

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞIRLIKLİ BİR TELİN TİTREŞİM PROBLEMİNİN
GRAND-LEBESGUE UZAYLARINDA SPEKTRAL
ÖZELLİKLERİ

Fatih ŞİRİN

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Aralık, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞIRLIKLI BİR TELİN TİTREŞİM PROBLEMİNİN
GRAND-LEBESGUE UZAYLARINDA SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Fatih ŞİRİN tarafından hazırlanan tez çalışması 10.12.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Doç. Dr. Murat KİRİŞÇİ, Üye
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Doç. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Ağırlıklı Bir Telin Titreşim Probleminin Grand-Lebesgue Uzaylarında Spektral Özellikleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Fatih ŞİRİN

İmza



Bu alıřma,

TÜBİTAK-ANAS ULUSLARARASI İKİLİ İşBİRLİĞİ PROJESİ(Proje No: 118F447)
kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)

ve

Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (Proje
Kodu: FDK-2020-3822)

tarafından desteklenmiřtir.

*Hayat Arkadaşım
Emine'ye*



TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim hayatımda, bilhassa doktora sürecinde bilgisiyle ve tecrübesiyle bana ışık tutan, değer katan, destekleriyle her zaman motive eden, öncülüğünde tecrübe etmiş olduğum bir çok akademik çalışma ile süreçte kendimi geliştirmeye ve ilerlememe imkan veren kıymetli hocam Doç. Dr. Yusuf ZEREN'e emeği ve kattıklarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Tez sürecimde tavsiye ve önerileri ile desteklerini her zaman hissettiğim değerli hocalarım Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK ve Doç. Dr. Özgür YILDIRIM'a minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Akademik anlamda kendisinden çok şey öğrendiğim, bilgisi ve tecrübesinden çokça yararlandığım sevgili hocam Prof. Dr. Bilal BİLALOV(Azerbaycan Milli İlimler Akademisi)'a teşekkürlerimi sunmak isterim.

Gerek doktora sürecimde gerek akademik hayatımda, bana güvenini ve desteğini her zaman hissettiğim, fikir ve görüşleriyle hayatıma değer katan yol arkadaşım Emine AKCAN ŞİRİN'e en samimi ve içten duygularıyla teşekkür ederim. Onunla aynı anda aynı süreçleri atlatıp, hayata aynı pencereden bakabilmenin mutluluğunu yaşamaktayım.

Ayrıca bu günlere destekleriyle geldiğim, her zaman yanımda olan sevgili annem Zehra ŞİRİN, babam Birol ŞİRİN ve kardeşim Furkan ŞİRİN'e sonsuz teşekkür ederim.

Fatih ŞİRİN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	2
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
1.4 Genel Bakış	5
2 TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Telin Titreşim Denklemleri	6
2.1.1 Telin Enine Titreşim Denklemleri	6
2.1.2 Telin Boyuna Titreşim Denklemleri	10
2.2 Başlangıç ve Sınır Şartları	11
2.3 Değişkenlerine Ayırma (Fourier) Metodu	12
2.4 Üzerinde Bir Yük Bulunan Telin Titreşimi	17
2.4.1 Problemin Formülizasyonu	17
2.4.2 Üzerinde Bir Yük Bulunan Telin Doğal Titreşimleri	18
2.5 Banach Uzayları Üzerine	22
3 LİNEERLEŞTİRİLMİŞ OPERATÖR VE REZOLVENTİ	30
3.1 Özdeğerler ve Özfonksiyonlar için Asimtotik Formüller	30
3.2 Green Fonksiyon Yapısı	33
3.3 Lineerleştirilmiş Operatör ve Rezolvent Yapısı	37
4 ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN GRAND-LEBESGUE UZAYLARINDA BAZLIĞI	46
4.1 Özfonksiyonlar Sisteminin $L_p) \oplus \mathbb{C}$ Uzaylarında Bazlığı	46
4.2 Özfonksiyonlar Sisteminin $L_p)$ Uzaylarında Bazlığı	51

5 ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN AĞIRLIKLIL GRAND-LEBESGUE UZAYLARINDA BAZLIĞI	53
5.1 Ağırlıklı Grand-Lebesgue Uzaylarında Üstel ve Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri	54
5.2 Özfonsiyonlar Sisteminin $L_{p),\rho} \oplus \mathbb{C}$ Uzaylarında Bazlığı	59
5.3 Özfonsiyonlar Sisteminin $L_{p),\rho}$ Uzaylarında Bazlığı	65
6 SONUÇ VE ÖNERİLER	67
KAYNAKÇA	68



SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}_+$	Negatif olmayan Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık Sayılar Kümesi
X, Y	Lineer Uzaylar
$Z(A)$	$A : X \rightarrow Y$ Lineer Operatörünün Çekirdeği
$D(A)$	$A : X \rightarrow Y$ Lineer Operatörünün Tanım Kümesi
$R(A)$	$A : X \rightarrow Y$ Lineer Operatörünün Değer Kümesi
$\langle x, f \rangle$	f Fonksiyonelinin $x \in X$ Noktasındaki Değeri
L_p	Lebesgue Uzayı
$L_p)$	Grand-Lebesgue Uzayı
$L_{p),\rho}$	Ağırlıklı Grand-Lebesgue Uzayı
δ_{nk}	Kronecker Sembolü
$\overline{M}$	M Kümesinin Kapanışı
$L(M)$	M Kümesinin Lineer Germesi
X^*	X Uzayının Dual Uzayı
$\ \cdot\ _X$	X Uzayının Normu
$X \oplus Y$	X ve Y Uzaylarının Direkt Toplamı

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Teldeki gerilim	7
Şekil 2.2	x_0 noktasındaki yoğun bir $f_0(t)$ kuvveti ile oluşan titreşim	9



Ağırlıklı Bir Telin Titreşim Probleminin Grand-Lebesgue Uzaylarında Spektral Özellikleri

Fatih ŞİRİN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

İki ucu sabit, ortasında yük asılı bir ipin titreşim probleminin Fourier metodu ile çözümünde, sınır koşullarında spektral bir parametre olan spektral problem ortaya çıkmaktadır. Bu tür problemlerin çözümlerinde, problemin özfonksiyonlar ve ilişkili fonksiyonlar sisteminin uygun uzaylarda bazlık özelliklerinin incelenmesi gerekir. Bu çalışmada, sınır koşullarında spektral parametre bulunan ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem için süreksiz spektral problemin özfonksiyonlar sisteminin bazlığı $L_p(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$ grand-Lebesgue uzayı ve $L_{p,\rho}(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$ ağırlıklı grand-Lebesgue uzayı için incelenmiştir. Grand-Lebesgue uzaylarının ayrılabilir olmaması sebebiyle, öteleme (shift) operatörü kullanılarak tanımlanan, $G_p(-1, 1)$ ayrılabilir alt uzayı düşünülmüştür. İlk olarak spektral problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimtotik formülleri bulunmuş, daha sonra problemin Green fonksiyon yapısını kurularak, problemde üretilen lineerleştirilmiş operatörü ve rezolvent yapısı $G_p(-1, 1) \oplus \mathbb{C}$ uzayı üzerinde oluşturulmuştur. Tanımlanan süreksiz diferansiyel operatörün özfonksiyonlar sisteminin bazlık kriterleri (tamlık, minimallik, projeksiyonların düzgün sınırlılığı) $G_p(-1, 1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ uzayında ispatlanarak özfonksiyonlar sisteminin bazlığı elde edilmiştir. Sonrasında ise ele alınan problemin özfonksiyonlar sisteminden çift indisli herhangi bir fonksiyon çıkarıldığında, geriye kalan sistemin $G_p(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$ uzaylarında bir baz oluşturduğu gösterilmiştir.

