



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2- boyutlu rastgele alanların kaf..

Doktora Tezi

Ünal Küçük



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**2-BOYUTLU RASGELE ALANLARIN
KAFES SÜZGEÇLER YARDIMIYLA
ÇEYREK-DÜZLEM ÖZBAĞLANIMLI
MODELENMESİ**

88

Elektronik ve Haberleşme Yük. Müh. Ünal KÜÇÜK

**F.B.E. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı
Haberleşme Bilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet H. Kayran

İSTANBUL, 1995

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

R 373
Kot :.....15.....
Alındığı Yer : F.B. Enstitüsü.....
Tarih :...2.10.1996.....
Fatura :.....
Fiyatı : 200 Bin.....
Ayniyat No :...1/7.....
Kayıt No :...52651.....
UDC :.....
Ek :.....

Y.T.Ü.
KÜTÜPHANE DOK. DAİRE BAŞKANLIĞI



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

XIV.185

**2-BOYUTLU RASGELE ALANLARIN
KAFES SÜZGEÇLER YARDIMIYLA
ÇEYREK-DÜZLEM ÖZBAĞLANIMLI
MODELLENMESİ**

Y. T. O.
KÜTÜPHANE DOK. DAL. BAŞKANLIĞI

Elektronik ve Haberleşme Yük. Müh. Ünal KÜÇÜK

F.B.E. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı
Haberleşme Bilim Dalında
Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet H. Kayran

İSTANBUL, 1995



İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	xii
TÜRKÇE ÖZET	xiii
İNGİLİZCE ÖZET	xiv
1. GENEL GİRİŞ	1
1.1 Giriş	1
1.2 Çok boyutlu işaret işleme ve 2-B kafes süzgeçler üzerine yapılan çalışmalar	3
1.3 Tezin içeriği ve katkıları	6
2. DOĞRUSAL ÖNGÖRÜ: TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1 Giriş	7
2.2 Doğrusal süzgeç problemi ve doğrusal öngörü	7
2.2.1 Normal eşitlikler, ileri ve geri yönlü öngörü	9
2.2.2 1-B Boşluklu işlevler, Levinson ve Schur Algoritmaları, kafes süzgeçler	14
2.2.3 1-B enküçük-kareler kafes süzgeç algoritması: Geometrik yaklaşım	21
2.2.3.1 Örnek uzayı	21
2.2.3.2 Dik izdüşüm	21
2.2.3.3 Geçmiş gözlemler uzayı	22
2.2.3.4 İleri ve geri yönlü öngörü hataları	22
2.2.3.5 Alt uzayların ayrıştırılması	23
2.2.3.6 Kafes yinelemeleri:derece güncelleştirme	24
2.3 2-B doğrusal öngörü	26

2.3.1	İleri- ve geri-yönlü öngörü	26
2.3.2	İleri-yönlü öngörücü ve öngörü hata süzgeci	29
2.3.3	Geri-yönlü öngörücüler ve geri-yönlü öngörü hata süzgeçleri	30
2.3.4	2-B Boşluklanmış işlevler	34
2.4	Üç parametre kafes süzgeç modeli ve dört alana dayalı diğer modeller ..	40
2.4.1	Üç-parametrelî kafes süzgeç modeli (ÜPKS)	40
2.4.2	Genişletilmiş kafes süzgeç modelleri	45
2.4.3	Altı-parametrelî kafes süzgeç modeli (APKS)	50
2.4.4	Geliştirilmiş kafes süzgeç modeli (GKS)	52
3.	2-B SCHUR ALGORİTMASI	56
3.1	Giriş	56
3.2	1. Derece	57
3.3	2. Derece	60
3.4	3. Derece	67
3.5	N. Derece	76
4.	2-BOYUTLU YİNELEMELİ ENKÜÇÜK-KARELER ALGORİTMASI	81
4.1	Giriş	81
4.2	Temel kavramlar	81
4.2.1	2-B izdüşüm	81
4.2.2	Örnek uzayı	83
4.2.3	Dik izdüşüm	83
4.2.4	Geçmiş gözlemler uzayı	84
4.2.5	İleri ve geri yönlü öngörü hataları	85
4.2.6	Alt uzayların dik ayrıştırılması	87
4.3	Derece güncelleştirme yinelemeleri	88
4.3.1	Birinci derece	88

4.3.2 İkinci derece	92
4.3.3 Yardımcı hata alanlarının güncelleştirilmesi	102
4.3.4 Üçüncü derece	105
4.3.5 N. derece	111
5. 2-B KAFES SÜZGEÇ PARAMETRELERİ VE AR GEÇİŞ İŞLEVİ ARASINDAKİ İLİŞKİ	118
6. 3-B SCHUR ALGORİTMASI	123
6.1 Giriş	123
6.2 Birinci derece	128
6.3 İkinci derece	129
6.4 İkinci derece yardımcı boşluklanmış işlevlerin güncelleştirilmesi	138
6.5 Üçüncü derece	138
6.6 Üçüncü derece yardımcı boşluklanmış işlevlerin güncelleştirilmesi	143
6.7 N. derece	144
7. DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRMA	147
7.1 Giriş	147
7.2 2-B AR modelleme üzerine bir örnek	147
7.3 Diğer yöntemlerle karşılaştırma	164
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	177
8.1 Sonuçlar	177
8.2 Öneriler	179
KAYNAKLAR	180

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 (a) İleri-yönlü öngörü, (b) Geri yönlü öngörü. Taralı alan öngörü bölgesini göstermektedir.

Şekil 2.2 İleri-yönlü öngörünün enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi

Şekil 2.3 İleri-yönlü öngörü hata süzgecinin enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi

Şekil 2.4 İleri-yönlü öngörü ve Geri-yönlü öngörü hata süzgeci arasındaki ilişki

Şekil 2.5 Geri-yönlü öngörünün enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi

TEŞEKKÜR

Bu tezi gerçekleştirmemde büyük katkıları bulunan değerli hocam Prof. Dr. Ahmet H. Kayran'a sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca her zaman destek ve tavsiyelerini gördüğüm sayın hocam Prof. Metin Yücel'e ve tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Doktora tezim süresince beni her zaman destekleyen ve motive eden sevgili eşim Reyhan Küçük'e ve bana neşe kaynağı olan kızıma sonsuz teşekkürler.

Şekil 2.10 İleri- ve geri-yönlü yansıtılma katsayılarının geometrik gösterimi

Şekil 2.11 2-B uzamda, eksen $x(n_1, n_2)$ parantez (n_1, n_2) koordinatlarında verilen yükseklik $z(n_1, n_2)$ ve (n_1, n_2) noktasındaki değeri göstermektedir.

Şekil 2.12 3-B yinelenen katmanlı sistemlere ilişkin çeşitli destek bölgeleri örnekleri. (a) Çeyrek-düzen, (b) Asimetrik yarı-düzen, (c) Kama destekli yapılar.

Şekil 2.13 2-B'ın bir boyutlu geometrik değerler ve yinelenen değeri.

Şekil 2.14 1- ve 2-B'ın öngörülerinin yinelenen yönleri (a) 1-B'ın öngörü, (b) 2-B'ın öngörü. Burada diğer yinelenen yönleri göstermektedir.

Şekil 2.15 İleri- ve geri-yönlü öngörü hata süzgeçlerinin ilişki destek bölgeleri. (a) İleri-yönlü öngörü hata süzgeci, (b) İkinci-çeyrek düzlem öngörücü, (c) İkinci-çeyrek düzlem öngörücü, (d) Dördüncü-çeyrek düzlem öngörücü destek bölgeleri.

Şekil 2.16 N- boyutlu 2-B boyutlu değerler. (a) $z^{(N)}(n_1, n_2)$, (b) $z^{(N)}(n_1, n_2)$, (c) $z^{(N)}(n_1, n_2)$, (d) $z^{(N)}(n_1, n_2)$



ŞEKİL LİSTESİ

- Şekil 2.1 (a) İleri-yönlü öngörü, (b) Geri yönlü öngörü. Taralı alan öngörü bölgesini göstermektedir.
- Şekil 2.2 İleri-yönlü öngörücünün enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi
- Şekil 2.3 İleri-yönlü öngörü hata süzgecinin enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi
- Şekil 2.4 İleri-yönlü öngörücü ve İleri-yönlü öngörü hata süzgeci arasındaki ilişki
- Şekil 2.5 Geri-yönlü öngörü hata süzgecinin enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi
- Şekil 2.6 N. dereceden AR modelin tanımlanmasında kullanılan eşdeğer parametreler. Her bir parametre kümesi, çeşitli algoritmalarla bir diğerinden elde edilebilir.
- Şekil 2.7 $N=3,4$ ve P için N. derece 1-B boşluklu işlevler
- Şekil 2.8 Ters çevrilmiş ve ötelenmiş boşluklu işlev.
- Şekil 2.9 1-B Schur algoritması için kafes süzgeç yapısı. Giriş $R(n)$ özilişki işlevi, çıkışlar ileri- ve geri-yönlü boşluklu işlevlerdir.
- Şekil 2.10 İleri- ve geri-yönlü yenileştirmelerin geometrik gösterilimi
- Şekil 2.11 2-B uzamsal ayırık $x(n_1, n_2)$ işareti. (n_1, n_2) koordinatlarında verilen yükseklik $x(n_1, n_2)$ 'nin (n_1, n_2) noktasındaki değerini göstermektedir.
- Şekil 2.12 2-B yinelemeli hesaplanabilir sistemlere ilişkin çeşitli destek bölgeleri örnekleri. (a) Çeyrek-düzlem, (b) Asimetrik yarı-düzlem, (c) Kama destekli sistem.
- Şekil 2.13 2-B'lu bir işaretin geçmiş, gelecekteki değerleri ve şimdiki değeri.
- Şekil 2.14 1- ve 2-B'lu öngörücülerin yineleme yönleri (a) 1-B'lu öngörü, (b) 2-B'lu öngörü. Burada oklar yineleme yönlerini göstermektedir.
- Şekil 2.15 İleri- ve geri-yönlü öngörü hata süzgeçlerine ilişkin destek bölgeleri. (a) Birinci-çeyrek düzlem öngörücü, (b) ikinci-çeyrek düzlem öngörücü, (c) üçüncü-çeyrek düzlem öngörücü, (d) dördüncü-çeyrek düzlem öngörücü destek bölgeleri.
- Şekil 2.16 N. derece 2-B boşluklu işlevler. (a) $g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$, (b) $g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$, (c) $\tilde{g}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$, (d) $\tilde{g}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$

- Şekil 2.17 2-B'lu üç-parametrelili kafes süzgeçte öngörü hata alanlarının üretilmesi (Analiz modeli)
- Şekil 2.18 1-B'ta derece güncelleştirme. Üçgenler yeni tanımlanan parametreleri, içi dolu daireler ise önceki derecelerde tanımlanan parametreleri göstermektedir.
- Şekil 2.19 2-B'ta derece güncelleştirme. (a) Birinci derece, (b) ikinci derece, (c) Üçüncü derece, (d) N. derece. Şekilde, üçgenler yeni tanımlanan parametreleri, içi dolu daireler ise önceki derecelerde tanımlanan parametreleri göstermektedir.
- Şekil 2.20 Üç-parametrelili kafes süzgeçin sistem destek bölgesi parametreleri ile ilişkisi içi dolu daireler ilişkili parametreleri, içi boş daireler ise belirlenemeyen parametreleri göstermektedir.
- Şekil 2.21 KYGK süzgeçte, Öngörü hata alanlarının üretilmesi
- Şekil 2.22 DYGK süzgeçte, Öngörü hata alanlarının üretilmesi
- Şekil 2.23 m. derece için KYGK ve DYGK süzgeç te öngörü hata alanlarının doğrudal birleşimi. Şekilde KYGK için $i=1, j=1$ ve DYGK için $i=1$ ve $j=0$ dır. Burada $m \geq 2$ dir.
- Şekil 2.24 KYGK ve DYGK için yineleme yönleri (a) KYGK, (b) DYGK.
- Şekil 2.25 Altı-parametrelili kafes süzgeç (APKS) yapısında öngörü hata alanlarının üretilmesi
- Şekil 2.26 GKS yapısında öngörü hata alanlarının üretilmesi
- Şekil 2.27 GKS için 3. derecede öngörü hata alanlarının doğrusal birleşimi
- Şekil 3.1 N-1. derece güncelleştirilmiş boşluklu işlevleri kullanarak, N. derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevleri elde etmek için gerekli boşluk koşulları. (a) Birinci-çeyrek düzlem, (b) İkinci-çeyrek düzlem.
- Şekil 3.2 $g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'yi elde etmek için gerekli boşluk koşulları. (a) 1. derece birinci-çeyrek düzlem boşluklu işlev $g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'ye ilişkin gerekli boşluk koşulları bölgesi, (b) 1. derece ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlev $g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'ye ilişkin gerekli boşluk koşulları bölgesi.
- Şekil 3.3 Birinci derece boşluklu işlevlerin blok arağılantısı
- Şekil 3.4 İkinci derece boşluklu işlevlere ilişkin boşluklar. Burada taralı alan gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.



- Şekil 3.5 Birinci dereceden sonra tanımlanan, İkinci derece yardımcı boşluklu işlevler. Taralı alan ikinci derece yardımcı boşluklu işlevlerin güncelleştirilmesinde gerekli boşluk bölgelerini göstermektedir.
- Şekil 3.6 İkinci derece boşluklu işlevlerin iç blok ara bağlantısı. Burada $\theta_1^{(n)}$ birinci derecede Şekil 3.3 te tanımlanmıştır.
- Şekil 3.7 Üçüncü derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevler. (a) $g_{FQ}^{(3)}(n_1, n_2)$, (b) $g_{SQ}^{(3)}(n_1, n_2)$. Taralı alan 3. derece boşluklu işlevleri elde etmek için gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.
- Şekil 3.8 Birinci dereceden sonra tanımlanan üçüncü derece ileri-yönlü boşluklu işlevler. Taralı alanda 8 adet yardımcı boşluk koşulu vardır.
- Şekil 3.9 İkinci dereceden sonra tanımlanan üçüncü derece ileri-yönlü boşluklu işlevler. Taralı alanda 8 adet yardımcı boşluk koşulu vardır.
- Şekil 3.10 İlk üç dereceye ilişkin blok diyagram
- Şekil 3.11 Üçüncü derece boşluklu işlevlerin iç blok arabağlantısı. Burada $\theta_2^{(n)}$ ikinci derecede Şekil 3.6 da tanımlanmıştır.
- Şekil 3.12 Şekil 3.10 da görülen T bloğunun iç bağlantısı.
- Şekil 3.13 j. dereceden sonra tanımlanmış n. derece yardımcı boşluklu işlevler, $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Taralı alanda $3N - 1$ yardımcı boşluk koşulu vardır.
- Şekil 4.1 $|x\rangle_{T,T}$ nin $\mathcal{H}_T$ de tanımlı $|y\rangle_{T,T}$ alt uzayı üzerine dik izdüşümü.
- Şekil 4.2 çeyrek düzlem öngörü hata vektörlerine ilişkin destek bölgeleri (a) $|e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T}$, (b) $|e_{10}^{(N)}\rangle_{T,T}$, (c) $|\tilde{e}_{00}^{(N)}\rangle_{T,T}$, (d) $|\tilde{e}_{10}^{(N)}\rangle_{T,T}$
- Şekil 4.3 Enküçük-kareler kafes süzgeç algoritması ile tanımlanam kafes süzgeç yapısının birinci kata ilişkin iç bağlantısı
- Şekil 4.4 2. derece çeyrek-düzlem bir AR alana ilişkin model destek bölgesi. Üçgenlerle belirtilen noktalar, $M_{D,1}^{(1)}$ hata uzayında tanımlı çeyrek-düzlem öngörü hata alanları kullanılarak elde edilen kafes süzgeç parametrelerinin temsil ettiği noktaları göstermektedir. Kareler ise yardımcı hata alanları kullanılarak elde edilen kafes süzgeç parametreleri ile temsil edilen noktaları göstermektedir.
- Şekil 4.5 Birinci seçime göre tanımlanan yardımcı hata alanlarının yineleme yönleri. Oklar yineleme yönleri ve ikinci derece için yardımcı hata alanları ile belirlenen kafes süzgeç parametrelerinin ilişkili olduğu noktaları göstermektedir.

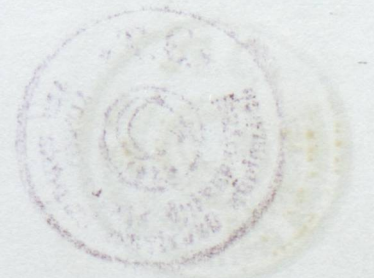


- Şekil 4.6 İkinci şekildeki seçime göre tanımlanan yardımcı hata alanlarının yineleme yönleri. Oklar yineleme yönleri ve ikinci derece için yardımcı hata alanları ile belirlenen kafes süzgeç parametrelerinin ilişkili olduğu noktaları göstermektedir.
- Şekil 4.7 İkinci derece ileri-yönlü yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.
- Şekil 4.8 İkinci derece geri-yönlü yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.
- Şekil 4.9 İkinci derece kafes süzgeç yapısı iç ara bağlantısı Burada $\theta_1^{(n)}$ birinci derecede Şekil 4.3 te tanımlanmıştır.
- Şekil 4.10 Üçüncü derece çeyrek-düzlem hata alanlarının destek bölgeleri. (a) $|e_{00}^{(3)}\rangle_{T,T}$, (b) $|e_{10}^{(3)}\rangle_{T,T}$, (c) $|\tilde{e}_{00}^{(3)}\rangle_{T,T}$, (d) $|\tilde{e}_{10}^{(3)}\rangle_{T,T}$. Destek bölgesinde 15 adet nokta vardır.
- Şekil 4.11 Üçüncü derece ileri-yönlü yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.
- Şekil 4.12 Üçüncü derece kafes süzgeç yapısı iç ara bağlantısı Burada $\theta_2^{(n)}$ ikinci derecede Şekil 4.9 da tanımlanmıştır.
- Şekil 4.13 İlk üç dereceye ilişkin kafes süzgeç yapısı.
- Şekil 4.14 T bloğunun iç bağlantısı
- Şekil 4.15 j. dereceden itibaren tanımlanmış, N. derece yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.
- Şekil 6.1 N. derece 3-B birinci-kübik uzay boşluklu işlev $g_{abc}^{(n)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan boşluk bölgesini göstermektedir $\square : g_{000}^{(n)}(0, 0, 0)$ dır.
- Şekil 6.2 Birinci derece kübik-uzay boşluklu işlevler. (a) $g_{000}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{100}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{010}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{110}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (e) $g_{111}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (f) $g_{101}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (g) $g_{011}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (h) $g_{001}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Birinci derecede yedi adet boşluk koşulu vardır.
- Şekil 6.3 İkinci derece birinci-kübik uzay boşluklu işlev $g_{000}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan 1. derece boşluklu işlevlerden 2. derece $g_{000}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$ boşluklu işlevini elde etmek için gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Taralı alanda 25 adet boşluk koşulu vardır.
- Şekil 6.4 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,3}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.



- Şekil 6.5 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,5}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,6}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,7}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,8}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.
- Şekil 6.6 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,9}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,10}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,11}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,12}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.
- Şekil 6.7 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,13}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,14}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,15}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,16}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.
- Şekil 6.8 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,17}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,18}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.
- Şekil 6.9 Üçüncü derece birinci-kübik uzay boşluklu işlev $g_{000}^{(3)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Taralı alanda 55 adet boşluk koşulu vardır.
- Şekil 6.10 Üçüncü dereceden itibaren tanımlanan ikincil boşluklu işlev $g_{b_{11,1}}^{(3)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Taralı alanda 20 adet boşluk koşulu vardır.
- Şekil 6.11 Üçüncü dereceden itibaren tanımlanan ikincil boşluklu işlev $g_{b_{11,2}}^{(3)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Taralı alanda 20 adet boşluk koşulu vardır.
- Şekil 7.1 Birinci derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.2 İkinci derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.3 Üçüncü derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.4 Birinci derece 2-B Schur algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.5 İkinci derece 2-B Schur algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.6 Üçüncü derece 2-B Schur algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

- Şekil 7.7 birinci derece 2-B yinelemeli enküçük-kareler (YEK) kafes süzgeç algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.8 İkinci derece 2-B yinelemeli enküçük-kareler (YEK) kafes süzgeç algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.9 Üçüncü derece 2-B yinelemeli enküçük-kareler (YEK) kafes süzgeç algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.10 Üçüncü derece Orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.11 Üçüncü derece ÜPKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.12 Üçüncü derece APKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.13 Üçüncü derece KYGK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.14 Üçüncü derece DYGK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.15 Üçüncü derece GKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.16 Üçüncü derece 2-B YEK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.17 Üçüncü derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrilerinin yarı-düzlem için detaylı çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.18 Üçüncü derece GKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrilerinin yarı-düzlem için detaylı çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.
- Şekil 7.18 Üçüncü derece 2-B YEK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrilerinin yarı-düzlem için detaylı çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1 Geciktirme blokları

Tablo 4.1 Şekil 4.13 te görülen geciktirme blokları

Tablo 7.1 Örnek özilişkiler

Tablo 7.2 Kafes süzgeç parametreleri

Tablo 7.3 Kafes süzgeç parametreleri

Tablo 7.4 Yardımcı kafes süzgeç parametreleri

Tablo 7.5 Üçüncü derece birinci-çeyrek düzlem boşluklu işlev

Tablo 7.6 2-B YEK kafes süzgeç algoritmasıyla elde edilen kafes süzgeç parametreleri

Tablo 7.7 2-B YEK kafes süzgeç algoritmasıyla elde edilen kafes süzgeç parametreleri

Tablo 7.8 2-B YEK kafes süzgeç algoritmasıyla elde edilen yardımcı kafes süzgeç parametreleri

Tablo 7.9 Itakura LPC uzaklık ölçütü ile karşılaştırma

Tablo 7.10 Fark matrislerinin normu

Tablo 7.11 Itakura LPC uzaklık ölçütü ile karşılaştırma

Tablo 7.12 Fark matrislerinin normu



ÖZET

İki-Boyutlu (2-B) AR alanların çeyrek-düzlem modellenmesinde en temel kafes süzgeç yapılarından biri, dört öngörü hata alanına dayalı üç-parametrelilik kafes süzgeç yapısıdır. Burada, biri ileri-, diğer üçü geri-yönlü olmak üzere dört öngörü hata alanı bir üst dereceyi oluşturmak için bir kafes süzgeç yapısında birleştirilir. Bu kafes süzgeç yapısı, her bir derecede üç adet yansıma katsayısı tanımlar. Ancak, Bir-boyutlu (1-B) kafes süzgeç modellemede süzgeç derecesinin bir derece artırılması model destek bölgesine yalnızca bir yeni parametre eklerken, 2-B'ta $O(N)$ yeni parametre eklemelidir. Burada N model derecesidir. Bu nedenle, her bir derece artışta model destek bölgesinde sabit sayıda parametre tanımlayan üç-parametrelilik kafes süzgeç, tüm 2-B AR alanları modelleyebilmek için gerekli parametre sayısını sağlamaz. Daha da önemlisi, diklik özelliğini sağlamadığından aynı sayıda parametre kullanılarak daha iyi süzgeçler elde edilebilir.

Bu tezde, 2-B çeyrek düzlem AR alanları tam olarak modelleyebilen yeni bir 2-B Schur algoritması 1-B'un doğal uzantısı olarak gerçekleştirilmiştir. Verilen, veri alanına ilişkin, özilişki örneklerinden başlanarak dört adet çeyrek-düzlem boşluklu işlev üretilir. Bu boşluklu işlevlerin doğrusal birleşimi, boşluk koşullarını sağlamak ve birinci derece 2-B kafes süzgeç yansıma parametrelerini elde etmek için kullanılır. Artan derecelerde, model destek bölgesinde artan sayıdaki AR parametreleri öngörebilmek için, yansıma parametrelerinin sayısı artırılır. Artan sayıdaki yansıma parametrelerini belirleyebilmek için birinci dereceden sonra her bir derecede, bir başlangıç koşuluna göre uygun olarak belirlenmiş yardımcı boşluklu işlevler tanımlanır.

Aynı kafes süzgeç yapısı, 2-B Schur algoritmasına alternatif olarak, geometrik yaklaşımla, öngörü hata uzayı üzerinde izdüşüm işlemleri kullanılarak yeniden elde edilmiştir. Elde edilen yinelemeli enküçük-kareler kafes süzgeç algoritması, 2-B Schur algoritmasının aksine doğrudan veri örnekleri ile çalıştığından, 2-B kafes süzgeç parametrelerini daha doğru bir şekilde öngörür.

Temel teoremin geliştirilmesine ek olarak, 2-B çeyrek-düzlem geçiş işlevleri ve kafes süzgeç parametreleri arasındaki ilişki çıkarılmış ve kafes süzgeç parametrelerinden AR katsayı matrislerinin elde edilebilmesi için bir işlemler dizisi açıklanmıştır.

Geliştirilen 2-B Schur algoritması, daha yüksek boyutlardaki uygulamalar için kolaylıkla istenilen boyuta genişletilebilir. Bunu göstermek üzere, 2-B Schur algoritması 3-B genişletilerek, 3-B schur algoritması elde edilmiştir.

2-B Schur ve yinelemeli enküçük-kareler (2-B YEK) algoritmalarının doğruluğu bilgisayar benzetimleri ile kanıtlanmış ve 2-B algoritmasının başarımı literatürdeki diğer dört alanlı algoritmalar ile karşılaştırılarak daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.



ABSTRACT

One of the basic lattice filter structure for quarter-plane modeling of 2-D AR fields is three-parametre lattice filter (TPLF). Three-parameter lattice filter is based on four quarter-plane prediction error fields namely one forward and three backward prediction error fields. The linear combinations of these fields defines a single lattice filter structure and are used to define and calculate the lattice filter parameters, also called reflection coefficients, of the next stage. Although an order update in a 1-D lattice filter introduces only one new point into the model support, an order update in a 2-D lattice filter must introduce $O(N)$ new points into the model support, where N is the current model order. Three-parameter lattice filter defines three lattice parameters at each stage. For this reason, TPLF lacks the sufficient number of parameters to represent all classes of 2-D AR fields. More importantly, it lacks the property of orthogonality, so that the cascading of stages do not lead to an optimum filter and better filters are possible using equivalent number of parameters.

In this thesis, a novel 2-D Schur algorithm is developed as a natural extension of 1-D Schur algorithm. The lattice filter structure obtained can represent all classes of 2-D AR fields. Starting with a given 2-D autocorrelation samples, four quarter-plane gapped functions are generated. Their linear combination is used to satisfy the gap conditions and calculate the 2-D lattice parameter factors for the first stage. In order to determine the growing number of 2-D reflection coefficients at successive stages, appropriately defined auxiliary gapped functions are introduced after the first stage using the initial conditions.

As an alternative to 2-D Schur algorithm, same lattice structure was developed by using geometrical approach in the error fields space. Obtained 2-D RLS lattice algorithm has an advantage of using data samples directly at the input of the filter instead of correlations. This causes more accurate prediction of lattice parameter factors when exact correlation samples not known.

In addition to development the basic theory, in the thesis, a simple procedure is given to compute the AR parameter matrices of 2-D transfer functions from computed lattice parameter factors.

The developed 2-D Schur recursion algorithm can be easily extended to higher dimensions for the applications in higher dimensions. In order to demonstrate this, 2-D Schur algorithm was extended to 3-D case.

To show the validity and accuracy of the 2-D Schur and RLS lattice filter algorithms, a computer simulation was realized. The results validates the algorithms and confirms the theory. Moreover, the performance of 2-D RLS lattice filter algorithm was compared with the other four-field lattice structures and better results was obtained



1. GİRİŞ

1.1 Giriş

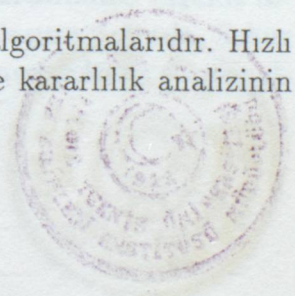
İşaretlerin sayısal olarak işlenmesi, bu yüzyılın başlarından itibaren ortaya konulmuşsa da, gelişme yalnızca teorik sonuçlarla sınırlanmıştır. Ancak yüzyılın ikinci yarısından sonra ayırık zamanlı işaretler ile çalışan veri işleme kapasitesi yüksek sayısal sistemlerin ortaya çıkmasıyla, sayısal işaret işleme modern bilim ve teknolojinin vazgeçilmez bir alanı haline gelmiştir. Günümüzde, sayısal işaret işleme jeofizik araştırmalarından, meteorolojik analizlere, çevre kirliliğinin denetlenmesinden, iletişim sistemlerine, otomasyon sistemlerinden, radyo-astronomiye, bilgi sıkıştırımdan, sonar-radar işaretlerinin işlenmesine vb. gibi bilim ve teknolojinin pek çok alanında başarıyla uygulanan dinamik bir konudur. Bu da sayısal işaret işleme üzerindeki çalışmaları oldukça yoğunlaştırmış ve bu konuda sayısız çalışma yapılmıştır.

Bugüne kadar yapılan çalışmaların ve matematiksel gerçeklerin ışığında, Sayısal işaret işleme iki ana guruba ayrılır; bir-boyutlu (1-B) ve çok-boyutlu sayısal işaret işleme. Bir-boyut ve çok-boyut arasındaki büyük farklılıklar işaret işlemeyi böyle iki guruba ayırmayı gerektirse de, çok-boyutlu işaret işlemenin temeli bir-boyuta dayanmaktadır. Bir-boyutta veri yalnızca bir değişkenin fonksiyonu iken, çok-boyutta birden fazla değişkenin işlevidir.

1-B işaret işleme üzerine yapılan yoğun çalışmalar, bu teoriyi oldukça geliştirmiş ve 1-B işaret işleme iyi bir şekilde incelenmiştir. Bununla beraber çok-boyutlu işaret işleme üzerine yapılan çalışmalar 70'li yıllardan başlar. Mikro bilgisayar ve VLSI teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak, çok-boyutlu işaret işlemenin gerçek zamanlı sistemlerde de kullanılabilmesi, çalışmaları giderek artırmış ve çok-boyutlu işaret işleme geniş ilgi alanı olan bir konu olmuştur.

1-B işaretler üzerine uygulanan bir çok işlem, çok-boyutlu işaretlere de uygulandığından çok-boyutlu işaret işleme çoğunlukla bir-boyuta dayanır. Ancak 1-B işaret işleme algoritmalarının çoğunun doğrudan doğruya çok-boyuta genelleştirilmesi çoğu durumda mümkün değildir. Bir-boyutla, çok-boyut arasında oldukça büyük farklılıklar olmasına rağmen, iki-boyuttan (2-B) çok-boyuta genelleştirme yapmak bir-boyuttan çok-boyuta genelleştirme yapmaktan çok daha kolaydır. Bu nedenle 2-B işaret işleme çok-boyutlu işaret işleme alanında özel bir öneme sahiptir.

1-B işaret işlemenin önemli konularından biri kafes süzgeç algoritmalarıdır. Hızlı yinelemeli hesaplama, düşük katsayı hassasiyeti, uygulama ve kararlılık analizinin



basitliği, oldukça iyi nümerik davranış gibi önemli üstün özelliklerinden dolayı kafes süzgeç algoritmaları bir-boyutta pek çok uygulama alanı bulmuştur. Kafes süzgeç algoritmalarına gösterilen en büyük ilgi **diklik** özelliğinden kaynaklanmaktadır (Haykin, 1986). Bu özellik süzgeç derecesinin bir derece artırılması için daha önceki katsayıların yeniden hesaplanmasını gerektirmez, bu da modüler bir yapı oluşturduğundan VLSI uygulamalarında oldukça çekicidir. 1-B kafes süzgeçlerin göstermiş oldukları bu başarı (Haykin, 1986; Friedlander, 1982; Markel et. al., 1976; Orfanidis, 1988), 2-boyuttada eşdeğer kafes süzgeç modelleri geliştirilebilmesi için yoğun çalışmalar yapılmasını sağlamıştır. Ancak 2-B ile 1-B arasındaki temel farklılıklar tek bir çözümün olmasını engellemiştir. 1-B kafes süzgeçte model derecesinin bir derece artırılması, model destek bölgesine yalnızca bir yeni nokta eklerken, 2-B kafes süzgeç modelinde model derecesinin bir derece artırılması model destek bölgesine $O(N)$ yeni nokta eklemektedir (Bose, 1990). Burada N süzgeç derecesini göstermektedir. Bu noktaların tanımlanmasında herhangi bir doğal sıra olmadığından, herbiri farklı özellikler gösteren, pek çok geçerli yapı ortaya çıkmıştır.

Bu konuda yapılan ilk ve önemli çalışmalardan biri çeyrek-düzlem destek bölgesine sahip üç-parametrelî kafes süzgeç modelidir (Parker et. al., 1984). Geliştirilen kafes süzgeç modeli, uygulamasının basitliği ve bazı istatistiksel yapılar için oldukça başarılı olmasına rağmen, her bir derece artışta yalnızca 3 yeni parametre tanımladığından, bu şekilde elde edilen kafes süzgeç tüm 2-B AR (Autoregressive / Özbağlanımlı) alanları temsil edebilecek yeterli parametre sayısını elde edemez (Bose, 1990). Bunun nedeni veri destek bölgesindeki nokta sayısına göre yansıma katsayısının azlığıdır. Buda enformasyon kayıplarına neden olur (Ertüzün et. al., 1992). Enformasyon kaybı geri yönlü hata alanlarının sayısı, dolayısıyla yansıma katsayılarının sayısı artırılarak azaltılabilir. Ertüzün ve diğerleri tarafından geliştirilen genişletilmiş kafes süzgeç yapısında enformasyon kaybı açısından iyileşme sağlanmışsada, artan derecelerde sabit sayıda yeni parametre destek bölgesine eklendiğinden bu yapı da nokta sayısı karesel olarak artan tüm 2-B AR alanları modelleyemez.

Bu tezde 2-B eksiksiz bir kafes süzgeç algoritması üzerinde çalışılmış ve kafes süzgeç algoritması 2-B AR alanların modellenmesinde ve 2-B spektral kestirimde kullanılmıştır. Yansıma katsayılarının elde edilmesinde 1-B Schur ve enküçük-kareler kafes süzgeç algoritmaları doğal bir şekilde 2-B'ye genişletilmiş ve 2-B Schur ve enküçük-kareler kafes süzgeç algoritmaları elde edilmiştir. Geliştirilen kafes süzgeç yapısı tüm 2-B çeyrek-düzlem AR alanları modeller. Yapı, Parker ve Kayran'ın üç-parametrelî çeyrek-düzlem kafes yapısına dayanmaktadır. Schur algoritmasının oluşturulmasında ilk olarak Robinson ve Treitel (Robinson et. al., 1980) tarafından tanımlanan boşluklu işlevlerden yararlanılmıştır. Artan derecelerde, karesel olarak artan sayıdaki yansıma katsayılarını elde edebilmek için literatürde ilk defa tanımlanan 2-B çeyrek-düzlem yardımcı boşluklu işlevler kullanılmıştır. Tezde, 2-B Schur algoritmasının geliştirilmesinin yanısıra, 2-B transfer fonksiyonu ile kafes süzgeç parametreleri arasındaki ilişkide incelenmiştir. Daha sonraki bölümlerde, Geometrik izdüşüm yaklaşımı ışığında, Schur algoritması ile oluşturulan kafes yapısına dayalı, 2-B enküçük-kareler kafes süzgeç al-



goritması verilmiştir. Son olarak 2-B Schur algoritmasının 3-boyuta genelleştirilmesi gösterilmiştir.

Bir sonraki kısımda çok-boyutlu işaret işleme ve 2-B kafes üzerinde bugüne kadar yapılan çalışmaların bir özeti anlatılacaktır. Son kısımda ise tezin katkıları ve içeriğinden bahsedilmektedir.

1.2 Çok-Boyutlu İşaret İşleme ve 2-B Kafes Süzgeçler Üzerinde Yapılan Çalışmalar

Çok-boyutlu işaret işlemedeki teorik gelişmeler, görüntü işleme, tomografi, sensor-dizi işleme, görüntülü veri iletişimi, zamanla değişen 1-B sistemler, jeofizik araştırmaları gibi çok değişik alanlardaki uygulamalar nedeniyle hızlı bir şekilde ortaya çıkmıştır. Çok-boyutta karşılaşılan temel zorluklar geçmiş yıllarda tanımlanmıştır. Bütün bu zorluklara rağmen, çok-boyutlu işaret işlemedeki gelişme genişleyerek hızla sürmektedir. Çok-boyutlu işaret işleme üzerindeki ilk çalışmalar, bu türden işaretlerin uygun bir şekilde nasıl örneklenebileceği üzerine idi. Peterson ve Middleton (1962) spektrumu sonlu dalga sayısı uzayı ile sınırlı bir fonksiyonun, uygun küçüklükte tekrarlama vektörlerine sahip periyodik bir kafes üzerinde alınan örneklerden yeniden elde edilebileceğini gösterdiler. Çok-boyutlu işaretlerin örneklenmesini takip eden süreçte, çok-boyutlu ayrık, homojen (1-B için stasyoner), deterministik olmayan süreçlerin modellenmesi ve temsil edilmesi problemleri ortaya çıktı. Bu konudaki ilk çalışmalardan biri Whittle (1954) tarafından gerçekleştirilmiştir. Whittle günümüzde asimmetrik yarı-düzlem süzgeç olarak bilinen kavramı tanıtmıştır. Helson ve Lowdenslager (1961) yarı-düzlem probleminin detaylı bir analizini yapmışlardır. 2-B problemlerin çözümünde, 1-B tasarım yöntemlerinin kullanımı ve 2-B duruma genişletilmesi üzerindeki ilk çalışmalar Shanks ve diğerleri (1972), Treitel ve diğerleri (1971), Costa ve diğerleri (1974), Merserau ve Dudgeon (1974), Manry ve Aggarwal (1974) tarafından yapılmıştır. Sonraları 2-B yinelemeli süzgeçlerin geliştirilmesi (Chakrabarti et. al., 1977; Twogood et. al., 1977; Merserau et. al., 1975; Ekstrom et. al., 1980; Dudgeon, 1980; Merserau, 1980; Abromatic et. al., 1979) ve kararlılıklarının belirlenmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmesi (Huang, 1972; Strinzis, 1977; Maria et. al., 1973; Anderson et. al., 1973; Alexsander et. al., 1980; O'Connor et. al., 1978; Ekstrom et. al., 1977) üzerinde yoğun çalışmalar yapılmıştır.

Çok-boyutlu işaretlerin spektral analizi üzerine, geçmiş yıllarda pek çok çalışma yapılmıştır. Bu konuda iyi bir inceleme McClellan (1982) tarafından gerçekleştirilmiştir. Literatürde, 2-B spektral kestirim için çeşitli AR modeller önerilmiştir (Jackson et. al., 1979; Kumerasan et. al., 1981; Jain et. al., 1978; Woods, 1972; Newmann, 1977; Cadzow et. al., 1981; Tjöstheim, 1981; Roucos et. al., 1979).

Jackson ve Chien (1979) yaklaşık dairesel simetrik bir kestiriciyi elde edebilmek için, farklı çeyrek-düzlemde AR modeller düzündüler. Kumerasan ve Tufts (1981)



anlık frekans ve dalga sayısı kestirimi için, benzer bir yöntem önerdiler. Jain ve Ranganath (1978) yarı-nedensel ve nedensel olmayan modeller önerdiler. burada yarı-nedensel durum için, öngörü hatasını maskı, bir doğrultuda geçmiş örnekleri kapsamaktadır, ancak diğer doğrultuda, geçmiş ve gelecek örnekleri kullanır. Bu kestirimin tüm kutup bir kestirim olmadığı aynı zamanda bir sıfır terimi de ürettiği gösterilmiştir.,

Woods (1972) homojen durumda, bir gürültü kaynağı ile sürülen 2-B fark eşitliğine karşı düşen 2-B Markov alanlarını tanımladı. Burada gürültü kaynağı alanın en-iyi doğrusal karesel-ortalama hata kestirimine eşdeğerdir.

Justice (1977) polinom yaklaşımı ile Szegő polinomlarının 2-B Levinson yinelemesine eşdeğer bir yapıyı oluşturmak için kullanılabileceğini gösterdi.

Newmann (1977), Wiener süzgeç kavramı ve maximum entropi yönteminin 2-B'ye nasıl genişletilebileceğini ve güç spektrumundaki nasıl azaltılabileceğini bazende yokedilebileceğini gösteren bir yöntem önerdi.

Cadzow ve Ogino (1981) spektrum kestirimi için 2-B çeyrek-düzlem nedensel AR ve ARMA (Autoregressive Moving Average/Özbağlanımlı Kayan Ortalamalı) modeller geliştirdiler. Burada AR katsayıları 1-B spektral kestirimde kullanılan, bir adım öngörü yönteminin genişletilmesi ile elde edildi. Yine, Tjöstheim (1981) 2-B spektral kestirim için AR modellemeyi kullandı.

Therrien (1981) çeyrek-düzlem destekli, 2-B tek kanallı modeller ile 1-B çok kanallı modeller arasında bir ilişki kurdu. Bu öneride, tüm dört çeyrek-düzlem süzgeç parametrelerinin aynı anda heasplanması mümkündür. Bu yöntem çok kanallı 2-B modellere genelleştirildi ve 2-B öz spektral ve çapraz spektral bileşenlerin kestirimi problemine uygulandı (Therrien et. al., 1989; 1989).

Ekstrom (1982) klasik Wiener süzgeç kuramını 2-B'ye genişletti. 1-B karesel-hata ortalaması kestirimine benzer olarak, 2-B normal denklemlerin çözümü ile en-iyi gerçekleştirilebilir süzgeç elde edildi.

Bununla beraber, bütün bu AR modeller, 2-B kafes süzgeç parametreleri kullanılmaksızın geliştirilmiştir. 1-B kafes süzgeçlerin başarısı 2-B ta da eşdeğer kafes süzgeç modellerinin geliştirilmesi için yoğun çalışmalar yapılmasına neden olmuştur. 2-B alanların modellenmesinde yansıma katsayılarının kullanılması üzerine temel bir yaklaşım, Marzetta (1980) tarafından yapılmıştır. Marzetta, yansıma katsayısı adı verilen bir dizi parametreyi içeren, bir çeşit 2-B sayısal süzgeç geliştirmiştir. Bir derece güncelleştirildiğinde model destek bölgesine yalnızca bir nokta eklenen 1-B kafes süzgeç modelleme ile karşılaştırıldığında, 2-B kafes süzgeç modelinde bir derece güncelleştirme model destek bölgesine $O(N)$ yeni nokta ekler. Bu zorluğun aşılması için, veri örnekleri belirli bir sıralamaya tabi tutularak, olay bir-boyuta indirgenir. Çalışmada 2-B den yalnızca birinde sonsuz olan bir yarı düzlem destek bölgesi önerilmiştir. bu yaklaşım korelasyon uyumu ve minimum fazlı bir süzgeç yapısı gibi bir- boyutun güzel özelliklerini taşımasına rağmen, çok uzun gecikmeli süzgeçlere neden olur (Bose,1990).

Parker ve Kayran (1984), model derecesi artırıldığında model destek bölgesinde aynı anda pek çok nokta tanımlandılar. Bu süzgeç yapısı çeyrek-düzlem destek bölgesine sahiptir ve herbir derece artışta 3 yeni parametre tanımlar. Parker ve

Kayran bu çalışmada, çeyrek-düzlem kafes yapısını, dört öngörü hata alanı kavramı tanımlayarak, oluşturdular. Ancak, bu süzgeç yapısı, herbir derece artışta yalnızca üç yeni parametre tanımladığından, tüm 2-B AR alanları modellemek için gerekli parametre sayısını sağlayamaz. Daha da önemlisi, bu süzgeç yapısı diklik özelliğini sağlamaz. Öyleki, katların kaskat olarak bağlanması optimum süzgeci vermez. Diğer bir deyişle, aynı sayıda parametre kullanılarak daha iyi bir süzgeç elde etmek mümkündür. Sonraki yıllarda Ertüzün ve diğerleri (1982), üç-parametrelili kafes süzgeç modelinden yeni ve gelişmiş bir kafes süzgeç modeli geliştirdiler. Bu yeni yapı, üç-parametrelili yapıya göre, maksimum entropiye daha yakın bir sonuç verir. Ancak bu süzgeç yapısı da her bir derece artışta sabit sayıda yeni parametre tanımladığından bütün 2-B AR alanları modelleyemez yani dik değildir.

Kwan ve Lui (1989), Parker ve Kayran'ın üç-parametrelili kafes süzgecini, kübik-uzay destekli 3-B kafes süzgeçe genişleterek, resim dizilerinin çerçeveler arası öngörülü kodlamasına uyguladılar.

Bir diğer çalışmada, Parker ve diğerleri (1985) çeyrek-düzlem modeli asimetric yarı-düzleme genişlettiler. Burada 5 öngörü hata alanı 6 yansıma katsayısı içermektedir.

Lev-Ari ve Parker (1985), güvenilir bir nümerik davranış için, öngörü hata alanlarının karşılıklı ortogonal olduğu, bir 2-B kafes süzgeç yapısı geliştirdiler.

Lenk ve Parker (1986; 1985), stasyoner rasgele alanları modellemek için Levinson ve Schur algoritmalarını 2-B ye genişlettiler. Bu çalışmalarda, koordinat dönüşümlerinin dikleştirilmesi düşünülerek oluşturulan kafes süzgeç yapılarının türetilmesi için tensor kavramlarını kullandılar. Kwan ve Lui (1989) bu yapının, 1-B kafes süzgecin modülerite, düşük katsayı hassasiyeti, düşük yuvarlatma gürültüsü gibi iyi özelliklerini taşıdığını gösterdiler.

McGuffin ve Lui (1989), normal denklemlerin oluşturduğu matris normal eşitliğini tanımladılar. Matris normal eşitliğinin çözümü Burg algoritmasına benzer bir algoritma oluşturur.

Nam ve O'Neill (1987) 1-B kafes süzgeç yapısını, Parker ve Kayran'ın üç-parametrelili yapısını temel alarak, 2-B ve 3-B duruma genişlettiler. Burada 3-B süzgeç, hareketli görüntülerin geçici ve uzamsal değişimlerini, adaptif olarak izleyebilir. Bu türden 2-B ve 3-B kafes süzgeçler kullanarak, öngörülü kontrol yapıları önerilmiştir.

Hsieh ve diğerleri (1989), Parker ve Kayran'ın derece güncelleştirilen 2-B kafes süzgecini, daha etkin bir hesaplama için, derece ve zaman güncelleştirmeye genişletmişlerdir. Bu çalışmada, 2-B kafes süzgeçleme yöntemi, 2-B doğrusal öngörücünün öngörü parametrelerinin çıkarılmasında kullanılmıştır.

Buraya kadar anlatılanlar, çok-boyutlu işaret işleme ve 2-B kafes süzgeçleme ile ilgili literatürün çok küçük bir bölümünü temsil etmektedir. Daha detaylı bir inceleme ve tarihçe için (Dudgeon et. al., 1984; Lim, 1984; Jain, 1984) incelenebilir.



1.3 Tezin İçeriği ve Katkıları

Tezin amacı 2-B doğrusal öngörü ve ilgili kafes süzgeç yapılarını incelemek, çeyrek-düzlem için dört-hata alanına dayalı kafes süzgeç yapılarını geliştirerek, 2-B AR alanların tam olarak kafes süzgeç modellenmesini sağlamaktır.

Tezin birinci bölümü, konuya ilişkin bir giriş ve bu alanda daha önce yapılan çalışmaların bir kısa özetini kapsamaktadır.

2. bölümde 1-B doğrusal öngörü, 1-B kafes süzgeçler ve öngörü algoritmaları incelenir. Boşluklu işlevler kullanılarak, 1-B Schur ve Levinson algoritmalarının elde edilmesi tartışılır. Bölümün 3. kısmında, 1-B doğrusal öngöründe geometrik yaklaşım kullanılarak 1-B en küçük kareler kafes süzgeç algoritmasının geliştirilmesi gösterilir. 1-B ve 2-B arasındaki temel farklılıkları açıklayarak, 2-B doğrusal öngörü, 2-B boşluklu işlevler, 2-B ileri- ve geri-yönlü öngörü hata alanları bölümün 4. kısmında tartışılır. Bölümün son kısmında, 2-B çeyrek-düzlem AR modellemeye, literatürde mevcut dört-öngörü hata alanına dayalı kafes süzgeç yapıları, geliştirilen yapı ile karşılaştırmada kullanılmak üzere incelenir.

Tezin ilk katkısı 3. bölümde verilir. Bu bölümde, 2-B boşluklu işlevlerden hareketle üç-parametrelili kafes süzgeç yapısı geliştirilerek, tüm çeyrek-düzlem AR alanları tam olarak modelleyen 2-B Schur algoritması elde edilir. Algoritmanın geliştirilmesi, herbir derecede değişen kafes süzgeç yapısı nedeniyle derece derece gösterilir ve bölümün son kısmında N. dereceye ilişkin giriş-çıkış bağıntıları tanımlanır.

4. bölümde, geometrik yaklaşım ışığında çeyrek-düzlem 2-B AR alanların tam olarak modellenmesinde 2-B en küçük-kareler kafes süzgeç algoritması geliştirilir. 4. bölüm, 2-B dik-izdüşüm, geçmiş gözlemler uzayı alt uzayların dik ayrıştırılması gibi temel kavramlar verilerek başlar. Bölümün sonunda ise en küçük-kareler kafes süzgeç algoritmasının geliştirilmesi ve bağıntıları gösterilir.

2-B kafes süzgeç parametreleri ile 2-B AR alanın geçiş işlevi arasındaki bağıntı 5. bölümde verilir. 2-B Schur veya en küçük-kareler kafes süzgeç algoritması elde edilen kafes süzgeç parametreleri kullanılarak 2-B AR alanın geçiş işlevi parametrelerinin elde edilmesini sağlayan bir işlem adım adım gösterilir.

6. bölümde, 3. bölümde elde edilen 2-B Schur algoritmasının 3-B ye nasıl genelleştirilebileceği gösterilerek, 3-B kübik uzay AR alanların kafes süzgeç modellenmesinde 3-B Schur algoritması elde edilir.

7. bölümde, 2-B Schur ve en küçük-kareler kafes süzgeç algoritmasına ilişkin teorilerin doğruluğu göstermek ve literatürdeki diğer dört-alanlı çeyrek-düzlem kafes süzgeç algoritmaları ile başarımların karşılaştırması yapmak için bilgisayar benzetimleri gösterilir ve benzetim sonuçları tartışılır.

Son bölümde ise, tezin sonuçları ve geliştirilen algoritmaların eksiklikleri, dezavantajları ve bu dezavantajları yok etmek için yapılması gerekli araştırmalar tartışılır.



2. DOĞRUSAL ÖNGÖRÜ:TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Giriş

Bu bölümde 2-B Schur ve enküçük-kareler kafes süzgeç algoritmalarına ışık tutacak temel bilgiler verilecektir. 1. kısımda öncelikle 1-B doğrusal öngörü ve kafes süzgeç teorisi incelenecek, 1-B Schur ve Levinson algoritmalarının yapısı, yansıma katsayıları ve kısmi ilişki (PARCOR) kavramları tartışılacaktır. 1-B Schur algoritmasının temelini oluşturan boşluklu işlevler bu kısımda tanımlanacaktır. Kısımın sonunda 1-B doğrusal öngöründe geometrik yaklaşım ile enküçük-kareler kafes süzgeç algoritmasının oluşturulması incelenecektir. Bu kısmın amacı 1-B ile 2-B arasında ilişki kurmak için gerekli temel kavramları sağlamaktır.

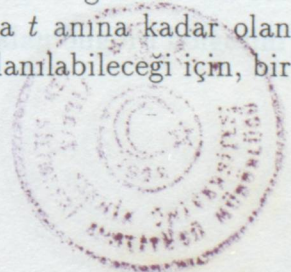
2. kısımda, 2-B çeyrek-düzlem AR modeller için Schur algoritmasının oluşturulmasında kullanılacak 2-B boşluklu işlevler tanımlanacak ve 2-B transfer işlevi ile ilişkileri incelenecek ve 3. bölümde kullanılacak diğer 2-B kavramlar tanıtılacaktır.

2.2 Doğrusal Süzgeç Problemi ve Doğrusal Öngörü

Süzgeç terimi, gürültülü bir veri dizisinden ilgilenilen büyüklüğe ilişkin bilgiyi çıkartmak için kullanılan bir bilgisayar yazılımı veya fiziksel bir donanım parçası olarak tanımlanabilir. Bir süzgeci üç temel işaret işleme yapısını gerçekleştirmek için kullanılır.

a) **Süzgeçleme:** Süzgeçleme t anı da dahil olmak üzere t anına kadar gözlenen veriyi kullanarak, t anında ilgilenilen büyüklüğe ilişkin bilginin çıkartılmasıdır.

b) **Düzgünleştirme:** İlgilenilen bilginin t anında mevcut olmasının gerekmemesi yönünden süzgeçlemeden farklıdır. Bu t anından sonra elde edilen veri de bu bilgiyi elde etmek için kullanılabilir. Bu da düzgünleştirme durumunda bir gecikmenin söz konusu olduğunu gösterir. Düzgünleştirme işleminde, yalnızca t anına kadar olan veri değil aynı zamanda t anından sonra elde edilen veride kullanılabileceği için, bir anlamda süzgeçleme işleminden daha doğru olması beklenir.



2.2.1 Normal Eşitlikler, İleri- ve Geri-Yönlü Öngörü

1-boyutta, N. dereceden bir AR süreç aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(k) = \sum_{i=1}^N a_{oi}^{(N)} y(k-i) + w(k) \quad (2.1)$$

Burada $y(k)$ ayrık zamanlı, sıfır ortalamalı bir süreçtir. $w(k)$ beyaz gürültü ve $\{a_{oi}^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N\}$ ler en iyi AR model katsayılarıdır. 1-B doğrusal öngöründe, verilen herhangi bir P için, P model derecesini göstermek üzere, P. derecede en iyi doğrusal öngörücüyü bulmak isteriz. P. derecedeki bu öngörücüye ilişkin bağıntı

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^P a_i^{(P)} y(k-i) \quad (2.2)$$

şeklinde verilir. Doğal olarak en iyi öngörücü $P = N$ olması durumunda bulunacaktır. $P = N$ için (2.2) de görülen N adet $\{a_1^{(N)}, a_2^{(N)}, \dots, a_N^{(N)}\}$ öngörü katsayısı, öngörü hatasının karesel ortalaması enküçükleştirilerek seçilir. N. derece için öngörü hatasının karesel ortalaması aşağıdaki gibi verilir.

$$\varepsilon^{(N)} = E[e^{(N)2}(k)] = \min. \quad (2.3)$$

burada $E[\bullet]$ beklenen değer operatörüdür. (2.3) eşitliğindeki öngörü hatası $e^{(N)}(k)$ sürecin gerçek değeri ile öngörülen değeri arasındaki farktır ve

$$e^{(N)}(k) = y(k) - \hat{y}(k) = \sum_{i=0}^N a_i^{(N)} y(k-i) \quad (2.4)$$

olarak verilir. Burada $a_0^{(N)} = 1$ dir. (2.3) eşitliğinin herbir katsayıya göre aşağıdaki şekilde türevini alırsak

$$\frac{\partial E[e^{(N)2}(k)]}{\partial a_i^{(N)}} = 0 \quad (2.5)$$

Aşağıda verilen diklik eşitlikleri elde edilir.

$$E[e^{(N)}(k)y(k-i)] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

Bu eşitlikler, en iyi öngörücü için, öngörü hatasının öngörü uzayına dik olduğunu gösterir. (2.4) eşitliğini (2.6) da yerine koyulursa, katsayılar için N adet doğrusal eşitlik elde edilir.

$$\sum_{j=0}^N a_j^{(N)} E[y(k-j)y(k-i)] = \sum_{j=0}^N a_j^{(N)} R(i-j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$



Burada $R(k)$ sürecin özilişki işlevidir ve $R(k) = E[y(i)y(i+k)]$ olarak verilir. Öte yandan minimum karesel ortalama hata,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{min}^{(N)} &= E[e^{(N)2}(k)] \\ &= E[e^{(N)}(k)(y(k) - \hat{y}(k))] \\ &= E[e^{(N)}(k)y(k)] - E[e^{(N)}(k)\hat{y}(k)]\end{aligned}\quad (2.8)$$

Burada (2.6) yı dikkate aldığımızda $E[e^{(N)}(k)\hat{y}(k)] = 0$ olduğu görülür. Böylece,

$$\varepsilon_{min}^{(N)} = E[e^{(N)}(k)y(k)] \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.4) dü, (2.7) de yerine koyarak,

$$\varepsilon_{min}^{(N)} = \sum_{i=0}^N a_i^{(N)} R(i) = \sigma_N^2 \quad (2.10)$$

olarak bulunur.

$a_0^{(N)} = 1$ için (2.7) eşitliğini yeniden düzenlersek,

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.11)$$

eşitliği elde edilir. (2.11) eşitliği Wiener-Hopf eşitliğinin ayrık zamanlı şeklidir ve aynı zamanda **normal denklem** olarakta isimlendirilir. Burada $\mathbf{R}$, $N \times N$ boyutlu ilişki matrisi, $\mathbf{a}$ öngörücü katsayıları vektörü, $\mathbf{r}$ ise öngörülen süreç ile geçmiş değerler uzayı arasındaki çapraz ilişki vektörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(N-1) \\ r(-1) & r(0) & r(1) & \dots & r(N-2) \\ r(-2) & r(-1) & r(0) & \dots & r(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-N+1) & r(-N+2) & r(-N+3) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -a_1^{(N)} & -a_2^{(N)} & -a_3^{(N)} & \dots & -a_N^{(N)} \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

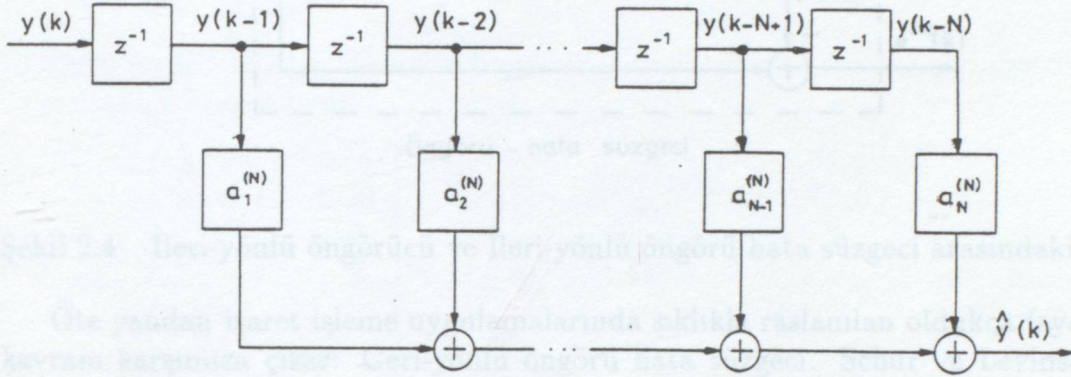
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r(1) & r(2) & r(3) & \dots & r(N) \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

(2.11) eşitliği ile verilen normal denklem, aşağıdaki gibi, doğrudan çözülerek öngörücü katsayıları elde edilebilir.

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \quad (2.15)$$

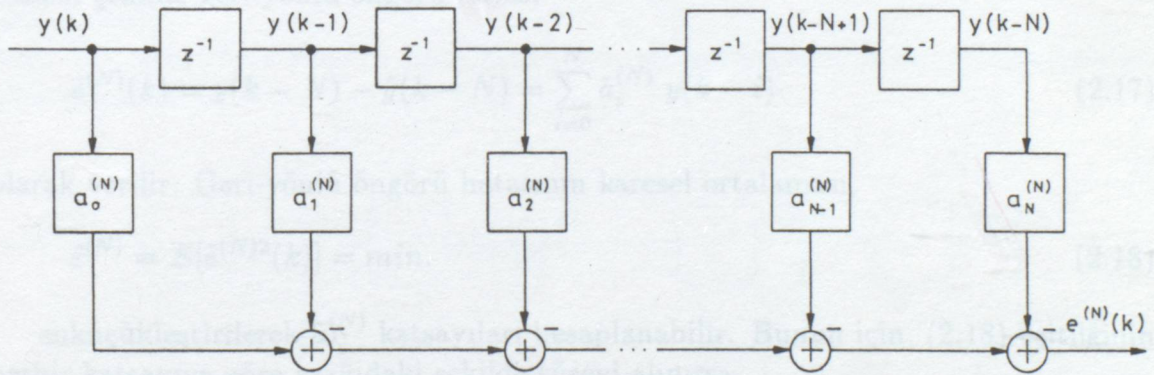


Gerçel süreçler için $r(-n) = r(n)$ şeklindedir. Ayrıca (2.12) de görüldüğü gibi $\mathbf{R}$ Toeplitz yapıdadır. Bu yapı, normal denklemin çözümü için (2.15) bağıntısındaki matris evriği yerine iteratif algoritmalar geliştirilebilmesine olanak sağlayarak, a katsayılarının daha etkin bir şekilde hesaplanmasını mümkün kılar. Şekil 2.2 de N . derece bir öngörücünün enine süzgeçler kullanılarak nasıl gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir.



Şekil 2.2 İleri-yönlü öngörücünün enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi

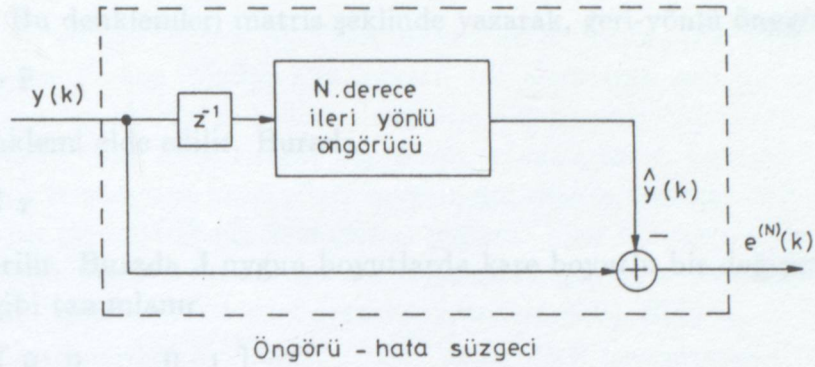
Burada öngörücü katsayıları tap ağırlıkları olarak isimlendirilir ve Wiener süzgeç teorisine uygun olarak, hatanın karesel ortalamasının enüçükleştirilmesi anlamında optimize edilirler. Enine (Transversal) süzgeç yapısı (2.4) eşitliğinden hareketle bir ileri-yönlü öngörü hata süzgeci olarak Şekil 2.3 deki gibi düzenlenebilir.



Şekil 2.3 İleri-yönlü öngörü hata süzgecinin enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi



N. dereceden öngörücü ve öngörü hata süzgeci arasındaki ilişkide Şekil 2.4 te görülmektedir.



Şekil 2.4 İleri-yönlü öngörücü ve İleri-yönlü öngörü hata süzgeci arasındaki ilişki

Öte yandan işaret işleme uygulamalarında sıklıkla raslanılan oldukça faydalı bir kavram karşımıza çıkar: Geri-yönlü öngörü hata süzgeci. Schur ve Levinson gibi iteratif algoritmalarda, yansıma katsayılarının belirlenmesi için geri yönlü öngörücü kullanılması gerekir. Geri-yönlü öngöründe, sürecin geçmişindeki değer gelecekteki değerlerinden öngörülür. N. derece geri-yönlü öngörücü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\hat{y}(k - N) = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{a}_i^{(N)} y(k - i) \quad (2.16)$$

Burada $\tilde{a}_i^{(N)}$ ler geri-yönlü öngörücü katsayılarıdır ve $\tilde{a}_N^{(N)} = 1$ dir. (2.4) eşitliğine benzer şekilde geri-yönlü öngörü hatası

$$\tilde{e}^{(N)}(k) = y(k - N) - \hat{y}(k - N) = \sum_{i=0}^N \tilde{a}_i^{(N)} y(k - i) \quad (2.17)$$

olarak verilir. Geri-yönlü öngörü hatasının karesel ortalaması,

$$\tilde{\varepsilon}^{(N)} = E[\tilde{e}^{(N)2}(k)] = \min. \quad (2.18)$$

enküçükleştirilerek $\tilde{a}_N^{(N)}$ katsayıları hesaplanabilir. Bunun için, (2.18) eşitliğinin herbir katsayıya göre aşağıdaki şekilde türevi alınırsa

$$\frac{\partial E[\tilde{e}^{(N)2}(k)]}{\partial \tilde{a}_i^{(N)}} = 0 \quad (2.19)$$

Geri-yönlü öngörücü için aşağıdaki verilen diklik eşitlikleri elde edilir.

$$E[\tilde{e}^{(N)}(k)y(k - i)] = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.20)$$

(2.18) yı (2.20) da yerine koyulursa,



$$\sum_{j=0}^N \tilde{a}_j^{(N)} E[y(k-j)y(k-i)] = \sum_{j=0}^N \tilde{a}_j^{(N)} R(j-i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.21)$$

elde edilir. Bu denklemleri matris şeklinde yazarak, geri-yönlü öngörü için

$$\mathbf{R}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{r}} \quad (2.22)$$

normal denklemi elde edilir. Burada

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{J} \mathbf{r} \quad (2.23)$$

şeklinde verilir. Burada $\mathbf{J}$ uygun boyutlarda kare boyutlu bir değişim matrisidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

(2.11), (2.11) ve (2.23) eşitliklerini kullanarak geri-yönlü öngörücü katsayılarını ileri-yönlü öngörücü katsayıları cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

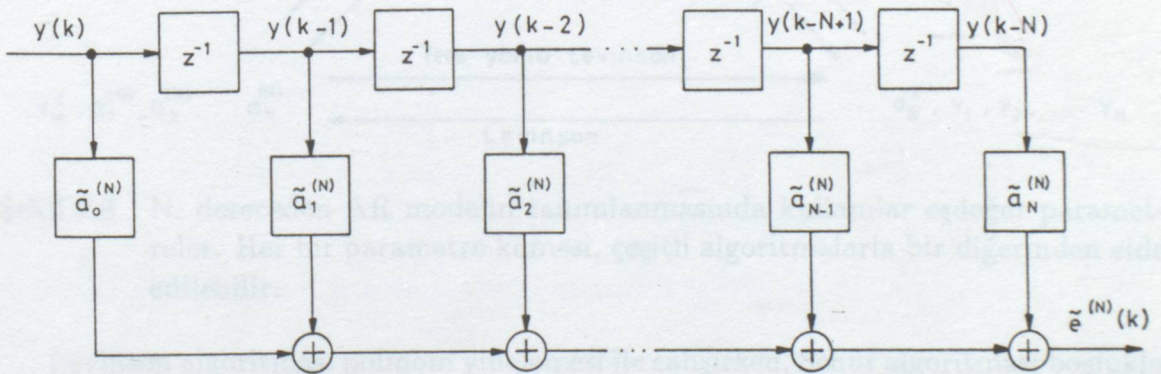
$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{J} \mathbf{a} \quad (2.25)$$

yada daha açık yazılımla,

$$\tilde{a}_k^{(N)} = a_{N-k}^{(N)} \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (2.26)$$

olarak verilir.

Şekil 2.5, geri-yönlü öngörü hata süzgecinin enine süzgeçlerle gerçekleştirilmesini göstermektedir.

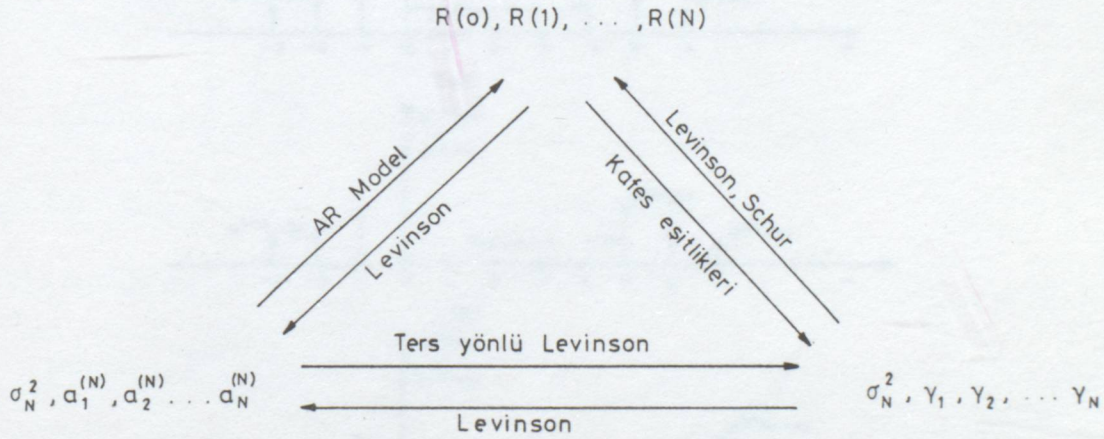


Şekil 2.5 Geri-yönlü öngörü hata süzgecinin enine süzgeç yapısı ile gerçekleştirilmesi

2.2.2 Boşluklu İşlevler, 1-B Levinson ve Schur Algoritmaları, Kafes Süzgeçler

(2.11) da verilen normal eşitlikleri doğrudan doğruya yada birbirinden bağımsız olarak çözmek yerine, çözüm için iteratif bir algoritma geliştirilebilir. Bu işlem Levinson algoritması olarak bilinir. Levinson algoritması doğrusal öngörünün temel kavramlarından olan kafes süzgeç yapılarını ortaya çıkarır. Levinson algoritmasının geliştirilmesi ve yansıma katsayıları kavramının ortaya çıkması doğrusal öngörünün daha geniş bir perspektifte incelenmesini sağladı. Eğer bir rasgele süreç N . derece bir AR model ile modellenecek ise modeli açıklamak için üç eşdeğer parametre kümesi kullanılabilir. Bunlar; $N+1$ adet ilişki işlevi terimi $R(0), R(1), \dots, R(N+1)$, doğrusal öngörücü parametreleri $a_1^{(N)}, a_2^{(N)}, \dots, a_N^{(N)}$ ve σ_N^2 (AR parametreler) ve yansıma katsayıları ve öngörü hatasının değışintisi $\gamma_1^{(N)}, \gamma_2^{(N)}, \dots, \gamma_N^{(N)}$ ve σ_N^2 . Bu kümelerden herhangi biri Levinson algoritması aracılığıyla diğerlerinden elde edilebilir.

Ancak ne yazıkki doğrusal öngörü parametrelerinin etkin bir şekilde hesaplanması amacı ile geliştirilen Levinson algoritması, işaret işleme algoritmalarının uygulanmasında artan bir ilgi gören paralel çalışan bilgisayar yapılarında çalışmak için önemli bir dezavantaja sahiptir. Bu dezavantaj her bir adımda bir iç çarpım işleminin gerçekleşmesi zorunluluğundan kaynaklanmaktadır. Bu da algoritmanın paralelleştirme ümitlerini ortadan kaldırır. Bu sınırlama hesap açısından etkin başka algoritmaların arayışına neden olmuştur. Schur algoritması, bu açıdan Levinson algoritmasına alternatiftir ve bir iç çarpım hesaplanmasını gerektirmez. Şekil 2.6, N .derece bir AR modelin tanımlanmasındaki eşdeğer parametreleri göstermektedir.



Şekil 2.6 N . dereceden AR modelin tanımlanmasında kullanılan eşdeğer parametreler. Her bir parametre kümesi, çeşitli algoritmalarla bir diğerinden elde edilebilir.

Levinson algoritması polinom yinelemesi ile çalışırken, Schur algoritması boşluklu işlevler ile çalışır. İleri-yönlü öngöründe $y(k)$ y_1 öngörebilmek için, geçmiş gözlemler uzayında N nokta varsa, diklik prensibinden

$$E[e^{(N)}(k)y(k-n)] = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.27)$$



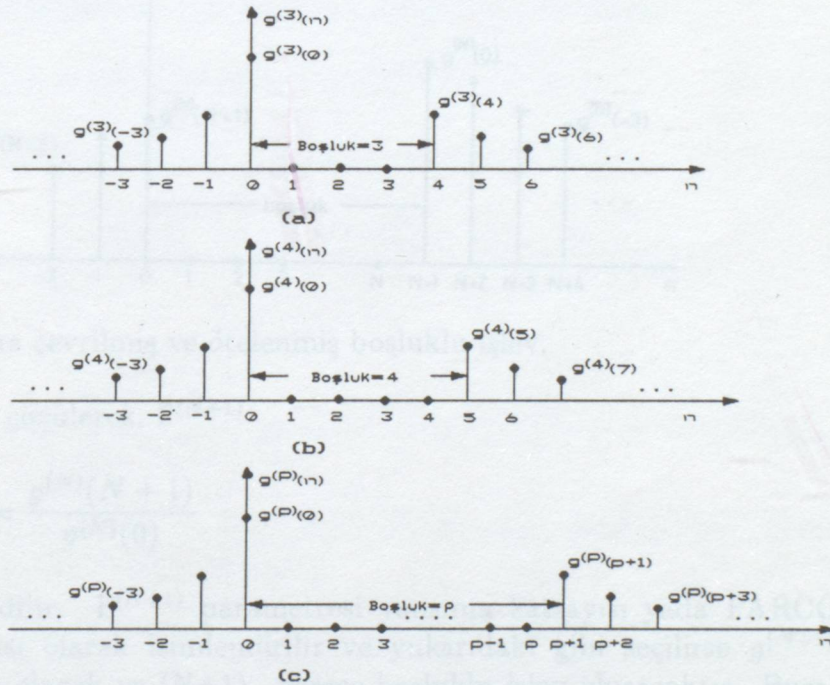
olacaktır. Öte yandan, N . derece boşluklu işlev

$$\begin{aligned} g^{(N)}(n) = E[e^{(N)}(k)y(k-n)] &= E[(\sum_{i=0}^N a_i^{(N)} y(k-i))y(k-n)] \\ &= \sum_{i=0}^N a_i^{(N)} R(n-i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

olarak tanımlanır. Yukarıda belirlilen diklik eşitliği nedeniyle, boşluklu işlev $g^{(N)}(n)$ aşağıdaki özelliği sahip sağlar.

$$g^{(N)}(n) = 0 \quad 1 \leq n \leq N \quad (2.29)$$

n 'nin 1 ile N arasındaki değerleri için, işlev 0 değerini aldığından dolayı boşluklu işlev olarak isimlendirilir. Boşluklu işlevler ilk olarak Robinson ve Treitel (1980) tarafından katmanlı bir sistemin yansıma katsayılarının analizinde tanımlanmıştır. N . dereceden boşluklu işlev $g^{(N)}(n)$, N uzunluklu bir boşluğa sahiptir. Şekil 2.7 de $N = 3, 4, P$ için boşluklu işlevlerin çizimleri görülmektedir. (2.28) da tanımlanan boşluklu işlevler öngörü hata dizileri ile $y(k)$ dizileri arasındaki çapraz ilişkilerdir. Ayrıca buna ek olarak, boşluk koşullarının diklik eşitlikleri ile aynı olduğu görülmektedir.



Şekil 2.7 $N=3, 4$ ve P için N . derece 1-B boşluklu işlevler

N . derece öngörücüden en iyi $N+1$. derece öngörücüyü oluşturan Levinson algoritması boşluklu işlevler yardımı ile elde edilebilir. Burada temel düşünce, N uzunlukta boşluğa sahip olan N . derece boşluklu işlevleri kullanarak, $N+1$ uzunluklu boşluğa sahip $(N+1)$. derece bir boşluklu işlev oluşturmaktır. Şimdi $g^{(N)}(n)$

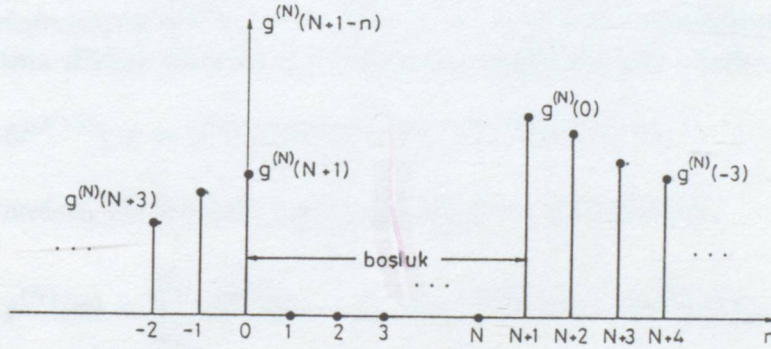
ni kullanarak $g^{(N+1)}(n)$ yi elde etmeye çalışalım. Bunun için $g^{(N+1)}(n)$ orijine göre ters çevrilir, yani $g^{(N)}(n) \rightarrow g^{(N)}(-n)$ elde edilir. Ters çevrilen işlev N uzunluklu bir boşluğa sahiptir ancak boşluk negatif bölgededir. Ters çevrilmiş işlevin boşluğu, $g^{(N)}(n)$ nin boşluğu ile çakışacak şekilde, ters çevrilen işlev yeteri kadar kaydırılır ($N+1$ kadar). Bu işlem Şekil 2.8 da görülmektedir. Ters çevrilen ve geciktirilen işlev $g^{(N)}(N+1-n)$ olacaktır. Elde edilen bu iki boşluklu işlevin herhangi bir doğrusal birleşimi en azından N uzunluklu bir boşluğa sahip olacaktır. Bu doğrusal birleşim aşağıdaki gibi yazılır.

$$g^{(N+1)}(n) = g^{(N)}(n) - \Gamma^{(N+1)} g^{(N)}(N+1-n) \quad (2.30)$$

Burada $\Gamma^{(N+1)}$ belirlenecek bir sabittir ve öylesine uygun seçilirki $g^{(N+1)}(n)$ fazladan bir boşluk noktası içerir. Böylece, boşluk uzunluğu $N+1$ olur. Bu fazladan boşluğu oluşturmak için gerekli boşluk koşulu,

$$g^{(N+1)}(N+1) = g^{(N)}(N+1) - \Gamma^{(N+1)} g^{(N)}(0) = 0 \quad (2.31)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 2.8 Ters çevrilmiş ve ötelenmiş boşluklu işlev.

