

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Differensiyel Oyun. ve Uzl.
İşlev. Uyg. Yaki.

Doktora Tezi

Taner Özbaykal

R371
4

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

200.000

DOKTORA TEZİ

**DİFFERANSİYEL OYUNLAR VE UZLAŞMA
İŞLEVLERİNE UYGULAMA YAKLAŞIMI**

Taner ÖZBAYKAL
Yüksek Mühendis Albay

İSTANBUL 1988

R371-4

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

R 371

Kot

:.....4.....

Alındığı Yer

:.....Y.T...Ü.....

Tarih

:.....12.9.1995.....

Fatura

:.....-.....

Fiyatı

:.....200.000 TL.....

Ayniyat No

:.....1-15.....

Kayıt No

:.....51639.....

UDC

:.....

Ek

:.....

Y. T. Ü.

KÜTÜPHANE DOK. DAİ. BAŞKANLIĞI

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

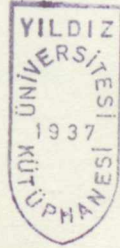
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

D.B. No 50473

DOKTORA TEZİ

Sayfa ad: 92.

**DİFFERANSİYEL OYUNLAR VE UZLAŞMA
İŞLEVLERİNE UYGULAMA YAKLAŞIMI**



Taner ÖZBAYKAL
Yüksek Mühendis Albay

İSTANBUL 1988

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DIFFERANSİYEL OYUNLAR VE UZLAŞMA
İŞLEVLERİNE UYGULAMA YAKLAŞIMI

Taner ÖZBAYKAL
Yüksek Mühendis Albay

İSTANBUL 1988

DİZİN

ÖZET

İNGİLİZCE ÖZET

I. BÖLÜM

OYUN KURAMI

1.1. Oyun Kuramının Genel Yapısı

1.2. Oyunun Kuralları

1.3. Oyunun Genişletilmiş Formu

1.4. Strateji ve Normal Form

1.5. Koalisyon Formu ve Uzlaşma

II. BÖLÜM

DİFFERANSİYEL OYUNLAR

2.1. Giriş

2.2. Toplam Sıfırlı Differansiyel Oyunlar

2.3. Tam Durum Ölçülü Kaçma-Takip Etme

2.4. Sıfır Olmayan Toplamlı ve Stokostik Oyunlar

III. BÖLÜM

UZLAŞMA İŞLEVLERİNE DİFFERANSİYEL OYUN YAKLAŞIMI

3.1. Genel Yaklaşımlar

3.2. Modelin Formülasyonu

3.3. Denge Sınıfı

IV. BÖLÜM

BİR TOPLU İŞ SÖZLEŞMESİ İÇİN BİR DİFFERANSİYEL OYUN MODELİ UYGULAMASI

4.1. Nash Denge Modeli

4.2. Uygulama

KAYNAKÇA

ÖZGEÇMİŞ

Ö Z E T

Bu Doktora tezinde işçi-işveren uzlaşması problemlerine optimizasyon yaklaşımları incelenmektedir. İşçi-işveren uzlaşması, uzlaşma durumlarının özel bir hali olup, Ekonomi-politikada önemli bir problem olarak bilim adamlarının dikkatini üzerine çekmiştir. Uzlaşma problemleri matematik modeller yardımı ile incelenebildiği taktirde çıkar çatışmalarına yönelik problemler daha etkin şekilde çözülmüş olabilecektir. Problemin çözümü için öngörülen yaklaşımın; oyuncuların bir uzlaşma durumunda çıkarlarını optimize etmek istemelerine Oyun Kuramı modelini uygulama şeklindedir. Bu husus Nash Denge Differansiyel Oyun modeli geliştirilerek gerçekleştirilmiştir.

Birinci Bölümde Oyun Kuramı ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

İkinci Bölümde mevcut kaynaklardan istifade edilerek Differansiyel Oyunlar gözden geçirilmiştir.

Üçüncü Bölümde Differansiyel Oyun Kavramları kullanılarak uzlaşma problemleri incelenmiştir.

Çalışmanın son bölümünde; işçi-işveren uzlaşmasının dinamik oyun modeli geliştirilmiş ve bir bilgisayar programı ile model, bir uzlaşma vakasına uygulanmıştır. Model çıktılarının gerçek veriler ile mukayesesi yapılmıştır.

SUMMARY

This PHD thesis gives the optimization models to the Labor-Management bargaining problems. Labor-Management bargaining is a special case of bargaining, an important problem in economics and politics which attracts the attention of many scholars. If one analyse bargaining problems through the use of mathematical models, may be able to have conflicts resolved in an efficient way. The approach consists of game theoretic in which the players endeavor to optimize their utilities in a bargaining situation. This is accomplished with the Nash equilibrium differential game model.

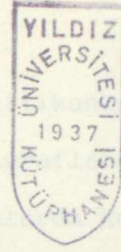
In the first introductory chapter, basic concepts of the theory of games have been introduced.

In the second chapter, the differential games have been reviewed using the existing literatures.

In the third chapter, the bargaining problems were analyzed with the concepts of differential games.

And in the final chapter, Labor-Management bargaining was modeled as a dynamic game and the model has been applied to a bargaining case with the use of computer programming. The final results are compared with the true data.

I. BÖLÜM
OYUN KURAMI



1.1. OYUN KURAMININ GENEL YAPISI :

Oyun Kuramı başlangıcında yanlış verilen bir isim olarak ortaya çıkmıştır. Bu yanlışlığın matematiksel ve matematiksel olmayan kültürlerin çatışması sonucunda doğmuş olduğu söylenebilir. Von Neumann, poker ve satranç oyunları ile kurduğu benzerlik dolayısı ile oyun kuramı isminin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Anılan bilim adamı bu oyunları esas olarak alıp iki şahıslı toplamı sıfır oyun kuramı ile ilgili kavram ve notasyonun gelişmesini sağlamıştır. Satranç gibi çatısı tam olarak tanımlanmış oyunlar, oyun kuramında, açık kesin bir dil için başlangıç noktasını oluşturmıştır. Oyun Kuramının; bilimsel kullanım amacına yönelik dili ile sosyal amaca yönelik olanı arasında genelde bir çatışma durumu olmuştur. Birçok kimse için "Oyun" eğlenmeye yönelik oyunlar ile eş anlamlı kabul edilir. Bunun ötesinde askeri eğitimin önemli bir ögesini oluşturan "Harb Oyunları" adındaki oyunda çoğu kimseyi yapılan iş konusunda şüphede bırakmıştır. Baba, oğul Von Reisswitz'lerin tamamen Harp Oyunlarına yönelik çalışmaları, oyun kuramının başlangıcı olarak kabul edilir. Ancak Prusya Ordusu Genelkurmay Başkanı Von Meuffling "Hiç bir zaman oyun olarak kabul edilmemelidir, Harp eğitimidir, Bunu tüm Orduların kullanmasını ısrarla tavsiye ederim" diyene kadar kabulü ve uygulaması garanti edilememiştir.

1.2. OYUNUN KURALLARI :

Von Neumann ve Morgenstern tarafından stratejik durumları açıklamak üzere kullanılan yöntemde modellerde kullanmak için her bir farklı seviyedeki skop, ayrıntı ve farklı amaçlara bağlı olarak çok kişili karşıt amaçlı optimizasyonun 3 değişik şekli verilmiştir. Bunlar;

- (1) Oyunun genişletilmiş formu,
- (2) Oyunun normal ve stratejik formu,
- (3) Koalisyon veya karakteristik fonksiyon formu,

başlıkları ile bilinirler. Birincisi öncelikle işlev, bilgi ve davranış

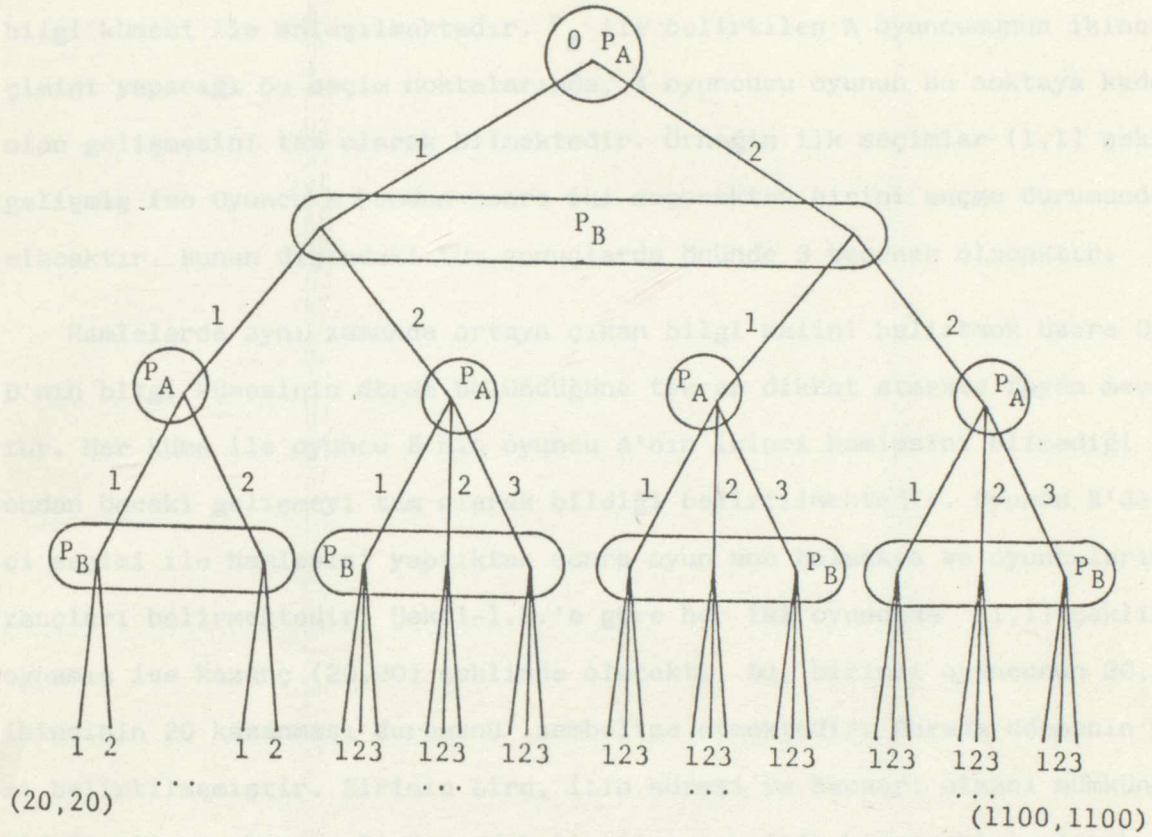
ayrıntılar ile ilgilidir. İkincisi Stratejik politikanın analizi için dizayn edilmiştir. Üçüncüsü ise karşılıklı uzlaşmanın taraflara ortak bir fayda sağlamasının mümkün olduğu uzlaşma ve benzeri durumlarda kullanılmaktadır. Gerek kişi ve kurumlar arası ve gerekse uluslararası uzlaşmalarda önemli bir özellik müşterek çıkarların bulunmasıdır. Uzlaşmada iki unsur çatışma ve işbirliği olarak belirir. Taraflar pastadan büyük parça almak istemekle birlikte işbirliği ile pastanın kendisinin büyütülmesi mümkün olabilir. Çıkarların birbirinin tamamen zıttı olması hali genelde taktik seviyede, seyrek olarak ortaya çıkar.

1.3. OYUNUN GENİŞLETİLMİŞ FORMU :

Başlangıcında her oyuncunun iki seçenekten birini seçme durumunda olduğu, kuralları tam olarak tanımlanmış bir oyunu ele alalım. Seçeneklerden birinin seçilmesi işlevi "Hamle" olarak adlandırılacaktır. Oyuncuların hamleleri aynı anda, birlikte yapılmaktadır. Oyunculardan I.ci MAVİ, II.ci KIRMIZI olarak adlandırılabilir. Her oyuncu karşı tarafın ne seçeceğini bilmeden sadece kendi seçeneğini düşünmektedir. Her iki oyuncu hamlelerini yaptıktan sonra sonuçla aydınlatılmaktadırlar. Bundan sonra her ikiside ikazlanarak sonraki hamlelerini yapmaları sağlanmaktadır. Orijinal seçenekleri 1 ve 2 olarak adlandırdım. İlk hamlede her iki oyuncuda 1.seçeneklerini kullanmışlar ise oyunun ikinci hamlesinde ikisinin de seçim için iki seçeneği olduğu varsayalım. İlk hamlede bunun dışında bir seçim yapılmış ise iki oyuncunun da ikinci hamle için üçer seçeneği olduğunu varsayalım. İkinci hamle yapıldıktan sonra oyun son bulmakta ve oyuncuların herbirinin bir kazancı olmaktadır.

Yukardaki açıklamada verilen basit kavramlar Oyuncu, Seçenek, Seçim, Hamle, Bilgi ve Kazanç şeklinde sıralanmaktadır.

Oyunun tamamen ayrıntılı anatomisi oyun ağacı adı altındaki grafikte verilmektedir. Oyun ağacı Şekil-1.1.'de verilmiştir.



ŞEKİL 1.1.

Üzerinde SIFIR Yazılı nod oyunun başlangıç yerini göstermektedir. Her nod, seçimin yapıldığı nokta olarak belirtilir. Her noddan aşağı doğru yayılan kollar, o seçim nodundaki seçeneklerden birini belirtir. Her nokta, orada karar verecek oyuncunun adı ile adlandırılır. Bu nedenle ilk seçim oyuncu A'ya verilmiş ve nokta P_A olarak adlandırılmıştır. Sonraki iki nod P_B ile adlandırılmış, her ikisinin de aynı bilgi kümesi içinde olduğunu belirtmek üzere elipse benzer bir kutu içine alınmıştır. Bilgi kümesi (daha uygun bir ifade ile "Eksik bilgi kümesi") seçim yapacak oyuncunun ayırt edemediği seçim noktalarından oluşan bir kümedir. Bu düzenlemede her ikisi seçimlerini yapmadan önce diğerinin seçtiğini bilmediğinden A veya B'nin ilk başlamasının bir anlamı olmayacaktır. Her iki oyuncunun birinci seçimlerini yaptıktan sonra bilgi

sahibi oldukları, ağaçta aşağı doğru ikinci safhadaki dört adet bir elemanlı bilgi kümesi ile anlaşılmaktadır. P_A ile belirtilen A oyuncusunun ikinci seçimini yapacağı bu seçim noktalarında, A oyuncusu oyunun bu noktaya kadar olan gelişmesini tam olarak bilmektedir. Örneğin ilk seçimler (1,1) şeklinde gelişmiş ise Oyuncu A bundan sonra iki seçenekten birini seçme durumunda olacaktır. Bunun dışındaki tüm sonuçlarda önünde 3 seçenek olacaktır.

Hamlelerde aynı zamanda ortaya çıkan bilgi halini belirtmek üzere Oyuncu B'nin bilgi kümesinin dörde bölündüğüne tekrar dikkat etmekte fayda mevcuttur. Her küme ile oyuncu B'nin oyuncu A'nın ikinci hamlesini bilmediği ancak ondan önceki gelişmeyi tam olarak bildiği belirtilmektedir. Oyuncu B'de ikinci seçimi ile hamlesini yaptıktan sonra oyun son bulmakta ve oyuncuların kazançları belirlenmektedir. Şekil-1.1.'e göre her iki oyuncuda (1,1) şeklinde oynamış ise kazanç (20,20) şeklinde olacaktır. Bu, birinci oyuncunun 20, ikincinin 20 kazanması durumunu sembolize etmektedir. Burada ödemenin birimi belirtilmemiştir. Birimin Lira, izin süresi ve benzeri olması mümkündür. Hedeflerin ve kazanç ölçüsünün belirtilmesi kritik bir problem olarak ortaya çıkar. Her iki oyuncu ilk hamlelerini (2,2) ve ikinci hamlelerini (3,3) şeklinde oynasalar idi bu durumda kazanç (-1100,-1100) olarak ortaya çıkacaktır. Her bitiş nodunda benzer şekilde bir çift sayının olması gereklidir. Şekilde 31 adet olması gereken kazanç çiftlerinden sadece iki tanesi verilmiştir.

Orijinden başlayarak, sonuç nodlarından birinde sonuçlanan bir yol, bir oyun olarak tanımlanır. Bu yol ile oyunun başından sonuna gelişme şekli tam olarak belirtilir.

Şekil 1.1'de her ne kadar ele alınmadıysa da rastgele olayların oyuna ilave edilmesi mümkündür. Örneğin P_N olarak adlanan bir oyuncu oyunda herhangi bir noktada olacak şekilde yaratılarak hamleleri önceden belirlenen bir olasılık dağılımına bağlı yaptırılabilir. Örneğin rakip iki firmanın benzer kullanım amacına sahip iki mamul maddeyi piyasaya çıkarırken üretim miktarları

1.4. STRATEJİ VE NORMAL FORM :

Kısım 1.3'de genişletilmiş formda hamle sıralaması ve bilgi koşulları ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Bazı amaçlar için bu kadar ayrıntıya gerek olmayabilir. Özellikle, stratejinin oyun kuramı kavramı bu ayrıntıların çoğunluğunu ortadan kaldırır. Bu yöntemde strateji ve kazanca ağırlık veren bir kazanç matrisi ile aynı durum değişik analitik amaçlar için belirtilmektedir. Şekil 1.1.'deki oyunun kazanç matrisi TABLO 1.1.'de verilmiştir.

Stratejinin oyun kuramı kavramı gerçekte tüm olası durumları kapsıyacak şekilde uygulanacak hareket tarzının tam planıdır. Bu tanıma diğer bir yaklaşım şekli şu şekilde olabilir : A ve B oyuncularına bağlı ajenta gruplarının olduğu varsayılınsın. Her oyuncunun kendine ait bilgi kümelerinde birer ajenta bulunduğu kabul edilmektedir. Buna göre Şekil-1.1.'de A ve B oyuncularının beşer ajentaları bulunmaktadır. Bu misala göre strateji; kendine seçim yap denildiğinde yapacağı seçimi gösteren bir el kitabı olarak kabul edilebilecek olup, tüm ajentalara verilmesi gerekmektedir. İki oyunculu ve iki hamleli basit bir misalde bile görüleceği gibi 15 strateji ortaya çıkmaktadır. Şekil 1.1.'deki genişletilmiş formdaki oyunun karşılığı normal formda 15x15'lik bir matris ile gösterilebilir. Oyuncu A için 15 strateji aşağıda verilmiştir.

Strateji 1 : "Birinci hamlemde 1.seçenek seçilecek (1,1) durumunda ikinci hamlemde 1.seçenek seçilecek (1,2) olur ise ikinci hamlemde bu defa yerine 1.seçenek seçilecek.

Bu yaklaşım tarzı; "(1,1)'den sonra 1; (1,2)'den sonra 1" şeklinde özetlenebilir. 15 stratejinin tam listesi aşağıda verilmiştir.

1. (1,1)'den sonra 1; (1,2)'den sonra 1
2. (1,1)'den sonra 1; (1,2)'den sonra 2
3. (1,1)'den sonra 1; (1,2)'den sonra 3
4. (1,1)'den sonra 2; (1,2)'den sonra 1

[illegible]

5. (1,1)'den sonra 2; (1,2)'den sonra 2
6. (1,1)'den sonra 2; (1,2)'den sonra 3
7. (2,1)'den sonra 1; (2,2)'den sonra 1
8. (2,1)'den sonra 1; (2,2)'den sonra 2
9. (2,1)'den sonra 1; (2,2)'den sonra 3
10. (2,1)'den sonra 2; (2,2)'den sonra 1
11. (2,1)'den sonra 2; (2,2)'den sonra 2
12. (2,1)'den sonra 2; (2,2)'den sonra 3
13. (2,1)'den sonra 3; (2,2)'den sonra 1
14. (2,1)'den sonra 3; (2,2)'den sonra 2
15. (2,1)'den sonra 3; (2,2)'den sonra 3

Oyun açıklayıcı olması bakımından simetrik olarak seçilmiş olup, her iki oyuncununda 15 stratejisi mevcuttur. Stratejiler 1-15 şeklinde numaralanmış olmakla birlikte stratejileri adlandırmak dışında başkaca bir özelliği bulunmamaktadır. Şekil 1.1 incelendiğinde 31 değişik oyunun olduğu görülür. Başlangıç nodundan başlayıp terminal nodunda son bulan bir yol bir oyunu oluşturur. Oyunda 31 terminal nodu olup, her terminal noda ait bir yol mevcuttur. A oyuncusuna ait 15 stratejiden herhangi biri, B'ye ait 15 stratejiden herhangi birine karşı uygulanabilir. Bu husus TABLO 1.1.'de gösterilmiştir. Tabloda sağ sütundaki numaralar A'nın, üst sıradaki numaralarda B'nin stratejileri ni göstermektedir. Örneğin her ikiside birinci stratejilerini kullandıklarını varsayalım. Buna göre her iki oyuncuda I.hamle olarak 1. seçeneklerini seçeceklerdir. Birinci hamleler sonucu (1,1) verildiğine göre her ikiside ikinci hamleleri olarak 1.seçeneği seçeceklerdir. Bu durumda oyun; Şekil 1-1'deki en sol yol olacak şekilde gelişecektir. Buna göre kazanç (20,20) olarak çıkacaktır.

Her durum için ödemelerin tamamı nasıl saptanacaktır? Strateji sonuçlarının duyarlı şekilde belirtilmesi demek 450 adet sayının tesbit edilmesi anlamına gelir. Tablo'da 34 adedi verilmekle birlikte diğerlerinin üretilmesi için bir yöntem aşağıda verilmiştir.

Deneyisel olarak; Sonuç kazançları; 1.hamle sonunda elde edilen kısmi kazancı ikinci hamle sonunda elde edilene ilave etmek şekli ile saptamak mümkündür. Kazançların bu şekilde belirlenmesi amacına yönelik olarak tablo için ödemelerin saptanması yöntemi aşağıda verilmiştir. Birinci periyottaki hamleler,

- (1,1) ise kısmi kazançlar (10,10)
- (1,2) ise kısmi kazançlar (-100,100)
- (2,1) ise kısmi kazançlar (100,-100)
- (2,2) ise kısmi kazançlar (-100,-100)

İkinci periyotta hamleler,

- (1,1) ise kısmi kazançlar (10,10)
- (1,2) ise kısmi kazançlar (-100,100)
- (1,3) ise kısmi kazançlar (-1000,1000)
- (2,1) ise kısmi kazançlar (100,-100)
- (2,2) ise kısmi kazançlar (-100,-100)
- (2,3) ise kısmi kazançlar (-1000,900)
- (3,1) ise kısmi kazançlar (1000,-1000)
- (3,2) ise kısmi kazançlar (900,-1000)
- (3,3) ise kısmi kazançlar (-1000,-1000)

Buna göre Strateji 1'in taraflarca kullanılması halinde kazançlar $(10,10) + (10,10) = (20,20)$ olur. A, Strateji 2'yi B Strateji 7'yi uygulaması durumunda ise kazançlar $(-100,100) + (100,-100) = (0,0)$ olacaktır.

Oyunda hamleler çoğaldıkça ve bilginin büyüklüğü arttıkça herdurumu kapsıyacak planların adedinin astronomik olarak artacağı görülür. Örneğin satranç gibi bir oyunda ki strateji adedi kabul edilir sınırların dışına taşacaktır. Ancak bu özellik strateji kavramının sıhhatli olmasını etkilememiştir. Mantıksal matematiki yaklaşımlarla tüm olası durumlara karşı ortaya çıkan stratejilerin tamamen dikkate alınması mümkün olmaktadır.

Oyunun normal formu önceden belirtildiği şekilde, genişletilmiş formundan geliştirilmiştir. Tablo 1.1. incelendiğinde hamleler ve bilgi kümelerine ait tüm ayrıntıların yer almadığı görülür. Burada ağırlık strateji ve kazançlara verilmiştir.

