

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA BONNET YÜZEYLERİ

Burcu YÜKSEKDAĞ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Filiz KANBAY

Ocak, 2022

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA BONNET YÜZEYLERİ

Burcu YÜKSEKDAĞ tarafından hazırlanan tez çalışması 06.01.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Filiz KANBAY
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Filiz KANBAY, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN Üye
İstanbul Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Filiz KANBAY sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Lorentz Uzayında Bonnet Yüzeyleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Burcu YÜKSEKDAĞ

İmza



Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2211/A Genel Yurtdışı Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.



Çocuklarım

Zeynep

ve

Burak'a

TEŞEKKÜR

Tez çalışması sırasında yardımlarını esirgemeyen, değerli yorumları ve önerileri ile hem tez sürecini yöneten hem de yön veren kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Filiz KANBAY’a çok teşekkür ederim.

Saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU ve Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL’e tez izleme komitesinde yer aldıkları ve katkıları için şükranlarımı sunarım.

Doktora eğitim süresi boyunca 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs programı kapsamında bana sağladığı destekten ötürü Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu’na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Destekleri ile her zaman yanımda olan ve benim için birçok özveride bulunan başta annem olmak üzere, sevgili babam ve kardeşlerime en kalbi duygularıyla teşekkür ederim.

Akademik kariyerim boyunca göstermiş olduğu büyük sabır ve anlayışından ötürü eşime ayrıca teşekkür ederim.

Burcu YÜKSEKDAĞ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	4
2 TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Lorentz Uzayı	5
2.2 L^3 , 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Vektörel Çarpım	9
2.3 Yarı Riemann Manifoldları	10
3 TIMELIKE YÜZEYLER	14
3.1 Temel Kavramlar	14
3.2 Timelike Yüzeylerin Cebirsel Değişmezleri	15
3.3 L^3 , 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Bonnet Yüzeyleri	23
3.4 Timelike Yüzey Üzerinde Bazı Bağıntılar	32
3.5 Timelike Minimal Yüzeyler	43
4 SPACELIKE YÜZEYLER	47
4.1 Temel Kavramlar	47
4.2 Spacelike Yüzeylerin Cebirsel Değişmezleri	48
4.3 L^3 , 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Spacelike Bonnet Yüzeyleri	56
4.4 Spacelike Yüzey Üzerinde Bazı Bağıntılar	64
4.5 Spacelike Maksimal Yüzeyler	75
5 SONUÇ VE ÖNERİLER	79
KAYNAKÇA	80
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	84

SİMGELİSTESİ

N	Birim normal vektörü
K	Gauss eğriliği
τ_g	Geodezik burulma
κ_g	Geodezik eğrilik
$\ \quad \ $	Lorentz anlamında norm
$\langle , \rangle$	Lorentz skaler çarpım
L^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
κ_n	Normal eğrilik
H	Ortalama eğrilik
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
v	Skaler çarpımın indeksi

KISALTMA LİSTESİ

B-net	Bonnet Şebekesi
C-net	Eğrilik Çizgisi Şebekesi



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 S yüzeyinin eğrilik çizgileri şebekesi ile Bonnet şebekesi.....	24
Şekil 3.2 S' yüzeyinin eğrilik çizgileri şebekesi ile Bonnet şebekesi.....	27
Şekil 3.3 Timelike dönme eksenli timelike helikoid	37
Şekil 3.4 Timelike dönme eksenli yandaş timelike helikoid	38
Şekil 3.5 Spacelike tip 1 dönme eksenli timelike helikoid.....	39
Şekil 3.6 Spacelike tip 1 dönme eksenli yandaş timelike helikoid	40
Şekil 3.7 Spacelike tip 2 dönme eksenli timelike helikoid	41
Şekil 3.8 Spacelike tip 2 dönme eksenli yandaş timelike helikoid.....	42
Şekil 4.1 Timelike dönme eksenli spacelike helikoid	68
Şekil 4.2 Timelike dönme eksenli spacelike yandaş helikoid	69
Şekil 4.3 Spacelike dönme eksenli spacelike 1.tip helikoid	71
Şekil 4.4 Spacelike dönme eksenli spacelike 1.tip yandaş helikoid	71
Şekil 4.5 Spacelike dönme eksenli spacelike 2.tip helikoid	73
Şekil 4.6 Spacelike dönme eksenli spacelike 2.tip yandaş helikoid	74

Lorentz Uzayında Bonnet Yüzeyleri

Burcu YÜKSEKDAĞ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Filiz KANBAY

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup literatür özeti ve tezin amacını içermektedir.

İkinci bölümde, Lorentz uzayında temel tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümler tez çalışmasının orijinal kısımlarını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde, Öklid uzayında Z. Soyuçok [2] tarafından A-şebekesi olarak adlandırılan ve bir yüzeyin Bonnet yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul olarak kullanılan kriterin 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike yüzeyler için genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu kriter ile [52] de yapılan sınıflandırmalar göz önüne alınarak izotermik olmayan timelike helikoid yüzeyleri Bonnet yüzey örnekleri olarak verilmiştir. Bu yüzeylerin yandaş Bonnet yüzeyleri elde edilmiştir. Buna ilave olarak, timelike minimal yüzeyler araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu Lorentz uzayında spacelike yüzeyler ve bazı geometrik özellikler tanımlanmıştır. 3-boyutlu Lorentz uzayında bir spacelike Bonnet yüzeyi elde etmek için üçüncü bölümde yapılanlara benzer olarak, Z. Soyuçok [2] tarafından Öklid uzayında tanımlanmış A-şebekesinin genelleştirilmesi yapılmıştır. Spacelike Bonnet yüzeylerine örnek olarak [52] de sınıflandırılması yapılan izotermik olmayan spacelike

helikoid yüzeyleri verilmiş ve bu yüzeylerin yandaş Bonnet yüzeyleri elde edilmiştir. Ayrıca spacelike maksimal yüzeyler de araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, tezin kısa bir özeti yapılmış, araştırmacılara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bonnet yüzeyi, A-şebekesi, helikoid, timelike yüzey, spacelike yüzey



Bonnet Surfaces on Lorentz Space

Burcu YÜKSEKDAĞ

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Filiz KANBAY

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to introduction which includes the literature review and the purpose of the thesis.

In the second chapter, basic definitions and some theorems in Lorentz space are given.

The third and fourth chapters are original parts of this study.

In the third chapter, a criterion called A-net by Z. Soyucok [2] in Euclidean space which is used as a necessary and sufficient condition for a timelike surface to be a timelike Bonnet surface is generalized to Lorentzian 3-space. By using the criterion, non-isothermic timelike helicoids whose classifications were defined by Beneki et al [52] are given as timelike Bonnet helicoids examples. Their associate Bonnet surfaces are obtained. Also, timelike minimal surfaces are examined.

In the fourth chapter, spacelike surfaces and some geometric properties are defined in 3-dimensional Lorentz space. In a similar way to the third chapter, A-net which is defined in Euclidean space by Z. Soyucok [2] is generalized to get a spacelike Bonnet surface in 3-dimensional Lorentz space.

As spacelike Bonnet examples, the non-isothermic helicoid surfaces classified in [52] are given and their associate Bonnet surfaces are obtained. In addition to this, spacelike maximal surfaces are investigated.

In the fifth chapter, a brief summary of the thesis is given and suggestion is proposed for investigators.

Keywords: Bonnet surface, A-Net, helicoid, timelike surface, spacelike surface



1.1 Literatür Özeti

Üç boyutlu Öklid uzayında asal eğrilikleri koruyan en az bir aşık olmayan izometri kabul eden yüzeylere Bonnet yüzeyi denir. İki yüzey birbiri üzerine asal eğrilikler korunacak şekilde izometrik olarak tasvir edilebiliyorsa bu yüzey çiftleri Bonnet yüzey çifti adını alır. Bu yüzeyler birbirinin yandaş yüzeyleridir. Bu özellikteki tüm yüzeylerin kümesi B-alesi olarak adlandırılır. Bir S yüzeyinin S' yandaş yüzeyinin eğrilik çizgileri, S nin bir ortogonal şebekesine karşılık gelir ve bunun tersi de doğrudur. Bu ortogonal şebekelere B-Şebekesi denir. Asal eğrilikleri koruyacak şekilde en az bir izometri kabul eden yüzeyleri reel ve kompleks olarak belirleyen bu problemi ilk kez Bonnet incelemiştir [1]. Bonnet tarafından çalışılan bu problem daha sonra birçok araştırmacı tarafından da değişik metotlar ile ele alınmış çeşitli sonuçlar bulunmuştur; bulunan bu sonuçlar farklı uzaylara genelleştirilmiştir. Örneğin, üç boyutlu Öklid uzayında Z. Soyucok [2], asal eğrilikleri koruyan en az bir aşık olmayan izometri kabul eden yüzeylerin belirlenmesi problemini (Bonnet problemi) çözmek amacıyla yeni bir kriter tanımlamış, bu kritere A-Şebekesi adını vermiştir. I. M. Roussos [3], ortalama eğriliği koruyan, aşık olmayan sonsuz sayıda izometri kabul eden, kritik noktası ve umbilik noktası bulunmayan ortalama eğrilik fonksiyonuna sahip Bonnet yüzeylerinin yerel teorisini araştırmış; ortalama eğrilik fonksiyonun kritik noktası ve umbilik noktası bulunmaması varsayımının global olarak bir fark oluşturup oluşturmadığını incelemiştir. I. I. Bodrenko [4], Darboux yüzeyleri üzerinde tanımlanmış Bonnet yüzey teoremi ile ilgili özellikleri n -boyutlu Öklid uzayına genelleştirmiştir. Z. Kose, M. Toda ve E. Aulisa [5], Cartan hareketli çatısı ve ilgili yapı denklemlerini kullanarak Bonnet problemlerini çalışmıştır. Cartan yapı formlarını birinci ve ikinci esas form cinsinden yazmış ve sonuç olarak Lax sistemini yeniden yorumlamıştır. F. Kanbay [6], aşık olmayan izometriye sahip, asal eğriliği koruyan Regle Bonnet yüzeyleri üzerine çalışmıştır. Doğuranlar ve dik yörüngeleri A-şebeke oluşturan Regle Bonnet yüzeylerini belirlemiştir. I. M. Roussos [7], ortalama eğriliği koruyan, aşık olmayan tek bir izometri kabul eden reel Bonnet yüzeylerini çalışmış, bu yüzeyler için genel kriter vermiştir. Bu kriter açılabilir teğetler yüzeyi için kullanılmıştır. I. M. Roussos [8], aşık olmayan, geometrik olarak farklı, ortalama

eğrilik fonksiyonunu koruyan sonsuz sayıda izometri kabul eden sabit olmayan ortalama eğrilik tipinden Bonnet yüzeylerini incelemiştir. U. Eitner [9], Schlesinger dönüşümlerini kullanarak Painlevé 6. denkleminin çözümüyle yeni bir Bonnet yüzeyi elde etmiştir. A. Bobenko ve U. Eitner [10], umbilik noktası bulunmayan bir yüzeyin asal eğriliklerini koruyan aşikar olmayan bir parametrelili izometri ailesinin sınıflandırılması problemini incelemiştir. G. Kamberov, F. Pedit ve U. Pinkall [11], basit bağlantılı bölgede tüm Bonnet çiftlerini sınıflandırarak Bonnet çiftleri ve izotermik yüzeyler arasındaki ilişkiyi araştırmış ve Bonnet çiftlerinin 4 parametrelili ailesini elde etmiştir. M. W. Yang [12], 3- boyutlu Öklid uzayındaki yüzeylerin O. Bonnet III- izometrisini ele almış ve üç farklı durum için inceleme yaparak bazı özel geometrik özellikler elde etmiştir. I. M. Roussos [13], helikoidal Bonnet yüzeylerini inceleyerek bazı geometrik özellikleri vermiştir. F. Kanbay [14], bilinen regle Bonnet yüzeylerini kullanarak, ortogonal regle yüzey çiftleri bulma problemini araştırmıştır. Chern [15], Bonnet yüzeylerinin varlığı için diferansiyel formlar aracılığıyla kriter ortaya koymuştur.

Problemin incelendiği Lorentz uzayında yapılan çalışmalardan bazıları aşağıdaki şekilde kısaca özetlenebilir. A. İnalcık ve S. Ersoy [16], üç boyutlu Lorentz uzayında ekseni null olmayan spacelike ve timelike helikoidal Bonnet yüzeylerini incelemiş ve bu yüzeylerin varlığı için gerek ve yeter koşullar vermiştir. W. Chen ve Li. H [17], 3-boyutlu Minkowski uzayındaki timelike Bonnet yüzeylerinin sınıflandırma sonucunu vermiştir. S. Ersoy ve K. Eren [18], üç boyutlu Minkowski uzayında Chen ve Li [17] tarafından timelike yüzeylerin Bonnet yüzeyi olması için verilen kriteri kullanarak timelike açılabilir yüzeylerin timelike Bonnet yüzeyleri olması için gerek ve yeter koşulu elde etmiş ve timelike açılabilir bir yüzeyin dayanak eğrisinin eğriliğini ve burulmasını sabit kabul ederek, timelike flat helikoid yüzeyi için ortalama eğriliği koruyan aşikar olmayan izometri problemini incelemiştir. F. Manhart [19], Minkowski geometride Minkowski-Thomsen yüzeylerinin tanımını vererek Minkowski-Bonnet yüzeylerini sınıflandırmış ve helikoidal Minkowski-Bonnet-Thomsen yüzey örnekleri vermiştir. G. Grantcharov ve R. Salom [20], Minkowski uzayında split kuaterniyonlar ve split kompleks sayıları kullanarak Bonnet çiftleri için bazı sonuçlar incelemiş ve Öklid uzayında var olmayan Bonnet yüzey çifti örnekleri vermiştir. A. Fujioka [21], hiperbolik 4-uzaylarında, özellikle minimal olmayan ve non-flat normal demete sahip olan, ortalama eğrilik vektör uzunluğunu koruyan izometrik deformasyon kabul eden yüzeyler ile çalışmıştır. Z. Y. Zhang [22], 4-boyutlu uzay formda, ortalama eğrilik fonksiyonunu koruyan, bir

parametrelizometrik deformasyon kabul eden Bonnet yüzeyleri üzerine çalışmıştır. M. A. Magid [23], kuaterniyonların indefinit versiyonlarını kullanarak 3-boyutlu Lorentz uzayında Lorentz yüzeyleri üzerine çalışmıştır. Bu uzayda Bonnet çiftleri için bir sınıflandırma teoremi elde etmiştir. A. Fujioka [24], ortalama eğrilik vektör uzunluğunu koruyan 4 boyutlu uzay formunda izometrik deformasyon kabul eden yüzeylerle çalışmıştır. A. Fujioka ve J. I. Inoguchi [25], Lorentz uzay formunda, izometrik deformasyonun bir parametrelizometrik ailesi ile ortalama eğriliği korunmuş timelike yüzeyler ile çalışmıştır. A. Fujioka ve J. I. Inoguchi [26], üç boyutlu uzay formundaki sabit eğrilikli Bonnet yüzeylerini sınıflandırarak, özel geodezik eğriliğe sahip 2-boyutlu uzay formundaki eğrilerle parametrize etmiştir. S. Ersoy ve K. Eren [27], 3-boyutlu Minkowski uzayında Chen'in [17] de bir timelike yüzeyin Bonnet yüzeyi olması için verdiği kriteri göz önüne alarak, I. M. Roussos'un [7] de Öklid uzayında yaptığı sınıflandırmaya benzer bir sınıflandırma yapmıştır. R. Lopez ve S. Kaya [28], Lorentz-Minkowski uzayında iki kongruent minimal (veya maksimal) yüzeylerin dual yüzeylerinin kongruent olması koşullarını araştırmıştır. A. Fujioka ve J. I. Inoguchi [29], Lorentz uzayında sabit eğrilikli spacelike Bonnet yüzeylerinin sınıflandırılmasını yapmıştır.

Son olarak yukarıda bahsedilen uzaylar dışında konu ile ilgili bazı makaleleri de aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz: J. A. Galvez, A. Martinez ve P. Mira [30], 4 boyutlu izometri gruplarıyla homojen 3-manifoldlarda Bonnet problemini incelemiş ve $H^2 \times \mathbb{R}$ veya $S^2 \times \mathbb{R}$ üzerinde basit bağlantılı, reel, analitik bir yüzeyin ancak ve ancak minimal veya helikoidal yüzey olmaması durumunda metrik ve asal eğrilikleri ile noktasal olarak tek türlü belirlendiğini göstermiştir. W. Chen ve Li. H [31], Bonnet yüzeyleriyle izotermik yüzeyler arasındaki ilişkiyi kullanarak $\mathbb{R}^3(c)$ üç boyutlu uzay formundaki Bonnet yüzeyleri ve $\mathbb{R}_1^3(c)$ indefinit uzay formundaki spacelike Bonnet yüzeylerini sınıflandırmıştır. A. B. Springborn [32], üç boyutlu kürede Bonnet çiftlerini çalışmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Z. Soyucok [2], 3-boyutlu Öklid uzayında 1. ve 2. temel form katsayıları E, F, G ve L, M, N ile gösterilen bir S yüzeyinin katsayıları arasında $E = G, F = 0, M = c = \text{sabit} \neq 0$ koşulunun sağlanması ile tanımlanmış olduğu A-şebekesi ile bir S yüzeyinin Bonnet yüzeyi olma kriterini ifade etmiştir. Ayrıca bu kriteri kullanarak bir Bonnet yüzeyinin yandaş yüzeyinin birinci temel form katsayılarının ilk yüzey ile aynı olduğunu; ikinci temel form katsayılarından M katsayısının ise ilk yüzeyin sabit olan M

katsayısının ters işaretlisi olduğunu ispatlamıştır. Böylece yandaş Bonnet yüzey çiftlerini tanımlamıştır. Bu çalışmada ise 3-boyutlu Öklid uzayında verilmiş olan bu kriterin, 3-boyutlu Lorentz uzayındaki karşılıkları araştırılarak yandaş Bonnet yüzey çiftleri belirlenecektir.

1.3 Hipotez

Literatürde Bonnet yüzeyleri hakkında elde edilmiş bazı sonuçların, 3 boyutlu Lorentz uzayındaki karşılıkları incelenecek ve bir yüzeyin asal eğriliklerini koruyan bir tasvir ile tasvir edilebileceği yandaş yüzeyi yani Bonnet yüzey çiftleri araştırılacaktır.



2.1 Lorentz Uzayı

Bu bölümde tezin orijinal kısmında kullanacağımız bazı temel bilgiler kısaca verilecektir.

Tanım 2.1. V bir reel vektör uzayı olsun. $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall \lambda, \xi \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için,

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- $\langle \lambda u + \xi v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \xi \langle v, w \rangle$
- $\langle u, \lambda v + \xi w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \xi \langle u, w \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [33].

Tanım 2.2. $\langle , \rangle$ fonksiyonu V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir simetrik bilinear form olsun. Bu durumda ,

- $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,
- $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif yarı tanımlı,
- $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif yarı tanımlı,
- $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilinear formuna non dejenere,
- $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v \neq 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilinear formuna dejenere denir [33].

Tanım 2.3. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde $\langle , \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü bilineer, simetrik ve non-dejenere ise $\langle , \rangle, V$ reel vektör uzayı üzerinde skaler çarpım tanımlar ve bu durumda V vektör uzayına **skaler çarpım uzayı** denir [33].

Tanım 2.4. $\langle , \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. V bir skaler çarpım uzayı ve $U \subset V$ olmak üzere U

$$\langle , \rangle|_U: U \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

kısıtlanmış simetrik bilineer formu negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı ise U nun boyutuna $\langle , \rangle$ **skaler çarpımının indeksi** denir ve v ile gösterilir. $\langle , \rangle$ skaler çarpımının indeksi v olmak üzere $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. $v = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle , \rangle$ skaler çarpımının pozitif yarı tanımlı olmasıdır. Ayrıca V skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı olduğu $\langle , \rangle$ skaler çarpımın indeksi olarak tanımlanır [33].

Tanım 2.5. V indeksi $v = 1$ olan skaler çarpım uzayı olsun. Eğer $\text{boy}V \geq 2$ ise V skaler çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir [33].

Tanım 2.6. $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu standart reel vektör uzayı verilsin. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ ve $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ve $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} X_i Y_i - X_n Y_n$$

fonksiyonu bir skaler çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde **Lorentz metriği** denir. $\mathbb{R}^n$, üzerinde tanımlanmış olan Lorentz metriği ile birlikte bir Lorentz uzayı olup bu uzay L^n ile gösterilir [34].

Tanım 2.7. L^n , n -boyutlu bir Lorentz uzayı ve $X \in L^n$ olsun.

- i. $\langle X, X \rangle < 0$ ise X vektörüne timelike (zamansı) vektör,
- ii. $\langle X, X \rangle > 0$ veya $X = 0$ ise X vektörüne spacelike (uzaysı) vektör,
- iii. $\langle X, X \rangle = 0$ ve $X \neq 0$ ise X vektörüne null (lightlike) vektör denir [33].

L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında, tüm lightlike vektörlerin kümesi

$\wp = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 = x_2^2 + x_3^2, x_1 \neq 0\}$ light-konisidir [35] ve tüm timelike vektörlerin kümesi ise $\tau = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}$ şeklinde tanımlanır [36].

Tanım 2.8. L^n , n-boyutlu bir Lorentz uzayı ve $X, Y \in \mathbb{R}^n$ olsun. $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere $\langle X, Y \rangle = 0$ ise X ve Y vektörlerine Lorentz anlamında **dik vektörler** ya da **ortogonal vektörler** denir [34].

Tanım 2.9. V , bir skaler çarpım uzayı olsun. $v \in V$ vektörünün normu $\|v\|$ ile gösterilir ve $\langle v, v \rangle$ her zaman pozitif tanımlı olmadığı için $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ şeklinde ifade edilir. $\langle v, v \rangle = \pm 1$ olan vektörlere **birim vektör** denir [33].

Tanım 2.10. τ , L^n n-boyutlu bir Lorentz uzayı üzerindeki tüm timelike vektörlerin kümesi olsun. $\forall u \in \tau$ için $C(u) = \{v \in \tau, \langle u, v \rangle < 0\}$ kümesine u ya ait **timelike koni** denir. Karşıt timelike koni ise $C(-u) = -C(u) = \{v \in \tau, \langle u, v \rangle > 0\}$ ile gösterilir. τ kümesi $C(u)$ ve $C(-u)$ nun ayrık birleşimidir [33].

Lemma 2.1. X ve Y timelike vektörlerinin aynı timekonisinin elemanı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\langle X, Y \rangle < 0$ olmasıdır [33].

Önerme 2.1. X ve Y timelike vektörleri aynı timekonisinin elemanı olsun. Bu durumda $\|X\| + \|Y\| \leq \|X + Y\|$ dir. Bu ifadenin eşitlik hali olabilmesi için X ve Y vektörleri lineer bağımlı olmalıdır [33].

Teorem 2.1. L^n n-boyutlu bir Lorentz uzayı ve $X, Y \in L^n$ iki timelike vektör olsun. Bu durumda,

- i. $|\langle X, Y \rangle| \geq \|X\|\|Y\|$ dır. Bu ifadenin eşitlik hali olabilmesi için X ve Y vektörleri lineer bağımlı olmalıdır.
- ii. X ve Y timelike vektörleri aynı timekonisinin elemanı ise; (yani $\langle X, Y \rangle < 0$)

$$\langle X, Y \rangle = -\|X\|\|Y\| \cosh \varphi, \quad \varphi = \eta(X, Y) \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu φ sayısına timelike vektörler arasındaki **hiperbolik açı** denir [33].

Tanım 2.11. $X, Y \in L^3$ spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör için $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|\|Y\|$ eşitsizliği geçerli olup $|\langle X, Y \rangle| = \|X\|\|Y\| \cos \theta$ koşulunu

sağlayacak şekilde tek bir $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ reel sayısına spacelike vektörler arasındaki **Lorentz spacelike açı** denir [37], [38].

Tanım 2.12. $X, Y \in L^3$ timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör için $|\langle X, Y \rangle| > \|X\| \|Y\|$ eşitsizliği geçerli olup $|\langle X, Y \rangle| = \|X\| \|Y\| \cosh \theta$ koşulunu sağlayacak şekilde tek bir θ pozitif reel sayısı mevcuttur. Bu θ reel sayısına spacelike vektörler arasındaki **Lorentz timelike açı** denir [37], [38].

Tanım 2.13. $X, Y \in L^3$ iki timelike vektör olsun. Bu durumda $|\langle X, Y \rangle| = \|X\| \|Y\| \cosh \theta$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tek bir θ reel sayısı mevcuttur. Bu θ reel sayısına timelike vektörler arasındaki **Lorentz timelike açı** denir [37], [38].

Tanım 2.14. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında X spacelike, Y pozitif timelike vektörler olsun. Bu durumda $|\langle X, Y \rangle| = \|X\| \|Y\| \sinh \theta$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tek bir θ reel sayısı mevcuttur. Bu sayıya spacelike ve timelike iki vektör arasındaki **Lorentz timelike açı** denir [37], [38].