(2.31) eşitliği çözülerek, $\Gamma^{(N+1)}$

$$\Gamma^{(N+1)} = \frac{g^{(N)}(N+1)}{g^{(N)}(0)} \quad (2.32)$$

olarak elde edilir. $\Gamma^{(N+1)}$ parametresi yansıma katsayısı yada PARCOR (Kısmi ilişki) katsayısı olarak isimlendirilir ve yukarıdaki gibi seçilirse $g^{(N+1)}(n)$, $N+1$ boşluğa sahip olacak ve $(N+1)$. derece boşluklu işlev oluşacaktır. Burada, dikkat edilirse boşluklu işlevin $n=0$ daki değeri ortalama karesel hatanın enküçükleştirilmiş değeridir.

$$\varepsilon^{(N)} = E[e^{(N)2}(k)] = E[e^{(N)}(k)y(k)] = g^{(N)}(0) \quad (2.33)$$

Sonuç olarak, (2.33) eşitliği (2.32) da yerine koyularak,



$$\Gamma^{(N+1)} = \frac{\Delta^{(N)}}{\varepsilon^{(N)}} \quad (2.34)$$

olarak bulunur. Burada

$$\Delta^{(N)} = g^{(N)}(N+1) = \sum_{i=0}^N a_i^{(N)} R(N+1-i) \quad (2.35)$$

(2.33), $n = 0$ için düzenlenir ve $\Gamma^{(N+1)}$ i kullanılırsa, $N+1$. derecedeki öngörü hatasının karesel ortalamasının enküçüğü

$$\varepsilon^{(N+1)} = g^{(N+1)}(0) = g^{(N)}(0) - \Gamma^{(N+1)} g^{(N)}(N+1) = (1 - \Gamma^{(N+1)2}) g^{(N)}(0) \quad (2.36)$$

yada

$$\varepsilon^{(N+1)} = (1 - \Gamma^{(N+1)2}) \varepsilon^{(N)} \quad (2.37)$$

olarak elde edilir. $\varepsilon^{(N)}$ ve $\varepsilon^{(N+1)}$ in her ikisinde pozitif olduğundan $(1 - \Gamma^{(N+1)2})$ pozitif ve 1 den küçük olmalıdır. Buradan yansıma katsayısının 1 den küçük olduğu görülür. Yeni öngörü hata süzgecini bulabilmek için (2.30) eşitliğini, $g^{(N)}(-n)$ nin z -dönüşümünün $G^{(N)}(z^{-1})$ ve $g^{(N)}(N+1-k)$ nin z -dönüşümünün $z^{-(N+1)} G^{(N)}(z^{-1})$ olduğuna dikkat edilerek z düzleminde aşağıdaki gibi yazılır.

$$G^{(N+1)}(z) = G^{(N)}(z) - \Gamma^{(N+1)} z^{-(N+1)} G^{(N)}(z^{-1}) \quad (2.38)$$

Öte yandan, (2.28) daki toplamsal eşitlikler kullanılarak,

$$g^{(N)}(n) = \sum_{i=0}^N a_i^{(N)} R(n-i) \implies G^{(N)}(z) = A^{(N)}(z) S_{yy}(z) \quad (2.39)$$

ve

$$g^{(N+1)}(n) = \sum_{i=0}^{N+1} a_i^{(N+1)} R(n-i) \implies G^{(N+1)}(z) = A^{(N+1)}(z) S_{yy}(z) \quad (2.40)$$

elde edilir. Burada $S_{yy}(z)$, $y(n)$ nin spektral güç yoğunluğudur. (2.39) ve (2.40) eşitlikleri (2.38) da yerine koyulursa,

$$A^{(N+1)}(z) S_{yy}(z) = A^{(N)}(z) S_{yy}(z) - \Gamma^{(N+1)} z^{-(N+1)} A^{(N)}(z^{-1}) S_{yy}(z^{-1}) \quad (2.41)$$

elde edilir. $r(k) = r(-k)$ simetrisi nedeniyle, $S_{yy}(z) = S_{yy}(z^{-1})$ olduğundan, (2.41) eşitliğinin her iki tarafındaki $S_{yy}(z)$ terimleri kaldırılabilir. Böylece, öngörü hata süzgeci geçiş işlevi

$$A^{(N+1)}(z) = A^{(N)}(z) - \Gamma^{(N+1)} z^{-(N+1)} A^{(N)}(z^{-1}) \quad (2.42)$$



olarak elde edilir. (2.42) bağıntısı Levinson yinelemesi olarak isimlendirilir ve N. derece öngörü hata süzgeci geçiş işlevi, $A^{(N)}(z)$ ile yeni (N+1). derece en iyi öngörü hata süzgeci geçiş işlevi, $A^{(N+1)}(z)$ arasındaki ilişkiyi verir. (2.42) eşitliğinde Ters z-dönüşümü alınır,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_1^{(N+1)} \\ a_2^{(N+1)} \\ \vdots \\ a_N^{(N+1)} \\ a_{N+1}^{(N+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1^{(N)} \\ a_2^{(N)} \\ \vdots \\ a_N^{(N)} \\ 0 \end{bmatrix} - \Gamma^{(N+1)} \begin{bmatrix} 0 \\ a_N^{(N)} \\ a_{N-1}^{(N)} \\ \vdots \\ a_1^{(N)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

yada

$$a_i^{(N+1)} = a_i^{(N)} - \Gamma^{(N+1)} a_{N+1-i}^{(N)} \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.44)$$

ve

$$a_{N+1}^{(N+1)} = -\Gamma^{(N+1)} \quad (2.45)$$

elde edilir. Bu aşamada sonucu daha iyi yorumlayabilmek için, $\tilde{A}^{(N)}(z)$ ile gösterilen bir geri-yönlü geçiş işlevi tanımlanabilir. Bu geçiş işlevi $A^{(N)}(z)$ ile aynı derecededir. Ancak katsayıları ters sırada dizilmiştir.

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(N)}(z) &= \sum_{i=0}^N a_i^{(N)} z^i = z^{-N} A^{(N)}(z^{-1}) \\ &= a_N^{(N)} + a_{N-1}^{(N)} z^{-1} + \dots + a_0^{(N)} z^{-N} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Yukarıda verilen, geri-yönlü polinom tanımı kullanılarak (2.42) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$A^{(N+1)}(z) = A^{(N)}(z) - \Gamma^{(N+1)} z^{-1} \tilde{A}^{(N)}(z) \quad (2.47)$$

Her iki tarafın tersini alarak,

$$A^{(N+1)}(z^{-1}) = A^{(N)}(z^{-1}) - \Gamma^{(N+1)} z^{N+1} A^{(N)}(z) \quad (2.48)$$

$$\tilde{A}^{(N+1)}(z) = z^{-(N+1)} A^{(N+1)}(z^{-1}) = z^{-(N+1)} A^{(N)}(z^{-1}) - \Gamma^{(N+1)} A^{(N)}(z) \quad (2.49)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.44) ve (2.45) bağıntılarından geri-yönlü öngörü hata süzgeci geçiş işlevi

$$\tilde{A}^{(N+1)}(z) = z^{-1} \tilde{A}^{(N)}(z) - \Gamma^{(N+1)} A^{(N)}(z) \quad (2.50)$$



olarak elde edilir.

(2.42) ve (2.50) eşitlikleri birleştirilerek ileri- ve geri- yönlü geçiş işlevlerini içeren matris şeklinde daha klasik bir yapı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} A^{(N+1)}(z) \\ \tilde{A}^{(N+1)}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Gamma^{(N+1)} \\ -\Gamma^{(N+1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(N)}(z) \\ z^{-1} \tilde{A}^{(N)}(z) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

(2.51) eşitliği ile matris yapısında verilen Levinson yinelemesi doğrusal öngörünün önemli kavramlarından biri olan kafes süzgeç yapısını ortaya çıkarır.

Levinson algoritmasına alternatif olan Schur algoritması, Schur'un birim disk ile sınırlı fonksiyonlar teorisi ile ilgili orijinal çalışmasına dayanır. Doğrusal öngörude Schur algoritması, verilen özilişki örneklerinden yansıma katsayıları kümesini elde etmek ve aynı zamanda özilişki matrisinin klasik Cholesky ayrıştırması için kullanılabilir. Diğer yandan, Schur algoritması için boşluklu işlev yinelemesi olarak bahsedebiliriz. Levinson yinelemesinde, geri-yönlü polinomların kullanılması geri-yönlü boşluklu işlevlerin tanımlanması arayışına neden olmuştur. N. dereceden geri-yönlü boşluklu işlevleri z-dönüşümü cinsinden tanımlayabiliriz.

$$\tilde{G}^{(N)}(z) = z^{-N} G^{(N)}(z^{-1}) = \tilde{A}^{(N)}(z) S_{yy}(z) \quad (2.52)$$

(2.52) bağıntısı, zaman düzleminde,

$$\tilde{g}^{(N)}(n) = g^{(N)}(N - n) = \sum_{i=0}^N \tilde{a}_i^{(N)} R(n - i) \quad (2.53)$$

olarak yazılır.

Açıklama 2.1: Geri-yönlü boşluklu işlevler, yansıtılmış ve uygun biçimde geciktirilmiş ileri- yönlü boşluklu işlevlerdir. N. derece ileri ve geri-yönlü boşluklu işlevlerin sağlaması gereken boşluk koşulları aşağıda verilmiştir.

$$g^{(N)}(n) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.54)$$

ve

$$\tilde{g}^{(N)}(n) = 0 \quad n = 0, 2, \dots, N - 1 \quad (2.55)$$

(2.51) eşitliği S_{yy} ile çarpılıp, (2.52) eşitliği kullanılırsa,

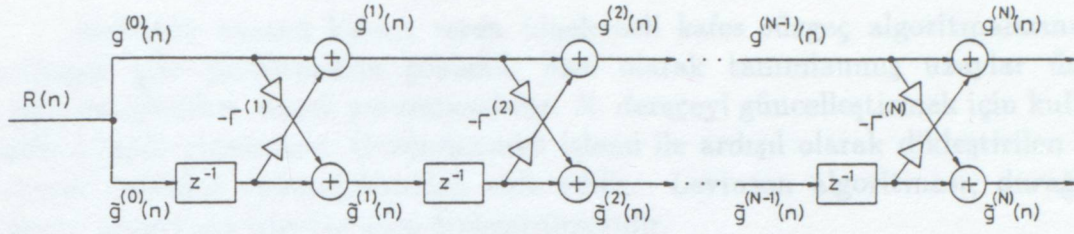
$$\begin{bmatrix} G^{(N+1)}(z) \\ \tilde{G}^{(N+1)}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Gamma^{(N+1)} \\ -\Gamma^{(N+1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^{(N)}(z) \\ z^{-1} \tilde{G}^{(N)}(z) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Öte yandan, (2.56) eşitliği zaman düzleminde yazılırsa, 1-B Schur algoritması aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} g^{(N+1)}(n) \\ \tilde{g}^{(N+1)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Gamma^{(N+1)} \\ -\Gamma^{(N+1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{(N)}(n) \\ \tilde{g}^{(N)}(n-1) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$



(2.56) eşitliği Şekil 2.9 da görülen kafes süzgeç yapısını verir.



Şekil 2.9 1-B Schur algoritması için kafes süzgeç yapısı. Giriş $R(n)$ özilişki işlevi, çıkışlar ileri- ve geri-yönlü boşluklu işlevlerdir.



2.2.3 1-B Enküçük-Kareler Kafes Süzgeç Algoritması: Geometrik Yaklaşım

Enküçük karesel hatayı veren yinelemeli kafes süzgeç algoritmalarının elde edilmesi gibi problemlerin çözümü, özel olarak tanımlanmış uzaylar üzerinde izdüşüm işlemleri olarak yorumlanabilir. N. dereceyi güncelleştirmek için kullanılan kafes süzgeç yinelemesi, Gram-Schmidt işlemi ile ardışıl olarak dikleştirilen bir alt uzayın izdüşüm operatörlerinden elde edilir. Levinson algoritması, durağan bir işlevin kovaryans işlevine göre dikleştirilmesidir.

2.2.3.1 Örnek uzayı

Gerçek değerli bir vektör zaman dizisinin örneklerini gözlemlediğimizi düşünelim $\{y(n) \in \mathcal{R}, 0 \leq n \leq T\}$. Bu vektör zaman dizisi aşağıdaki gibi gösterilir (Lee et.al.,1981).

$$|y\rangle_T = [y(0), y(1), \dots, y(T)]^T \quad (2.58)$$

Burada, $|y\rangle_T, \mathcal{H}_T$ ile gösterilen örnek çarpım uzayında tanımlıdır.

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R} = \prod_0^T \mathcal{R} \quad (2.59)$$

$\mathcal{H}_T$ T+1 gözlem ile kapsanan bir doğrusal uzaydır (Hilbert uzayı olarak seçilebilir). Verilen bir $|x\rangle_T, |y\rangle_T \in \mathcal{H}_T$ için iç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\langle x|y\rangle_T \triangleq \sum_{n=0}^T x(n)y(n) \quad (2.60)$$

Burada, $\langle x|_T, |x\rangle_T$ 'nin devriğini göstermektedir. Öte yandan, Ergodik bir süreç için iç çarpım, $E[xy]$ örnek kovaryansının yaklaşıklığıdır.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle x|y\rangle_T \cong E[xy] \quad (2.61)$$

2.2.3.2 Dik izdüşüm

İki vektör $|x\rangle_T, |y\rangle_T \in \mathcal{H}_T$ aşağıdaki şart gerçekleşirse birbirine diktir.

$$\langle x|y\rangle_T = 0 \implies |x\rangle_T \perp |y\rangle_T \quad (2.62)$$

vektörler için tanımlanan (2.62) Diklik bağıntısı, uzaylara genişletilirse, $\mathcal{H}_T$ 'nin iki alt uzayı M ve N için diklik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\{|m\rangle \perp |n\rangle \quad \forall |m\rangle \in M \text{ ve } \forall |n\rangle \in N\} \implies M \perp N \quad (2.63)$$

Herhangi bir $|x\rangle_T \in \mathcal{H}_T$ yi $|y\rangle_T \in \mathcal{H}_T$ üzerine izdüşüren, P_y izdüşüm operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_y \triangleq |y\rangle_T \langle y|_T^{-1} \langle y|_T \quad (2.64)$$

Öyleki $P_y|x\rangle_T, |x\rangle_T$ 'nin $|y\rangle_T$ üzerine izdüşümü olacaktır.



2.2.3.3 Geçmiş Gözlemler Uzayı

$|z^{-1}y\rangle_T$ bir adım geciktirilmiş gözlem vektörü olsun. Bu durumda,

$$|z^{-1}y\rangle_T \triangleq [0, y(0), y(1), \dots, y(T-1)]^T \quad (2.65)$$

şeklinde olur. Buradaki tanımlamada önpencerelemiş veri kullanılmıştır, diğer bir deyişle $y(n) = 0$, $n < 0$ dır. Buradan, $\mathcal{H}_T$ nin bir alt uzayı olan, geçmiş gözlemler uzayı $Y_{1,n,T}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Y_{1,n,T} \triangleq \{|z^{-1}y\rangle_T, |z^{-2}y\rangle_T, \dots, |z^{-n}y\rangle_T\} \quad n \leq T \quad (2.66)$$

Buradan, $Y_{1,n,T}$ uzayı üzerine izdüşüm operatörü $P_{1,n,T}$

$$P_{1,n,T} = |Y_{1,n}\rangle_T \langle Y_{1,n}| Y_{1,n} \rangle_T^{-1} \langle Y_{1,n}|_T \quad n \leq T \quad (2.67)$$

şeklinde olacaktır. Burada,

$$|Y_{1,n}\rangle_T = [|z^{-1}y\rangle_T, |z^{-2}y\rangle_T, \dots, |z^{-n}y\rangle_T] \quad n \leq T \quad (2.68)$$

şeklindedir. Ayrıca, $Y_{1,n,T}$ uzayına, dik olan uzay üzerine izdüşüm operatörü,

$$P_{1,n,T}^\perp = 1 - P_{1,n,T} \quad (2.69)$$

olacaktır. Buna göre,

$$|x\rangle_T \in Y_{1,n,T} \implies P_{1,n,T}|x\rangle_T = |x\rangle_T \quad (2.70)$$

ve

$$P_{1,n,T}^\perp |x\rangle_T \perp |z^{-i}y\rangle_T \quad 1 \leq i \leq n |x\rangle_T \in H_T \quad (2.71)$$

şeklinde olacaktır.

2.2.3.4 İleri ve geri Yönlü Öngörü Hataları

$|y\rangle_T$ nin $Y_{1,n,T}$ uzayı üzerine izdüşümü $|y\rangle_T$ 'nin ,n geçmiş gözleme dayalı doğrusal enküçük-kareler yaklaşıklığını verir.

$$|e^{(N)}\rangle_T = |y\rangle_T - P_{1,n,T}|y\rangle_T = P_{1,n,T}^\perp |y\rangle_T \quad (2.72)$$

Burada, $|e^{(N)}\rangle_T$ 'nin bileşenleri $Y_{0,n,T}$ uzayında yer alır, ancak $Y_{1,n,T}$ uzayına diktir. Öte yandan, enküçükleştirilen öngörü hatasının kovaryansı,

$$R^{(N)}\rangle_T = \langle e^{(N)}|e^{(N)}\rangle_T = \langle e^{(N)}|y\rangle_T = \langle y|e^{(N)}\rangle_T \quad (2.73)$$

şeklindedir. Burada,



$$P_{1,n,T}^\perp P_{1,n,T}^\perp = P_{1,n,T}^\perp \quad (2.74)$$

özellği kullanılmıştır. $|e^{(N)}\rangle_T$ eşitliğinde P yi yerine koyulursa, öngörücü yapısı elde edilir.

$$|e^{(N)}\rangle_T = |y\rangle_T - |Y_{1,n}\rangle_T \langle Y_{1,n}|Y_{1,n}\rangle_T^{-1} \langle Y_{1,n}|y\rangle_T \quad (2.75)$$

Burada

$$\langle Y_{1,n}|Y_{1,n}\rangle_T^{-1} \langle Y_{1,n}|y\rangle_T = A^{(N)} \quad (2.76)$$

öngörücü katsayıları vektörüdür (Lee et.al., 1981). (2.76), (2.75) eşitliğinde yerine koyulursa, ileri-yönlü öngörü hatası

$$|e^{(N)}\rangle_T = |y\rangle_T - |Y_{1,n}\rangle_T A^{(N)} \quad (2.77)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde geri-yönlü öngörü hatası,

$$|\tilde{e}^{(N)}\rangle_T = |z^{-n}y\rangle_T - P_{0,n-1,T} |z^{-n}y\rangle_T \quad (2.78)$$

olacaktır. Geri-yönlü öngörü hatası'nın kovaryansı ise

$$\tilde{R}^{(N)}\rangle_T = \langle \tilde{e}^{(N)}|\tilde{e}^{(N)}\rangle_T = \langle \tilde{e}^{(N)}|z^{-n}y\rangle_T \quad (2.79)$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan, kafes süzgeç yapılarında bir birim geciktirilmiş geri-yönlü öngörü hata süzgeçleri karşımıza çıkar. Bunları aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$|z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T = P_{1,n,T}^\perp |z^{-n-1}y\rangle_T \quad (2.80)$$

2.2.3.5 Alt Uzayların Dik Ayrıştırılması

Doğrusal vektör uzaylarındaki standart sonuçlardan biride, dik ayrıştırma teoremidir (Helson, 1958). Dik ayrıştırma teoremi aşağıdaki gibi ifade edilebilir: Herhangi bir $|x\rangle_T$ vektörü bir Y alt uzayı üzerinde, iki karşılıklı dik parçaya tek bir şekilde ayrıştırılabilir. Parçalardan biri Y alt uzayına paralel, diğeri ise diktir. Yani,

$$|x\rangle_T = |y\rangle_T \oplus |z\rangle_T \quad |y\rangle_T \in Y \text{ ve } |z\rangle_T \perp Y \quad (2.81)$$

Burada, $\oplus$ dik ayrıştırmayı gösterir. (2.81) eşitliğinde $|y\rangle_T$, $|x\rangle_T$ 'in Y uzayına dik izdüşümüdür. Böylece, $|e^{(N)}\rangle_T$, $Y_{0,n,T}$ uzayında yer almasına rağmen, $Y_{1,n,T}$ uzayına dik olduğundan, $Y_{0,n,T}$, $Y_{1,n,T}$ ve $|e^{(N)}\rangle_T$ 'nin doğrudan toplamı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Y_{0,n,T} = Y_{1,n,T} \oplus |e^{(N)}\rangle_T \quad (2.82)$$

Buradan,

$$P_{0,n,T} = P_{1,n,T} + |e^{(N)}\rangle_T \langle e^{(N)}|e^{(N)}\rangle_T^{-1} \langle e^{(N)}\rangle_T \quad (2.83)$$

ve dik eşleniği,

$$P_{0,n,T}^\perp = P_{1,n,T}^\perp - |e^{(N)}\rangle_T \langle e^{(N)}|e^{(N)}\rangle_T^{-1} \langle e^{(N)}\rangle_T \quad (2.84)$$

olacaktır. Benzer şekilde, geri-yönlü öngörücü için,

$$P_{1,n+1,T} = P_{1,n,T} + |z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T \langle z^{-1}\tilde{e}^{(N)}|z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T^{-1} \langle z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T \quad (2.85)$$

şeklinde elde edilir. Bu ayrıştırmalar, kafes süzgeç yinelemelerinin elde edilmesinde anahtar rol oynarlar.



2.2.3.6 Kafes Süzgeç Yinelemeleri:Derece Güncelleştirme

(2.85) eşitliği, $|y\rangle_T$ ye uygulanarak, ileri-yönlü öngörücü için derece güncelleştirme eşitlikleri elde edilebilir.

$$|e^{(N+1)}\rangle_T = |e^{(N)}\rangle_T - |z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T \langle z^{-1}\tilde{e}^{(N)}|z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T^{-1} \langle z^{-1}\tilde{e}^{(N)}|e^{(N)}\rangle_T \quad (2.86)$$

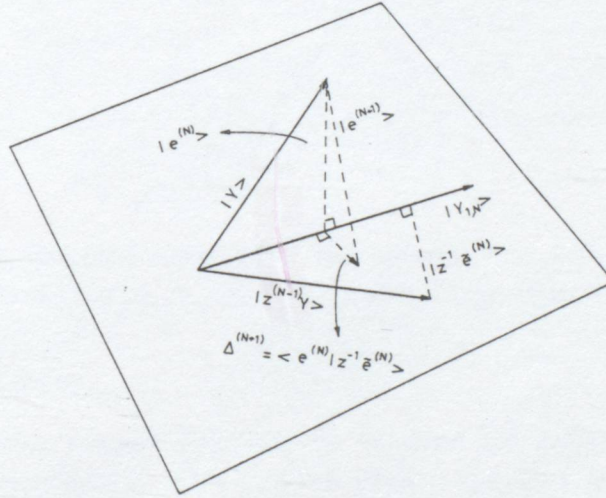
Burada T. örneği düşünecek olursak,

$$e^{(N+1)}(T) = e^{(N)}(T) - \Delta_T'^{(N+1)} \tilde{R}_{T-1}^{(N)-1} \tilde{e}_{T-1}^{(N)} \quad (2.87)$$

şeklinde olur. Burada, $\Delta_T'^{(N+1)}$ $\Delta_T^{(N+1)}$ 'nin devriğidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta_T'^{(N+1)} = \langle e^{(N)}|z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T = \langle y|P_{1,n,T}^\perp|z^{-n-1}y\rangle_T \quad (2.88)$$

ve N. derece kısmi ilişki olarak isimlendirilir. $\Delta_T^{(N+1)}$, $\{|z^{-1}y\rangle_T \dots \{|z^{-n}y\rangle_T\}$ sabit tutularak, $|y\rangle_T$ ile $|z^{-n-1}y\rangle_T$ arasında elde edilen kısmi ilişkidir. ve $\{|z^{-1}y\rangle_T \dots \{|z^{-n}y\rangle_T\}$ den çıkartılamaz. Şekil 2.10 da ileri- ve geri-yönlü yenileştirmeler geometrik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.10 İleri- ve geri-yönlü yenileştirmelerin geometrik gösterilimi

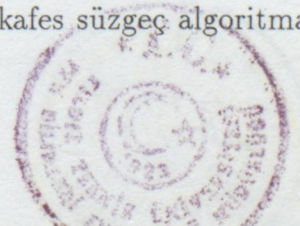
(2.87) eşitliğinde $\tilde{R}_{T-1}^{(N)-1}$, bir çeşit normalizasyondur. (2.86)'e benzer şekilde, izdüşüm işleminin $|z^{-n-1}y\rangle_T$ üzerine uygulanmasıyla geri-yönlü öngörü hatası elde edilir.

$$|\tilde{e}^{(N+1)}\rangle_T = |\tilde{e}^{(N)}\rangle_T - |e^{(N)}\rangle_T \langle e^{(N)}|e^{(N)}\rangle_T^{-1} \langle e^{(N)}|z^{-1}\tilde{e}^{(N)}\rangle_T \quad (2.89)$$

yada

$$\tilde{e}^{(N+1)}(T) = \tilde{e}^{(N)}(T-1) - \Delta_T^{(N+1)} \tilde{R}_T^{(N)-1} e^{(N)}(T) \quad (2.90)$$

Bu iki eşitlik matris yapısında birbiriyle birleştirilerek, kafes süzgeç algoritması elde edilir.



$$\begin{bmatrix} e^{(N+1)}(T) \\ \tilde{e}^{(N+1)}(T) \end{bmatrix} = \theta^{(N+1)}(T) \begin{bmatrix} e^{(N+1)}(T) \\ \tilde{e}^{(N+1)}(T-1) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Burada,

$$\theta^{(N+1)}(T) = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta_T'^{(N+1)} \tilde{R}_{T-1}^{(N)-1} \\ -\Delta_T^{(N+1)} R_T^{(N)-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

şeklindedir. Buradan, yansıma katsayılarına aşağıdaki bağıntıyla geçebiliriz.

$$K_T^{(N+1)} = \Delta_T'^{(N+1)} R_T^{(N)-1} \quad (2.93)$$

ve

$$\tilde{K}_T^{(N+1)} = \Delta_T^{(N+1)} \tilde{R}_{T-1}^{(N)-1} \quad (2.94)$$

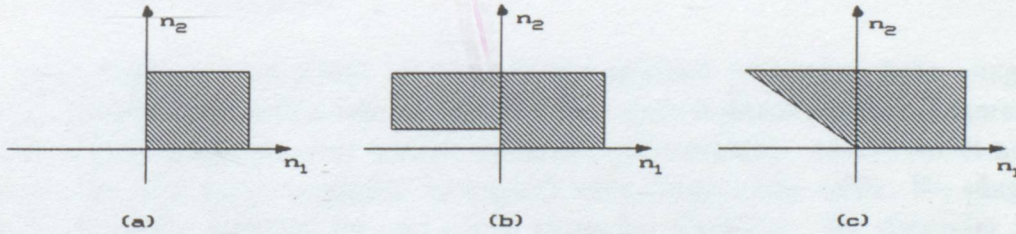
Durağan bir veri dizisi ve gerçel özilişki örnekleri için yansıma katsayıları birbirine eşittir.



$$R_{xx}(i, j; k, l) = R_{xx}(i - k, j - l) \quad (2.98)$$

1-B'lu sistemlerde sistemin çıkışı eğer girişin gelecekteki değerlerine bağımlı değilse, sistem *nedensel* dir denir. Doğrudan ötelemeyele değişmeyen nedensel bir sistemin impuls yanıtı $h(n)$, $n < 0$ için sıfırdır. Nedensellik 1-B sistemler için önemli bir faktör olmasına rağmen, tipik 2-B işaret işleme için çok önemli bir sınırlama değildir. verilen herhangi bir anda görüntüye yada 2-B işaret kaynağına ilişkin tüm çerçeve genellikle mevcuttur ve görüntü soldan-sağa, yukarıdan-aşağıya yada verilen herhangi bir yönde işlenebilir. Nedensellik 2-B ta çok önemli bir özellik olmamasına rağmen, 1-B' taki $h(n)$ nin belirli bir bölgede sıfırdan farklı olması kavramını 2-B ta genişletmek oldukça faydalıdır. 2-B Doğrusal ötelemeyele değişmeyen bir sistemde, $h(n_1, n_2)$ nin sıfırdan farklı olduğu bölge *destek bölgesi* adını alır. Eğer 2-B LÖD bir sistemin impuls yanıtı $h(n_1, n_2)$, çeyrek-düzlem destekli bir dizi ise sistem çeyrek-düzlem desteklidir denir. Çeyrek-düzlem destekli bir dizinin sıfırdan farklı tüm değerleri bir çeyrek-düzlem içerisinde yer alır. 2-B Doğrusal ötelemeyele değişmeyen bir sistemin impuls yanıtı orijinden çekilen ve aralarında 180° den küçük bir açı bulunan iki doğru arasında sınırlanmış ise sistem kama desteklidir denir. Burada görülebileceği gibi çeyrek-düzlem destek bölgesi kama-destek bölgesinin özel bir durumudur. Uygulamada karşılaşılan bir başka özel durum ise asimetrik yarı-düzlem destek bölgesi durumudur.

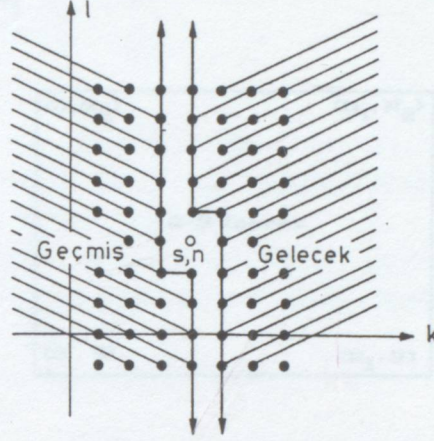
Yinelemeli bir yapı oluşturulabilmesi için sistem destek bölgesinin kama-destekli olması gerekir (Lim, 1984). Şekil 2.12, çeşitli destek bölgelerini göstermektedir.



Şekil 2.12 2-B yinelemeli hesaplanabilir sistemlere ilişkin çeşitli destek bölgeleri örnekleri. (a) Çeyrek-düzlem, (b) Asimetrik yarı-düzlem, (c) Kama destekli sistem.

Bu tezde, veri alanının çeyrek-düzlem destekli bir modelden üretildiği varsayılır ve model parametreleri çeyrek-düzlem AR model oluşturacak şekilde geçmiş değerlerinden özbağımlımlı olarak elde edilir. Çeyrek-düzlem destek bölgesine sahip 2-B işaretler, diğer destek bölgelerine göre, 1-B nedensel dizilere daha büyük benzerlik gösterirler.

2-B'ta nedenselliği ve yinelemeli hesaplanabilirliği daha iyi belirleyebilmek için, bir örneğin geçmiş ve geleceğinin hangi bölgeleri kapsadığını bilmek gereklidir. 2-B bir işarete ilişkin geçmiş, gelecek ve şimdiki değerler Şekil 2.13 te gösterildiği gibidir (Marzetta, 1980).

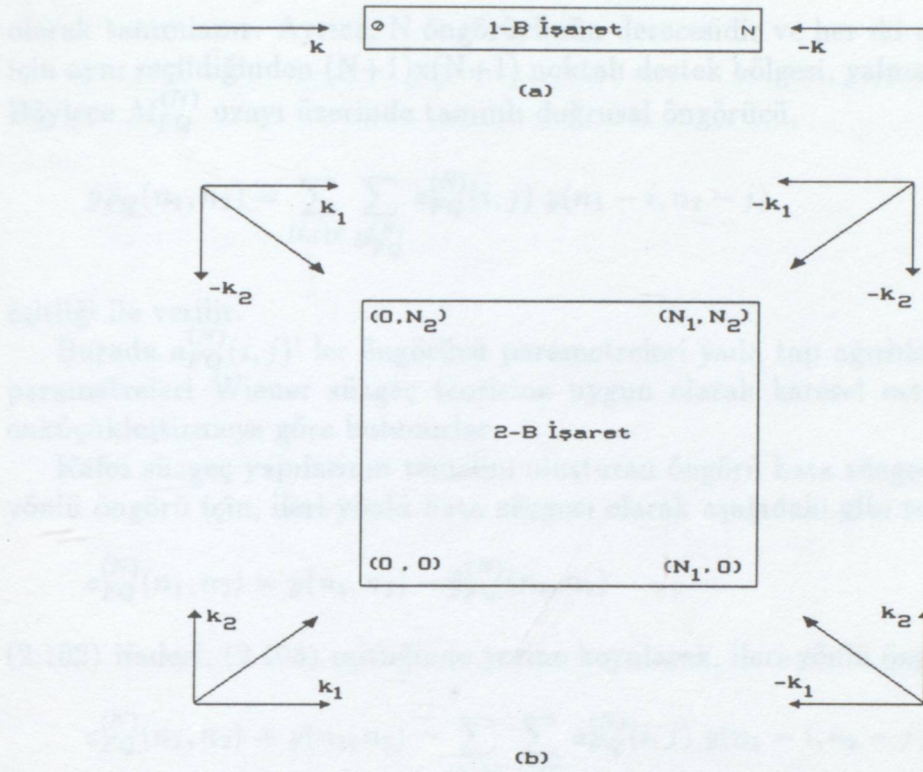


Şekil 2.13 2-B'lu bir işaretin geçmiş, gelecekteki değerleri ve şimdiki değeri.

1-B'ta minimum fazlı nedensel bir süzgeci spektral faktörizasyon kuramına göre iki farklı doğrultuda yineleyen iki kararlı süzgece ayırabiliriz.

$$S_{yy}(z) = \sigma_e^2 B(z) B(z^{-1}) \quad (2.99)$$

Bu süzgeçler, ileri-yönlü ve geri-yönlü öngörücü ve öngörü hata süzgeçlerinin temel prensibidir. 1-B'a benzer şekilde, 2-B çeyrek-düzlem destekli işaretler dört farklı yönde yineleyen dört kararlı süzgece ayrıştırılabilir. (Ekstrom et.al., 1976). Bu şekilde dört farklı öngörücü ve öngörü hata süzgeci elde edilir. Bu süzgeçlerden biri ileri-yönlü, diğerleri ise geri-yönlü süzgeçler olacaktır. Bu süzgeçler yineleme yönlerine göre birbirlerinden ayrılır ve sırasıyla birinci-çeyrek düzlem, ikinci-çeyrek düzlem, üçüncü-çeyrek düzlem ve dördüncü-çeyrek düzlem süzgeçler olarak isimlendirilirler. Şekil 2.14 te 1-B ve 2-B öngörücülerin yineleme yönleri görülmektedir.



Şekil 2.14 1- ve 2-B'lu öngörücülerin yineleme yönleri (a) 1-B'lu öngörü, (b) 2-B'lu öngörü. Burada oklar yineleme yönlerini göstermektedir.

Bu şekilden de görülebileceği gibi, $\hat{y}_{FQ}(n_1, n_2)$ ileri-yönlü öngörücü yada birinci-çeyrek düzlem öngörücüdür. Diğer 3 öngörücü ise yineleme yönlerinden en az biri negatif yönde olduğu için geri-yönlü öngörücüler olarak adlandırılır. Bunlar $\hat{y}_{SQ}(n_1, n_2)$, ikinci-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörücü, $\hat{y}_{FQ}(n_1, n_2)$, üçüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörücü, $\hat{y}_{SQ}(n_1, n_2)$, dördüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörücüdür.

2.3.2 İleri-Yönlü Öngörücü ve Öngörü hata Süzgeci

2-B çeyrek-düzlem ileri-yönlü öngörücü, 1-B'a benzer şekilde, öngörülecek noktayı sürecin geçmiş değerler uzayında elde eder. Çeyrek-düzlem öngörü ile ilgilendiğimizden öngörü destek bölgesi yalnızca bir çeyrek-düzlem için sıfırdan farklıdır. Bu şekildeki öngörü uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$M_{FQ}^{(N)} = \{y(n_1 - i, n_2 - j) \quad i, j \in D_{FQ}^{(N)}\} \quad (2.100)$$

burada

$$D_{FQ}^{(N)} = \{(i, j) \quad i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (0, 0)\} \quad (2.101)$$



olarak tanımlanır. Ayrıca, N öngörücünün derecesidir ve her iki uzamsal koordinat için aynı seçildiğinden $(N+1) \times (N+1)$ noktalı destek bölgesi, yalnızca N ile gösterilir. Böylece $M_{FQ}^{(N)}$ uzayı üzerinde tanımlı doğrusal öngörücü,

$$\hat{y}_{FQ}(n_1, n_2) = \sum_{(i,j) \in D_{FQ}^{(N)}} a_{FQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.102)$$

eşitliği ile verilir.

Burada $a_{FQ}^{(N)}(i, j)$ ' ler öngörücü parametreleri yada tap ağırlıklarıdır. Öngörücü parametreleri Wiener süzgeç teorisine uygun olarak karesel ortalama anlamında enküçükletmeye göre bulunurlar.

Kafes süzgeç yapılarının temelinı oluşturan öngörü hata süzgeçleri ise, 2-B ileri-yönlü öngörü için, ileri-yönlü hata süzgeci olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$e_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = y(n_1, n_2) - \hat{y}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) \quad (2.103)$$

(2.102) ifadesi, (2.103) eşitliğinde yerine koyularak, ileri-yönlü öngörü hatası için

$$e_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = y(n_1, n_2) - \sum_{(i,j) \in D_{FQ}^{(N)}} a_{FQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.104)$$

bağıntısı elde edilir. İleri-yönlü hata süzgecine ilişkin destek bölgesi Şekil 2.15(a) da görülmektedir. Öte yandan ileri-yönlü öngörü hatası gücü,

$$\varepsilon_{FQ}^{(N)} = E[|e_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)|^2] \quad (2.105)$$

olarak verilir.

Eniyi öngörücü katsayılarını elde edebilmek için hatanın karesel-ortalamasının katsayılarına göre türevi, bütün (i, j) çiftleri için sıfıra eşitlenerek elde edilen normal denklemler çözülür.

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D_{FQ}^{(N)}} \sum a_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1 - i, n_2 - j) = r(-i, -j) \quad (i, j) \in D_{FQ}^{(N)} \quad (2.106)$$

2.3.3 Geri-Yönlü Öngörücü ve Geri-Yönlü Öngörü Hata Süzgeçleri

1-B'un aksine 2-B çeyrek-düzlem destekli bir süreç için bir yerine üç adet geri-yönlü öngörü hata süzgeci mevcuttur. Geri-yönlü öngörücüler için geri-yönlü öngörü uzayı, temel olarak gelecek gözlemlerden oluşmakta ise de, ilgilenilen geri-yönlü öngörücülere bağlı olarak farklı noktaları içerecektir. Bu nedenle, yukarıda bahsedilen üç farklı geri-yönlü öngörücü ayrı ayrı tartışılacaktır.



Üçüncü-Çeyrek Düzlem Geri-Yönlü Öngörücü

Üçüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörücü, 1-B'daki geri-yönlü öngörücünün 2-B karşılığıdır. 1-B'a benzer olarak, öngörü uzayı tamamen gelecekteki örneklerden oluşur.

$$\tilde{M}_{FQ}^{(N)} = \{y(n_1 - i, n_2 - j) \quad i, j \in \tilde{D}_{FQ}^{(N)}\} \quad (2.107)$$

burada

$$\tilde{D}_{FQ}^{(N)} = \{(i, j) \quad i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (N, N)\} \quad (2.108)$$

şekilindedir. Böylece öngörücü

$$\hat{y}_{FQ}(n_1 - N, n_2 - N) = \sum_{(i,j) \in \tilde{D}_{FQ}^{(N)}} \tilde{a}_{FQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.109)$$

eşitliği ile verilir. Buradan, üçüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörü hatası,

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) &= y(n_1 - N, n_2 - N) - \hat{y}_{FQ}^{(N)}(n_1 - N, n_2 - N) \\ &= y(n_1 - N, n_2 - N) - \sum_{(i,j) \in \tilde{D}_{FQ}^{(N)}} \tilde{a}_{FQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \end{aligned} \quad (2.110)$$

şeklinde yazılır. $\tilde{a}_{FQ}^{(N)}(i, j)$ katsayıları, üçüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörü hatasının karesel-ortalamasını katsayılarla göre enküçükleştirerek bulunur.

$$\frac{\partial E[|\tilde{e}_{FQ}^{(N)}|^2]}{\partial \tilde{a}_{FQ}^{(N)}} = 0 \quad (2.111)$$

Herbir (i, j) çifti için yukarıdaki eşitlik sağlanacak olursa, 2-B üçüncü-çeyrek düzlem normal eşitlikler aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\sum_{(n_1, n_2) \in \tilde{D}_{FQ}^{(N)}} \tilde{a}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1 - i, n_2 - j) = r(N - i, N - j) \quad (i, j) \in \tilde{D}_{FQ}^{(N)} \quad (2.112)$$

(2.106) ve (2.112) karşılaştırılırsa, üçüncü-çeyrek düzlem öngörücü katsayılarının, birinci-çeyrek düzlem katsayıları ile aynı olduğu, ancak ters sırada dizildiği görülür. Bu özellik aşağıda verilmiştir.

$$\tilde{a}_{FQ}^{(N)}(i, j) = a_{FQ}^{(N)}(N - i, N - j) \quad (2.113)$$

Bu nedenle katsayıların bulunmasında yalnızca birinci-çeyrek düzlemde tanımlanan normal eşitliklerin çözülmesi yeterli olacaktır.

İkinci- ve Dördüncü-Çeyrek Düzlem Öngörücüler

Birinci-çeyrek düzlem öngörücü ileri-yönlü olarak kabul edilirse, İkinci- ve dördüncü-çeyrek düzlem öngörücüler geri-yönlü öngörücüler olarak adlandırılır. Bu öngörücüler 2-B'un ortaya çıkardığı yeni kavramlardır ve 1-B'ta karşılıkları yoktur. 1-B işaretler yalnızca bir doğrultuda ilerler ve örnekler ardışıl olarak bu doğrultuda oluşur. Buna karşılık 2-B işaretler, aynı anda iki farklı doğrultuda oluşur. Bu nedenle, bir ileri-yönlü öngörücü ve ona zıt doğrultuda yineleyen bir geri-yönlü öngörücü, 1-B'un aksine 2-B'ta yeterli olmayacaktır. Bu olay, çeyrek düzlem destekli süreçlerin 2-B spektral ayrıştırılmasıyla da tutarlıdır (Ekstrom et.al., 1976). Buna göre, 2-B süzgeç dört farklı doğrultuda yineleyen dört farklı süzgece ayrıştırılabilir. Aşağıda, ikinci-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörücü için öngörü uzayı ve öngörücü yapısı tanımlanmıştır.

$$M_{SQ}^{(N)} = \{y(n_1 - i, n_2 - j) \quad i, j \in D_{SQ}^{(N)}\} \quad (2.114)$$

burada

$$D_{SQ}^{(N)} = \{(i, j) \quad i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (N, 0)\} \quad (2.115)$$

dir. Böylece, ikinci-çeyrek düzlem öngörücü,

$$\hat{y}_{SQ}(n_1 - N, n_2) = \sum_{(i,j) \in D_{SQ}^{(N)}} \sum a_{SQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.116)$$

eşitliği ile verilir. Buna ilişkin ikinci-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörü hatası,

$$e_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = y(n_1 - N, n_2) - \sum_{(i,j) \in D_{SQ}^{(N)}} \sum a_{SQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.117)$$

olacaktır. İkinci-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörü hatasının karesel ortalaması katsayılarına göre enküçükleştirilerek,

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D_{SQ}^{(N)}} \sum a_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1 - i, n_2 - j) = r(N - i, -j) \quad (i, j) \in D_{SQ}^{(N)} \quad (2.118)$$

normal eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitliklerin çözümü ikinci-çeyrek düzlem geçiş işlevi parametreleri $a_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ 'leri verir.

Öte yandan, dördüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörücü için öngörü uzayı ve öngörücü yapısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tilde{M}_{SQ}^{(N)} = \{y(n_1 - i, n_2 - j) \quad i, j \in \tilde{D}_{SQ}^{(N)}\} \quad (2.119)$$

burada

$$\tilde{D}_{SQ}^{(N)} = \{(i, j) \quad i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (0, N)\} \quad (2.120)$$

Buradan, dördüncü-çeyrek düzlem öngörücü,

$$\hat{y}_{SQ}(n_1, n_2 - N) = \sum_{(i,j) \in \tilde{D}_{SQ}^{(N)}} \tilde{a}_{SQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.121)$$

olarak yazılır. Buna ilişkin dördüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörü hatası ise,

$$\tilde{e}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = y(n_1, n_2 - N) - \sum_{(i,j) \in \tilde{D}_{SQ}^{(N)}} \tilde{a}_{SQ}^{(N)}(i, j) y(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.122)$$

şeklinde olacaktır.

Dördüncü-çeyrek düzlem geri-yönlü öngörü hatasının karesel ortalaması katsayılarına göre enküçükleştirilerek,

$$\sum_{(n_1, n_2) \in \tilde{D}_{SQ}^{(N)}} \tilde{a}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1 - i, n_2 - j) = r(-i, N - j) \quad (i, j) \in \tilde{D}_{SQ}^{(N)} \quad (2.123)$$

dördüncü-çeyrek düzlem normal denklemleri elde edilir. Dördüncü-çeyrek düzleme ilişkin normal denklemler çözülerek $\tilde{a}_{SQ}^{(N)}(i, j)$ katsayıları elde edilecek olursa (2.113) eşitliğine benzer şekilde,

$$\tilde{a}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = a_{SQ}^{(N)}(n_1, N - n_2) \quad (2.124)$$

olduğu görülür.

(2.113) ve (2.124)' te verilen bu simetri nedeniyle, üçüncü- ve dördüncü-çeyrek düzlemde tanımlanan notasyonlar, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlemde belirtilen notasyonların üzerine $\sim$ eklenerek gösterilir. (2.113) ve (2.124) bağıntılarından birinci- ve üçüncü-, ikinci- ve dördüncü çeyrek düzleme ilişkin geçiş işlevlerine ilişkin spektrumların birbiri ile aynı olduğu görülür. Şekil 2.15 te ileri- ve geri-yönlü öngörü hata süzgeçlerine ilişkin, öngörü destek bölgeleri gösterilmiştir.

$$\hat{y}_{SQ}(k_1, k_2) = - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \tilde{a}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) y(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \quad (2.125)$$

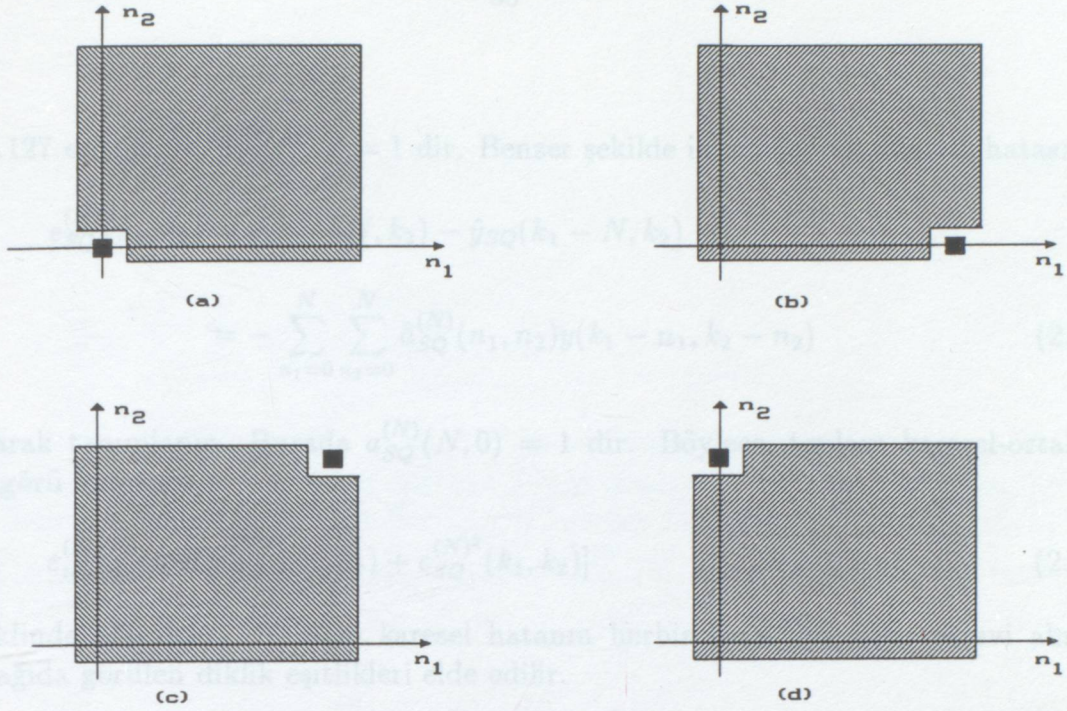
Buradan,

$$\hat{y}(k_1, k_2) = \hat{y}_{SQ}(k_1, k_2) + \hat{e}_{SQ}(k_1, k_2) \quad (2.126)$$

olarak yazılır. Burada $\hat{e}_{SQ}(k_1, k_2)$, ileriye doğru değeri ile öngörülen değeri arasındaki birinci-çeyrek düzlem öngörü hatasıdır ve aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} \hat{e}_{SQ}(k_1, k_2) &= y(k_1, k_2) - \hat{y}_{SQ}(k_1, k_2) \\ &= - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \tilde{a}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) y(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \end{aligned}$$





Şekil 2.15 İleri- ve geri-yönlü öngörü hata süzgeçlerine ilişkin destek bölgeleri. (a) Birinci-çeyrek düzlem öngörücü, (b) ikinci-çeyrek düzlem öngörücü, (c) üçüncü-çeyrek düzlem öngörücü, (d) dördüncü-çeyrek düzlem öngörücü destek bölgeleri.

İlişki matrisinin dört çeyrek düzlemde de simetrik olması durumunda, tüm geri-yönlü öngörücü katsayıları yalnızca ileri-yönlü öngörücü katsayılarını kullanarak, (2.113) ve (2.124)'e benzer şekilde elde edilir.

2.3.4 2-B Boşluklu işlevler

2-B doğrusal öngöründe, $y(k_1, k_2)$ işareti birinci-çeyrek düzlemde komşu örneklerinin doğrusal birleşimi olarak öngörülebilir.

$$\hat{y}_{FQ}(k_1, k_2) = - \sum_{\substack{n_1=0 \\ (n_1, n_2) \neq (0,0)}}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) y(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \quad (2.125)$$

Buradan,

$$y(k_1, k_2) = \hat{y}_{FQ}(k_1, k_2) + e_{FQ}(k_1, k_2) \quad (2.126)$$

olarak yazılır. Burada $e_{FQ}(k_1, k_2)$, sürecin gerçek değeri ile öngörülen değeri arasındaki birinci-çeyrek düzlem öngörü hatasıdır ve aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} e_{FQ}^{(N)}(k_1, k_2) &= y(k_1, k_2) - \hat{y}_{FQ}(k_1, k_2) \\ &= - \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) y(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \end{aligned} \quad (2.127)$$

(2.127 eşitliğinde, $\hat{a}_{FQ}^{(N)}(0,0) = 1$ dir. Benzer şekilde ikinci-çeyrek düzlem hatası

$$\begin{aligned} e_{SQ}^{(N)}(k_1, k_2) &= y(k_1 - N, k_2) - \hat{y}_{SQ}(k_1 - N, k_2) \\ &= - \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) y(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \end{aligned} \quad (2.128)$$

olarak tanımlanır. Burada $\hat{a}_{SQ}^{(N)}(N,0) = 1$ dir. Böylece, toplam karesel-ortalama öngörü hatası,

$$\varepsilon_{topl}^{(N)} = E[e_{FQ}^{(N)^2}(k_1, k_2) + e_{SQ}^{(N)^2}(k_1, k_2)] \quad (2.129)$$

şeklinde olacaktır. Toplam karesel hatanın herbir katsayıya göre türevi alınırsa aşağıda görülen diklik eşitlikleri elde edilir.

$$E[e_{FQ}^{(N)^2}(k_1, k_2) y(k_1 - i, k_2 - j)] = 0 \quad i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (0, 0) \quad (2.130)$$

ve

$$E[e_{SQ}^{(N)^2}(k_1, k_2) y(k_1 - i, k_2 - j)] = 0 \quad i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (N, 0) \quad (2.131)$$

(2.127) ve (2.128) eşitlikleri (2.130) ve (2.131) eşitliklerinde yerine koyularak, diklik eşitlikleri için daha klasik ifadeler elde edilir. Birinci-çeyrek düzlem için,

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) E[y(k_1 - n_1, k_2 - n_2) y(k_1 - i, k_2 - j)] \\ &= \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1 - i, n_2 - j) = 0 \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (0, 0)$$

ve benzer şekilde ikinci-çeyrek düzlem için,

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1 - i, n_2 - j) = 0 \quad (2.133)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (N, 0)$$

elde edilir. Böylece, enküçük karesel öngörü hatası aşağıdaki gibi verilir.

$$\varepsilon_{min}^{(N)} = \varepsilon_{FQ}^{(N)} + \varepsilon_{SQ}^{(N)} \quad (2.134)$$

Burada



$$\varepsilon_{FQ}^{(N)} = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1, n_2) \quad (2.135)$$

ve

$$\varepsilon_{SQ}^{(N)} = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \hat{a}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) R(n_1, n_2) \quad (2.136)$$

şeklindedir. (2.132), (2.133) ve (2.134)' te verilen eşitliklerin çözümü için, 1-B de elde edilen sonuçlar doğrudan doğruya 2-B ye genişletilemez. Bu aşamada, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem modeller için N. derece boşluklu işlevler $g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ yi tanımlayalım. $g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ boşluklu işlevleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) &= E[e_{FQ}^{(N)}(k_1, k_2)y(k_1 - n_1, k_2 - n_2)] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \hat{a}_{FQ}^{(N)}(i, j)y(k_1 - i, k_2 - j)\right)y(k_1 - n_1, k_2 - n_2)\right] \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \hat{a}_{FQ}^{(N)}(i, j) R(n_1 - i, n_2 - j) \end{aligned} \quad (2.137)$$

ve

$$\begin{aligned} g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) &= E[e_{SQ}^{(N)}(k_1, k_2)y(k_1 - n_1, k_2 - n_2)] \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \hat{a}_{SQ}^{(N)}(i, j) R(n_1 - i, n_2 - j) \end{aligned} \quad (2.138)$$

Boşluklu işlevler $g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$, Şekil 2.16(a) ve Şekil 2.16(b)' de görüldüğü gibi $(N+1)^2 - 1$ adet boşluğa sahiptir. $g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ 'ye ilişkin boşluk koşulları aşağıdaki gibidir. $g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ için:

$$g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (n_1, n_2) \neq (0, 0) \\ \varepsilon_{FQ}^{(N)} & (n_1, n_2) = (0, 0) \end{cases} \quad (2.139)$$

ve $g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ için:

$$g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (n_1, n_2) \neq (N, 0) \\ \varepsilon_{SQ}^{(N)} & (n_1, n_2) = (N, 0) \end{cases} \quad (2.140)$$



Dikkat edilirse, (2.139) ve (2.140) eşitlikleri ile verilen boşluk koşulları, (2.132) ve (2.133) eşitlikleri ile aynıdır. (2.137) ve (2.138) de verilen boşluklu işlevler z dönüşümü cinsinden de yazılabilir.

$$G_{FQ}^{(N)}(z_1, z_2) = \hat{A}_{FQ}^{(N)}(z_1, z_2) S_{yy}(z_1, z_2) \quad (2.141)$$

$$G_{SQ}^{(N)}(z_1, z_2) = \hat{A}_{SQ}^{(N)}(z_1, z_2) S_{yy}(z_1, z_2) \quad (2.142)$$

Burada $S_{yy}(z_1, z_2)$, $y(k_1, k_2)$ 'nin spektral güç yoğunluğudur. Birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem öngörü hata süzgeci geçiş işlevleri $\hat{A}_{FQ}^{(N)}(z_1, z_2)$ ve $\hat{A}_{SQ}^{(N)}(z_1, z_2)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\hat{A}_{FQ}^{(N)}(z_1, z_2) = \mathbf{Z}_1^T \hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(N)} \mathbf{Z}_2 \quad (2.143)$$

ve

$$\hat{A}_{SQ}^{(N)}(z_1, z_2) = \mathbf{Z}_1^T \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(N)} \mathbf{Z}_2 \quad (2.144)$$

Burada

$$\hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{a}_{FQ}^{(N)}(0, 1) & \dots & \hat{a}_{FQ}^{(N)}(0, N) \\ \hat{a}_{FQ}^{(N)}(1, 0) & \hat{a}_{FQ}^{(N)}(1, 1) & \dots & \hat{a}_{FQ}^{(N)}(1, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{FQ}^{(N)}(N, 0) & \hat{a}_{FQ}^{(N)}(N, 1) & \dots & \hat{a}_{FQ}^{(N)}(N, N) \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

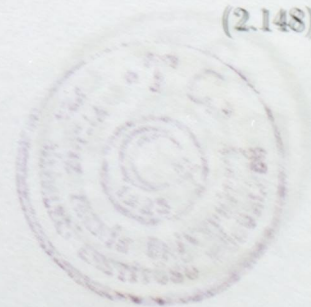
$$\hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(N)} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{SQ}^{(N)}(0, 0) & \hat{a}_{SQ}^{(N)}(0, 1) & \dots & \hat{a}_{SQ}^{(N)}(0, N) \\ \hat{a}_{SQ}^{(N)}(1, 0) & \hat{a}_{SQ}^{(N)}(1, 1) & \dots & \hat{a}_{SQ}^{(N)}(1, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \hat{a}_{SQ}^{(N)}(N, 1) & \dots & \hat{a}_{SQ}^{(N)}(N, N) \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

ve

$$\mathbf{Z}_i = [1 \ z_i^{-1} \ z_i^{-2} \ \dots \ z_i^{-N}] \quad i = 1, 2 \quad (2.147)$$

Bu aşamada, aşağıdaki gibi verilen bir $\mathbf{A}^{(N)}$ katsayı matrisi cinsinden N . derece, 2-B geri-yönlü polinom tanımlayabiliriz.

$$A^{(N)}(z_1, z_2) = \mathbf{Z}_1^T \hat{\mathbf{A}}^{(N)} \mathbf{Z}_2 \quad (2.148)$$



Buna karşı düşen $\tilde{A}^{(N)}(z_1, z_2)$ ile gösterdiğimiz geri-yönlü polinom, aynı derecede ve katsayıları ters sırada dizilmiştir.

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{(N)}(z_1, z_2) &= \mathbf{Z}_1^T \mathbf{J} \mathbf{A}^{(N)} \mathbf{J} \mathbf{Z}_2 \\ &= \mathbf{Z}_1^T \tilde{\mathbf{A}}^{(N)} \mathbf{Z}_2 \\ &= z_1^{-N} z_2^{-N} A^{(N)}(z_1^{-1}, z_2^{-1})\end{aligned}\quad (2.149)$$

Artık, üçüncü- ve dördüncü-çeyrek düzlem boşluklu işlevler, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevlerin geri-yönlü polinomları olarak sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\tilde{G}_{FQ}^{(N)}(z_1, z_2) = z_1^{-N} z_2^{-N} G_{FQ}^{(N)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (2.150)$$

ve

$$\tilde{G}_{SQ}^{(N)}(z_1, z_2) = z_1^{-N} z_2^{-N} G_{SQ}^{(N)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (2.151)$$

Bu yeni boşluklu işlevlerin katsayı matrisleri birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem katsayı matrislerinin satır ve sütun terslenmesiyle aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(N)} = \mathbf{J} \hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(N)} \mathbf{J} \quad (2.152)$$

ve

$$\hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(N)} = \mathbf{J} \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(N)} \mathbf{J} \quad (2.153)$$

Burada $\mathbf{J}$ (2.24)'te verilen değişim matrisidir. Öte yandan, üçüncü- ve dördüncü-çeyrek düzlem boşluklu işlevler uzamsal koordinatlarda, aşağıdaki gibi yazılır.

Üçüncü-çeyrek düzlem:

$$\tilde{g}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \tilde{a}_{FQ}^{(N)}(i, j) R(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.154)$$

ve üçüncü-çeyrek düzlem boşluk koşulları,

$$\tilde{g}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (n_1, n_2) \neq (N, N) \\ \tilde{\varepsilon}_{FQ}^{(N)} & (n_1, n_2) = (N, N) \end{cases} \quad (2.155)$$

Dördüncü-çeyrek düzlem:



$$\tilde{g}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \tilde{a}_{SQ}^{(N)}(i, j) R(n_1 - i, n_2 - j) \quad (2.156)$$

ve dördüncü-çeyrek düzlem boşluk koşulları,

$$\tilde{g}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (n_1, n_2) \neq (0, N) \\ \tilde{\epsilon}_{SQ}^{(N)} & (n_1, n_2) = (0, N) \end{cases} \quad (2.157)$$

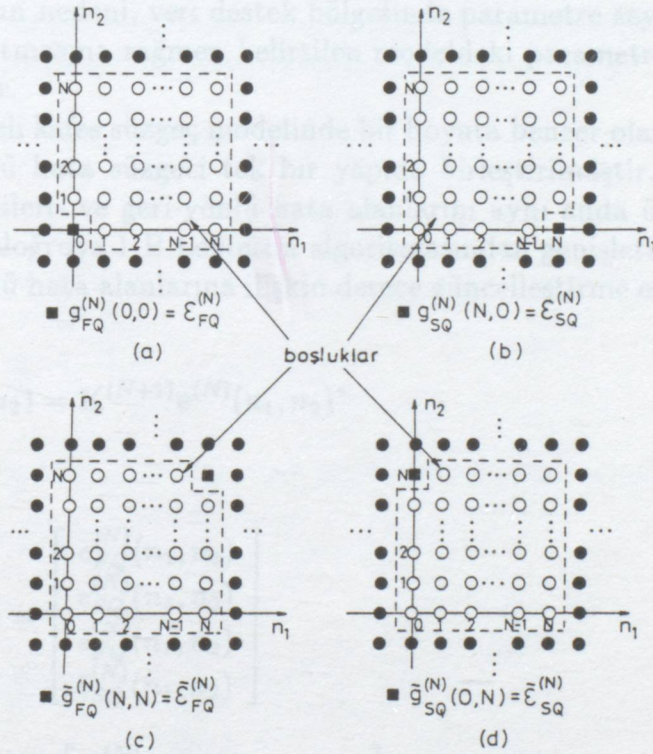
şeklinde olacaktır. (2.150) ve (2.151) eşitliklerinden

$$\tilde{g}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = g_{FQ}^{(N)}(N - n_1, N - n_2) \quad (2.158)$$

ve

$$\tilde{g}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = g_{SQ}^{(N)}(N - n_1, N - n_2) \quad (2.159)$$

olduğu gösterilebilir. $\tilde{g}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ ve $\tilde{g}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$ boşluklu işlevleri Şekil 2.16(c) ve Şekil 2.16(d) de görülmektedir.



Şekil 2.16 N. derece 2-B boşluklu işlevler. (a) $g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$, (b) $g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$, (c) $\tilde{g}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2)$, (d) $\tilde{g}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2)$



2.4 2-B Üç-Parametrelili Kafes Süzgeç Modeli ve Dört-Alana Dayalı Diğer Modeller

Literatürde, 2-B çeyrek-düzlem AR alanların modellenmesinde dört-öngörü hata alanına dayalı çeşitli kafes süzgeç modelleri mevcuttur. Bunların ilki ve temel olanı Parker ve Kayran'ın (Parker et.al., 1984) üç-parametrelili kafes süzgeç modelidir. daha sonraki yıllarda bu modeli temel alan ve çeşitli iyileştirmeler içeren dört-alanlı değişik kafes süzgeç algoritmaları geliştirilmiştir. Bu yapılar aşağıda sırasıyla incelenecektir.

2.4.1 Üç-parametrelili kafes süzgeç modeli (ÜPKS):

Bu tezde, Parker ve Kayran'ın (Parker et.al., 1984), Bölüm 2.3 te anlatılan dört adet çeyrek-düzlem öngörü hata alanına dayalı, üç-parametrelili kafes süzgeç modeli temel alınmış ve bu model eksiksiz bir kafes süzgeç modeline dönüştürülmüştür. Üç-parametrelili kafes süzgeç modeli çeyrek-düzlemde tanımlı dört adet öngörü hata alanını tek bir kafes yapısı üzerinde birleştirir. Her ne kadar bu kafes süzgeç algoritmasının uygulanması basit ve belirli özilişki özelliklerine sahip veri alanları için yeterli sonuçlar verebiliyorsa da, bu model tüm 2-B çeyrek-düzlem AR modelleri temsil edemez. Bunun nedeni, veri destek bölgesinde parametre sayısının dereceye göre karesel olarak artmasına rağmen belirtilen modeldeki parametre sayısının doğrusal olarak artmasıdır.

Üç-parametrelili kafes süzgeç modelinde bir boyuta benzer olarak, ileri- ve üç adet geri-yönlü öngörü hata süzgeci tek bir yapıda birleştirilmiştir. Verilen 2-B kafes süzgeç N.derece ileri- ve geri-yönlü hata alanlarını aynı anda üretmektedir. Algoritma doğrudan doğruya 1-B Levinson algoritmasından genişletilerek elde edilebilir. İleri- ve geri-yönlü hata alanlarına ilişkin derece güncelleştirme eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$e^{(N+1)}(n_1, n_2) = \mathbf{K}^{(N+1)} \mathbf{e}^{(N)}(n_1, n_2)^* \quad (2.160)$$

Burada,

$$\mathbf{e}^{(N)}(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} e_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) \\ e_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

$$\mathbf{e}^{(N)}(n_1, n_2)^* = \begin{bmatrix} e_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) \\ e_{SQ}^{(N)}(n_1 - 1, n_2) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(N)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2 - 1) \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

ve



$$\mathbf{K}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{10}^{(N)} & -k_{11}^{(N)} & -k_{01}^{(N)} \\ -k_{10}^{(N)} & 1 & -k_{01}^{(N)} & -k_{11}^{(N)} \\ -k_{11}^{(N)} & -k_{01}^{(N)} & 1 & -k_{10}^{(N)} \\ -k_{01}^{(N)} & -k_{11}^{(N)} & -k_{10}^{(N)} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

şeklindedir. Burada $k_{ij}^{(N)}$ ler 2-B kafes süzgeç parametreleri yada yansıma katsayıları olarak isimlendirilir. Bu katsayıların bilindiği varsayıldığında ve sıfırıncı derece modelden başlandığında, rasgele süreç dört adet birinci derece öngörü hata alanı üretecektir. Burada $N=0$ için $e_{FQ}^{(0)}(n_1, n_2) = e_{SQ}^{(0)}(n_1, n_2) = \tilde{e}_{FQ}^{(0)}(n_1, n_2) = \tilde{e}_{SQ}^{(0)}(n_1, n_2) = y(n_1, n_2)$ dir. Daha sonra, bu dört alanın verisi daha yüksek derecelerdeki öngörü hata alanlarını hesaplamak için kullanılacaktır. Öngörü hata alanlarının üretilmesi Şekil 2.17 te görülmektedir. Burada, yansıma katsayısı matrisi $\mathbf{K}^{(N)}$ simetrik olarak düşünülmüştür. Ancak, bu durum özilişki matrisinin aşağıdaki gibi yalnızca dört çeyrek-düzlemde de simetrik olması durumunda geçerlidir.

$$r(k_1, k_2) = r(-k_1, k_2) = r(k_1, -k_2) = r(-k_1, -k_2) \quad (2.164)$$

Her bir derecede kafes süzgeç yansıma katsayılarını hesaplayabilmek için, öngörü hata alanlarının karesel ortalaması, yansıma katsayılarına göre enküçükleştirilir. N . derece model için, bu yapıda hatanın karesel ortalaması aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Q^{(N)} = Tr[e^{(N)}(n_1, n_2) \Lambda_D e^{(N)}(n_1, n_2)^T] \quad (2.165)$$

Burada,

$$\Lambda_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

şeklindedir. Bu en küçükleştirme, bize bu modele ilişkin normal eşitliği üretecektir.

$$\mathbf{R}^{(N)} \mathbf{k}^{(N+1)} = \mathbf{r}^{(N)} \quad (2.167)$$

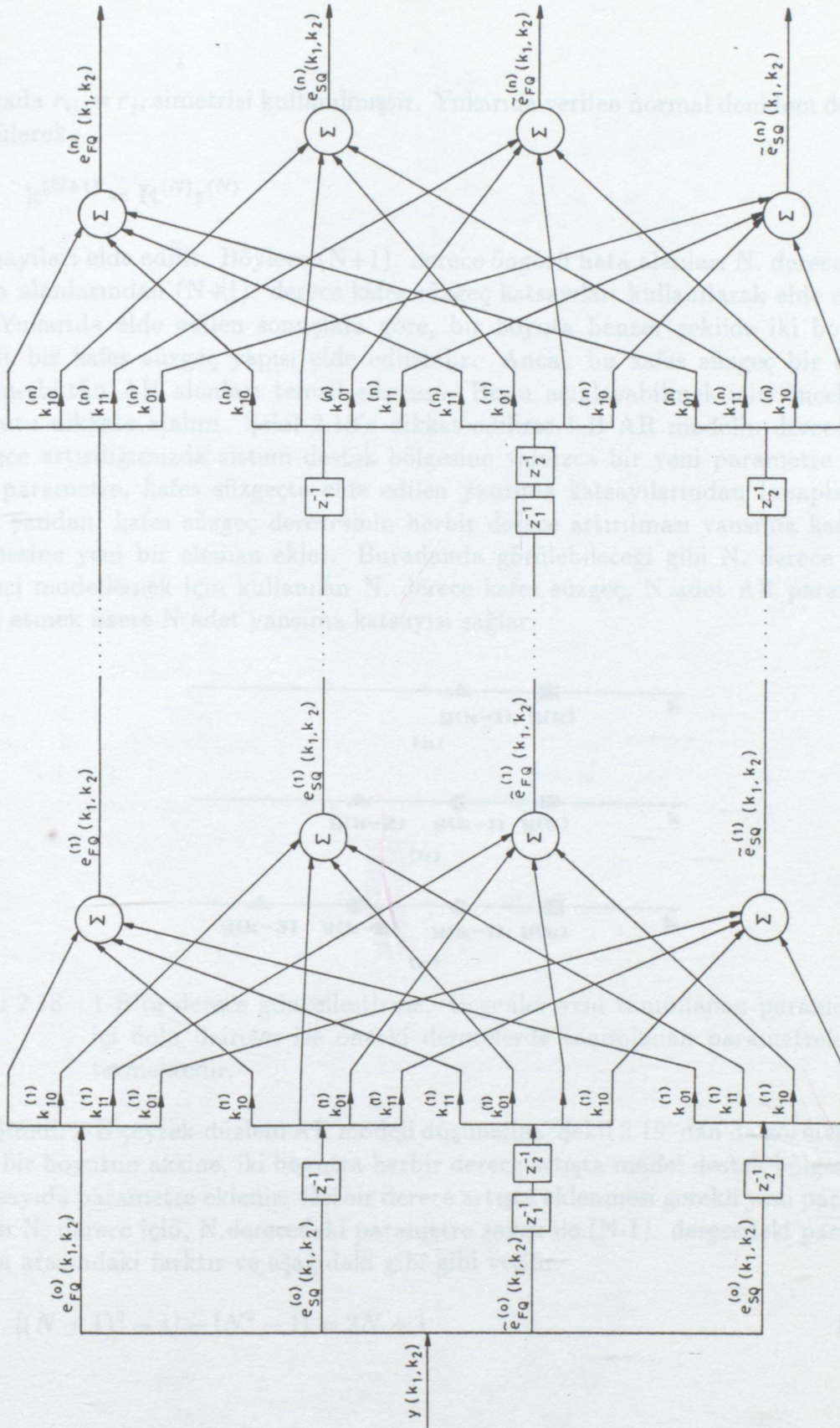
Burada,

$$\mathbf{k}^{(N+1)} = [k_{10}^{(N+1)} \ k_{11}^{(N+1)} \ k_{11}^{(N+1)T}]^T \quad (2.168)$$

$$\mathbf{R}^{(N)} = \begin{bmatrix} r_{11}^{(N)} & r_{12}^{(N)} & r_{13}^{(N)} \\ r_{12}^{(N)} & r_{22}^{(N)} & r_{23}^{(N)} \\ r_{13}^{(N)} & r_{23}^{(N)} & r_{33}^{(N)} \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

ve

$$\mathbf{r}^{(N)} = [r_{11}^{(N)} \ r_{21}^{(N)} \ r_{31}^{(N)}]^T \quad (2.170)$$



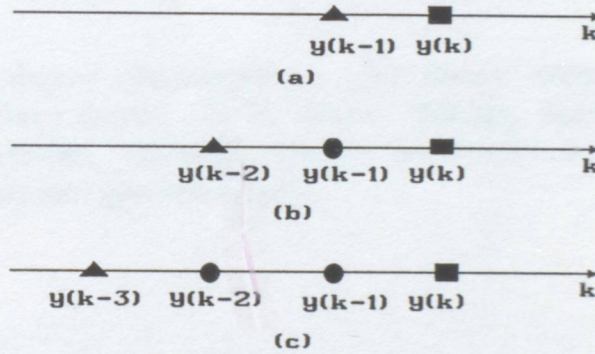
Şekil 2.17 2-B'lu üç-parametrel kafe süzgeçte öngörü hatalarının üretilmesi
(Analiz modeli)

Burada $r_{ij} = r_{ji}$ simetrisi kullanılmıştır. Yukarıda verilen normal denklem doğrudan çözülerek,

$$\mathbf{k}^{(N+1)} = \mathbf{R}^{(N)} \mathbf{r}^{(N)} \quad (2.171)$$

katsayıları elde edilir. Böylece $(N+1)$. derece öngörü hata alanları N . derece öngörü hata alanlarından $(N+1)$. derece kafes süzgeç katsayıları kullanılarak elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlara göre, bir boyuta benzer şekilde iki boyuttada sabit bir kafes süzgeç yapısı elde edilebilir. Ancak bu kafes süzgeç bir boyutun aksine, bütün AR alanları temsil edemez. Bunu açıklayabilmek için öncelikle bir boyutu dikkate alalım. Şekil 2.18'e dikkat edilirse 1-B AR modelin derecesini bir derece artırdığımızda sistem destek bölgesine yalnızca bir yeni parametre eklenir. Bu parametre, kafes süzgeçte elde edilen yansıma katsayılarından hesaplanabilir. Öte yandan, kafes süzgeç derecesinin her bir derece artırılması yansıma katsayıları kümesine yeni bir eleman ekler. Buradanda görülebileceği gibi N . derece bir AR süreci modellemek için kullanılan N . derece kafes süzgeç, N adet AR parametreyi elde etmek üzere N adet yansıma katsayısı sağlar.

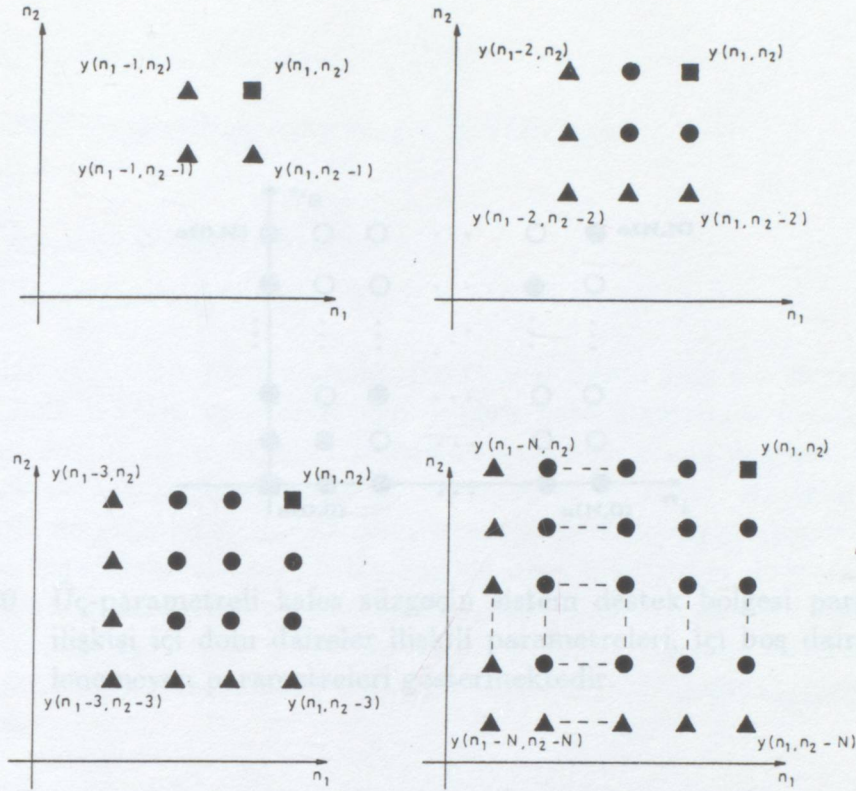


Şekil 2.18 1-B'ta derece güncelleştirme. Üçgenler yeni tanımlanan parametreleri, içi dolu daireler ise önceki derecelerde tanımlanan parametreleri göstermektedir.