Bir takım bilgilerin iptal edilmesi dolayısı ile Normal formun her zaman genişletilmiş formdan elde edilmesi mümkündür. Ancak aksi yönde, normal formdan, genişletilmiş formun tek şekilde elde edilmesi mümkün değildir.

1.5. KOALİSYON FORMU VE UZLAŞMA :

Uzlaşma durumu söz konusu olduğunda koalisyon formu ortaya çıkmaktadır. Bu durumda dikkat, değişik grupların hak olarak talep ettikleri istekleri üzerinde toplanır. Bazı koşullarda kişilerin asgari isteklerini saptamak için uygun olabilecek bir yöntemde kötü durum analizi olabilir. Önceki örnek Şekil 1.1. üzerinden incelendiğinde A ve B oyuncular -1100'den fazlasını garanti edemekte iken birlikte 40 alabilmektedirler.

Koalisyon durumlarının belirtilmesinde bir yöntem, her koalisyona bir değer tahsis eden küme fonksiyonunun kullanılması şeklinde olabilir ve n oyuncu için $2^n - 1$ değer ortaya çıkacaktır. Bu nedenle 2 oyuncu için değerler;

$$V(A) = -1100$$

$$V(B) = -1100$$

$$V(A,B) = 40$$

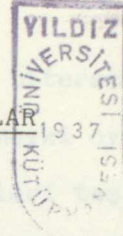
olur.

Dolayısı ile iki oyuncu olması halinde ayrı istekler ve koalisyon isteği yeterli bilgiyi sağlamış olur. Üç ve daha fazla oyuncu olması halinde koalisyonların önemi artacaktır. Örneğin 5 ülke arasındaki bir uzlaşma durumunda 31 alt grubun dikkate alınması gerekir.

Bu oyun yapısı içinde; Genişletilmiş formdan Normal forma geçerken olduğu gibi, Normal formdan koalisyon formuna geçerken bilgi eksilmesi, ayrıntıların atılması söz konusu olacaktır. Önceki kısımda belirtildiği gibi genişletilmiş formdan, Normal forma geçişte doğal ve tek bir yol mevcuttur. Ancak kötü durum

2. BÖLÜM

DİFFERANSİYEL OYUNLAR



2.1. GİRİŞ :

Differansiyel oyunlar kavramı yaklaşık son 20 yıllık süre içinde bilinmektedir. Bu konuda çok geniş bir Literature oluşmuştur. Konunun ansiklopedik olarak gözden geçirilmesi ne mümkün nede çalışmanın amacına yönelik olacaktır. Bu bölümde konu ile ilgili genel kavramlar incelenecek ve bunlar üzerinde yapılacak değişmelerle konu genişletilecektir. Bu amaca, uygun bir kapsam içinde varmak için problemin Sıfır toplamlı, deterministik bölümü ele alınacaktır. Bu modelin genişletilmiş hali olan sıfır olmıyan toplamlı ve stokastik Differansiyel oyunlar ile ilişkiler ortaya konulacaktır.

2.2. TOPLAM SIFIRLI DİFFERANSİYEL OYUNLAR :

2.2.1. DİFFERANSİYEL OYUNLARIN ESASLARI :

Differansiyel Oyun konusuna değişik yollardan yaklaşmak mümkündür. Tarihsel olarak 50'li yılların sonu ve 60'lı yılların başında konu basit kinematik kuramına göre hareket eden, biri kaçan diğeri kovalayan iki cismin hareketinin incelenmesi ile ortaya çıkmıştır. Differansiyel Oyunların babası olarak bilinen Rufus Isaacs, kaçma-kovalama ile ilgili karmaşık uygulamalarla birlikte kuramı oluşturmuştur. Aşağı yukarı aynı tarihlerde Uzay güdüm ve kontrol sistemlerinin geliştirilmesi sırasında ortaya çıkan taleple bir şahıslı dinamik optimizasyon kuramını içeren kontrol kuramı çalışmaları hızlandırılmıştır. Dolayısı ile bu sırada iki konunun kavramsal olarak birleştirilmesi gerekliliği açık olarak ortaya çıkmıştır. Bu nedenle DO, kontrol kuramının genişletilmiş şekli olarak kabul edilmiş, temel kontrol kuramı sonuçları iki durum içinde geçerli olacak şekilde çıkarılmaya gayret edilmiştir. Bu çalışmalardan bir miktar başarıda sağlanmıştır. Ancak bu çalışmalarda kavramsal olarak genelleştirme ve uygulama için DO'nun Oyun Kuramı içinde özel bir konu olarak

ele alınması gerekliliğide kabul edilmiştir. DO Literatürde, sıfır toplamlı, tam olarak bilgi verilen, genişletilmiş formda mevki oyunu olarak kullanılmaktadır. Bu tanıma göre oyun aşağıdaki özellikleri taşır.

(i) P ve Q olarak belirtilecek iki oyuncu mevcut olup, şans hamlesi söz konusu değildir.

(ii) Bir oyuncunun kazancı, diğer oyuncunun aynı miktarda kaybı anlamına gelir.

(iii) Her iki oyuncu için karar verme sırasını belirten bir kurallar kümesi bulunup her kararın verilmesi sırasında her oyuncuya gerekli bilgi verilmekte ve oyun bu kararlar doğrultusunda gelişmektedir.

Genişletilmiş formdaki genel bir oyunda bu kurallar yapılaştırılarak, oyun herhangi, sonlu bir oyun ağacı olarak belirtilebilir. Differansiyel Oyunda, oyuncuların birbiri ardı sıra (çoklu safha) hamle yapmaları gerekliliği mevcuttur. Her bir karar safhasında, Oyuncuların herbiri her ikisininde geçmişteki kararlarını bilecekler, sadece bulunulan safhada karşı oyuncunun kararını bilmeyeceklerdir. Son olarak her safhanın başında önceki tüm kararların bir durum değişkeninde özetlenebileceği varsayılacaktır. Bu özelliklerin sonucu olarak oyun ağacındaki gelişme, aşağıdaki fark denklem kümesi ile belirtilebilir.

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, v_t) ; x_0 = \text{verilmiş} \quad (2.1)$$
$$t = 0, 1, 2, \dots, T$$

Bu denklemde x_t , t zamanında başlıyan safhadaki durum değişkeni, u_t ve v_t , oyuncuların t zamanında başlıyan safhadaki kararları ve T ise önceden belirlenen bazı koşullara göre veya önceden tesbit edilen oyun bitiş zamanıdır.

Bu durumda u minimize eden, v maximize eden olmak üzere kazanç

$$J = \emptyset (x_T) \quad (2.2)$$

şeklinde belirtilecektir. Bu formülde $\emptyset$, $|x_T|$ ye bağlı monotonik bir fonksiyon olduğu varsayılmaktadır. Geri besleme stratejileri; oyuncu P için

$$\Gamma_u = \left\{ k_t(x_t) \mid u_t = k_t(x_t) \text{ olmak üzere } k \text{ herhangi ölçülebilir bir fonksiyon} \right\} \quad (2.3)$$

kümesi ve oyuncu R için benzer şekilde

$$\Gamma_v \text{ ve } v_t = g_t(x_t) \text{ ile tanımlanmıştır.}$$

Buna göre; DO probleminin tanımı aşağıda formülize edilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{(DO)} & \text{Min} & & \text{Max} & & \text{J} & \text{veya} & \text{Max} & & \text{Min} & & \text{J} \\ & k \in \Gamma_u & & g \in \Gamma_v & & & & g \in \Gamma_v & & k \in \Gamma_u & & \end{array}$$

Γ_u ile ilgili diğer bir strateji sınıflandırması ise aşağıdaki şekilde olabilir.

$$\Gamma_u' = \left\{ k_t(x_t, v_t) \mid k : X_t \times V_t \Rightarrow U_t \right\} \quad (2.4)$$

Bu durumda her bir safhada Oyuncu P, diğer oyuncunun v_t strateji secimini bildiği için u_t daha avantajlı olmaktadır. Aynı şekilde Γ_v' kümesinde tanımlanması mümkündür. Bu durumda aralarında bağlantı olan aşağıdaki iki oyun ortaya çıkmaktadır.

$$\begin{array}{cccc} \text{(DO - Üst)} & \text{Min} & & \text{Max} & & \text{J} \\ & k \in \Gamma_u & & g \in \Gamma_v' & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{(DO - Alt)} & \text{Max} & & \text{Min} & & \text{J} \\ & g \in \Gamma_v & & k \in \Gamma_u' & & \end{array}$$

(DO-Üst) ve (DO-Alt) Oyunlarının herbiri genişletilmiş formda, sonlu tam bilgili olduğundan bu oyunlar için oyunun değerinin ve eğer noktası strateji çiftinin varlığı kanıtlanmıştır⁽²⁾. Ayrıca, oyunda mevcut olması halinde $J(\cdot)$

eğer noktasını belirtiyorsa $\Gamma_u \subset \Gamma_u'$ ve $\Gamma_v \subset \Gamma_v'$ olduğundan

$$J(DO-Alt) \leq J(DO) \leq J(DG-Üst) \quad (2.5)$$

şeklinde göstermek mümkündür ⁽³⁾. Bilgi olmaması halindeki kazancın, bilgi olması halinde enazından garantilenmesi nedeni ile bu sonuç doğal olarak ortaya çıkmaktadır. (2.1) zamanın sürekli olması durumu için değiştirilirse

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v, t) \quad ; \quad x(t_0) = \text{verilmiş} \quad (2.6)$$

ve (2.2.) aşağıdaki şekilde genelleştirilirse

$$J = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, v, t) dt \quad (2.7)$$

bu durumda genelde Differansiyel Oyun (DO) olarak isimlendirilen problem ortaya çıkacaktır. Bu durum için ilave olarak Γ_u ve Γ_v kabul edilir strateji kümelerininde uygun şekilde değiştirilmesi şarttır. Bu nedenle sürekli zamanlı DO, çok safhalı oyunlardaki safhalararası zaman farkının limitte sıfıra gitmesi hali olarakda düşünülebilir. Bu halde aradaki zaman süresi sıfıra yaklaştıkça bir oyunun diğerine göre sağladığı bilgi avantajı sıfıra doğru azalacağından $J(DO-Üst) - J(DO-alt)$ arasındaki fark sıfıra yaklaşacaktır. (2.5)'teki eşitliğin oluşmasını ortaya çıkararak doğal koşul olarak aşağıdaki Ayrılabilirlik varsayımı yazılabilir.

$$f(x, u, v, t) \equiv f_1(x, u, t) + f_2(x, v, t)$$

$$L(x, u, v, t) \equiv L_1(x, u, t) + L_2(x, v, t)$$

$H \equiv L + \lambda^T f$ olarak alındığında ayrılabilirlik varsayımı

$$\min_u \max_v H = \max_v \min_u H$$

eşitliğini garanti ettiğinden bu varsayımın ortaya koyduğu gerek, kontrol kuramındaki Minimum prensibi ile Minimax prensibinin değiştirilme durumunu ortaya çıkarır. Bu bağlantı dolayısı ile de (2.6) ve (2.7) koşulları altında DO'nun çözümünün aşağıda verilen Hamilton-Jacobi-Bellman-İsaacs denkleminde uyması beklenir.

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \min_u \max_v \left[L + \frac{\partial J}{\partial x} f \right] \quad (2.8)$$

$$J(x(t_f)) = \phi(x(t_f))$$

(2.8)'den elde edilecek $J^0(x,t)$ çözümü, DO'nun değeri olarak isimlendirilir.

2.2.2. KURAMSAL GELİŞME :

Differansiyel Oyun Kuramının önemli bir bölümü; (2.8)'in doğruluğunun gösterilmesine, Limit işlevinde muhtelif varsayımlar altında (2.5)'deki eşitliğin sağlanmasına ve DO'nun değerinin tanımlanmasına yönelmiştir. Buradaki temel sorun iki başlık altında toplanabilir. Birincisi; P_1 ve P_2 oyuncularına ait strateji uzayının dikkatli olarak belirlenmesidir. u ve v 'nin bu stratejiler olması halinde $x=f(x,u,v,t)$ differansiyel denklemlerinin çözümünün mevcudiyeti garanti altına alınacağından bu husus gereklidir. Sonuç $x(t)$ verilirse $x(t)$, $u(t)$ ve $v(t)$ 'ye bağımlı olan J kazancının değeri bulunabilecektir. Bunu başarmak için genelde zaman kesikli duruma getirilir ve strateji kümelerinden birinde oyunculara karar anı öncesi diğerine göre bilgi avantajı sağlanır. (2.4)'deki Stratejilerin bu tanımı J için iki sonucun ortaya çıkmasına neden olacaktır. Bundan sonra zaman adımlarının sıfıra yaklaşmasını sağlayacak bazı uygun Limit işlevleri ile bu iki değer birbirine yaklaştırılmasına gayret edilir.

Bilgi akışı modelini oluşturmak üzere; Fleming (4) ve Friedman (5) (2.6) ve (2.7)'de verilen DO'yu parçalara bölerek yaklaşık değerini bulmuşlardır; Bu uygulamada $[t_0, t_f]$ zaman aralığı eşit uzunluklu k aralığa bölünmüştür.

$[t_i, t_{i+1}]$ zaman aralığı başında $j < i$ olmak üzere önceki u_j ve v_j bilgisi ile P_1 (Minimize eden), $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı için u_i kontrolünü, bunu takiben u_i 'ye ilave olarak aynı bilgi ile oyuncu P_2 , v_i kontrolünü seçecektir. Dolayısı ile her t_i zamanında P_1 'in ilk olarak oynayacağı düşünülmektedir. Bu bilgi paterni ile iki oyuncunun elde edeceği eniyi üst değer w_k^+ olur. w_k^-

alt değer ise aynı şekilde bulunacaktır. Bu durumda her zaman aralığında ilk oynayan P_2 olacak; dolayısı ile bilgi avantajı P_1 'e geçecektir. $K \rightarrow \infty$ için

değerler, limitin var olması halinde W^- ve W^+ şeklinde gösterilecektir. Açıklanan ilk oyun için limitler

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma_1(x(t), t) \\ v(t) &= \gamma_2(x(t), t, u(t)) \end{aligned}$$

ve ikinci oyun için

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma_1(x(t), t, v(t)) \\ v(t) &= \gamma_2(x(t), t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilecektir.

Fleming ve Freidman arasındaki farklılık, Fleming'de zaman aralıklarında kontrollerin sabit, bunun yanında Freidman'da ise zaman aralıklarında kontrollerin ölçülebilir olmasıdır.

2.2.3. ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI :

Differansiyel Oyunların çözümünde genişletilmiş formulla oyunlara yönelik çok az çözüm olduğu için mevcut oyun kuramı çok az yardımcı olabilmektedir. Bu nedenle kontrol kuramını kullanma zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Bunu sağlamak üzere DO problemi çok dikkatli incelenmelidir. Belirtilen differansiyel oyun probleminde Ayrılabilirlik varsayımının sağlandığı (2.6) dinamik sistemi ve (2.7) maliyet fonksiyonu verildiğine göre

$$J(\gamma_1^*, \gamma_2^*) \leq J(\gamma_1, \gamma_2^*) \quad \forall \gamma_1 \in \Gamma_u \quad (2.9a)$$

$$J(\gamma_1^*, \gamma_2^*) \geq J(\gamma_1^*, \gamma_2) \quad \forall \gamma_2 \in \Gamma_v \quad (2.9b)$$

eşitsizliklerini sağlayacak $u = \gamma_1^*(x, t)$; $v = \gamma_2^*(x, t)$ strateji çifti bulunmak istenmektedir. Kabul edilir Stratejiler Sınıfı Γ_u ve Γ_v 'nin bulunması ilk soru olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu noktada Γ 'nin, mevcut varsayımlar dikkate alınarak x ve t 'nin ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan bir sınıf olarak kabul edilmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Kontrol aralığı üzerinde $\dot{x} = f(x, u, \gamma_2^*(x, t), t)$ differansiyel denkleminin uygun şekilde tanımlanmış bir çözümü olduğu sürece herhangi

sabit bir $v = \gamma_2^*(x, t)$ için (2.6)(2.7) ve (2.9a) denklemlerinin P_1 oyuncusu açısından bir kontrol problemini tanımladığına dikkat edilmelidir. Ayrıca, (2.9a) ile tanımlanan kontrol probleminin çözüldüğünü ve P_1 için Optimal kuramı olarak γ_2^* parametrelili $u = \gamma_1^0(x, t; \gamma_2^*)$ 'nin elde edildiğini varsayalım. Bu durumda $u = \gamma_1^0$ şeklinde alınarak, P_2 'nin karşı karşıya olduğu (2.9b) kontrol problem denklemleri çözülebilecektir. Bundada başarı sağlandığını, $v = \gamma_2^0(x, t; \gamma_1^0)$ elde edildiğini varsayalım. Uygunluğun sağlanması için

$$\gamma_2^*(x, t) \equiv \gamma_2^0(x, t; \gamma_1^0(x, t; \gamma_2^*)) \quad (2.10a)$$

$$\gamma_1^*(x, t) \equiv \gamma_1^0(x, t; \gamma_2^*(x, t; \gamma_1^*)) \quad (2.10b)$$

olması gerekecektir.

(2.10) implicit denklemlerinin çözümü; eğer noktası strateji çiftini verecektir. Ancak bu şekilde sonuca daha ulaşılmamıştır. Birincisi, Oyun duruma yönelik tanımlanmasına rağmen $v = \gamma_2(x(\tau), t_0 \leq \tau \leq t)$ tipi stratejilerin dikkate alınmaması gibi bir ön koşul yoktur. Bu tip stratejilerin kullanılması halinde P_2 tarafından karşılaşılabilecek kontrol problemi fonksiyonel differansiyelleri içeren, çözümü oldukça zor bir yapıya dönüşecektir. Gerçektede bu durumda oluşan stratejilerin diğer bir eğer noktasını oluşturmayacakları konusunda bir garanti mevcut değildir. Bu durumdan bizi kurtaracak yegane husus oyunun sıfır toplamlı olmasıdır. Hatırlamanın içerildiği diğer bir γ_1^0, γ_2^0 eğer noktasının olduğunu varsayarsak, yukarda çözümü yapılan iki kontrol problemi ile ilgili olmak üzere kontrol kuramı sonucu olarak

$$J(\gamma_1^*, \gamma_2^*) = J(\gamma_1^*, \gamma_2^0) = J(\gamma_1^0, \gamma_2^*)$$

elde olunacaktır. Ancak (γ_1^0, γ_2^0) 'nin tanımından

$$J(\gamma_1^0, \gamma_2^*) \leq J(\gamma_1^0, \gamma_2^0) \leq J(\gamma_1^*, \gamma_2^0)$$

olduğundan, 4 değer in tamamı eşdeğer olmak mecburiyetinde ve stratejiler sonucu etkilemeden değişebilme özelliğine sahip olmaktadır. Sonuç olarak (γ_1^*, γ_2^*) tesbit edildikten sonra bunun tek olup, olmaması bir önem göstermeyecektir. Bu nedenle strateji belirlemede aramanın sadece Γ' de yapılması

mümkündür. Ancak burada kabul edilir Γ nin dikdörtgen olmaması halinde yukardaki yorumun geçersiz olacağına dikkat edilmelidir. (Dikdörtgen olma- ma, bazı stratejilerin birbirinin karşıtı olarak oynanmasının mümkün olmadığı anlamında kullanılmaktadır.) Dolayısı ile oyunun sonuçlanması için durumun, durum uzayının hedef alt uzayında olması gibi bazı koşulların sağlanması ge- rekiyorsa, bu durumda stratejilerin tamamı oynanabilir olma özelliğinde ol- mıyacaktır ⁽⁶⁾. Gerçektede Differansiyel Oyun literatürünün çoğunluğunda so- nuçlanma koşullarını garanti eden özelliklerin yer aldığı görülmektedir. So- nuçlanma koşullarında bir oyuncunun diğerince yakalanması söz konusu edildi- ğinden, bunlar yakalama başlığı altında toplanmaktadırlar.

İteratif çözüm işlevinde görülen ikinci zorluk yukarda açıklanmıştır. Bu- rada $\gamma_1^0(x, t; \gamma_1^*)$ ve $\gamma_2^0(x, t; \gamma_1^*)$ fonksiyonlarının örtük çözümü istenil- mektedir. Diğer bir değışle geri besleme Kontrol Kuramı elde edilmek isten- mektedir. Bu husus; doğrusal dinamik ve kuadratik kazançlı veya küçük boyut- lu problemler gibi özel durumlar dışında genelde çok ender olarak mümkündür. Bu zorluktan kurtulmak için geri tümevarım ve Dinamik programlama prensiple- rinden yararlanılır. Bu durumda V Kontrol kuramını tüm t için sabit tutup bundan sonra yukarda açıklandığı şekilde yenileme yerine, kontrol kuramı sa- dece enson durum veya kontrol anı için sabit tutulabilir. Bundan sonrada, sa- dece bu son durumda u ve v için açıklanan işlev yinelemesi aynen uygulanabi- lir. Bu kısa vadeli bir problemdir, Özelliikle, Problem tamamen determinist özelliğe sahip olduğundan x durumunun boyutu (2 veya 3 gibi) küçük olduğunda γ_1^* ve γ_2^* ve dolayısı ile kazanç, oyun probleminde genelde belirtik olarak bir safha için tesbit edilebilir. Geri tümevarım prensibi bundan sonrada di- ğer safha ve zamanlar tek tek alınarak bu yöntemin tekrarına olanak sağlar. Bu şekilde Differensiyel oyun probleminin tüm belirtik çözümleri elde edilecektir. Bu çözümü ilginç yapan taraf; birçok örnek problemlerde çok sayıda tekil yü- zeylerin sürekli olarak bulunması ve bunlardan kazanılan derinlemesine bilgi- lerdir. Bu tekil yüzeyler (2.8) denkleminin sürekli olmadığı durum uzayının

manifold bölümüdür. Diğer bir ifade ile dinamik programlamanın çözüm sağlamadığı geri çözüm yöntemidir. Tekil yüzeyler $\min_u \max_v [L + \frac{\partial J}{\partial x} f]$ işlemi sonucunda tek olmıyan eğer noktası bulunduğunda ve/veya $\partial J / \partial x$ 'in sürekli olmaması halinde oluşur. Pürüzsüz olmıyan fonksiyonların ortaya çıkması bilinen bir gerçek olduğundan bu oluşumlarla genelde sıklık karşılaşılır. Genelde bu tip yüzeylerin karşıtları kontrol kuramında bulunmamaktadır.

2.2.4. KAVRAMSAL DİĞER GENELLEŞTİRMELER :

Differansiyel oyunlar (2.6) ve (2.7) denklemleri ile tanımlandıktan sonra bazı genelleştirmelerin yapılabileceği doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Genelleştirme iki şekilde olabilmektedir. Birincisi toplamın sıfır olması varsayımının kaldırılması olabilir.

Bu durumda $J_1 \neq J_2$ olmak üzere iki oyuncuya ait kazanç fonksiyonları

$$J_1 = \phi_1(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L_1(x, u_1, u_2) dt$$

$$J_2 = \phi_2(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L_2(x, u_1, u_2) dt$$

şeklinde ortaya çıkar. Ayrıca iki oyuncu yerine kazançları J_i , $i=1, \dots, N$ olarak tanımlanan N oyuncu olabilir. Kazanç toplamında sıfır olma koşulunun kaldırılması ile oyun kuramının tüm karmaşık yapısı ortaya çıkar. Bu durumda koalisyon, pareto-optimallik ve tehdit gibi hususların araştırılması gerekir. Bu yönde yapılan araştırmalarda önemli ölçüde başarı elde edilmiştir. Ancak bu tip uygulamaların çoğunluğunda iş birliğinin olmadığı n -şahıslı differansiyel oyunlar hakimdir. Bu çerçevedeki Differansiyel oyun $i=1, \dots, n$ için

$$J_i(\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*) \leq J(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{i-1}^*, \gamma_i, \gamma_{i+1}^*, \dots, \gamma_n^*) \quad (2.11)$$

$$u_i = \gamma_i^*(x, t)$$

ve

$$\dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_n, t)$$

şeklinde belirtilir. (2.11) denklemi, toplamı sıfır olmıyan Differansiyel oyunun Nash Denge Çözümü olarak bilinmekte olup, bu konu sonraki bölümde daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Kaçma-Kovalama probleminin değişik bir şeklide iki kovalayan ve bir kağan bulunması durumudur. Toplamın sıfır olmaması açısında bu duruma bakıldığında, $J_1 = J_2 = -J_3$ özelliği ortaya çıkar.

