

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ANAHTARLAMALI ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN
OTURMA ZAMANI EN KÜÇÜKLEMESİ**

AHMET TAHA KORU

**DOKTORA TEZİ
KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. AKIN DELİBAŞI**

**EŞ DANIŞMAN
PROF. DR. HİTAY ÖZBAY**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANAHTARLAMALI ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN
OTURMA ZAMANI EN KÜÇÜKLEMESİ

Ahmet Taha KORU tarafından hazırlanan tez çalışması 17.01.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Akın DELİBAŞI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Hitay ÖZBAY
Bilkent Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Akın DELİBAŞI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Alpaslan PARLAKÇI
İstanbul Bilgi Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim Beklan KÜÇÜKDEMİRAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Şeref Naci ENGİN
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Tez çalışmam ile ilgili en büyük şansım, bana yol gösteren hocalarımdı. Birlikte çalışmanın her anı hem çok öğretici hem de çok keyifliydi. Danışman hocam Doç. Dr. Akın Delibaşı'nın ilk doktora öğrencisiyim. Her zaman beni anladı, desteğini ve ilgisini hiç esirgemedi. Bilgisi ve araştırma sevgisiyle araştırmalarımıza motivasyon verdi, takıldığımız noktalarda çıkış yolları bulmamızı sağladı. Aramızda mesafeler olmasına rağmen, yüksek lisansta da danışmanlığımı yapan Prof. Dr. Hitay Özbay eş danışmanım olarak tecrübesi ve bilgisiyle araştırmalarımıza yön verdi, güzel bir çalışma ortaya çıkarmamıza büyük katkılar sağladı. Hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Sonuç olarak benim için çok öğretici ve akademik olarak değerli bir doktora çalışması ortaya çıkmış oldu.

Altı ayda bir tekrarlanan tez ilerleme sunumları ise benim için bir sürprizdi. Formalite icabı yapıldığını düşündüğüm bu sunumlar, tez çalışmamıza farklı bakış açıları getirdi. Dışarıdan bir gözün, akademik çalışmaya çok faydalı olduğunu gördüm. Sunum anına kadar olan ilerleme ile ilgili yapılan yorumlar bir yana, o andan sonra nasıl ve neler yapabileceğimiz ile ilgili de çok güzel fikirler ortaya çıktı. Tez izleme komitesinde bulunan Prof. Dr. Alpaslan Parlakçı ve Prof. Dr. İbrahim Beklan Küçükdemiral'a teşekkürü borç bilirim.

Akademik hayatın içine girmemin başlıca sebebi, parçası olmaktan gurur duyduğum ailemdir. Bilimi, bilgiyi çok seven bir anne ve babanın çocuğu olarak araştırmak genlerimde var. Beş kardeş olmamıza rağmen, anne - babamız hepimizle tek çocuklarıymış gibi ilgilendiler, eğitim ve kariyer hayatlarımızla ilgili yol gösterici oldular. Annem Nebahat, babam Fehmi, kardeşlerim Mehmet Yasin, Zeynep Alemşah, Fatma Şirin ve Ömer Faruk'a sevgilerimi sunar ve teşekkür ederim.

Bu tezi yazmaya başladığım zamanlarda ailemiz büyüdü, aramıza Ahmet Kerem katıldı. İkinci kez dayı olmanın mutluluğunu yaşadım. Yeğenlerim Elif Hayvacı ve Ahmet Kerem Hayvacı'ya sevgilerimi sunarım.

Ocak, 2017

Ahmet Taha Kuru

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
KISALTMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	4
BÖLÜM 2	
ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERDE KARARLILIK ANALİZİ	6
2.1 Model Dönüşümü ve Karşılaştırma Sistemleri	7
2.2 Lyapunov - Razumikhin Kararlılığı	8
2.3 Lyapunov - Krasovskii Kararlılığı	11
2.3.1 Serbest Ağırlık Matrisleri Yöntemi	12
2.3.2 Jensen Eşitsizliği Yöntemi	13
BÖLÜM 3	
ANAHTARLAMALI SİSTEMLERDE KARARLILIK ANALİZİ	15
3.1 Rastgele Anahtarlama ile Kararlılık	16
3.2 Koşullu Anahtarlama ile Kararlılık	17
3.2.1 Üstel Lyapunov Fonksiyonu ile Kararlılık	18
3.2.2 Zaman Planlamalı Lyapunov Fonksiyonu ile Kararlılık	18
3.3 Anahtar İşareti Tasarımı ile Kararlılık	19

BÖLÜM 4

YÖNTEM I: SERBEST AĞIRLIK MATRİSLERİ İLE OTURMA ZAMANLI KARARLILIK20

- 4.1 Sözde - Konveks Optimizasyon ile Oturma Zamanı En Küçüklenmesi 26
- 4.2 Oturma Zamanını En Küçükleyen Kontrolcü Sentezi27

BÖLÜM 5

YÖNTEM II: ZAMAN PLANLAMALI LYAPUNOV - KRASOVSKII FONKSİYONLARI İLE OTURMA ZAMANLI KARARLILIK 34

- 5.1 Oturma Zamanını En Küçükleyen Kontrolcü Sentezi41

BÖLÜM 6

SAYISAL ÖRNEKLER47

- 6.1 Kararlılık Analizi Örnekleri 48
- 6.2 Kontrolcü Sentezi Örnekleri 51

BÖLÜM 7

SONUÇLAR VE ÖNERİLER56

KAYNAKLAR57

EK-A

PROGRAM KODLARI60

- A.1 Kararlılık Analizi 60
- A.2 Yöntem I ile Kararlılık Analizi için Matlab Kodları 61
- A.3 Yöntem II ile Kararlılık Analizi için Matlab Kodları62

KISALTMA LİSTESİ

AZG	Anahtarlamaalı Zaman Gecikmeli
DME	Doğrusal Matris Eşitsizliğı
DZD	Doğrusal Zamanla Değışmeyen

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 Ortak Lyapunov fonksiyonuna sahip kararlı anahtarlama bir sistem	15
Şekil 3.2 Çoklu Lyapunov fonksiyonuna sahip kararlı bir anahtarlama bir sistem	16
Şekil 6.1 Yöntem II ile Örnek 6.1'in farklı h ve d değerleri için oturma zamanları . .	48
Şekil 6.2 Yöntem I ile Örnek 6.1'in farklı h değerleri için oturma zamanları	49
Şekil 6.3 Örnek 6.4'ün farklı h ve d değerleri için Yöntem II ile oturma zamanları . .	50
Şekil 6.4 Örnek 6.4 için benzetim sonucu.	51
Şekil 6.5 Örnek 6.5 için yöntem II ile bulunan kontrolcü.	52
Şekil 6.6 Yöntem I ile hesaplanan Örnek 6.6 için oturma zamanları	53
Şekil 6.7 Örnek 6.6 için zamanla değişen kontrolcü	54

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 6.1	Yöntem I ile farklı τ_i ve d_i değerleri için Örnek 1 oturma zamanları. ... 48
Çizelge 6.2	Yöntem I ile farklı τ_i ve d_i değerleri için Örnek 2 oturma zamanları. ... 49
Çizelge 6.3	Örnek 6.1, 6.2 ve 6.3 için yöntemlerin karşılaştırılması 49

ANAHTARLAMALI ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN OTURMA ZAMANI EN KÜÇÜKLEMESİ

Ahmet Taha Kuru

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Akın Delibaşı

Eş Danışman: Prof. Dr. Hitay Özbay

Bu çalışmada, anahtarlama zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığı için gereken oturma zamanının en küçüklemesi, sözde-konveks yarı-kesin optimizasyon yöntemleri ile gerçekleştirilmiştir. Sistemin kararlılığını incelemek için parçalı Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelleri kullanılmış ve bu fonksiyonellerin türevinin negatif olduğu serbest ağırlık matrisleri yöntemi ile gösterilmiştir.

Oturma zamanı koşullarının bulunması ve en küçüklenmesi için iki farklı yöntem geliştirilmiştir. Birinci yöntemde parçalı Lyapunov - Krasovskii fonksiyonelleri kullanılarak oturma zamanı için gerek koşullar ortaya konulmuş ve doğrusal matris eşitsizlikleri yöntemleri ile en küçükleme gerçekleştirilmiştir. İkinci yöntemde ise Lyapunov - Krasovskii fonksiyonelleri zamana bağlı planlanmıştır. Bu fonksiyonelleri kullanarak yeter koşullar ortaya konulmuş ve en küçükleme işlemi gerçekleştirilmiştir. Sayısal örnekler aracılığıyla bu çalışmada geliştirilen algoritmaların literatürdeki geçmiş çalışmalardan daha iyi sonuçlar verdiği, karşılaştırılarak gösterilmiştir.

Son aşamada, kararlılık analizi için elde edilen her iki yöntem kullanılarak oturma zamanının en küçükleyen denetleyiciler sentezlenmiştir. Sentez algoritmaları, doğrusal olmayan koşulları art arda doğrusallaştırarak oturma zamanını en küçüklemektedir.

Anahtar Kelimeler: Zaman gecikmesi, oturma zamanı optimizasyonu, zaman planlamalı Lyapunov fonksiyonları, serbest ağırlık matrisleri, anahtarlama sistemler

ABSTRACT

DWELL TIME MINIMIZATION OF SWITCHED DELAY SYSTEMS

Ahmet Taha Koru

Department of Control and Automation Engineering

Ph.D. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Akın Delibaşı

Co-Adviser: Prof. Dr. Hitay Özbay

In this paper, an upper bound of the switched delay systems are minimized via quasi-convex semi-definite programming techniques. Piecewise Lyapunov-Krasovskii functionals are introduced and the upper bound for the derivative of Lyapunov functionals are estimated by free weighting matrices method to investigate non-switching stability of each candidate subsystems.

Two different methods are developed to determine an upper bound of the dwell time. In the first method, a sufficient condition for the dwell-time is derived using Lyapunov - Krasovskii functionals to guarantee the asymptotic stability of the switched delay system. In the second method, the Lyapunov - Krasovskii functionals are time scheduled. In both technique, the conditions are linear matrix inequalities. Numerical examples are given to illustrate the improvements over previously obtained dwell-time bounds.

Using the two different results obtained in the stability case, we present nonlinear minimization algorithms to synthesize the dwell time minimizer controllers. The algorithms solve the problem with successive linearization of nonlinear conditions.

Keywords: Time delay, dwell time optimization, time-scheduled Lyapunov function, switched systems, free weighting matrices.

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Dinamik sistemler kümesi ve bu kümenin elemanlarının aktif olduğu zamanları organize eden ayrık zamanlı anahtar işareti içeren sistemlere *anahtarlama sistemi* denir. Bu tip sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan temel yöntemlerden bir tanesi, anahtarlama işaretlerine kısıtlar koymaktır. Bir anahtarlama işaretinin, art arda gelen iki anahtarlama anı arasında geçen sürenin *oturma zamanı* diye isimlendirilen değerden uzun olması koşulu ile anahtarlama sistemin kararlılığı garantilenebilir [1]. Anahtarlama sistemlerin bir özeti için [2]'ye başvurulabilir.

Pratik uygulamalarda anahtarlama işaretlerinde oturma zamanı gözlemlenebilir. Örneğin bir arabanın farklı zemin koşullarında (kuru, kaygan, tozlu) değişen dinamiklerini ele alalım. Her bir zeminde belirli bir süre geçecektir. Bir başka örnek olarak, uzaktan kumanda edilen robotik ameliyat sisteminde, robot uç noktasının hasta dokusu ile temas etmesi ve etmemesi durumlarına geçişleri arasında bir süre olacaktır [3]. Ayrıca, denetleyicilerdeki hızlı anahtarlama, çatırdama ve sisteme zarar verme gibi problemlere neden olabilmektedir [4]. Bu sebeplerle, oturma zamanlı kararlılığın popülerliği son yıllarda artmıştır.

1.1 Literatür Özeti

Anahtarlama sistemlerin kararlılığının incelenmesi yöntemleri üç kategoriye ayrılabilir [5].

- İlk yöntem, anahtarlama sistemin bütün alt sistemleri için ortak bir Lyapunov fonksiyonu bulmak ve böylece sistemin herhangi bir anahtarlama işareti için kararlı olduğunu göstermektir [6, 7, 8]. Anahtarlama sistemlerin bir bölümü ortak Lyapunov

fonksiyona sahip değildir [9]. Ayrıca, ortak Lyapunov fonksiyonuna sahip olmak, rastgele anahtarlama sistemleri için sadece yeter bir koşuldur, bu sebeple tutucu olduğu belirtilmiştir [2].

- İkinci yöntem, yavaş anahtarlama ile asimptotik kararlılığı göstermektir. Oturma zamanı ya da ortalama oturma zamanı kararlılık analizleri bu kategoridedir [10, 11, 12, 13, 14]. Yavaş anahtarlama yönteminde, eğer bütün alt sistemler kararlı ve anahtarlama işaretlerinin oturma zamanı yeterince büyükse, sistem kararlıdır [15].
- Kararlılık analizinde kullanılan üçüncü yöntem, sistemi kararlı yapan anahtarlama işaretlerini tasarlamaktır [1, 16]. İlk iki yöntemde, içinde sonsuz sayıda anahtar işaretini içeren kümeler bulunmaktaydı. Üçüncü yöntemde ise sistemi kararlı yapan bir ya da birden fazla anahtar işaretleri bulunur.

Parçalı Lyapunov fonksiyonları, oturma zamanı kararlılık analizi yöntemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Çalışma [10]'da bulunan oturma zamanı kararlılık koşulları $e^{A\tau}Pe^\tau$ gibi üstel terimler içermektedir. Başka bir yaklaşım ise optimizasyon kısıtları konveks kümeler olan zaman planlamalı Lyapunov fonksiyonları kullanmaktır [3]. Zaman planlamasının dezavantajı karar değişkenlerinin sayısının artmasıdır. Çalışma [17]'de, zaman planlamalı parçalı Lyapunov fonksiyonları için yeterince karar değişkeni ve doğrusal matris eşitsizlikleri kullanıldığında, mevzubahis iki yöntemin denk olduğu gösterilmiştir.

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizi ile ilgili literatürde oldukça farklı yaklaşımlar vardır. Göz atmak isteyenler [18]'e başvurabilir. Kararlılık analizinin ilk çalışmalarında model aktarımı yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemde, noktasal zaman gecikmelere sahip sistem, dağıtılmış zaman gecikmesine sahip bir sisteme dönüştürülür. Dönüştürülmüş sistemin kararlılığı, orijinal sistemin kararlılığı için yeter koşuldur. Bu sebeple tutuculuğa neden olmaktadır [18]. Daha az tutucu olan bir yöntem serbest ağırlık matrisleri gibi model aktarımı içermeyen yöntemlerdir [19, 20, 5].

Literatürde, anahtarlama zaman gecikmeli sistemler için oturma zamanı kararlılık analizleri ile ilgili çalışmalar mevcuttur. Çalışma [21]'de, ortalama oturma zamanı koşulları üstel terimler içermekte, bu sebeple oturma zamanı en küçükleme polinom

zamanlı bir algoritma ile hesaplanamamaktadır. Problemin çözülebilir hale getirebilmek adına, oturma zamanı en küçüklenmez, ancak belirlenmiş bir oturma zamanının sistemi kararlı yapıp yapmadığına bakılır. Literatürde oturma zamanını en küçükleyen çalışmalar da mevcuttur [22, 23, 24]. Bu çalışmalarda model aktarımı temelli yöntemler kullanılmıştır. Bu çalışmalarda elde edilen oturma zamanları tanımları

$$\tau_D = 2\tau_{\max} + T^* \quad (1.1)$$

şeklindedir. Denklemden $\tau_{\max}$ alt sistemlerin zaman gecikmelerinden en büyük olanı ve T^* maliyet fonksiyonudur.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında, dinamik denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + \bar{A}_{\sigma(t)}x(t-r(t)) \quad t > 0, \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau_{\max}, 0], \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan anahtarlama zaman gecikmeli sistemlerin oturma zamanı kararlılık koşullarının bulunması ve bu koşulları kullanarak oturma zamanının en küçüklemesi gerçekleştirilmiştir.

Bunun için alt sistemlerin kararlılığı serbest ağırlık matrisleri kullanılarak gösterilmiştir. Daha sonra Lyapunov fonksiyonu ile oturma zamanı arasındaki ilişki bulunmuştur. Sözde-konveks optimizasyon yöntemleri ile oturma zamanı en küçüklenmiştir.

İkinci yöntem olarak, Lyapunov - Krasovskii fonksiyonları zaman planlamalı hale getirilmiştir. Zaman planlamalı Lyapunov fonksiyonları ve oturma zamanı arasındaki ilişki ortaya konulmuştur.

Her iki yöntem için de denetleyici sentezi gerçekleştirilmiştir. Nümerik örneklerle, geliştirilen algoritmaların, literatürde bulunan geçmiş algoritmalarla üstünlüğü kıyaslanarak gösterilmiştir.

Bu tezde kullanılan notasyon standarttır. $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^+$) reel sayıları (pozitif reel sayılar, negatif-olmayan reel sayılar), $\mathcal{C}$ türevlenebilir fonksiyonlar kümesini temsil etmektedir. Birim matris I ile gösterilmiştir. Pozitif kesin (pozitif yarı kesin, negatif kesin, negatif yarı kesin) matrisler $X \succ 0$ ($\succeq$, $\prec$, $\preceq 0$) ile temsil edilmiştir. $\sigma_{\max}[X]$ ve $\sigma_{\min}[X]$, X matrisinin en küçük ve en büyük özdeğerlerini göstermektedir. Yıldız işareti (*) bir matrisin kompleks eşlenik tersçaprazını temsil etmektedir. x_t ile yörünge üzerinde öteleme işlevi temsil edilmektedir ($x_t(\theta) = x_t(t + \theta)$, zaman aralığı $\theta \in [-\tau, 0]$). X ve Y matrisleri için, bir zaman aralığında

$$\text{afin}(X, Y, t - t_0, \delta) = \left(1 - \frac{t - t_0}{\delta}\right) X + \left(\frac{t - t_0}{\delta}\right) Y, \quad (1.3)$$

afin fonksiyonu tanımlanmıştır. Norm $\|\cdot\|$, Öklid normunu temsil etmektedir. Türevlenebilir fonksiyonlar kümesi $\mathcal{C}$ üzerinde

$$|f|_{[a,b]} = \max \left\{ \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|, \sup_{t \in [a,b]} \|\dot{f}(t)\| \right\} \quad (1.4)$$

normu tanımlanmıştır.

1.3 Hipotez

Literatürde bulunan oturma zamanı en küçüklemesi yapan çalışmalarda, tutucu olan model aktarımı temelli yöntemler kullanılmıştır. Bu çalışmada, model aktarımı yöntemleri yerine serbest ağırlık matrisleri yöntemi ile kararlılık koşulları hesaplanmıştır. Böylece

- Model aktarımının neden olduğu tutuculuktan da kurtulunmuştur.
- Oturma zamanı Denklem (1.1)'deki form yerine,

$$\tau_D = \tau_{\max} + T^* \quad (1.5)$$

formuna getirilmiştir. Maliyet fonksiyonuna eklenen terim iki zaman gecikmesinden, bir zaman gecikmesine düşürülmüştür.

- Literatürdeki geçmiş oturma zamanı en küçüklemesi algoritmaları optimal altı bir çözüm bulmaktadırlar. Bu çalışmada ise sözde-konveks optimizasyon yöntemleri ile global en

küçük değer hesaplanmıştır.

Böylece, oturma zamanının en küçüklemesini gerçekleştiren birinci yöntem ortaya konulmuştur.

Ancak, birinci yöntem, üstel terimler içeren yöntemler kadar az tutucu değildir. Üstel terimler içeren kısıt koşulları ise konveks olmayan bir küme oluşturmakta, bu sebeple oturma zamanı en küçüklemesi yapılamamaktadır. Bu çalışmada, üstel terimler içeren yöntemler kadar az tutucu olan ancak konveks küme oluşturan zaman planlamalı Lyapunov fonksiyonlarını kullanan ikinci bir yöntem geliştirilmiştir. Bu tarz bir yaklaşım, bildiğimiz kadarıyla, anahtarlamalı zaman gecikmeli sistemler literatüründe bulunmamaktadır. Bu yöntemde oluşan oturma zamanı tanımında, maliyet fonksiyonuna sabit bir parametre eklenmemektedir. Yani $\tau_D = T^*$ formundadır.