Şimdi, 2-B çeyrek-düzlem AR modeli düşünelim. Şekil 2.19' dan da görülebileceği gibi bir boyutun aksine, iki boyutta her bir derece artışta model destek bölgesine artan sayıda parametre eklenir. Her bir derece artışta eklenmesi gerekli yeni parametre sayısı N . derece için, N . derecedeki parametre sayısı ile $(N-1)$. derecedeki parametre sayısı arasındaki farktır ve aşağıdaki gibi verilir.

$$[(N+1)^2 - 1] - [N^2 - 1] = 2N + 1 \quad (2.172)$$



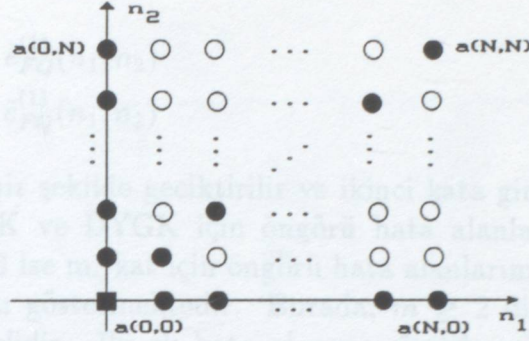


Şekil 2.19 2-B'ta derece güncelleştirme. (a) Birinci derece, (b) ikinci derece, (c) Üçüncü derece, (d) N. derece. Şekilde, üçgenler yeni tanımlanan parametreleri, içi dolu daireler ise önceki derecelerde tanımlanan parametreleri göstermektedir.

Ancak, Parker ve Kayran'ın üç-parametrelilik kafes süzgeç yapısı (Parker et.al.,1984), herbir derece artışta yalnızca üç yeni parametre tanımladığından, yansıma katsayıları kümesinin boyutu AR parametre kümesinden az olur ve bütün AR parametreleri belirlemek mümkün olmaz. Şekil 2.20'de, üç-parametrelilik kafes süzgeç modelinin yalnızca yatay, dikey ve diyagonal

eksenlerdeki özilişkileri değerlendirdiği ve yalnızca bu eksenler boyunca parametreleri belirlediği görülmektedir.





Şekil 2.20 Üç-parametrelili kafes süzgecin sistem destek bölgesi parametreleri ile ilişkisi içi dolu daireler ilişkili parametreleri, içi boş daireler ise belirlenemeyen parametreleri göstermektedir.

Buradan da görülebileceği gibi, eğer AR süreç yatay, düşey ve diyagonal eksenlerde yüksek ilişkili örneklerle sahipse üç-parametrelili kafes süzgeç yeterli derecede iyi sonuçlar üretir. Ancak, diğer durumlarda önerilen kafes süzgeç yapısı iyi sonuç vermez. Bu sorun, artan derecelerde artan sayıda öngörücüyü kafes süzgece ekleyerek çözümlenebilir.

2.4.2 Genişletilmiş kafes süzgeç modelleri (Ertüzün et.al.,1992):

Birinci derece AR veri alanı ve birinci derece üç-parametrelili kafes süzgeç üç parametreye sahip olduğundan, kafes süzgeç parametreleri ile AR parametreler arasında bire-bir karşılık vardır ve kafes süzgeç parametrelerinin sayısı veri alanını modellemek için yeterlidir. İkinci derecede, AR veri alanı 8 parametreye sahiptir. Bu da, bu derece için 5 yeni katsayının hesaplanması gerektiğini gösterir. Ancak, üç-parametrelili kafes süzgeç modeli herbir derecede yalnızca üç yeni parametre hesaplar. Bu nedenle toplam parametre sayısı 6 olur. Geri-yönlü hata alanlarının sayısı ile kafes süzgeç parametrelerinin sayısı arasında doğrusal bir ilişki olduğundan, eksik kalan iki yeni parametreyi hesaplayabilmek için, geri-yönlü öngörü hata alanlarının sayısı artırılır. Genişletilmiş kafes süzgeç yapısı, ikinci kafes süzgeç katının girişinde üç yerine beş adet geri-yönlü öngörü hata alanı kullanır. İki ek geri-yönlü öngörü hata alanı, $e_{21}^{(1)}(n_1, n_2)$ ve $e_{12}^{(1)}(n_1, n_2)$, iki değişik genişletilmiş süzgeç yapısı için aşağıdaki şekilde üretilir.

Köşegen yapıdaki genişletilmiş kafes süzgeç (KYGK) için:

$$e_{21}^{(1)}(n_1, n_2) = e_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$$



$$e_{12}^{(1)}(n_1, n_2) = \tilde{e}_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$$

Dik yapıdaki genişletilmiş kafes süzgeç (DYGK) için:

$$e_{21}^{(1)}(n_1, n_2) = \tilde{e}_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$$

$$e_{12}^{(1)}(n_1, n_2) = \tilde{e}_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$$

Bu alanlar uygun bir şekilde geciktirilir ve ikinci kata giriş olarak uygulanır. Şekil 2.21 ve 2.22 KYGK ve DYGK için öngörü hata alanlarının üretilmesini göstermektedir. Şekil 2.23 ise m. kat için öngörü hata alanlarının doğrusal birleşimlerinin ne şekilde olduğunu göstermektedir. Burada, $m \geq 2$ dir. Bu şekil heriki süzgeç yapısı için de geçerlidir. İki ek hata alanının üretilmesiyle, ikinci katın girişinde 6 öngörü hata alanı olacaktır. Bu öngörü hata alanlarının doğrusal birleşimi bir sonraki katın kafes süzgeç parametrelerini belirlemek için kullanılacaktır.

Birinci dereceye ilişkin giriş-çıkış ilişkisi (2.160) eşitliğinde verilmiştir. Öte yandan, ikinci ve daha yüksek derecelerde KYGK ve DYGK aşağıdaki giriş-çıkış bağıntısını sağlar.

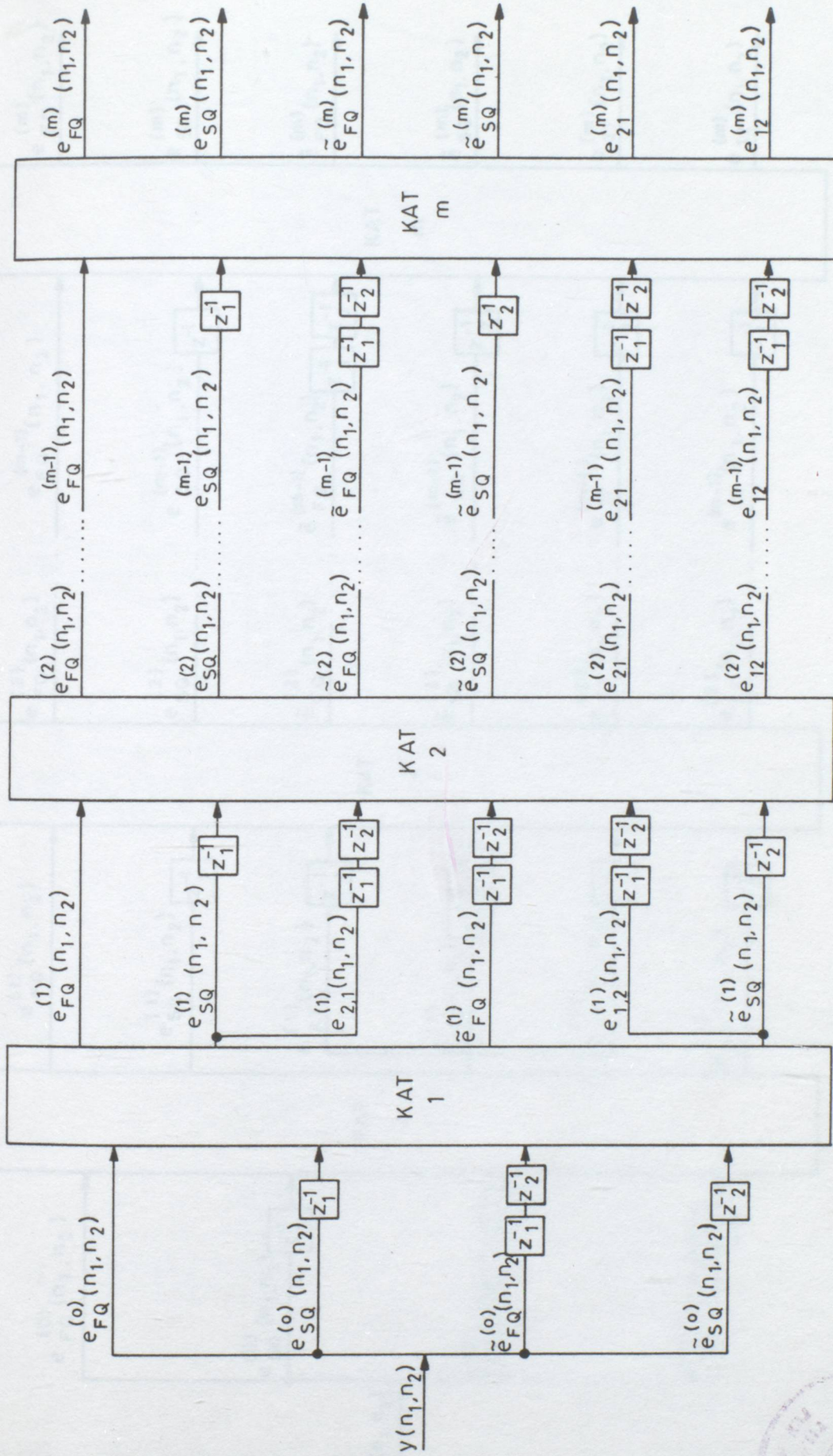
$$\begin{bmatrix} e_{FQ}^{(n)}(n_1, n_2) \\ e_{SQ}^{(n)}(n_1, n_2) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(n)}(n_1, n_2) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(n)}(n_1, n_2) \\ e_{21}^{(n)}(n_1, n_2) \\ e_{12}^{(n)}(n_1, n_2) \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(n)} \begin{bmatrix} e_{FQ}^{(n-1)}(n_1, n_2) \\ e_{SQ}^{(n-1)}(n_1 - 1, n_2) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(n-1)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(n-1)}(n_1, n_2 - 1) \\ e_{21}^{(n-1)}(n_1 - i, n_2 - j) \\ e_{12}^{(n-1)}(n_1 - j, n_2 - i) \end{bmatrix} \quad (2.173)$$

burada KYGK için $i = 1$ ve $j = 1$, DYGK için $i = 1$ ve $j = 0$ dır. n. derece için $\mathbf{K}^{(n)}$ katsayı matrisi aşağıdaki gibi verilir:

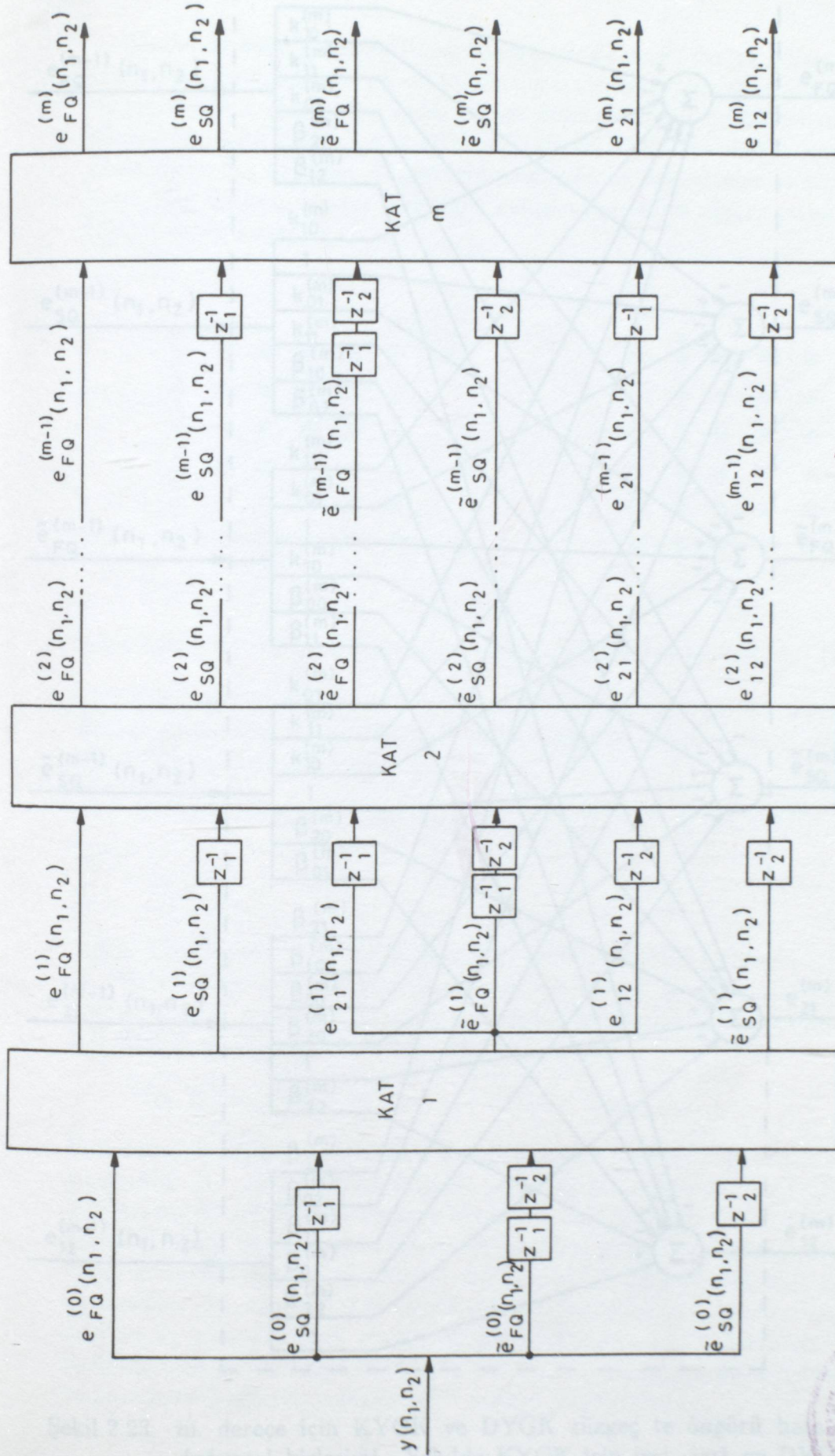
$$\mathbf{K}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{10}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} & -\beta_{21}^{(n)} & -\beta_{12}^{(n)} \\ -k_{10}^{(n)} & 1 & -k_{01}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} & -\beta_{10}^{(n)} & -\beta_{02}^{(n)} \\ -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} & 1 & -k_{11}^{(n)} & -\beta_{00}^{(n)} & -\beta_{11}^{(n)} \\ -k_{01}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} & -k_{10}^{(n)} & 1 & -\beta_{20}^{(n)} & -\beta_{01}^{(n)} \\ -\beta_{21}^{(n)} & -\beta_{10}^{(n)} & -\beta_{00}^{(n)} & -\beta_{20}^{(n)} & 1 & -\beta_{22}^{(n)} \\ -\beta_{12}^{(n)} & -\beta_{02}^{(n)} & -\beta_{11}^{(n)} & -\beta_{01}^{(n)} & -\beta_{22}^{(n)} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

KYGK ve DYGK ya ilişkin giriş-çıkış bağıntıları aynı matematiksel yapıya sahiptir. Ancak, her iki yapıya uygulanan giriş değerleri farklıdır.

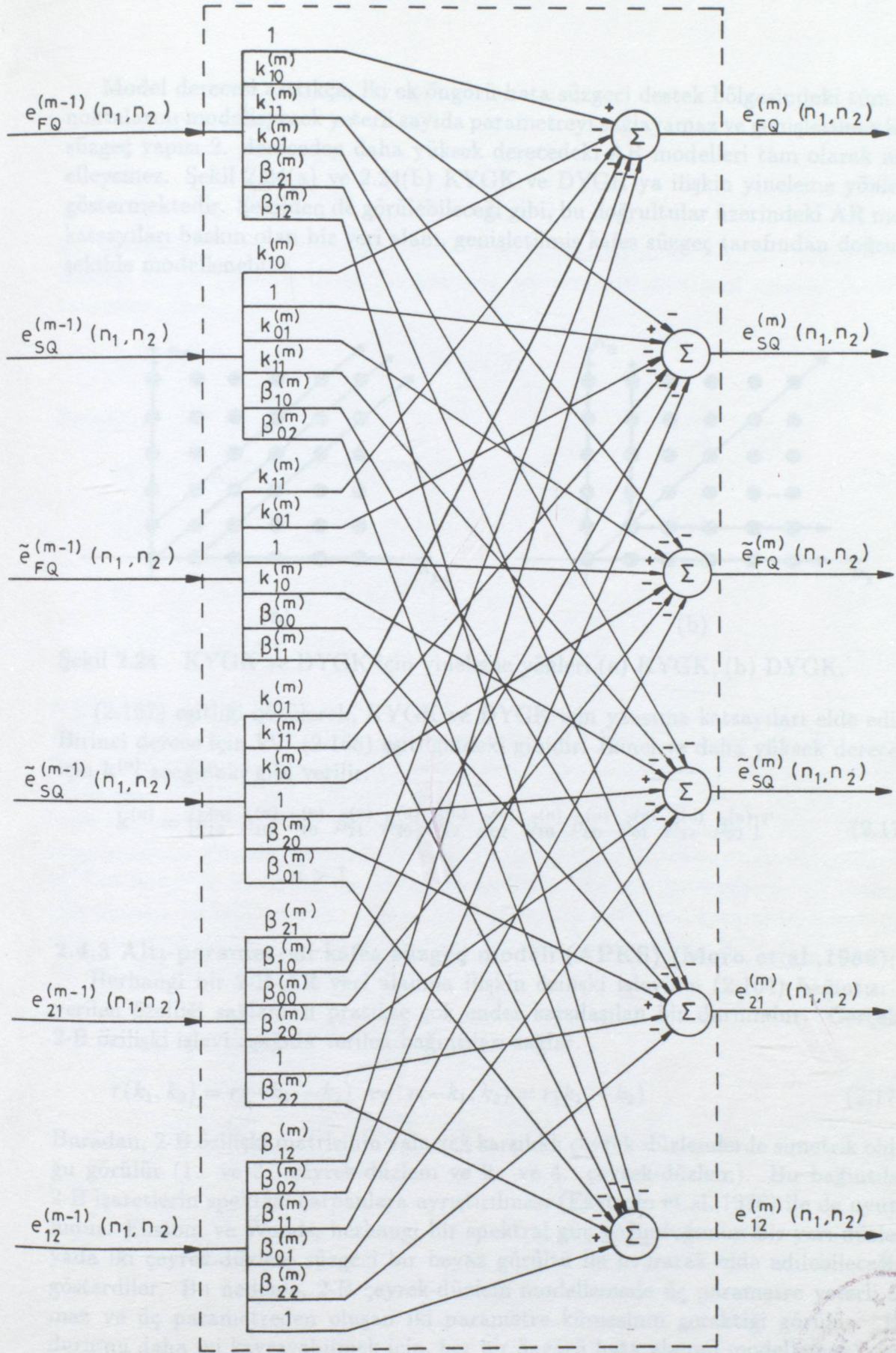




Şekil 2.21 KYGK süzgeçte, Öngörü hata alanlarının üretilmesi

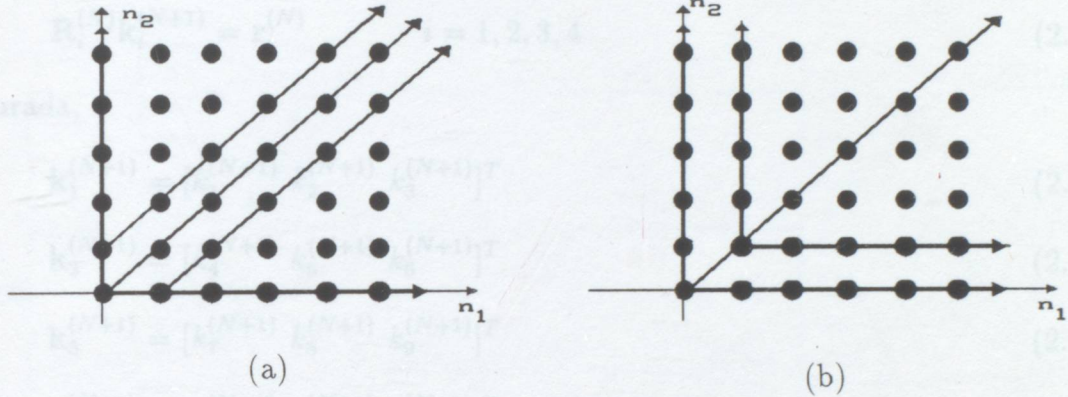


Şekil 2.22 DY GK süzgeçte, Öngörü hata alanlarının üretilmesi



Şekil 2.23 m . derece için KYGK ve DYKG süzgeç te öngörü hata alanlarının doğrusal birleşimi. Şekilde KYGK için $i=1, j=1$ ve DYKG için $i=1$ ve $j=0$ dir. Burada $m \geq 2$ dir.

Model derecesi arttıkça, iki ek öngörü hata süzgeci destek bölgesindeki tüm veri noktalarını modelleyecek yeterli sayıda parametreyi sağlayamaz ve genişletilmiş kafes süzgeç yapısı 2. dereceden daha yüksek derecedeki AR modelleri tam olarak modelleyemez. Şekil 2.24(a) ve 2.24(b) KYGK ve DYKG ya ilişkin yineleme yönlerini göstermektedir. Şekilden de görülebileceği gibi, bu doğrultular üzerindeki AR model katsayıları baskın olan bir veri alanı, genişletilmiş kafes süzgeç tarafından doğru bir şekilde modellenebilir.



Şekil 2.24 KYGK ve DYKG için yineleme yönleri (a) KYGK, (b) DYKG.

(2.167) eşitliği çözülerek, KYGK ve DYKG için yansıma katsayıları elde edilir. Birinci derece için $k^{(1)}$ (2.168) eşitliğindeki gibidir. İkinci ve daha yüksek dereceler için $k^{(n)}$ aşağıdaki gibi verilir.

$$k^{(n)} = [k_{10}^{(n)} \ k_{10}^{(n)} \ k_{10}^{(n)} \ \beta_{21}^{(n)} \ \beta_{20}^{(n)} \ \beta_{12}^{(n)} \ \beta_{02}^{(n)} \ \beta_{10}^{(n)} \ \beta_{00}^{(n)} \ \beta_{01}^{(n)} \ \beta_{11}^{(n)} \ \beta_{22}^{(n)}]^T \quad (2.175)$$

$$n > 1$$

2.4.3 Altı-parametrelili kafes süzgeç modeli (APKS) (Moro et.al.,1989):

Herhangi bir 2-B AR veri alanına ilişkin özilişki işlevinin (2.164) bağıntısı ile verilen özelliği sağlaması pratikte çok ender karşılaşılan bir durumdur. Gerçekte 2-B özilişki işlevi aşağıda verilen bağıntıları sağlar.

$$r(k_1, k_2) = r(-k_1, -k_2) \text{ ve } r(-k_1, k_2) = r(k_1, -k_2) \quad (2.176)$$

Buradan, 2-B özilişki matrisinin yalnızca karşılıklı çeyrek-düzlemlerde simetrik olduğu görülür (1. ve 3. çeyrek-düzlem ve 2. ve 4. çeyrek-düzlem). Bu bağıntılar, 2-B işaretlerin spektral çarpanlara ayrıştırılması (Ekstrom et.al.,1976) ile de uyumludur. Ekstrom ve Woods, herhangi bir spektral güç yoğunluğunun bir yarı-düzlem yada iki çeyrek-düzlem süzgeci bir beyaz gürültü ile uyararak elde edilebileceğini gösterdiler. Bu nedenle, 2-B çeyrek-düzlem modellemede üç parametre yeterli olmaz ve üç parametreden oluşan iki parametre kümesinin gerektiği görülür. Bu durumu daha iyi kavrayabilmek için, her bir öngörü hata alanını modellemek üzere üç parametre seçilerek yeni bir $K^{(N)}$ matrisi oluşturulur.



$$\mathbf{K}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_1^{(N)} & -k_2^{(N)} & -k_3^{(N)} \\ -k_4^{(N)} & 1 & -k_5^{(N)} & -k_6^{(N)} \\ -k_7^{(N)} & -k_8^{(N)} & 1 & -k_9^{(N)} \\ -k_{10}^{(N)} & -k_{11}^{(N)} & -k_{12}^{(N)} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

Bu katsayılara göre enküçükleştirme gerçekleştirildiğinde, her bir öngörü hata alanına ilişkin yansıma katsayılarının elde edilmesi için dört adet normal denklem karşımıza çıkar.

$$\mathbf{R}_i^{(N)} \mathbf{k}_i^{(N+1)} = \mathbf{r}_i^{(N)} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.178)$$

Burada,

$$\mathbf{k}_1^{(N+1)} = [k_1^{(N+1)} \ k_2^{(N+1)} \ k_3^{(N+1)}]^T \quad (2.179)$$

$$\mathbf{k}_2^{(N+1)} = [k_4^{(N+1)} \ k_5^{(N+1)} \ k_6^{(N+1)}]^T \quad (2.180)$$

$$\mathbf{k}_3^{(N+1)} = [k_7^{(N+1)} \ k_8^{(N+1)} \ k_9^{(N+1)}]^T \quad (2.181)$$

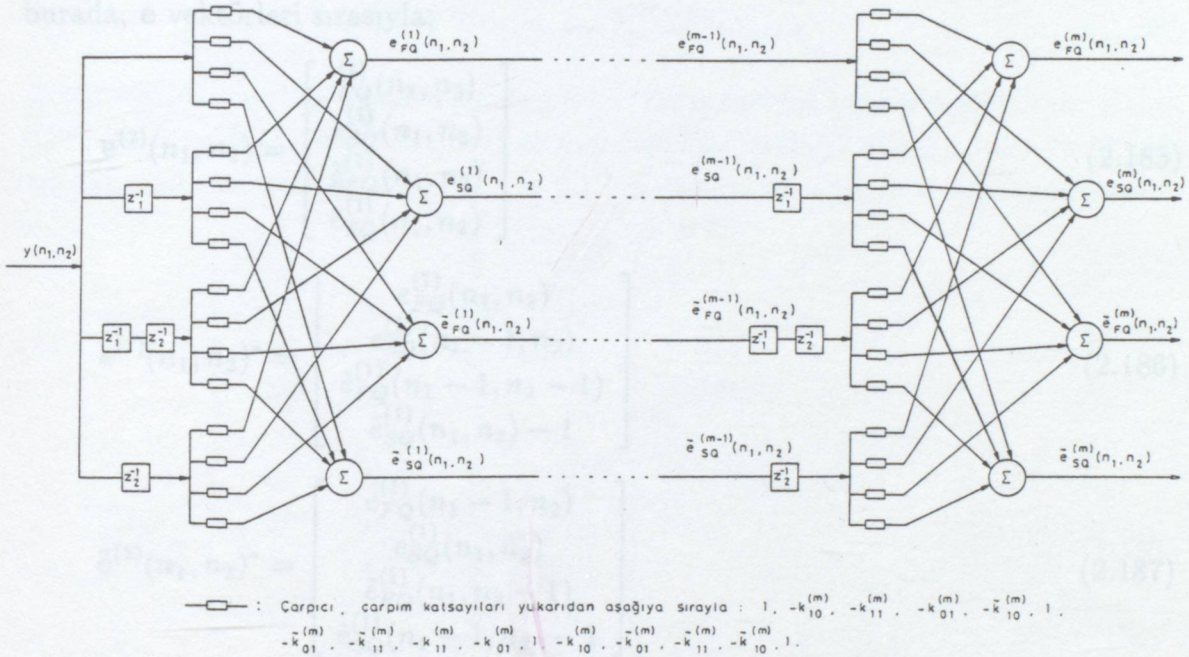
$$\mathbf{k}_4^{(N+1)} = [k_{10}^{(N+1)} \ k_{11}^{(N+1)} \ k_{12}^{(N+1)}]^T \quad (2.182)$$

şeklindedir. 2-B durağan bir işaret için, $\mathbf{R}_1^{(N)} = \mathbf{R}_3^{(N)}$, $\mathbf{R}_2^{(N)} = \mathbf{R}_4^{(N)}$, $\mathbf{r}_1^{(N)} = \mathbf{r}_3^{(N)}$ ve $\mathbf{r}_2^{(N)} = \mathbf{r}_4^{(N)}$ olduğu görülür. Buda ileri-yönlü öngörü hatası ve 3. çeyrek-düzlem öngörü hata süzgeçlerini yansıma katsayılarının birbirine eşit olduğunu gösterir. Benzer şekilde, 2. ve 4. çeyrek-düzlem katsayıları da birbirine eşit olacaktır. Böylece toplam katsayı sayısı 6 olur. Bundan sonraki notasyonlarda, birinci ve üçüncü çeyrek-düzleme ilişkin yansıma katsayılarını $k_{ij}^{(N)}$ ve ikinci ve dördüncü çeyrek-düzleme ilişkin yansıma katsayılarını $\tilde{k}_{ij}^{(N)}$ olarak göstereceğiz (Küçük et. al. 1993). Elde edilen bu sonuçlara göre altı-parametrelilik kafes süzgeçe ilişkin giriş-çıkış bağıntısı yeniden düzenlenirse, $\mathbf{K}^{(n)}$ yansıma katsayıları matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{K}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{10}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{10}^{(n)} & 1 & -\tilde{k}_{01}^{(n)} & -\tilde{k}_{11}^{(n)} \\ -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} & 1 & -k_{10}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{01}^{(n)} & -\tilde{k}_{11}^{(n)} & -\tilde{k}_{10}^{(n)} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.183)$$



Şekil 2.25, altı-parametrelî 2-B kafes süzgeç öngörücüyü göstermektedir.



Şekil 2.25 APKS yapısında öngörü hata alanlarının üretilmesi

2.4.4 Geliştirilmiş kafes süzgeç modeli (GKS) (Ertüzün et.al.,1995):

Altı-parametrelî kafes süzgeç yapısı, üç-parametrelî kafes süzgeç yapısına göre daha gerçekçi bir yaklaşım olmasına rağmen her bir derecede sabit sayıda yansım parametresi tanımladığından, tüm AR alanlar tam olarak modelleyemez. Altı-parametrelî kafes süzgeç yapısında n. derece için toplam $2n(n-1)$ adet yansım katsayısı eksik kalır. Bu yansım katsayılarının yarısı herbir çeyrek-düzlem süzgeçlerle ilişkilidir. İkinci derecede, dört adet AR model katsayısı eksik kalır. Bunlar, $a_{SQ}^{(2)}(1,2)$, $a_{SQ}^{(2)}(2,1)$, $a_{FQ}^{(2)}(1,2)$ ve $a_{FQ}^{(2)}(2,1)$ dir. Bu katsayılar bağımsız olarak seçilmemiştir ve birinci ve ikinci derece kafes süzgeç yansım katsayılarına bağlıdır. Geliştirilmiş kafes süzgeç modelinde bu katsayılar bağımsız olarak

seçilir. Bunun sonucu olarak, kafes süzgeç derecesi büyüdükçe yansıma katsayısı adedi artırılır. Bu katsayılar Altı-parametrelili modeli sistematik olarak değiştirilerek tanımlanabilir.

Birinci dereceye ilişkin giriş-çıkış bağıntıları yukarıdaki tüm 2-B kafes süzgeç yapıları için (2.160) eşitliğinde tanımlandığı gibidir. Burada $\mathbf{K}^{(n)}$, (2.183) eşitliğinde tanımlanmıştır. Geliştirilmiş kafes süzgeç modelinde, ikinci derece giriş-çıkış bağıntıları, 4 yeni yansıma katsayısı tanımlanacak şekilde, aşağıdaki gibi değiştirilir.

$$\mathbf{e}^{(2)}(n_1, n_2) = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{e}^{(1)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_1^{(2)} \tilde{\mathbf{e}}^{(1)}(n_1, n_2) + \mathbf{K}_2^{(2)} \hat{\mathbf{e}}^{(1)}(n_1, n_2) \quad (2.184)$$

burada, $\mathbf{e}$ vektörleri sırasıyla,

$$\mathbf{e}^{(2)}(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} e_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ e_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

$$\mathbf{e}^{(1)}(n_1, n_2)^* = \begin{bmatrix} e_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ e_{SQ}^{(1)}(n_1 - 1, n_2) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(1)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) - 1 \end{bmatrix} \quad (2.186)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(1)}(n_1, n_2)^* = \begin{bmatrix} e_{FQ}^{(1)}(n_1 - 1, n_2) \\ e_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2 - 1) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(1)}(n_1 - 1, n_2) - 1 \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^{(1)}(n_1, n_2)^* = \begin{bmatrix} e_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2 - 1) \\ e_{SQ}^{(1)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ \tilde{e}_{FQ}^{(1)}(n_1 - 1, n_2) \\ \tilde{e}_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $\mathbf{K}^{(n)}$ yansıma katsayısı matrisi (2.183) eşitliğinde ve $\mathbf{K}_1^{(n)}$ ve $\mathbf{K}_2^{(n)}$ aşağıda tanımlanır:

$$\mathbf{K}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{k}_1^{(2)} \\ -k_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_1^{(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

$$\mathbf{K}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{k}_2^{(2)} \\ -k_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_2^{(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.190)$$



Tanımlamalardan görüldüğü gibi, (2.184) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim (2.160) eşitliği ile aynı yapıdadır. Diğer iki terim, eksik katsayıları tanımlamak yada geciktirilmiş geri-yönlü öngörü hata alanlarında saklı bilgiyi çıkarmak için kullanılan düzeltme terimleri olarak yorumlanabilir.

Üçüncü derecede dört yansıma katsayısı daha tanımlanmalıdır. Daha önceki derecelerde dikkate alarak 3. derece için giriş-çıkış eşitliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(3)}(n_1, n_2) = & \mathbf{K}^{(3)} \mathbf{e}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_1^{(3)} \tilde{\mathbf{e}}^{(2)}(n_1, n_2) + \mathbf{K}_2^{(3)} \hat{\mathbf{e}}^{(2)}(n_1, n_2) \\ & + \mathbf{K}_3^{(3)} \tilde{\mathbf{e}}^{(2)}(n_1, n_2) + \mathbf{K}_4^{(3)} \hat{\mathbf{e}}^{(2)}(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (2.191)$$

(2.191) eşitliğinde Öngörü hata alanları ikinci derecedekine benzer şekilde tanımlanır. $\mathbf{K}^{(3)}$, $\mathbf{K}_1^{(3)}$ ve $\mathbf{K}_2^{(3)}$ yansıma katsayısı matrisleri sırasıyla (2.183), (2.189) ve (2.190) eşitliklerinde tanımlanmıştır. $\mathbf{K}_3^{(3)}$ ve $\mathbf{K}_4^{(3)}$ matrisleri ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

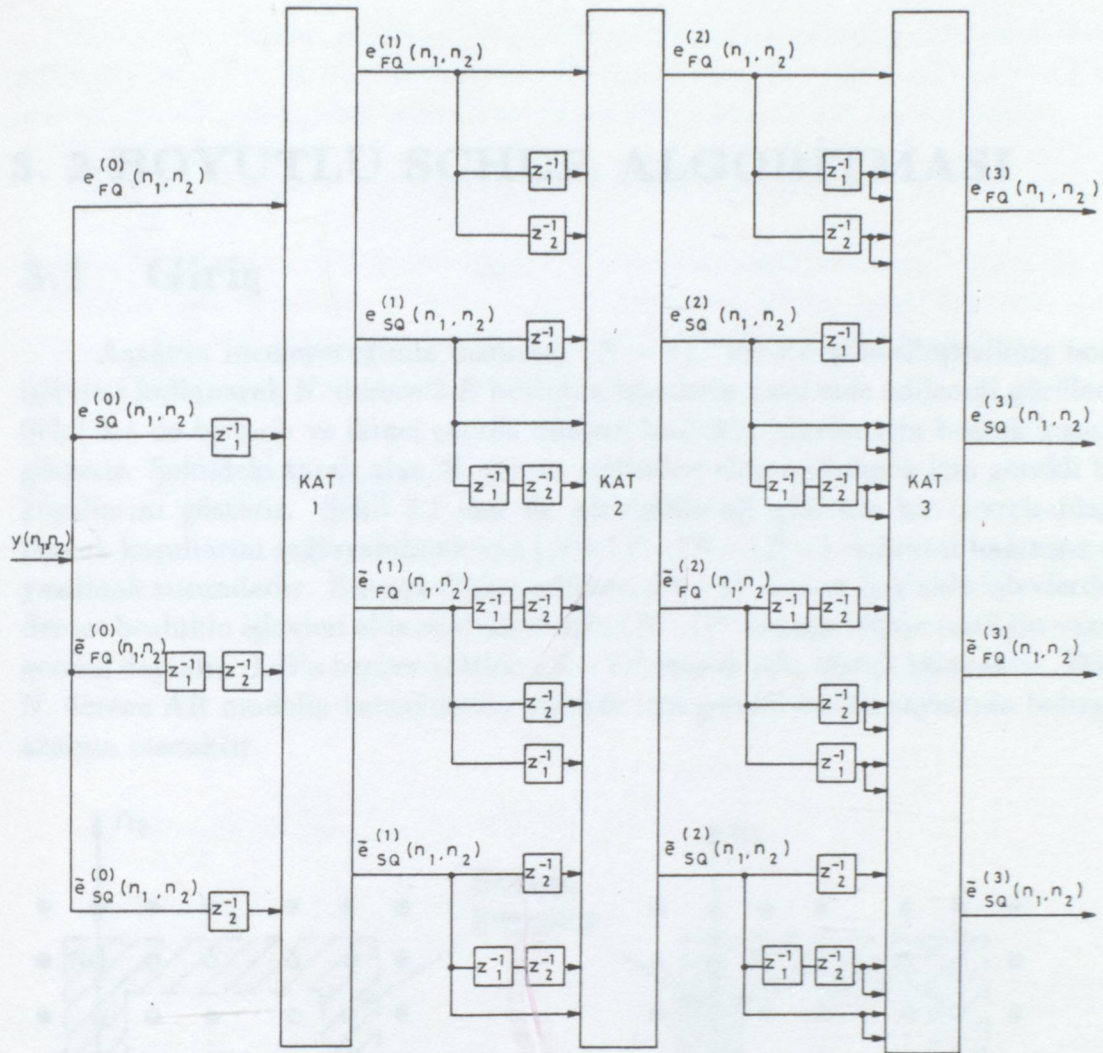
$$\mathbf{K}_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -k_3^{(3)} \\ 0 & 0 & -\tilde{k}_3^{(3)} & 0 \\ 0 & -k_3^{(3)} & 0 & 0 \\ -\tilde{k}_3^{(3)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.192)$$

$$\mathbf{K}_4^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -k_4^{(3)} \\ 0 & 0 & -\tilde{k}_4^{(3)} & 0 \\ 0 & -k_4^{(3)} & 0 & 0 \\ -\tilde{k}_4^{(3)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.193)$$

Şekil 2.26 geliştirilmiş kafes süzgeç yapısında ilk üç derece için öngörü hata alanlarının üretilmesini göstermektedir. n. derecede yansıma katsayılarını elde edebilmek için, öngörü hata alanları (2.167) eşitliğinde verildiği gibi karesel-ortalama hatanın enküçükleştirilmelidir. Geliştirilmiş kafes süzgeç yapısında, Altı-parametrelî kafes süzgeç yapısına benzer olarak iki adet yansıma katsayıları kümesi vardır. (2.167) eşitliğinde verilen vektör ve matrisler sabit boyutlarda olmasına rağmen, geliştirilmiş kafes süzgeç yapısında her bir derecede boyutları 2 artar.

Geliştirilmiş kafes süzgeç yapısı 3. dereceye kadar tüm çeyrek-düzlem AR alanları iyi bir şekilde modeller. Ancak 3.dereceden sonraki derecelerde nedensel olmayan bir kafes süzgeç yapısı elde edileceğinden, yinelemeli hesaplama mümkün olmaz ve n. derece için genel bir eşitlik tanımlamaz.



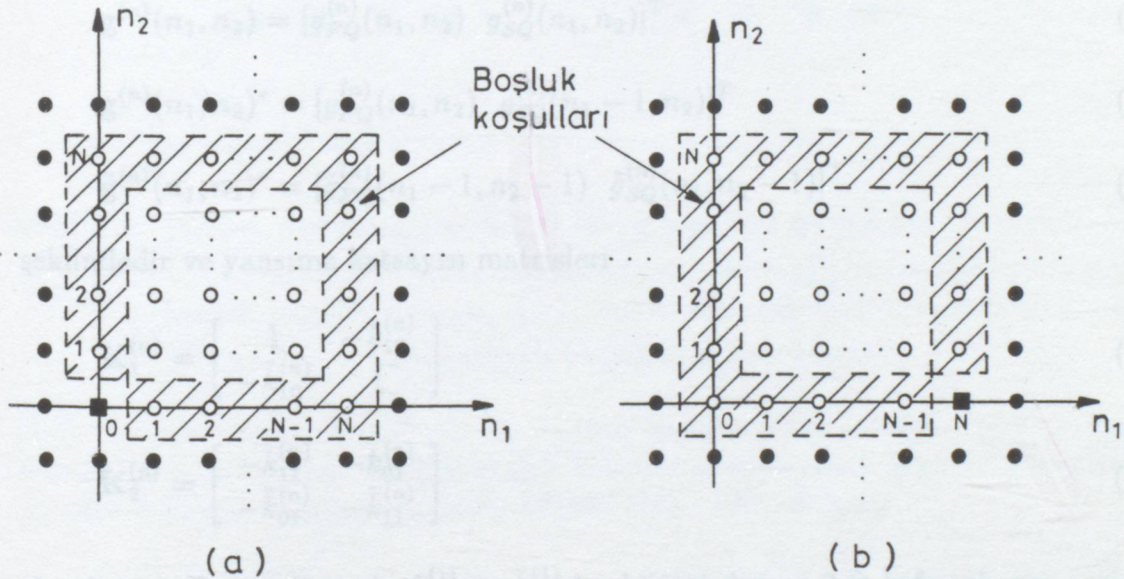


Şekil 2.26 GKS yapısında öngörü hata alanlarının üretilmesi

3. 2-BOYUTLU SCHUR ALGORİTMASI

3.1 Giriş

Aşağıda inceleyeceğimiz kısımda, $(N - 1)$. derece güncelleştirilmiş boşluklu işlevleri kullanarak N . derece 2-B boşluklu işlevlerin nasıl elde edileceği görülecektir. Şekil 3.1 de birinci- ve ikinci çeyrek düzlem boşluklu işlevler için boşluk koşullarını gösterir. Şekildeki taralı alan N . derece eşitlikleri elde edebilmek için gerekli boşluk koşullarını gösterir. Şekil 3.1 den de görülebileceği gibi her bir çeyrek-düzlemde boşluk koşullarını sağlayabilmek için $(N + 1)^2 - (N - 1)^2 - 1$ doğrusal bağımsız eşitlik yazılmak zorundadır. Burada dikkat edilirse, $(N - 1)$. derece boşluklu işlevlerden, N . derece boşluklu işlevleri elde edebilmek için $(N - 1)^2$ boşluğa ilişkin eşitliğin yazılması gerekli değildir. 1-B'a benzer şekilde, $(N - 1)^2$ boşluk sıfır olarak kalacaktır. Böylece, N . derece AR modelin katsayılarını bulmak için gerekli eşitlik sayısında belirgin bir azalma olacaktır.



Şekil 3.1 $N-1$. derece güncelleştirilmiş boşluklu işlevleri kullanarak, N . derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevleri elde etmek için gerekli boşluk koşulları. (a) Birinci-çeyrek düzlem, (b) İkinci-çeyrek düzlem.

Artan derecelerde, artan sayıdaki 2-B yansıma katsayılarını elde edebilmek için yardımcı boşluklu işlevler tanımlanır. N . derece için $(N+1)^2 - (N-1)^2 - 1$ boşluk mevcut olduğundan, yeni tanımlanacak yardımcı boşluk işlevlerinin sayısı,

$$[(N+1)^2 - (N-1)^2 - 1] - [((N-1)+1)^2 - ((N-1)-1)^2 - 1] = 4 \quad (3.1)$$

olacaktır. Böylece, 2-B Schur algoritmasını geliştirebilmek için birinci dereceden sonraki her bir derecede, 4 yeni yardımcı boşluklu işlevin tanımlanması gerektiği görülür. 2-B AR modellemeye sabit bir kafes yapısı elde edilemediği için, algoritmanın gelişimini derece derece inceleyeceğiz.

3.2 Birinci derece

Birinci derecede, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevler aşağıdaki eşitlikle tanımlanır.

$$\mathbf{g}^{(1)}(n_1, n_2) = \mathbf{K}_1^{(1)} \mathbf{g}^{(0)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_2^{(1)} \tilde{\mathbf{g}}^{(0)}(n_1, n_2)^* \quad (3.2)$$

burada

$$\mathbf{g}^{(n)}(n_1, n_2) = [g_{FQ}^{(n)}(n_1, n_2) \ g_{SQ}^{(n)}(n_1, n_2)]^T \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g}^{(n)}(n_1, n_2)^* = [g_{FQ}^{(n)}(n_1, n_2) \ g_{SQ}^{(n)}(n_1 - 1, n_2)]^T \quad (3.4)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}^{(n)}(n_1, n_2)^* = [\tilde{g}_{FQ}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \ \tilde{g}_{SQ}^{(n)}(n_1, n_2 - 1)]^T \quad (3.5)$$

şeklinde ve yansıma katsayısı matrisleri

$$\mathbf{K}_1^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{10}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{10}^{(n)} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{K}_2^{(n)} = \begin{bmatrix} -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{01}^{(n)} & -\tilde{k}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Burada $k_{ij}^{(1)}$ ve $\tilde{k}_{ij}^{(1)}$ ler birinci derece 2-B kafes süzgeç parametreleridir. Bu parametrelerin bilindiği varsayılarak, aşağıda verilen ilk koşullara göre;

$$g_{FQ}^{(0)}(n_1, n_2) = g_{SQ}^{(0)}(n_1, n_2) = \tilde{g}_{FQ}^{(0)}(n_1, n_2) = \tilde{g}_{SQ}^{(0)}(n_1, n_2) = r(n_1, n_2) \quad (3.8)$$

2-B özilişki işlevi sırasıyla, $g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$, $g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$, $\tilde{g}_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ ve $\tilde{g}_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ olarak tanımlanan dört adet boşluklu işlevi üretir. Şekil 3.2 $g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'yi elde edebilmek için gerekli boşlukları göstermektedir. Bu boşluk koşulları aşağıdaki matematiksel bağıntılarla tanımlanabilir.

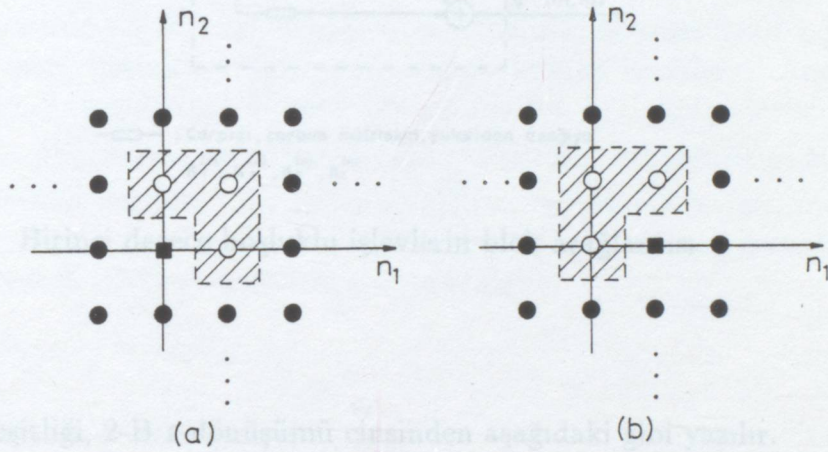
$$g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{FQ}^{(1)} \quad (3.9)$$

$$g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{SQ}^{(1)} \quad (3.10)$$

burada $D_{FQ}^{(1)}$ ve $D_{SQ}^{(1)}$ gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir ve aşağıdaki gibi verilirler.

$$D_{FQ}^{(1)} = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \quad (3.11)$$

$$D_{SQ}^{(1)} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \quad (3.12)$$



Şekil 3.2 $g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'yi elde etmek için gerekli boşluk koşulları. (a) 1. derece birinci-çeyrek düzlem boşluklu işlev $g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'ye ilişkin gerekli boşluk koşulları bölgesi, (b) 1. derece ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlev $g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'ye ilişkin gerekli boşluk koşulları bölgesi.

(3.9) ve (3.10) eşitliklerinde verilen boşluk koşullarını kullanarak, birinci derece, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluk koşullarını sağlayacak şekilde üç değişkenli iki adet doğrusal bağımsız eşitlikler kümesi elde edilir. Bunlar,

$$G^{(1)}k^{(1)} = g^{(1)} \quad (3.13)$$

$$\tilde{G}^{(1)}\tilde{k}^{(1)} = \tilde{g}^{(1)} \quad (3.14)$$

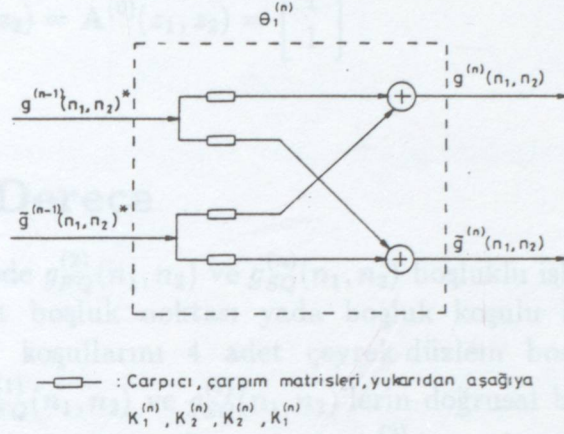
burada $k^{(n)}$ ve $\tilde{k}^{(n)}$ yansıma katsayısı vektörleridir ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$k^{(n)} = k_Q^{(n)} = [k_{10}^{(n)} \ k_{11}^{(n)} \ k_{01}^{(n)}]^T \quad (3.15)$$

$$\tilde{k}^{(n)} = \tilde{k}_Q^{(n)} = [\tilde{k}_{10}^{(n)} \ \tilde{k}_{11}^{(n)} \ \tilde{k}_{01}^{(n)}]^T \quad (3.16)$$



Ayrıca, $\mathbf{G}^{(1)}$ ve $\tilde{\mathbf{G}}^{(1)}$ 3x3 boyutlarında boşluk matrisleri, $\mathbf{g}^{(1)}$ ve $\tilde{\mathbf{g}}^{(1)}$ ise 3x1 boyutlarında boşluk vektörleridir. Bu vektör ve matrisler (3.9) ve (3.10) eşitliklerinde tanımlanan boşluk koşullarını, (3.2) eşitliğine uygulayarak elde edilir. Birinci derece kafes süzgeç parametreleri $\mathbf{k}^{(1)}$ ve $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)}$, yukarıda verilen (3.13) ve (3.14) eşitliklerini çözerek elde edilirler. Şekil 3.3, birinci derece boşluklu işlevlerin blok arabağlantısını göstermektedir.



Şekil 3.3 Birinci derece boşluklu işlevlerin blok arabağlantısı

(3.2) eşitliği, 2-B z -dönüşümü cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{G}^{(1)}(z_1, z_2) = \mathbf{K}_1^{(1)} \Delta_1(z_1, z_2) \mathbf{G}^{(0)}(z_1, z_2) + \mathbf{K}_2^{(1)} \Delta_2(z_1, z_2) \tilde{\mathbf{G}}^{(0)}(z_1, z_2) \quad (3.17)$$

burada

$$\mathbf{G}^{(n)}(z_1, z_2) = [G_{FQ}^{(n)}(z_1, z_2) \ G_{SQ}^{(n)}(z_1, z_2)]^T \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(n)}(z_1, z_2) = z_1^{-n} z_2^{-n} \mathbf{G}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (3.19)$$

ve

$$\Delta_1(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\Delta_2(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1^{-1} z_2^{-1} & 0 \\ 0 & z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

şeklindedir. 0. derece için $G_{FQ}^{(0)}(z_1, z_2) = G_{SQ}^{(0)}(z_1, z_2) = S_{yy}(z_1, z_2)$ dir. Buna ek olarak (2.141) ve (2.142) eşitliklerini ve $S_{yy}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = S_{yy}(z_1, z_2)$ özelliğini kullanarak, (3.17) eşitliği öngörü hata süzgeci geçiş işlevi cinsinden yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{A}^{(1)}(z_1, z_2) = \mathbf{K}_1^{(1)} \Delta_1(z_1, z_2) \mathbf{A}^{(0)}(z_1, z_2) + \mathbf{K}_2^{(1)} \Delta_2(z_1, z_2) \tilde{\mathbf{A}}^{(0)}(z_1, z_2) \quad (3.22)$$

burada

$$\mathbf{A}^{(n)}(z_1, z_2) = [A_{FQ}^{(n)}(z_1, z_2) \ A_{SQ}^{(n)}(z_1, z_2)]^T \quad (3.23)$$

ve

$$\mathbf{A}^{(0)}(z_1, z_2) = \mathbf{A}^{(0)}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

şeklindedir.

3.3 2. Derece

2. derecede $g_{FQ}^{(2)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(2)}(n_1, n_2)$ boşluklu işlevleri Şekil 3.4 'te görüldüğü gibi yedi adet boşluk noktası yada boşluk koşulu içerirler. Ancak, ne yazık ki bu boşluk koşullarını 4 adet çeyrek-düzlem boşluklu işlevler, $g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$, $g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$, $\tilde{g}_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ ve $\tilde{g}_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2)$ 'lerin doğrusal birleşimlerini kullanarak elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle, $g_{FQ}^{(2)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(2)}(n_1, n_2)$ 'nin boşluklarını sağlayabilmek için yeni yardımcı boşluk işlevleri tanımlamak gerekir 2. derecede yardımcı boşluk işlevleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} g_{1,1}^{(1)}(n_1, n_2) &= g_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ g_{1,2}^{(1)}(n_1, n_2) &= \tilde{g}_{SQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ g_{1,3}^{(1)}(n_1, n_2) &= g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2) \\ g_{1,4}^{(1)}(n_1, n_2) &= g_{FQ}^{(1)}(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

İkinci derece için, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevler (3.25) eşitliğinde tanımlanan yardımcı boşluklu işlevleri kullanarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(2)}(n_1, n_2) &= \mathbf{K}_1^{(2)} \mathbf{g}^{(1)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_2^{(2)} \tilde{\mathbf{g}}^{(1)}(n_1, n_2)^* \\ &\quad + \mathbf{K}_{1,1}^{(2)} \mathbf{g}_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_{1,2}^{(2)} \tilde{\mathbf{g}}_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2)^* \end{aligned} \quad (3.26)$$

Burada,

$$\mathbf{g}_{a_j}^{(n)}(n_1, n_2)^* = \begin{bmatrix} g_{j,1}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ g_{j,2}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ g_{j,3}^{(n)}(n_1, n_2 - 1) \\ g_{j,4}^{(n)}(n_1 - 1, n_2) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

ve

$$\tilde{g}_{a_j}^{(n)}(n_1, n_2)^* = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{j,1}^{(n)}(n_1, n_2) \\ \tilde{g}_{j,2}^{(n)}(n_1, n_2) \\ \tilde{g}_{j,3}^{(n)}(n_1 - 1, n_2) \\ \tilde{g}_{j,4}^{(n)}(n_1, n_2 - 1) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

şeklindedir. Burada, geri-yönlü yardımcı boşluklu işlevler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tilde{g}_{j,i}^{(n)}(n_1, n_2) = g_{j,i}^{(n)}(n - n_1, n - n_2) \quad (3.29)$$

$$j = 1, 2, \dots, N \text{ ve } n = j, j + 1, \dots, N \text{ ve } i = 1, 2, 3, 4$$

Ayrıca, (3.26) eşitliğinde tanımlanan, ileri- ve geri-yönlü yardımcı boşluklu işlevlere ilişkin yansıma katsayısı matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{K}_{j,1}^{(n)} = \begin{bmatrix} -k_{j,1}^{(n)} & -k_{j,2}^{(n)} & -k_{j,3}^{(n)} & -k_{j,4}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{j,1}^{(n)} & 0 & -\tilde{k}_{j,3}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{K}_{j,2}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_{j,2}^{(n)} & 0 & -\tilde{k}_{j,4}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$g_{FQ}^{(2)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(2)}(n_1, n_2)$ boşluklu işlevlerine ilişkin gerekli boşluk koşulları, Şekil 3.4 de görülmektedir. Buradan,

$$g_{FQ}^{(2)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{FQ}^{(2)} \quad (3.32)$$

$$g_{SQ}^{(2)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{SQ}^{(2)} \quad (3.33)$$

$$D_{FQ}^{(2)} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (2, 0), (1, 0)\} \quad (3.34)$$

$$D_{SQ}^{(2)} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (1, 0)\} \quad (3.35)$$

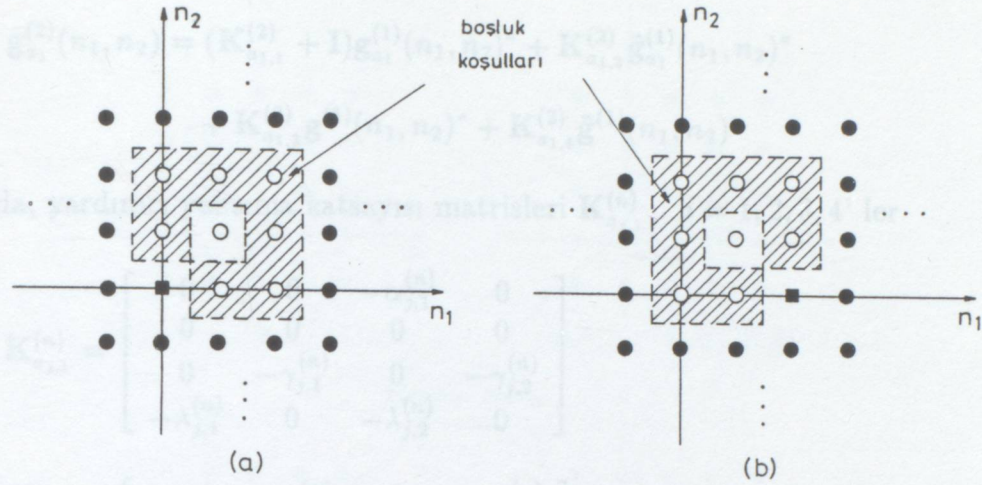
(3.26), (3.32) ve (3.33) bağıntıları kullanılarak, 2. derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluk koşullarını sağlayacak şekilde herbiri 7 değişkenli iki adet doğrusal bağımsız eşitlik kümesi elde edilir.

$$\mathbf{G}^{(2)} \mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{g}^{(2)} \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(2)} \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{g}}^{(2)} \quad (3.37)$$

Burada $\mathbf{k}^{(2)}$ ve $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ yansıma katsayısı vektörleri





Şekil 3.4 İkinci derece boşluklu işlevlere ilişkin boşluklar. Burada taralı alan gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.

$$\mathbf{k}^{(2)} = [\mathbf{k}_Q^{(2)T} : \mathbf{k}_1^{(2)T}]^T \quad (3.38)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = [\tilde{\mathbf{k}}_Q^{(2)T} : \tilde{\mathbf{k}}_1^{(2)T}]^T \quad (3.39)$$

şeklinde. (3.38) ve (3.39) eşitliklerinde, $\mathbf{k}_i^{(n)}$ ve $\tilde{\mathbf{k}}_i^{(n)}$ aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{k}_i^{(n)} = [k_{i,1}^{(n)} \ k_{i,2}^{(n)} \ k_{i,3}^{(n)} \ k_{i,4}^{(n)}]^T \quad (3.40)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_i^{(n)} = [\tilde{k}_{i,1}^{(n)} \ \tilde{k}_{i,2}^{(n)} \ \tilde{k}_{i,3}^{(n)} \ \tilde{k}_{i,4}^{(n)}]^T \quad (3.41)$$

$\mathbf{k}_Q^{(n)}$ ve $\tilde{\mathbf{k}}_Q^{(n)}$ 'ler ise birinci derecede sırasıyla, (3.15) ve (3.16) eşitliklerinde tanımlanmıştır. $\mathbf{G}^{(2)}$ ve $\tilde{\mathbf{G}}^{(2)}$ 'ler 7x7 boyutlarında boşluk matrisleri, $\mathbf{g}^{(2)}$ ve $\tilde{\mathbf{g}}^{(2)}$ 'ler ise 7x1 boyutlarında boşluk vektörleridir. Bu vektör ve matrisler (3.32) ve (3.33) eşitliklerinde verilen ikinci derece boşluk koşullarından elde edilirler. İkinci derece kafes süzgeç parametreleri $\mathbf{k}^{(2)}$ ve $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$, (3.36) ve (3.37) eşitlikleri çözülerek elde edilir. (3.26) eşitliğinden, (3.32) ve (3.33) de verilen boşluk koşulları ile çevrelenen noktanın her zaman bir boşluk olacağı gösterilebilir.

$$g_{FQ}^{(2)}(1,1) = g_{SQ}^{(2)}(1,1) = 0 \quad (3.42)$$

İkinci derece kafes süzgeç parametrelerinin hesaplanmasından sonra, Şekil 3.5 te gösterilen yardımcı boşluklu işlevlerin bir derece güncelleştirilmesi yapılmalıdır. Üçüncü derece boşluklu işlevlerin elde edilmesinde her zaman boşluk olan bölgeyi sağlayabilmek için, her bir yardımcı boşluklu işleve ait en az 5 adet boşluk koşulu sağlanır. Bu 5 adet boşluk koşulunu sağlayabilmek için 5 adet yeni yardımcı yansıma katsayısı tanımlanır. İkinci derecede, ileri-yönlü yardımcı boşluklu işlevler aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} g_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2) &= (K_{a_{1,1}}^{(2)} + I)g_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2)^* + K_{a_{1,2}}^{(2)}\tilde{g}_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2)^* \\ &+ K_{a_{1,3}}^{(2)}g^{(1)}(n_1, n_2)^* + K_{a_{1,4}}^{(2)}\tilde{g}^{(1)}(n_1, n_2)^* \end{aligned} \quad (3.43)$$

Burada, yardımcı yansıma katsayısı matrisleri $K_{a_{j,i}}^{(n)}$ $i = 1, 2, 3, 4$ ' ler

$$K_{a_{j,1}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{j,1}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_{j,1}^{(n)} & 0 & -\gamma_{j,2}^{(n)} \\ -\lambda_{j,1}^{(n)} & 0 & -\lambda_{j,2}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$K_{a_{j,2}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{j,2}^{(n)} & 0 & -\alpha_{j,3}^{(n)} \\ -\beta_{j,1}^{(n)} & -\beta_{j,2}^{(n)} & -\beta_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{j,3}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$K_{a_{j,3}}^{(n)} = \begin{bmatrix} -\alpha_{j,4}^{(n)} & -\beta_{j,4}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{j,5}^{(n)} & -\gamma_{j,4}^{(n)} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.46)$$

$$K_{a_{j,4}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma_{j,5}^{(n)} & -\lambda_{j,4}^{(n)} \\ -\alpha_{j,5}^{(n)} & 0 & 0 & -\lambda_{j,5}^{(n)} \end{bmatrix}^T \quad (3.47)$$

şeklinde. İkinci derece yardımcı boşluklu işlevler, $g_{1,i}^{(2)}(n_1, n_2)$ $i = 1, 2, 3, 4$ 'lere ilişkin boşluk koşulları Şekil 3.5 de gösterilmiştir. Buradan,

$$g_{1,i}^{(2)}(n_1, n_2) = 0 \quad \in D_{a_{1,i}}^{(2)} \quad (3.48)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

Burada, ikinci derece yardımcı boşluk koşullarına ilişkin gerekli boşluk koşulları bölgesi $D_{a_{1,i}}^{(2)}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D_{a_{1,1}}^{(2)} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 0)\}$$

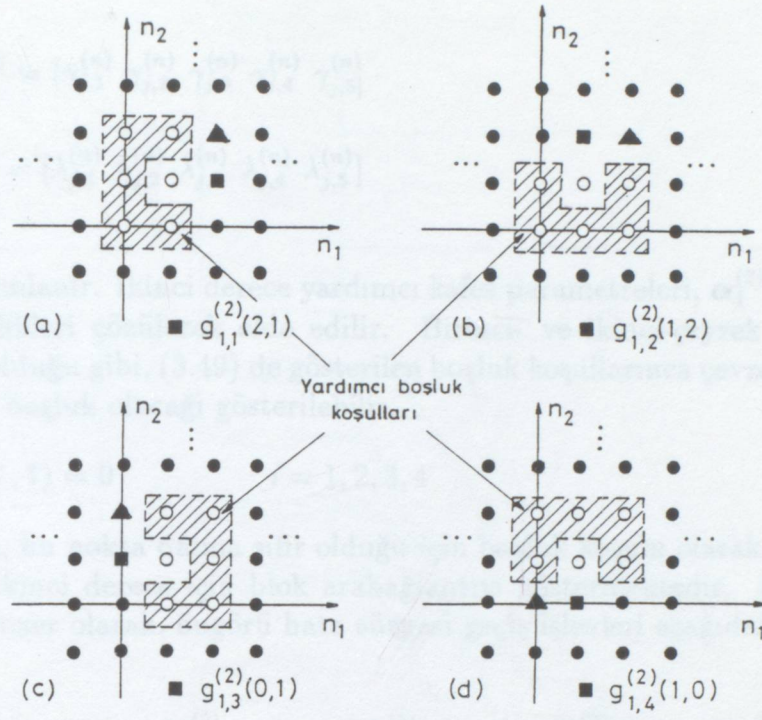
$$D_{a_{1,2}}^{(2)} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)\}$$

$$D_{a_{1,3}}^{(2)} = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 2)\}$$

$$D_{a_{1,4}}^{(2)} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$$

(3.49)





Şekil 3.5 Birinci dereceden sonra tanımlanan, İkinci derece yardımcı boşluklu işlevler. Taralı alan ikinci derece yardımcı boşluklu işlevlerin güncelleştirilmesinde gerekli boşluk bölgelerini göstermektedir.

(3.43) ve (3.48) eşitliklerinden, Şekil 3.5 te görülen taralı alandaki boşluk koşullarını sağlayacak şekilde, 5 değişkenli dört adet doğrusal bağımsız eşitlikler kümesi oluşturulabilir.

$$G_{a_{1,i}}^{(2)} k_{a_{1,i}}^{(2)} = g_{a_{1,i}}^{(2)} \quad (3.50)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

Burada yardımcı yansıma katsayıları vektörleri,

$$\begin{aligned} k_{a_{1,1}}^{(2)} &= \alpha_1^{(2)} & ; & & k_{a_{1,2}}^{(2)} &= \beta_1^{(2)} \\ k_{a_{1,3}}^{(2)} &= \gamma_1^{(2)} & ; & & k_{a_{1,4}}^{(2)} &= \lambda_1^{(2)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

şekilindedir. ve

$$\alpha_j^{(n)} = [\alpha_{j,1}^{(n)} \alpha_{j,2}^{(n)} \alpha_{j,3}^{(n)} \alpha_{j,4}^{(n)} \alpha_{j,5}^{(n)}]$$

$$\beta_j^{(n)} = [\beta_{j,1}^{(n)} \beta_{j,2}^{(n)} \beta_{j,3}^{(n)} \beta_{j,4}^{(n)} \beta_{j,5}^{(n)}]$$



(3.52)

$$\gamma_j^{(n)} = [\gamma_{j,1}^{(n)} \gamma_{j,2}^{(n)} \gamma_{j,3}^{(n)} \gamma_{j,4}^{(n)} \gamma_{j,5}^{(n)}]$$

$$\lambda_j^{(n)} = [\lambda_{j,1}^{(n)} \lambda_{j,2}^{(n)} \lambda_{j,3}^{(n)} \lambda_{j,4}^{(n)} \lambda_{j,5}^{(n)}]$$

olarak tanımlanır. İkinci derece yardımcı kafes parametreleri, $\alpha_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(2)}$ ve $\lambda_1^{(2)}$, (3.50) eşitlikleri çözülerek elde edilir. Birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevlerde olduğu gibi, (3.49) de gösterilen boşluk koşullarınca çevrelenen noktanda her zaman boşluk olacağı gösterilebilir.

$$g_{a_1,i}^{(2)}(1,1) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.53)$$

Dolayısıyla, bu nokta daima sıfır olduğu için boşluk koşulu olarak değerlendirilmez. Şekil 3.6, ikinci derece için blok arabağlantıyı göstermektedir. Birinci derecedeki duruma benzer olarak, öngörü hata süzgeci geçiş işlevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} A^{(2)}(z_1, z_2) &= K_1^{(2)} \Delta_1(z_1, z_2) A^{(1)}(z_1, z_2) + K_2^{(2)} \Delta_2(z_1, z_2) \tilde{A}^{(1)}(z_1, z_2) \\ &\quad + K_{1,1}^{(2)} \Delta_{a_1}(z_1, z_2) A_{a_1}^{(1)}(z_1, z_2) + K_{1,2}^{(2)} \Delta_{a_2}(z_1, z_2) \tilde{A}_{a_1}^{(1)}(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (3.54)$$

ve

$$\begin{aligned} A_{a_1}^{(2)}(z_1, z_2) &= (K_{a_1,1}^{(2)} + I) \Delta_{a_1}(z_1, z_2) A_{a_1}^{(1)}(z_1, z_2) + K_{a_1,2}^{(2)} \Delta_{a_2}(z_1, z_2) \tilde{A}_{a_1}^{(1)}(z_1, z_2) \\ &\quad + K_{1,1}^{(2)} \Delta_1(z_1, z_2) A^{(1)}(z_1, z_2) + K_{1,2}^{(2)} \Delta_2(z_1, z_2) \tilde{A}^{(1)}(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Burada, ikinci derece yardımcı öngörü hata süzgeci geçiş işlevi $A_{a_1}^{(2)}(z_1, z_2)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

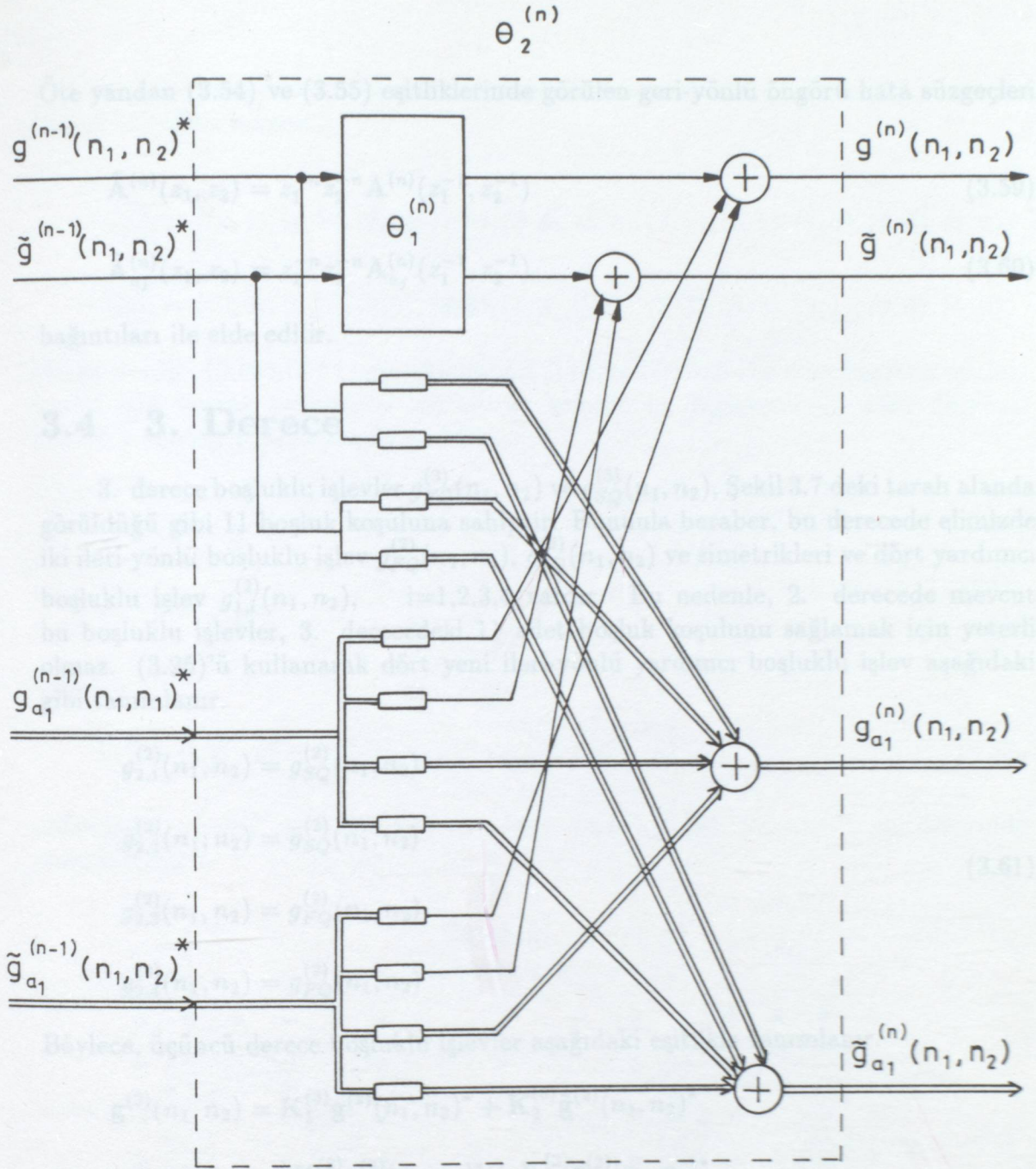
$$A_{a_j}^{(n)}(z_1, z_2) = [A_{a_j,1}^{(n)}(z_1, z_2) A_{a_j,2}^{(n)}(z_1, z_2) A_{a_j,3}^{(n)}(z_1, z_2) A_{a_j,4}^{(n)}(z_1, z_2)]^T \quad (3.56)$$

$\Delta_{a_1}(z_1, z_2)$ ve $\Delta_{a_2}(z_1, z_2)$ gecikme matrisleri ise aşağıda verilmiştir.

$$\Delta_{a_1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} (z_1^{-1} z_2^{-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (z_1^{-1} z_2^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\Delta_{a_2}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$





—□— : Çarpıcı, Çarpım matrisleri yukarıdan aşağıya

$$K_{a_{1,3}}^{(n)}, K_{a_{1,4}}^{(n)}, K_{a_{1,4}}^{(n)}, K_{a_{1,3}}^{(n)}, K_{1,1}^{(n)}, K_{1,2}^{(n)}, K_{a_{1,1}}^{(n)} + I, K_{a_{1,2}}^{(n)}$$

$$K_{1,2}^{(n)}, K_{1,1}^{(n)}, K_{a_{1,2}}^{(n)}, K_{a_{1,1}}^{(n)} + I$$

Şekil 3.6 İkinci derece boşluklu işlevlerin iç blok ara bağlantısı. Burada $\theta_1^{(n)}$ birinci derecede Şekil 3.3 te tanımlanmıştır.



Öte yandan (3.54) ve (3.55) eşitliklerinde görülen geri-yönlü öngörü hata süzgeçleri

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(n)}(z_1, z_2) = z_1^{-n} z_2^{-n} \mathbf{A}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (3.59)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{a_j}^{(n)}(z_1, z_2) = z_1^{-n} z_2^{-n} \mathbf{A}_{a_j}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (3.60)$$

bağıntıları ile elde edilir.