Differansiyel oyunların genelleştirilmesinde ikinci şekil, probleme belirsizliğin ilavesi durumudur. Bu durumda (2.6) aşağıdaki şekilde değiştirilecektir.

$$\dot{x} = f(x, u_1, u_2, w, t) \quad (2.12)$$

$$z_i = h_i(x, v_i, t) \quad (2.13)$$

Bu modelde $w(t)$ ve $v_i(t)$ tanımlanmış bir stokastik işlev olarak alınmaktadır.

$\zeta_i(t)$ 'nin $\left\{ z_i(\tau), t_0 \leq \tau \leq t \right\}$ olmak üzere geçmişini belirttiğini kabul edelim. Buna göre

$$\Gamma_i = \left\{ \gamma_i(\zeta_i(t), t) \mid \gamma_i: \zeta_i \times T \rightarrow u_i \right\} \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Stratejiler bu tanımda oyuncuların geçmişteki gözlemlerinin fonksiyonu olmaktadır. Bu durumda Stokastik Differansiyel oyun

$$\begin{array}{ccc} \text{Min} & & \text{Max} \\ \gamma_1 \in \Gamma_1 & & \gamma_2 \in \Gamma_2 \end{array} \quad J \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanacaktır. (2.15) denkleminde oluşan problemlerde, önceleri çeşitli kavramsal zorluklar ile karşılaşılmıştır. Bu zorlukların nedeni genişletilmiş formdaki oyunların bilgi yapısı ve Γ_i 'nin tanımının kesin ve sıhhatli yapılmamasıdır. Değişik oyuncuların değişik gözlem tarihcesi olduğundan eski uygulamalarda "ikinci tahmin" problemi konusunda geniş ilgi

uyanmıştır. (Örneğin Senin, beni, senin,, tahmin edeceğim gibi) Aynı şekilde oyunculardan birincisi diğer oyuncunun varsayılan optimal stratejisini esas alarak bir durum tahmini yaparsa, bu tahminin diğer oyuncunun optimal oynamaması halinde ne olacağı sorusu ortaya çıkar. İşlemlerde karşılaşılan diğer bir zorlukta kabul edilir strateji kümesi Γ 'nın yapısından kaynaklanmaktadır. Bu durumlarda doğal olarak Fonksiyonel differansiyel denklemler ve sonsuz boyutlu stratejiler tipi problemlerle karşılaşmanın önüne geçilememektedir. Bu durumlarda esas itibarı ile taraflardan birindeki bilgi dinamik bilgi yapısı olarak bilinen diğer tarafın stratejisine bağlı olmaktadır. Bu konuda mevcut makalelerde Doğrusal kuadratik Gaussian durumu haricinde Stokastik Differansiyel oyunlar için getirilen fazlaca bir çözüme rastlanmamıştır.

2.3. TAM DURUM ÖLÇÜLÜ KAÇTA-TAKİP ETME :

Bu kısımda (2.6) ve (2.7)'de tanımlanan Differansiyel Oyunlar incelenecektir. Oyunculara bulunulan durum ve zamana ait veri verileceğinden "Tam durum ölçülü" deyiimi kullanılmıştır. Kaçma-Takip etme ise incelenen bir çok oyun durumlarının açıkca Kaçma-Takip etme olarak yorumlanmasından kaynaklanmıştır.

2.3.1. DOĞRUSAL KUADRATİK OYUNLAR :

İki dinamik sistemin E^n Öklit uzayındaki yerini

$$\dot{x}_k = A_1 x_k + B_1 u_1$$

(2.16)

$$\dot{x}_t = A_2 x_t - B_2 u_2$$

ile belirtildiğini, burada k 'nin kaçma, t 'nin takip etme anlamına geldiğini kabul edelim. u_1 ve u_2 vektörlerinin boyutlar r_1 ve r_2 olsun. Takip eden, kaçanı yakalamak üzere u_1 kontrolunu kullanacak, bunun yanında kaçanda yakalanmamaya çalışacaktır.

Verilen bir t_b bitiş zamanında yakalama ölçüsü olarak aradaki mesafe

$$|| x_t(t_b) - x_k(t_b) ||_{Q_b}^2$$

olarak tanımlanmakta ve burada Q_b ağırlık matrisi simetrik ve >0 alınmaktadır. Her iki oyuncu içinde aradaki mesafe ile kullanılan enerji miktarı arasında bir denge sözkonusu olup, buda taraflar için

$$\int || u_1 ||_{R_1}^2 dt, \quad \int || u_2 ||_{R_2}^2 dt$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durumdada R_1 ve R_2 matrislerinin simetrik $R_i' = R_i$ ve $R_i > 0$ olduğu varsayılmaktadır. Buna göre kazanç fonksiyonu

$$J = || x_t(t_b) - x_k(t_b) ||_{Q_b}^2 + \int_0^{t_b} \left\{ || u_1 ||_{R_1}^2 - || u_2 ||_{R_2}^2 \right\} dt \quad (2.17)$$

denklemleri ile tanımlanmaktadır. Yukarıda belirtilen problemde $x \triangleq x_t - x_k$ olarak alınarak yeniden tanımlanırsa; bu problemin Doğrusal-kuadratik differansiyel oyun olarak bilinen aşağıdaki modelin özel bir hali olduğu görülecektir.

$$\min_{u_1} \max_{u_2} J = \frac{1}{2} x'(t_b) Q_b x(t_b) + \frac{1}{2} \int_0^{t_b} \left\{ x' Q_b x + u_1' R_1 u_1 - u_2' R_2 u_2 \right\} dt \quad (2.18)$$

Aşağıdaki koşulda

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq t_b \quad (2.19)$$

Bu problem için $u_1 = \gamma_1(x, t)$, $u_2 = \gamma_2(x, t)$ formundaki çözümler aranacaktır.

Bu Differansiyel oyunun çözümü için çeşitli yöntemler mevcuttur. Değer fonksiyonunun

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x' S(t) x \quad (2.20)$$

formunda olduğu varsayıлып, bunun, (2.8)'de yerine konulması halinde $n \times n$ boyutlu S matrisinin

$$\dot{S} = -Q - A' S - S A + S (B_1 R_1^{-1} B_1' - B_2 R_2^{-1} B_2') S, S(t_b) = Q_b \quad (2.21)$$

koşulunu sağlaması gerekecektir. Bu matris differansiyel denkleminin çözümü mevcut ise, bu durumda optimal stratejiler

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -R_1^{-1} B_1' S(t)x(t) \\ u_2(t) &= +R_2^{-1} B_2' S(t)x(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

şeklinde oluşacaktır. Bu çözümün bulunması için diğer bir yöntemde (2.18) deki integral teriminin kareye tamamlanması şeklinde olabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} J - \frac{1}{2} x_0' S(0) x_0 = \frac{1}{2} \int_0^{t_b} \left\{ (u_1 + R_1^{-1} B_1' S(t)x)' R_1 (u_1 + R_1^{-1} B_1' S(t)x) \right. \\ \left. + (u_2 - R_2^{-1} B_2' S(t)x)' R_2 (u_2 - R_2^{-1} B_2' S(t)x) \right\} dt \end{aligned}$$

özdeşliği gerçekleşmiş olup burada $S(t)$, (2.20)'yi gerçekleştirmek ve (2.22)'deki eğer noktası stratejileri elde edilmektedir.

Doğrusal-Kuadratik Differansiyel Oyunu popüler yapan hususlardan biri doğrusal olmıyan kaçma-takip etme tipi karmaşık problemlerin analizine imkan vermesi, diğeride analitik olarak izlenebilmesidir. Değer fonksiyonunun durum vektörüne göre iki defa türevi alınabildiği gibi doğrusal geri besleme tipi olduğundan optimal stratejilerin uygulanmasında oldukça basittir.

Bu oyunda eğer noktasının olması için gerek şart (2.21) denkleminin çözümünün mescudiyetine bağlı olup bu özellikte, R_1^{-1} ve R_2^{-1} 'nin sabit bir t_b için yeterince küçük olması veya herhangi bir t_b için

$$B_1 R_1^{-1} B_1' \geq B_2 R_2^{-1} B_2'$$

koşulunun olması ile garanti edilir. İkinci durum da tüm t değerleri için

$||S(t)|| < M$ şeklinde düzgün bir M sınırı mevcut olacaktır. Bu koşullardan ikisinde sağlanmaması durumunda (2.21)'in geri integrasyonu sabit bir τ için $\lim_{t \rightarrow \tau} ||S(t)|| = \infty$ sonucunu verebilir. Değişme kalkülüsü ile fokal noktalara ulaşmak mümkündür. Fokal noktaların bulunmamasının eğer noktaları stratejileri için gerek şart olmadığı gösterilmiştir⁽⁷⁾. Kuram ile ilgili yeterince uygulama bulunmamakla birlikte durum gözlemlerinin yeterli olmadığı hallerdeki doğrusal-kuadratik oyunlar için iyi bir başlangıç noktasını oluşturmaktadır.

2.3.2. SONBULMA VE YAKALANABİLME :

Bu kısımda sonbulma zamanı önceden tesbit edilmeyen, son bulma koşulları örtük olarak verilen oyunlar ele alınacaktır. Dolayısı ile son bulma zamanı oyuncuların hamlelerine bağlı olacaktır. Hedef kümesi olarak adlanan kapalı bir Λ kümesinin, zaman eksenini ile durum uzayı çarpımından oluşan bir uzayın içinde verildiği varsayılmaktadır. Buna göre son bulma zamanı

$$t_b = \min \left\{ t \mid (x(t), t) \in \Lambda \right\} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanabilir. Son bulma zamanı bazan $x(t)$ 'nin Λ içinde olduğu en küçük t zamanı şeklinde biraz farklı olarakta tanımlanabilir. (2.23)'nin bu inceleme amacı için yeterli olduğu değerlendirilmektedir. Λ nın sınırı,

$l(x, t) = 0$ şeklinde verilen bir skalar fonksiyon olduğu varsayılmakta, dolayısı ile E^n içinde $n-1$ boyutlu bir manifold oluşturmaktadır. Λ hedef kümesi $l(x, t) \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan noktalardan oluşmaktadır. (2.7)'deki Maliyet fonksiyonu eğer noktasının bulunması konusuna el atmadan önce hedef kümesine ulaşıp, ulaşılamıyacağı ele alınmalıdır. Ulaşmak mümkün değil ise (2.6), (2.7) ile verilen oyun problemi iyi tanımlanmamış demektir. Bu kısımda temel bir oyun ele alınacaktır. Bu oyunda kaçan, durumun Λ uzayına ulaşmasını önlemeye çalışmakta, takip eden ise bunun tersini yapmak istemektedir. Buna göre Λ uzayına ulaşıldığında değerin; $J = -1$, aksi halde $J = +1$ olduğu yardımcı

bir maliyet fonksiyonu tanımlanabilir. Λ uzayına ulaşılacağı biliniyorsa, (2.6) ve (2.7)'de tanımlanan orijinal probleme geçilebilecektir.

Bu durumda;

$$\min_{u_1} \max_{u_2} V' f(x, u_1, u_2, t) = \max_{u_2} \min_{u_1} V' f(x, u_1, u_2, t) \leq 0 \quad (2.24)$$

denklemini sağlayan $\partial\Lambda$ içindeki (x, t) noktaları oyunun muhtemel sonbulma çözümünü sağlayacak adayları oluşturacaktır. n -boyutlu V vektörü (x, t) 'de

Λ de dışa yönelik normalin X üzerinde projeksiyonu olarak alınmıştır.

Sadece eşitsizlik mevcut ise bu durumda, durum Λ uzayı içine girmiş olacaktır. Eşitlik halinde ise durum Λ uzay sınırını yalayacaktır. (2.24)

denklemini sağlayan noktaların tamamı $\partial\Lambda$ nin kullanılır bölümünü oluşturur.

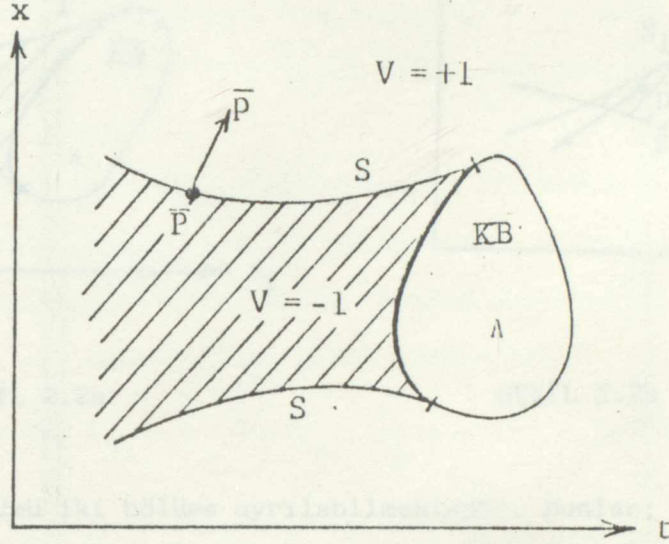
Şekil 2.1'i ele alalım. Taranmış bölge differansiyel oyunun son bulmasını mümkün kılan tüm başlangıç noktalarını gösterir. Son bulmayı ilk olarak sağlayan başlangıç noktaları ile diğerlerini ayıran P yüzeyinin bulunması ele alınacaktır. P yüzeyindeki herhangi bir $\bar{P}$ noktasını ele alalım. P , n -boyutu bir vektör olmak üzere dışa yönelik normal

$$\bar{p} = (p, p_{n+1})$$

ile belirtilsin. P yüzeyinin sonbulmanın olduğu ve olmadığı noktalar ayırması için gerek ve yeter şart

$$\min_{u_1} \max_{u_2} p' f(x, u_1, u_2, t) + p_{n+1} = 0 \quad (2.25)$$

olacaktır. Bu ayırtma özelliği nedeni ile P yarıgeçirgen yüzey olarak adlandırılacaktır: Takip edenin yardımı olmadan kaçan, hiçbir zaman durumu P den geçiremeyecek (taralı bölgeden, taralı olmayan bölgeye) aynı şekilde takip edende P 'den (taralı olmıyandan, taralı bölgeye) geçemeyecektir.



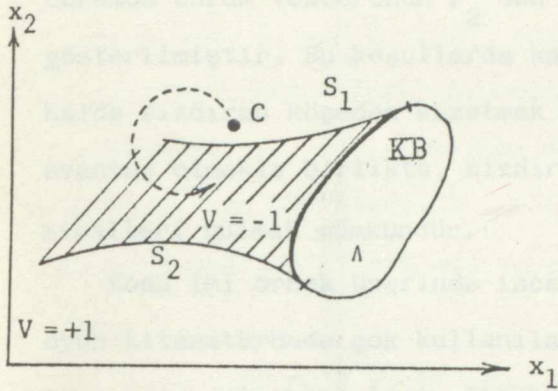
ŞEKİL 2.1

Minimum yapan u_1 ve maximum yapan u_2 , x ve t 'nin fonksiyonu olarak (2.25)'e konulduğunda x ve t 'ye bağlı bir özdeşlik oluşacaktır. Bu özdeşliğin x 'e göre türevi alındığında ⁽⁸⁾.

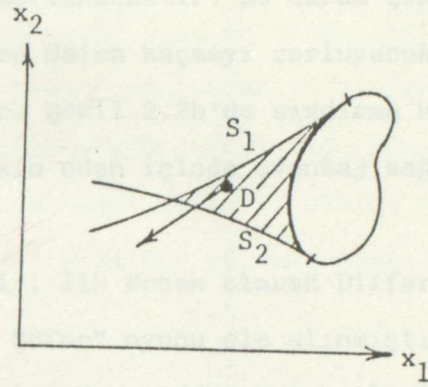
$$\frac{dp}{dt} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)'_p, \quad \frac{dp_{n+1}}{dt} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)'_p \quad (2.26)$$

elde edilir. P yüzeyinin (2.6), (2.25) ve (2.26)'dan elde edilmesi Prensip olarak mümkündür. (2.6) ve (2.26) differansiyel denklemleri için son koşul olarak (2.24)'de eşitliği sağlayacak şekilde Λ deki x noktaları alınacaktır.

f, l ve maliyet fonksiyonunun belirttik olarak t 'ye bağımlı olmadığı, zamandan bağımsız problemlerde, analiz biraz daha ileri gidecektir. Şekil-2.1'e göre farklılığı yansıtan durum Şekil 2.2a'da gösterilmiş olup, burada konuyu basitleştirmek üzere iki değişkenli durum ele alınacaktır.



ŞEKİL 2.2a



ŞEKİL 2.2b

Durum uzayının tümü iki bölüme ayrılabilir. Bunlar; Takip eden T 'nin sonbulmayı zorladığı başlangıç noktaları ile kaçan K 'nin Λ ye girmeden kaçmayı zorladığı başlangıç noktalarıdır. Bu ifadenin ayrıntılı kanıtı(8)'de verilmiştir. İncelemeye sezi ile görülebilen bu hipotezden başlanacaktır.

Şekil 2.2a'da taralı olan, taralı olmıyan alandan ayrılırsa P_1 ve P_2 kesişmek mecburiyetinde kalacaktır. P_1 ve P_2 bazen kullanılabilen bölümün sınırı olarak da belirtilir. Dolayısı ile P_1 , P_2 ve KB sonbulmanın sağlandığı noktaları çevreler. P_1 ve P_2 kesişmiyor, ancak sonlu bir uzunluğa sahip ise durum uzayındaki her noktadan son bulma mümkün olabilecektir. Başlangıç noktası C ise, Şekil 2.2a'da görüleceği üzere, T, K 'nin yardımı olmadan durum vektörünü P_1 'den geçiremeyecek, ancak nokta nokta hat ile belirtildiği gibi durum vektörünün P_1 çevresinden geçirebilecektir.

Aynı şekilde P_1 ve P_2 doğruları kesişiyor ise alanı $V=+1$ ve $V=-1$ ile ayırttıkları garantilenmemektedir. Kesişmeye ilave olarak, kesişme noktasının sızdırmaz olması gerekli tutulmalıdır. P_1 'in taralı bölümü sızdırmaz olması gerekli tutulmalıdır. P_1 'in taralı bölümü veya sağ taraftaki durumları muhafaza edildiğinde P 'nin durumu gözönünde canlandırılabilir. Ancak bu

durumda durum vektörünün P_2 'den geçmesi zorlanacaktır. Bu durum Şekil 2.2b'de gösterilmiştir. Bu koşullarda kaçan oyuncu daima kaçmayı zorlayacaktır. Bu halde sızdıran köşeden söz etmek mümkündür. Şekil 2.2b'de sızdırma kaçan için avantaj olmakla birlikte, sızdırmanın takib eden içinde avantaj sağlayacağı misalleri bulmak mümkündür.

Konu iki örnek üzerinde incelenecektir. İlk örnek olarak Differansiyel oyun Literatüründe çok kullanılan "Katil Şöfor" oyunu ele alınmıştır. Kaçan (K) ve Takip eden (T) oyuncuların iki boyutlu düzlem üzerindeki hareketlerinin aşağıdaki denklemler ile belirtildiği kabul edilmektedir.

$$\dot{x}_{1t} = v_1 \sin Q_t, \dot{x}_{2t} = v_1 \cos Q_t, \dot{Q}_t = w_1 u_1, |u_1| \leq 1$$

$$\dot{x}_{1k} = v_2 \sin Q_k, \dot{x}_{2k} = v_2 \cos Q_k, \dot{Q}_k = w_2 u_2, |u_2| \leq 1$$

Bu denklemlerde v_1 ve v_2 , T ile K'nın sabit hızlarını belirtmektedir. $u_t = 0$ ($u_k = 0$) ise P(K) doğru boyunca hareket edecektir; $u = +1$ (-1), sağ (sol) tarafa mümkün olan en keskin dönüşü belirtmektedir. Bu şekilde yörüngenin eğriliği sınırlı tutulmuştur. Nisbi koordinatlar

$$x_1 = (x_{1k} - x_{1t}) \cos Q_t - (x_{2k} - x_{2t}) \sin Q_t$$

$$x_2 = (x_{1k} - x_{1t}) \sin Q_t + (x_{2k} - x_{2t}) \cos Q_t$$

$$Q = Q_k - Q_t$$

Şeklinde tanımlandığında ve bunun zamana göre türevi alındığında aşağıdaki model elde edilecektir.

$$\dot{x}_1 = -w_1 u_1 x_2 + v_2 \sin Q$$

$$\dot{x}_2 = -v_1 + w_1 u_1 x_1 + v_2 \cos Q$$

$$\dot{Q} = w_2 u_2 - w_1 u_1 \quad (2.27)$$

Açıklanan bu model, bazen sonraki referanslar için iki araba modeli olarak adlandırılır. Katil Şöför oyununda ikinci oyuncu yönünü anlık olarak, diğer bir değiş ile $w_2 = \infty$ şeklinde değiştirebilmektedir. Diğer bir ifade ile K Q üzerinde tam bir kontrole sahip olup, buda kendi kontrolu olarak alınacaktır. Aynı şekilde T'nin hız ve azami açısal hızı bir olarak normalizi edilirse,

$$\dot{x}_1 = -u_1 x_2 + v_2 \sin u_2$$

$$\dot{x}_2 = -1 + u_1 x_1 + v_2 \cos u_2 \quad (2.28)$$

elde olunur. Bu denklemlerde u_2 için bir sınır bulunmamakta ve u_1 , $|u_1| \leq 1$ eşitsizliğini sağlamaktadır. Bu modelde takip edenin hız vektörü pozitif x_2 eksenine yönündedir. Şekil 2.3'de sistem nisbi koordinat sisteminde gösterilmiştir. Bu modelin ayrıntılı şekilde incelenmesinin nedeni, modelin birçok araştırma dökümanında yer almasından kaynaklanmaktadır^(9,10). Modelin uygun bir maliyet fonksiyonu ile oluşturacağı oyunda birçok tekil yüzeyleri göstereceğinden oldukça çok yönlü özelliğe sahiptir. Bunlardan bir kısmı bu bölümde ele alınacaktır. Başlangıç durumunda

$$x_1^2(0) + x_2^2(0) > \beta^2$$

olduğu varsayılarak sonbulma

$$x_1^2 + x_2^2 = \beta^2$$

durumunda olmaktadır. Bu özelliğe göre takip eden, kaçanın β kadar mesafesi içinde olmak istemekte, buna karşılık kaçan bunu önlemeye çalışmaktadır. Bu nedenle formüle edilen oyun "Katil Şöför" olarak adlandırılmıştır.

Bu nedenle $x_1^2 + x_2^2 = \beta^2$ dairesi üzerindeki $x_2 \geq v_2 \beta$, kullanılabilir bölümü oluşturmaktadır. Bu husus sezgisel olarakta açıktır. T'nin tam önündeki, K'nin kaçması mümkün değildir. K; T'nin kenarına yakın ise, kenara yönelenerek T'nin arkasında ($x_2 < 0$) kalacağından bu durumda hemen yakalanma hiçbir zaman söz konusu olamaz.

