

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA KOROVKİN TIPLI
YAKLAŞIM VE İSTATİSTİKSEL SÜREKLİLİK**

Cemil KARAÇAM

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Eş Danışman

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK

Aralık, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA KOROVKİN TIPLI
YAKLAŞIM VE İSTATİSTİKSEL SÜREKLİLİK**

Cemil KARAÇAM tarafından hazırlanan tez çalışması 10.12.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
İstanbul Ticaret Üniversitesi
Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Doğan KAYA, Üye

İstanbul Ticaret Üniversitesi

Doç. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Yonca Turgut SEZER, Üye

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat KİRİŞÇİ, Üye

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Danışmanım Doç. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Grand Lebesgue Uzaylarında Korovkin Tipli Yaklaşım ve İstatistiksel Süreklilik başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Cemil KARAÇAM

İmza



Bu çalışma,

TÜBİTAK-ANAS ULUSLARARASI İKİLİ İŞ BİRLİĞİ PROJESİ (Proje No: 118F447) kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)

Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (Proje Kodu: FDK-2020-3840) ve

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2211-A Genel Yurt içi Doktora Bursu Programı,

tarafından desteklenmiştir.





Kıymetli Eşim

Nilüfer' e

ve

sevgili çocuklarım

Özgür Ege ve

Gül Asya'ya

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim sürecinde değerli bilgi, tecrübe ve önerilerinin yansısı sonsuz anlayışını ve insani değerlerini her zaman örnek aldığım saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Yusuf ZEREN'e, bilhassa tez izleme sürecinde değerli fikir ve önerileriyle bana ışık tutan eş danışmanım Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK ve akademik bilgi, beceri ve yardımseverliğiyle beni her zaman etkileyen Prof. Dr. Bilal BİLALOV'a ve çalışma arkadaşım Migdat İSMAİLOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında sonsuz sabrı ve sevgisini benden esirgemeyen sevgili eşim Nilüfer USLU KARAÇAM'a, sevgili çocuklarım Özgür Ege ve Gül Asya'ya, beni yetiştiren aileme, desteklerini her zaman hissettiğim eşimin ailesine sonsuz şükran ve teşekkürü bir borç bilirim.

2211-A Genel Yurt içi Doktora Burs programı kapsamında sağladığı destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Cemil KARAÇAM

İÇİNDEKİLER

SİMGE

LİSTESİ

viii

ŞEKİL

LİSTESİ

ix

ÖZET

x

ABSTRACT

xii

1	GİRİŞ	1
1.1	Literatür Özeti.....	1
1.2	Tezin Amacı.....	5
1.3	Hipotez	5
1.4	Tezin İçeriği	6
2	TEMEL KAVRAMLAR	8
3	GRAND LEBESGUE UZAYINDA KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM VE İSTATİSTİKSELVERSİYONU	13
3.1	Klasik Korovkin Teoremleri	13
3.2	İstatistiksel Korovkin Tipli Teoremler	17
3.3	Grand Lebesgue Uzayı.....	20
3.4	$G_p(-\pi, \pi)$ Uzayında Korovkin Tipli Teoremler	29
3.5	Konvolüsyon Tipli İntegral Operatörler için Korovkin Teoremi.....	36
4	AĞIRLIKLILIKLI GRAND LEBESGUE UZAYINDA KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM VE İSTATİSTİKSEL VERSİYONU	42

4.1	$G_{p,\rho}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ Uzayında Korovkin Tipli Teoremler	46
4.2	$G_{p,\rho}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ Uzayında İstatistiksel Korovkin Tipli Teoremler	52



5. FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL SÜREKLİLİK	54
5.1 μ -İstatistiksel Süreklilik	54
5.2 μ -İstatistiksel Süreksizlik	59
5.3 İstatistiksel Sürekli Fonksiyon Uzayları.....	62
 6. SONUÇ VE ÖNERİLER	 71
 KAYNAKÇA	 72
 TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	 77

SİMGE LİSTESİ

$P(r, t)$	Abel Poisson çekirdeği
$L_{p),\rho}$	Ağırlıklı grand Lebesgue uzayı
$G_{p),\rho}$	Ağırlıklı grand Lebesgue uzayının alt uzayı
B_n	Bernstein operatörü
F_n	Fejer Konvolüsyon operatörü
$L_p)$	Grand Lebesgue uzayı
C_{st}	İstatistiksel sürekli fonksiyonlar uzayı
C_{st}^b	İstatistiksel sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
C_0^∞	Sonsuz diferansiyellenebilir sınırlı fonksiyonlar uzayı
K_n	Kantoroviç operatörü
L_p	Lebesgue uzayı
$L_{2\pi}^p(R)$	L_p uzayında 2π periyotlu periyodik fonksiyonlar
φ_n	Periyodik çekirdek
L_n	Pozitif lineer operatör dizisi
S_n	Szasz operatörü
T_δ	Shift operatörü
$C_{2\pi}(R)$	2π periyotlu periyodik sürekli fonksiyonlar

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1	$C_{st}(a, b) \setminus C(a, b)$ ait bir fonksiyon	69
Şekil 5.2	$C_{st}(a, b)$ ve $L_p(a, b)$ fonksiyon uzayları	72
Şekil 5.3	$C_{st}(a, b)$ uzayı ve bazı fonksiyon uzayları	74
Şekil 5.4	$C_{st}^b(a, b)$ uzayı ve bazı fonksiyon uzayları	78



Grand Lebesgue Uzaylarında Korovkin Tipli Yaklaşım ve İstatistiksel Süreklilik

Cemil KARAÇAM

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Eş-Danışman: Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK

Bu tez çalışmasında üç temel konu üzerinde araştırma yapılmıştır.

Birinci çalışma grand Lebesgue uzayında klasik ve istatistiksel Korovkin yaklaşım ve bazı uygulamaları üzerinedir. Grand Lebesgue uzayı ayrılabilir olmayan bir uzaydır. Bu sebepten pozitif lineer operatör dizileri için Korovkin teoremi tüm uzayda geçerli değildir. Bu sebepten çalışmalarımız grand Lebesgue uzayının Korovkin tipli yaklaşım şartlarının geçerli olacağı bir alt uzayı belirleme üzerine yoğunlaşmıştır. Grand Lebesgue uzayının bir alt uzayı olan $G_p(-\pi, \pi)$ uzayı shift operatörü yardımıyla;

$$\widetilde{G_p}(-\pi, \pi) : \{f \in L_p(-\pi, \pi) : \|T_\delta f(x) - f(x)\|_p \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0\}$$

$\overline{G_p}(-\pi, \pi) = G_p(-\pi, \pi)$ oluşturulan uzayın kapanışı olarak tanımlandı.

$C_0^\infty(-\pi, \pi)$ sonsuz diferansiyellenebilir sınırlı fonksiyonlar uzayının $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğun olduğu gösterildi. $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında Korovkin teoremleri ve istatistiksel versiyonlarının analogları oluşturuldu. Elde edilen bulgular ışığında bu

alt uzayda Kantoroviç polinom dizisi, Fourier ve Abel Poisson konvolüsyon operatörleri için çeşitli uygulamalar yapıldı.

Çalışmamızın 2. bölümünde ρ ağırlık fonksiyonu ve grand Lebesgue uzayı normu ile tanımladığımız ağırlıklı grand Lebesgue uzayının bir alt uzayı olan

$G_{p),\rho}(-\pi, \pi): \{f: \rho f \in G_p(-\pi, \pi)\}$ uzayında Korovkin tipli teoremler ve onların istatistiksel versiyonları oluşturulmuştur.

Son bölümde çalışmalarımız ölçülebilir fonksiyon uzaylarında istatistiksel süreklilik üzerine olmuştur. μ -istatistiksel sağ ve sol limit tanımları verilerek bir noktada birinci, ikinci ve kaldırılabilir μ -istatistiksel süreksizlik tanımlamaları yapılmıştır.

$C_{st}[a, b]$ istatistiksel sürekli fonksiyonlar uzayı tanımlanıp $C[a, b]$ uzayını ayrık bir şekilde kapsadığı ve bunun yanısıra $\forall p \in (0, +\infty)$ için $C_{st}[a, b] \setminus L_p[a, b] \neq \emptyset$ ve $L_p[a, b] \setminus C_{st}[a, b] \neq \emptyset$ gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Grand-Lebesgue uzayı, ağırlıklı grand- Lebesgue space

Korovkin teoremi, istatistiksel yakınsaklık, μ - istatistiksel süreklilik

Korovkin-Type Approximation and Statistical Continuity in Grand Lebesgue Spaces

Cemil KARACAM

Department of Mathematic

Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Assoc.Prof. Dr.Yusuf ZEREN

Co- supervisor:Prof. Dr.Yusuf ZEREN

This study has concentrated on three main issues.

Our first study is based on classical and statistical Korovkin type approximation and some of its applications and the grand Lebesgue space. Grand Lebesgue space is not separable space. Therefore, the Korovkin for positive linear operator sequences is not satisfied in all space. For this reason, our studies focused on determining a subspace in which the Korovkin type approximation conditions of the grand Lebesgue space will be valid. We consider the subspace $G_p(-\pi, \pi)$ of a grand Lebesgue space generated by shift operator.

$$\widetilde{G_p}(-\pi, \pi) : \{f \in L_p(-\pi, \pi) : \|T_\delta f(x) - f(x)\|_p \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0\}$$

We define the closure of $\widetilde{G_p}(-\pi, \pi) = G_p(-\pi, \pi)$. We show the density of the space of infinitely differentiable finite functions in $G_p(-\pi, \pi)$. We prove the analogs of Korovkin theorems and their statistical versions in $G_p(-\pi, \pi)$. In particular, we establish the analogs of Korovkin theorems for a sequence of operators generated by the Kantorovich polynomials, for Fourier and Abel-Poisson

In our second study classical and statistical Korovkin type converge theorems for positive linear operator sequences was studied on the weighted grand Lebesgue space that we created by ρ weight function and grand Lebesgue space's norm

$G_{p),\rho}(-\pi, \pi): \{f: \rho f \in G_p(-\pi, \pi)\}$. We prove the analogs of Korovkin theorems and their statistical versions in $G_p(-\pi, \pi)$. In particular, we establish the analogs of Korovkin theorems and statistical version for a sequence of operators and some applications.

In the last chapter, a study has been done on statistical continuity in measurable function spaces. We give definitions of μ - statistical one-sided limits at a point and

μ - statistical discontinuities of the first and second kind in some measurable space with a measure. We consider the space $C_{st}[a, b]$ of μ - statistical continuous functions on some interval $[a, b]$. We prove that the space of continuous functions is strictly embedded in $C_{st}[a, b]$. Moreover, we show that $C_{st}[a, b]$ is not embedded in the Lebesgue spaces $L_p[a, b]$ for $\forall p \in (0, +\infty)$, i.e $C_{st}[a, b] \setminus L_p[a, b] \neq \emptyset$.

Keywords: grand-Lebesgue space, weighted grand- Lebesgue space

Korovkin theorem, statistical convergences, μ - statistical convergences

1.1 Literatür Özeti

Fonksiyon Matematik, Fizik, Mühendislik başta olmak üzere disiplinler arası bir kavramdır. Matematik veya Uygulamalı bilimlerde modellenen her fonksiyon inceleme açısından uygun formatta olmayabilir. Gelişen teknoloji ve dijital dönüşümlere paralel olarak fonksiyonların bilgisayar yazılımlarına uygun formatta olmaları önem kazanmıştır. Bazı Fonksiyonlar süreklilik, türev ve integrallenebilme vb. özellikleri açısından uygulamalara ve hesaplamalara uygun olmayabilir. Bu fonksiyonları, hata payı minimum olacak şekilde özellikleri bilinen daha basit fonksiyonlar ile temsil etmek Yaklaşım teorisinin genel amacıdır. Yaklaşım teorisi işlevi açısından teorik ve uygulamalı matematik arasında bir köprü görevi görmektedir. Yaklaşım teorisinin uygulama yöntemlerinden biri Pozitif lineer operatörler yardımıyla yaklaşımdır. Pozitif lineer operatörler monotonluk ve bazı temel eşitsizlikleri sağladığından yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutar.

Pozitif lineer operatörle yaklaşım teorisi;

1853 yılında Rus Matematikçi P.L Chebyshev bir bağlantı problemi üzerinde çalışırken bir buhar makinesi motorunun doğrusal hareketini bir tekerleğin dairesel hareketine çevirmek için aşağıdaki problemi incelemiştir.

- i. $[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu;

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

şeklinde n . dereceden bir polinomla ifade edilebilir mi?

- ii. $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|$ hangi koşullarda minimize olabilir?

Bu probleme 1885 yılında Alman matematikçi Karl Weierstrass

$[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için;

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\sup |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $p(x)$ polinomu vardır teorisini ortaya koymuştur [1].

Bu teori dönemin matematikçileri tarafından kabul görse de ispatının uzun ve karmaşık olması bu teorisinin dönemin ünlü matematikçileri tarafından incelenmesine neden olmuştur.

1912 yılında Rus matematikçi Sergi N. Bernstein

$[0,1]$ aralığında reel değerli bir f fonksiyonuna

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

Bernstein polinomları ile yaklaşılabileceğini ifade ve ispat etmiştir [2].

Bernstein polinomları, Weierstrass teorisini daha anlamlı hale getirip lineer pozitif operatörler konusuna olan ilgiyi artırmıştır.

Bernstein operatörünün sadece sürekli fonksiyonlar için geçerli olması ve bazı integrallenebilir fonksiyonlar için uygulamalarda karşılaşılan güçlükler dönemin matematikçilerini yeni bir lineer pozitif operatör arayışına itmiştir.

1930 yılında Rus matematikçi L.V. Kantoroviç tarafından

$\forall f \in L_p [0,1]$ için

$$K_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \left((n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

Kantoroviç polinomu tanımlamıştır [3].

1950 yılında Szasz tarafından

$x \in [0, \infty]$, $f \in C[0, \infty)$ için

$$S_n: C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$$

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad \text{olmak üzere,}$$

Szasz operatörü tanımlanarak Bernstein polinomu sonlu olmayan aralığa genişletilmiştir [4].

1952 yılında H. Bohman $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$, $P_{k,n} \geq 0$ olmak üzere,

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x)$$

Pozitif operatör dizisinin $n \rightarrow \infty$ için f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşulları

- i. $L_n(1; x) \Rightarrow 1$
- ii. $L_n(t; x) \Rightarrow x$
- iii. $L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$

şeklinde ifade etmiştir [5].

1953'te P.P. Korovkin $[0,1]$ aralığını $[a, b]$ aralığına genişletmiştir [6].

Bu teorem tanımlanan bir operatörün birim operatöre yakınsaması durumunda operatör dönüşümünün düzgün yakınsak olmasını garanti etmesi anlamına gelmesi nedeniyle matematik dünyasında büyük yankı uyandırmış ve Korovkin Yaklaşım teorisinin doğmasına neden olmuştur.

Korovkin Yaklaşım teorisi 3 ana başlıkta yoğunlaşmıştır.

- i. $\{1, x, x^2\}$, $\{1, \sin x, \cos x\}$, gibi yeni test fonksiyonları elde etmek.
- ii. Korovkin teoremlerinin farklı fonksiyon uzayları üzerinde uygulamaları
- iii. Korovkin teoremini sağlayan yeni Lineer pozitif operatörler elde etmek

Korovkin teoremi, $L_p[a, b]$ uzayı için [6 – 12] çalışmalarında çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir.

Bohman-Korovkin teoremi sonlu ve kapalı aralıkta geçerlidir. Bu teori sonlu ve kapalı aralıktan tüm reel eksene A.D. Gadjiev tarafından belirli koşullar altında tüm reel eksene taşımıştır. [13, 14]

Korovkin teoremimin sağlanmadığı durumlarda yakınsaklık kaybını gidermek için

- i. Hemen hemen yakınsaklık

ii. Aritmetik ortalama yakınsaklık

iii. İstatistiksel yakınsaklık

iv. Toplanabilme metodu

gibi metotlar oluşturulmuştur.

Çalışmamızda yer alan istatistiksel yakınsaklık konusunun, Matematiğin farklı alanlarında Toplanabilme teorisi, Sayı teorisi, Olasılık teorisi, Yaklaşım teorisi gibi önemli uygulamaları mevcuttur. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez 1951'de H. Fast [15] ve H. Steinhaus [16] tarafından tanıtıldı. Skaler diziler için bu kavram, Fourier serileri çalışmalarında A. Zygmund [17] tarafından hemen hemen her yerde yakınsaklık olarak ele alındı. Bu teori I.J. Schoenberg [18], J.S. Conner [19], T. Salat [20], J. A. Fridy [21 – 22], J.A Fridy ve M.K. Khan [23], J.A Fridy ve C. Orhan [25 – 26], A.R Freedman ve J.J Sember [27], M. Macaj, T. Salat [19] gibi çalışmalar belli başlı çalışmalardır.

Klasik anlamda yakınsaklığı kapsayan istatistiksel yakınsaklık Korovkin teoremlere ilk olarak 2002 yılında A. D Gadjev ve C. Orhan [31] tarafından incelenmiş ve pozitif lineer operatörler için istatistiksel Korovkin teoremini oluşturulmuştur. Bu sayede Korovkin yaklaşım teorisi için daha güçlü sonuçlar elde edilmiş ve birçok çalışmaya öncü olunmuştur. Bu konuda benzer araştırmalar [32 – 34] çalışmalarında mevcuttur.