Teorem 2.2. $X, Y \in L^n$ sıfırdan farklı Lorentz ortogonal vektörler olsun. Bu durumda X timelike vektör ise Y spacelike vektördür [34].

Lemma 2.2. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında

- i. İki timelike vektör asla ortogonal olamaz.
- ii. İki null (lightlike) vektörün ortogonal olması için gerek ve yeter şart lineer bağımlı olmalarıdır.
- iii. Bir timelike vektör asla bir null (lightlike) vektöre ortogonal olamaz.

özellikleri geçerlidir [39].

Tanım 2.15. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında bir eksen etrafında dönme için kullanılacak matrisler dönme ekseninin timelike, spacelike veya null olmasına göre

- i. Eksen timelike ise bu durumda 3×3 lük dönme matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

- ii. Eksen spacelike ise bu durumda 3×3 lük dönme matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

iii. Eksen null ise bu durumda 3×3 lük dönme matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 - \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & -\frac{\theta^2}{2} & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlıdır [36].

2.2 L^3 , 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Vektörel Çarpım

L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör $X = (X_1, X_2, X_3)$ ve $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ olmak üzere

$$X \wedge Y = (X_3 Y_2 - X_2 Y_3, X_1 Y_3 - X_3 Y_1, X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \quad (2.7)$$

vektörüne X ile Y nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $X \wedge Y$ veya $X \times Y$ şeklinde gösterilir. L^3 ün $\{e_1, e_2, e_3\}$ standart bazı için,

$$X \wedge Y = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

olarak hesaplanabilir. Burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak e_1, e_2, e_3 standart baz vektörleri için, $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$ ve $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ dir [40].

Önerme 2.2. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında a, b, c ve d vektörleri için

- i. $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a$ ve b lineer bağımlıdır.
- ii. $a \wedge b = -b \wedge a$ dır.
- iii. $\langle a \wedge b, a \rangle = \langle a \wedge b, b \rangle = 0$
- iv. $\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle - \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle$
- v. $\langle a \wedge b, c \rangle = \langle b \wedge c, a \rangle$
- vi. $\langle a \wedge b, a \wedge b \rangle = - \begin{vmatrix} \langle a, a \rangle & \langle b, a \rangle \\ \langle a, b \rangle & \langle b, b \rangle \end{vmatrix} = -\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle + (\langle a, b \rangle)^2$
- vii. $a \wedge (b + c) = (a \wedge b) + (a \wedge c)$

viii. $(a \wedge b) \wedge c = \langle b, c \rangle a - \langle a, c \rangle b$

ix. a ya da b vektörlerinden biri timelike ise $a \wedge b$ spacelike vektördür.

özellikleri sağlanır [41], [42], [43].

2.3 Yarı Riemann Manifoldları

Tanım 2.16. M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tanımlı simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$ tipinden tensör alanına **g metrik tensörü** adı verilir [33].

Tanım 2.17. M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde alınan bir $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ ile gösterilmek üzere, $\forall U_p = (u_1, u_2, \dots, u_n) |_p$, $V_p = (v_1, v_2, \dots, v_n) |_p \in T_p(M)$ için

$$\begin{aligned} \langle , \rangle |_p : T_p(M) \times T_p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle U_p, V_p \rangle &= \sum_{i=1}^{n-v} u_i v_i - \sum_{i=n-v+1}^n u_i v_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

eşitliği ile tanımlı v indeksli metrik tensörü ile verilen uzaya **yarı-Öklidyen uzay** denir ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir. Sonuç olarak $v = 0$ alınarak $\mathbb{R}_v^n$ yarı-Öklidyen uzayı $\mathbb{R}^n$ uzayına indirgenir [33].

Tanım 2.18. $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{R}_1^n$ yarı Öklidyen uzayına **Minkowski n -uzay** denir [33].

Tanım 2.19. g metrik tensörü ile verilen M diferansiyellenebilir manifolduna yarı-Riemann manifoldu denir [33].

Tanım 2.20. M yarı-Riemann manifoldu üzerinde verilen g metrik tensörünün v sabit indeksine M nin indeksi denir ve $0 \leq v \leq n = \text{Boy}M$ dir. Eğer $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise M diferansiyellenebilir manifolduna **Lorentz manifoldu** denir [33].

Tanım 2.21. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında orijin merkezli Lorentziyen birim küre, $S_1^2 = \{a \in L^3, \langle a, a \rangle = 1\}$ şeklinde tanımlanır. Hiperbolik birim küre ise $H_0^2 = \{a \in L^3, \langle a, a \rangle = -1\}$ biçiminde ifade edilir [44].

Tanım 2.22. α, L^n uzayında bir eğri ve α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere,

- i. $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise α eğrisine timelike eğri
- ii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ veya $\alpha' = 0$ ise α eğrisine spacelike eğri

iii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ve $\alpha' \neq 0$ ise null eğri

denir [35].

Tanım 2.23. L^n , n-boyutlu Lorentz uzayı ve $C \subset L^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere C eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu, $s_\alpha = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ dir [33].

Tanım 2.24. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow L^3$ birim hızlı eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektörü $T_\alpha(s) = \alpha'(s)$ ve eğriliği ise $\kappa_\alpha(s) = \|T'_\alpha(s)\|$ ile tanımlanır. $\forall s \in I$ için $\kappa_\alpha(s) > 0$ için $\alpha(s)$ eğrisinin normal vektörü $T'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s)N_\alpha(s)$ eşitliği ile verilir. Son olarak $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektörü $B_\alpha(s)$ olup ortonormal ve pozitif $\{T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s)\}$ sistemine **Frenet üçyüzlüsü** denir [45].

Tanım 2.25. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında bir M yüzeyi üzerinde bir α eğrisi alınsın. Eğrinin herhangi bir noktasındaki birim teğeti t ve yüzeyin o noktadaki birim normali N olarak alınırsa, $g = t \wedge N$ vektörü olmak üzere $\{t, g, N\}$ gibi yeni bir üç yüzlü elde edilir. Bu ortonormal sisteme **Darboux üçyüzlüsü** denir [44].

Tanım 2.26. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M olsun. Bu durumda,

- i. Yüzey üzerinde indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M spacelike yüzey,
- ii. Yüzey üzerinde indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M timelike yüzey,
- iii. Yüzey üzerinde indirgenmiş metrik dejenere ise M lightlike (null) yüzeydir.

Yüzeyin karakterini belirlerken yüzey üzerindeki $\forall p \in M$ noktasındaki normal vektörünü göz önüne alabiliriz. Eğer yüzey spacelike, timelike ve lightlike (null) ise, normal vektörü de sırasıyla timelike, spacelike ve lightlike formundadır [46].

Tanım 2.27. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında $x = x(u, v)$ denklemi ile verilmiş bir timelike yüzey için $\varepsilon = -1$ ve spacelike yüzey için $\varepsilon = 1$ olmak üzere $\langle x_u, x_u \rangle = \varepsilon \langle x_v, x_v \rangle$ ve $\langle x_u, x_v \rangle = 0$ şartını sağlayacak şekilde parametrelendirilmiş koordinat sistemine **izotermal koordinat sistemi** denir [23], [46], [47], [48].

Tanım 2.28. $x, y \in \mathbb{R}_v^n$ herhangi iki vektör olmak üzere;

$$\langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle_v = \langle x - y, x - y \rangle_v \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlı $F: \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ tasvirine $\mathbb{R}_v^n$ de **pseudo-Öklidyen izometri** denir. $\mathbb{R}_v^n$ deki tüm pseudo-Öklidyen izometrilere kümesi $E_v(n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

- $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}_v^3$ iki düzgün yüzey olmak üzere eğer $p \in M_1$ ve $v_1, v_2 \in T_p M_1$ için

$$I_p(v_1, v_2) = I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2)) \quad (2.11)$$

eşitliği varsa $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ diffeomorfizmine bir **izometri** denir.

- $\forall p \in M_1$ için $\phi|_U: U \rightarrow \phi(U)$ kısıtlaması bir izometri olacak şekilde M_1 in p yi içeren bir U açık alt kümesi varsa $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ düzgün tasvirine bir **lokal izometri** denir.

- M_1 ve M_2 arasında bir izometri varsa M_1 ve M_2 **izometriktir**; M_1 ve M_2 arasında bir lokal izometri varsa M_1 ve M_2 **lokal izometriktir**.

- ϕ lokal izometrisi M_1 deki (U, x) parametrizasyonunu M_2 deki $(U, \phi \circ x)$ parametrizasyonuna karşılık getiriyorsa $E(u, v) = \tilde{E}(u, v)$, $F(u, v) = \tilde{F}(u, v)$, $G(u, v) = \tilde{G}(u, v)$ eşitlikleri mevcuttur. Burada $(u, v) \in U$ olup $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ katsayıları $(U, \phi \circ x)$ parametrizasyonuna ait M_2 nin birinci temel form katsayılarıdır. Ayrıca izometrilere uzunlukları korur.

- $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ lokal izometri ve K_1, K_2 ; M_1, M_2 nin Gauss eğriliklerini göstermek üzere $\forall p \in M_1$ için $K_1(p) = K_2(\phi(p))$ dir [45].

Tanım 2.29. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında verilen bir spacelike yüzey M olsun. Yüzeyin ortalama eğriliği $H = 0$ ise yüzey maksimaldir [40].

Tanım 2.30. L^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında $x = x(u, v)$ yüzeyi izotermal koordinat sistemi ile verilsin. Yüzey $x_{uu} + \varepsilon x_{vv} = 0$ eşitliğini sağlıyorsa yani her noktada ortalama eğrilik $H = 0$ ise $\varepsilon = -1$ **timelike minimal** ($\varepsilon = 1$, **spacelike maksimal**) **yüzey** denir [23], [47], [49], [50].

Tanım 2.31. $x = x(u, v)$ denklemi ile verilmiş Lorentz uzayındaki bir yüzey $\langle x_u, x_u \rangle = -\mu^2$, $\langle x_v, x_v \rangle = \mu^2$, $\langle x_u, x_v \rangle = 0$ şartlarını sağlayan izotermal koordinatlarda

$$x_{uu} = \left(\frac{\mu_u}{\mu}\right)x_u + \left(\frac{\mu_v}{\mu}\right)x_v + LN \quad (2.12)$$

$$x_{uv} = \left(\frac{\mu_v}{\mu}\right)x_u + \left(\frac{\mu_u}{\mu}\right)x_v + MN \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \left(\frac{\mu_u}{\mu}\right) \mathbf{x}_u + \left(\frac{\mu_v}{\mu}\right) \mathbf{x}_v + N\mathbf{N} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{N}_u = \frac{L}{\mu^2} \mathbf{x}_u - \frac{M}{\mu^2} \mathbf{x}_v \quad (2.15)$$

$$\mathbf{N}_v = \frac{M}{\mu^2} \mathbf{x}_u - \frac{N}{\mu^2} \mathbf{x}_v \quad (2.16)$$

türevleri ve $A = \begin{bmatrix} -\frac{L}{\mu^2} & -\frac{M}{\mu^2} \\ \frac{M}{\mu^2} & \frac{N}{\mu^2} \end{bmatrix}$ şekil operatörü ile tanımlı olsun. Bu yüzeyin A şekil operatörü matrisi $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ veya $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ formunda yazılabiliyorsa bu yüzey **izotermik bir yüzeydir**. Bu koşul Öklid uzayındaki $M = 0$ koşulunun burada da geçerli olduğunu göstermektedir [23], [48].

Bu yüzeyde κ_1 ve κ_2 asal eğrilikler olmak üzere ortalama eğrilik H , Gauss eğriliği K

$$H = \epsilon \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (2.17)$$

$$K = \epsilon \kappa_1 \kappa_2 \quad (2.18)$$

şeklindedir. Burada $\epsilon = 1$ timelike, $\epsilon = -1$ spacelike yüzeyler için kullanılır [45].

3.1 Temel Kavramlar

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ vektörel denklemi ile verilen bir timelike yüzeyin $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ koordinat eğrilerinin dik olduğunu varsayalım. Bu yüzey üzerinde alınan bir P noktasından geçen keyfi bir timelike eğri (c), $v = \text{sabit}$ timelike koordinat eğrisi (c_1) ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisi (c_2) ile gösterilmek üzere, bu eğrilerin P noktasındaki birim teğet vektörleri ve yay uzunlukları sırası ile $\mathbf{t}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; s, s^*, s^{**}$ ve yüzeyin aynı noktadaki spacelike birim normal vektörü $\mathbf{N}$ olsun. Bu durumda kullanılacak temel kavramlar [44] den yararlanılarak $\langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_u \rangle = -E < 0$, $\langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v \rangle = F$, $\langle \mathbf{y}_v, \mathbf{y}_v \rangle = G$ olmak üzere aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{y}_u}{\|\mathbf{y}_u\|} = \frac{\mathbf{y}_u}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{y}_v}{\|\mathbf{y}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_v}{\sqrt{G}} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{y}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{y}_v \frac{dv}{ds} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{y}_u \wedge \mathbf{y}_v}{\|\mathbf{y}_u \wedge \mathbf{y}_v\|} = \mathbf{N} \quad (3.3)$$

dir. (3.1) eşitliği düzenlenirse $\mathbf{y}_u = \sqrt{E}\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{y}_v = \sqrt{G}\mathbf{t}_2$ olup bulunan ifadeler (3.2) de yerine yazılırsa

$$\mathbf{t} = \mathbf{y}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{y}_v \frac{dv}{ds} = \sqrt{E}\mathbf{t}_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G}\mathbf{t}_2 \frac{dv}{ds} \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{t}$ ile $\mathbf{t}_1$ arasındaki hiperbolik açı θ ile gösterilmek üzere $\mathbf{t}$ ile $\mathbf{t}_1$ aynı timekonide ve $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_2 \rangle > 0$ olduğu kabul edilerek

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cosh \theta + \mathbf{t}_2 \sinh \theta \quad (3.5)$$

elde edilir. Buradan (3.4), (3.5) in her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{t}_2$ ile skaler çarpılırsa

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \rangle = -\cosh \theta = -\sqrt{E} \frac{du}{ds}, \quad \langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_2 \rangle = \sinh \theta = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad (3.6)$$

eşitlikleri elde edilir ve

$$\cosh \theta = \frac{\sqrt{E} du}{ds} = \frac{ds^*}{ds}, \quad \sinh \theta = \frac{\sqrt{G} dv}{ds} = \frac{ds^{**}}{ds} \quad (3.7)$$

bulunur. Burada $ds^2 = Edu^2 - Gdv^2$, $ds^{*2} = Edu^2$, $ds^{**2} = Gdv^2$ dir. Böylece $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyine ait birinci temel form katsayıları $\langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_u \rangle = \langle \sqrt{E} \mathbf{t}_1, \sqrt{E} \mathbf{t}_1 \rangle = -E$, $\langle \mathbf{y}_v, \mathbf{y}_v \rangle = \langle \sqrt{G} \mathbf{t}_2, \sqrt{G} \mathbf{t}_2 \rangle = G$, $F = \langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v \rangle = 0$ şeklinde ifade edilmiş olur [44], [51].

3.2 Timelike Yüzeylerin Cebirsel Değişmezleri

Verilen bu ön bilgilerden sonra $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi için Weingarten türev formülleri

$$\mathbf{N}_u = \alpha_1 \mathbf{y}_u + \beta_1 \mathbf{y}_v \quad (3.8)$$

$$\mathbf{N}_v = \alpha_2 \mathbf{y}_u + \beta_2 \mathbf{y}_v \quad (3.9)$$

şeklinde yazılır ve (3.8) in her iki tarafı sırasıyla $\mathbf{y}_u$ ve $\mathbf{y}_v$ ile skaler çarpılırsa

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{y}_u \rangle = -\alpha_1 E \quad (3.10)$$

ve

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{y}_v \rangle = \beta_1 G \quad (3.11)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{N}, \mathbf{y}_u \rangle = 0$ eşitliğinden u ya göre türev alınarak elde edilen $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{y}_u \rangle = -L$, (3.10) da yerine yazılırsa

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{y}_u \rangle = -\alpha_1 E = -L, \quad \alpha_1 = \frac{L}{E} \quad (3.12)$$

bulunur. Benzer işlemlerle $\langle \mathbf{N}, \mathbf{y}_v \rangle = 0$ eşitliğinden u ya göre türev alınarak bulunan $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{y}_v \rangle = -M$, (3.11) de yerine yazıldığında

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{y}_v \rangle = \beta_1 G = -M, \quad \beta_1 = -\frac{M}{G} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.9) un her iki tarafı $\mathbf{y}_u$ ile skaler çarpılırsa

$$\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{y}_u \rangle = -\alpha_2 E \quad (3.14)$$

bulunur. $\langle \mathbf{N}, \mathbf{y}_u \rangle = 0$ eşitliğinden v ye göre türev alınırsa $\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{y}_u \rangle = -M$ elde edilir. Böylece (3.14) den

$$\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{y}_u \rangle = -\alpha_2 E = -M, \quad \alpha_2 = \frac{M}{E} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.9) un her iki tarafı $\mathbf{y}_v$ ile skaler çarpılırsa,

$$\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{y}_v \rangle = \beta_2 G \quad (3.16)$$

bulunur. Benzer işlemlerle $\langle \mathbf{N}, \mathbf{y}_v \rangle = 0$ eşitliğinden v ye türev alınırsa $\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{y}_v \rangle = -N$ elde edilir. Böylece (3.16) dan

$$\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{y}_v \rangle = \beta_2 G = -N, \quad \beta_2 = \frac{-N}{G} \quad (3.17)$$

olarak bulunur. (3.12), (3.13), (3.15), (3.17) katsayıları (3.8) ve (3.9) da yerine yazılırsa $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi için **Weingarten türev formülleri** aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{N}_u = \frac{L}{E} \mathbf{y}_u + \left(-\frac{M}{G} \right) \mathbf{y}_v \quad (3.18)$$

$$\mathbf{N}_v = \frac{M}{E} \mathbf{y}_u + \left(-\frac{N}{G} \right) \mathbf{y}_v \quad (3.19)$$

(3.18) ve (3.19) eşitliklerinin, spacelike birim normal vektörü $\mathbf{N}$ nin birinci ve ikinci koordinat çizgisine göre türevleri olan

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbf{N}_u}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{N}_u = \mathbf{N}_1 \sqrt{E} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{N}_2 = \frac{\mathbf{N}_v}{\sqrt{G}}, \quad \mathbf{N}_v = \mathbf{N}_2 \sqrt{G} \quad (3.21)$$

cinsinden yazabilmek için (3.20), (3.18) de yerine yazılırsa

$$\mathbf{N}_1 = \frac{L}{E\sqrt{E}} \mathbf{y}_u + \left(-\frac{M}{G\sqrt{E}} \right) \mathbf{y}_v \quad (3.22)$$

olur. $y_1 = \frac{y_u}{\sqrt{E}}$ ve $y_2 = \frac{y_v}{\sqrt{G}}$ eşitlikleri (3.22) de yerine yazılarak düzenlenirse

$$N_1 = \frac{L}{E} y_1 + \left(-\frac{M}{\sqrt{EG}} \right) y_2 \quad (3.23)$$

elde edilir. Benzer adımlar N_2 için de uygulanırsa (3.21) eşitliği (3.19) da yerine yazıldığında,

$$N_2 = \frac{M}{E\sqrt{G}} y_u + \left(-\frac{N}{G\sqrt{G}} \right) y_v \quad (3.24)$$

bulunur. $y_1 = \frac{y_u}{\sqrt{E}}$ ve $y_2 = \frac{y_v}{\sqrt{G}}$ eşitlikleri (3.24) de yerine yazılarak düzenlenirse

$$N_2 = \frac{M}{\sqrt{EG}} y_1 + \left(-\frac{N}{G} \right) y_2 \quad (3.25)$$

bulunur.

$y = y(u, v)$ timelike yüzeyi için **Gauss türev formülleri**

$$y_{uu} = \Gamma_{11}^1 y_u + \Gamma_{11}^2 y_v + \Gamma_{11}^3 N \quad (3.26)$$

$$y_{uv} = \Gamma_{12}^1 y_u + \Gamma_{12}^2 y_v + \Gamma_{12}^3 N \quad (3.27)$$

$$y_{vv} = \Gamma_{22}^1 y_u + \Gamma_{22}^2 y_v + \Gamma_{22}^3 N \quad (3.28)$$

olarak yazılabilir. Buradaki katsayıları elde etmek için yukarıdaki işlemlere benzer olarak (3.26), (3.27), (3.28) eşitliklerinin her iki tarafı N, y_u, y_v ile skaler çarpılır ve elde edilen katsayılar yerlerine yazılırsa denklemler

$$y_{uu} = \frac{E_u}{2E} y_u + \frac{E_v}{2G} y_v + LN \quad (3.29)$$

$$y_{uv} = \frac{E_v}{2E} y_u + \frac{G_u}{2G} y_v + MN \quad (3.30)$$

$$y_{vv} = \frac{G_u}{2E} y_u + \frac{G_v}{2G} y_v + NN \quad (3.31)$$

halini alır. (3.26), (3.27), (3.28) eşitlikleri $y_1 = \frac{y_u}{\sqrt{E}}$ ve $y_2 = \frac{y_v}{\sqrt{G}}$ ye göre düzenlenirse

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \mathbf{y}_2 + \frac{L}{E} \mathbf{N} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \mathbf{y}_2 + \frac{M}{\sqrt{EG}} \mathbf{N} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \mathbf{y}_1 + \frac{M}{\sqrt{EG}} \mathbf{N} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \mathbf{y}_1 + \frac{N}{G} \mathbf{N} \quad (3.35)$$

olarak bulunur.

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi üzerinde $v = \text{sabit}$ timelike koordinat eğrisi (c_1) göz önüne alınsın. (c_1) eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü $\mathbf{t}_1$ ve yay parametresi s^* olmak üzere Darboux üçyüzlüsü $[\mathbf{t}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{N}]$ ile; benzer olarak bu doğrultuya dik $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisi (c_2) nin birim teğet vektörü $\mathbf{t}_2$, yay parametresi s^{**} olmak üzere Darboux üçyüzlüsü $[\mathbf{t}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{N}]$ ile gösterilirse

$$\mathbf{N} = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}_1 = -\mathbf{g}_1, \quad \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}_2 = \mathbf{g}_2 \quad \text{ve} \quad \mathbf{g}_1 = -\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{t}_1 \quad (3.36)$$

dır ve $\mathbf{N}$ birim normal vektörünün birinci ve ikinci koordinat çizgisine göre türevleri

$$\mathbf{N}_1 = \frac{d\mathbf{N}}{ds^*} = \kappa_n \mathbf{t}_1 + \tau_g \mathbf{g}_1 \quad (3.37)$$

$$\mathbf{N}_2 = \frac{d\mathbf{N}}{ds^{**}} = \bar{\kappa}_n \mathbf{t}_2 + \bar{\tau}_g \mathbf{g}_2 \quad (3.38)$$

şeklinde tanımlıdır [44].

a) $v = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin normal eğriliği κ_n ve geodezik burulması τ_g için (3.23) ve (3.36) dan

$$\mathbf{N}_1 = \frac{L}{E} \mathbf{y}_1 + \left(-\frac{M}{\sqrt{EG}} \right) \mathbf{y}_2 = \frac{L}{E} \mathbf{t}_1 + \frac{M}{\sqrt{EG}} \mathbf{g}_1 \quad (3.39)$$

(3.37) ve (3.39) dan

$$\langle N_1, t_1 \rangle = -\kappa_n = -\frac{L}{E}, \quad \kappa_n = \frac{L}{E} \quad (3.40)$$

ve

$$\langle N_1, g_1 \rangle = \tau_g = \frac{M}{\sqrt{EG}}, \quad \tau_g = \frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (3.41)$$

olarak bulunur. Ayrıca $v = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad (3.42)$$

şeklindedir [44].

b) $u = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin normal eğriliği $\bar{\kappa}_n$ ve geodezik burulması $\bar{\tau}_g$ için (3.25) ve (3.36) dan

$$N_2 = \frac{M}{\sqrt{EG}} y_1 + \left(-\frac{N}{G}\right) y_2 = \frac{M}{\sqrt{EG}} g_2 + \left(-\frac{N}{G}\right) t_2 \quad (3.43)$$

(3.38) ve (3.43) den

$$\langle N_2, t_2 \rangle = \bar{\kappa}_n = -\frac{N}{G}, \quad \bar{\kappa}_n = -\frac{N}{G} \quad (3.44)$$

ve

$$\langle N_2, g_2 \rangle = -\bar{\tau}_g = -\frac{M}{\sqrt{EG}}, \quad \bar{\tau}_g = \frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (3.45)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $u = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin geodezik eğriliği

$$\bar{\kappa}_g = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \quad (3.46)$$

şeklindedir [44].