İkinci örnek değişme kalkulusundaki brachistochrone probleminin differansiyel oyunlara uygulanması şeklinde ortaya çıkmıştır. Sistem, w positif bir sabit sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sqrt{x_2} \cos u_1 + \frac{w}{2} (u_2 + 1) \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{x_2} \sin u_1 + \frac{w}{2} (u_2 - 1)\end{aligned}\quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanmıştır. u_1 için bir kısıtlama söz konusu olmayıp, u_2 'nin, $|u_2| \leq 1$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmesi zorunludur. Başlangıç koşulları birinci bölgede, $x_1(0) > 0$ yer almaktadır. Oyun, $x_1(t_b) = 0$ olduğunda son bulmaktadır. Oyun süresince $x_2(t) \geq 0$ sağlayan yörüngeler ele alınacaktır. Kullanılabilir Bölüm (KB)

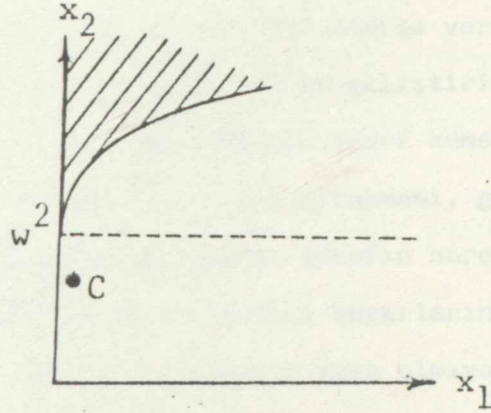
$$\min_{u_1} \max_{u_2} \left(\sqrt{x_2} \cos u_1 + \frac{w}{2} (u_2 + 1) \right) = -\sqrt{x_2} + w \leq 0$$

den tesbit edilmekte ve buna göre $x_1=0$, $x_2 \geq w^2$ elde edilmektedir. (Burada $u_1 = +1$ ve $u_2 = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.) (2.25) ve (2.26) kullanılarak yapılan analizde $x_1=0$, $x_2=w^2$ den başlayan kullanılabilir bölüm sınırı (KBS) denklemleri aşağıda verilmiştir.

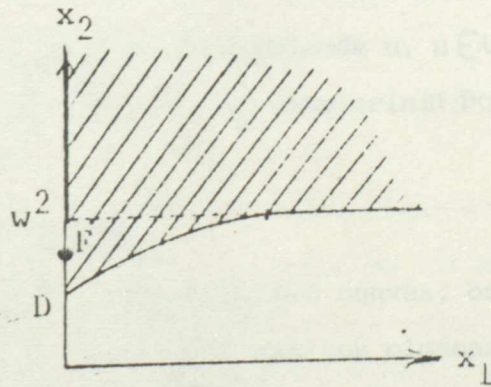
$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{w}{2} (t_b - t) + \frac{w}{2} \sin \left(\frac{t_b - t}{w} \right) \\ x_2(t) &= \frac{w}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{t_b - t}{w} \right) \right)\end{aligned}\quad (2.29)$$

Burada t_b 'ye yakın t değerleri için $x_1(t) < 0$ olduğu ve (2.29)'dan elde edilen KBS'nin Şekil 2a'da gösterildiği şekilde olmadığına dikkat edilmelidir. Burada Λ' 'nin içine girmektedir. (2.29) yörüngesi, istenilen rölü bu durumda yapamayacaktır. Şekil 2.4a'da gösterilen formda bir KBS'nin olmayacağı açıkça görülmektedir. Bu durumun açıklaması (11)'de verilmiştir. Şekil 2.4a'da verildiği şekilde durum C noktasında ise; T, durumu hiçbir zaman $x_1 < 0$ yan düzlemine gitmeye zorlayamayacaktır. Çünkü K, $u_2 \approx +1$ oynuyarak daima $\dot{x}_1 > 0$ yapabilmektedir. Ancak K, $u_2 \approx +1$ oynar ise T, $x_1 < 0$ düzlemine götürmeyecek $u_1 = \pi$ yerine $u_1 = \pi/2$ oynayabilecek ve $\dot{x}_2 > 0$ şeklinde durum yukarı hareket edecektir. K, $u_2 \approx -1$ oynuyarak durumun yukarı hareketini önleyebilirse bu durumda T, oyunu son buldurmak için zorlayabilecektir. Dolayısı ile durumun x_2 - eksenini direkt olarak geçmesini istemiyorsa K durumun yukarı hareketini önleyemeyecektir. Bu halde durum $x_2 > w^2$ olana dek yukarı gidecek ve bundan sonrada T kolaylıkla oyunu bitirebilecektir. T'nin oyunu bitirmeye zorlayacak tüm başlangıç noktaları Şekil 2.4b'deki taranmış bölgeyi oluşturacaktır.

Sonbulma problemi çözüldükten sonra (2.6) ve (2.7) formundaki orijinal Differansiyel oyuna dönülecektir. Oyuna; sonbuldurmaya yönelik kuralların ilave edilmemesi koşulu ile, T'nin (Son buldurma için K'ya da sorumluluk verilmiş ise K'nin) oyunu son buldurmaya zorlayamayacağı başlangıç noktasının bulunması halinde oyun tamamlanmamış kabul edilecektir. Bu durumda bir çözüm şekli, strateji çifti (γ_1, γ_2) kümesinde sonlu bitişi sağlayacak stratejilerin ayrılması şeklinde olabilir⁽¹²⁾. Diğer bir şekil ise maliyet fonksiyonuna sonbulmamanın dahil edilmesi olabilir. Oyun sonlu bir zaman içinde tamamlanmaz ise $J = \infty$ (Minimize yapmaya çalışan oyuncularla bitirme sorumluluğu koyma) veya $J = -\infty$ (Maximize yapmaya çalışan oyuncularla bitirme sorumluluğu koyma) olmaktadır.



ŞEKİL 2.4a



ŞEKİL 2.4b

2.3.3. DOĞRUSAL DIFFERANSİYEL OYUNLAR VE PONTRYAGIN YAKLAŞIMI :

Dinamiği doğrusal differansiyel denklemlerle verilen differansiyel oyunlarda yakalamaya diğer bir yaklaşım (1)'de geliştirilmiştir. Buradaki ana fikir durumu yakalama kümesi olarak adlanan hedef kümesine sürüklemek isteyen takipçinin önce kaçanı hareketten sakıt bırakması, geri kalan enerjisi ilede yakalama kümesine sürüklemesidir. Karşı tarafın hareketlerini nötralize etmek isteyen Takipçinin karşı tarafın o andaki kararlarına nufus etme zorunluluğu mevcuttur. Bu varsayım gerçekçi olabilir veya olmayabilir. Sistemin

$$\dot{x} = Ax - \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \quad x(0) = x_0 \quad (2.30)$$

denklemleri ile tanımlandığını kabul edelim. Bu denklemde $x, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in R^n$ olmak üzere $\bar{u}_1$ ve $\bar{u}_2$, T ve K'nın karar değişkeni olup, tüm t değerleri için $\bar{u}_1 \in U_1$ ve $\bar{u}_2 \in U_2$ 'nin sağlandığı kabul edilmektedir. (2.30) ile ilgili olarak bir oyunculu oyunda

$$\dot{y} = Ay - u, \quad y(0) = x_0 \quad (2.31)$$

kontrol sistemini ele alalım. Bu denklemde u, $u \in U_1^* U_2$ koşunu sağlamak zorunluğunda olsun. $U_1^* U_2$ farkı U_1, U_2 kümelerinin Pontryagin farkı olarak adlanmakta olup

$$U_1^* U_2 = \left\{ u \mid u + U_2 \subset U_1 \right\}$$

şeklinde belirtilmektedir. U_1 ve U_2 'nin convex, orijin çevresinde simetrik ve boş olmadığı varsayılır ise $U_1^* U_2$ nin boş olmaması için gerek ve yeter şartın $U_2 \subset U_1$ olduğu gösterilebilir (13). Takip eden, tüm t için, kaçanın halihazır kararlarını bilebiliyor ise (2.30) yerine (2.31) ele alınabilir. Sonraki sistemde kontrol kuramı Differansiyel Oyun Kuramına göre daha ileri düzeyde gelişmiş olduğundan daha basittir. Takip edenin x(t) durumunu yakalama kümesi

Λ ya sürükleyebilmesi için gerek ve yeter şart y(t)'yi bu kümeye sürüklemesidir. Dolayısı ile kontrol edilebilirlik problemi ile karşı karşıya kalmaktadır. Pontryagin yaklaşımı burada açıklanmış olana göre biraz daha geneldir.

Buradaki genellik T'nin K'nin hareketlerini gelecek zamandaki belirli bir zaman birimine kadar bilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu yapıda T kontrollerınca K'nin kontrollerinin iptal edilmesinin anlık olması zorunluğu ortadan kalkmaktadır. Örnek olarak; x , u_1 ve u_2 skalar olmak üzere $\ddot{x} = u_1 + u_2$ ile tanımlanan sistemi ele alalım. Tanımı kolaylıkla (2.30)'a çevrilebilen bu sistem; İki oyuncunun kuvvet tatbik edebildiği kütlesi bir olan bir noktayı göstermektedir. Kuvvetlerin;

$$|u_1| \leq 3, |u_2| \leq 2$$

kısıtlamalarına uyması zorunludur. T'nin amacı sistemi $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ durumuna sürüklemek istemesi olması yanında, K bu anı mümkün olduğunca geciktirmek istemektedir. K'nin kararlarının T tarafından bilindiği varsayılırsa

$$\ddot{y} = -u, |u| \leq 1$$

koşuluna göre y'nin mümkün olduğunca kısa sürede $\dot{y} = \ddot{y} = 0$ 'a süreklendiği optimal kontrol problemi ele alınabilecektir. Bu problem optimal kontrol kuramının standart problemi olup, herhangi bir kitapta konu ile ilgili açıklayıcı bilgi bulmak mümkündür.

2.3.4 TEKİL YÜZEYLER :

Doğrusal Kuadratik oyunlar bölümünde Değer fonksiyonunun durum vektörüne göre sürekli ikinci türevleri mevcuttu. Bu kısımda ilgili değer fonksiyonunun benzer düzgünlükte olmadığı problemler ele alınacaktır. Özellikle değer fonksiyonu ve/veya $\frac{\partial V}{\partial x}$ süreksiz olabilecektir. Bu tip problemlerde durum uzayının veya ilgili bölümünün sonlu sayıda ikiye bölünebilir kümeler olarak ayrılabilir ve değer fonksiyonunun bu kümelerde ikinci türevlerinin olacağı daima kabul edilecek bir varsayımdır. Bu kümelerin sınırları Tekil yüzey olarak adlandırılır. $V(x, t)$ 'nin (2.8) denkleminde oluşturma yöntemi ve şekli bu tip bölgelerde çok iyi anlaşılır duruma gelir. Burada kalan tek zorluk değişik

bölgelerdeki değer fonksiyonlarının birleştirilmesinden kaynaklanmaktadır.

Diğer problem tekil yüzeylerin nasıl bulunacağı olarak ortaya çıkmaktadır.

Bunların, hedef kümesinden başlıyarak (2.8)'in zamana göre geri integrali alınmak sureti ile otomatik olarak bulunması zorunluluğu yoktur. Bu hususun gösterilmesi

için bir örneğin bulunmasından önce ikinci türevin mevcut olduğu bir bölgede

(2.7)'den $V(x, t)$ 'nin bulunması yöntemi açıklanacaktır. Basite indirgemek

üzere V 'yide zamandan bağımsız yapan, zamandan bağımsız bir hedef kümesi ile

birlikte (2.6) ve (2.7)'deki oyun probleminin olduğunu varsayalım. Bu nedenle

(2.8)

$$\min_{u_1} \max_{u_2} \left[L + \frac{\partial V}{\partial x} f \right] \equiv 0 \quad (2.32)$$

şekline indirgenecektir. Minimize eden u_1 ile maximize eden u_2 'nin u_1^* ve u_2^* olarak yerine konulduğunda x^* ilgili yörünge olmak üzere

$$H(x^*, u_1^*, u_2^*) \triangleq L(x^*, u_1^*, u_2^*) + \frac{\partial V(x^*)}{\partial x} f(x^*, u_1^*, u_2^*) \equiv 0 \quad (2.33)$$

elde edilir. H 'in x 'e göre türevi alındığında

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) f \equiv \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \equiv 0$$

elde edilir. Bu denklemde x^*, u_1^*, u_2^* terimleri düşülmüş

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} = \frac{\partial H}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dx} = 0$$

yerine konulmuş ve (2.32) den son eşitlik elde edilmiştir. Dolayısı ile

$V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ ve benzeri olmak üzere optimal yörünge boyunca

$$\frac{d}{dt} V_x = -L_x + V_x f_x$$

olacaktır.

Örnek olarak aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$\dot{x}_1 = (2 + \sqrt{2}) u_2 - \sin u_1$$

$$\dot{x}_2 = -2 - \cos u_1$$

Başlangıç koşulu, $x_2 > 0$ yarı düzlemi olarak verilsin. Hedef kümesi $x_2 \leq 0$ ve maliyet fonksiyonu

$$J = x_1^2(t_b)$$

olarak alınsın. u_1 için bir kısıtlama olmayıp, u_2 'nin $|u_2| \leq 1$ eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir. Bunun sonucu olarak x_1 ekseninde her nokta bitiş noktası olabilecektir. H fonksiyonu

$$H = V_{x_1} \left\{ (2 + \sqrt{2}) u_2 - \sin u_1 \right\} + V_{x_2} \left\{ -2 - \cos u_1 \right\} \quad (2.35)$$

olacaktır. Burada (2.34)'e göre

$$\dot{V}_{x_1} = 0, \quad \dot{V}_{x_2} = 0 \quad (2.36)$$

olur. V değer fonksiyonu olduğundan x_1 ekseninde boyunca $V_{x_1} = 2x_1$ olacaktır.

(2.35)'in minimax'ının alınması sonucunda

$$u_2 = \text{Sgn}(V_{x_1}) = \text{Sgn}(x_1(t_b)) \quad (2.37)$$

$$(\sin u_1, \cos u_1) \parallel (V_{x_1}, V_{x_2})$$

elde edilir. Burada ($\parallel$) paralel oldukları anlamına gelir (2.37) ve $V_{x_1}(x(t_b)) = 2x_1(t_b)$ 'nin H de yerine konulmasında Sıfır fonksiyonu elde edilir. Buradan $V_{x_2}(x(t_b))$ çözüldüğünde $V_{x_2}(x(t_b)) = 2|x_1(t_b)|$ elde edilecektir. Dolayısı ile

(2.36) için son bulma koşulları elde edilmiştir. Bu şekilde $x_1 > 0$, $x_2 = 0$

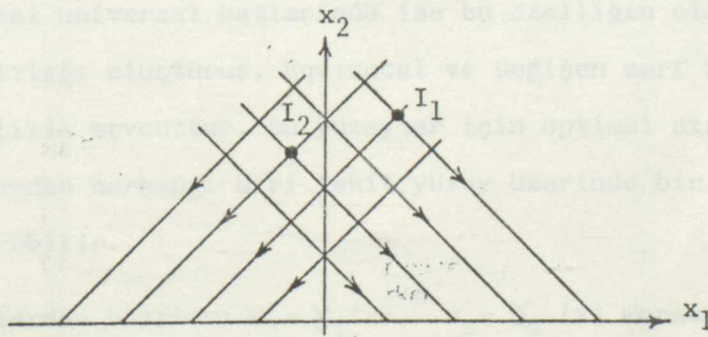
sonbulma koşulu için

$$u_1^* = \frac{\pi}{4} , \quad u_2^* = 1,$$

$x_1 < 0$ son bulma koşulu için

$$u_1^* = -\pi/4 , \quad u_2^* = -1$$

sabit stratejileri elde edilir. İlgili yörüngeler çizildiğinde Şekil 2.5 elde edilmekte ve burada yörüngelerin kesiştikleri görülmektedir. I_1 başlangıç noktasından hareket başladığında iki seçenek ortaya çıkmaktadır. Burada "güney-doğu" yönüne giden yörünge optimaldir. I_2 'den başlanıldığında "güney-batı" optimaldir. "Güney doğu", ve "kuzey batı" arasındaki ayırma hattı x_2 - eksenidir olacaktır. Bu nedenle son bulma koşullarından itibaren zamana göre optimal yolun geri integrali alınarak x_2 - eksenine ulaşıldığında bu entegral alma işlemi durdurulmalıdır. x_2 eksenini dağılma doğrusu olarak adlanır. Daha doğru bir ifade ile kaçan için dağılma doğrusudur. Çünkü başlangıç koşulları x_2 - ekseninde olmuş olsa idi, oyuncu u_2 gideceği yönü kendi belirleyecektir.



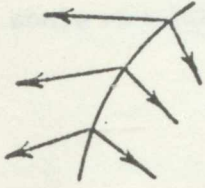
ŞEKİL 2.5

Dağılma doğrusu birçok tekil yüzeyden sadece biridir. Aynı şekilde Katil Şöför oyununda da oluşur. Bu oyunda sonbulmanın daima mümkün olduğunu ve maliyet fonksiyonunun yakalanmaya kadar geçen süre olarak alındığını varsayalım. Kaçan, Takib edenin çok gerisinde ise, diğer bir ifade ile Şekil 2.3'de verildiği gibi durumu $x_1=0$, $x_2 \ll -\beta$ ise, T önündeki K'yı yakalamak üzere en kısa sürede sola veya sağa dönecektir. Bazı negatif x değerleri için $x_1=0$, $x_2 \leq \alpha$ yarım doğrusunun, takib eden için dağılma doğrusu olduğu ispatlanabilir. Aynı oyundan istifade ederek universal doğru olarak adlanan diğer bir tekil yüzeyi ele alalım. Şekil 2.3'de kaçanın x_2 - Eksenine daha yakın olmak üzere T'nin önünde uzak bir mesafede, $x_2 \ll \beta$, olduğunu varsayalım. T'nin yapacağı eniyi hareket K'nın pozisyonu (x_1, x_2) nisbi uzayında x_2 eksenine gidecek şekilde K'ya doğru dönmektir. K, x_2 eksenine geldikten sonra oyun bir doğru üzerinde takip şekline dönüşerek basitleşecektir. Optimal yörüngelerin her iki taraftan birleşerek üzerinde kaldıkları doğru veya daha genel halde yüzeyler universal doğru (yüzey) olarak adlanır. Şekil 2.6'da diğer bazı tekil yüzeyler ile yayılma ve universal hatları çizilmiştir. Diğer tekil yüzeylerin aksine universal doğru; V ve $\partial V/\partial x$ 'in doğru boyunca sürekli olması özelliğine sahiptir. Odak hatlarında yörüngelerin teğet olarak girmesi universal hatlarında ise bu özelliğin olmaması iki hat arasındaki farklılığı oluşturur. Equivocal ve Değişen zarf hatları arasında benzer bir farklılık mevcuttur. Bu yüzeyler için optimal stratejiler tek değildir. Oyunculardan herhangi biri tekil yüzey üzerinde bir süre kalmaya veya aksine karar verebilir.

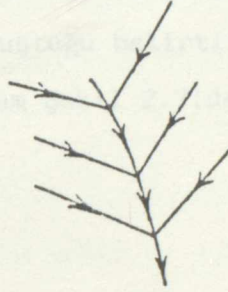
Tekil yüzeylerden bazıları $u_1 = \gamma_1(x)$, $u_2 = \gamma_2(x)$ formundaki stratejiler ile sadece yaklaşık olarak ifade edilebilirler. Örneğin odak hattı durumunda, oyunculardan biri durum vektörünü odak hattından çıkarmaya çalışırken diğeri durumu odak hattına getirmeye çalışacaktır. $u_1 = \gamma_1(x)$, $u_2 = \gamma_2(x(t), u_1(t))$ strateji formlarında kaçanda bilgi avantajı olması halinde durum tam olarak odak hattı üzerinde tutulabilir.

Bu yüzeyler ayrıntılı olarak incelenmiyecek, özel örneklerde sırası geldiğinde ele alınacaktır.

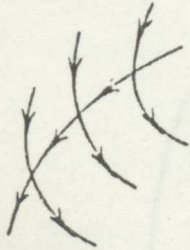
Şekil 2.6'daki ilk üç tekil yüzey (14)'de, ve diğerleri (9)'da geniş ölçüde ele alınmıştır.



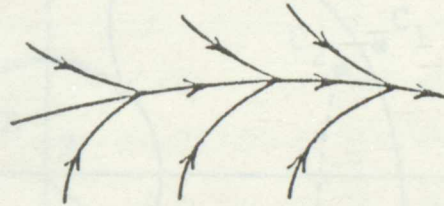
Yayılma Hattı



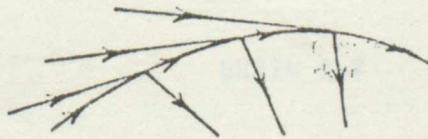
Universal Hat



Uquivocal Hat



Odak Hat



Değişen Zarf

ŞEKİL 2.6

Bu yüzeyler engeli oluşturur. Başlangıç durumu x olduğunda min-max yakalama zamanını belirten $V(x)$ değer fonksiyonu P_1 ve P_2 boyunca süreksiz olacaktır. Başlangıç durumda K , C_2 'de bulunuyorsa T , kendini P_1' i geçmeye zorlayamayacak, ancak P_1 engeli etrafından geçmesini zorlayabilecektir. Bu nedenle C_2 'den yakalama C_1 'den yakalama zamanına göre uzun olacağı açık olarak görüldüğü gibi, ispatlanmasında mümkündür ⁽¹⁾.

$V(x)$ 'nin oluşturulmasında önem gösteren bir soruda tekil yüzeylerin yerinin belirlenmesinde ortaya çıkar. Bu noktaya kadar bu sorunun cevabı verilmemiştir. Yüzeylerin oluşturulması bir anlamda bir sanattır. Durum uzayının sonlu adetteki ikişerli ayrık bölgelerinde $V(x)$ fonksiyonu sürekli iki türevi olacak şekilde oluşturulduktan sonra, $V(x)$ 'in değer fonksiyonunu ifade edip, etmediği konusunda yeterlilik koşulları mevcuttur ⁽¹⁵⁾. Bu yeterlik koşullarının gösterildiği kuramlar, gerçekleştirme kuramları olarak adlandırılmışlardır. Burada herhangi bir stratejinin diğerine göre optimalliğinin kontrol edilmesi sadece kontrol kuramı sorusu olup, bu konuda geniş çalışmalar mevcuttur.

Son bulmanın garantili olabilmesine rağmen, diğer bir değişle sonbuldurma ile yükümlü oyuncunun her başlangıç noktasından oyunu sonbulmaya zorlayabilme imkanına sahip olması ile birlikte, bu husus onun optimal stratejisi ile ilişkili olabilmesi mümkündür. Bu durum bir örnek ile aşağıda açıklanmıştır.

x_1, u_1 ve u_2 skalar olmak üzere hareket denklemi aşağıda verilen oyun ele alınmaktadır.

$$\dot{x}_1 = u_1 + u_2, \quad -1 \leq u_1, u_2 \leq 0, \quad x(0) > 0$$

Hedef kümesi $x \leq 0$ olarak belirlenmiştir. Maliyet fonksiyonu

$$J = \int_0^{t_b} (1-x) dt \quad t_b < \infty \text{ ise} \quad (2.38)$$

$$J = \infty \quad t_b = \infty \text{ ise}$$

şeklinde verilmektedir. Diğer bir değişle K, son buldurma ile yükümlüdür. Bu kısımdaki gereklilik şartları kullanıldığında optimal çözüm için aşağıdaki adaylar tesbit edilecektir.

$$u_1 = \gamma_1^*(x) = \begin{cases} 0 & x > 1 \text{ ise} \\ -1 & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.39)$$

$$u_2 = \gamma_2^*(x) = \begin{cases} -1 & x > 1 \text{ ise} \\ 0 & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre $V(s) = \frac{x(1-x)}{2}$ bulunur. Ancak $x_0 > 1$ ise K, $\gamma_2^*(x) \equiv 0$ oynarak daha iyi sonuca ulaşabilecektir. T; (2.39)'deki $\gamma_1^*(t)$ yi kullanırsa $t_b = \infty$ olduğundan Maliyet fonksiyonu ∞ olacaktır. Bu nedenle (2.39)'in eğer noktası çözümüne bir yararı olmayacaktır. Takip eden oyuncu T'ye

$$\gamma_1(x(t), u_2(t)) = \begin{cases} -1 & x \leq 1 \text{ veya } (x < 1 \text{ ve } u_2 = 0) \text{ ise} \\ 0 & \text{Diğer durumlar} \end{cases}$$

olmak üzere $u_1(t) = \gamma_1(x(t), u_2(t))$ formunda bir bilgi avantajı verilirse denge sağlanabilecektir.