Grand Lebesgue uzayları ilk olarak T. Iwaniec ve C. Sobordone [35] tarafından tanımlanmıştır. Grand Lebesgue uzayı matematiğin PDE teorisi, Operatör Teori ve Uygulamalı matematik alanlarında uygulamaları nedeniyle birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalar kısmi diferansiyel denklemler teorisi, fonksiyon uzayları, operatör teorisi, sınır değer problemleri başlıklarında aşağıdaki araştırmacılar tarafından incelenmiştir. T. Iwaniec ve C. Sobordone [35 – 37], A. Fiorenza [38], A. Fiorenza, G.E Karadzov [39], A. Fiorenza, M. Kerbec [43], [40], A. Fiorenza, G. Fratta A. Fiorenza B. Gupta [42], V. Kokilashvili [44, 45] belli başlı araştırmacılarıdır.

Çalışmamızın son bölümünü oluşturan istatistiksel süreklilik;

“İstatistiksel yakınsaklık kavramdan yola çıkarak benzer anlayışla ölçüye bağlı istatistiksel süreklilik kavramı oluşturulabilir mi ? ” sorusunu doğurmuştur.

Bu yöndeki ilk adım Lebesgue ölçüsü için sonlu bir noktada veya sonsuzda ölçülebilir fonksiyonlar için istatistiksel limit ve istatistiksel esaslık kavramlarını koyan F. Moricz [62] tarafından oluşturulmuştur. Moricz bu çalışmasında bu kavramlar arası ilişkileri kısmen inceleyip, bu kavramları genelleştirmeden Fourier serisi üzerine çalışmalar yapmıştır. İstatistiksel yakınsaklık temelli istatistiksel süreklilik ilk kez B.T. Bilalov ve S.R. Sadigova [61] tarafından tanımlanmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Grand Lebesgue uzayı ayrılabilir olmayan bir Banach fonksiyon uzayıdır. Bu özelliğinden dolayı lineer pozitif operatörler için Korovkin yaklaşım teorisi olumlu sonuçlar vermez. Çalışmamızın amacı, grand Lebesgue uzayının sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonların yoğun olduğu bir alt uzayı tanımlanıp, bu alt uzay üzerinde Korovkin yaklaşım teorisinin klasik ve istatistiksel versiyonları için temel teoremleri oluşturmak ve çeşitli operatörlerin bu uzaylardaki Korovkin tipli yakınsaklık şartlarını belirlemektir. Grand Lebesgue uzayındaki norm yardımıyla tanımladığımız ağırlıklı grand Lebesgue uzayı için benzer bir anlayışla Korovkin yaklaşım teorisinin temel teoremlerini belli koşullar altında incelemektir. Çalışmamızın diğer hedefi istatistiksel limit, istatistiksel süreklilik, istatistiksel süreksizlik tanımlamaları yaparak bazı fonksiyon uzayları arasındaki ilişkileri bu bağlamda incelemektir.

1.3 Hipotez

Grand Lebesgue uzayı ayrılabilir uzay olmadığından Korovkin tipli yaklaşım teorisinin uygulanabileceği G_p alt uzayı oluşturuldu.

$\forall f \in L_p(-\pi, \pi)$ ve

$$T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x + \delta), & x + \delta \in [-\pi, \pi] \\ 0, & x + \delta \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi] \end{cases}$$

shift operatörü olmak üzere,

$$\widetilde{G_p}(-\pi, \pi) : \{f \in L_p(-\pi, \pi) : \|T_\delta f(x) - f(x)\|_p \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0\}$$

$\widetilde{G_p}(-\pi, \pi)$ uzayının kapanışı $\widetilde{\widetilde{G_p}}(-\pi, \pi) = G_p(-\pi, \pi)$ olmak üzere;

bu uzayda klasik ve istatistiksel manada Korovkin teoremleri oluşturulabilir.

Konvolüsyon tipli integral operatörler için Korovkin teoremine denk koşullar elde edilebilir.

Kantoroviç polinomu için klasik Korovkin koşulları bu alt uzayda da geçerlidir.

Grand Lebesgue benzer yaklaşımla

Ağırlıklı grand Lebesgue Uzayı,

$1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve ρ fonksiyonu ağırlık fonksiyonu olmak üzere;

$$L_{p,\rho}(\Omega) = \{f: \rho f \in L_p\}$$

Bu uzayda norm

$$\|f\|_{p,\rho} = \|\rho f\|_p$$

şeklinde tanımlanarak Ağırlıklı grand Lebesgue uzayı için klasik ve istatistiksel manada Korovkin teoremleri ve koşulları belirlenebilir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramından yola çıkarak ölçüye bağlı istatistiksel süreklilik kavramı doğrultusunda, istatistiksel süreksizlik ve sınıflandırmaları yapılarak ve fonksiyon uzayları arası ilişkiler bu bağlamda incelenebilir.

1.4 Tezin İçeriği

1. Bölümde Korovkin yaklaşım teorisi, istatistiksel yakınsaklık istatistiksel süreklilik konularında literatür özeti verilmiştir.
2. Bölümde tez çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.
3. Bölümde çalışmamızın ana konuları olan Korovkin tipli yaklaşım, istatistiksel yakınsaklık ve grand Lebesgue uzayları ve özellikleri incelenmiştir.
4. Bölümde grand Lebesgue uzayının shift operatörü yardımıyla tanımlanan sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonların yoğun olduğu bir alt uzayı tanımlanarak bu uzayda 1. ve 2. Korovkin teoremleri klasik ve istatistiksel manada incelenmiş olup, Kantoroviç operatör dizisinin yakınsaklık koşulları ve konvolüsyon tipli operatör dizilerinin yakınsaklık şartları için denklikler tanımlanmıştır.

5. Bölümde Ağırlıklı grand Lebesgue uzayında Korovkin tipli yaklaşım teorisi için Ağırlıklı grand Lebesgue uzayının shift operatörü yardımıyla tanımlanan sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonların yoğun olduğu bir alt uzayı tanımlanarak bu uzayda Korovkin teoremi için ağırlık fonksiyonunun özel koşulları altında incelenmiştir.

6. Bölümde istatistiksel yakınsaklık temelli ölçüye bağlı istatistiksel süreklilik ve istatistiksel süreksizlik kavram ve sınıflamaları oluşturulup bazı fonksiyon uzayları istatistiksel süreklilik anlamında karşılaştırılmıştır.

7. Bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.



TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışmamızda kullanılacak olan temel tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir.

Tanım 2.1 X bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \rightarrow \|x\|$ dönüşümü, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır. Bu durumda $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine normlu uzay adı verilir.

Tanım 2.2 $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa $(X, \| \cdot \|)$ X bir normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 2.3 $\mathcal{M}_0$ Ω üzerinde reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar kümesi,

$\rho: \mathcal{M}_0^+ \rightarrow [0, +\infty]$ ve $\forall f, g, f_n (n = 1, 2, 3 \dots) \in \mathcal{M}_0^+$, $\forall \lambda \geq 0$ ve $\forall E \subset \Omega$ ölçülebilir altkümeleri için

i. $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (hhy)

ii. $\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f)$

iii. $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

iv. $0 \leq g \leq f$ (hhy) $\Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$

v. $0 \leq f_n \uparrow f$ (hhy) $\Rightarrow \rho(f_n) \leq \rho(f)$

vi. $E \subset \Omega \Rightarrow \rho(X_E) < +\infty$

vii. $E \subset \Omega \Rightarrow \int_E f dx \leq C_E \rho(f)$, $0 < C_E < \infty$ (C_E E ve ρ bağlı ve f den bağımsız)

özellikleri sağlanıyorsa ρ Banach fonksiyon normudur [64].

Tanım 2.4 X ve Y , F cismi üzerinde vektör uzayı ve $D(T) \subset X$ olmak üzere;

$T: D(T) \rightarrow Y$ fonksiyonuna operatör veya dönüşüm denir.

$\forall x, y \in D(T)$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$

özellği sağlanıyor ise T operatörüne lineer operatör denir [63].

Tanım 2.5 $T: D(T) \rightarrow Y$ operatör olsun. $\forall f \in D(T)$ için $T(f) \geq 0$ ise T operatörün pozitif operatör denir.

T aynı zamanda lineer ise T 'ye pozitif lineer operatör denir [63].

Teorem 2.1 X ve Y iki vektör uzayı $T: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun.

Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. T operatörü monotondur.

ii. $|T(f)| \leq T(|f|)$

Tanım 2.6 X ve Y normlu uzay $D(T) \subset X$ ve olmak üzere; $T: D(T) \rightarrow Y$ lineer operatörü verilsin. $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ varsa T operatörüne sınırlı operatör denir.

$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ operatörün normu denir [65].

Tanım 2.7 X ve Y normlu uzay $D(T) \subset X$ ve olmak üzere; $T: D(T) \rightarrow Y$ operatörü $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$, $\forall x \in D(T)$ için $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ olması durumunda T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir [63].

Teorem 2.2 $T: D(T) \rightarrow Y$ lineer operatörünün $D(T) \subset X$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün $D(T)$ üzerinde sürekli olmasıdır [63].

Tanım 2.8 $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. $f_n: N \rightarrow F(A)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona fonksiyon dizisi denir [66].

Tanım 2.9 (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için $\exists n_0 \in N$ vardır ki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ [66]

Tanım 2.10 (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in A$ için $\exists n_0 \in N$ vardır ki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ [66]

Tanım 2.11 X bir küme ve $\mathcal{A}$ X ' in alt kümelerinin bir sınıfı olmak üzere

- i. $X \in \mathcal{A}$
- ii. Her $A \in \mathcal{A}$ için $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$
- iii. $A_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{A}$, X üzerinde cebirdir .

Eğer (iii) yerine “Her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine σ - cebiri denir [67].

Tanım 2.12 Bir $\mathcal{A}$ sınıfını kapsayan σ - cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{A}$ ’nın ürettiği

σ - cebiri denir. R ’deki bütün açık (a, b) aralıklarının ürettiği σ - cebirine Borel cebiri denir. $B(R)$ şeklinde gösterilir. $B(R)$ in herbir elemanına bir Borel kümesi denir [67].

Tanım 2.13 X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ -cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay ve her $A \in \mathcal{A}$ kümesine ölçülebilir küme denir [72].

Tanım 2.14 $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve μ genişletilmiş reel değerli fonksiyonu;

- i. $\mu(\emptyset) = 0$
- ii. $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- iii. A_n ayrık dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ özelliklerine sahipse μ fonksiyonuna ölçü denir [67].

Tanım 2.15 Bir X kümesinin σ - cebiri $\mathcal{A}$ ve μ $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı üzerinde tanımlı ölçü olmak üzere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne ölçü uzayı denir.

Tanım 2.16 X bir küme $P(X)$ de X ’in kuvvet kümesi olsun.

$\mu^* : P(X) \rightarrow \mathcal{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ olmak üzere ;

- i. $\mu^*(\emptyset) = 0$
- ii. Her $A \in P(X)$ için $\mu^*(A) \geq 0$
- iii. $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- iv. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ şartları sağlanıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Bir ölçünün dış ölçü olabilmesi için onun tanım kümesinin kuvvet kümesi olması gerekir [67].

Tanım 2.17 $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(\alpha, \infty] = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ oluyorsa f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. [65].

Tanım 2.18 $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) olsun. I_n ile denk olan kümeye sonlu (n elemanlı) bir küme ve $\mathbb{N}$ denk olan kümede sayılabilir küme denir [63].

Tanım 2.19 (X, d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın kapanışı X 'e eşit yani $\bar{A} = X$ ise A 'ya X 'te yoğun küme adı verilir [63].

Tanım 2.20 Bir (X, d) metrik uzayının sayılabilir yoğun altkümesi varsa bu uzaya ayrılabilir metrik uzay denir [63].

Bu tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir.

(X, d) ayrılabilir metrik uzaydır $\Leftrightarrow X$ içinde öyle bir $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dizisi vardır ki $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $d(x, x_{n_0}) < \varepsilon$ olur [63].

Tanım 2.21 Bir f fonksiyonunun desteği, $f(x)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu x noktalarının kapanışıdır.

$$\text{Supp } f = \overline{\{x: f(x) \neq 0\}} \text{ ile gösterilir.}$$

Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise f fonksiyonuna kompakt destekli denir [63].

Tanım 2.22 (Hölder eşitsizliği)

$$1 < p, q < \infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ ve } f \in L_p, g \in L_q \text{ ise } f \cdot g \in L_1 \text{ olur.}$$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ eşitsizliği sağlanır [63].}$$

Tanım 2.23 (Minkowski eşitsizliği)

$f, g \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ için $f + g \in L_p$ olur ve $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ eşitsizliği sağlanır [68].

Tanım 2.24 (Young eşitsizliği) $a, b \geq 0$ $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere;

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ sağlanır [63].}$$

Teorem 2 .4 $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere;

Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L_1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen hemen her yerde vardır .

$h \in L_p$ dir. Ayrıca $\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ eşitsizliği sağlanır [63].

Teorem 2 .5 (*Beppo – Levi*)

(Ω, Σ, X) ölçüm uzayı , $X \in \Sigma$ olsun.

$f_n: X \rightarrow [0 ; \infty]$ dizisi $\forall x \in X$ için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \infty$ verilsin.

$\forall x \in X$ için $f_n \rightarrow f$ noktasal yakınsak, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) dx$$

sağlanır.

GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA KOROVKİN TIPLİ YAKLAŞIM VE İSTATİSTİKSEL VERSİYONU

Bu bölümde lineer pozitif operatörler için Korovkin teoremleri tanıtılıp sonlu ölçülü küme üzerinde grand Lebesgue uzayı incelenip bu uzayda lineer pozitif operatörlerin Korovkin tipli klasik ve istatistiksel yakınsaklık versiyonları incelenecektir.

3.1 Klasik Korovkin Teoremleri

1951 yılında H. Bohman $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$, $P_{k,n} \geq 0$ olmak üzere,

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x)$$

Pozitif operatör dizisinin $n \rightarrow \infty$ için f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşulları

- i. $L_n(1; x) \Rightarrow 1$
- ii. $L_n(t; x) \Rightarrow x$
- iii. $L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$ şeklinde ifade etmiştir.

1953'te P.P. Korovkin bu teoremdeki $[0,1]$ aralığını $[a, b]$ aralığına genişletmiştir.

Teorem 3.1 (Korovkin teoremi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ pozitif lineer operatör dizisi,

$\forall i=0,1,2$ için $e_i(t) = t^i$ olmak üzere;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_i) - e_i\|_{C[a,b]} = 0$ şartları sağlıyorsa $[a, b]$ aralığındaki sürekli olan her fonksiyon için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$ sağlanır.

İspat.

$f \in C[a, b]$ için f fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sayısı vardır ki, $\forall x, t \in C[a, b]$ için $|x - t| < \delta$ iken $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ sağlanır.

Bunun yanı sıra, f fonksiyonu sınırlı olduğundan $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı mevcuttur.

$|x - t| \geq \delta$ için f fonksiyonunun sınırlılığından ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(x) - f(t)| \leq |f(x)| + |f(t)| \text{ elde edilir.}$$

$$|x - t| \geq \delta \text{ iken } \frac{|x - t|}{\delta} \geq 1 \text{ ve } \frac{|x - t|^2}{\delta^2} \geq 1$$

$$|f(x) - f(t)| < 2M \frac{|x - t|^2}{\delta^2}$$

O halde,

$$|x - t| < \delta \text{ iken } |f(x) - f(t)| < \varepsilon \text{ ve}$$

$$|x - t| \geq \delta \text{ iken } |f(x) - f(t)| < 2M \frac{|x - t|^2}{\delta^2} \text{ olduğundan}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon + 2M \frac{|x - t|^2}{\delta^2} \text{ eşitsizliği elde edilir.}$$

L_n operatörü lineer olduğundan

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \\ &\leq |L_n(f(t) - f(x)); x)| + |f(x)(L_n(1; x) - 1)| \\ &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \end{aligned}$$

f fonksiyonunun sınırlılığından

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M |L_n(1; x) - 1|$$

L_n monoton artan olduğundan

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M \frac{|x - t|^2}{\delta^2}; x\right) + M |L_n(1; x) - 1| \text{ yazılabilir.}$$

L_n operatörü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon + 2M \frac{|x-t|^2}{\delta^2}; x\right) &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x)] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x)] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - x^2] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x(x - L_n(t; x)) + \\
&\quad + x^2(L_n(1; x) - 1)] + M|(L_n(1; x) - 1)|
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\forall i=0,1,2 \text{ için } e_i(t) = t^i \text{ için}$$

$$\text{i. } L_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$\text{ii. } L_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$\text{iii. } L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

koşulları sağlanması durumunda

$$\forall n > n_0 \text{ için } |L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0 \text{ elde edilir.}$$

Örnek 3.1 Bernstein operatörü

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

olmak üzere;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$B_n(1, x) = 1$$

$$B_n(t, x) = x$$

$$B_n(t^2, x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n} \quad \text{eşitlikleri sağlanır.}$$

Buradan $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|B_n(1; x) - 1\|_{C[0,1]} \rightarrow 0$$

$$\|B_n(t; x) - x\|_{C[0,1]} \rightarrow 0$$

$$\|B_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} \rightarrow 0$$

Bernstein operatörü Korovkin teoremi şartlarını sağlar.

$$\forall f \in C[0,1] \text{ için } \|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \text{ sağlanır.}$$

Örnek 3.2 $C[0, \infty)$ verilen Szasz Operatörü Korovkin teoremini şartlarını sağlar.

Szasz operatörü

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \text{ olmak üzere,}$$

- i. $S_n(1, x) = 1$
 - ii. $S_n(t, x) = x$
 - iii. $S_n(t^2, x) = x^2 + \frac{x}{n}$
- eşitlikleri sağlanır.