3.4 3. Derece

3. derece boşluklu işlevler $g_{FQ}^{(3)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(3)}(n_1, n_2)$, Şekil 3.7 deki taralı alanda görüldüğü gibi 11 boşluk koşuluna sahiptir. Bununla beraber, bu derecede elimizde iki ileri-yönlü boşluklu işlev $g_{FQ}^{(2)}(n_1, n_2)$, $g_{SQ}^{(2)}(n_1, n_2)$ ve simetrikleri ve dört yardımcı boşluklu işlev $g_{1,i}^{(2)}(n_1, n_2)$, $i=1,2,3,4$ vardır. Bu nedenle, 2. derecede mevcut bu boşluklu işlevler, 3. derecedeki 11 adet boşluk koşulunu sağlamak için yeterli olmaz. (3.25)'ü kullanarak dört yeni ileri-yönlü yardımcı boşluklu işlev aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} g_{2,1}^{(2)}(n_1, n_2) &= g_{SQ}^{(2)}(n_1, n_2) \\ g_{2,2}^{(2)}(n_1, n_2) &= \tilde{g}_{SQ}^{(2)}(n_1, n_2) \\ g_{2,3}^{(2)}(n_1, n_2) &= g_{FQ}^{(2)}(n_1, n_2) \\ g_{2,4}^{(2)}(n_1, n_2) &= g_{FQ}^{(2)}(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Böylece, üçüncü derece boşluklu işlevler aşağıdaki eşitlikle tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)}(n_1, n_2) &= \mathbf{K}_1^{(3)} \mathbf{g}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_2^{(3)} \tilde{\mathbf{g}}^{(2)}(n_1, n_2)^* \\ &\quad + \mathbf{K}_{1,1}^{(3)} \mathbf{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_{1,2}^{(3)} \tilde{\mathbf{g}}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2)^* \\ &\quad + \mathbf{K}_{2,1}^{(3)} \mathbf{g}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_{2,2}^{(3)} \tilde{\mathbf{g}}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2)^* \end{aligned} \quad (3.62)$$

$g_{FQ}^{(3)}(n_1, n_2)$ ve $g_{SQ}^{(3)}(n_1, n_2)$ ya ilişkin boşluk koşulları Şekil 3.7 de görülmektedir. Buradan,

$$g_{FQ}^{(3)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{FQ}^{(3)} \quad (3.63)$$

$$g_{SQ}^{(3)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{SQ}^{(3)} \quad (3.64)$$



burada, 3. derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevlere ilişkin gerekli boşluk koşulları bölgesi

$$D_{FQ}^{(3)} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (3, 0), (2, 0), (1, 0)\} \quad (3.65)$$

$$D_{SQ}^{(3)} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 0), (1, 0)\}$$

olarak verilir. (3.62)-(3.64) eşitliklerinden, 3.derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem model için boşluk koşullarını sağlayacak şekilde 11 değişkenli iki adet doğrusal bağımsız eşitlikler kümesi elde edilebilir.

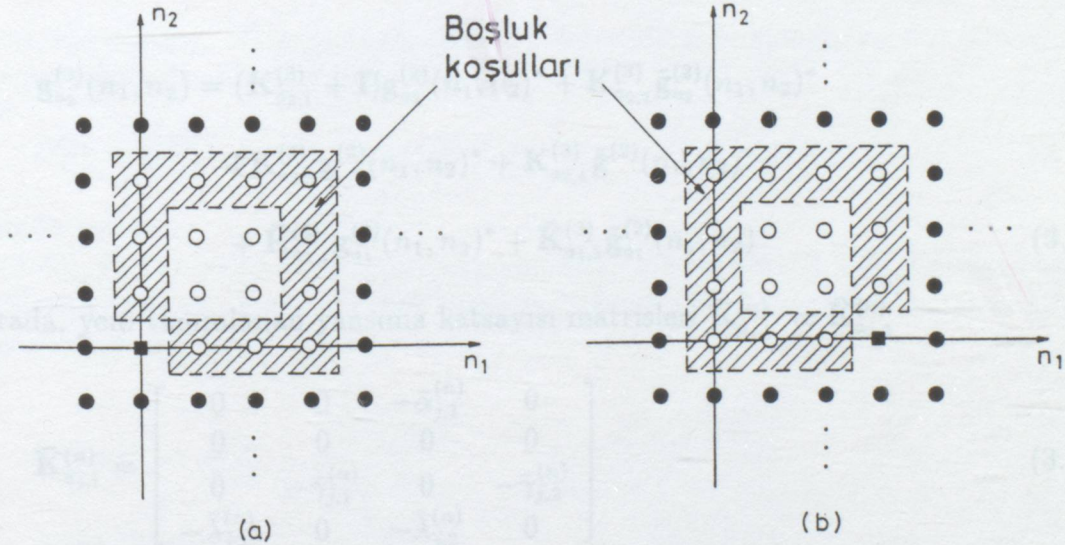
$$\mathbf{G}^{(3)} \mathbf{k}^{(3)} = \mathbf{g}^{(3)} \quad (3.66)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(3)} \tilde{\mathbf{k}}^{(3)} = \tilde{\mathbf{g}}^{(3)}$$

Burada,

$$\mathbf{k}^{(3)} = [\mathbf{k}_Q^{(3)T} : \mathbf{k}_1^{(3)T} : \mathbf{k}_2^{(3)T}]^T, \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(3)} = [\tilde{\mathbf{k}}_Q^{(3)T} : \tilde{\mathbf{k}}_1^{(3)T} : \tilde{\mathbf{k}}_2^{(3)T}]^T \quad (3.67)$$

şeklinde ve $\mathbf{k}_Q^{(n)}, \mathbf{k}_i^{(n)}$ ve $\tilde{\mathbf{k}}_i^{(n)}$ sırasıyla (3.15), (3.40) ve (3.41) eşitliklerinde tanımlanmıştır.



Şekil 3.7 Üçüncü derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevler. (a) $g_{FQ}^{(3)}(n_1, n_2)$, (b) $g_{SQ}^{(3)}(n_1, n_2)$. Taralı alan 3. derece boşluklu işlevleri elde etmek için gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.



(3.62) bağıntısından, (3.63) ve (3.64) da verilen boşluk koşullarınca çevrelenen noktaların her zaman sıfır olacağı gösterilebilir.

$$\begin{aligned} g_{FQ}^{(3)}(n_1, n_2) &= 0 & (n_1, n_2) \in D^{(3)} \\ g_{SQ}^{(3)}(n_1, n_2) &= 0 & (n_1, n_2) \in D^{(3)} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Daima sıfır olan bu bölge $D^{(n)}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$D^{(n)} = \{(n_1, n_2) : 1 \leq n_1 \leq n-1, 1 \leq n_2 \leq n-1\} \quad (3.69)$$

Üçüncü derece için $D^{(3)}$, Şekil 3.7 de görüldüğü gibi, dört adet boşluk noktasına sahiptir. Üçüncü derece kafes süzgeç parametrelerinin hesaplanmasından sonra, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 da görülen yardımcı boşluklu işlevler, bir sonraki derece için güncelleştirilmelidir. $g_{a_1}^{(3)}$ ve $g_{a_2}^{(3)}$ için sekiz adet boşluk koşulu olduğundan, üç adet yeni yardımcı boşluk katsayısı tanımlanmalıdır. Üçüncü derecede, ileri-yönlü yardımcı boşluklu işlevler aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$\begin{aligned} g_{a_1}^{(3)}(n_1, n_2) &= (\mathbf{K}_{a_{1,1}}^{(3)} + \mathbf{I})g_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_{a_{1,2}}^{(3)}\tilde{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2)^* \\ &\quad + \mathbf{K}_{a_{1,3}}^{(3)}g^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_{a_{1,4}}^{(3)}\tilde{g}^{(2)}(n_1, n_2)^* \\ &\quad + \bar{\mathbf{K}}_{a_{2,1}}^{(3)}g_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \bar{\mathbf{K}}_{a_{2,2}}^{(3)}\tilde{g}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2)^* \end{aligned} \quad (3.70)$$

ve

$$\begin{aligned} g_{a_2}^{(3)}(n_1, n_2) &= (\mathbf{K}_{a_{2,1}}^{(3)} + \mathbf{I})g_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_{a_{2,2}}^{(3)}\tilde{g}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2)^* \\ &\quad + \mathbf{K}_{a_{2,3}}^{(3)}g^{(2)}(n_1, n_2)^* + \mathbf{K}_{a_{2,4}}^{(3)}\tilde{g}^{(2)}(n_1, n_2)^* \\ &\quad + \bar{\mathbf{K}}_{a_{1,1}}^{(3)}g_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2)^* + \bar{\mathbf{K}}_{a_{1,2}}^{(3)}\tilde{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2)^* \end{aligned} \quad (3.71)$$

Burada, yeni tanımlanan yansıma katsayısı matrisleri $\bar{\mathbf{K}}_{a_{j,1}}^{(n)}$ ve $\bar{\mathbf{K}}_{a_{j,2}}^{(n)}$

$$\bar{\mathbf{K}}_{a_{j,1}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{\alpha}_{j,1}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\gamma}_{j,1}^{(n)} & 0 & -\bar{\gamma}_{j,2}^{(n)} \\ -\bar{\lambda}_{j,1}^{(n)} & 0 & -\bar{\lambda}_{j,2}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{a_{j,2}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\alpha}_{j,2}^{(n)} & 0 & -\bar{\alpha}_{j,3}^{(n)} \\ -\bar{\beta}_{j,1}^{(n)} & -\bar{\beta}_{j,2}^{(n)} & -\bar{\beta}_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\gamma}_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\lambda}_{j,3}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$



$$j = 1, 2, \dots, N - 1 \text{ ve } n = j, j + 1, \dots, N$$

şeklindedir. $g_{a_1}^{(3)}(n_1, n_2)$ ve $g_{a_2}^{(3)}(n_1, n_2)$ ye ilişkin yardımcı boşluk koşulları Şekil 3.8 ve 3.9 da gösterilmiştir.

$$g_{1,i}^{(3)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{a_{1,i}}^{(3)} \quad (3.74)$$

$$g_{2,i}^{(3)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{a_{2,i}}^{(3)}$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

Burada, yardımcı boşluk koşulları bölgesi,

$$D_{a_{1,1}}^{(3)} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (2, 0), (1, 0)\}$$

$$D_{a_{1,2}}^{(3)} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (0, 1), (0, 2)\}$$

$$D_{a_{1,3}}^{(3)} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$$

$$D_{a_{1,4}}^{(3)} = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)\}$$

olarak tanımlanır. Öte yandan, üçüncü derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevlere ilişkin boşluk koşulları bölgesi,

$$D_{a_{2,i}}^{(3)} = D_{a_{1,i}}^{(3)} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.76)$$

şeklinde verilir.

(3.70), (3.71) ve (3.74) bağıntılarından, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 da görülen boşluk koşullarını sağlayacak şekilde, her biri 8 değişkenli 8 adet doğrusal bağımsız eşitlik kümesi oluşturulabilir.

$$G_{a_{1,i}}^{(3)} k_{a_{1,i}}^{(3)} = g_{a_{1,i}}^{(3)}$$

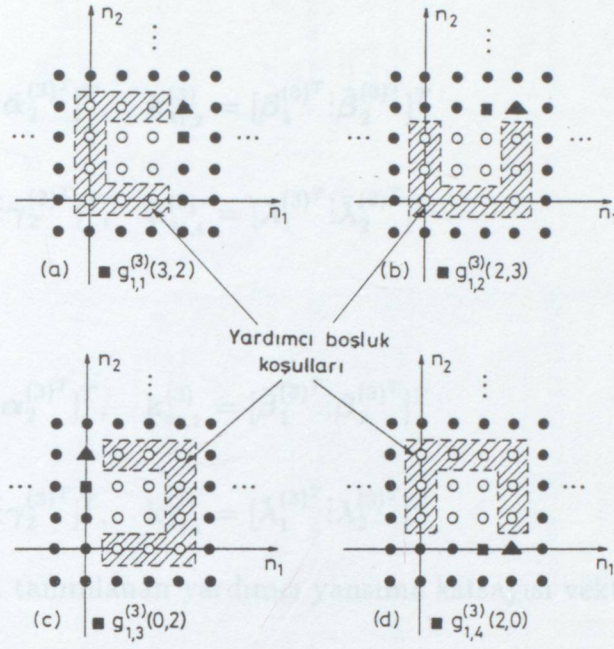
$$(3.77)$$

$$G_{a_{2,i}}^{(3)} k_{a_{2,i}}^{(3)} = g_{a_{2,i}}^{(3)}$$

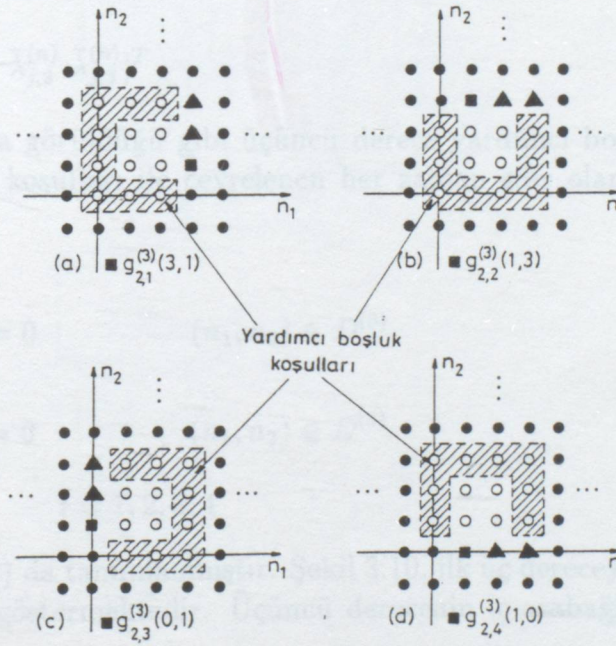
$$i = 1, 2, 3, 4$$

Burada, üçüncü derece yardımcı yansıma katsayısı vektörleri





Şekil 3.8 Birinci dereceden sonra tanımlanan üçüncü derece ileri-yönlü boşluklu işlevler. Taralı alanda 8 adet yardımcı boşluk koşulu vardır.



Şekil 3.9 İkinci dereceden sonra tanımlanan üçüncü derece ileri-yönlü boşluklu işlevler. Taralı alanda 8 adet yardımcı boşluk koşulu vardır.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{a_{1,1}}^{(3)} &= [\alpha_1^{(3)T} : \bar{\alpha}_2^{(3)T}]^T, & \mathbf{k}_{a_{1,2}}^{(3)} &= [\beta_1^{(3)T} : \bar{\beta}_2^{(3)T}]^T \\ \mathbf{k}_{a_{1,3}}^{(3)} &= [\gamma_1^{(3)T} : \bar{\gamma}_2^{(3)T}]^T, & \mathbf{k}_{a_{1,4}}^{(3)} &= [\lambda_1^{(3)T} : \bar{\lambda}_2^{(3)T}]^T \end{aligned} \quad (3.78)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{a_{2,1}}^{(3)} &= [\bar{\alpha}_1^{(3)T} : \alpha_2^{(3)T}]^T, & \mathbf{k}_{a_{2,2}}^{(3)} &= [\bar{\beta}_1^{(3)T} : \beta_2^{(3)T}]^T \\ \mathbf{k}_{a_{2,3}}^{(3)} &= [\bar{\gamma}_1^{(3)T} : \gamma_2^{(3)T}]^T, & \mathbf{k}_{a_{2,4}}^{(3)} &= [\bar{\lambda}_1^{(3)T} : \lambda_2^{(3)T}]^T \end{aligned} \quad (3.79)$$

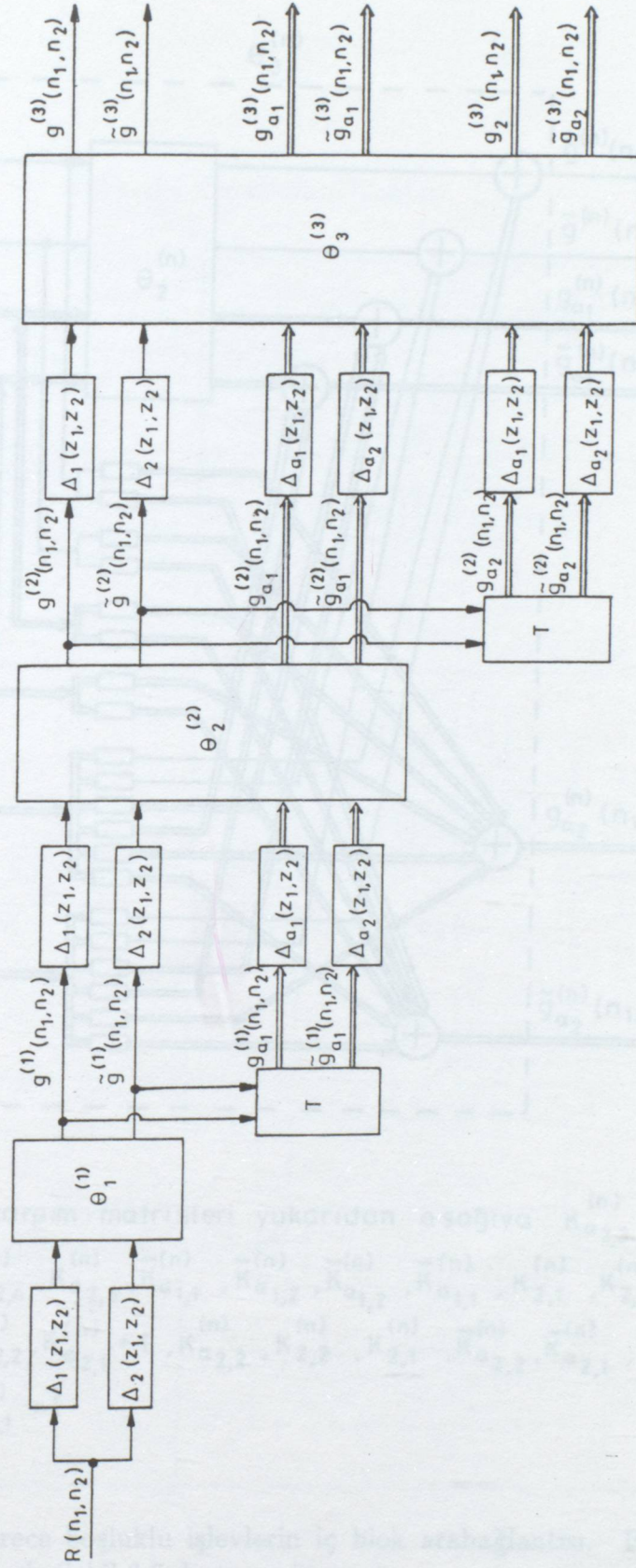
Ayrıca burada, yeni tanımlanan yardımcı yansıma katsayısı vektörleri,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_j^{(n)} &= [\bar{\alpha}_{j,1}^{(n)} \ \bar{\alpha}_{j,2}^{(n)} \ \bar{\alpha}_{j,3}^{(n)}]^T \\ \bar{\beta}_j^{(n)} &= [\bar{\beta}_{j,1}^{(n)} \ \bar{\beta}_{j,2}^{(n)} \ \bar{\beta}_{j,3}^{(n)}]^T \\ \bar{\gamma}_j^{(n)} &= [\bar{\gamma}_{j,1}^{(n)} \ \bar{\gamma}_{j,2}^{(n)} \ \bar{\gamma}_{j,3}^{(n)}]^T \\ \bar{\lambda}_j^{(n)} &= [\bar{\lambda}_{j,1}^{(n)} \ \bar{\lambda}_{j,2}^{(n)} \ \bar{\lambda}_{j,3}^{(n)}]^T \end{aligned} \quad (3.80)$$

Şekil 3.8 ve 3.9 da görüldüğü gibi üçüncü derece yardımcı boşluklu işlevler (3.71) de verilen boşluk koşulları ile çevrelenen her zaman sıfır olan boşluk noktalarına sahiptir.

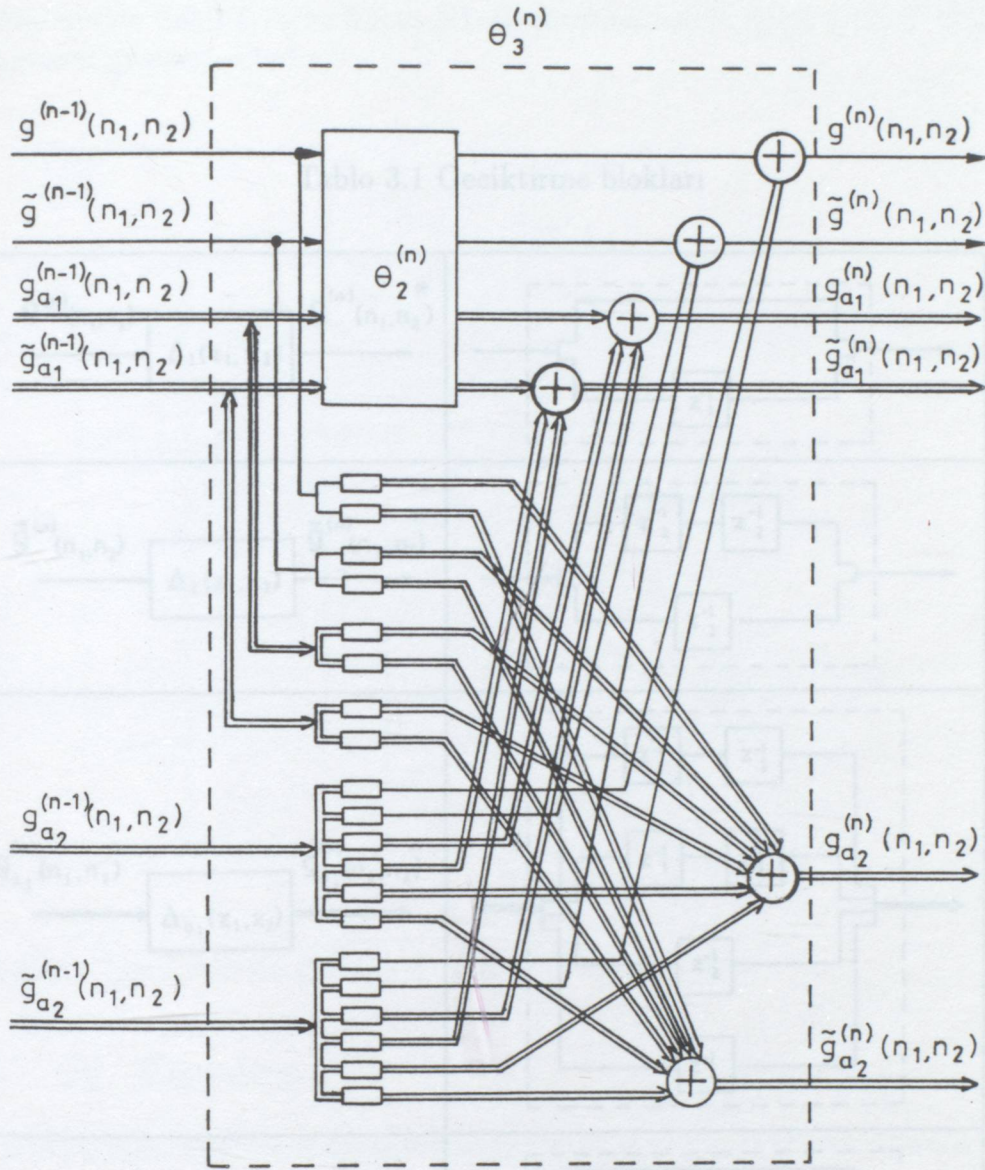
$$\begin{aligned} g_{1,i}^{(3)}(n_1, n_2) &= 0 & (n_1, n_2) &\in D^{(3)} \\ g_{2,i}^{(3)}(n_1, n_2) &= 0 & (n_1, n_2) &\in D^{(3)} \\ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Burada $D^{(3)}$, (3.69) da tanımlanmıştır. Şekil 3.10, ilk üç dereceye ilişkin kafes süzgeç blok diyagramını göstermektedir. Üçüncü derecenin iç-arabağlantısı ve geciktirme



Şekil 3.10 İlk üç dereceye ilişkin blok diyagram





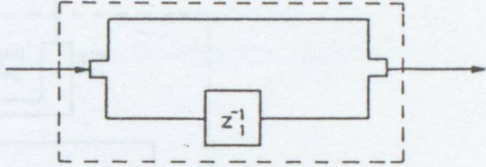
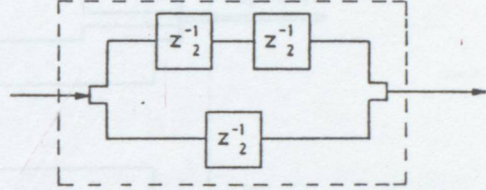
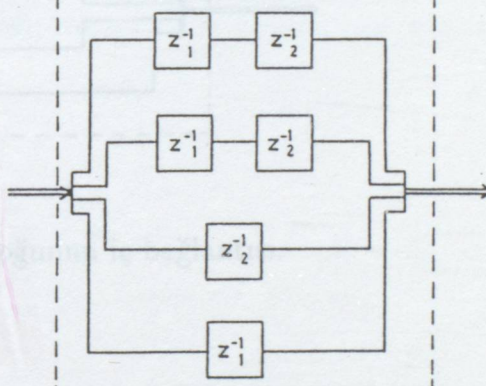
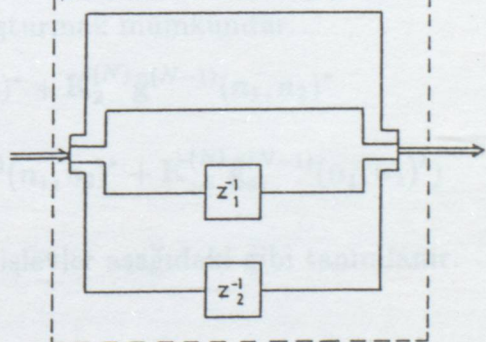
$\square$: Çarpıcı, çarpım matrisleri yukarıdan aşağıya $K_{a2,3}^{(n)}$,
 $K_{a2,4}^{(n)}, K_{a2,4}^{(n)}, K_{a2,3}^{(n)}, \bar{K}_{a1,1}^{(n)}, \bar{K}_{a1,2}^{(n)}, \bar{K}_{a1,2}^{(n)}, \bar{K}_{a1,1}^{(n)}, K_{2,1}^{(n)}, K_{2,2}^{(n)},$
 $\bar{K}_{a2,1}^{(n)}, \bar{K}_{a2,2}^{(n)}, K_{a2,1}^{(n)} + I, K_{a2,2}^{(n)}, K_{2,2}^{(n)}, K_{2,1}^{(n)}, \bar{K}_{a2,2}^{(n)}, \bar{K}_{a2,1}^{(n)},$
 $K_{a2,2}^{(n)}, K_{a2,1}^{(n)} + I$

Şekil 3.11 Üçüncü derece boşluklu işlevlerin iç blok arabağlantısı. Burada $\theta_2^{(n)}$ ikinci derecede Şekil 3.6 da tanımlanmıştır.



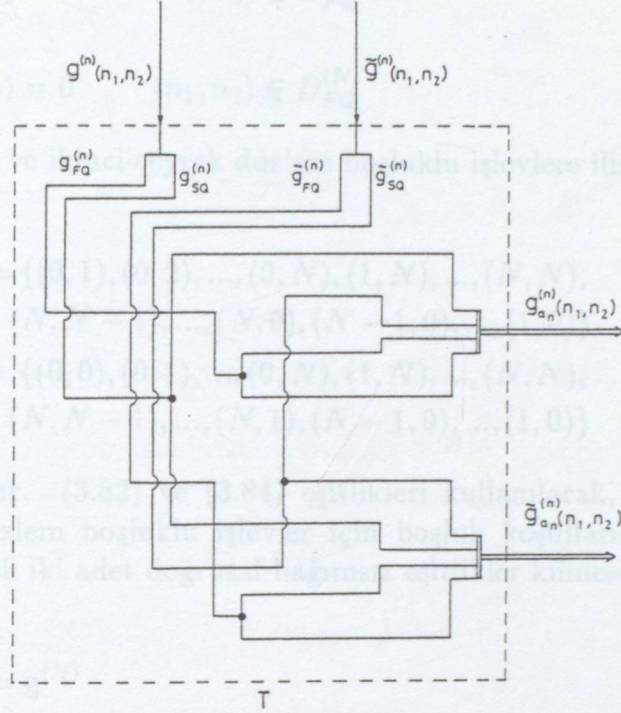
blokları sırasıyla Şekil 3.11 ve Tablo 3.1'de görülmektedir. Şekil 3.12, T bloğunun iç bağlantılarını göstermektedir.

Tablo 3.1 Geciktirme blokları

$g^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_1(z_1, z_2) \rightarrow g^{(n)*}(n_1, n_2)$	
$\tilde{g}^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_2(z_1, z_2) \rightarrow \tilde{g}^{(n)*}(n_1, n_2)$	
$g_{a_j}^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_{a_1}(z_1, z_2) \rightarrow g_{a_j}^{(n)*}(n_1, n_2)$	
$\tilde{g}_{a_j}^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_{a_2}(z_1, z_2) \rightarrow \tilde{g}_{a_j}^{(n)*}(n_1, n_2)$	



blokları sırayla Şekil 3.11 ve Tablo 3.1 de görülmektedir. Şekil 3.12, T bloğunun iç bağlantısını göstermektedir.



Şekil 3.12 Şekil 3.10 da görülen T bloğunun iç bağlantısı.

3.5 N. Derece

Daha önceki dereceleri dikkate alarak, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevler için tek bir yayılım eşitliği oluşturmak mümkündür.

$$g^{(N)}(n_1, n_2) = K_1^{(N)} g^{(N-1)}(n_1, n_2)^* + K_2^{(N)} \tilde{g}^{(N-1)}(n_1, n_2)^* + \sum_{j=1}^{N-1} (K_{j,1}^{(N)} g_{a_j}^{(N-1)}(n_1, n_2)^* + K_{j,2}^{(N)} \tilde{g}_{a_j}^{(N-1)}(n_1, n_2)^*) \quad (3.82)$$

Burada, ileri yönlü yardımcı boşluklu işlevler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} g_{N-1,1}^{(N-1)}(n_1, n_2) &= g_{SQ}^{(N-1)}(n_1, n_2) \\ g_{N-1,2}^{(N-1)}(n_1, n_2) &= \tilde{g}_{SQ}^{(N-1)}(n_1, n_2) \\ g_{N-1,3}^{(N-1)}(n_1, n_2) &= g_{FQ}^{(N-1)}(n_1, n_2) \\ g_{N-1,4}^{(N-1)}(n_1, n_2) &= \tilde{g}_{FQ}^{(N-1)}(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (3.83)$$



N. derece boşluklu işlevler, Şekil 3.1 de görüldüğü gibi $4N - 1$ boşluk koşuluna sahiptir. Böylece,

$$g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{FQ}^{(N)} \quad (3.84)$$

$$g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{SQ}^{(N)}$$

Burada, birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevlere ilişkin boşluk koşulları

$$D_{FQ}^{(N)} = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, N), (1, N), \dots, (N, N), (N, N-1), \dots, (N, 0), (N-1, 0), \dots, (1, 0)\} \quad (3.85)$$

$$D_{SQ}^{(N)} = \{(0, 0), (0, 1), \dots, (0, N), (1, N), \dots, (N, N), (N, N-1), \dots, (N, 1), (N-1, 0), \dots, (1, 0)\} \quad (3.86)$$

şeklinde olacaktır. (3.82) ve (3.84) eşitlikleri kullanılarak, N. derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevler için boşluk koşullarını sağlayacak şekilde, $4N - 1$ değişkenli iki adet doğrusal bağımsız eşitlikler kümesi elde ederiz.

$$\mathbf{G}^{(N)} \mathbf{k}^{(N)} = \mathbf{g}^{(N)}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(N)} \tilde{\mathbf{k}}^{(N)} = \tilde{\mathbf{g}}^{(N)} \quad (3.87)$$

Burada, yansıma katsayısı vektörleri

$$\mathbf{k}^{(N)} = [\mathbf{k}_Q^{(N)T} : \mathbf{k}_1^{(N)T} : \mathbf{k}_2^{(N)T} : \dots : \mathbf{k}_{N-1}^{(N)T}]^T \quad (3.88)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(N)} = [\tilde{\mathbf{k}}_Q^{(N)T} : \tilde{\mathbf{k}}_1^{(N)T} : \tilde{\mathbf{k}}_2^{(N)T} : \dots : \tilde{\mathbf{k}}_{N-1}^{(N)T}]^T$$

şeklindedir. Ayrıca, $\mathbf{G}^{(N)}$ ve $\tilde{\mathbf{G}}^{(N)}$, $(4N - 1) \times (4N - 1)$ boyutlu boşluk matrisleri, $\mathbf{g}^{(N)}$ ve $\tilde{\mathbf{g}}^{(N)}$ ler ise $(4N - 1) \times 1$ boyutlu boşluk vektörleridir. Bu matris ve vektörler (3.84) de verilen boşluk koşullarından belirlenir. N.derece kafes süzgeç parametreleri $\mathbf{k}^{(N)}$ ve $\tilde{\mathbf{k}}^{(N)}$ ler (3.87) eşitliği çözülerek elde edilir.

(3.82) eşitliğinden, (3.84) te verilen boşluk koşulları ile çevrelenmiş noktaların her zaman boşluk olacağı gösterilebilir.

$$g_{FQ}^{(N)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D^{(N)} \quad (3.89)$$

$$g_{SQ}^{(N)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D^{(N)}$$

burada $D^{(N)}$, (3.69) da tanımlanmıştır ve Şekil 3.1 de görüldüğü gibi, $(N-1)^2$ adet nokta kapsar.

Şekil 3.13 te görülen N . derece ileri-yönlü yardımcı boşluklu işlevler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} g_{a_j}^{(N)}(n_1, n_2) &= (K_{a_{j,1}}^{(N)} + I)g_{a_j}^{(N-1)}(n_1, n_2)^* + K_{a_{j,2}}^{(N)}\tilde{g}_{a_j}^{(N-1)}(n_1, n_2)^* \\ &+ K_{a_{j,3}}^{(N)}g^{(N-1)}(n_1, n_2)^* + K_{a_{j,4}}^{(N)}\tilde{g}^{(N-1)}(n_1, n_2)^* \\ &+ \sum_{i=1, ve(i \neq j)}^{N-1} (\bar{K}_{a_{i,1}}^{(N)}g_{a_i}^{(N-1)}(n_1, n_2)^* + \bar{K}_{a_{i,2}}^{(N)}\tilde{g}_{a_i}^{(N-1)}(n_1, n_2)^*) \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1$$

Burada yansıma katsayısı matrisleri (3.30), (3.31), (3.44)-(3.47) ve (3.72)-(3.73) te tanımlanmıştır.

Şekil 3.13, N . derece boşluklu işlevlerin $3N-1$ adet boşluk koşuluna sahip olduğunu gösterir. Böylece,

$$\begin{aligned} g_{j,i}^{(N)}(n_1, n_2) &= 0 \quad (n_1, n_2) \in D_{a_{j,i}}^{(N)} \quad (3.91) \\ j &= 1, 2, \dots, N-1 \quad ve \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

burada,

$$\begin{aligned} D_{a_{j,1}}^{(N)} &= \{(0, 0), (0, 1), \dots, (0, N), (1, N), \dots, (N-1, N), (N-1, 0), \dots, (1, 0)\} \\ D_{a_{j,2}}^{(N)} &= \{(0, 0), (1, 0), \dots, (N, 0), (N, 1), \dots, (N, N-1), (0, N-1), \dots, (0, 1)\} \\ D_{a_{j,3}}^{(N)} &= \{(1, 0), (2, 0), \dots, (N, 0), (N, 1), \dots, (N, N), (N-1, N), \dots, (1, N)\} \\ D_{a_{j,4}}^{(N)} &= \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, N), (1, N), \dots, (N, N), (N, N-1), \dots, (N, 1)\} \end{aligned} \quad (3.92)$$

(3.90) ve (3.91) eşitlikleri kullanılarak, Şekil 3.13 te görülen boşluk koşullarını sağlayacak şekilde her biri $3N-1$ değişkenli $4(N-1)$ adet doğrusal bağımsız eşitlikler kümesi oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} G_{a_{j,i}}^{(N)}k_{a_{j,i}}^{(N)} &= g_{a_{j,i}}^{(N)} \quad (3.93) \\ j &= 1, 2, \dots, N-1 \quad ve \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Burada, yardımcı yansıma katsayısı vektörleri

$$k_{a_{j,1}}^{(N)} = [\bar{\alpha}_1^{(N)T} : \dots : \bar{\alpha}_{j-1}^{(N)T} : \alpha_j^{(N)T} : \bar{\alpha}_{j+1}^{(N)T} : \dots : \bar{\alpha}_{N-1}^{(N)T}]^T \quad (3.94)$$

$$k_{a_{j,2}}^{(N)} = [\bar{\beta}_1^{(N)T} : \dots : \bar{\beta}_{j-1}^{(N)T} : \beta_j^{(N)T} : \bar{\beta}_{j+1}^{(N)T} : \dots : \bar{\beta}_{N-1}^{(N)T}]^T \quad (3.95)$$

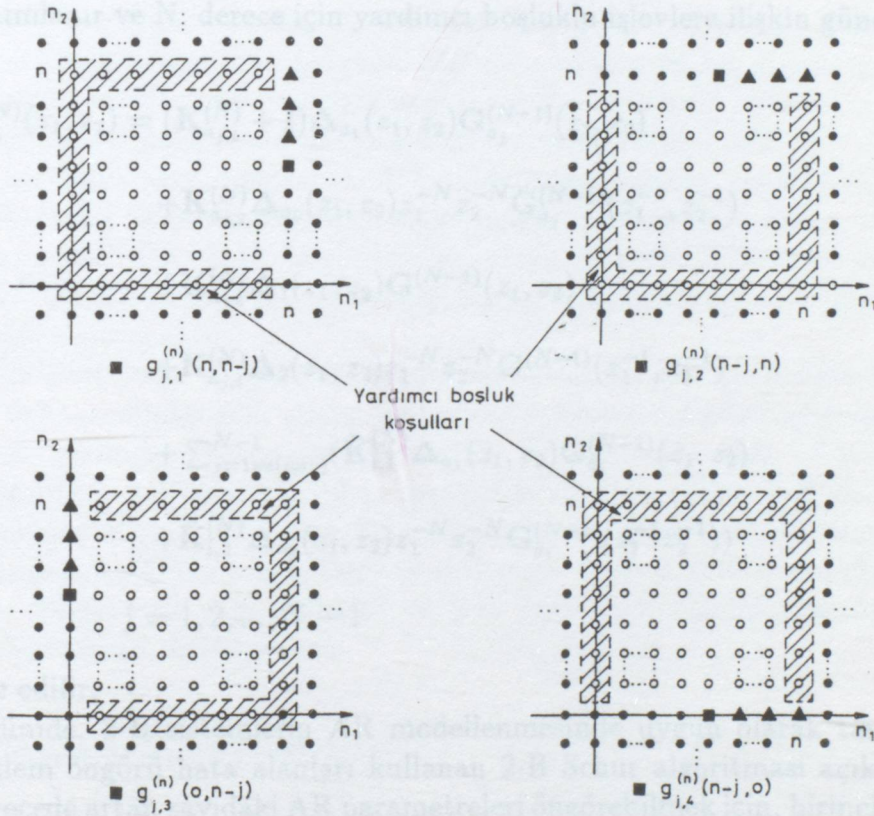
$$k_{a,j,3}^{(N)} = [\bar{\gamma}_1^{(N)T} : \dots : \bar{\gamma}_{j-1}^{(N)T} : \gamma_j^{(N)T} : \bar{\gamma}_{j+1}^{(N)T} : \dots : \bar{\gamma}_{N-1}^{(N)T}]^T \quad (3.96)$$

$$k_{a,j,3}^{(N)} = [\bar{\lambda}_1^{(N)T} : \dots : \bar{\lambda}_{j-1}^{(N)T} : \lambda_j^{(N)T} : \bar{\lambda}_{j+1}^{(N)T} : \dots : \bar{\lambda}_{N-1}^{(N)T}]^T \quad (3.97)$$

burada $\alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}, \gamma_j^{(n)}, \lambda_j^{(n)}$ ve $\bar{\alpha}_j^{(n)}, \bar{\beta}_j^{(n)}, \bar{\gamma}_j^{(n)}, \bar{\lambda}_j^{(n)}$ sırasıyla (3.52) ve (3.80) de tanımlanmıştır.

Şekil 3.13 te de gösterildiği gibi N . derece yardımcı boşluklu işlevler, $(N-1)^2$ boşluğa sahiptir. Bunlar boşluk koşullarınca çevrelenmişlerdir ve her zaman sıfırdırlar.

$$g_{j,i}^{(N)}(n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, n_2) \in D^{(N)} \quad (3.98)$$



Şekil 3.13 j . dereceden sonra tanımlanmış n . derece yardımcı boşluklu işlevler, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Taralı alanda $3N-1$ yardımcı boşluk koşulu vardır.

(3.17), (3.54), (3.55), (3.82) ve (3.90) eşitlikleri kullanılarak, ileri-yönlü boşluklu işlevler için güncelleştirme eşitlikleri z domeninde aşağıdaki gibi yazılır.

$$G^{(0)}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} S_{yy}(z_1, z_2) \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^{(N)}(z_1, z_2) &= \mathbf{K}_1^{(N)} \Delta_1(z_1, z_2) \mathbf{G}^{(N-1)}(z_1, z_2) \\
&+ \mathbf{K}_2^{(N)} \Delta_1(z_1, z_2) z_1^{-N} z_2^{-N} \mathbf{G}^{(N-1)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbf{K}_{j,1}^{(N)} \Delta_{a_1}(z_1, z_2) \mathbf{G}_{a_j}^{(N-1)}(z_1, z_2) \\
&+ \mathbf{K}_{j,2}^{(N)} \Delta_{a_2}(z_1, z_2) z_1^{-N} z_2^{-N} \mathbf{G}_{a_j}^{(N-1)}(z_1^{-1} z_2^{-1}))
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Burada, $\mathbf{G}_{a_j}^{(j)}(z_1, z_2)$ vektörü

$$\mathbf{G}_{a_j}^{(j)}(z_1, z_2) = [\mathbf{G}_{SQ}^{(j)}(z_1, z_2) \tilde{\mathbf{G}}_{SQ}^{(j)}(z_1, z_2) \mathbf{G}_{FQ}^{(j)}(z_1, z_2) \mathbf{G}_{FQ}^{(j)}(z_1, z_2)]^T \tag{3.101}$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1$$

olarak tanımlanır ve N. derece için yardımcı boşluklu işlemlere ilişkin güncelleştirme vektörü

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{a_j}^{(N)}(z_1, z_2) &= (\mathbf{K}_{a_{j,1}}^{(N)} + \mathbf{I}) \Delta_{a_1}(z_1, z_2) \mathbf{G}_{a_j}^{(N-1)}(z_1, z_2) \\
&+ \mathbf{K}_{a_{j,2}}^{(N)} \Delta_{a_2}(z_1, z_2) z_1^{-N} z_2^{-N} \mathbf{G}_{a_j}^{(N-1)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
&+ \mathbf{K}_{a_{j,3}}^{(N)} \Delta_1(z_1, z_2) \mathbf{G}^{(N-1)}(z_1, z_2) \\
&+ \mathbf{K}_{a_{j,4}}^{(N)} \Delta_2(z_1, z_2) z_1^{-N} z_2^{-N} \mathbf{G}^{(N-1)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
&+ \sum_{j=1ve(i \neq j)}^{N-1} (\bar{\mathbf{K}}_{i,1}^{(N)} \Delta_{a_1}(z_1, z_2) \mathbf{G}_{a_i}^{(N-1)}(z_1, z_2) \\
&+ \bar{\mathbf{K}}_{i,2}^{(N)} \Delta_{a_2}(z_1, z_2) z_1^{-N} z_2^{-N} \mathbf{G}_{a_i}^{(N-1)}(z_1^{-1} z_2^{-1}))
\end{aligned} \tag{3.102}$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1$$

olarak elde edilir.

Bu bölümde, 2-B sistemlerin AR modellenmesinde uygun olarak tanımlanmış çeyrek-düzlem öngörü hata alanları kullanan 2-B Schur algoritması açıklanmıştır. Her bir derecede artan sayıdaki AR parametreleri öngörebilmek için, birinci ve ikinci çeyrek düzlem boşluklu işlemlere ek olarak, yardımcı boşluklu işlevler tanımlanır. 2-B Schur algoritması ile elde edilen kafes süzgeç parametreleri ile AR geçiş işlevi parametreleri arasındaki ilişki 5. bölümde incelenecektir. 2-B Schur algoritmasındaki teoremin geçerliliği 7. bölümde bilgisayar benzetimleri ile kanıtlanmıştır.



4. 2-BOYUTLU YİNELEMELİ ENKÜÇÜK-KARELER ALGORİTMASI

4.1 Giriş

1-B'ta, gösterdikleri önemli iyi özelliklerinden dolayı, geçmiş yıllarda kafes süzgeç algoritmaları üzerinde oldukça yoğun çalışılmış ve bu algoritmalar işaret işlemenin çeşitli alanlarında başarıyla uygulanmıştır. Bununla birlikte, çok-boyutlu kafes süzgeç algoritmalarının doğrudan doğruya geliştirilmesi mümkün değildir. 1-B'ta sabit bir kafes süzgeç yapısı tanımlanabilmesine rağmen, temel farklılıklardan dolayı 2-B'ta sabit kafes süzgeç yapısı artan derecelerde hatalara neden olmaktadır. Dolayısıyla, geliştirilen bu tür algoritmalar, artan derecelerde tam bir çözüm vermemektedir. Bu bölümde, 2-B'ta herhangi bir enformasyon kaybının oluşmadığı bir yapı üzerinde durulacaktır.

AR modellerin kafes süzgeç yapıları ile modellenmesi gibi problemlerin çözümü Bölüm 2.3 te bahsedildiği gibi, uygun tanımlanmış uzaylara dik-izdüşüm işlemlerinin uygulanması şeklinde tanımlanan geometrik yaklaşımlarla elde edilebilir. Bu bölümde öncelikle 1-B'tan doğrudan genişletilerek elde edilen 2-B örnek uzayı, geçmiş gözlemler uzayı 2-B dik izdüşüm operatörü, dik ayrıştırma gibi temel kavramlar tanımlanacaktır. Daha sonra, İleri- ve geri-yönlü öngörü hatalarının dik izdüşüm operatörleri kullanarak elde edilmesi ve 2-B yinelemeli enküçük-kareler algoritmasının geliştirilmesi incelenecektir.

4.2 Temel Kavramlar

4.2.1 2-B İzdüşüm

Verilen bir 2-B gözlem işareti için, karesel destek bölgesine sahip N. derece bir AR modelin oluşturulması problemini düşünelim. Burada N. derece 2-B AR model ile her iki uzamsal koordinat yönünde N. derecede olan AR model kastedilir. Enküçük-kareler anlamında, problem öngörü hatasının karesel değerlerinin toplamının enküçük yapılmasıdır.



$$\min \left(\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N [e^{(N)}(n_1, n_2)]^2 \right) \quad (4.1)$$

Burada, $e^{(N)}(n_1, n_2)$ öngörü hatasıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} e^{(N)}(n_1, n_2) &\triangleq y(n_1, n_2) - \hat{y}(n_1, n_2) \\ &= y(n_1, n_2) - \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}^{(N)} y(n_1 - i, n_2 - j) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Burada, $y(n_1, n_2)$ öngörülecek sürece ilişkin gözlem değerleridir. (4.2) eşitliği matris yapısında yazılacak olursa,

$$e^{(N)}(n_1, n_2) = y(n_1, n_2) - \mathbf{Y} \mathbf{A}_N \quad (4.3)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{A}_N = [a_{01}^{(N)} a_{02}^{(N)} \dots a_{0N}^{(N)} a_{10}^{(N)} a_{11}^{(N)} \dots a_{1N}^{(N)} \dots a_{N0}^{(N)} a_{N1}^{(N)} \dots a_{NN}^{(N)}] \quad (4.4)$$

ve $\mathbf{Y}$ geçmiş gözlemler uzayını temsil eden $1 \times (N \times N)$ boyutlarında,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T &= [y(n_1, n_2 - 1) y(n_1, n_2 - 2) \dots y(n_1, n_2 - N) y(n_1 - 1, n_2) \\ &\quad y(n_1 - 1, n_2 - 1) \dots y(n_1 - 1, n_2 - N) \dots y(n_1 - N, n_2) \\ &\quad y(n_1 - N, n_2 - 1) \dots y(n_1 - N, n_2 - N)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde bir vektördür. Enküçük-kareler çözümü aşağıdaki gibi "pseudo-inverse" ile elde edilir.

$$\mathbf{A}^{(N)} = (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T y(n_1, n_2) \quad (4.6)$$

(4.6) eşitliği kullanılarak (4.2) aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebilir.

$$e^{(N)}(n_1, n_2) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_N) y(n_1, n_2) \quad (4.7)$$

Burada $\mathbf{P}_N$ izdüşüm operatörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \quad (4.8)$$

$\mathbf{P}_N$ herhangi bir vektörü $\mathbf{Y}$ yi oluşturan geçmiş gözlemler uzayı üzerine izdüşürür. Bu izdüşüm operatörünün dik eşleniği de bir izdüşüm operatörüdür ve vektörleri $\mathbf{P}_N$ 'e dik bir uzay üzerine izdüşürür. Bu da aşağıda tanımlanmıştır.

$$\mathbf{P}_N^\perp \triangleq (\mathbf{I} - \mathbf{P}_N) \quad (4.9)$$

Dolayısıyla,

$$e^{(N)}(n_1, n_2) = \mathbf{P}_N^\perp y(n_1, n_2) \quad (4.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada öngörü hatası $e^{(N)}(n_1, n_2)$, öngörülen bileşene,

$$\hat{y}(n_1, n_2) = \mathbf{P}_N y(n_1, n_2) \quad (4.11)$$

diktir.

4.2.2 Örnek uzayı

$\{y(n_1, n_2) \in \mathcal{R} \mid (0, 0) \leq (n_1, n_2) \leq (T, T)\}$ gerçel değerli zaman örneklerini ve bu veri örneklerince belirlenen doğrusal uzayı düşünelim. Bu veri örnekleri klasik yaklaşımla, örnek-üreteç uzayında (sample-product space), bir vektör olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$|y\rangle_{T,T} = [y(0, 0) \ y(0, 1) \ \dots \ y(T, T)]^T \quad (4.12)$$

Burada $|y\rangle_{T,T}$ örnek-üreteç uzayı içinde yer alır. Örnek-üreteç uzayı bir Hilbert uzayıdır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R} = \prod_{i=0}^T \prod_{j=0}^T \mathcal{R} \quad (4.13)$$

Buradan $\mathcal{H}_T$ nin $(T + 1)^2$ gözlemce kapsandığı görülmektedir. Verilen bir $|x\rangle_{T,T}$, $|y\rangle_{T,T} \in \mathcal{H}_T$ için bu uzayda iç-çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\langle x|y\rangle_{T,T} \triangleq \sum_{i=0}^T \sum_{j=0}^T x(i, j)y(i, j) \quad (4.14)$$

Burada $|x\rangle_{T,T}$ 'nin devriği $\langle x|_{T,T}$ ile temsil edilir. Öte yandan, istatistiksel yöntemlerle bağlantı kurabilmek için iç çarpımın ergodik sistemlerde $E[x(i, j)y(i, j)]$ kovaryansının yaklaşıklığı olduğu göz önüne alınır.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T + 1)^2} \langle x|y\rangle_{T,T} \cong E[x(i, j)y(i, j)] \quad (4.15)$$

4.2.3 Dik izdüşüm

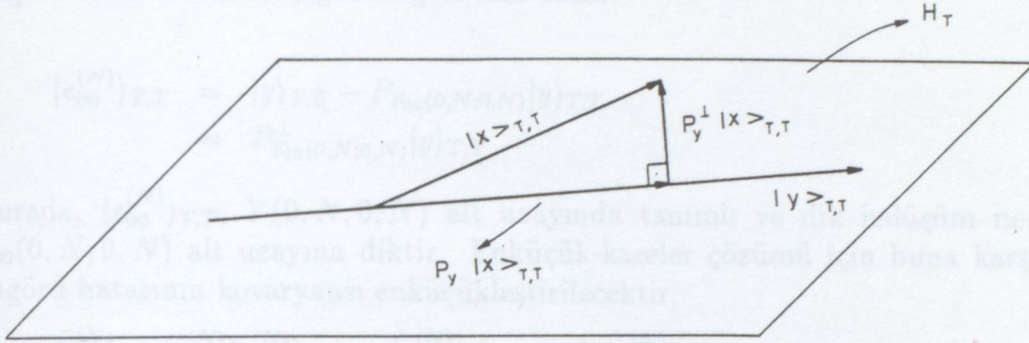
$|x\rangle_{T,T}$, $|y\rangle_{T,T} \in \mathcal{H}_T$ olarak iki vektör verilsin. Bu iki vektör, $\langle x|y\rangle_{T,T} = 0$ şartını sağlıyorsa birbirlerine **diktir** ($|x\rangle_{T,T} \perp |y\rangle_{T,T}$). Aynı şey alt uzaylar içinde söylenebilir. $\mathcal{H}_T$ ' de tanımlı M ve N alt uzaylarının birbirine dik olması için $(M \perp N)$, bütün $|m\rangle \in M$ ve $|n\rangle \in N$ 'ler birbirine dik olmalıdır. Yani,

$$(|m\rangle \perp |n\rangle) \ \forall \ |m\rangle \in M \ \text{ve} \ |n\rangle \in N \implies (M \perp N). \quad (4.16)$$

Öteyandan herhangi bir vektörü, bir alt uzay üzerine dik olarak izdüşüren işleme dik izdüşüm operatörü denir. Buradan, $|x\rangle_{T,T} \in \mathcal{H}_T$ 'yi $|y\rangle_{T,T}$ üzerine izdüşüren P_y izdüşüm operatörü,

$$P_y \triangleq |y\rangle_{T,T} \langle y|_{T,T}^{-1} \langle y|_{T,T} \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanır. Öyleki $P_y|x\rangle_{T,T}, |x\rangle_{T,T}$ 'nin $|y\rangle_{T,T}$ üzerine izdüşümüdür. Bu izdüşüm işlemi geometrik olarak şekil 4.1'de görülmektedir.



Şekil 4.1 $|x\rangle_{T,T}$ nin $\mathcal{H}_T$ de tanımlı $|y\rangle_{T,T}$ alt uzayı üzerine dik izdüşümü.

4.2.4 Geçmiş gözlemler uzayı

$\mathcal{H}_T$ uzayı içerisinde, $|y\rangle_{T,T}$ 'nin geçmiş gözlemlerinin kapsamından oluşan bir $Y_{k,l}(0, N; 0, M)$ alt uzayı tanımlanabilir. Bu alt uzay aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} Y_{k,l}(0, N; 0, M) &= \{|z_1^{-i} z_2^{-j} y\rangle_{T,T}, i, j = 0, 1, \dots, N \text{ ve } (i, j) \neq (k, l)\} \\ &= \{|y\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} y\rangle_{T,T}, |z_2^{-2} y\rangle_{T,T}, \dots, |z_2^{-M} y\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} y\rangle_{T,T}, \\ &\quad |z_1^{-1} z_2^{-1} y\rangle_{T,T}, \dots, |z_1^{-N} z_2^{-M} y\rangle_{T,T}\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Öte yandan, bu uzay üzerindeki izdüşüm operatörü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} P_{Y_{k,l}(0, N; 0, M)} &\triangleq |Y_{k,l}(0, N; 0, M)\rangle_{T,T} \langle Y_{k,l}(0, N; 0, M)|_{T,T} \\ &\quad \langle Y_{k,l}(0, N; 0, M)|_{T,T} \end{aligned} \quad (4.19)$$

ve dik eşleniği

$$P_{Y_{k,l}(0, N; 0, M)}^{\perp} \triangleq \mathbf{I} - P_{Y_{k,l}(0, N; 0, M)} \quad (4.20)$$

şeklinde dir.



4.2.5 İleri- ve geri-yönlü öngörü hataları

$|y\rangle_{T,T}$ 'nin $Y_{k,l}(0, N; 0, M)$ alt uzayı üzerine izdüşümü $|y\rangle_{T,T}$ 'nin geçmiş gözlemlerine dayalı enküçük-kareler kestirimini verir. Diğer bir deyişle N . derecede öngörü hata vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} |e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |y\rangle_{T,T} - P_{Y_{00}(0,N;0,N)}|y\rangle_{T,T} \\ &= P_{Y_{00}(0,N;0,N)}^\perp |y\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Burada, $|e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T}$, $Y(0, N; 0, N)$ alt uzayında tanımlı ve dik izdüşüm nedeniyle, $Y_{00}(0, N; 0, N)$ alt uzayına diktir. Enküçük-kareler çözümü için buna karşı düşen öngörü hatasının kovaryansı enküçükleştirilecektir.

$$R_{00}^{(N)} = \langle e_{00}^{(N)} | e_{00}^{(N)} \rangle_{T,T} = \langle e_{00}^{(N)} | y \rangle_{T,T} = \langle y | e_{00}^{(N)} \rangle_{T,T} \quad (4.22)$$

İzdüşüm işlemi ile öngörü yaklaşımının birbiri ile ilişkisini görebilmek için, bir vektörün en son bileşenini alarak, $\mathcal{H}_T$ den R ye geçiş sağlayan bir koordinat haritalaması vektörü (4.21) eşitliğine uygulanarak,

$$\begin{aligned} \langle \Pi | e_{00}^{(N)} \rangle_{T,T} &= \langle \Pi | y \rangle_{T,T} - \langle \Pi | Y_{00}(0, N; 0, N) \rangle_{T,T} \\ &\quad \langle Y_{00}(0, N; 0, N) | Y_{00}(0, N; 0, N) \rangle_{T,T}^{-1} \langle Y_{00}(0, N; 0, N) | y \rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. burada Π , $1 \times (T \times T)$ boyutlarında koordinat haritalaması vektörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\Pi = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad (4.24)$$

(4.24) bağıntısı, (4.23) de yerine koyularak,

$$\begin{aligned} e_{00}^{(N)}(T, T) &= y(T, T) - [y(T, T-1) \ y(T, T-2) \ \dots \ y(T, T-N) \ y(T-1, T), \\ &\quad y(T-1, T-1) \ \dots \ y(T-1, T-N) \ \dots \ y(T-N, T-N)] \mathbf{A}_N \\ &= y(T, T) - \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^N \sum_{j=0}^N A_{ij}^{(N)} y(T-i, T-j) \end{aligned} \quad (4.25)$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan, Bölüm 2.3 te belirtildiği gibi, 2-B'ta 1-B'un aksine 1 değil üç adet çeyrek-düzlem geri-yönlü öngörü hata vektörü tanımlanır. Bunlar;

ikinci-çeyrek düzlem için,

$$\begin{aligned} |e_{10}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-N} y\rangle_{T,T} - P_{Y_{N0}(0,N;0,N)} |z_1^{-N} y\rangle_{T,T} \\ &= P_{Y_{N0}(0,N;0,N)}^\perp |z_1^{-N} y\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Burada, $|e_{10}^{(N)}\rangle_{T,T}$, $Y(0, N; 0, N)$ alt uzayında tanımlı ve dik izdüşüm nedeniyle, $Y_{N0}(0, N; 0, N)$ alt uzayına diktir. Dolayısıyla, enküçükleştirilecek kovaryansı,

$$R_{10}^{(N)} = \langle e_{10}^{(N)} | e_{10}^{(N)} \rangle_{T,T} = \langle e_{10}^{(N)} | z_1^{-N} y \rangle_{T,T} \quad (4.27)$$

şeklinde dir.

Üçüncü-çeyrek düzlem için,

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_{00}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-N} z_2^{-N} y\rangle_{T,T} - P_{Y_{NN}(0,N;0,N)} |z_1^{-N} z_2^{-N} y\rangle_{T,T} \\ &= P_{Y_{NN}(0,N;0,N)}^\perp |z_1^{-N} z_2^{-N} y\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ve kovaryansı

$$\tilde{R}_{00}^{(N)} = \langle \tilde{e}_{00}^{(N)} | \tilde{e}_{00}^{(N)} \rangle_{T,T} = \langle \tilde{e}_{00}^{(N)} | z_1^{-N} z_2^{-N} y \rangle_{T,T} \quad (4.29)$$

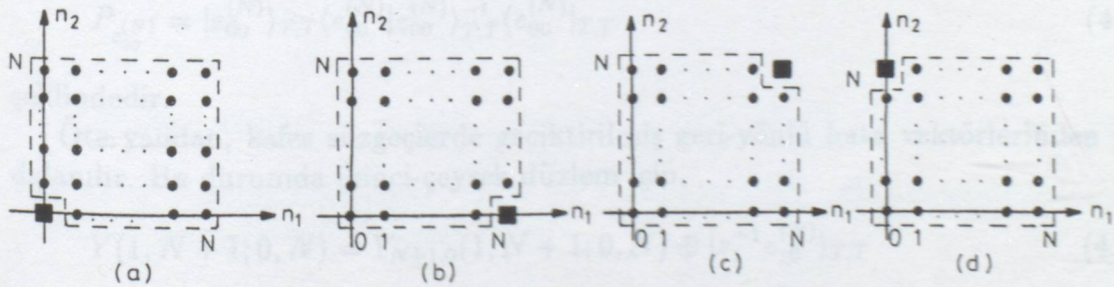
ve dördüncü-çeyrek düzlem için,

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_{10}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |z_2^{-N} y\rangle_{T,T} - P_{Y_{0N}(0,N;0,N)} |z_2^{-N} y\rangle_{T,T} \\ &= P_{Y_{0N}(0,N;0,N)}^\perp |z_2^{-N} y\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.30)$$

ve

$$\tilde{R}_{10}^{(N)} = \langle \tilde{e}_{10}^{(N)} | \tilde{e}_{10}^{(N)} \rangle_{T,T} = \langle \tilde{e}_{10}^{(N)} | z_2^{-N} y \rangle_{T,T} \quad (4.31)$$

şeklinde olacaktır. Şekil 4.2 de birinci-, ikinci-, üçüncü- ve dördüncü-çeyrek düzlem hata vektörlerine ait destek bölgeleri görülmektedir.



Şekil 4.2 çeyrek düzlem öngörü hata vektörlerine ilişkin destek bölgeleri (a) $|e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T}$, (b) $|e_{10}^{(N)}\rangle_{T,T}$, (c) $|\tilde{e}_{00}^{(N)}\rangle_{T,T}$, (d) $|\tilde{e}_{10}^{(N)}\rangle_{T,T}$

4.2.6 Alt uzayların dik ayrıştırılması

Bir alt uzay $\mathcal{S}$, birbirine dik bileşenler içeriyorsa, bu alt uzay birbirinden bağımsız daha küçük alt uzaylara bölünebilir ve onların doğrudan toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \quad (4.32)$$

Burada, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ birbirine dik iki alt uzaydır ve $\oplus$ dik ayrıştırma operatörü olarak isimlendirilir. Buna göre, $|e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T}, Y(0, N; 0, N)$ alt uzayında yer aldığından ve $Y_{00}(0, N; 0, N)$ alt uzayına dik olduğundan, $Y(0, N; 0, N)$ aşağıdaki gibi verilebilir.

$$Y(0, N; 0, N) = Y_{00}(0, N; 0, N) \oplus |e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T} \quad (4.33)$$

Öte yandan, bir x vektörünün, birbirine dik iki altuzaya ayrıştırılan bir $\mathcal{S}$ altuzayı üzerine izdüşümü, x 'in bu alt uzayların herbirine olan izdüşümlerinin toplamıdır. Buna göre, $Y(0, N; 0, N)$ uzayı üzerine izdüşüm operatörü,

$$P_{Y(0,N;0,N)} = P_{Y_{00}(0,N;0,N)} + P_{e_{00}^{(N)}} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Öte yandan bu izdüşüm operatörünün dik eşleniği,

$$\mathbf{I} - P_{Y(0,N;0,N)} = \mathbf{I} - [P_{Y_{00}(0,N;0,N)} + P_{e_{00}^{(N)}}]$$

eşitliğinden,

$$P_{Y(0,N;0,N)}^\perp = P_{Y_{00}(0,N;0,N)}^\perp - P_{e_{00}^{(N)}} \quad (4.35)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$P_{e_{00}^{(N)}} = |e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T} \langle e_{00}^{(N)}| e_{00}^{(N)} \rangle_{T,T}^{-1} \langle e_{00}^{(N)}|_{T,T} \quad (4.36)$$

şeklindedir.

Öte yandan, kafes süzgeçlerde geciktirilmiş geri-yönlü hata vektörlerinden faydalanılır. Bu durumda ikinci-çeyrek düzlem için,

$$Y(1, N+1; 0, N) = Y_{N+1,0}(1, N+1; 0, N) \oplus |z_1^{-1} e_{10}^{(N)}\rangle_{T,T} \quad (4.37)$$

Buna bağlı olarak, $Y(1, N+1; 0, N)$ uzayı üzerine izdüşüm operatörü,

$$P_{Y(1,N+1;0,N)} = P_{Y_{N+1,0}(0,N;0,N)} + P_{z_1^{-1} e_{10}^{(N)}} \quad (4.38)$$

ve dik eşleniği

$$P_{Y(1,N+1;0,N)}^\perp = P_{Y_{N+1,0}(1,N+1;0,N)}^\perp - P_{z_1^{-1} e_{10}^{(N)}} \quad (4.39)$$

Benzer bağıntılar üçüncü- ve dördüncü-çeyrek düzlemler içinde çıkartılabilir.

4.3 Derece Güncelleştirme Yinelemeleri

2-B'ta derece güncelleştirme bağıntılarını elde etmek 1-B'taki kadar kolay değildir. 1-B ta her bir derece artışta geçmiş gözlemler uzayının boyutu yalnızca bir vektör genişlerken, 2-B ta dereceden dereceye değişmektedir. $Y(0, N; 0, N)$ uzayı $(N + 1)^2$ adet gözlem vektörünü kapsar. Uzayın boyutu bir derece artırıldığında $Y(0, N + 1; 0, N + 1)$ uzayı $(N + 2)^2$ gözlem vektöründen oluşur. Dolayısıyla N . Dereceden $(N + 1)$. dereceye geçişte

$$(N + 2)^2 - (N + 1)^2 = 2N + 3$$

yenı vektör uzaya katılmaktadır. Bu nedenle 1-B'ta elde edilen sabit kafes süzgeç model ile böyle bir uzaydaki herhangi bir vektörü diğerleri cinsinden artan derecelerde temsil etmek mümkün değildir. Dolayısıyla derece güncelleştirme bağıntıları, artan derecelerde büyüyen kafes yapısını oluşturabilmek için derece derece incelenmelidir.

4.3.1 Birinci derece

Birinci-çeyrek düzlem hata vektörü,

$$\begin{aligned} |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |y\rangle_{T,T} - P_{Y_{00}(0,1;0,1)}|y\rangle_{T,T} \\ &= |y\rangle_{T,T} - |Y_{00}(0,1;0,1)\rangle_{T,T} \\ &\quad \langle Y_{00}(0,1;0,1)|Y_{00}(0,1;0,1)\rangle_{T,T}^{-1} \langle Y_{00}(0,1;0,1)|y\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.40)$$

şeklinde dir. Burada bazı iç çarpımların ilişkilere karşı düştüğü görülebilir.

$$\langle Y_{00}(0,1;0,1)|Y_{00}(0,1;0,1)\rangle_{T,T}^{-1} = R_{Y_{00}(0,1;0,1)}^{-1} \quad (4.41)$$

ve

$$\langle Y_{00}(0,1;0,1)|y\rangle_{T,T} = \Delta^{(1)} \quad (4.42)$$

Burada $\Delta^{(1)}$ kısmi yada dolaylı ilişki olarak isimlendirilir. Bu tanımlamalara göre (4.40) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |y\rangle_{T,T} - |Y_{00}(0,1;0,1)\rangle_{T,T} R_{Y_{00}(0,1;0,1)}^{-1} \Delta^{(1)} \\ &= |y\rangle_{T,T} - |\hat{y}^{(1)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Burada $|\hat{y}^{(1)}\rangle_{T,T}$ birinci derece öngörü vektörüdür ve aşağıdaki gibi verilir.

$$|\hat{y}^{(1)}\rangle_{T,T} = |Y_{00}(0,1;0,1)\rangle_{T,T} R_{Y_{00}(0,1;0,1)}^{-1} \Delta^{(1)} \quad (4.44)$$

(4.6) ifadesinden

$$|\tilde{y}^{(1)}\rangle_{T,T} = |Y_{00}(0,1;0,1)\rangle_{T,T} \mathbf{A}^{(1)} \quad (4.45)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\mathbf{A}^{(1)}$ birinci derece birinci-çeyrek düzlem eniyi AR katsayıları vektörüdür.

Şimdi, hata vektörlerinin oluşturduğu bir M hata vektörleri uzayı tanımlansın. 0. derece için, bu hata uzayı 0. derecedeki 4 adet çeyrek-düzlem hata vektöründen oluşur ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$M^{(0)} = \{|e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}, |e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T}, |\tilde{e}_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}, |\tilde{e}_{10}^{(1)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.46)$$

başlangıç koşulları olarak 0. derecedeki hata vektörleri, 1-B'ta olduğu gibi gözlem vektörü $|y\rangle_{T,T}$ olarak seçilirler.

$$|e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} = |e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} = |\tilde{e}_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} = |\tilde{e}_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} = |y\rangle_{T,T} \quad (4.47)$$

Öte yandan, geciktirilmiş hata vektörleri uzayı,

$$M_D^{(0)} = \{|e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}z_2^{-1}\tilde{e}_{00}^{(0)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}\tilde{e}_{10}^{(0)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.48)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda verilen tanımlardan hareketle $|e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}$ 'yi geciktirilmiş hata vektörleri uzayında yazabiliriz.

$$|e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} - |\hat{e}_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} \quad (4.49)$$

burada,

$$|\hat{e}_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} = P_{M_{D,1}^{(0)}} |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} \quad (4.50)$$

şeklindedir. (4.50) eşitliğinde $M_{D,1}^{(n)}$ ise aşağıdaki gibidir.

$$M_{D,1}^{(n)} = \{|z_1^{-1}e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}z_2^{-1}\tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}\tilde{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.51)$$

(4.17), (4.50) bağıntılarını kullanarak (4.49) yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} - P_{M_{D,1}^{(0)}} |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} \\ &= |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} - |M_{D,1}^{(0)}\rangle_{T,T} \langle M_{D,1}^{(0)} | M_{D,1}^{(0)} \rangle_{T,T}^{-1} \langle M_{D,1}^{(0)} | e_{00}^{(0)} \rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.52)$$

elde edilir. (4.41) ve (4.42) bağıntılarından eşitlik daha da basitleştirilebilir.

$$|e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} - |M_{D,1}^{(0)}\rangle_{T,T} R_{M_{D,1}}^{(0)-1} \Delta_{D,1}^{(0)}$$

$$= |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} - |M_{D,1}^{(0)}\rangle_{T,T} \mathbf{k}^{(1)}$$

burada



$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}_Q^{(1)} = [k_{10}^{(1)} \ k_{11}^{(1)} \ k_{01}^{(1)}] \quad (4.54)$$

olarak verilen yansıma katsayıları vektörüdür ve

$$\mathbf{k}_Q^{(n)} = R_{M_{D,1}}^{(n-1)-1} \Delta_{D,1}^{(n-1)} \quad (4.55)$$

ifadesinden elde edilir. (4.47) eşitliğinde verilen başlangıç koşullarını dikkate alacak olursak,

$$M_{D,1}^{(0)} = Y_{00}(0, 1; 0, 1) \quad (4.56)$$

olduğu görülür. Bu ifade (4.52) eşitliğinde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} - P_{M_{D,1}^{(0)}} |e_{00}^{(0)}\rangle_{T,T} \\ &= |y\rangle_{T,T} - P_{Y_{00}(0,1;0,1)} |y\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.57)$$

olduğu görülür. Böylece, (4.45) ve (4.53) bağıntılarından, birinci derece için $\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)}$ olur. Böylece enküçükleştirme şartı olan

$$\langle e_{00}^{(1)} | Y_{00}(0, 1; 0, 1) \rangle_{T,T} = \langle e_{00}^{(1)} | M_{D,1}^{(0)} \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.58)$$

sağlanacaktır. Benzer şekilde ikinci-çeyrek düzlem hata vektörü için,

$$|e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1} e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} - |\hat{e}_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} \quad (4.59)$$

$$|\hat{e}_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} = P_{M_{D,2}^{(0)}} |z_1^{-1} e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} \quad (4.60)$$

yazılır. Burada, ikinci-çeyrek düzlem 1. derece hata vektörleri uzayı

$$M_{D,2}^{(n)} = \{|e_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} z_2^{-1} \hat{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} \hat{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.61)$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} |e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1} e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} - P_{M_{D,2}^{(0)}} |z_1^{-1} e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} \\ &= |z_1^{-1} e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} - \langle M_{D,2}^{(0)} \rangle_{T,T} R_{M_{D,2}^{(0)}}^{-1} \Delta_{D,2}^{(0)} \\ &= |z_1^{-1} e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} - \langle M_{D,2}^{(0)} \rangle_{T,T} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.62)$$

olarak yazılır Burada $\tilde{\mathbf{k}}$ yansıma katsayısı vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{k}}_Q^{(1)} = [\tilde{k}_{10}^{(1)} \ \tilde{k}_{11}^{(1)} \ \tilde{k}_{01}^{(1)}] \quad (4.63)$$

Öte yandan, (4.59) eşitliği başlangıç koşulları kullanılarak yeniden yazılırsa,



$$\begin{aligned}
|e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1}e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} - P_{M_{D,2}^{(0)}}|z_1^{-1}e_{10}^{(0)}\rangle_{T,T} \\
&= |z_1^{-1}y\rangle_{T,T} - P_{Y_{10}(0,1;0,1)}|z_1^{-1}y\rangle_{T,T}
\end{aligned} \quad (4.64)$$

elde edilir. (4.64) eşitliğinden, $|e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T}$ 'in hem 1. derece ikinci-çeyrek düzlem hata uzayına, hemde $Y_{10}(0,1;0,1)$ uzayına dik olduğu görülür.

$$\langle e_{10}^{(1)}|Y_{10}(0,1;0,1)\rangle_{T,T} = \langle e_{10}^{(1)}|M_{D,2}^{(0)}\rangle_{T,T} = 0 \quad (4.65)$$

Böylece, $\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(1)}$ elde edilir. Bu da 1. derecede, hata uzayındaki çözümün gözlem uzayında elde edilen çözüm ile aynı olduğunu gösterir. Daha bütün bir ifade elde edebilmek için (4.53) ve (4.62)'da verilen güncelleştirme bağıntıları birleştirilirse,

$$\mathbf{e}^{(1)} = [\mathbf{I}_1 + \mathbf{K}^{(1)}]M_D^{(0)} \quad (4.66)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{e}^{(n)} = \begin{bmatrix} |e_{00}^{(n)}\rangle_{T,T} \\ |e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{K}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{10}^{(n)} & -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{10}^{(n)} & 0 & -\tilde{k}_{01}^{(n)} & -\tilde{k}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

ve

$$M_D^{(n)} = \{|e_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}z_2^{-1}\tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}\tilde{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.70)$$

şeklindedir. Bu ifade düzenlenerek daha kullanışlı bir yapıya getirilebilir.

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{K}_1^{(1)}\mathbf{e}^{(0)*} + \mathbf{K}_2^{(1)}\tilde{\mathbf{e}}^{(0)*} \quad (4.71)$$

Burada,

$$\mathbf{K}_1^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{10}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{10}^{(n)} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2^{(n)} = \begin{bmatrix} -k_{11}^{(n)} & -k_{01}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{01}^{(n)} & -\tilde{k}_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

ve geciktirilmiş vektörler,

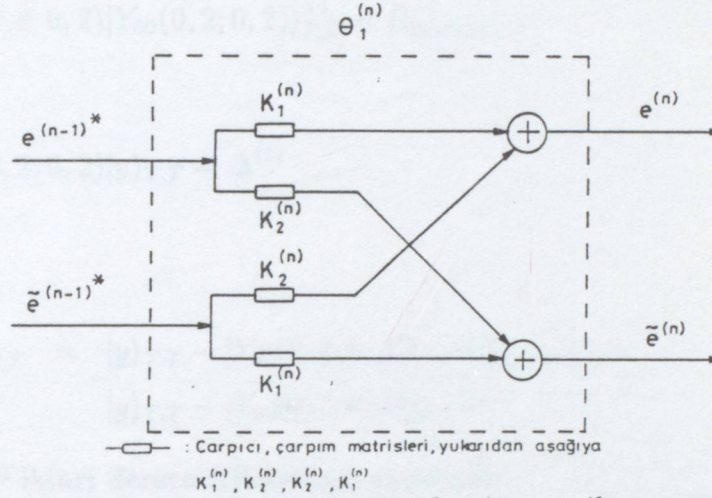
$$\mathbf{e}^{(n)*} = \begin{bmatrix} |e_{00}^{(n)}\rangle_{T,T} \\ |z_1^{-1}e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}^{(n)*} = \begin{bmatrix} |z_1^{-1}z_2^{-1}\tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T} \\ |z_2^{-1}\tilde{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$



şeklinde verilir. Benzer sonuçları üçüncü- ve dördüncü- çeyrek düzlem hata vektörleri için elde etmekte mümkündür. üçüncü- ve dördüncü- çeyrek düzlem hata vektörleri birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem hata alanlarına simetrik olduğundan yayılım eşitliği;

$$\tilde{e}^{(1)} = K_1^{(1)} \tilde{e}^{(0)*} + K_2^{(1)} e^{(0)*} \quad (4.74)$$

şeklinde olur. Aşağıda 1. dereceye ilişkin 2-B kafes yapı görülmektedir



Şekil 4.3 Enküçük-kareler kafes süzgeç algoritması ile tanımlanan kafes süzgeç yapısının birinci kata ilişkin iç bağlantısı

4.3.2 2. Derece

İkinci derece için birinci-çeyrek düzlem hata vektörü geçmiş gözlemler uzayında aşağıdaki gibi yazılır.

$$|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} = |y\rangle_{T,T} - P_{Y_{00}(0,2;0,2)} |y\rangle_{T,T} \quad (4.75)$$

Burada, enküçük-karesel hata için, $Y(0,2;0,2)$ uzayında tanımlı $|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T}$, bu uzayın bir alt uzayı olan $Y_{00}(0,2;0,2)$ ye dik olacaktır.

$$\langle e_{00}^{(2)} | Y_{00}(0,2;0,2) \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.76)$$

Böylece, dik ayrıştırma kullanılarak $Y(0,2;0,2)$

$$Y(0,2;0,2) = Y_{00}(0,2;0,2) \oplus |e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} \quad (4.77)$$

şeklinded yazılabilir. Öte yandan, (4.75) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} = |y\rangle_{T,T} - |Y_{00}(0,2;0,2)\rangle_{T,T} \langle Y_{00}(0,2;0,2)|Y_{00}(0,2;0,2)\rangle_{T,T}^{-1} \langle Y_{00}(0,2;0,2)|y\rangle_{T,T} \quad (4.78)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\langle Y_{00}(0,2;0,2)|Y_{00}(0,2;0,2)\rangle_{T,T}^{-1} = R_{Y_{00}(0,2;0,2)}^{-1} \quad (4.79)$$

ve

$$\langle Y_{00}(0,2;0,2)|y\rangle_{T,T} = \Delta^{(2)} \quad (4.80)$$

Buradan,

$$|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} = |y\rangle_{T,T} - |Y_{00}(0,2;0,2)\rangle_{T,T} R_{Y_{00}(0,2;0,2)}^{-1} \Delta^{(2)} \\ |y\rangle_{T,T} - |Y_{00}(0,2;0,2)\rangle_{T,T} \mathbf{A}^{(2)} \quad (4.81)$$

Burada $\mathbf{A}^{(2)}$ ikinci derece AR katsayı matrisidir.

