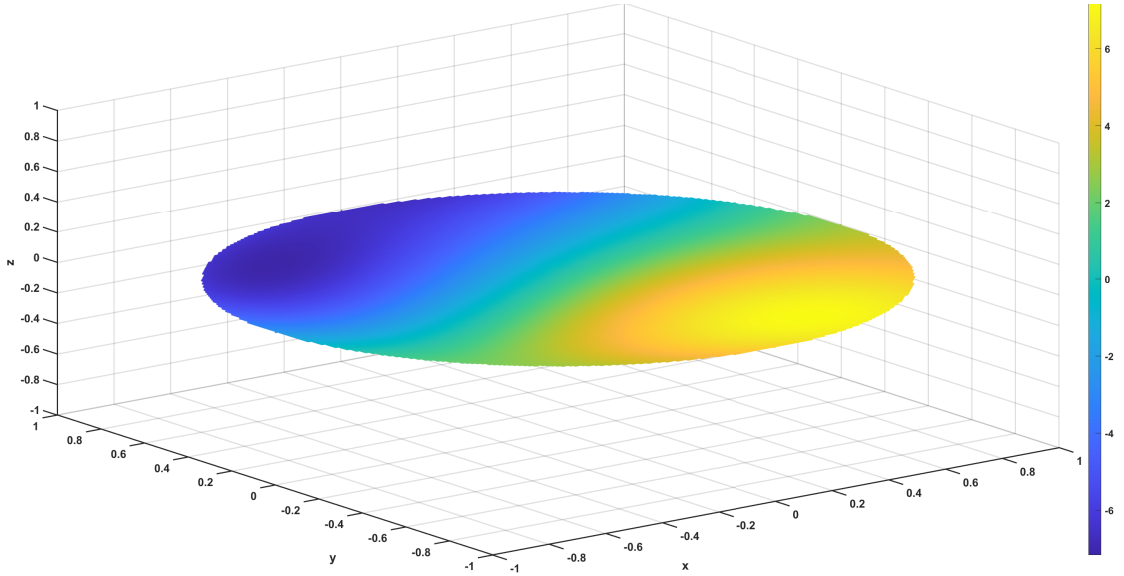
ve buna ilişkin kapalı çevrim sistemlerin iyileştirmesi de Şekil 5.15-5.16 'da verilmiştir. Benzer şekilde sırasıyla düşük modlardan yüksek modlara radyal derece, $n = 2$, $n = 3$ ve $n = 4$ olduğu bozulmaların ağırlıklı olarak odaklandığı türbülans yüzeyleri Şekil 5.17, 5.20, 5.23'de bulunmaktadır. Bunların tasarlanan kontrolcü altında AO sistemle düzeltilmiş hali Şekil 5.18- 5.19, 5.21-5.22, 5.24-5.25'de gösterilmiştir. Bu şekillerde gözüktüğü gibi önerilen düşük dereceden kontrolcünün performansı, tam dereceden kontrolcünün ötesine geçmiştir. Halbuki beklenen yüksek dereceden kontrolcünün daha etkin olmasıydı. Bunun gerçekleşmemesinde ki en büyük neden, üzerinde çalışılan sistemin büyük ölçekli sistem yapısında olması, bu da beraberinde hesaplama külfeti getirmektedir. Yüksek mertebeden kaynaklı olası bir hata da beraberinde başta numerik problemler olmak üzere birçok sıkıntılar doğurmaktadır.



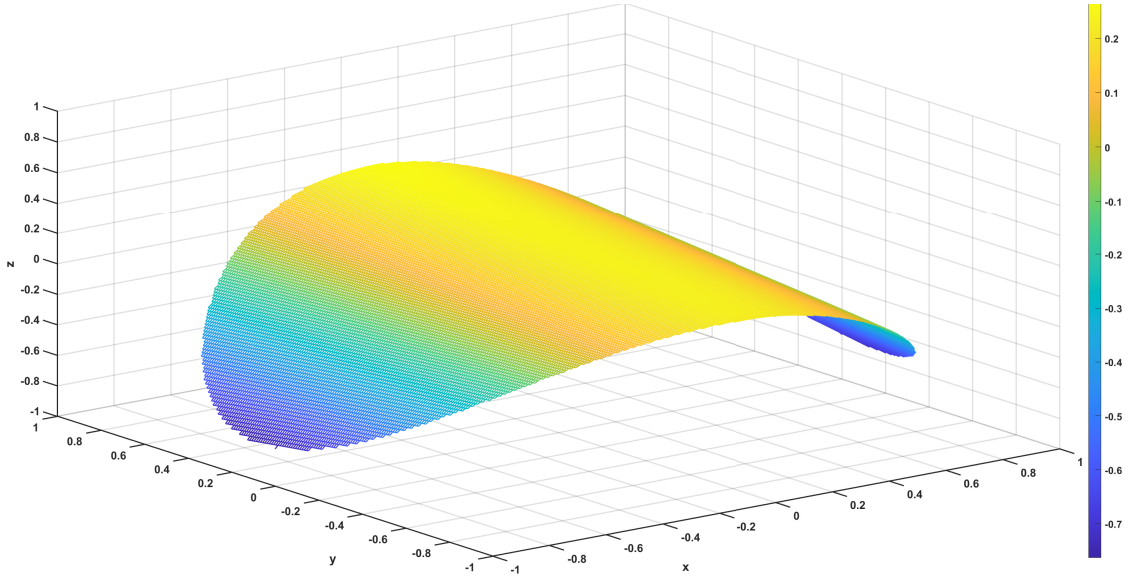
Şekil 5.14 Tip/Tilt modlarının ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.21$



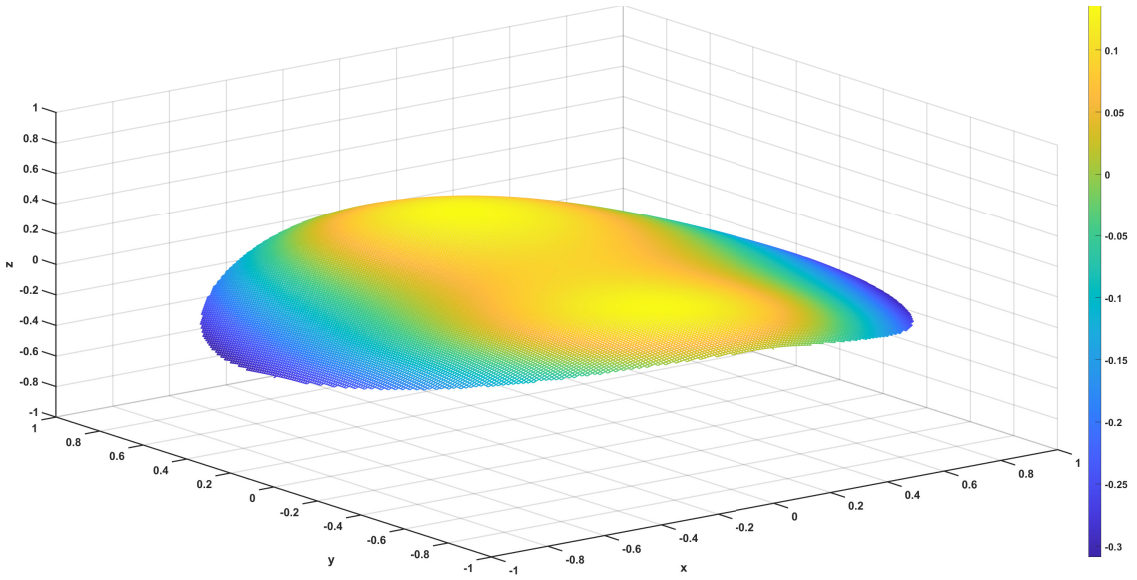
Şekil 5.15 Tip/Tilt modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$