Buradan $n \rightarrow \infty$ için

$$\|S_n(1; x) - 1\|_{C[0, \infty)} \rightarrow 0$$

$$\|S_n(t; x) - x\|_{C[0, \infty)} \rightarrow 0$$

$$\|S_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0, \infty)} \rightarrow 0$$

$[0, \infty)$ verilen Szasz Operatörü Korovkin teoremini şartlarını sağlar.

$$\forall f \in C[0, \infty] \text{ için } \|S_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, \infty]} \rightarrow 0 \text{ sağlanır.}$$

Teorem 3.2 (2. Korovkin Teoremi)

$L_n : C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$ lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere;

$$\forall g \in \{1, \sin x, \cos x\} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n g - g\|_{C[0, 2\pi]} = 0 \text{ sağlanıyorsa}$$

$$\forall f \in C[0, 2\pi] \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{C[0, 2\pi]} = 0 \text{ olur.}$$

3.2 İstatistiksel Korovkin Tipli Teoremler

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık ile ilgili temel tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 3.1 (X, ρ) metrik uzay $\mathcal{A} \subset X$ ve

$$\delta_n(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^n X_{\mathcal{A}}(k)$$

$\delta(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\mathcal{A})$ sayısına $\mathcal{A}$ kümesinin istatistiksel yoğunluğu denir.

Tanım 3.2 $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$, $\mathcal{A}_\varepsilon = \{n \in N: \rho(x_n, x) \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$\forall \varepsilon > 0$, $\delta(\mathcal{A}_\varepsilon) = 0$ ise $\{x_n\}_{n \in N}$ dizisi $x \in X$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3 $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$, $\Delta_\varepsilon = \{n \in N: \rho(x_n, x_{n_\varepsilon}) \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\delta(\Delta_\varepsilon) = 0$ ise $\{x_n\}_{n \in N}$ dizisi istatistiksel fundamental (esas) denir. (*st fundamental*)

Lemma 3.1 $\mathcal{K} = \{\mathcal{A} \subset N: \delta(\mathcal{A}) = 1\}$ olmak üzere,

$A, B \in \mathcal{K}$ ise $A \cap B \in \mathcal{K}$ sağlanır.

Teorem 3.3 [67] (X, ρ) metrik uzay, $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$, $\mathcal{K} = \{\mathcal{A} \subset N: \delta(\mathcal{A}) = 1\}$

Aşağıdaki koşullar denktir.

i. $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

ii. $\{x_n\}_{n \in N}$ istatistiksel fundamental

iii. $\exists \{y_n\}_{n \in N} \subset X: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$, $\{n \in N: x_n = y_n\} \in \mathcal{K}$

Sonuç 3.1 (X, ρ) metrik uzay, $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ ve $\mathcal{K} = \{\mathcal{A} \subset N: \delta(\mathcal{A}) = 1\}$

$st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ise $\exists \{n_k\}_{k \in N} \in \mathcal{K}$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$): $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$

sağlanır.

Teorem 3.4

$L_n: C_M[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatör dizisi

- i. $\text{st} - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_B = 0$
- ii. $\text{st} - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t; x) - x\|_B = 0$
- iii. $\text{st} - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2; x) - x^2\|_B = 0$

şartlarını sağlıyorsa herhangi bir $f \in C_M[a, b]$ için

$$\text{st} - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(x); x) - f(x)\|_B = 0 \text{ sağlanır.}$$

İspat.

Korovkin teoremine benzer bir yaklaşım takip edilecektir. f fonksiyonu tüm reel ekseninde sınırlı olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \quad -\infty < t, x < \infty$$

f fonksiyonu sürekli olduğundan $|t - x| \leq \delta$ şartını sağlayan her t, x için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \text{ sağlanır.}$$

$\forall t \in (-\infty, \infty)$, $\forall x \in [a, b]$ ve δ sabit sayısı için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} |t - x|^2 \text{ yazılabilir.}$$

$$L_n(f; x) - f(x) = L_n(f(t) - f(x), x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)$$

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_B \leq \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} \right) \|L_n(1; x) - 1\|_B + \frac{4M}{\delta^2} \|L_n(t; x) - x\|_B$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2} \|L_n(t^2; x) - x^2\|_B$$

$$\leq K_1 (\|L_n(1; x) - 1\|_B + \|L_n(t; x) - x\|_B + \|L_n(t^2; x) - x^2\|_B)$$

Burada

$$K_1 = \max\left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}, \frac{4M}{\delta^2}\right) \text{ seçilmiştir.}$$

Son eşitsizlikten $\forall \varepsilon > 0$ için

$|\{n \leq N: \|L_n(f; x) - f(x)\|_B > \varepsilon'\}| \leq \left| \left\{ n \leq N: \|L_n(1; x) - 1\|_B + \|L_n(t; x) - x\|_B + \|B_n(t^2; x) - x^2\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{K_1} \right\} \right|$ yazılabilir.

$D = \left\{ n: \|L_n(1; x) - 1\|_B + \|L_n(t; x) - x\|_B + \|B_n(t^2; x) - x^2\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{K_1} \right\}$ olmak üzere,

$$D_1 = \left\{ n: \|L_n(1; x) - 1\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ n: \|L_n(t; x) - x\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ n: \|B_n(t^2; x) - x^2\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\}.$$

Açıkça görülür ki

$$D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$|\{n \leq N: \|L_n(f; x) - f(x)\|_B > \varepsilon'\}| \leq \left| \left\{ n \leq N: \|L_n(1; x) - 1\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\} \right| + \left| \left\{ n \leq N: \|L_n(t; x) - x\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\} \right| + \left| \left\{ n \leq N: \|B_n(t^2; x) - x^2\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\} \right|.$$

Buradan ve (i), (ii), (iii) kabullerinden ispat tamamlanır.

Örnek3.3 [31]

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Bernstein operatörü ve α_n sınırsız istatistiksel yakınsak dizi olmak üzere

$$P_n: C_M[0,1] \rightarrow B[0,1]$$

$$P_n(f; x) = (1 + \alpha_n) B_n(f; x)$$

polinom dizisini ele alalım.

Bernstein operatörü Klasik Korovkin teoremi şartlarını sağlar.

$$B_n(1, x) = 1$$

$$B_n(t, x) = x$$

$$B_n(t^2, x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

Böylelikle $P_n(f; x)$ istatistiksel Korovkin teoremi şartlarını sağlar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(f(x); x) - f(x)\|_B = 0$$

Bunun yanı sıra;

$$B_n(f; 0) = f(0) \text{ olduğundan } P_n(f; 0) = (1 + \alpha_n) f(0) \text{ ve}$$

$$\|P_n(f(x); x) - f(x)\|_B \geq |P_n(f; 0) - f(0)| = \alpha_n |f(0)|$$

$$\alpha_n \text{ sınırsız bir dizi ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \alpha_n = \infty$$

P_n klasik Korovkin şartlarını sağlamayan fakat istatistiksel Korovkin şartlarını sağlayan bir operatör dizisidir.

3.3 Grand Lebesgue Uzayı

1992’de Iwanec ve Sobordone [35] Kısmi diferansiyel denklemler çalışmalarında;

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, f = \{f^1, f^2, \dots, f^n\} \in W_{loc}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty, Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ve $J(x, f) = \det Df(x)$ Jacobian determinant olmak üzere,

“Hangi şartlar altında Jakobiyen fonksiyonu lokal integrallenebilir?” problemini incelerken çeşitli fonksiyon sınıflarına ulaşmışlardır.

Bunlardan biri

$$L_n(\Omega) : \left\{ f: \Omega \subset \mathbb{R}^n, f \in \bigcap_{1 \leq p \leq n} L_p(\Omega) \right\} \text{ olmak üzere,}$$

bu uzayda norm

$$\|f\|_n = \sup_{1 \leq p < n} \left((n - p) \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu uzay grand Lebesgue uzaylarının temelini oluşturmuştur.

Iwanec ve Sobordone çalışmalarında

$$|D(f)| \in L_n(\Omega) \Rightarrow |Jf| \in L_{loc}^1(\Omega)$$

sonucunu elde etmişlerdir.

Daha sonraları yapılan çalışmalar sonucunda;

$L_p(\Omega)$ grand Lebesgue uzayı, $n \geq 2$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sonlu ölçülü küme ve

$1 < p < \infty$ olmak üzere; $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sonlu ölçülü fonksiyonlardan oluşur.

$$\|f\|_{p-\epsilon} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p-\epsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\epsilon}} \quad \text{olmak üzere,}$$

bu uzayda norm $\|f\|_p = \sup_{1 < \epsilon < p-1} \left(\frac{\epsilon}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{p-\epsilon}} \|f\|_{p-\epsilon}$ şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde grand Lebesgue uzayının temel özellikleri incelenecektir.

Teorem 3.5 $\mathcal{M}_0$ Ω üzerinde reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar kümesi,

$\rho: \mathcal{M}_0^+ \rightarrow [0, +\infty]$ ve $\forall f, g, f_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $\in \mathcal{M}_0^+$, $\forall \lambda \geq 0$ ve $\forall E \subset \Omega$

ölçülebilir altkümeleri için

$$L_p(\Omega): \left\{ f \in \mathcal{M}_0: \|f\|_p = \rho(|f|) = \sup_{1 < \epsilon < p-1} \left(\frac{\epsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\epsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\epsilon}} < +\infty \right\}$$

grand Lebesgue uzayı aşağıdaki özellikleri sağlar ve Banach fonksiyon uzayıdır [73].

- i. $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (hhy)
- ii. $\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f)$
- iii. $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$
- iv. $0 \leq g \leq f$ (hhy) $\Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$
- v. $0 \leq f_n \uparrow f$ (hhy) $\Rightarrow \rho(f_n) \leq \rho(f)$
- vi. $E \subset \Omega \Rightarrow \rho(\chi_E) < +\infty$
- vii. $E \subset \Omega \Rightarrow \int_{\Omega} f dx \leq C_E \rho(f)$, $0 < C_E < \infty$ (C_E E ve ρ bağlı ve f den bağımsız)

Grand Lebesgue uzayı

$$\mu_f(\lambda) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}| \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \text{ve} \quad \rho(f) = \rho(g) \Rightarrow \mu_f = \mu_g$$

olmak üzere yeniden düzenlenmiş invariant uzaydır. [73]

Teorem 3.6 $p > 1$, $0 < \varepsilon < p-1$ ve $|\Omega| < \infty$ olmak üzere ,

$$L_p(\Omega) \subsetneq L_{p)}(\Omega) \text{ sağlanır.}$$

İspat.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1 \text{ olacak şekilde}$$

$$t = \frac{p}{p-\varepsilon} \quad \text{ve} \quad s = \frac{p}{\varepsilon} \quad \text{eşlenik kuvvetleri seçelim..}$$

$f \in L_p(\Omega)$ olmak üzere,

Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &\leq \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon} \frac{p-\varepsilon}{p}} \left(|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} (|\Omega|)^{\frac{-1}{p-\varepsilon}} (|\Omega|)^{\frac{\varepsilon}{(p-\varepsilon)p}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq p^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty \end{aligned}$$

Böylece $f \in L_{p)}(\Omega)$ elde edilir.

Bu kapsamın ayrık olduğunu bir örnek ile gösterelim.

Örnek 3.4 $p > 1$, $\Omega = [0,1]$ ve $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ fonksiyonunu inceleyelim.

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_0^1 = \infty$$

$f \notin L_p(0,1)$ ve bunun yanı sıra

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^1 x^{\frac{-1}{p}(p-\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &= \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^1 x^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{p}{\varepsilon} x^{\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{p}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = (p)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < p \\ \|f\|_{p) } &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 x^{\frac{-1}{p}(p-\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \end{aligned}$$

Böylece $f \in L_{p)}(0,1) \setminus L_p(0,1)$ gösterildi.

Teorem 3.7 (Nesting) (Yuvalama)

$p > 1$, $|\Omega| < \infty$ ve $0 < \varepsilon < p-1$ olmak üzere,

$$L_p(\Omega) \subsetneq L_{p)}(\Omega) \subsetneq L_{p-\varepsilon}(\Omega)$$

sağlanır.

Bu özellik Lebesgue uzaylarında var olan

$$1 < q < p < \infty$$

$L_\infty(\Omega) \subsetneq L_p(\Omega) \subsetneq L_q(\Omega) \subsetneq L_1(\Omega)$ özelliği ile birlikte Lebesgue uzaylarındaki fonksiyonların genişletilmesine olanak sağlar.

Teorem 3.8 $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_{p)}(\Omega)$ uzayı Banach uzayıdır.

İspat. $L_{p)}(\Omega)$ uzayından $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi seçelim.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_m - f_n|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0 \text{ ve}$$

$\forall \tau > 0, 0 < \varepsilon < p-1$ aralığından keyfi ε ve $m > n_0, n > n_0$ için

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_m - f_n|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\tau}{3} \text{ olacak şekilde } n_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

Buradan

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $L_{p-\varepsilon}(\Omega)$ uzayında Cauchy dizisidir .

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $L_{p-\varepsilon}(\Omega)$ uzayında limiti f olsun.

$n > n_0$ için supremum tanımından

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_p &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f - f_n|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f - f_n|^{p-\varepsilon_0(n)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} + \frac{\tau}{3} \end{aligned}$$

olacak şekilde $0 < \varepsilon_0(n) < p-1$ vardır.

Bunun yanı sıra $m > n_1$ için

$$\left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_m - f_n|^{p-\varepsilon_0(n)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} < \frac{\tau}{3}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

$\forall m, n > n_1$ için

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_p &\leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_m - f_n|^{p-\varepsilon_0(n)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f - f_n|^{p-\varepsilon_0(n)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} + \frac{\tau}{3} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\tau}{3} + \frac{\tau}{3} + \frac{\tau}{3} = \tau \quad \text{elde edilerek ispat tamamlanır.}$$

Teorem 3.9 $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında yoğun değildir ve $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının grand Lebesgue uzayına kısıtlanışının kapanışı

$$\overline{C_0^\infty}|_{L_p} : \overline{\left\{f \in L_p(\Omega) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} dx = 0\right\}} \text{ uzayıdır.}$$

İspat. $f \in \overline{C_0^\infty}|_{L_p}$ olsun.

$n \rightarrow \infty$, $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ olacak şekilde $f_n \in C_0^\infty$ dizisi mevcuttur.

$\delta > 0$ ve $\|f - f_{n_0}\|_p < \frac{\delta}{2}$ ve $f_{n_0} \in C_0^\infty$ olacak şekilde n_0 sayısı seçelim.

Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_{n_0}|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_{n_0}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

elde edilir.

Böylece $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ için

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_{n_0}|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\delta}{2}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &\leq \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f - f_{n_0}|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_{n_0}|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\leq \|f - f_{n_0}\|_p + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

ispat tamamlanmıştır.

Teorem 3.10 $L_p(\Omega)$ uzayı refleksif uzay değildir.

İspat. Bu uzayın refleksif olmaması için

$\|f\|_p$ mutlak sürekli olmayan bir fonksiyon örneği vermek yeterlidir.

$f(x) = x^{\frac{-1}{p}}$ fonksiyonunu inceleyelim.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon \int_0^a x^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \neq 0$$

olduğundan $L_p(\Omega)$ uzayı refleksif uzay değildir.

Teorem 3.11 $1 < p < \infty$ olmak üzere;

$L_p(0,1)$ uzayı ayrılabilir uzay değildir.

İspat. $\alpha \in [0;1)$ olmak üzere;

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \alpha, \\ (t-\alpha)^{-\frac{1}{p}}, & \alpha < t \leq 1, \end{cases} \quad \text{şeklinde bir fonksiyon ailesi alalım.}$$

$\{f_\alpha\} \subset L_p(0;1)$ olduğunu gösterelim.

$$\|f_\alpha\|_p = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_\alpha^1 (t-\alpha)^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} =$$

$$= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t-\alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} I_\alpha^1 \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t-\alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty$$

$\alpha, \beta \in (0; 1]$ ve $\alpha < \beta$ için

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha - f_\beta\|_{p)} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_\alpha^\beta (t - \alpha)^{-1 + \frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t - \alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} I_\alpha^\beta \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(\beta - \alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$L_p(0,1)$ uzayı ayrılabilir değildir.

Grand Lebesgue uzayı, ayrılabilir uzay olmadığından Korovkin tipli yaklaşım teorisi uygulanabileceği $G_p)$ alt uzayı oluşturuldu.

$\forall f \in L_p(-\pi, \pi)$ ve

$$T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x + \delta), & x + \delta \in [-\pi, \pi] \\ 0, & x + \delta \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi] \end{cases} \quad \text{shift operatörü olmak üzere;}$$

$$\widetilde{G_p)}(-\pi, \pi) : \{f \in L_p(-\pi, \pi) : \|T_\delta f(x) - f(x)\|_{p)} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0\}$$

$\widetilde{G_p)}(-\pi, \pi)$ uzayının kapanışı olan $\overline{\widetilde{G_p)}(-\pi, \pi)} = G_p(-\pi, \pi)$ uzayını ele alalım.

Tanım 3.5 ([54]) $1 < p < \infty$ olmak üzere;

$$G_p(a, b) = \left\{ f : f \in L_p : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b |f(t)|^{p-\varepsilon} dt = 0 \right\} \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

Lemma 3.2 $L_p(0; 1) \subset G_p(0, 1)$ ve $G_p(0; 1) \setminus L_p(0, 1) \neq \emptyset$ sağlanır[56].

İspat. $L_p(0; 1) \subset G_p(0; 1)$ olduğu açıktır. Bu kapsama

$$\|f\|_{G_p)} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{p-\varepsilon} \leq \|f\|_p \sup_{0 < \varepsilon < p-1} (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} 2^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \leq 2^{\frac{-1}{p}} (p-1) \|f\|_p$$

eşitsizliği ile gösterilebilir.

$G_p(0, 1) \setminus L_p(0, 1) \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Bunun için $G_p(0, 1)$ uzayında olup $L_p(0, 1)$ uzayında olmayan bir fonksiyon örneği vermek yeterlidir.