Bulunan bu sonuçlar ile (3.23), (3.25), (3.32), (3.33), (3.34), (3.35)

$$\begin{aligned} N_1 &= \kappa_n y_1 + (-\tau_g) y_2 \\ N_2 &= \tau_g y_1 + \bar{\kappa}_n y_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{11} &= -\kappa_g \mathbf{y}_2 + \kappa_n \mathbf{N} \\
\mathbf{y}_{12} &= \bar{\kappa}_g \mathbf{y}_2 + \tau_g \mathbf{N} \\
\mathbf{y}_{21} &= -\kappa_g \mathbf{y}_1 + \tau_g \mathbf{N} \\
\mathbf{y}_{22} &= \bar{\kappa}_g \mathbf{y}_1 - \bar{\kappa}_n \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

halini alır.

Şimdi de $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi için uygunluk koşulunu araştıralım. Yüzeyin herhangi bir $P(u, v)$ fonksiyonu için $P_{uv} = P_{vu}$ dir. Bu fonksiyonun birinci ve ikinci koordinat eğrileri doğrultusunda ve yay uzunluğuna göre alınan türevleri olan

$$\begin{aligned}
P_{12} \text{ ve } P_{21} \text{ arasındaki bağıntıyı bulmak için } P_{12} &= \frac{P_{uv}}{\sqrt{EG}} - P_1 \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = \frac{P_{uv}}{\sqrt{EG}} + P_1 \kappa_g, \\
P_{21} &= \frac{P_{vu}}{\sqrt{EG}} - \frac{P_v}{\sqrt{G}} \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = \frac{P_{vu}}{\sqrt{EG}} - P_2 \bar{\kappa}_g \text{ türevleri düzenlenirse}
\end{aligned}$$

$$P_{12} - P_1 \kappa_g = P_{21} + P_2 \bar{\kappa}_g \tag{3.49}$$

uygunluk koşulu elde edilir. Yüzeyin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması arasındaki bağıntıyı bulabilmek için uygunluk koşulu yüzey normaline uygulanırsa

$$\mathbf{N}_{12} - \mathbf{N}_1 \kappa_g = \mathbf{N}_{21} + \mathbf{N}_2 \bar{\kappa}_g \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) de (3.23), (3.25) ve (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{12} - \mathbf{N}_1 \kappa_g &= [(\kappa_n)_2 - \tau_g \bar{\kappa}_g - \kappa_g \kappa_n] \mathbf{y}_1 + [\kappa_n \bar{\kappa}_g - (\tau_g)_2 + \kappa_g \tau_g] \mathbf{y}_2 \\
&\quad + [\kappa_n \tau_g + \tau_g \bar{\kappa}_n] \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{21} + \mathbf{N}_2 \bar{\kappa}_g &= [(\tau_g)_1 - \bar{\kappa}_n \kappa_g + \bar{\kappa}_g \tau_g] \mathbf{y}_1 + [(\bar{\kappa}_n)_1 - \tau_g \kappa_g + \bar{\kappa}_g \bar{\kappa}_n] \mathbf{y}_2 \\
&\quad + [\bar{\kappa}_n \tau_g + \tau_g \kappa_n] \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. (3.51) ve (3.52) den $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ ve $\mathbf{N}$ ye ait katsayılar kendi arasında karşılaştırılırsa,

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) + (\tau_g)_1 + 2\bar{\kappa}_g\tau_g \quad (3.53)$$

ve

$$(\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) - (\tau_g)_2 + 2\kappa_g\tau_g \quad (3.54)$$

elde edilir. Sonuç olarak bir timelike yüzeyin $v = \text{sabit}$ timelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrileri ile tanımlı (u, v) dik koordinat şebekesindeki büyüklükleri (3.53) ve (3.54) eşitliklerini sağlar.

Tanım 3.1. $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi üzerinde seçilmiş $v = \text{sabit}$ timelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrilerinin $ds^2 = Edu^2 - Gdv^2$ metriği $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 - dv^2)$ şeklinde yazılabiliyorsa bu parametrelere **izometrik şebeke (izotermal koordinat sistemi)** denir [23], [46], [47]. Diğer bir ifade ile (u, v) koordinat sistemi izometriktir.

Teorem 3.1. $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi üzerinde seçilmiş $v = \text{sabit}$ timelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrilerinin ds^2 metriğinin $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 - dv^2)$ şeklinde yazılabilmesi, yani $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyinin (u, v) koordinat sisteminin izometrik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0 \quad (3.55)$$

olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi üzerinde $ds^2 = Edu^2 - Gdv^2$ metriğinin, $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 - dv^2)$ şeklinde yazılabildiği, yani (u, v) koordinat sisteminin izometrik olduğu kabul edilsin. Bu durumda ispat için gösterilmesi gereken ifade $\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0$ olmasıdır.

Eğer $E = G$ ise $\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0$ olup koşul sağlanır.

Eğer $E \neq G$ ise bu şebekeyi $\bar{E} = \bar{G}$ haline getirecek $\bar{u} = f(u)$, $\bar{v} = h(v)$ dönüşümü aranmalıdır. $S = S(u, v)$ genel bir fonksiyon ve $\mathbf{S}_u = \mathbf{S}_{\bar{u}}f'(u)$, $\mathbf{S}_v = \mathbf{S}_{\bar{v}}h'(v)$ olup $\bar{E} = \bar{G}$ şartı altında $\langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u \rangle = \langle \mathbf{S}_{\bar{u}}f'(u), \mathbf{S}_{\bar{u}}f'(u) \rangle$, yani $-E = -\bar{E}(f'(u))^2$,

$\langle \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v \rangle = \langle \mathbf{S}_{\bar{v}} h'(v), \mathbf{S}_{\bar{v}} h'(v) \rangle$ yani $G = \bar{G} (h'(v))^2$ elde edilir. Buradan, $\frac{E}{(f'(u))^2} = \frac{G}{(h'(v))^2}$ yazılabilir. $(f'(u))^2 = A(u)$, $(h'(v))^2 = B(v)$ olarak tanımlanırsa $\frac{E}{G} = \frac{A(u)}{B(v)}$ olur. Aranılan $\bar{u} = f(u)$ ve $\bar{v} = h(v)$ dönüşümü $\bar{u} = \int \sqrt{A(u)} du$ ve $\bar{v} = \int \sqrt{B(v)} dv$ şeklinde belirlenmiş olur. $\frac{E}{G} = \frac{A(u)}{B(v)}$ şartı $\ln \frac{E}{G} = \ln A(u) - \ln B(v)$ haline getirilip sırasıyla u ve v ye göre türevi alınırsa şebekenin izometrik olması şartı $\left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ olarak bulunmuş olur.

$\Leftrightarrow \left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ şartının sağlandığı varsayalım. Bu durumda $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyinin $ds^2 = Edu^2 - Gdv^2$ metriğinin $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 - dv^2)$ şeklinde yazılabildiği yani (u, v) koordinat sisteminin izometrik olduğu gösterilmelidir. $\left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ ise $\frac{E}{G} = \frac{A(u)}{B(v)}$ yazılabilir. Buradan $(f'(u))^2 = A(u)$; $(h'(v))^2 = B(v)$ olup verilen şart $\left(\ln \frac{E}{(f'(u))^2} - \ln \frac{G}{(h'(v))^2} \right)_{uv} = 0$ ifadesine eşdeğer olur. $\bar{u} = \int \sqrt{(f'(u))^2} du$ ve $\bar{v} = \int \sqrt{(h'(v))^2} dv$ şeklinde yapılacak dönüşüm ile $\langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_u \rangle = -E = \langle \mathbf{y}_{\bar{u}} f'(u), \mathbf{y}_{\bar{u}} f'(u) \rangle = -\bar{E} (f'(u))^2$ ve $\langle \mathbf{y}_v, \mathbf{y}_v \rangle = G = \langle \mathbf{y}_{\bar{v}} h'(v), \mathbf{y}_{\bar{v}} h'(v) \rangle = \bar{G} (h'(v))^2$ bulunur, bu ise $\frac{E}{(f'(u))^2} = \frac{G}{(h'(v))^2}$ yani $\bar{E} = \bar{G}$ şartını verir. Sonuç olarak $ds^2 = Edu^2 - Gdv^2$ metriği $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 - dv^2)$ şeklinde yazılabilir yani (u, v) koordinatları izometrik koordinatlardır.

Teorem 3.2. $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi üzerinde seçilmiş $v = \text{sabit}$ timelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike eğrilerinden oluşan (u, v) dik koordinat sisteminde $\left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ koşulu

$$(\kappa_g)_1 = -(\bar{\kappa}_g)_2 \quad (3.56)$$

ifadesine eşdeğerdir.

İspat. (3.42) ve (3.46) denklemlerinde $\sqrt{E} = e$, $\sqrt{G} = g$ olarak yazılırsa $(\kappa_g)_1 = \frac{\left(\frac{-e_v}{eg} \right)_u}{e}$ ve $(\bar{\kappa}_g)_2 = \frac{\left(\frac{gu}{eg} \right)_v}{g}$ haline gelir. Benzer işlemle (3.55) denklemi $\left(\ln \frac{e^2}{g^2} \right)_{uv} = 0$ yani

$(\ln e)_{uv} = (\ln g)_{uv}$ şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda $(\ln e)_{uv} = \left(\frac{e_u}{e}\right)_v = \frac{ee_{uv} - e_ue_v}{e^2}$ ve $(\ln g)_{uv} = \left(\frac{g_v}{g}\right)_u = \frac{gg_{uv} - g_ug_v}{g^2}$ ifadeleri birbirine eşitlenirse

$$g^2 ee_{uv} - g^2 e_ue_v = e^2 gg_{uv} - e^2 g_ug_v \quad (3.57)$$

bulunur. $(\kappa_g)_1$ ve $(\bar{\kappa}_g)_2$ aşağıdaki şekilde düzenlenirse

$$(\kappa_g)_1 = \left(-\frac{e_v}{eg}\right)_u = -\frac{ee_{uv}g - e_v(e_ug + eg_u)}{e^3g^2} = -\frac{ee_{uv}g - e_ue_vg - ee_vg_u}{e^3g^2} \quad (3.58)$$

$$-(\bar{\kappa}_g)_2 = -\left(\frac{g_u}{eg}\right)_v = -\frac{g_{uv}eg - g_u(e_vg + eg_v)}{e^2g^3} = -\frac{g_{uv}eg - g_ue_vg - eg_vg_u}{e^2g^3} \quad (3.59)$$

(3.56) dan

$$g^2 ee_{uv} - g^2 e_ue_v = e^2 gg_{uv} - e^2 g_ug_v \quad (3.60)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.57) ve (3.60) eşitlikleri (3.55) ve (3.56) nın eşdeğer koşullar olduğunu göstermektedir.

Sonuç 3.1. $y = y(u, v)$ timelike yüzeyi üzerinde seçilmiş $v = \text{sabit}$ timelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike eğrilerinden oluşan (u, v) dik koordinat sisteminin izometrik olması için gerek ve yeter şart $(\kappa_g)_1 = -(\bar{\kappa}_g)_2$.

3.3 L^3 , 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Bonnet Yüzeyleri

Bu bölümde birçok araştırmacı tarafından Lorentz uzayında çalışılmış olan timelike Bonnet yüzeyleri [16], [17], [18], [26], [27] farklı bir bakış açısıyla 3-boyutlu Öklid uzayında Z. Soyuçok [2] tarafından tanımlanan A-şebekesinin genelleştirilmesi ile ele alınacaktır. Bu timelike yüzeyine ait büyüklükler incelenecek ve yüzeyin Bonnet yüzeyi olma kriteri araştırılacaktır.

Bir S timelike yüzeyi asal eğrilikler korunacak şekilde bir S' timelike yüzeyi üzerine izometrik tasvir edilebiliyor ise bu yüzeylere Bonnet yüzeyi adı verilir; bu durumda S ve S' yüzeyleri birbirinin yandaş yüzeyleridir. Bu tasvir ile S yüzeyinin eğrilik çizgilerinin S' yandaş yüzeyi üzerinde karşılık geldiği ortogonal şebekeye Bonnet Şebekesi

(B-şebekesi) denir. Benzer olarak bu tasvir ile S' yandaş yüzeyinin eğrilik çizgileri de S yüzeyi üzerinde Bonnet şebekesine karşılık gelir. S yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları E, F, G ; L, M, N ve yüzeyin asal eğrilikleri r ve $\bar{r}$ ile gösterilmek üzere

$$H = \frac{r + \bar{r}}{2}, \quad K = r\bar{r}, \quad J = \frac{r - \bar{r}}{2} \quad (3.61)$$

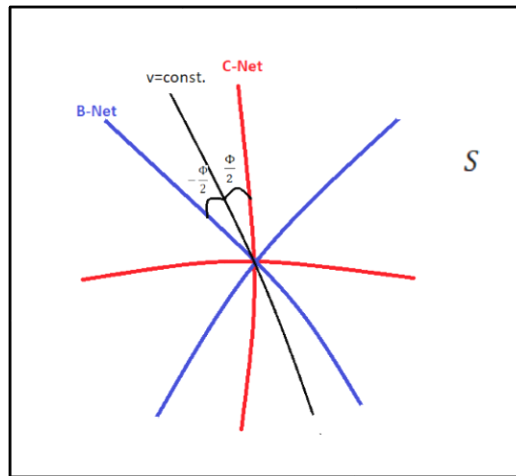
olarak tanımlansın. Göz önüne aldığımız tasvir izometrik olduğu için birinci temel form katsayıları ve böylelikle K Gauss eğriliği korunacaktır yani S' yandaş yüzeyi üzerinde

$$E' = E, \quad F' = F \quad \text{ve} \quad G' = G \quad (3.62)$$

dir. Ayrıca izometrik tasvir ile asal eğrilikler korunduğu için S ve S' yüzeylerinin büyüklükleri arasında

$$H = H', \quad K = K', \quad J = J' \quad (3.63)$$

bağıntısı vardır. Öncelikle S yüzeyinin üzerinde seçeceğimiz $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ dik koordinat şebekesini; yüzeyin eğrilik çizgileri (C-net) ile Bonnet şebekesinin (B-net) açığortay şebekesi olarak alalım (Şekil 3.1), (Şekil 3.2). Burada her üç şebeke ortogonal şebekedir ve her üç şebekenin bir ailesi timelike, diğer ailesi spacelike eğriler ailesi olarak alınacaktır. Bu durumda koordinat şebekesinin $v = \text{sabit}$ timelike eğri ailesi, birinci timelike eğrilik çizgisi ailesi ile $+\frac{\phi}{2}$ hiperbolik açısı yaparken birinci timelike Bonnet ailesi ile de $-\frac{\phi}{2}$ hiperbolik açısı yapar.



Şekil 3.1 S yüzeyinin eğrilik çizgileri şebekesi ile Bonnet şebekesi

Burada $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ dik koordinat şebekesinin normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları sırası ile $\kappa_n, \bar{\kappa}_n; \tau_g, \bar{\tau}_g$ ile verilmek üzere K Gauss eğriliği

$$K = r\bar{r} = \kappa_n\bar{\kappa}_n + \tau_g\bar{\tau}_g \quad (3.64)$$

dir [44]. $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisi ailesi ile α açısı yapan bir timelike doğrultusuna ait κ_n normal eğriliği:

$$\kappa_n = r \cosh^2 \alpha - \bar{r} \sinh^2 \alpha \quad (3.65)$$

eşitliği ile verilir [44]. $v = \text{sabit}$ timelike eğri ailesi, birinci timelike eğrilik çizgisi ailesi ile $+\frac{\phi}{2}$ hiperbolik açısı yaptığı için, (3.65) de $\alpha = +\frac{\phi}{2}$ alınarak

$$\kappa_n = r \cosh^2 \frac{\phi}{2} - \bar{r} \sinh^2 \frac{\phi}{2} \quad (3.66)$$

elde edilir ve hiperbolik fonksiyonların eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\kappa_n = r \left(\frac{1 + \cosh \phi}{2} \right) - \bar{r} \left(\frac{\cosh \phi - 1}{2} \right) = \left(\frac{r + \bar{r}}{2} \right) + \cosh \phi \left(\frac{r - \bar{r}}{2} \right) \text{ olup}$$

$$\kappa_n = H + J \cosh \phi \quad (3.67)$$

bulunur. Bu timelike eğriye dik olan spacelike eğrisinin doğrultusundaki $\bar{\kappa}_n$ normal eğriliği

$$\bar{\kappa}_n = \bar{r} \cosh^2 \alpha - r \sinh^2 \alpha \quad (3.68)$$

şeklinde verilir [44]. (3.68) den benzer işlemlerle

$$\bar{\kappa}_n = H - J \cosh \phi \quad (3.69)$$

elde edilir. O halde Gauss eğriliği

$$K = r\bar{r} = \left(\frac{r + \bar{r}}{2} \right)^2 - \left(\frac{r - \bar{r}}{2} \right)^2 = H^2 - J^2 \quad (3.70)$$

olarak yazılabilir. (3.67) ve (3.69) eşitlikleri (3.64) ifadesinde yerine yazılırsa

$$K = (H + J \cosh \phi)(H - J \cosh \phi) + \tau_g^2 \quad (3.71)$$

bulunur, burada $\tau_g = \bar{\tau}_g$ dir. (3.71) den

$$\tau_g = J \sinh \phi \quad (3.72)$$

elde edilir. S yüzeyinin büyüklükleri aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

a) $v = \text{sabit}$ timelike koordinat eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması:

$$\kappa_n = \frac{L}{E} = H + J \cosh \phi \quad (3.73)$$

$$\kappa_g = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad (3.74)$$

$$\tau_g = J \sinh \phi = \frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (3.75)$$

b) $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması:

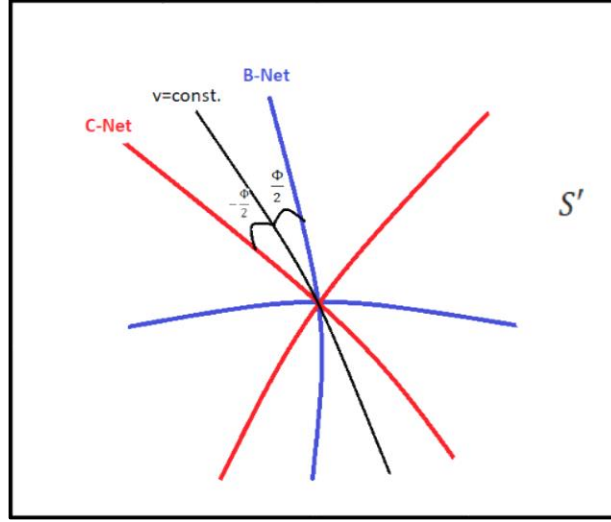
$$\bar{\kappa}_n = -\frac{N}{G} = H - J \cosh \phi \quad (3.76)$$

$$\bar{\kappa}_g = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \quad (3.77)$$

$$\bar{\tau}_g = J \sinh \phi = \frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (3.78)$$

şeklindedir.

S' yandaş yüzeyi için de yukarıdaki büyüklükleri hesaplayalım. S yüzeyinin eğrilik çizgileri S' yandaş yüzeyinin Bonnet şebekesine karşılık geldiğinden, S' yüzeyinin birinci timelike eğrilik çizgisi ile $v = \text{sabit}$ timelike koordinat çizgisi arasındaki açı $-\frac{\phi}{2}$ olur. Dolayısıyla S yüzeyi için hesaplanan büyüklüklerde ϕ açısı yerine $-\phi$ yazmak yeterli olacaktır.



Şekil 3.2 S' yüzeyinin eğrilik çizgileri şebekesi ile Bonnet şebekesi

S' yüzeyinin büyüklükleri aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

c) $v = \text{sabit}$ timelike koordinat eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması:

$$\kappa'_n = H + J \cosh(-\phi) = H + J \cosh \phi = \kappa_n \quad (3.79)$$

$$\kappa'_n = \kappa_n = \frac{L}{E} \quad (3.80)$$

$$\kappa'_g = \kappa_g = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad (3.81)$$

$$\tau'_g = J \sinh(-\phi) = -J \sinh \phi = -\tau_g \quad (3.82)$$

$$\tau'_g = -\frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (3.83)$$

d) $u = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması:

$$\bar{\kappa}'_n = H - J \cosh(-\phi) = H - J \cosh \phi = \bar{\kappa}_n \quad (3.84)$$

$$\bar{\kappa}'_n = \bar{\kappa}_n = -\frac{N}{G} \quad (3.85)$$

$$\bar{\kappa}'_g = \bar{\kappa}_g = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \quad (3.86)$$

$$\bar{\tau}'_g = J \sinh(-\phi) = -J \sinh \phi = -\bar{\tau}_g \quad (3.87)$$

$$\bar{\tau}'_g = -\frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (3.88)$$

şeklindedir ve (3.75), (3.78), (3.83), (3.88) den $\bar{\tau}'_g = \tau'_g = -\tau_g = -\bar{\tau}_g = -\frac{M}{\sqrt{EG}}$ elde edilir. Şimdi yukarıda büyüklükleri özetlenmiş S timelike yüzeyinin Bonnet yüzeyi olması için sağlaması gereken koşulları araştıralım. S timelike yüzeyinin $v = \text{sabit}$ timelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrileri ile tanımlı (u, v) dik koordinat şebekesindeki (3.53) büyüklükleri S' yandaş yüzeyi için de yazılırsa

$$(\kappa'_n)_2 = \kappa'_g(\kappa'_n - \bar{\kappa}'_n) + (\tau'_g)_1 + 2\bar{\kappa}'_g\tau'_g \quad (3.89)$$

ve $\kappa'_n = \kappa_n$, $\kappa'_g = \kappa_g$, $\bar{\kappa}'_n = \bar{\kappa}_n$, $\bar{\kappa}'_g = \bar{\kappa}_g$, $\tau'_g = -\tau_g$ eşitliklerine göre yeniden düzenlenirse

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) - (\tau_g)_1 - 2\bar{\kappa}_g\tau_g \quad (3.90)$$

elde edilir. (3.53) ile (3.90) eşitliği birbiri ile taraf tarafa toplanırsa

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) \quad (3.91)$$

ve çıkartılırsa

$$\frac{(\tau_g)_1}{\tau_g} = -2\bar{\kappa}_g, \quad (\ln|\tau_g|)_1 = -2\bar{\kappa}_g \quad (3.92)$$

elde edilir. Benzer şekilde S yüzeyinin (3.54) eşitliği S' yandaş yüzeyi için yazılırsa

$$(\bar{\kappa}'_n)_1 = \bar{\kappa}'_g(\kappa'_n - \bar{\kappa}'_n) - (\tau'_g)_2 + 2\kappa'_g\tau'_g \quad (3.93)$$

ve tekrar düzenlenirse

$$(\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) + (\tau_g)_2 - 2\kappa_g\tau_g \quad (3.94)$$

elde edilir. (3.54) ile (3.94) eşitliği taraf tarafa toplanır

$$(\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) \quad (3.95)$$

ve çıkartılırsa

$$\frac{(\tau_g)_2}{\tau_g} = 2\kappa_g \Rightarrow (\ln|\tau_g|)_2 = 2\kappa_g \quad (3.96)$$

bulunur. Sonuç olarak verilen bir S timelike yüzeyinin Bonnet yüzeyi olması için yüzey

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) \text{ ve } (\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) \quad (3.97)$$

$$(\ln|\tau_g|)_1 = -2\bar{\kappa}_g \text{ ve } (\ln|\tau_g|)_2 = 2\kappa_g \quad (3.98)$$

denklemlerini sağlamalıdır.

Tanım 3.2. Bir S timelike yüzeyinin (u, v) koordinat şebekesindeki birinci ve ikinci temel form katsayıları $E = G$, $F = 0$, $M = c = \text{sabit} \neq 0$ koşullarını sağlıyor ise bu şebekeye **A-Şebekesi** denir.

Teorem 3.3. İzotermik olmayan S timelike yüzeyinin Bonnet yüzeyi olması için gerek ve yeter şart A-şebekesine sahip olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ Varsayalım ki S yüzeyi bir Bonnet yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyi (3.97) ve (3.98) denklemlerini sağlar. (3.98) denklemine (3.49) uygunluk koşulu uyarlandığında

$$(\ln|\tau_g|)_{12} - (\ln|\tau_g|)_1 \kappa_g = (\ln|\tau_g|)_{21} + (\ln|\tau_g|)_2 \bar{\kappa}_g \quad (3.99)$$

$$(-2\bar{\kappa}_g)_2 - (-2\bar{\kappa}_g)\kappa_g = (2\kappa_g)_1 + 2\kappa_g \bar{\kappa}_g \quad (3.100)$$

$$(\kappa_g)_1 = -(\bar{\kappa}_g)_2 \quad (3.101)$$

elde edilir. Bu ise yüzey üzerinde alınan dik koordinat sistemi için izometrik olma koşulu olan $\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0$ koşulu ile eşdeğerdir. Dolayısıyla teorem 3.1 den $E = G$, $F = 0$ koşulu sağlanır. $E = G$ koşulu altında (3.98), (3.42) ve (3.46) dan $(\ln|\tau_g|)_2 = 2\kappa_g = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{E}\right)_2$ ve $(\ln|\tau_g|)_1 = -2\bar{\kappa}_g = -2 \cdot \frac{1}{2} (\ln E)_1 = \left(\ln \frac{1}{E}\right)_1$ elde edilir. Buradan $\tau_g = \frac{c}{E}$, yani $\frac{M}{\sqrt{EG}} = \frac{M}{E} = \frac{c}{E}$ ve $M = c = \text{sabit}$ bulunur. Sonuç olarak S

yüzeyi bir Bonnet yüzeyi ise üzerinde $E = G$, $F = 0$, $M = c = \text{sabit} \neq 0$ koşullarını sağlayan bir A-Şebekesi vardır.