Ağırlıklı grand-Lebesgue uzayı da ayrılabilir olmadığı için benzer yöntemle $G_{p,\rho}(0, 1)$, $1 < p < +\infty$ uygun alt uzayı tanımlanmıştır. Bu bölümde bir diğer spektral problem ele alınmıştır. Bu problemde yük telin tam ortasında değil, telin $\frac{1}{3}$ noktasındadır. Telin üzerine asılan yükün konumunun değişmesi sebebiyle problemin

özdeğerler ve özfonksiyonların asimtotik formüllerinin yeniden bulunması gerekir. Sonrasında ρ ağırlık fonksiyonu Muckenhoupt şartını sağlamasıyla, üstel sistelmerin, trigonometrik sistemlerin bazlık özellikleri $G_{p,\rho}(0,1)$, $1 < p < +\infty$ uzayında incelemiştir. Spektral probleme uygun süreksiz diferansiyel operatörün özfonksiyonlar sisteminin $G_{p,\rho}(0,1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ uzayında bir baz oluşturduğu, p –yakın ve q –baz gibi kavramlar kullanılarak, trigonometrik sistemler aracılığıyla ispatlanmıştır.

Son olarak problemin özfonksiyonlar sisteminden belirli şartlar altında keyfi bir fonksiyonu çıkardığımızda kalan sistemin bazlığı ise $G_{p,\rho}(0,1)$, $1 < p < +\infty$ uzayında elde edilerek hedeflenen çalışmalar tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: grand-Lebesgue uzayı, süreksiz spektral problem, bazlık özellikleri, ağırlıklı grand-Lebesgue uzayı, Muckenhoupt koşulu



Spectral Properties of a Vibration Problem of a Loaded String in Grand-Lebesgue Spaces

Fatih ŞİRİN

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

In the solution of the vibration problem of a string with fixed two ends and with a mass in the middle, which is the spectral parameter under boundary conditions, occurs with the Fourier method. In solving such problems, it is necessary to examine the basicity properties of the problem's system of eigenfunctions and the associated functions in appropriate spaces. In this study, the basicity of the eigenfunctions system of the discontinuous spectral problem for a second order differential equation with spectral parameters in boundary conditions is investigated for the grand-Lebesgue space $L_p(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$ and the weighted grand-Lebesgue space $L_{p,\rho}(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$. Since the Grand-Lebesgue spaces are not separable, the $G_p(-1, 1)$ separable subspace defined using the shift operator is considered. Firstly, the asymptotic formulas of the eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem were found, then the Green function structure of the problem was established and the linearized operator and the resolvent structure generated from the problem were formed on the $G_p(-1, 1) \oplus \mathbb{C}$ space. The basicity of the system of eigenfunctions was obtained by proving the basicity criteria (completeness, minimality, uniform limitation of projections) of the eigenfunctions system of the defined discontinuous differential operator in $G_p(-1, 1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ space. Afterwards, it was shown that when any double-indexed function is removed from the eigenfunctions system of the problem, the remaining system forms a base in the $G_p(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$ spaces.

Since the weighted grand-Lebesgue space is not separable, the appropriate subspace $G_{p,\rho}(0, 1)$, $1 < p < +\infty$ is defined by a similar method. In this section, another spectral problem is discussed. In this problem, the load is not in the middle of the

string, but at the $\frac{1}{3}$ point of the string. However, the asymptotic formulas of the eigenvalues and eigenfunctions of the problem need to be found again. Afterwards, the basicity properties of the exponential systems, trigonometric systems can be investigated in the space $G_{p,\rho}(0,1)$, $1 < p < +\infty$, with the weight function ρ satisfying the Muckenhoupt condition. It has been proved through trigonometric systems using concepts such as p-near and q-base that the system of eigenfunctions of the discontinuous differential operator suitable for the spectral problem forms a base in the $G_{p,\rho}(0,1)\mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ space.

Finally, the thesis has been completed by obtaining the basicity of the remaining system in $G_{p,\rho}(0,1)$, $1 < p < +\infty$ space when we discard an arbitrary function from the eigenfunction system of the problem under certain conditions.

Keywords: grand-Lebesgue space, discontinuous spectral problem, basicity properties, weighted grand-Lebesgue space, Muckenhoupt condition

1 GİRİŞ

Üzerinde bir yük bulunan bir telin (veya bir çubuğun) titreşim problemi ile Fizik ve Mühendislik alanlarında oldukça sık karşılaşılmaktadır. Uç kısmında asılı bir yüke (örneğin küçük bir ayna) sahip bir telin burulma (torsion) titreşimlerinin incelenmesi, birçok ölçüm cihazının teorisi için önemlidir.

Bu türden bir problem, bir uçağın kanatlarının titreşimlerinin stabilitesinin incelenmesi ile bağlantılı olarak özel bir önem kazanmıştır. Bu sorunu çözmek için, yüklerin (motorlar) olduğu kanadın (değişken kesitli kiriş) karakteristik frekanslarını hesaplamak gerekir. Ayrıca jeofizik ve mekanik gibi alanlarda, örneğin elektronikte istenen teknik özelliklere sahip iletim hatlarının parametrelerini belirlerken([1],[2]) ya da dünyanın yapısının jeofizik modellemesi yapılırken([3]) de karşımıza bu tür problemler çıkmaktadır.

Tanımlı olduğu aralığın iç noktalarında süreksizlik koşuluna sahip olan bu problemlerin Fourier metodu kullanılarak çözümlenmelerinde, sınır koşullarında spektral parametre içeren spektral problemler ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerin çözümlerinde ise ortaya problemin özvektörler sisteminin uygun fonksiyon uzaylarında bazlık problemleri oluşturmaktadır. Özvektörler sisteminin bazlık özelliklerini uygun fonksiyon uzaylarında incelemek, problem için oluşturulmuş tekil çözümlerin doğrulanması açısından çok önemlidir (bkz. [4],[5]). Gelişen teknoloji ile birlikte ortaya koyulan ürünlerin deneme (test) aşamaları daha da önemli ve daha maliyetli hale gelmiş, üretimden daha fazla zamanı test aşamalarına ayırmak mecburiyetinde kalınmıştır. Elde edeceğimiz sonuç ile bu tür problemlerin doğruluğunun, yani temeli bu problemlere dayanan sinyal ve görüntü işleme gibi cihazların testlerinin matematiksel olarak yapılabileceği bir yöntem oluşturabilecek ve farklı test aşamalarındaki zaman ve maliyet konusunda ciddi bir tasarruf sağlanabilecektir.

1.1 Literatür Özeti

Denklemin kendisine ve sınır koşullarına bir spektral parametre içeren adi diferansiyel operatörler için spektral problemler, $X = X_0 \oplus \mathbb{C}^m$ şeklindeki Banach uzaylarında tanımlanan bir lineerleştirilmiş operatör inşa ederek, lineer spektral bir probleme indirgenir; X_0 burada herhangi bir Banach uzayı, $\mathbb{C}^{\geq}$ ise $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin bir m toplamıdır.

Diferansiyel operatörün spektral özelliklerinin incelenmesinde bazların oluşturulması için yeni yöntemler gerekir. Bu, birçok matematikçi için, bir diferansiyel operatörün özel fonksiyonlar sistemlerinin, çoğunlukla özfonksiyonların ve ilişkili fonksiyonlarının bazlık özelliklerini (tamlik, minimallik, bazlık gibi) yoğun bir şekilde incelemesi için bir motivasyon kaynağıdır. Bu özellikleri oluşturmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir (bkz. [6–9]). Süreksiz diferansiyel operatör durumunda, bazlığı standart yöntemlerle ele alınamayan özfonksiyon sistemleri ortaya çıkar. Bu duruma biraz ışık tutmak için, ikinci dereceden süreksiz diferansiyel operatör için aşağıda ifade ettiğimiz spektral problemi ele alalım.

Ortasında bir yük asılı olan, biri ya da her iki ucunda sabitlenmiş bir telin titreşim probleminin çözümü, bir süreksizlik noktasına sahip aşağıdaki spektral problemin çözümüne indirgenir [10]:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} y(-1) &= y(1) = 0, \\ y(-0) &= y(+0), \\ y'(-0) - y'(+0) &= \lambda m y(0), \end{aligned} \right\}, \quad (1.2)$$

burada λ spektral parameter ve m sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır. Bu tür spektral problemler, iki ucu sabit, ortasında bir yük asılı bir telin titreşim probleminin Fourier metodu ile çözülmesiyle ortaya çıkar [10, 11]. Bu metodun kullanımı uygun fonksiyon uzaylarında (genelde Lebesgue veya Sobolev uzaylarında) $\{u_{1,n}; \hat{u}_{1,n}\}$ şeklindeki çift sistemlerinin bazlık özelliklerinin çalışılmasını gerektirir.