BÖLÜM 2

ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERDE KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde zaman gecikmeli sistemler için literatürde bulunan DME temelli kararlılık analizi yöntemleri özetlenmiştir.

İncelediğimiz sistemler, doğrusal, zamanla değişmeyen, noktasal zaman gecikmelerine sahip sistemlerdir. Bu sistemler

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + \bar{A}x(t - r(t)), \quad \forall t > 0 \\ x(\theta) &= \psi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]\end{aligned}\tag{2.1}$$

denklemleriyle tanımlanır. Bu denklemde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durum matrisi, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zaman gecikmeli durum matrisi, x durum vektörü, r zaman gecikmesi ve $\psi \in \mathcal{C}$ başlangıç koşuludur. Zaman gecikmesinden dolayı, başlangıç koşulu, sürekli ve sınırlı fonksiyonlar kümesi $\mathcal{C}$ 'nin bir elemanıdır.

Zaman gecikmesi üzerinde iki tip varsayım bulunmaktadır. Birincisi, zaman gecikmesinin değerinin üst sınırı h , diğeri ise zaman gecikmesinin değişiminin üst sınırı d 'dir.

$$0 \leq r(t) \leq h \tag{2.2}$$

$$|\dot{r}(t)| \leq d \tag{2.3}$$

Eğer eşitsizlik (2.3)'te, $d = 0$ olarak alınırsa, zaman gecikmesi sabit olur. Bu durumda

dinamik denklem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \bar{A}x(t-r), \quad \forall t > 0 \\ x(\theta) &= \psi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0] \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde olur.

Zaman gecikmeli sistemler için iki şekilde kararlı olabilir.

- **Zaman gecikmesinden bağımsız kararlılık:** Zaman gecikmesinin üst sınırı h ne olursa olsun sistemin kararlı olması durumudur. Denklem (2.2)'deki üst sınır h 'ın, $[0, \infty)$ aralığındaki bütün değerleri için, sistem kararlı ise, zaman gecikmesinden bağımsız kararlıdır.
- **Zaman gecikmesine bağlı kararlılık:** Zaman gecikmesinin üst sınırı h 'ın, belirli bir değerden küçük olduğu durumlar için sistem kararlı ise zamana bağlı kararlıdır ($h \leq h_{\max} < \infty$ durumu).

Kararlılık analizlerinin temelinde iki farklı teorem vardır. Bunlar Razumikhin ve Lyapunov - Krasovskii kararlılık teoremleridir. Bu teoremler doğrudan Sistem (2.1)'e ya da bu sistemi temsil eden karşılaştırma sistemleri üzerine uygulanır. Bundan sonraki alt bölümlerde, ilk olarak model dönüşümü ve karşılaştırma sistemleri, daha sonra ise kararlılık teoremleri ve bu teoremlerin uygulamalarına yer verilmiştir.

2.1 Model Dönüşümü ve Karşılaştırma Sistemleri

Özellikle zaman gecikmeli sistemleri üzerindeki araştırmaların ilk çalışmalarında model dönüşümü teknikleri görülmektedir. Bu teknikte zaman gecikmeli sistem bir başka sisteme dönüştürülerek, kararlılık analizi, kontrolcü tasarımı bu dönüştürülen sistem üzerinden gerçekleştirilir. Orijinal sistemden dönüştürülerek elde edilen sisteme *karşılaştırma sistemi* denir [25].

Model dönüşümünün gerçekleştirilmesindeki amaç, sistemin basitleştirilerek kararlılık analizinin kolaylaştırılmasıdır. Genellikle, karşılaştırma sisteminin kararlılığı, orijinal sistemin kararlılığı için yeter koşuldur. Karşılaştırma sistemi kararlı olmadığı halde, orijinal

sistem kararlı olabilir. Çünkü, karşılaştırma sistemlerinde genellikle orijinal sistemde olmayan ek dinamikler bulunmaktadır. Bu yüzden model dönüşümü temelli analizler tutucu bulunmuş ve son dönemlerde popülerliğini yitirmiştir.

İlk yapılan ve en temel model dönüşümü, Newton - Leibniz model dönüşümüdür. Bu dönüşümde

$$x(t-h) = x(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}(\theta) d\theta \quad (2.5)$$

eşitliği kullanılarak, Denklem (2.1)'deki sistem,

$$\dot{x}(t) = (A + \bar{A})x(t) - \bar{A} \int_{t-h}^t [Ax(s) + \bar{A}x(s-h)] ds \quad (2.6)$$

sistemine dönüştürülmüş olur. Karşılaştırma sisteminde noktasal zaman gecikmesi yerine, dağıtılmış zaman gecikmesi görülmektedir. Bunun sonucu olarak, başlangıç koşulu fonksiyonelinin zaman aralığı $\phi \in \mathcal{C}[-2h, 0]$ olacak şekilde genişlemiştir. Denklem (1.1)'deki oturma zamanı formunda, zaman gecikmesinin iki katının bulunması sebebi budur.

Dağıtılmış zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizi, noktasala göre daha basittir. Orijinal sistemle karşılaştırma sisteminin Laplace dönüşümlerini kıyaslayacak olursak, karşılaştırma sistemine ek kutuplar geldiğini görürüz.

Newton - Leibniz model dönüşümünden başka, parametrik Newton - Leibniz model dönüşümü [26], tanımlayıcı model dönüşümü [27], Padé yaklaşımı ile model dönüşümü [28] gibi yöntemler de literatürde mevcuttur.

2.2 Lyapunov - Razumikhin Kararlılığı

Genel formu

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (2.7)$$

olan zaman gecikmeli sistemler için kararlılık koşullarını belirten teoremlerden bir tanesi Lyapunov - Razumikhin Teoremi'dir.

Teorem 2.1 (Lyapunov - Razumikhin Teoremi, bkz. [18]). Varsayalım ki $u, v, \omega, p : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sürekli ve azalmayan fonksiyonlar, $u(0) = v(0) = 0$ olsun. Eğer sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \quad t \in \mathbb{R} \text{ ve } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

mevcutsa ve bu V 'nin (2.7)'deki $x(t)$ çözümü boyunca türevi

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\omega(\|x(t)\|) \quad (2.9)$$

ve bu V için

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) < p(V(t, x(t))), \quad \forall \theta \in [-h, 0] \quad (2.10)$$

koşulu tutarlıysa, sistem (2.7) düzgün asimptotik kararlıdır.

Razumikhin teorisinin uygulamalarında kullanılan yaygın Lyapunov fonksiyonu

$$V(t) = x^T(t)Px(t) \quad (2.11)$$

şeklinde olan ikinci dereceden fonksiyondur.

Bu teorinin bir tane zaman gecikmesinden bağımsız kararlılık ve bir tane zaman gecikmesine bağımlı kararlılık koşulu elde edilen uygulaması, bu tezde örnek olarak sunulmuştur. Altta sunulan teoremler karşılaştırma sistemleri üzerinden kararlılığı göstermektedir.

Teorem 2.2 (Bkz. [18]) Denklem (2.4)'deki sistem, eğer

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \alpha P & P\bar{A} \\ * & -\alpha P \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.12)$$

koşulunu sağlayan simetrik $P \succ 0$ matrisi ve skaler $\alpha > 0$ değeri bulunabiliyorsa, zaman gecikmesinden bağımsız kararlıdır.

Bir sonraki teoremde Lyapunov - Razumikhin Teorisi zaman gecikmesine bağlı kararlılık analizi uygulamasında kullanılmıştır. Bu teoremde, Newton - Leibniz model dönüşümü ile elde edilen karşılaştırma sisteminin kararlılığı gösterilmiştir. Bu yüzden tutucu bir yöntemdir.

Teorem 2.3 (Bkz. [25]) Eğer

$$\begin{bmatrix} P(A^T + \bar{A}^T) + h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)P & -hP\bar{A}A & -hP\bar{A}^2 \\ * & -h\varepsilon_1 P & 0 \\ * & * & -h\varepsilon_2 P \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.13)$$

koşulunu sağlayan simetrik $P \succ 0$ matrisi ve skaler değerler $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ bulunabiliyorsa; denklem (2.4)'teki sistem, (2.2) koşulunu sağlayan zaman gecikmesi için, zaman gecikmesine bağlı kararlıdır.

Denklem (2.13), serbest P matrisi ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ skaler parametreleri için DME değildir. Bu nedenle, skaler değerler serbest parametre olarak tanımlanmaz. Onun yerine optimizasyon öncesinde ayarlanır. Bu parametrelerin ayarlanması üzerine bir tartışma Kaynak [18]'de bulunabilir.

Teorem 2.2 ve 2.3, karşılaştırma sisteminin kararlılığı üzerinden orijinal sistemin kararlılığını ispatlamaktadır. Bu nedenle tutucu yöntemlerdir.

2.3 Lyapunov - Krasovskii Kararlılığı

Lyapunov - Krasovskii Teoremi, bu sistemin kararlılığını ispatlamakta yaygın olarak kullanılan bir teoremdir. Bu bölümde önce Lyapunov - Krasovskii Teoremi, daha sonra bu teoremin DZD zaman gecikmeli sistemlere uygulandığı yöntemler sunulmuştur.

Teorem 2.4 (Lyapunov - Krasovskii Teoremi, bkz. [29]) Eğer sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyonel $V : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, öyle ki

$$u(\|\psi(0)\|) \leq V(t, \psi) \leq v(|\psi|) \quad (2.14)$$

ve

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -\omega(\|\phi(0)\|), \quad (2.15)$$

varsa, denklem (2.7)'teki sistem düzgün kararlıdır. Eğer $s > 0$ için $\omega(s) > 0$ ise, sistem düzgün asimptotik kararlıdır.

DZD zaman gecikmeli sistemler için yaygın olarak kullanılan Lyapunov - Krasovskii fonksiyoneli aşağıda verilmiştir,

$$V(t, x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-h}^t x(s)^T Q x(s) ds + \int_{-h}^0 \int_{t-\theta}^t \dot{x}(s)^T Z x(s) ds d\theta. \quad (2.16)$$

Bu fonksiyonelin pozitif, türevinin negatif olduğu gösterilirse, sistem kararlıdır. Ancak bu fonksiyonelin türevinde

$$- \int_{t-h}^t \dot{x}(\theta)^T Z \dot{x}(\theta) d\theta \quad (2.17)$$

terimi mevcuttur. Geliştirilen Lyapunov - Krasovskii temelli yöntemler, bu integralli ifadenin üstten sınırlandırılması, böylece DME yöntemlerinin uygulanabilmesi ile ilgilidir.

2.3.1 Serbest Ağırlık Matrisleri Yöntemi

Detayları [20]'da sunulmuş bu yöntem, temel olarak serbest ağırlık değişkenleri ekleyerek, Lyapunov fonksiyonunun türevini üstten sınırlayarak negatifliğini ispatlama yöntemidir. En önemli özelliği, model dönüşümü olmadan, doğrudan orijinal sistemi incelemesidir. Bu sebeple tutuculuğu Razumikhin temelli yöntemlere göre düşüktür.

Teorem 2.5 (Bkz. [19]) Pozitif bir X matrisini

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlayalım ve boyutları N_1 ve N_2 matrisleri olsun. Aşağıdaki DME'leri

$$\phi := \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & hA^T Z \\ * & \phi_{22} & h\bar{A}^T Z \\ * & * & -hZ \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.19)$$

$$\psi := \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & N_1 \\ * & X_{22} & N_2 \\ * & * & Z \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (2.20)$$

sağlayan simetrik $P \succ 0$, $Q \succeq 0$, $Z \succ 0$ mevcutsa, denklem (2.1)'deki sistem, (2.2) ve (2.3) koşullarını sağlayan zaman gecikmesi için asimptotik kararlıdır. Eşitsizlik (4.6) ve (4.7)'teki değişkenler aşağıdaki gibidir:

$$\phi_{11} = PA + A^T P + N_1 + N_1^T + Q + hX_{11}, \quad (2.21)$$

$$\phi_{12} = P\bar{A}_i - N_{1i} + N_2^T + hX_{12}, \quad (2.22)$$

$$\phi_{22} = -N_2 - N_2^T - (1-d)Q + hX_{22}. \quad (2.23)$$

2.3.2 Jensen Eşitsizliği Yöntemi

Bu eşitsizlik 1906 yılında yayımlanan [30]'da ispatlanmıştır. İstatistik, fizik, olasılık teorisi gibi bir çok alanda uygulaması mevcuttur. Zaman gecikmeli sistemlerde ise Lyapunov işlevinin türevinin üstten sınırlandırılmasında kullanılmaktadır.

Bu bölümde önce Jensen eşitsizliği, daha sonra zaman gecikmeli sistemlerdeki uygulaması sunulmuştur.

Önsav 2.6 (Jensen eşitsizliği, bkz [30]) Bir integrallenebilir konveks ϕ işlevi ve tanım

kümesinde integrallenebilir $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ işlevi olsun. O halde, eşitsizlik

$$\phi \left(\int_a^b z(s) ds \right) \leq (b-a) \int_a^b \phi(z(s)) ds \quad (2.24)$$

tutarlıdır.

Sonuç 2.7 Bir simetrik $Z \succ 0$ matrisi ve tanım kümesinde integrallenebilir $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun. O halde,

$$\left(\int_a^b z(\theta) d\theta \right)^T Z \left(\int_a^b z(\theta) d\theta \right) \leq (b-a) \int_a^b z(\theta)^T Z z(\theta) d\theta \quad (2.25)$$

eşitsizliği tutarlıdır.

Kanıt. Bu önerme, Jensen eşitsizliğindeki konveks işlevin $\phi(z) = z^T Z z$ olacak şekildeki bir uygulamasıdır. $\square$

Teorem 2.8 (Bkz. [31]) Aşağıdaki eşitsizliği

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q - \bar{h}^{-1} Z & P\bar{A} + h^{-1} Z \\ * & -Q - h^{-1} Z \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} A^T \\ \bar{A}^T \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} A^T \\ \bar{A}^T \end{bmatrix}^T \prec 0 \quad (2.26)$$

sağlayan simetrik $P, Q, Z \succ 0$ matrisleri bulunabiliyorsa, denklem (2.1)'deki sistem $h \in [0, \bar{h}]$ aralığındaki bütün zaman gecikmeleri için kararlıdır.

BÖLÜM 3

ANAHTARLAMALI SİSTEMLERDE KARARLILIK ANALİZİ

Dinamik sistemler kümesi $\mathcal{P}$ ve bu kümenin elemanlarının aktif olduğu zamanları organize eden ayırık anahtar işareti $\sigma(t)$ içeren sistemlere *anahtarlama sistem* denir. Anahtarlama sistemler,

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad \forall t > t_0, \quad (3.1)$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilir.

Dinamik sistemler kümesindeki her bir elemana *alt sistem* denir. Bu tez kapsamında incelenen sistemlerdeki alt sistemlerin herbiri DZD zaman gecikmeli sistemlerdir.

Anahtarlama sistemler için kararlılık analizi üç ana kategoride incelenebilir.

- **Rastgele anahtarlama işareti:** Herhangi bir anahtarlama işareti için sistemin kararlı olma durumudur.
- **Koşullu anahtarlama işareti:** Belirli koşulları sağlayan anahtarlama işaretleri için sistemin kararlı olma durumudur. Örnek olarak, iki anahtarlama anı arasındaki en kısa süre koşulu verilebilir, buna *yavaş anahtarlama* denir.
- **Kararlı yapan anahtarlama işaretleri tasarlama:** Bu yöntemde, kararlı yapan anahtar işareti kümesi tespit edilmez. Bunun yerine, sistemi kararlı yapan anahtar işareti tasarlanır. Genellikle altsistemlerden bir kısmı veya tamamı kararsız olduğunda bu yöntem kullanılır.

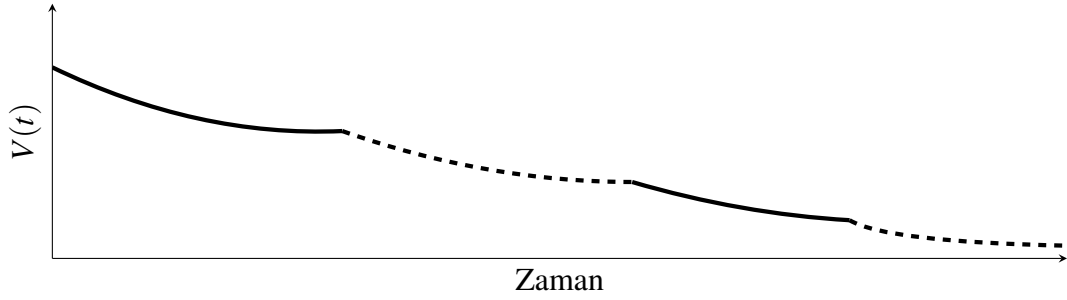
3.1 Rastgele Anahtarlama ile Kararlılık

Bu analiz yönteminde, anahtarlama sistemini bütün anahtar işaretleri için kararlı olması gerekmektedir. Bunun sağlanabilmesi için bütün alt sistemlerin kararlı olması gerekmektedir. Aksi bir örnek olarak eğer alt sistem 2 kararlı değilse, anahtarlama sistemi $\sigma(t) = 2$ için kararlı olamaz.

Teorem 3.1 Anahtarlama sistemi (3.1) için bütün alt sistemler ortak bir Lyapunov fonksiyonuna sahip ise sistem küresel düzgün asimptotik kararlıdır.

Kanıt. Kanıt için [32]'ye başvurun. □

Bütün alt sistemler kararlı ve aynı Lyapunov fonksiyonuna sahip olduğu zaman, her bir anahtarlama sonrasında, Lyapunov fonksiyonu kaldığı yerden azalmaya devam eder ve Şekil 3.1'de görüldüğü gibi 0'a yakınsar.



Şekil 3.1 Ortak Lyapunov fonksiyonuna sahip kararlı anahtarlama bir sistem

Teorem 3.1'in, karesel formdaki Lyapunov fonksiyonu için bir uygulaması aşağıda sunulmuştur.

Teorem 3.2 Alt sistemleri temsil eden bütün $i = 1, \dots, M$ indisleri için

$$A_i^T P + P A_i \prec 0 \quad (3.2)$$

koşulunu sağlayan simetrik $P \succ 0$ matrisi varsa, Sistem (3.1) rastgele anahtarlama işareti için küresel asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.2'deki koşulları sağlayan P matrisi, o anahtarlama sistemi için, $V(t) = x^T(t) P x(t)$ formundaki ortak Lyapunov fonksiyonunu oluşturmaktadır.

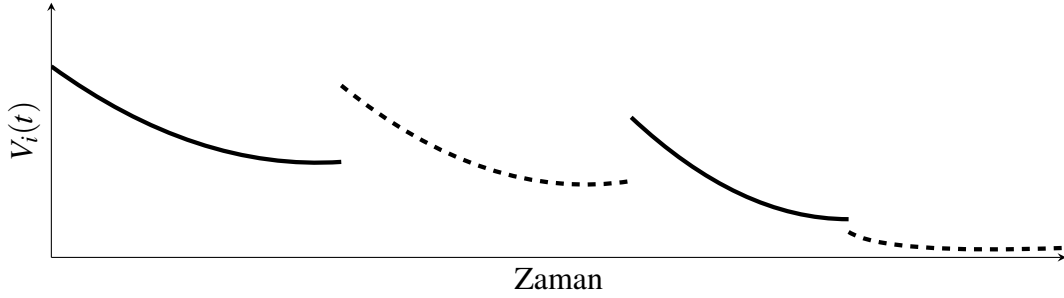
3.2 Koşullu Anahtarlama ile Kararlılık

Koşullu anahtarlama kategorisinde, en yaygın kullanılan yöntem yavaş anahtarlamaadır.

Tanım 3.3 Bir anahtarlama işaretinin, herhangi art arda gelen iki anahtarlama anları arasında geçen sürelerin en kısa değerine *oturma zamanı* denir.

Oturma zamanlı kararlılık analizinde, çoklu Lyapunov ya da başka bir deyişle parçalı Lyapunov fonksiyonları kullanılır. Lyapunov fonksiyonu da anahtarlama işaretine bağlıdır. Bu sebeple anahtarlama anlarında Lyapunov fonksiyonunda artış gözlemlenebilir.