$\Leftarrow$ Şimdi de S timelike yüzeyi üzerinde bir A-Şebekesinin tanımlı olduğunu varsayalım. Yani $E = G$, $F = 0$, $M = c = \text{sabit}$ olsun. S yüzeyinin temel form katsayıları H ve $J \neq 0$ cinsinden ifade edilsin. $\tau_g = J \sinh \phi = \frac{M}{\sqrt{EG}}$ olduğundan $E = G$, $M = c = \text{sabit}$ (uygun ölçek dönüşümü ile 1 alınırsa) olarak alınırsa

$$E = G = \frac{1}{|J| \sinh \phi}, \quad F = 0 \quad (3.102)$$

$$\kappa_n = \frac{L}{E} = H + J \cosh \phi, \quad L = \frac{1}{|J| \sinh \phi} (H + J \cosh \phi) \quad (3.103)$$

$$\bar{\kappa}_n = -\frac{N}{G} = H - J \cosh \phi, \quad N = \frac{1}{|J| \sinh \phi} (J \cosh \phi - H) \quad (3.104)$$

$$M = \varepsilon = \text{sgn}(J) \quad (3.105)$$

elde edilir. Bu yüzeyin bir Bonnet yüzeyi olduğunun gösterilebilmesi için yüzeyin (3.98) eşitliklerini sağlaması gerekir:

$$(\ln|\tau_g|)_1 = \frac{(\ln|\tau_g|)_u}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} = \frac{(|\tau_g|)_u}{|\tau_g| \sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} = \frac{(J \sinh \phi)_u}{\sqrt{(J \sinh \phi)}} = \frac{(E^{-1})_u}{\sqrt{\frac{1}{E}}} = -\frac{E_u}{E\sqrt{E}} \quad (3.106)$$

$$-2\bar{\kappa}_g = -2\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = -2\frac{(\sqrt{E})_u}{E} = -\frac{E_u}{E\sqrt{E}} \quad (3.107)$$

birinci eşitliği sağladığı görülür. Benzer şekilde

$$(\ln|\tau_g|)_2 = \frac{(\ln|\tau_g|)_v}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} = \frac{(|\tau_g|)_v}{|\tau_g| \sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} = \frac{(J \sinh \phi)_v}{\sqrt{(J \sinh \phi)}} = \frac{(E^{-1})_v}{\sqrt{\frac{1}{E}}} = -\frac{E_v}{E\sqrt{E}} \quad (3.108)$$

$$2\kappa_g = -2\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = -2\frac{(\sqrt{E})_v}{E} = -\frac{E_v}{E\sqrt{E}} \quad (3.109)$$

ikinci eşitlik de sağlanmaktadır. Böylece üzerinde A-şebekesi tanımlı olan S timelike yüzeyi bir Bonnet yüzeyidir. S' yandaş yüzeyinin temel form katsayıları ise

$$E = E' = \frac{1}{|J| \sinh \phi}, \quad F = F' = 0 \quad (3.110)$$

$$\kappa_n = \kappa'_n = \frac{L'}{E'} = H + J \cosh \phi, \quad L = L' = \frac{1}{|J| \sinh \phi} (H + J \cosh \phi) \quad (3.111)$$

$$\bar{\kappa}_n = \bar{\kappa}'_n = -\frac{N'}{G'} = H - J \cosh \phi, \quad N = N' = \frac{1}{|J| \sinh \phi} (J \cosh \phi - H) \quad (3.112)$$

$$\tau'_g = -\tau_g, \quad M' = -\varepsilon = \operatorname{sgn}(J) \quad (3.113)$$

şeklinde bulunur.

S timelike yüzeyi için, yukarıda bulunan büyüklükler (3.53), (3.54) de yerine yazılırsa

$$\frac{(H+J \cosh \phi)_v}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} = -\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}\right)_v}{\frac{1}{|J| \sinh \phi}} 2J \cosh \phi + \frac{(J \sinh \phi)_u}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} + 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}\right)_u}{\frac{1}{|J| \sinh \phi}} (J \sinh \phi) \quad (3.114)$$

ve

$$\frac{(H-J \cosh \phi)_u}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} = -\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}\right)_u}{\frac{1}{|J| \sinh \phi}} 2J \cosh \phi - \frac{(J \sinh \phi)_v}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}} + 2 \frac{\left(-\sqrt{\frac{1}{|J| \sinh \phi}}\right)_v}{\frac{1}{|J| \sinh \phi}} (J \sinh \phi) \quad (3.115)$$

elde edilir. (3.114) ve (3.115) düzenlenirse sırasıyla

$$\frac{H_v}{J} = \frac{\phi_v}{\sinh \phi} \quad (3.116)$$

ve

$$\frac{H_u}{J} = -\frac{\phi_u}{\sinh \phi} \quad (3.117)$$

bulunur.

Sonuç 3.2. (3.116) ve (3.117) den

$$\frac{\phi_v}{\sinh \phi} = \left(\ln \left| \tanh \frac{\phi}{2} \right| \right)_v \quad (3.118)$$

ve

$$\frac{\phi_u}{\sinh \phi} = \left(\ln \left| \tanh \frac{\phi}{2} \right| \right)_u \quad (3.119)$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\frac{H_v}{J} \right)_u + \left(\frac{H_u}{J} \right)_v = 0 \quad (3.120)$$

bulunur.

3.4 Timelike Yüzey Üzerinde Bazı Bağıntılar

3-boyutlu Lorentz uzayı L^3 de verilen düzgün M yüzeyinin birinci temel form katsayıları cinsinden $\phi(u, v)$ fonksiyonunun ikinci diferansiyel Beltrami (Laplasyen) operatörü

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\left(\frac{G\phi_u - F\phi_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u - \left(\frac{F\phi_u - E\phi_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v \right] \quad (3.121)$$

şeklinde tanımlanır [52].

(3.121) dik koordinat sistemi için düzenlenirse

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{\phi_u \sqrt{G}}{\sqrt{E}} \right)_u - \left(\frac{\phi_v \sqrt{E}}{\sqrt{G}} \right)_v \right] \quad (3.122)$$

olarak elde edilir.

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[(\phi_1 \sqrt{G})_u - (\phi_2 \sqrt{E})_v \right] \quad (3.123)$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[(\phi_1)_u \sqrt{G} + \phi_1 (\sqrt{G})_u - (\phi_2)_v \sqrt{E} - \phi_2 (\sqrt{E})_v \right] \quad (3.124)$$

$$\Delta \phi = -\frac{(\phi_1)_u}{\sqrt{E}} - \phi_1 \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} + \frac{(\phi_2)_v}{\sqrt{G}} + \phi_2 \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad (3.125)$$

halini alır ($f_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}}$, $f_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}}$). (3.42) ve (3.46), (3.125) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\Delta\phi = -\phi_{11} + \phi_{22} - \phi_1(\bar{\kappa}_g) - \phi_2(\kappa_g) \quad (3.126)$$

bulunur. Çalışmamızda $E = G$ alınacağından $\Delta\phi = -\frac{1}{E}(\phi_{uu} - \phi_{vv}) = \frac{1}{E}(\phi_{vv} - \phi_{uu})$ şekline gelir. Ayrıca Gauss eğriliği ile Beltrami (Laplasyen) operatörü arasında bir bağıntı bulmak için [44] den yüzeyin birinci temel form katsayıları olan E, G ve bunların türevleri cinsinden verilmiş $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right) \right]$ ifadesi $E = G$ ile yeniden düzenlenirse $K = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\ln\sqrt{E})_u - \frac{\partial}{\partial v} (\ln\sqrt{E})_v \right] = -\frac{1}{2E} [(\ln E)_{uu} - (\ln E)_{vv}]$ dir.

Sonuç 3.3. K Gauss eğriliği

$$2K = \frac{1}{E} [(\ln E)_{vv} - (\ln E)_{uu}] = \Delta(\ln E) \quad (3.127)$$

dir.

Teorem 3.4. Parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri κ_g ve $\bar{\kappa}_g$ olan (u, v) dik koordinat sistemi ile θ hiperbolik açısı yapan (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta\theta + (\kappa_g)_1 + (\bar{\kappa}_g)_2 = 0 \quad (3.128)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri κ_g^* ve κ_g° olan (u', v') dik koordinat sistemi, parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri κ_g ve $\bar{\kappa}_g$ olan (u, v) dik koordinat sistemiyle θ hiperbolik açısı yapsın. Bu durumda

$$(q)_{1'} = q_1 \cosh \theta + q_2 \sinh \theta \quad (3.129)$$

$$(q)_{2'} = q_1 \sinh \theta + q_2 \cosh \theta \quad (3.130)$$

eşitliği sağlanır [44]. Ayrıca $v = \text{sabit}$ timelike eğrisi ile θ hiperbolik açısı yapan bir timelike v' eğrisinin geodezik eğriliği [44]:

$$\kappa_g^* = \kappa_g \cosh \theta - \bar{\kappa}_g \sinh \theta - \frac{d\theta}{ds} \quad (3.131)$$

$$\kappa_g^* = \kappa_g \cosh \theta - \bar{\kappa}_g \sinh \theta - (\theta_1 \cosh \theta + \theta_2 \sinh \theta) \quad (3.132)$$

$$\kappa_g^* = (\kappa_g - \theta_1) \cosh \theta - (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \sinh \theta \quad (3.133)$$

ve bu eğriye dik olan u' spacelike eğrisinin geodezik eğriliği ise

$$\kappa_g^\circ = (-\kappa_g + \theta_1) \sinh \theta + (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \cosh \theta \quad (3.134)$$

biçiminde ifade edilir [44]. Geodezik eğriliklerin türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \kappa_{g_1}^* &= (\kappa_{g_1} - \theta_{11}) \cosh \theta + \theta_1 \sinh \theta (\kappa_g - \theta_1) - \\ &\quad (\bar{\kappa}_{g_1} + \theta_{21}) \sinh \theta - \theta_1 \cosh \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{g_1}^\circ &= (-\kappa_{g_1} + \theta_{11}) \sinh \theta + \theta_1 \cosh \theta (-\kappa_g + \theta_1) + \\ &\quad (\bar{\kappa}_{g_1} + \theta_{21}) \cosh \theta + \theta_1 \sinh \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{g_2}^* &= (\kappa_{g_2} - \theta_{12}) \cosh \theta + \theta_2 \sinh \theta (\kappa_g - \theta_1) - \\ &\quad (\bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22}) \sinh \theta - \theta_2 \cosh \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{g_2}^\circ &= (-\kappa_{g_2} + \theta_{12}) \sinh \theta + \theta_2 \cosh \theta (-\kappa_g + \theta_1) + \\ &\quad (\bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22}) \cosh \theta + \theta_2 \sinh \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.138)$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan bu eşitlikler

$$(\kappa_g^*)_{1'} = \kappa_{g_1}^* \cosh \theta + \kappa_{g_2}^* \sinh \theta \quad (3.139)$$

$$(\kappa_g^\circ)_{2'} = \kappa_{g_1}^\circ \sinh \theta + \kappa_{g_2}^\circ \cosh \theta \quad (3.140)$$

formüllerinde yerine yazılıp taraf tarafa toplanırsa

$$(\kappa_g^*)_{1'} + (\kappa_g^\circ)_{2'} = (\kappa_{g_1} - \theta_{11}) - \theta_1(\bar{\kappa}_g + \theta_2) - \theta_2(\kappa_g - \theta_1) + (\bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22}) \quad (3.141)$$

$$(\kappa_g^*)_{1'} + (\kappa_g^\circ)_{2'} = \kappa_{g_1} - \theta_{11} - \theta_1 \bar{\kappa}_g - \theta_2 \kappa_g + \bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22} \quad (3.142)$$

elde edilir. $\Delta\phi = -\phi_{11} - \phi_1(\bar{\kappa}_g) + \phi_{22} - \phi_2(\kappa_g)$ olduğu bilindiğinden (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik olma koşulu olan $(\kappa_g^*)_{1'} = -(\kappa_g^\circ)_{2'}$ eşitliği ile birlikte göz önüne alınıp (3.142) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\Delta\theta + (\kappa_g)_{1'} + (\bar{\kappa}_g)_{2'} = 0 \quad (3.143)$$

bulunur.

$\Leftrightarrow \Delta\theta + (\kappa_g)_{1'} + (\bar{\kappa}_g)_{2'} = 0$ olduğu varsayılınsın. Bu durumda (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla (u', v') dik koordinat sisteminin parametre eğrilerinin (3.133) ve (3.134) geodezik eğriliklerinin $1'$ ve $2'$ koordinat doğrultusuna göre alınmış türevlerinin taraf tarafa toplanması ile (3.142) elde edilir. Böylece (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik olması koşulu olan $(\kappa_g^*)_{1'} = -(\kappa_g^\circ)_{2'}$ sağlanmış olur.

Sonuç 3.4. İzometrik iki sistem arasındaki açı harmoniktir. Yani $\Delta\theta = 0$ dır.

Örnek 3.1 (Timelike dönme eksenli timelike helikoid).

xz düzlemindeki $\gamma = (u, 0, f(u))$ üreteç eğrisi ile $1 - (f'(u))^2 < 0$ ve $u^2 - c^2 > 0$ koşulu altında yani $c^2 - u^2 + u^2 f'^2 > 0$ olmak üzere

$$\mathbf{y}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ f(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix} \quad (3.144)$$

veya

$$\mathbf{y}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u) + cv), \quad u > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (3.145)$$

[28], [52], [53] şeklinde parametrelendirilmiş Oz -timelike dönme eksenli bir timelike helikoid yüzeyinin üzerinde A -şebekesinin varlığını araştırarak, bu yüzeyin bir Bonnet yüzeyi olduğunu gösterelim. Bu amaçla yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayılarını hesaplayalım.

$$\mathbf{y}_u = (\cos v, \sin v, f'(u)) \quad (3.146)$$

$$\mathbf{y}_v = (-u \sin v, u \cos v, c) \quad (3.147)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{y}_u \wedge \mathbf{y}_v}{\|\mathbf{y}_u \wedge \mathbf{y}_v\|} = -\frac{1}{w} \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u \sin v & u \cos v & c \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$\mathbf{N} = -\frac{1}{w} (c \sin v - u f'(u) \cos v, -u f'(u) \sin v - c \cos v, -u) \quad (3.149)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{w} (u f'(u) \cos v - c \sin v, u f'(u) \sin v + c \cos v, u) \quad (3.150)$$

$$\mathbf{y}_{uu} = (0, 0, f''(u)) \quad (3.151)$$

$$\mathbf{y}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \quad (3.152)$$

$$\mathbf{y}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0) \quad (3.153)$$

olmak üzere birinci temel form katsayıları

$$-E = \langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_u \rangle = 1 - (f'(u))^2 < 0 \quad (3.154)$$

$$F = \langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v \rangle = -c f'(u) \quad (3.155)$$

$$G = \langle \mathbf{y}_v, \mathbf{y}_v \rangle = u^2 - c^2 > 0 \quad (3.156)$$

ikinci temel form katsayıları ise $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = w^2 = c^2 - u^2 + u^2 f'^2$ olmak üzere

$$L = \langle \mathbf{y}_{uu}, \mathbf{N} \rangle = -\frac{u f''(u)}{w}, \quad M = \langle \mathbf{y}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = \frac{c}{w}, \quad N = \langle \mathbf{y}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = -\frac{u^2 f'(u)}{w}, \quad (3.157)$$

şeklinde hesaplanır. $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v + \int \frac{c f'(u)}{c^2 - u^2} du$ skala dönüşümü ile yüzeyin temel form katsayıları

$$\bar{E} = \frac{w^2}{G}, \quad \bar{F} = 0, \quad G = \bar{G} = u^2 - c^2 \quad (3.158)$$

$$\bar{L} = \frac{-u f''(u)(c^2 - u^2)^2 - 2c^2 f' w^2 + u^2 c^2 f'^3}{w(c^2 - u^2)^2} \quad (3.159)$$

$$\bar{M} = \frac{cw}{c^2 - u^2}, \quad N = \bar{N} = \frac{-u^2 f'(u)}{w} \quad (3.160)$$

haline gelir. Yüzey üzerinde A-şebekesi seçebilmek için yeni bir skala dönüşümüne daha ihtiyaç vardır.

$$\bar{u} = \int \frac{w}{G} d\bar{u} \quad (3.161)$$

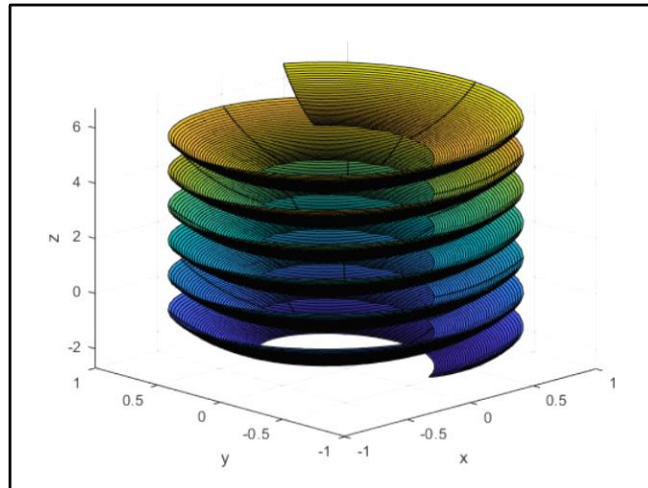
$$\bar{v} = \bar{v} \quad (3.162)$$

dönüşümü ile yüzeyin bulunan büyüklükleri

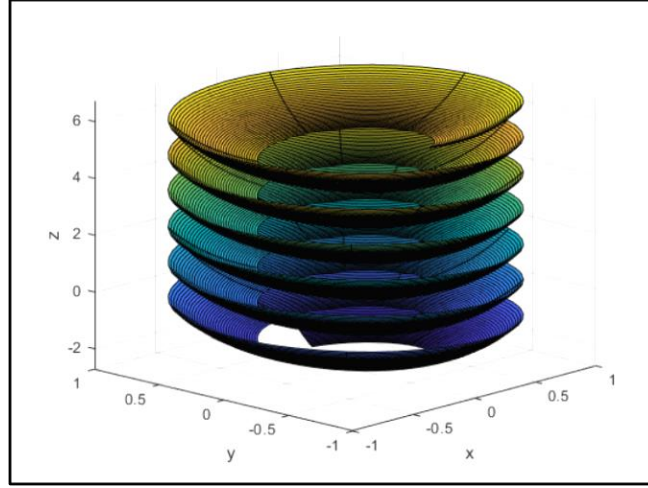
$$\bar{E} = \bar{G} = u^2 - c^2, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{M} = -c, \quad \bar{N} = \frac{-u^2 f'(u)}{w} \quad (3.163)$$

$$\bar{L} = \frac{-uf''(u)(c^2 - u^2)^2 - 2c^2 f'w^2 + u^2 c^2 f'^3}{w^3} \quad (3.164)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak uygun skala dönüşümleri yapılarak timelike dönme eksenli bir timelike helikoid yüzeyinin A-şebekesine sahip olduğu gösterilmiş oldu. Teorem 3.3 gereği A-şebekesine sahip olan bu yüzey bir Bonnet yüzeyidir. Bu yüzeyin yandaş yüzeyinin parametrik denklemi ise $\mathbf{z}(u, v) = (ucosv, usinv, f(u) - cv)$ şeklinde yazılır.



Şekil 3.3 Timelike dönme eksenli timelike helikoid (burada $f(u) = e^{(u^2)}$, $c = 0.2$, $u \in [0.5, 1]$, $v \in [-20, 20]$ alınmıştır.)



Şekil 3.4 Timelike dönme eksenli yandaş timelike helikoid (burada $f(u) = e^{(u^2)}$, $c = -0.2$, $u \in [0.5, 1]$, $v \in [-20, 20]$ alınmıştır.)

Örnek 3.2 (Spacelike dönme eksenli timelike 1.tip helikoid).

Üreteç eğrisi $\gamma = (g(v), v, 0)$ olmak üzere, $c^2 - v^2 < 0$ koşulu altında yani $v^2(1 + g'^2) - c^2 > 0$ için

$$\mathbf{y}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh u & \sinh u \\ 0 & \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(v) \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

veya

$$\mathbf{y}(u, v) = (g(v) + cu, v \cosh u, v \sinh u), \quad v > 0, \quad c \in R^+ \quad (3.166)$$

olarak parametrelendirilen yüzey, spacelike dönme eksenli bir timelike helikoid yüzeyidir [28], [52], [53]. Bu durumda yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$-E = c^2 - v^2 < 0, \quad F = cg', \quad G = 1 + g'^2 \quad (3.167)$$

$$L = \frac{-v^2 g'}{w}, \quad M = \frac{-c}{w}, \quad N = \frac{vg''}{w} \quad (3.168)$$

$$\langle N, N \rangle = w^2 = v^2(1 + g'^2) - c^2 > 0 \quad (3.169)$$

olarak hesaplanır. $\bar{u} = u + \int \frac{cg'}{c^2 - v^2} dv$ ve $\bar{v} = v$ skala dönüşümüyle yüzeyin temel form katsayıları

$$\bar{E} = E, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = \frac{w^2}{E} \quad (3.170)$$

$$\bar{L} = L = \frac{-v^2 g'}{w}, \quad \bar{M} = \frac{c\bar{w}}{-E}, \quad N = \bar{L} \left(\frac{cg'}{c^2 - v^2} \right)^2 + 2\bar{M} \left(\frac{cg'}{c^2 - v^2} \right) + \bar{N} \quad (3.171)$$

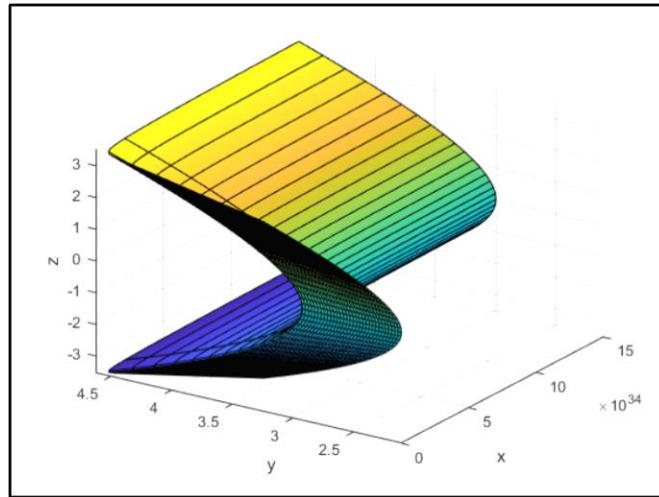
$$\bar{N} = \frac{vg''(c^2 - v^2)^2 + c^2 v^2 g'^3 - 2c^2 w^2 g'}{w(c^2 - v^2)^2} \quad (3.172)$$

haline dönüşür. Yüzey üzerinde A-şebekesi seçebilmek için $\bar{u} = \bar{u}, \bar{v} = \int \frac{w}{E} d\bar{v}$ olacak şekilde yeni skala dönüşümü tanımlansın. Bu durumda yüzeyin temel form katsayıları

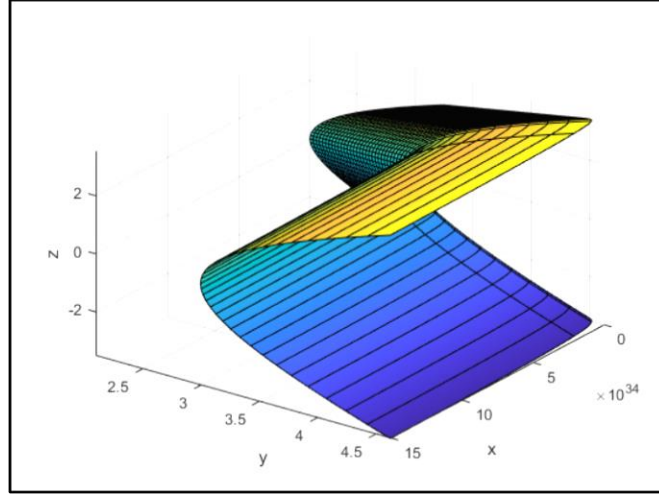
$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}} = v^2 - c^2, \quad \bar{\bar{F}} = 0, \quad \bar{\bar{M}} = -c \neq 0, \quad \bar{\bar{L}} = \frac{-v^2 g'}{w} \quad (3.173)$$

$$\bar{\bar{N}} = \frac{vg''(c^2 - v^2)^2 + c^2 v^2 g'^3 - 2c^2 w^2 g'}{w^3} \quad (3.174)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $\bar{v} = \text{sabit}$ ailesi ve ortogonal yörüngeleri bir A-şebekesi oluşturur. Teorem 3.3 gereği, üzerinde A-şebekesi bulunduran bu yüzey bir Bonnet yüzeyidir. Bu yüzeyin yandaş yüzeyinin parametrik denklemi ise $\mathbf{z}(u, v) = (g(v) - cu, v \cosh u, v \sinh u)$ şeklinde yazılır.