(1.1),(1.2) problemi [5, 11] monograflarında incelenmiştir. Sınır koşullarında spektral parametresi olan adi diferansiyel operatörler için spektral problemler [12] 'de daha genel bir ifadede incelenmiştir. Spektral problemin Lebesgue uzaylarında spektral genişlemesinin yakınsaklığı ve bazlık özellikleri, öncülüğünü [13] çalışmasının yaptığı bir çok makalede karşımıza çıkmaktadır [8, 9, 11]. Bu konuyla ilgili makalelerin çoğunda, süreksizlik noktası olmayan problemler ele alınmıştır. [14–

[16] makalelerinde ise süreksizlik noktası ve sınır koşullarında spektral parametrelili spektral problemler incelenmiştir. Bu tür problemler matematik, mekanik, fizik ve diğer bilim alanlarında önemli bir rol oynar ve bu problemlerin uygulamaları malzeme özelliklerindeki süreksizliklerle ilgilidir. Bir süreksizlik noktası olan spektral problemlerin özfonksiyon sistemlerinin bazlık özelliklerini incelemek bazen daha önce bilinenden farklı yöntemler gerektirir.

[17] de ise (1.1),(1.2) problemi ele alınmış ve problemin özvektörler sisteminin $L_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ uzayında bir baz, $p = 2$ için ise bir Riesz baz oluşturduğu ispatlanmıştır (daha farklı metotları içeren çalışmalar için bakınız [13, 18–23]). Özel olarak, [18] de (1.1),(1.2) problemi ağırlıklı Lebesgue uzaylarında incelenmiştir. Bu tür problemlerin çözümünde genellikle baz pertürbasyon teori kullanılır. Bazı pertürbe edilmiş trigonometrik sistemlerin bazlık problemleri Morrey-tipli uzaylarda çalışılmıştır [1, 24–33].

Son zamanlarda ise, matematiğin farklı alanlarına uygulamalar bağlamında standart olmayan çeşitli uzaylara ilgi artmıştır. Bu uzayların arasında değişken toplanabilirlik indeksli Lebesgue uzayları, Morrey uzayları, grand-Lebesgue uzayları v.b. uzaylardan bahsedebiliriz. Cauchy çekirdeğine sahip Singüler operatörün sınırlılık problemleri, maksimal fonksiyon, Hilbert dönüşümü gibi harmonik analizin birçok klasik olgusu bu uzaylara genişletilmiştir (bkz. [2, 34–46]). Bu sonuçlar, bu uzaylarda diferansiyel denklemler teorisi, kısmi diferansiyel denklemler teorisi vb. problemlerin dikkate alınmasını sağlamaktadır. Bunun için, elbette, dikkate alınan uzaylarda karşılık gelen diferansiyel operatörlerin özfonksiyonlarının bazlık özelliklerini incelememiz gerekir. Ayrılabilir olmayan uzaylarda ise, diferansiyel denkleminize uygun ayrılabilir alt uzayları düşünmemiz gerekir.

Bu bağlamda, çalışmamız (1.1),(1.2) probleminin özfonksiyonlar sisteminin bazlık özelliklerinin $L_p(-1; 1)$ grand-Lebesgue uzayında çalışılması ile ilgilidir.

1992 yılında T. Iwaniec ve C. Sbordone tarafından tanımlanan grand-Lebesgue uzayı Jacobian determinantı için intergrallenebilme özellikleri incelenirken tanımlanmıştır [47]. Grand-Lebesgue uzayları kısmi diferansiyel denklemler teorisinde (bkz. [3, 48–53]), fonksiyon uzayları teorisinde (bkz. [54–57]) ve sınır değer problemlerinde (bkz. [58, 59]) önemli uygulamalara sahiptir. Bu sebepler bizi problemimizin grand-Lebesgue ve ağırlıklı grand-Lebesgue uzaylarında incelemeye teşvik etmiştir.

Ayrıca lineer olmayan esneklik teorisi, akışkanlar mekaniği, görüntü işleme ve birtakım fiziksel olayların matematiksel modellemesi ile karşılaşılan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde standart olmayan yeni uzayların gerekliliği ve günümüzde (özellikle son yıllarda) birçok önemli araştırmacının

(Bilal Bilalov, Alberto Fiorenza, Alexandre Meskhi, Vakhtang Kokilashvili, [60–68]) grand-Lebesgue uzaylarındaki çalışmaları bu uzayın önemini arttırmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

İki ucu sabit, ortasında bir yük asılı bir telin titreşim probleminin Fourier yöntemi ile (bir başka ifade ile değişkenlerine ayırma yöntemi) sınır koşullarında spektral bir parametre olan (1.1),(1.2) spektral problemini elde ederiz. Bu çalışmamız ile (1.1),(1.2) probleminin özvektörler sistemini grand-Lebesgue uzaylarında incelemiş olacağız. Ayrıca ağırlıklı grand-Lebesgue uzaylarında da benzer bir problemi inceleyeceğiz. Ulaşılabilecek sonuç ile (1.1),(1.2) probleminin özvektörler sisteminin ağırlıklı grand-Lebesgue uzaylarındaki bazlık özelliklerinin benzer şekilde gösterilebileceğini ifade edeceğiz.

1.3 Hipotez

(1.1)-(1.2) problemi aşağıdaki özdeğerlerin iki serisine sahiptir [17]:

$$\lambda_{1,n} = (\pi n)^2, n = 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{2,n} = \rho_{2,n}^2, n = 0, 1, 2, \dots,$$

Burada $\rho_{2,n}, \rho_{2,n} = \pi n + \frac{2}{\pi n} + O(\frac{1}{n^2})$ şeklinde asimtotik formüllere sahiptir ve uygun özfonksiyonlar

$$u_{2n-1}(x) = \sin \pi n x, n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2n}(x) = \begin{cases} \sin \rho_{2,n}(1+x), x \in [-1; 0] \\ \sin \rho_{2,n}(1-x), x \in [0; 1] \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

formundadır.

$L_p(-1; 1)$ uzayının ayrılabilir olmaması nedeniyle, spektral problem için uygun bir alt uzay almalıyız. $L_p(-1; 1)$ de sürekli fonksiyonların yoğun olduğu $G_p(-1; 1)$ alt uzayını tanımlayarak, [17] de verilen metod ile, $\{\hat{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ vektörler sisteminin bazlığı $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ uzayı için göstereceğiz. Ayrıca, eğer $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ sisteminden keyfi bir çift indisli fonksiyonu çıkardığımızda, geriye kalan sistem $G_p(-1; 1)$ de bir baz oluşturur.

$\rho(\cdot)$ genel bir ağırlık olmak üzere, $L_{p,\rho}(0, 1)$, $1 < p < +\infty$ ağırlıklı grand-Lebesgue uzayında aşağıdaki süreksiz spektral problemini düşünelim:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y(1) = 0, \\ y\left(\frac{1}{3} - 0\right) &= y\left(\frac{1}{3} + 0\right), \\ y'\left(\frac{1}{3} - 0\right) - y'\left(\frac{1}{3} + 0\right) &= \lambda m y\left(\frac{1}{3}\right), m \neq 0. \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

burada λ bir spektral parametre ve m sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır.

Eğer $\rho(\cdot)$ ağırlık fonksiyonu Muckenhoupt şartını sağlarsa, problemin özfonksiyonlar sistemi $G_{p,\rho}(0, 1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ uzayında bir baz oluşturur. Daha sonra, problemin özfonksiyonlar sisteminden sonlu sayıda ve bazı fonksiyonlarını çıkardığımızda, geriye kalan sistem ise, Muckenhoupt koşulunu sağlayan $\rho(\cdot)$ ağırlık fonksiyonu ile $G_{p,\rho}(0, 1)$, $1 < p < +\infty$ uzayında bir baz oluşturur.