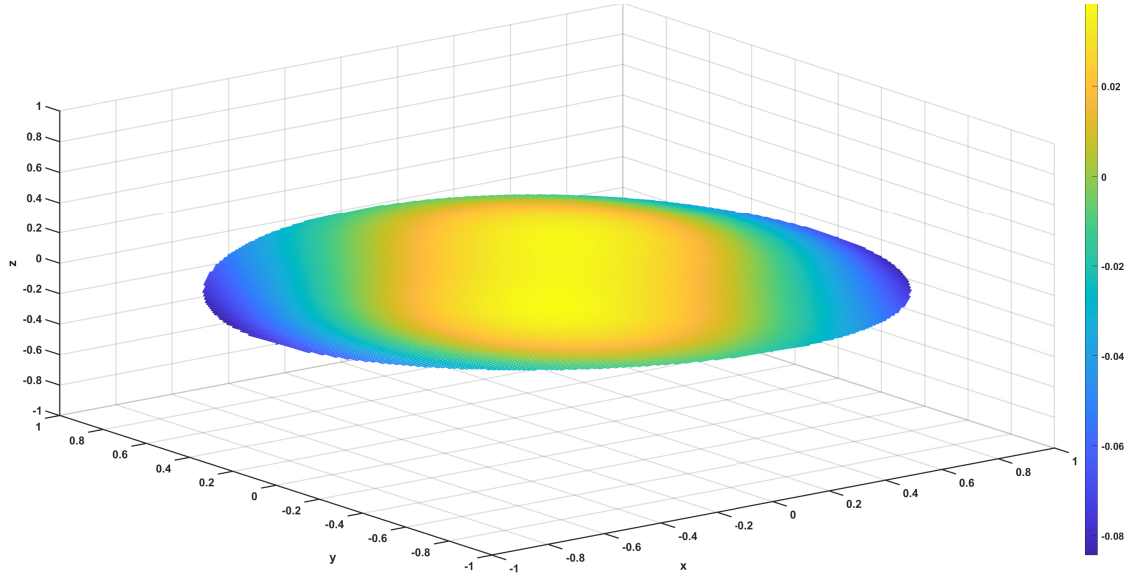
Şekil 5.16 Tip/Tilt modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$



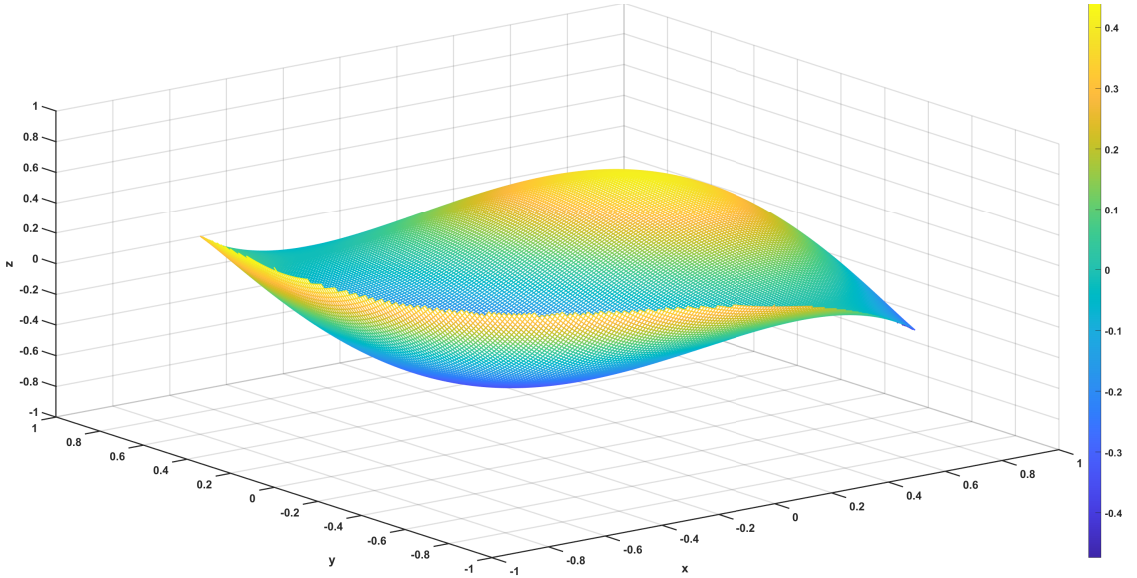
Şekil 5.17 Astigmatism ve Focus modlarının ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.69$



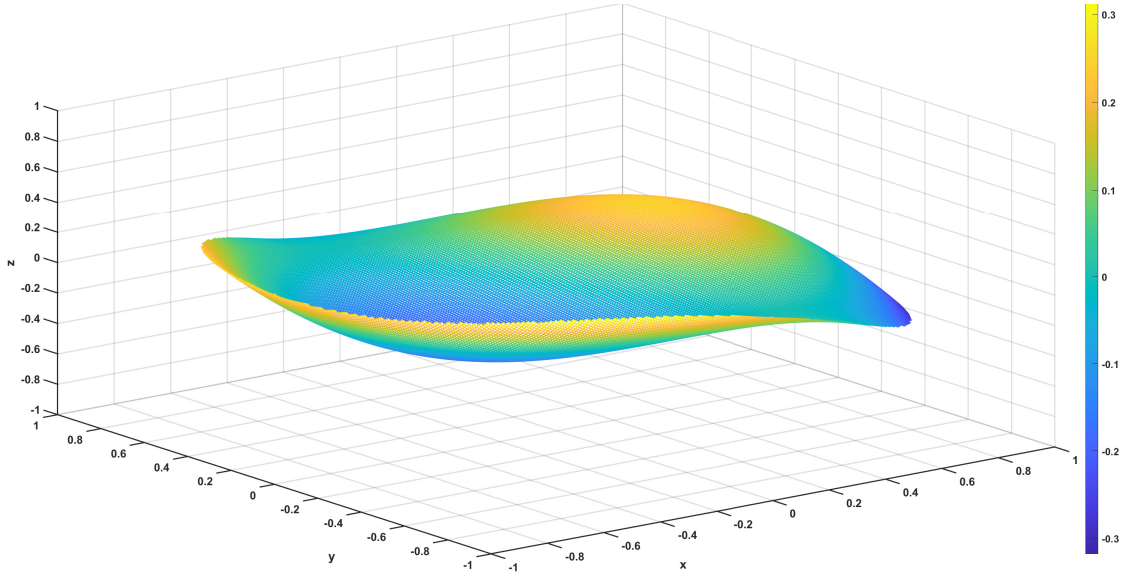
Şekil 5.18 Astigmatism ve Focus ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.94$