Şekil 3.5 Spacelike tip 1 dönme eksenli timelike helikoid ($g(v) = 5 \cos v + e^{3v^3}$, $c = 2, u \in [-1, 1], v \in [2.1, 3]$ alınmıştır.)



Şekil 3.6 Spacelike tip 1 dönme eksenli yandaş timelike helikoid (burada $g(v) = 5 \cos v + e^{3v^3}$, $c = -2$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [2.1, 3]$ alınmıştır.)

Örnek 3.3 (Spacelike dönme eksenli timelike 2.tip helikoid).

$\gamma = (g(u), 0, u)$ üreteç eğrisi ile $g'^2 - 1 < 0$ koşulu altında yani $u^2 + c^2 - u^2 g'^2 > 0$ için

$$\mathbf{y}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.175)$$

veya

$$\mathbf{y}(u, v) = (g(u) + cv, u \sinh v, u \cosh v), \quad u > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (3.176)$$

olarak parametrelendirilen yüzey, spacelike dönme eksenli bir timelike helikoid yüzeyidir [28], [52], [53]. Yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları, $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = w^2 = u^2 + c^2 - u^2 g'^2$ olmak üzere

$$-E = g'^2 - 1 < 0, \quad F = cg', \quad G = c^2 + u^2 \quad (3.177)$$

$$L = \frac{ug''}{w}, \quad M = \frac{-c}{w}, \quad N = \frac{-u^2 g'}{w} \quad (3.178)$$

şeklinde hesaplanır. $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v + \int \frac{cg'}{c^2 + u^2} du$ dönüşümü kullanılırsa,

$$-\bar{E} = \frac{-w^2}{\bar{G}}, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = G = c^2 + u^2 \quad (3.179)$$

$$\bar{L} = \frac{ug''(c^2 + u^2)^2 + 2c^2w^2g' + u^2c^2g'^3}{w(c^2 + u^2)^2} \quad (3.180)$$

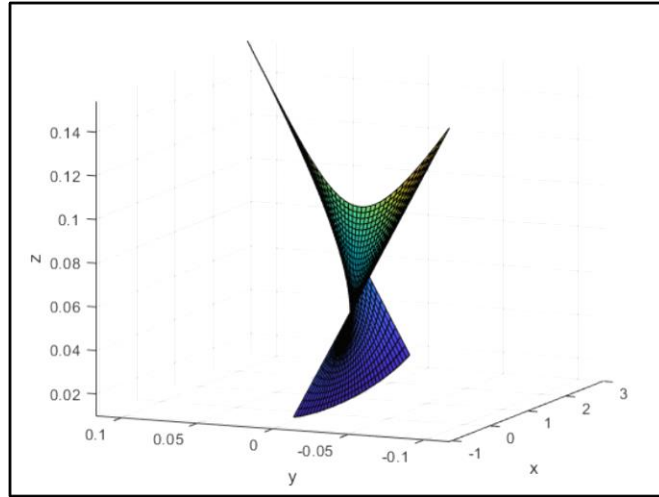
$$\bar{M} = \frac{-cw}{c^2 + u^2}, \quad \bar{N} = \frac{-u^2g'}{w} \quad (3.181)$$

elde edilir. Diğer bir $\bar{u} = \int \frac{w}{\bar{G}} d\bar{u}$, $\bar{v} = \bar{v}$ dönüşümünü uygularsak

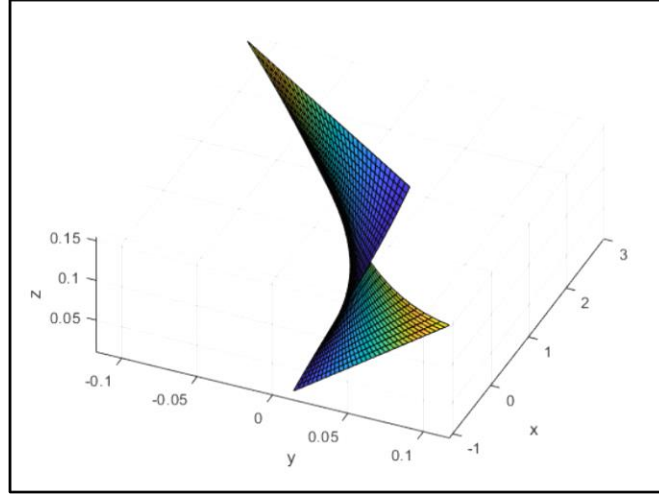
$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}} = c^2 + u^2, \quad \bar{\bar{F}} = 0, \quad \bar{\bar{M}} = -c \neq 0, \quad \bar{\bar{N}} = \frac{-u^2g'}{w} \quad (3.182)$$

$$\bar{\bar{L}} = \frac{ug''(c^2 + u^2)^2 + 2c^2w^2g' + u^2c^2g'^3}{w^3} \quad (3.183)$$

olarak bulunur. Böylece $\bar{\bar{v}} = \text{sabit}$ ailesi ve ortogonal yörüngeleri yüzey üzerinde bir A-şebekesi oluşturur. Teorem 3.3 gereği bu yüzey bir Bonnet yüzeyidir. Bu yüzeyin yandaş yüzeyinin parametrik denklemi ise $\mathbf{z}(u, v) = (g(u) - cv, u \sinh v, u \cosh v)$ şeklinde yazılır.



Şekil 3.7 Spacelike tip 2 dönme eksenli timelike helikoid (burada $g(u) = e^{-u}$, $c = 2$, $u \in [0.01, 0.1]$, $v \in [-1, 1]$ alınmıştır.)



Şekil 3.8 Spacelike tip 2 dönme eksenli yandaş timelike helikoid (burada $g(u) = e^{-u}$, $c = -2$, $u \in [0.01, 0.1]$, $v \in [-1, 1]$ alınmıştır.)

Örnek 3.4 (Null dönme eksenli timelike helikoid).

Üreteç eğrisi $\gamma = (0, u, f(u))$ ve $u \neq f(u)$ olmak üzere $1 - f'^2 < 0$ koşulu altında

$$\mathbf{y}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & v & -v \\ -v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ -v & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ f(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ cv \\ cv \end{pmatrix} \quad (3.184)$$

veya

$$\mathbf{y}(u, v) = \left((u - f)v, \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)u + \frac{v^2}{2}f(u) + cv, -\frac{v^2}{2}u + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)f(u) + cv \right) \quad (3.185)$$

şeklinde parametrelendirilen yüzey, null dönme eksenli bir timelike helikoid yüzeyidir [28], [52], [53]. Bu durumda yüzeyin temel form katsayıları

$$-E = 1 - f'^2 < 0, \quad F = (1 - f')c, \quad G = (u - f)^2 \quad (3.186)$$

$$L = \frac{(u-f)f''}{w}, \quad M = \frac{-c(1-f')^2}{w}, \quad N = \frac{(u-f)^2(f'-1)}{w} \quad (3.187)$$

$$\langle N, N \rangle = w^2 = (u - f)^2(f'^2 - 1) + (1 - f')^2 c^2 > 0 \quad (3.188)$$

şeklinde hesaplanır. $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v + \int \frac{c(1-f')}{(u-f)^2} du$ dönüşümü kullanılırsa

$$\bar{E} = \frac{w^2}{\bar{G}}, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = G = (u-f)^2 \quad (3.189)$$

$$\bar{L} = \frac{(u-f)^3 f'' + (1-f')^3 c^2}{w(u-f)^2} \quad (3.190)$$

$$\bar{M} = 0, \quad \bar{N} = N = \frac{(u-f)^2 (f' - 1)}{w} \quad (3.191)$$

olarak elde edilir. Son olarak; $\bar{u} = \int \frac{w}{\bar{G}} d\bar{u}$, $\bar{v} = \bar{v}$ dönüşümü uygulanırsa yüzeyin temel form katsayıları

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}} = (u-f)^2, \quad \bar{\bar{F}} = 0 \quad (3.192)$$

$$\bar{\bar{L}} = \frac{(u-f)^2 ((u-f)^3 f'' + (1-f')^3 c^2)}{w^3} \quad (3.193)$$

$$\bar{\bar{M}} = 0, \quad \bar{\bar{N}} = \frac{(u-f)^2 (f' - 1)}{w} \quad (3.194)$$

halini alır. $\bar{v} = \text{sabit}$ ve ortogonal yörüngeleri izotermik şebeke olup bu yüzeyin eğrilik çizgileri şebekesiyle çakışıktır ($\bar{\bar{M}} = 0$). Dolayısıyla bu yüzey, asal eğrilikler korunarak kendi üzerine izometrik tasvir olur. Bu sebeple, yüzey izotermik bir yüzey olur fakat bir Bonnet yüzeyi belirtmez.

3.5 Timelike Minimal Yüzeyler

Bu bölümde, yukarıda Bonnet probleminin çözümü olan ve dönme eksenlerine göre incelenen timelike Bonnet helikoidlerin arasından minimal yüzey olanlar araştırılacaktır. Bu amaçla, (u, v) izotermal koordinatlar ile verilmiş $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi için timelike minimal yüzey olma koşulu yani $\mathbf{y}_{uu} \cdot \mathbf{y}_{vv} = 0$ veya yüzeyin ikinci temel form katsayılarına göre düzenlenmiş hali olan $L - N = 0$ eşitliği kullanılacaktır [49].

Örnek 3.5 (Timelike dönme eksenli timelike helikoid).

$1 - (f'(u))^2 < 0$ ve $u^2 - c^2 > 0$ koşulu ile $\mathbf{y}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u) + cv)$, $u > 0$, $c \in \mathbb{R}^+$ parametrik denklemi verilen timelike helikoid yüzeyinin, timelike minimal yüzey olma şartını araştırmak için yüzeyin ikinci temel form katsayıları olan $\bar{N} = \frac{-u^2 f'(u)}{w}$, $\bar{L} = \frac{-uf''(u)(c^2 - u^2)^2 - 2c^2 f'w^2 + u^2 c^2 f'^3}{w^3}$ $L - N = 0$ eşitliğinde yerine yazalım. Elde edilen ikinci dereceden

$$-uf''(u)(c^2 - u^2)^2 - 2c^2 f'w^2 + u^2 c^2 f'^3 + u^2 f'w^2 = 0 \quad (3.195)$$

diferansiyel denkleminin çözümünü inceleyelim. Gerekli düzenlemeler yapıldığında denklem $(c^2 - u^2)[f' + uf''] + f'[u^2 f'^2 + c^2] = 0$ haline indirgenir. Buradan $uf' = t$, $\frac{dt}{du} = f' + uf''$ dönüşümü uygulanırsa denklem $\frac{dt}{t(t^2 + c^2)} = \frac{du}{u(u^2 - c^2)}$ halini alır. Değişkenlerine ayrılarak terim terime integre edilirse, $\frac{t^2}{(t^2 + c^2)K_1} = \frac{(u^2 - c^2)}{u^2}$ ve $K_1 = 1$ seçilerek $uf' = t$ dönüşümü yerine yazılırsa $f' = \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{u^2}}$ denklemi bulunur. Fakat buradan $u = c \sec \theta$ dönüşümü altında (3.195) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$f = c \left(\frac{\sqrt{u^2 - c^2}}{c} - \arccos\left(\frac{c}{u}\right) \right) + K_2 \quad (3.196)$$

olup bu çözümün $f' = \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{u^2}}$ türevi, yüzeyin birinci temel form katsayılarından $-E = \langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_u \rangle = 1 - (f'(u))^2 < 0$ şartını sağlamaz. Dolayısıyla (3.196) çözümünün (3.145) denkleminde yerine yazılması elde edilen yüzey, bir timelike minimal yüzey belirtmez.

Örnek 3.6 (Spacelike dönme eksenli timelike 1.tip helikoid).

$c^2 - v^2 < 0$ koşulu altında, $\mathbf{y}(u, v) = (g(v) + cu, v \cosh u, v \sinh u)$, $v > 0$, $c \in \mathbb{R}^+$ parametrik denklemi ile verilen timelike helikoid yüzeyinin timelike minimal yüzey olma koşulunu araştıralım. Yüzeyin ikinci temel form katsayıları olan $\bar{L} = \frac{-v^2 g'}{w}$,

$\bar{N} = \frac{vg''(c^2-v^2)^2 + c^2v^2g'^3 - 2c^2w^2g'}{w^3}$ büyüklüklerini $L - N = 0$ eşitliğinde yerine yazarak elde edilen ikinci dereceden

$$-vg''(c^2 - v^2)^2 - c^2v^2g'^3 + 2c^2w^2g' - v^2w^2g' = 0 \quad (3.197)$$

diferansiyel denkleminin çözümünü inceleyelim. Gerekli düzenlemeler yapıldığında denklem $(v^2 - c^2)[g' + vg''] + g'[(g'v)^2 - c^2] = 0$ haline indirgenir. Buradan $vg' = t$, $\frac{dt}{dv} = g' + vg''$ dönüşümü uygulanırsa denklem $\frac{dt}{t(t^2-c^2)} = \frac{dv}{v(c^2-v^2)}$ olarak bulunur. Değişkenlerine ayrılarak terim terime integre edilirse $\frac{(t^2-c^2)}{t^2K_1} = \frac{v^2}{(v^2-c^2)}$ ve $K_1 = 1$ seçilebilir. $vg' = t$ dönüşümü yerine yazıldığında $g' = \sqrt{\frac{c^2-v^2}{v^2}}$ ifadesi bulunur. Buradan $v = c \sin \theta$ dönüşümü altında (3.197) denkleminin

$$g(v) = c \left(\frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} - \ln \left| \frac{c}{v} + \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v} \right| \right) + K_2 \quad (3.198)$$

çözümü $-E = c^2 - v^2 < 0$ şartını sağlamadığı için (3.198) çözümünün (3.166) denkleminde yerine yazılması elde edilen yüzey, bir timelike minimal yüzey belirtmez.

Örnek 3.7 (Spacelike dönme eksenli timelike 2.tip helikoid).

$g'^2 - 1 < 0$ koşulu altında, $y(u, v) = (g(u) + cv, u \sinh v, u \cosh v)$, $u > 0$, $c \in R^+$ parametrik denklemi ile verilen timelike helikoid yüzeyinin timelike minimal yüzey olma koşulunu araştıralım. Yüzeyin ikinci temel form katsayıları olan $\bar{L} = \frac{ug''(c^2+u^2)^2 + 2c^2w^2g' + u^2c^2g'^3}{w^3}$, $\bar{N} = \frac{-u^2g'}{w}$ büyüklükleri $L - N = 0$ eşitliğinde yerine yazıldığında elde edilen ikinci dereceden

$$ug''(u)(c^2 + u^2)^2 + 2c^2w^2g' + u^2c^2g'^3 + u^2w^2g' = 0 \quad (3.199)$$

diferansiyel denklem gerekli düzenlemeler ile $(c^2 + u^2)(ug'' + g') = g'(u^2g'^2 - c^2)$ haline indirgenir. Buradan $ug' = t$, $\frac{dt}{du} = g' + ug''$ dönüşümü uygulanırsa denklem $\frac{dt}{t(t^2-c^2)} = \frac{du}{u(u^2+c^2)}$ olarak bulunur. Değişkenlerine ayrılarak terim terime integre edilirse $\frac{(t^2-c^2)}{t^2K_1} = \frac{u^2}{(u^2+c^2)}$ ve $K_1 = 1$ seçilebilir. $ug' = t$ dönüşümü yerine yazıldığında

$g' = \sqrt{\frac{c^2+u^2}{u^2}}$ ifadesi bulunur. Buradan $u = c \tan \theta$ dönüşümü altında (3.199) denkleminin

$$g = g(u) = \left(\sqrt{u^2 + c^2} - c \ln \frac{\sqrt{u^2 + c^2} + c}{\sqrt{u^2 + c^2} - c} + K_2 \right) \quad (3.200)$$

çözümü $-E = g'^2 - 1 < 0$ şartını sağlamadığı için (3.200) çözümünün (3.176) denkleminde yerine yazılması ile elde edilen yüzey, bir timelike minimal yüzey belirtmez.

4.1 Temel Kavramlar

Timelike yüzeyler için yapılan işlemlere benzer olarak $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ koordinat eğrilerinin dik olduğu, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ vektörel denklemi ile verilmiş bir spacelike yüzey ele alalım. Burada $v = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisini (c_1) ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisini (c_2) ile gösterelim. Bu yüzey üzerinde alınan bir P noktasından geçen keyfi bir spacelike eğri (c) olsun. (c) , (c_1) ve (c_2) spacelike parametre eğrilerinin P deki birim teğet vektörleri sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{t}_2$ ile yay uzunlukları da sırasıyla s, s^*, s^{**} ve P deki timelike birim normal vektörü $\mathbf{N}$ ile gösterilsin. Bu durumda kullanılacak temel kavramlar [44] den yararlanılarak aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \mathbf{N} \quad (4.3)$$

dir. (4.1) den $\mathbf{x}_u = \sqrt{E}\mathbf{t}_1$, $\mathbf{x}_v = \sqrt{G}\mathbf{t}_2$ olup ve bu ifadeler (4.2) de yerine yazılırsa

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds} = \sqrt{E}\mathbf{t}_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G}\mathbf{t}_2 \frac{dv}{ds} \quad (4.4)$$

olarak elde edilir. Burada $S_p = \{\mathbf{t}, \mathbf{t}_1\}$ düzleminin spacelike düzlem olduğu, yani $\mathbf{t}$ ile $\mathbf{t}_1$ arasındaki φ açısının spacelike açı olduğu kabul edilirse ($\mathbf{t}$ ile $\mathbf{t}_2$ arasındaki spacelike açı $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ dir)

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cos\varphi + \mathbf{t}_2 \sin\varphi \quad (4.5)$$

dir. (4.4) ve (4.5) eşitliğinin her iki taraf sırasıyla $\mathbf{t}_1$ ve $\mathbf{t}_2$ ile iç çarpılırsa,

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \rangle = \cos\varphi = \sqrt{E} \frac{du}{ds} = \frac{ds^*}{ds} \quad (4.6)$$

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}_2 \rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \frac{ds^{**}}{ds} \quad (4.7)$$

formülleri elde edilir; burada $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$, $ds^{*2} = Edu^2$, $ds^{**2} = Gdv^2$ dır. (4.1) den $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ spacelike yüzeyine ait birinci temel form katsayıları,

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = E, \quad \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = G, \quad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = F = 0 \quad (4.8)$$

şeklindedir [44].

4.2 Spacelike Yüzeylerin Cebirsel Değişmezleri

Yapılan bu ön hatırlatmalardan sonra $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ spacelike yüzeyi için Weingarten türev formülleri

$$\mathbf{N}_u = \alpha_1 \mathbf{x}_u + \beta_1 \mathbf{x}_v \quad (4.9)$$

$$\mathbf{N}_v = \alpha_2 \mathbf{x}_u + \beta_2 \mathbf{x}_v \quad (4.10)$$

olarak ifade edilebilir. (4.9) daki eşitlik $\mathbf{x}_u$ ve $\mathbf{x}_v$ ile skaler çarpılırsa

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \alpha_1 E \quad (4.11)$$

ve

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \beta_1 G \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. $\mathbf{N}$ yüzey normali $\mathbf{x}_u$ ile $\mathbf{x}_v$ nin belirlediği düzleme dik olduğundan $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ olarak yazılır. Buradan sırasıyla u ya göre türev alınır, $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -L$ ve $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -M$ olarak hesaplanır. Bulunan değerler (4.11) ve (4.12) de yazılırsa:

$$\langle N_u, x_u \rangle = \alpha_1 E = -L, \quad \alpha_1 = -\frac{L}{E} \quad (4.13)$$

$$\langle N_u, x_v \rangle = \beta_1 G = -M, \quad \beta_1 = -\frac{M}{G} \quad (4.14)$$

olur. Benzer işlemler (4.10) için tekrar edilirse,

$$\langle N_v, x_u \rangle = \alpha_2 E = -M, \quad \alpha_2 = -\frac{M}{E} \quad (4.15)$$

$$\langle N_v, x_v \rangle = \beta_2 G = -N, \quad \beta_2 = -\frac{N}{G} \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) katsayıları (4.9) ve (4.10) da yerine yazılırsa

$$N_u = \left(-\frac{L}{E}\right)x_u + \left(-\frac{M}{G}\right)x_v \quad (4.17)$$

$$N_v = \left(-\frac{M}{E}\right)x_u + \left(-\frac{N}{G}\right)x_v \quad (4.18)$$

bulunur. $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyinin birinci ve ikinci koordinat çizgisine göre alınmış $x_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$, $x_2 = \frac{x_v}{\sqrt{G}}$, $N_1 = \frac{N_u}{\sqrt{E}}$ ve $N_2 = \frac{N_v}{\sqrt{G}}$ türev ifadeleri bulduğumuz (4.17) ve (4.18) Weingarten türev formüllerinde yerlerine yazılırsa:

$$N_1 = \left(-\frac{L}{E}\right)x_1 + \left(-\frac{M}{\sqrt{EG}}\right)x_2 \quad (4.19)$$

ve

$$N_2 = \left(-\frac{M}{\sqrt{EG}}\right)x_1 + \left(-\frac{N}{G}\right)x_2 \quad (4.20)$$

olarak bulunmuş olur. Bu bilgilerden sonra şimdi de $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyinin Gauss türev formülleri

$$x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + \Gamma_{11}^3 N \quad (4.21)$$

$$x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + \Gamma_{12}^3 N \quad (4.22)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + \Gamma_{22}^3 \mathbf{N} \quad (4.23)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitliğin her iki yanını $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ ve $\mathbf{N}$ ile skaler çarpılır ve $\mathbf{x}_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$, $\mathbf{x}_2 = \frac{x_v}{\sqrt{G}}$, $\mathbf{N}_1 = \frac{N_u}{\sqrt{E}}$ ve $\mathbf{N}_2 = \frac{N_v}{\sqrt{G}}$ türev formülleri ile düzenlenirse

$$\mathbf{x}_{11} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \mathbf{x}_2 - \frac{L}{E} \mathbf{N} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{x}_{12} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \mathbf{x}_2 - \frac{M}{\sqrt{EG}} \mathbf{N} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{x}_{21} = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \mathbf{x}_1 - \frac{M}{\sqrt{EG}} \mathbf{N} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{x}_{22} = -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \mathbf{x}_1 - \frac{N}{G} \mathbf{N} \quad (4.27)$$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ vektörel denklemi ile verilmiş spacelike yüzeyinin $v = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisi (c_1) ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisi (c_2) nin yüzey üzerinde alınan bir P noktasındaki Darboux üçyüzlüsü $[\mathbf{t}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{N}]$ ve $[\mathbf{t}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{N}]$ şeklinde olup bu üçyüzlüler için

$$\mathbf{N} = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{t}_2 \quad \text{ve} \quad \mathbf{g}_2 = -\mathbf{t}_1 \quad (4.28)$$

dir [44]. Bu durumda, $\mathbf{N}$ birim normal vektörünün birinci ve ikinci koordinat çizgisine göre türevleri

$$\mathbf{N}_1 = \frac{d\mathbf{N}}{ds^*} = \kappa_n \mathbf{t}_1 + \tau_g \mathbf{g}_1 \quad (4.29)$$

ve

$$\mathbf{N}_2 = \frac{d\mathbf{N}}{ds^{**}} = \bar{\kappa}_n \mathbf{t}_2 + \bar{\tau}_g \mathbf{g}_2 \quad (4.30)$$

şeklinde ifade edilir [44].

a) $v = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin normal eğriliği κ_n ve geodezik burulması τ_g için (4.19), (4.28) ve (4.29) dan :

$$\mathbf{N}_1 = \left(-\frac{L}{E}\right)\mathbf{x}_1 + \left(-\frac{M}{\sqrt{EG}}\right)\mathbf{x}_2 = \kappa_n \mathbf{t}_1 + \tau_g \mathbf{g}_1 \quad (4.31)$$

$$\kappa_n = -\frac{L}{E} \quad (4.32)$$

$$\tau_g = -\frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (4.33)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca $v = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad (4.34)$$

şeklindedir [44].

b) $u = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin normal eğriliği $\bar{\kappa}_n$ ve geodezik burulması $\bar{\tau}_g$ için (4.20), (4.28) ve (4.30) dan

$$\mathbf{N}_2 = \left(-\frac{M}{\sqrt{EG}}\right)\mathbf{x}_1 + \left(-\frac{N}{G}\right)\mathbf{x}_2 = \bar{\kappa}_n \mathbf{t}_2 + \bar{\tau}_g \mathbf{g}_2 \quad (4.35)$$

$$\bar{\kappa}_n = -\frac{N}{G} \quad (4.36)$$

$$\bar{\tau}_g = \frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (4.37)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca $u = \text{sabit}$ koordinat eğrisinin geodezik eğriliği

$$\bar{\kappa}_g = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \quad (4.38)$$