1.4 Genel Bakış

6 bölümden oluşan tezin ilk bölümünde üzerinde çalıştığımız fiziksel problem ve bu problemin çözümünde elde edilen spektral problemden bahsedilmiştir. 2. Bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler yer almaktadır. Bölüm 3 de ifade ettiğimiz problemimizin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimtotik formülleri verilip, problemin çözümü için kullanılacak Green fonksiyonunu kurarak, yine probleminden üretilen lineerleştirilmiş operatörü ile onun rezolvent yapısının kurulma aşamaları incelenmiştir. Problemin lineerleştirilmiş operatörünün elde edilmesi için üzerinde çalışacağımız grand-Lebesgue uzayları üzerine bir takım özellikler ve probleme uygun alt uzayı tanımlanmıştır. Bir sonraki bölüm ise bu alt uzay üzerinde, lineerleştirilmiş operatörün özfonksiyonlar sisteminin bir baz oluşturduğunun ispat aşamaları üzerinedir. Bunun için bazlık kriterlerinden yararlanılmış ve sistemin aldığımız alt uzayda tam, minimal ve projeksiyonlarının (izdüşüm) düzgün sınırlı olduğu gösterilerek, sistemin bir baz oluşturduğu kanıtlanmıştır. 5. Bölüm ise problemimizdeki yükün farklı bir konuma alınmasıyla ortaya çıkan 1.3-(1.4) problemi üzerinedir. Bu problem için özfonksiyonlar sisteminin, ağırlıklı grand-Lebesgue uzaylarında bazlığı incelenmiştir. Muckenhoupt şartını sağlayan ağırlık fonksiyonu ile bu uzay için de bölüm 4 de olduğu gibi uygun bir alt uzay, benzer şekilde alınamaktadır. Ancak bu bölümde sistemin bazlık özellikleri daha farklı bir yol ile, öncelikle üstel ve trigonometrik fonksiyonlar sisteminin bazlık özellikleri incelenerek kanıtlanmıştır. Son bölüm ise sonuç ve önerilerin olduğu bölümüdür.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmalarımız boyunca yararlanacağımız ve kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri inceleyelim.

Hazırlamış olduğumuz bu çalışmanın daha anlaşılır olması sebebiyle öncelikle incelemiş olduğumuz fiziksel problemi biraz daha ayrıntılı inceleyelim (Daha fazla ayrıntı için, özellikle fiziksel kısım ile ilgili olarak bizim de büyük ölçüde faydalandığımız [10] i inceleyebilirsiniz.).

2.1 Telin Titreşim Denklemi

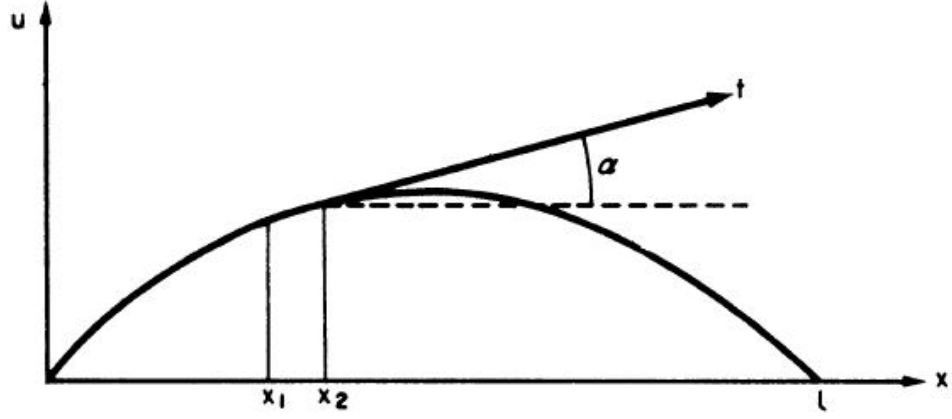
İkinci mertebeden kısmi türevli hiperbolik tip denklemler ile daha çok titreşim işlemleriyle ilişkili fiziksel problemlerde karşılaşılmaktadır ve bu denklem dalga denklemi olarak adlandırılır.

2.1.1 Telin Enine Titreşim Denklemi

l boyunda bir telin her noktası onun x koordinatının değeri olarak belirlenebilir. Bir telin titreşim süreci, zamanın farklı anlarında telin noktalarının konumu verilerek tanımlanabilir. Bir t anında telin bir noktasını belirlemek için t anında bir x noktasının yer değiştirme vektörünün $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ bileşenlerini vermemiz yeterlidir.

Bir telin titreşim problemindeki en basit hali ele alalım. Telin yer değiştirme vektörü (x, u) düzleminde olsun ve yer değiştirme vektörü herhangi bir anda u 'nun x eksenine dik olduğunu varsayalım. Titreşim süreci dikey titreşimi karakterize eden bir $u(x, t)$ fonksiyonu ile tanımlanabilir. Teli esnek elastik bir tel olarak ele alacağız. Matematiksel olarak bu, teldeki gerilimin her zaman teğetler boyunca anlık profiline yönlendirildiği anlamına gelir (Şekil 2.1). Bu koşul, telin bükülmeye direnmediği anlamına gelir.

Elastik olması nedeniyle telde oluşan gerilim Hooke yasasından hesaplanabilir. Telin küçük titreşimlerini düşünelim ve bütünlük için U_x 'in karesini ihmal edelim.



Şekil 2.1 Teldeki gerilim

Bu koşulu kullanarak, (x_1, x_2) parçasında olan uzamayı hesaplayalım. Bu yayın uzunluğu

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Böylece, varsayılan doğruluk sınırları dahilinde, titreşim sürecinde telin parçalarında hiçbir uzama meydana gelmez. Bu nedenle, Hooke yasasından, herhangi bir noktadaki T geriliminin zamanla değişmediği sonucu çıkar. Gerilimin de x ten bağımsız olduğunu gösterelim, yani

$$T = T_0 = \text{sabit}.$$

Gerilimin x ve u eksenlerindeki projeksiyonları

$$T_x = (x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \tan \alpha = T(x) u_x,$$

burada α $u(x, t)$ eğrisinin teğeti ile x eksenini arasında oluşan açıdır.

(x_1, x_2) parçasında çekme kuvvetleri, dış kuvvetler ve hareketsizlik kuvvetleri etki eder. x eksenini üzerindeki çekme kuvvetlerinin izdüşümlerinin toplamı sıfıra eşit olmalıdır (yalnızca enine titreşimleri dikkate alıyoruz). hareketsizlik kuvvetleri ve dış kuvvetler varsayıma göre u eksenini boyunca yönlendirildiği için

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{veya} \quad T(x_1) = T(x_2). \quad (2.1)$$

x_1 ve x_2 keyfi olduğundan, gerilimin x 'e bağlı olmadığı sonucu çıkar, yani tüm x ve t

değerleri için

$$T \equiv T_0. \quad (2.2)$$

Bir telin enine titreşimlerinin denklemini türetmek için Newton'un ikinci yasasını kullanmalıyız. (x_1, x_2) elementinin u eksenı boyunca momentumunun bileşeni

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \varrho(\xi) d\xi,$$

burada ϱ telin lineer yoğunluğudur. $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında momentum değişimini

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi$$

x_1 ve x_2 noktalarındaki $T_0 u_x$ geriliminden oluşan, etki eden kuvvetlere ve birim uzunluk başına yoğunluk (yük) $f(x, t)$ ile sürekli olarak dağılmış şekilde ele alacağımız dış kuvvetlere eşitleyelim. Sonuç olarak, bir telin elemanının enine titreşimleri için