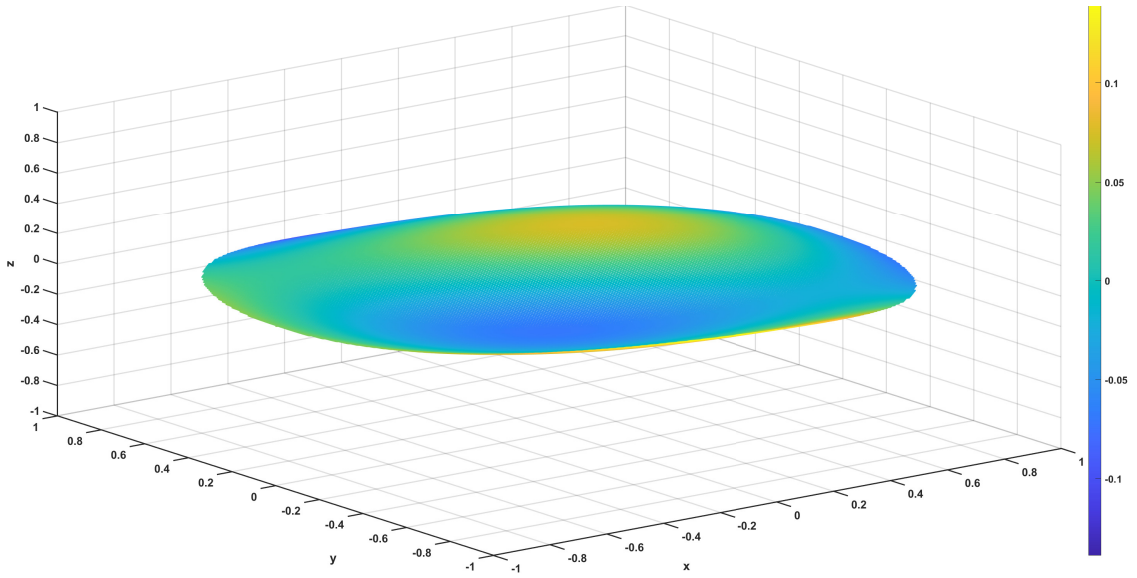
Şekil 5.19 Astigmatism ve Focus ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$



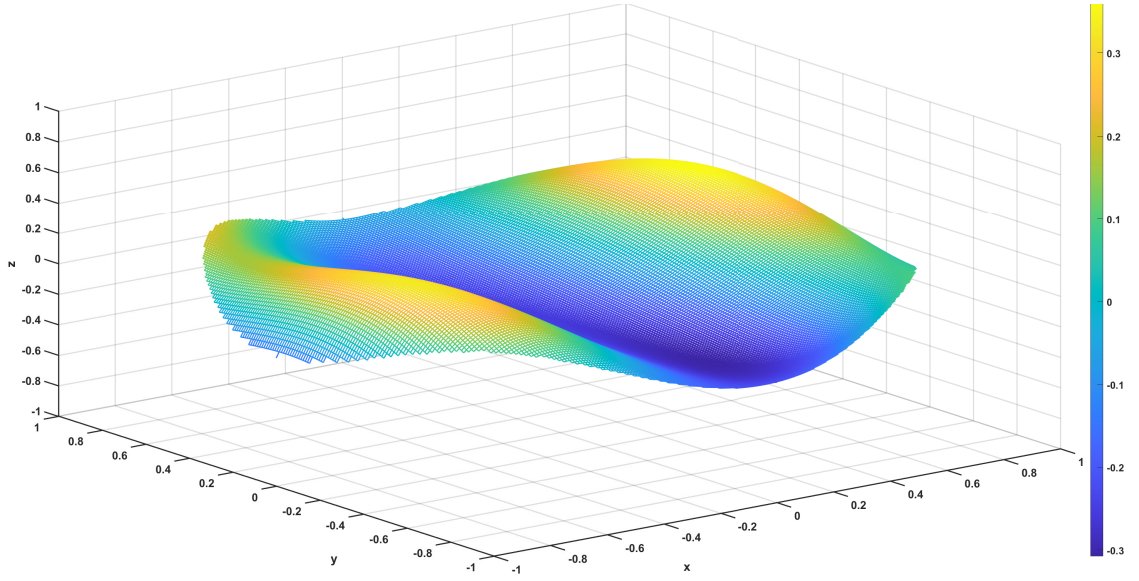
Şekil 5.20 Koma ve Trefoil modlarının ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.66$



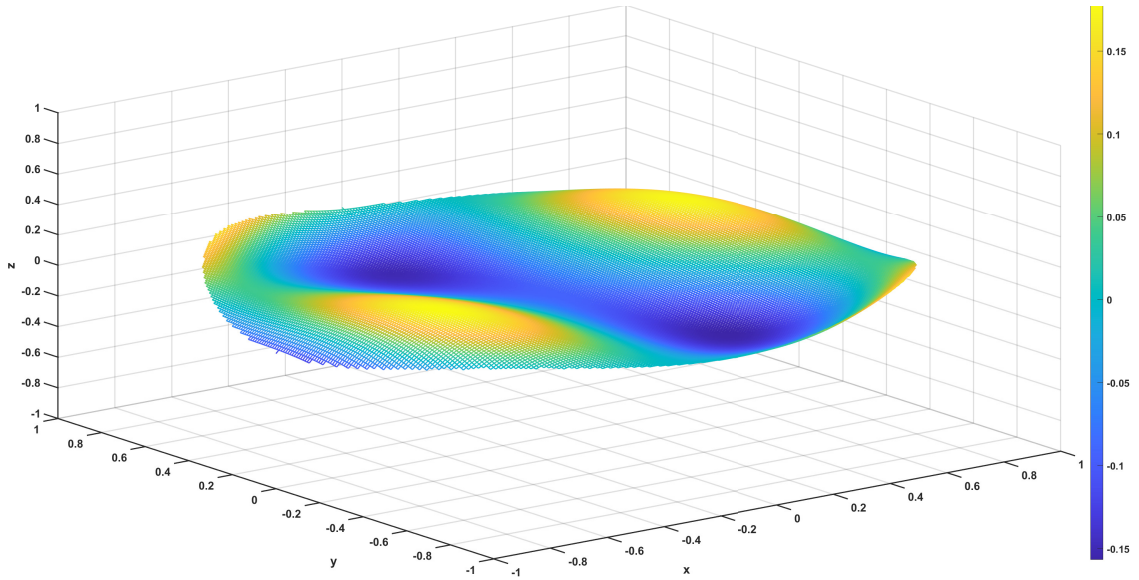
Şekil 5.21 Koma ve Trefoil modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.86$