1-B'takine benzer şekilde yinelemeli bir yapı elde edebilmek için $|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T}$ hata vektörleri uzayında tanımlanmalıdır. Bu yapılırken çeyrek-düzlem içerisinde kalınmalı ve bir birimlik gecikmeler kullanılmalıdır. İkinci derecede, birinci-çeyrek düzlem hata vektörü hata uzayında hata uzayında aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,1}^{(1)}} |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \quad (4.82)$$

Burada çözümün eniyi olabilmesi için hata vektörleri uzayında elde edilen $|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T}$ 'nin, $Y_{00}(0,2;0,2)$ gözlem vektörleri uzayına uzayına dik olması gerekir. uzayındaki izdüşüme eşit olması gerekir.

$$|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,1}^{(1)}} |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ = |y\rangle_{T,T} - P_{Y_{00}(0,2;0,2)} |y\rangle_{T,T} \quad (4.83)$$

Böylece, problem $\bar{M}_{D,1}^{(1)}$ hata vektörleri uzayının belirlenmesine indirgenir.

2. derecedeki gözlem uzayında,

$$\langle Y_{00}(0,2;0,2)|e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \neq 0$$

Dolayısıyla, $e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}$ den $e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T}$ nin elde edilebilmesi için bu dikliği bozan bileşenlerin yok edilmesi gerekir. Böylece, (4.83) ifadesi sağlanacaktır. (4.83) ifadesi $e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T}$ nin $Y_{00}(0,2;0,2)$ uzayının 8 bileşenine dik olmasını gerektirir. Öte yandan, hata vektörleri uzayını oluşturan tüm

$$|z_1^{-i} z_2^{-j} e_{pq}^{(1)}\rangle_{T,T} \text{ ve } |z_1^{-i} z_2^{-j} \tilde{e}_{pq}^{(1)}\rangle_{T,T}$$

$$i, j = 0, 1 \text{ ve } pq = \{00, 01\}$$

vektörlerinin $|z_1^{-1} z_2^{-1} y\rangle_{T,T}$ ye dik olduğu görülür (4.58), (4.65). Diğer bir gösterimle,

$$\langle z_1^{-i} z_2^{-j} e_{pq}^{(1)} | z_1^{-1} z_2^{-1} y \rangle_{T,T} = 0 \text{ ve } \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \tilde{e}_{pq}^{(1)} | z_1^{-1} z_2^{-1} y \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.84)$$

olacaktır. Bu durumda (4.76) bağıntısının sağlanabilmesi için hata uzayı boyutunun 7 olması yeterli olur. Öte yandan, modülerliği sağlamak için birinci derecedeki yapıyı korunmalıdır. Dolayısıyla, birinci derecede tanımlanan hata vektörleri uzayı ikinci derecede tanımlanan uzayın bir alt uzayı olmalıdır. Böylece, ikinci derece hata vektörleri uzayı

$$\bar{M}_{D,1}^{(1)} = M_{D,1}^{(1)} \cup M_{D,1,1}^{(1)} \quad (4.85)$$

gibi iki uzayın birleşimi şeklinde olacaktır. Burada $\bar{M}_{D,1}^{(1)}$ uzayını oluşturan doğrusal bağımsız 7 vektörün 3'ü birinci derecede $M_{D,1}^{(1)}$ uzayında (4.51) bağıntısı tanımlanmıştır. Geriye kalan 4 hata vektörü $M_{D,1,1}^{(1)}$ uzayında tanımlanır. Ancak ne yazıkki elimizde, çeyrek-düzlem modellemenin gereği olarak uzayı oluşturmak için yalnızca üç adet doğrusal bağımsız hata vektörü vardır ve bu vektörler $M_{D,1}^{(1)}$ uzayını oluşturmak için kullanılmışlardır. O halde, uzayın boyutunu artırabilmek için 4 adet doğrusal bağımsız yeni hata vektörleri tanımlanmalıdır. Bu yeni hata vektörlerine "yardımcı hata vektörleri" adı verilir. Yardımcı hata vektörlerinin elde edilmesinde, birinci derecede tanımladığımız temel ileri- ve geri-yönlü hata vektörleri kullanılır. İleri- ve geri-yönlü hata vektörlerinin uygun bir şekilde geciktirilmesiyle yeni doğrusal bağımsız hata vektörleri elde edilir. Bu hata vektörlerinin tanımlanmasında iki temel sınırlama sözkonusudur. Bunlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

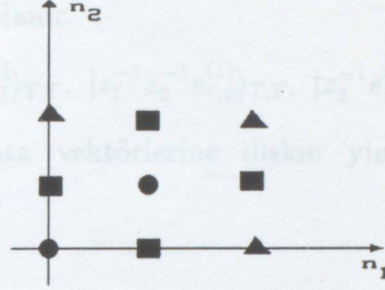
a) Tanımlanan yardımcı hata vektörleri, artan derecelerde kullanılmak üzere hesaplanacağından, bu hata vektörleri yinelemeli olarak hesaplanabilir olmalıdır. Diğer bir deyişle, tanımlanan hata vektörlerinin destek bölgesinde yineleme yönü açık olmalıdır.

b) Hata vektörlerinin elde edilmesinde her iki uzamsal koordinat yönünde yalnızca bir birimlik gecikmeler kullanılabilir.

Şekil 4.4 de, 2. derece için model destek bölgesi görülmektedir. Şekilde $M_{D,1}^{(1)}$ hata uzayını kullanarak elde edilecek kafes süzgeç parametrelerinin temsil ettiği noktalar görülmektedir. Bu noktalar üçgenler ile gösterilmiştir. Kare ile gösterilen noktaları temsil edecek kafes süzgeç parametreleri ise bu derecede tanımlanacak



$M_{D,1,1}^{(1)}$ uzayının bileşenlerince kullanılarak belirlenir. $M_{D,1,1}^{(1)}$ uzayını oluşturacak yardımcı hata vektörleri aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 4.4 2. derece çeyrek-düzlem bir AR alana ilişkin model destek bölgesi. Üçgenlerle belirtilen noktalar, $M_{D,1}^{(1)}$ hata uzayında tanımlı çeyrek-düzlem öngörü hata alanları kullanılarak elde edilen kafes süzgeç parametrelerinin temsil ettiği noktaları göstermektedir. Kareler ise yardımcı hata alanları kullanılarak elde edilen kafes süzgeç parametreleri ile temsil edilen noktaları göstermektedir.

$$\mathbf{e}_{a_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} |e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Yukarıdaki sınırlamalar ışığında, Şekil 4.4 de kare ile gösterilen dört noktaya ilişkin parametreleri öngörebilmek için kullanılacak yardımcı hata vektörleri 4 değişik şekilde başlangıç koşulu seçilerek tanımlanabilir.

Birinci seçim:

$$\begin{aligned} |e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} \quad , \quad |e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} = |\tilde{e}_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \quad , \quad |e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.87)$$

şeklindedir. Burada, geciktirilmiş yardımcı hata vektörleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{e}_{a_1}^{(1)*} = \Delta_{a_1}(z_1, z_2) \mathbf{e}_{a_1}^{(1)} \quad (4.88)$$

Burada,

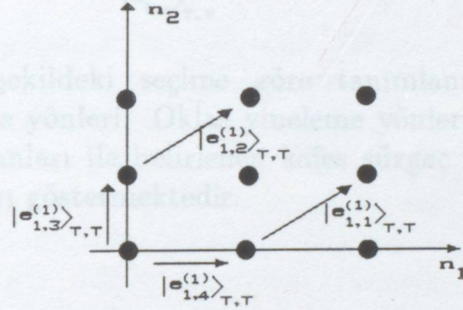


$$\Delta_{a_1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1^{-1} z_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} z_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

şeklindedir. Böylece, yardımcı hata vektörlerinin oluşturduğu $M_{D,1,1}^{(1)}$ hata vektörleri uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$M_{D,1,1}^{(1)} = \{|z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.90)$$

Elde edilen yardımcı hata vektörlerine ilişkin yineleme yönleri Şekil 4.5 te görülmektedir.



Şekil 4.5 Birinci seçime göre tanımlanan yardımcı hata alanlarının yineleme yönleri. Oklar yineleme yönleri ve ikinci derece için yardımcı hata alanları ile belirlenen kafes süzgeç parametrelerinin ilişkili olduğu noktaları göstermektedir.

İkinci seçim:

$$\begin{aligned} |e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}, & |e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}, & |e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.91)$$

şeklindedir. Bu şekildeki seçim için, geciktirme matrisi $\Delta_{a_1}(z_1, z_2)$ aşağıdaki gibidir.

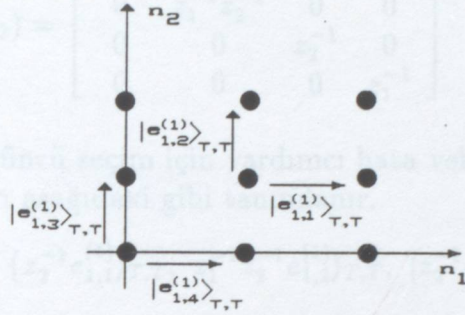
$$\Delta_{a_1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Buradan, ikinci seçim için yardımcı hata vektörlerinin oluşturduğu $M_{D,1,1}^{(1)}$ hata vektörleri uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.



$$M_{D,1,1}^{(1)} = \{|z_1^{-1}e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.93)$$

Elde edilen yardımcı hata vektörlerine ilişkin yineleme yönleri Şekil 4.6 te görülmektedir.



Şekil 4.6 İkinci şekildeki seçime göre tanımlanan yardımcı hata alanlarının yineleme yönleri. Oklar yineleme yönleri ve ikinci derece için yardımcı hata alanları ile belirlenen kafes süzgeç parametrelerinin ilişkili olduğu noktaları göstermektedir.

Üçüncü ve dördüncü seçimler birinci ve ikinci seçimlerde belirlenen yardımcı hata alanlarının farklı eşleştirilmesiyle elde edilir.

Üçüncü seçim:

$$\begin{aligned} |e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} \quad , \quad |e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} = |\tilde{e}_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \quad , \quad |e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.94)$$

şeklindedir. Bu şekildeki seçim için, geciktirme matrisi $\Delta_{a_1}(z_1, z_2)$ aşağıdaki gibidir.

$$\Delta_{a_1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1^{-1}z_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Buradan, üçüncü seçim için yardımcı hata vektörlerinin oluşturduğu $M_{D,1,1}^{(1)}$ hata vektörleri uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$M_{D,1,1}^{(1)} = \{|z_1^{-1}z_2^{-1}e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.96)$$

Dördüncü seçim:

$$\begin{aligned} |e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} , & |e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} , & |e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.97)$$

şeklinde. Bu şekildeki seçim için, geciktirme matrisi $\Delta_{a_1}(z_1, z_2)$ aşağıdaki gibidir.

$$\Delta_{a_1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^{-1}z_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Buradan, dördüncü seçim için yardımcı hata vektörlerinin oluşturduğu $M_{D,1,1}^{(1)}$ hata vektörleri uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$M_{D,1,1}^{(1)} = \{z_2^{-1}e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T}, z_1^{-1}z_2^{-1}e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.99)$$

Başlangıç koşullarının birinci, ikinci, üçüncü yada dördüncü şekilde seçilmesi keyfidir ve algoritmanın başarımında temel bir farklılık yaratmaz. Ayrıca, Artan derecelerde başlangıç koşullarının seçimi daha önceki derecelerdeki seçime bağlı değildir. Ancak, farklı şekildeki seçim her bir derecede farklı bir kafes süzgeç yapısı ortaya çıkaracağından modüler bir yapı elde edilemez ve n. derece için genel bir bağıntı tanımlanamaz. Bu tezde, modülerliği sağlamak ve n. derecede genel bir ifade verebilmek için, bütün derecelerde başlangıç koşulu olarak birinci seçim kullanılmıştır. Böylece, (n+1). derecede kafes süzgeç parametrelerini elde etmek için ilk defa tanımlanacak ileri-yönlü yardımcı hata vektörlerine ilişkin başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned} |e_{n,1}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T} , & |e_{n,2}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T} \\ |e_{n,3}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T} , & |e_{n,4}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.100)$$

şeklinde ve geciktirme matrisi $\Delta_{a_1}(z_1, z_2)$ (4.89) eşitliğinde tanımlanmıştır. Böylece, 1. dereceden sonraki her bir derecede uzaya eklenecek 4 yeni yardımcı hata vektörünün oluşturacağı uzay;

$$M_{D,1,j}^{(n)} = \{|z_1^{-1}z_2^{-1}e_{j,1}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}z_2^{-1}e_{j,2}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{j,3}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}e_{j,4}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.101)$$

şeklinde olur.

Öte yandan, geri-yönlü yardımcı hata vektörleri için başlangıç koşulları;

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_{n,1}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T} , & |\tilde{e}_{n,2}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T} \\ |\tilde{e}_{n,3}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T} , & |\tilde{e}_{n,4}^{(n)}\rangle_{T,T} &= |\tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.102)$$

ve geciktirme matrisi

$$\Delta_{a_2}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

şeklinde olacaktır. Buradan, $\bar{M}_{D,1}^{(1)}$ uzayı, (4.51), (4.85) ve (4.99) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\bar{M}_{D,1}^{(1)} = \{ |z_1^{-1} e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} z_2^{-1} \tilde{e}_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} \tilde{e}_{10}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T}, \\ |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} \} \quad (4.104)$$

Öte yandan, (4.84) bağıntısından

$$\langle \bar{M}_{D,1}^{(1)} | z_1^{-1} z_2^{-1} y \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.105)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\bar{M}_{D,1}^{(1)} \oplus |z_1^{-1} z_2^{-1} y\rangle_{T,T} = Y(0, 2; 0, 2) \quad (4.106)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, yine (4.84) bağıntısından,

$$\langle e_{00}^{(1)} | z_1^{-1} z_2^{-1} y \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.107)$$

olduğu görülür.

(4.105) ve (4.107) ifadelerini (4.83) bağıntısı ile birleştirdiğimizde,

$$\left. \begin{aligned} \langle e_{00}^{(1)} | z_1^{-1} z_2^{-1} y \rangle_{T,T} &= 0 \\ \langle \bar{M}_{D,1}^{(1)} | z_1^{-1} z_2^{-1} y \rangle_{T,T} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle e_{00}^{(2)} | z_1^{-1} z_2^{-1} y \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.108)$$

olacaktır. Sonuç olarak,

$$\langle (|e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,1}^{(1)}} |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}) | Y_{00}(0, 2; 0, 2) \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.109)$$

olduğu görülür. (4.82) eşitliğinden,

$$\langle e_{00}^{(2)} | Y_{00}(0, 2; 0, 2) \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.110)$$

olarak elde edilir. Buda hata uzayında elde edilen sonucun gözlem uzayında elde edilen sonuç ile aynı optimal çözümü verdiğini gösterir.

(4.19), (4.41), (4.42) ve (4.55) bağıntılarını kullanılarak, (4.82) ifadesi yansımaya katsayıları cinsinden yazılabilir.

$$|e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T} - |\bar{M}_{D,1}^{(1)}\rangle_{T,T} \mathbf{k}^{(2)} \quad (4.111)$$

Burada $\mathbf{k}^{(2)}$ ikinci derece yansımaya katsayıları vektörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{k}^{(2)T} = [\mathbf{k}_Q^{(2)T} : \mathbf{k}_1^{(2)T}] \quad (4.112)$$

Burada $\mathbf{k}_Q^{(2)^T}$ birinci derecede (4.54) eşitliğinde tanımlanmıştır. $\mathbf{k}_i^{(n)^T}$ ise, birinci dereceden sonra tanımlanan yeni yansıma katsayıları vektörüdür.

$$\mathbf{k}_i^{(n)^T} = [k_{i,1}^{(n)} \ k_{i,2}^{(n)} \ k_{i,3}^{(n)} \ k_{i,4}^{(n)}] \quad (4.113)$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan, ikinci-çeyrek düzlem hata vektörü $|e_{10}^{(2)}\rangle_{T,T}$ nin hata uzayındaki kestirimi aşağıdaki gibi yazılır.

$$|e_{10}^{(2)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1}e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,2}^{(1)}}|z_1^{-1}e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} \quad (4.114)$$

Burada $M_{D,2}^{(1)}$ uzayı birinci-çeyrek düzlemde olduğu gibi 7 hata vektöründen oluşmaktadır ve aşağıdaki gibi verilir.

$$\bar{M}_{D,2}^{(1)} = M_{D,2}^{(1)} \cup M_{D,2,1}^{(1)} \quad (4.115)$$

(4.115) eşitliğinde görülen $M_{D,2}^{(1)}$ alt uzayı (4.61) ifadesinde tanımlanmıştır. $M_{D,2,1}^{(1)}$ yardımcı hata vektörleri uzayı ise aşağıdaki gibidir.

$$M_{D,2,j}^{(n)} = \{|z_1^{-1}z_2^{-1}e_{j,1}^{(n)}\rangle_{T,T}, |\tilde{e}_{j,2}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{j,3}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{j,4}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.116)$$

$$1 \leq j \leq n$$

Böylece, ikinci derece ikinci-çeyrek düzlem hata vektörleri uzayı $\bar{M}_{D,2}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{D,2}^{(1)} = \{ & |e_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}, |\tilde{e}_{00}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}\tilde{e}_{10}^{(1)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1}z_2^{-1}e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T}, \\ & |\tilde{e}_{1,2}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{1,3}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1}e_{1,4}^{(n)}\rangle_{T,T} \} \end{aligned} \quad (4.117)$$

olacaktır. Birinci-çeyrek düzleme benzer şekilde (4.114) eşitliğinden

$$\left. \begin{aligned} \langle z_1^{-1}e_{10}^{(1)}|z_1^{-1}z_2^{-1}y\rangle_{T,T} &= 0 \\ \langle \bar{M}_{D,2}^{(1)}|z_1^{-1}z_2^{-1}y\rangle_{T,T} &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \langle e_{10}^{(2)}|z_1^{-1}z_2^{-1}y\rangle_{T,T} = 0 \quad (4.118)$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak,

$$\langle (|z_1^{-1}e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,2}^{(1)}}|z_1^{-1}e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T}) | Y_{20}(0, 2; 0, 2) \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.119)$$

bulunur. Buda ikinci-çeyrek düzlem için, hata uzayındaki çözümün gözlem uzayındaki çözümle aynı optimum çözümü verdiğini gösterir. Öte yandan, (4.114) ifadesi yansıma katsayıları cinsinden elde edilirse,

$$|e_{10}^{(2)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1}e_{10}^{(1)}\rangle_{T,T} - |\bar{M}_{D,2}^{(1)}\rangle_{T,T} \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \quad (4.120)$$

bulunur. Burada $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ ikinci-çeyrek düzlem yansıma katsayıları vektörüdür.

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(2)T} = [\tilde{\mathbf{k}}_Q^{(2)T} : \tilde{\mathbf{k}}_1^{(2)T}] \quad (4.121)$$

olarak tanımlanır. Burada $\tilde{\mathbf{k}}_Q^{(2)T}$ birinci derecede tanımlanmıştır. $\tilde{\mathbf{k}}_i^{(n)T}$ yansıma katsayıları vektörü ise,

$$\tilde{\mathbf{k}}_i^{(n)T} = [\tilde{k}_{i,1}^{(n)} \ \tilde{k}_{i,2}^{(n)} \ \tilde{k}_{i,3}^{(n)} \ \tilde{k}_{i,4}^{(n)}] \quad (4.122)$$

şeklinde dir. (4.111) ve (4.120) ifadeleri birleştirilirse,

$$\mathbf{e}^{(2)} = [\mathbf{I}_1 - \mathbf{K}^{(2)}] \mathbf{M}_D^{(1)} + \mathbf{K}_{1,1}^{(2)} \mathbf{e}_{a_1}^{(2)*} + \mathbf{K}_{1,2}^{(2)} \tilde{\mathbf{e}}_{a_1}^{(2)*} \quad (4.123)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{e}^{(2)}$ (4.67), $\mathbf{I}_1$ (4.68), $\mathbf{K}^{(2)}$ (4.69) ve $\mathbf{M}_D^{(1)}$ (4.70) eşitliklerinde tanımlanmıştır. Ayrıca, $\mathbf{K}_{j,1}^{(n)}$ ve $\mathbf{K}_{j,2}^{(n)}$ yansıma katsayısı matrisleri

$$\mathbf{K}_{j,1}^{(n)} = \begin{bmatrix} -k_{j,1}^{(n)} & -k_{j,2}^{(n)} & -k_{j,3}^{(n)} & -k_{j,4}^{(n)} \\ -\tilde{k}_{j,1}^{(n)} & 0 & -\tilde{k}_{j,3}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

$$\mathbf{K}_{j,2}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_{j,2}^{(n)} & 0 & -\tilde{k}_{j,4}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

$$1 \leq j \leq n$$

şeklinde dir ve

$$\mathbf{e}_{a,j}^{(n)*} = \mathbf{M}_{D,1,j}^{(n)} \quad (4.126)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{a,j}^{(n)*} = \tilde{\mathbf{M}}_{D,1,j}^{(n)} = [|\tilde{e}_{j,1}^{(n)}\rangle_{T,T} \ |\tilde{e}_{j,2}^{(n)}\rangle_{T,T} \ |z_1^{-1}e_{j,3}^{(n)}\rangle_{T,T} \ |z_2^{-1}e_{j,4}^{(n)}\rangle_{T,T}] \quad (4.127)$$

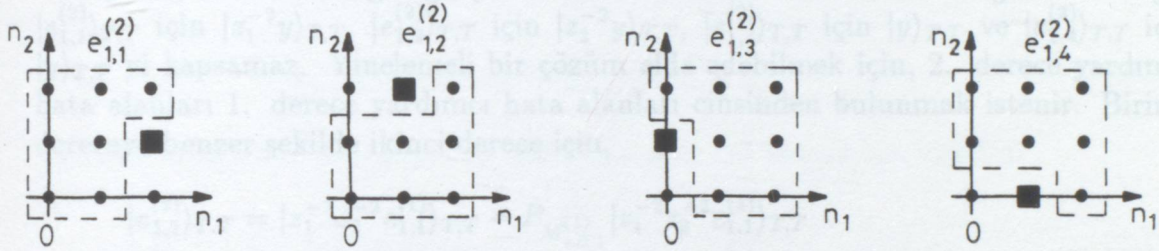
olarak tanımlanır. (4.123) ifadesi aşağıdaki gibi daha kullanışlı bir şekile dönüştürülebilir. Böylece, ikinci derece için yayılım eşitliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{K}_1^{(2)} \mathbf{e}^{(1)*} + \mathbf{K}_2^{(2)} \tilde{\mathbf{e}}^{(1)*} + \mathbf{K}_{1,1}^{(2)} \mathbf{e}_{a_1}^{(2)*} + \mathbf{K}_{1,2}^{(2)} \tilde{\mathbf{e}}_{a_1}^{(2)*} \quad (4.128)$$

Burada $\mathbf{K}_1^{(n)}$, $\mathbf{K}_2^{(n)}$, $\mathbf{e}^{(n)*}$ ve $\tilde{\mathbf{e}}^{(n)*}$ birinci derecede tanımlanmıştır.

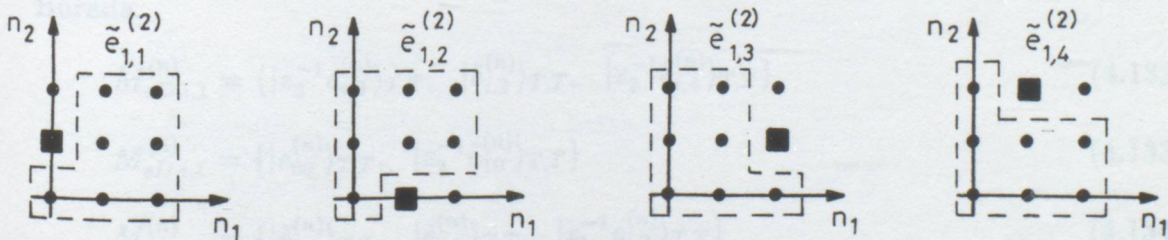
4.3.3 Yardımcı hata alanlarının güncelleştirilmesi

İkinci derece tanımlanan yardımcı hata alanları üçüncü derecede kullanılmak üzere güncelleştirilmelidir. 2. derece yardımcı hata alanlarının elde edilmesinde, verilen sınırlamalara göre elde edilen başlangıç koşullarından yararlanılır. (4.89) ve (4.100) eşitliklerine göre 2. derece ileri-yönlü yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri Şekil 4.7 deki gibi olacaktır.



Şekil 4.7 İkinci derece ileri-yönlü yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.

İleri-yönlü yardımcı hata alanlarına ilişkin geri-yönlü yardımcı hata vektörlerini destek bölgeleri ise Şekil 4.8 teki gibidir.



Şekil 4.8 İkinci derece geri-yönlü yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.

3. derecede birinci- ve ikinci- çeyrek düzlem hata alanlarının elde edilmesinde kullanılacak bu hata alanlarının optimal olması gerekmemektedir. Bu nedenle, bu yardımcı hata alanlarının yukarıdaki destek bölgelerinde görülen aşağıdaki bileşenlere dik olması gerekmemektedir.

$$\begin{aligned} \langle e_{1,1}^{(2)} | z_1^{-2} z_2^{-2} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \\ \langle e_{1,2}^{(2)} | z_1^{-2} z_2^{-2} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \\ \langle e_{1,3}^{(2)} | z_2^{-2} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \\ \langle e_{1,4}^{(2)} | z_1^{-2} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.129)$$

Ayrıca, nedensellik gereği, yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri sırasıyla $|e_{1,1}^{(2)}\rangle_{T,T}$ için $|z_1^{-2}y\rangle_{T,T}$, $|e_{1,2}^{(2)}\rangle_{T,T}$ için $|z_2^{-2}y\rangle_{T,T}$, $|e_{1,3}^{(2)}\rangle_{T,T}$ için $|y\rangle_{T,T}$ ve $|e_{1,4}^{(2)}\rangle_{T,T}$ için $|y\rangle_{T,T}$ yi kapsamaz. Yinelemeli bir çözüm elde edebilmek için, 2. derece yardımcı hata alanları 1. derece yardımcı hata alanları cinsinden bulunmak istenir. Birinci dereceye benzer şekilde ikinci derece için,

$$\begin{aligned} |e_{1,1}^{(2)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-2} z_2^{-2} e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,1}^{(1)}} |z_1^{-2} z_2^{-2} e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,2}^{(2)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-2} z_2^{-2} e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,2}^{(1)}} |z_1^{-2} z_2^{-2} e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,3}^{(2)}\rangle_{T,T} &= |z_2^{-2} e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,3}^{(1)}} |z_2^{-2} e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{1,4}^{(2)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-2} e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,4}^{(1)}} |z_1^{-2} e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.130)$$

birinci derece yardımcı hata alanları cinsinden yazılabilir. Burada, birinci derece hata alanları ve $M_{aD,i}^{(1)}$ uzaylarını oluşturacak tüm vektörler $|z_1^{-1} z_2^{-1} y\rangle_{T,T}$ ye dik olduklarından yukarıdaki destek bölgelerinin elde edilebilmesi için $M_{aD,i}^{(1)}$ uzaylarının boyutlarının 5 olması yeterlidir. Bu uzaylar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} M_{aD,1}^{(1)} &= M_{aD,1,1}^{(1)} \cup M_{eD,1,1}^{(1)} \\ M_{aD,2}^{(1)} &= M_{aD,1,2}^{(1)} \cup M_{eD,1,2}^{(1)} \\ M_{aD,3}^{(1)} &= M_{aD,1,3}^{(1)} \cup M_{eD,1,3}^{(1)} \\ M_{aD,4}^{(1)} &= M_{aD,1,4}^{(1)} \cup M_{eD,1,4}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Burada,

$$M_{aD,i,1}^{(n)} = \{|z_2^{-1} e_{i,3}^{(n)}\rangle_{T,T}, |\tilde{e}_{i,2}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} \tilde{e}_{i,4}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.132)$$

$$M_{eD,i,1}^{(n)} = \{|e_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} \tilde{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.133)$$

$$M_{aD,i,2}^{(n)} = \{|\tilde{e}_{i,1}^{(n)}\rangle_{T,T}, |\tilde{e}_{i,2}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} e_{i,3}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.134)$$

$$M_{eD,i,2}^{(n)} = \{|e_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.135)$$

$$M_{aD,i,3}^{(n)} = \{|z_1^{-1} z_2^{-1} e_{i,2}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} e_{i,4}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} \tilde{e}_{i,3}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.136)$$

$$M_{eD,i,3}^{(n)} = \{|z_1^{-1} e_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_1^{-1} z_2^{-1} \tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.137)$$

$$M_{aD,i,4}^{(n)} = \{|z_1^{-1} z_2^{-1} e_{i,1}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} e_{i,3}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} \tilde{e}_{i,4}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.138)$$

$$M_{eD,i,4}^{(n)} = \{|z_1^{-1} z_2^{-1} \tilde{e}_{00}^{(n)}\rangle_{T,T}, |z_2^{-1} \tilde{e}_{10}^{(n)}\rangle_{T,T}\} \quad (4.139)$$

şeklindedir. (4.130) eşitliklerinde, izdüşüm operatörünün tanımı kullanılarak yansıma katsayıları cinsinden ifadeler elde edilebilir. Böylece, birinci yardımcı hata alanı:

$$\begin{aligned} |e_{1,1}^{(2)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,1}^{(1)}} |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} \\ &= |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,1}^{(1)}\rangle_{T,T} - |M_{aD,1}^{(1)}\rangle_{T,T} \mathbf{k}_{a,1}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.140)$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{k}_{a,1}^{(n)}$ yardımcı yansıma katsayıları vektörü

$$\mathbf{k}_{a,1}^{(n)} = [\alpha_{j,1}^{(n)} \alpha_{j,2}^{(n)} \alpha_{j,3}^{(n)} \alpha_{j,4}^{(n)} \alpha_{j,5}^{(n)}]^T \quad (4.141)$$

şeklinde tanımlanır. Benzer ifadeleri diğer yardımcı hata alanları içinde aşağıdaki gibi elde edilir.

İkinci yardımcı hata alanı:

$$|e_{1,2}^{(2)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{1,2}^{(1)}\rangle_{T,T} - |M_{aD,2}^{(1)}\rangle_{T,T} \mathbf{k}_{a,2}^{(2)} \quad (4.142)$$

şeklindedir. Burada,

$$\mathbf{k}_{a,2}^{(n)} = [\beta_{j,1}^{(n)} \beta_{j,2}^{(n)} \beta_{j,3}^{(n)} \beta_{j,4}^{(n)} \beta_{j,5}^{(n)}]^T \quad (4.143)$$

olarak tanımlanır.

Üçüncü yardımcı hata alanı:

$$|e_{1,3}^{(2)}\rangle_{T,T} = |z_2^{-1} e_{1,3}^{(1)}\rangle_{T,T} - |M_{aD,3}^{(1)}\rangle_{T,T} \mathbf{k}_{a,3}^{(2)} \quad (4.144)$$

şeklinde elde edilir. Burada, yansıma katsayıları

$$\mathbf{k}_{a,3}^{(n)} = [\gamma_{j,1}^{(n)} \gamma_{j,2}^{(n)} \gamma_{j,3}^{(n)} \gamma_{j,4}^{(n)} \gamma_{j,5}^{(n)}]^T \quad (4.145)$$

olarak tanımlanır.

Dördüncü yardımcı hata alanı:

$$|e_{1,4}^{(2)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1}e_{1,4}^{(1)}\rangle_{T,T} - |M_{aD,4}^{(1)}\rangle_{T,T} \mathbf{k}_{a1,4}^{(2)} \quad (4.146)$$

olarak elde edilir. Burada, yansıma katsayıları

$$\mathbf{k}_{a,j,4}^{(n)} = [\lambda_{j,1}^{(n)} \lambda_{j,2}^{(n)} \lambda_{j,3}^{(n)} \lambda_{j,4}^{(n)} \lambda_{j,5}^{(n)}]^T \quad (4.147)$$

olarak tanımlanır. (4.140), (4.142), (4.144) ve (4.146) denklemleri aşağıdaki gibi tek bir yapıda birleştirilebilir.

$$\mathbf{e}_{a1}^{(2)} = (\mathbf{K}_{a1}^{(2)} + \mathbf{I})\mathbf{e}_{a1}^{(1)*} + \tilde{\mathbf{K}}_{a1}^{(2)}\tilde{\mathbf{e}}_{a1}^{(1)*} + \mathbf{K}_{e1}^{(2)}\mathbf{e}_{e1}^{(1)*} + \tilde{\mathbf{K}}_{e1}^{(2)}\tilde{\mathbf{e}}_{e1}^{(1)*} \quad (4.148)$$

Burada $\mathbf{I}$ 4×4 boyutlu birim matristir. Yardımcı yansıma katsayıları matrisleri ise aşağıda tanımlanmıştır.

$$\mathbf{K}_{a_j}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{j,1}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_{j,1}^{(n)} & 0 & -\gamma_{j,2}^{(n)} \\ -\lambda_{j,1}^{(n)} & 0 & -\lambda_{j,2}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{a_j}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{j,2}^{(n)} & 0 & -\alpha_{j,3}^{(n)} \\ -\beta_{j,1}^{(n)} & -\beta_{j,2}^{(n)} & -\beta_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{j,3}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

$$\mathbf{K}_{e_j}^{(n)} = \begin{bmatrix} -\alpha_{j,4}^{(n)} & 0 \\ -\beta_{j,4}^{(n)} & -\beta_{j,5}^{(n)} \\ 0 & -\gamma_{j,4}^{(n)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{e_j}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{j,5}^{(n)} \\ 0 & 0 \\ -\gamma_{j,5}^{(n)} & 0 \\ -\lambda_{j,4}^{(n)} & -\lambda_{j,5}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

Şekil 4.9 da, 2. dereceye ilişkin kafes süzgeç yapısı görülmektedir.

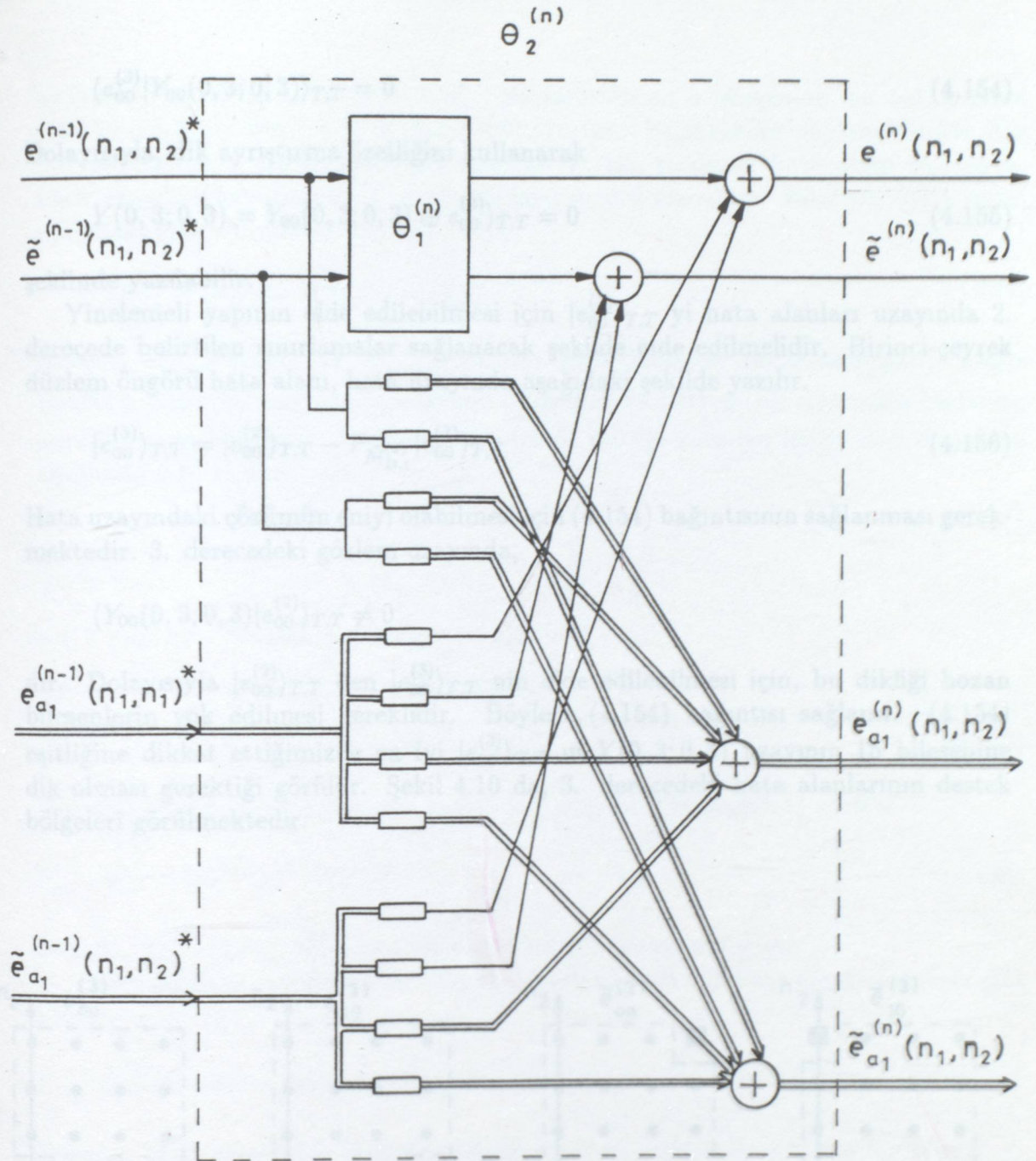
4.3.4 Üçüncü derece

Üçüncü derecede, birinci-çeyrek düzlem hata vektörü geçmiş gözlemler uzayında aşağıdaki gibi yazılır.

$$|e_{00}^{(3)}\rangle_{T,T} = |y\rangle_{T,T} - P_{Y_{00}(0,3;0,3)}|y\rangle_{T,T} \quad (4.153)$$

Burada, $|e_{00}^{(3)}\rangle_{T,T}$, $Y(0,3;0,3)$ uzayındadır ve $Y_{00}(0,3;0,3)$ uzayına diktir.





—  — : Çarpıcı, Çarpım matrisleri yukarıdan aşağıya

$$K_{a_{1,3}}^{(n)}, K_{a_{1,4}}^{(n)}, K_{a_{1,4}}^{(n)}, K_{a_{1,3}}^{(n)}, K_{1,1}^{(n)}, K_{1,2}^{(n)}, K_{a_{1,1}}^{(n)} + I, K_{a_{1,2}}^{(n)}$$

$$K_{1,2}^{(n)}, K_{1,1}^{(n)}, K_{a_{1,2}}^{(n)}, K_{a_{1,1}}^{(n)} + I$$

Şekil 4.9 İkinci derece kafes süzgeç yapısı iç ara bağlantısı Burada $\theta_1^{(n)}$ birinci derecede Şekil 4.3 te tanımlanmıştır.



$$\langle e_{00}^{(3)} | Y_{00}(0, 3; 0, 3) \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.154)$$

Doğayısıyla, dik ayrıştırma özelliğini kullanarak

$$Y(0, 3; 0, 3) = Y_{00}(0, 3; 0, 3) \oplus e_{00}^{(3)} \rangle_{T,T} = 0 \quad (4.155)$$

şeklinde yazılabilir.

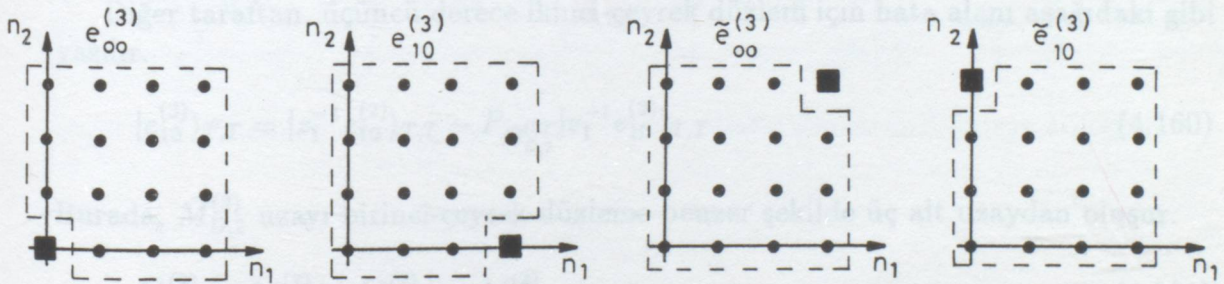
Yinelemeli yapının elde edilebilmesi için $|e_{00}^{(3)} \rangle_{T,T}$ yi hata alanları uzayında 2. derecede belirtilen sınırlamalar sağlanacak şekilde elde edilmelidir. Birinci-çeyrek düzlem öngörü hata alanı, hata uzayında aşağıdaki şekilde yazılır.

$$|e_{00}^{(3)} \rangle_{T,T} = |e_{00}^{(2)} \rangle_{T,T} - P_{M_{D,1}^{(2)}} |e_{00}^{(2)} \rangle_{T,T} \quad (4.156)$$

Hata uzayındaki çözümün eniyi olabilmesi için (4.154) bağıntısının sağlanması gerekmektedir. 3. derecedeki gözlem uzayında,

$$\langle Y_{00}(0, 3; 0, 3) | e_{00}^{(2)} \rangle_{T,T} \neq 0$$

dır. Doğayısıyla $|e_{00}^{(2)} \rangle_{T,T}$ den $|e_{00}^{(3)} \rangle_{T,T}$ nin elde edilebilmesi için, bu dikliği bozan bileşenlerin yok edilmesi gereklidir. Böylece (4.154) bağıntısı sağlanır. (4.154) eşitliğine dikkat ettiğimizde en iyi $|e_{00}^{(3)} \rangle_{T,T}$ in $Y(0, 3; 0, 3)$ uzayının 15 bileşenine dik olması gerektiği görülür. Şekil 4.10 da, 3. derecedeki hata alanlarının destek bölgeleri görülmektedir.



Şekil 4.10 Üçüncü derece çeyrek-düzlem hata alanlarının destek bölgeleri. (a) $|e_{00}^{(3)} \rangle_{T,T}$, (b) $|e_{10}^{(3)} \rangle_{T,T}$, (c) $|\tilde{e}_{00}^{(3)} \rangle_{T,T}$, (d) $|\tilde{e}_{10}^{(3)} \rangle_{T,T}$. Destek bölgesinde 15 adet nokta vardır.

Öte yandan, 2. derece hata alanları uzayındaki tüm bileşenler; İleri- ve geri-yönlü hata alanları, $e_{a_1}^{(2)}$ ve $\tilde{e}_{a_1}^{(2)}$ ile tanımlı yardımcı hata alanları, gözlem

uzayının $\{|z_1^{-i} z_2^{-j} y\rangle_{T,T} \quad i, j = 1, 2\}$ ile tanımlanan 4 bileşenine dik olduğundan ((4.114), (4.119), Şekil 4.7 ve Şekil 4.8), (4.154) bağıntısının sağlanabilmesi için 3. derecede, 2. derecedeki hata uzayına 4 yeni yardımcı hata alanı eklenerek, hata uzayının boyutunun 11' e çıkartılması yeterli olacaktır. Böylece, $\bar{M}_{D,1}^{(2)}$ uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{M}_{D,1}^{(2)} = M_{D,1}^{(2)} \cup M_{D,1,1}^{(2)} \cup M_{D,1,2}^{(2)} \quad (4.157)$$

Burada $M_{D,1}^{(2)}$, (4.51) ve $M_{D,1,j}^{(n)}$, (4.101) eşitliklerinde tanımlanmıştır. Diğer taraftan, $j=n$ için, yani $M_{D,1,2}^{(2)}$ uzayının bileşenleri (4.100) eşitliği ile verilen başlangıç koşullarından belirlenir. Öte yandan, (4.156) eşitliği yansıma katsayıları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} |e_{00}^{(3)}\rangle_{T,T} &= |e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,1}^{(2)}} |e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} \\ &= |e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} - |\bar{M}_{D,1}^{(2)}\rangle_{T,T} R_{\bar{M}_{D,1}^{(2)}}^{-1} \Delta_{D,1}^{(2)} \\ &= |e_{00}^{(2)}\rangle_{T,T} - |\bar{M}_{D,1}^{(2)}\rangle_{T,T} \mathbf{k}^{(3)} \end{aligned} \quad (4.158)$$

Burada, üçüncü derece yansıma katsayıları matrisi $\mathbf{k}^{(3)}$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{k}^{(3)} = [\mathbf{k}_Q^{(3)T} : \mathbf{k}_1^{(3)T} : \mathbf{k}_2^{(3)T}]^T \quad (4.159)$$

Burada, $\mathbf{k}_Q^{(3)T}$ (4.54), $\mathbf{k}_i^{(3)T}$ (4.113) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

Diğer taraftan, üçüncü derece ikinci-çeyrek düzlem için hata alanı aşağıdaki gibi yazılır.

$$|e_{10}^{(3)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1} e_{10}^{(2)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,2}^{(2)}} |z_1^{-1} e_{10}^{(2)}\rangle_{T,T} \quad (4.160)$$

Burada, $\bar{M}_{D,2}^{(2)}$ uzayı birinci-çeyrek düzleme benzer şekilde üç alt uzaydan oluşur.

$$\bar{M}_{D,2}^{(2)} = M_{D,2}^{(2)} \cup M_{D,2,1}^{(2)} \cup M_{D,2,2}^{(2)} \quad (4.161)$$

Burada $M_{D,2}^{(2)}$, (4.61) ve $M_{D,2,j}^{(2)}$, (4.116) eşitliklerinde tanımlanmıştır. Öte yandan, üçüncü derece ikinci-çeyrek düzlem hata alanı $|e_{10}^{(3)}\rangle_{T,T}$, (4.158) eşitliğine benzer şekilde yansıma katsayıları cinsinden ifade edilebilir.

$$|e_{10}^{(3)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1} e_{10}^{(2)}\rangle_{T,T} - |\bar{M}_{D,2}^{(2)}\rangle_{T,T} \tilde{\mathbf{k}}^{(3)} \quad (4.162)$$

Burada, $\tilde{\mathbf{k}}^{(3)}$ geri-yönlü yansıma katsayıları vektörü,

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(3)} = [\tilde{\mathbf{k}}_Q^{(3)T} : \tilde{\mathbf{k}}_1^{(3)T} : \tilde{\mathbf{k}}_2^{(3)T}]^T \quad (4.163)$$

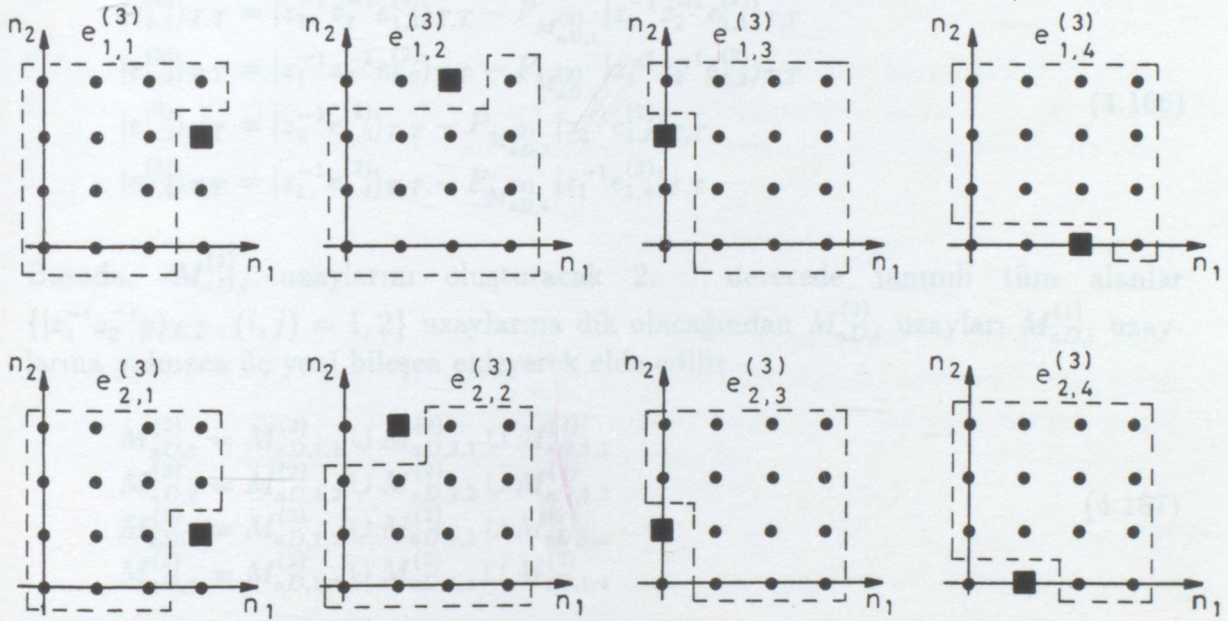
olarak verilir. Burada $\tilde{\mathbf{K}}_Q^{(3)T}$ (4.63), $\tilde{\mathbf{K}}_i^{(3)T}$ (4.122) de tanımlanmıştır.

(4.158) ve (4.162) eşitlikleri, 2. dereceye benzer şekilde tek bir yapıda, birleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(3)} = & \mathbf{K}_1^{(3)} \mathbf{e}^{(2)*} + \mathbf{K}_2^{(3)} \tilde{\mathbf{e}}^{(2)*} + \mathbf{K}_{1,1}^{(3)} \mathbf{e}_{a_1}^{(2)*} \\ & + \mathbf{K}_{1,2}^{(3)} \tilde{\mathbf{e}}_{a_1}^{(2)*} + \mathbf{K}_{2,1}^{(3)} \mathbf{e}_{a_2}^{(2)*} + \mathbf{K}_{2,2}^{(3)} \tilde{\mathbf{e}}_{a_2}^{(2)*} \end{aligned} \quad (4.164)$$

Burada, yansıma katsayısı matrisleri $\mathbf{K}_1^{(n)}$, ve $\mathbf{K}_2^{(n)}$, (4.72), $\mathbf{K}_{i,1}^{(n)}$ ve $\mathbf{K}_{i,2}^{(n)}$ eşitlikleri sırasıyla (4.124) ve (4.125) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

Şimdi, 4. derecede kullanılmak üzere 2. derecede tanımlanan yardımcı hata alanları üçüncü dereceye güncelleştirilmelidir. Yineleme yönlerine göre ilerletildiğinde yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri Şekil 4.11 deki gibi olacaktır.



Şekil 4.11 Üçüncü derece ileri-yönlü yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.

Ancak 4. derecede birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem hata alanlarının elde edilmesinde kullanılacak bu yardımcı hata alanlarının Şekil 4.11 de verilen destek bölgelerini sağlayacak şekilde en iyi olması, 4. derecede birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem hata alanlarının elde edilmesinde gerekli değildir. Daha az sayıda parametre kullanmak için bu yardımcı hata alanları en iyileştirilmez. Bu nedenle, en iyi olmayan bu yardımcı hata alanları aşağıda verilen noktalara dik değildir.

$$\begin{aligned}
|e_{j,1}^{(3)}\rangle_{T,T} &\not\sim |z_1^{-3}z_2^{-i}y\rangle_{T,T} \\
|e_{j,2}^{(3)}\rangle_{T,T} &\not\sim |z_1^{-i}z_2^{-3}y\rangle_{T,T} \\
|e_{j,3}^{(3)}\rangle_{T,T} &\not\sim |z_2^{-i}y\rangle_{T,T} \\
|e_{j,4}^{(3)}\rangle_{T,T} &\not\sim |z_1^{-i}y\rangle_{T,T}
\end{aligned} \tag{4.165}$$

$i = 2, 3$

Yinelemeli bir çözüm için yardımcı hata alanları, hata alanları uzayında aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
|e_{1,1}^{(3)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1}z_2^{-1}e_{1,1}^{(2)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,1}^{(2)}} |z_1^{-1}z_2^{-1}e_{1,1}^{(2)}\rangle_{T,T} \\
|e_{1,2}^{(3)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1}z_2^{-1}e_{1,2}^{(2)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,2}^{(2)}} |z_1^{-1}z_2^{-1}e_{1,2}^{(2)}\rangle_{T,T} \\
|e_{1,3}^{(3)}\rangle_{T,T} &= |z_2^{-1}e_{1,3}^{(2)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,3}^{(2)}} |z_2^{-1}e_{1,3}^{(2)}\rangle_{T,T} \\
|e_{1,4}^{(3)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1}e_{1,4}^{(2)}\rangle_{T,T} - P_{M_{aD,4}^{(2)}} |z_1^{-1}e_{1,4}^{(2)}\rangle_{T,T}
\end{aligned} \tag{4.166}$$

Burada, $M_{aD,i}^{(2)}$ uzaylarını oluşturacak 2. derecede tanımlı tüm alanlar $\{|z_1^{-i}z_2^{-j}y\rangle_{T,T} \ (i,j) = 1,2\}$ uzaylarına dik olacağından $M_{aD,i}^{(2)}$ uzayları $M_{aD,i}^{(1)}$ uzaylarına yalnızca üç yeni bileşen ekleyerek elde edilir.

$$\begin{aligned}
M_{aD,1}^{(2)} &= M_{aD,1,1}^{(2)} \cup M_{aD,2,1}^{(2)} \cup M_{eD,1,1}^{(2)} \\
M_{aD,2}^{(2)} &= M_{aD,1,2}^{(2)} \cup M_{aD,2,2}^{(2)} \cup M_{eD,1,2}^{(2)} \\
M_{aD,3}^{(2)} &= M_{aD,1,3}^{(2)} \cup M_{aD,2,3}^{(2)} \cup M_{eD,1,3}^{(2)} \\
M_{aD,4}^{(2)} &= M_{aD,1,4}^{(2)} \cup M_{aD,2,4}^{(2)} \cup M_{eD,1,4}^{(2)}
\end{aligned} \tag{4.167}$$

Burada, $M_{aD,i,j}^{(2)}$ ve $M_{eD,i,j}^{(2)}$ uzayları (4.132)-(4.139) eşitliklerinde tanımlanmıştır. İzdüşüm operatörlerinden yansıma katsayılarına geçilerek, yardımcı hata vektörleri (4.148)'ya benzer şekilde tek bir yapıda birleştirilirse,

$$\begin{aligned}
e_{a_1}^{(3)} &= (K_{a_1}^{(3)} + I)e_{a_1}^{(2)*} + \tilde{K}_{a_1}^{(3)}\tilde{e}_{a_1}^{(2)*} + \bar{K}_{a_2}^{(3)}e_{a_2}^{(2)*} \\
&\quad + \tilde{\bar{K}}_{a_2}^{(3)}\tilde{e}_{a_2}^{(2)*} + K_{e_1}^{(3)}e_{e_1}^{(2)*} + \tilde{K}_{e_1}^{(3)}\tilde{e}_{e_1}^{(2)*}
\end{aligned} \tag{4.168}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\bar{K}_{a_j}^{(n)}$ ve $\tilde{\bar{K}}_{a_j}^{(n)}$ yardımcı yansıma katsayıları matrisleri

$$\bar{K}_{a_j}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{\alpha}_{j,1}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\gamma}_{j,1}^{(n)} & 0 & -\bar{\gamma}_{j,2}^{(n)} \\ -\bar{\lambda}_{j,1}^{(n)} & 0 & -\bar{\lambda}_{j,2}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.169}$$



ve

$$\tilde{\mathbf{K}}_{a_j}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\alpha}_{j,2}^{(n)} & 0 & -\bar{\alpha}_{j,3}^{(n)} \\ -\bar{\beta}_{j,1}^{(n)} & -\bar{\beta}_{j,2}^{(n)} & -\bar{\beta}_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\gamma}_{j,3}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\lambda}_{j,3}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

şeklindedir. Üçüncü derecede tanımlanan yardımcı hata alanları $|e_{2,j}^{(3)}\rangle_{T,T}$ 'ler de (4.168) eşitliğine benzer şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} e_{a_2}^{(3)} &= (\mathbf{K}_{a_2}^{(3)} + \mathbf{I})e_{a_2}^{(2)*} + \tilde{\mathbf{K}}_{a_2}^{(3)}\tilde{e}_{a_2}^{(2)*} + \tilde{\mathbf{K}}_{a_1}^{(3)}e_{a_1}^{(2)*} \\ &+ \tilde{\mathbf{K}}_{a_1}^{(3)}\tilde{e}_{a_1}^{(2)*} + \mathbf{K}_{e_1}^{(3)}e_{e_1}^{(2)*} + \tilde{\mathbf{K}}_{e_1}^{(3)}\tilde{e}_{e_1}^{(2)*} \end{aligned} \quad (4.171)$$

Şekil 4.12, 3. dereceye ilişkin kafes süzgeç katının iç yapısını göstermektedir. Şekil 4.13 te, ilk üç dereceye ilişkin kafes yapısı görülmektedir. Şekil 4.13 te görülen geciktirme blokları, Tablo 4.1 de verilmiştir. T başlangıç koşulları bloğu ise Şekil 4.14 te verilmiştir.

4.3.5 N. derece

Birinci, ikinci ve üçüncü derecede elde edilen sonuçları dikkate alarak, N. dereceye ilişkin sonuçları elde edebiliriz. Şekil 4.2 (a) da görülen N. derece birinci-çeyrek düzlem hata alanına ilişkin destek bölgesini elde edebilmek için hata uzayında dik izdüşüm kullanılarak, $|e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T}$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$|e_{00}^{(N)}\rangle_{T,T} = |e_{00}^{(N-1)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,1}^{(N-1)}}|e_{00}^{(N-1)}\rangle_{T,T} \quad (4.172)$$

Burada, hata uzayı aşağıdaki gibi verilir.

$$\bar{M}_{D,1}^{(N)} = M_{D,1}^{(N)} \cup M_{D,1,1}^{(N)} \cup M_{D,1,2}^{(N)} \cup \dots \cup M_{D,1,N}^{(N)} \quad (4.173)$$

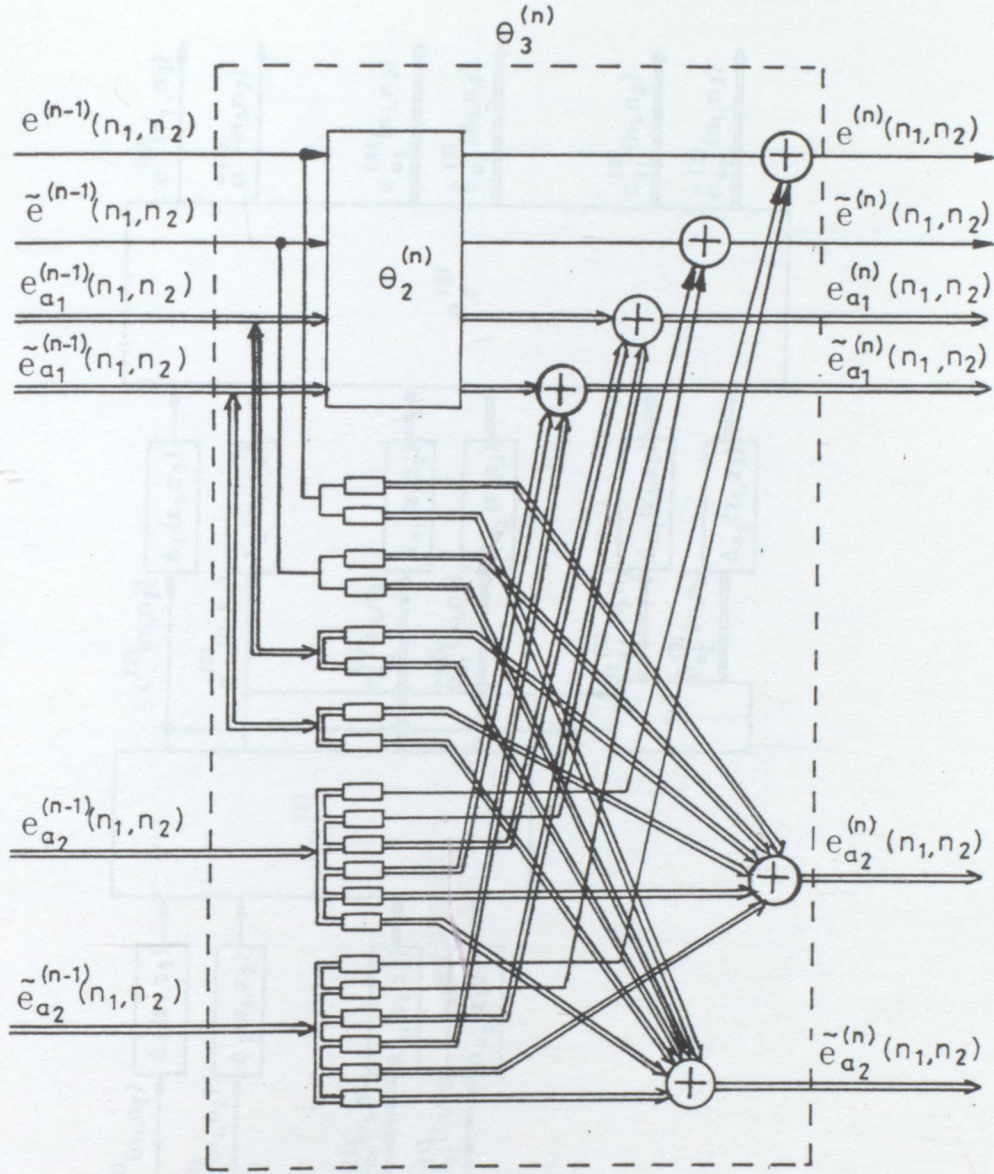
Burada, $M_{D,1}^{(N)}$ ve $M_{D,1,j}^{(N)}$ sırasıyla (4.51) ve (4.101) eşitliklerinde tanımlanmışlardır. Öte yandan, İkinci-çeyrek düzlem için ise,

$$|e_{10}^{(N)}\rangle_{T,T} = |z_1^{-1}e_{10}^{(N-1)}\rangle_{T,T} - P_{\bar{M}_{D,2}^{(N-1)}}|z_1^{-1}e_{10}^{(N-1)}\rangle_{T,T} \quad (4.174)$$

şeklinde olacaktır. Burada ikinci-çeyrek düzlem hata uzayı

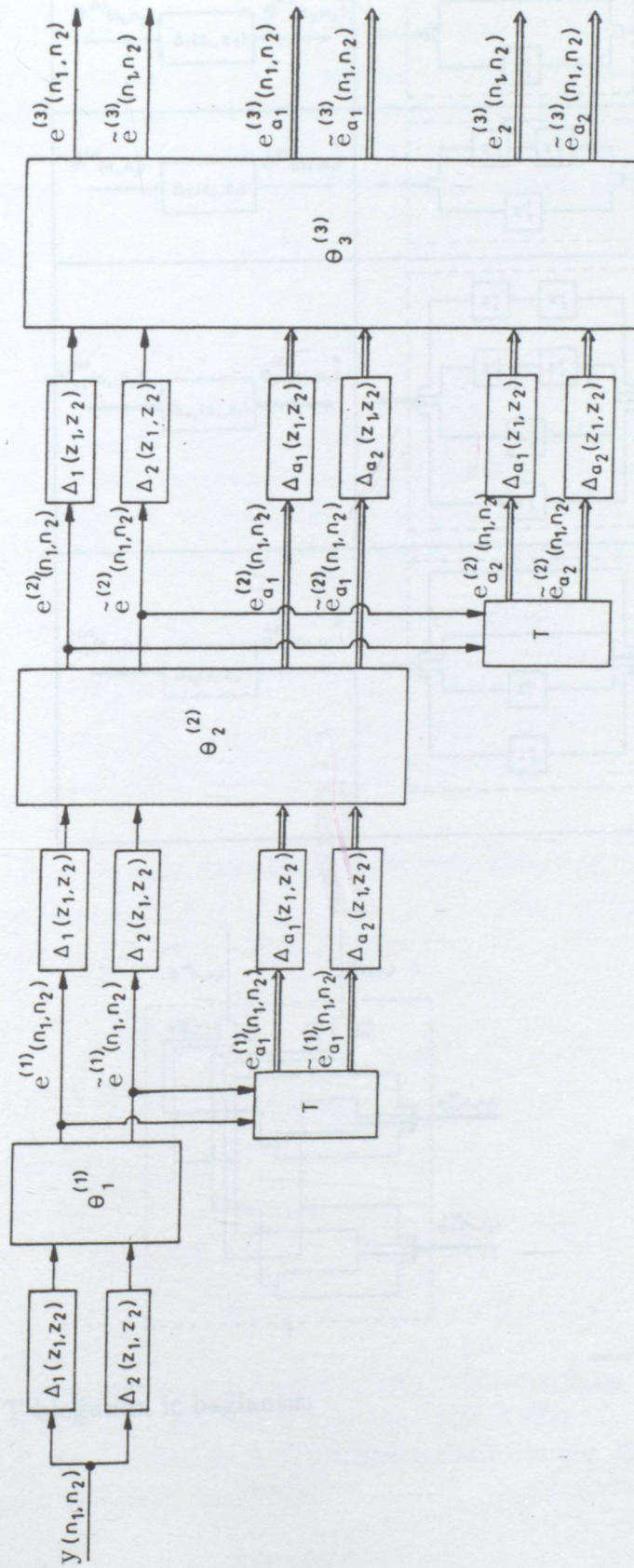
$$\bar{M}_{D,2}^{(N)} = M_{D,2}^{(N)} \cup M_{D,2,1}^{(N)} \cup M_{D,2,2}^{(N)} \cup \dots \cup M_{D,2,N}^{(N)} \quad (4.175)$$





$\text{---} \square \text{---}$: Çarpıcı, çarpım matrisleri yukarıdan aşağıya $K_{a2,3}^{(n)}$,
 $K_{a2,4}^{(n)}, K_{a2,4}^{(n)}, K_{a2,3}^{(n)}, \bar{K}_{a1,1}^{(n)}, \bar{K}_{a1,2}^{(n)}, \bar{K}_{a1,2}^{(n)}, \bar{K}_{a1,1}^{(n)}, K_{2,1}^{(n)}, K_{2,2}^{(n)},$
 $\bar{K}_{a2,1}^{(n)}, \bar{K}_{a2,2}^{(n)}, K_{a2,1}^{(n)} + I, K_{a2,2}^{(n)}, K_{2,2}^{(n)}, K_{2,1}^{(n)}, \bar{K}_{a2,2}^{(n)}, \bar{K}_{a2,1}^{(n)},$
 $K_{a2,2}^{(n)}, K_{a2,1}^{(n)} + I$

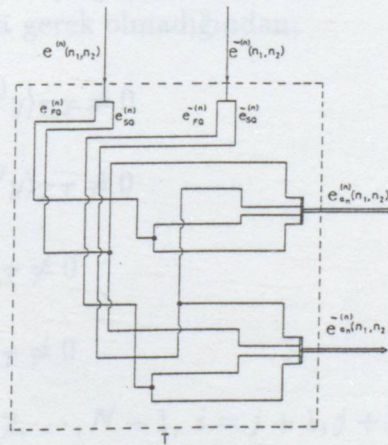
Şekil 4.12 Üçüncü derece kafes süzgeç yapısı iç ara bağlantısı Burada $\theta_2^{(n)}$ ikinci derecede Şekil 4.9 da tanımlanmıştır.



Şekil 4.13 İlk üç dereceye ilişkin kafes süzgeç yapısı.

Tablo 4.1 Şekil 4.13 te görülen geciktirme blokları

$e^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_1(z_1, z_2) \rightarrow e^{(n)}(n_1, n_2)^*$	
$\tilde{e}^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_2(z_1, z_2) \rightarrow \tilde{e}^{(n)}(n_1, n_2)^*$	
$e_{a_1}^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_{a_1}(z_1, z_2) \rightarrow e_{a_1}^{(n)}(n_1, n_2)^*$	
$\tilde{e}_{a_1}^{(n)}(n_1, n_2) \rightarrow \Delta_{a_2}(z_1, z_2) \rightarrow \tilde{e}_{a_1}^{(n)}(n_1, n_2)^*$	



Şekil 4.14 T bloğunun iç bağlantısı

olarak tanımlanır. Burada $M_{D,2}^{(N)}$ ve $M_{D,2,j}^{(N)}$ sırasıyla (4.61) ve (4.116) eşitliklerinde tanımlanmıştır. Burada dikkat edilirse, $\bar{M}_{D,1}^{(N)}$ ve $\bar{M}_{D,2}^{(N)}$ uzaylarını oluşturan tüm bileşenler $|z_1^{-i} z_2^{-j} y\rangle_{T,T}$ $i, j = 1, 2, \dots, N-1$ noktalarına dik olduğundan $\bar{M}_{D,1}^{(N)}$ ve $\bar{M}_{D,2}^{(N)}$ uzaylarının boyutlarının $4N-1$ olması yeterlidir. Bu da her bir derece artışta, başlangıç koşulları yardımıyla 4 yeni hata vektörünün kafese eklenmesi ile sağlanır. Birinci, ikinci ve üçüncü derecelerden hareketle izdüşüm operatörlerinden yansıma katsayılarına geçecek olursak, N. için derece yayılım eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} e^{(N)} &= K_1^{(N)} e^{(N-1)*} + K_2^{(N)} \tilde{e}^{(N-1)*} \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} (K_{j,1}^{(N)} e_{a_j}^{(N-1)*} + K_{j,2}^{(N)} \tilde{e}_{a_j}^{(N-1)*}) \end{aligned} \quad (4.176)$$

Burada yansıma katsayısı matrisleri (4.72), (4.124) ve (4.125) te tanımlanmıştır.

Öte yandan, (N+1) derecede kullanılmak üzere N. dereceye güncelleştirilecek, yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri aşağıda Şekil 4.15 te görülmektedir. N. derecedeki yardımcı hata alanları, izdüşüm operatörleri cinsinden yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} |e_{j,1}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{j,1}^{(N-1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{a_{D,1}}^{(N-1)}} |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{j,1}^{(N-1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{j,2}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{j,2}^{(N-1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{a_{D,2}}^{(N-1)}} |z_1^{-1} z_2^{-1} e_{j,2}^{(N-1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{j,3}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |z_2^{-1} e_{j,3}^{(N-1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{a_{D,3}}^{(N-1)}} |z_2^{-1} e_{j,3}^{(N-1)}\rangle_{T,T} \\ |e_{j,4}^{(N)}\rangle_{T,T} &= |z_1^{-1} e_{j,4}^{(N-1)}\rangle_{T,T} - P_{M_{a_{D,4}}^{(N-1)}} |z_1^{-1} e_{j,4}^{(N-1)}\rangle_{T,T} \end{aligned} \quad (4.177)$$

ifadeleri elde edilir. Burada daha önceki derecelere benzer olarak, $M_{a_{D,i}}^{(N-1)}$ uzaylarını oluşturan tüm bileşenler $|z_1^{-i} z_2^{-j} y\rangle_{T,T}$ $i, j = 1, 2, \dots, N-1$ bileşenlerine dik olacaktır. Ayrıca eniyi olmalarına gerek olmadığından,

$$\begin{aligned} \langle e_{j,1}^{(N)} | z_1^{-N} z_2^{-(N-i)} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \\ \langle e_{j,2}^{(N)} | z_1^{-(N-i)} z_2^{-N} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \\ \langle e_{j,3}^{(N)} | z_2^{-(N-i)} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \\ \langle e_{j,4}^{(N)} | z_1^{-(N-i)} y \rangle_{T,T} &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.178)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, \quad i = j+1, j+2, \dots, N$$

olarak seçilir. Böylece, her bir derece artışta, yardımcı hata alanlarının güncelleştirilmesi için 3 yeni vektörün uzaya katılması yeterli olur. N. derece yardımcı hata alanlarını güncelleştirilmesinde $M_{a_{D,i}}^{(N-1)}$ uzaylarının boyutu $3N-1$ olacaktır. Birinci, ikinci ve üçüncü dereceden hareketle,

$$M_{a_{D,i}}^{(N-1)} = M_{a_{D,1,i}}^{(N-1)} \cup M_{a_{D,2,i}}^{(N-1)} \cup \dots \cup M_{a_{D,(N-1),i}}^{(N-1)} \cup M_{e_{D,j,i}}^{(N-1)} \quad (4.179)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

olarak elde edilir. Burada, $M_{a_{D,j,i}}^{(N-1)}$ ve $M_{e_{D,j,i}}^{(N-1)}$ $j = 1, 2, \dots, N-2$ daha önceki derecelerde tanımlanmıştır. $M_{a_{D,(N-1),i}}^{(N-1)}$ ise (4.132)-(4.139) eşitlikleri ve (4.100) eşitliğindeki başlangıç koşullarından elde edilir. (4.177) eşitlikleri yansıma katsayıları cinsinden, birinci, ikinci ve üçüncü derecelerdeki gelişimden yararlanılarak, N. derece için aşağıdaki gibi yazılır.

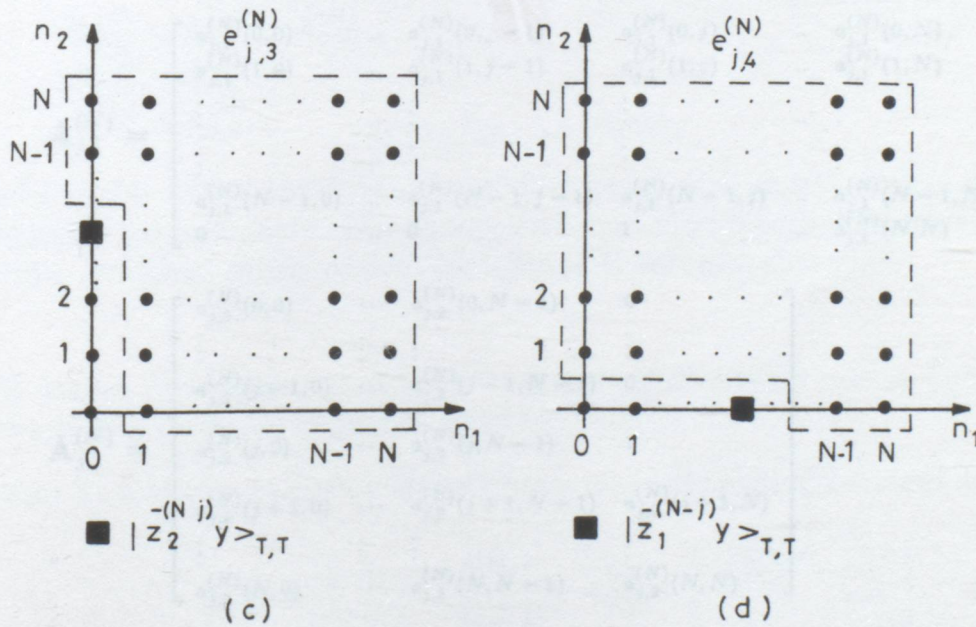
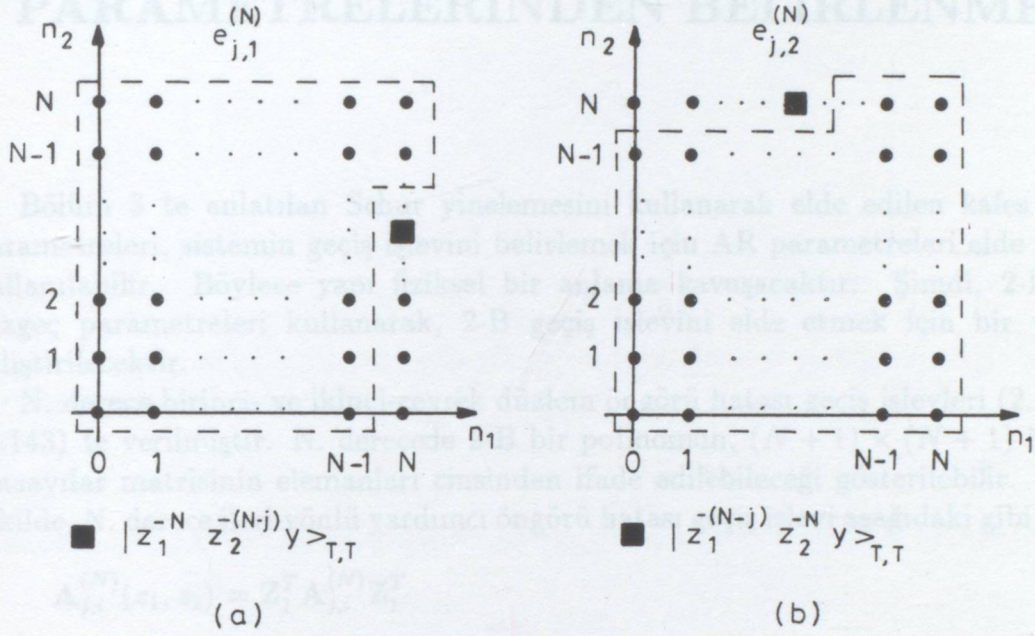
$$\begin{aligned} e_{a_j}^{(N)} &= (K_{a_j}^{(N)} + I)e_{a_j}^{(N-1)*} + \tilde{K}_{a_j}^{(N)}\tilde{e}_{a_j}^{(N-1)*} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ \text{ve } i \neq j}}^{N-1} (\tilde{K}_{a_i}^{(N)}e_{a_i}^{(N-1)*} + \tilde{\tilde{K}}_{a_i}^{(N)}\tilde{e}_{a_i}^{(N-1)*}) + K_{e_1}^{(N)}e^{(N-1)*} + \tilde{K}_{e_1}^{(N)}\tilde{e}^{(N-1)*} \quad (4.180) \end{aligned}$$

(4.176) ve (4.180) bağıntıları, 2-B yinelemeli enküçük-kareler kafes süzgeç algoritmasını verirler. Verilen algoritma ile çeyrek düzlem AR alanların tam olarak modellenmesi sağlanır. Bunun yanısıra oluşturulan kafes süzgecin girişi, 2-B Schur algoritmasının aksine, doğrudan doğruya veri alanı olduğundan dolayı katsayıları daha yüksek doğrulukla hesaplar. 2-B yinelemeli enküçük-kareler kafes süzgeç algoritması ile elde kafes süzgeç parametrelerinden AR parametrelere geçiş bir sonraki bölümde incelenecektir.