2.4. SIFIR OLMİYAN TOPLAMLI VE STOKASTİK OYUNLAR :

Giriş kısmında belirtildiği gibi sıfır toplamli deterministik differansiyel oyunların sınırı aşıldığında, iki genel doğal durum kendiliğinden oluşmaktadır. İlk durum toplam sıfır olma varsayımının kaldırılarak toplamın sıfır olmaması durumunun getirilmesi ve ikincisi ise belirsizlik halinin dahil edilmesidir. Sonuçta; Oyun kuramının babası sayılan Von Neumann'ca oyun kuramının başlangıç noktası olarak kabul edilen genişletilmiş formdaki en genel oyunlara dönülerek çevrim tamamlanmış olacaktır. Aşağıda sıfır olmiyan toplamli ve stokastik differansiyel oyunların gelişmesi açıklanacak ve bazı önemli özellikleri verilecektir. Son yıllarda iki konuda da önemli miktarda bilimsel makale yayınlanmış olmakla birlikte uygulamaların çoğunluğu niteliksel kalmıştır.

2.4.1. SIFIR TOPLAMLI OLMİYAN DİFFERANSİYEL OYUNLAR :

Differansiyel oyunlar genel genişletilmiş oyun formunun çok özel bir hali olduğundan, toplamın sıfır olması varsayımı kaldırıldığında genel oyunlara ait tüm kavramsal hususlar ortaya çıkacaktır. (2.9) denklemindeki eğer noktası koşulunun benzeri iki oyunculu oyunda aşağıda belirtilen Nash Koşulu olacaktır.

$$J_1(\gamma_1^*, \gamma_2^*) \leq J_1(\gamma_1, \gamma_2^*) \quad \forall \gamma_1 \in \Gamma_1$$

$$J_2(\gamma_1^*, \gamma_2^*) \leq J_2(\gamma_1^*, \gamma_2) \quad \forall \gamma_2 \in \Gamma_2 \quad (2.40)$$

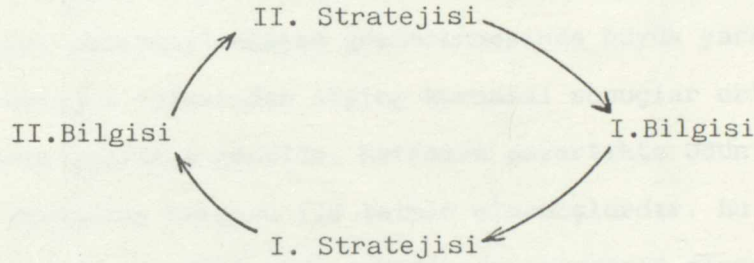
Bu eşitsizliklerde $i = 1, 2$ için J_i , oyuncuların maliyet kriterleri ve γ_1^*, γ_2^* Nash denge strateji çiftlerini göstermektedir. Çözüm kavramı olarak Nash Denge çözümünün eğer noktası çözümüne göre çok zayıf olduğu Oyun Kuramında bilinen bir gerçektir. (γ_1^*, γ_2^*) ve (γ_1^0, γ_2^0) olmak üzere

İki Nash Denge noktasının Sıfır toplamlı durumunda olduğu gibi genelde eşdeğer veya değişebilir özellikte olmaması bu zorluğun temelini oluşturur. Birinci oyuncu için γ_2^* ye karşı γ_1^* eniyi reaksiyon olmakla birlikte $J_1(\gamma_1^*, \gamma_2^0)$ için bir şey söylemek mümkün değildir. Gerçekte, genel olarak oyuncuların işbirliği yapmaları halinde $i=1,2$ için J_i^* dan daha iyi $(\gamma_1^\#, \gamma_2^\#)$ stratejilerini veren $J_1^\#$ ortaya çıkabilir. Dolayısı ile işbirliği veya işbirliği olmaması durumları için diğer çözüm ilkelerinin araştırılması ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu çözüm ilkelerinin araştırılması differansiyel oyun modellerine yeni ufuklar açmış ve makalelerde çoğalma sağlamıştır. Bunlar arasında Reklam (16,17), Ticaret (18,19), Uzlaşma (20,21,22,23) ve ekonomi politika (24,25,26) önemli uygulama alanlarını oluşturur.

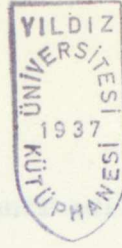
2.4.2. BİLGİ YAPISI VE STOKASTİK DIFFERANSİYEL OYUNLAR :

Differansiyel oyun ve genişletilmiş oyunlar üzerinde yapılan araştırmaların bir ara ürünüde oyunların karmaşık bilgi yapılarının derinliğine anlaşılmasıdır. Bilgi yapısı kısaca "kim, neyi, ne zaman bilmeli?" şeklinde açıklanabilir. Burada üzerinde durulması gerekli bir husus kabuledilir strateji kümesinin büyüklüğünün direkt olarak bilgi yapısının mükemmelliğine bağlı olmasıdır. Değişik kabul edilir strateji kümeleri aynı problem için sadece değişik kazanç fonksiyonları oluşturmakta kalmayıp aynı şekilde büyük niceliksel özellik farklılığı gösterir. Örneğin iki boyutta basit takip-kaçma problemini ele alalım. Oyun zamanı gerektiğinde uzun ise takip eden veya kaçan oyuncudan herhangi biri oyunu başlangıç durumları (açık döngü) veya halen bulundukları yere göre (kapalı döngü) oynuyor ise kazanç ve kullanılan stratejilerde büyük farklılıklar ortaya çıkar. Bu sonuca bir oyunculu optimizasyon probleminde karşılaşılmamaktadır. Açık ve kapalı döngü; gürültü varsayımının sıfır veya sonsuz olmadığı genel gürültülü gözlem durumlarında iki sınırı oluşturur. Bu durumlarda stokastik

Differansiyel oyunlar ortaya çıkmaktadır. Karmaşık bir elemana daha sahip olması dolayısı ile Stokastik Differansiyel oyunlar bir oyunculu stokastik kontrol kuramının genişlemiş hali olarak düşünülemez. Diğer bir değişle değişik oyuncuların değişik bilgilere sahip olması söz konusudur. Bu görünüşte basit, doğal varsayımın ortaya çıkardığı yeni kavram problem halen tam çözülememiştir. Buradaki temel zorluk oyunculardan birinin mevcut bilgisinin, diğerinin geçmiş zamandaki stratejisine bağlı olmasından kaynaklanmaktadır. Bunun sonucu aşağıdaki şekilde verilen bozuk çevrim ortaya çıkmaktadır.



Bu temel problemin ayrıntılı açıklaması (27)'de yapılmıştır.



3. BÖLÜM

UZLAŞMA İŞLEVLERİNE DIFFERANSİYEL OYUN YAKLAŞIMI

3.1. GENEL YAKLAŞIMLAR :

Uzlaşma işlevinin; uluslararası silahsızlanma görüşmeleri; Gümrük indirimi ve fiat birliği uygulamaları; ücret, çalışma koşulları ve işçi iştirakleri konusunda işçi-işveren anlaşmazlıkları; çevre kirliliği, fiat, kalite gibi konulardaki üretici-tüketici ilişkileri gibi geniş bir spektrumda yer alan ekonomik ve sosyal uzlaşmazlıkların çözülmesinde büyük yararlar sağladığı bilinmektedir. Uzlaşma işlevinden ilginç kuramsal sonuçlar ortaya çıkmıştır. Ekonomistler zaman geçtikçe genelde, herkezin pazarlıkta ödün vermez olarak kabul edildiği Walrasian kurgusu ile tatmin olmamışlardır. Bu kurguya göre dengeli duruma sonsuz sayıdaki oyun sonrasında asimetrik olarak erişilmekte ve dengeli duruma erişildikten sanrada ortaklaşa hareket edilerek sağlanabilecek yeni bir uzlaşmaya yer kalmamaktadır. Günümüzün gerçekçi uzlaşma kuramlarında tarafların fiat indirimi yapması uzlaşmanın sonlu bir süre içinde sağlanması ve sonuçta uzlaşılmadan kalan maddelerin elektrikli trenlere kömür ateşçisi konulması gibi tamamen anlamsız özelliğe sahip olması zorunlu kılınmaktadır.

Uzlaşma konusunu ele alan makalelerin çoğunluğunda işveren ve işçi tipi iki tekelli sözleşmeler yoğunluk kazanmaktadır. Grevlerin sosyal bir maliyetinin olması ve toplu sözleşmelerin enflasyon ve işsizlik konusunda önemli etkileri dolayısı ile bu sonuç doğal karşılanmaktadır. Diğer bir neden ise Toplu Sözleşmelerde başarı sağlayan kuramın benzer diğer durumlar için de aynı sonucu vereceğidir. İkinci kısımda genel bir differansiyel oyun modeli

kurulacak, 3. Kısımda ise; uzlaşmanın garanti edildiği bazı koşullar altında, tek olmıyan ve ilgili sonuçlarla neticelenen bazı dengeli uzlaşma stratejilerinin olduğu kanıtlanacaktır. Bu dengeli sonuçlar, her oyuncunun diğer oyuncuların, başlangıç tekliflerini kabul etmesi halinde, oyunu istediğince sürdürebileceğini gösterir. Dengeli sonuçlardan çoğu yetersiz olmakla birlikte, sözleşmenin tekrar yapılması halinde tarafların tümüne fayda sağlanması mümkün olabilir.

3.2. MODELİN FORMULASYONU :

N tarafın (oyuncu) n madde üzerinde uzlaşması modeli ele alınmakta ve aşağıdaki soruların cevabı bulunmaya çalışılmaktadır.

- (1) Grev ne kadar süre devam edecektir?
- (2) Hangi koşullarda uzlaşma sağlanacaktır?
- (3) Her oyuncu için oyunun değeri nedir?

Önce differansiyel oyun modelindeki kavramlar tanımlanacak ve bundan sonra dengeğin tümü sınıflandırılacaktır.

Tanımlar :

Oyuncular : $i = 1, \dots, N$

Maddeler : $J = 1, \dots, n$

Konum Değişkenleri : $x = (x^1, \dots, x^i, \dots, x^N)$

olup, bu vektörde x_J^i ; i. oyuncunun j. maddedeki isteğinin bölümünü belirtmek üzere $x^i = (x_1^i, \dots, x_j^i, \dots, x_n^i)$ şeklinde tanımlanmıştır.

Talep Fazlası : $J = (1, \dots, 1)$ olmak üzere $E(x) = \sum_{i=1}^N x^i - J$ olup her madde için taleplerin uyumsuzluk derecesinin ölçüsünü belirtmektedir.

Talep Artığı : $R^i(x) = J - \sum_{k \neq i} x^k$ olup, i .oyuncu diğer oyuncuların taleplerini kabul etmesi halinde; kendine kalan artık madde bölümlerini göstermektedir.

Oyun Uzayı : $X = X \times [0, \infty]$ olup, bu formülde $X = \left\{ x \mid E(x) \in R_+^n, R^i(x) \in (R_+^n \setminus \{0\}) \ i=1, \dots, N \text{ için} \right\}$ olup, R_+^n n -boyutlu Euclidean uzayındaki pozitif bölümü göstermektedir.

Açıklama : Tanımdan $R^i(x) = J - \sum_{k \neq i} x^k = x^i - E(x)$, $x^i = R^i(x) + E(x)$ olmaktadır. Dolayısı ile herhangi $x \in X$ ve tüm $i, k, i \neq k$ için $x^i \in (R_+^n \setminus \{0\})$, $0 \neq x^k \leq J$, $0 \neq R^i(x) \leq J$ sonucu çıkmaktadır. Bu koşulların altındaki ekonomik gerçek ise şu şekilde açıklanabilecektir; Herhangibir oyuncunun uzlaşmayı veto edebilmesi durumunda i .oyuncunun j madde üzerindeki talebi veya talep artığı

$$0 \leq R_j^i(x) \leq x_j^i \leq 1$$

şeklinde negatif olmıyan bir sayı olmak zorunluluğundadır.

İlave olarak herhangi bir oyuncunun tüm maddeler için ne talebi ve nede talep artığı sıfır olmamalıdır:

$$x^i \neq 0 \neq R^i(x)$$

Talebi olmıyan, oyuncu olamıyacaktır. Hiçbir şeyin verilmeyeceği bildirilen oyuncu ise uzlaşmayı her zaman veto etme hakkına sahiptir.

Sonbulma Manifoldu : $Q^0 = Q \times [0, \infty]$ olup, burada $Q = \left\{ x \in X \mid \sum_{i=1}^N x^i = J \right\}$ özelliğine sahiptir. Oyun; $(x, t) = (y, T) \in Q^0$

sağlayan t 'nin enküçük değerinde son bulacaktır. Bu vektörde $y = (y^1, \dots, y^N)$ maddelerin uzlaşma sonucunu, T ise bitiş zamanını göstermektedir.

AÇIKLAMA :

$x \in Q$ durumunda tüm i için $x^i = R^i(x)$ olur.

i.Oyuncu İçin Ödeme : Birinci türevi sürekli (C^1) olmak üzere

$U_i(.) : R^{n+1} \rightarrow R^1$ olarak tanımlanan i.oyuncu ödeme fonksiyonu tüm $(y,T) \in X$

değerlerinde;

$$j \in \{1, \dots, n\} \text{ için } U_{ij}(y^i, T) \triangleq \frac{\partial U_i(y^i, T)}{\partial y_j^i} > 0$$

ve

$$U_{io}(y^i, T) \triangleq \frac{\partial U_i(y^i, T)}{\partial T} < 0$$

koşullarını sağlamalıdır.

Strateji ve Kontrollar :

$P^i \triangleq \left\{ \text{Sınırlı, Sürekli } p^i(.) \text{ fonksiyonların tümü: } (X^0 \setminus Q^0) \rightarrow R^n \right\}$ olup i.oyuncunun strateji kümesini oluşturmaktadır. Bu fonksiyon

$$\dot{x}^i = p^i(x(t), t)$$

özelliğine sahip olup, $(x(t), t)$ de i.oyuncunun kontrolunu oluşturmaktadır.

N oyuncu stratejileri ile ilgili

$$P \triangleq \prod_{i=1}^N P^i$$

tanımı yapılmaktadır.

Açıklama :

$(x_0, t_0) \in X^0$, $p(.) \in P$ olarak verilmesi halinde

$$\dot{x}(t) = p(x(t), t), x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

differansiyel denklemi çözümünün tek olması şartı bulunmamaktadır. Bu denklemde $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ şeklinde n.boyutlu bir vektör olduğuna dikkat edilmelidir.

(x_0, t_0) noktasındaki oynanabilir $P(x_0, t_0)$ Stratejileri :

$(x_0, t_0) \in (X^0 \setminus Q^0)$ noktasında $p(.) \in P$ 'nin oynanabilir olarak tanımlanması için gerek ve yeter şart: $T \in (t_0, \infty)$ değerleri için (3.1) denklemini sağlayan enaz bir sürekli $\phi(.) : [t_0, T] \rightarrow X$ fonksiyonunun bulunması ve bunun yanında

$$\text{tüm } t \in [t_0, T) \text{ için } \phi(t) \in (X \setminus Q) \quad (3.2)$$

ve

$$\phi(T) \in Q \quad (3.3)$$

olmasıdır.

$$P(x_0, t_0) \triangleq \left\{ p(.) \in P \mid p(.), (x_0, t_0) \text{ da oynanabilir} \right\}$$

$$P_0 \triangleq \bigcup_{(x_0, t_0) \in (X^0 \setminus Q^0)} P(x_0, t_0)$$

olarak tanımlansın.

Sonuç Fonksiyonu :

$$V(.): \left\{ (x_0, t_0, p(.), \phi(.)) \mid (x_0, t_0) \in X^0; p(.) \in P(x_0, t_0); \phi(.), (3.1), (3.2) \text{ ve } (3.3) \text{ ü sağlamaktadır.} \right\} \rightarrow R^N$$

olup $V(x_0, t_0, p(.), \phi(.)) = U(\phi^i(T), T)$ 'dir.

N-Li Denge Stratejisi :

$P^*(.) = (p^{1*}(.), \dots, p^{N*}(.))$ in N-li denge stratejisi olması için gerek ve yeter şart olarak aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır. (NASH KOŞULLARI)

tüm $i \in \{1, \dots, N\}$ için,
 tüm $(x_o, t_o) \in X^o$ için,

tüm $i_p^* (.) \triangleq (p^{1*} (.), \dots, p^{i-1*} (.), p^i (.), p^{i+1*} (.), \dots, p^{N*} (.)) \in$
 $P(x_o, t_o)$ için,

(x_o, t_o) ve $p^* (.)$ ye göre (3.1), (3.2) ve (3.3)'ü sağlayın tüm $\phi^* (.)$ için ve

(x_o, t_o) ve $i_p^* (.)$ ye göre (3.1), (3.2) ve (3.3) sağlıyan tüm $i\phi^* (.)$ için

$V_i(x_o, t_o, p^* (.), \phi^* (.)) \geq V_i(x_o, t_o, i_p^* (.), i\phi^* (.))$ olmalıdır.

$P^* \triangleq$ Tüm N-Li denge Stratejileri şeklinde tanımlansın.

3.3. DENGE SINIFI :

Temel sonuç kanıtlanmadan önce oyunun sonuçlanmasına yönelik iki yeterlilik koşulu kümesi belirtilecektir. Bunu takiben ekonomik yorumlama yapılacaktır. Önce aşağıdaki tanımları yapalım :

$$B_i(x_o, t_o) \triangleq \left\{ (x, t) \mid U_i(R^i(x), t) \geq U_i(R^i(x_o), t_o) \text{ sağlıyan } x \text{ ve } t \text{ ler} \right\}$$

$$B_o(x_o, t_o) \triangleq \bigcap_{i=1}^N B_i(x_o, t_o)$$

$$\bar{T}_i(x_o, t_o) \triangleq \sup \left\{ t \mid (x, t) \in B_i(x_o, t_o) \text{ sağlıyan tüm } x \text{ ler} \right\}$$

$$\bar{T}(x_o, t_o) \triangleq \sup \left\{ t \mid (x, t) \in B_o(x_o, t_o) \text{ sağlıyan tüm } x \text{ ler} \right\}$$

Buna göre aşağıdaki iki koşul getirilmektedir.

$(U_1(.), \dots, U_N(.))$ için Düzgün Sonbulma Koşulu (DSK) :

Herhangi $(x, t) \in X^o$ için $\bar{T}(x, t) < \infty$

$U_i(.)$ için Sonlu Dayanma Koşulu (SDK) :

Herhangi $(x,t) \in X^0$ için $\bar{T}_i(x,t) < \infty$

AÇIKLAMA :

Herhangi $(x,t) \in X^0$ için $\bar{T}(x,t) \leq \bar{T}_i(x,t)$ olduğundan herhangi i için SDK'nın varlığı DSK'nın varlığının belirtisi olur. Ancak tersi mümkün değildir. Diğer bir değişle $T(x,t) < \infty$ olması $\bar{T}_i(x,t) < \infty$ olmasını garantileyemez. Aşağıda verilen önerme, DSK* zayıf koşulları ile belirtilmiştir. Ancak SDK'nın ekonomik yorumu daha basittir. Diğer bir değişle herhangi bir (x,t) konumunda i . oyuncu çekişme süresi sonunda elde edeceği sonuç ne kadar iyi olursa olsun çekişmeyi $\bar{T}_i(x,t)$ zamanı öncesinde durdurarak $R^i(x)$ artık miktarını kabul edip anlaşma yolunu tercih edecektir.

Bir Denge Sınıfının Nitelendirilmesi :

Aşağıdaki tanım yapılmaktadır.

$$\begin{aligned} \tilde{P} = \left\{ \tilde{p}(.) \in P \mid \text{herhangi } (x,t) \in (X^0 \setminus Q^0) \text{ konumunda} \right. \\ \text{(i) herhangi } j \text{ için, } E_j(x) = 0 \Rightarrow \sum_i \tilde{p}_j^i(x,t) \geq 0; \\ \text{(ii) herhangi } i,j \text{ için, } R_j^i(x) = 0 \Rightarrow \sum_{k \neq i} p_j^k(x,t) \leq 0; \text{ ve} \\ \left. \text{(iii) herhangi } i \text{ için, } \sum_j U_{ij}(R^i(x),t) \sum_{k \neq i} \tilde{p}_j^k(x,t) = U_{i0}(R^i(x),t) \right\} \end{aligned}$$

ÖNERME :

$(U_1(.), \dots, U_N(.))$ Düzgün Sonbulma Koşullarını sağlıyor ise $\tilde{P}$, boş olmıyan N-li denge Strateji sınıfını oluşturur.

$$DSK = \emptyset \neq \tilde{P} \subset P^*$$

Ayrıca dengeli sonuç; her oyuncunun alacağı ödeme miktarı, oyunun başlangıcında, her oyuncu başlangıç talep artışı kabul etmesi halindeki alması gerekli miktara eşit olacak şekilde oluşur.

Tüm i , $(x_0, t_0) \in X^0$, $\tilde{p}(\cdot) \in \tilde{P}$ için ve (x_0, t_0) ile $p(\cdot)$ ye göre (3.1), (3.2) (3.3) koşullarını sağlayın tüm $\phi(\cdot)$ için

$$V_i(x_0, t_0, \tilde{p}(\cdot), \phi(\cdot)) = U_i(R^i(x_0), t_0)$$

olmalıdır. (Sonucun korunması)

Önermenin Kanıtı :

Boş Olmama :

Bu kısımda; $\tilde{P}$ nin boş olmıyan bir alt kümesi oluşturulacaktır. Aşağıdakileri tanımlayalım :

$G \triangleq \left\{ g(\cdot) : (R_+^n \setminus \{0\}) \rightarrow R_+^{Nn} \setminus \{0\} \right\}$ olarak tanımlanan sınırlı ve türevi olan fonksiyonların tümü.

$$\Pi \triangleq \left\{ \Pi(\cdot) : (X^0 \setminus Q^0) \rightarrow R_+^{Nn} \mid \text{bazı } g(\cdot) \in G, \text{ ve tüm } i \in \{1, \dots, N\}, \right. \\ \left. h \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

için

$$\Pi_h^i(\bar{x}, t) = \frac{U_{i0}(R^i(x), t) g_h^i(E(x)) E_h(x)}{\sum_{j=1}^N U_{ij}(R^i(x), t) g_j^i(E(x)) E_j(x)}$$

$$\hat{P} \triangleq \left\{ \hat{p}(\cdot) : (X^0 \setminus Q^0) \rightarrow R^{Nn} \mid \text{bazı } \Pi(\cdot) \in \Pi, \right.$$

$$\left. \text{tüm } i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, n\} \text{ için } \hat{p}_j^i(\cdot) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \Pi_j^k(\cdot) - \Pi_j^i(\cdot) \right\}$$

Buradan; $g_j^i(v) = 1$ ve $v \in (R_+^n \setminus \{0\})$ ile tanımlanan sabit $g(.)$ fonksiyonunun, G kümesine ait olduğu açık olarak görülmektedir. $G \neq \emptyset$ olması $\Pi \neq \emptyset$ ve $\hat{P} = \emptyset$ olduğunu gösterecektir. $P \neq \emptyset$ olduğunu göstermek için, P 'yi tanımlayan 3 Koşul kontrol edilerek sadece $P \subset P$ olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. Bunun öncesinde aşağıdaki iki özdeşlik ele alınacaktır.

$$\hat{p}_h^i(x, t) = \left\{ \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \frac{U_{ko}(R^k(x), t) g_h^k(E(x))}{\sum_{j=1}^n U_{kj}(R^k(x), t) g_j^k(E(x)) E_j(x)} - \frac{U_{io}(R^i(x), t) g_h^i(E(x))}{\sum_{j=1}^n U_{ij}(R^i(x), t) g_j^i(E(x)) E_j(x)} \right\} E_h(x) \quad (3.4)$$

$$\sum_{k \neq i} \hat{p}_h^k(x, t) = \Pi_h^i(x, t) = \frac{g_h^i(E(x)) E_h(x)}{\sum_{j=1}^n U_{ij}(R^i(x), t) g_j^i(E(x)) E_j(x)} U_{io}(R^i(x), t) \quad (3.5)$$

Tüm $(x, t) \in (X^0 \times Q^0)$ 'de, $U_{kj}(R^k(x), t) > 0$, $g_j^k(E(x)) > 0$ olduğundan ve $E_j(x) \geq 0$ eşitsizliği en az bazı j değerleri için tam eşitsizlik olduğundan (3.4) ve (3.5) deki paydaların tümü pozitif olacaktır. Bu nedenle kesirler sonlu olmak zorundadır.