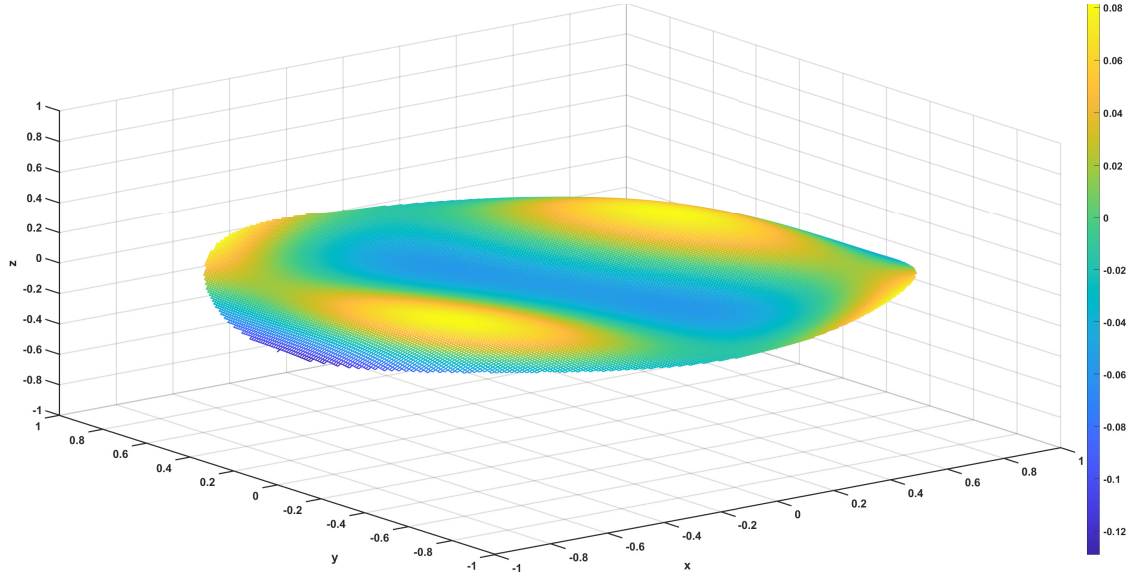
Şekil 5.22 Koma ve Trefoil modlarının ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.98$



Şekil 5.23 Yüksek modlarının ($n = 4$) ağırlıkta olduğu türbülans yüzey şekli, $SR = 0.77$



Şekil 5.24 Yüksek modlarının ($n = 4$) ağırlıkta olduğu türbülans altında WHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.94$



Şekil 5.25 Yüksek modlarının ($n = 4$) ağırlıkta olduğu türbülans altında ROWHC ile desteklenmiş sistem için yüzey şekli, $SR = 0.99$

6 SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin ilk aşaması, ana motivasyonlarımızdan biri olan sabit dereceden $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı üzerinedir. Sabit dereceden kontrolcü tasarımına çözüm sunabilmek maksadıyla üç temel yaklaşım üzerinde durulmuştur. Öncelikle sistem derecesinin düşürülüp, böylece elde edilen düşük dereceli sistem üzerinden geleneksel yöntemlerle istenilen düşük dereceden kontrolcü çıkarımı hedeflenmiştir. Bir diğer yaklaşımda, ilk olarak tam dereceden kontrolcü elde edilmiştir, ve bunun üzerinden LMIRANK konveks olmayan kısıtın gevşetilmesiyle sabit dereceden kontrolcü çıkarılmıştır. Son olarak sabit dereceden kontrolcüyü doğrudan çıkarmak adına açık kaynak kodlu HIF00, Matlab altında bulunan `hinfstruct` ve geliştirilen yönteme başvurulmuştur. Geliştirilen yöntemin, literatürde sıklıkla kullanılan metotlara kıyasla başarımı, bazı sistem modelleri üzerinde gösterilmiştir.

Tezin ikinci aşamasında uyarlamalı optik sistemler ele alınmıştır. Bu sistemlerin en önemli elemanı olan deforme edilebilir aynanın uygun modellenmesini takiben, bu tür sistemlerin yegane bozucu kaynağı olan atmosferik türbülansın durum uzay modeli çıkarılmıştır. Tezin geriye kalan kısmı, elde edilen yüksek dereceden ÇGÇÇ sistemin uygun kontrol edilmesi üzerinedir. Bu doğrultuda deforme edilebilir aynanın sonsuz boyutlu kısmi diferansiyel denklem (PDE) modeli, sonlu boyutlu adi diferansiyel denkleme (ODE) indirgenmiş modeli için $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanmıştır. Doğrudan $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımının aksine, bu kontrolcünün tasarımı kullanıcı için uygulama özelinde önem arz eden frekans aralığında gerçekleşmiştir. Frekans aralığının seçimi özellikle belirli dalga şekilleri (Zernike Modları) üzerinde çalışan kullanıcılar için tasarım esnekliğinin sağlanması adına önem arz etmektedir.

Ağırlıklandırılmış AO sistem için tezin ilk aşamasında kullanılan sabit dereceden $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarım tekniklerine başvurulmuştur. AO sistemin, karmaşık büyük ölçekli sistem yapısından dolayı bu tekniklerle, istenilen performansda kontrolcü geliştirilememiştir. Alternatif olarak, frekans tabanlı model indirgeme (FWBMR) tekniğine başvurulmuştur. Böylece önem arz eden frekans tanım bölgesinde elde edilen düşük dereceden sistem için, kontrolcü tasarlanmıştır. Elde edilen bu

kontrolcünün başarımı, tam dereceden kontrolcü ile karşılaştırılmıştır. Normal şartlarda beklenen yüksek dereceden kontrolcünün daha etkin olmasıdır. Fakat sistemin yüksek dereceli karmaşık yapısından dolayı, düşük dereceden kontrolcünün performansı, tam dereceden olanın ötesine geçmiştir. Bunun gerçekleşmesindeki en büyük neden, üzerinde çalışılan sistemin büyük ölçekli sistem yapısında olmasıdır. Dolayısıyla bu da hesaplama külfetine sebep olmaktadır. Yüksek dereceli sistemler parametrelerinde olabilecek değişimlere karşı yüksek duyarlılığa sahiptir. Bu yüzden olası bir hata beraberinde başta numerik problemler olmak üzere birçok sıkıntılar doğurmaktadır.