Bunun için

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & t \in [\exp\{-n^{2p}\}, 1] \\ 0, & t \notin [\exp\{-n^{2p}\}, 1]. \end{cases} \quad \text{fonksiyon dizisini ele alalım.}$$

Bu uzaylarda normlar sırasıyla;

$$\|f_n\|_{p)} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\alpha}^1 t^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p$$

$$\|f_n\|_p = \left(\int_{\exp\{-n^{2p}\}}^1 t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} = n^2$$

şeklindedir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n\|_{p)}}{n^2} \text{ serisi } L_{p)}(0,1) \text{ uzayında yakınsaktır.}$$

Bu serilerin toplamı $f(t)$ olsun. $f \in G_{p)}(0,1)$ olduğu açıktır.

$f \notin L_p(0;1)$ olduğunu gösterelim.

$$S_m(t) = \sum_{n=1}^m \frac{f_n(t)}{n^2} \text{ kısmi toplamlar dizisini ele alalım.}$$

Bu serilerin toplamı $f(t)$ olsun. $f \in G_{p)}(0;1)$ olduğu açıktır .

$$m \rightarrow \infty, \quad S_m \rightarrow f \quad \text{ve} \quad f \in L_{p-\varepsilon}(0,1)$$

S_m monoton azalmayan bir dizi olduğundan $m \rightarrow \infty$ iken hemen hemen her yerde S_m

$\rightarrow f$ yakınsaktır. Buradan $|S_m|^p \rightarrow |f|^p$ elde edilir. (hhy)

Levi teoreminden

$$\int_0^1 |S_m(t)|^p dt \rightarrow \int_0^1 |f(t)|^p dt, \quad m \rightarrow \infty.$$

Buradan

$$\int_0^1 |S_m(t)|^p dt = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^m \frac{f_n(t)}{n^2} \right|^p dt \geq \sum_{n=1}^m \frac{\int_0^1 |f_n(t)|^p dt}{n^{2p}} = \sum_{n=1}^m \frac{n^{2p}}{n^{2p}} = m \text{ elde edilir.}$$

$$\int_0^1 |S_m(t)|^p dt \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty$$

Sonuç olarak

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt = \infty \quad \text{olduğundan lemma ispatlanmıştır.}$$

3.4 $G_p(-\pi, \pi)$ Uzayında Korovkin Tipli Teoremler

Bu bölümde grand Lebesgue uzayının bir alt uzayı olan $G_p(-\pi, \pi)$ uzayı üzerinde Korovkin teoremleri incelenecektir.

Lemma 3.3 $C_0^\infty(-\pi, \pi)$ uzayı, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğundur.

İspat. Keyfi $\eta > 0$ ve $f \in G_p(-\pi, \pi)$

$$\omega_\eta(t) = \begin{cases} c_\eta \exp\left(-\frac{\eta^2}{\eta^2 - t^2}\right), & |t| \leq \eta \\ 0, & |t| > \eta \end{cases},$$

c_η sabit ve $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(t) dt = 1$. $f_\eta(\cdot)$ fonksiyonunu $\omega_\eta(\cdot)$ ile f fonksiyonunun konvolüsyonu

olarak tanımlayalım.,

$$f_\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) \omega_\eta(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(t-s) f(s) ds.$$

$$L_p(-\pi, \pi) \subset L_1(-\pi, \pi)$$

$f_\eta(t)$ sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

Minkowski eşitsizliğinden,

$$\|f - f_\eta\|_p = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot) \omega_\eta(s) ds - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot - s) \omega_\eta(s) ds \right\|_p = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\cdot - s) - f(\cdot)] \omega_\eta(s) ds \right\|_p =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t-s) - f(t)] \omega_{\eta}(s) ds \right|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\eta}(s) \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} ds \leq \\
&\leq (p-1) \sup_{|s| \leq \eta} \|f(\cdot - s) - f(\cdot)\|_{p)} \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0. \text{ elde ederiz.}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $C^{\infty}[-\pi; \pi]$ uzayı $G_{p)}(-\pi, \pi)$ uzayında yoğundur.

Buradan keyfi $\eta > 0$ ve için $G_{p)}(-\pi, \pi)$, t $g \in C^{\infty}[-\pi; \pi]$

$$\|f - g\|_{p)} < \frac{\eta}{3}. \quad (3.1)$$

$$\delta > 0, \quad \delta < \pi \left(\frac{\eta}{3(p-1)\|g\|_{\infty}} \right)^p \text{ seçelim.} \quad E_{\delta}^{+} = (\pi - \delta, \pi) \text{ ve} \quad E_{\delta}^{-} = (-\pi; -\pi + \delta)$$

aralıklarının uzunluğu δ olmak üzere,

$$g_{\delta}(t) = \begin{cases} g(t), & t \in (-\pi; \pi) \setminus (E_{\delta}^{+} \cup E_{\delta}^{-}), \\ 0, & t \in E_{\delta}^{+} \cup E_{\delta}^{-}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\|g - g_{\delta}\|_{p)} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{E_{\delta}^{+} \cup E_{\delta}^{-}} |g(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \\
&\leq \|g\|_{\infty} \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} 2\delta \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\|g\|_{\infty} e_p \delta^{\frac{1}{p}}}{\pi^{\frac{1}{p}}} < \frac{\eta}{3} \text{ sağlanır.} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Açıkça görülebilir ki,

$$g_{\delta, \tau}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\delta}(t-s) \omega_{\tau}(s) ds, \quad \tau \in R \text{ ve}$$

$$\tau < \frac{\delta}{2} \text{ iken} \quad g_{\delta, \tau} \in C_0^{\infty}[-\pi; \pi]. \text{ ve } \|g_{\delta} - g_{\delta, \tau}\|_{p)} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0,$$

$$\|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_p < \frac{\eta}{3} \quad (3.3)$$

Sonuç olarak (3.1), (3.2) ve (3.3) kullanarak,

$$\|f - g_{\delta,\tau}\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\delta\|_p + \|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_p < \frac{\tau}{3} + \frac{\tau}{3} + \frac{\tau}{3} = \tau$$

$C_0^\infty[-\pi; \pi]$ uzayı, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğundur.

Aşağıdaki teorem Korovkin teoreminin grand Lebesgue uzayındaki versiyonudur.

Teorem.3.12 $1 < p < \infty$, $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $G_p(0,1)$ uzayında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n g - g\|_\infty = 0 \quad \forall g \in \{1, t, t^2\}$$

şartlarını sağlayan pozitif lineer sınırlı operatör dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0 \quad \forall f \in G_p(0,1)$$

ancak ve ancak $\sup_n \|L_n\| = c < +\infty$ gerçekleşir.

İspat. Gerekliklik, Banach-Steinhaus teoreminden açıkça görülür.

Yeterlilik:

Keyfi $\eta > 0$ ve $f \in G_p(0,1)$ olmak üzere;

Lemma 3.3 den

$$\|f - g\|_p < \eta$$

(3.4)

olacak şekilde bir $g \in C[0;1]$ vardır.

Teorem 3.1 den

$\forall n > n_\tau$ için

$$\|L_n g - g\|_\infty < \eta \quad (3.5)$$

olacak şekilde $n_\tau \in \mathbb{N}$ vardır.

$\forall f \in C([0;1])$ için

$$\|f\|_p = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_\infty = (p-1) \|f\|_\infty. \quad (3.6)$$

Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\|L_n f - f\|_p \leq \|L_n f - L_n g\|_p + \|L_n g - g\|_p + \|f - g\|_p \text{ elde edilir. Ayrıca}$$

(3.4), (3.5) ve (3.6) kullanılarak

$\forall n > n_\tau$ için

$$\|L_n f - f\|_p < c \|f - g\|_p + (p-1) \|L_n g - g\|_\infty + \|f - g\|_p < (c+p)\eta \text{ elde edilir.}$$

Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0 \text{ elde edilerek ispat tamamlanır.}$$

Teorem 3.13 $1 < p < +\infty$, $G_p(0,1)$ uzayında $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif lineer sınırlı operatör

$$\sup_n \|L_n\| = c < +\infty \text{ olmak üzere;}$$

$C[0,1]$ uzayında $\forall g \in \{1, t, t^2\}$ için $st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n g = g$ ise

$$G_p(0,1) \text{ uzayında } \forall f \in G_p(0,1) \text{ için } st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n f = f$$

sağlanır.

İspat. $st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n g_i = g_i$, $g_i(t) = t^i \quad \forall i \in \{0,1,2\}$ ve Sonuç 3.1 den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} g_i - g_i\|_\infty = 0 \quad i = 0,1,2$$

$(n_1^{(i)} < n_2^{(i)} < \dots < n_k^{(i)} < \dots)$ olacak şekilde $\{n_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}} \in K$ vardır.

$$\{n_k\} = \bigcap_{i=0,1,2} \{n_k^{(i)}\} \text{ ve } (n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots) \text{ alınırsa}$$

Lemma 3.1 den $\delta(\{n_k\})=1$ ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} g_i - g_i\|_\infty = 0, \quad \forall i \in \{0,1,2\} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.12 den $\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} f - f\|_p = 0, \quad \forall f \in G_p(0,1) \text{ elde edilir.}$

Sonuç olarak Teorem 3.3 den

$$\text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n f = f, \quad \forall f \in G_p(0,1) \text{ elde edilir.}$$

$\forall f \in G_p(0,1)$ $\{L_n f\}_{n \in \mathbb{N}}$ operatör dizisi, f fonksiyonuna istatistiksel yakınsar.

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Bu sonuç Kantoroviç polinomları içinde genelleştirilebilir.

Teorem 3.14

$$K_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left((n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{Kantoroviç polinomu olmak üzere,}$$

$$1 < p < +\infty. \quad \forall f \in G_p(0,1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n f - f\|_p = 0 \text{ sağlanır.}$$

İspat. K_n pozitif lineer operatör dizisi $L_p(0,1)$ sınırlıdır ve $\|K_n\| \leq 1$ [49]

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall f \in G_p(0,1)$ için

$$\|K_n f\|_p = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |(K_n f)(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|K_n f\|_{p-\varepsilon} \leq \|f\|_p$$

$\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $G_p(0,1)$ düzgün sınırlıdır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n g - g\|_\infty = 0, \quad \forall g \in \{1, t, t^2\},$$

Teorem 3.2'den $\forall f \in G_p(0,1)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n f - f\|_p = 0$, sağlanır.

Sonuç 3.2 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Kantoroviç polinomları olmak üzere,

$$\forall f \in G_p(0,1). \text{ için } \text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} K_n f = f \text{ sağlanır.}$$

$G_p(0,1)$ uzayında Korovkin 2 teoremini inceleyelim.

Teorem 3.15 $1 < p < \infty$, $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n g - g\|_\infty = 0 \quad \forall g \in \{1, \sin x, \cos x\}$$

koşulunu sağlayan lineer operatör dizisi olsun.

$$\forall f \in G_p(-\pi, \pi) \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0, \Leftrightarrow \sup_n \|L_n\| = c < +\infty$$

sağlanır.

İspat. Gereklik kısmı Banach-Steinhaus teoreminden açıktır

Yeterlilik kısmını ispatlayalım

$C_{2\pi}(R)$, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğun olduğundan,

Keyfi $\eta > 0$ ve $f \in G_p(-\pi, \pi)$ için

$$(3.7) \quad \|f - g\|_p < \eta$$

olacak şekilde $g \in C_{2\pi}(R)$ vardır.

Teorem 3.1 den

$\exists n_\eta$ için $\forall n > n_\tau$ için

(3.8)

elde edilir.

$$\|f\|_p = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_\infty = (p-1) \|f\|_\infty \quad (3.9)$$

Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\|L_n f - f\|_p \leq \|L_n f - L_n g\|_p + \|L_n g - g\|_p + \|f - g\|_p.$$

(3.7), (3.8) ve (3.9) kullanılarak $\forall n > n_\tau$ için

$$\|L_n f - f\|_p \leq c \|f - g\|_p + (p-1) \|L_n g - g\|_\infty + \|f - g\|_p < (c+p)\tau$$

Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0 \quad \forall f \in G_p(-\pi, \pi)$$

sonucuna ulaşarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.16 $L_n: C_{2\pi}(R) \rightarrow C_{2\pi}(R)$

$\{L_n\}_{n \in N}$, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında pozitif lineer operatör dizisi $\sup_n \|L_n\| = c < +\infty$ şartını sağlasın.

$$\begin{aligned} C(-\pi, \pi) \text{ uzayında} \quad \forall g \in \{1, \sin, \cos\} \text{ için} \quad \text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n g = g, \text{ ise} \\ \forall f \in G_p(-\pi, \pi) \text{ için} \quad \text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n f = f, \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat. $\forall g \in \{1, t, t^2\}$ için $\text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n g = g$, sağlansın.

Sonuç 3.1 ve Lemma 3.1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} g - g\|_\infty = 0, \forall g \in \{1, \sin x, \cos x\} \text{ olacak şekilde}$$

$\{n_k\}_{k \in N} \in K$ ve $(n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots)$ vardır.

Teorem 3.4 ten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} f - f\|_p = 0, \quad \forall f \in G_p(-\pi, \pi) \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3,3 gereğince $\{L_n f\}_{n \in N}$ dizisi $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında f fonksiyonuna istatistiksel yakınsaktır.

3.5 Konvolüsyon Tipli İntegral Operatörler için Korovkin Teoremi

Bu bölümde grand Lebesgue uzayında konvolüsyon tipli integral operatör dizileri için Korovkin teoremine denk koşullar incelenecektir.

Tanım 3.5

$\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ dizisi

i. $\varphi_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (hemen hemen her yerde)

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt = 1$

şartlarını sağlıyorsa $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine pozitif periyodik çekirdek denir.

Tanım 3.6

Her pozitif periyodik çekirdek $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ yardımıyla

$$\begin{aligned} L_n(f)(x) &= (f * \varphi_n)(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \varphi_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \varphi_n(x-t) dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

Konvolüsyon tipli integral operatörler oluşturulabilir.

$1 < p < \infty$ için $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}) \Rightarrow L_n(f) \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ olmak üzere,

Hölder eşitsizliğinden

$$\|L_n(f)\|_p \leq \|\varphi_n\|_1 \|f\|_p \quad f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

$$\|L_n(f)\|_{\infty} \leq \|\varphi_n\|_1 \|f\|_{\infty} \quad f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Tanım 3.7 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif periyodik çekirdeği

$\forall \delta \in (0, \pi)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t) dt \right] = 0$$

sağlanıyorsa özdeşlik(birimsel) yaklaşım olarak adlandırılır.

Teorem 3.17 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ pozitif periyodik çekirdek $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (3.10) tanımlanan pozitif lineer operatör dizisi

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \sin^2 \frac{t}{2} dt$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. $1 \leq p < +\infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0 \quad \forall f \in \text{ için } L_{2\pi}(\mathbb{R})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{\infty} = 0 \quad \forall f \in \text{ için } C_{2\pi}(\mathbb{R}) \quad \text{sağlanır.}$$

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$

iii. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ özdeşlik yaklaşımıdır.

Örnek 3.5

Pozitif lineer çekirdek

$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}}, & t \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ n+1, & t \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Fejer konvolüsyon operatörü

$$F_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \varphi_n(x-t) dt \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n f - f\|_p = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n f - f\|_{\infty} = 0 \quad \forall f \in \text{ için } C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2(n+1)}$$

iii. şart gereğince

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$$

olduğundan (i) ve (ii) sağlanır.

Örnek 3.6

Birim yuvar üzerinde tanımlı Abel Poisson çekirdeği

$$P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq r < 1$$

olmak üzere

Abel Poisson konvolüsyon operatörü

$$P_r f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(x-t) dt$$

olmak üzere

$$\beta_r = \frac{1-r}{2}$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \beta_r = 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|P_r f - f\|_p = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|P_r f - f\|_{\infty} = 0 \quad \forall f \in \text{ için } C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

sağlanır.

Teorem 3.17 'nin grand Lebesgue uzayları için analogu Teorem 3.18 'de verilmiştir.

Teorem3.18 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ pozitif periyodik çekirdek $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (3.10)

tanımlanan pozitif lineer operatör dizisi

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \sin^2 \frac{t}{2} dt$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. $1 \leq p < +\infty$ ve

$$\forall f \in G_p(-\pi, \pi) \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0 \quad (3.11)$$

$$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{\infty} = 0 \quad (3.12)$$

sağlanır.

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$

iii. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ özdeşlik yaklaşımıdır.

İspat.

Teoremin ispatı için $(i) \Leftrightarrow (ii)$ göstermemiz yeterlidir. (i) sağlansın.

$\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif çekirdeği sınırlı ve teorem (3.17) den $\|L_n\| \leq c$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı mevcuttur.

$C_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayı $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayında yoğun olduğundan ve eşitlik (3.12) den

$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak Teorem 3.17 'den (ii) ispatlanmış olur.

Tersine (ii) sağlansın.

Teorem 3.17 gereğince

$$\forall f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_p = 0$$

$$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{\infty} = 0$$

ve $\|L_n(f)\|_p \leq \|\varphi_n\|_1 \|f\|_p$ eşitsizliği kullanılarak

$\forall f \in G_p(-\pi, \pi)$ için

$$\|L_n(f)\|_p = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|L_n(f)\|_{p-\varepsilon} \leq \|\varphi_n\|_1 \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{p-\varepsilon} = \|\varphi_n\|_1 \|f\|_p$$

$C_{2\pi}(\mathbb{R})$ uzayı $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında yoğun olduğundan

$\forall f \in G_p(-\pi, \pi)$ ve $\forall \tau > 0$ için

$$\|f - g\|_p < \tau$$

(3.13)

olacak şekilde $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ vardır.

Teorem koşullarından $\forall n > n_\tau$ için

$$\|L_n g - g\|_\infty < \tau$$

(3.14)

olacak şekilde $n_\tau \in \mathbb{N}$ vardır.