şeklindedir [44]. O halde bulunan sonuçlar ile

$$\mathbf{N}_1 = \kappa_n \mathbf{x}_1 + \tau_g \mathbf{x}_2 \quad (4.39)$$

$$\mathbf{N}_2 = -\bar{\tau}_g \mathbf{x}_1 + \bar{\kappa}_n \mathbf{x}_2 \quad (4.40)$$

$$\mathbf{x}_{11} = \kappa_g \mathbf{x}_2 + \kappa_n \mathbf{N} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{x}_{12} = \bar{\kappa}_g \mathbf{x}_2 + \tau_g \mathbf{N} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{x}_{21} = -\kappa_g \mathbf{x}_1 + \tau_g \mathbf{N} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{x}_{22} = -\bar{\kappa}_g \mathbf{x}_1 + \bar{\kappa}_n \mathbf{N} \quad (4.44)$$

şeklinde düzenlenerek (4.19), (4.20), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) eşitliklerinin tüm katsayıları normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulma cinsinden yazılmış olur. Bu bilgilerden sonra şimdi de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ vektörel denklemi ile verilmiş spacelike yüzeyi için uygunluk koşulunu araştıralım. Yüzeyin herhangi bir $P(u, v)$ fonksiyonu için $P_{uv} = P_{vu}$ dir. Buna göre, koordinat eğrileri doğrultusunda yay uzunluğuna göre alınan P_{12} ve P_{21} türevleri arasındaki bağıntıyı bulmak için $P_{12} = \frac{P_{uv}}{\sqrt{EG}} - P_1 \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = \frac{P_{uv}}{\sqrt{EG}} + P_1 \kappa_g$, $P_{21} = \frac{P_{vu}}{\sqrt{EG}} - \frac{P_v}{\sqrt{G}} \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = \frac{P_{vu}}{\sqrt{EG}} - P_2 \bar{\kappa}_g$ türevleri düzenlenirse

$$P_{12} - P_1 \kappa_g = P_{21} + P_2 \bar{\kappa}_g \quad (4.45)$$

uygunluk koşulu elde edilir. Bulunan uygunluk koşulu yüzey normali için düzenlenirse

$$\mathbf{N}_{12} - \mathbf{N}_1 \kappa_g = \mathbf{N}_{21} + \mathbf{N}_2 \bar{\kappa}_g \quad (4.46)$$

elde edilir. Bu eşitlikten yararlanarak geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulmalar arasındaki bağıntıyı araştırmak için (4.46) de (4.19), (4.20) ve (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{12} - \mathbf{N}_1 \kappa_g &= \mathbf{x}_1 [(\kappa_n)_2 - \tau_g \bar{\kappa}_g - \kappa_g \kappa_n] + \mathbf{x}_2 [(\tau_g)_2 + \kappa_n \bar{\kappa}_g - \kappa_g \tau_g] \\ &\quad + \mathbf{N} [\kappa_n \tau_g + \tau_g \bar{\kappa}_n] \end{aligned} \quad (4.47)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{21} + \mathbf{N}_2 \bar{\kappa}_g &= \mathbf{x}_1 [(\tau_g)_1 + \tau_g \bar{\kappa}_g - \kappa_g \bar{\kappa}_n] + \mathbf{x}_2 [(\bar{\kappa}_n)_1 + \bar{\kappa}_g \bar{\kappa}_n + \tau_g \kappa_g] \\ &\quad + \mathbf{N} [\bar{\kappa}_n \tau_g + \kappa_n \tau_g] \end{aligned} \quad (4.48)$$

bulunur. (4.47) ve (4.48) den $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ve $\mathbf{N}$ ye ait katsayıları kendi arasında karşılaştırılırsa,

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) + (\tau_g)_1 + 2\tau_g\bar{\kappa}_g \quad (4.49)$$

ve

$$(\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) + (\tau_g)_2 - 2\tau_g\kappa_g \quad (4.50)$$

bulunur. Sonuç olarak bir spacelike yüzeyin $v = \text{sabit}$ spacelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrileri ile tanımlı (u, v) dik koordinat şebekesindeki büyüklükleri (4.49) ve (4.50) eşitliklerini sağlar.

Tanım 4.1. $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyi üzerinde seçilen $v = \text{sabit}$ spacelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrilerinin $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ metriği $\lambda = \lambda(u, v)$ ye bağlı fonksiyon olmak üzere $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ halinde yazılabiliyorsa (u, v) koordinat sistemine **izometrik şebeke (izotermal koordinat sistemi)** denir [23], [46], [47]. Diğer bir ifade ile (u, v) koordinat sistemi izometriktir.

Teorem 4.1. $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyi üzerinde seçilen $v = \text{sabit}$ spacelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrilerinin ds^2 metriğinin $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ şeklinde yazılabilmesi yani (u, v) koordinat sisteminin izometrik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0 \quad (4.51)$$

olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow x = x(u, v)$ spacelike yüzeyi üzerinde seçilen $v = \text{sabit}$ spacelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrilerinin $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ metriğinin $\lambda = \lambda(u, v)$ ye bağlı fonksiyon olmak üzere $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ halinde yazılabildiği kabul edilsin. Yani (u, v) koordinat sistemi izometrik olsun. Gösterilmesi gereken ifade $\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0$ dır.

Eğer $E = G$ ise $\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0$ olup koşul sağlanır.

Eğer $E \neq G$ ise bu durumda bu şebekeyi $\bar{E} = \bar{G}$ haline getirecek $\bar{u} = f(u)$, $\bar{v} = h(v)$ dönüşümü aranmalıdır. $S = S(u, v)$ genel bir fonksiyon, $S_u = S_{\bar{u}}f'(u)$, $S_v = S_{\bar{v}}h'(v)$ olup $\bar{E} = \bar{G}$ şartı altında, $\langle S_u, S_u \rangle = \langle S_{\bar{u}}f'(u), S_{\bar{u}}f'(u) \rangle$ yani $E = \bar{E}(f'(u))^2$.

$\langle S_v, S_v \rangle = \langle S_{\bar{v}} h'(v), S_{\bar{v}} h'(v) \rangle$ ve $G = \bar{G} (h'(v))^2$ yazılır. Buradan $\frac{E}{(f'(u))^2} = \frac{G}{(h'(v))^2}$ haline gelir. $(f'(u))^2 = A(u)$ ve $(h'(v))^2 = B(v)$ olarak tanımlanırsa $\frac{E}{G} = \frac{A(u)}{B(v)}$ olur. Aranılan $\bar{u} = f(u)$ ve $\bar{v} = h(v)$ dönüşümü $\bar{u} = \int \sqrt{A(u)} du$ ve $\bar{v} = \int \sqrt{B(v)} dv$ şeklinde alınır. $\frac{E}{G} = \frac{A(u)}{B(v)}$ şartı $\ln \frac{E}{G} = \ln \frac{A(u)}{B(v)} = \ln A(u) - \ln B(v)$ haline gelir. Buradan sırasıyla u ve v ye göre türev alınır, şebekenin izometrik olması şartı $\left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ olarak bulunmuş olur.

$\Leftrightarrow$ Şimdi $\left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ şartı ile $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyinin $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ metriğinin $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ olarak yazılabileceği yani (u, v) koordinat şebekesinin izometrik olduğu gösterilsin.

$\left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ ise $\frac{E}{G} = \frac{A(u)}{B(v)}$ yazılabilir. Burada $(f'(u))^2 = A(u)$; $(h'(v))^2 = B(v)$ dir.

Bu şart $\left(\ln \frac{E}{(f'(u))^2} - \ln \frac{G}{(h'(v))^2} \right)_{uv} = 0$ ifadesine eşdeğerdir. $\bar{u} = \int \sqrt{(f'(u))^2} du$ ve

$\bar{v} = \int \sqrt{(h'(v))^2} dv$ şeklinde yapılacak dönüşümle

$$\bullet \quad \langle x_u, x_u \rangle = E = \langle x_{\bar{u}} f'(u), x_{\bar{u}} f'(u) \rangle = \bar{E} (f'(u))^2$$

ve

$$\bullet \quad \langle x_v, x_v \rangle = G = \langle x_{\bar{v}} h'(v), x_{\bar{v}} h'(v) \rangle = \bar{G} (h'(v))^2$$

olup $\frac{E}{(f'(u))^2} = \frac{G}{(h'(v))^2}$ yani $\bar{E} = \bar{G}$ şartını verir. Böylece $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ metriği $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ şeklinde yazılabilir. Yani seçilen (u, v) koordinat şebekesi izometrik koordinatlardır.

Teorem 4.2. $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyi üzerinde seçilen $v = \text{sabit}$ spacelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike eğrilerinin dik koordinat sisteminde $\left(\ln \frac{E}{G} \right)_{uv} = 0$ koşulu

$$(\kappa_g)_1 = -(\bar{\kappa}_g)_2 \quad (4.52)$$

koşuluna eşdeğerdir.

İspat. Öncelikle teoremin ifadesinde geçen (4.34) ve (4.38) denklemlerinde $\sqrt{E} = e, \sqrt{G} = g$ alınırsa $(\kappa_g)_1 = \frac{\left(-\frac{e_v}{eg}\right)_u}{e}$ ve $(\bar{\kappa}_g)_2 = \frac{\left(\frac{gu}{eg}\right)_v}{g}$ haline gelir. Benzer işlemle (4.51) denklemi $\left(\ln \frac{e^2}{g^2}\right)_{uv} = 0$ yani $(\ln e)_{uv} = (\ln g)_{uv}$ şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda $(\ln e)_{uv} = \left(\frac{e_u}{e}\right)_v = \frac{ee_{uv} - e_u e_v}{e^2}$ ve $(\ln g)_{uv} = \left(\frac{g_v}{g}\right)_u = \frac{gg_{uv} - g_u g_v}{g^2}$ ifadeleri birbirine eşitlenirse

$$g^2 ee_{uv} - g^2 e_u e_v = e^2 gg_{uv} - e^2 g_u g_v \quad (4.53)$$

bulunur. $(\kappa_g)_1$ ve $(\bar{\kappa}_g)_2$ aşağıdaki şekilde düzenlenirse

$$\begin{aligned} (\kappa_g)_1 &= \frac{\left(-\frac{e_v}{eg}\right)_u}{e} = -\frac{ee_{uv}g - e_v(e_u g + eg_u)}{e^3 g^2} \\ &= -\frac{ee_{uv}g - e_u e_v g - ee_v g_u}{e^3 g^2} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} -(\bar{\kappa}_g)_2 &= -\frac{\left(\frac{gu}{eg}\right)_v}{g} = -\frac{g_{uv}eg - g_u(e_v g + eg_v)}{e^2 g^3} \\ &= -\frac{g_{uv}eg - g_u e_v g - eg_v g_u}{e^2 g^3} \end{aligned} \quad (4.55)$$

(4.52) den

$$g^2 ee_{uv} - g^2 e_u e_v = e^2 gg_{uv} - e^2 g_u g_v \quad (4.56)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.53) ve (4.56) eşitlikleri (4.51) ve (4.52) nın eşdeğer koşullar olduğunu göstermektedir.

Sonuç 4.1. $x = x(u, v)$ spacelike yüzeyi üzerinde seçilen $v = \text{sabit}$ spacelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrilerinin ds^2 metriğinin $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ şeklinde yazılabilmesi yani (u, v) koordinat sisteminin izometrik olması için gerek ve yeter şart $(\kappa_g)_1 = -(\bar{\kappa}_g)_2$ olmasıdır.

4.3 L^3 , 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Spacelike Bonnet Yüzeyleri

Burada literatürde farklı metotlarla ele alınan spacelike Bonnet yüzeyleri [16], [29] 3.bölümde timelike yüzeyler için kullanılan yöntemle benzer olarak, A-şebekesinin spacelike yüzeyler için genelleştirilmesi ile ele alınacaktır. Verilen bir S spacelike yüzeyinin ve yandaşı S' yüzeyinin büyüklükleri incelenecek ve Bonnet yüzeyi olma şartı açıklanacaktır.

Bilindiği üzere izometrik tasvir edebilen yüzeylerin birinci temel form katsayıları cinsinden ifade edilebilen K Gauss eğriliği korunduğu için S yüzeyi ve yandaşı S' yüzeyinin birinci temel form katsayıları birbirine eşittir. Bu sebeple, verilen bir S spacelike yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları sırasıyla E, F, G ve L, M, N ile gösterilmek üzere, yandaşı S' yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E' = E, \quad F' = F \quad \text{ve} \quad G' = G \quad (4.57)$$

dir. S yüzeyinin asal eğrilikleri r ve $\bar{r}$ ile gösterilirse

$$H = -\left(\frac{r + \bar{r}}{2}\right), \quad K = -r\bar{r}, \quad J = -\left(\frac{r - \bar{r}}{2}\right) \quad (4.58)$$

yandaşı S' yüzeyi üzerinde asal eğrilikler izometrik tasvirle korunduğundan

$$H = H', \quad K = K', \quad J = J' \quad (4.59)$$

olarak yazılabilir.

Söz konusu tasvirde S yüzeyinin eğrilik çizgilerinin S' yandaşı yüzeyi üzerinde karşılık geldiği ortogonal şebekeye (benzer olarak S' yandaşı yüzeyinin eğrilik çizgilerinin de S yüzeyi üzerinde karşılık geldiği ortogonal şebekeye) **Bonnet Şebekesi (B-Şebekesi)** denir. S yüzeyinin $v = \text{sabit}$ spacelike, $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrileri olarak eğrilik çizgileri ile Bonnet şebekesinin açığortay şebekesini seçelim. Koordinat şebekesinin $v = \text{sabit}$ spacelike eğri ailesi, birinci spacelike eğrilik çizgisi ailesi ile $\frac{\phi}{2}$ spacelike açısı yaparken, birinci spacelike Bonnet ailesi ile de $-\frac{\phi}{2}$ spacelike açısı yapar. Burada $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ dik koordinat şebekesinin normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları sırasıyla κ_n , $\bar{\kappa}_n$ ve $\tau_g, \bar{\tau}_g$ ile gösterilmek üzere K Gauss eğriliği

$$K = -r \bar{r} = -(\kappa_n \bar{\kappa}_n + \tau_g \bar{\tau}_g) \quad (4.60)$$

dir [44]. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ spacelike yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisi ailesi ile φ spacelike açısı yapan bir spacelike doğrultusuna ait κ_n normal eğriliği

$$\kappa_n = r \cos^2 \varphi + \bar{r} \sin^2 \varphi \quad (4.61)$$

eşitliği ile verilir [44]. Bu eğriye dik olan $u = \text{sabit}$ spacelike eğrisi için φ yerine $\varphi + \frac{\pi}{2}$ koyarsak normal eğrilik

$$\bar{\kappa}_n = \bar{r} \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi \quad (4.62)$$

dir [44]. $v = \text{sabit}$ spacelike eğri ailesi ile birinci spacelike eğrilik çizgisi ailesi arasında $\frac{\phi}{2}$ spacelike açısı olduğundan (4.61) de $\varphi = \frac{\phi}{2}$ yazılırsa

$$\kappa_n = r \cos^2 \frac{\phi}{2} + \bar{r} \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (4.63)$$

ve (4.62) de φ açısı yerine spacelike $\frac{\phi}{2}$ açısı alınırsa,

$$\bar{\kappa}_n = \bar{r} \cos^2 \frac{\phi}{2} + r \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (4.64)$$

dir. (4.63) den $\kappa_n = r \left(\frac{1+\cos \phi}{2} \right) + \bar{r} \left(\frac{1-\cos \phi}{2} \right) = \left(\frac{r+\bar{r}}{2} \right) + \cos \phi \left(\frac{r-\bar{r}}{2} \right)$ olup

$$\kappa_n = -H - J \cos \phi \quad (4.65)$$

bulunur. Benzer olarak (4.64) de trigonometrik eşitliklerden yararlanılırsa

$$\bar{\kappa}_n = -H + J \cos \phi \quad (4.66)$$

bulunur. Gauss eğriliği

$$K = -r \bar{r} = \left(\frac{r-\bar{r}}{2} \right)^2 - \left(\frac{r+\bar{r}}{2} \right)^2 = J^2 - H^2 \quad (4.67)$$

olarak ifade edilebilir. (4.65) ve (4.66) eşitlikleri (4.60) ifadesinde yerine yazılırsa

$$K = (H + J \cos \phi)(-H + J \cos \phi) + \tau_g^2 \quad (4.68)$$

bulunur, burada $\tau_g = -\bar{\tau}_g$ dir. (4.68) den

$$\tau_g = J \sin \phi \quad (4.69)$$

olarak elde edilir. Böylece S spacelike yüzeyinin büyüklükleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

a) $v = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması aşağıda verilmiştir.

$$\kappa_n = -H - J \cos \phi = -\frac{L}{E} \quad (4.70)$$

$$\kappa_g = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad (4.71)$$

$$\tau_g = J \sin \phi = -\frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (4.72)$$

b) $u = \text{sabit}$ spacelike parametre eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması aşağıda verilmiştir.

$$\bar{\kappa}_n = -H + J \cos \phi = -\frac{N}{G} \quad (4.73)$$

$$\bar{\kappa}_g = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \quad (4.74)$$

$$\bar{\tau}_g = -J \sin \phi = \frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (4.75)$$

S spacelike yüzeyinin asal eğriliklerinin bir izometrik tasvirle korunduğu S' yandaş yüzeyi için de benzer işlemleri yapalım. Bilindiği üzere S yüzeyinin eğrilik çizgileri yandaş S' yüzeyinde Bonnet şebekesine karşılık gelmekteydi. Dolayısıyla S' yüzeyinin birinci spacelike eğrilik çizgisi ile $v = \text{sabit}$ spacelike koordinat çizgisi arasındaki açı $-\frac{\phi}{2}$ olur. S' yandaş yüzeyinin büyüklükleri için yukarıda hesapladığımız büyüklüklerde ϕ açısı yerine $-\phi$ yazmak yeterli olacaktır.

c) $v = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması aşağıda verilmiştir.

$$\kappa_n' = -H - J \cos(-\phi) = -H - J \cos \phi \quad (4.76)$$

$$\kappa_n = \kappa_n' \quad (4.77)$$

$$\kappa_g' = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad (4.78)$$

$$\tau_g' = J \sin(-\phi) = -J \sin \phi = \frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (4.79)$$

d) $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması aşağıda verilmiştir.

$$\bar{\kappa}_n' = -H + J \cos(-\phi) = -H + J \cos \phi = \bar{\kappa}_n = -\frac{N}{G} \quad (4.80)$$

$$\bar{\kappa}_n' = \bar{\kappa}_n \quad (4.81)$$

$$\bar{\kappa}_g' = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \quad (4.82)$$

$$\bar{\tau}_g' = -J \sin(-\phi) = J \sin \phi = -\frac{M}{\sqrt{EG}} \quad (4.83)$$

$$\bar{\tau}_g' = -\bar{\tau}_g \quad (4.84)$$

Şimdi yukarıda büyüklükleri özetlenmiş S spacelike yüzeyinin Bonnet yüzeyi olması için sağlaması gereken koşulları araştıralım. S spacelike yüzeyinin $v = \text{sabit}$ spacelike ve $u = \text{sabit}$ spacelike koordinat eğrileri ile tanımlı (u, v) dik koordinat şebekesindeki (4.49) büyüklükleri S' yandaş yüzeyi için de yazılırsa

$$(\kappa_n')_2 = \kappa_g'(\kappa_n' - \bar{\kappa}_n') + (\tau_g')_1 + 2\tau_g'\bar{\kappa}_g' \quad (4.85)$$

ve $\kappa_n = \kappa_n'$, $\kappa_g = \kappa_g'$, $\tau_g' = -\tau_g$, $\bar{\kappa}_n' = \bar{\kappa}_n$, $\bar{\kappa}_g' = \bar{\kappa}_g$ eşitliklerine göre yeniden düzenlenirse

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) - (\tau_g)_1 - 2\tau_g\bar{\kappa}_g \quad (4.86)$$

olarak elde edilir. (4.49) ve (4.86) eşitlikleri taraf tarafa toplanır

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) \quad (4.87)$$

ve çıkartılırsa

$$\frac{(\tau_g)_1}{\tau_g} = -2\bar{\kappa}_g, \quad (\ln|\tau_g|)_1 = -2\bar{\kappa}_g \quad (4.88)$$

elde edilir. Benzer işlemler diğer uygunluk koşulu olan (4.50) eşitliği için de uygulanırsa

$$(\bar{\kappa}_n')_1 = \bar{\kappa}_g'(\kappa_n' - \bar{\kappa}_n') + (\tau_g')_2 - 2\tau_g'\kappa_g' \quad (4.89)$$

(4.89) eşitliği $\bar{\kappa}_n' = \bar{\kappa}_n$, $\bar{\kappa}_g' = \bar{\kappa}_g$, $\tau_g' = -\tau_g$, $\kappa_n = \kappa_n'$, $\kappa_g = \kappa_g'$ için yeniden düzenlenirse

$$(\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) - (\tau_g)_2 + 2\tau_g\kappa_g \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.50) ve (4.90) eşitlikleri taraf tarafa toplanır

$$(\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) \quad (4.91)$$

ve çıkartılırsa

$$\frac{(\tau_g)_2}{\tau_g} = 2\kappa_g, \quad (\ln|\tau_g|)_2 = 2\kappa_g \quad (4.92)$$

elde edilir. Dolayısıyla verilen bir S spacelike yüzeyinin Bonnet yüzeyi olması için,

$$(\kappa_n)_2 = \kappa_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n), \quad (\bar{\kappa}_n)_1 = \bar{\kappa}_g(\kappa_n - \bar{\kappa}_n) \quad (4.93)$$

$$(\ln|\tau_g|)_1 = -2\bar{\kappa}_g, \quad (\ln|\tau_g|)_2 = 2\kappa_g \quad (4.94)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

Tanım 4.2. Bir S spacelike yüzeyi üzerinde $E = G$, $F = 0$, $M = \text{sabit} \neq 0$ koşullarını sağlayan bir (u, v) koordinat şebekesi mevcutsa, bu şebekeye **A-Şebekesi** denir.

Teorem 4.3. İzotermik olmayan S spacelike yüzeyinin Bonnet yüzeyi olması için gerek ve yeter şart A-şebekesine sahip olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ Varsayalım ki S spacelike yüzeyi bir Bonnet yüzeyi olsun. Bu durumda yüzey (4.93) ve (4.94) denklemlerini sağlar. (4.94) denkleminde (4.45) uygunluk koşulu uyarlandığında

$$(\ln|\tau_g|)_{12} - (\ln|\tau_g|)_1 \kappa_g = (\ln|\tau_g|)_{21} + (\ln|\tau_g|)_2 \bar{\kappa}_g \quad (4.95)$$

$$(-2\bar{\kappa}_g)_2 - (-2\bar{\kappa}_g)\kappa_g = (2\kappa_g)_1 + 2\kappa_g \bar{\kappa}_g \quad (4.96)$$

$$(\kappa_g)_1 = -(\bar{\kappa}_g)_2 \quad (4.97)$$

elde edilir ki bu eşitlik dik koordinat sisteminin izometrik olma koşulu olan $\left(\ln \frac{E}{G}\right)_{uv} = 0$ ile eşdeğerdir. Bu ise Teorem 4.1 den $E = G$, $F = 0$ olarak ifade edilir. $E = G$ koşulu altında (4.94), (4.34) ve (4.38) eşitliklerine göre tekrar düzenlenirse $(\ln|\tau_g|)_2 = 2\kappa_g = 2\frac{1}{2}(\ln \frac{1}{E})_2$, $(\ln|\tau_g|)_1 = -2\bar{\kappa}_g = -2\frac{1}{2}(\ln E)_1 = (\ln \frac{1}{E})_1$ halini alır. Buradan $\tau_g = \frac{c}{E} = -\frac{M}{E}$ yani $M = -c = \text{sabit}$ bulunur. Dolayısıyla S yüzeyi bir Bonnet yüzeyi ise üzerinde $E = G$, $F = 0$, $M = -c = \text{sabit}$ koşullarını gerçekleyen bir A-Şebekesi vardır.