İki alt sistemli bir örnekte (sistem 1 ve 2), t_1 ve t_3 anında, alt sistem 2'e anahtarlandığını ve $t_3 > t_1$ olduğunu varsayalım. Kararlı sistemlerde $V_2(t_1) > V_2(t_3)$ olmalıdır. Her ne kadar anahtarlama anlarında, Lyapunov fonksiyonu değişip sıçramalar yapabilse de, Şekil 3.2'de görüldüğü gibi sifıra yakınsar.



Şekil 3.2 Çoklu Lyapunov fonksiyonuna sahip kararlı bir anahtarlama sistemi

Teorem 3.4 ([32]). Sistem (3.1)'deki alt sistemlerin global asimptotik kararlı olduğunu ve i ile indislendiğini varsayalım. V_i 'ler Lyapunov fonksiyonlar, W_i 'ler kesin pozitif fonksiyonlar olsun. Herhangi iki anahtarlama anında (t_k, t_l) , $t_k < t_l$ aynı alt sistem i 'nin aktif olduğunu, anahtarlama işaretinin $\sigma(t_k) = \sigma(t_l) = i$ olduğunu varsayalım. Bu iki anahtarlama anı arasında başka sistemin aktif olduğu $t_k < t_m < t_l$, $\sigma(t_m) \neq i$ bir an olsun. Bu durumda

$$V_i(x(t_k)) - V_i(x(t_l)) \leq -W_i(x(t_k)) \quad (3.3)$$

ise sistem (3.1) global asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.4, hem rastgele hem de koşullu anahtarlamaı içinde barındırmaktadır. Ancak rastgele anahtarlama, genellikle ortak Lyapunov teoremi kullanılır. Teorem 3.4 ise koşullu anahtar uygulamalarında kullanılmaktadır.

3.2.1 Üstel Lyapunov Fonsiyonu ile Kararlılık

Teorem Teorem 3.4'ün en yaygın iki kullanımı üstel Lyapunov fonksiyonu ve zaman planlamalı Lyapunov fonksiyonu ile kararlılık yöntemleridir. Bu uygulamalar DME tabanlıdır ve yarı - kesin optimizasyon yöntemleri ile oturma zamanı hesaplanabilir.

Teorem 3.5 ([10]). Verilen bir τ_D ve M adet alt sistemi temsil eden bütün $i = 1, \dots, M$ için

$$P_i \succ 0 \quad (3.4)$$

$$P_i A_i + A_i^T P_i \prec 0, \quad (3.5)$$

$$e^{A_i^T \tau_D} P_i e^{A_i \tau_D} - P_i \prec 0, \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (3.6)$$

koşullarını sağlayan simetrik P_i matrisleri mevcutsa, Sistem (3.1), oturma zamanı τ_D 'ye eşit ya da büyük olan anahtarlama sistemleri için global asimptotik kararlıdır.

Üstel Lyapunov fonksiyonu ile kararlılık teoremindeki kısıt fonksiyonları, oturma zamanı serbest parametre olduğu zaman konveks olmayan bir küme oluşturmaktadır.

3.2.2 Zaman Planlamalı Lyapunov Fonsiyonu ile Kararlılık

Oturma zamanlı kararlılık analizinde bir başka yaklaşım olan zaman planlamalı Lyapunov fonksiyonlarının kısıtları, tanım kümesinde konveks küme oluşturması sebebiyle, oturma zamanının en küçüklemesi için daha uygundur.

Teorem 3.6 ([3]) M adet alt sistemi olan bir anahtarlama sistem olsun. Alt sistemlerin indisi $i = 1, \dots, M$, zaman planlaması indisi $k = 0, \dots, K$ ve bir reel sayı dizisi

$$\left\{ \delta_k > 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad \sum_{k=1}^K \delta_k = \tau_D \right\} \quad (3.7)$$

olsun. Eğer bütün i değerleri için

$$P_{i,k} \succ 0, \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.8)$$

$$\frac{P_{i,k+1} - P_{i,k}}{\delta_{k+1}} + P_{i,k}A_i + A_i^T P_{i,k} \prec 0, \quad \forall k = 1, \dots, K-1 \quad (3.9)$$

$$\frac{P_{i,k+1} - P_{i,k}}{\delta_{k+1}} + P_{i,k+1}A_i + A_i^T P_{i,k+1} \prec 0, \quad \forall k = 1, \dots, K-1 \quad (3.10)$$

$$P_{i,K}A_i + A_i^T P_{i,K} \prec 0, \quad (3.11)$$

$$P_{i,K} - P_{l,0} \succeq 0, \quad \forall l = 1, \dots, M \quad (3.12)$$

koşullarını sağlayan simetrik $P_{i,k}$ matrisleri mevcutsa, Sistem (3.1), oturma zamanı τ_D olan anahtarlama işaretleri için global asimptotik kararlıdır.

Genellikle δ_k değerleri birbirine eşit seçilir. Kaynak [17]'de, K değerinin yeterince büyük olduğu durumda, Teorem 3.5 ve Teorem 3.6'nin denk olduğu söylenmiştir.

3.3 Anahtar İşareti Tasarımı ile Kararlılık

Anahtar işareti tasarımı, bu tezin kapsamı dışındadır.

BÖLÜM 4

YÖNTEM I: SERBEST AĞIRLIK MATRİSLERİ İLE OTURMA ZAMANLI KARARLILIK

Durum değişkeni $x \in \mathbb{R}^n$, durum matrisi $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gecikmeli durum matrisi $\bar{A}_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, anahtarlama işareti $\sigma(t)$, zaman gecikmesi $r_{\sigma(t)}(t)$, başlangıç koşulu $\psi \in \mathcal{C}$ ve dinamik denklemi

$$\Sigma_{\sigma(t)} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + \bar{A}_{\sigma(t)}x(t - r_{\sigma(t)}(t)), & t \geq 0 \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau_{\max}, 0] \end{cases} \quad (4.1)$$

olan anahtarlama zaman gecikmeli sistemler olsun.

Alt sistemler arasında i . sistemi temsil etmesi için aşağıdaki dördlük kullanılmıştır,

$$\Sigma_i := (A_i, \bar{A}_i, \tau_i, d_i) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Alt sistemlerin zaman gecikmeleri arasında en büyüğü gecikmesi $\tau_{\max} = \max_{i \in \mathcal{D}} \tau_i$ 'dir.

Tanım 4.1 Eğer $\mathcal{K}$ sınıfı bir β fonksiyonu mevcut ve

$$\|x(t)\| \leq \beta(|x|_{[t_0 - \tau_{\max}, t_0]}) \quad (4.3)$$

ise, Denklem (4.1)'deki sistem kararlıdır. Eğer kararlı ve $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ise sistem asimptotik kararlıdır.

Çoklu Lyapunov fonksiyonu

$$V_i(t, x_t) := x^T(t)P_i x(t) + \int_{t-r_i(t)}^t x^T(s)Q_i x(s)ds + \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z_i \dot{x}(s)dsd\theta, \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Önsav 4.2 (Bkz. [19]). Pozitif bir X_i matrisini

$$X_i := \begin{bmatrix} X_{11i} & X_{12i} \\ * & X_{22i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlayalım ve boyutları N_{1i} ve N_{2i} matrisleri olsun. Aşağıdaki DME'leri

$$\phi_i := \begin{bmatrix} \phi_{11i} & \phi_{12i} & \tau_i A_i^T Z_i \\ * & \phi_{22i} & \tau_i \bar{A}_i^T Z_i \\ * & * & -\tau_i Z_i \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.6)$$

$$\psi_i := \begin{bmatrix} X_{11i} & X_{12i} & N_{1i} \\ * & X_{22i} & N_{2i} \\ * & * & Z_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.7)$$

sağlayan simetrik $P_i \succ 0$, $Q_i \succeq 0$, $Z_i \succ 0$ mevcutsa, Denklem (4.1)'deki sistemin alt sistemi Σ_i , (2.2) ve (2.3) koşullarını sağlayan zaman gecikmesi için asimptotik kararlıdır. Eşitsizlik (4.6) ve (4.7)'deki değişkenler aşağıdaki gibidir:

$$\phi_{11i} = P_i A_i + A_i^T P_i + N_{1i} + N_{1i}^T + Q_i + \tau_i X_{11i}, \quad (4.8)$$

$$\phi_{12i} = P_i \bar{A}_i - N_{1i} + N_{2i}^T + \tau_i X_{12i}, \quad (4.9)$$

$$\phi_{22i} = -N_{2i} - N_{2i}^T - (1 - d_i)Q_i + \tau_i X_{22i}. \quad (4.10)$$

Aşağıdaki önerme, [24]'te elde edilen bir sonucun uyarlanmış halidir. İlgili önermede, anahtarlama olmayan bir alt sistemde, T_* zamanından sonra durum normu, önceden belirlenen bir ρ parametresini geçmemektedir. Dahası, $T_* + \tau_{\max}$ süre sonra durum fonksiyoneli normu $|x|_{[t-\tau_{\max}, t]}$, ρ parametresini geçmemektedir.

Önerme 4.3 Herhangi bir alt sistem Σ_i , önsav 2.4'deki koşulları sağladığını varsayalım ve

$\lim_{s \rightarrow \infty} u_i(s) \rightarrow \infty$ olsun. Azalmayan u_{d_i} fonksiyonu

$$|x|_{[t-\tau_{\max}, t]} \leq \rho, \quad \forall t > t_0 + \tau_{\max} + T_i(\delta_1, \rho) \quad (4.11)$$

koşullarını sağlasın. Önsav 2.4'deki v_i ve w_i , $0 < \rho < \delta_2$ ve $|x|_{[t_0-\tau_{\max}, t_0]} < \delta_1$ koşullarını sağlayan ρ için

$$T_i(\delta_1, \rho) = \frac{v_i(\delta_1)}{w_i(\rho)}. \quad (4.12)$$

Kanıt. $T_* > 0$ ve herhangi bir $t_1 > t_0 + T_*$ anı için $\|x(t_1)\| > \rho$ olsun. Fonksiyon w_i tanımından dolayı azalmayan olduğu için $\inf_{\rho < s < \delta_2} w_i(s) = w_i(\rho)$. Alt sistem Σ_i kararlı ve V_i bir Lyapunov fonksiyonu olduğu için

$$\dot{V}_i(t, x_t) \leq -w_i(\rho), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (4.13)$$

Bunun sonucu olarak

$$V_i(t, x_t) \leq V_i(t_0, x_0) - (t - t_0)w_i(\rho) \leq v_i(\delta_1) - (t - t_0)w_i(\rho). \quad (4.14)$$

$T_* > v_i(\delta_1)/w_i(\rho)$ olsun. Her $t > t_0 + T_*$ için $V_i(t, x_t) \leq 0$ olur. Ancak kanıtın başında $t_1 > t_0 + T_*$ anı için $\|x(t_1)\| > \rho$ olduğunu varsaymıştık. Bu durum

$$V_i(t_1, x_{t_1}) \geq u_i(\|x(t_1)\|) > u_i(\rho) > 0 \quad (4.15)$$

çelişmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla böyle bir t_1 anı olamaz,

$$\|x(t)\| \leq \rho, \quad \forall t > t_0 + \frac{v_i(\delta_1)}{w_i(\rho)}. \quad (4.16)$$

Benzer bir şekilde $t_1 > t_0 + T_*$ anı $\|\dot{x}(t_1)\| \geq \rho$ da,

$$V_i(t_1, x_{t_1}) \geq u_{d_i}(\|\dot{x}(t_1)\|) > u_{d_i}(\rho) > 0 \quad (4.17)$$

çelişkisini doğurur. Bu durumda

$$\|x(t)\| < \rho, \quad \|\dot{x}(t)\| < \rho, \quad \forall t > t_0 + T_*. \quad (4.18)$$

Eğer alt sistemlerin maksimum zaman gecikmesi kadar bir süre daha geçerse, yani $t > t_0 + T_* + \tau_{\max}$ için $|x|_{[t-\tau_{\max}, t]} \leq \rho$ tutarlıdır. $\square$

Denklem (4.4)'deki Lyapunov fonksiyonuna ait üst sınır $v(i) := \mu_i s^2$

$$\mu_i := \sigma_{\max}[P_i] + \tau_i^2 \sigma_{\max}[Q_i] + \frac{1}{2} \tau_i^2 \sigma_{\max}[Z_i] \quad (4.19)$$

ve alt sınır

$$u_i(s) = \sigma_{\min}[P_i] s^2, \quad (4.20)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Aynı Lyapunov fonksiyonuna ait $\dot{x}(t)$ ile ilişkili sınır

$$u_{d_i}(s) := \frac{1}{2} \tau_i^2 \sigma_{\min}[Z_i] s^2 \quad (4.21)$$

şeklinde, öyle ki $u_{d_i}(\|\dot{x}(t)\|) \leq V_i(t, x_t)$.

Üst sınır $v_i(s)$ 'ler Eşitsizlik (4.7)'deki eşitsizlikle hesaplanmaktadır. Lyapunov fonksiyonunun türevine ait üst sınır $\omega(s)$ 'nin DME yöntemleriyle hesaplanması için aşağıdaki Önerme 4.5 sunulmuştur.

Hatırlatma 4.4 Önerme 4.5'nin kanıtında, önsav 4.2'nin kanıtında kullanılan eşitsizliklerden biri kullanılmaktadır. Kullanılan eşitsizlik

$$\dot{V}_i(t, x_t) \leq \eta_1^T(t) \Xi_i \eta_1(t) - \int_{t-r_i(t)}^t \eta_2^T(t, s) \Psi_i \eta_2(t, s) ds \quad (4.22)$$

şeklindedir. ψ_i Eşitsizlik (4.7)'de tanımlanmıştır ve

$$\eta_2(t, s) = [x^T(t), x^T(t - r_i(t)), \dot{x}^T(s)]^T \quad (4.23)$$

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \phi_{11i} + \tau_i A_i^T Z_i A_i & \phi_{12i} + \tau_i A_i^T Z_i \bar{A}_i \\ * & \phi_{22i} + \tau_i \bar{A}_i^T Z_i \bar{A}_i \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Eşitsizlik (4.6), $\Xi_i \prec 0$ 'ın Schur tamlayanıdır. Detaylar için [19]'e başvurunuz.

Önerme 4.5 Önsav 4.2'yi sağlayan alt sistemlere sahip bir sistem (4.1) ele alalım. Eğer simetrik $W_i \succeq 0$ matrisi

$$\bar{\Phi}_i := \begin{bmatrix} \phi_{11i} + W_i & \phi_{12i} & \tau_i A_i^T Z_i \\ * & \phi_{22i} & \tau_i \bar{A}_i^T Z_i \\ * & * & -\tau_i Z_i \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i \in \mathcal{P} \quad (4.25)$$

DME'sini sağlıyorsa, $\dot{V}_i(t, x_t) \leq -x^T(t) W_i x(t)$.

Kanıt. Eşitsizlik (4.22)'i ele alalım. $\psi_i \succeq 0$ olduğundan, $\dot{V}_i(t, x_t) \leq \eta_1^T(t) \Xi_i \eta_1(t)$ olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizliği üstten

$$\eta_1^T(t) \Xi_i \eta_1(t) \leq -x^T(t) W_i x(t) \quad (4.26)$$

şeklinde sınırlandırırsak, $\eta_1^T(t) D_i \eta_1(t) \leq 0$ olur. Burada,

$$D_i := \begin{bmatrix} \phi_{11i} + W_i + \tau_i A_i^T Z_i A_i & \phi_{12i} + \tau_i A_i^T Z_i \bar{A}_i \\ * & \phi_{22i} + \tau_i \bar{A}_i^T Z_i \bar{A}_i \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (4.27)$$

olur. Eşitsizlik $\bar{\Phi}_i, D_i \preceq 0$ 'ın Schur tamlayanı olduğu için, eğer (4.25) sağlanırsa, $\dot{V}_i(t, x_t) \leq -x^T(t) W_i x(t)$ 'dir. $\square$

Lyapunov fonksiyonunun türevinin üst sınırı $w_i(s) = \lambda_i s^2$,

$$\lambda_i := \sigma_{\min}[W_i], \quad (4.28)$$

olacak şekilde seçilir.

Sistem (4.1)'in önsav 2.4'ü tutarlı kıldığını varsayalım. Öyle $\delta_2 > \delta_1 > 0$ vardır ki $u(\delta_2) = v(\delta_1)$ 'dir. Böyle bir δ_2 için, eğer $|x|_{[t_0-\tau_i, t_0]} \leq \delta_1$ ise önsav 2.4'e göre bütün $t > t_0$ için $\|x(t)\| \leq \delta_2$ 'dir. Bu durumda, (4.19) ve (4.20)'de tanımlanmış $u(s)$, $v(s)$ ve

$$\beta = \max_{i \in \mathcal{P}} \sqrt{\frac{\mu_i}{\sigma_{\min}[P_i]}} \quad (4.29)$$

için

$$\|x(t)\| \leq \beta |x|_{[t_0-\tau_i, t_0]}, \quad \forall i \in \mathcal{P}. \quad (4.30)$$

olur.

Şimdi k . anahtarlama anını ele alalım. Oturma zamanı öyle seçilir ki, bir sonraki anahtarlama anındaki durum fonksiyoneli normu, k . anahtarlama anındaki durum fonksiyoneli normundan küçük olmalı. Bunun için Önerme 4.3'deki ρ , k . anahtarlama anındaki durum fonksiyoneli normunun α katı olarak seçilir. Önceden belirlenen α , $(0, 1)$ aralığında bir reel sayıdır.

Teorem 4.6 Sistem (4.1)'deki AZG sistemi ele alalım. Bütün alt sistemler için önsav 4.2'nin tutarlı olduğunu varsayalım. Sınır parametreleri μ_i ve λ_i , (4.19) ve (4.28)'daki gibi tanımlansın. Oturma zamanı

$$\tau_D = \frac{1}{\alpha^2} \max_{i \in \mathcal{P}} \frac{\mu_i}{\lambda_i} + \tau_{\max}, \quad \text{for any } \alpha \in (0, 1) \quad (4.31)$$

değerinden büyük olan bütün anahtarlama işaretleri için sistem asimptotik kararlıdır.

Kanıt. Parametre $\rho = \alpha \delta_{k-1}$ şeklinde seçilmiş olsun ve δ_k , k . anahtarlama anındaki durum fonksiyonelinin normu olsun, $\delta_k = |x|_{[t_k-\tau_{\max}, t_k]}$. Anahtarlama işaretlerine oturma zamanı $t_k - t_{k-1} > \tau_D$ olacak şekilde sınır koyalım. Oturma zamanı

$$\tau_D = \max_{i \in \mathcal{P}} T_i(\delta_{k-1}, \alpha \delta_{k-1}) + \tau_{\max}, \quad (4.32)$$

şeklinde tanımlayalım. Önerme 4.3'te

$$T_i(\delta_{k-1}, \alpha \delta_{k-1}) = \frac{v_i(\delta_{k-1})}{w_i(\alpha \delta_{k-1})} = \frac{\mu_i}{\alpha^2 \lambda_i}. \quad (4.33)$$

seçersek,

$$|x|_{[t_k - \tau_{\max}, t_k]} \leq \alpha |x|_{[t_{k-1} - \tau_{\max}, t_{k-1}]}, \quad \forall t_k > t_{k-1} + \tau_D, \quad (4.34)$$

olur. Denklemler (4.30) ve (4.34)'ten

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \beta |x|_{[t_k - \tau_{\max}, t_k]} \\ &\leq \beta \alpha |x|_{[t_{k-1} - \tau_{\max}, t_{k-1}]} \\ &\vdots \\ &\leq \beta \alpha^k |x|_{[t_0 - \tau_{\max}, t_0]} \\ &\leq \beta \alpha |x|_{[t_0 - \tau_{\max}, t_0]}, \quad \forall \alpha \in (0, 1), \end{aligned} \quad (4.35)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik, kararlılık tanımı, Tanım 4.1'ü tutarlı kılar. $\square$

Hatırlatma 4.7 Denklem (4.34)'te görüldüğü üzere α parametresi, art arda gelen iki anahtarlama anındaki durum fonksiyoneli normlarının oranıdır. Bu nedenle, sistemin azalma hızı olarak ele alınabilir. Bu parametrenin ayarlanmasıyla oturma zamanı ve azalma hızı arasında bir takas yapılabilir. Parametre büyüdükçe oturma zamanı kısılırken azalma hızı azalır.