$\sup_n \|\varphi_n\|_1 = c$ ve (3.13), (3.9) ve (3.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} \|L_n f - f\|_p &\leq \|L_n f - L_n g\|_p + \|L_n g - g\|_p + \|f - g\|_p \\ &< (c + 1) \tau + (p - 1) \tau = (c + p) \tau \end{aligned}$$

(3.11) bağıntısı sağlanır. Böylelikle (i) koşulu ispatlanır.

Bu teoremin Fourier ve Abel Poisson konvolüsyon operatörleri için uygulamaları mevcuttur.

Sonuç 3.3 $1 < p < +\infty$ için $F_n, G_p(-\pi, \pi)$ uzayında tanımlı Fejer konvolüsyon operatörü olmak üzere;

$$\forall f \in G_p(-\pi, \pi) \quad \text{ için } \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n f - f\|_p = 0$$

(3.15)

sağlanır.

İspat. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} , & t \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ n+1 , & t \neq 2\pi k, x \geq 0 \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2(n+1)}$$

olmak üzere Teorem 3.17 ve (3.15) bağıntısı sağlandığı için ispat tamamlanır..

Sonuç 3.4

$1 < p < +\infty$, $G_p(-\pi, \pi)$ uzayında

Abel Poisson çekirdeği

$$P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad t \in R, \quad 0 \leq r < 1$$

olmak üzere, Abel Poisson konvolüsyon operatörü

$$P_r f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(x - t) dt$$

$$\forall f \in G_p(-\pi, \pi) \quad \text{için} \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \|P_r f - f\|_p = 0 \quad \text{sağlanır.} \quad (3.16)$$

İspat.

$$P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad t \in R, \quad 0 \leq r < 1$$

$$\beta_r = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{1 - r}{2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \beta_r = 0 \quad \text{olmak üzere,}$$

Teorem 3.17 ve (3.16) bağıntısı sağlandığı için sonuç ispatlanmıştır.

AĞIRLIKLI GRAND LEBESGUE UZAYINDA KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM VE İSTATİSTİKSEL VERSİYONU

Bu bölümde belirli koşulları sağlayan ağırlık fonksiyonu ve grand Lebesgue uzayındaki norm yardımıyla tanımlanan Ağırlıklı grand Lebesgue uzayı tanıtılarak bu uzayda klasik ve istatistiksel Korovkin teoremleri incelenmiştir.

Tanım 4.1: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sonlu ölçülü küme,

$\rho : \Omega \rightarrow (0; \infty]$ olmak üzere, ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 4.2. $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu olmak üzere;

$L_{p,\rho}(\Omega) = \{f : \rho f \in L_p\}$ uzayına ağırlıklı Lebesgue uzayı denir.

Bu uzayda norm $\|f\|_{p,\rho} = \|\rho f\|_p$ şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde ağırlıklı grand Lebesgue uzayı,

$L_{p),\rho}(\Omega) = \{f : \rho f \in L_{p)}\}$ şeklinde tanımlanır ve

Bu uzayda norm

$$\|f\|_{p),\rho} = \|\rho f\|_{p)} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\alpha}^1 |(\rho f)(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

şeklindedir.

Lemma 4.1 $L_{p),\rho}(0,1)$ ağırlıklı grand Lebesgue uzayı ayrılabilir değildir.

İspat. $1 < p < \infty$ $L_{p)}(0,1)$ grand Lebesgue uzayı olmak üzere f fonksiyonu

(0,1) aralığında ölçülebilir fonksiyon,

$$\|f_\alpha\|_{p),\rho} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\alpha}^1 |(\rho f)(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$L_{p),\rho}(0,1)$ uzayı ayrılabilir olmayan tam normlu uzaydır.

Bunun için

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq \alpha \\ \rho^{-1}(t-\alpha)^{-\frac{1}{p}}, & \alpha < t \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha \in [0,1)$ $f_\alpha(t) \in L_{p),\rho}(0,1)$ şeklinde fonksiyon ailesini seçelim.

$$\begin{aligned} \|f_\alpha\|_{p),\rho} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\alpha}^1 \rho \rho^{-1} (t-\alpha)^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t-\alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} I_{\alpha}^1 \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(1-\alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \end{aligned}$$

Herhangi $\alpha, \beta \in [0,1)$ ve $\alpha < \beta$ için

$$\begin{aligned} \|f_\alpha - f_\beta\|_{p),\rho} &\geq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\alpha}^1 \rho \rho^{-1} (t-\alpha)^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t-\alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} I_{\alpha}^{\beta} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(\beta-\alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(p(\beta-\alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= p^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$L_{p),\rho}(0,1)$ uzayı ayrılabilir değildir.

$L_{p),\rho}(0,1)$ uzayının tamlığını gösterelim.

$\{f_n\} \subset L_{p),\rho}(0,1)$ için $\|f_n - f_m\|_{p),\rho} \rightarrow 0$ $m,n \rightarrow \infty$

$L_{p),\rho}(0,1)$ uzayının tam uzay olduğundan

$\{g_n\} \subset L_p(0,1)$ Cauchy dizisi için $\exists g \in L_p(0,1)$ vardırki $\|g_n - g\|_p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$
 $\forall \varepsilon \in (0, p-1)$ sağlanır.

$$g_n = \rho f_n \text{ için } \|g_n - g_m\|_p = \|f_n - f_m\|_{p,\rho} \rightarrow 0$$

$\|g_n - g\|_{p-\varepsilon} \rightarrow 0$ için $g_{n_k} \rightarrow g$ ve $f_{n_k} \rightarrow \rho^{-1}g$, $n \rightarrow \infty$ hemen hemen her yerde sağlanır.

$$\forall \delta > 0, \exists n_0: \forall m, n \geq n_0 \quad \|f_{n_k} - f_m\|_{p-\varepsilon, \rho} < \delta$$

Fatou lemma dan

$$\sup_{0 < \varepsilon < p-1} \|f_{n_k} - \rho^{-1}g\|_{p-\varepsilon, \rho} < \delta$$

Böylelikle

$$\|f_{n_k} - \rho^{-1}g\|_{p,\rho} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

$L_{p,\rho}(0,1)$ uzayı tam normlu uzaydır.

Ağırlıklı grand Lebesgue uzayı ayrılabilir uzay olmadığından Korovkin tipli yaklaşım teorisi uygulanabileceği $G_{p,\rho}$ alt uzayı oluşturuldu.

$\forall f \in L_{p,\rho}(-\pi, \pi)$ ve $\forall \delta > 0$

$$T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x + \delta), & x + \delta \in [-\pi, \pi] \\ 0, & x + \delta \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi] \end{cases}$$

shift operatörü olmak üzere;

$$\widetilde{G_{p,\rho}}(-\pi, \pi) : \{f \in L_{p,\rho}(-\pi, \pi) : \|T_\delta f - f\|_{p,\rho} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0\}$$

$\widetilde{G_{p,\rho}}(-\pi, \pi)$ uzayının kapanışı olan $\overline{\widetilde{G_{p,\rho}}}(-\pi, \pi) = G_{p,\rho}(-\pi, \pi)$ uzayını ele alalım.

$G_{p,\rho}(0,1)$ uzayı $C_0^\infty(0,1)$ uzayının kapanışı ve aynı zamanda $L_{p,\rho}(0,1)$ uzayının bir alt uzayı olmak üzere; $G_{p,\rho}(0,1) : \{f : \rho f \in G_p(0,1)\}$ uzayını tanımladık.

Lemma 4.2

$L_{p,\rho}(0,1) \subset G_{p,\rho}(0,1)$ ve $G_{p,\rho}(0,1) \setminus L_{p,\rho}(0,1) \neq \emptyset$ olacak şekilde ayrık gömme mevcuttur.

İspat.

$L_{p,\rho}(0,1) \subset G_{p,\rho}(0,1)$ olduğu açıktır. Bu gömmenin sürekliliğinden

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\rho} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|\rho f\|_{p-\varepsilon} \leq \|\rho f\|_p \sup_{0 < \varepsilon < p-1} (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} 2^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \\ &\leq (p-1) 2^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{p,\rho} = c_p \|f\|_{p,\rho} \\ \|f\|_{p,\rho} &\leq c_p \|f\|_{p,\rho} \end{aligned}$$

elde edilir.

$G_{p,\rho}(0,1)/L_{p,\rho}(0,1) \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $G_{p,\rho}(0,1)$ olup $L_{p,\rho}(0,1)$ olmayan bir fonksiyon tanımlayalım.

$$f_n(t) = \begin{cases} \rho^{-1}(t)^{\frac{-1}{p}} & t \in [\exp\{-n^{2p}\}; 1] \\ 0 & t \notin [\exp\{-n^{2p}\}; 1] \end{cases}$$

fonksiyon dizisini ele alalım.

$\|f_n\|_{p,\rho}$ ve $\|f_n\|_{p,\rho}$ normları sırasıyla

$$\|f_n\|_{p,\rho} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\alpha}^1 \rho \rho^{-1} (t - \alpha)^{-1 + \frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p}} = p$$

$$\|f_n\|_{p,\rho} = \left(\int_{\exp(-n^{2p})}^1 t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} = n^2$$

elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n\|_{p,\rho}}{n^2}$ serisi $L_{p,\rho}(0,1)$ uzayında yakınsak olup $f(t)$ fonksiyonuna yakınsasın.

$f \in G_{p,\rho}(0,1)$ ve $f \notin L_{p,\rho}(0,1)$ olduğunu gösterelim.

$S_m(t) = \sum_{n=1}^m \frac{f_n(t)}{n^2}$ kısmi toplamlar dizisi olmak üzere;

$S_m \rightarrow f \in L_{p-\varepsilon,\rho}(0,1)$ $m \rightarrow \infty$ için

S_m azalmayan dizisi hemen hemen heryerde yakınsaktır.

$|S_m|^p \rightarrow |f|^p$ hemen hemen her yerde yakınsaktır.

Levi teoreminden

$$\int_0^1 |\rho S_m(t)|^p dt \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty$$

$$\int_0^1 |\rho S_m(t)|^p dt = \int_0^1 \left| \rho \sum_{n=1}^m \frac{f_n(t)}{n^2} \right|^p dt \geq \sum_{n=1}^m \frac{\int_0^1 |\rho f_n(t)|^p dt}{n^{2p}} = m \rho^p$$

Sonuç olarak

$$\int_0^1 |\rho f(t)|^p dt = \infty \quad m \rightarrow \infty$$

$f \notin L_{p),\rho}(0,1)$ elde edilir.

4.1 $G_{p),\rho}(0,1)$ Uzayında Korovkin Teoremleri

Lemma 4.1

$p_\varepsilon = p - \varepsilon$, $\frac{1}{p_\varepsilon} + \frac{1}{p_\varepsilon'} = 1$, $\sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\int_0^1 \rho^{-p_\varepsilon'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p_\varepsilon'}}$ olmak üzere;

$C_0^\infty[0;1]$ uzayı $G_{p),\rho}(0;1)$ uzayında yoğundur.

İspat. Keyfî $\tau > 0$ ve $f \in G_{p),\rho}(0;1)$ olmak üzere,

$$w_\tau(t) = \begin{cases} 0 & , \quad |t| > \tau \\ \rho^{-1} c_\tau \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau^2 - t^2}\right) & , \quad |t| \leq \tau \end{cases}$$

$$c_\tau \text{ sabiti, } \int_{-\infty}^{\infty} \rho w_\tau(t) dt = 1 \quad \text{olacak şekilde seçilsin}$$

$f_\tau(\cdot)$ Fonksiyonu $w_\tau(\cdot)$ ile f fonksiyonunun konvolüsyonu olarak tanımlansın.

$$f_{\tau}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) w_{\tau}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(t-s) f(s) ds$$

İlk olarak

$L_{p),\rho}(0;1) \subset L_1(0;1)$ olduğunu gösterelim.

$$p_{\varepsilon} = p - \varepsilon, \quad \frac{1}{p_{\varepsilon}} + \frac{1}{p_{\varepsilon}'} = 1,$$

Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 |(f\rho)(t)| |\rho^{-1}(t)| dt \\ &\leq \left(\int_0^1 |(f\rho)(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^1 |\rho(t)|^{-p_{\varepsilon}'} dt \right)^{\frac{1}{p_{\varepsilon}'}} \\ &\leq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\int_0^1 |(f\rho)(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^1 |\rho(t)|^{-p_{\varepsilon}'} dt \right)^{\frac{1}{p_{\varepsilon}'}} \\ &\quad \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\int_0^1 |\rho(t)|^{-p_{\varepsilon}'} dt \right)^{\frac{1}{p_{\varepsilon}'}} < +\infty \quad \text{kabulünden} \end{aligned}$$

$$\|f\|_1 \leq c \|f\|_{p),\rho}$$

$$L_{p),\rho}(0,1) \subset L_1(0,1)$$

elde edilir.

$f_{\tau}(t)$ sonsuz diferansiyelenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|f - f_{\tau}\|_{p),\rho} &= \|\rho(f - f_{\tau})\|_{p)} = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \rho f(\cdot) w_{\tau}(s) ds - \int_{-\infty}^{\infty} \rho f(\cdot - s) w_{\tau}(s) ds \right\|_{p)} \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} [f(\cdot - s) - f(\cdot)] \rho w_{\tau}(s) ds \right\|_{p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(\cdot - s) - f(\cdot)] \rho w_{\tau}(s) ds \right|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} ds \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \rho w_{\tau}(s) ds \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |[f(t-s) - f(t)]|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} ds \leq \\
&\leq (p-1) \sup_{|s| \leq \tau} \| [f(\cdot - s) - f(\cdot)] \|_p \rightarrow 0 \quad , \quad \tau \rightarrow 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $C^{\infty}[0; 1]$ uzayı $G_{p),\rho}(0; 1)$ uzayında yoğundur.

Keyfi $\tau > 0$, $\forall f \in G_{p),\rho}(0; 1)$, $g \in C^{\infty}[0; 1]$ için

$$\|f - g\|_{p),\rho} < \frac{\tau}{3} \quad (4.1)$$

$$\delta > 0 \quad , \quad \delta < \left(\frac{\tau}{3c_p \|g\|_{\infty}} \right)^p \quad , \quad c_p = p-1 \quad \text{seçelim.}$$

$E_{\delta}^{+} = (1 - \delta, 1)$ ve $E_{\delta}^{-} = (-\delta, \delta)$ olmak üzere;

$$g_{\delta}(t) = \begin{cases} \rho^{-1} g(t) & , \quad t \in (0,1) \setminus (E_{\delta}^{+} \cup E_{\delta}^{-}) \\ 0 & t \notin E_{\delta}^{+} \cup E_{\delta}^{-} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\|g\|_{p),\rho} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{E_{\delta}^{+} \cup E_{\delta}^{-}} |\rho g(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \|g\|_{\infty} \sup_{0 < \varepsilon < p-1} (\varepsilon 2\delta)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \|g\|_{\infty} c_p \delta^{\frac{1}{p}} < \frac{\tau}{3} \quad (4.2)
\end{aligned}$$

$$g_{\delta,\tau}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\delta}(t-s) \omega_{\tau}(s) ds \quad , \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Açıkça görülebilir ki

$$g_{\delta,\tau}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\delta}(t-s) \omega_{\tau}(s) ds \quad , \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

$\tau < \frac{\delta}{2}$ iken $g_{\delta,\tau} \in C_0^\infty[0;1]$ ve

$$\|g_\tau - g_{\delta,\tau}\|_{p),\rho} = \|\rho(g_\tau - g_{\delta,\tau})\|_p \quad \text{ve} \quad \|g_\tau - g_{\delta,\tau}\|_{p),\rho} \rightarrow 0 \quad , \quad \tau \rightarrow 0$$

$$\tau < \frac{\delta}{2} \text{ iken} \quad \|g_\tau - g_{\delta,\tau}\|_{p),\rho} < \frac{\tau}{3} \quad (4.3)$$

(4.1), (4.2) ve (4.3) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|f - g_{\delta,\tau}\|_{p),\rho} &\leq \|f - g\|_{p),\rho} + \|g - g_\delta\|_{p),\rho} + \|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_{p),\rho} < \\ &< \frac{\tau}{3} + \frac{\tau}{3} + \frac{\tau}{3} = \tau \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

$C_0^\infty[0;1]$ uzayı $G_{p),\rho}(0,1)$ uzayında yoğundur.

Teorem 4.1 $1 < p < \infty$, $\{L_n\}$, $G_{p),\rho}(0,1)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho L_n(\rho^{-1}g) - g\|_\infty = 0 \quad , \quad \forall g \in \{1, t, t^2\} \quad \text{sağlansın.}$$

$\forall f \in G_{p),\rho}(0,1)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{p),\rho} = 0 \Leftrightarrow \sup \|L_n(f)\|_{p),\rho} < c < \infty$$

İspat. Gerekliklik, Banach Steinhaus teoreminden sağlanır. Yeterlilik kısmını ispatlayalım.

Keyfi $\tau > 0$ sayısı ve $f \in G_{p),\rho}(0,1)$ için

$$\|f - g\|_{p),\rho} < \tau \text{ olacak şekilde } g \in C[0,1] \text{ vardır.} \quad (4.4)$$

$f \in G_{p),\rho}(0,1)$ $\rho f \in L_p(0;1)$ ve $\rho f = h \in G_{p),\rho}(0,1)$ için $f = \rho^{-1}h$ şeklinde ifade edilebilir.