(3.4) de $E_h(x) = 0$ olması , tüm i için $\hat{p}_h^i(x,t)=0$ olduğunu gösterecek, dolayısı ile (i) koşulu sağlanmış olacaktır. (3.5) deki son terimde, kesir pozitif ve $U_{i0}(R^i(x),t)$ pozitif değildir. Dolayısı ile tüm $(x,t) \in (X^0 \setminus Q^0)$

için $\sum_{k \neq i} \hat{p}_h^k(x,t) \leq 0$ olup, bunun sonucundada (ii) koşul gerçekleşmektedir.

(3.5)deki denklem incelendiğinde (iii) koşulunu göstereceğinden $\hat{p} \subset \tilde{p}$ olacak ve bu şekilde p 'nin boş küme olmadığı sonucuna varılacaktır.

Denge ve Sonucun Korunması :

Önce aşağıdaki lema geliştirilecektir.

Lema

Herhangi $(x_0, t_0) \in X^0$,

Herhangi $\tilde{p}(\cdot) \in \tilde{P}$

Herhangi $i_{\tilde{p}}(\cdot) = (\tilde{p}^1(\cdot), \dots, \tilde{p}^{i-1}(\cdot), p^i(\cdot), \tilde{p}^{i+1}(\cdot), \dots, \tilde{p}^N(\cdot)) \in$

$P(x_0, t_0)$ (burada $p^i(\cdot), \tilde{p}^i(\cdot)$ 'e eşit olabilecek veya eşit olamayacağı gibi bunun sonucu $i_{\tilde{p}}(\cdot)$ de $\tilde{p}(\cdot)$ e eşit olabilecek veya olamayacaktır.)

Herhangi $\phi(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow X$ (burada $i_{\tilde{p}}(\cdot)$ ve (x_0, t_0) göre (3.1) ve (3.2) sağlanmalıdır.)

ve herhangi $t \in [t_0, t_1]$ için

$$U_i(R^i(\phi(t)), t) = U_i(R^i(x_0), t_0) \quad (3.6)$$

KANIT :

$$U_i(R^i(\phi(t)), t) = U_i(R^i(x_0), t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ U_{i0}(R^i(\phi(s)), s) - \sum_{j=1}^n U_{ij}(R^i(\phi(s)), s) \sum_{k \neq i} \tilde{p}_j^k(\phi(s), s) \right\} ds$$

$\tilde{P}$ tanımındaki (iii) koşul entegralin sıfır olmasına neden olduğundan; (3.6) kanıtlanmış olmaktadır. Tüm $\tilde{p} (.) \in \tilde{P}$ için; $\tilde{p} (.)$, $(x^0 | Q^0)$ 'da "oynanabilir olma" özelliğine sahip ise yukarda verilen lema Nash koşulları (Dolayısı ile $\tilde{P} \subset P^*$) ve sonucun korunması kuralının geçerli olduğunu göstermekte ve bunun sonucu olarakta önerme kanıtlanmış olmaktadır. Şöyleki; Oynanabilir olma özelliğinin (3.3) koşulu

$$\phi (T) \in Q$$

olduğundan

$t=T$ de $R^i(\phi (T)) = \phi^i (T)$ olacak buna göre Lemma sonucu ve sonuç fonksiyonu tanımlarının birleştiriltilğinde

$$U_i(R^i(\phi (T)), T) = U_i(\phi^i (T), T) = V_i(x_0, t_0, \tilde{p} (.), \phi (.))$$

elde edilecek ve lemadan

$$U_i(R^i(\phi (T)), T) = U_i(R^i(x_0), t_0)$$

olduğundan

$$V_i(x_0, t_0, \tilde{p} (.), \phi (.)) = U_i(R^i(x_0), t_0)$$

sonucun korunması kuralı elde edilmiş olacaktır.

Varsayımın yanlış olduğu düşünülürse; bu durumda "Oynanabilir olma" özelliğinde olmıyan enaz bir $\tilde{p} (.) \in \tilde{P}$ 'nin (x_0, t_0) da olması mecburiyeti doğacaktır. Diğer bir değişle (x_0, t_0) ve $p (.)$ ye göre (3.1) ve (3.2) yi sağlıyan tüm $\phi (.)$ fonksiyonları herhangi sonlu bir zamanda Q içindeki bir konumda sonuçlanamayacaktır. Ancak hala bu tipteki tüm $\phi (.)$ fonksiyonları için, (3.6) koşulu geçirililiğini sürdürmek mecburiyetindedir.

$\phi (.)$ nin Q içinde sonlu bir zamanda sonbulmaması değişik formlarda gelişir. X 'in tanımına tekrar dönülürse bazı sınır noktalarının X içinde olmadığı bazılarındanda $(X \setminus Q)$ içinde olduğu görülecektir. Dolayısı ile aşağıdaki üç durum ortaya çıkmaktadır.

I.DURUM :

$\phi(\cdot): [t_0, t) \rightarrow (X \setminus Q)$ sağlayacak bazı $t > t_0$ olmakla birlikte

$\lim_{s \rightarrow t} \phi(s) \notin X$. Diğer bir şekilde ifade ile bazı i değerleri için,

$$\lim_{s \rightarrow t} R^i(\phi(s)) = 0$$

olmaktadır. Bu özellik ile X konumu için verilen tanımdaki bölge dışına çıkılmaktadır.

II.DURUM :

$\phi(\cdot): [t_0, t) \rightarrow (X \setminus Q)$ sağlayacak $t > t_0$ olmakla birlikte herhangi

$\epsilon > 0$ için $\phi(t) + \epsilon \dot{\phi}(t) \notin X$ olmaktadır. Diğer bir şekilde ifade ile bazı i ve j için

$$R_j^i(\phi(t)) = 0 \text{ ve } \frac{d}{dt} \sum_{k \neq i} \phi_j^k(t) > 0$$

olacaktır.

III. DURUM :

$t_1 > t_0$ olacak şekilde tüm t_1 için $\phi(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow (X \setminus Q)$ dir. Diğer bir şekilde ifade ile oyun hiçbir zaman son bulmamaktadır.

Lema açısından, DSO III.durumu devre dışı bırakmaktadır. $\tilde{P}$ nin tanımındaki (i) ve (ii) koşulları II.durumu önlemektedir. I.durum için ise $x_0 \in X$ olduğunda $R^i(x_0) \in (R_+^n \setminus \{0\})$ dir. Ortalama - değer kuramına göre aşağıdaki eşitliği sağlayacak $\mu \in (0,1)$ mevcuttur.

$$U_i(R^i(\phi(t)), t) - U_i(R^i(x_0), t_0) = U_{i0}((1-\mu)R^i(x_0) + \mu t + (1-\mu)t_0)(t-t_0)$$

$$- \sum_j U_{ij}((1-\mu)R^i(x_0) + \mu t + (1-\mu)t_0)R_j^i(x_0) < 0$$

Bu sonuç ise (3.6) için bir çelişkidir. Sonuç olarak herhangi (x_0, t_0) için herhangi $\tilde{p}(\cdot)$ ile üretilen her $\phi(\cdot)$, Q içinde sonlu bir sürede nihayetlenmek zorunluluğundadır. Dolayısı ile kanıt son bulmaktadır.

AÇIKLAMALAR :

(1) $\tilde{P}$ sınıfı dışındaki $N-Li$ bir denge stratejisinin olup, olmadığı cevapsız bir soru olarak kalmıştır.

(2) Bu modelde

$N=2$ ise (iki oyuncu durumu)

$$l^i \in R_+^n \setminus \{0\},$$

$$\delta_{li} = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i=2 \end{cases}$$

$$k_i > 0$$

olmak üzere

$$U_i(y^i, T) = l^i (y^i - \delta_{li} J) - k_i T \quad i=1,2$$

ve

$$g(\cdot) = \bar{g}(\cdot) \in G$$

olacak ve sonuç $\hat{p}(\cdot)$ Leitmann - Liu⁽²⁸⁾ daki dengeye uyacaktır.

Dengenin Ekonomik Yorumlaması :

(1) Var olma :

Çözümün mümkün olması oyuncuların tektek (SDK) veya birlikte (DSK) erken çözüm isteme derecesine bağlıdır. Oyuncular uzlaşma maddelerine uzlaşmanın sağlanma gününe nazaran daha çok önem veriyorlar ise varılmak istenen uzlaşmada bir dengeyin olmaması mümkündür.

(2) Vasıflandırma :

Herhangi bir denge durumunda, herhangi bir oyuncunun elde edeceği sonuç, başlangıçta (t_0) diğer oyuncuların taleplerini kabul ederek, ortaya çıkan talep Artığının $R^i(x_0)$ oluşturacağı sonuçtan kötü veya iyi olamayacaktır. Çözüm öncesinde herhangi bir oyuncu tarafından denge stratejilerinin uygulamaya konulması halinde diğer tüm oyuncular etkilenirler. Diğer bir şekilde ifade edilirse kendine karşı olan tüm (N-1) oyuncu tarafı etkilenecektir. Oyuncunun uzlaşma konumunu $R^i(x(t))$ geliştirecek bu tip kollektif kabullenme, aynı oyuncunun uzlaşmazlık dolayısı ile ortaya çıkan çekişmenin yaratacağı parasal kaybını dengeliyecektir. Diğer oyuncuların birlikte hızlı olarak kabul etmeleri mümkün olmayabilir. Hızlı kabul etme bazen oyuncuyu daha iyi sonuçları sağlama düşüncesine iteceğinden daha uzun süre dayanmasına sebep olabilir. Diğer oyuncularda kabullenmeyi yavaşlatma konusunda şüpheli olabilirler. Herşeyden önce anılan oyuncu aynı derecede elverişli sonuçlar ile anlaşma meyiline girmiştir. Her oyuncu uzlaşmanın yapılma zamanı konusunda kararsız olduğu için, çekişme sürüp gidecektir.

Aşağıdaki hususlar $\hat{P}$ alt sınıfını diğerlerinden ($\tilde{P} \setminus \hat{P}$) ayırmaktadır. Birincisi, $\hat{P}$ durumunda j için anlaşılmış ise, tekrar gündeme gelmesi mümkün değildir. İkincisi j maddesi için i oyuncusunun talep artışı $R_j^i(x)$ hiçbir zaman azalmaz. Sonuncu olarak talep Artışı gelişmesi hızı $\frac{d}{dt} R_j^i(x(t))$ bulunulan zamana (t), Talep Fazlası vektörüne $E(x)$, ve kendi talep artığına, $R_j^i(x)$ bağlıdır. x vektörleri arasındaki fark $E(x)$ veya $R_j^i(x)$ ler arası fark ile birlikte olmadıkça $\frac{d}{dt} R_j^i(x)$ etkilenemeyecektir.

(3) Tek Olmama :

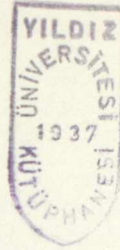
Denge Stratejileri durumunda her oyuncu talep artıklarının, çekişmenin sonucu ortaya çıkan anlık maliyete eşit bir hızla geliştiğini görecektir. Ancak birden fazla madde olması halinde talep artışının gelişmesi değişik formlarda olacaktır. Örneğin bir maddede hızlı ilerleme olurken diğerinde yavaş veya tersinin olması mümkündür. Bu nedenle ortaya çıkan N-Denge Strateji seçenekleri, uzlaşma maddeleri ile süresinin tek olmaması sonucunu doğurur.

(4) Grup Rasyonelsizliği :

Denge iki nedenle grup rasyonel değildir.

(a) Çekişmenin sonucu doğan savurganlık. Endüstriyel grevler bunun engüzel örneğini oluşturur. Herhangi bir tehdit uygulamasının grup rasyonelliği ile açıklaması mümkün değildir.

(b) Yeterli olmıyan uzlaşma maddeleri üzerinde ısrar etme. Gerçek yaşamda karşılaşılan elektrikli trenlere kömür ateşçisi koyma veya bazı işçi tasarrufu niyetlerinin göz ardı edilmesi bunun için iyi bir örnek oluşturur. Özellikle yapılacak bazı düzeltmeler tarafların tümüne karlı gelebilir. Ancak bu tip düzeltmelerin yapıldığına pek rastlanmamaktadır.



4. BÖLÜM

BİR TOPLU İŞ SÖZLEŞMESİ İÇİN BİR DIFFERANSİYEL OYUN MODELİ UYGULAMASI

4.1. NASH DENGİ MODELİ :

4.1.1. PROBLEMİN TANIMI :

İşçi ve işveren differansiyel Oyundaki iki oyuncu tarafını belirtmektedir. Taraflar çalışma düzeni, hizmet akdi ilişkisi, ücretler ve benzeri n adet madde üzerinde uzlaşma istemektedirler. Maddeler üzerindeki işçi tarafın istekleri $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1) \in R^n$ ve işveren istekleri $x^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2) \in R^n$ vektörleri ile belirtilmektedir. Uzlaşma girişimlerinin başlangıç zamanı $\bar{t}_0$, grevin başlangıcı olarak alınmakta ve başlangıç istek ve sunumu $\bar{x}_0^{-1} > \bar{x}_0^{-2}$ olmak üzere $(\bar{x}_0^{-1}, \bar{x}_0^{-2})$ şekli ile Differansiyel oyunun başlangıç konumunu belirtmektedir. Bu tanıma göre $(\bar{x}_0^{-1}, \bar{x}_0^{-2}, \bar{t}_0)$ başlangıç koşullarını oluşturmaktadır. $x = (x^1, x^2)$ vektörü, stratejilerinin seçilerek uygulanması ile oyuncuların kontrol altında tuttukları oyunun durumunu belirtmektedir. Modelde;

$$X \triangleq \left\{ x \in R^{2n} \mid \bar{x}_0^{-1} \geq x^1 \geq x^2 \geq \bar{x}_0^{-2} \right\}$$

ve

$$T \triangleq [\bar{t}_0, \bar{t}_1], \quad \bar{t}_1 < \infty$$

olarak alınacak ve oyun uzayının

$$(x, t) \in X \times T$$

olduğu varsayılacaktır. Buna göre oyun uzayı başlangıç koşullarına bağımlı olmaktadır.

$i = 1, 2$ için;

$$p^i(.) : X \times T \rightarrow R^n$$

fonksiyonunun i. oyuncunun stratejisi olduğunu varsayalım. Buna göre strateji değerlerinin sınırsız olduğuna dikkat edilmelidir. $p(.) = (p^1(.), p^2(.))$ Strateji çifti olarak adlanacaktır.

Oyun, tüm istek ve sunum maddelerinin ilk olarak eşit olduğu, baştan belirli olmıyan bir t_b zamanında son bulacaktır. Buna göre oyunun son bulma koşullarının sağlandığı tüm durumları içeren terminal manifoldu

$$Q = \left\{ x \in R^{2n} \mid x^1 = x^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tarafların maddeleri uzlaşmaya yönelik olarak değiştirme hızı, kabul denklemleri ismi altında

$$\dot{x}^1(t) = p^1(x(t), t)$$

$$\dot{x}^2(t) = p^2(x(t), t) \quad (4.1)$$

formunda verildiği ve $t_0, t_1 \in [t_0, \infty)$, $t_1 \geq t_0$, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x(.) = (x^1(.), x^2(.)) : [t_0, t_1] \rightarrow X, x(t_0) = x_0$$

fonksiyonunun bu denklemlerin çözümü olduğu varsayılmaktadır. Diğer bir ifade ile $x(.)$ sürekli bir fonksiyon olup $[t_0, t_1]$ aralığında (4.1) differansiyel denklemlerinin çözümü olmaktadır. İşçi ve işveren taraflarının grevi durdurma arzusunda oldukları, matematiksel olarak $x(t)$ fonksiyonunun değerini Q kümesine sürmek istedikleri varsayılmaktadır.

Bundan sonra, genel bir yapıda tanımlanan strateji fonksiyonunu oyunun koşullarına uygun olanların seçilmesine olanak sağlayacak şekilde gruplandırılmasına gidilecektir ⁽²²⁾. Bu gruplamada önce; $i=1,2$ oyuncularına ait kabul edilir strateji kümeleri P_{kb}^i ve sonra $(x_0, t_0) \in X \times T$ da oynanabilir strateji

çiftleri kümesi $P_{oy}(x_o, t_o)$ ele alınacaktır.

TANIM 4.1 : $i \in (1,2)$, $(x_o, t_o) \in X \times T$, verilen $p(\cdot)$ için ve t_{lu} , $u(\cdot) = (u^1(\cdot), u^2(\cdot))$ ye bağlı olduğuna göre

$$K^i(x_o, t_o) \triangleq \left\{ u^i(\cdot) : [t_o, t_{lu}] \rightarrow R^n \mid x(\cdot) : [t_o, t_{lu}] \rightarrow R^{2n}, x(t_o) = x_o \text{ fonksiyonu (4.1) denkleminin çözümü olmak üzere } u^i(t) = p^i(x(t), t) \text{ olsun} \right\}$$

i.oyuncu için $p^i(\cdot)$ den çıkan tüm kontroller kümesini tanımlamaktadır.

TANIM 4.2 : $i \in \{1,2\}$ olmak üzere i. oyuncu kabul edilir stratejiler kümesi P_{kb}^i aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır.

(1) Tüm $i \in \{1,2\}$, $p^i(\cdot) \in P_{kb}^i$ için ve tüm $(x_o, t_o) \in X \times T$ için mevcut her $u^i(\cdot) \in K^i(x_o, t_o)$ Lebesgue ölçümlü ve sınırlı olmalıdır.

$$(2) \quad p^i(x, t) = \bar{p}^i(x, t) \quad t_o \leq t \leq s, \quad x \in X$$

$$p^i(x, t) = \bar{p}^i(x, t) \quad t > s, \quad x \in X$$

şekilde tanımlanan $\bar{p}^i, \bar{\bar{p}}^i \in P_{kb}^i$, $s \in T$ ve $p^i(\cdot)$ mevcut ise

$p^i(\cdot) \in P_{kb}^i$ olmalıdır.

(3) Tüm $j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$p_j^i(x, t) = 0 \quad \text{tüm } (x, t) \in \left\{ (x, t) \in X \times T \mid x_j^1 = x_j^2 \right\}$$

olmalıdır.

Diğer bir ifade ile bir madde üzerinde uzlaştıktan sonra, o maddenin tekrar gündeme gelmesi mümkün olmayacaktır.

(4) $i=1$ için

$$x_j^1 = \bar{x}_{oj}^1 \text{ ise } p_j^1(x, t) \in (-\infty, 0]$$

$i=2$ için

$$x_j^2 = \bar{x}_{oj}^2 \quad \text{ise} \quad p_j^2(x, t) \in [0, \infty]$$

olmalıdır. Bunun sonucu olarak (4.1) denkleminin $x(\cdot)$ çözümü X uzayını terk-
edemeyecektir.

$i=1,2$ için $p^i(\cdot) \in P_{kb}^i$ ise $p(\cdot) \in P_{kb}$ olduğu söylenir.

TANIM 4.3 : Strateji çifti kümesi $p(\cdot) \in P_{oy}(x_o, t_o)$ nin $(x_o, t_o) \in X \times T$
de oynanabilir olması için gerek ve yeter şartlar aşağıda belirtilmiştir.

$$(1) \quad p(\cdot) \in P_{kb}$$

(2) $p(\cdot)$ strateji çiftinin $t < t_b$, $t_b < \infty$ için $x(t) \notin Q$,
 $x(t_b) \in Q$ olan, $x(t_o) = x_o$ dan başlıyan $x(\cdot): [t_o, t_b] \rightarrow R^{2n}$ şeklinde (4.1)
denkleminde en az bir çözümü olmalıdır.

TANIM 4.4 : Verilen $p(\cdot) \in P_{oy}(x_o, t_o)$ için t_o da x_o dan başlıyan tüm son-
lu çözümler $\chi_p(x_o, t_o)$ olsun. Buna göre her $(x_o, t_o) \in X \times T$, $p(\cdot) \in P_{oy}(x_o, t_o)$ ve
 $x(\cdot) \in \chi_p(x_o, t_o)$ için $(x_o, t_o, p(\cdot), x(\cdot))$, sonbulan bir oyun olarak tanımla-
nır.

Taraflar grev dolayısı ile ortaya çıkan kayıplarını minimize etmeyi iste-
mektedirler. Ancak bu amaç içinde işçi tarafı işverenin son teklifini maximize,
işveren tarafında minimize etmeye çalışmaktadır. İşçi ve işveren için maliyet
fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$J(\cdot): \left\{ (x_o, t_o, p(\cdot), x(\cdot)) \mid (x_o, t_o) \in X \times T, p(\cdot) \in P_{oy}(x_o, t_o), x(\cdot) \in \chi_p(x_o, t_o) \right\} \rightarrow R$$

Buna göre işçi tarafı maliyet fonksiyonu

$$J^1(x_0, t_0, p(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_b} K^1(t) dt - c^1 \cdot x^2(t_b) \quad (4.2a)$$

İşveren tarafı maliyet fonksiyonu

$$J^2(x_0, t_0, p(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_b} K^2(t) dt + c^2 x^2(t_b) \quad (4.2b)$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Oyuncular uzlaşmayı son buldurmayı istediklerinden sadece son bulan oyun-
ları dikkate alma durumundadırlar. (4.2a) ve (4.2b) denklemlerinde entegrali
alınabilen

$$K^i(\cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow [a^i, \infty), \quad a^i = \text{Sabit} > 0$$

fonksiyonları grev dolayısı ile ortaya çıkan kayıp fonksiyonları olup, grev
dolayısı ile ortaya çıkan tüm kayıpları içerirler. Kayıp fonksiyonlarının
\$[t_0, t_b]\$ aralığında birbiri ardı sıra saptanabileceği varsayılmaktadır.

\$c^i \in (0, \infty)^n\$, \$i=1,2\$ satır vektörü maddelerin ağırlıklı değerini göstermekte
ve birimlerini \$K^i(\cdot)\$ fonksiyonunun birimine dönüştürme görevi yapmaktadır.

TANIM 4.5 : \$p^*(\cdot) = (p^{1*}(\cdot), p^{2*}(\cdot))\$nin Nash dengeli strateji çifti olması
için gerek ve yeter şart;

(i) \$(x_0, t_0) \in X \times T\$ de oynanabilir olmalı

(ii) tüm \$(x_0, t_0) \in X \times T\$ ve tüm \$\left\{ (x_0, t_0, p^*(\cdot), x^*(\cdot)) \right\}\$
\$\left\{ (x_0, t_0, p^{1*}(\cdot), x^1(\cdot)) \right\}\$, \$\left\{ (x_0, t_0, p^{2*}(\cdot), x^2(\cdot)) \right\}\$ son bulan oyunlar

için

$$J^1(x_0, t_0, p^*(\cdot), x^*(\cdot)) \leq J^1(x_0, t_0, p^{1*}(\cdot), x^1(\cdot))$$

$$J^2(x_0, t_0, p^*(\cdot), x^*(\cdot)) \leq J^2(x_0, t_0, p^{2*}(\cdot), x^2(\cdot))$$

olmalıdır. Burada $p^1(.) \triangleq (p^1(.), p^2_*)$ ve $p^2(.) = (p^1_*(.), p^2(.))$ alınmıştır.