4.1 Sözde - Konveks Optimizasyon ile Oturma Zamanının En Küçüklenmesi

Denklem (4.31)'deki oturma zamanının en küçüklenmesi için maliyet fonksiyonu önceden belirlenen bir α değeri için $f(\mu_i, \lambda_i) := \max_{i \in \mathcal{P}} \mu_i / \lambda_i$ olarak seçilmiştir. Bu maliyet fonksiyonu, konveks bir fonksiyon ile azalmayan bir fonksiyonun bileşkesidir, dolayısıyla sözde-konvektir. Sözde - konveks maliyet fonksiyonu ve konveks kısıt koşulları içeren optimizasyon probleminde, yarılama algoritması global en küçük değeri bulur [33].

Yeni bir serbest parametre t , maliyet fonksiyonunu

$$\frac{\mu_i}{\lambda_i} \leq t, \quad \forall i \in \mathcal{P} \quad (4.36)$$

şeklinde kısıtlamak için tanımlanmıştır. Parametreler μ_i ve λ_i , P_i , Q_i , Z_i ve W_i matrisleri ile ilişkilidir. P_i , Q_i , Z_i matrislerinin en büyük özdeğerleri p_i , q_i ve z_i değişkenleriyle tanımlanmıştır. Bu durumda Eşitsizlik (4.36),

$$p_i + \tau_i q_i + \frac{1}{2} \tau_i^2 z_i - t \lambda_i < 0 \quad (4.37)$$

şeklinde yazılabilir. Serbest parametreler P_i , Q_i , Z_i , W_i , X_{11i} , X_{12i} , X_{22i} , N_{1i} , N_{2i} p_i , q_i , z_i , w_i , t_u için, oturma zamanı en küçükleme problemi,

$$\text{minimize } t \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & \text{diag}[P_i, Q_i, Z_i, W_i, X_i] \succ 0, & \forall i \in \mathcal{P} \\ & \text{diag}[P_i, Q_i, Z_i, -W_i] \prec \text{diag}[p_i I, q_i I, z_i I, -\lambda_i I], & \forall i \in \mathcal{P} \\ & \psi_i \succeq 0, \quad \bar{\phi}_i \prec 0, & \forall i \in \mathcal{P} \\ & p_i + \tau_i q_i + \frac{1}{2} \tau_i^2 z_i - t \lambda_i < 0, & \forall i \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. X_i , ψ_i ve $\bar{\phi}_i$ değişkenleri, (4.5), (4.7) and (4.25) denklemlerinde tanımlanmıştır. Herhangi bir $\alpha \in (0, 1)$ parametresi için, oturma zamanı $\tau_D = \alpha t + \tau_{max}$ şeklinde seçilebilir. Ancak t parametresi serbest olursa, optimizasyon çift doğrusal terimler içermektedir.

Yarılama algoritması ile en küçük t değerinin aranması, yarı-kesin programlama fizibilite problemi dizisi oluşturmaktadır. Böylece SeDuMi gibi programlarla kolayca çözülebilir [34].

4.2 Oturma Zamanını En Küçükleyen Kontrolcü Sentezi

Durum değişkeni $x \in \mathbb{R}^n$, durum matrisi $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gecikmeli durum matrisi $\bar{A}_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ girdi matrisi, anahtarlama işareti $\sigma(t)$, zaman gecikmesi $r_{\sigma(t)}(t)$,

başlangıç koşulu $\psi \in \mathcal{C}$ ve dinamik denklemi

$$\tilde{\Sigma}_{\sigma(t)} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + \bar{A}_{\sigma(t)}x(t - r_{\sigma(t)}(t)) + B_{\sigma(t)}u(t), & t \geq 0 \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau_{\max}, 0] \end{cases} \quad (4.39)$$

olan anahtarlama zaman gecikmeli sistemler olsun. Alt sistemleri temsilen

$$\tilde{\Sigma}_i := (A_i, \bar{A}_i, B_i, \tau_i, d_i) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (4.40)$$

beşliği tanımlanmıştır.

Önsav 4.8 ([19]). Pozitif bir Y_i matrisini,

$$Y_i := \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} \\ * & Y_{22i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.41)$$

şeklinde tanımlayalım ve boyutları uygun M_{1i} , M_{2i} ve V_i matrisleri olsun. Aşağıdaki matris eşitsizliklerini

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Pi_{11i} & \Pi_{12i} & \tau_i(L_i A_i^T + V_i^T B_i^T) \\ * & \Pi_{22i} & \tau_i L_i \bar{A}_i^T \\ * & * & -\tau_i R_i \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.42)$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} & M_{1i} \\ * & Y_{22i} & M_{2i} \\ * & * & L_i R_i^{-1} L_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.43)$$

sağlayan simetrik $L_i > 0$, $T_i \geq 0$, $R_i > 0$ matrisleri mevcutsa, Sistem (4.39)'in alt sistemi $\tilde{\Sigma}_i$, (2.2) ve (2.3) koşullarını sağlayan zaman gecikmeleri için kazancı $K_i = V_i L_i^{-1}$ olan $u(t) = K_i x(t)$ olan kontrolcü ile kararlı yapılabilir. Eşitsizlik (4.42) ve (4.43)'deki değişkenler

aşağıdaki gibidir:

$$\Pi_{11i} = L_i A_i^T + A_i L_i + B_i V_i + V_i^T B_i^T + M_{1i} + M_{1i}^T + T_i + \tau_i Y_{11i} \quad (4.44)$$

$$\Pi_{12i} = \bar{A}_i L_i - M_{1i} + M_{2i}^T + \tau_i Y_{12i} \quad (4.45)$$

$$\Pi_{22i} = -M_{2i} - M_{2i}^T - (1 - d_i) T_i + \tau_i Y_{22i}. \quad (4.46)$$

$L_i R_i^{-1} L_i$ teriminden dolayı önsav 4.8'deki (4.43) koşulu bir DME değildir. Bu durumdan kurtulmak için,

$$L_i R_i^{-1} L_i \succeq S_i, \quad (4.47)$$

şeklindeki S_i değişkeni tanımlanmıştır. Denklem (4.43)

$$\bar{\Lambda}_i := \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} & M_{1i} \\ * & Y_{22} & M_{2i} \\ * & * & S_i \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (4.48)$$

ile değiştirilmiştir.

Eşitsizlik (4.47), $L^{-1} R L^{-1} \preceq S^{-1}$ 'e eşittir. Schur tamlayanı

$$\begin{bmatrix} S_i^{-1} & L_i^{-1} \\ * & R_i^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.49)$$

olur. Yeni

$$J_i = L_i^{-1}, \quad U_i = S_i^{-1}, \quad H_i = R_i^{-1} \quad (4.50)$$

değişkenlerini tanımlayalım. Böylece Denklem (4.49)

$$\begin{bmatrix} U_i & J_i \\ * & H_i \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.51)$$

şeklinde yazılmıştır. Bu sayede Denklem (4.43) yerine DME'ler (4.51) ve (4.48) kullanılmıştır.

Önerme 4.9 Sistem (4.39)'in her bir alt sistemi $\tilde{\Sigma}_i$ 'nin önsav 4.8'i sağladığını varsayalım.

Eğer simetrik $W_i \succeq 0$ matrisi için

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11i} + L_i W_i L_i & \Pi_{12i} & \tau_i(L_i A_i^T + V_i^T B_i^T) \\ * & \Pi_{22i} & \tau_i L_i \bar{A}_i^T \\ * & * & -\tau_i R_i \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i \in \mathcal{P} \quad (4.52)$$

tutarlıysa, $\dot{V}_i(t, x_t) \leq -x^T(t) W_i x(t)$ olur.

Kanıt. Önerme 4.5'deki DME (4.25), $\text{diag}[P_i^{-1}, P_i^{-1}, P_i^{-1}]$ ile ön ve öteden çarpılmıştır.

Daha sonra

$$3L_i := P_i^{-1}, \quad T_i := P_i^{-1} Q_i P_i^{-1}, \quad R_i := Z_i^{-1} \quad (4.53)$$

$$M_{1i} := P_i^{-1} N_{1i} P_i^{-1}, \quad M_{2i} := P_i^{-1} N_{2i} P_i^{-1}, \quad V_i = K_i P_i^{-1} \quad (4.54)$$

$$Y_i := \text{diag}[P_i^{-1}, P_i^{-1}] \cdot X_i \cdot \text{diag}[P_i^{-1}, P_i^{-1}] \quad (4.55)$$

değişken değişimleri yapılmıştır. □

Önsav 4.8'deki koşul gibi, (4.52) de DME değildir ve benzer yaklaşımla DME koşulları elde edilmiştir. Yeni değişkenler C_i ve O_i , $C_i - L_i W_i L_i \succeq 0$ ve $O_i = W_i^{-1}$ olacak şekilde tanımlanmıştır. Schur tamlayanı

$$\begin{bmatrix} C_i & L_i \\ * & O_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.56)$$

olur. Konveks olmayan (4.52), konveks

$$\bar{\Pi}_i := \begin{bmatrix} \Pi_{11i} + C_i & \Pi_{12i} & \tau_i(L_i A_i^T + V_i^T B_i^T) \\ * & \Pi_{22i} & \tau_i L_i \bar{A}_i^T \\ * & * & -\tau_i R_i \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.57)$$

koşulu ile yer değiştirilmiştir. Lyapunov fonksiyonuna ait alt ve üst sınırlar

$$\tilde{\mu}_i := \sigma_{\max} [L_i^{-1}] + \tau_i \sigma_{\max} [L_i^{-1} T_i L_i^{-1}] + \frac{1}{2} \tau_i^2 \sigma_{\max} [R_i^{-1}] \quad (4.58)$$

$$\tilde{\lambda}_i := \sigma_{\min} [W_i]. \quad (4.59)$$

şeklinde belirlenmiştir. Bu sınırlar da DME değil kuadratik yapıdadır. Bunun için yeni değişkenler F_i ve E_i , $F_i \succeq L_i^{-1} T_i L_i^{-1}$, $E_i := T_i^{-1}$ olacak şekilde tanımlanmış ve Schur tamlayanı

$$\begin{bmatrix} F_i & J_i \\ * & E_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.60)$$

ortaya konmuş ve $\tilde{\mu}_i$

$$\tilde{\mu}_i = \sigma_{\max} [J_i] + \tau_i \sigma_{\max} [F_i] + \frac{1}{2} \tau_i^2 \sigma_{\max} [H_i]. \quad (4.61)$$

ile değiştirilmiş, sonuç olarak DME elde edilmiştir.

Maliyet fonksiyonu $\tilde{\mu}_i / \tilde{\lambda}_i \leq t$ üst sınırını ele alalım. Sabit bir t için, oturma zamanı $\tau_D = t + \tau_{\max}$ 'nın fizibilitesi

$$\begin{aligned} \text{En küçük} \quad & \text{iz} \left[\sum_{i \in \mathcal{P}} (L_i J_i + S_i U_i + R_i H_i + T_i E_i + O_i W_i) \right] \\ \text{Kısıtlar:} \quad & \text{diya}g [L_i, T_i, R_i, Y_i, W_i] \succ 0, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\ & \text{diya}g [J_i, F_i, H_i, -W_i] \prec \text{diya}g [j_i I, f_i I, h_i I, -\tilde{\lambda}_i I], \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\ & \bar{\Lambda}_i \succeq 0, \quad \bar{\Pi}_i \prec 0, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\ & \begin{bmatrix} U_i & J_i \\ * & H_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} C_i & L_i \\ * & O_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} F_i & J_i \\ * & E_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\ & \begin{bmatrix} L_i & I \\ * & J_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} S_i & I \\ * & U_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} R_i & I \\ * & H_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_i & I \\ * & E_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} O_i & I \\ * & W_i \end{bmatrix} \succeq 0, & \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\ j_i + \tau_i f_i + \frac{1}{2} \tau_i^2 h_i - t \tilde{\lambda}_i < 0, & \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

şeklindeki yarı - kesin optimizasyon problemidir.

Optimizasyon (4.62)'deki maliyet fonksiyonu, eşitsizlikler (4.43) ve (4.52) tutarlı olsun diye en küçüklenmiştir. En küçükleme sürecinde, J_i, U_i, H_i, O_i, E_i parametreleri $L_i^{-1}, S_i^{-1}, R_i^{-1}, W_i^{-1}, T_i^{-1}$ parametrelerine yakınsar. Ancak maliyet fonksiyonu doğrusal olmayan bir yapıdadır. Kaynak [35]'deki doğrusallaştırma yöntemi ile

$$\underline{f}_i = \text{sabit} + \text{iz} \left[\sum_{i \in \mathcal{P}} (L_i J_i^0 + L_i^0 J_i + S_i U_i^0 + S_i^0 U_i + R_i H_i^0 + R_i^0 H_i + T_i E_i^0 + T_i^0 E_i + O_i W_i^0 + O_i^0 W_i) \right]. \quad (4.63)$$

formuna getirilmiştir.

Doğrusal maliyet fonksiyonu $\underline{f}_i$ iteratif olarak en küçüklenmiştir. Maliyet fonksiyonu, her adımda yeni $(L_i^k, J_i^k, S_i^k, U_i^k, R_i^k, H_i^k, T_i^k, E_i^k, O_i^k, W_i^k)$ noktasında doğrusallaştırılmıştır. Doğrusal olmayan koşullar (4.43) ve (4.52), önceden belirlenmiş bir sayı defa tekrar kontrol edilmiştir. Eğer doğrusal olmayan koşullar tutarlı kılınmışsa, t uygun bir oturma zamanıdır.

Oturma zamanının en küçüklenmesi iç içe geçmiş bir optimizasyon problemidir. Dış döngüde (adım 1 ve 4) maliyet fonksiyonu $\bar{f}_i := t^*$ 'yi en küçükleyen yarılama algoritması vardır. İç döngüde optimizasyon problemi (4.62)'deki maliyet fonksiyonu $\underline{f}_i$ en küçüklenmektedir. Eğer iç döngüde uygun bir oturma zamanı bulunursa, t yarıya indirilir, aksi halde ikiye katlanır (adım 4).

Adım 1. Tutarlı bir oturma zamanı kılmaya yeter büyük bir başlangıç üst sınırı $t_u > 0$ seç.

Alt sınır $t_l = 0$ olarak seç.

Adım 2. İterasyon indisi $k = 0$ ve $t = (t_u + t_l)/2$ olarak seç. Serbest parametreler

$$(L_i, J_i, S_i, U_i, R_i, H_i, T_i, E_i, O_i, W_i, Y_i, M_{1i}, M_{2i}, V_i, j_i, h_i, f_i, w_i) \quad \text{için} \quad (4.62)'deki$$

kısıtları tutarlı kılan mümkün bir küme bul. $L_i^0 = L_i$, $J_i^0 = J_i$, $S_i^0 = S_i$, $U_i^0 = U_i$, $R_i^0 = R_i$, $H_i^0 = H_i$, $T_i^0 = T_i$, $E_i^0 = E_i$, $O_i^0 = O_i$ ve $W_i^0 = W_i$ olarak ayarla.

Adım 3. Sıradaki

$$\text{en küçük} \quad \text{iz} \quad \left[\sum_{i \in \mathcal{P}} (L_i J_i^k + L_i^k J_i + S_i U_i^k + S_i^k U_i + R_i H_i^k + R_i^k H_i + T_i E_i^k + T_i^k E_i + O_i W_i^k + O_i^k W_i) \right]$$

Kısıtlar: (4.62)'deki koşullar.

konveks optimizasyon problemini, Adım 2'deki serbest parametreler için çöz.

Parametreleri $L_i^{k+1} = L_i$, $J_i^{k+1} = J_i$, $S_i^{k+1} = S_i$, $U_i^{k+1} = U_i$, $R_i^{k+1} = R_i$, $H_i^{k+1} = H_i$, $T_i^{k+1} = T_i$, $E_i^{k+1} = E_i$, $O_i^{k+1} = O_i$ ve $W_i^{k+1} = W_i$ olacak şekilde seç.

Adım 4. Eğer önceden belirlenmiş tolerans değeri $t_u - t_l < tol$ sağlandıysa, kontrolcüyü $K_i = V_i L_i^{-1}$ bütün $i \in \mathcal{P}$ için ayarla, programdan çık. Oturma zamanı $\tau_D = t + \tau_{\max}$.

Değilse Eğer (4.43) ve (4.52) tutarlıysa, üst sınır $t_u = t$ 'yi ayarla ve Adım 2'ye dön.

Aksi Halde, $k = k + 1$ olarak ayarla ve Adım 3'e git. Eğer önceden belirlenmiş iterasyon sayısı defa denemeden sonra mümkün bir sonuç yoksa, alt sınır $t_l = t$ 'yi ayarla ve Adım 2'ye git.

BÖLÜM 5

YÖNTEM II: ZAMAN PLANLAMALI LYAPUNOV - KRASOVSKII FONKSİYONLARI İLE OTURMA ZAMANLI KARARLILIK

Durum değişkeni $x \in \mathbb{R}^n$, durum matrisi $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gecikmeli durum matrisi $\bar{A}_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, anahtarlama işareti $\sigma(t)$, zaman gecikmesi $r(t)$, başlangıç koşulu $\psi \in \mathcal{C}$ ve dinamik denklemi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + \bar{A}_{\sigma(t)}x(t - r(t)), \quad t \geq 0 \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (5.1)$$

olan anahtarlama zaman gecikmeli sistemler olsun.

Alt sistemler arasından i . sistemi temsil etmesi için aşağıdaki dördlük kullanılmıştır,

$$\Sigma_i := (A_i, \bar{A}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \quad (5.2)$$

Alt sistemlerin zaman gecikmelerinin en büyük zaman gecikmesi $\tau_{\max} = \max_{i \in \mathcal{P}} \tau_i$ 'dir.

Sıradaki önsavda [3]'dan etkilenilmiştir. İlgili önsavda alt sistemlerin kararlılığı için bir Lyapunov fonksiyonu sunulmuştur. Lyapunov parametreleri sabit parametreler değil, aksine bir zaman aralığında değişmektedir. Bu önsavda, zamanla değişen Lyapunov fonksiyonun zamanla azalmasını garantileyen DME koşulları bulunmuştur.