$g \in C(0,1)$ için

$$\|L_n g - g\|_{p),\rho} = \|\rho L_n g - \rho g\|_p \leq \|\rho L_n g - \rho g\|_\infty$$

$\rho g = h \in L_p(0,1)$ ve $g = \rho^{-1}h$ olmak üzere,

$$\|L_n g - g\|_{p),\rho} = \|\rho L_n g - \rho g\|_p = \|\rho L_n(\rho^{-1}h) - h\|_p$$

$$\leq \| \rho L_n(\rho^{-1}h) - h \|_\infty < \tau$$

(4.5)

$\forall f \in C(0,1)$ için

$$\|f\|_{p,\rho} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |\rho f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|\rho f\|_\infty$$

$$\leq (p-1) \|\rho f\|_\infty \quad (4.6)$$

Üçgen eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \|L_n f - f\|_{p,\rho} &= \|\rho L_n f - \rho f\|_p \leq \|\rho L_n f - \rho L_n g\|_p + \|\rho L_n g - \rho g\|_p + \\ &\quad + \|\rho f - \rho g\|_p \\ &< \|L_n\|_{p,\rho} \|f - g\|_{p,\rho} + \|L_n g - g\|_{p,\rho} + \|f - g\|_{p,\rho} \end{aligned}$$

(4.4) , (4.5) ve (4.6) kullanılarak

$$\|L_n f - f\|_{p,\rho} \leq c \|f - g\|_{p,\rho} + (p-1)\tau + \tau = (c+p)\tau$$

Böylece $\|L_n f - f\|_{p,\rho} = 0$, $n \rightarrow \infty$ elde edilir.

Teorem 4.2 $1 < p < \infty$ $\{L_n\}$ $G_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ üzerinde pozitif lineer operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho L_n(\rho^{-1}g) - g\|_\infty = 0 \quad \forall g \in \{1, \sin x, \cos x\} \quad \text{sağlansın.}$$

$\forall f \in G_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{p,\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup \|L_n f\|_{p,\rho} < c < \infty$$

İspat. Gerekliklik, Banach Steinhaus teoreminden sağlanır. Yeterlilik için

keyfi $\tau > 0$ sayısı ve $f \in G_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ için

$$\|f - g\|_{p,\rho} < \tau \quad (4.7)$$

olacak şekilde $g \in C_{2\pi}(R)$ vardır.

Ayrıca $f \in G_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ için $\rho f \in L_p(-\pi,\pi)$ ve $\rho f = h \in L_p(-\pi,\pi)$ için

$f = \rho^{-1}h$ şeklinde ifade edilebilir.

$$g \in C_{2\pi}(R) \text{ için } \|L_n g - g\|_{p,\rho} = \|\rho(L_n g - g)\|_{p,\rho} \leq \|\rho(L_n g - g)\|_\infty$$

$$\rho g = h \in L_p(0,1) \text{ ve } g = \rho^{-1} h \text{ şeklinde ifade edilirse,}$$

$$\begin{aligned} \|L_n g - g\|_{p,\rho} &= \|\rho(L_n g - g)\|_{p,\rho} \leq \|\rho(L_n(\rho^{-1} h) - h)\|_p < \tau \\ &\leq \|\rho(L_n h - g h)\|_\infty < c < \infty \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\forall f \in C_{2\pi}(R) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\rho} = \|g f\|_p &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |(\rho f(t))|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|\rho f\|_\infty \\ &\leq (p-1) \|\rho f\|_\infty \end{aligned} \quad (4.9)$$

Üçgen eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \|L_n f - f\|_{p,\rho} &= \|\rho(L_n f - \rho f)\|_{p,\rho} \leq \|\rho L_n f - \rho L_n g\|_p + \|\rho L_n g - \rho g\|_p + \|\rho f - \rho g\|_p \\ &< \|L_n\|_{p,\rho} \|f - g\|_{p,\rho} + \|L_n g - g\|_{p,\rho} + \|f - g\|_{p,\rho} \end{aligned}$$

(4.7), (4.8) ve (4.9) kullanılarak

$$\|L_n f - f\|_{p,\rho} \leq c \|f - g\|_{p,\rho} + (p-1)\tau = (c+p)\tau \text{ elde edilir.}$$

Böylece

$$n \rightarrow \infty \text{ için } \|L_n f - f\|_{p,\rho} = 0 \text{ sağlanır.}$$

4.2. $G_{p),\rho}(0,1)$ Uzayında İstatistiksel Korovkin Tipli Teoremler

Ağırlıklı grand Lebesgue uzayında istatistiksel Korovkin tipli Korovkin tipli teoremi oluşturulur.

Teorem 4.3 $1 < p < +\infty$ $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $G_{p),\rho}(0,1)$ üzerinde pozitif lineer operatör dizisi,

$$\forall f \in \text{ için } G_{p),\rho}(0,1) \quad \sup \|L_n f\|_{p),\rho} < c < \infty \quad \text{verilsin.}$$

$$\forall g \in \{1, t, t^2\} \quad \text{ için } \quad \text{st-} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho L_n(\rho^{-1} g) - g\|_{\infty} = 0 \quad \text{sağlanması}$$

durumunda

$$\forall f \in G_{p),\rho}(0,1) \quad \text{ için } \quad \text{st-} \lim_{n \rightarrow \infty} L_n f = f \quad \text{sağlanır.}$$

İspat.

$$\text{st-} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho L_n(\rho^{-1} g) - g\|_{\infty} = 0 \quad g_i(t) = t^i \quad i=0,1,2 \quad \text{kabul edelim.}$$

Sonuç 3.1 den

$$\exists \{n_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \left(n_1^{(i)} < n_2^{(i)} < \dots < n_k^{(i)} \right) \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho L_{n_k^{(i)}}(\rho^{-1} g_i) - g_i\|_{\infty} = 0 \quad i=0,1,2$$

$$\{n_k\} = \bigcap_{i=0,1,2} \{n_k^{(i)}\}, \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots)$$

şeklinde alınırsa Lemma 4.1 gereğince $\{\delta\{n_k\}\} = 1$ olur ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho L_{n_k}(\rho^{-1} g_i) - g_i\|_{\infty} = 0 \quad \text{olduğu açıktır.}$$

$$\rho^{-1} g_i = f \Rightarrow g_i = \rho f$$

Teorem 4.2 den

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} f - f\|_{p),\rho} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho L_{n_k} f - \rho f\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho L_{n_k}(\rho^{-1} g) - g\|_p \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho L_{n_k}(\rho^{-1} g) - g\|_{\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\forall f \in G_{p),\rho}(0,1) \quad \text{elde edilir.}$$

Sonuç olarak Teorem 3.13'den

$\forall f \in G_{p),\rho}(0,1)$ için $\{L_n f\}_{n \in \mathbb{N}}$ $G_{p),\rho}(0,1)$ uzayında istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.4

$1 < p < \infty$ $\{L_n\}$ $G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizisi

$L_n: C_{2\pi}(R) \rightarrow C_{2\pi}(R)$, $\sup \|L_n f\|_{p),\rho} < c < \infty$ verilsin.

$\forall g \in \{1, \sin x, \cos x\}$ için $\exists \text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho L_n(\rho^{-1}g) - g\|_\infty = 0$ ve

$\forall f \in G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ için $\exists \text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} L_n f = f$ sağlanır.

İspat. Teorem 4.2'den $\forall g \in \{1, t, t^2\}$ için $\exists \text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho L_n(\rho^{-1}g) - g\|_\infty = 0$

Sonuç 3.1 ve lemma 3.1'den $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in K$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots$)

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho L_{n_k}(\rho^{-1}g_i) - g_i\|_\infty = 0$, $\forall g \in \{1, \sin x, \cos x\}$ için sağlanır.

Sonuç olarak Teorem 3.4'ten

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} f - f\|_{p),\rho} = 0$, $\forall f \in G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ sağlanır.

Böylece Teorem 3.3 yardımıyla $\forall f \in G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ için $\{L_n f\}_{n \in \mathbb{N}}$ için $G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ istatistiksel yakınsaktır.

FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL SÜREKLİLİK

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık temelli oluşturulan istatistiksel limit, istatistiksel süreklilik ve istatistiksel süreksizlik tanımları verilerek bu tanıma göre oluşturulmuş bazı fonksiyon uzaylarının özellikleri ve diğer fonksiyon uzayları ile olan ilişkileri incelenecektir.

5.1 μ -İstatistiksel Süreklilik

Tanım 5.1 (x_k) reel ya da kompleks terimli dizi olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$ olacak biçimde L sayısı varsa

$x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

s -lim $x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(s)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5.1

$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m=1,2,\dots$ dizisini ele alalım. Bu dizinin istatistiksel yakınsaklık durumunu inceleyelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: |x_k| \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Buradan $\{k \in N: |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ kümesinin elemanları hariç bütün k ' lar için

$|x_k| \leq \varepsilon$ olduğundan $x_k \rightarrow 0(s)$ olur.

Örnek 5.2

$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 2, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m=1,2,\dots$ dizisini ele alalım. Bu dizinin istatistiksel yakınsaklık durumunu inceleyelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n: |x_k - 2| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: |x_k| \neq 2\}| \leq \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 2\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Buradan $x = (x_k)$ dizisi $s\text{-}\lim x_k = 2$ elde edilir.

Her yakınsak dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Tersine her zaman doğru değildir. İraksak ya da sınırsız iraksak diziler istatistiksel yakınsak olabilir. Örnek 5.2 sınırlı olmayan istatistiksel yakınsak diziye örnektir.

Dizilerdeki istatistiksel yakınsaklık kavramından yola çıkılarak fonksiyonlar istatistiksel limit kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 5.2 $(I_a^\infty, \mathcal{B}, \mu)$ ölçülebilir uzay $I_a^\infty: [a, \infty)$ olmak üzere,

$M \subset \mathcal{B}$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|M \cap I_a^x|}{|M|} = 1 \text{ ise } M \text{ kümesi } \infty \text{ da yoğunudur denir.}$$

Tanım 5.3 $(I_a^\infty, \mathcal{B}, \mu)$ ölçülebilir uzay, $I: [a, +\infty]$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun.

$A_\varepsilon^f = \{x: |f(x) - A| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|A_\varepsilon^f \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = 0$$

f fonksiyonunun sonsuzda istatistiksel limiti A 'dır denir ve $\mu\text{-st}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ olarak gösterilir.

Bunun yanı sıra,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|(A_\varepsilon^f)^c \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = 1$$

ifadesi de istatistiksel limit tanımı olarak kullanılabilir.

Örnek 5.3 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ mevcut değildir.

$A_\varepsilon^f: \{x: |f(x) - 0| \geq \varepsilon\} = \mathbb{Q}$ ve $|\mathbb{Q}| = 0$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|A_\varepsilon^f \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = \frac{0}{x - a} = 0 \text{ elde edilir.}$$

$\mu\text{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ olur.

Örnek 5.4 $I_a^\infty = [1, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1, & x \in [1, \infty) \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

f fonksiyonunun klasik anlamda ∞ da limiti yoktur.

İstatistiksel limiti iki farklı tanımla inceleyelim.

1. Tanım gereğince,

$A_\varepsilon(f) = \{x: |f(x) - A| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere ,

$$\mu\text{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|A_\varepsilon(f) \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = 0$$

$$x \rightarrow \infty \text{ için } \frac{1}{x} + 1 \rightarrow 1$$

$A=1$ ve $A_\varepsilon(f) = \{x: |f(x) - 1| \geq \varepsilon\}$ için $x \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$

ve $|[1, \infty) \cap \mathbb{Q}| = 0$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|A_\varepsilon(f) \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{x - 1} = 0$$

$\mu\text{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ elde edilir.

2. Tanım gereğince,

$\forall \varepsilon > 0$ için $M_\varepsilon = \{x: |f(x) - 1| < \varepsilon\}$ olmak üzere ,

$$\left\{x: \frac{1}{|x|} < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \setminus \mathbb{Q}$$

$$\frac{|M_\varepsilon \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = \frac{\left|\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \setminus \mathbb{Q}\right|}{|x - a|} \text{ için}$$

$$\frac{|M_\varepsilon \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = \frac{\left| \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty \right) \setminus \mathbb{Q} \right|}{|x - a|}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|M_\varepsilon \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty \right) \setminus \mathbb{Q} \right|}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{\varepsilon}}{x - a} = 1$$

μ -st $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ elde edilir.

Tanım 5.4 $f : I_a^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon ,

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in I_a^\infty$ ve $X_\varepsilon(f) = \{x : |f(x) - f(x_\varepsilon)| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|X_\varepsilon(f) \cap I_a^x|}{|I_a^x|} = 0 \quad \text{ise } f \text{ fonksiyonu } \infty \text{ da } \mu - \text{st esas denir.}$$

Benzer bir yaklaşımla bir noktadaki istatistiksel limit kavramını oluşturalım.

Tanım 5.5 $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}$ nin Borel alt kümelerinin bir sınıfı ve $(\mathbb{R}; \mathcal{B}; \mu)$ σ cebiri ile ölçülebilir uzay , $E \in \mathcal{B}$, $x_0 \in E$ kümesinin bir limit noktası olsun.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon

$$E(x_0) = \left\{ x : \left(x_0 + \frac{1}{x} \right) \in E \right\} \text{ ve}$$

$$I_t(x_0) = \begin{cases} I_a^{(t-x_0)^{-1}} & (t-x_0)^{-1} \geq a \\ I_{(t-x_0)^{-1}}^a & (t-x_0)^{-1} < a \end{cases}$$

$A_\varepsilon^f(x_0) = \{x \in E(x_0) : |f(x_0 + x^{-1}) - A| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere,

$$\lim_{t \rightarrow x_0^-} \frac{|A_\varepsilon^f(x_0) \cap I_t(x_0)|}{|I_t(x_0)|} = 0 \quad \text{ise, } \forall \varepsilon > 0$$

f fonksiyonunun x_0 noktasındaki istatistiksel sol limiti A sayısına eşittir denir ve

μ -st $\lim_{t \rightarrow x_0^-} f(x) = \mu$ -st $f(x_0^-) = A$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde x_0 noktasındaki istatistiksel sağdan limit,

$$\lim_{t \rightarrow x_0^+} \frac{|A_\varepsilon^f(x_0) \cap I_t(x_0)|}{|I_t(x_0)|} = 0 \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

$\mu\text{-st } \lim_{t \rightarrow x_0^+} f(x) = \mu\text{-st } f(x_0^+) = A$ şeklinde gösterilir.

$\mu\text{-st } \lim_{t \rightarrow x_0^+} f(x) = \mu\text{-st } \lim_{t \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise ,

f fonksiyonu x_0 noktasında μ istatistiksel süreklidir denir.

Örnek 5.5 $I_{10}^x = [10, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ noktasında sağdan limitini inceleyelim.

Klasik anlamda $x=0$ noktasında sağdan limit mevcut değildir.

İstatistiksel limiti inceleyelim.

$E=(0,1)$ alalım.

$$E^+(x_0) = E^+(0)$$

$$E(x_0) = \left\{ x: x_0 + \frac{1}{x} \in E \right\} = \left\{ x \in I_{10}^\infty: \frac{1}{x} \in E \right\}$$

$$\left\{ x > 10 \wedge 0 < \frac{1}{x} < 1 \right\}$$

$$M_\varepsilon = \left\{ x: \left| f\left(x_0 + \frac{1}{x}\right) - A \right| < \varepsilon \right\} \Leftrightarrow \left\{ x > 10 \wedge \frac{1}{x} < 1 \right\}$$

$$c = \max\left\{10, \frac{1}{\varepsilon}\right\} \quad \text{ve } x > c \quad \text{için}$$

$$\forall t > c$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|M_\varepsilon \cap I_a^t|}{|I_a^t|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t - c}{t - a} = 1$$

$\mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ elde edilir .

Örnek 5.6

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \\ 1-x, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in (-1,0) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $x=0$ noktasında klasik anlamda limitler incelenirse,

$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ olmasına karşın $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x)$ mevcut değildir.

$x=0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu sürekli değildir. $x=0$ noktasında

$\mu\text{-st} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x) = \mu\text{-st} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu istatistiksel

sürekli değildir.

5.2 μ -İstatistiksel Süreksizlik

Klasik anlamda süreksizlik kavramı istatistiksel anlamda tanımlanarak kategorilere ayrılmıştır.

Süreksizlik durumlarının tanımlarını vererek örneklendirelim.

I. Kaldırılabilir İstatistiksel Süreksizlik

$\mu\text{-st} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \mu\text{-st} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ oluyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında kaldırılabilir istatistiksel süreksizliğine sahiptir.

Örnek 5.7

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in (1,2) \setminus \mathbb{Q} \\ 1-x & x \in (0,1) \\ x & x \in (1,2) \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=1$ noktasında istatistiksel limitlerini inceleyelim.

$$E(x_0) = \left\{ x: x_0 + \frac{1}{x} \in E \right\}$$

$$x_0 = 1 \text{ için } 1 + \frac{1}{x} \in (1,2)$$

$$1 < \frac{1}{x} + 1 < 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1, \quad E(1) = (1, \infty) \quad \text{ve}$$

$$A_\varepsilon^f(1) = \{x \in E(1) : |f(1 + x^{-1}) - 0| \geq \varepsilon\} =$$

$$\{x \in E(1) : |f(1 + x^{-1})| \geq \varepsilon\} = \left\{x \in E(1) : \left|\frac{1}{x}\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$= \left\{x \in E(1) : |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

$$(1, \infty) \cap A_\varepsilon^f(1) = \left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Buradan

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|A_\varepsilon^f(x_0) \cap I_t(x_0)|}{|I_t(x_0)|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left|\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right)\right|}{|(1, \infty)|} = 0$$

μ -st $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ elde edilir.