$\Leftarrow$ Şimdi de S yüzeyi üzerinde A-Şebekesi tanımlı olduğunu varsayalım. Bu durumda yüzeyin bir Bonnet yüzeyi olduğu gösterilmelidir. Yüzey üzerinde $E = G$, $F = 0$, $M = -c = \text{sabit}$ koşulunu sağlayan bir A-Şebekesi var olsun. İspata geçmeden önce yüzeyin temel form katsayılarını H ve $J \neq 0$ cinsinden ifade edelim. $E = G$, $M = -c = \text{sabit} = -1$ olarak alındığında $\tau_g = J \sin \phi = -\frac{M}{\sqrt{EG}}$ olduğundan $\tau_g = \frac{1}{E}$ halini alır. Burada

$$E = G = \frac{1}{\tau_g} = \frac{1}{J \sin \phi}, \quad F = 0 \quad (4.98)$$

$$\kappa_n = -H - J \cos \phi = -\frac{L}{E}, \quad L = \frac{1}{J \sin \phi} (H + J \cos \phi) \quad (4.99)$$

$$\bar{\kappa}_n = -H + J \cos \phi = -\frac{N}{G}, \quad N = \frac{1}{J \sin \phi} (H - J \cos \phi) \quad (4.100)$$

$$M = \varepsilon = \operatorname{sgn}(J) \quad (4.101)$$

olarak hesaplanır. Şimdi bu yüzeyin Bonnet yüzeyi olduğunu ispatlayalım. Herhangi bir S yüzeyi Bonnet yüzeyi ise (4.94) eşitlikleri sağlamalıdır yani

$$(\ln|\tau_g|)_1 = \frac{(\ln|\tau_g|)_u}{\sqrt{|J| \sin \phi}} = \frac{|\tau_g|_u}{|\tau_g| \sqrt{|J| \sin \phi}} \quad (4.102)$$

$$= \frac{(|J| \sin \phi)_u}{\sqrt{|J| \sin \phi}} = \frac{(E^{-1})_u}{\sqrt{\frac{1}{E}}} = -\frac{E_u}{E\sqrt{E}}$$

$$-2\bar{\kappa}_g = -2 \frac{(\sqrt{E})_u}{E} = -\frac{E_u}{E\sqrt{E}} \quad (4.103)$$

ve

$$(\ln|\tau_g|)_2 = \frac{(\ln|\tau_g|)_v}{\sqrt{|J| \sin \phi}} = \frac{(|\tau_g|)_v}{|\tau_g| \sqrt{|J| \sin \phi}} \quad (4.104)$$

$$= \frac{(|J| \sin \phi)_v}{\sqrt{|J| \sin \phi}} = \frac{(E^{-1})_v}{\sqrt{\frac{1}{E}}} = -\frac{E_v}{E\sqrt{E}}$$

$$2\kappa_g = -2 \frac{(\sqrt{E})_v}{E} = -\frac{E_v}{E\sqrt{E}} \quad (4.105)$$

dir. O halde S yüzeyi, üzerinde A-Şebekesi tanımlı olan bir Bonnet yüzeyidir. Yandaş S' yüzeyinin temel form katsayıları

$$E = E' = G = G' = \frac{1}{|J| \sin \phi} \quad (4.106)$$

$$F = F' = 0 \quad (4.107)$$

$$\kappa_n = \kappa_n' = -H - J \cos \phi = -\frac{L}{E}, \quad L = L' = \frac{1}{|J| \sin \phi} (H + J \cos \phi) \quad (4.108)$$

$$\bar{\kappa}_n' = \bar{\kappa}_n = -H + J \cos \phi = -\frac{N}{G}, \quad N = N' = \frac{1}{|J| \sin \phi} (H - J \cos \phi) \quad (4.109)$$

$$\tau_g' = -\tau_g = \frac{M'}{\sqrt{EG}}, \quad M' = c = \text{sabit} \quad (4.110)$$

Buradan yandaş S' yüzeyinin de Bonnet yüzeyi olduğu kolayca görülür. S spacelike yüzeyi için, yukarıda bulunan büyüklükler (4.49), (4.50) de yerine yazılırsa

$$\frac{(-H - J \cos \phi)_v}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}} = 2J \cos \phi \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}\right)_v}{\frac{1}{|J| \sin \phi}} + \frac{(J \sin \phi)_u}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}} + 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}\right)_u J \sin \phi}{\frac{1}{|J| \sin \phi}} \quad (4.111)$$

ve

$$\frac{(-H + J \cos \phi)_u}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}} = -2J \cos \phi \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}\right)_u}{\frac{1}{|J| \sin \phi}} + \frac{(J \sin \phi)_v}{\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}} + 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{|J| \sin \phi}}\right)_v (J \sin \phi)}{\frac{1}{|J| \sin \phi}} \quad (4.112)$$

bulunur. (4.111) ve (4.112) düzenlenerek

$$\frac{H_v}{J} = \frac{\phi_v}{\sin \phi} \quad (4.113)$$

ve

$$\frac{H_u}{J} = \frac{-\phi_u}{\sin \phi} \quad (4.114)$$

halini alır.

Sonuç 4.2. (4.113) ve (4.114) den

$$\frac{\phi_u}{\sin \phi} = \left(\ln \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right)_u \quad (4.115)$$

ve

$$\frac{\phi_v}{\sin \phi} = \left(\ln \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right)_v \quad (4.116)$$

olup

$$\left(\frac{H_u}{J} \right)_v + \left(\frac{H_v}{J} \right)_u = 0 \quad (4.117)$$

dır.

4.4 Spacelike Yüzey Üzerinde Bazı Bağlıntılar

3-boyutlu Lorentz uzayında verilen $\phi(u, v)$ fonksiyonunun Beltrami (Laplasyen) operatörü

$$\Delta \phi = \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right\} \quad (4.118)$$

şeklindedir [33]. (4.118) eşitliği, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ spacelike yüzeyi için hesaplanan metrik tensör ve Γ_{ij}^k Christoffel katsayıları ile düzenlendiğinde

$$\Delta \phi = \phi_{11} + \phi_{22} + \phi_1 \bar{\kappa}_g - \phi_2 \kappa_g \quad (4.119)$$

haline gelir. Çalışmamızda $E = G$ alınacağından

$$\Delta \phi = \frac{1}{E} [\phi_{uu} + \phi_{vv}] \quad (4.120)$$

olarak düzenlenir.

Sonuç 4.3. K Gauss eğriliği

$$2K = -\frac{1}{E} [(\ln E)_{uu} + (\ln E)_{vv}] = -\Delta(\ln E) \quad (4.121)$$

dir. Çünkü [44] de yüzeyin birinci temel form katsayıları olan E, G ve bunların türevleri

cinsinden verilen $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{E}} \right) \right]$ ifadesi $E = G$ olarak

alındığından, $K = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\ln \sqrt{E})_u + \frac{\partial}{\partial v} (\ln \sqrt{E})_v \right] = -\frac{1}{2E} [(\ln E)_{uu} + (\ln E)_{vv}]$ olup

(4.121) i verir.

Teorem 4.4. Parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri κ_g ve $\bar{\kappa}_g$ olan (u, v) dik koordinat sistemi ile θ spacelike açısı yapan (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta\theta + (\kappa_g)_1 + (\bar{\kappa}_g)_2 = 0 \quad (4.122)$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat. Parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri κ_g^* ve κ_g° olan (u', v') dik koordinat sistemi, parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri κ_g ve $\bar{\kappa}_g$ olan (u, v) dik koordinat sistemi ile θ spacelike açısı yapsın. Bu durumda,

$$q_{1'} = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta \quad (4.123)$$

$$q_{2'} = -q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta \quad (4.124)$$

eşitlikleri sağlanır [44]. Ayrıca $v = \text{sabit}$ spacelike eğrisi ile θ spacelike açısı yapan bir spacelike v' eğrisinin geodezik eğriliği [44]:

$$\kappa_g^* = \kappa_g \cos \theta + \bar{\kappa}_g \sin \theta + \frac{d\theta}{ds} \quad (4.125)$$

$$\kappa_g^* = \kappa_g \cos \theta + \bar{\kappa}_g \sin \theta + [\theta_1 \cos \theta + \theta_2 \sin \theta] \quad (4.126)$$

$$\kappa_g^* = (\kappa_g + \theta_1) \cos \theta + (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \sin \theta \quad (4.127)$$

olarak ifade edilir. Bu eğriye dik olan $\theta + \frac{\pi}{2}$ spacelike açısı yapan spacelike u' eğrisinin geodezik eğriliği [44]:

$$\kappa_g^\circ = -(\kappa_g + \theta_1) \sin \theta + (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \cos \theta \quad (4.128)$$

biçiminde yazılır [44]. Geodezik eğriliklerin birinci ve ikinci koordinat çizgisine göre türevlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \kappa_{g_1}^* &= (\kappa_{g_1} + \theta_{11}) \cos \theta - \theta_1 \sin \theta (\kappa_g + \theta_1) \\ &+ (\bar{\kappa}_{g_1} + \theta_{21}) \sin \theta + \theta_1 \cos \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2) \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{g_1}^{\circ} &= -(\kappa_{g_1} + \theta_{11}) \sin \theta - \theta_1 \cos \theta (\kappa_g + \theta_1) \\ &+ (\bar{\kappa}_{g_1} + \theta_{21}) \cos \theta - \theta_1 \sin \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2)\end{aligned}\quad (4.130)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{g_2}^* &= (\kappa_{g_2} + \theta_{12}) \cos \theta - \theta_2 \sin \theta (\kappa_g + \theta_1) \\ &+ (\bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22}) \sin \theta + \theta_2 \cos \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2)\end{aligned}\quad (4.131)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{g_2}^{\circ} &= -(\kappa_{g_2} + \theta_{12}) \sin \theta - \theta_2 \cos \theta (\kappa_g + \theta_1) \\ &+ (\bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22}) \cos \theta - \theta_2 \sin \theta (\bar{\kappa}_g + \theta_2)\end{aligned}\quad (4.132)$$

Bu eşitlikleri

$$(\kappa_g^*)_1' = \kappa_{g_1}^* \cos \theta + \kappa_{g_2}^* \sin \theta \quad (4.133)$$

$$(\kappa_g^{\circ})_2' = -\kappa_{g_1}^{\circ} \sin \theta + \kappa_{g_2}^{\circ} \cos \theta \quad (4.134)$$

formüllerinde yerine yazarak taraf tarafa toplarsak ,

$$\begin{aligned}(\kappa_g^*)_1' + (\kappa_g^{\circ})_2' &= (\kappa_{g_1} + \theta_{11}) + \theta_1(\bar{\kappa}_g + \theta_2) \\ &- \theta_2(\kappa_g + \theta_1) + (\bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22})\end{aligned}\quad (4.135)$$

$$(\kappa_g^*)_1' + (\kappa_g^{\circ})_2' = \kappa_{g_1} + \theta_{11} + \theta_1 \bar{\kappa}_g - \theta_2 \kappa_g + \bar{\kappa}_{g_2} + \theta_{22} \quad (4.136)$$

elde edilir. (4.119) ve (4.136) dan

$$(\kappa_g^*)_1' + (\kappa_g^{\circ})_2' = \kappa_{g_1} + \bar{\kappa}_{g_2} + \Delta \theta \quad (4.137)$$

dir. (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik olma koşulu $(\kappa_g^*)_1' = -(\kappa_g^{\circ})_2'$ olduğundan (4.137) de yerine yazarsak, $\kappa_{g_1} + \bar{\kappa}_{g_2} + \Delta \theta = 0$ bulunur. Tersine olarak $\kappa_{g_1} + \bar{\kappa}_{g_2} + \Delta \theta = 0$ eşitliğini kabul edip (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik olma koşulunu araştıralım. (4.127) ve (4.128) denklemlerinin sırasıyla 1' ve 2' koordinat çizgisine göre türevlerini alıp toplarsak, $(\kappa_g^*)_1' + (\kappa_g^{\circ})_2' = 0$ elde edilir. Bu ise (u', v') dik koordinat sisteminin izometrik şebeke olmasını ifade eder.

Sonuç 4.4. İzometrik iki sistem arasındaki açı harmoniktir. Yani $\Delta\theta = 0$ dır.

Örnek 4.1 (Timelike dönme eksenli spacelike helikoid).

Üreteç eğrisi $\gamma = (0, u, f(u))$ olarak verilmiş $1 - (f'(u))^2 > 0$; $u^2 - c^2 > 0$ ve $u^2 - c^2 - u^2(f'(u))^2 > 0$ koşulu altında

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ f(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix} \quad (4.138)$$

veya

$$x(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, f(u) + cv), \quad u > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (4.139)$$

olarak parametrelendirilen yüzey, timelike dönme eksenli bir spacelike helikoid yüzeyidir [28], [52], [53]. Bu durumda yüzeyin birinci temel form katsayıları ve $\langle N, N \rangle = -w^2$ aşağıdaki şekildedir:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = 1 - (f'(u))^2 > 0 \quad (4.140)$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = -cf'(u) \quad (4.141)$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = u^2 - c^2 > 0 \quad (4.142)$$

$$\langle N, N \rangle = -w^2 = -u^2 + c^2 + u^2(f'(u))^2 < 0 \quad (4.143)$$

ikinci temel form katsayıları ise,

$$L = \langle x_{uu}, N \rangle = \frac{-uf''(u)}{w}, \quad M = \langle x_{uv}, N \rangle = \frac{c}{w}, \quad N = \langle x_{vv}, N \rangle = -\frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.144)$$

şeklinde hesaplanır. Burada,

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = v + \int \frac{-cf'(u)}{u^2 - c^2} du \quad (4.145)$$

skala dönüşümüyle yüzeyin temel form katsayıları

$$\bar{E} = \frac{w^2}{G}, \quad \bar{F} = 0, \quad G = \bar{G} = u^2 - c^2 \quad (4.146)$$

$$L = \bar{L} + \frac{-2cf'(u)}{u^2 - c^2} \bar{M} + \left(\frac{-cf'(u)}{u^2 - c^2} \right)^2 \bar{N} \quad (4.147)$$

$$\bar{M} = \frac{cw}{u^2 - c^2}, \quad N = \bar{N} = -\frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.148)$$

$$\bar{L} = \frac{-uf''(u)(u^2 - c^2)^2 + 2c^2 w^2 f' + u^2 c^2 f'^3}{w(u^2 - c^2)^2} \quad (4.149)$$

haline gelir. Yüzeyin üzerinde A-şebekesi olması için

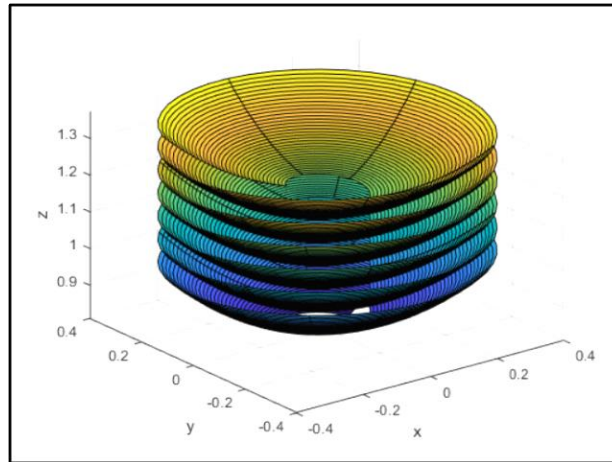
$$\bar{u} = \int \frac{w}{G} d\bar{u}, \quad \bar{v} = \bar{v} \quad (4.150)$$

skala dönüşümüne ihtiyaç vardır. Böylece yüzeyin bulunan büyüklükleri

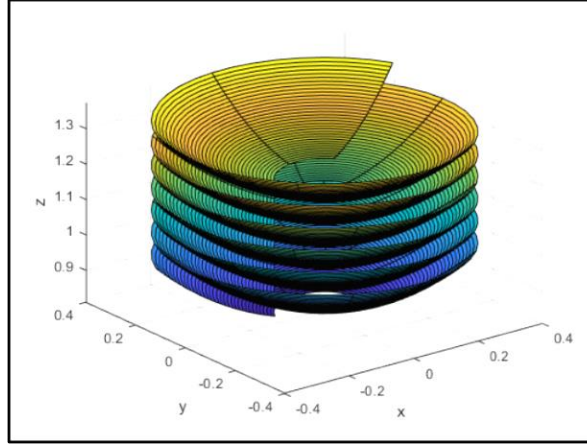
$$\bar{E} = \bar{G} = u^2 - c^2, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{M} = c \neq 0, \quad \bar{N} = -\frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.151)$$

$$\bar{L} = \frac{-uf''(u)(u^2 - c^2)^2 + 2c^2 w^2 f' + u^2 c^2 f'^3}{w^3} \quad (4.152)$$

şeklinde olur. Teorem 4.3 gereği, timelike dönme eksenli bir spacelike helikoid yüzeyinin A-şebekesine sahip olduğu ve böylelikle A-şebekesine sahip olan bu yüzeyin bir Bonnet yüzeyi olduğu gösterilmiş oldu. Yandaş yüzeyinin parametrik denklemi ise $\mathbf{z}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, f(u) - cv)$ dir.



Şekil 4.1 Timelike dönme eksenli spacelike helikoid (burada $f(u) = e^{(u^2)}$, $c = 0.01$, $u \in [0.1, 0.4]$, $v \in [-20, 20]$ alınmıştır.)



Şekil 4.2 Timelike dönme eksenli spacelike yandaş helikoid ($f(u) = e^{(u^2)}$,

$c = -0.01$, $u \in [0.1, 0.4]$, $v \in [-20, 20]$ alınmıştır.)

Örnek 4.2 (Spacelike dönme eksenli spacelike 1. tip helikoid).

$\gamma = (f(u), u, 0)$ üreteç eğrisi ile $c^2 - u^2 > 0$ ve $c^2 - u^2 - u^2(f'(u))^2 > 0$ koşulu altında

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.153)$$

veya

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) + cv, u \cosh v, u \sinh v), \quad u > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (4.154)$$

şeklinde parametrelendirilen yüzey, spacelike 1.tip dönme eksenli bir spacelike helikoid yüzeyidir [28], [52], [53]. Bu durumda yüzeyin birinci temel form katsayıları ve $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -w^2$ aşağıdaki şekildedir:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1 + (f'(u))^2 > 0 \quad (4.155)$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = cf'(u) \quad (4.156)$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = c^2 - u^2 > 0 \quad (4.157)$$

ikinci temel form katsayıları ise,

$$L = \langle x_{uu}, N \rangle = \frac{-uf''(u)}{w}, \quad M = \langle x_{uv}, N \rangle = \frac{c}{w}, \quad N = \langle x_{vv}, N \rangle = \frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.158)$$

$$\langle N, N \rangle = -w^2 = -c^2 + u^2 + u^2 (f'(u))^2 < 0 \quad (4.159)$$

dir. Aşağıda verilen skala dönüşümüyle

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = v + \int \frac{cf'(u)}{c^2 - u^2} du \quad (4.160)$$

yüzeyin temel büyüklükleri

$$\bar{E} = \frac{w^2}{\bar{G}}, \quad \bar{F} = 0, \quad G = \bar{G} = c^2 - u^2 > 0 \quad (4.161)$$

$$\bar{M} = \frac{cw}{\bar{G}}, \quad N = \bar{N} = \frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.162)$$

$$\bar{L} = \frac{-uf''(u)(c^2 - u^2)^2 - 2c^2 w^2 f' - u^2 c^2 f'^3}{w(c^2 - u^2)^2} \quad (4.163)$$

şeklinde elde edilir ve

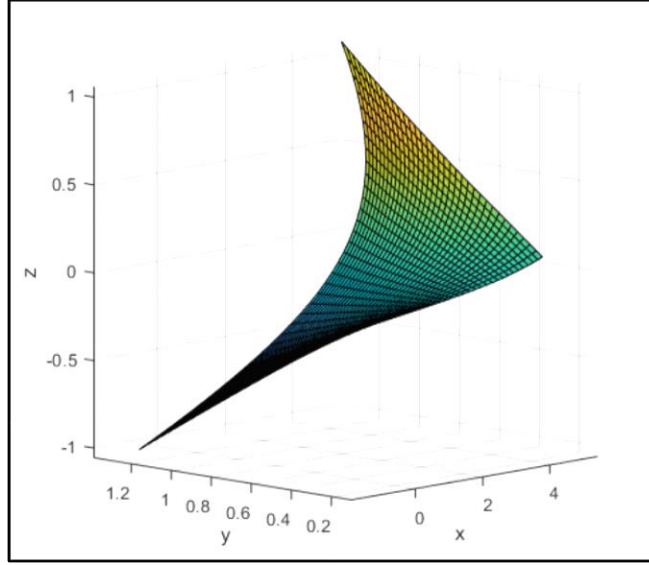
$$\bar{\bar{u}} = \int \frac{\bar{w}}{\bar{G}} d\bar{u}, \quad \bar{\bar{v}} = \bar{v} \quad (4.164)$$

skala dönüşümü ile yüzeyin bulunan büyüklükleri

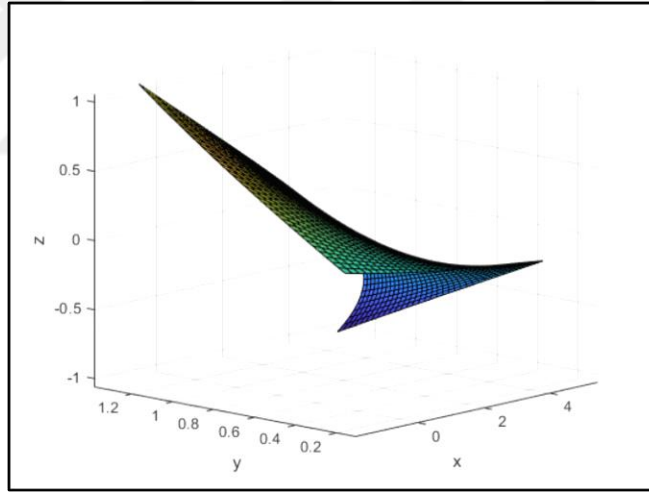
$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}} = c^2 - u^2 > 0, \quad \bar{\bar{F}} = 0, \quad \bar{\bar{M}} = c \neq 0, \quad \bar{\bar{N}} = \frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.165)$$

$$\bar{\bar{L}} = \frac{-uf''(u)(c^2 - u^2)^2 - 2c^2 w^2 f' - u^2 c^2 f'^3}{w^3} \quad (4.166)$$

haline gelir. Teorem 4.3 gereği, spacelike 1.tip dönme eksenli bir spacelike helikoid yüzeyinin A-şebekesine sahip olduğu ve A-şebekesine sahip olan bu yüzeyin böylece bir Bonnet yüzeyi olduğu gösterilmiş olur. Bu yüzeyin yandaş yüzeyinin parametrik denklemi ise $\mathbf{z}(u, v) = (f(u) - cv, u \cosh v, u \sinh v)$ şeklindedir.



Şekil 4.3 Spacelike dönme eksenli spacelike 1.tip helikoid (burada $f(u) = e^u$, $c = 3$, $u \in [0.1, 0.9]$, $v \in [-1, 1]$ alınmıştır.)



Şekil 4.4 Spacelike dönme eksenli spacelike 1.tip yandaş helikoid (burada $f(u) = e^u$, $c = -3$, $u \in [0.1, 0.9]$, $v \in [-1, 1]$ alınmıştır.)

Örnek 4.3 (Spacelike dönme eksenli spacelike 2. tip helikoid).

$\gamma = (f(u), 0, u)$ üreteç eğrisi ile $(f'(u))^2 - 1 > 0$ ve $u^2(f'(u))^2 - c^2 - u^2 > 0$ koşulu altında

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.167)$$

veya

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) + cv, u \sinh v, u \cosh v), \quad u > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (4.168)$$

şeklinde parametrelendirilen yüzey, spacelike 2.tip dönme eksenli bir spacelike helikoid yüzeyidir [28], [52], [53]. Bu durumda yüzeyin birinci temel form katsayıları ve $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -w^2$ aşağıdaki şekildedir:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = (f'(u))^2 - 1 > 0 \quad (4.169)$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = cf'(u) \quad (4.170)$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = c^2 + u^2 > 0 \quad (4.171)$$

ikinci temel form katsayıları ise,

$$L = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle = \frac{uf''(u)}{w}, \quad M = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = -\frac{c}{w}, \quad N = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = -\frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.172)$$

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -w^2 = -u^2 (f'(u))^2 + c^2 + u^2 < 0 \quad (4.173)$$

şeklindedir.