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \varrho(\xi) d\xi \\ & \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

integral formdaki denklemi elde ederiz. Diferansiyel denkleme geçmek için $u(x, t)$ 'nin ikinci mertebe türevlerinin varlığını ve sürekliliğini varsayıyoruz. Böylece, ortalama değer teoreminin iki kez uygulanması sonrası, (2.3) formülü

$$u_{tt}(\xi^*, t^*) \varrho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \{T_0 [u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + f(\xi^{***}, t^{***})\} \Delta t \Delta x,$$

ifadesini verir ve burada

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2) \text{ ve } t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2)$$

olur. $\Delta x \Delta t$ ye bölüp $x_2 \rightarrow x_1$ limitini aldığımızda

$t_2 \rightarrow t_1$ olur ve böylece

$$T_0 u_{xx} = \varrho u_{tt} - f(x, t), \quad (2.4)$$

bir telin enine titreşimleri için diferansiyel denklemi elde ederiz. Yoğunluğun sabit olduğu durumda denklem genellikle şu şekilde yazılır:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t) \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho}} \right), \quad (2.5)$$

sürekliştir ve (2.4) diferansiyel denklemini anlamını yitirir. Bu noktada

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + 0, t) &= u(x_0 - 0, t), \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) &= -\frac{1}{T_0} f_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

iki şartın sağlanması gerekir. Bunlardan birincisi telin sürekliliğini ifade eder, ikincisi telin x_0 noktasındaki bükülmesini belirler.

2.1.2 Telin Boyuna Titreşim Denklemini

Bir telin boyuna titreşimleri için denklemler benzer şekilde elde edilir. l uzunluğunda bir tel düşünelim. Boyuna titreşimler, denge konumunda x^* koordinatına sahip bir noktanın t anındaki yer değiştirmesini temsil eden bir $u(x, t)$ fonksiyonu ile tanımlanabilir. Dalga denklemini türetirken, yer değiştirme tarafından üretilen gerilimin Hooke yasasını izlediğini varsayacağız.

$(x, x + \Delta x)$ elemanının t anındaki uzamasını hesaplayalım. t zamanında bu elemanın uçlarının koordinatları şu değerlere sahiptir:

$$x + u(x, t); x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

ve gerilme

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \Theta \Delta x, t), \quad (0 \leq \Theta \leq 1)$$

şeklindedir. $\Delta x \rightarrow 0$ iken limite geçildiğinde x noktasındaki gerilimin $u_x(x, t)$ fonksiyonu ile belirlendiğini görüyoruz. Hooke yasasına göre $T(x, t)$ gerilimi

$$T(x, t) = k(x)u_x(x, t),$$

şeklindedir ve burada $k(x)$ Young'ın x noktasındaki modülüdür.

(x_1, x_2) parçasının momentumundaki değişim için Newton yasasını kullanarak

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)u_x(x_2, \tau) - k(x_1)u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (2.9)$$

integral dalga denklemini elde ederiz. Burada $f(x, t)$ birim uzunluk başına dış kuvvetin yoğunluğudur.

$u(x, t)$ fonksiyonunun ikinci mertebe türevlerinin varlığını ve sürekliliğini olduğunu varsayalım. Ortalama değer teoremini uygulayarak ve $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ ve $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ için limitsel geçişi yaparak, bir telin boyuna titreşimlerinin

$$[k(x)u_x]_x = \varrho u_{tt} - f(x, t), \quad (2.10)$$

diferansiyel denkleminin ulaşırız. Tel homojen ise, bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t) \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{k}{\varrho}} \right), \quad (2.11)$$

ve burada

$$F(x, t) = \frac{f(x, t)}{\varrho}. \quad (2.12)$$

2.2 Başlangıç ve Sınır Şartları

Fiziksel bir durumun matematiksel olarak tanımlanması, süreci tam olarak belirlemek için yeterli koşulların ortaya konmasını gerektirmektedir. Diferansiyel denklemlerin genel olarak sonsuz sayıda çözümü vardır. Bu nedenle, fiziksel problemin kısmi diferansiyel denkleme indirgenmesi durumunda, süreci benzersiz bir şekilde belirtmek için bu denklemi belirli ek koşullarla tamamlamak gerekir.

Uçlarından sabitlenmış bir telin enine titreşimlerinin problemini ele alalım. Bu problemde $u(x, t)$, ipin x ekseninden sapmasını verir. Eğer $0 \leq x \leq l$ telinin uçları sabitse o zaman sınır koşulları

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (2.13)$$

sağlanmalıdır. Ayrıca "başlangıç koşulları", yani t_0 ilk andaki telin şekli ve hızı

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

şeklinde verilir. Böylece ek koşullar, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ 'e x 'in fonksiyonlarının verildiği sınır ve başlangıç koşullarından oluşur. Bu koşulların, telin titreşimleri için

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad (2.15)$$

denklemin çözümünü tek bir biçimde tanımladığını daha sonra göstereceğiz. Telin boyuna titreşimleri sorunu da aynı şekilde formüle edilebilir.

Şimdi ise ele aldığımız titreşim probleminin değişkenlerine ayırma (Fourier) yöntemi

ile spektral problemimize geçişini verelim.

2.3 Değişkenlerine Ayırma (Fourier) Metodu

Değişkenlerine ayırma, bir başka deyişle Fourier metodu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde en çok kullanılan yöntemlerden birisidir. Bu bölümde ise iki ucu sabit bir telin titreşim probleminde bu metodu kullanacağız. Öncelikle fiziksel denklemin çözümünün daha anlaşılır olması açısından üzerinde bir yük olmayan halini inceleyelim ve

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad (2.16)$$

denklemini

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2.17)$$

homojen sınır koşullarını ve

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümüne bakalım.

(2.16) denklemi lineer ve homojendir, böylece çözümlerin toplamı da bu denklemin bir çözümü olur. Yeterince fazla sayıda özel çözüm varsa, bunları belirli katsayılarla çarpıp toplayarak gerekli çözümü bulmaya çalışabiliriz. Yardımcı problemi şu şekilde ifade edelim:

(2.17) homojen sınır koşullarını sağlayan (2.16) denkleminin çözümü özdeş olarak sifıra eşit değildir ve bu çözüm

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.19)$$

şeklinde çarpım formunda tanımlanabilir. Burada $X(x)$ sadece x değişkenine bağlı iken $T(t)$ ise yalnızca t değişkenine bağlı birer fonksiyonlardır. Varsayılan (2.19) çözümünü (2.16) denkleminde yerine koyarak

$$X''T = \frac{1}{\alpha^2} T''X \quad (2.20)$$

alıp her tarafı XT ile böldükten sonra

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T''(t)}{T(t)}, \quad (2.21)$$

ifadesini elde ederiz. (2.19) fonksiyonunun (2.16) denkleminin bir çözümü

olabilmesi için, (2.20) ve (2.21) numaralı denklemlerin aynı şekilde, yani bağımsız değişkenlerinin tüm $0 < x < l, t > 0$ değerleri için sağlanması gerekir. (2.21) denkleminin sağ tarafı sadece t değişkeninin bir fonksiyonudur ve sol tarafı ise sadece x 'in bir fonksiyonudur. Örneğin, x 'in bir değerini sabitleyerek ve t 'yi değiştirerek (veya tersine) (2.21) denkleminin sağ ve sol taraflarının

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T''(x)}{T(x)} = -\lambda, \quad (2.22)$$

argümanları değişse bile sabit kaldığını buluruz. Burada λ negatif veya pozitif bir sabittir fakat kolaylık açısından önünde eksi işareti ile alacağız.

(2.22) ifadesinden $X(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonları için

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.23)$$

$$T''(x) + \alpha^2 \lambda T(x) = 0, \quad (2.24)$$

diferansiyel denklemlerini buluruz. (2.17) sınır koşullarından

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0,$$

ifadelerini elde ederiz. Buradan görülür ki $X(x)$

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (2.25)$$

koşullarını sağlaması gerekir. Aksi taktirde

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{veya} \quad u(x, t) \equiv 0$$

olması gerekir. Fakat burada aşık olmanın çözümü aramaktayız. Yardımcı problemde $T(t)$ fonksiyonu için ek koşul yoktur. $X(x)$ fonksiyonunun belirlenmesi ise basit bir özdeğer probleminin formülizasyonudur:

Aşağıdaki problemin özfonksiyonlar olarak adlandırılan aşık olmanın çözümlerinin bulunması için özdeğer olarak adlandırılan λ değerlerinin bulunması gerekmektedir:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X(0) &= X(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Bu şekilde formüle edilen probleme Sturm-Liouville problemi denir.