$x=1$ noktasında istatistiksel sol limiti inceleyelim.

$$E(x_0) = (0, 1)$$

$$E(x_0) = \left\{x : x_0 + \frac{1}{x} \in E\right\}$$

$$x_0 = 1 \text{ için } 1 + \frac{1}{x} \in (0, 1)$$

$$0 < \frac{1}{x} + 1 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x} < 0 \quad \text{ için } \quad E(x_0) = (-1, \infty) \quad \text{elde edilir.}$$

$$A_\varepsilon^f(1) = \{x \in E(1) : |f(1 + x^{-1}) - 0| \geq \varepsilon\} =$$

$$\{x \in E(1) : |f(1 + x^{-1})| \geq \varepsilon\} = \left\{x \in E(1) : \left|\frac{1}{x}\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$A_\varepsilon^f(1) = \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$A_\varepsilon^f(1) \cap I_t(1) = \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right) \cap (-\infty, -1) = \left(-1, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|A_\varepsilon^f(1) \cap I_t(1)|}{|I_t(1)|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\left|\left(-1, \frac{1}{\varepsilon}\right)\right|}{|(1, \infty)|} = 0$$

μ -st $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ elde edilir.

$\mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq f(1) = 1$ olduğundan

$x=1$ noktasında Kaldırılabilir istatistiksel süreksizlik mevcuttur

II. 1. çeşit İstatistiksel Süreksizlik

f fonksiyonunun , x_0 noktasında sağdan ve soldan limitleri mevcut ve birbirinden farklı ise ,

$$\mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

f fonksiyonu x_0 noktasında 1.çeşit istatistiksel süreksizliğe sahiptir.

$\Delta_f^{st}(x_0) = \mu\text{-st } \lim_{t \rightarrow x_0^+} f(t) - \mu\text{-st } \lim_{t \rightarrow x_0^-} f(t)$ değerine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki μ -st sıçrama değeri denir.

Örnek 5.7

$(\mathbb{R}; \mathcal{B}; \mu)$ ölçülebilir uzay ,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{sgn} x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$x_0 = 0$ noktasında 1. çeşit μ istatistiksel süreksizlik noktasıdır.

$$\mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ ve } \mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \text{ ve}$$

$$\Delta_f^{st}(0) = \mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \mu\text{-st } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \text{ olmak üzere,}$$

$x_0 = 0$ noktasında dışındaki tüm noktalar μ -st süreklilik noktalarıdır.

III. 2. çeşit İstatistiksel Süreksizlik

f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan veya soldan limitlerinden herhangi birinin olmaması durumudur. Bu duruma x_0 noktasına f fonksiyonunun 2.çeşit istatistiksel süreksizlik noktası denir.

Örnek 5.8

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Q} \\ \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty) \\ \cos x, & x \in (-\infty, 0] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ noktasında

μ -st $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=0$ olmasına rağmen μ -st $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ mevcut değildir.

$x=0$ noktası $f(x)$ fonksiyonu için 2. çeşit istatistiksel süreksizlik noktasıdır.

Sonuç. $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b]$ aralığında sürekli ise, $[a, b]$ aralığında istatistiksel süreklidir fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

İstatistiksel süreklilik bağlamında fonksiyon uzayları tanımlanarak bazı fonksiyon uzayları ile istatistiksel süreklilik bağlamında karşılaştırılacaktır.

5.3 İstatistiksel Sürekli Fonksiyon Uzayları

Bu bölümde istatistiksel sürekli fonksiyon uzayı tanımlanarak ve bu uzay ile bazı fonksiyon uzayları arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 5.6 $C_{st}[a, b]$, $[a, b]$ aralığında istatistiksel sürekli fonksiyonlar uzayı olmak üzere

$C_{st}[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } \mu\text{-st sürekli } \forall x \in [a, b] \}$ şeklinde tanımlanır.

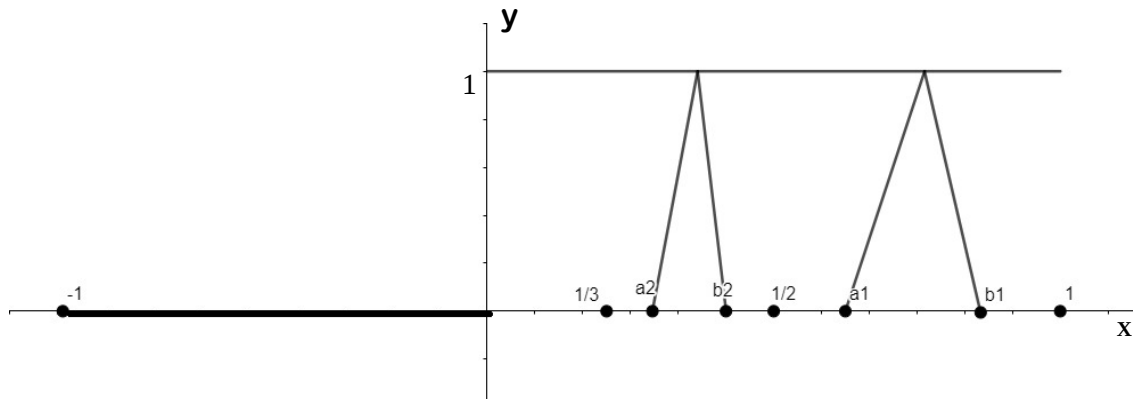
$C_{st}[a, b]$ K cismi üzerinde lineer uzaydır. ($K \equiv \mathbb{C}$ veya $K \equiv \mathbb{R}$)

Bu uzay ile bazı fonksiyonlar uzayı arasındaki ilişkileri inceleyelim.

Lemma 5.1 $C[a, b] \subset C_{st}[a, b]$ ve $C_{st}[a, b] \setminus C[a, b] \neq \emptyset$

İspat. $C[a, b] \subset C_{st}[a, b]$ açıktır.

$C_{st}[a, b] \setminus C[a, b] \neq \emptyset$ göstermek için bir örnek verelim.



Şekil. 5.1 $C_{st}(a, b) \setminus C(a, b)$ ait bir fonksiyon

f $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ serisinin kalan terimleri $\sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$ şeklinde tanımlansın.

$$\alpha_k > 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_n \leq \frac{1}{(n+1)^3} \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ şeklinde seçelim.}$$

$$i_n = (a_n, b_n) \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \text{ aralıklarının uzunlukları } \alpha_n$$

$$\text{ve } |i_n| = \mu(i_n) = \alpha_n, n \in \mathbb{N}$$

$$O_\delta(x) \equiv (x - \delta, x + \delta) \cap [-1, 1] \quad \text{ve}$$

$x_n, i_n = (a_n, b_n)$ aralıklarının orta noktası olsun,

$(1; 0), (b_1; 0), (x_1; 0), (a_1; 0), (b_2; 0)$ noktaları aralıklarla bağlantılı ve $x \in [-1, 0]$ için $f(x) = 0$ olmak üzere,

$x \in [0, 1]$ aralığında

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - b_n}{x_n - b_n}, & x \in [x_n, b_n] \\ \frac{x - a_n}{x_n - a_n}, & x \in [a_n, x_n] \\ 0, & x \notin [a_n, b_n] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$f(x) \notin C[-1, 1]$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında sağdan limiti yoktur.

$f(x) \in C_{st}[-1, 1]$ olduğunu gösterelim.

$f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktası dışında her noktada süreklidir ve aynı zamanda bu noktalarda $f(x)$ fonksiyonu da süreklilik tanımı gereğince istatistiksel süreklidir.

$f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında istatistiksel sürekli olduğunu gösterelim.

$x=0$ noktasında f fonksiyonunun sağdan ve soldan limitlerinin varlığını ve eşitliğini gösterelim.

İlk olarak soldan limiti için $t < 0$ ve $\forall \varepsilon > 0$ alalım.

$$\forall x \in I_t(0) \Rightarrow x < 0 \text{ için } f(x^{-1}) = 0 \Rightarrow |f(x^{-1}) - f(0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow A_{\varepsilon}^f(0) = \emptyset \text{ ve } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|A_{\varepsilon}^f(0) \cap I_t(0)|}{|I_t(0)|} = 0$$

$$\mu - \text{st} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \text{ elde edilir.}$$

İkinci olarak bu noktadaki sağdan limiti inceleyelim.

$t > 0$ olsun.

$$I_t(0) = (0, t^{-1}) \text{ ve } |I_t(0)| = t^{-1}$$

$$\text{Keyfi } \varepsilon > 0 \text{ için } E = [-1, 1] \text{ ve } E(0) = \{x : x^{-1} \in E\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$x > 0$ için

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon}^f(0) &= \{x \in E(0) : |f(x^{-1}) - f(0)| \geq \varepsilon\} \\ &= \{x \in E(0) : |f(x^{-1})| \geq \varepsilon\} \subset \bigcup_k \{x : x^{-1} \in i_k\} \end{aligned}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ için } t = n^{-1} \rightarrow 0$$

$$(A_{\varepsilon}^f(0) \cap I_n(0)) \subset \bigcup_{k=1}^n \{x : x^{-1} \in i_k\} \Rightarrow$$

$$|A_{\varepsilon}^f(0) \cap I_n(0)| \leq \sum_{k=1}^n \left| \left(\frac{1}{a_k}, \frac{1}{b_k} \right) \right| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{a_k} - \frac{1}{b_k} \right| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{b_k - a_k}{a_k b_k} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{a_k b_k}$$

$$(a_k, b_k) \subset \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right) \text{ ve } a_k b_k \sim \frac{1}{k^2} \text{ alınırsa}$$

$$|A_{\varepsilon}^f(0) \cap I_{n^{-1}}(0)| \leq c \sum_{k=1}^n k^2 \alpha_k$$

$$\alpha_k = \frac{1}{k^4} \text{ seçilirse}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_{\varepsilon}^f(0) \cap I_{n^{-1}}(0)|}{|I_{n^{-1}}(0)|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c \sum_{k=1}^n k^2 \alpha_k}{n} = 0$$

$$\mu - \text{st} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ elde edilir.}$$

$f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında μ -st süreklidir.

Sonuç olarak $f \in C_{st}[-1,1]$ elde edildi. Bu aralıkta sınırsız olan fonksiyonlarda örnek olarak verilebilir.

Benzer şekilde,

$C_{st}[a, b]$ uzayı $L_p[a, b]$ uzayı arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Lemma 5.2 $1 \leq p < \infty$ için $C_{st}[a, b] \setminus L_p[a, b] \neq \emptyset$ ve $L_p[a, b] \setminus C_{st}[a, b] \neq \emptyset$

İspat.

$L_p[a, b] \setminus C_{st}[a, b] \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Kaldırılabilir süreksizliğe sahip bir fonksiyon $C_{st}[a, b]$ nin elemanı değildir. $L_p[a, b]$ uzayına ait örnekler verilebilir.

$$C_{st}[a, b] \setminus L_p[a, b] \neq \emptyset$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \text{ serisini kalan terimleri } \sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \quad \alpha_k > 0 \text{ ve } \sigma_n \leq \frac{1}{(n+1)^3}$$

seçelim.

$$i_n = (a_n, b_n) \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \text{ aralıklarının boyu } \alpha_n \text{ ve } |i_n| = \mu(i_n) = \alpha_n, n \in \mathbb{N}$$

$x_n, i_n = (a_n, b_n)$ aralıklarının orta noktası olsun.

$$(1; 0), (b_1; 0), (x_1; \alpha_1^{-1}), (a_1; 0), (b_2; 0), (x_2; \alpha_2^{-1}), \dots$$

f fonksiyonu $[-1,0]$ aralığında ve diğer aralıklarda istatistiksel süreklidir.

$f \in C_{st}[-1,1]$ elde edilir. Bunun yanı sıra f fonksiyonu $L_p[-1,1]$ uzayına ait değildir.

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \sum_{k=1}^n \int_{i_k} |f(x)| dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

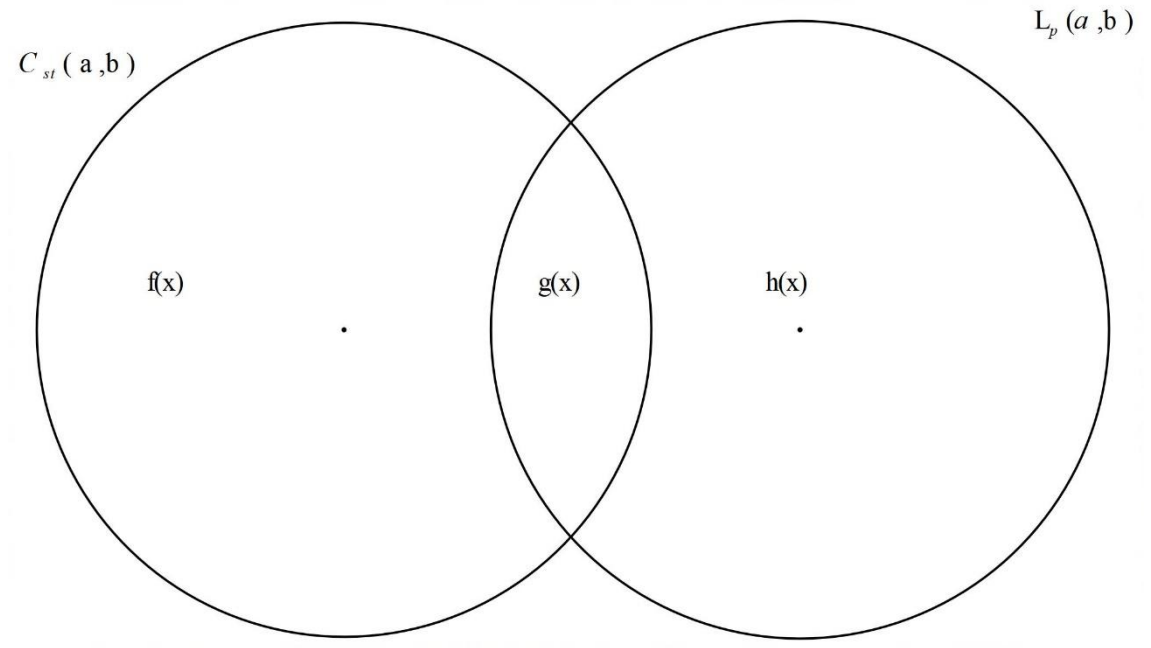
$$\forall p \in [1, \infty) \text{ için } f \notin L_p(0, 1) \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } C[a, b] \subset (C_{st}[a, b] \cap L_p[a, b]) \quad \forall p \in [1, \infty)$$

$C[a, b]$ uzayı; $\|\cdot\|_p$ göre normuna $C_{st}[a, b]$ uzayında yoğun değildir.

Bu durumu örneklerle açıklayalım.

Örnek 5.9



Şekil. 5.2 $C_{st}(a, b)$ ve $L_p(a, b)$ fonksiyon uzayları

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-b_n}{x_n-b_n}, & x \in [x_n, b_n] \\ \frac{x-a_n}{x_n-a_n}, & x \in [a_n, x_n] \\ 0, & x \notin [a_n, b_n] \end{cases} \quad \text{fonksiyonu örnek alınabilir.}$$

$$(a_n, b_n) \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \quad \alpha_n = |b_n - a_n|, \quad x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$f(x_n) = \alpha_n^{-1} \quad \text{fonksiyonu} \quad C_{st}(a, b) \setminus L_p(a, b) \quad \text{örnek verilebilir.}$$

$$h(x) = \text{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{fonksiyonu}$$

$$L_p(a, b) / C_{st}(a, b) \quad \text{örnek verilebilir,}$$

$$\mu - \text{st} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1, \quad \mu - \text{st} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -1 \quad \text{olduğundan } h \notin C_{st}(a, b).$$

Ayrıca

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 2$$

olduğundan $h(x) \in L_p(a, b)$ elde edilir.

Bunun yanı sıra,

$C[a, b]$ seçilen herhangi bir fonksiyon $g(x)$ için örnek verilebilir.

Tanım 5.7. $C_{st}^b[a, b]$ istatistiksel sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı olmak üzere;

$$C_{st}^b[a, b] = \{f \in C_{st}[a, b] : \|f\|_{\infty} < \infty\} \text{ ve}$$

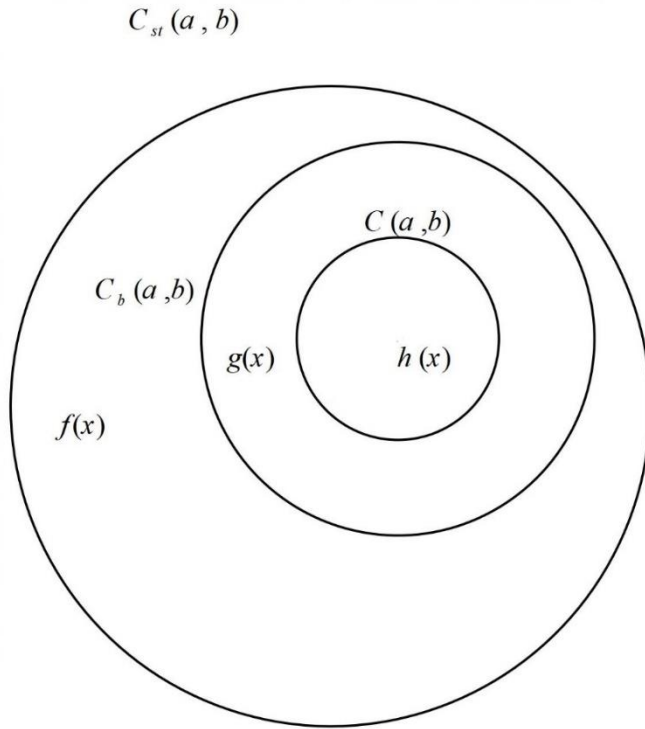
Bu uzayda norm

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{[a, b]} |f(\cdot)| \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Sonuç 5.1 $\forall p \in (0, \infty)$ için

$$C[a, b] \subset C_{st}^b[a, b] \subset C_{st}[a, b] \text{ sağlandığı açıktır.}$$

Örnek 5.10



Şekil. 5.3 $C_{st}(a, b)$ ve bazı fonksiyon uzayları

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-b_n}{x_n-b_n}, & x \in [x_n, b_n] \\ \frac{x-a_n}{x_n-a_n}, & x \in [a_n, x_n] \\ 0, & x \notin [a_n, b_n] \end{cases}$$

$$(a_n, b_n) \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), \quad \alpha_n = |b_n - a_n|, \quad x_n = \frac{a_n + b_n}{2},$$

$f(x_n) = \alpha_n^{-1}$ fonksiyonu örnek alınabilir.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-b_n}{x_n-b_n}, & x \in [x_n, b_n] \\ \frac{x-a_n}{x_n-a_n}, & x \in [a_n, x_n] \\ 0, & x \notin [a_n, b_n] \end{cases}$$

$$(a_n, b_n) \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \quad \alpha_n = |b_n - a_n|, \quad x_n = \frac{a_n + b_n}{2},$$

$g(x_n) = \alpha_n$ fonksiyonu

$C_{st}^b[a, b] \setminus C[a, b]$ örnek verilebilir.

$$h(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{fonksiyonu seçilebilir.}$$

Sonuç 5.2 $\forall p \in (0, \infty)$ için

$C[a, b] \subset C_{st}^b[a, b] \subset L_p[a, b]$ sağlanır.