Önsav 5.1 Alt sistem Σ_i 'yi ele alalım. Bir zaman aralığı $t \in [t_0, t_f]$ için

$$V_i(t, x_t) = x^T(t)P_i(t)x(t) + \int_{t-r(t)}^t x^T(s)Q_i(t)x(s)ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-r(t)}^t (s-t+h)x^T(s)\dot{Q}_i(t)x(s)ds + \int_{-ht+\theta}^0 \int_t^t \dot{x}^T(s)Z_i(t)\dot{x}(s)dsd\theta \\
& + \int_{-ht+\theta}^0 \int_t^t (s-t-\theta)\dot{x}^T(s)\dot{Z}_i(t)\dot{x}(s)dsd\theta, \quad \forall t \in [t_0, t_f].
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Pozitif bir $X_i(t)$ matrisini

$$X_i(t) = \begin{bmatrix} X_{11i}(t) & X_{12i}(t) \\ * & X_{22i}(t) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlayalım ve boyutları uygun $N_{1i}(t)$ ve $N_{2i}(t)$ matrisleri olsun. Aşağıdaki DME'leri

$$\phi_i(t) := \begin{bmatrix} \phi_{11i}(t) & \phi_{12i}(t) & -A_i^T \phi_{33i}(t) \\ * & \phi_{22i}(t) & -\bar{A}_i^T \phi_{33i}(t) \\ * & * & \phi_{33i}(t) \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \tag{5.5}$$

$$\psi_i(t) := \begin{bmatrix} X_{11i}(t) & X_{12i}(t) & N_{1i}(t) \\ * & X_{22i}(t) & N_{2i}(t) \\ * & * & Z_i(t) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \tag{5.6}$$

sağlayan ve $\dot{Q}_i(t) \succeq 0$, $\dot{Z}_i(t) \succeq 0$ ve $\ddot{Q}_i(t) = \ddot{Z}_i(t) = 0$ olan simetrik $P_i(t) \succ 0$, $Q_i(t) \succeq 0$, $Z_i(t) \succ 0$ mevcutsa, (5.3)'deki Lyapunov fonksiyonu, (2.2) ve (2.3) koşullarını sağlayan zaman gecikmesi için $t \in [t_0, t_f]$ aralığında azalmaktadır. Eşitsizlik (5.5) ve (5.6)'deki değişkenler aşağıdaki gibidir:

$$\phi_{11i}(t) = \dot{P}_i(t) + P_i(t)A_i + A_i^T P_i(t) + N_{1i}(t) + N_{1i}^T(t) + h\dot{Q}_i(t) + Q_i(t) + hX_{11i}(t), \tag{5.7}$$

$$\phi_{12i}(t) = P_i(t)\bar{A}_i - N_{1i}(t) + N_{2i}^T(t) + hX_{12i}(t), \tag{5.8}$$

$$\phi_{22i}(t) = -N_{2i}(t) - N_{2i}^T(t) - (1-d)Q_i(t) + hX_{22i}(t), \tag{5.9}$$

$$\phi_{33i}(t) = -hZ_i(t) - \frac{h^2}{2}\dot{Z}_i(t). \tag{5.10}$$

Kanıt. Newton-Leibniz formülü olan

$$x(t-r(t)) = x(t) - \int_{t-r(t)}^t \dot{x}(s)ds, \quad (5.11)$$

kullanılarak, uygun boyuttaki $N_{1i}(t)$ and $N_{2i}(t)$ matrisleri için

$$2 \left[x^T(t)N_{1i}(t) + x^T(t-r(t))N_{2i}(t) \right] \cdot \left[x(t) - \int_{t-r(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t-r(t)) \right] = 0, \quad (5.12)$$

elde edilmiştir. Tanımı gereği X_i yarı-kesin pozitif olduğu ve $h \geq r(t) > 0$ olduğu için,

$$h\eta_1^T(t)X_i(t)\eta_1(t) - \int_{t-r(t)}^t \eta_1^T(t)X_i(t)\eta_1(t)ds \geq 0, \quad (5.13)$$

çıkarımı yapılmıştır. $\eta_1(t) = [x^T(t), x^T(t-r(t))]^T$ şeklinde tanımlanmıştır. Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & x^T(t) [\dot{P}_i(t) + P_i(t)A_i + A_i^T P_i(t)] x(t) \\ & + 2x^T(t)P_i(t)\bar{A}_i x(t-r(t)) + hx^T(t)\dot{Q}_i(t)x(t) + \int_{t-r(t)}^t x^T(s)\dot{Q}_i(t)x(s)ds \\ & + x^T(t)Q_i(t)x(t) - [1-\dot{r}(t)]x^T(t-r(t))Q_i(t)x(t-r(t)), \\ & - [1-\dot{r}(t)] \cdot [h-r(t)]x^T(t-r(t))\dot{Q}_i(t)x(t-r(t)) \\ & - \int_{t-r(t)}^t x^T(s)\dot{Q}_i(t)x(s)ds + \int_{t-r(t)}^t (s-t+h)x^T(s)\ddot{Q}_i(t)x(s)ds \\ & + hx^T(t)Z_i(t)\dot{x}(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)Z_i(t)\dot{x}(s)ds + \int_{-ht+\theta}^0 \int_t^t \dot{x}^T(s)\dot{Z}_i(t)\dot{x}(s)ds \\ & + \frac{h^2}{2}\dot{x}^T(t)\dot{Z}_i(t)\dot{x}(t) - \int_{-ht+\theta}^0 \int_t^t \dot{x}^T(s)\dot{Z}_i(t)\dot{x}(s)ds \\ & + \int_{-ht+\theta}^0 \int_t^t (s-t-\theta)\dot{x}^T(s)\ddot{Z}_i(t)\dot{x}(s)dsd\theta \end{aligned} \quad (5.14)$$

olarak hesaplanmıştır. Koşullar (2.2) ve (2.3) sebebiyle

$$0 \leq [1 - \dot{r}(t)] \cdot [h - r(t)] \leq (1 + d)h \quad (5.15)$$

durumu vardır. Denklemler (5.12) ve (5.13) eklenirse

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t, x_t) &\leq x^T(t) [\dot{P}_i(t) + P_i(t)A_i + A_i^T P_i(t) + Q_i(t) + h\dot{Q}_i(t)] x(t) \\ &\quad + 2x^T(t)P_i(t)\bar{A}_i x(t-r(t)) - (1-d)x^T(t-r(t))Q_i(t)x(t-r(t)) \\ &\quad + \dot{x}^T(t) \left[hZ_i(t) + \frac{h^2}{2}\dot{Z}_i(t) \right] \dot{x}(t) - \int_{t-r(t)}^t \dot{x}^T(s)Z_i(t)\dot{x}(s)ds \\ &\quad + 2 \left[x^T(t)N_{1i}(t) + x^T(t-r(t))N_{2i}(t) \right] \cdot \left[x(t) - \int_{t-r(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t-r(t)) \right] \\ &\quad + h\eta_1^T(t)X_i(t)\eta_1(t) - \int_{t-r(t)}^t \eta_1^T(t)X_i(t)\eta_1(t)ds \\ &= \eta_1^T(t)\Xi_i(t)\eta_1(t) - \int_{t-r(t)}^t \eta_2^T(t,s)\psi_i(t)\eta_2(t,s)ds \end{aligned} \quad (5.16)$$

olmaktadır. Buradaki değişkenler

$$\eta_2(t, s) = [x^T(t), x^T(t-r(t)), \dot{x}^T(s)]^T, \quad (5.17)$$

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \phi_{11i}(t) - A_i^T \phi_{33i}(t)A_i & \phi_{12i}(t) - A_i^T \phi_{33i}(t)\bar{A}_i \\ * & \phi_{22i}(t) - h\bar{A}_i^T \phi_{33i}(t)\bar{A}_i \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Matris (5.5), (5.18)'ın Schur tamlayanıdır. Dolayısıyla, eğer (5.5) ve (5.6) tutarlıysa, zaman aralığı $t \in [t_0, t_f]$ için $\dot{V}_i(t, x_t) < 0$ 'dır. $\square$

Optimizasyon probleminin kolayca uygulanabilmesi için zamanla değişen Lyapunov fonksiyonlarını parçalı lineer seçilmiştir.

Sonuç 5.2 Zaman aralığı $t \in [t_0, t_f]$ ve (5.3)'teki Lyapunov fonksiyonu için $\delta = t_f - t_0$,
 $P_i(t) = \text{afin}(P_{i,k}, P_{i,k+1}, t - t_0, \delta)$, $Q_i(t) = \text{afin}(Q_{i,k}, Q_{i,k+1}, t - t_0, \delta)$ ve

$Z_i(t) = \text{afin}(Z_{i,k}, Z_{i,k+1}, t - t_0, \delta)$ olsun. Pozitif matrisler

$$X_{i,k} = \begin{bmatrix} X_{11i,k} & X_{12i,k} \\ * & X_{22i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.19)$$

ve uygun boyutlarda $N_{1i,k}$, $N_{1i,k+1}$, $N_{2i,k}$ ve $N_{2i,k+1}$ matrisleri olsun. Eğer

$${}^1\phi_{i,k} := \begin{bmatrix} {}^1\phi_{11i,k} & \phi_{12i,k} & -A_i^T {}^1\phi_{33i,k} \\ * & \phi_{22i,k} & -\bar{A}_i^T {}^1\phi_{33i,k} \\ * & * & {}^1\phi_{33i,k} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.20)$$

$${}^2\phi_{i,k} := \begin{bmatrix} {}^2\phi_{11i,k} & \phi_{12i,k+1} & -A_i^T {}^2\phi_{33i,k} \\ * & \phi_{22i,k+1} & -\bar{A}_i^T {}^2\phi_{33i,k} \\ * & * & {}^2\phi_{33i,k} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.21)$$

$$\psi_{i,k} := \begin{bmatrix} X_{11i,k} & X_{12i,k} & N_{1i,k} \\ * & X_{22i,k} & N_{2i,k} \\ * & * & Z_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.22)$$

ve $\psi_{i,k+1} \succeq 0$ matrislerini tutarlı yapan simetrik $P_{i,k} \succ 0$, $P_{i,k+1} \succ 0$, $Q_{i,k+1} \succeq Q_{i,k} \succeq 0$, $Z_{i,k+1} \succeq Z_{i,k} \succ 0$ matrisleri mevcutsa (5.3)'teki Lyapunov fonksiyonu $t \in [t_0, t_f]$ zaman aralığı için azalandır. Yukarıdaki değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} {}^1\phi_{11i,k} &= \frac{1}{\delta} (P_{i,k+1} - P_{i,k}) + P_{i,k} A_i + A_i^T P_{i,k+1} + N_{1i,k} + N_{1i,k}^T \\ &\quad + \frac{h}{\delta} (Q_{i,k+1} - Q_{i,k}) + Q_{i,k} + hX_{11i,k}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} {}^2\phi_{11i,k} &= \frac{1}{\delta} (P_{i,k+1} - P_{i,k}) + P_{i,k+1} A_i + A_i^T P_{i,k+1} + N_{1i,k+1} + N_{1i,k+1}^T \\ &\quad + \frac{h}{\delta} (Q_{i,k+1} - Q_{i,k}) + Q_{i,k+1} + hX_{11i,k+1}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\phi_{12i,k} = P_{i,k} \bar{A}_i - N_{1i,k} + N_{2i,k}^T + hX_{12i,k}, \quad (5.25)$$

$$\phi_{22i,k} = -N_{2i,k} - N_{2i,k}^T - (1-d)Q_{i,k} + hX_{22i,k}, \quad (5.26)$$

$${}^1\phi_{33i,k} = -hZ_{i,k} - \frac{h^2}{2\delta} (Z_{i,k+1} - Z_{i,k}), \quad (5.27)$$

$${}^2\phi_{33i,k} = -hZ_{i,k+1} - \frac{h^2}{2\delta} (Z_{i,k+1} - Z_{i,k}). \quad (5.28)$$

Kanıt. Matrisler $X_i(t) = \text{afin}(X_{i,k}, X_{i,k+1}, t - t_0, \delta)$, $N_{1i}(t) = \text{afin}(N_{1i,k}, N_{1i,k+1}, t - t_0, \delta)$, $N_{2i}(t) = \text{afin}(N_{2i,k}, N_{2i,k+1}, t - t_0, \delta)$ olsun. Koşullar

$$\phi_i(t) = \left(1 - \frac{t-t_0}{\delta}\right) {}^1\phi_{i,k} + \left(\frac{t-t_0}{\delta}\right) {}^2\phi_{i,k}, \quad (5.29)$$

$$\psi_i(t) = \left(1 - \frac{t-t_0}{\delta}\right) \psi_{i,k} + \left(\frac{t-t_0}{\delta}\right) \psi_{i,k+1}, \quad (5.30)$$

olur. Sonuç olarak, zaman aralığı $t \in [t_0, t_f]$ için (5.5) ve (5.6) koşulları tutarlı olur. $\square$

Sonuç 5.2’de, zaman planlamalı Lyapunov - Krasovskii fonksiyonellerinin $P_{i,1}$ ’den $P_{i,2}$ ’ye parçalı doğrusal olarak ilerlerken, Lyapunov fonksiyonunun azalması için gerek koşulları ortaya konmuştur. Sıradaki teoremden, Sonuç 5.2’deki parça sayısı K taneye çıkarılmıştır. Sonuç olarak $P_{i,0}$ ’dan $P_{i,K}$ ’ya ilerlemektedir. İlk parçadan son parçaya ulaşma süresi oturma zamanı olarak tanımlanmıştır. K . parçadan sonra Lyapunov fonksiyonu zamanla değişme yerine sabitlenmektedir. Teoremi sunmadan önce, önsav 4.2’nin koşullarında yapılan bir değişken değişimini tanıtalım:

$$\phi_{i,K} := \phi_i \text{ hesaplama noktası } P_i = P_{i,K}, \quad P_i = P_{i,K}, \quad Z_i = Z_{i,K}, \quad (5.31)$$

$$N_{1i} = N_{1i,K}, N_{2i} = N_{2i,K}, X_i = X_{i,K},$$

Teorem 5.3 Sistem (5.1)’i ele alalım. Zaman gecikmelerinin üst sınırları h, d , zaman planlaması parça sayısı K ve oturma zamanı τ_D önceden belirlenmiş olsun. Zaman gecikmesinin K parçasından

$$\left\{ \delta_k > 0, \sum_{k=1}^K \delta_k = \tau_D \right\}$$

dizisi oluşturulmuş olsun. Eğer

$${}^1\phi_{i,k} \prec 0, \quad {}^2\phi_{i,k} \prec 0, \quad \forall k = 0, \dots, K-1$$

$$\begin{aligned}
\psi_{i,k} &\succeq 0, & X_{i,k} &\succeq 0, & \forall k = 0, \dots, K \\
\phi_{i,K} &\prec 0, \\
Q_{i,k+1} - Q_{i,k} &\succeq 0, & \forall k = 0, \dots, K-1 \\
Z_{i,k+1} - Z_{i,k} &\succeq 0, & \forall k = 0, \dots, K-1 \\
P_{i,K} - P_{j,0} &\succeq 0, & \forall j \in \mathcal{P}, j \neq i
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$Q_{i,K} - Q_{j,0} - \frac{h}{\delta} (Q_{j,1} - Q_{j,0}) \succeq 0, \quad \forall j \in \mathcal{P}, j \neq i \tag{5.33}$$

$$Z_{i,K} - Z_{j,0} - \frac{h}{\delta} (Z_{j,1} - Z_{j,0}) \succeq 0, \quad \forall j \in \mathcal{P}, j \neq i \tag{5.34}$$

koşullarını sağlayan simetrik $P_{i,k} \succ 0$, $Q_{i,k} \succ 0$, $Z_{i,k} \succ 0$ matrisler mevcutsa, oturma zamanı τ_D 'den büyük anahtarlama işaretleri için Sistem (4.1) global asimptotik kararlıdır.

Kanıt. $t_1, t_2, \dots$ anahtarlama anları olsun. İki art arda anahtarlama anı $t_{j+1} - t_j \geq \tau_D$ olacak şekilde oturma zamanından büyük olsun. Değişken

$$t_{j,k} := t_j + \sum_{j=1}^k \delta_j. \tag{5.35}$$

olsun. Simetrik matrisler

$$P_i(t) = \begin{cases} P_{i,k} + \left(\frac{t - t_{j,k}}{\delta_k} \right) (P_{i,k+1} - P_{i,k}), & t \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}), \quad \forall k = 0, 1, \dots, K-1 \\ P_{i,K} & t \in [t_{j,K}, t_{j+1}) \end{cases} \tag{5.36}$$

$$Q_i(t) = \begin{cases} Q_{i,k} + \left(\frac{t - t_{j,k}}{\delta_k} \right) (Q_{i,k+1} - Q_{i,k}), & t \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}), \quad \forall k = 0, 1, \dots, K-1 \\ Q_{i,K} & t \in [t_{j,K}, t_{j+1}) \end{cases} \tag{5.37}$$

$$Z_i(t) = \begin{cases} Z_{i,k} + \left(\frac{t - t_{j,k}}{\delta_k} \right) (Z_{i,k+1} - Z_{i,k}), & t \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}), \quad \forall k = 0, 1, \dots, K-1 \\ Z_{i,K} & t \in [t_{j,K}, t_{j+1}) \end{cases} \tag{5.38}$$

için Lyapunov fonksiyonu (5.3) azalandır. Varsayalım ki t_j anında sistem i 'den j 'ye anahtarlansın. O andaki Lyapunov fonksiyonundaki değişim:

$$V_i(t_j, x_t) - V_j(t_j, x_t) = x^T(t_j) [P_{i,K} - P_{j,0}] x(t_j)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_j-r(t)}^{t_j} x^T(s) \left[Q_{i,K} - Q_{j,0} - (s-t_j+h) \frac{Q_{j,1} - Q_{j,0}}{\delta_0} \right] x(s) ds \\
& + \int_{-ht_j+\theta}^0 \int_{t_j}^{t_j} \dot{x}^T(s) \left[Z_{i,K} - Z_{j,0} - (s-t_j-\theta) \frac{Z_{j,1} - Z_{j,0}}{\delta_0} \right] \dot{x}(s) ds d\theta \quad (5.39)
\end{aligned}$$

olur.

Integral bölgesinde $h \geq (s-t+h)$ ve $h \geq (s-t+\theta)$ olduğu için, eğer anahtarlama işaretinin oturma zamanı τ_D 'den büyükse ve (5.32), (5.33) ve (5.34) koşulları tutarlıysa Lyapunov fonksiyonu anahtarlama anında yükselmez. Bütün alt sistemler kararlı ve anahtarlama anlarında Lyapunov yükselmediği için AZG sistem asimptotik kararlıdır. $\square$

Önceden belirlenen K ve τ_D için zaman aralıkları

$$\delta_k = \frac{\tau_D}{K}, \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad (5.40)$$

şeklinde eşit olarak seçilebilir. Yarılama algoritması ile oturma zamanının en küçüklemesi gerçekleştirilir.

Parametre K 'nın seçimi ile ilgili [17]'ye başvurulabilir. Parametre K yükseldikçe sonuçların tutuculuğu azalır. Diğer yandan, K 'nın artışı hesaplama maliyetini artırır.

5.1 Oturma Zamanını En Küçükleyen Kontrolcü Sentezi

Dinamik denklemi

$$\tilde{\Sigma}_{\sigma(t)} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + \bar{A}_{\sigma(t)}x(t-r_{\sigma(t)}(t)) + B_{\sigma(t)}u(t), & t \geq 0 \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \forall \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (5.41)$$

olan AZG sistemi ele alalım. Alt sistem i 'yi temsilen

$$\tilde{\Sigma}_i := (A_i, \bar{A}_i, B_i) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \quad (5.42)$$

üçlüsü tanımlanmıştır.

Önsav 5.4 Alt sistem Σ_i 'yi ele alalım. Zaman gecikmesi $r(t)$ (2.2) koşulunu sağlasın.

Pozitif simetrik

$$Y_i(t) := \begin{bmatrix} Y_{11i}(t) & Y_{12i}(t) \\ * & Y_{22i}(t) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5.43)$$

matrisi ve uygun boyutlarda $M_{1i}(t)$, $M_{2i}(t)$ ve $V_i(t)$ olsun. Simetrik $L_i(t) \succ 0$, $R \succ 0$ matrisleri

$$\Pi_i(t) = \begin{bmatrix} \Pi_{11i}(t) & \Pi_{12i}(t) & h(L_i(t)A_i^T + V_i^T(t)B_i^T) \\ * & \Pi_{22i}(t) & hL_i(t)\bar{A}_i^T \\ * & * & -hR \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5.44)$$

$$\Lambda_i(t) = \begin{bmatrix} Y_{11i}(t) & Y_{12i}(t) & M_{1i}(t) \\ * & Y_{22i}(t) & M_{2i}(t) \\ * & * & L_i(t)R^{-1}L_i(t) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5.45)$$

ve $\dot{L}_i(t) = 0$ koşullarını sağlıyorsa, Sistem (5.41), kazancı $G_i(t) = V_i(t)L_i(t)^{-1}$ olan kontrolcü $u(t) = G_i(t)x(t)$ ile kararlı kılınabilir. Koşullarıdaki değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \Pi_{11i}(t) = & -\dot{L}_i(t) + L_i(t)A_i^T + A_iL_i(t) + B_iV_i(t) + V_i(t)^T B_i^T \\ & + M_{1i}(t) + M_{1i}(t)^T + hY_{11i}(t) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\Pi_{12i}(t) = \bar{A}_iL_i(t) - M_{1i}(t) + M_{2i}(t)^T + hY_{12i}(t) \quad (5.47)$$

$$\Pi_{22i}(t) = -M_{2i}(t) - M_{2i}(t)^T + hY_{22i}(t). \quad (5.48)$$

Kanıt. Kontrol işareti uygulandıktan sonra sistem dinamiği

$$\dot{x}(t) = (A_i + B_iG_i(t))x(t) + \bar{A}_i x(t - r(t)), \quad (5.49)$$

haline gelir. A_i ile $A_i + B_iG_i(t)$ değiştirilir. Kontrolcü sentezi için, $Q_i(t) = 0$, $Z_i(t)$ ise ortak ve sabit olarak $Z_i(t) = Z$ seçilir. Eşitsizlik (5.5) ön ve öteden $\text{diag}[P_i(t)^{-1}, P_i(t)^{-1}, Z^{-1}]$

ile, Eşitsizlik (5.6) ön ve öteden $\text{diag} [P_i(t)^{-1}, P_i(t)^{-1}, P_i(t)^{-1}]$ ile çarpılmıştır. Sıradaki

$$L_i(t) := P_i(t)^{-1}, \quad V_i(t) := G_i(t)P_i^{-1}(t), \quad R := Z^{-1}, \quad (5.50)$$

$$M_{1i}(t) := P_i^{-1}(t)N_{1i}(t)P_i^{-1}(t), \quad M_{2i}(t) := P_i^{-1}(t)N_{2i}(t)P_i^{-1}(t), \quad (5.51)$$

$$Y_i(t) := \text{diag} [P_i^{-1}(t), P_i^{-1}(t)] \cdot X_i(t) \cdot \text{diag} [P_i^{-1}(t), P_i^{-1}(t)] \quad (5.52)$$

değişken değişiminden sonra koşullar elde edilmiştir. Not olarak, $Q_i(t)$ ve $Z_i(t)$ seçiminden dolayı $\dot{L}_i(t) = -P_i(t)^{-1}\dot{P}_i(t)P_i(t)^{-1}$ ve $\dot{Q}_i(t) = 0, \dot{Z}_i(t) = 0$.