λ parametresinin negatif, sıfır veya pozitif olduğu durumları ayrı ayrı ele alalım.

1. $\lambda < 0$ olduğunda problemin aşikar olmayan çözümleri yoktur. Denklemin genel çözümü

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Sınır koşulları ise

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-l\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-l\lambda}} = 0,$$

yani

$$C_1 = -C_2 \quad \text{veya} \quad C_1(e^{\sqrt{-l\lambda}} - e^{-\sqrt{-l\lambda}}) = 0.$$

Fakat bu durumda $\sqrt{-l\lambda}$ reel ve pozitif olduğundan

$$C_1 = C_2 = 0,$$

ve sonuç olarak

$$X(x) \equiv 0,$$

olmalıdır.

2. $\lambda = 0$ durumunda da aşikar olmayan bir çözüm yoktur. Bu koşulda genel çözüm

$$X(x) = ax + b,$$

şeklindedir. Sınır koşulları ise

$$x(0) = [ax + b]_{x=0} = b = 0,$$

$$X(l) = al = 0,$$

yani $a = b = 0$ ve bunun sonucu

$$X(x) \equiv 0,$$

olur.

3. $\lambda > 0$ olduğunda, denklemin genel çözümü sanal kuvvetleri içermektedir ve

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}x + D_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

şeklinde yazılabilir. Sınır koşulları ise

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

olarak bulunur. Eğer $X(x)$ özdeş olarak sıfıra eşit değilse $D_2 \neq 0$ ve böylece

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0, \quad (2.27)$$

ve

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

olur ve burada n bir tam sayıdır. Sonuç olarak problemin aşıkâr olmayan çözümleri muhtemelen sadece

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2,$$

değerleri için mümkündür. Bu özdeğerler aşağıdaki özfonksiyonlara karşılık gelmektedir:

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Böylece λ değerleri sadece

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad (2.28)$$

değerlerine eşit olduğunda

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.29)$$

aşıkâr olmayan çözümleri vardır ve her biri için çözümlerin birleşiminde kullanacağımız keyfi bir çarpan belirlenebilir. Bu (2.24) denkleminin λ_n değerlerinin her birine karşılık gelen bir çözümü

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} l \sqrt{-\lambda} t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} l \sqrt{-\lambda} t, \quad (2.30)$$

şeklindedir ve burada A_n ve B_n belirlenen katsayılardır.

(2.16)-(2.18) problemine dönecek olursak,

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} l \sqrt{-\lambda} t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} l \sqrt{-\lambda} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.31)$$

fonksiyonlarının (2.16) denkleminin, (2.17) sınır koşullarını sağlayan ve her biri sadece x veya t değişkenine bağlı olan iki fonksiyonun (2.19) formunda çarpımı

olarak ifade edilebilen özel çözümleri olduğunu görürüz. Bu çözümler sadece $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ başlangıç fonksiyonlarının özel durumları için problemimizin (2.18) başlangıç koşullarını sağlayabilir.

Şimdi problemin çözümünü genel durumda inceleyelim. (2.16) denkleminin lineer ve homojen olması sebebiyle özel çözümlerin

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} l \sqrt{-\lambda} t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} l \sqrt{-\lambda} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.32)$$

bir toplamı da bu denklemi ve (2.17) sınır koşullarını sağlar. Başlangıç koşulu ise

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{du_n}{dt}(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi n}{l} l \sqrt{\lambda} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

ifadesini verir. Fourier serisi teorisinden, $0 \leq x \leq l$ aralığında verilen kısmi sürekli ve kısmi diferansiyellenebilen keyfi bir $f(x)$ bir Fourier serisine

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.34)$$

ve

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (2.35)$$

şeklinde genişletilebilir. Burada genellikle periyodu $2l$ olan periyodik fonksiyonlar düşünülür ve

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right), \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \end{aligned}$$

Eğer $F(x)$ tek ise, o zaman $a_n = 0$ olur ve böylece

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Eğer $F(x)$ fonksiyon sadece $(0, l)$ aralığında verildiyse, fonksiyonu tek olarak $(-l, l)$ aralığına genişletebiliriz ki bu (2.34) ve (2.35) formüllerini bulmamızı sağlar.

Eğer $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları Fourier serisine genişleme şartlarını sağlarsa, o zaman

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (2.36)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (2.37)$$

olur. Bu serileri (2.33) formülü ile karşılaştırdığımızda başlangıç koşullarının sağlanması için

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n l \sqrt{\lambda}} \psi_n \quad (2.38)$$

şeklinde almamız gerekir. Bu denklemler (2.32) fonksiyonunu tamamen tanımlar ve problemin çözümünü verir.

Çözümü sonsuz bir (2.32) serisi şeklinde tanımladık. Eğer (2.32) serisi ıraksarsa veya bu seri tarafından tanımlanan fonksiyon türevlenebilir değilse, doğal olarak diferansiyel denklemimizin bir çözümünü temsil edemez.

Şimdi ise üzerinde bir yük bulunan telin titreşimini inceleyelim.

2.4 Üzerinde Bir Yük Bulunan Telin Titreşimi

Şimdi ise l boyunda, uçları sabit ve belirli $x = x_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ noktalarında M_i yoğun kütleleri bulunan bir telin titreşim problemini inceleyelim.

2.4.1 Problemin Formülizasyonu

x_i noktalarındaki koşullar iki yol ile gösterilebilir. Eğer yoğun bir $F_i(t)$ kuvveti x_i noktalarında uygulanırsa, o zaman aşağıdaki durumlar sağlanmalıdır:

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (2.39)$$

$$k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \quad (2.40)$$

Bu koşulda F_i eylemsizlik kuvvetidir.

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

ifadesini (2.40) formülünde yerine yazarak

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}, \quad (2.41)$$

ifadesine ulaşırız. (2.41) ifadesinin bir başka türevi de mümkündür. M_i kütlelerini sabit δ_i yoğunluğa sahip $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ bölgesine dağıtalım ve

$$(\varrho + \delta_i) u_{tt} = \frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \quad (2.42)$$

homojen olmayan telin titreşim denklemini kullanalım. Burada ϱ telin yoğunluğudur. $u_\varepsilon(x, t)$ bu denklemin çözümü olsun. (2.42) denklemini $x_i - \varepsilon$ ve $x_i + \varepsilon$ sınırları içerisinde x e göre integralini alarak ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için limite geçerek, $u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$ fonksiyonu için (2.41) koşulunu göstereceğiz.

Şimdi problemimizi tamamiyle formülize edelim. Problemimiz

$$\varrho \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right), \quad (2.43)$$

titreşim denklemini için

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

sınır koşullarını,

$$\left. \begin{aligned} u(x_i - 0, t) &= u(x_i + 0, t), \\ M_i u_{tt}(x_i, t) &= k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}, \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.45)$$

$x = x_i$ noktalarındaki (2.41) eşlenik koşullarını ve

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü bulmak. Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ verilen fonksiyonlardır.