$p^*(.)$ Nash denge stratejisi için $\bar{x}^*(.)$ ve $\bar{\bar{x}}^*(.)$ olarak birden fazla çözüm mevcut ise tanım 4.5'e göre;

$$\begin{aligned} J^1(x_0, t_0, p^*(.), \bar{x}^*(.)) &\leq J^1(x_0, t_0, p^*(.), \bar{\bar{x}}^*(.)) \\ J^1(x_0, t_0, p^*(.), \bar{\bar{x}}^*(.)) &\leq J^1(x_0, t_0, p^*(.), \bar{x}^*(.)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

olması gerektiğinden

$$J^1(x_0, t_0, p^*(.), \bar{\bar{x}}^*(.)) = J^1(x_0, t_0, p^*(.), \bar{x}^*(.))$$

sonucu elde edilir.

4.1.2 NASH DENGİ ÇÖZÜMÜ :

(4.2)'deki maliyet fonksiyonlarının aşağıdaki şekilde yazılması mümkündür

$$\begin{aligned} J^1(x_0, t_0, p(.), x(.)) &= \int_{t_0}^b k^1(t) dt - c^1 x^2(t_b) + c^1 x_0^2 - c^1 x_0^2 \\ &= \int_{t_0}^b \left\{ k^1(t) - c^1 x^2(t) \right\} dt - c^1 x_0^2 \\ &= \int_{t_0}^b \left\{ k^1(t) - c^1 p^2(x(t), t) \right\} dt - c^1 x_0^2 \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} J^2(x_0, t_0, p(.), x(.)) &= \int_{t_0}^b \left\{ k^2(t) + c^2 \dot{x}^1(t) \right\} dt + c^2 x_0^1 \\ &= \int_{t_0}^b \left\{ k^2(t) + c^2 p^1(x(t), t) \right\} dt + c^2 x_0^1 \end{aligned} \quad (4.4b)$$

Maliyet fonksiyonlarının (4.4) deki formu ele alındığında aşağıdaki strateji çiftleri kümesinin Nash denge olduğu sonucuna ulaşılır.

$$P^* \triangleq \left\{ p^*(.) | p^*(.) \in P_{kb}; \text{ tüm } (x, t) \in (X \setminus Q) \times T \text{ için} \right. \\ \left. c^2 p^{1*}(x, t) = -k^2(t), c^1 p^{2*}(t) = k^1(t) \right\} \quad (4.5)$$

Bu strateji çiftinin $(x_0, t_0) \in X \times T$ de oynanabilir olması aşağıda gösterilecektir; (4.5) kümesindeki koşuldan

$$c^2 \dot{x}^{1*}(t) = -k^2(t)$$

$$c^1 \dot{x}^{2*}(t) = k^1(t)$$

elde edilmekte, bundan

$$c^2 \dot{x}^{1*}(t) - c^1 \dot{x}^{2*}(t) = -\{k^2(t) + k^1(t)\}$$

elde edileceğinden, bu eşitlikte her iki tarafın integrali alındığında

$$\int_{t_0}^t \{c^2 \dot{x}^{1*}(\tau) - c^1 \dot{x}^{2*}(\tau)\} d\tau = \int_{t_0}^t -\{k^1(\tau) + k^2(\tau)\} d\tau$$

veya

$$c^2 \{x^{1*}(t) - x_0^1\} - c^1 \{x^{2*}(t) - x_0^2\} = - \int_{t_0}^t \{k^1(\tau) + k^2(\tau)\} d\tau - \int_{t_0}^t (a^1 + a^2) d\tau$$

elde edilir.

Buna göre

$$c^2 x^{1*}(t) - c^1 x^{2*}(t) \equiv (c^2 x_0^1 - c^1 x_0^2) - (a^1 + a^2)(t - t_0) \quad (4.6)$$

sonucu elde edilir. Stratejilerin oynanabilir olma özelliğine sahip, olduğu gelişki yöntemi ile kanıtlanacaktır. $x^{1*}(t) \geq x^{2*}(t)$ olduğunu varsayalım.

Ancak bu eşitsizliğin tüm $t \in (t_0, \infty)$ için $x^{1*}(t) \neq x^{2*}(t)$ koşulu altında gerçekleştiği, diğer bir ifade ile tüm $t \in [t_0, \infty)$ değerleri için $x_i^{1*}(t) > x_i^{2*}(t)$ şeklinde enaz bir $i \in \{1, \dots, n\}$ maddesi olduğu varsayılın.

Bu durumda $x^*(t) \in X$ olması ve

$$\bar{x}_0^{-1} \geq x^{1*}(t) \geq x^{2*}(t) \geq \bar{x}_0^{-2}$$

özelliği dolayısı ile

$$\begin{aligned} c^2 x^{1*}(t) &\geq c^2 \bar{x}_0^{-2} \\ c^1 \bar{x}_0^{-1} &\geq c^1 x^{2*}(t) \end{aligned}$$

sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu sonuç (4.6) denkleminde yerine konulduğunda tüm $t \in (t_0, \infty)$ için

$$c^2 \bar{x}_0^{-2} - c^1 \bar{x}_0^{-1} \leq c^2 x^{1*}(t) - c^1 x^{2*}(t) \leq (c^2 \bar{x}_0^{-1} - c^1 \bar{x}_0^{-2}) - (a^1 + a^2)(t - t_0) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) eşitsizliğinde sol taraf sabit ve sağ taraf sıkı azalan bir fonksiyondur. Dolayısı ile t 'nin büyük değerleri için eşitsizlik geçersiz duruma gelecektir. Bu nedenle

$$x^{1*}(t_b^*) = x^{2*}(t_b^*)$$

eşitliğini sağlayacak oyunun bir sonbulma zamanı olması mecburiyeti ortaya çıkmaktadır.

(4.4) denklemi ele alındığında; J .oyuncu, $p^{j*}(\cdot)$ stratejisini oynar ise i . oyuncu maliyeti sabit ve

$$J^i(x_0, t_0, p^*(\cdot), x^*(\cdot)) = J^i(x_0, t_0, p^{*i}(\cdot), x^i(\cdot)) \quad (4.8)$$

olacağından $p^*(\cdot)$ strateji çifti (4.3) denklemini sağlayacaktır.

Bölüm 3'de belirtildiği şekilde Nash denge strateji çiftleri tekil değildir. Bunların tamamının Nash denge strateji çiftleri kümesi olarak belirlenmesi mümkün değildir. Bu nedenle sonraki kısımdaki uygulamada aşağıdaki Nash Denge Strateji çifti kullanılacaktır.

$$p_i^*(x, t) = \begin{cases} -\frac{k^2(t) (x_i^1 - x_i^2)}{\sum_{k=1}^n \left\{ C_k^2 (x_k^1 - x_k^2) \right\}}, \frac{k^1(t) (x_i^1 - x_i^2)}{\sum_{k=1}^n \left\{ C_k^1 (x_k^1 - x_k^2) \right\}} & ; \text{ tüm } (x, t) \in (X|Q) \times T \\ (0, 0) & ; \text{ tüm } (x, t) \in Q \times T \end{cases} \quad (4.9)$$

Bu strateji çiftinin kabul edilme özelliği olup, (4.5) koşullarını sağlamaktadır. Modelin uygulanması sonucu, tüm maddeler için aynı zamanda uzlaşma sağlanacaktır. Bunun kanıtı aşağıda verilmiştir. (4.9) denklemi (4.1) differansiyel denkleminde yerine konulduğunda

$$\dot{x}_i^1(t) = -\frac{k^2(t) \left\{ x_i^1(t) - x_i^2(t) \right\}}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^2 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]}; \quad \text{tüm } i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_i^2(t) = \frac{k^1(t) \left\{ x_i^1(t) - x_i^2(t) \right\}}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^1 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]}; \quad \text{tüm } i \in \{1, \dots, n\}$$

elde edilir. İki eşitlik taraf tarafa çıkarıldığında

$$\frac{d}{dt} \left\{ x_i^1(t) - x_i^2(t) \right\} = - \left[\frac{k^2(t)}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^2 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]} + \frac{k^1(t)}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^1 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]} \right]$$

$$\left\{ x_i^1(t) - x_i^2(t) \right\}$$

veya aşağıdaki vektör formu

$$\frac{d}{dt} \left\{ x^1(t) - x^2(t) \right\} = - \left[\frac{k^1(t)}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^1 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]} + \frac{k^2(t)}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^2 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]} \right] \left\{ x^1(t) - x^2(t) \right\} \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) denklemindeki $x^1(t) - x^2(t)$ vektörünün zamana göre türevi, vektörün kendisi ile orantılı olduğundan, $\left[x^1(t) - x^2(t) \right]$ vektörü

$$e \triangleq \frac{x_o^1 - x_o^2}{||x_o^1 - x_o^2||} = \frac{x^1(t) - x^2(t)}{||x^1(t) - x^2(t)||}$$

birim vektörünün sabit olan yönünde hareket edecektir. Bu nedenle (4.11) denklemini aşağıdaki formda yazmak mümkün olmaktadır.

$$\left(\frac{d}{dt} ||x^1(t) - x^2(t)|| \right) e = - \left\{ \left[\frac{k^1(t)}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^1 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]} + \frac{k^2(t)}{\sum_{k=1}^n \left[C_k^2 \left\{ x_k^1(t) - x_k^2(t) \right\} \right]} \right] ||x^1(t) - x^2(t)|| \right\} e \quad (4.12)$$

Bu nedenle $x^1(t) - x^2(t)$ vektörü, $x_o^1 - x_o^2$ noktasından orijin yönüne hareket edecektir. t_b^* için (4.12) denklemi ele alındığında

$$\frac{d}{dt} ||x^1(t) - x^2(t)|| = - \left(\frac{k^1(t)}{C^1 e} + \frac{k^2(t)}{C^2 e} \right)$$

denkleminde, oyunun son bulma zamanı t_b^* aşağıdaki denklemi sağlayacaktır.

$$||x_o^1 - x_o^2|| = \int_{t_o}^{t_b^*} \left(\frac{k^1(t)}{c^1 e} + \frac{k^2(t)}{c^2 e} \right) dt$$

(4.5) denklem kümesinde oyuncular tarafından hangi denge strateji çifti seçilirse seçilsin, grev süresi ve maddelerin son uzlaşma şekli farklı olmakla birlikte oyuncuların karşılaşacağı maliyet değişmeyecektir.

4.2. UYGULAMA :

A işletmesi mevcut üretim birimlerinde 5000 aynı vasıflı işçiyi istihdam etmektedir. 1988 yılı başından başlamak üzere B işçi sendikası ile Toplu iş sözleşmesi için yapılan görüşmeler sonucunda uzlaşmaya varılmış ve sözleşme imzalanmıştır.

Toplu iş sözleşmesinin bölümleri aşağıda belirtilmiştir.

1. Amaç
2. Taraflar
3. Kapsam
4. Çalışma Barışı ve uyuşmazlıkların çözüm yolları
5. İş, Disiplini, Çalışma ve eğitim.
6. Çalışma koşulları
7. İaşe
8. Sağlık
9. Ücret ve ilişkin esaslar
10. İzin
11. Sosyal yardımlar

Verilen başlıklar altında 5-11 arasındaki maddelerin tamamı, tarafları müsbet veya menfi olarak etkileyecek içeriğe sahiptir. Dolayısı ile herbirinin getirdiği esasa göre bir etkenliği söz konusudur. Bu etkinlikler örneğin eğitim kolaylıkları çeşitli izinler, görev öncesi deneme süresi, iş giyeceği, ücretler ve benzeri olarak değişik ölçü birimlerine sahiptir. Önceki kısımda geliştirilen modelde tüm etkinliklerin aynı birime indirilmesi gerekliliği mevcuttur. Toplu iş sözleşmelerinde ücret, ikramiye, prim ve para ile ödenen sosyal yardım hususları diğer bölümlere göre daha ağırlıklıdır. Bunların tamamında para, birim ölçüsünü ifade ettiğinden modele girdi olarak alınmışlardır. Para birimi ölçüsü maddeleri dışında kalanların modele dahil edilmesi halinde daha sıhhatli sonuçlara varılacağı şüphesiz olmakla beraber, bu çalışmada ağırlık uzlaşmalara oyun kuramı ile yaklaşım olduğundan mevcut uygulamanın yeterli olacağı tahmin edilmektedir. Bu bölümde uygulanacak Nash Dengesi Differansiyel Oyun Modeli ile İşveren ve İşçi tarafları arasında yapılacak bir toplu iş sözleşmesinde aşağıdaki sonuçların elde edilmesi amaç olarak alınmıştır.

- (i) Greve gidilmesi halinde grev süresi,
- (ii) Uzlaşma durumunda ele alınan maddelerin değerleri.

Öngörülen Nash Denge Strateji modelinin gerçekte bağdaşması için öngörülen varsayımlar aşağıda belirtilmiştir.

- (i) İşçi ve işveren tarafları uzlaşma sürecinde rasyonel davranış göstereceklerdir.
- (ii) Taraflar uzlaşmayı son buldurma tutumu içinde olacaklardır.
- (iii) Grev maliyet fonksiyonu başlama ve sonbulma arasındaki sürede önceden tahmin edilebilecektir.

4.22. MODEL GİRDİLERİ :

Bölüm 4.1 de belirlenen gerektiğinde grev yapma olanağı olan toplu iş sözleşmelerinde uygulanabilecek Nash denge strateji çifti aşağıda verilmiştir.

$$p_i^*(x, t) = \begin{cases} \frac{-k^2(t)(x_i^1 - x_i^2)}{\sum_{k=1}^n \{C_k^2(x_k^1 - x_k^2)\}}, & \frac{k^1(t)(x_i^1 - x_i^2)}{\sum_{k=1}^n \{C_k^1(x_k^1 - x_k^2)\}}; \text{ tüm } (x, t) \in (X \setminus Q) \times T \\ (0, 0) & ; \text{ tüm } (x, t) \in Q \times T \end{cases} \quad (4.13)$$

Bu modelde,

$$\frac{dx_i^j}{dt} = p_i^j(x, t)$$

olarak kabul edildiği bilindiğinden ortaya çıkacak $2n$ değişkenli, $2n$ differansiyel denklemin çözümü sözleşme maddelerinin Nash denge durumu karşılıtlarını vermiş olacaktır. Differansiyel denklemdaki fonksiyonların uygulama yapılacak probleme yönelik tanımları aşağıda belirtilmiştir.

İşletme Grev Maliyeti :

Problem bir üretim birimi ile ilgili olup, böyle bir işletmenin grev nedeni ile üretimi kesmesi halinde ortaya çıkacak kayıp genel olarak normal çalışma süresinde elde edilen kâra eşit olacaktır. İşletme için yıllık net kârdan günlük ortalama kâr elde edilirse grev nedeni ile üretimin durması halinde zamana bağlı olarak aşağıdaki Grev Maliyet fonksiyonu ($k^2(t)$) ortaya çıkacaktır.

$$k^2(t) = 10.000.000 \text{ t}$$

işletmenin grev dolayısı ile ortaya çıkacak kayıplarının saptanması daha karmaşık olmakla birlikte bu yönün araştırılması konu dışı bırakılmıştır. Ancak, geliştirilen modelde bazı ufak değişikliklerle ortaya çıkacak daha karmaşık maliyet fonksiyonlarında kullanılması mümkündür.

Sendika Grev Maliyeti :

Grevin sendikaya getireceği kayıp, grev süresince sendikanın işçilere vereceği ücretlerin toplamı olarak kabul edilmiştir. Buna göre zamana bağlı sendika grev maliyeti ($k^1(t)$)

$$K^1(t) = (100.000) (1/30) (5000) t$$

olacaktır. Burada sendikanın işçilere vereceği aylık ücret 100.000 TL olarak alınmış ve günlük miktar, anılan rakkam günsayısına (30) bölünüp, işçi sayısı (5000) ile çarpılarak maliyet formülündeki katsayı elde edilmiştir.

Sözleşme Madde Katsayıları (C_j^i) :

Değişik birimli sözleşme madde katsayılarının maddenin birimini $K^1(t)$ ve $K^2(t)$ fonksiyonlarının birimine çevirmek üzere belirtilmeleri gerekmektedir. Bu katsayıların diğer bir amacı ilgili sözleşme maddesinin taraflara getireceği maliyeti saptamaktır. Örnek olarak sabah ile öğle arası verilecek çay işme molası 10 dakikadan 15 dakikaya çıkacak ise, bunun sözleşmenin, geçerli olacağı sürede işletmeye çıkaracağı faturanın değeri ile katsayı arasında bir korelasyon olması gerekecektir. Yapılan uygulamada sadece para birimli maddeler ele alındığından, bunların grev maliyeti birimine dönüştürmeye gerek kalmamaktadır. Maddelerin taraflara getireceği maliyetin tesbiti için katsayıların tamamının işçi sayısına (5000) eşit alınması yeterli olacaktır.

Sözleşme Madde Başlangıç Değerleri :

Uzlaşmanın başlangıcında tarafların maddeler için istek miktarları Tablo 4.1 de verilmiştir.

Grev Bitiş Zamanı :

Bölüm 4.1'de grev süresi ile ilgili olarak

$$||x_o^1 - x_o^2|| = \int_{t_o}^{t_b^*} \left(\frac{k^1(t)}{C_e^1} + \frac{k^2(t)}{C_e^2} \right) dt \quad (4.14)$$

entegral denklemi bulunmuştu. Bu denklemde

$$||x_o^1 - x_o^2|| \triangleq \sqrt{\sum_{k=1}^{11} (x_{ko}^1 - x_{ko}^2)^2} \in R^1$$

$$e \triangleq \frac{x_o^1 - x_o^2}{||x_o^1 - x_o^2||} \in R^{11}$$

olarak tanımlanmıştı. Bu sonuca göre (4.14) den yararlanılarak t_b grev bitiş zamanının bulunması mümkün olmaktadır.

4.2.3. GELİŞTİRİLEN PERSONEL BİLGİSAYAR PROGRAMI :

(4.13) ve (4.14) nin çözümünü bularak grev bitiş zamanı ve sözleşme maddelerinin değerini elde etmek üzere, Akış diagramı Tablo 4.2, Program dizisi Tablo 4.3'de verilen benzeri uzlaşma problemlerini çözebilecek genel bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Programda PASCAL dili ve n adet birinci dereceden differansiyel denklem sisteminin çözümünde "Euler-Cauchy" metodu⁽²⁹⁾ kullanılmıştır. Program çıktısı Tablo 4.1'de verilmiştir.

Nash Denge modeli ile bulunan madde değerler ile, toplu iř sözleşmesi sonucu uzlaşılan madde değerleri mukayese amacı ile Tablo 4.1'de verilmiştir.

4.2.4 SONUÇLAR :

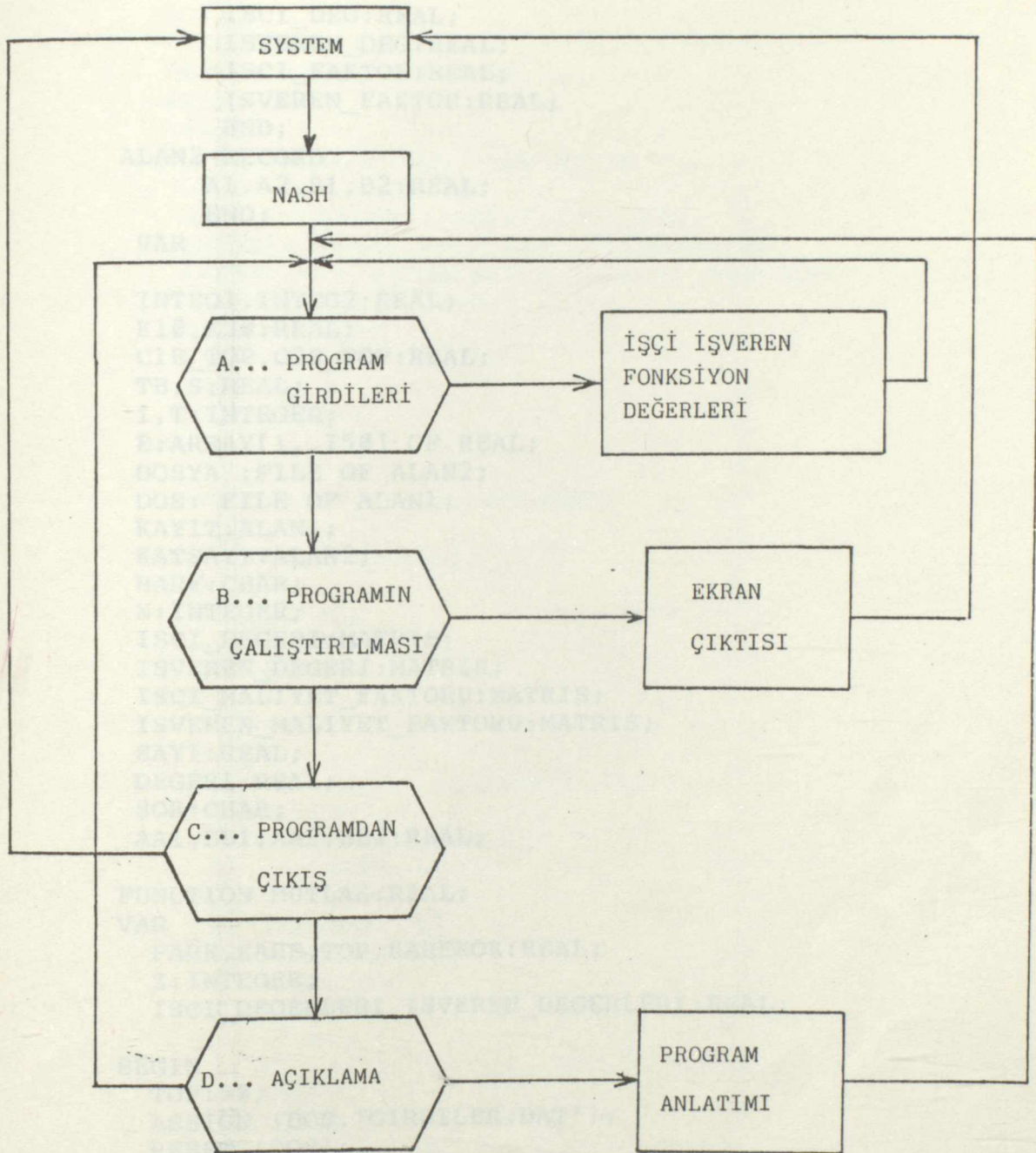
(1) Toplu iř sözleşmesi Nash Dengesi madde değerleri bir madde dışında işçi lehinde olmak üzere yüksek bulunmuştur. Bu değerlerin uzlaşılan değerlere göre küçük olması işveren tarafına bir avantaj sağlamış, işçi tarafı ise kayıba uğramıştır. Dolayısı ile işçi tarafının uzlaşmayıp greve gitme yolunu tercih etmeleri halinde daha karlı olacakları sonucuna varılmaktadır.

(2) Taraflarca hangi denge strateji çifti seçilirse seçilsin, grev süresi ve maddelerin son değerleri farklı olabilmekle beraber maliyet değişmeyeceğinden denge stratejileri arasında mukayese yapma gerekliliği yoktur.

(3) Modelin gerçekçi sonuç vermesi, model parametreleri ile maliyet fonksiyonlarının gerçekleri yansıtmasına, sözleşmede taraflara etkisi olan tüm maddelerin modele yansıtılmasına bağlıdır. Bu parametrelerin ve fonksiyonların gerçekleri yansıtır biçimde belirlenmesi halinde modelin uluslararası anlaşmalarda da uygulanması söz konusu olabilecektir.