Kararlılık analizinde olduğu gibi zaman değişmeli Lyapunov fonksiyonu parçalı doğrusal olarak seçilmiştir. Örneğin parametre $L_i(t) = \text{affine}(L_{i,k}, L_{i,k+1}, t_0, \delta)$ 'dir. Zaman aralığı $[t_0, t_f]$ için

$${}^1\Pi_{i,k} := \begin{bmatrix} {}^1\Pi_{11i,k} & \Pi_{12i,k} & h(L_{i,k}A_i^T + V_{i,k}^TB_i^T) \\ * & \Pi_{22i,k} & hL_{i,k}\bar{A}_i^T \\ * & * & -hR \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.53)$$

$${}^2\Pi_{i,k} := \begin{bmatrix} {}^2\Pi_{11i,k} & \Pi_{12i,k+1} & h(L_{i,k+1}A_i^T + V_{i,k+1}^TB_i^T) \\ * & \Pi_{22i,k+1} & hL_{i,k+1}\bar{A}_i^T \\ * & * & -hR \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.54)$$

olur. Böylece, (5.53) ve (5.54) tutarlıysa koşul (5.44) sağlanmış olur. Serbest parçalı doğrusal parametreler için koşullar

$$\Lambda_i(t) = \left(1 - \frac{t-t_0}{\delta}\right)^2 \Lambda_{i,k} + \left(1 - \frac{t-t_0}{\delta}\right) \left(\frac{t-t_0}{\delta}\right) \bar{\Lambda}_{i,k} + \left(\frac{t-t_0}{\delta}\right)^2 \Lambda_{i,k+1} \quad (5.55)$$

ve parametreler

$$\Lambda_{i,k} = \begin{bmatrix} Y_{11i,k} & Y_{12i,k} & M_{1i,k} \\ * & Y_{22i,k} & M_{2i,k} \\ * & * & L_{i,k}R^{-1}L_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.56)$$

$$\bar{\Lambda}_{i,k} = \begin{bmatrix} Y_{11i,k} + Y_{11i,k+1} & Y_{12i,k} + Y_{12i,k+1} & M_{1i,k} + M_{1i,k+1} \\ * & Y_{22i,k} + Y_{22i,k+1} & M_{2i,k} + M_{2i,k+1} \\ * & * & L_{i,k}R^{-1}L_{i,k+1} + L_{i,k+1}R^{-1}L_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.57)$$

olur. Karesel terimler $L_{i,k}R^{-1}L_{i,k}$ 'den dolayı koşullar DME değildir. Doğrusal olmayan koşullardan kurtulmak için, yeni $S_{i,k}$ ve $\bar{S}_{i,k}$ değişkenleri tanımlanmıştır. Bu değişkenler

$$L_{i,k}R^{-1}L_{i,k} - S_{i,k} \succeq 0, \quad (5.58)$$

$$L_{i,k}R^{-1}L_{i,k+1} + L_{i,k+1}R^{-1}L_{i,k} - 2\bar{S}_{i,k} \succeq 0. \quad (5.59)$$

koşulunu sağlasın. Eşitsizlikler (5.56) ve (5.57),

$$\Lambda_{i,k}^S = \begin{bmatrix} Y_{11i,k} & Y_{12i,k} & M_{1i,k} \\ * & Y_{22i,k} & M_{2i,k} \\ * & * & S_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.60)$$

$$\bar{\Lambda}_{i,k}^{\bar{S}} = \begin{bmatrix} Y_{11i,k} + Y_{11i,k+1} & Y_{12i,k} + Y_{12i,k+1} & M_{1i,k} + M_{1i,k+1} \\ * & Y_{22i,k} + Y_{22i,k+1} & M_{2i,k} + M_{2i,k+1} \\ * & * & 2\bar{S}_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.61)$$

ile değiştirilmiştir.

Eşitsizlik (5.58), $L_{i,k}^{-1}RL_{i,k}^{-1} \preceq S_{i,k}^{-1}$ 'ye eşittir. Schur tamlayanı

$$\begin{bmatrix} S_{i,k}^{-1} & L_{i,k}^{-1} \\ * & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.62)$$

olur.

Matris X , ancak ve ancak simetrik bölümü $(X + X^T)$ kesin pozitifse, kesin pozitifdir [36].

Böylece, Eşitsizlik (5.59) tutarlılığı ancak ve ancak

$$L_{i,k}R^{-1}L_{i,k+1} - \bar{S}_{i,k} \succeq 0. \quad (5.63)$$

ve

$$L_{i,k}^{-1}RL_{i,k+1}^{-1} - \bar{S}_{i,k}^{-1} \preceq 0. \quad (5.64)$$

sağlanmasına bağlıdır.

Matris (5.64)'in simetrik

$$L_{i,k+1}^{-1}RL_{i,k}^{-1} + L_{i,k}^{-1}RL_{i,k+1}^{-1} - 2\bar{S}_{i,k}^{-1} \preceq 0$$

bölümünü ele alalım. Bu simetrik bölümün kesin pozitifliğini kanıtlamak için

$$\left(L_{i,k}^{-1} + L_{i,k+1}^{-1} \right) R \left(L_{i,k}^{-1} + L_{i,k+1}^{-1} \right) - 2\bar{S}_{i,k}^{-1} \preceq 0 \quad (5.65)$$

teriminin pozitif olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Schur tamlayanı

$$\begin{bmatrix} 2\bar{S}_{i,k}^{-1} & L_{i,k}^{-1} + L_{i,k+1}^{-1} \\ * & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.66)$$

olur.

Parametrelerin tersini hesaplayabilmek için yeni

$$J_{i,k} = L_{i,k}^{-1}, \quad U_{i,k} = S_{i,k}^{-1}, \quad \bar{U}_{i,k} = \bar{S}_{i,k}^{-1}, \quad H = R^{-1}, \quad (5.67)$$

parametreleri tanımlanmıştır.

Önceden belirlenmiş τ_D ve K parametreleri için, kararlı kılan kontrolcü tasarımının mümkünlüğü

$$\begin{aligned} \text{en küçük} \quad & \text{iz} \left[\sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^K (L_{i,k}J_{i,k} + S_{i,k}U_{i,k}) + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{K-1} \bar{S}_{i,k}\bar{U}_{i,k} + HR \right] \\ \text{s.t.} \quad & {}^1\Pi_{i,k} \succeq 0, \quad {}^2\Pi_{i,k} \succeq 0, \quad \forall k \in 1, \dots, K, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\ & \Lambda_{i,k}^S \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} U_{i,k} & J_{i,k} \\ * & H \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall k \in 1, \dots, K, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\Lambda}_{i,k}^{\bar{S}} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} 2\bar{U}_{i,k} & J_{i,k} + J_{i,k+1} \\ * & H \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall k \in 1, \dots, K-1, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\
& \begin{bmatrix} L_{i,k} & I \\ * & J_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} S_{i,k} & I \\ * & U_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall k \in 1, \dots, K, \quad \forall i \in \mathcal{P}, \\
& \begin{bmatrix} \bar{S}_{i,k} & I \\ * & \bar{U}_{i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall k \in 1, \dots, K-1, \\
& \begin{bmatrix} H & I \\ * & R \end{bmatrix} \succeq 0, \\
& L_{i,K} - L_{j,0} \succeq 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{P}, \quad i \neq j
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. □

Adım 1. Parametre K 'yı ayarla. Yeterince büyük oturma zamanı üst sınırı t_u seç. Alt sınırı $t_l = 0$ seç.

Adım 2. İterasyon indisi n 'i 0'a ayarla. $t = (t_u + t_l)/2$ olarak seç. Serbest parametreler $(L_{i,k}, R, S_{i,k}, \bar{S}_{i,k}, J_{i,k}, U_{i,k}, H, \bar{U}_{i,k}, Y_{i,k}, M_{1i,k}, M_{2i,k})$ için (5.68) kısıtlarını sağlayan mümkün kümeyi bul. $L_{i,k}^0 = L_{i,k}, J_{i,k}^0 = J_{i,k}, S_{i,k}^0 = S_{i,k}, U_{i,k}^0 = U_{i,k}, \bar{S}_{i,k}^0 = \bar{S}_{i,k}, \bar{U}_{i,k}^0 = \bar{U}_{i,k}, H^0 = H$ ve $R^0 = R$ olarak seç.

Adım 3. Sıradaki konveks optimizasyon problemini Adım 2'deki serbest parametreler için çöz.

$$\begin{aligned}
& \text{iz} \left[\sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^K \left(L_{i,k}^n J_{i,k} + L_{i,k} J_{i,k}^n + S_{i,k}^n U_{i,k} + S_{i,k} U_{i,k}^n \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\bar{S}_{i,k}^n \bar{U}_{i,k} + \bar{S}_{i,k} \bar{U}_{i,k}^n \right) + H^n R + H R^n \right].
\end{aligned}$$

$$L_{i,k}^{n+1} = L_{i,k}, J_{i,k}^{n+1} = J_{i,k}, S_{i,k}^{n+1} = S_{i,k}, U_{i,k}^{n+1} = U_{i,k}, \bar{S}_{i,k}^{n+1} = \bar{S}_{i,k}, \bar{U}_{i,k}^{n+1} = \bar{U}_{i,k}, H^{n+1} = H \text{ ve } R^{n+1} = R \text{ olarak seç.}$$

Adım 4. Eğer önceden belirlenmiş tolerans $t_u - t_l < tol$ sağlandıysa kontrolcüyü $G_i(t) = V_i(t)L_i(t)^{-1}$ olarak seç. Oturma zamanı $\tau_D = t$ 'dir. Programdan çık.

Değilse Eğer (5.56) ve (5.57) koşulları sağlandıysa Adım 2'ye dön.

Aksi Halde, $n = n + 1$ olarak seç ve Adım 3'e git. Eğer önceden belirlenmiş iterasyon sayısı defada mümkün sonuç bulunamazsa, alt sınırı $t_l = t$ olarak seç ve Adım 2'ye dön.

BÖLÜM 6

SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, literatürde bulunan çeşitli örneklerle, bu tez çalışmasında geliştirilen yöntemler karşılaştırılmıştır.

6.1 Kararlılık Analizi Örnekleri

Örnek 6.1 (Bkz. [22].) Alt sistemler Σ_1 ve Σ_2

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 0.6s, \quad d = 0, \quad (6.1)$$

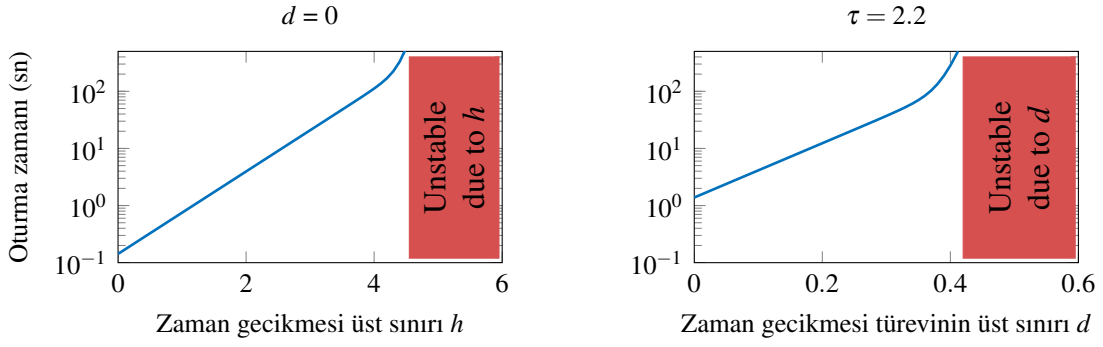
$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 0.6s, \quad d = 0, \quad (6.2)$$

olsun. Yöntem I için farklı h_i ve d_i değerleri için sonuçlar Tablo 6.1’de ve Şekil 6.2’de görülmektedir. Yöntem II ise oturma zamanını $\tau_D = 1.06^{-5}$ olarak hesaplamıştır. Bu sistemin ortak Lyapunov fonksiyonu mevcuttur. Yöntem II için farklı h ve d değerleri için oturma zamanları Şekil 6.1’de görülmektedir.

Örnek 6.2 (Bkz. [24].) Alt sistemler Σ_1 ve Σ_2

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.799 & -0.814 \\ 0.2 & -0.714 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.45 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 0.2s, \quad d = 0. \quad (6.3)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.853 & -0.093 \\ -0.853 & -1.1593 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.05 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 0.2s, \quad d = 0. \quad (6.4)$$



Şekil 6.1 Yöntem II ile Örnek 6.1'in farklı h ve d değerleri için oturma zamanları

Çizelge 6.1 Yöntem I ile farklı τ_i ve d_i değerleri için Örnek 1 oturma zamanları.

τ_1	τ_2	d_1	d_2	τ_D
0.15 s	0.3 s	0 s	0 s	0.69 s
0.15 s	0.3 s	0.15 s	0.3 s	0.69 s
0.3 s	0.6 s	0 s	0 s	1.11 s
0.3 s	0.6 s	0.3 s	0.3 s	1.11 s
0.3 s	0.6 s	0.6 s	0.6 s	1.11 s
0.6 s	1.2 s	0 s	0 s	2.54 s
0.6 s	1.2 s	0.3 s	0.3 s	2.76 s
0.6 s	1.2 s	0.6 s	0.6 s	3.51 s

olsun.

Bu örneğin farklı h ve d değerlerinin Yöntem I ile bulunmuş oturma zamanları Tablo 6.2'de görülmektedir. Not olarak, $d_2 > 0.905$ 'ten sonra alt sistem 2 kararsızdır. Bu sebeple d_2 büyüdükçe oturma zamanı da oldukça büyür. Bu durum Tablo 6.2'de gri satırda görülmektedir.

Yöntem II ise oturma zamanını 7.26×10^{-6} saniye olarak hesaplamıştır. Bu sistemin ortak Lyapunov fonksiyonu mevcuttur.

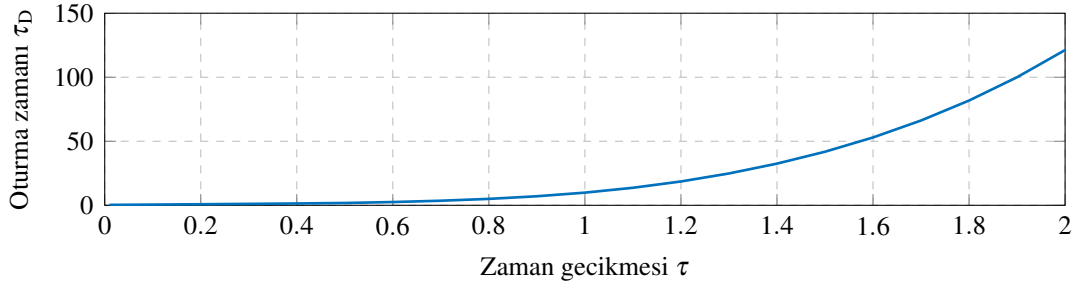
Örnek 6.3 Bu örnek, Kaynak [9]'deki Örnek 1'in 3. vakasıdır. Alt sistemler Σ_1 ve Σ_2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = 0.9 \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.01 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \tau_1 = 1.82, d_1 = 0, \quad (6.5)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = 0.7 \cdot \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ -0.01 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = 1.82, d_2 = 0, \quad (6.6)$$

Çizelge 6.2 Yöntem I ile farklı τ_i ve d_i değerleri için Örnek 2 oturma zamanları.

τ_1	τ_2	d_1	d_2	τ_D
0.08 s	0.1 s	0 s	0 s	0.46 s
0.16 s	0.2 s	0.15 s	0.15 s	0.58 s
0.3 s	0.4 s	0.2 s	0.2 s	0.84 s
0.6 s	0.8 s	0 s	0 s	1.38 s
0.9 s	1.2 s	0 s	0 s	2.39 s
0.9 s	1.2 s	0.3 s	0.3 s	2.58 s
0.9 s	1.2 s	0.6 s	0.6 s	3.15 s
0.9 s	1.2 s	0.9 s	0.9 s	176.70 s



Şekil 6.2 Yöntem I ile Örnek 1'in farklı h değerleri için oturma zamanları.

olsun.

Yöntem I oturma zamanını 16.60 saniye, Yöntem II 6.178 saniye olarak hesaplamıştır.

Örnekler 6.1, 6.2 ve 6.3 için hesaplanan oturma zamanlarının literatürdeki geçmiş çalışmalar ile karşılaştırılması Tablo 6.3'da görülmektedir.

Çizelge 6.3 Örnek 6.1, 6.2 ve 6.3 için yöntemlerin karşılaştırılması

	Örn. 1	Örn. 2	Örn. 3
Kaynak [9]	–	–	43.99 s
Kaynak [22]	6.51 s	–	–
Kaynak [24]	3.4 s	0.72 s	–
Yöntem I	1.11 s	0.58 s	16.60 s
Yöntem II	1.06×10^{-5} s	7.26×10^{-6} s	6.178 s

Örnek 6.4 Bu örnek, Kaynak [37]'deki Örnek 1.1'in biraz değiştirilmiş halidir. Parametre $a = 50$ ilgili örnekteki bir parametredir ve örnekteki sistem rastgele anahtarlama altında

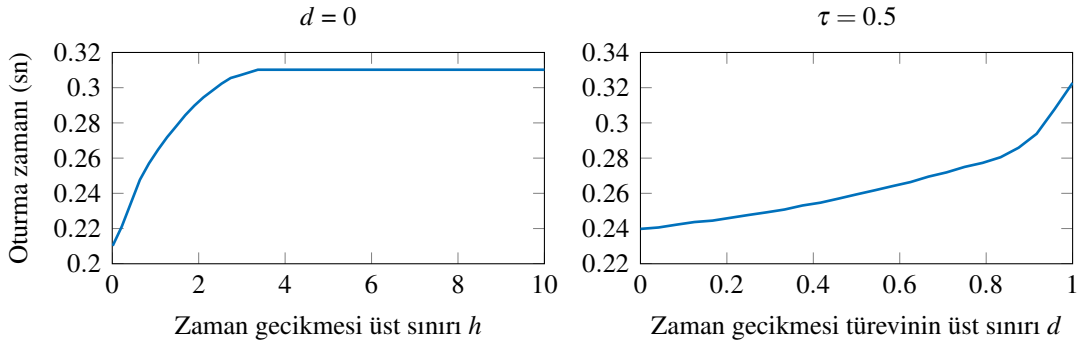
kararlı değildir. Alt sistemler

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.1 \\ -0.9 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_1 = 0.05, \quad d_1 = 0.2 \quad (6.7)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ -150 & -50 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = 0.05, \quad d_2 = 0.2. \quad (6.8)$$

olsun. Yöntem I'e göre oturma zamanı $\tau_D = 1.698$, yöntem II'ye göre ise $\tau_D = 0.195$ saniyedir.