Uyarlamalı optik sistemler gibi büyük ölçekli bir yapının tek bir kontrol yapısı ile kontrol edilmesi oldukça zordur. Büyük ölçekli yapıya sahip sistemleri verimli bir şekilde inceleyebilmek için önerilebilecek bir yöntem, bu sistemi daha küçük alt sistemlere ayırıştırma yöntemidir. Matematiksel ve fiziksel kanunlar çerçevesinde modellenen her bir sistem kendi içerisinde ortak birimler paylaşabilmektedir. Bu örtüşen (overlapping) birimlerin farkındalığı, dağıtılmış (decentralized) yapıda bir kontrol kuramı ortaya çıkarmada kolaylık sağlamaktadır. Sonuç olarak bu tez çalışmasının sonunda, ileride yapılması tavsiye edilecek bir çalışma olarak sistemin öncelikle uygun, basit bir formda elde edildikten sonra kontrolcünün çıkarılmasıdır. Özellikle ayrık yapıda elde edilebilecek basit sistem modelinde hesaplama külfetinde ciddi azalma olabilecektir. Böylece yüksek dereceden kontrolcünün neden olabileceği numerik problemler azaltılacaktır.

- [1] R. M. L. Ellenbroek, "Adaptive deformable mirror dynamics and modular control," 2011.
- [2] R. Tyson, *Principles of adaptive optics*. CRC press, 2010.
- [3] L. Baudouin, C. Prieur, F. Guignard, D. Arzelier, "Robust control of a bimorph mirror for adaptive optics systems," *Applied optics*, vol. 47, no. 20, pp. 3637–3645, 2008.
- [4] G. R. Lemaître, *Astronomical Optics and Elasticity Theory: Active Optics Methods*. 2008.
- [5] I. Newton, *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Courier Corporation, 1979.
- [6] M. C. Roggemann, B. M. Welsh, B. R. Hunt, *Imaging through turbulence*. CRC press, 1996.
- [7] H. W. Babcock, "The possibility of compensating astronomical seeing," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 65, no. 386, pp. 229–236, 1953.
- [8] R. K. Tyson, *Principles of adaptive optics*. CRC press, 2015.
- [9] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, "Minimum variance prediction and control for adaptive optics," *automatica*, vol. 48, no. 9, pp. 1939–1954, 2012.
- [10] E. Gendron P. Léna, "Astronomical adaptive optics. 1: Modal control optimization," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 291, pp. 337–347, 1994.
- [11] J. Huang, D. P. Looze, N. Denis, D. A. Castanon, "Control designs for an adaptive optics system," in *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, vol. 4, 1995, pp. 3753–3756.
- [12] M. A. van Dam, D. Le Mignant, B. A. Macintosh, "Performance of the keck observatory adaptive-optics system," *Applied Optics*, vol. 43, no. 29, pp. 5458–5467, 2004.
- [13] G. Stein D. Gorinevsky, "Design of surface shape control for large two-dimensional arrays," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, no. 3, pp. 422–433, 2005.
- [14] M. van Dam, E. Johansson, P. Stomski, R. Sumner, J. Chin, P. Wizinowich, "Performance of the keck ii ao system," *Keck Adaptive Optics Note (489)*, 2007.
- [15] E. M. Johansson, M. A. van Dam, P. J. Stomski, J. M. Bell, J. C. Chin, R. C. Sumner, P. L. Wizinowich, R. Biasi, M. Andrighttoni, D. Pescoller, "Upgrading the keck ao wavefront controllers," in *Adaptive Optics Systems*, International Society for Optics and Photonics, vol. 7015, 2008, 70153E.

- [16] Y.-T. Liu J. S. Gibson, "Adaptive control in adaptive optics for directed-energy systems," *Optical Engineering*, vol. 46, no. 4, p. 046 601, 2007.
- [17] S. Monirabbasi S. Gibson, "Adaptive control in an adaptive optics experiment," *JOSA A*, vol. 27, no. 11, A84–A96, 2010.
- [18] M. Ficocelli F. B. Amara, "Online tuning of retinal imaging adaptive optics systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 20, no. 3, pp. 747–754, 2011.
- [19] R. N. Paschall, M. A. Von Bokern, B. M. Welsh, "Design of a linear quadratic gaussian controller for an adaptive optics system," in *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1991, pp. 1761–1769.
- [20] R. N. Paschall D. J. Anderson, "Linear quadratic gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements," *Applied optics*, vol. 32, no. 31, pp. 6347–6358, 1993.
- [21] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, P. V. De Lesegno, "Optimal control, observers and integrators in adaptive optics," *Optics express*, vol. 14, no. 17, pp. 7464–7476, 2006.
- [22] D. P. Looze, "Linear-quadratic-gaussian control for adaptive optics systems using a hybrid model," *JOSA A*, vol. 26, no. 1, pp. 1–9, 2009.
- [23] C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, "Linear quadratic gaussian control for adaptive optics and multiconjugate adaptive optics: Experimental and numerical analysis," *JOSA A*, vol. 26, no. 6, pp. 1307–1325, 2009.
- [24] H.-F. Raynaud, C. Correia, C. Kulcsár, J.-M. Conan, "Minimum-variance control of astronomical adaptive optic systems with actuator dynamics under synchronous and asynchronous sampling," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 7, pp. 768–789, 2011.
- [25] C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, J. Montri, D. Rabaud, "Optimal control for multi-conjugate adaptive optics," *Comptes Rendus Physique*, vol. 6, no. 10, pp. 1059–1069, 2005.
- [26] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, "Minimum variance control in presence of actuator saturation in adaptive optics," in *Adaptive Optics Systems*, International Society for Optics and Photonics, vol. 7015, 2008, 70151G.
- [27] M. Nagashima B. Agrawal, "Active control of adaptive optics system in a large segmented mirror telescope," *International Journal of Systems Science*, vol. 45, no. 2, pp. 159–175, 2014.
- [28] G. Agapito, G. Battistelli, D. Mari, D. Selvi, A. Tesi, P. Tesi, "Frequency based design of modal controllers for adaptive optics systems," *Optics Express*, vol. 20, no. 24, pp. 27 108–27 122, 2012.
- [29] S. Mauch J. Reger, "Application of μ -synthesis based h_∞ -control for adaptive optics in laser material processing," in *2013 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, IEEE, 2013, pp. 941–947.
- [30] P. Massioni, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, J.-M. Conan, "An approximation of the riccati equation in large-scale systems with application to adaptive optics," *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 23, no. 2, pp. 479–487, 2014.