2.4.2 Üzerinde Bir Yük Bulunan Telin Doğal Titreşimleri

İlk olarak, üzerinde bir yük bulunan tel için doğal frekansların ve duran dalgaların profilinin araştırılmasıyla ilgileneceğiz. Bunu yapmak için bir çarpım şeklinde temsil edilebilen

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.47)$$

verilen problemin bir çözümünü bulmalıyız. Bu ifadeyi (2.43) denkleminde yerine koyup ve sınır koşullarını kullanarak değişkenlerin ayrılmasından sonra

$$T'' + \lambda T = 0, \quad (2.48)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(kX') + \lambda \varrho X &= 0, \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0 \end{aligned} \right\}$$

ifadelerini elde ederiz. Eşlenik koşulları ise

$$X(x_i - 0) = X(x_i + 0),$$

$$M_i X(x_i) T'' = kX' \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} T,$$

ifadesini verir. (2.48) denklemini dikkate aldığımızda, ikinci eşitliği aşağıdaki formda yeniden yazabiliriz:

$$kX' \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -\lambda M_i X(x_i).$$

Böylece $X(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki özdeğer problemini elde ederiz

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda \varrho X = 0, \quad (2.49)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (2.50)$$

$$\left. \begin{aligned} X(x_i - 0) &= X(x_i + 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ kX'(x_i + 0) - kX'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Bu sınır değer probleminin ayırt edici özelliği, λ parametresinin sadece denkleme değil, aynı zamanda ek koşullara da girmesidir.

Şimdi ise

$$X_1(x), X_2(x), \dots$$

özfonksiyonların ortagonalliğini inceleyelim. Sınır problemi için özfonksiyonları

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda \varrho X = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0,$$

$(0, l)$ aralığında ϱ lineer yoğunluğu ile ortogonaldır:

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\varrho(x)dx = 0, \quad m \neq n. \quad (2.52)$$

Sabit δ_i yoğunluğa sahip her bir M_i yükünü $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$ aralıklarına dağıtarak, $\rho_\varepsilon(x)$ yoğunluklu homojen olmayan bir telin doğal titreşimleri problemini elde ediyoruz. $\lambda_{\varepsilon n}$ ve $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ bu problemin özdeğer ve özfonksiyonları olsun. Ortogonalite şartı

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x)X_{\varepsilon n}(x)\varrho_\varepsilon(x)dx = 0 \quad (2.53)$$

sağlanmalıdır. (2.53) denkleminde integrali $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ bölgelerine ayırarak ve $\varepsilon \rightarrow 0$ limitiyle

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\varrho(x)dx + \sum_{i=1}^n M_i X_m(x_i)X_n(x_i) = 0, \quad m \neq n \quad (2.54)$$

ortogonalite bağıntısını göstereceğiz. Bu (2.54) ortogonalite koşulu (2.49) denkleminde ve (2.50)-(2.51) koşullarından da elde edilebilir. $X_m(x)$ ve $X_n(x)$ (2.49) probleminin λ_m ve λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun ve

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_m}{dx} \right) + \lambda_m \varrho X_m = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_n}{dx} \right) + \lambda_n \varrho X_n = 0,$$

denklemlerini sağlasın. İlk denklemi $X_n(x)$ ile, ikincisini $X_m(x)$ ile çarpalım ve ikinci denklemi birinciden çıkaralım. Art arda elde edilen denklemin $(x_0, x_1); (x_1, x_2); \dots; (x_k, l)$ bölgeleri üzerinde integral alarak

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l X_m(x)X_n(x)\varrho(x)dx - \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} [X_m k X_n' - X_n k X_m'] dx = 0, \quad (2.55)$$

ifadesini elde ederiz ($x_0 = 0$ ve $x_{k+1} = l$). Toplamın her teriminde integrasyonun gerçekleştirilmesi ve $x = x_i - 0$ ve $x = x_i + 0$ ifadelerine karşılık gelen terimlerin birleştirilmesi ile

$$A_i = (X_m k X_n' - X_n k X_m')_{x=x_i-0} - (X_m k X_n' - X_n k X_m')_{x=x_i+0}$$

şeklinde terimlerin bir toplamını elde ederiz. Bu durumda $x = 0$ ve $x = l$ için ifadeler

sınır koşulları nedeniyle sıfır olur. A_i ifadesini hesaplamak için (2.51) benzeri

$$\left. \begin{aligned} X_j(x_i - 0) &= X_j(x_i + 0), \\ kx'_j(x_i + 0) - kX'_j(x_i - 0) &= -M_i \lambda_j X_j(x_i), \end{aligned} \right\} j = m, n \quad (2.56)$$

eşlenik koşullarından faydalanırız. A_i ifadesini

$$A_i = X_m(x_i) [kX'_n(x_i - 0) - kX'_n(x_i + 0)] - X_n(x_i) [kX'_m(x_i - 0) - kX'_m(x_i + 0)]$$

şeklinde yeniden yazarak ve (2.51) formülünü kullanarak

$$A_i = X_m(x_i) M_i \lambda_n X_n(x_i) - X_n(x_i) M_i \lambda_m X_m(x_i) = M_i X_m(x_i) X_n(x_i) (\lambda_n - \lambda_m).$$

buluruz. Şimdi (2.55) denklemini

$$(\lambda_m - \lambda_n) \left\{ \int_0^l X_m(x) X_n(x) \varrho(x) dx + \sum_{i=1}^k M_i X_m(x_i) X_n(x_i) \right\} = 0,$$

olarak yazılabilir. Eğer $\lambda_m \neq \lambda_n$ ise, buradan (2.54) ortagonallik koşulu hemen alınır.

$X_n(x)$ özfonksiyonlarının normu

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \varrho(x) dx + \sum_{i=1}^k M_i X_n^2(x_i) \quad (2.57)$$

formülünden belirlenir.

Sonsuz sayıda öz değerlerin ve öz fonksiyonların varlığının kanıtlarını, öz değerlerin pozitif işaretini, genişletilebilirlik teoremlerini vermeyeceğiz.

Böylece görülür ki, bazı $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n X_n(x)$$

şeklinde bir seriye açılımında, açılımın katsayıları

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) \varrho(x) dx + \sum_{i=1}^k M_i f(x_i) X_n(x_i)}{N_n} \quad (2.58)$$

formülü ile tanımlanacaktır.

Şimdi ise problemimizi inceleyeceğimiz Banach uzayları ile ilgili bir takım tanım ve teorileri inceleyelim.

2.5 Banach Uzayları Üzerine

Bu bölümde çalışmalarımızda kullanacağımız bazı tanımlar ve teorilerden bahsedelim.

Tanım 2.1. X keyfi bir Banach uzayı, X^* ise X in dual uzayı olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin X uzayında bir baz olması için, $\forall x \in X$ için

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$$

şartını sağlayan tek bir $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ dizisinin olmasıdır. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x elemanının $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemine göre biortogonal katsayılar dizisidir.

Tanım 2.2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ve $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemleri için

$$\langle x_k, x_n^* \rangle = x_n^*(x_k) = \delta_{nk}$$

koşulu sağlanırsa, o zaman $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemlerine biortogonaldir denir. Burada δ_{nk} Kronecker sembolüdür.

Şimdi ise Banach uzaylarında bir sistemin tamlığı, minimalliği, düzgün minimalliği, bazlığı ve parantez bazlığı kavramlarını hatırlayalım.

Tanım 2.3. X herhangi bir Banach uzayı olsun. Eğer

$$\overline{L[\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}]} = X$$

ise, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemi X de tamdır.

Banach uzaylarında bir sistem için aşağıdaki tamlık kriterini verelim.

Tamlık Kriteri. X bir normlu uzay olsun. $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin X de tam olması için gerek ve yeter şart $\forall f \in X^*$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\langle x_n, f \rangle = 0$ olması için $f = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.4. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemi için eğer

$$x_k \notin \overline{L[\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_k}]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

olursa, o zaman $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de minimaldir(burada $\mathbb{N}_k = \mathbb{N} \setminus \{k\}$).

Şimdi ise Banach uzaylarında bir sistemin minimalliği ile ilgili kriteri inceleyelim.

Minimallik Kriteri. Bir sistemin Banach uzayında minimal olması için gerek ve yeter şart biortogonal sisteminin olmasıdır.

Bazlık Kriteri. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemi X Banach uzayında bir baz oluşturması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de tamdır;
2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de minimaldir;
3. $P_m(\cdot) = \sum_{n=1}^m \langle \cdot, x_n^* \rangle x_n$ projeksiyonları (izdüşüm fonksiyonları) düzgün sınırlıdır, yani $\exists M > 0$:

$$\|P_m x\|_X \leq M \|x\|, \quad \forall x \in X,$$

burada $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin biortogonalidir.