5. 2-B GEÇİŞ İŞLEVİNİN KAFES SÜZGEÇ

PARAMETRELERİNDEN BELİRLENMESİ



Şekil 4.15 j . dereceden itibaren tanımlanmış, N . derece yardımcı hata alanlarının destek bölgeleri.

5. 2-B GEÇİŞ İŞLEVİNİN KAFES SÜZGEÇ PARAMETRELERİNDEN BELİRLENMESİ

Bölüm 3 te anlatılan Schur yinelemesini kullanarak elde edilen kafes süzgeç parametreleri, sistemin geçiş işlevini belirlemek için AR parametreleri elde etmede kullanılabilir. Böylece yapı fiziksel bir anlama kavuşacaktır. Şimdi, 2-B kafes süzgeç parametreleri kullanarak, 2-B geçiş işlevini elde etmek için bir yöntem geliştirilecektir.

N. derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem öngörü hatası geçiş işlevleri (2.142) ve (2.143) te verilmiştir. N. derecede 2-B bir polinomun, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu katsayılar matrisinin elemanları cinsinden ifade edilebileceği gösterilebilir. Benzer şekilde, N. derece ileri-yönlü yardımcı öngörü hatası geçiş işlevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{A}_{j,i}^{(N)}(z_1, z_2) = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{A}_{j,i}^{(N)} \mathbf{Z}_1^T \quad (5.1)$$

Burada, $\mathbf{Z}_1$ ve $\mathbf{Z}_2$, (2.141) de verilmiştir. Böylece, N. derece ileri-yönlü yardımcı hata matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{A}_{j,1}^{(N)} = \begin{bmatrix} a_{j,1}^{(N)}(0,0) & \dots & a_{j,1}^{(N)}(0,j-1) & a_{j,1}^{(N)}(0,j) & \dots & a_{j,1}^{(N)}(0,N) \\ a_{j,1}^{(N)}(1,0) & \dots & a_{j,1}^{(N)}(1,j-1) & a_{j,1}^{(N)}(1,j) & \dots & a_{j,1}^{(N)}(1,N) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1}^{(N)}(N-1,0) & \dots & a_{j,1}^{(N)}(N-1,j-1) & a_{j,1}^{(N)}(N-1,j) & \dots & a_{j,1}^{(N)}(N-1,N) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & a_{j,1}^{(N)}(N,N) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{A}_{j,2}^{(N)} = \begin{bmatrix} a_{j,2}^{(N)}(0,0) & \dots & a_{j,2}^{(N)}(0,N-1) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j,2}^{(N)}(j-1,0) & \dots & a_{j,2}^{(N)}(j-1,N-1) & 0 \\ a_{j,2}^{(N)}(j,0) & \dots & a_{j,2}^{(N)}(j,N-1) & 1 \\ a_{j,2}^{(N)}(j+1,0) & \dots & a_{j,2}^{(N)}(j+1,N-1) & a_{j,2}^{(N)}(j+1,N) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j,2}^{(N)}(N,0) & \dots & a_{j,2}^{(N)}(N,N-1) & a_{j,2}^{(N)}(N,N) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{A}_{j,3}^{(N)} = \begin{bmatrix} 0 & a_{j,3}^{(N)}(0,1) & \cdots & a_{j,3}^{(N)}(0,N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{j,3}^{(N)}(j-1,1) & \cdots & a_{j,3}^{(N)}(j-1,N) \\ 1 & a_{j,3}^{(N)}(j,1) & \cdots & a_{j,3}^{(N)}(j,N) \\ a_{j,3}^{(N)}(j+1,0) & a_{j,3}^{(N)}(j+1,1) & \cdots & a_{j,3}^{(N)}(j+1,N) \\ a_{j,3}^{(N)}(N,0) & a_{j,3}^{(N)}(N,1) & \cdots & a_{j,3}^{(N)}(N,N) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{A}_{j,4}^{(N)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & a_{j,4}^{(N)}(0,N) \\ a_{j,4}^{(N)}(1,0) & \cdots & a_{j,4}^{(N)}(1,j-1) & a_{j,4}^{(N)}(1,j) & \cdots & a_{j,4}^{(N)}(1,N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j,4}^{(N)}(N,0) & \cdots & a_{j,4}^{(N)}(N,j-1) & a_{j,4}^{(N)}(N,j) & \cdots & a_{j,4}^{(N)}(N,N) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

(3.102) ifadesi kullanılarak, geri-yönlü yardımcı katsayı matrisleri, $\tilde{\mathbf{A}}_{j,i}^{(N)}$ ler, $\mathbf{A}_{j,i}^{(N)}$ ler cinsinden ifade edilebilir.

$$\tilde{\mathbf{A}}_{j,i}^{(N)} = [a_{j,i}^{(N)}(N - k_1, N - k_2)]_{k_1, k_2=0}^N = \mathbf{J} \mathbf{A}_{j,i}^{(N)} \mathbf{J} \quad (5.6)$$

Burada, $\mathbf{J}$ (2.24) te tanımlı değişim matrisidir ve uygun boyutlara genişletilir.

Açıklama 5.1: (5.1) de verilen yardımcı hata katsayıları matrisi j adet sıfır'a sahiptir. (2.143)-(2.146) ve (5.1)'i karşılaştırarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{FQ}^{(N)} &= \mathbf{A}_{0,3}^{(N)} = \mathbf{A}_{0,4}^{(N)} \\ \mathbf{A}_{SQ}^{(N)} &= \mathbf{A}_{0,1}^{(N)} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{SQ}^{(N)} &= \mathbf{A}_{0,2}^{(N)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerden görülebileceği gibi, çeyrek-düzlem öngörü hata süzgeçleri yardımcı hata süzgeçlerinin özel durumları olarak düşünülebilir. $j=0$ ise birinci- ve ikinci- çeyrek düzlem modeller (5.7) teki gibi elde edilir.

2-B öngörü hata süzgeçleri geçiş işlevi, aşağıda verilen işlem sırasını kullanarak 2-B kafes süzgeç katsayılarından elde edilebilir.

Adım 1: $n=1$ alın ve birinci derece katsayı matrislerini aşağıdaki şekilde belirleyin.

$$\mathbf{A}_{FQ}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{0,1}^{(1)} \\ -k_{1,0}^{(1)} & -k_{1,1}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{SQ}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_{1,0}^{(1)} & -\tilde{k}_{1,1}^{(1)} \\ 1 & -\tilde{k}_{0,1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Adım 2: (2.152)-(2.153) eşitliklerini kullanarak, $\tilde{\mathbf{A}}_{FQ}^{(1)}$ ve $\tilde{\mathbf{A}}_{SQ}^{(1)}$ 'yu belirleyin.

Adım 3: n . derece yardımcı katsayı matrislerini aşağıdaki şekilde belirleyin.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n,1}^{(N)} &= \mathbf{A}_{SQ}^{(N)} \\ \mathbf{A}_{n,2}^{(N)} &= \tilde{\mathbf{A}}_{SQ}^{(N)} \\ \mathbf{A}_{n,3}^{(N)} &= \mathbf{A}_{n,4}^{(N)} = \mathbf{A}_{FQ}^{(N)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Adım 4: n . derece geri-yönlü yardımcı hata katsayıları matrisini (3.59) ve (3.60) dan belirleyin.

$$\tilde{\mathbf{A}}_{j,i}^{(N)} = \mathbf{J} \mathbf{A}_{j,i}^{(N)} \mathbf{J} \quad (5.10)$$

$$j = 1, 2, \dots, n \text{ ve } i = 1, 2, 3, 4.$$

Adım 5: n yi bir derece artırıp, artırılmış matrisler aracılığıyla, $\mathbf{A}_{FQ}^{(n)}$, $\mathbf{A}_{SQ}^{(n)}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n)}$ ve $\tilde{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n)}$ 'lerden, $\hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n+1)}$, $\hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n+1)}$, $\hat{\tilde{\mathbf{A}}}_{FQ}^{(n+1)}$ ve $\hat{\tilde{\mathbf{A}}}_{SQ}^{(n+1)}$ 'ları oluşturun.

$$\hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{FQ}^{(n)} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{A}_{SQ}^{(n)} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{A}}}_{FQ}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0}^T \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \tilde{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\tilde{\mathbf{A}}}_{SQ}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \tilde{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Burada, $\mathbf{0}$ $n \times 1$ boyutlu sıfır vektördür.

Adım 6: $j = 1, 2, \dots, n$ için $\hat{\mathbf{A}}_{j,i}^{(n+1)}$ ve $\hat{\tilde{\mathbf{A}}}_{j,i}^{(n+1)}$ yi artırılmış matrisleri kullanarak $\mathbf{A}_{j,i}^{(n)}$ ve $\tilde{\mathbf{A}}_{j,i}^{(n)}$ den aşağıdaki şekilde oluşturun.

$$\hat{\mathbf{A}}_{j,1}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0}^T \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{A}_{j,1}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_{j,2}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0}^T \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{A}_{j,2}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{j,3}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{A}_{j,3}^{(n)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_{j,4}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{A}_{j,4}^{(n)} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{j,1}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{j,1}^{(n)} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}^T & \vdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_{j,2}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{j,2}^{(n)} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}^T & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{j,3}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{0}^T \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & \tilde{\mathbf{A}}_{j,3}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_{j,4}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \tilde{\mathbf{A}}_{j,4}^{(n)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}^T & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Adım 7: (3.100) eşitliğinden belirlenen, ileri-yönlü 2-B geçiş işlevleri için, $(n+1)$. derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem katsayı matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{FQ}^{(n+1)} &= \hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n+1)} - k_{10}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n+1)} - k_{11}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n+1)} \\ &\quad - k_{01}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n+1)} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^4 k_{j,i}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,i}^{(n+1)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{SQ}^{(n+1)} &= \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n+1)} - \tilde{k}_{10}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n+1)} - \tilde{k}_{01}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n+1)} - \tilde{k}_{11}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n+1)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n (\tilde{k}_{j,1}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,1}^{(n+1)} + \tilde{k}_{j,3}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,3}^{(n+1)} + \tilde{k}_{j,2}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,2}^{(n+1)} + \tilde{k}_{j,4}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,4}^{(n+1)}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Adım 8: (3.102) de görülen $(n+1)$. derece ileri-yönlü yardımcı hata matrisleri, aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{j,1}^{(n+1)} &= \hat{\mathbf{A}}_{j,1}^{(n+1)} - \alpha_{j,1}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,3}^{(n+1)} - \alpha_{j,2}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,2}^{(n+1)} \\ &\quad - \alpha_{j,3}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{j,4}^{(n+1)} - \alpha_{j,4}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{FQ}^{(n+1)} - \alpha_{j,5}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{SQ}^{(n+1)} \\ &\quad - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\bar{\alpha}_{i,1}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{i,3}^{(n+1)} + \bar{\alpha}_{i,2}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{i,2}^{(n+1)} + \bar{\alpha}_{i,3}^{(n+1)} \hat{\mathbf{A}}_{i,4}^{(n+1)}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

6. 3-B SCHUR ALGORİTMASI

6.1 Giriş

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde 2-B rasgele alanların kafes süzgeç modellenmesinde, optimum bir çözüm veren yeni bir kafes süzgeç yapısı ortaya koyulmuştur. 1-B'tan, 2-B'a geçişte, karşılaşılan sorunlar ve sınırlamalar ortaya koyularak yeni bazı kavramlar tanımlanmıştır. Bütün bu tanımlamaların ve teorik yaklaşımın ışığında, daha yüksek boyutlar için benzer kafes süzgeç yapıları oluşturulabilir. bunlar arasında 3-B kafes süzgeçler, zamanla değişen 2-B rasgele sistemler ve hareketli resimlerin işlenmesi gibi konularda yoğun bir şekilde kullanım alanı bulmaktadır (Nam et.al.,1987; Kwan et.al., 1989).

Bu bölümde, 2-B Schur algoritması 3-B'a genişletilerek kübik-uzay destekli sistemlerin 3-B kafes süzgeç modellenmesi gerçekleştirilecektir. Burada, çıkış işareti yalnızca geçmiş değerleri kullanarak AR olarak türetilmektedir. Yani, uzamsal koordinatlardaki bu veri kestirilecek noktalardan daha küçüktür. Bu nedenle, geçiş işlevinin destek bölgesi kartezyen uzayın sekizde biridir (Kwan et.al,1989). 3-B Schur algoritmasını elde edebilmek için 3-B alana ilişkin ilişkiler kullanılarak, sekiz adet 3-B boşluklu işlev tanımlanır. Artan derecelerde, artan sayıdaki yansıma katsayılarını elde edebilmek için, kübik-uzaya yeni yardımcı boşluklu işlevler eklenir. Bu işlevler bir başlangıç koşuluna göre, ileri- ve geri-yönlü boşluklu işlevlerden elde edilirler ve yalnızca yansıma katsayılarının kestiriminde kullanıldıklarından eniyi olmaları gerekmez.

Kübik-uzay destekli bir AR modelleme için kübik-uzay boşluk koşullarına sahip bir 3-B boşluklu işlev aşağıdaki gibi verilir.

$$g_{abc}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^n a_{abc}^{(n)} R(n_1 - p, n_2 - q, n_3 - r) \quad (6.1)$$

$$(p, q, r) \neq (a, b, c)$$

$g_{abc}^{(n)}(n_1, n_2, n_3)$ işlevine ilişkin boşluk koşulları ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$g_{abc}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = 0 \quad n_1, n_2, n_3 = 0, 1, \dots, n \text{ ve } (n_1, n_2, n_3) \neq (a, b, c) \quad (6.2)$$

$$g_{000}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^n a_{000}^{(n)} R(n_1 - p, n_2 - q, n_3 - r) \quad (6.5)$$

$$(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$$

ve ilişkin boşluk koşulları,

$$g_{000}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 0 & D_{000}^{(n)} \\ \varepsilon_{000}^{(n)} & (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (6.6)$$

1-B geri-yönlü boşluklu işlevine benzerlik teşkil edecek şekilde yedinci-kübik uzay boşluklu işlevi (2.150) eşitliği 3-B ta genişletilerek, birinci-kübik uzay boşluklu işlevinin simetriği olarak tanımlanır.

$$G_{111}^{(n)}(z_1, z_2, z_3) = z_1^{-n} z_2^{-n} z_3^{-n} G_{000}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}) \quad (6.7)$$

(6.5)' eşitliğine benzer şekilde, 1-B'ta karşılığı olmayan, ikinci-, üçüncü- ve dördüncü-kübik uzay boşluklu işlevler sırasıyla aşağıdaki gibidir. İkinci-kübik uzay boşluklu işlev;

$$g_{100}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^n a_{100}^{(n)} R(n_1 - p, n_2 - q, n_3 - r) \quad (6.8)$$

$$(p, q, r) \neq (n, 0, 0)$$

ve ilişkin boşluk koşulları,

$$g_{100}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 0 & D_{100}^{(n)} \\ \varepsilon_{100}^{(n)} & (n_1, n_2, n_3) = (n, 0, 0) \end{cases} \quad (6.9)$$

şeklindedir. Burada

$$D_{100}^{(n)} = (i, j, k) \quad i, j, k = 0, 1, \dots, n \text{ ve } (i, j, k) \neq (n, 0, 0) \quad (6.10)$$

olarak verilir.

Üçüncü-kübik uzay için;

$$g_{110}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^n a_{110}^{(n)} R(n_1 - p, n_2 - q, n_3 - r) \quad (6.11)$$

$$(p, q, r) \neq (n, n, 0)$$

ve ilişkin boşluk koşulları

$$g_{110}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 0 & D_{110}^{(n)} \\ \varepsilon_{110}^{(n)} & (n_1, n_2, n_3) = (n, n, 0) \end{cases} \quad (6.12)$$

şeklindedir. Burada

$$D_{110}^{(n)} = (i, j, k) \quad i, j, k = 0, 1, \dots, n \text{ ve } (i, j, k) \neq (n, n, 0) \quad (6.13)$$

olarak verilir.

Dördüncü-kübik uzay için;

$$g_{010}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^n a_{010}^{(n)} R(n_1 - p, n_2 - q, n_3 - r) \quad (6.14)$$

$$(p, q, r) \neq (0, n, 0)$$

ve ilişkin boşluk koşulları,

$$g_{010}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 0 & D_{010}^{(n)} \\ \varepsilon_{010}^{(n)} & (n_1, n_2, n_3) = (0, n, 0) \end{cases} \quad (6.15)$$

şeklindedir. Burada

$$D_{010}^{(n)} = (i, j, k) \quad i, j, k = 0, 1, \dots, n \text{ ve } (i, j, k) \neq (0, n, 0) \quad (6.16)$$

olarak tanımlanır. Beşinci-, altıncı- ve sekizinci-kübik uzay boşluklu işlevler ikinci-, üçüncü- ve dördüncü-kübik uzay boşluklu işlevlerin geri-yönlü polinomlar olarak sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

Beşinci-kübik uzay boşluk işlevi;

$$G_{001}^{(n)}(z_1, z_2, z_3) = z_1^{-n} z_2^{-n} z_3^{-n} G_{110}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}) \quad (6.17)$$

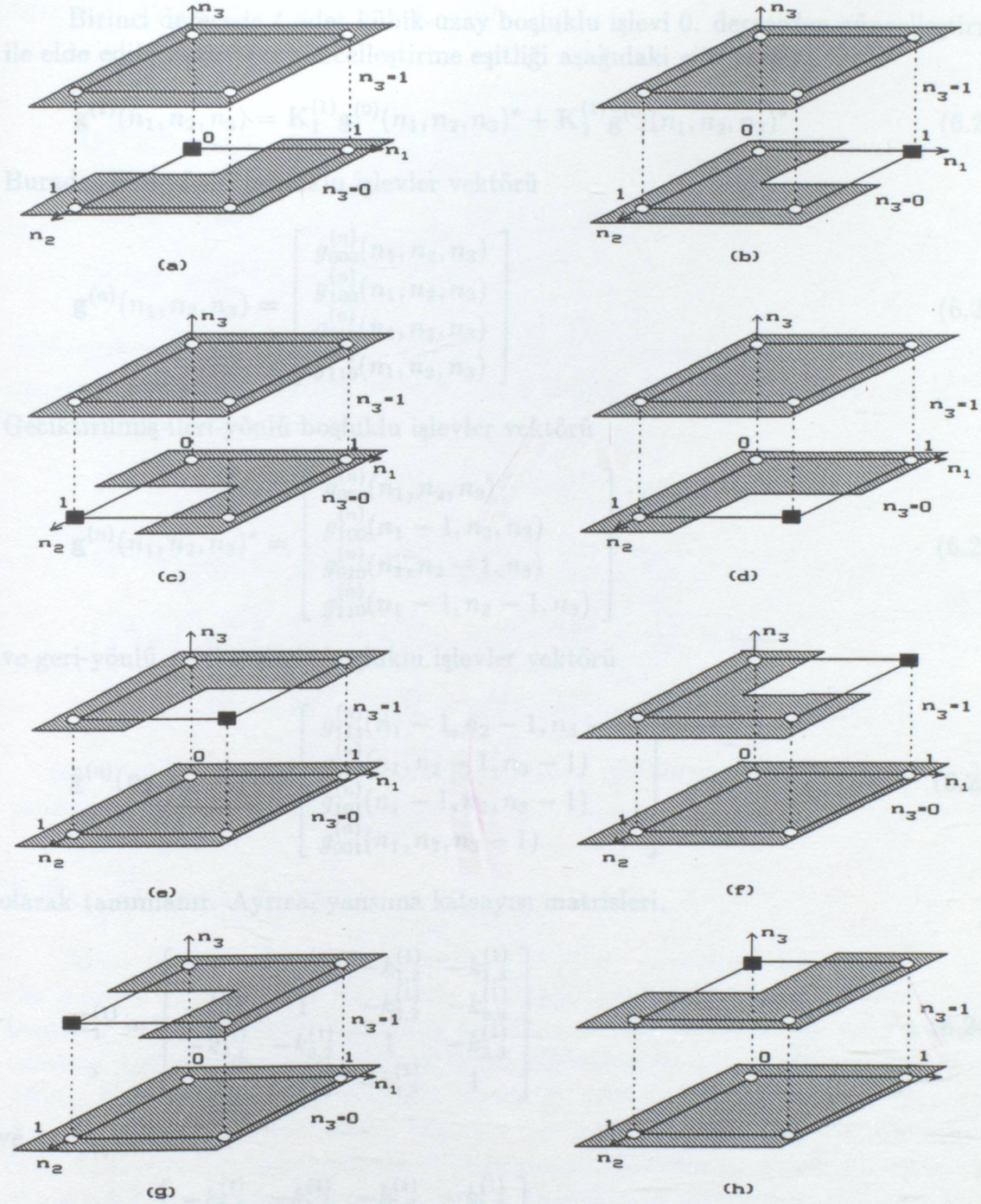
Altıncı-kübik uzay boşluk işlevi;

$$G_{101}^{(n)}(z_1, z_2, z_3) = z_1^{-n} z_2^{-n} z_3^{-n} G_{010}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}) \quad (6.18)$$

Sekizinci-kübik uzay boşluk işlevi;

$$G_{011}^{(n)}(z_1, z_2, z_3) = z_1^{-n} z_2^{-n} z_3^{-n} G_{100}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}) \quad (6.19)$$

Şekil 6.2, birinci derece için 8 adet boşluklu işlevi göstermektedir. 3-B ta da 2-B gibi sabit bir kafes yapısı mümkün olmadığından algoritmanın gelişimi derece derece incelenecektir.



Şekil 6.2 Birinci derece kübik-uzay boşluklu işlevler. (a) $g_{000}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{100}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{010}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{110}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (e) $g_{111}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (f) $g_{101}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (g) $g_{011}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$, (h) $g_{001}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Birinci derecede yedi adet boşluk koşulu vardır.

6.2 1. derece

Birinci derecede 4 adet kübik-uzay boşluklu işlevi 0. dereceden güncelleştirme ile elde edilecektir. Bu güncelleştirme eşitliği aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathbf{g}^{(1)}(n_1, n_2, n_3) = \mathbf{K}_1^{(1)} \mathbf{g}^{(0)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{K}_2^{(1)} \tilde{\mathbf{g}}^{(0)}(n_1, n_2, n_3)^* \quad (6.20)$$

Burada, ileri-yönlü boşluklu işlevler vektörü

$$\mathbf{g}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) = \begin{bmatrix} g_{000}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) \\ g_{100}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) \\ g_{010}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) \\ g_{110}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Geciktirilmiş ileri-yönlü boşluklu işlevler vektörü

$$\mathbf{g}^{(n)}(n_1, n_2, n_3)^* = \begin{bmatrix} g_{000}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) \\ g_{100}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3) \\ g_{010}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{110}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

ve geri-yönlü geciktirilmiş boşluklu işlevler vektörü

$$\tilde{\mathbf{g}}^{(n)}(n_1, n_2, n_3)^* = \begin{bmatrix} g_{111}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \\ g_{011}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3 - 1) \\ g_{101}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1) \\ g_{001}^{(n)}(n_1, n_2, n_3 - 1) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, yansıma katsayısı matrisleri,

$$\mathbf{K}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -k_{1,1}^{(1)} & -k_{1,2}^{(1)} & -k_{1,3}^{(1)} \\ -k_{2,1}^{(1)} & 1 & -k_{2,2}^{(1)} & -k_{2,3}^{(1)} \\ -k_{3,1}^{(1)} & -k_{3,2}^{(1)} & 1 & -k_{3,3}^{(1)} \\ -k_{4,1}^{(1)} & -k_{4,2}^{(1)} & -k_{4,3}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

ve

$$\mathbf{K}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -k_{1,4}^{(1)} & -k_{1,5}^{(1)} & -k_{1,6}^{(1)} & -k_{1,7}^{(1)} \\ -k_{2,4}^{(1)} & -k_{2,5}^{(1)} & -k_{2,6}^{(1)} & -k_{2,7}^{(1)} \\ -k_{3,4}^{(1)} & -k_{3,5}^{(1)} & -k_{3,6}^{(1)} & -k_{3,7}^{(1)} \\ -k_{4,4}^{(1)} & -k_{4,5}^{(1)} & -k_{4,6}^{(1)} & -k_{4,7}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

şeklinde. 0. derece için başlangıç koşulları,

$$g_{xyz}^{(0)}(n_1, n_2, n_3) = r(n_1, n_2, n_3) \quad x, y, z = 0, 1 \quad (6.26)$$

olarak verilir. (6.20) eşitliğine (6.6), (6.9), (6.12) ve (6.15) eşitliklerinde verilen boşluk koşulları uygulanarak her bir boşluklu işleve ilişkin yansıma katsayıları aşağıdaki denklemleri çözerek elde edilir.

$$G_1^{(1)} k_1^{(1)} = g_1^{(1)} \quad (6.27)$$

$$G_2^{(1)} k_2^{(1)} = g_2^{(1)} \quad (6.28)$$

$$G_3^{(1)} k_3^{(1)} = g_3^{(1)} \quad (6.29)$$

$$G_4^{(1)} k_4^{(1)} = g_4^{(1)} \quad (6.30)$$

denklemleri elde edilir. Burada $G_j^{(1)}$ 7×7 boyutlu boşluk matrisi, $k_j^{(1)}$ 7×1 boyutlu yansıma katsayıları vektörü ve $g_j^{(1)}$ 7×1 boyutlu boşluk vektörüdür ve $k_j^{(n)}$ 'ler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= [-k_{1,1}^{(n)} - k_{1,2}^{(n)} - k_{1,3}^{(n)} - k_{1,4}^{(n)} - k_{1,1}^{(5)} - k_{1,6}^{(n)} - k_{1,7}^{(n)}]^T = k_{Q1}^{(n)} \\ k_2^{(n)} &= [-k_{2,1}^{(n)} - k_{2,2}^{(n)} - k_{2,3}^{(n)} - k_{2,4}^{(n)} - k_{2,1}^{(5)} - k_{2,6}^{(n)} - k_{2,7}^{(n)}]^T = k_{Q2}^{(n)} \\ k_3^{(n)} &= [-k_{3,1}^{(n)} - k_{3,2}^{(n)} - k_{3,3}^{(n)} - k_{3,4}^{(n)} - k_{3,1}^{(5)} - k_{3,6}^{(n)} - k_{3,7}^{(n)}]^T = k_{Q3}^{(n)} \\ k_4^{(n)} &= [-k_{4,1}^{(n)} - k_{4,2}^{(n)} - k_{4,3}^{(n)} - k_{4,4}^{(n)} - k_{4,1}^{(5)} - k_{4,6}^{(n)} - k_{4,7}^{(n)}]^T = k_{Q4}^{(n)} \end{aligned} \quad (6.31)$$

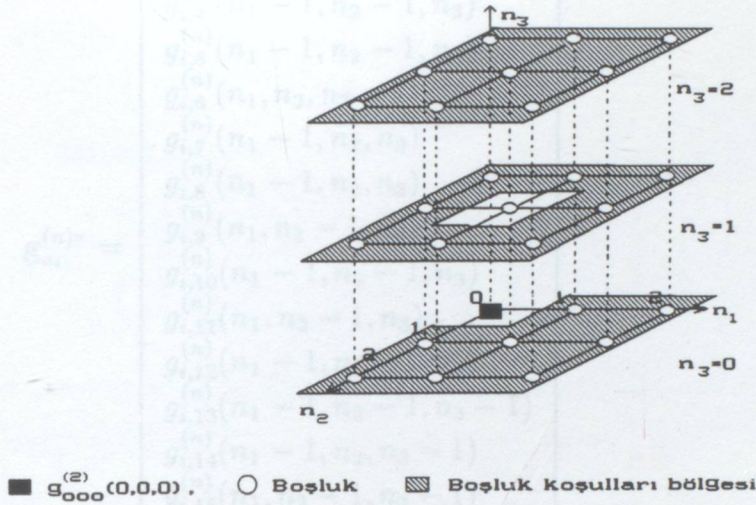
(6.27)-(6.30) denklemleri doğrudan doğruya çözülerek, birinci dereceye ilişkin yansıma katsayıları elde edilir.

6.3 İkinci derece

İkinci derecede kübik-uzay boşluklu işlevler, yinelemeli bir yapı elde edecek şekilde, birinci derece kübik-uzay boşluklu işlevlerin doğrusal birleşimleri kullanılarak elde edilecektir. Şekil 6.3 de ikinci derece, birinci-kübik uzay boşluklu işlevinin boşluk noktaları görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi, ikinci derece birinci-kübik uzay boşluklu işlevi 26 adet boşluğa sahiptir. Öte yandan, birinci derecede elde edilen boşluklu işlevlerin tüm olası doğrusal birleşimleri $(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1)$ noktasında boşluğa sahip olduklarından ikinci derece birinci-kübik uzay için yalnızca 25 boşluk koşulu tanımlamak yeterli olacaktır. Ancak ne yazık ki birinci derece de tanımlı 7 adet boşluklu işlevin doğrusal birleşimini kullanarak bütün bu boşluk koşullarını sağlamak mümkün değildir. Bu nedenle, 18 adet



yeni yardımcı boşluklu işlevler tanımlanır.



Şekil 6.3 İkinci derece birinci-kübik uzay boşluklu işlev $g_{000}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan 1. derece boşluklu işlevlerden 2. derece $g_{000}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$ boşluklu işlevini elde etmek için gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Taralı alanda 25 adet boşluk koşulu vardır.

Bu yardımcı boşluk işlevleri, yinelemeli yapıyı sağlayacak şekilde aşağıdaki başlangıç koşullarına göre seçilir.

$$\begin{aligned}
 g_{n,1}^{(n)} &= g_{000}^{(n)}, & g_{n,2}^{(n)} &= g_{000}^{(n)}, & g_{n,3}^{(n)} &= g_{000}^{(n)}, \\
 g_{n,4}^{(n)} &= g_{100}^{(n)}, & g_{n,5}^{(n)} &= g_{010}^{(n)}, & g_{n,6}^{(n)} &= g_{000}^{(n)}, \\
 g_{n,7}^{(n)} &= g_{001}^{(n)}, & g_{n,8}^{(n)} &= g_{101}^{(n)}, & g_{n,9}^{(n)} &= g_{001}^{(n)}, \\
 g_{n,10}^{(n)} &= g_{101}^{(n)}, & g_{n,11}^{(n)} &= g_{011}^{(n)}, & g_{n,12}^{(n)} &= g_{011}^{(n)}, \\
 g_{n,13}^{(n)} &= g_{110}^{(n)}, & g_{n,14}^{(n)} &= g_{001}^{(n)}, & g_{n,15}^{(n)} &= g_{001}^{(n)}, \\
 g_{n,16}^{(n)} &= g_{001}^{(n)}, & g_{n,17}^{(n)} &= g_{101}^{(n)}, & g_{n,18}^{(n)} &= g_{011}^{(n)}
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Ayrıca, geciktirilmiş yardımcı boşluklu işlevler,



$$\mathbf{g}_{a_i}^{(n)*} = \begin{bmatrix} g_{i,1}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3) \\ g_{i,2}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,3}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,4}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,5}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,6}^{(n)}(n_1, n_2, n_3 - 1) \\ g_{i,7}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3) \\ g_{i,8}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3) \\ g_{i,9}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,10}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,11}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,12}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{i,13}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \\ g_{i,14}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1) \\ g_{i,15}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3 - 1) \\ g_{i,16}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \\ g_{i,17}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \\ g_{i,18}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

olarak verilir. Öte yandan, bunlara ilişkin geri-yönlü yardımcı boşluklu işlevler,

$$\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(n)}(z_1, z_2, z_3) = z_1^{-n}, z_2^{-n}, z_3^{-n} \mathbf{G}_{i,j}^{(n)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}) \quad (6.34)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } j = 1, 2, \dots, 18$$

bağıntısından elde edilir.

İkinci derece için birinci-, ikinci-, üçüncü- ve dördüncü-kübik uzay boşluklu işlevler yukarıda tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(2)}(n_1, n_2, n_3) &= \mathbf{K}_1^{(2)} \mathbf{g}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{K}_2^{(2)} \tilde{\mathbf{g}}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ &+ \mathbf{K}_{a_1}^{(2)} \mathbf{g}_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \tilde{\mathbf{K}}_{a_1}^{(2)} \tilde{\mathbf{g}}_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* \end{aligned} \quad (6.35)$$

Burada $\mathbf{K}_{a_1}^{(2)}$ ve $\tilde{\mathbf{K}}_{a_1}^{(2)}$ 'yi kolayca yazabilmek için bir bire-bir $\odot$ matris çarpımı operatörü tanımlanır.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1j}b_{1j} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}b_{i1} & \cdots & a_{ij}b_{ij} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Burada $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ aynı boyutlarda matrislerdir. Böylece, (6.36) eşitliğinde tanımlanan matris çarpımı operatörünü kullanarak

$$\mathbf{K}_{a_i}^{(n)} = \mathbf{C}_i^{(n)} \odot \mathbf{T} \quad (6.37)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathbf{C}_i^{(n)}$ katsayılar matrisi,

$$\mathbf{C}_i^{(n)} \triangleq \begin{bmatrix} k_{1,i,1}^{(n)} & \cdots & k_{1,i,18}^{(n)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{4,i,1}^{(n)} & \cdots & k_{4,i,18}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

ve $\mathbf{T}$ çarpım matrisi

$$\mathbf{T} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

olarak tanımlanır. Öte yandan, geri-yönlü katsayılar matrisi

$$\tilde{\mathbf{K}}_{a_i}^{(n)} = \tilde{\mathbf{C}}_i^{(n)} \odot \tilde{\mathbf{T}} \quad (6.40)$$

şeklindedir ve

$$\tilde{t}_{ij} \triangleq 1 - t_{ij} \quad (6.41)$$

olarak tanımlanır.

İkinci derece yayılım eşitliğine birinci-, ikinci-, üçüncü- ve dördüncü-kübik uzay boşluk koşulları uygulanarak, herbiri 25 değişkenli 4 adet doğrusal bağımsız eşitlikler kümesi elde edilir.

$$\mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{k}_1^{(2)} = \mathbf{g}_1^{(2)} \quad (6.42)$$

$$\mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{k}_2^{(2)} = \mathbf{g}_2^{(2)} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{G}_3^{(2)} \mathbf{k}_3^{(2)} = \mathbf{g}_3^{(2)} \quad (6.44)$$

$$\mathbf{G}_4^{(2)} \mathbf{k}_4^{(2)} = \mathbf{g}_4^{(2)} \quad (6.45)$$

Burada, ikinci derece yansıma katsayıları vektörü $\mathbf{k}_j^{(2)}$

$$\mathbf{k}_j^{(2)} = [\mathbf{k}_{Q_j}^{(2)} : \mathbf{k}_{j,1}^{(2)}]^T \quad (6.46)$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

şeklindedir. Burada, $\mathbf{k}_{j,i}^{(n)}$

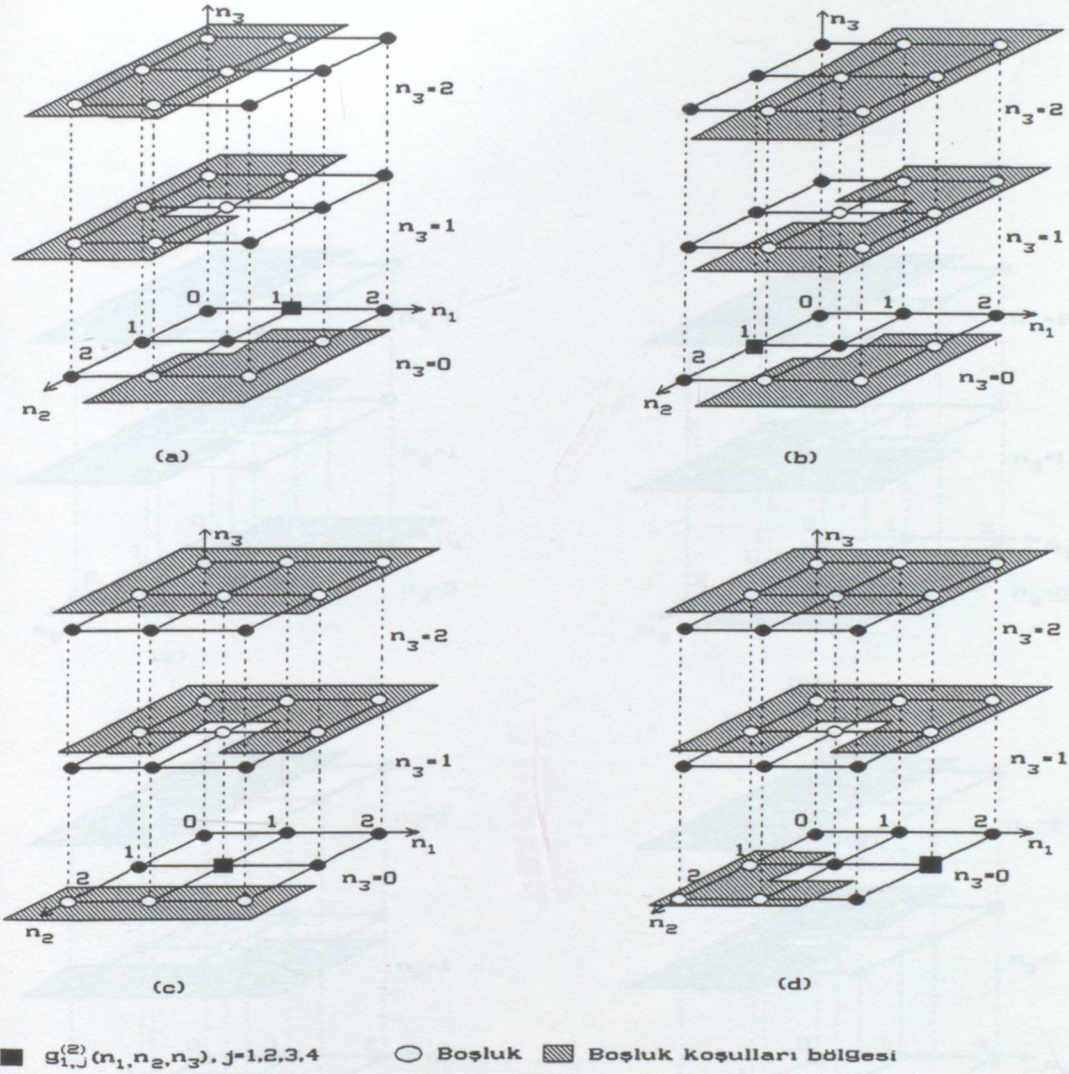
$$\mathbf{k}_{j,i}^{(n)} = [-k_{j,i,1}^{(n)} - k_{j,i,2}^{(n)} \cdots - k_{j,i,18}^{(n)}]^T \quad (6.47)$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

olarak tanımlanır. (6.42)-(6.45) denklemleri çözülerek, ikinci dereceye ilişkin yansıma katsayıları elde edilir. Öte yandan (6.35) eşitliğinden, ikinci derece boşluk koşulları ile çevrelenen noktanın her zaman sıfır olduğu görülür.

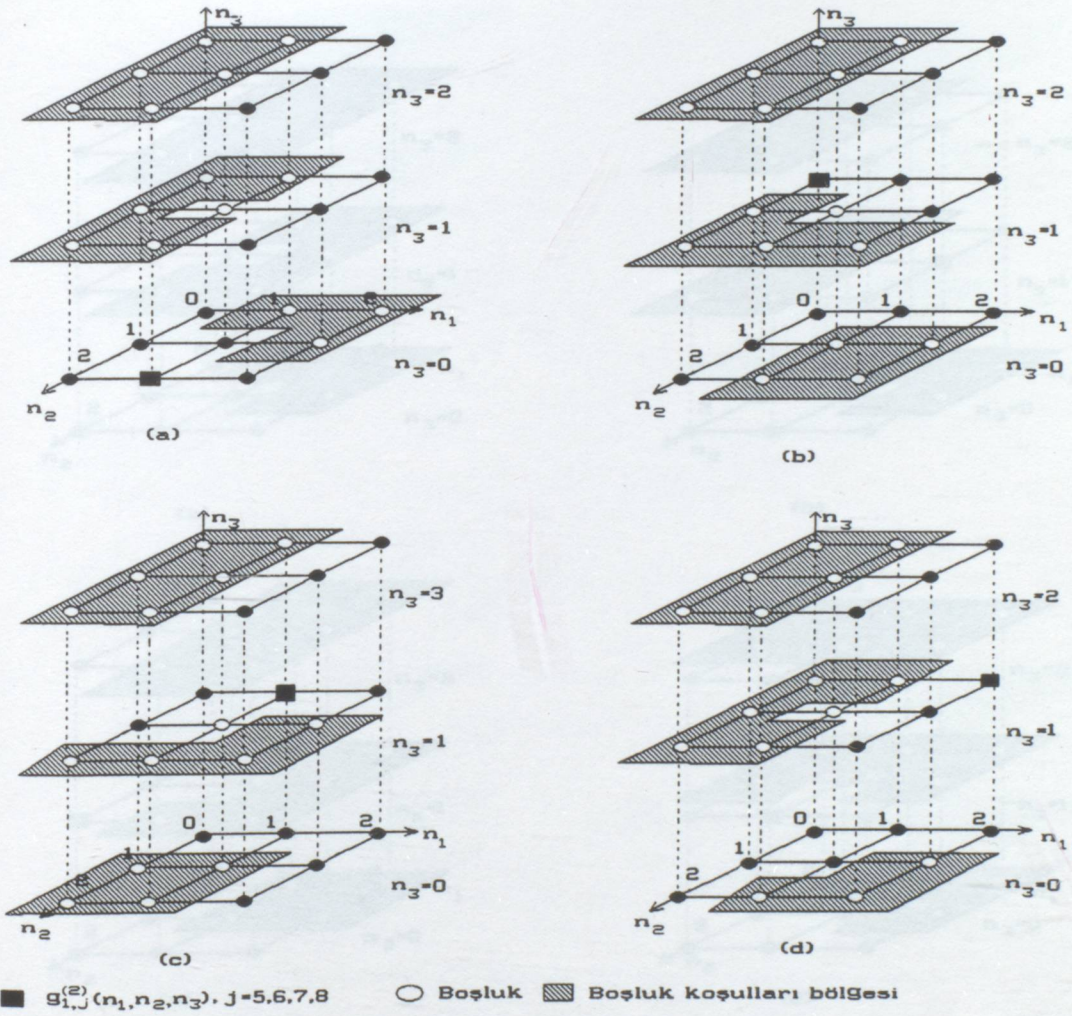
$$g_{ijk}^{(2)}(n_1, n_2, n_3) = 0 \quad (n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 1) \quad (6.48)$$

$$i, j, k = 0, 1$$



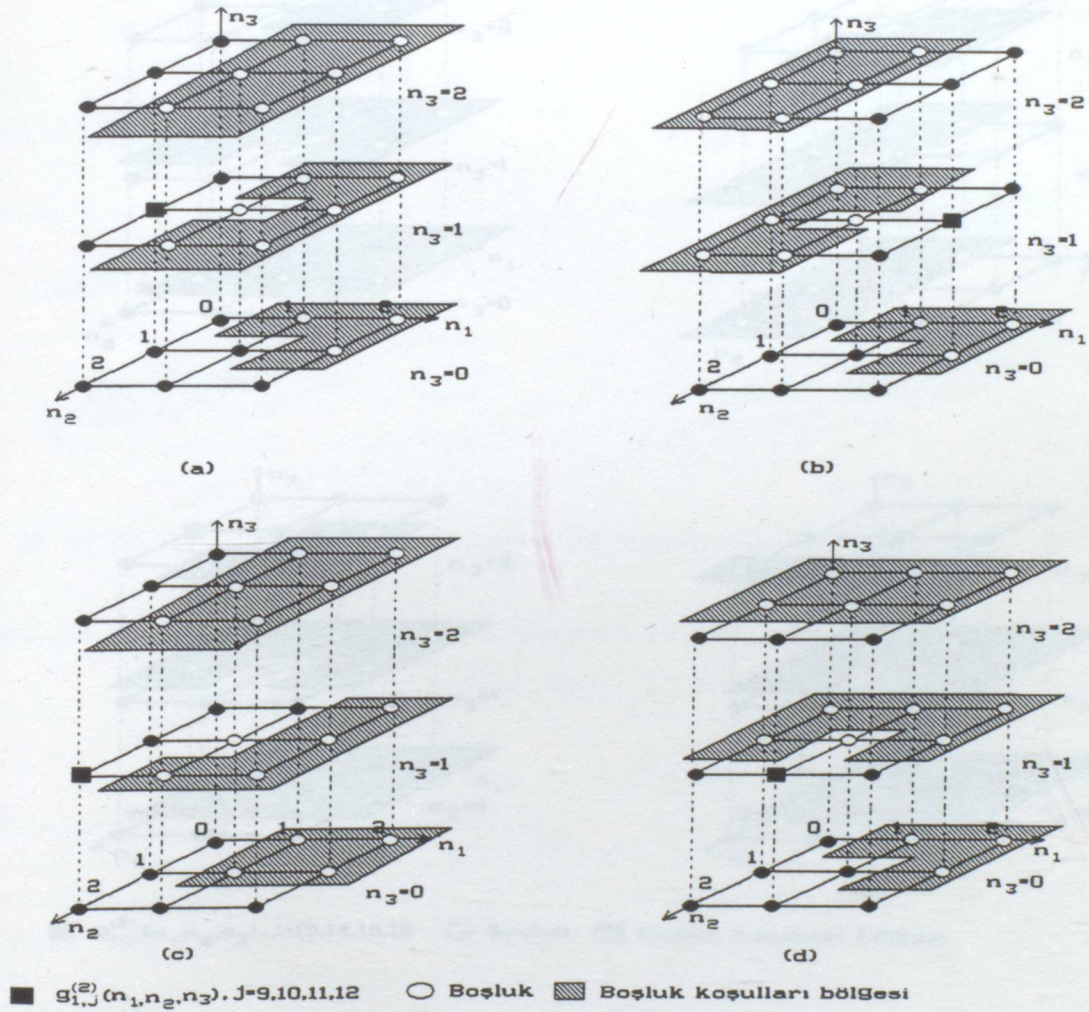
Şekil 6.4 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,3}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,4}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.



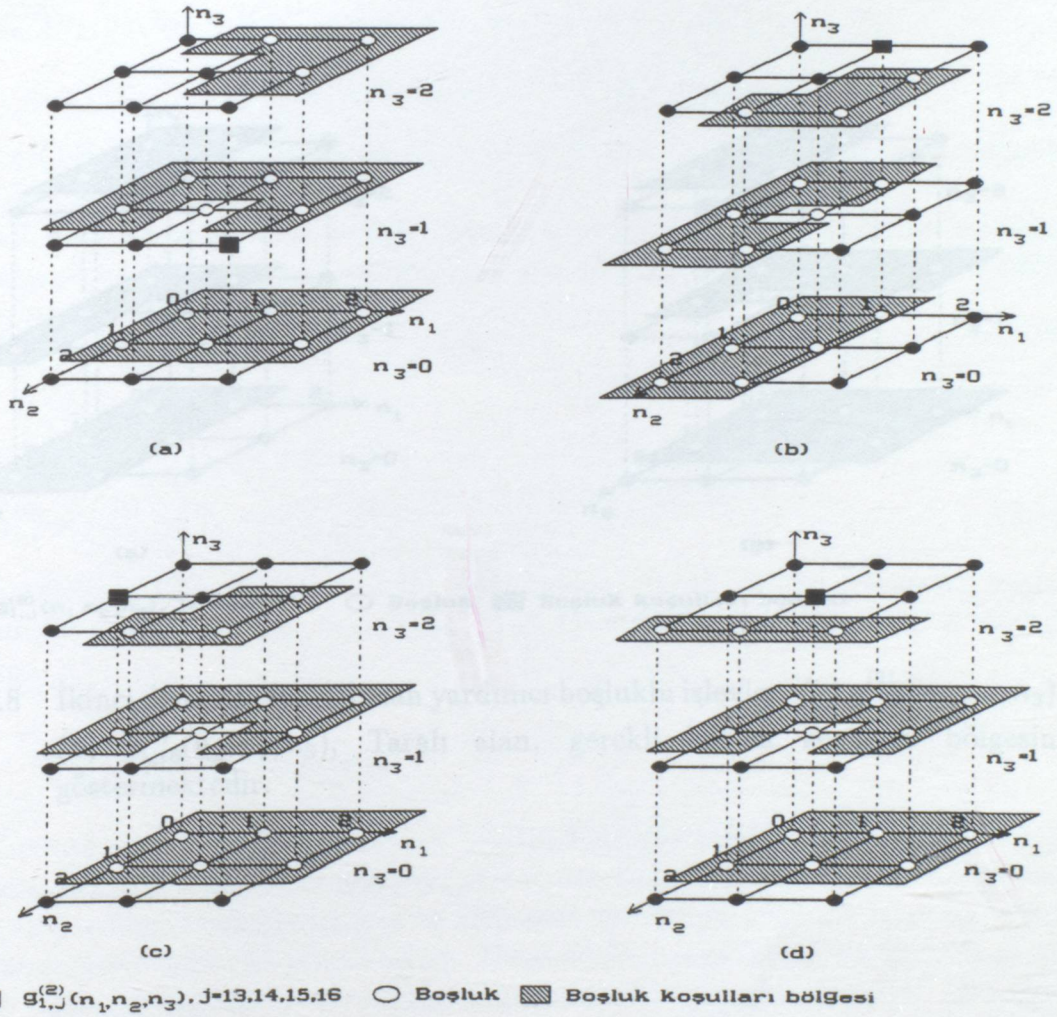


Şekil 6.5 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,5}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,6}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,7}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,8}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.





Şekil 6.6 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,9}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,10}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,11}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,12}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.



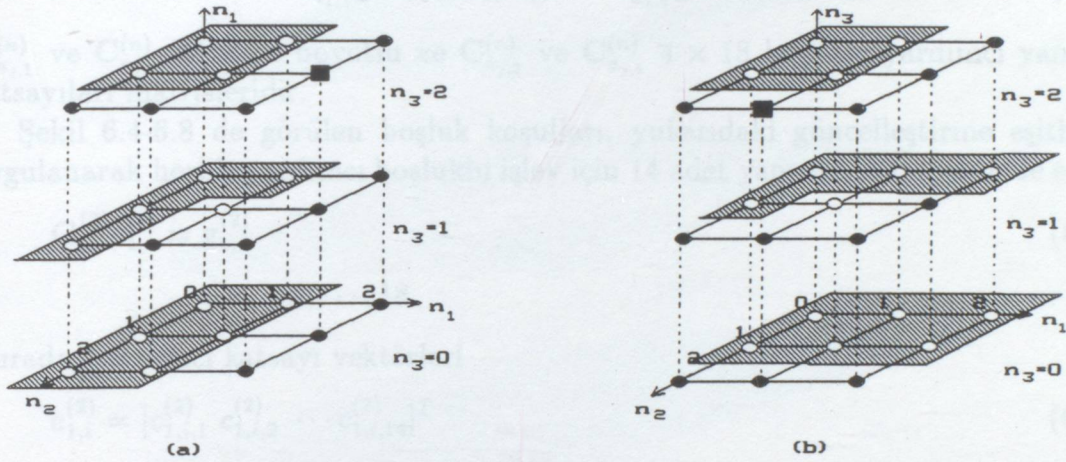
Şekil 6.7 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,13}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,14}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (c) $g_{1,15}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (d) $g_{1,16}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.



6.4 İkinci derece yardımcı boşluklu işlevlerin güncelleştirilmesi

İkinci derecede tanımlanan 18 adet optimal olmayan yardımcı boşluklu işlev üçüncü derecede kullanılmak üzere güncelleştirilmiştir. Şekil 6.4, Şekil 6.5, Şekil 6.6, Şekil 6.7 ve Şekil 6.8 de görülen ikinci derece yardımcı boşluklu işlevler 14 adet boşluk koşuluna sahiptir. Bu nedenle 14 adet yeni yardımcı yanıtma katsayıları tanımlanır. İkinci derece ileri-yönü boşluklu işlevler aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$g_{1,j}^{(2)}(n_1, n_2, n_3) = [C_{1,j}^{(2)} + J[g_{1,j}^{(1)}(n_1, n_2, n_3) + C_{1,j}^{(1)}g_{1,j}^{(0)}(n_1, n_2, n_3) + C_{1,j}^{(0)}g_{1,j}^{(-1)}(n_1, n_2, n_3) + C_{1,j}^{(-1)}g_{1,j}^{(-2)}(n_1, n_2, n_3) + C_{1,j}^{(-2)}g_{1,j}^{(-3)}(n_1, n_2, n_3)] \quad (6.49)$$



Şekil 6.8 İkinci derecede tanımlanan yardımcı boşluklu işlevler. (a) $g_{1,17}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, (b) $g_{1,18}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)$, Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir.



6.4 İkinci derece yardımcı boşluklu işlevlerin güncelleştirilmesi

İkinci derecede tanımlanan 18 adet optimal olmayan yardımcı boşluklu işlev üçüncü derecede kullanılmak üzere güncelleştirilmelidir. Şekil 6.4, Şekil 6.5 Şekil 6.6, Şekil 6.7 ve Şekil 6.8 de görülen ikinci derece yardımcı boşluklu işlevler 14 adet boşluk koşuluna sahiptir. Bu nedenle 14 adet yeni yardımcı yansıma katsayıları tanımlanır. İkinci derece ileri-yönlü boşluklu işlevler aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3) = & [\mathbf{C}_{a_{1,1}}^{(2)} + \mathbf{I}]\mathbf{g}_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{a_{1,2}}^{(2)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_1}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ & + \mathbf{C}_{a_{1,3}}^{(2)}\mathbf{g}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{a_{1,4}}^{(2)}\tilde{\mathbf{g}}^{(1)}(n_1, n_2, n_3)^* \end{aligned} \quad (6.49)$$

$\mathbf{C}_{a_{j,1}}^{(n)}$ ve $\mathbf{C}_{a_{j,2}}^{(n)}$ 18×18 boyutlu ve $\mathbf{C}_{a_{j,3}}^{(n)}$ ve $\mathbf{C}_{a_{j,4}}^{(n)}$ 4×18 boyutlu yardımcı yansıma katsayıları matrisleridir.

Şekil 6.4-6.8 de görülen boşluk koşulları, yukarıdaki güncelleştirme eşitliğine uygulanarak her bir yardımcı boşluklu işlev için 14 adet yansıma katsayısı elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1,i}^{(2)}\mathbf{c}_{1,i}^{(2)} &= \mathbf{g}_{1,i}^{(2)} \\ i &= 1, 2, \dots, 18 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Burada, yardımcı katsayı vektörleri

$$\mathbf{c}_{1,i}^{(2)} = [c_{1,i,1}^{(2)} \ c_{1,i,2}^{(2)} \ \dots \ c_{1,i,14}^{(2)}]^T \quad (6.51)$$

olarak verilir. Öte yandan, (6.49) eşitliğinden, ikinci derece yardımcı boşluk koşullarıyla çevrelenen $(n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 1)$ noktasının daima boşluk olacağı görülür.

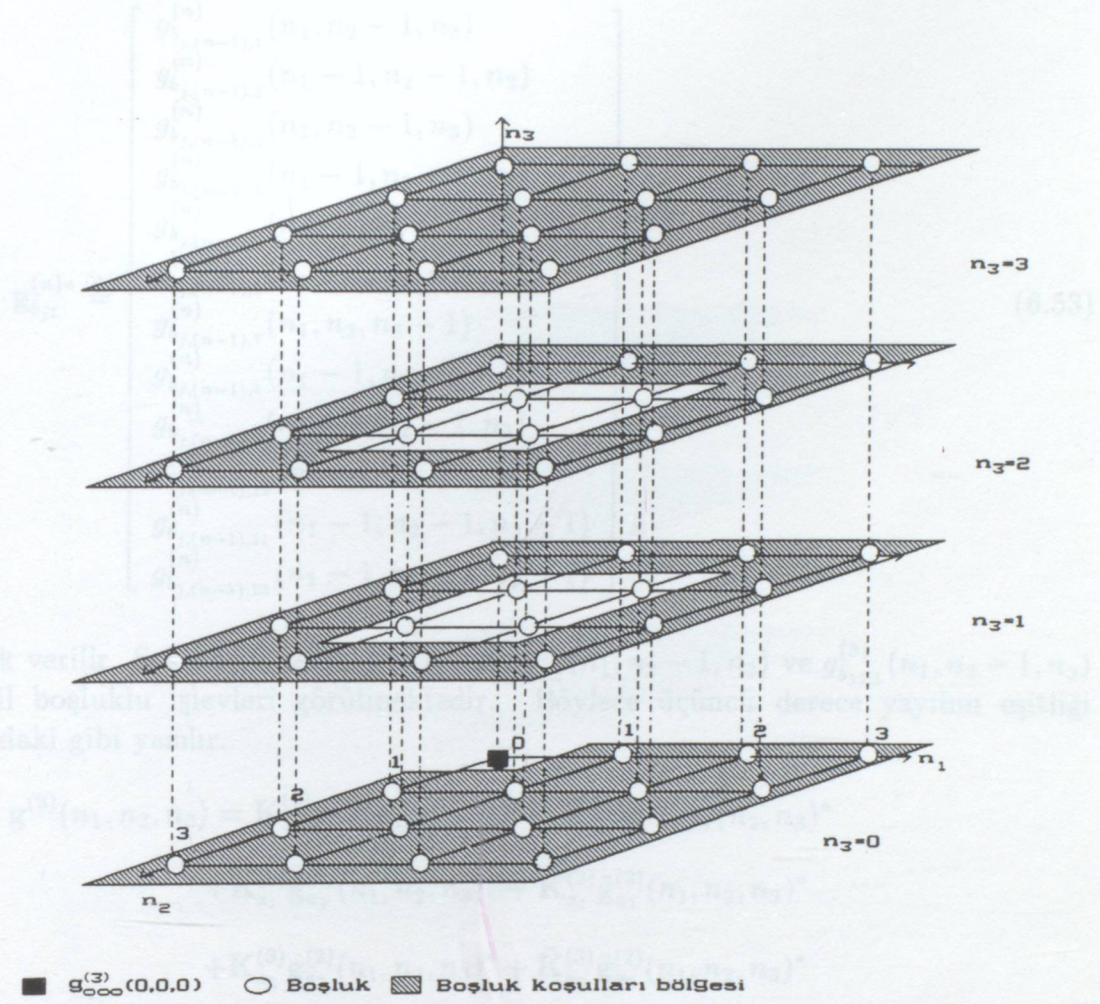
6.5 Üçüncü derece

Üçüncü derece boşluklu işlevler, Şekil 6.9 da gösterildiği gibi 55 adet boşluk koşuluna sahiptir. Bununla beraber, ikinci derecede tanımlanmış ve uzaya yeni katılacak yardımcı boşluklu işlevler ve yedi adet geri-yönlü boşluklu işlev bu boşluk koşullarını elde etmek için yeterli olmaz. Bu nedenle, uzaya ikincil yardımcı boşluklu işlevler adını verdiğimiz yeni yardımcı boşluklu işlevler eklenecektir. Bu ikincil yardımcı boşluklu işlevlerin sayısı 12 dir ve aşağıdaki başlangıç koşulları ile tanımlanırlar.

$$\begin{aligned} g_{b_{j,(n-1),1}}^{(n)} &= g_{j,3}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),2}}^{(n)} &= g_{j,1}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),3}}^{(n)} &= g_{j,12}^{(n)} \\ g_{b_{j,(n-1),4}}^{(n)} &= g_{j,8}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),5}}^{(n)} &= g_{j,2}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),6}}^{(n)} &= g_{j,6}^{(n)} \\ g_{b_{j,(n-1),7}}^{(n)} &= g_{j,9}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),8}}^{(n)} &= g_{j,7}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),9}}^{(n)} &= g_{j,18}^{(n)} \\ g_{b_{j,(n-1),10}}^{(n)} &= g_{j,17}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),11}}^{(n)} &= g_{j,15}^{(n)} & g_{b_{j,(n-1),12}}^{(n)} &= g_{j,14}^{(n)} \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$1 \leq j \leq (n-1)$$

Geciktirilmiş ikinci yardımcı boşluklu işlevler ise,



Şekil 6.9 Üçüncü derece birinci-kübik uzay boşluklu işlev $g_{000}^{(3)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Taralı alanda 55 adet boşluk koşulu vardır.



Geciktirilmiş ikincil yardımcı boşluklu işlevler ise,

$$\mathbf{g}_{b,l}^{(n)*} \triangleq \begin{bmatrix} g_{b,j,(n-1),1}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{b,j,(n-1),2}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{b,j,(n-1),3}^{(n)}(n_1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{b,j,(n-1),4}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{b,j,(n-1),5}^{(n)}(n_1, n_2, n_3 - 1) \\ g_{b,j,(n-1),6}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3) \\ g_{b,j,(n-1),7}^{(n)}(n_1, n_2, n_3 - 1) \\ g_{b,j,(n-1),8}^{(n)}(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1) \\ g_{b,j,(n-1),9}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{b,j,(n-1),10}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) \\ g_{b,j,(n-1),11}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \\ g_{b,j,(n-1),12}^{(n)}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

olarak verilir. Şekil 6.10 ve Şekil 6.11 de $g_{b_{11},1}^{(3)}(n_1, n_2 - 1, n_3)$ ve $g_{b_{11},1}^{(3)}(n_1, n_2 - 1, n_3)$ ikincil boşluklu işlevleri görülmektedir. Böylece üçüncü derece yayılım eşitliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) &= \mathbf{K}_1^{(3)} \mathbf{g}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{K}_2^{(3)} \tilde{\mathbf{g}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ &+ \mathbf{K}_{a_1}^{(3)} \mathbf{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \tilde{\mathbf{K}}_{a_1}^{(3)} \tilde{\mathbf{g}}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ &+ \mathbf{K}_{a_2}^{(3)} \mathbf{g}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \tilde{\mathbf{K}}_{a_2}^{(3)} \tilde{\mathbf{g}}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ &+ \mathbf{K}_{b_{1,1}}^{(3)} \mathbf{g}_{b_{1,1}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \tilde{\mathbf{K}}_{b_{1,1}}^{(3)} \tilde{\mathbf{g}}_{b_{1,1}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \end{aligned} \quad (6.54)$$

Yukarıda verilen, üçüncü derece yayılım eşitliğine, birinci-, ikinci-, üçüncü- ve dördüncü-küçük uzay boşluk koşulları uygulanarak, herbiri 55 değişkenli dört adet doğrusal bağımsız eşitlik kümesi elde edilir.

$$\mathbf{G}_1^{(3)} \mathbf{k}_1^{(3)} = \mathbf{g}_1^{(3)} \quad (6.55)$$

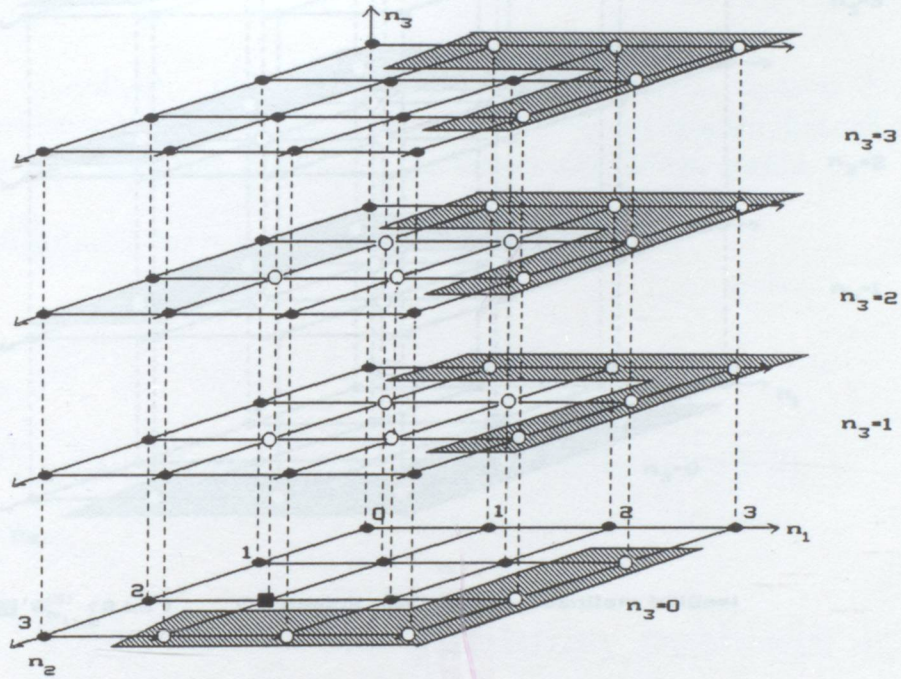
$$\mathbf{G}_2^{(3)} \mathbf{k}_2^{(3)} = \mathbf{g}_2^{(3)} \quad (6.56)$$

$$\mathbf{G}_3^{(3)} \mathbf{k}_3^{(3)} = \mathbf{g}_3^{(3)} \quad (6.57)$$

$$\mathbf{G}_4^{(3)} \mathbf{k}_4^{(3)} = \mathbf{g}_4^{(3)} \quad (6.58)$$

Burada, $\mathbf{k}_j^{(3)}$ yansıma katsayıları vektörü,



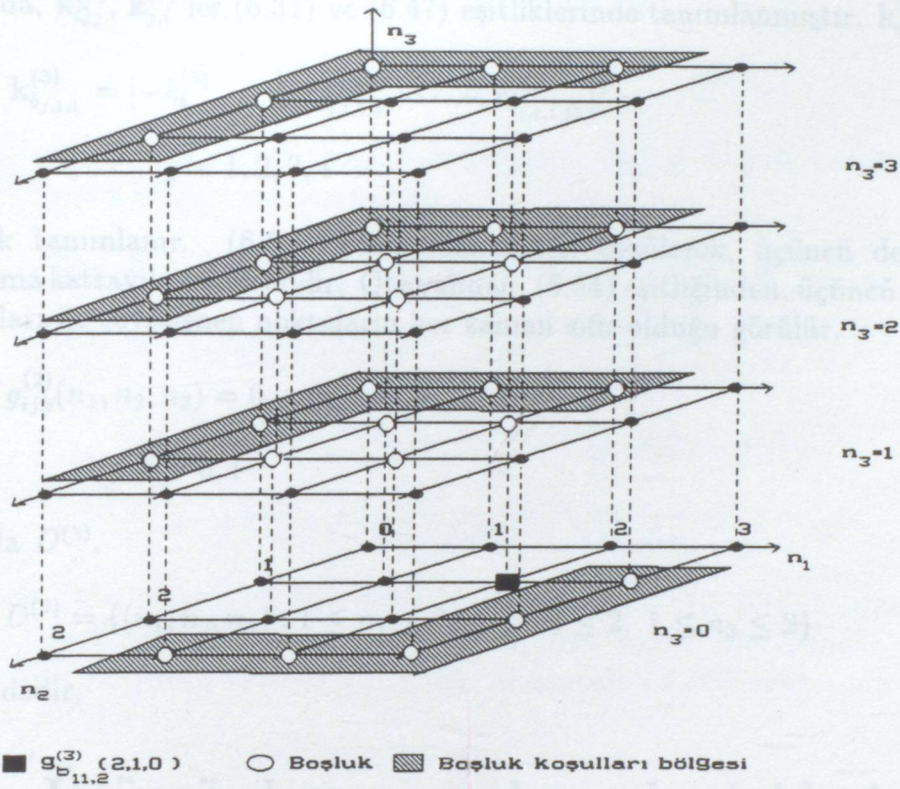


■ $g_{11.1}^{(3)} (1,2,0)$

○ Boşluk

▨ Boşluk koşulları bölgesi





Şekil 6.11 İkinci dereceden sonra tanımlanan ikincil boşluklu işlev $g_{b_{11,2}}^{(3)}(n_1, n_2, n_3)$. Taralı alan, gerekli boşluk koşulları bölgesini göstermektedir. Taralı alanda 20 adet boşluk koşulu vardır.



$$k_j^{(3)} = [k_{Qj}^{(3)} : k_{j,1}^{(3)} : k_{j,2}^{(3)} : k_{b_{j,1,1}}^{(3)}]^T \quad (6.59)$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

Burada, $k_{Qj}^{(n)}$, $k_{j,i}^{(3)}$ 'ler (6.31) ve (6.47) eşitliklerinde tanımlanmıştır. $k_{b_{j,1,1}}^{(3)}$ ise

$$k_{b_{j,1,1}}^{(3)} = [-k_{b_{j,1,1,1}}^{(3)} - k_{b_{j,1,1,2}}^{(3)} \dots - k_{b_{j,1,1,12}}^{(3)}]^T \quad (6.60)$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

olarak tanımlanır. (6.55)-(6.58) denklemleri çözülerek, üçüncü dereceye ilişkin yansıma katsayıları elde edilir. Öte yandan, (6.54) eşitliğinden, üçüncü derece boşluk koşulları ile çevrelenen noktaların her zaman sıfır olduğu görülür.

$$g_{ijk}^{(2)}(n_1, n_2, n_3) = 0 \quad (n_1, n_2, n_3) \in D^{(3)} \quad (6.61)$$

$$i, j, k = 0, 1$$

burada $D^{(3)}$,

$$D^{(3)} = \{(n_1, n_2, n_3) : 1 \leq n_1 \leq 2, 1 \leq n_2 \leq 2, 1 \leq n_3 \leq 2\} \quad (6.62)$$

şeklinde dir.

6.6 Üçüncü derece yardımcı boşluklu işlevlerin güncelleştirilmesi

Üçüncü derecede tanımlanan 48 adet yardımcı boşluk işlevi (36 adet birincil, 12 adet ikincil yardımcı boşluk işlevi) dördüncü derecede kullanılmak üzere güncelleştirilmelidir. Yardımcı boşluklu işlevlere ilişkin boşluk koşullarını sağlamak üzere, üçüncü derecede yinelemeli yayılım eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} g_{a_1}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) = & [C_{a_1,1}^{(3)} + I]g_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + C_{a_1,2}^{(3)}\tilde{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ & + C_{a_1,3}^{(3)}g^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + C_{a_1,4}^{(3)}\tilde{g}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ & + \bar{C}_{a_2,1}^{(3)}g_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \bar{C}_{a_2,2}^{(3)}\tilde{g}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\ & + C_{b_{1,11,1}}^{(3)}g_{b_{11}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + C_{b_{1,11,2}}^{(3)}\tilde{g}_{b_{11}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \end{aligned} \quad (6.63)$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{a_2}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) &= [\mathbf{C}_{a_2,1}^{(3)} + \mathbf{I}]\mathbf{g}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{a_2,2}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
&+ \mathbf{C}_{a_2,3}^{(3)}\mathbf{g}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{a_2,4}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
&+ \bar{\mathbf{C}}_{a_1,1}^{(3)}\mathbf{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \bar{\mathbf{C}}_{a_1,2}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
&+ \mathbf{C}_{b_{1,11,1}}^{(3)}\mathbf{g}_{b_{11}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{b_{1,11,2}}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}_{b_{11}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \quad (6.64)
\end{aligned}$$

ve üçüncü derece ikincil boşluk koşullarına ilişkin boşluk koşullarını bölgesini destekleyecek şekilde yayılım eşitliği,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{b_{11}}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) &= [\mathbf{C}_{bb_{11,1}}^{(3)} + \mathbf{I}]\mathbf{g}_{b_{11}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{bb_{11,2}}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}_{b_{11}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
&+ \mathbf{C}_{bb_{11,3}}^{(3)}\mathbf{g}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{bb_{11,4}}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
&+ \mathbf{C}_{ba_{1,1}}^{(3)}\mathbf{g}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{ba_{1,2}}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_1}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
&+ \mathbf{C}_{ba_{2,1}}^{(3)}\mathbf{g}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{ba_{2,2}}^{(3)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_2}^{(2)}(n_1, n_2, n_3)^* \quad (6.65)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (6.65) eşitliğine ikincil yardımcı boşluk koşulları uygulanarak ikincil yardımcı yansıma katsayıları elde edilir. Öte yandan, (6.63)-(6.63) eşitliklerinden yardımcı boşluk koşulları ile çevrelenen $D^{(3)}$ bölgesinin daima boşluk olacağı görülür.

6.7 N. derece

Birinci, ikinci ve üçüncü derecede elde edilen yayılım eşitliklerinden hareketle, birinci-,ikinci-,üçüncü- ve dördüncü-kübik boşluklu işlevler için dereceden dereceye tek bir yayılım eşitliği elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{(N)}(n_1, n_2, n_3) &= \mathbf{K}_1^{(N)}\mathbf{g}^{(N-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{K}_2^{(N)}\tilde{\mathbf{g}}^{(N-1)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} [(\mathbf{K}_{a_j}^{(3)}\mathbf{g}_{a_j}^{(N-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \tilde{\mathbf{K}}_{a_j}^{(N)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_j}^{(N-1)}(n_1, n_2, n_3)^*) \\
&+ \sum_{l=j}^{N-2} (\mathbf{K}_{b_{jl}}^{(N)}\mathbf{g}_{b_{jl}}^{(N-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \tilde{\mathbf{K}}_{b_{jl}}^{(N)}\tilde{\mathbf{g}}_{b_{jl}}^{(N-1)}(n_1, n_2, n_3)^*)] \quad (6.66)
\end{aligned}$$

N. derecede, her bir kübik-uzay boşluklu işlevi $(N+1)^3 - (N-1)^3 - 1$ adet boşluk koşuluna sahiptir. Şekil 6.1 de birinci-kübik uzay boşluklu işlevi için boşluk koşulları bölgesi görülmektedir. N. derece boşluk koşullarını, N .derece yayılım eşitliğine uygulayacak olursak herbiri $(N+1)^3 - (N-1)^3 - 1 = 6N^2 + 1$ değişkenli dört adet doğrusal bağımsız eşitlik kümesi elde edilir.

$$\mathbf{G}_1^{(N)} \mathbf{k}_1^{(N)} = \mathbf{g}_1^{(N)} \quad (6.67)$$

$$\mathbf{G}_2^{(N)} \mathbf{k}_2^{(N)} = \mathbf{g}_2^{(N)} \quad (6.68)$$

$$\mathbf{G}_3^{(N)} \mathbf{k}_3^{(N)} = \mathbf{g}_3^{(N)} \quad (6.69)$$

$$\mathbf{G}_4^{(N)} \mathbf{k}_4^{(N)} = \mathbf{g}_4^{(N)} \quad (6.70)$$

Burada, $\mathbf{G}_j^{(N)}$ $(6N^2 + 1) \times (6N^2 + 1)$ boyutlu boşluk matrisi, $\mathbf{k}_j^{(N)}$ $(6N^2 + 1) \times 1$ boyutlu yansıma katsayıları vektörü ve $\mathbf{g}_j^{(N)}$ $(6N^2 + 1) \times 1$ boyutlu boşluk vektörüdür. Burada, $\mathbf{k}_j^{(N)}$ ler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_j^{(N)} = & [\mathbf{k}_{Qj}^{(N)} : \mathbf{k}_{j,1}^{(N)} : \dots : \mathbf{k}_{j,N-1}^{(N)} : \mathbf{k}_{b,j,1,1}^{(N)} : \mathbf{k}_{b,j,2,1}^{(N)} : \mathbf{k}_{b,j,2,2}^{(N)} \\ & : \mathbf{k}_{b,j,3,1}^{(N)} : \dots : \mathbf{k}_{b,j,3,3}^{(N)} : \dots : \mathbf{k}_{b,j,N-2,1}^{(N)} : \dots : \mathbf{k}_{b,j,N-2,N-2}^{(N)}]^T \\ & j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (6.71)$$

Burada,

$$\mathbf{k}_{b,j,k,l}^{(3)} = [-k_{b,j,k,l,1}^{(3)} \quad -k_{b,j,k,l,2}^{(3)} \quad \dots \quad -k_{b,j,k,l,12}^{(3)}]^T \quad (6.72)$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

(6.67)-(6.70) denklemleri çözülerek, N. dereceye ilişkin yansıma katsayıları elde edilir. Öte yandan, (6.66) eşitliğinden, N. derece boşluk koşulları ile çevrelenen noktaların her zaman sıfır olduğu görülür.

$$g_{ijk}^{(2)}(n_1, n_2, n_3) = 0 \quad (n_1, n_2, n_3) \in D^{(N)} \quad (6.73)$$

$$i, j, k = 0, 1$$

burada $D^{(N)}$,

$$D^{(N)} = \{(n_1, n_2, n_3) : 1 \leq n_1 \leq N-1, 1 \leq n_2 \leq N-1, 1 \leq n_3 \leq N-1\} \quad (6.74)$$

şeklindedir.