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = v + \int \frac{cf'(u)}{c^2 + u^2} du \quad (4.174)$$

skala dönüşümüyle yüzeyin büyüklükleri

$$\bar{E} = \frac{w^2}{G}, \quad \bar{F} = 0, \quad G = \bar{G} = c^2 + u^2 \quad (4.175)$$

$$\bar{M} = \frac{cw}{\bar{G}}, \quad N = \bar{N} = -\frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.176)$$

$$\bar{L} = \frac{uf''(u)(c^2 + u^2)^2 - 2c^2 w^2 f' + u^2 c^2 f'^3}{w(c^2 + u^2)^2} \quad (4.177)$$

şeklinde elde edilir ve diğer bir

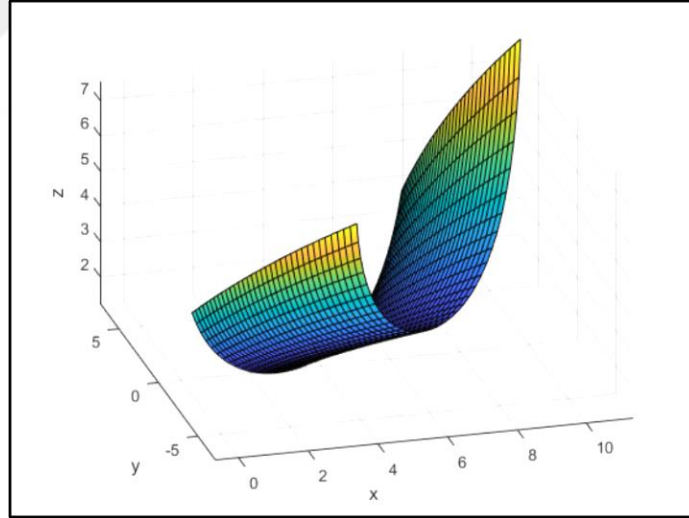
$$\bar{u} = \int \frac{w}{G} d\bar{u}, \quad \bar{v} = \bar{v} \quad (4.178)$$

skala dönüşümüyle yüzeyin bulunan büyüklükleri

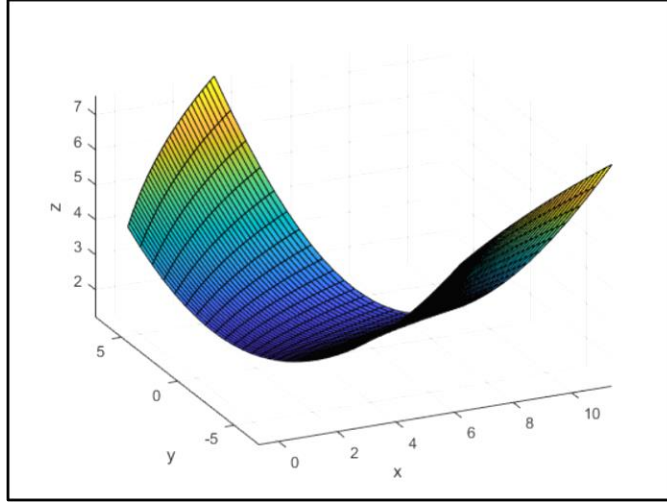
$$\bar{E} = \bar{G} = c^2 + u^2, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{M} = c \neq 0, \quad \bar{N} = -\frac{u^2 f'(u)}{w} \quad (4.179)$$

$$\bar{L} = \frac{uf''(u)(c^2 + u^2)^2 - 2c^2 w^2 f' + u^2 c^2 f'^3}{w^3} \quad (4.180)$$

şekline gelir. Sonuç olarak uygun skala dönüşümleri yapılarak spacelike 2.tip dönme eksenli bir spacelike helikoid yüzeyinin üzerinde bir A-şebekesi elde edilmiş ve böylece teorem 4.3 gereği A-şebekesine sahip olan bu yüzeyin bir Bonnet yüzeyi olduğu gösterilmiş olur. Bu yüzeyin yandaş yüzeyinin parametrik denklemi ise $\mathbf{z}(u, v) = (f(u) - cv, u \sinh v, u \cosh v)$ şeklinde yazılır.



Şekil 4.5 Spacelike dönme eksenli spacelike 2.tip helikoid (burada $f(u) = e^u$, $c = 2$, $u \in [1.2, 2]$, $v \in [-2, 2]$ alınmıştır.)



Şekil 4.6 Spacelike dönme eksenli spacelike 2.tip yandaş helikoid (burada $f(u) = e^u$, $c = -2$, $u \in [1, 2]$, $v \in [-2, 2]$ alınmıştır.)

Örnek 4.4 (Null dönme eksenli spacelike helikoid).

$u \neq f(u)$ ve $\gamma = (0, u, f(u))$ üreteç eğrisi olmak üzere, $1 - f'^2 > 0$ ve $(u - f)^2(1 - f'^2) - (1 - f')^2 c^2 > 0$ koşulu altında

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & v & -v \\ -v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ -v & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ f(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ cv \\ cv \end{pmatrix} \quad (4.181)$$

veya

$$\mathbf{x}(u, v) = \left((u - f)v, \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)u + \frac{v^2}{2}f(u) + cv, -\frac{v^2}{2}u + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)f(u) + cv \right) \quad (4.182)$$

olarak parametrelendirilen yüzey, null dönme eksenli bir helikoid yüzeyidir [28], [52], [53]. Yüzeyin temel form katsayıları ve $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -w^2$ aşağıdaki şekildedir:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1 - f'^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = (1 - f')c, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (u - f)^2 \quad (4.183)$$

$$L = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle = \frac{(u-f)f''}{w}, \quad M = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = \frac{-c(1-f')^2}{w}, \quad N = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = \frac{(u-f)^2(f'-1)}{w} \quad (4.184)$$

$$\langle N, N \rangle = -w^2 = -(u-f)^2(1-f'^2) + (1-f')^2c^2 < 0. \quad (4.185)$$

$\bar{u} = u$, $\bar{v} = v + \int \frac{c(1-f')}{(u-f)^2} du$ dönüşümü kullanırsa

$$\bar{E} = \frac{w^2}{G}, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = G = (u-f)^2 \quad (4.186)$$

$$L = \bar{L} + 2\bar{M} \frac{c(1-f')}{(u-f)^2} + \bar{N} \left(\frac{c(1-f')}{(u-f)^2} \right)^2, \quad \bar{M} = 0, \quad \bar{N} = N = \frac{(u-f)^2(f'-1)}{w} \quad (4.187)$$

$$\bar{L} = \frac{f''(u-f)^3 + c^2(1-f')^3}{w(u-f)^2} \quad (4.188)$$

bulunur. İlave olarak, $\bar{u} = \int \frac{w}{G} d\bar{u}$, $\bar{v} = \bar{v}$ dönüşümü uygulanırsa temel büyüklükler

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}} = (u-f)^2, \quad \bar{\bar{F}} = 0, \quad \bar{\bar{M}} = 0 \quad (4.189)$$

$$\bar{\bar{L}} = \frac{(u-f)^2((u-f)^3f'' + c^2(1-f')^3)}{w^3} \quad (4.190)$$

$$\bar{\bar{N}} = \frac{(u-f)^2(f'-1)}{w} \quad (4.191)$$

halini alır. Bu durumda $\bar{v} = \text{sabit}$ ve ortogonal yörüngeleri izometrik bir şebeke olup yüzeyin eğrilik çizgileri şebekesiyle çakışıktır, yani yüzey izotermik bir yüzeydir ($M = 0$). Bu durum yüzeyin asal eğrilikler korunarak kendi üzerine tasvir olduğunu gösterir. Dolayısıyla, yüzey izotermik bir yüzey olur fakat bir Bonnet yüzeyi belirtmez.

4.5 Spacelike Maksimal Yüzeyler

Bu bölümde, yukarıda dönme eksenlerine göre ayrı ayrı incelenmiş spacelike Bonnet helikoid yüzeylerinin hangi koşullar altında spacelike maksimal yüzey olduğu araştırılmıştır.

Bilindiği gibi, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ spacelike yüzeyi $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \neq 0$ ve $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde yani (u, v) izotermal koordinatlarla verildiğinde, bu yüzeyin ortalama eğriliğinin $H = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ sağlamasıdır [49]. Bu şartı sağlayan yüzeye **spacelike maksimal yüzey** adı verilir. Verilen bu koşul düzenlendiğinde yüzeyin ikinci temel form katsayılarından $L + N = 0$ eşitliği elde edilir

ve ortaya çıkan diferansiyel denklemin çözümünün varlığı spacelike maksimal yüzeyi verir.

Örnek 4.5 (Timelike dönme eksenli spacelike helikoid).

$1 - (f'(u))^2 > 0$; $u^2 - c^2 > 0$ ve $u^2 - c^2 - u^2(f'(u))^2 > 0$ koşulu altında verilmiş $\mathbf{x}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, f(u) + cv)$, $u > 0$, $c \in \mathbb{R}^+$ spacelike Bonnet helikoid yüzeyinin aynı zamanda bir spacelike maksimal yüzey olup olmadığını araştıralım. $L + N = 0$ eşitliğinde yüzeyin ikinci temel form katsayılarını yerine yazıp ortaya çıkan diferansiyel denklemin çözümünü inceleyelim.

$\bar{L} = \frac{-uf''(u^2 - c^2)^2 + 2c^2w^2f' + u^2c^2f'^3}{w^3}$, $\bar{N} = -\frac{u^2f'(u)}{w}$ katsayıları eşitlikte yerine yazılırsa, $-uf''(u^2 - c^2)^2 + 2c^2w^2f' + u^2c^2f'^3 - w^2f'u^2 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem gerekli düzenlemeler ile, $-(u^2 - c^2)[uf'' + f'] + f'[(uf')^2 + c^2] = 0$ halini alır; $uf' = t$, $\frac{dt}{du} = uf'' + f'$ dönüşümü yapılırsa $\int \frac{dt}{t(t^2 + c^2)} = \int \frac{du}{u(u^2 - c^2)}$ integraline indirgenir. Bu integralin $\frac{t^2}{(t^2 + c^2)K_1} = \frac{(u^2 - c^2)}{u^2}$ çözümünde $K_1 = 1$ seçilerek, $uf' = t$ dönüşümünde t yerine yazıldığında $f' = \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{u^2}}$ elde edilir. Bu eşitliğin çözümü için $u = c \sec \theta$ dönüşümü yapılırsa genel çözüm

$$f = c \left(\frac{\sqrt{u^2 - c^2}}{c} - \arccos\left(\frac{c}{u}\right) \right) + K_2 \quad (4.192)$$

dir. $f' = \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{u^2}}$ türevi, (4.139) denklemi ile verilen yüzeyin $1 - (f')^2 > 0$ şartını sağlar fakat $u^2 - c^2 - u^2(f'(u))^2 > 0$ şartını sağlamaz. Dolayısıyla (4.192) çözümünün (4.139) denkleminde yerine yazılması ile elde edilen yüzey bir spacelike maksimal yüzey belirtmez.

Örnek 4.6 (Spacelike dönme eksenli spacelike 1.tip helikoid).

$c^2 - u^2 > 0$ ve $c^2 - u^2 - u^2(f'(u))^2 > 0$ koşulu altında parametrik denklemi $\mathbf{x}(u, v) = (f(u) + cv, u \cosh v, u \sinh v)$, $u > 0$, $c \in \mathbb{R}^+$ olan spacelike Bonnet helikoid yüzeyinin aynı zamanda bir spacelike maksimal yüzey olup olmadığını araştıralım. $L + N = 0$ eşitliğinde yüzeyin ikinci temel form

katsayıları: $\bar{L} = \frac{-uf''(u)(c^2-u^2)^2-2c^2w^2f'-u^2c^2f'^3}{w^3}$, $\bar{N} = \frac{u^2f'(u)}{w}$ eşitlikte yerine yazılırsa $-uf''(c^2-u^2)^2-2c^2w^2f'-u^2c^2f'^3+w^2u^2f'=0$ denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler ile $(u^2-c^2)[uf''+f'] + f'[(uf')^2-c^2] = 0$ halini alır. Bu denklemin çözümü için; $uf' = t$, $\frac{dt}{du} = uf'' + f'$ dönüşümü yapılırsa $\int \frac{dt}{t(t^2-c^2)} = \int \frac{-du}{u(u^2-c^2)}$ integraline indirgenir. Bu integralin $\frac{(t^2-c^2)}{t^2K_1} = \frac{u^2}{(u^2-c^2)}$ çözümünde $K_1 = 1$ seçilerek, $uf' = t$ dönüşümünde t yerine yazıldığında $f' = \sqrt{\frac{c^2-u^2}{u^2}}$ elde edilir. Bu eşitliğin çözümü için $u = c \sin \theta$ dönüşümü yapılırsa genel çözüm

$$f = c \left(\frac{\sqrt{c^2-u^2}}{c} - \ln \left| \frac{c}{u} + \frac{\sqrt{c^2-u^2}}{u} \right| \right) + K_2 \quad (4.193)$$

dir. $f' = \sqrt{\frac{c^2-u^2}{u^2}}$ türevi $1 + (f')^2 > 0$ şartını sağlar fakat $c^2-u^2 - u^2(f'(u))^2 > 0$ şartını sağlamaz. Dolayısıyla (4.193) çözümünün (4.154) denkleminde yerine yazılması ile elde edilen yüzey bir spacelike maksimal yüzey belirtmez.

Örnek 4.7 (Spacelike dönme eksenli spacelike 2.tip helikoid).

$(f'(u))^2 - 1 > 0$ ve $u^2(f'(u))^2 - c^2 - u^2 > 0$ koşulu altında parametrik denklemi $x(u, v) = (f(u) + cv, u \sinh v, u \cosh v)$, $u > 0$, $c \in \mathbb{R}^+$ olan spacelike Bonnet helikoid yüzeyinin aynı zamanda bir spacelike maksimal yüzey olup olmadığını araştıralım. $L + N = 0$ eşitliğinde $\bar{L} = \frac{uf''(c^2+u^2)^2-2c^2w^2f'+u^2c^2f'^3}{w^3}$, $\bar{N} = -\frac{u^2f'}{w}$ katsayıları yerine yazılırsa $uf''(c^2+u^2)^2-2c^2w^2f'+u^2c^2f'^3-u^2w^2f'=0$ denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $(u^2+c^2)[uf''+f'] - f'[(uf')^2-c^2] = 0$ olup $uf' = t$, $\frac{dt}{du} = uf'' + f'$ dönüşümü ile $\int \frac{dt}{t(t^2-c^2)} = \int \frac{du}{u(u^2+c^2)}$ integraline ulaşılır. Bu integralin $\frac{(t^2-c^2)}{t^2K_1} = \frac{u^2}{(u^2+c^2)}$ çözümünde $K_1 = 1$ seçilerek, $uf' = t$ dönüşümünde t yerine yazıldığında $f' = \sqrt{\frac{c^2+u^2}{u^2}}$ elde edilir. Bu eşitliğin çözümü için $u = c \tan \theta$ dönüşümü yapılırsa genel çözüm

$$f = \left(\sqrt{u^2 + c^2} - c \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 + c^2} + c}{\sqrt{u^2 + c^2} - c} \right| + K_2 \right) \quad (4.194)$$

olarak bulunur. Bu f çözümü $f'^2 - 1 > 0$ şartını sağlar fakat $u^2(f'(u))^2 - c^2 - u^2 > 0$ şartını sağlamaz. Dolayısıyla (4.194) çözümünün (4.168) denkleminde yerine yazılması ile elde edilen yüzey bir spacelike maksimal yüzey belirtmez.

Bu tezde, 3-boyutlu Öklid uzayında Z. Soyuçok'un [2] çalışmasındaki birbirleri arasında asal eğrilikleri koruyacak şekilde aşık olmaya bir izometri kabul edebilen yüzeylerin belirlenmesi problemi (yani Bonnet problemi) üzerine geliştirdiği kriter, 3-boyutlu Lorentz uzayına genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme Lorentz uzayındaki timelike ve spacelike yüzeyler için ayrı ayrı ele alınmıştır. Lorentz uzayında örnekler vermek amacıyla [52]'de helikoidler için yapılmış olan sınıflandırmalar göz önüne alınarak timelike, spacelike ve null dönme eksenli helikoidlerden Bonnet yüzeyi olanlar araştırılmıştır. Yapılan bu araştırma sonucunda timelike ve spacelike helikoid yüzeyleri incelenerek null dönme eksenli timelike ve spacelike yüzeyler hariç olmak üzere A-şebekesinin timelike ve spacelike helikoidler için tanımlanabildiği gösterilmiş ve böylece bu yüzeylerin Bonnet yüzeyleri olduğu tespit edilmiştir.

Bu yapılan çalışmaya ek olarak, 3-boyutlu Lorentz uzayında incelenen timelike ve spacelike Bonnet helikoid yüzey örneklerinin timelike minimal ve spacelike maksimal yüzey olma durumları incelenmiştir.

Araştırmacılar için problemin farklı uzaylarda farklı boyutlarla incelenebileceği önerilebilir.

- [1] O. Bonnet, "Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée," *J. École Polytech*, vol. 42, pp. 72-92, 1867.
- [2] Z. Soyucok, "The problem of non-trivial isometries of surfaces preserving principal curvatures," *J. Geometry*, vol. 52, no. 1-2, pp. 173-188, 1995.
- [3] I. M. Roussos, "Global results on Bonnet Surfaces," *Journal of Geometry*, vol. 65, no. 1-2, pp. 151-168, 1999.
- [4] I. I. Bodrenko, "A generalization of Bonnet's theorem on Darboux surfaces," *Mathematical notes*, vol. 95, no. 6, pp. 760-767, 2014.
- [5] Z. Kose, M. Toda, E. Aulisa, "Solving Bonnet problems to construct families of surfaces," *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, vol. 16, no. 2, pp. 70-80, 2011.
- [6] F. Kanbay, "Bonnet Ruled Surfaces," *Acta Mathematica Sinica, English Series*, vol. 21, no. 3, pp. 623-630, 2005.
- [7] I. M. Roussos, "Tangential Developable Surfaces as Bonnet Surfaces," *Acta Mathematica Sinica, English Series*, vol. 15, no. 2, pp. 269-276, 1999.
- [8] I. M. Roussos, "Principal curvature preserving isometries of surfaces in ordinary space," *Bol Soc. Bras. Mat*, vol. 18, no. 2, pp. 95-105, 1987.
- [9] U. Eitner, "Schlesinger Transformations for Bonnet Surfaces," *Nonlinearity & geometry*, vol. PWN, pp. 245-256, 1996.
- [10] A. Bobenko, U. Eitner, "Bonnet surfaces and Painleve equations," *J. Reine Angew. Math*, vol. 499, pp. 47-79, 1998.
- [11] G. Kamberov, F. Pedit, U. Pinkall, "Bonnet pairs and isothermic surfaces," *Duke Math. J*, vol. 92, no. 3, pp. 637-644, 1998.
- [12] W. Yang, "On O. Bonnet III-Isometry of surfaces in three dimensional Euclidean Space," *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, vol. 49, pp. 90-110, 1990.
- [13] I. M. Roussos, "The Helicoidal Surfaces as Bonnet Surfaces," *Tōhoku Math. J.*, vol. 40, pp. 485-490, 1988.
- [14] F. Kanbay, "On the Pairs of Orthogonal Ruled Surfaces," *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 205-210, 2012.

- [15] S. S. Chern, "Deformation of Surfaces Preserving Principal Curvatures," in *Diff. Geom. and Complex Analysis, H. E. Rauch Memorial Volume*, Springer Verlag, 1985, pp. 155-163.
- [16] A. İnalcık ve S. Ersoy, "Non-null helicoidal surfaces as non-null bonnet surfaces," *Matematicki Vesnik*, vol. 68, no. 3, pp. 182-191, 2016.
- [17] W. Chen ve L. Haizhong, "On the classification of the timelike Bonnet surfaces", *Geometry & Topology of Submanifolds, X*, pp. 18–31, 1999.
- [18] S. Ersoy ve K. Eren, "Timelike tangent developable surfaces and Bonnet surfaces", *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 6837543, pp. 7, 2016.
- [19] F. Manhart, "Bonnet–Thomsen surfaces in Minkowski Geometry," *Journal of Geometry*, vol. 106, no. 1, pp. 47-61, 2015.
- [20] G. Grantcharov, R. Salom., "Bonnet pairs of surfaces in Minkowski space," *Afr. Diaspora J. Math*, vol. 14, no. 2, pp. 57-75, 2012.
- [21] A. Fujioka, "Bonnet Surfaces with Non-flat Normal Bundle in the Hyperbolic Four-space," *Far east journal of mathematical sciences*, vol. 30, no. 2, pp. 381-387, 2008.
- [22] Y. Z. Zhang, "Bonnet surface with parallel mean curvature direction in R^4 ," *J. Math. Res. Exposition*, vol. 25, no. 1, pp. 104-113, 2005.
- [23] M. A. Magid, "Lorentzian Isothermic Surfaces and Bonnet Pairs," *Annales polonici mathematici*, vol. 83, no. 2, 2004.
- [24] A. Fujioka, "Bonnet Surfaces in Four-Dimensional Space Forms," *International Journal of Mathematics*, vol. 15, no. 10, pp. 981-985, 2004.
- [25] A. Fujioka and J. Inoguchi, "Timelike Bonnet surfaces in Lorentzian space forms," *Differential Geometry and its Applications*, vol. 18, no. 1, pp. 103-111, 2003.
- [26] A. Fujioka and J. Inoguchi, "Bonnet surfaces with constant curvature," *Results in Math*, vol. 33, pp. 288-293, 1998.
- [27] K. Eren. ve S. Ersoy, "Timelike Bonnet surfaces with non-constant curvature," *Sakarya University Journal of Science*, vol. 17, no. 1, pp. 113-118, 2013.
- [28] S. Kaya, R. López, "On the duality between rotational minimal surfaces and maximal surfaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 458, pp. 345-360, 2018.
- [29] A. Fujioka and J. Inoguchi, "Spacelike Surfaces with Harmonic Inverse Mean Curvature," *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, vol. 7, no. 4, pp. 657-698, 2000.

- [30] J. A. Galvez, A. Martinez ve P. Mira, "The Bonnet problem for surfaces in homogeneous 3-manifolds," *communications in analysis and geometry*, vol. 16, no. 5, pp. 907-935, 2008.
- [31] W. Chen ve L. Haizhong, "Bonnet Surfaces and Isothermic Surfaces," *Result. Math.*, vol. 31, no. 1-2, pp. 40-52, 1997.
- [32] A. B. Springborn, "Bonnet pairs in the 3-sphere," *Contemporary Mathematics*, vol. 308, pp. 297-303, 2002.
- [33] B. O'Neill, *Semi Riemann Geometry with Applications to Relativity*, Newyork: Academic press, 1983.
- [34] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Newyork: Springer-Verlag, 1994.
- [35] W. Kuhnel, *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds*, AMS. vol. 16. 2nd edition, 2006.
- [36] R. Lopez, "Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space," *International Electronic Journal of Geometry*, vol. 7, no. 1, pp. 44-107, 2014.
- [37] Y. Fu, X. Wang, "Classification of Timelike Constant Slope Surfaces in 3-Dimensional Minkowski Space," *Results. Math.*, vol. 63, no. 3-4, p. 1095–1108, 2013.
- [38] Y. Fu, D. Yang, "On constant slope spacelike surfaces in 3-dimensional Minkowski space," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 385, no. 1, pp. 208-220, 2012.
- [39] H. W. Greub, *Linear Algebra*, Newyork: Springer-Verlag, 3rd edition, 1967.
- [40] K. Agutagawa ve S. Nishikawa, "The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribe Mean Curvature in Minkowski 3-Space," *Tōhoko Math., J.*, vol. 42, pp. 67-82, 1990.
- [41] S. M. Choi, "On the Gauss Map of Ruled Surfaces in a Three-Dimensional Minkowski Space," *Tsukuba J. Math*, vol. 19, no. 2, pp. 285-304, 1995.
- [42] W. Sodsiri, *Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space*, Katholieke Universiteit Leuven: Phd.Thesis, 2005.
- [43] A. Turgut, *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*, Ankara: Doktora tezi, Gazi Üniversitesi Fen bilimleri enstitüsü, 1995.

- [44] H. H. Uğurlu ve A. Çalışkan, Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Manisa: Celal Bayar Üniversitesi yayınları, 1.baskı, ISBN: 978-975-8628-24-7, 2012.
- [45] T. I. Couto ve A. Lymberopoulos,, Introduction to Lorentz Geometry Curves and Surfaces, Crc Press, first edition, 2021.
- [46] W. Goemans, Surfaces in three-dimensional Euclidean and Minkowski space, in a particular a study of Weingarten surfaces, Leuven: Katholieke Universiteit Faculty of Science, 2010.
- [47] V. Gorkavyy, "On minimal lightlike surfaces in Minkowski space–time," *Differential Geom. Appl.*, vol. 26, no. 2, pp. 133-139, 2008.
- [48] T. Weinstein, An Introduction to Lorentz Surface, Berlin, Newyork: Walter de Gruyter, 1996.
- [49] Y. W. Kim, S. E. Koh, H. Shin ve S. D. Yang, "Spacelike Maksimal Surfaces, Timelike Minimal Surfaces and Björling Representation Formulae," *J. Korean Math. Soc.*, vol. 48, no. 5, pp. 1083-1100, 2011.
- [50] L. V. Mcnertney, One-parameter families of surface with constant Curvature in Lorentz 3-Space, Phd Thesis, Brown University, 1980.
- [51] H. H. Uğurlu, "On the Geometry of Timelike Surfaces," *Communication*, vol. 1, no. 46, pp. 211-223, 1997.
- [52] Chr. C. Beneki, G. Kaimakamis ve B. J. Papantoniou, "Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 275, no. 2, pp. 586-614, 2002.
- [53] R. Lopez, "Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space," *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 52, no. 4, pp. 515-532, 2000.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. F. Kanbay ve B.Yüksekdağ, “The Spacelike Bonnet Surfaces in Lorentzian 3-Space”, *3 rd International E-Conference on Mathematical Advances and Applications*, ISBN: 978-605-69387-1-9, sayfa no: 61, Yıldız Technical University, İstanbul, Türkiye, 24 - 27 Haziran 2020.