- [31] J. Cranney, J. De Dona, P. Piatrou, F. Rigaut, V. Korkiakoski, "Modeling and identification of adaptive optics systems to satisfy distributed kalman filter model structural constraints," in *2017 Australian and New Zealand Control Conference (ANZCC)*, IEEE, 2017, pp. 17–22.
- [32] C. M. Correia, "Advanced control laws for the new generation of ao systems," in *Adaptive Optics Systems VI*, International Society for Optics and Photonics, vol. 10703, 2018, p. 107031M.
- [33] C. Yu, M. Verhaegen, S. Kovalsky, R. Basri, "Identification of structured lti mimo state-space models," in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, 2015, pp. 2737–2742.
- [34] F. Roddier, "Maximum gain and efficiency of adaptive optics systems," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 110, no. 749, p. 837, 1998.
- [35] A. Iqbal, Z. Wu, F. B. Amara, "Mixed-sensitivity h_∞ control of magnetic-fluid-deformable mirrors," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 15, no. 4, pp. 548–556, 2010.
- [36] K. Zhou J. C. Doyle, *Essentials of robust control*. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998, vol. 104.
- [37] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *et al.*, *Robust and optimal control*. Prentice hall New Jersey, 1996, vol. 40.
- [38] D. Hyland D. Bernstein, "The optimal projection equations for fixed-order dynamic compensation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 11, pp. 1034–1037, 1984.
- [39] P. Gahinet P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to h_∞ control," *International journal of robust and nonlinear control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.
- [40] S. Gugercin A. C. Antoulas, "A survey of model reduction by balanced truncation and some new results," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 8, pp. 748–766, 2004.
- [41] J.-W. Yuan Y.-L. Jiang, "A multi-point parameterized model reduction for large parametric systems by using krylov-subspace techniques," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 40, no. 4, pp. 1340–1351, 2018.
- [42] L. Kong K. Zhou, "New approaches for $\mathcal{H}_\infty$ performance preserving controller reduction," in *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, IEEE, 2011, pp. 7771–7776.
- [43] H. Zebiri, B. Mourllion, M. Basset, " $\mathcal{H}_\infty$ controller order reduction for active suspension system," in *2014 European Control Conference (ECC)*, IEEE, 2014, pp. 2364–2369.
- [44] K. M. Grigoriadis R. E. Skelton, "Low-order control design for lmi problems using alternating projection methods," *Automatica*, vol. 32, no. 8, pp. 1117–1125, 1996.
- [45] E. Beran, "Methods for optimization based fixed-order control design," PhD thesis, Technical University of Denmark Denmark, 1997.

- [46] M. Fukuda M. Kojima, "Branch-and-cut algorithms for the bilinear matrix inequality eigenvalue problem," *Computational Optimization and Applications*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105, 2001.
- [47] H. D. Tuan P Apkarian, "Low nonconvexity-rank bilinear matrix inequalities: Algorithms and applications in robust controller and structure designs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 11, pp. 2111–2117, 2000.
- [48] M. Kawanishi Y. Shibata, "Bmi global optimization using parallel branch and bound method with a novel branching method," in *2007 American Control Conference*, IEEE, 2007, pp. 1664–1669.
- [49] M. Kočvara, F. Leibfritz, M. Stingl, D. Henrion, "A nonlinear sdp algorithm for static output feedback problems in compleib," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 38, no. 1, pp. 1055–1060, 2005.
- [50] P. Apkarian, D. Noll, H. Tuan, *A prototype primal-dual lmi-interior algorithm for nonconvex robust control problems*, 2001.
- [51] B. Fares, P. Apkarian, D. Noll, "An augmented lagrangian method for a class of lmi-constrained problems in robust control theory," *International Journal of Control*, vol. 74, no. 4, pp. 348–360, 2001.
- [52] P. Apkarian, D. Noll, J.-B. Thevenet, H. D. Tuan, "A spectral quadratic-sdp method with applications to fixed-order h2 and h_∞ synthesis," *European Journal of Control*, vol. 10, no. 6, pp. 527–538, 2004.
- [53] R. Orsi, U. Helmke, J. B. Moore, "A newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 42, no. 11, pp. 1875–1882, 2006.
- [54] D. McFarlane K. Glover, "A loop-shaping design procedure using h_∞ synthesis," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 37, no. 6, pp. 759–769, 1992.
- [55] W. Tan, J. Liu, P. Tam, "Pid tuning based on loop-shaping h_∞ control," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 145, no. 6, pp. 485–490, 1998.
- [56] A. U. Genç S. T. Impram, "A state-space algorithm for designing h_∞ loop shaping pld controllers," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 36, no. 11, pp. 281–286, 2003.
- [57] P. Apkarian D. Noll, "Nonsmooth h_∞ synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, 2006.
- [58] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, M. L. Overton, "Hifoo-a matlab package for fixed-order controller design and h_∞ optimization," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, no. 9, pp. 339–344, 2006.
- [59] D. Henrion, M. Sebek, V. Kucera, "Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 7, pp. 1178–1186, 2003.
- [60] C. Scherer, P. Gahinet, M. Chilali, " h_∞ design with pole placement constraints: An lmi approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 358–367, 1996.

- [61] D. Henrion, "Lmi optimization for fixed-order $h\infty$ controller design," in *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, IEEE, vol. 5, 2003, pp. 4646–4651.
- [62] F. Yang, M. Gani, D. Henrion, "Fixed-order robust $h\infty$ controller design with regional pole assignment," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 10, pp. 1959–1963, 2007.
- [63] Q. Lin F. Yang, "Multiobjective fixed-order controllers for mimo systems," in *2008 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, IEEE, 2008, pp. 1494–1497.
- [64] H. Khatibi, A. Karimi, R. Longchamp, "Fixed-order controller design for polytopic systems using lmis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 1, pp. 428–434, 2008.
- [65] M. S. Sadabadi A. Karimi, "Fixed-order $h\infty$ and h_2 controller design for continuous-time polytopic systems: An lmi-based approach," in *2013 European Control Conference (ECC)*, Ieee, 2013, pp. 1132–1137.
- [66] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 26, no. 2, pp. 301–320, 1981.
- [67] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis, "State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems," in *1988 American Control Conference*, IEEE, 1988, pp. 1691–1696.
- [68] P. Apkarian, V. Bompert, D. Noll, "Non-smooth structured control design with application to pid loop-shaping of a process," *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, vol. 17, no. 14, pp. 1320–1342, 2007.
- [69] P. Apkarian, D. Noll, H. Duong Tuan, "Fixed-order $h\infty$ control design via a partially augmented lagrangian method," *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, vol. 13, no. 12, pp. 1137–1148, 2003.
- [70] A. Neumaier, "Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction," *Acta numerica*, vol. 13, pp. 271–369, 2004.
- [71] D. Henrion J.-B. Lasserre, "Solving nonconvex optimization problems," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 24, no. 3, pp. 72–83, 2004.
- [72] W. Levine M. Athans, "On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 15, no. 1, pp. 44–48, 1970.
- [73] B. Erol A. Delibaşı, "Fixed order $h\infty$ controller for quarter car active suspension system," in *2015 23rd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, IEEE, 2015, pp. 921–926.
- [74] B. Erol A. Delibaşı, "Proportional integral derivative type $h\infty$ controller for quarter car active suspension system," *Journal of Vibration and Control*, vol. 24, no. 10, pp. 1951–1966, 2018.
- [75] C. W. Scherer, "An efficient solution to multi-objective control problems with lmi objectives," *Systems & control letters*, vol. 40, no. 1, pp. 43–57, 2000.