Öte yandan N. derece için, N+1. derecede kullanılmak üzere, birincil ve ikincil yardımcı boşluklu işlevlerin güncelleştirilmesi aşağıdaki yayılım eşitlikleri ile belirlenir.



Birincil yardımcı boşluklu işlevler için:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{a_j}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) &= [\mathbf{C}_{a_j,1}^{(n)} + \mathbf{I}]\mathbf{g}_{a_j}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{a_j,2}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_j}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
 &+ \mathbf{C}_{a_j,3}^{(n)}\mathbf{g}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{a_j,4}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
 &+ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{ve (l \neq j)} (\bar{\mathbf{C}}_{a_l,1}^{(n)}\mathbf{g}_{a_l}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \bar{\mathbf{C}}_{a_l,2}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_l}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^*) \\
 &+ \sum_{q=1}^{n-2} \sum_{p=1}^q (\mathbf{C}_{b_j,pq,1}^{(n)}\mathbf{g}_{b_pq}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{b_j,pq,2}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}_{b_pq}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^*) \quad (6.75)
 \end{aligned}$$

İkincil yardımcı boşluklu işlevler için:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{b_pq}^{(n)}(n_1, n_2, n_3) &= [\mathbf{C}_{bb_{pq},1}^{(n)} + \mathbf{I}]\mathbf{g}_{b_pq}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{bb_{pq},2}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}_{b_pq}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
 &+ \mathbf{C}_{bb_{pq},3}^{(n)}\mathbf{g}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{bb_{pq},4}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* \\
 &+ \sum_{l=1}^{n-1} (\mathbf{C}_{ba_l,1}^{(n)}\mathbf{g}_{a_l}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \mathbf{C}_{ba_l,2}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}_{a_l}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^*) \\
 &+ \sum_{t=1}^{n-2} \sum_{s=1}^t (\bar{\mathbf{C}}_{bb_{st},1}^{(n)}\mathbf{g}_{b_{st}}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^* + \bar{\mathbf{C}}_{bb_{st},2}^{(n)}\tilde{\mathbf{g}}_{b_{st}}^{(n-1)}(n_1, n_2, n_3)^*) \quad (6.76)
 \end{aligned}$$

Geliştirilen 3-B schur algoritması, 2-B Schur algoritmasından doğrudan genişletilerek elde edilmiştir. 3-B kübik uzay destekli AR sürece ilişkin ilişki örnekleri doğrudan kafes süzgeç girişine uygulanır. Artan derecelerde kübik olarak artan sayıdaki AR parametrelerini modelleyebilmek için birincil ve ikincil yardımcı boşluklu işlevler tanımlanır. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta da, n. derece bir boşluklu işlevin $D^{(n)}$ ile belirtilen noktalarının daima boşluk olmasından dolayı, bu noktaların boşluk koşulu olarak değerlendirilmemesidir. Bu da tanımlanacak yansıma katsayılarının sayısında belirgin bir azalmaya neden olur. Bununla beraber, artan derecelerde yardımcı hata alanlarına ilişkin yardımcı yansıma katsayıları tanımlanır.



7. DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRMA

7.1 Giriş

Bu bölümde geliştirilen kafes süzgeç yapısının geçerliliği ve etkinliği bilgisayar benzetimleri ile incelenecek ve literatürde mevcut diğer dört-alanlı kafes süzgeç algoritmaları ile başarımlar karşılaştırılması yapılacaktır. Kafes süzgeç parametrelerinin elde edilmesinde, 2-B Schur ve 2-B enküçük-kareler yinelenemeli kafes süzgeç algoritmaları ayrı ayrı kullanılmıştır.

7.2 2-B AR Modelleme Üzerine Bir Örnek

Bu kısımda, 2-B Schur ve yinelenemeli enküçük-kareler algoritmalarının geçerliliğini gösterebilmek için bir bilgisayar uygulaması gerçekleştirilmiştir. Uygulamada 2-B veri alanı 3. derece ayrıştırılamaz bir AR süreç kullanılarak elde edilir. 2-B çeyrek-düzlem AR model varyansı 1 olan bir beyaz Gauss gürültüsü ile sürülür. Modellemede kullanılan 2-B veri alanının boyutları 75×75 dir. Öte yandan, 2-B Schur algoritmasında kafes süzgeç girişine uygulanacak örnek özilişkiler bu veri alanını kullanarak aşağıdaki bağıntı ile elde edilmiştir.

$$\hat{R}(n_1, n_2) = \frac{1}{K_1 K_2} \sum_{k_1=0}^{K_1-1-n_1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1-n_2} y(k_1, k_2) y(k_1 + n_1, k_2 + n_2) \quad (7.1)$$

$$-N_1 \leq n_1 \leq N_1 \text{ ve } 0 \leq n_2 \leq N_2$$

Burada yalnızca birinci ve ikinci-çeyrek düzlem ilişki örnekleri gereklidir. Modellemede kullanılan veri alanının üretildiği 3. derece 2-B çeyrek-düzlem AR model aşağıdaki fark denklemiyle verilir.



$$\begin{aligned}
y(k_1, k_2) = & 0.1y(k_1, k_2 - 1) - 0.1y(k_1, k_2 - 2) + 0.1y(k_1, k_2 - 3) \\
& - 0.1y(k_1 - 1, k_2) + 0.1y(k_1 - 1, k_2 - 1) - 0.1y(k_1 - 1, k_2 - 2) \\
& + 0.1y(k_1 - 1, k_2 - 3) - 0.1y(k_1 - 2, k_2) + 0.1y(k_1 - 2, k_2 - 1) \\
& - 0.1y(k_1 - 2, k_2 - 2) + 0.1y(k_1 - 2, k_2 - 3) - 0.1y(k_1 - 3, k_2) \\
& + 0.1y(k_1 - 3, k_2 - 1) - 0.1y(k_1 - 3, k_2 - 2) + 0.1y(k_1 - 3, k_2 - 3) \\
& - 0.1y(k_1 - 3, k_2) + 0.1y(k_1 - 3, k_2 - 1) - 0.1y(k_1 - 3, k_2 - 2) \\
& + 0.1y(k_1 - 3, k_2 - 3) + w(k_1, k_2)
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Burada $w(k_1, k_2)$ beyaz Gauss gürültüsüdür ve bir Gauss rasgele üretici kullanılarak üretilir. Modele ilişkin geçiş işlevi katsayı matrisi (7.2) eşitliğinden de görülebileceği gibi, aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\mathbf{A}_{FQ} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Öngörü örneğinde, öncelikle 2-B Schur algoritmasında elde edilen sonuçları inceleyerek, algoritmanın geçerliliği gösterilecektir. $N_1 = N_2 = 3$ için 75×75 boyutlu veri alanı kullanılarak (7.1) bağıntısından elde edilen ilişkiler Tablo 7.1 de görülmektedir.

Tablo 7.1 Örnek özilişkiler

n_1	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_2							
0	0.1279	-0.0675	0.0304	1.0997	0.0304	-0.0675	0.1279
1	-0.0550	0.0794	-0.0732	0.0662	0.0133	-0.0407	-0.0126
2	0.0283	-0.0355	0.0669	-0.0674	-0.0283	0.0705	-0.0078
3	-0.0125	0.0646	-0.0819	0.0928	-0.0002	-0.0129	0.0185

Birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem için, Üçüncü dereceye ilişkin model katsayıları Tablo 7.1 de verilen ilişki değerleri (2.132) ve (2.133) de verilen normal eşitliklerin çözümü ile aşağıdaki gibi bulunur.

Birinci-çeyrek düzlem için:

$$\hat{\mathbf{A}}_{FQ} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.1190 & 0.0998 & -0.1026 \\ -0.0913 & 0.1086 & -0.0962 & 0.1063 \\ 0.0916 & -0.1049 & 0.0810 & -0.1172 \\ -0.1279 & 0.0912 & -0.0898 & 0.0974 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

ve ikinci-çeyrek düzlem için:

$$\hat{A}_{SQ} = \begin{bmatrix} -0.1343 & 0.0351 & -0.0140 & 0.0102 \\ 0.0822 & 0.0083 & -0.0395 & -0.0032 \\ -0.0595 & 0.0238 & 0.0003 & 0.0199 \\ 1.0000 & -0.0936 & 0.0848 & -0.1079 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Birinci, ikinci ve üçüncü derece için, 2-B Schur algoritmasıyla elde edilen kafes süzgeç parametreleri sırasıyla Tablo 7.2, 7.3 ve 7.4 de görülmektedir. Tablo 7.4, de görüldüğü gibi, yardımcı kafes süzgeç parametreleri 3. derece için hesaplanmamıştır, çünkü bu katsayılar 4. ve yüksek derecelerde kullanılacaktır. Tablo 7.2, 7.3 ve 7.4 te 2-B Schur algoritması ile elde edilen kafes süzgeç parametrelerini göstermektedir.

Tablo 7.2 Kafes süzgeç parametreleri

n	1	2	3
$k_{10}^{(n)}$	0.06178	-0.06140	0.12480
$k_{11}^{(n)}$	-0.07014	-0.05388	-0.07861
$k_{01}^{(n)}$	0.03166	-0.06168	0.09877
$\tilde{k}_{10}^{(n)}$	0.03130	-0.06245	0.1331
$\tilde{k}_{11}^{(n)}$	0.00850	0.06001	-0.00779
$\tilde{k}_{01}^{(n)}$	0.06206	-0.06292	0.1061

Tablo 7.3 Kafes süzgeç parametreleri

n	1	2	3
$k_{1,1}^{(n)}$	-	0.07901	0.06850
$k_{1,2}^{(n)}$	-	0.07067	0.10054
$k_{1,3}^{(n)}$	-	0.01243	-0.02756
$k_{1,4}^{(n)}$	-	0.01266	-0.02328
$\tilde{k}_{1,1}^{(n)}$	-	0.00588	-0.01217
$\tilde{k}_{1,2}^{(n)}$	-	-0.02043	0.00359
$\tilde{k}_{1,3}^{(n)}$	-	-0.02863	-0.00509
$\tilde{k}_{1,4}^{(n)}$	-	0.00534	-0.01298
$k_{2,1}^{(n)}$	-	-	-0.8068
$k_{2,2}^{(n)}$	-	-	-0.09984
$k_{2,3}^{(n)}$	-	-	0.03474
$k_{2,4}^{(n)}$	-	-	0.03776
$\tilde{k}_{2,1}^{(n)}$	-	-	0.01516
$\tilde{k}_{2,2}^{(n)}$	-	-	-0.02413
$\tilde{k}_{2,3}^{(n)}$	-	-	-0.01309
$\tilde{k}_{2,4}^{(n)}$	-	-	0.01270



Tablo 7.4 Yardımcı kafes süzgeç parametreleri

i	1	2	3	4	5
$\alpha_{1,i}^{(2)}$	-0.06677	-0.07297	-0.01061	0.07991	-0.03070
$\beta_{1,i}^{(2)}$	-0.07196	-0.01482	-0.06664	0.06571	-0.02174
$\gamma_{1,i}^{(2)}$	-0.00040	0.00166	-0.05965	0.08320	-0.03809
$\lambda_{1,i}^{(2)}$	-0.00036	0.00145	-0.06392	0.07326	-0.02689

Tablo 7.2, 7.3 ve 7.4 de verilen kafes süzgeç yansıma katsayıları kullanılarak birinci- ve ikinci çeyrek düzlem öngörü hata süzgeçleri ve yardımcı öngörü hata süzgeçleri katsayı matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

1. derece katsayı matrisleri:

$$\mathbf{A}_{FQ}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0618 \\ -0.0312 & 0.0701 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{SQ}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.0313 & -0.0085 \\ 1.0000 & -0.0621 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

2. derece katsayı matrisleri:

$$\mathbf{A}_{FQ}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0780 & 0.0625 \\ -0.0457 & 0.0809 & -0.0745 \\ 0.0618 & -0.0864 & 0.0610 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{A}_{SQ}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0626 & 0.0300 & -0.0624 \\ -0.0386 & -0.0008 & 0.0224 \\ 1.0000 & -0.0718 & 0.0633 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

ve

$$\mathbf{A}_{1,1}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0822 & 0.0699 & 0.0262 \\ 0.0755 & -0.0444 & 0.0058 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0621 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1,2}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0723 & 0.0755 & 0.0000 \\ 0.0684 & -0.0737 & 1.0000 \\ -0.0208 & 0.0050 & -0.0313 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$\mathbf{A}_{1,3}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & -0.0618 \\ 0.0013 & -0.0390 & 0.0731 \\ 0.0345 & 0.0623 & -0.0823 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1,4}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0014 & 0.0250 \\ 1.0000 & -0.0710 & 0.0652 \\ -0.0312 & 0.0750 & -0.0723 \end{bmatrix}$$



3. derece katsayı matrisleri

$$A_{FQ}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.1190 & 0.0998 & -0.1026 \\ -0.0913 & 0.1086 & -0.0962 & 0.1063 \\ 0.0916 & -0.1049 & 0.0810 & -0.1172 \\ -0.1279 & 0.0912 & -0.0898 & 0.0974 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

$$A_{SQ} = \begin{bmatrix} -0.1343 & 0.0351 & -0.0140 & 0.0102 \\ 0.0822 & 0.0083 & -0.0395 & -0.0032 \\ -0.0595 & 0.0238 & 0.0003 & 0.0199 \\ 1.0000 & -0.0936 & 0.0848 & -0.1079 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

2-B Schur algoritması kullanılarak elde edilen 3. derece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlem katsayı matrisleri ((7.10)-(7.11)) ile normal denklemlerin çözümü ile elde edilen katsayı matrislerini ((7.4)-(7.5)) karşılaştıracak olursak, tamamen aynı olduklarını görürüz. Buradan da 2-B Schur algoritmasının öngörü hata süzgeci katsayılarını tam olarak belirlediği ortaya çıkar. Ayrıca Tablo 7.5 de, üç derece için birinci-çeyrek düzlem boşluklu işlevin boşluk $D_{FQ}^{(n)}$ ile verilen boşluk noktalarını sağladığı görülmektedir.

Tablo 7.5 Üçüncü derece birinci-çeyrek düzlem boşluklu işlev $g_{FQ}^{(3)}(n_1, n_2)$ 'nin değerleri

n_1	$\dots$	-1	0	1	2	3	4 $\dots$
n_2							
$\vdots$				$\vdots$			
4		-0.0028	-0.0039	0.0124	-0.0309	0.0483	-0.0354
3		0.0099	0	0	0	0	0.0524
2		-0.0107	0	0	0	0	-0.0229
1		-0.0295	0	0	0	0	-0.0095
0		0.0813	0.9996	0	0	0	-0.0028
-1		0.0101	0.01171	-0.0316	-0.0212	-0.0073	-0.0030
$\vdots$				$\vdots$			

Doğrudan doğruya veri örnekleri üzerinde işlem yapan 2-B yinelemeli enküçük-kareler algoritması (YEK) aynı ayrıştırılamaz 3. derece AR süreç üzerine uygulanmış ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 7.6 2-B YEK kafes süzgeç algoritmasıyla elde edilen kafes süzgeç parametreleri

n	1	2	3
$k_{10}^{(n)}$	0.06178	-0.06140	0.12480
$k_{11}^{(n)}$	-0.07014	-0.05388	-0.07861
$k_{01}^{(n)}$	0.03166	-0.06168	0.09877
$\tilde{k}_{10}^{(n)}$	0.03130	-0.06245	hesaplanmadı.
$\tilde{k}_{11}^{(n)}$	0.00850	0.06001	hesaplanmadı.
$\tilde{k}_{01}^{(n)}$	0.06206	-0.06292	hesaplanmadı.

Tablo 7.7 2-B YEK kafes süzgeç algoritmasıyla elde edilen kafes süzgeç parametreleri

n	1	2	3
$k_{1,1}^{(n)}$	-	0.07901	0.06850
$k_{1,2}^{(n)}$	-	0.07067	0.10054
$k_{1,3}^{(n)}$	-	0.01243	-0.02756
$k_{1,4}^{(n)}$	-	0.01266	-0.02328
$\tilde{k}_{1,1}^{(n)}$	-	0.00588	hesaplanmadı.
$\tilde{k}_{1,2}^{(n)}$	-	-0.02043	hesaplanmadı.
$\tilde{k}_{1,3}^{(n)}$	-	-0.02863	hesaplanmadı.
$\tilde{k}_{1,4}^{(n)}$	-	0.00534	hesaplanmadı.
$k_{2,1}^{(n)}$	-	-	-0.8068
$k_{2,2}^{(n)}$	-	-	-0.09984
$k_{2,3}^{(n)}$	-	-	0.03474
$k_{2,4}^{(n)}$	-	-	0.03776

Tablo 7.8 2-B YEK kafes süzgeç algoritmasıyla elde edilen yardımcı kafes süzgeç parametreleri

i	1	2	3	4	5
$\alpha_{1,i}^{(2)}$	-0.06677	-0.07297	-0.01061	0.07991	-0.03070
$\beta_{1,i}^{(2)}$	-0.07196	-0.01482	-0.06664	0.06571	-0.02174
$\gamma_{1,i}^{(2)}$	-0.00040	0.00166	-0.05965	0.08320	-0.03809
$\lambda_{1,i}^{(2)}$	-0.00036	0.00145	-0.06392	0.07326	-0.02689

Bu katsayıları kullanarak YEK kafes süzgeç algoritmasının öngördüğü öngörü hata süzgeci katsayı matrisleri derece derece aşağıdaki gibi olacaktır.

1. derece katsayı matrisleri:

$$\mathbf{A}_{FQ}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.03227 \\ -0.05920 & 0.06224 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{SQ}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.05938 & -0.02416 \\ 1.0000 & -0.03236 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

2. derece katsayı matrisleri:

$$\mathbf{A}_{FQ}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.04619 & 0.07772 \\ -0.07401 & 0.07131 & -0.06266 \\ 0.05875 & -0.07926 & 0.08717 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{SQ}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.05975 & -0.01346 & -0.02479 \\ -0.06704 & -0.01586 & 0.01114 \\ 1.0000 & -0.03861 & 0.07904 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

ve



3. derece birinci-çeyrek düzlem katsayı matrisi:

$$\mathbf{A}_{FQ}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.08690 & 0.11006 & -0.09730 \\ -0.11813 & 0.10349 & -0.08527 & 0.10814 \\ 0.08993 & -0.10227 & 0.10565 & -0.11329 \\ -0.10335 & 0.09020 & -0.10363 & 0.09737 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Elde edilen sonuçlardan görülebileceği gibi 2-B Schur algoritması herhangi bir 2-B çeyrek düzlem AR sistemi tam olarak modelleyebilmektedir. Ancak, elde edilen sonuçların doğruya yakın olması Schur algoritmasına girilen ilişki örneklerinin gerçeğe yakın olmasına bağlıdır. AR sürece ilişkin ilişki örnekleri bilinmiyorsa, ilişki örnekleri veri alanından (7.1) bağıntısıyla elde edilecektir. Bu durumda ilişki örneklerinin doğruluğu veri alanının boyutuna ve ergodikliğe bağlıdır. YEK kafes süzgeç algoritması bu açıdan Schur algoritmasına karşı, veri örneklerini doğrudan kullanma avantajına sahiptir ve daha az sayıda veri ile daha başarılı bir sonuca ulaşır. Elde edilen sonuçları daha iyi değerlendirebilmek için çeşitli yöntemler kullanılabilir. Burada, sonuçların karşılaştırılmasını üç değişik yöntemle göre yapacağız. Bunlar;

a) Itakura LPC Uzaklık Ölçütü: İki model katsayıları kümesi arasındaki uzaklık ölçümleri, model katsayıları kümelerinin birbirine benzerliğinin ölçüsü olarak kullanılabilir. Itakura LPC uzaklık ölçütü, verilen iki AR model parametresi kümesinin birbirine benzerliğini gösterir. Karşılaştırmada, test edilen AR model katsayıları matrisi ($\mathbf{A}_T$) ve orijinal AR model katsayıları matrisi ($\mathbf{A}_R$), ölçüte girilir. Her iki katsayı kümesine ilişkin spektrumların etkin bir şekilde karşılaştırılmasını sağlayan Itakura LPC uzaklık ölçütü, iki boyut için aşağıdaki bağıntı ile verilir.

$$d(\mathbf{A}_T, \mathbf{A}_R) = \log \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\mathbf{A}_R(\omega_1, \omega_2)}{\mathbf{A}_T(\omega_1, \omega_2)} \right|^2 \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \right] \quad (7.15)$$

Eğer model katsayıları birbirine eşit ise uzaklık sıfır olacaktır. Spektrumlar farklılaştıkça uzaklık büyür.

b) Katsayı matrisleri farkının normu: Bir vektörün normu o vektörün uzunluğunun bir ölçüsüdür. Öte yandan, bir matrisin normu matrisin büyüklüğünün bir ölçüsü olan matrise ilişkin bir sayıdır. Herhangi bir doğrusal uzay için, norm olabilmeye koşullarını sağlayan birden fazla norm mevcuttur (Haykin, 1986). Buradaki karşılaştırmada, orijinal AR katsayı matrisi ile elde edilen AR katsayı matrisi arasındaki fark katsayıları matrisine ilişkin norm elde edilecektir. Karşılaştırmada pratikte en çok kullanılan 4 farklı norm kullanılacaktır. Bunlar;

Spektral norm veya l_2 norm: Fark matrisinin en büyük tekil değeridir.

l_1 norm: Fark matrisinin en büyük kolon toplamıdır.

Sonsuz norm veya l_{∞} norm: Fark matrisinin en büyük satır toplamıdır.



Frobenius norm: $\sqrt{\sum \text{Diag}(\mathbf{A}_F^T \mathbf{A}_F)}$ olarak verilir.

Fark katsayıları matrisinin normu büyüdükçe öngörünün doğruluğu azalır.

c) **Spektrum ve spektruma ilişkin ara kesit çizimleri:** Bu çizimler aracılığıyla, öngörü sonucu görsel karşılaştırılabilir.

2-B Schur ve YEK kafes süzgeç algoritmaları ile elde edilen sonuçlar bu üç karşılaştırma yöntemine göre değerlendirilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

a) Itakura LPC uzaklık ölçüm kriteri:

Tablo 7.9 Itakura LPC uzaklık ölçütü ile karşılaştırma

Algoritma	LPC Uzaklık Ölçütü sonucu
2-B Schur alg.(Normal eş.)	0.001100
2-B YEK kafes süzgeç algoritması	0.000885

b) Fark katsayıları matrisi:

Schur algoritması için fark katsayıları matrisi:

$$\mathbf{A}_{FQfark} = \mathbf{A}_{FQorg} - \mathbf{A}_{FQschur}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.01900 & 0.00020 & 0.00260 \\ -0.00870 & -0.00860 & -0.00380 & -0.00630 \\ 0.00840 & 0.00490 & 0.01900 & 0.01720 \\ 0.02790 & 0.00880 & -0.01020 & 0.00260 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

2-B YEK algoritması için fark katsayıları matrisi:

$$\mathbf{A}_{FQfark} = \mathbf{A}_{FQorg} - \mathbf{A}_{FQyek}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.00000 & -0.01310 & -0.01006 & -0.00270 \\ 0.01813 & -0.00349 & -0.01473 & -0.00814 \\ 0.01007 & 0.00227 & -0.00565 & 0.01329 \\ 0.00335 & 0.00980 & 0.00362 & 0.00263 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

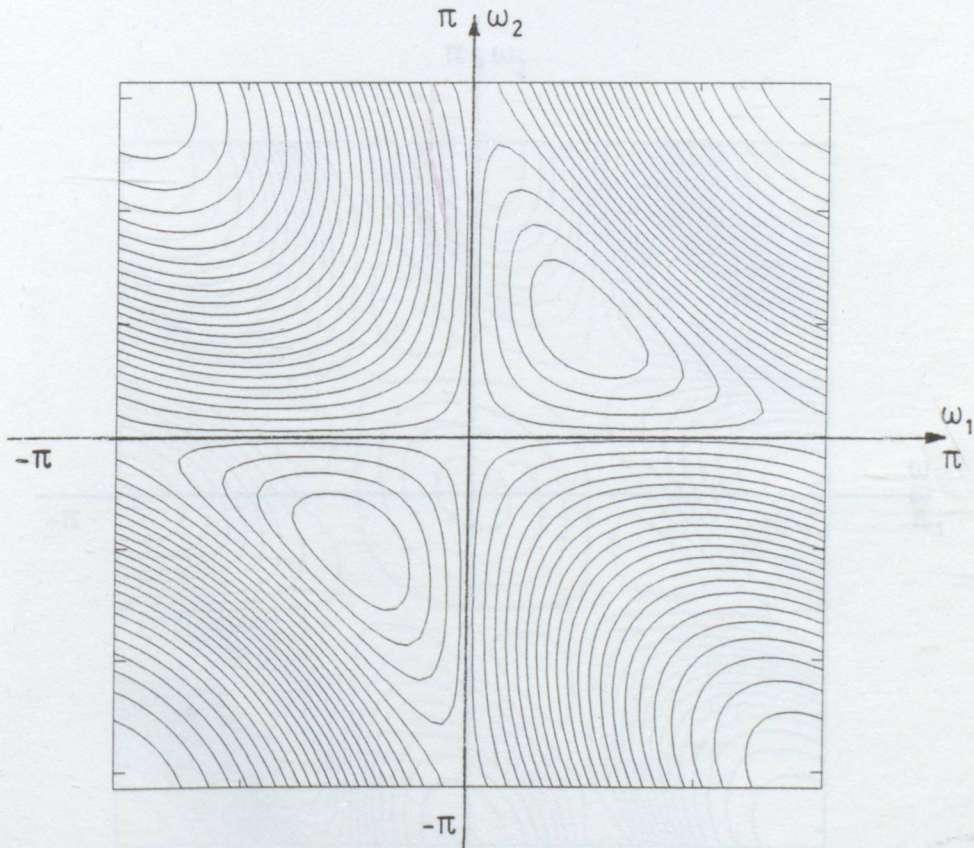
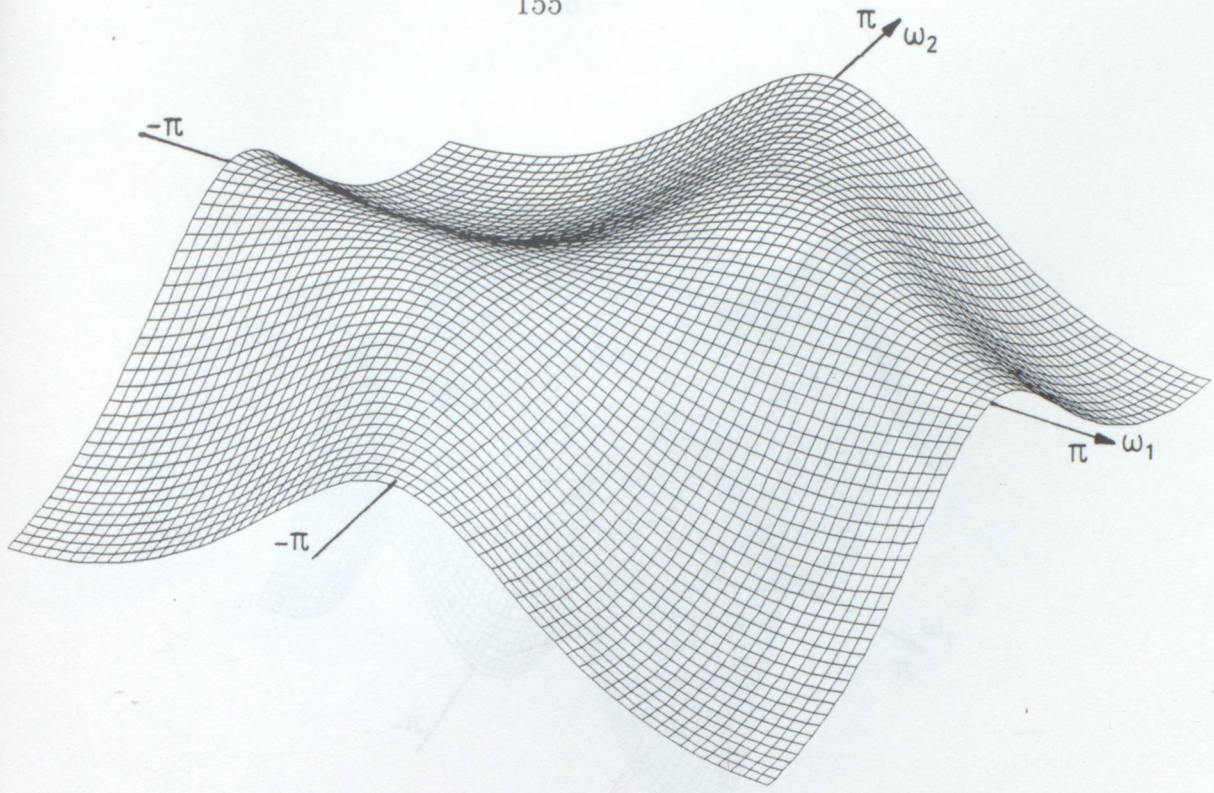
Tablo 7.10 Fark matrislerinin normu

Algoritma	l_2	l_{inf}	l_1	Frobenius
2-B Schur	0.0357	0.0495	0.0450	0.0479
2-B YEK kafes süzgeç Alg.	0.0279	0.0445	0.0341	0.0367

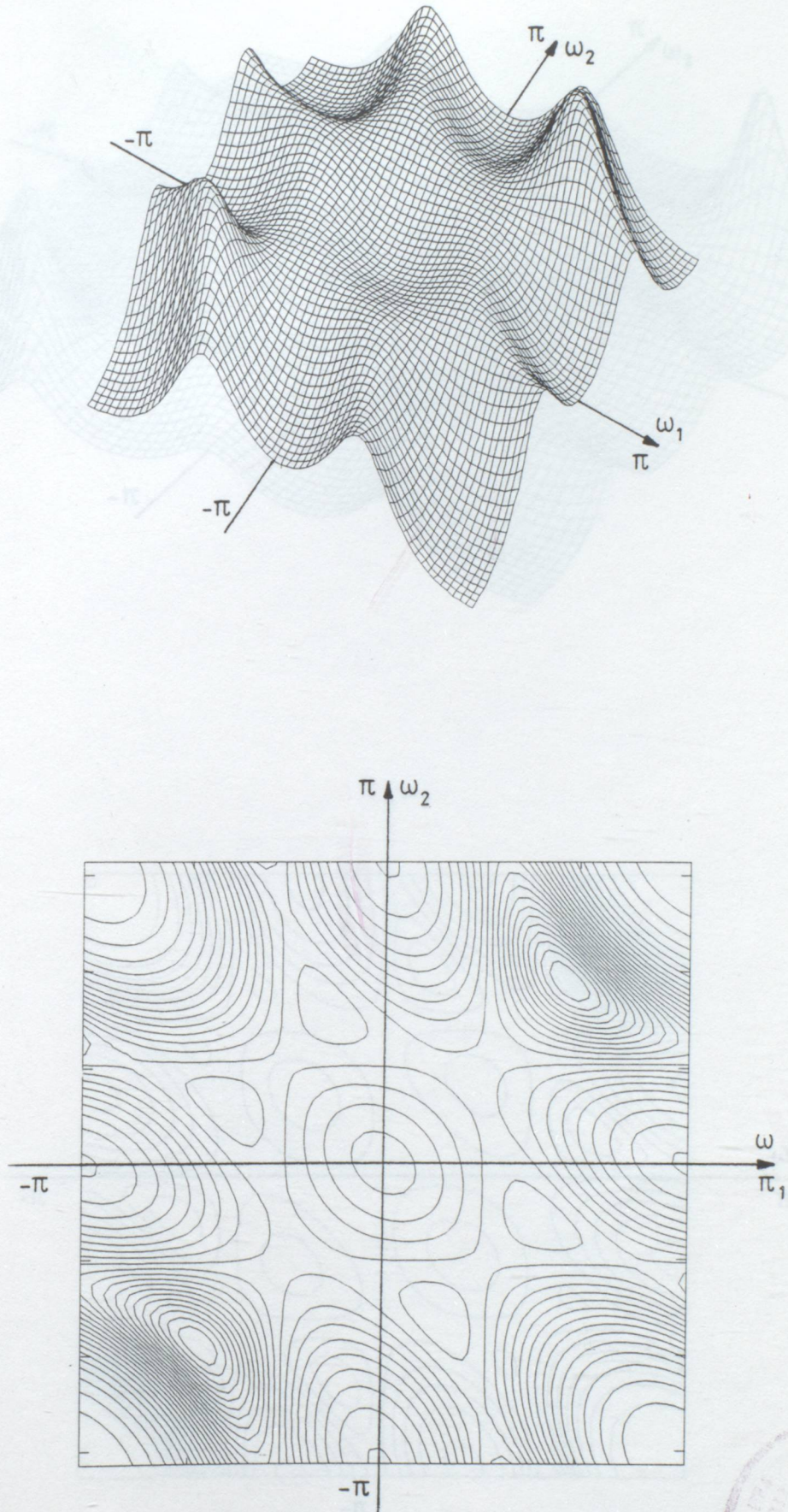
şeklinde bulunur.

c) **Spektrum ve ara kesit çizimleri:**

Birinci, ikinci ve üçüncü derece için orijinal katsayı matrisi, 2-B Schur ve YEK algoritmalarından elde edilen katsayı matrislerine ilişkin 3-B spektrum ve ara kesit eğrilerinin çizimleri sırasıyla Şekil 7.1-Şekil 7.9 da görülmektedir.

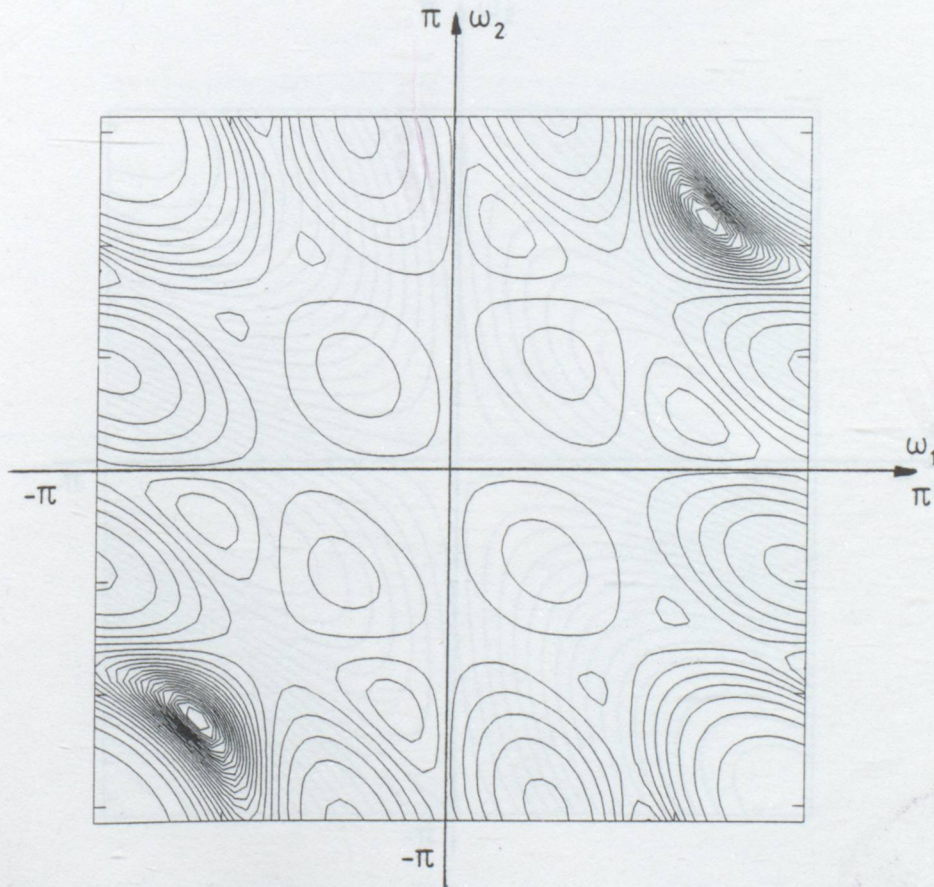
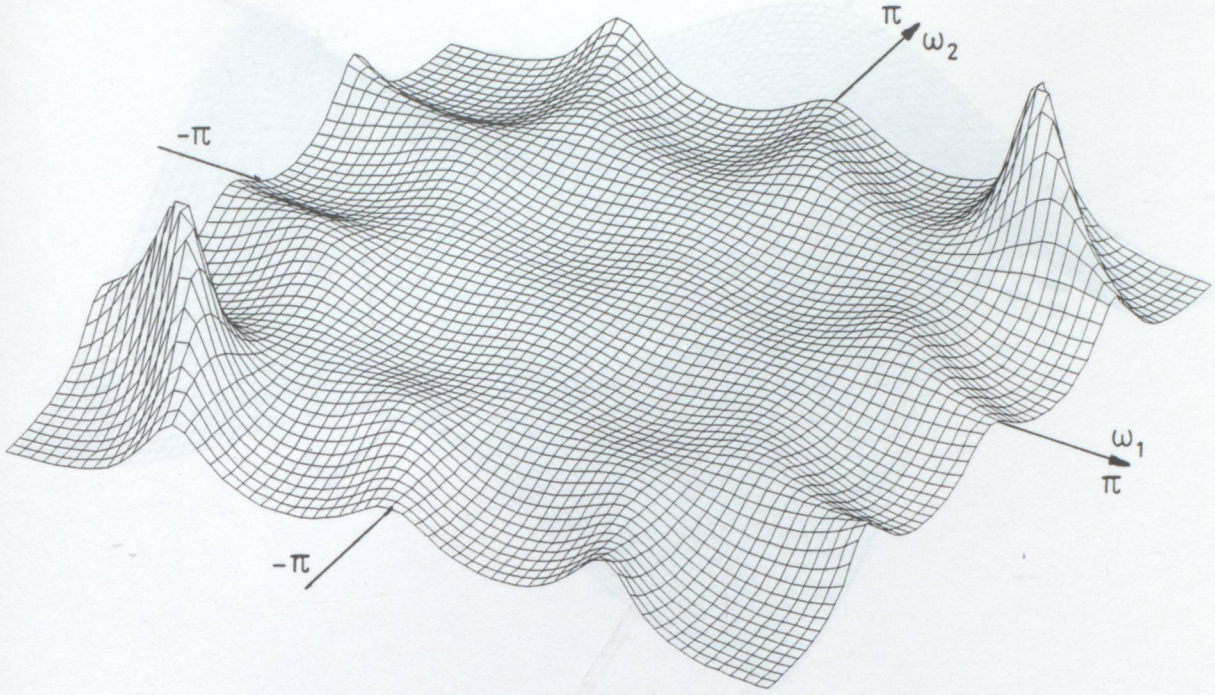


Şekil 7.1 Birinci derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

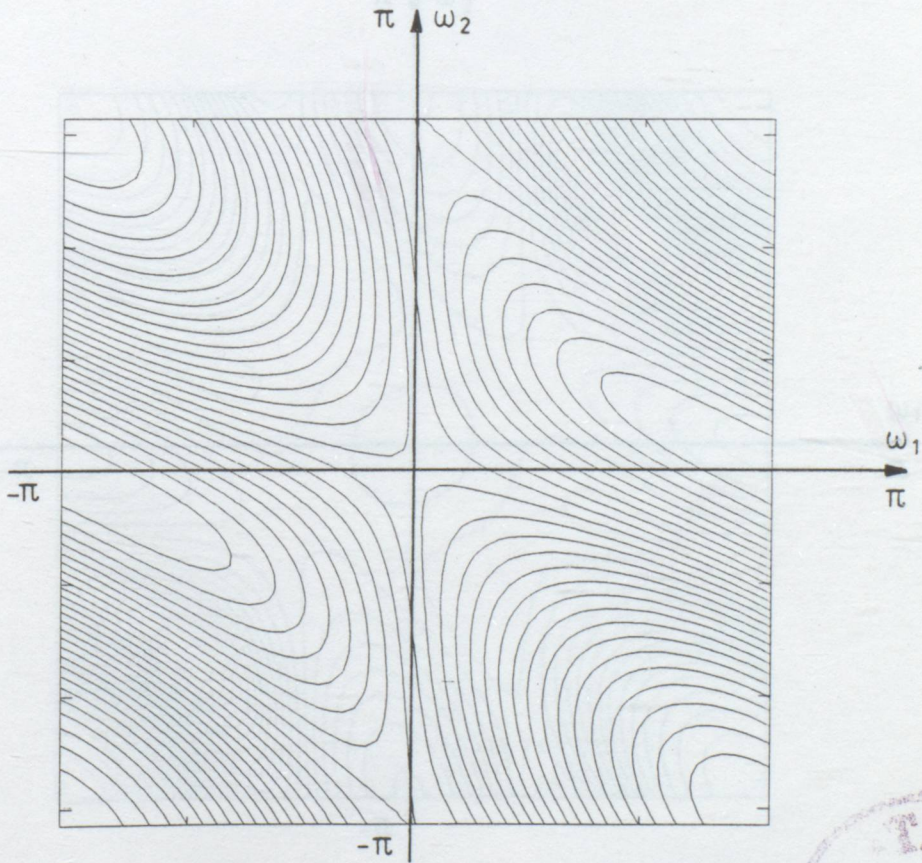
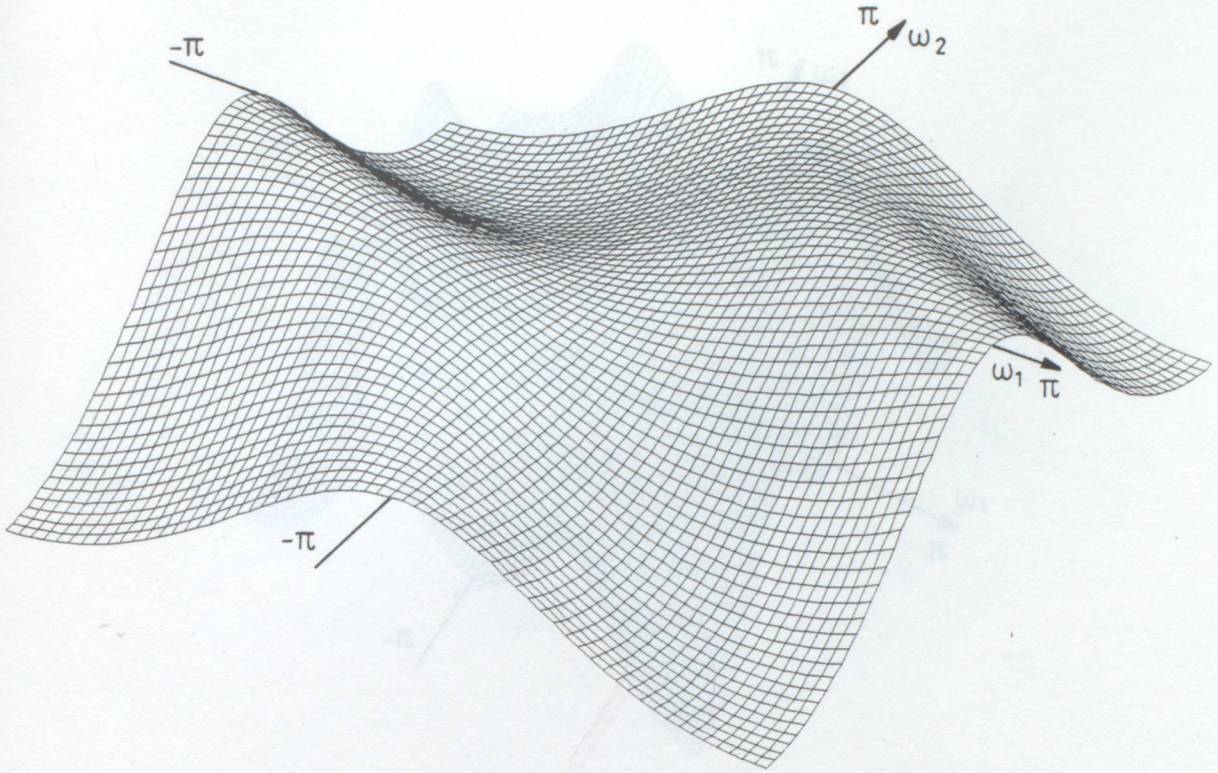


Şekil 7.2 İkinci derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

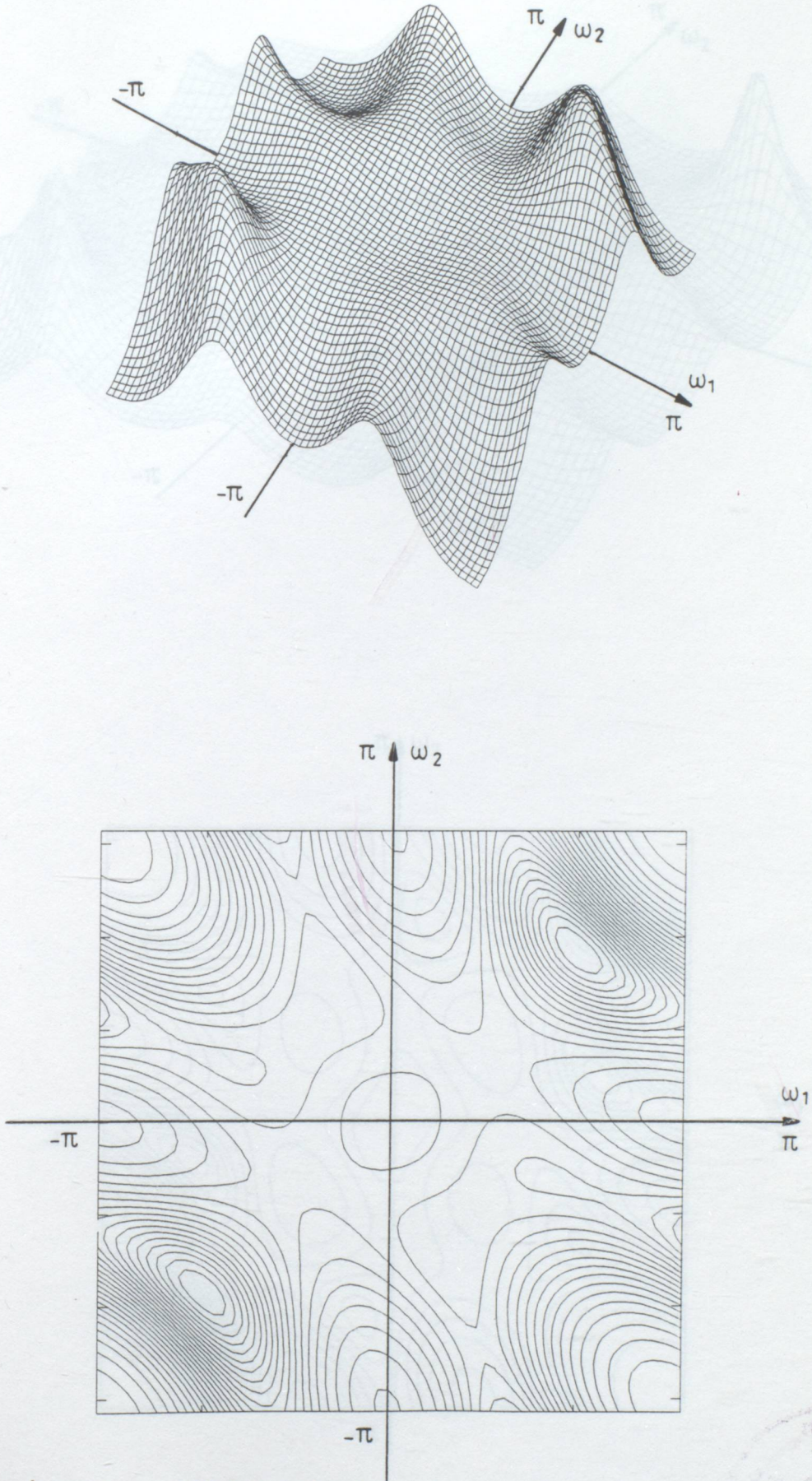




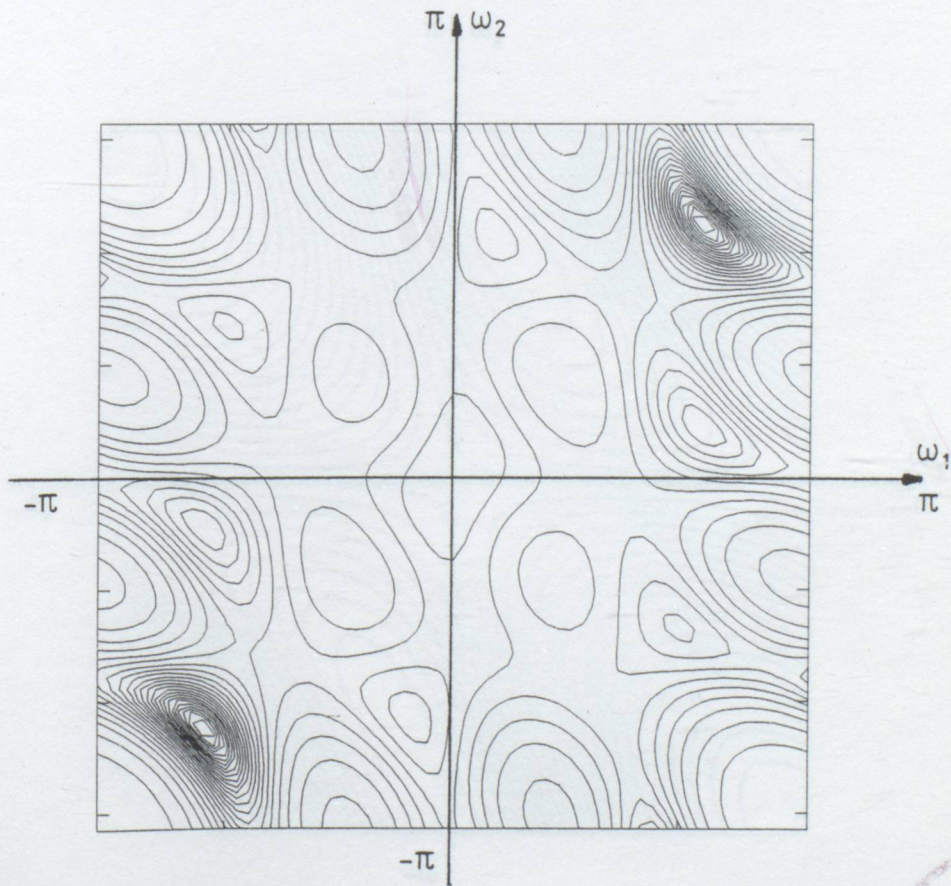
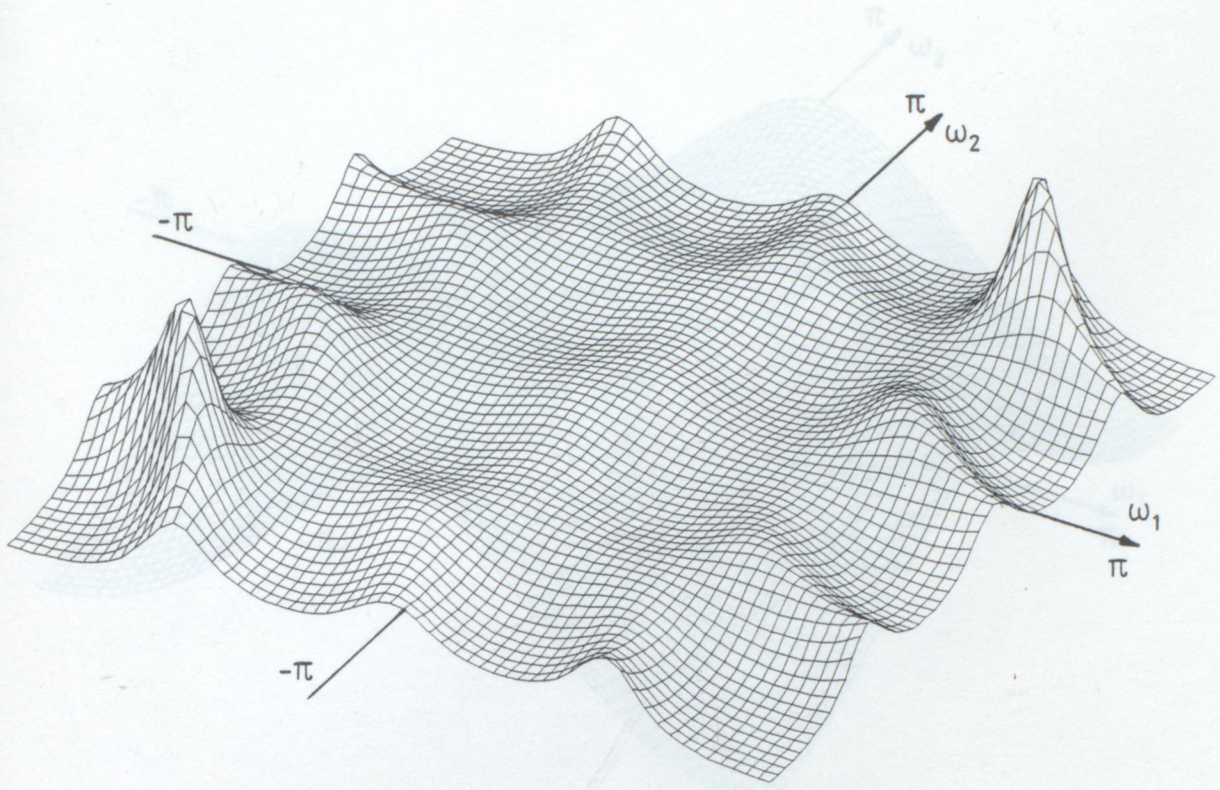
Şekil 7.3 Üçüncü derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



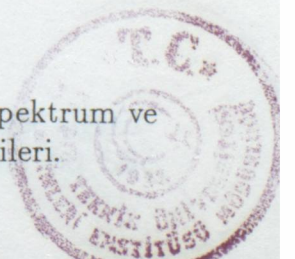
Şekil 7.4 Birinci derece 2-B Schur algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

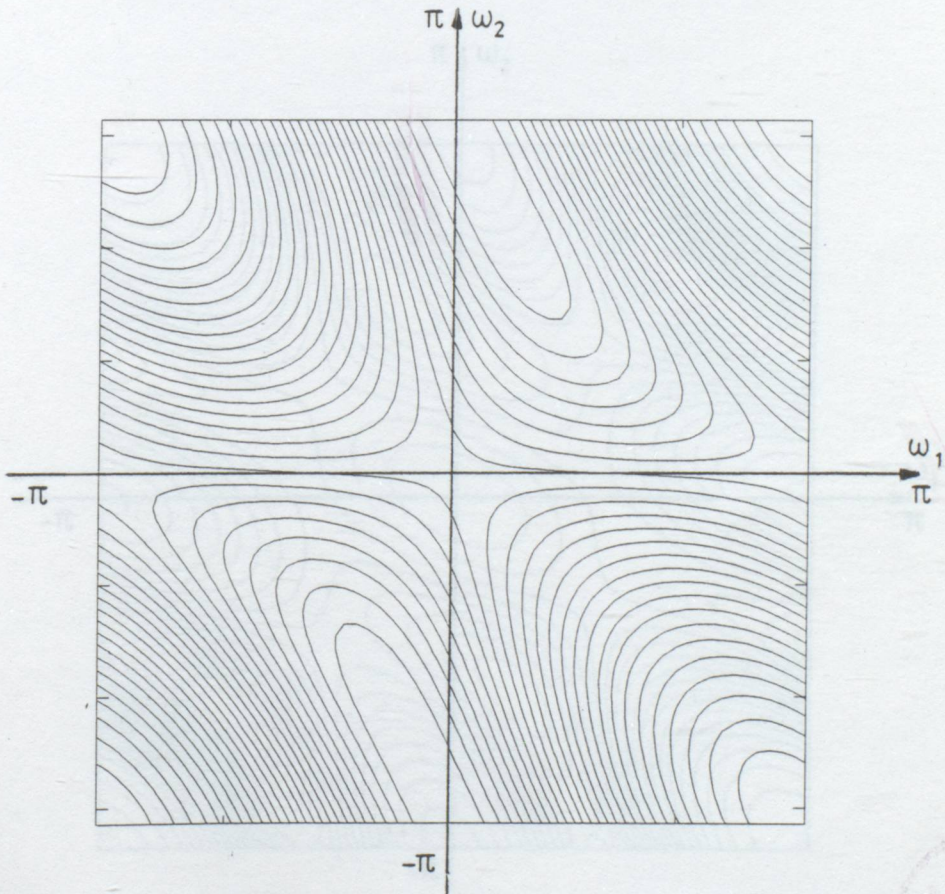
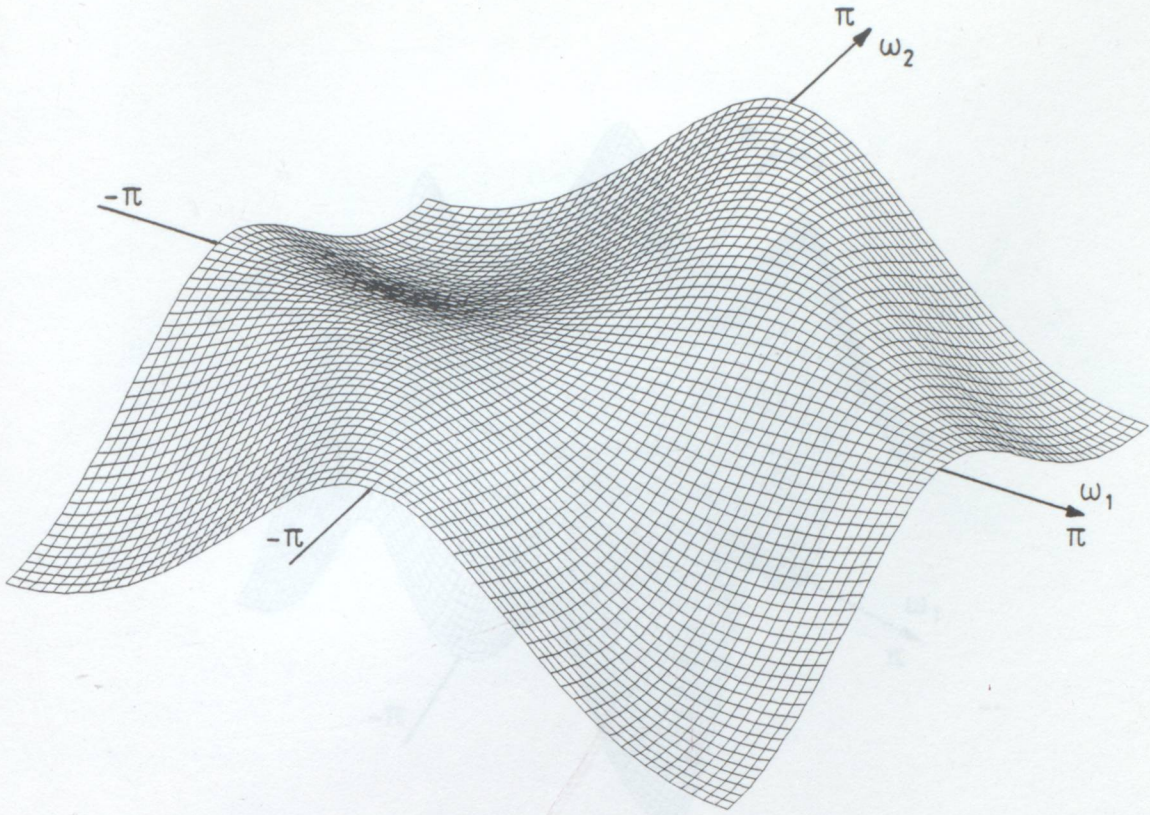


Şekil 7.5 İkinci derece 2-B Schur algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

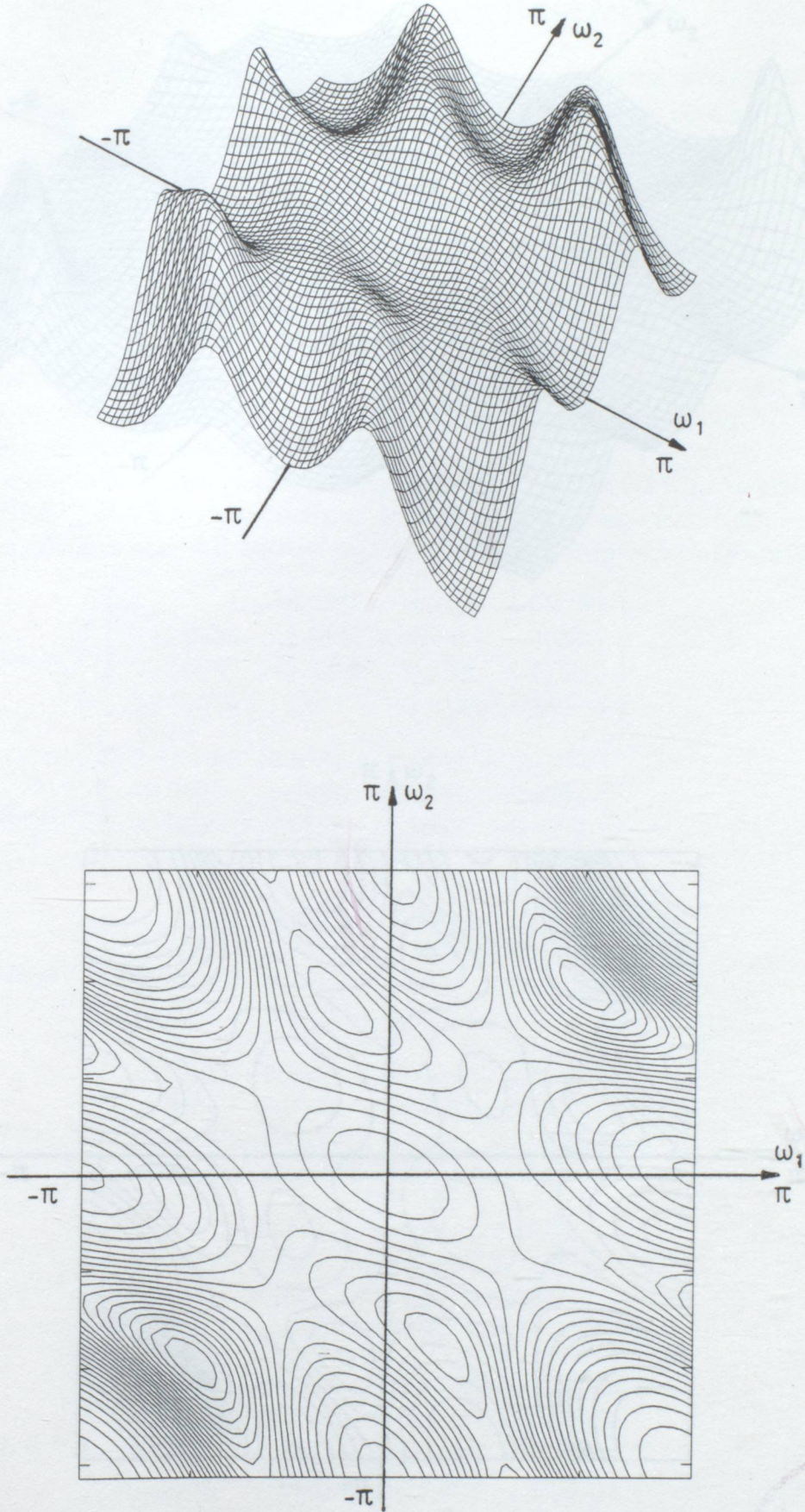


Şekil 7.6 Üçüncü derece 2-B Schur algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

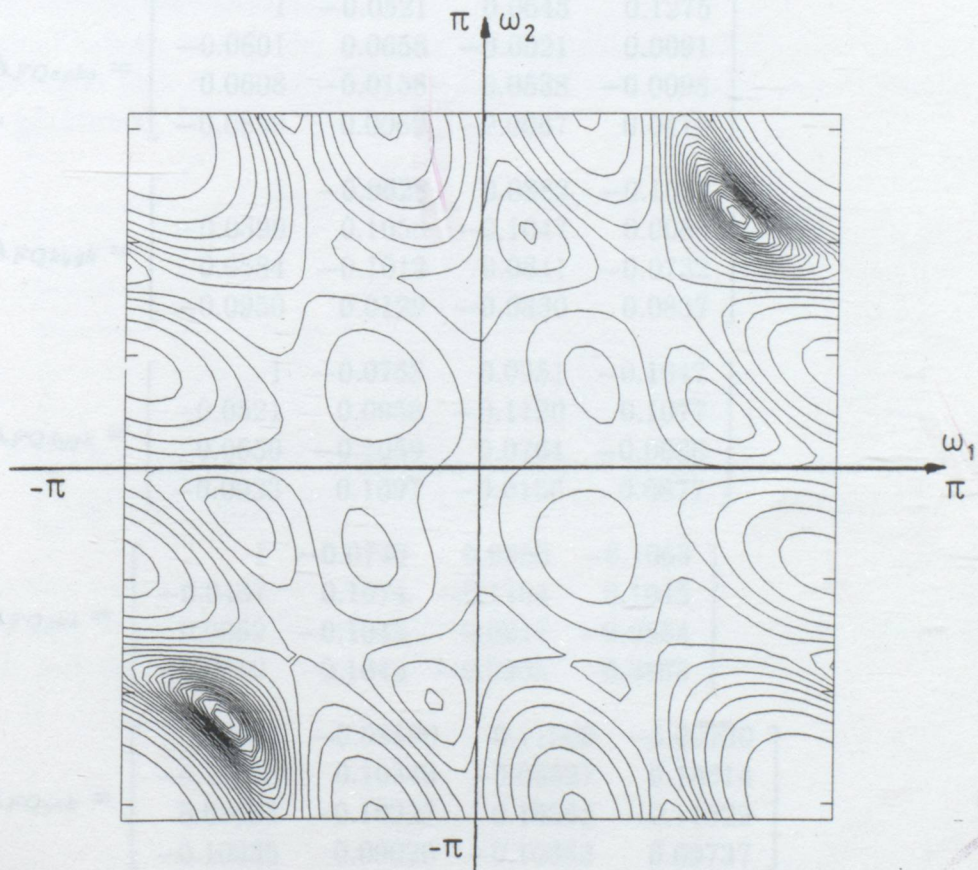
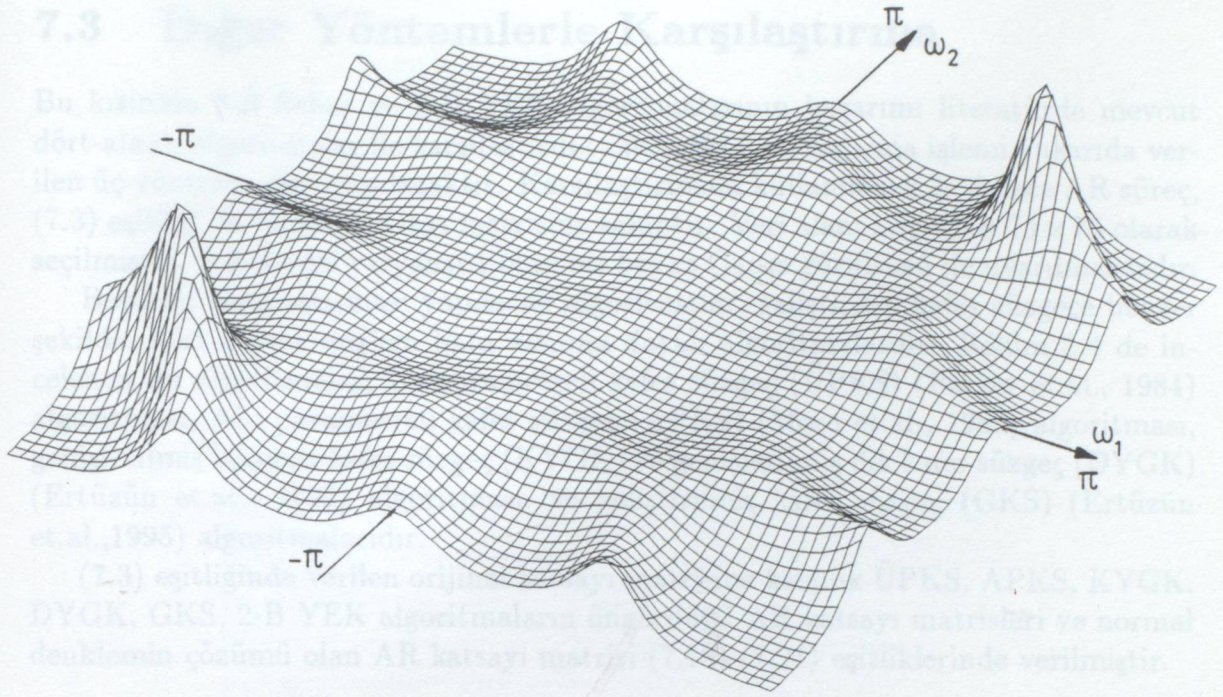




Şekil 7.7 Birinci derece 2-B yinelemeli enküçük-kareler (YEK) kafes süzgeç algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



Şekil 7.8 İkinci derece 2-B yinelemeli enküçük-kareler (YEK) kafes süzgeç algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



Şekil 7.9 Üçüncü derece 2-B yinellemeli enküçük-kareler (YEK) kafes süzgeç algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



7.3 Diğer Yöntemlerle Karşılaştırma

Bu kısımda 2-B Schur ve 2-B YEK algoritmalarının başarımı literatürde mevcut dört-alanlı algoritmalar ile karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma işlemi yukarıda verilen üç yönteme göre yapılacaktır. Karşılaştırmada kullanılacak 3. derece AR süreç, (7.3) eşitliği ile verilen katsayı matrisine sahiptir. Veri alanı boyutları 75×75 olarak seçilmiştir. AR model varyansı 1 olan bir beyaz Gauss gürültüsü ile uyarılmaktadır.

Başarım karşılaştırması yapılacak algoritmalar, geliştirilen kafes süzgeçe benzer şekilde, dört çeyrek-düzlem hata alanına dayalı algoritmalarlardır. Bölüm 2.4 de incelenen bu algoritmalar, Üç-parametrelili kafes süzgeç (ÜPKS) (Parker et.al., 1984) algoritması, Altı parametrelili kafes süzgeç (APKS) (Moro et.al., 1989) algoritması, genişletilmiş köşegen kafes süzgeç (KYGK) ve genişletilmiş dik kafes süzgeç (DYGK) (Ertüzün et.al., 1992) algoritması, ve geliştirilmiş kafes süzgeç (GKS) (Ertüzün et.al., 1995) algoritmalarıdır.

(7.3) eşitliğinde verilen orijinal katsayı matrisine karşılık ÜPKS, APKS, KYGK, DYGK, GKS, 2-B YEK algoritmaların öngördüğü AR katsayı matrisleri ve normal denklemin çözümü olan AR katsayı matrisi (7.18)-(7.24) eşitliklerinde verilmiştir.

$$\mathbf{A}_{FQ_{upks}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0640 & 0.0896 & -0.1198 \\ -0.0398 & 0.0880 & -0.0228 & 0.0081 \\ 0.0597 & -0.0240 & 0.0786 & -0.0091 \\ -0.01070 & 0.0117 & -0.0128 & 0.0716 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$$\mathbf{A}_{FQ_{apks}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0521 & 0.0645 & 0.1275 \\ -0.0601 & 0.0658 & -0.0021 & 0.0091 \\ 0.0608 & -0.0158 & 0.0538 & -0.0098 \\ -0.0859 & 0.0069 & -0.0067 & 0.0479 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

$$\mathbf{A}_{FQ_{kygk}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0628 & 0.0882 & -0.1063 \\ -0.0390 & 0.1058 & -0.1047 & 0.0088 \\ 0.0584 & -0.1013 & 0.0841 & -0.0732 \\ -0.0950 & 0.0129 & -0.0830 & 0.0837 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$\mathbf{A}_{FQ_{dygk}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0768 & 0.0951 & -0.1047 \\ -0.0521 & 0.0958 & -0.1120 & 0.1077 \\ 0.0650 & -0.1059 & 0.0764 & -0.0086 \\ -0.0923 & 0.1097 & -0.0156 & 0.0877 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\mathbf{A}_{FQ_{gks}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0740 & 0.0953 & -0.1063 \\ -0.0467 & 0.1074 & -0.1104 & 0.1045 \\ 0.0669 & -0.1043 & 0.0817 & -0.0854 \\ -0.0950 & 0.1042 & -0.0938 & 0.0865 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{A}_{FQ_{yek}} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.08690 & 0.11006 & -0.09730 \\ -0.11813 & 0.10349 & -0.08527 & 0.10814 \\ 0.08993 & -0.10227 & 0.10565 & -0.11329 \\ -0.10335 & 0.09020 & -0.10363 & 0.09737 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$



$$A_{FQnormal} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.1190 & 0.0998 & -0.1026 \\ -0.0913 & 0.1086 & -0.0962 & 0.1063 \\ 0.0916 & -0.1049 & 0.0810 & -0.1172 \\ -0.1279 & 0.0912 & -0.0898 & 0.0974 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

Elde edilen bu katsayı matrisleri Üç karşılaştırma yöntemine incelenmiş ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

a) Itakura LPC uzaklık ölçütü:

Ölçüt, $\frac{\pi}{60}$ hassasiyetle numerik olarak hesaplanmıştır.

Tablo 7.11 Itakura LPC uzaklık ölçütü ile karşılaştırma

Algoritma	LPC Uzaklık Ölçütü sonucu
ÜPKS	0.0193
APKS	0.0404
KYGK	0.0088
DYGK	0.0081
GKS	0.0020
Normal denklemler	0.0011
2-B YEK Kafes süzgeç	0.00088

b) Fark katsayıları matrisi:

Orijinal katsayı matrisi ile, her bir yöntemi kullanarak elde edilen katsayı matrisleri arasındaki fark matrisine ilişkin 4 değişik norm hesaplanmıştır. Bunlar Tablo 7.12 de görülmektedir.