Farklı h ve d değerleri için Yöntem II sonuçları Şekil 6.3'de görülmektedir. Şekil 6.4'de Örnek 6.4 için bir benzetim sonucu görülmektedir. Oturma zamanı 0.06 saniye olan işaret için sistem kararsız, oturma zamanı 0.196 saniye olan anahtarlama işareti için ise kararlıdır.



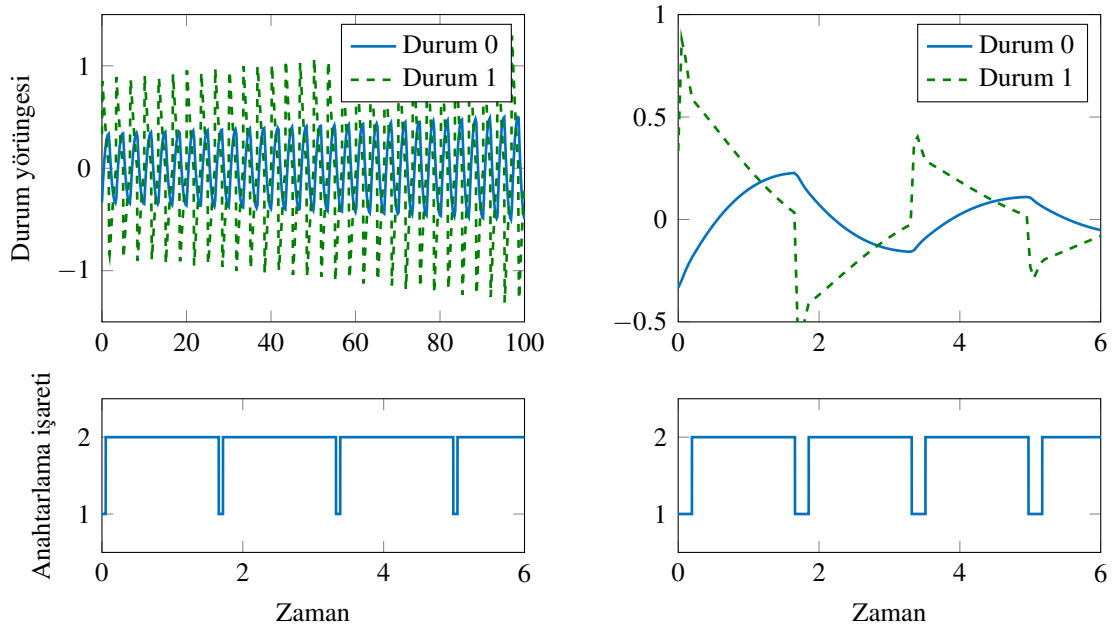
Şekil 6.3 Örnek 4'ün farklı h ve d değerleri için Yöntem II'nin bulduğu oturma zamanları

6.2 Kontrolcü Sentezi Örnekleri

Örnek 6.5 Bu örnek Kaynak [23]'den alınmıştır. İlgili çalışmada, zamanla değişen bir sistemin kararlılığı anahtarlama kontrolcü ile sağlanmıştır. Bunun için, zamanla değişen sistem, iki nominal alt sisteme ve belirsizlik sınırlarına sahip anahtarlama bir sistem olarak temsil edilmiştir. Gürbüz kontrol teknikleri ile sentezlenen kontrolcü kazançları

$$G_1 = [0.9681, 0.0465], \quad G_2 = [-0.2708, 0.3715] \quad (6.9)$$

şeklindedir ve hesaplanan oturma zamanı 0.92 saniyedir.



Şekil 6.4 Örnek 6.4 için benzetim sonucu.

Bu tezde, gürbüz kontrol teknikleri uygulanmadığı için sadece nominal sistemler göz önünde bulundurulmuştur. Alt sistemler

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1.9 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.45 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

(6.11)

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.05 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

olsun ve zaman gecikmesinin üst sınırı $h = 0.2$ saniye olsun.

Yöntem I kontrolcü kazançlarını

$$K_1 = [0.5527, -0.5036], \quad K_2 = [-0.6483, -0.6561] \quad (6.13)$$

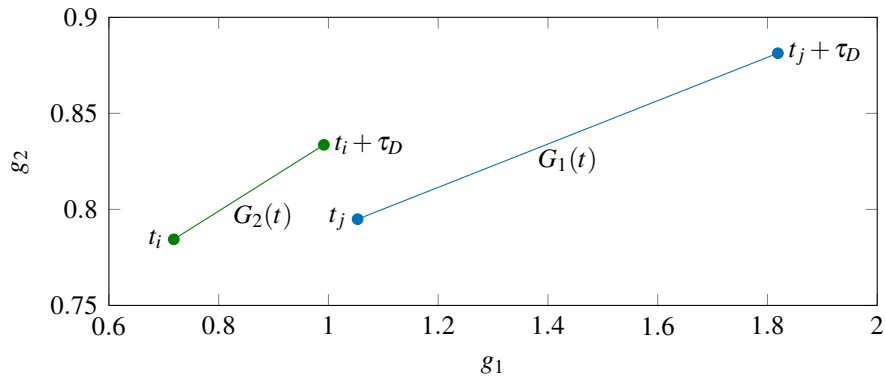
ve oturma zamanını $\tau_D = 0.49$ saniye olarak hesaplamıştır.

Yöntem II, $K = 2$ için sentezlediği kontrolcü Şekil 6.5'te görülmektedir ve oturma zamanı

$\tau_d = 7.58 \times 10^{-9}$ olarak hesaplanmıştır. Yöntem II'deki algoritma

$$L_{i,k} = \begin{bmatrix} 1.02 & -0.02 \\ -0.02 & 1.01 \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall k = \{1, 2\}.$$

şeklinde ortak Lyapunov fonksiyonları bulmuştur. $G_i(t) = V_i(t)L_i(t)^{-1}$ olması sebebiyle, sentezlenen kontrolcüler doğrusaldır.



Şekil 6.5 Örnek 6.5 için yöntem II ile bulunan kontrolcü.

Örnek 6.6 Bu örnek [38]'teki örneğin biraz değiştirilmiş bir halidir. İlgili örneğin ortak Lyapunov fonksiyonu olmadığı çalışmada belirtilmiştir. İlgili örnekteki sistemin formu w bozucusu altında

$$\dot{x} = A_{0,\sigma(t)}x + B_{0,\sigma(t)}w + B_{1,\sigma(t)}u$$

şeklindedir. Sistem matrisleri

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} 0.5108 & -0.9147 & -0.2 \\ -0.6563 & 0.1798 & 0.113 \\ 0.881 & -0.7841 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{1,1} = \begin{bmatrix} 0.3257 \\ 1.2963 \\ 2.43 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$A_{0,2} = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.9833 & -0.34 \\ -0.5305 & 0.3848 & 0.58 \\ 1.0306 & 0.6521 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{1,2} = \begin{bmatrix} 1.0992 \\ 0.6532 \\ 3.5 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

olarak verilmiştir.

Bu matrisler aracılığı ile buradaki örnek üretilmiştir. Alt sistemler

$$A_1 = (1 - \lambda) \cdot A_{0,1}, \quad \bar{A}_1 = \lambda \cdot A_{0,1}, \quad B_1 = B_{1,1}, \quad (6.16)$$

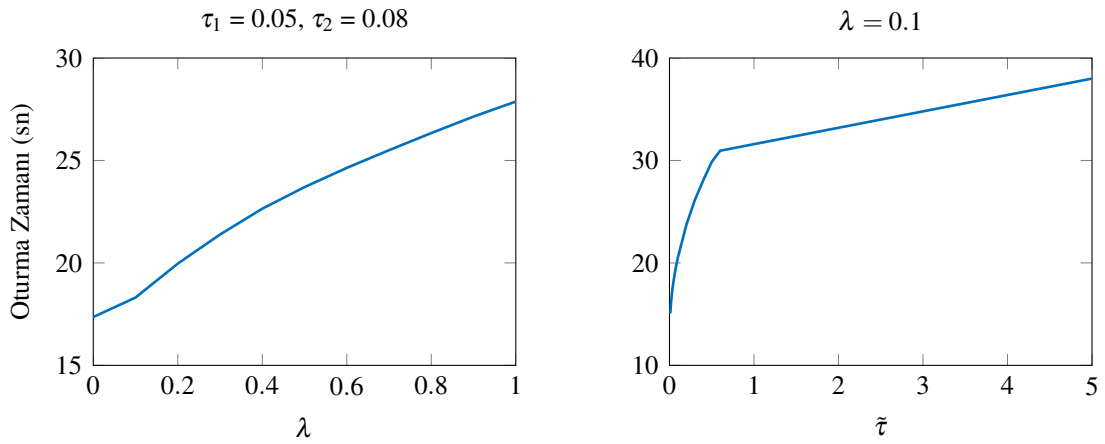
$$A_2 = (1 - \lambda) \cdot A_{0,2}, \quad \bar{A}_2 = \lambda \cdot A_{0,2}, \quad B_2 = B_{1,2}, \quad (6.17)$$

olsun. Yöntem I ile $\lambda = 0.9$ ve $h = 0.05$ için kontrolcü kazançları

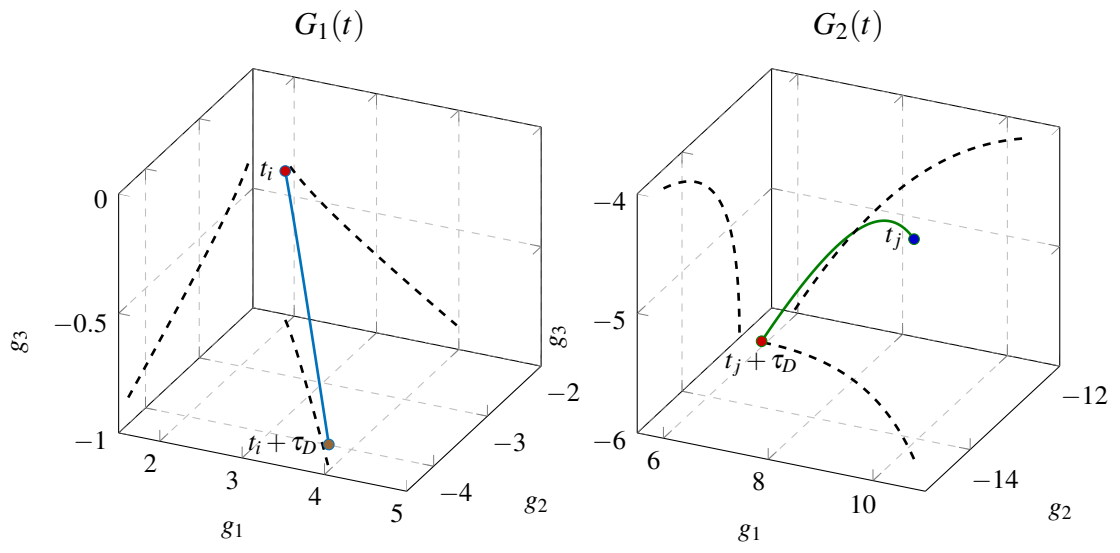
$$K_1 = [27.78, -25.94, 1.70], \quad K_2 = [1.09, -3.08, -1.48] \quad (6.18)$$

ve oturma zamanı $\tau_D = 13.78$ saniye olarak hesaplanmıştır. Farklı λ ve h değerleri için hesaplanan oturma zamanları Şekil 6.6'da görülmektedir. Sistem zaman gecikmesinden bağımsız kararlıdır.

Yöntem II ise $\lambda = 0.9$ ve $h = 0.45$ saniye için oturma zamanını 0.3359 saniye olarak hesaplamıştır. Sentezlenen kontrolcü Şekil 6.7'de görülmektedir.



Şekil 6.6 Yöntem I ile hesaplanan Örnek 6.6 için oturma zamanları



Şekil 6.7 Örnek 6.6 için zamanla değişen kontrolcü

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, anahtarlama zaman gecikmeli sistemlerin oturma zamanlı kararlılığını analiz eden ve kontrolcü sentezleyen iki farklı yöntem geliştirilmiştir.

Birinci yöntemde, Lyapunov - Krasovskii fonksiyonları ve serbest ağırlık matrisleri yöntemleri kullanılarak alt sistemlerin kararlılığı analiz edilmiştir. Daha sonra Lyapunov - Krasovskii koşulları ile oturma zamanı arasındaki ilişki ortaya konmuş ve sözde konveks optimizasyon yöntemleri ile en küçükleme gerçekleştirilmiştir. Kararlılık analizi bölümünde bulunan sonuçlar kullanılarak kontrolcü sentezlenmiştir. Oturma zamanını en küçükleyen kontrolcü sentezi doğrusal olmayan optimizasyon yöntemleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

İkinci yöntemde, Lyapunov - Krasovskii fonksiyonu zaman planlamalı hale getirilmiştir. Yine serbest ağırlık matrisleri yöntemi ile zaman planlamalı fonksiyonların azalanlığı garantilenmiştir. Oturma zamanı, K parçalı zaman planlamalı Lyapunov fonksiyonlarını ortaya çıkarmıştır. Yarılama yöntemi ile oturma zamanı en küçüklenmiştir. Kontrolcü sentezi, doğrusal olmayan optimizasyon yöntemi ile gerçekleştirilmiştir.

Sayısal örneklerle, bu tezde geliştirilen yöntemlerin literatürdeki geçmiş yöntemlerden üstün olduğu kıyaslanarak gösterilmiştir.

Bu tezde sunulan yöntemlerin tipik bir uygulaması internet ağı sıkışıklık kontrolü sistemleri olabilir [39]. İnternet ağı sistemlerinin zaman gecikmeli yapısı gereği, bu tezdeki çalışmalar, internet ağı sıkışıklığının giderilmesi alanında yapılan araştırmalara katkıda bulunabilir.

- [1] Liberzon, D. ve Morse, A. S., (1999). "Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems", IEEE Control Systems, 19(5): 59-70.
- [2] Lin, H., ve Antsaklis, P. J., (2009). "Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results", IEEE Transactions on Automatic control, 54(2): 308-322.
- [3] Allerhand, L. I. ve Shaked, U., (2011). "Robust Stability and Stabilization of Linear Switched Systems with Dwell Time", IEEE Transactions on Automatic Control, 56(2): 381-386.
- [4] Ishii, H. ve Francis, B. A., (2001). "Stabilizing a Linear System by Switching Control with Dwell Time", Proceedings of the 2001 American Control Conference, 25-27 June 2001, Arlington.
- [5] Mahmoud, M. S., (2010). Switched Time-Delay Systems, Springer US, Boston.
- [6] Fainshil, L., Margaliot, M. ve Chigansky, P., (2009). "On the Stability of Positive Linear Switched Systems Under Arbitrary Switching Laws", IEEE Transactions on Automatic Control, 54(4): 897-899.
- [7] Hou, M., Fu, F., ve Duan, G., (2013). "Global Stabilization of Switched Stochastic Nonlinear Systems in Strict-feedback Form Under Arbitrary Switchings", Automatica, 49(8): 2571-2575.
- [8] Shorten, R., Narendra, K. S. ve Mason, O., (2003). "A Result on Common Quadratic Lyapunov Functions", IEEE Transactions on Automatic Control, 48(1): 110-113.
- [9] Chen, W. H. ve Zheng, W. X., (2010). "Delay-independent Minimum Dwell Time for Exponential Stability of Uncertain Switched Delay Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, 55(10): 2406-2413.
- [10] Geromel, J. C. ve Colaneri, P., (2006). "Stability and Stabilization of Continuous-time Switched Linear Systems", SIAM Journal on Control and Optimization, 45(5): 1915-1930.
- [11] Hespanha, J. P. ve Morse, A., (1999). "Stability of Switched Systems with Average Dwell-Time", Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 7-10 December 1999, Phoenix.

- [12] Hespanha, J. P., (2004). "Uniform Stability of Switched Linear Systems: Extensions of LaSalle's Invariance Principle", IEEE Transactions on Automatic Control, 49(4): 470-482.
- [13] Mitra, S. ve Liberzon, D., (2004). "Stability of Hybrid Automata with Average Dwell Time: An Invariant Approach", 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 14-17 December 2004, The Bahamas.
- [14] Karabacak, Ö. ve Şengör, N. S., (2009). "A Dwell Time Approach to the Stability of Switched Linear Systems Based on the Distance Between Eigenvector Sets", International Journal of Systems Science, 40(8): 845-853.
- [15] Morse, A. S., (1996). "Supervisory Control of Families of Linear Set-point Controllers-Part I. Exact Matching", IEEE Transactions on Automatic Control, 41(10): 1413-1431.
- [16] Bolzern, P., Colaneri, P. ve De Nicolao, G., (2016). "Design of Stabilizing Strategies for Discrete-time Dual Switching Linear Systems", Automatica, 69: 93-100.
- [17] Xiang, W., (2015). "On Equivalence of Two Stability Criteria for Continuous-time Switched Systems with Dwell Time Constraint", Automatica, 54: 36-40.
- [18] Gu, K., Chen, J. ve Kharitonov, V. L., (2003). Stability of Time-delay Systems, Springer Science & Business Media, Boston.
- [19] Wu, M., He, Y. ve She, J. H., (2010). Stability Analysis and Robust Control of Time-delay Systems, Springer, Berlin.
- [20] He, Y., Wang, Q. G., Xie, L. ve Lin, C., (2007). "Further Improvement of Free-weighting Matrices Technique for Systems with Time-varying Delay", IEEE Transactions on Automatic Control, 52(2): 293-299.
- [21] Sun, X. M., Zhao, J. ve Hill, D. J., (2006). "Stability and L_2 -gain Analysis for Switched Delay Systems: A Delay-dependent Method", Automatica, 42(10): 1769-1774.
- [22] Yan, P. ve Özbay, H., (2008). "Stability analysis of switched time delay systems". SIAM Journal on Control and Optimization, 47(2): 936-949.
- [23] Yan, P., Özbay, H. ve Şansal, M., (2014). "Robust Stabilization of Parameter Varying Time Delay Systems by Switched Controllers", Applied and Computational Mathematics, 13: 31-45.
- [24] Caliskan, S. Y., Ozbay, H. ve Niculescu, S. I. (2013). "Dwell-time Computation for Stability of Switched Systems with Time Delays", IET Control Theory & Applications, 7(10): 1422-1428.
- [25] Briat, C., (2014). Linear Parameter-varying and Time-delay Systems: Analysis, Observation, Filtering & Control. Springer-Verlag, Berlin.
- [26] Niculescu, S. I., (1999). "On Some Frequency Sweeping Tests for Delay-dependent Stability: A Model Transformation Case Study", IEEE European Control Conference (ECC), 31 August – 3 September, Karlsruhe.

- [27] Fridman, E., (2001). "New Lyapunov–Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems". *Systems & Control Letters*, 43(4): 309-319.
- [28] Knospe, C. R. ve Roozbehani, M., (2006). "Stability of Linear Systems with Interval Time Delays Excluding Zero", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8): 1271-1288.
- [29] Hale, J. K., (1977). *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York City, New York, USA.
- [30] Jensen, J. L. W. V., (1906). "Sur Les Fonctions Convexes et les Inégalités Entre Les Valeurs Moyennes", *Acta mathematica*, 30(1): 175-193.
- [31] Gouaisbaut, F. ve Peaucelle, D., (2006). "Delay-dependent Robust Stability of Time Delay Systems", 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, 05-07 July 2006, Toulouse.
- [32] Liberzon, D., (2003). *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser, Boston.
- [33] Boyd, S. ve Vandenberghe, L., (2004). *Convex Optimization*. Cambridge, Cambridge.
- [34] Sturm, J. F. (1999). "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones", *Optimization Methods and Software*, 11(1-4): 625-653.
- [35] El Ghaoui, L., Oustry, F. ve AitRami, M., (1997). "A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-feedback and Related Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8): 1171-1176.
- [36] Johnson, C. R., (1970). "Positive Definite Matrices", *The American Mathematical Monthly*, 77(3): 259-264.
- [37] Sun, Z. ve Ge, S., (2011). *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*, Springer-Verlag, London.
- [38] Yuan, C. ve Wu, F., (2015). "Hybrid Control for Switched Linear Systems with Average Dwell Time", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(1): 240-245.
- [39] Zhao, X., Zhang, L., Shi, P. ve Liu, M., (2012). "Stability of Switched Positive Linear Systems with Average Dwell Time Switching", *Automatica*, 48(6): 1132-1137.