- [76] J. Geromel P. Gapski, "Synthesis of positive real h_2 controllers," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 42, no. 7, pp. 988–992, 1997.
- [77] M. A. van Dam, "Wave-front sensing for adaptive optics in astronomy," *University of Canterbury*, 2002.
- [78] J. W. Hardy, "Active optics: A new technology for the control of light," *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, no. 6, pp. 651–697, 1978.
- [79] F. Roddier, *Adaptive optics in astronomy*. Cambridge university press, 1999.
- [80] F. Roddier, "Curvature sensing and compensation: A new concept in adaptive optics," *Applied Optics*, vol. 27, no. 7, pp. 1223–1225, 1988.
- [81] R. Ragazzoni, "Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism," *Journal of modern optics*, vol. 43, no. 2, pp. 289–293, 1996.
- [82] J. W. Beletic, R. J. Dorn, T. Craven-Bartle, B. Burke, "A new ccd designed for curvature wavefront sensing," in *Optical Detectors for Astronomy II*, Springer, 2000, pp. 283–309.
- [83] B. C. Platt R. Shack, "History and principles of shack-hartmann wavefront sensing," *Journal of refractive surgery*, vol. 17, no. 5, S573–S577, 2001.
- [84] J. M. Geary, *Introduction to wavefront sensors*. Spie Press, 1995, vol. 18.
- [85] G. Vdovin L. Sarro, "Flexible reflecting membranes micromachined in silicon," *Semiconductor science and technology*, vol. 9, no. 8, p. 1570, 1994.
- [86] M. C. Roggemann, V. M. Bright, B. M. Welsh, S. R. Hick, P. C. Roberts, W. D. Cowan, J. H. Comtois, "Use of micro-electro-mechanical deformable mirrors to control aberrations in optical systems: Theoretical and experimental results," *Optical Engineering*, vol. 36, 1997.
- [87] R. K. Mali, T. G. Bifano, N. Vandelli, M. N. Horenstein, "Development of microelectromechanical deformable mirrors for phase modulation of light," *Optical Engineering*, vol. 36, no. 2, pp. 542–549, 1997.
- [88] W. D. Cowan, M. K. Lee, B. M. Welsh, V. M. Bright, M. C. Roggemann, "Surface micromachined segmented mirrors for adaptive optics," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 5, no. 1, pp. 90–101, 1999.
- [89] A. Tuantranont V. M. Bright, "Segmented silicon-micromachined microelectromechanical deformable mirrors for adaptive optics," *IEEE Journal of selected topics in quantum electronics*, vol. 8, no. 1, pp. 33–45, 2002.
- [90] T. G. Bifano, J. Perreault, R. K. Mali, M. N. Horenstein, "Microelectromechanical deformable mirrors," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 5, no. 1, pp. 83–89, 1999.
- [91] E. Ventsel T. Krauthammer, *Thin plates and shells*. Marcel Dekker New York, 2001.
- [92] R. P. Grosso M. Yellin, "The membrane mirror as an adaptive optical element," *JOSA*, vol. 67, no. 3, pp. 399–406, 1977.
- [93] G. Vdovin P. Sarro, "Flexible mirror micromachined in silicon," *Applied optics*, vol. 34, no. 16, pp. 2968–2972, 1995.
- [94] C. Paterson, I. Munro, J. C. Dainty, "A low cost adaptive optics system using a membrane mirror," *Optics Express*, vol. 6, no. 9, pp. 175–185, 2000.

- [95] T. Ruppel, "Modeling and control of deformable membrane mirrors," in *Adaptive Optics Progress*, InTech, 2012.
- [96] T. G. Bifano, R. K. Mali, J. K. Dorton, J. A. Perreault, N. Vandelli, M. N. Horenstein, D. A. Castanon, "Continuous-membrane surface-micromachined silicon deformable mirror," *Optical Engineering*, vol. 36, no. 5, pp. 1354–1361, 1997.
- [97] J. Feinleib, S. Lipson, P. Cone, "Monolithic piezoelectric mirror for wavefront correction," *Applied Physics Letters*, vol. 25, no. 5, pp. 311–313, 1974.
- [98] K. L. Wlodarczyk, E. Bryce, N. Schwartz, M. Strachan, D. Hutson, R. R. Maier, D. Atkinson, S. Beard, T. Baillie, P. Parr-Burman, *et al.*, "Scalable stacked array piezoelectric deformable mirror for astronomy and laser processing applications," *Review of Scientific Instruments*, vol. 85, no. 2, p. 024 502, 2014.
- [99] E. Steinhaus S. Lipson, "Bimorph piezoelectric flexible mirror," *JOSA*, vol. 69, no. 3, pp. 478–481, 1979.
- [100] S. Kokorowski, "Analysis of adaptive optical elements made from piezoelectric bimorphs," *JOSA*, vol. 69, no. 1, pp. 181–187, 1979.
- [101] M. Lenczner C. Prieur, "Asymptotic model of an active mirror," *International Journal of Tomography & Statistics*, vol. 5, pp. 68–73, 2007.
- [102] E. J. Fernández, L. Vabre, B. Hermann, A. Unterhuber, B. Považay, W. Drexler, "Adaptive optics with a magnetic deformable mirror: Applications in the human eye," *Optics Express*, vol. 14, no. 20, pp. 8900–8917, 2006.
- [103] D. J. Dagel, W. D. Cowan, O. B. Spahn, G. D. Grossetete, A. J. Grine, M. J. Shaw, P. J. Resnick, B. Jokiel, "Large-stroke mems deformable mirrors for adaptive optics," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 572–583, 2006.
- [104] C. R. Vogel Q. Yang, "Modeling, simulation, and open-loop control of a continuous facesheet mems deformable mirror," *JOSA A*, vol. 23, no. 5, pp. 1074–1081, 2006.
- [105] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, 2.2. McGraw-hill New York, 1993, vol. 2.
- [106] T. Ruppel, W. Osten, O. Sawodny, "Model-based feedforward control of large deformable mirrors," *European Journal of Control*, vol. 17, no. 3, pp. 261–272, 2011.
- [107] K. F. Graff, "Wave motion in elastic solids," 1991.
- [108] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, R. L. Taylor, R. L. Taylor, *The finite element method: solid mechanics*. Butterworth-heinemann, 2000, vol. 2.
- [109] R. Curtain K. Morris, "Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial," *Automatica*, vol. 45, no. 5, pp. 1101–1116, 2009.
- [110] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, 2.2. McGraw-hill New York, 1993, vol. 2.
- [111] G. Nikishkov, "Introduction to the finite element method," *University of Aizu*, pp. 1–70, 2004.