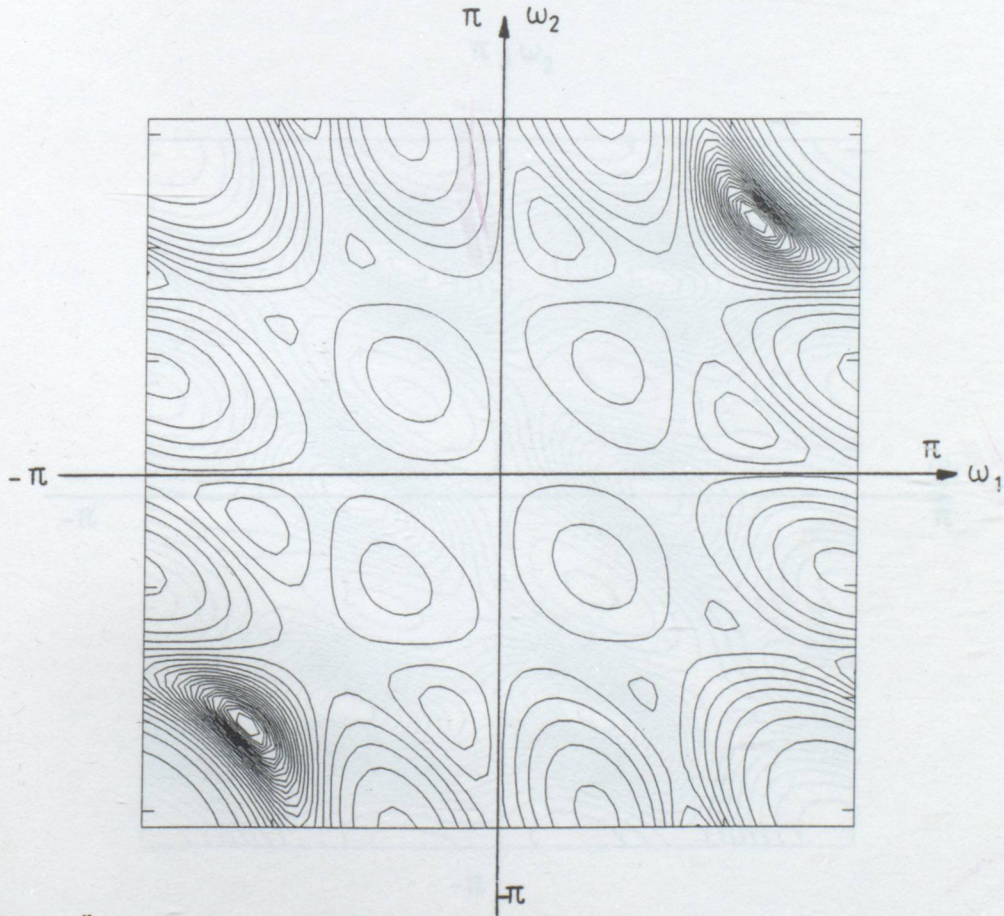
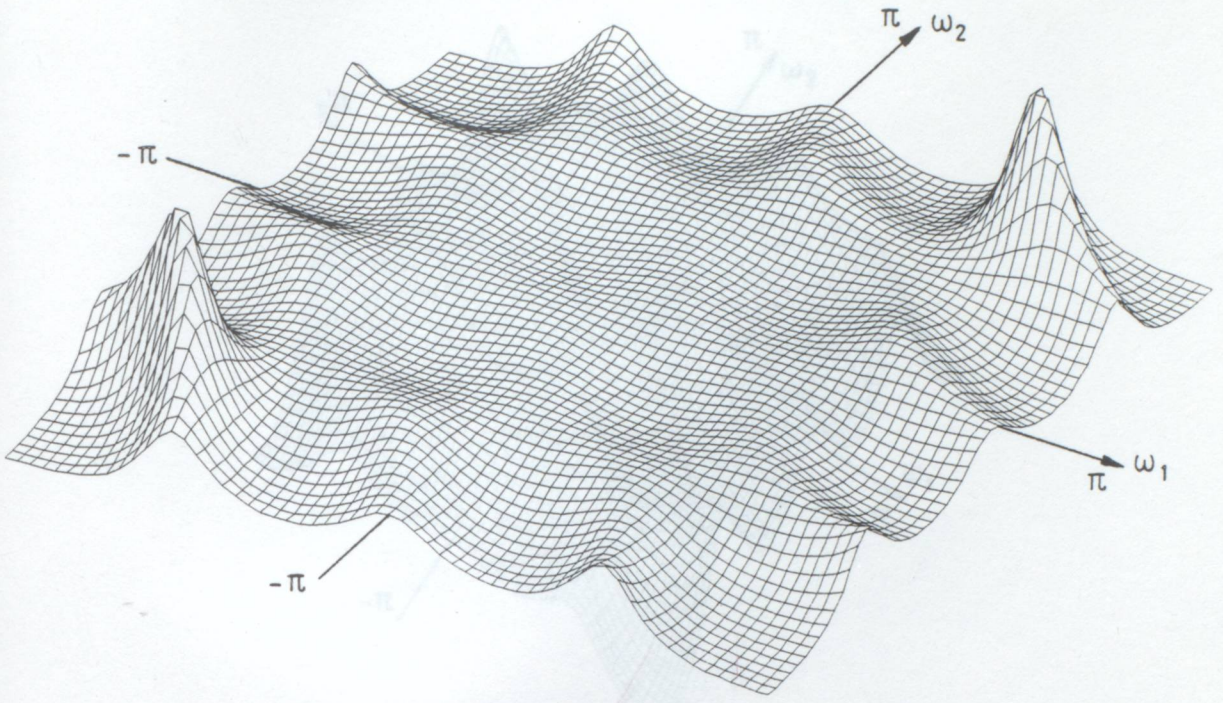
Tablo 7.12 Fark matrislerinin normu

Algoritma	l_2	l_{inf}	l_1	Frobenius
ÜPKS	0.2221	0.2932	0.2310	0.2455
APKS	0.3106	0.3109	0.4607	0.3393
KYGK	0.1205	0.1627	0.1406	0.1566
DYGK	0.1119	0.1559	0.1249	0.1439
GKS	0.0640	0.0756	0.0914	0.0754
Normal D.	0.0357	0.0495	0.0450	0.0479
2-B YEK Kafes süzgeç	0.0279	0.0445	0.0341	0.0367

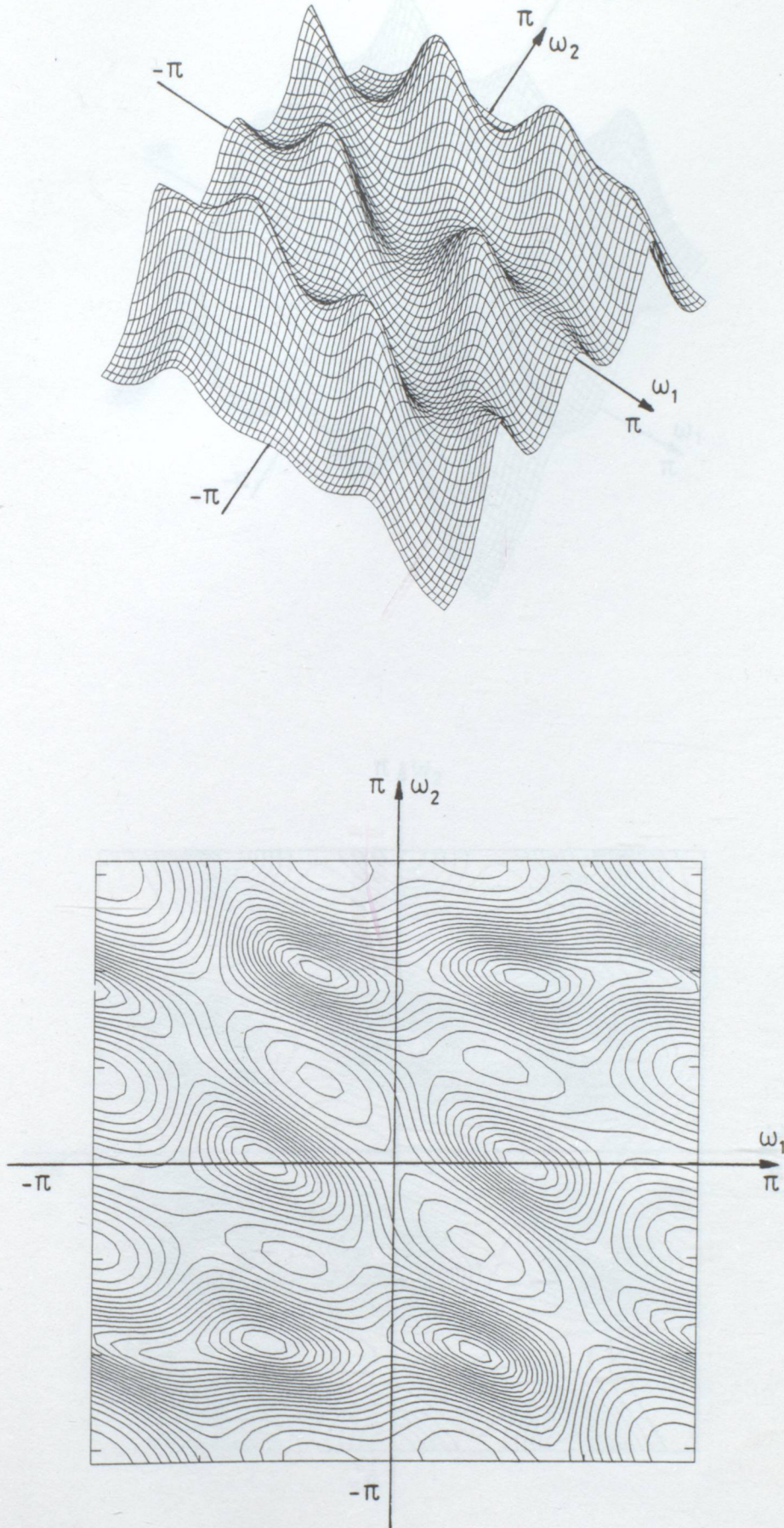
c) Spektrum ve ara kesit çizimleri:

Şekil 7.10-7.19 de sırasıyla yukarıdaki algoritmalar ile elde edilen katsayı matrislerine ait 3-B spektrum çizimleri ve ara kesit eğrileri görülmektedir.



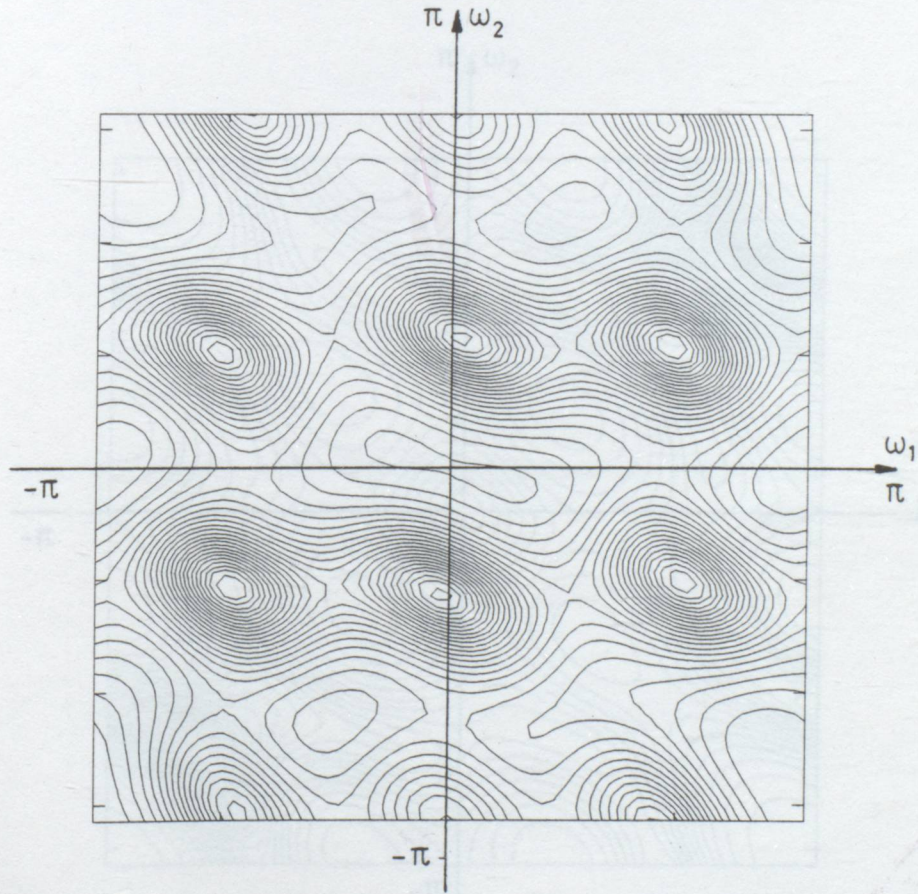
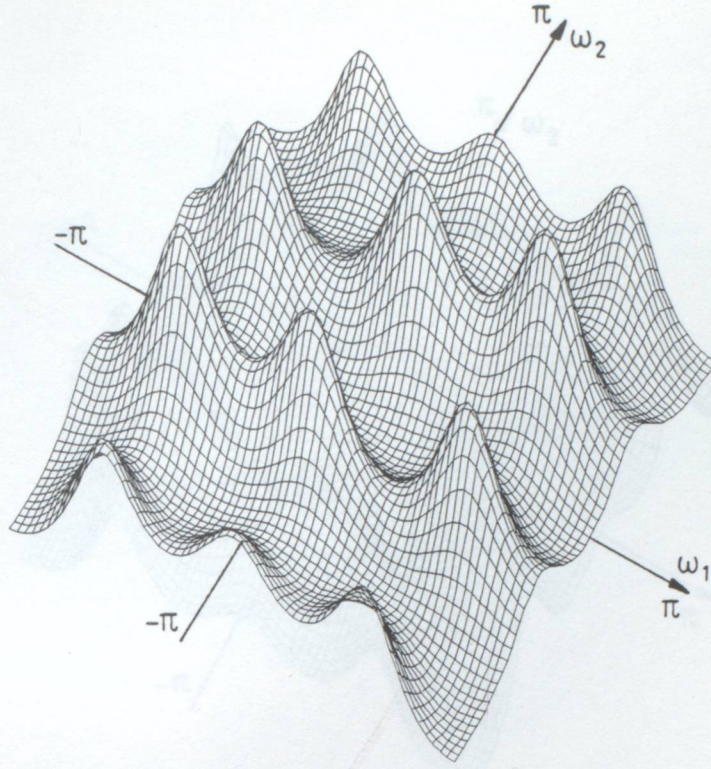


Şekil 7.10 Üçüncü derece Orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

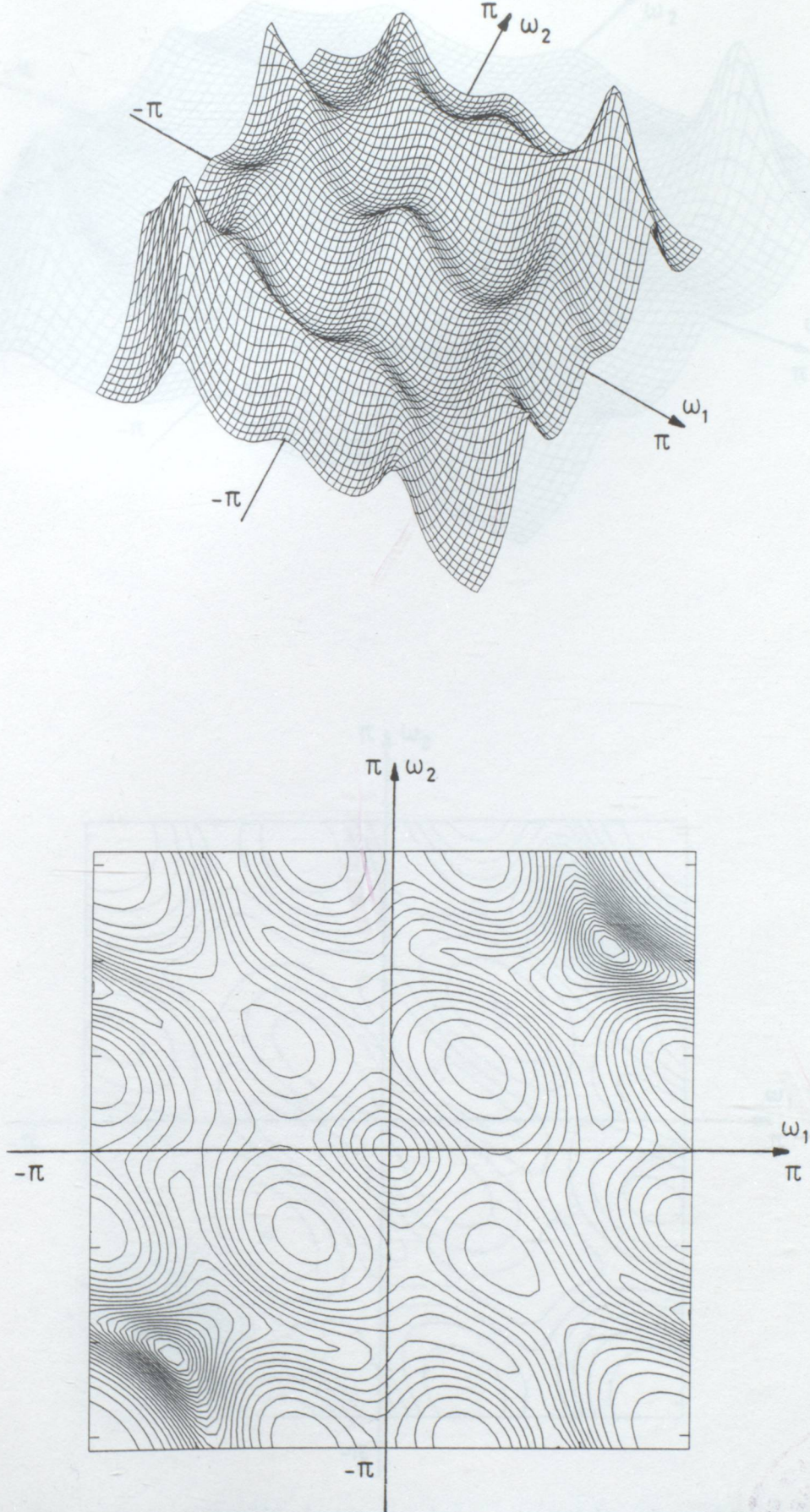


Şekil 7.11 Üçüncü derece ÜPKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

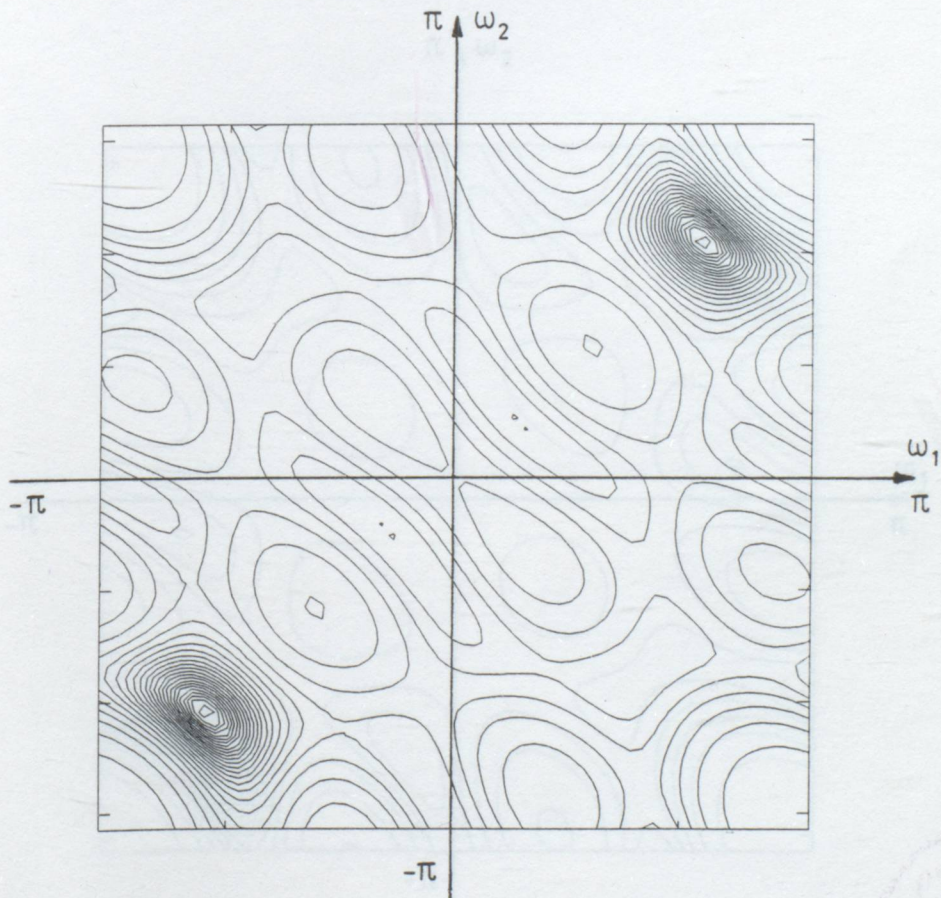
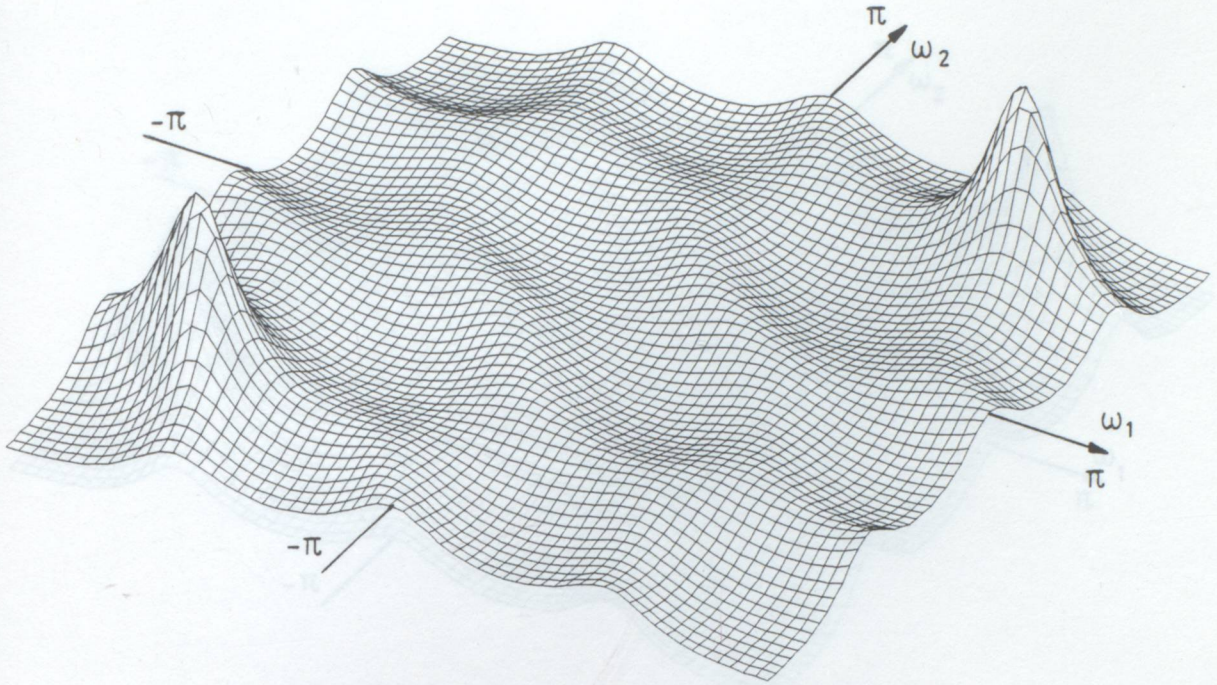




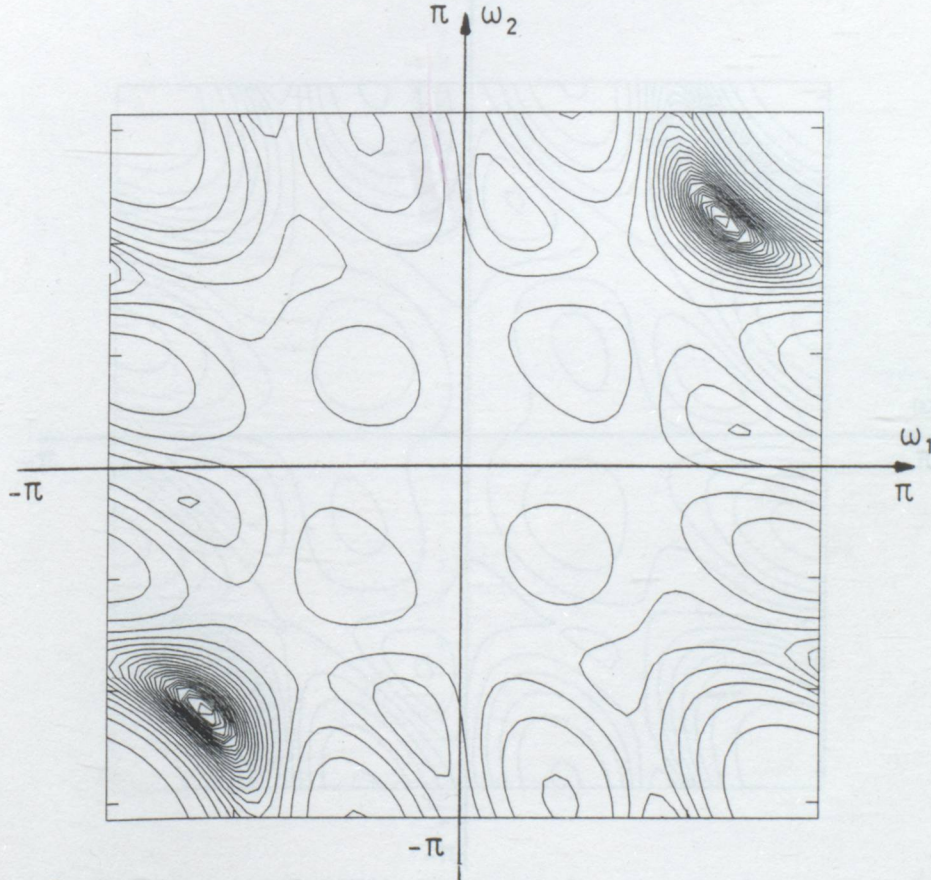
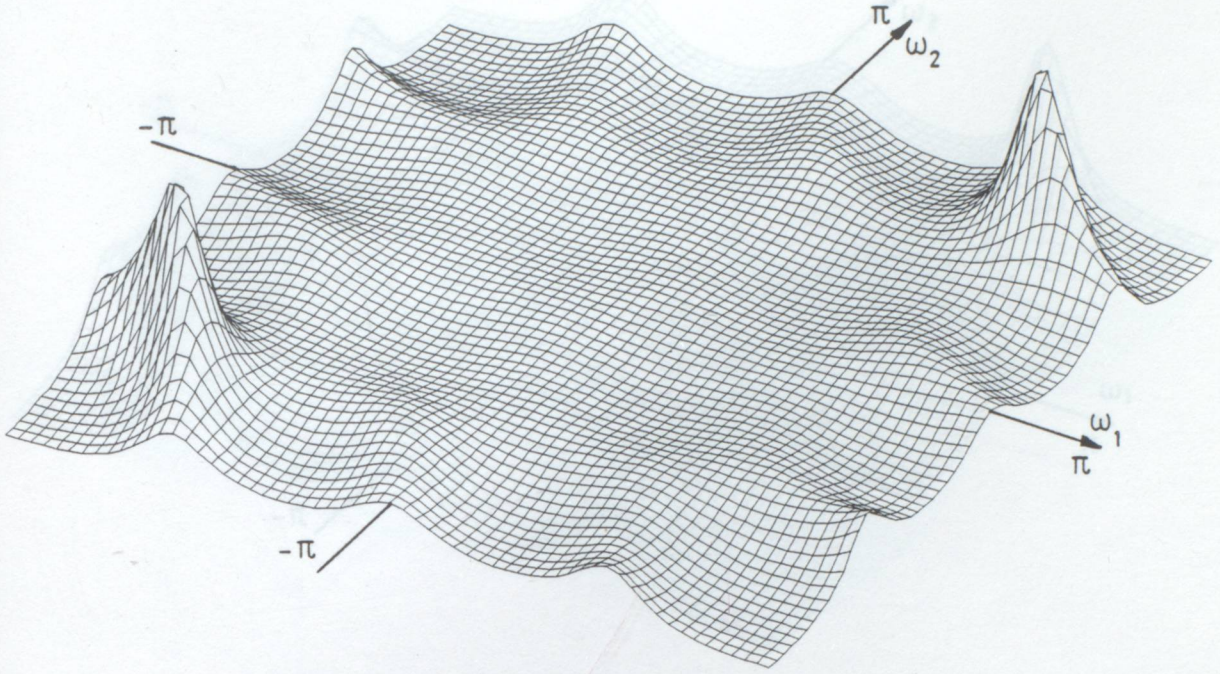
Şekil 7.12 Üçüncü derece APKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



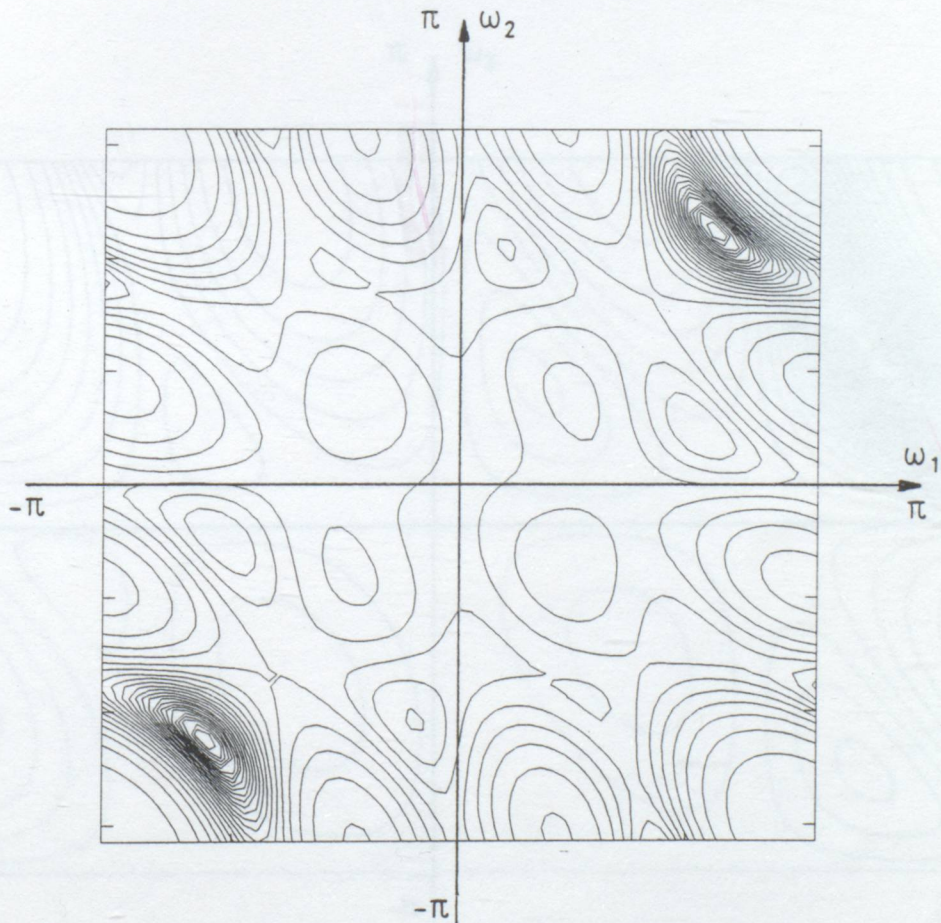
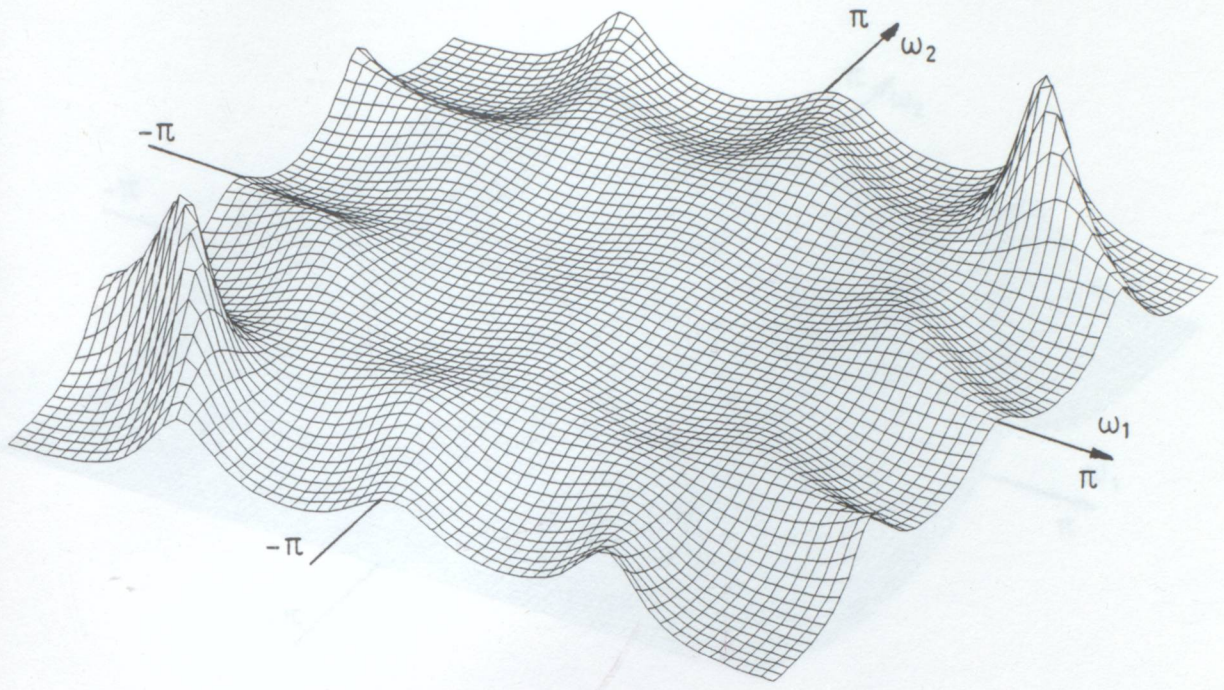
Şekil 7.13 Üçüncü derece KYGK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



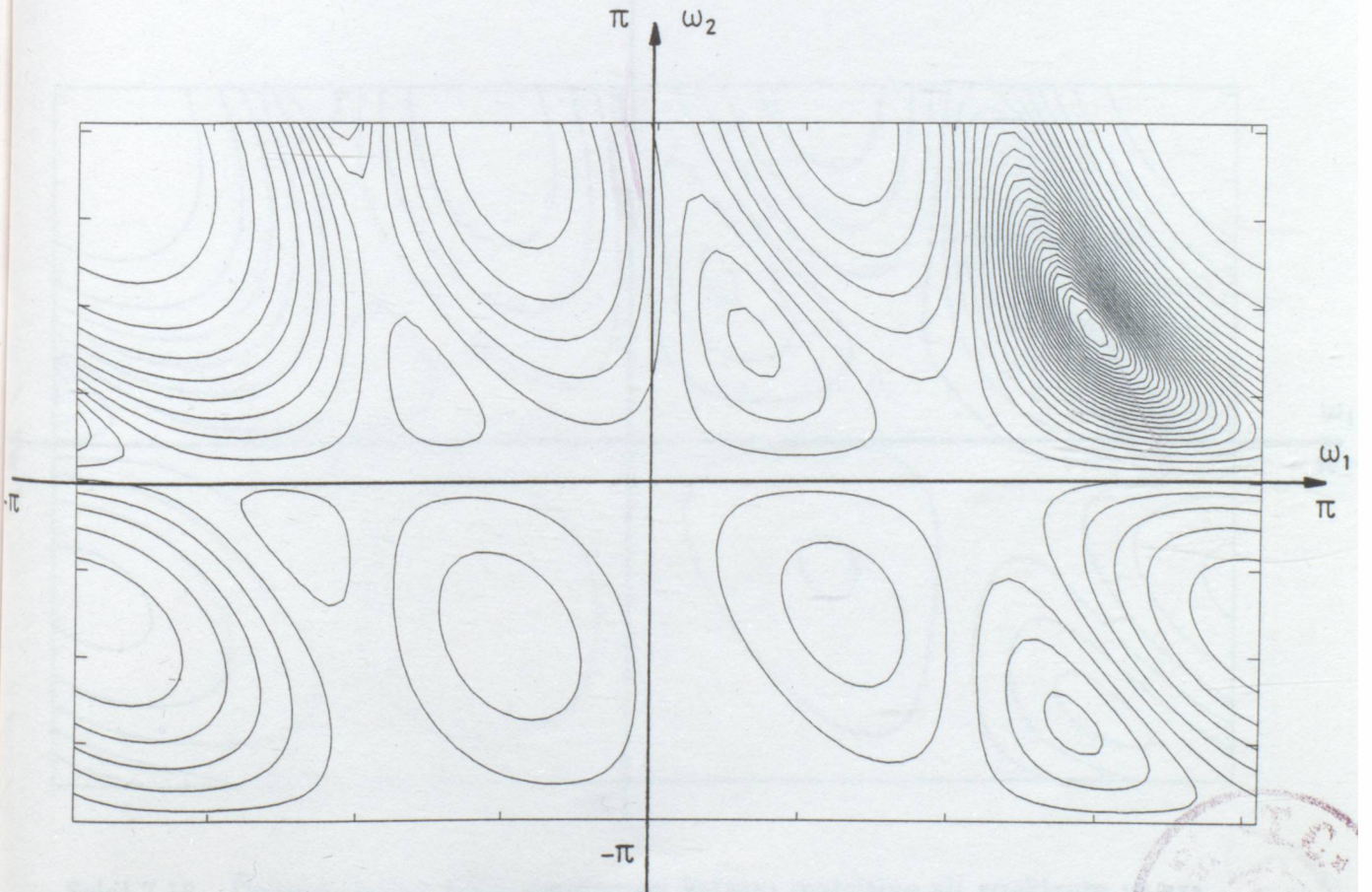
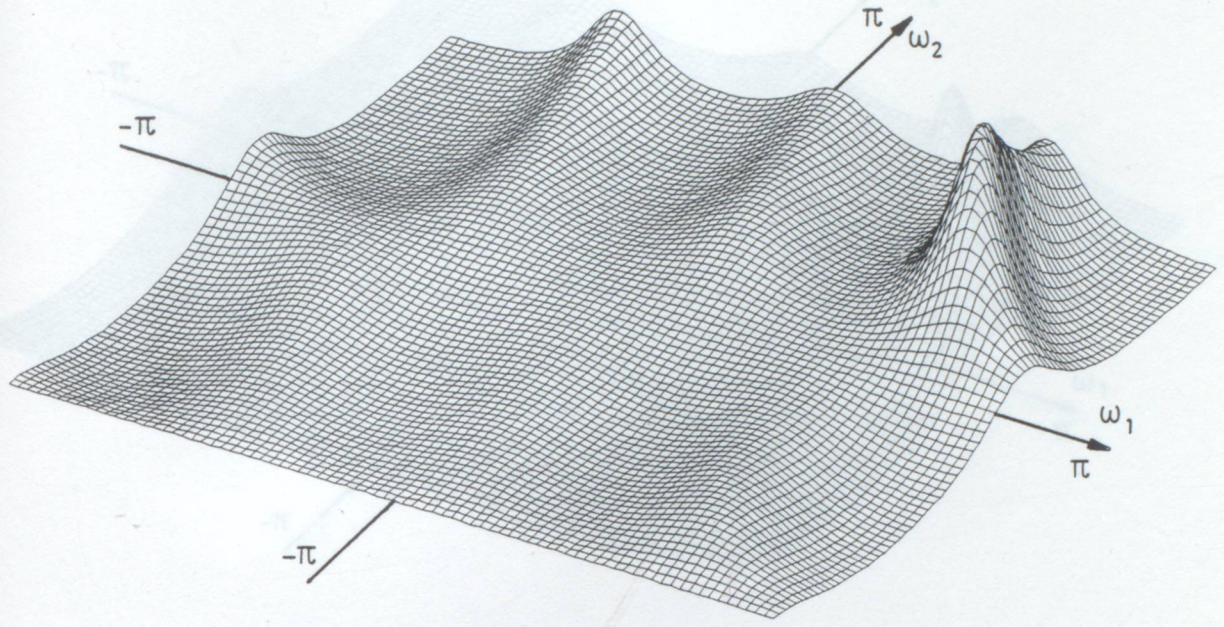
Şekil 7.14 Üçüncü derece DYCK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



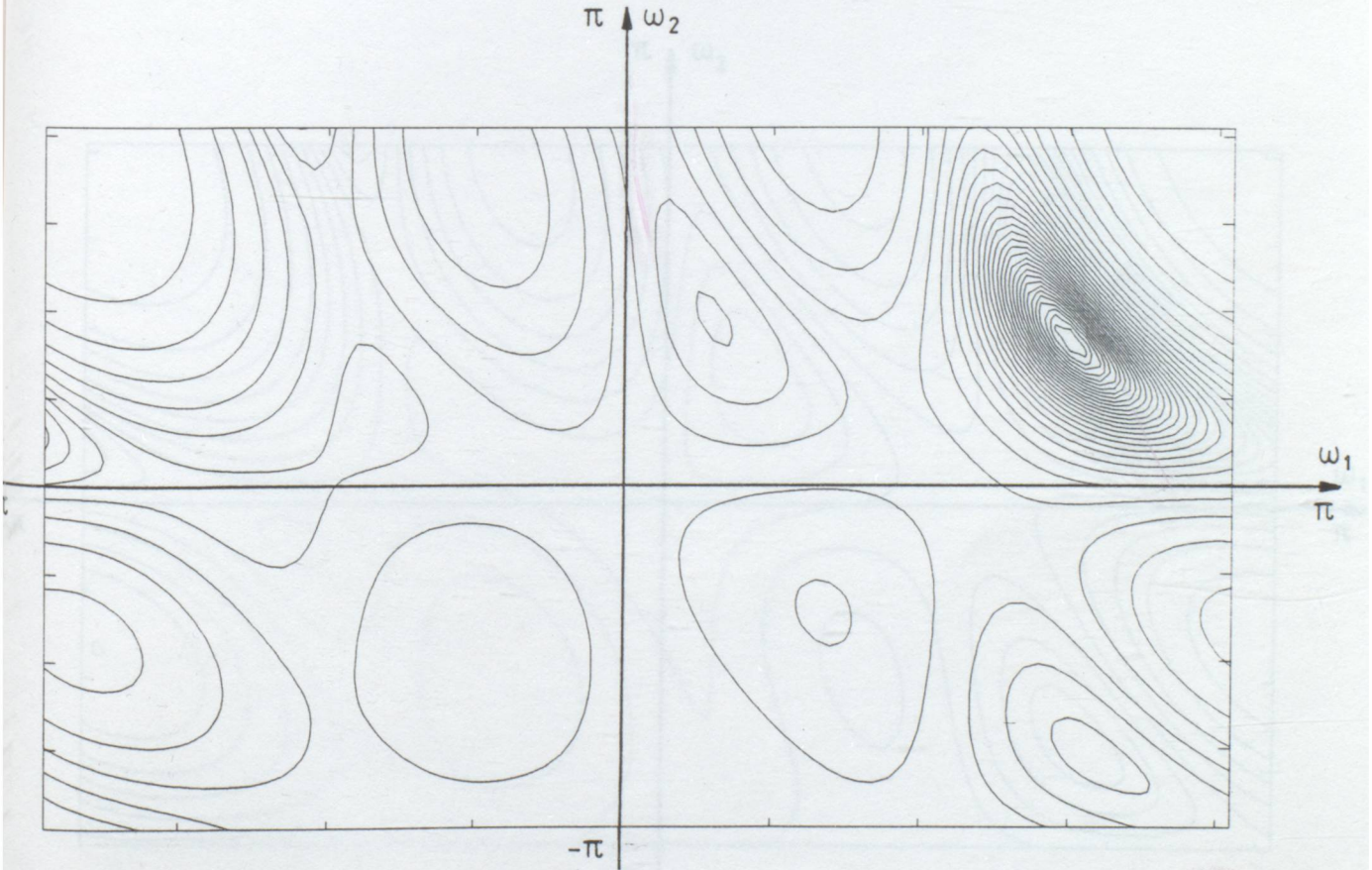
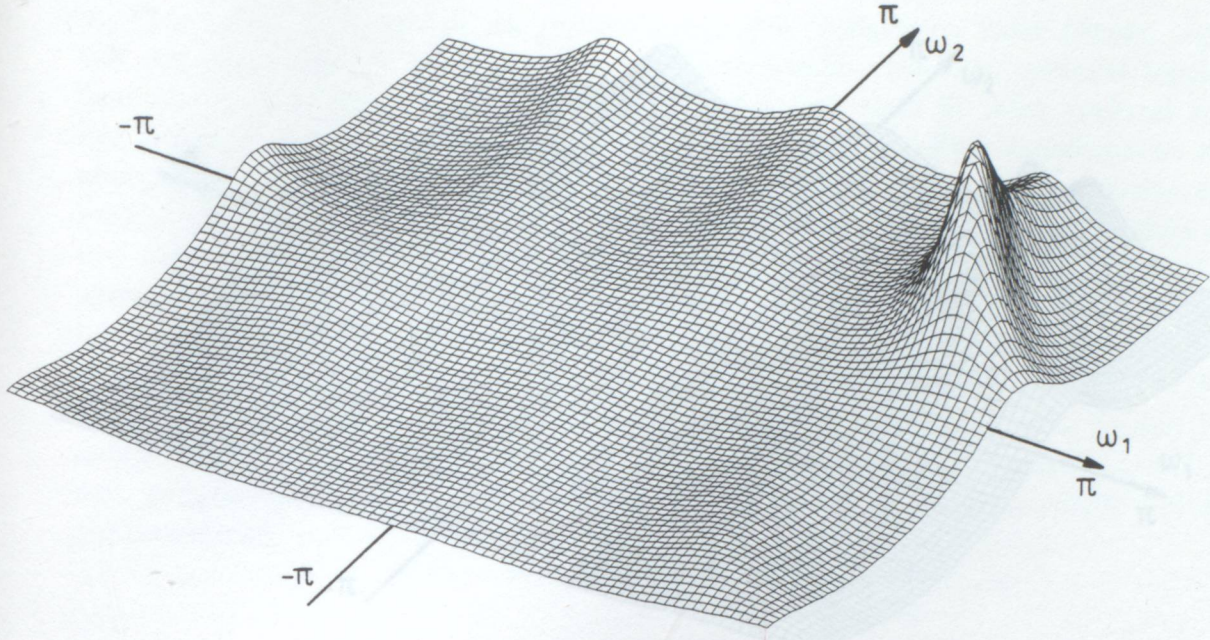
Şekil 7.15 Üçüncü derece GKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



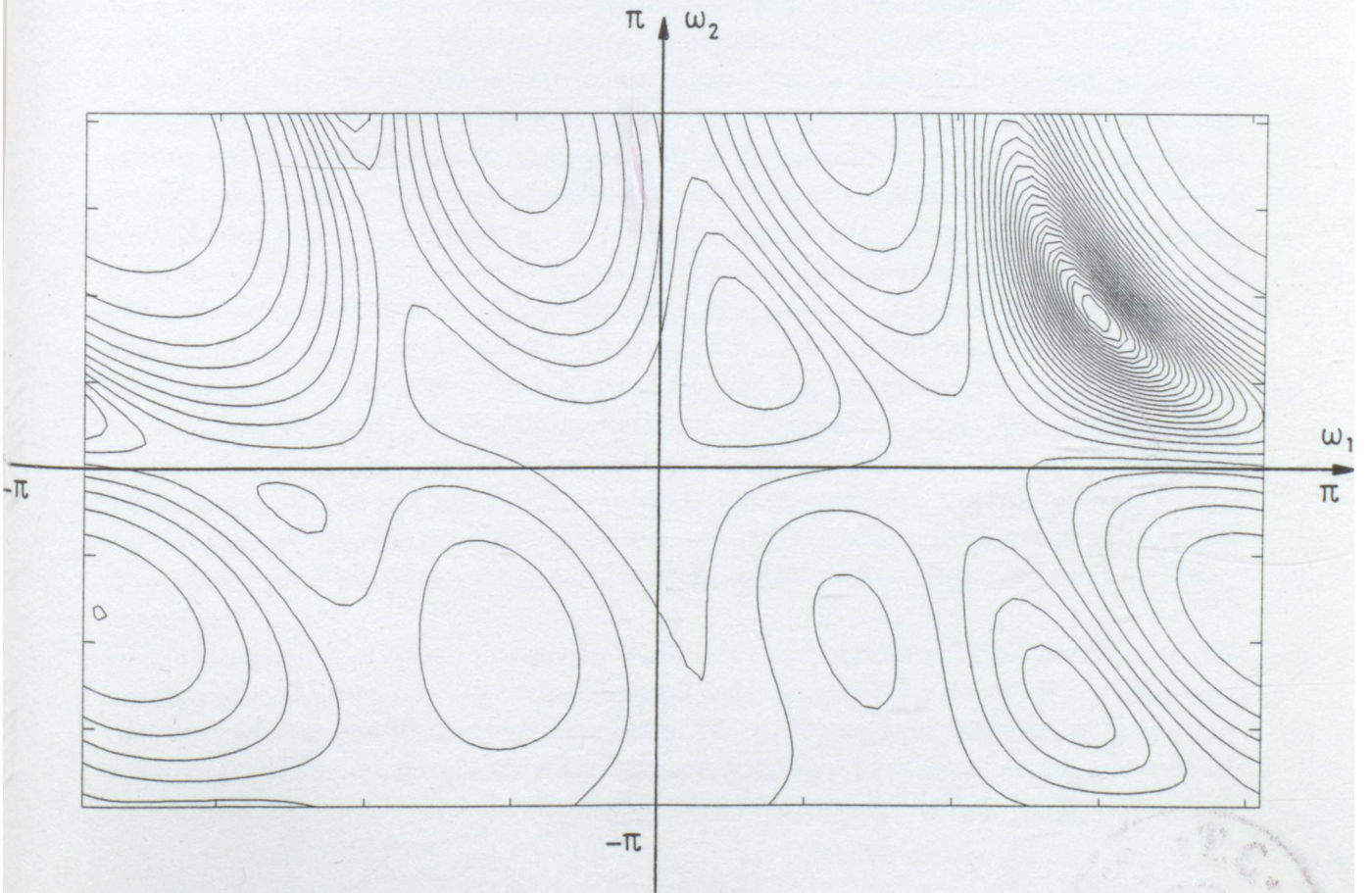
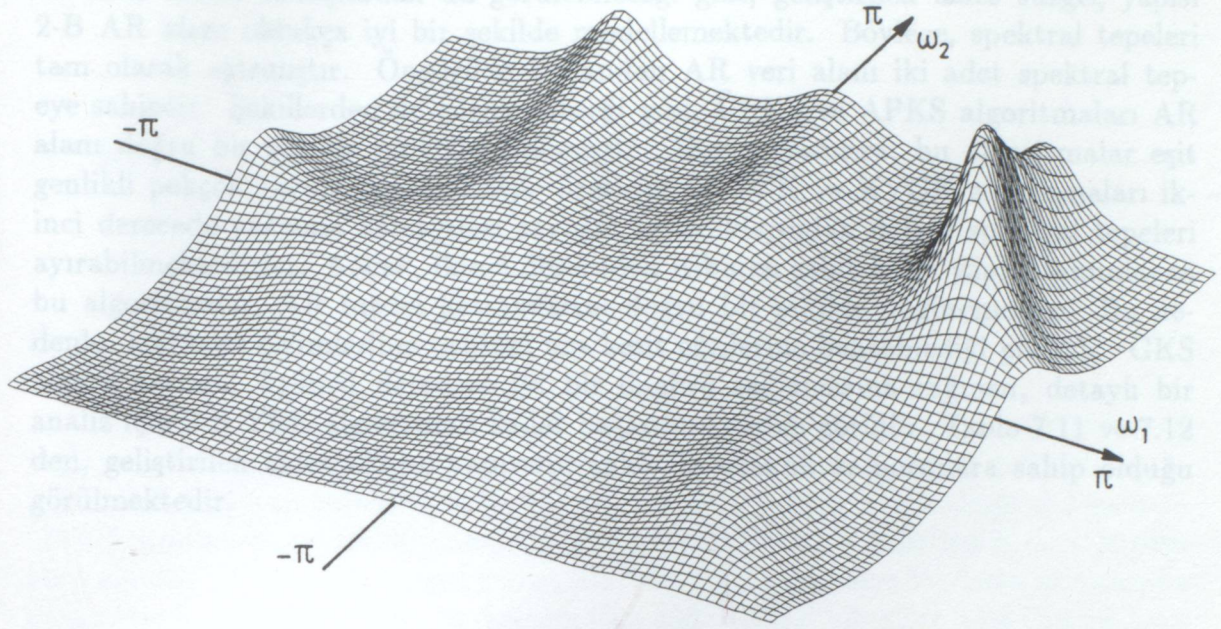
Şekil 7.16 Üçüncü derece 2-B YEK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrileri çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



Şekil 7.17 Üçüncü derece orijinal katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrilerinin yarı-düzlem için detaylı çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



Şekil 7.18 Üçüncü derece GKS algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrilerinin yarı-düzlem için detaylı çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.



Şekil 7.19 Üçüncü derece 2-B YEK algoritması katsayı matrisine ait spektrum ve ara kesit eğrilerinin yarı-düzlem için detaylı çizimi. (a) Güç spektrumu, (b) ara kesit eğrileri.

Elde edilen sonuçlardan da görülebileceği gibi, geliştirilen kafes süzgeç yapısı 2-B AR alanı oldukça iyi bir şekilde modellemektedir. Böylece, spektral tepeleri tam olarak ayırmıştır. Öngörüde kullanılan AR veri alanı iki adet spektral tepeye sahiptir. Şekillerden de görülebileceği gibi, ÜPKS ve APKS algoritmaları AR alanı doğru bir şekilde modelleyememiştir. Bunun yanı sıra, bu algoritmalar eşit genlikli pekçok sayıda spektral tepe üretirler. DYCK ve KYCK algoritmaları ikinci derecede yansıma katsayıları sayısını artırdıklarından dolayı spektral tepeleri ayırabilmektedirler. Ancak, ikinci dereceden itibaren sabit kafes yapısı tanımlayan bu algoritmalar, AR model katsayılarını doğru bir şekilde öngöremezler. Bu nedenle, ara kesit çizimlerinin orijinal ara kesit eğrilerine benzemediği görülür. GKS algoritmasının, üçüncü derecede iyi bir öngörü sağlamasına rağmen, detaylı bir analiz için 2-B YEK algoritması kadar başarılı olmadığı görülür. Tablo 7.11 ve 7.12 den, geliştirilen kafes süzgeç yapısının en küçük uzaklık ve normlara sahip olduğu görülmektedir.



8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

8.1 Sonuçlar

Bu tezde, 2-B'lu çeyrek-düzlem AR alanların tam olarak modellenmesini sağlayan dört öngörü hata alanına dayalı bir kafes süzgeç yapısı geliştirilmiştir. 2-B'lu AR alanların modellenmesinde yansıma katsayılarının ilk kullanımı Marzetta (1980) tarafından gerçekleştirilmiştir. Parker ve Kayran'ın geliştirdiği dört öngörü hata alanına dayalı kafes süzgeç yapısı (Parker et.al., 1984) her bir katta üç yansıma parametresi tanımlar. Diğer bir deyişle, tüm kafes süzgeç için dört adet öngörü hata alanı mevcuttur. Bu nedenle, bu yapı üç-parametrelili kafes süzgeç (ÜPKS) olarak isimlendirilir. Ancak, 2-B'un doğal yapısından dolayı, veri destek bölgesindeki nokta sayısı 1-B'ta olduğu gibi sabit bir şekilde değil, karesel olarak artar. Oysa, üç-parametrelili kafes süzgeçte tanımlı öngörü hata alanları yalnızca yineleme yönleri üzerindeki noktaların taşıdığı bilgileri elde etmek için kullanılırlar. Bu nedenle, bu yönler üzerindeki bileşenleri baskın olan 2-B çeyrek-düzlem AR alanlar bu kafes süzgeç yapısı ile iyi bir şekilde modellenilebilir. Aksi taktirde, yapı hatalı sonuçlar üretir. Üç-parametrelili kafes süzgeç yapısı parametre sayısının yetersizliğinden dolayı, diklik özelliğini sağlamaz ve aynı sayıda değişik öngörü hata alanlarının kullanılmasıyla daha iyi başarımlar gösteren kafes süzgeçler elde edilebilir. 2-B AR alanı tam olarak modelleyebilmek için destek bölgesine yeni eklenen nokta sayısı kadar yansıma parametresi dolayısıyla öngörü hata alanı kafes süzgece eklenmelidir. Destek bölgesine yeni eklenen noktalara ilişkin dört çeyrek-düzlem öngörü hata alanının içerisinde gizlidir. Bu hata alanlarında gizlenen bilgileri çıkarmak için, yeni yardımcı öngörü hata alanları, bu dört öngörü hata alanını geciktirerek dolayısıyla, yineleme yönlerini bu noktaları öngörecektir şekilde değiştirilerek elde edilir. Son yıllarda, bu yaklaşımı kullanan, köşegen yapıdaki genişletilmiş kafes süzgeç (KYGK), dik yapıdaki genişletilmiş kafes süzgeç (DYGK) ve geliştirilmiş kafes süzgeç (GKS) gibi kafes süzgeç yapıları ortaya çıkmıştır. Ancak bu kafes süzgeç yapılarında da, yansıma parametrelerinin sayısını artırılmış olmasına karşılık, artan derecelerde yeni yansıma katsayıları tanımlamadıklarından tüm AR alanları modelleyemezler.

Geliştirilen kafes süzgeç yapısında, model destek bölgesinde artan sayıdaki noktaları modelleyebilmek için dört temel öngörü hata alanı, her bir derecede bir başlangıç koşuluna göre uygun biçimde geciktirilerek, kafes süzgece yeni yardımcı hata alanları eklenir. Daha önceki derecelerde tanımlanan yardımcı hata alanları ise, bir sonraki dereceyi elde etmek için güncelleştirilir. Böylece, model destek bölgesindeki her



noktaya bağımsız bir kafes süzgeç yansıma parametresi karşılık düşürüldüğünden 2-B çeyrek düzlem AR model tam olarak modellenabilir. Böylece, geliştirilen kafes süzgeç yapısı, diğer dört alanlı kafes süzgeç algoritmalarının sağlayamadığı diklik özelliğini sağlar. Öte yandan, bu kafes süzgeç yapısı tek çözüm değildir. Dört öngörü hata alanını esas alarak, bu diklik özelliğini sağlayan başka kafes süzgeç yapıları da mümkündür. Ancak elde edilen kafes süzgeç yapısının modüler olması ve N. dereceye ilişkin tek bir yayılım eşitliğinin yazılabilmesi gözönüne alındığında, aynı başarıyı gösteren dört değişik kafes süzgeç yapısı elde edilebilir. Bununla beraber, Bölüm 4. te verilen sınırlamalar ışığında, başlangıç koşulları herbir derecede keyfi seçilerek, N. derece için 2^N değişik kafes süzgeç yapısı bulunabilir.

Üç-parametrelili kafes süzgeç yapısının önemli dezavantajlarından biriside, veri alanına ilişkin özilişki örneklerinin dört çeyrek-düzlemde de simetrik olduğu varsayımdır. Bu varsayım çok özel bir durumdur ve pratikte çoğunlukla gerçekleşmez. Gerçekte özilişki işlevi yalnızca karşılıklı çeyrek düzlemlerde (birinci-üçüncü ve ikinci-dördüncü çeyrek-düzlemler) simetriktir. Bu durum, 2-B spektral çarpanlara ayırma ile de uyumludur (Ekstrom, 1976). Geliştirilen kafes süzgeç yapısında bu durum gözönüne alınarak, iki ayrı yansıma parametresi kümesi tanımlanır. Böylece birinci- ve ikinci-çeyrek düzlemlere ilişkin güç spektrumları ayrı ayrı elde edilir.

Geliştirilen kafes süzgeç yapısının elde edilmesinde, öncelikle boşluklu işlevlerden yararlanılmıştır. Boşluklu işlevler, boşluk koşullarıyla birlikte, diklik eşitlikleri ile aynıdır. Diklik eşitliklerini doğrudan doğruya çözmek yerine, boşluklu işlevler kullanılarak yinelemeli bir algoritma oluşturulabilir. Bu algoritma Schur algoritması olarak bilinir. Bölüm 3'te, $(N - 1)$. derece 2-B boşluklu işlevlerin doğrusal birleşimi kullanılarak, N. derece boşluklu işlevlerin elde edildiği yinelemeli bir yapı oluşturulmuştur. Elde edilen kafes süzgeç yapısına ilişkin yansıma parametreleri, N. derece boşluk koşullarının sağlanmasıyla elde edilir. Öte yandan, N. derece diklik eşitliklerinden farklı olarak, bu yinelemeli yapıda N. derece boşluklu işlevleri elde edebilmek için model destek bölgesindeki parametre sayısı kadar yansıma katsayısı tanımlamak gerekmez. N. derecedeki boşluklu işlevler, $(N - 1)$. derecedeki boşluklu işlevlerin doğrusal birleşimi ile elde edilirken daima boşluk olan $(N - 1)^2$ adet boşluğa sahip olduklarından, gerekli boşluk koşulları, dolayısıyla bunları sağlamak gerekli yansıma parametreleri sayısı $(N + 1)^2 - (N - 1)^2 - 1 = 4N - 1$ olacaktır. böylece hesaplama miktarında önemli ölçüde azalma olacaktır. Ancak, ne yazıkki, artan derecelerde tanımlanan yardımcı boşluklu işlevlerin güncelleştirilmesi için gerekli yardımcı yansıma katsayılarını hesaplanması bu avantajı ortadan kaldırmaktadır.

Bölüm 7 de, modellenecek 2-B AR alana ilişkin özilişki işlevinden, diklik eşitliklerinin doğrudan çözülmesi ile edilen ve 2-B Schur algoritması kullanılarak elde edilen sonuçların aynı olduğu görülür. Buda, geliştirilen edilen kafes süzgeç yapısının doğruluğunu göstermektedir.

Aynı kafes süzgeç yapısının bağımsız olarak, hata alanları uzayında geometrik yaklaşımlarla elde edilmesi Bölüm 4. de gösterilmiştir. Elde edilen kafes süzgeç yapısının girişine, 2-B Schur algoritmasından farklı olarak veri alanı uygulanır. Bu nedenle, gerçek özilişki örneklerinin bilinmediği durumlarda 2-B yinelemeli



enküçük-kareler kafes süzgeç algoritması 2-B Schur algoritmasına, dolayısıyla diklik eşitliklerinin çözümüne göre daha iyi sonuç üretir.

Geliştirilen kafes süzgeç yapısının 2-B çeyrek-düzlem AR alanları tam olarak modelleyebilmesine karşılık optimum olmayan algoritmalara göre karmaşıklığı daha fazladır. Ancak, artan derecelerde, kafes süzgece eklenen yansıma katsayıları sayısını azaltarak karmaşıklığı daha az olan fakat diğerleri gibi optimal olmayan kafes süzgeç yapıları kolaylıkla elde edilebilir.

Öte yandan algoritmanın bir dezavantajıda, hata alanlarının dereceden dereceye kendilerine dik olmalarına karşılık, diğer dört alanlı algoritmalarda olduğu gibi birbirlerine dik olmamalarıdır. Buda ilişki matrisinin inversiyonunu zorunlu kılar.

Bununla beraber geliştirilen kafes süzgeç yapısı, dik kafes süzgeç yapılarının (Lenk et.al., 1985,1986) aksine üç-parametrelili kafes süzgeç yapısında olduğu gibi dört öngörü hata alanını aynı anda hesaplamaktadır.

Geliştirilen kafes süzgeç yapısı, daha yüksek boyutlardaki uygulamalarda kullanılmak için kolaylıkla yüksek boyutlara genelleştirilebilir. Bölüm 6 da, 2-B Schur algoritmasının temel teorisi korunarak 3-B'ta genelleştirilmesi gösterilmiştir.

8.2 Öneriler

2-B YEK süzgeç algoritması, spektrum kestirimi, görüntü işleme, sistem tanımlama, öngörülü-kontrol sistemleri için AR modelleme gibi çeşitli uygulama alanlarında kullanılabilir. Ayrıca verilen bir genlik karaktersitiğine göre 2-B yinelemeli sayısal süzgeçlerin tasarlanmasında, 2-B YEK algoritması ile elde edilen kafes süzgeç parametrelerinden yararlanılabilir. 2-B YEK algoritmasının yalnızca çeyrek düzlem AR alanların modellemesinde kullanılması, uygulama alanlarını kısıtlamaktadır. Yeni temel boşluklu işlevler tanımlanarak algoritma asimetric yarı-düzlem kafes süzgeç modelleme için düzenlenebilir. Ayrıca, bu kafes süzgeç yapısı 2-B ARMA modellemede kullanılmak için uygunlaştırılabilir. Geliştirilen 2-B YEK algoritmasının, enine (transversal) süzgeçler aracılığıyla uyarlamalı bir 2-B kafes süzgeç yapısına dönüştürülmesi mümkündür.

9. Deville, P., Yegor, A., and Kallala, T., 1976, "On the generalized 2-D Levinson realization algorithm for optimal linear predictors based on a network synthesis approach", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-23, pp. 681-677.
10. Dudgeon, D.E., December 1983, "An iterative implementation for 3-D digital filters", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-31, pp. 1285-1292.
11. Dudgeon, D.E. and Marmorek, R.M., 1984, Multidimensional signal processing, Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.



KAYNAKLAR

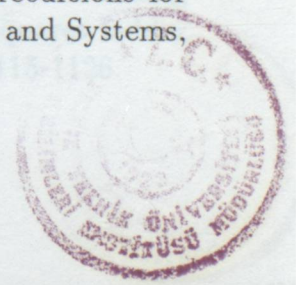
- 1- Abramatic, J. -F., Germain,F., and Rosencher,E., October 1979, "Design of Two-Dimensional Separable Denominator Recursive Filters", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-27, pp.445-453,
- 2- Alexander, W. E., and Press, S. A., January 1980, "Stability Analysis of two-dimensional Digital Recursive Filters", IEEE Trans. Circuit and Systems, vol. CAS-27, pp.11-15.
- 3- Anderson, B.D.O., and Jury, E. I., August 1973, "Stability Test for Two-Dimensional Recursive Filters", IEEE Trans. Aud. Electr, vol. AU-21, pp.366-372.
- 4- Bose, N.K., April 1990, "Multidimensional digital signal processing: Problems, progress, and future scopes", Proc. IEEE, vol.78, pp. 590-597.
- 5- Cadzow, J.A., and Ogino,K. ,June 1981, "Two-dimensional spectral estimation", IEEE Trans. Acoust.,Speech, Signal Processing, vol.ASSP -29, pp.396-401.
- 6- Chakrabarti, S., and Mitra, S.K., June 1977, "Design of Two-Dimensional digital filters via spectral transformations", Proc IEEE, vol.65, pp.905-914.
- 7- Costa, J.M., and Venetsanoloulos,A.N., December 1974, "Design of circularly symmetric Two-Dimensional Recursive Filters", IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-22, pp. 432-443.
- 8- Dewilde, P., Fokkema, J.T., and Widya, I., 1981, "Inverse scattering and linear prediction: The continuous time case",in M. Hazewinkel and J. C. Willems, Eds., Stochastic Systems: The mathematics of filtering and Identification and Applications, Reidel, Boston.
- 9- Dewilde, P., Vieira, A., and Kailath, T., 1978, "On the generalized Szegő 2-D Levinson realization algorithm for optimal linear predictors based on a network synthesis approach", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-25, pp. 663-675.
- 10- Dudgeon, D.E., December 1980, " An Iterative Implementation for 2-D digital Filters", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-28, pp.666-671.
- 11- Dudgeon, D.E., and Merserau, R.M., 1984, Multidimensional signal processing, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.



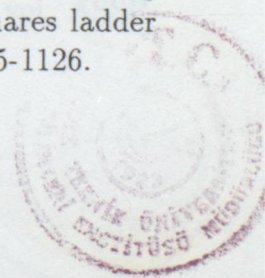
- 12- Ekstrom, M.P., and Woods, J.W., April 1976, " Two-Dimensional spectral factorization with applications in recursive digital filtering", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-24, pp.115-128.
- 13- Ekstrom, M.P., and Twogood, R.F., 1977, " A Stability Test for 2-D Recursive Digital Filters using Complex Cepstrum", IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, ICASSP' 77
- 14- Ekstrom, M.P., Twogood, R.F., and Woods, J.W., February 1980, " Two-Dimensional recursive Filter Design- A spectral factorization Approach", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-28, pp.16-26.
- 15- Ekstrom, M.P., February 1982, " Realizable Wiener filtering in two dimensions", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP -30, pp.31-40.
- 16- Ertüzün, A., Kayran, A.H., and Panayırçı, E., June 1992, "An improved 2-D lattice filter and its entropy relations", Signal Processing, vol.28, pp 1-24.
- 17- Ertüzün, A., Kayran, A.H., and Panayırçı, E., 1995, "Further improved 2-D lattice structure employing missing reflection coefficients", Circuits, systems and Signal Processing, vol. 14, pp. 473-494
- 18- Friedlander, B., August 1982, "Lattice filter for adaptive processing", Proc. IEEE, Vol. 70, pp. 829-867.
- 19- Haykin, S., 1986, Adaptive Filter Theory, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.
- 20- Helson, H., and lowdenslager, D., June 1958, "Prediction theory and Fourier series in several variables", Part I, Acta Mathematica, uppsala, vol.99, pp. 165-202; ; Part II, vol.106, pp.175-213, Dec. 1961.
- 21- Halmos, P.R., 1958, Finite-dimensional vector spaces, Van Nostrand, Newyork.
- 22- Hsieh, C.H., Lu, P.C., and, Liou, W.G., December 1989, "Adaptive predictive image coding using local characteristics", Proc. IEEE, vol. 136, pt.I., No.6, pp.385-390.
- 23- Huang, T.S., June 1972, "Stability of Two-Dimensional Recursive Filters", IEEE Trans. Aud., Electr., vol. AU-20, pp.158-163.
- 24- Jackson, L.B., and Chien, H.C., April 1979, "Frequency and bearing estimation by two -dimensional linear prediction", in Proc ICASSP 79 (Washington,DC), pp.673-676.
- 25- Jain, A.K., 1984, Fundamentals of Digital Image Processing, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.



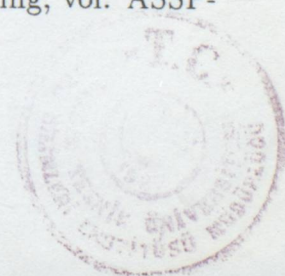
- 26- Jain, A.K., and Ranganath, S., May 1978, "Two-dimensional spectral estimation", in proc. RADC Spectrum Estimation Workshop, Rome, pp.151-157.
- 27- Justice, J.H., June 1977, "A Levinson type algorithm for two-dimensional Wiener filtering using bivariate Szegő polynomials", Proc. IEEE, vol.65, pp.882-886.
- 28- Kailath, T., 1986, Ed. Modern Signal Processing, Hemisphere Publishing, Washington, DC.
- 29- Kailath, T., Bruckstein, A.M., and Morgan, D., 1986, "Fast matrix factorization via discrete transmission-lines", Linear Algebra and Appl., vol. 75, pp. 1-25.
- 30- Kailath, T., 1985, "Signal Processing in the VLSI Era" in VLSI and Modern Signal Processing, eds. S.Y. Kung, H. Whitehouse and T. Kailath, Prentice-Hall, NJ.
- 31- Kailath, T., 1986, "A theorem of I. Schur and its impact on modern signal Processing", The Schur Memorial Volume, Operator Theory: Advances and Applications, vol.18, I. Gohberg Ed., Springer Verlag, pp. 9-30.
- 32- Kayran, A.H., December 1989, "Design of 2-D recursive filters with asymmetric half-plane lattice modeling", IEE Proceedings, Part G, vol. 137, pp. 427-438.
- 33- Kumaresan, R., and Tufts, W., November 1981, "A two-dimensional technique for frequency number estimation", Proc IEEE, vol.69, pp.1515-1517.
- 34- Küçük, Ü. and Kayran, A. H., 1993, "Two-dimensional Schur recursion", Proceedings of the ECCTD'93, pp.359-362.
- 35- Kwan, H.K., and Lui, Y.C., March 1989, "Lattice Implementation of two-dimensional recursive digital filters", IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-36, pp.383-386.
- 36- Kwan, H.K., Lui, Y.C., 1989 "Lattice predictive modeling of 3-D random fields with application to interframe predictive coding of picture sequences", Int. Journal of Electronics, vol.66, No.4, pp.489-505
- 37- Lee, D. T., Morf, M. and Friedlander, B., June 1981, "Recursive least squares ladder estimation algorithms", IEEE trans. on Acoustics Signal and Speech Proc., vol. ASSP-29 pp. 627-641.
- 38- Lenk, P.J., and Parker, S.R., November 1985, "Orthogonal two-dimensional Lattice filters", 19th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, pp. 278-282, Pacific Grove, CA.
- 39- Lenk, P.J., and Parker, S.R., May 1986, "Schur and Levinson recursions for two-dimensional data fields", Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, pp. 92-95, San Jose, CA.



- 40- Lev-Ari, H. and Parker, S.R., March 1985, "Lattice filter models of two-dimensional fields", Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech, Signal Processing, pp. 1317-1320, Tampa, Florida.
- 41- Lev-Ari, H. and Parker, S.R., May 1986, "Stable and efficient 2-D Lattice filter", Proc. IEEE Symp. on Circuits and Systems, pp. 695-698, San Jose, CA.
- 42- Lim, J.S., 1984, Two-Dimensional Signal and Image Processing, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.
- 43- Manry, T. and Aggarwal, J.K., 1974, "Picture processing using one-dimensional implementations of discrete planar filters", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-22, pp. 164-173.
- 44- Maria, G.A., and Fahmi, M.M., October 1973, "On Stability of Two-Dimensional digital Filters", IEEE Trans. Aud. Electr, vol. AU-21, pp.471-472.
- 45- Markel, J.D., and Gray, A.H.Jr., 1976, Linear Prediction of Speech, New York, Springer- Verlag.
- 46- Marzetta, T.L., Dec. 1980, Two-dimensional linear prediction: Autocorrelation arrays, minimum phase prediction error filters, and reflection coefficient arrays", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP -28, pp. 725-733.
- 47- McClellan, J.H., September 1982, "Multi-Dimensional Spectral estimation", Proc. IEEE, vol.70, pp.1029-1039.
- 48- McGuffin, B.F. and Lui, B., Jan 1989, "An efficient algorithm for two-dimensional autoregressive spectrum estimation ", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-37, pp.106-117
- 49- Merserau, R.M., and Dudgeon, D.E., 1974, "stability test for Two-Dimensional sequences as One-dimendional sequences", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-22 pp. 320-325, .
- 50- Merserau, R.M., February 1980, "The Design of Arbitrary 2-D Zero-Phase FIR filters using Transformations", IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-27, pp.142-144.
- 51- Merserau, R.M., and Dudgeon, D.E., April 1975, "Two-Dimensional Digital Filtering", Proc. IEEE, vol.63, pp.610-623,
- 52- Moro, H., Watanabe, T., Taguchi, A., Hamada, N., 1989, "On the adaptive algorithm and its convergent rate improvement of 2-D lattice filter", ECCTD'89, pp.430-434.
- 53- Nam, M.N., and O'Neill, W.D., August 1987, "Adaptive linear predictive coding of time-varying images using multi-dimensional recursive least squares ladder filters", IEEE Journal of Sel. Areas in Comm., vol. SAC-5, pp.1115-1126.



- 54- Newmann, W.I., 1977, "A new method of multi-dimensional power spectral analysis", *Astrm. Astrophys.*, vol.54, pp.369-380.
- 55- Orfanidis, S.J., 1988, *Optimum Signal Processing*, MacMillan, NewYork.
- 56- O'Connor, B.T., and Huang, T.S., December 1978, "Stability of general Two-Dimensional Recursive Digital Filters", *IEEE Trans. Acoust.,Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP -26, pp. 550-560.
- 57- Parker, S.R., Kayran, A.H., and Dokanakolu, E., 1985, " Asymmetric half-plane AutoRegressive modelling of 2-D fields using lattice structures", *Proc. Int. Symp. on circuits and systems, ISCAS 85*, pp.1101-1104.
- 58- Parker, S.R., and Kayran, A.H., Aug.1984, "Lattice parameter autoregressive modeling of 2-D fields, Part I: The quarter plane case", *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, Vol.ASSP-32, pp. 872-885,
- 59- Petersen, D.P. and Middleton, D., 1962, "Sampling and reconstruction of wavenumber -limited functions in n-dimensional Eucledian spaces", *Information and Control*, vol.5, pp. 279-323.
- 60- Robinson, E.A., and Treitel, S., April 1980, "Maximum entropy and the relationship of the partial autocorrelation to the reflection coefficients of a layered system ", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing.*, Vol. ASSP-28, pp. 224-235,
- 61- Roucos, S. and Childers, C.G., 1979, "A two-dimensional maximum entropy spectral estimator", in *Proc ICASSP 79 (Washington,DC, April 1979)*, pp.669-672.
- 62- Shanks, J.L., Treitel, S. and Justice, J.H., Oct. 1972, "Stability and Synthesis of Two -Dimensional Recursive Filters",*IEEE Trans. Audio Electr.*, vol. AU-20, pp.115-128.
- 63- Strinzis, M.G., August 1977, "Tests of stability of Multi-Dimensional Filters", *IEEE Trans. Circuit and Systems*, vol. CAS-24, pp.432-437.
- 64- Therrien, C.W., and El-Shaer, H.T., Nov 1989, "A direct algorihm for computing 2-D power spectrum estimates", *IEEE Trans. Acoust.,Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-37, pp. 1795-1798.
- 65- Therrien, C.W., June 1981, "Relation between 2-D and multichannel linear prediction", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 454-456.
- 66- Therrien, C.W., and El-Shaer, H.T., Nov 1989, "Multichannel 2-D AR Spectrum estimates", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-37, pp. 1798-1800.



ÖZGEÇMİŞ

Ünal KÜÇÜK

Elektronik ve Haberleşme Yüksek Mühendisi

Doğum Tarihi

25 Mart 1963

Doğum Yeri

Vakfıkebir, Trabzon

İlkokul

Hürriyet İlkokulu
(1970-1975)

Ortaokul

Hürriyet Ortaokulu
(1975-1978)

Lise

İstanbul Maçka End. ve Meslek Lisesi
(1978-1981)

Üniversite

Yıldız Üniversitesi
(1982-1986)

Yüksek Lisans

Yıldız Üniversitesi
(1986-1988)

Görevi

Araştırma Görevlisi
Yıldız Teknik Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Fakültesi
Elektronik ve Haberleşme Bölümü
Haberleşme Anabilim Dalı

Yabancı Dili

İngilizce