PROGRAM KODLARI

A.1 Kararlılık Analizi

Program A.1 define_systems.m

```

example = 4; % Selection of example
switch example
case 1
    % Example 1: Ozbay Paper
    A{1} = [-2 0; 0 -0.9]; B{1} = [-1,0; -0.5, -1];
    A{2} = [-1 0.5; 0 -1]; B{2} = [-1,0; 0.1, -1];
    tao = {0.3, 0.6}; taod = {0, 0};
case 2
    % Example 2: Ozbay Paper
    A{1} = [-1.799 -0.814; 0.2 -0.714]; B{1} = [-1,0;-0.45, -1];
    A{2} = [-1.853 -0.093; -0.853 -1.1593]; B{2} = [-1,0; 0.05, -1];
    tao = {0.155, 0.2}; taod = {0, 0};
case 3
    % Example 3: Chen Paper
    theta1 = 0.9; theta2 = 0.7;
    A{1} = [0, 1; -10, -1];
    B{1} = theta1*[0.1, 0; -0.01, 0.05];
    A{2} = [0, 1; -0.1, -0.5];
    B{2} = theta2*[0.02, 0; -0.01, 0.02];
    tao = {1.82, 1.82}; taod = {0, 0};
case 4
    % Example4: Sun Book
    A{1} = [-0.1, 1.1; -0.9, -1 ]; B{1} = [0.05, -0.1; -0.1, 0];
    A{2} = [-0.1, 1; -15, -5]; B{2} = [0.05, 0; -1, -1];
    tao = {0.01, 0.05}; taod = {0.2, 0.1};
end

```

Program A.2 checkSD.m

```

function [ bool ] = checkSD( A, SD )
bool = 0;
if SD == 'p'
    if min(eig(double(A))) > 0
        bool = 1;
    end
elseif SD == 'n'
    if max(eig(double(A))) < 0
        bool = 1;
    end
else

```

```

    bool = -1;
    display('SD should be p or n');
end

```

A.2 Yöntem I ile Kararlılık Analizi için Matlab Kodları

Program A.3 start_optimization.m

```

clc;
clear all;
example = 1; % Choose the example from here

% Optimization Settings
ops = sdpsettings('solver','sedumi','verbose',0,'warning',0);
warning('off','YALMIP:strict');
tol = 1e-3; % Stop tolerance
t_upper = 0.1; % Initial upper bound

define_systems;
taomax = max(cell2mat(tao)); % Calculate maximum time delay

display('Finding an upper bound. ');
fprintf('t_u: %3.4f \n', t_upper);
t = t_upper;
define_lm;
sol = solvesdp(Fset, [],ops);
check_solution;

while prob == 1
    t_upper = 2*t_upper;
    fprintf('t_u: %3.4f \n', t_upper);
    t = t_upper;
    define_lm;
    sol = solvesdp(Fset, [],ops);
    check_solution;
end
t_lower = t_upper / 2;

fprintf('Upper bound has found. \n\n');
display('Bisection algorithm starts. ');
while t_upper - t_lower > tol
    t = ( t_upper + t_lower ) / 2;
    fprintf('tu: %3.4f - t: %3.4f - tl: %3.4f\n', t_upper, t, t_lower);
    define_lm;
    sol = solvesdp(Fset, [],ops);
    check_solution;
    if prob == 1
        t_lower = t;
    else
        t_upper = t;
        t_works = t;
    end
end
Td = t_works + taomax;
fprintf('Optimization Terminated.\n\n');
display('*****');
fprintf('%.19s %3.2f seconds\n', 'Maximum Time Delay:', taomax);

```

```

fprintf('%19s %3.2f seconds\n', 'Minimum Time Star: ', t_works);
fprintf('%19s %3.2f seconds\n', 'Minimum Dwell Time:', Td);
display('*****');

```

Program A.4 define_lmism.m

```

n = size(A{1},1); % Size of parameters, n x n
sys_num = size(A,2); % Number of Subsystems
Fset = []; % Optimization constraints
for k = 1:sys_num
    % Lyapunov Functions Parameters: P, Q, Z
    % Upper Bound of the Derivative of the Lyapunov Functions: W
    P{k} = sdpvar(n,n); Q{k} = sdpvar(n,n);
    Z{k} = sdpvar(n,n); W{k} = sdpvar(n,n);

    % Maximum eigenvalues of P,Q,Z,W: p,q,z,w
    p{k} = sdpvar(1); q{k} = sdpvar(1);
    z{k} = sdpvar(1); w{k} = sdpvar(1);

    % Free Weighting Matrices parameters X11, X12, X22, X, N1, N2
    X11{k} = sdpvar(n,n); X12{k} = sdpvar(n,n); X22{k} = sdpvar(n,n);
    N1{k} = sdpvar(n,n, 'full'); N2{k} = sdpvar(n,n, 'full');
    X{k} = [X11{k}, X12{k}; transpose(X12{k}), X22{k}];

    % Entries of phi matrices
    phi11{k} = P{k}*A{k} + A{k}'*P{k} + N1{k} + N1{k}' + ...
        Q{k} + tao{k}*X11{k} + W{k};
    phi12{k} = P{k}*B{k} - N1{k} + N2{k}' + tao{k}*X12{k};
    phi22{k} = -N2{k} - N2{k}' - (1-tao{k})*Q{k} + tao{k}*X22{k};

    % FWM Stability Conditions: Phi and Psi matrices
    phi{k} = [zeros(n), phi12{k}, tao{k}*A{k}'*Z{k};
        zeros(n), zeros(n), tao{k}*B{k}'*Z{k};
        zeros(n), zeros(n), zeros(n)];
    phi{k} = phi{k} + transpose(phi{k});
    phi{k} = phi{k} + mdiag(phi11{k}, phi22{k}, -tao{k}*Z{k});

    psi{k} = [X11{k}, X12{k}, N1{k};
        transpose(X12{k}), X22{k}, N2{k};
        transpose(N1{k}), transpose(N2{k}), Z{k}];

    % Optimization Constraints
    Fset = Fset + [X{k} >= 0] + [mdiag(P{k}, Q{k}, Z{k}, W{k}) > 0];
    Fset = Fset + [ mdiag( P{k}, Q{k}, Z{k}, -W{k}) < ...
        mdiag( p{k}*eye(n), q{k}*eye(n), z{k}*eye(n), ...
            -w{k}*eye(n) ) ];
    Fset = Fset + [ phi{k} < 0 ] + [ psi{k} > 0 ];
    Fset = Fset + [ p{k} + tao{k}*q{k} + 0.5*tao{k}^2*z{k} ...
        - t*w{k} < 0 ];
end

```

Program A.5 check_solution.m

```

prob = 0;
for k = 1:sys_num
    if checkSD(mdiag(P{k}, Q{k}, Z{k}, W{k}, X{k}), 'n' );

```

```

        prob = 1;
    end
    if checkSD(psi{k}, 'n')
        prob = 1;
    end
    if checkSD(phi{k}, 'p')
        prob = 1;
    end
    if checkSD(mdiag(P{k} - p{k}*eye(n), Q{k} - q{k}*eye(n), ...
        Z{k} - z{k}*eye(n), -W{k} - w{k}*eye(n)), 'p')
        prob = 1;
    end
    if checkSD(p{k} + tao{k}*q{k} + 0.5*tao{k}^2*z{k} - t*w{k}, 'p')
        prob = 1;
    end
    if sol.problem ~= 0
        prob = 1;
    end
end
end

```

A.3 Yöntem II ile Kararlılık Analizi için Matlab Kodları

Program A.6 anaprogram.m

```

clear all
clc
%Selection of Solver
ops = sdpsettings('solver','sedumi','verbose',0,'warning',0);
warning('off','YALMIP:strict');
K = 1; tol = 1e-3;

T_upper = 0.4;
T_lower = 0.2;
T = T_upper;
define_systems
defineLMIs;
sol = solvesdp(Fset, [],ops);
checkEig;
if prob ~= 0
    fprintf('%3.10f is NOT a feasible dwell time \n', T);
    T_upper = T;
    display('Looking for a upper bound.')
end

while prob ~= 0
    T = 2*T_upper;
    T_upper = T;
    fprintf('Trying %3.10f \n', T);
    defineLMIs;
    sol = solvesdp(Fset, [],ops);
    checkEig;
end

while T_upper - T_lower > tol
    T = (T_upper + T_lower) / 2;
    % sysdefn;
    defineLMIs;
    sol = solvesdp(Fset, [],ops);

```



```

checkEig;
if prob == 0
    fprintf('%3.10f is a feasible dwell time \n', T);
    T_upper = T;
    T_works = T;
    P_works = P;
else
    fprintf('%3.10f is NOT a feasible dwell time \n', T);
    T_lower = T;
end
end
fprintf('\n*****\n');
fprintf('Resulting dwell time: %3.3f\n', T_works);

```

Program A.7 defineLMIs.m

```

n = size(A0{1},1);
Fset = [];
delta = T/K;
for i = 1:sys_num
    % First define K+1 many P's for K segments
    for k = 1:K+1
        P{i,k} = sdpvar(n);
        Q{i,k} = sdpvar(n);
        Z{i,k} = sdpvar(n);
        X11{i,k} = sdpvar(n);
        X12{i,k} = sdpvar(n);
        X22{i,k} = sdpvar(n);
        X{i,k} = [X11{i,k} , X12{i,k};
                  transpose(X12{i,k}), X22{i,k}];
        N1{i,k} = sdpvar(n,n, 'full'); N2{i,k} = sdpvar(n,n, 'full');
        psi{i,k} = [zeros(n), X12{i,k} , N1{i,k};
                    zeros(n), zeros(n) , N2{i,k};
                    zeros(n), zeros(n) , zeros(n)];

        psi{i,k} = psi{i,k} + transpose(psi{i,k}) + ...
                    mdiag(X11{i,k}, X22{i,k}, Z{i,k});
    end
    for k = 1:K
        phi111{i,k} = (P{i,k+1} - P{i,k})/delta + P{i,k}*A0{i} + ...
                      A0{i}'*P{i,k} + N1{i,k} + N1{i,k}' + Q{i,k} + ...
                      tau*(Q{i,k+1} - Q{i,k})/delta + tau*X11{i,k};
        phi112{i,k} = (P{i,k+1} - P{i,k})/delta + P{i,k+1}*A0{i} + ...
                      A0{i}'*P{i,k+1}+N1{i,k+1}+N1{i,k+1}'+Q{i,k+1}+...
                      tau*(Q{i,k+1} - Q{i,k})/delta + tau*X11{i,k+1};
        phi121{i,k} = P{i,k}*A1{i} - N1{i,k} + N2{i,k}'
                      + tau*X12{i,k};
        phi122{i,k} = P{i,k+1}*A1{i} - N1{i,k+1} + N2{i,k+1}' ...
                      + tau*X12{i,k+1};
        phi221{i,k} = -N2{i,k} - N2{i,k}' - (1-d)*Q{i,k} ...
                      + tau/delta*(Q{i,k+1}
                      - Q{i,k}) + tau*X22{i,k};
        phi222{i,k} = -N2{i,k+1} - N2{i,k+1}' - (1-d)*Q{i,k+1}
                      + tau/delta*(Q{i,k+1} - Q{i,k}) + tau*X22{i,k+1};
        phi131{i,k} = A0{i}'*(tau*Z{i,k} + tau^2/2/delta*(Z{i,k+1} ...
                      - Z{i,k}));
        phi231{i,k} = A1{i}'*(tau*Z{i,k} + ...

```

```

        tau^2/2/delta*(Z{i,k+1}- Z{i,k}));
phi132{i,k} = A0{i}'*(tau*Z{i,k+1} ...
        + tau^2/2/delta*(Z{i,k+1}- Z{i,k}));
phi232{i,k} = A1{i}'*(tau*Z{i,k+1} ...
        + tau^2/2/delta*(Z{i,k+1}- Z{i,k}));
phi331{i,k} = -1*(tau*Z{i,k} ...
        + tau^2/2/delta*(Z{i,k+1}- Z{i,k}));
phi332{i,k} = -1*(tau*Z{i,k+1} ...
        + tau^2/2/delta*(Z{i,k+1}- Z{i,k}));
%Define phil{i,k}
phil{i,k} = [zeros(n), phi121{i,k}, phi131{i,k};
            zeros(n), zeros(n), phi231{i,k};
            zeros(n), zeros(n), zeros(n)];

phil{i,k} = phil{i,k} + transpose(phil{i,k}) + ...
            mdiag(phi111{i,k}, phi221{i,k}, phi331{i,k});

%Define phi2{i,k}
phi2{i,k} = [zeros(n), phi122{i,k}, phi132{i,k};
            zeros(n), zeros(n), phi232{i,k};
            zeros(n), zeros(n), zeros(n)];

phi2{i,k} = phi2{i,k} + transpose(phi2{i,k}) + ...
            mdiag(phi112{i,k}, phi222{i,k}, phi332{i,k});

end
phi111{i,K+1} = P{i,K+1}*A0{i} + A0{i}'*P{i,K+1} + N1{i,K+1} + ...
            N1{i,K+1}' + Q{i, K+1} + tau*X11{i,K+1};
phi121{i,K+1} = P{i,K+1}*A1{i} - N1{i,K+1} + N2{i,K+1}' ...
            + tau*X12{i,K+1};
phi221{i,K+1} = -N2{i,K+1} - N2{i,K+1}' - (1-d)*Q{i,K+1} ...
            + tau*X22{i,K+1};
phi331{i,K+1} = -tau*Z{i,K+1};

phi{i} = [zeros(n), phi121{i,K+1}, tau*A0{i}'*Z{i,K+1};
        zeros(n), zeros(n), tau*A1{i}'*Z{i,K+1};
        zeros(n), zeros(n), zeros(n)];
phi{i} = phi{i} + transpose(phi{i}) + ...
        mdiag(phi111{i,K+1}, phi221{i,K+1}, phi331{i,K+1});

lyavars{i} = [];
for k = 1:K
    Fset = Fset + [phil{i,k} < 0] + [phi2{i,k} < 0];
    Fset = Fset + [psi{i,k} > 0];
    Fset = Fset + [mdiag(Q{i,k+1}, Z{i,k+1}) > ...
        mdiag(Q{i,k}, Z{i,k})];
    lyavars{i} = mdiag(lyavars{i}, P{i,k}, Q{i,k}, Z{i,k}, X{i,k});
end
Fset = Fset + [psi{i,K+1} > 0];
lyavars{i} = mdiag(lyavars{i}, P{i,K+1}, Q{i,K+1}, Z{i,K+1}, ...
    X{i,K+1});
Fset = Fset + [lyavars{i} > 0] + [phi{i} < 0];
end

for i = 1:sys_num
    for j = 1:sys_num
        if j ~= i
            Fset = Fset + [P{i,K+1} - P{j,1} > 0];

```

```

        Fset = Fset + [Q{i,K+1} - Q{j,1}
                      - tau/delta*(Q{j,2} - Q{j,1}) >= 0];
        Fset = Fset + [Z{i,K+1} - Z{j,1}
                      - tau/delta*(Z{j,2} - Z{j,1}) >= 0];
    end
end
end

```

Program A.8 checkEig.m

```

prob = 0;
for i = 1:sys_num
    if (checkSD(lyavars{i}, 'p') == 0)
        % display('P,Q,Z are not positive!');
        prob = 1;
    end

    if (checkSD(psi{i}, 'p') == 0)
        % display('psi are not positive!');
        prob = 1;
    end

    if (checkSD(phi{i}, 'n') == 0)
        % display('phi are not negative!');
        prob = 1;
    end

    for j = 1:sys_num
        if j ~= i
            if (checkSD(P{i,K+1} - P{j,1}, 'p') == 0)
                % display('P is not decreasing');
                prob = 1;
            end
            if (checkSD(Q{i,K+1} - Q{j,1}
                - tau/delta*(Q{j,2} - Q{j,1}), 'p') == 0)
                % display('P is not decreasing');
                prob = 1;
            end
            if (checkSD(Z{i,K+1} - Z{j,1}
                - tau/delta*(Z{j,2} - Z{j,1}), 'p') == 0)
                % display('P is not decreasing');
                prob = 1;
            end
        end
    end

    for k = 1:K
        if (checkSD( mdiag(Q{i,k+1}, Z{i,k+1}) - ...
            mdiag(Q{i,k}, Z{i,k}), 'p') == 0)
            prob = 1;
        end
        if (checkSD( X{i,k}, 'p') == 0)
            prob = 1;
        end
        if (checkSD(phi1{i,k}, 'n') == 0)
            % display('phil are not negative!');
            prob = 1;
        end
    end
end

```

```

end
if (checkSD(phi2{i,k}, 'n') == 0)
%     display('phil are not negative!');
    prob = 1;
end
if (checkSD(psi{i,k}, 'p') == 0)
%     display('phil are not negative!');
    prob = 1;
end
%     if (checkSD(psi2{i,k}, 'p') == 0)
% %         display('phil are not negative!');
%         prob = 1;
%     end
end
if (checkSD( X{i,K+1}, 'p') == 0)
    prob = 1;
end
if (checkSD(psi{i,K+1}, 'p') == 0)
%     display('phil are not negative!');
    prob = 1;
end

%     if sol.problem ~= 0
%         prob = 1;
%     end
end

```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ahmet Taha KORU
Doğum Tarihi ve Yeri : 17.02.1987 / ANKARA
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ahtakoru@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Elektrik - Elektronik Müh.	Bilkent Üniversitesi	2012
Lisans	Elektrik - Elektronik Müh.	Bilkent Üniversitesi	2009
Lise	Matematik - Fen	Hacı Ömer Tarman A.L.	2005

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011 -	Yıldız Teknik Üni. / Mekatronik Müh.	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Koru, A. T., Delibaşı, A. ve Özbay, H., (2016). "Dwell Time Based Stabilization of Switched Delay Systems Using Free-Weighting Matrices", International Journal of Control, (kabul edildi), 1-18.
2. Kaya, E., Aktan, M. E., Koru, A. T. ve Akdoğan, E. (2015). "Diagnosis of Anemia in Children via Artificial Neural Network", International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering, 3(1): 24-27.
3. Liacu, B., Koru, A. T., Özbay, H., Niculescu, S. I. ve Andriot, C. (2013). "Optimizing Low-order Controllers for Haptic Systems Under Delayed Feedback", Control Engineering Practice, 21(5): 655-668.

Bildiri

1. Koru, A. T., Delibaşı, A. ve Özbay, H., (2016). "On Dwell Time Minimization for Switched Delay Systems: Time-Scheduled Lyapunov Functions", 22 - 24 June 2016, 13th IFAC Workshop on Time-Delay Systems, İstanbul.
2. Songül, G., Yalman, A., Ilginoğlu, A., Gökçe, A., Koçulu, Ö. E. C., Kırılı, A., Koru, A. T. ve Tüfekçi, C. S. (2015). "Model Picosatellite Design for Energy Harvesting and Telemetry Data Transmission Through RF Communication", IEEE 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST), 16-19 June 2015, İstanbul.
3. Koru, A. T., Delibaşı, A. ve Özbay, H., (2014). "On Dwell Time Minimization for Switched Delay Systems: Free-weighting Matrices Method", IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC), 15-17 December, Los Angeles, California,.

4. Liacu, B., Koru, A. T., Ozbay, H., Niculescu, S. I. ve Andriot, C. (2012). "Low-order Controller Design for Haptic Systems Under Delayed Feedback", 22 - 24 June 2012, 10th IFAC Workshop on Time-Delay Systems, Boston.

Kitap

1. Akdoğan, E., Demir, M.H., Aktan, M.E. ve Koru A.T., (2016). Elektrik - Elektronik Laboratuvarı Deney Kitabı, 1. Basım, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.

Proje

1. Siberetik Rehabilitasyon Destek Sistemi, TÜBİTAK PROJESİ, Bursiyer, 25/07/2012 - 25/10/2015 (ULUSAL).

Ödülleri

1. Koru, A.T., Liacu, B., (2012). "Best Student Contribution Award", 10th IFAC Time-Delay Systems Workshop, Boston.