TABLO 4.1

MADDE NO	BAŞLANGIÇ DEĞERİ (TL)		NASH DENGİ DEĞERİ (TL)	VARILAN UZLAŞMA DEĞERİ (TL)
	İŞÇİ	İŞVEREN		
1	300.000	170.000	250 215.150	216.120
2	90.000	40.000	71.250	70.840
3	30.000	16.000	24.750	19.600
4	1.900	950	1.544	1.399
5	6.500	3.600	5.413	4.800
6	65.000	42.000	56.375	50.267
7	13.000	7.500	10.938	8.790
8	11.500	5.900	9.400	7.594
9	2,900	1.800	2.488	2.450
10	35.000	20.000	29.375	26.188
11	26.000	14.500	21.688	18.448



TABLO 4.2 PROGRAM AKIŞ DİYAGRAMI

```

LABEL
  LB1, LB2, LB3, LB4, LB5, LB6, LB7, LB8;

TYPE
  MATRIS=ARRAY[1..250] OF REAL;
  ALAN1=RECORD
    ISCI_DEG:REAL;
    ISVEREN_DEG:REAL;
    ISCI_FAKTOR:REAL;
    ISVEREN_FAKTOR:REAL;
  END;
  ALAN2=RECORD
    A1,A2,B1,B2:REAL;
  END;
  VAR
    INTEG1, INTEG2:REAL;
    K10,K20:REAL;
    C1E_TOP,C2E_TOP:REAL;
    TB,S:REAL;
    I,T:INTEGER;
    E:ARRAY[1..150] OF REAL;
    DOSYA :FILE OF ALAN2;
    DOS: FILE OF ALAN1;
    KAYIT:ALAN1;
    KATSAYI:ALAN2;
    HARF:CHAR;
    N:INTEGER;
    ISCI_DEGERI:MATRIS;
    ISVEREN_DEGERI:MATRIS;
    ISCI_MALİYET_FAKTORU:MATRIS;
    ISVEREN_MALİYET_FAKTORU:MATRIS;
    SAYI:REAL;
    DEGER1:REAL;
    SOR:CHAR;
    AA1,BB1,AA2,BB2:REAL;

  FUNCTION MUTLAK:REAL;
  VAR
    FARK,KARE, TOP,KAREKOK:REAL;
    Z:INTEGER;
    ISCI_DEGERLERI, ISVEREN_DEGERLERI:REAL;

  BEGIN
    TOP:=0;
    ASSIGN (DOS, 'GIRDILER.DAT');
    RESET (DOS);
    WHILE NOT(EOF(DOS)) DO BEGIN
      READ (DOS,KAYIT);
      ISCI_DEGERLERI:=KAYIT.ISCI_DEG;
      ISVEREN_DEGERLERI:=KAYIT.ISVEREN_DEG;
      FARK:=ISCI_DEGERLERI - ISVEREN_DEGERLERI;
      KARE:=SQR (FARK);
      TOP:=KARE + TOP;
    END;
    KAREKOK:=SQRT(TOP);
    MUTLAK:=ABS(KAREKOK);
    CLOSE(DOS);

  END;

```


PROCEDURE E_HESAP;

VAR

I:INTEGER;

FARK,BOLUM:REAL;

ISCI_DEGERLERI,ISVEREN_DEGERLERI:REAL;

BEGIN

DEGER1:=MUTLAK;

ASSIGN (DOS,'GIRDILER.DAT');

RESET(DOS);

I:=1;

WHILE NOT(EOF(DOS)) DO BEGIN

READ (DOS,KAYIT);

ISCI_DEGERLERI:=KAYIT.ISCI_DEG;

ISVEREN_DEGERLERI:=KAYIT.ISVEREN_DEG;

FARK:=ISCI_DEGERLERI - ISVEREN_DEGERLERI;

BOLUM:=FARK / DEGER1;

E[I]:=BOLUM;

I:=I+1;

END;

CLOSE (DOS);

END;

PROCEDURE CE_HESAP; FORWARD;

PROCEDURE INTEGRAL;

VAR

HESAP:REAL;

K1,K2:REAL;

ESIT:REAL;

BEGIN

CE_HESAP;

S:=0;

ASSIGN (DOSYA,'KATSAYIL.DAT');

RESET(DOSYA);

READ(DOSYA,KATSAYI);

AA1:=KATSAYI.A1;

BB1:=KATSAYI.B1;

AA2:=KATSAYI.A2;

BB2:=KATSAYI.B2;

CLOSE(DOSYA);

REPEAT

S:=S+0.01;

K1:=AA1*S;

K2:=AA2*S;

INTEG1:=0.5*S*K1+BB1*S;

INTEG2:=0.5*S*K2+BB2*S;

IF INTEG1 < 0 THEN INTEG1:=-INTEG1;

IF INTEG2 < 0 THEN INTEG2:=-INTEG2;

K10:=BB1;

K20:=BB2;

ESIT:=(INTEG1/C1E_TOP)+(INTEG2/C2E_TOP);

TB:=S;

UNTIL DEGER1 <= ESIT;

END;

PROCEDURE SAGLAMA;

```

VAR
K1,K2:REAL;
TOP, TOP1, TOP2, TOPL1, TOPL2:REAL;
SON:INTEGER;
x1,x2:ARRAY[1..250] OF REAL;
C1,C2:ARRAY[1..250] OF REAL;
DELTA_X1, DELTA_X2:REAL;
TUREV1, TUREV2:REAL;
FRK, TU, M:REAL;
D1,D2:ARRAY[1..250] OF REAL;
BEGIN
  ASSIGN (DOS, 'GIRDILER.DAT');
  RESET(DOS);
  I:=0;
  TOP1:=0;
  TOP2:=0;
  WHILE NOT(EOF(DOS)) DO BEGIN
    I:=I+1;
    READ (DOS, KAYIT);
    X1[I]:=KAYIT.ISCI_DEG;
    D1[I]:=X1[I];
    X2[I]:=KAYIT.ISVEREN_DEG;
    D2[I]:=X2[I];
    C1[I]:=KAYIT.ISCI_FAKTOR;
    C2[I]:=KAYIT.ISVEREN_FAKTOR;
    SON:=I;
  END;
  CLOSE(DOS);
  TU:=0;
  WHILE TU<TB+15 DO BEGIN
    FOR I:=1 TO SON DO BEGIN;
      TOPL2:=C2[I]*(X1[I]-X2[I]);
      TOPL1:=C1[I]*(X1[I]-X2[I]);
      TOP1:=TOP1+TOPL1;
      TOP2:=TOP2+TOPL2;
    END;
    K1:=AA1*TU+BB1;
    K2:=AA2*TU+BB2;
    DELTA_X1:=-K2/TOP1;
    DELTA_X2:=K1/TOP2;
    FOR I:=1 TO SON DO BEGIN
      FRK:=(X1[I]-X2[I]);
      X1[I]:=X1[I]+DELTA_X1*FRK*TU;
      X2[I]:=X2[I]+DELTA_X2*FRK*TU;
    END;
    TU:=TU+0.01;
  END;
  WRITE('[[2J');
  WRITELN('MADDE*   MADDE KATSAYISI   *   MADDE BASLANGIC DEG. *   MADDE UZLASMA DEG');
  WRITELN('   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *');
  WRITELN('   NO *   ISCI   ISVEREN   *   ISCI   ISVEREN   *   ISCI   ISVEREN');
  WRITELN;
  FOR I:=1 TO SON DO BEGIN
    M:=I;
    WRITELN( M:3:0 , C1[I]:9:0, C2[I]:12:0 , D1[I]:12:0, D2[I]:13:0, X1[I]:13:0 , X2[I]:13:0);
  END;
  WRITELN;
  WRITELN;
  WRITELN;
  WRITELN('   ,K1 = ', AA1:10:0, ' * T + ', BB1:0:0, '   K2 = ', AA2:10:0, ' * T + ' B
END;

```


PROCEDURE CE_HESAP;

VAR

Z: INTEGER;

DEGER: INTEGER;

C1E,C2E: REAL;

C1_DEGER,C2_DEGER: ARRAY [1..150] OF REAL;

C_ISCI,C_ISVEREN: ARRAY[1..150] OF REAL;

BEGIN

E_HESAP;

ASSIGN (DOS, 'GIRDILER.DAT');

RESET (DOS);

C1E:=0;

C2E:=0;

I:=0;

WHILE NOT(EOF(DOS)) DO BEGIN

I:=I+1;

READ (DOS,KAYIT);

C_ISCI[I]:= KAYIT.ISCI_FAKTOR;

C_ISVEREN[I]:=KAYIT.ISVEREN_FAKTOR;

C1E:=C1E+E[I]*C_ISCI[I];

C1_DEGER[I]:=C1E;

C2E:=C2E+E[I]*C_ISVEREN[I];

C2_DEGER[I]:=C2E;

END;

CLOSE(DOS);

C1E_TOP:=C1E;

C2E_TOP:=C2E;

END;

PROCEDURE YARDIM;

BEGIN

WRITE('~['[2J]);

Writeln;

Writeln;

Writeln;

Writeln(' BU PROGRAM GREV SIMULASYONU CERCEVESINDE ,YAKLASIK INTEGRAL YONTEMLERI')

Writeln('KULLANILARAK ISVEREN VE ISCI TARAFININ VERDIKLERI DEGERLERE GORE, GREV');

Writeln('SURESINI BULARAK, SONUCTA ULASILACAK DEGERLER HAKKINDA BILGI VERIR.');

Writeln;

Writeln('PROGRAM IKI ANA BASLIK ALTINDA TOPLANMISTIR.');

Writeln('PROGRAMIN CALISTIRILMASI SIRASINDA EKRANA SECENEKLERE SAHIP BIR TABLO ');

Writeln('GELIR .BU TABLOYA GORE ANA SECENEKLERDEN BIRI OLAN BILGI GIRISI VEYA');

Writeln('DIGER ANA SECENEK OLAN PROGRAMIN CALISTIRILMASI DURUMLARI SECILEBILIR.');

Writeln('BILGI GIRISI SIRASINDA DIKKAT EDILMESI GEREKEN NOKTA `K` FONKSIYONLARI-');

Writeln('NIN K=A*T+B SEKLINDE LINEER BIRER FONKSIYON OLMASI GEREKTIGIDIR.');

Writeln('PROGRAM GIRDILERINDE BASKA SINIRLAMA YOKTUR VE ISTENILEN DEGERLER');

Writeln('ISTENILDIGI ADET`TE GIRILABILIR.');

Writeln;

Writeln('PROGRAMIN CALISTIRILMASI ILE SONUC EKRANA TABLO HALINDE DOKULECEKTIR.');

Writeln;

Writeln;

Writeln;

Writeln('BU PROGRAM Y.MUH. ALB.TANER OZBAYKAL TARAFINDAN HAZIRLANMISTIR....');

Writeln;

Writeln;

Writeln('

(CR) TUSUNA BASINIZ.....');

READLN;

END;


```

LB1:
Writeln;
Writeln;
Assign(DOS, 'GIRDILER.DAT');
Rewrite(DOS);
Write('~'[2J]);
Write('N TERIM SAYISINI GIRINIZ.. :');
Readln(N);
Writeln;
Writeln;
Writeln('***** ISCI_ISVEREN DEGERLERINI GIRINIZ *****');
Writeln;
Writeln;
FOR I:=1 TO N DO BEGIN
  LB6:
  Write('~'[2J]);
  Writeln;
  Write('ISCI DEGERI', I, ':');
  Readln(SAYI);
  ISCI_DEGERI[I]:=SAYI;
  Writeln;
  Write('ISVEREN DEGERI', I, ':');
  Readln(SAYI);
  ISVEREN_DEGERI[I]:=SAYI;
  IF ISVEREN_DEGERI[I] >= ISCI_DEGERI[I] THEN BEGIN
    Writeln;
    Writeln;
    Writeln('***** ISVEREN DEGERI ... ISCI DEGERINDEN KUCUK OLMALI *****');
    Writeln;
    Writeln;
    Writeln('ILGILI DEGERLERI TEKRAR GIRINIZ...');
    GOTO LB6;
  END;
  Writeln;
  Write('ISCI MALIYET FAKTORU', I, ':');
  Readln(SAYI);
  ISCI_MALIYET_FAKTORU[I]:=SAYI;
  Writeln;
  Write('ISVEREN MALIYET FAKTORU', I, ':');
  Readln(SAYI);
  ISVEREN_MALIYET_FAKTORU[I]:=SAYI;
  END;
Writeln;
Writeln;
FOR I:=1 TO N DO BEGIN
  KAYIT.ISCI_DEG:=ISCI_DEGERI[I];
  KAYIT.ISVEREN_DEG:=ISVEREN_DEGERI[I];
  KAYIT.ISCI_FAKTOR:=ISCI_MALIYET_FAKTORU[I];
  KAYIT.ISVEREN_FAKTOR:=ISVEREN_MALIYET_FAKTORU[I];
  Write(DOS, KAYIT);
  END;
Writeln('-----');
Writeln('DOSYA BUYUKLUGU :', FILESIZE(DOS));
Writeln('-----');
CLOSE(DOS);

```

```

ASSIGN(DOSYA, 'KATSAYIL.DAT');
REWRITE(DOSYA);
LB4:
WRITE (^['[2J']);
WRITELN;
WRITELN;
WRITELN('*****');
WRITELN;
WRITELN('FONKSIYONLARINIZ K = A * T + B YAPISINDA LINEER OLMALIDIR...');
WRITELN;
WRITELN('*****');
WRITELN;
WRITELN;
WRITE('K1 FONKSIYONU ICIN A1 DEGERINI GIRINIZ... ');
READLN(SAYI);
KATSAYI.A1:=SAYI;
WRITELN;
WRITELN('*****');
WRITELN;
WRITE('K1 FONKSIYONU ICIN B1 DEGERINI GIRINIZ... ');
READLN(SAYI);
KATSAYI.B1:=SAYI;
WRITELN;
WRITELN('*****');
WRITELN;
WRITE('K2 FONKSIYONU ICIN A2 DEGERINI GIRINIZ... ');
READLN(SAYI);
KATSAYI.A2:=SAYI;
WRITELN;
WRITELN('*****');
WRITELN;
WRITE('K2 FONKSIYONU ICIN B2 DEGERINI GIRINIZ... ');
READLN(SAYI);
KATSAYI.B2:=SAYI;
WRITELN;
WRITELN;
WRITE(^['[2J']);
WRITELN;
WRITELN('*****');
WRITELN('*****');
WRITELN;
WRITELN('FONKSIYONLARINIZ ASSAGIDA BELIRTILDIGI GIBI GIRILMISTIR..');
WRITELN;
WRITELN;
WRITELN('K1 FONKSIYONU ... K1=(',KATSAYI.A1:12:0,')* T + (',KATSAYI.B1:12:0,').....DI');
WRITELN;
WRITELN;
WRITELN('K2 FONKSIYONU ... K2=(',KATSAYI.A2:12:0,')* T + (',KATSAYI.B2:12:0,').....DI');
WRITELN;
WRITELN;
LB5:
WRITELN('IFADELER DOGRUMUDUR..... (E/H)');
READLN(SOR);
CASE SOR OF
    'E':GOTO LB7;
    'H':GOTO LB4;
    ELSE GOTO LB5;
END;

LB7:
WRITE(DOSYA,KATSAYI);
CLOSE(DOSYA);

LB2:
BASLIK;
INTEGRAL;
SAGLAMA;

LB8:
END.

```


A..... PROGRAM GIRDILERI:

B..... PROGRAM ROUTIN ^LERININ CALISTIRILMASI

C..... PROGRAMIN DURDURULMASI

D..... PROGRAMIN KULLANILMASI

...YUKARIDAKI SECENEKLER ICIN BELIRTILEN HARFI KULLANIN...

BU PROGRAM TOPLU IS SOZLESMELERINDE OLABILECEK GREV SONRASINDA ;
DIFFERANSIYEL OYUN KURAMI CATISI ALTINDA GELISTIRILEN DIFFERANSIYEL
DENKLEM SISTEMINI KULLANARAK , NASH DENGE OZELLIGINE SAHIP SOZLESMENIN
SONUC DEGERLERINI VERIR....

PROGRAM IKI ANA BASLIK ALTINDA TOPLANMISTIR.
PROGRAMIN CALISTIRILMASI SIRASINDA EKRANA SECENEKLERE SAHIP BIR TABLO
GELIR .BU TABLOYA GORE ANA SECENEKLERDEN BIRI OLAN BILGI GIRISI VEYA
DIGER ANA SECENEK OLAN PROGRAMIN CALISTIRILMASI DURUMLARI SECILEBILIR.
BILGI GIRISI SIRASINDA DIKKAT EDILMESI GEREKEN NOKTA 'K' FONKSIYONLARI-
NIN $K=A*T+B$ SEKLINDE LINEER BIRER FONKSIYON OLMASI GEREKTIGIDIR.
PROGRAM GIRDILERINDE BASKA SINIRLAMA YOKTUR VE ISTENILEN DEGERLER
ISTENILDIGI ADET'TE GIRILABILIR.

PROGRAMIN CALISTIRILMASI ILE SONUC EKRANA TABLO HALINDE DOKULECEKTIR.

BU PROGRAM Y.MUH. ALB.TANER OZBAYKAL TARAFINDAN HAZIRLANMISTIR....

(CR) TUSUNA BASINIZ.....

U	U	ZZZZ	L	AA	SSSS	MM	MM	AA	NN	N	AA	SSSS	H	H	
U	U	Z	L	A	A	S	M	M	M	M	A	A	H	H	
U	U	Z	L	AAAA	SSSS	M	M	M	AAAA	SSSS	HHHH				
U	U	Z	L	A	A	S	M	M	M	A	A	S	H	H	
UUUU	ZZZZ	LLLL	A	A	SSSS	M	M	A	A	NN	A	A	SSSS	H	H

*

DDD	EEEE	NN	N	GGGG	EEEE	MM	MM	OOOO	DDD	EEEE	L	I					
D	D	E	N	N	G	E	M	M	M	O	O	D	D	E	L	I	
D	D	EEE	N	N	G	GG	EEE	M	M	M	O	O	D	D	EEE	L	I
D	D	E	N	NN	G	G	E	M	M	M	O	O	D	D	E	L	I
DDD	EEEE	N	N	GGGG	EEEE	M	M	OOOO	DDD	EEEE	LLLL	I					

Y.MUH. ALB. TANER OZBAYKAL

MADDE*	MADDE KATSAYISI		*	MADDE BASLANGIC DEG.		*	MADDE UZLASMA DEG.	
NO *	ISCI	ISVEREN	*	ISCI	ISVEREN	*	ISCI	ISVEREN
1	5000	5000		300000	170000		251250	251250
2	5000	5000		90000	40000		71250	71250
3	5000	5000		30000	16000		24750	24750
4	5000	5000		1900	950		1544	1544
5	5000	5000		6500	3600		5413	5412
6	5000	5000		65000	42000		56375	56375
7	5000	5000		13000	7500		10938	10937
8	5000	5000		11500	5900		9400	9400
9	5000	5000		2900	1800		2488	2487
10	5000	5000		35000	20000		29375	29375
11	5000	5000		26000	14500		21688	21687

$$K1 = 16666667 * T + 0 \quad K2 = 10000000 * T + 0$$

A:\>

- (1) M.Shubik, Mathematics of Conflict, North-Holland (1983)
- (2) Guillermo Owan, Game Theory, Second addition (1982)
- (3) Danskin, J., Theory of Max-Min and its application to weapons Allocation problems, Springer Verlag, Newyork Vienna (1967)
- (4) Fleming, W.K., The convergence problem for differential games, Math. Analysis and applications (1961)
- (5) Freidman, A., Differential games, Wiley, Newyork (1971)
- (6) Leitmenn, George and chen, S.F.H., Labor management bargaining modeled as a dynamic game, Optimal control applications and methods (1980)
- (7) Bernhard, P., Linear quadratic, two person, zero sum differential games necessary and sufficiency conditions, journal of optimization theory and applications 27:1 (1979) 51-69
- (8) Krasovskii, N.N., Subbotin, A.I., On the structure of differantial games Soviet Math.Dokl. 11:1 (1970)
- (9) Breakwell, J.,V., Some differential games with interesting discontinuities internal report, stanford university (1973)
- (10) Merz, A.,W., The homicidal Chauffeur - A differential game Sudaar No.418, Guidance and control Laboratory, Stanford University (1971)
- (11) Chigir, S.,A., The game problem on the dolichobrac histochrone, PMM 30:6 (1976) 1003-1013
- (12) Blaquiere, A., Gerald, F., Leitmann, G., Quantitative games, Academic press, Newyork (1969)
- (13) Hajek, O., Pursuit Games, Academic Press, Newyork (1975)
- (14) Isaacs, R., Differential games, their scope, nature and future, journal of optimization theory and applications 3:5 (1969)
- (15) Bernhard P., Singular surfaces in differential games and applications, Differantial games and applications, Lecture notes No 3 in control and information science Vienna, (1977)
- (16) Olsder, G.J., Some thoughts about simple advertising models as differential games and the structure of coalitions, in: Ho, Y.C. and Mitter, S.K. (eds.), Directions in Large-Scale Systems (Plenum, New York, 1976).

- (17) Leitmann, George and Schmitendorf, W., Profit maximization through advertising: a nonzero sum differential game approach, IEEE Transactions, AC-23:4 (1978) 645.
- (18) Case, J., On Ricardo's problem, Journal of Economic Theory 3:2 (1971) 134.
- (19) Case, J., Differential trading games, in: Blaquiere, A. (ed.), Topics in Differential Games (North Holland, Amsterdam, 1973)
- (20) Liu, P.T., Optimal threat strategies in differential games, Journal of Math. Anal. and APPL. 42:2 (1973). (b)
- (21) Liu, P.T., A differential game model for labor-management negotiations, Journal of Optimization Theory and Applications 13:4 (April 1974)
- (22) Leitmann, George and Chen, S.F.H., Labor-management bargaining modeled as a dynamic game, Optimal Control Applications and methods (1980)
- (23) Clemhout, S., Leitmann, George, and Wan, H.Y., Jr., Equilibrium patterns for bargaining under strike: a differential game model, in: PROceedings Conference on Directions in Decentralized Control, Many-Person Optimization and Large Scale Systems (Plenum, New York, 1976), pp. 207-234
- (24) Leitmann, George and Wan, Henry Y., Jr., A stabilization policy for an economy with some unknown characteristics, Journal of the Franklin Institute 306:1 (July 1978) 23-33.
- (25) Leitmann, G. and Wan, H.Y., Jr., Macro-economic stabilization policy for an uncertain dynamic economy, in: New Trends in Dynamic System Theory and Economics (Academic Press, New Jersey. 1979)
- (26) Ozguner, U. and Perkins, W.R., A Nash feedback approach to control of river pollution, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC-9:5 (May 1979).
- (27) Ho Y., C., Team Decision Theory and information Structures, Proceedings of IEEE (1980)
- (28) Leitmann G. and Liu P., T., A differential game model of labor management Negotiation during a strike, Plenum Publishing Corporation (1974)
- (29) Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 2nd edition, Wiley (1966)

ÖZGEÇMİŞ

1945'de İstanbul'da doğan Deniz Yüksek Mühendis Albay Taner ÖZBAYKAL 1966 yılında Deniz Harp Okulu'ndan mezun olmuş, muhtelif Türk Deniz Kuvvetlerinin gemilerinde görev yaptıktan sonra 1971 yılında A.B.D.de Naval Postgraduate School'dan Yöneylem Araştırma dalından ve daha sonra 1975 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesinden Endustri Mühendisliği dalından Yüksek Lisans almıştır. Halen Denizcilik Yüksek Okulunda Öğretim Başkanlığı yapmaktadır.

Y. T. O.
KÜTÜPHANE DOK. DAL. BAŞKANLIĞI