Burada $p \in (0, 1)$ için

burada $p \in (0, 1)$ için $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$ şartı sağlanmalıdır.

Teorem 5.1 $(R, \mathcal{B}, \mu)$ $\mathcal{B}$ Borel altkümelerinin σ cebirinin μ sonlu ölçüsü olmak üzere,

$\mu(-\infty, x_0) = \mu(x_0, \infty) = \infty$, $x_0 \in R$ olmak üzere;

i) $C[a, b] \subset (C_{st}[a, b] \cap L_p[a, b]) \quad \forall p \in [0, \infty)$

ii) $C[a, b] \subset C_{st}^b[a, b] \subset L_p[a, b] \quad \forall p \in (0, \infty)$

sağlanır ve bu kapsamalar ayrıktır.

Teorem 5.2 $C_{st}^b[a, b]$ uzayı $\| \cdot \|_\infty$ normuna göre Banach uzayıdır

İspat: $C_{st}^b[a, b]$ uzayının tam olduğunu gösterelim.

$C[a, b] \subset (C_{st}[a, b] \cap L_p[a, b]) \quad \forall p \in [0, \infty)$ ve $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{st}^b[a, b]$ bir Cauchy dizisi olsun.

$\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty, \forall x \in [a, b]$ için $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisidir.

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ yakınsar. $f \in C_{st}^b[a, b]$ olduğunu gösterelim.

Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in [a, b]$ herhangi bir nokta olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$E_n(\varepsilon) \equiv \left\{ x : |f_n(x) - f_m(x_0)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

$$E_n(f; \varepsilon) \equiv \left\{ x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \quad (3)$$

$$\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in [a, b]$$

(3) ten $\forall n \geq n_\varepsilon$ için $\{x : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \subset E_n(\varepsilon)$ elde edilir.

Böylece

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

$$(\{x : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \cap 0_\delta(x_0)) \subset (E_n(\varepsilon) \cap 0_\delta(x_0))$$

Sonuç olarak

$$|\{x : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \cap 0_\delta(x_0)| \leq |E_n(\varepsilon) \cap 0_\delta(x_0)| \quad (4)$$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ için $f_{n_0} \in C_{st}^b[a, b]$ ve (4) den

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\{x : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \cap 0_\delta(x_0)|}{|0_\delta(x_0)|} \\ & < \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\{x : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \cap 0_\delta(x_0)|}{|0_\delta(x_0)|} \end{aligned}$$

$$\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\{x: |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \cap 0_\delta(x_0)|}{|0_\delta(x_0)|} \leq$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|E_n(\varepsilon) \cap 0_\delta(x_0)|}{|0_\delta(x_0)|} = 0$$

elde edilir. Böylece $f(x) \in C_{st}^b[a, b]$ elde edilir.

Örnek 5.11

$$h(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{fonksiyonu}$$

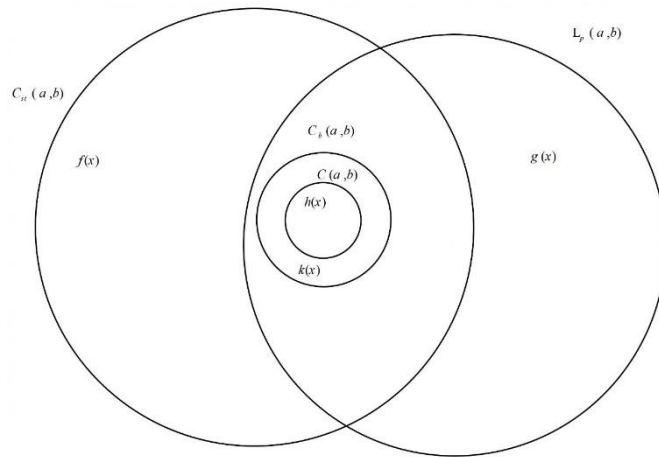
$$g(x) = \text{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-b_n}{x_n-b_n}, & x \in [x_n, b_n] \\ \frac{x-a_n}{x_n-a_n}, & x \in [a_n, x_n] \\ 0, & x \notin [a_n, b_n] \end{cases} \quad \text{fonksiyonu için .}$$

$$(a_n, b_n) \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \quad \alpha_n = |b_n - a_n|, \quad x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

olmak üzere,

$k(x) = \alpha_n$ ve $f(x) = \alpha_n^{-1}$ seçilsin. Bu durumda Şekil. 5.4 ait örnekler verilmiş olur.



Şekil. 5.4 $C_{st}^b[a, b]$ uzayı ve Bazı fonksiyon uzayları

6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmamızda ilk iki bölümünde standart olmayan uzaylardan biri olan grand Lebesgue uzayı ve ağırlıklı grand Lebesgue uzayının shift operatörü yardımıyla oluşturulmuş bir alt uzayı üzerinde klasik ve istatistiksel manada Korovkin teoremleri oluşturulmuş ve bazı uygulama ve sonuçlar elde edilmiştir.

Çalışmamızın son bölümünde μ - istatistiksel limit, μ - istatistiksel süreklilik, μ - istatistiksel süreksizlik kavramları tanımlanmış olup bazı fonksiyon uzayları oluşturularak, bu uzayların Lebesgue, sürekli fonksiyonlar gibi uzaylarla ilişkisi istatistiksel süreklilik temalı incelenmiştir.

Bu konuda çalışacak araştırmacılara aşağıdaki önerilerim olacaktır.

- i. Grand Lebesgue uzaylarında Korovkin teoremini sağlayan yeni operatör dizileri araştırmak
- ii. Standart olmayan fonksiyon uzayları için Korovkin teoremi şartlarını araştırmak
- iii. Ağırlıklı grand Lebesgue uzayında Ağırlık fonksiyonu Muckenhoupt şartlarına uygun seçilerek farklı koşullar altında Korovkin teoremi oluşturma çalışmaları yapmak.
- iv. İstatistiksel süreklilik kavramını Fourier dönüşümü konusu üzerinde araştırmak.

KAYNAKÇA

- [1] N.L. Carother, A short of Course on Approximation Theory, Bowling State Universty, 1998
- [2] S. N. Bernstein, "Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probalities," Comm. Soc. Mat. Charkow, vol. 13 , no.2, pp.1-2, 1912
- [3] L.V. Kantorovich, "Sur certains developments suivant les polynomes de la forms de S. Bernstein I,II," Dokl Akad Nauk SSSR, 595-600 , 563-568 1930.
- [4] O. Szasz, "Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval" J. Res. Nat. Bur. Stand., vol. 45, pp. 239-245, 1950.
- [5] H. Bohman, "On approximation of continous and of analytcs functions" Arkiv. Mat, vol. 2 no:1 pp.43-56, 1952.
- [6] P.P. Korovkin, " On convergence of linear positive operators in the space of continous functions" Doklady Akad. Nauk, vol. 90, pp. 961-964, 1953.
- [7] V.K. Dzyadik, " On the approximation of functions by linear positive operators and singular intregrals." Mat. Sbornik , vol.70 , pp. 508-517, 1966.
- [8] S.J. Bernau, " Theorems of Korovkin type for L^p – spaces, " Pacific J.Math. Vol. 53 pp.11-19, 1974 .
- [9] W. Kitto and D.E. Walbert Donner, "Korovkin approximation in L^p – spaces, Pacific J.Math. Vol. 63, pp.153-167, 1976.
- [10] H. Berens and A. DeVore, "Quantitative Korovkin theorems for positive linear operators in L^p space", Trans. Amer. Math.Soc. , vol. 245, pp. 349-361, 1978.
- [11] K. Donner, "Korovkin Theorems in L^p – spaces, "J. Funct. Anal. , vol. 42, pp.12-28, 1981.
- [12] J.J. Swetics and B. Wood "Quantitative estimates for L^p –approximation with positive linear operators," J.Approx. Theory, vol. 38, pp. 81-89, 1983.
- [13] A.D. Gadjeiev, " The convergence problem for a sequences of positive linear operators on bounded sets, and theorems analogous to that of P.P Korovkin," ,Eng. Translated Sov.Math.Dokl., vol.15, no. 5 , pp.1433-1436, 1974

- [14] A.D. Gadjiev, "On P.P Korovkin Type Theorems," *Math .Zametki*, vol.20 ,no:5, pp. 995-998, 1976
- [15] H. Fast, "Sur la convergence statistique (French)" *Colloquium Math.* vol.2, pp, 241-244, 1951
- [16] H. Steinhaus "Sur la convergence ordinaire et la convergence asumptotique," *Coloq. Math.*, vol. 2 pp, 73-74, 1951
- [17] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. II, Cambridge Univ. Press, London NewYork, 1979
- [18] I.J. Schoenberg, "The integrability of certain functions and related summability methods," *Amer. Math. Monthly*, vol. 66, pp.361-375, 1959.
- [19] J.S.Connor, "The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences", *Analysis*, vol .8 no.1 pp. 47-63, 1988
- [20] T. Salat, "On statistically convergent sequences of real numbers "(English, with Russian summary), *Math. Slovaca*, vol.30, no.2, pp. 139–150, 1980.
- [21] J.A. Fridy, "On statistical convergence," *Analysis*, vol.5 no.4, pp. 301–313. 1985.
- [22] J.A. Fridy, "Statistical limit points," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol.118, no. 4, pp., 1187– 1192. 1993.
- [23] J.A. Fridy, K. Khan Mohammad, "Tauberian theorems via statistical convergence," *J. Math. Anal. Appl.*, vol.228, no. 1 pp.73-95 ,1998,
- [24] J.A. Fridy, H.I. Miller, "A matrix characterization of statistical convergence", *Analysis*, vol.11, no. 1, pp.59-66 ,1991
- [25] J.A. Fridy, C. Orhan, Lacunary statistical summability, *Journ. of Math. Anal. and Appl.*, vol.173, pp. 497-504, 1993.
- [26] J.A. Fridy, C. Orhan, "Lacunary statistical convergence," *Pacific Journ. of Math.*, vol.160, no.1, pp.43-51, 1993.
- [27] A.R. Freedman, J.J.Sember, M.Raphael, "Some Cesaro-type Summability Spaces . Proceeding of London Mathematical Society, vol.37, no.3 pp. 508-520, 1978
- [28] J.S. Connor, "The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences", *Analysis*, vol .8 no.1 pp. 47-63, 1988
- [29] I. J. Maddox, "Statistical convergence in a locally convex space, "Math. Proc Cambridge Philos. Soc. vol.104 ,no. 1, pp.141–145, 1988,
- [30] I.J. Schoenberg", The integrability of certain functions and related summability

- methods,” *Amer. Math. Monthly*, vol.66, pp. 361–375, 1959.
- [31] A.D. Gadjiev, C. Orhan,” Some approximation theorems via statistical convergence, “ *Rocky Mountain J.Math.*, vol.32, no.1 pp.101-114 ,2012,
- [32] A.D. Gadjiev, A.M. Ghorbanalizadeh,” On the A-statistical approximation by sequences of k-positive linear operators,” *Proc.Inst.Math.Mech.Natl.Acad.Sci. Azerb.* vol.31, pp. 41-52,2009
- [33] A.D. Gadjiev,” Simultaneous statistical approximation of analytic functions and their derivaties by k-positive linear operators,” *Azerb. J.Math.*, vol.1, no. 1, pp. 57-66 ,2011
- [34] A.D. Gadjiev, R.O. Efendiyev, E.Ibikli, “ On Krovkin type theorem in the space of
locally integrable functions” *Czechoslovak Mathematical Journal* vol.53, no. 1,
pp.
45-53, 2003
- [35] T. Iwaniec, C.Sobordone, “On the inregrability of Jacobian under minimal hypotheses,” *Arch.Rational Mech.Anal.* vol.119 pp.129-143, 1992
- [36] T. Iwaniec, C. Sobordone,” Weak minima of varitional integrals,” *J. Reine Angew. math* no:454, pp.143-141, 1994
- [37] T. Iwaniec, C. Sobordone,” Riesz transforms and eliptic pde`s with VMO coefficients. *J. Analyse Math.* Vol.74, pp.183-212, 1998.
- [38] A. Fiorenza,” Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces,” *Collectanea*, vol.51, no:2, pp.131-148, 2000.
- [39] A. Fiorenza, G.E. Karadzov” Grand and small Lebesgue spaces and their analogs,” *Journal of analysis and its applications*, vol.34, no.4, pp.657-681, 2004.
- [40] A. Fiorenza, M. Kerbec” On domain and range of maximal operator,” *Nagoya Mathematical Journal*, vol.158, pp. 43-61, 2000.
- [41] C.Capone, A. Fiorenza,” On small Lebesgue spaces,” *Journal of Function Spaces and Applications* , vol. 3, no. 1, pp. 73-89, 2005.
- [42] B. Gupta, A. Fiorenza P.Jain, “The maximal theorem in weighted grand lebesgue spaces,” *Studia Mathematica* vol. 188, no.1, pp. 123-133, 2008.
- [43] G. Fratta. A. Fiorenza,” A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue
spaces, “*Nonlinear Analysis* vol. 70, no. 7, pp. 2582-2592, 2009.
- [44] V.Kokilashvili,” Boundedness criteria for Cauchy singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemann problem,” *Proceeding of A.Razmadze Mathematical Institue* vol. 151, pp.129-133, 2009.

- [45] V.Kokilashvili, “Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces” *Journal of Mathematical Sciences* , vol.170, pp. 20-33, 2010.
- [46] H. Rafeiro, A. Vargas,” On compactness in grand spaces.” *Georgian Mathematical Journal*, vol.22, no.1 pp. 141-152. 2015
- [47] Y. Zeren “Some questions of harmonic analysis in weighted Morrey type spaces.” *Africa Mathematica*, vol.30, no.4 pp. 129-150, 2019
- [48] R.E. Castillo, H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces.* Springer,2016.
- [49] V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, S. Samko, *Integral Operators in Non Standart Funntion Spaces: Volume 2: Variable Exponent Hölder, Morrey-Camponato and Garand Spaces.* Birkhauser, 2016.
- [50] Y. Zeren, M. Ismailov, F. Sirin, “On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-Lebesgue space,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol.44, no. 3, pp.1027-1041, 2020
- [51] Y. Zeren, M.Ismailov, C.Karaçam, “ Korovkin- type theorems and their statistical versions in grand Lebesgue spaces” *Turkish Journal of Mathematics* vol.44, no.5 pp.1595-1611, 2020
- [52] C.Sobordone, “Nonlinear elliptic equations with right hand side in nonstandart spaces,” 1998,
- [53] Y. Zeren, R. H. Abdullayeva, S. Çetin, “On morrey –type classes of harmonic functions,” *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, vol. 67, no. 3, pp.501-516, 2018
- [54] B. T.O. Bilalov, *Some questions of approximation.*ELM. Department of Non-Analys Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan pp. 390,2016
- [55] B. Muckenhoupt, “Weighted norm inequalities for the hardy maximal functions,” *Transactions of the American Mathematical Society*, pp.207-226, 1972
- [56] S. R. Sadigova, R. R. Hasanli, C. Karacam, “On a space of μ -statistical continous functions. *Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics* vol. 44, no.1, pp.70-80 , 2018
- [57] C. Sobordone,” *Grand Sobolev spaces and their applications to variational*

- problems” *Le Matematiche*, vol. 2, pp. 335-347, 1996
- [58] O. Duman, C. Orhan, “ μ -statistically convergent function sequences,” *Czechoslovak Math. Journ.* Vol. 54 no:129, pp.93-121, 2003.
- [59] M. Macaj, T. Salat, “Statistical convergence of subsequences of given sequence,” *Math. Bohem.*, vol. 126, no. 1, pp. 141-145 1988
- [60] B. T. Bilalov, S. R. Sadigova, “On μ -statistically convergence,” *Proceeding of the American Mathematical Society*, vol. 143, no. 9, pp. 3869-3878, 2015,
-
- [61] B. T. Bilalov, T. Y. Nazarova, “On statistical convergence in Metric spaces,” *Journal of Mathematics Research*, vol. 7, no.1 pp.37-43, 2015
- [62] F. Moricz , “Statistical convergence of multiple sequences” *Archiv der Mathematic* pp. 81-82, 2003
- [63] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı yayınları 2000.
- [64] C. Bennet, R. Sharpley *Interpolation of Operators*, Department of Mathematics University of South Carolina Columbia, 1988.
- [65] E. Kreyszing , *Introductory Functional Analysis with Applications* , 1978.
- [66] M. Balcı *Matematik Analiz-2*, Sürat Üniversite Yayınları , 2012
- [67] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure* 1.st Edition. John Wiley 1995.
- [68] C. Capone, G. Raffaella,” Grand Lebesgue spaces with respect to measurable functions,” *Nonlinear Analysis: Theory ,Methods & Applications*, vol. 85, pp. 125-131, 2013.
- [69] F. Altomare, *Korovkin- type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators*, *Survey in Approximation Theory* 2010 pp. 92-164.