- [112] A. N. Kolmogorov, "Dissipation of energy in locally isotropic turbulence," in *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, vol. 32, 1941, p. 16.
- [113] V. I. Tatarskij, "Wave propagation in a turbulent medium," 1961.
- [114] D. L. Fried, "Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures," *JOSA*, vol. 56, no. 10, pp. 1372–1379, 1966.
- [115] J. W. Hardy, *Adaptive optics for astronomical telescopes*. Oxford University Press on Demand, 1998, vol. 16.
- [116] R. E. Hufnagel, "Propagation through atmospheric turbulence," *The Infrared Handbook*, vol. 6, pp. 1–56, 1978.
- [117] G. C. Valley, "Isoplanatic degradation of tilt correction and short-term imaging systems," *Applied Optics*, vol. 19, no. 4, pp. 574–577, 1980.
- [118] A. Abahamid, J. Vernin, Z. Benkhaldoun, A. Jabiri, M. Azouit, A. Agabi, "Seeing, outer scale of optical turbulence, and coherence outer scale at different astronomical sites using instruments on meteorological balloons," *Astronomy & Astrophysics*, vol. 422, no. 3, pp. 1123–1127, 2004.
- [119] A. Tokovinin T. Travouillon, "Model of optical turbulence profile at cerro pachón," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 365, no. 4, pp. 1235–1242, 2006.
- [120] L. Jolissaint, "Optical turbulence generators for testing astronomical adaptive optics systems: A review and designer guide," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 118, no. 847, p. 1205, 2006.
- [121] J. Borgnino, "Estimation of the spatial coherence outer scale relevant to long baseline interferometry and imaging in optical astronomy," *Applied optics*, vol. 29, no. 13, pp. 1863–1865, 1990.
- [122] A. Fuchs, J. Vernin, M. Tallon, "Laboratory simulation of a turbulent layer: Optical and in situ characterization," *Applied optics*, vol. 35, no. 10, pp. 1751–1755, 1996.
- [123] V. Voitsekhovich, "Outer scale of turbulence: Comparison of different models," *JOSA A*, vol. 12, no. 6, pp. 1346–1353, 1995.
- [124] C. Innocenti A. Consortini, "Estimate of characteristic scales of atmospheric turbulence by thin beams: Comparison between the von karman and hill-andrews models," *Journal of modern optics*, vol. 51, no. 3, pp. 333–342, 2004.
- [125] K. Li, E. B. Kosmatopoulos, P. A. Ioannou, H. Ryaciotaki-Boussalis, "Large segmented telescopes," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 20, no. 5, pp. 59–72, 2000.
- [126] K. Hinnen, M. Verhaegen, N. Doelman, " h_2 -optimal control of an adaptive optics system: Part 1, data-driven modeling of wavefront disturbance," in *Astronomical Adaptive Optics Systems and Applications II*, International Society for Optics and Photonics, vol. 5903, 2005, p. 590 309.

- [127] M. Brangier, F. Vidal, T. Morris, E. Gendron, Z. Hubert, A. Basden, G. Rousset, R. Myers, F. Chemla, A. Longmore, *et al.*, “Canary moao demonstrator: On-sky first results,” in *Adaptive Optics: Methods, Analysis and Applications*, Optical Society of America, 2011, AMA3.
- [128] R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, J.-M. Conan, “Lqg adaptive optics control with wind-dependent turbulent models,” in *Adaptive Optics Systems V*, International Society for Optics and Photonics, vol. 9909, 2016, p. 99090M.
- [129] “American National Standard for Ophthalmics Methods for Reporting Optical Aberrations of Eyes: ANSI Z8028,” American National Standards Institute, New York, NY, Standard, 2004.
- [130] M. C. Roggemann, C. A. Stoudt, B. M. Welsh, “Image-spectrum signal-to-noise-ratio improvements by statistical frame selection for adaptive-optics imaging through atmospheric turbulence,” *Optical Engineering*, vol. 33, no. 10, pp. 3254–3265, 1994.
- [131] R. J. Noll, “Zernike polynomials and atmospheric turbulence,” *JOSA*, vol. 66, no. 3, pp. 207–211, 1976.
- [132] J.-M. Conan, G. Rousset, P.-Y. Madec, “Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence,” *JOSA A*, vol. 12, no. 7, pp. 1559–1570, 1995.
- [133] W. Southwell, “Wave-front estimation from wave-front slope measurements,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 70, no. 8, pp. 998–1006, 1980.
- [134] S. Moser, P. Lee, A. G. Podoleanu, “An fpga architecture for extracting real-time zernike coefficients from measured phase gradients,” *Measurement Science Review*, vol. 15, no. 2, pp. 92–100, 2015.
- [135] A. Varga, “Balancing free square-root algorithm for computing singular perturbation approximations,” in *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1991, pp. 1062–1065.
- [136] A. G. Janssen, S. van Haver, P. Dirksen, J. Braat, “Zernike representation and strehl ratio of optical systems with variable numerical aperture,” *Journal of Modern Optics*, vol. 55, no. 7, pp. 1127–1157, 2008.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgisi: bilalerol@yahoo.com

Makale

1. **B. Erol**, A. Delibaşı, Fixed-order H_{∞} Controller Design for MIMO Systems via Polynomial Approach, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 41(7), 1985-1992, 2019
2. **B. Erol**, B. Altiner, E. Adalı, A. Delibaşı, H_{∞} Suboptimal controller design for adaptive optic systems, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 41(8), 2100-2113, 2019

Konferans Bildirisi

1. E. Adalı, **B. Erol**, A. Delibaşı, B. Altiner, Uyarlamalı Optik Sistemler için H_{∞} alt-Optimal Kontrolcü Geliştirilmesi, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi (TOK), İstanbul, Türkiye, 21 Eylül 2017, ss.183-188

Proje

1. 118E224 - TÜBİTAK - 1001 Projesi, Uyarlamalı Optik Sistemler için Sabit Dereceli H_{∞} Alt-Optimal Kontrolcü Geliştirilmesi, 2018-2021.