Tanım 2.5. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin X de düzgün minimal olması için

$$\exists \delta > 0 : \quad \inf_{\forall u \in L[\{x_n\}_{n \neq k}]} \|x_k - u\| \geq \delta \|x_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

koşulunun sağlanması gerekir.

Düzgün Minimallik Kriteri. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tam ve minimal sisteminin X de düzgün minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \|x_n\|_X \|x_n^*\|_{X^*} < +\infty,$$

sağlanmasıdır. Burada $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sisteminin biortogonalidir.

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemi X de bir baz ise, o zaman X de hem tam hem de düzgün minimaldir.

Ayrıca parantez baz kavramına da ihtiyacımız olacaktır.

Tanım 2.6. Varsayalım ki öyle bir $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} : n_k < n_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ indeksler dizisi olsun ve her bir $x \in X$ elemanını tek değerli olarak ve X de yakınsak bir

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} c_j x_j, \quad (n_0 = 0)$$

serisine açılsın. O zaman $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemi X de parantez bazdır.

Bu tanımdan, her parantez bazın belirli bir indis dizisine sahip olduğu açıktır. Buradan sonra indeksler dizisi ile $n_k < n_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ şartını sağlayan $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ doğal sayılar dizisi ifade edilmiş olacaktır.

Parantez Baz Kriteri. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminin X Banach uzayında parantez baz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de tamdır;
2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de minimaldir;
3. Öyle bir $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} : n_k < n_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ indeksler dizisi vardır ki,

$$Q_k(\cdot) = \sum_{n=1}^{n_k} \langle \cdot, x_n^* \rangle x_n$$

projeksiyonları düzgün sınırlıdır, yani $\exists M > 0, \forall x \in X :$

$$\|Q_k(x)\|_X \leq M \|x\|_X,$$

burada $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in biortogonalidir.

Aşağıdaki önerme, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Önerme 2.1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminin X de parantez baz oluşturduğunu varsayalım ve $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uygun indeksler dizisi olsun. Eğer $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi düzgün minimal ve $\{n_{k+1} - n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlı ise, o zaman bu sistem X de bir baz oluşturur.

İspat. Parantez bazlık kriterine göre $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de tam ve minimaldir ve $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ projeksiyonları düzgün sınırlıdır, burada $Q_k(x) = \sum_{n=1}^{n_k} \langle x, x_n^* \rangle x_n$, $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in biortogonalidir. $P_n(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i^* \rangle x_i$ alalım. $Q_k = P_{n_k}$ olduğu açıktır. Bazlık kriterine göre de $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ projeksiyonlarının düzgün sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$n_k < n < n_{k+1}$ olsun. O zaman

$$P_n(x) = Q_k(x) + \sum_{i=n_k+1}^n \langle x, x_i^* \rangle x_i.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \|P_n(x)\| &\leq \|Q_k(x)\| + \left\| \sum_{i=n_k+1}^n \langle x, x_i^* \rangle x_i \right\| \leq M \|x\| + (n - k) \sup_{n_k \leq i \leq n} \|x_i^*\| \|x_i\| \|x\| \leq \\ &\leq M \|x\| + (n_{k+1} - n_k) \sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i^*\| \|x_i\| \|x\|. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (n_{k+1} - n_k) < +\infty, \quad \sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i^*\| \|x_i\| < +\infty,$$

olduğundan

$$\|P_n(x)\| \leq M_1 \|x\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

bulunur(burada M_1 bir sabittir). ■

Ayrıca normalleştirilmiş bir sistem kavramına da ihtiyacımız olacaktır.

Tanım 2.7. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemi eğer

$$0 < \inf_n \|x_n\|_X \leq \sup_n \|x_n\|_X < +\infty$$

şartını sağlarsa, bu sisteme X Banach uzayında normalleştirilmiş sistem denir.

Tam ve düzgün minimal olan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi için normalleştirme koşulu aşağıdaki koşul ile denktir:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|x_n\|; \|x_n^*\|\} < +\infty.$$

Bu durumda, $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ sistemi normalleştirilmiş bir sistem olacaktır. Böylece

$$\inf_n \|x_n\| = m, \quad \sup_n \|x_n\| = M, \quad \sup_n \|x_n\| \|x_n^*\| = C.$$

O zaman biortanormallik şartına esasen

$$1 = |\langle x_n, x_n^* \rangle| \leq \|x_n\| \|x_n^*\| \leq C,$$

buradan

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{\|x_n\|} \leq \|x_n^*\| \leq \frac{C}{\|x_n\|} \leq \frac{C}{m}.$$

Aşağıdaki özet şeklinde verdiğimiz ifadelerden gelecek bölümlerde yararlanacağız.

X ve Y uzayları sırasıyla $\|\cdot\|_X$ ve $\|\cdot\|_Y$ normlarına göre birer Banach uzayı olsunlar. $X \oplus Y$ ile X ve Y uzaylarının bir direkt toplamını göstereceğiz. $X \oplus Y$ uzayı

$$\|(x, y)\|_{X \oplus Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y, (x, y) \in X \oplus Y,$$

normu ile bir Banach uzaydır. $A : X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olmak üzere, $G(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$ grafik kümesi $X \oplus Y$ de kapalı ise A operatörüne kapalıdır denir. Bir $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörünün kapalılığı, keyfi bir $x_n \in D(A)$ dizisi için, $x_n \rightarrow x$ ve $Ax_n \rightarrow y$ iken $Ax = y$ olmasına denktir. Ayrıca $A : X \rightarrow Y$ operatörünün kapalılığı

$D(A)$ nın

$$\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_Y, x \in D(A),$$

grafik normuna göre yoğunluluğuna denktir.

$B : X \rightarrow Y$ lineer operatörü $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörünün bir genişlemesi olsun. Eğer $\dim D(B)/D(A) = m$ ise, ozaman B, A nın bir m -katlı genişlemesi olarak adlandırılır ve $A \subset {}^m B$ şeklinde gösterilir, burada $D(B)/D(A)$, $D(B)$ uzayının $D(A)$ ya göre bir çarpan uzayıdır. $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörünün grafik normuna göre sürekli olan $f : D(A) \rightarrow C$ lineer fonksiyoneline bir A -sınır formu denir. A -sınır formlarının uzayı $D(A)'$ ile gösterilir.

Teorem 2.1. [69] X ve Y birer Banach uzayı ve $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörü kapalı olsun. $U', \|\cdot\|_X$ normuna göre sıfırdan farklı sürekli fonksiyonelleri içermeyen $D(A)'$ nın bir alt uzayı olsun.

$$D = \{x \in D(A) : \forall f \in U', f(x) = 0\},$$

alalım. O zaman A operatörünün D ye kısıtlanması $A|_D$ kapalı yoğun olarak tanımlı operatördür ve $A|_D \subset {}^m A$.

Bunlarla ilgili daha fazla ayrıntı, [69] monografisinde bulunabilir.

Şimdi grand-Lebesgue uzaylarının ve Banach uzaylarda bazlar teorisinin bazı özelliklerini ifade edelim.

Tanım 2.8. X Banach uzayında bir $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemi, eğer $\forall x \in X$ için

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} c_i \phi_i.$$

şeklinde tek bir ayrışımı olan $\{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}, n_0 = 0, n_k < n_{k+1}, k \in \mathbb{Z}_+$ tamsayılar dizisi varsa, X de parantez baz olarak adlandırılır.

$n_k = k, k \in \mathbb{Z}_+$ olduğunda parantez baz sıradan bir baza dönüşür.

Teorem 2.2. ([70]) $\{u_{kn}\}_{k=\overline{1,m}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de bir baz olsun ve bu sistemin biortogonal sistemini $\{v_{kn}\}_{k=\overline{1,m}, n \in \mathbb{N}}$ alalım. Varsayalım ki $A_n = (a_{ik}^n)_{i,k=\overline{1,m}, n \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ skalerlerin bir matrisi olsun öyle ki

$$\Delta_n = \det A_n \neq 0.$$

O zaman

$$\phi_{kn} = \sum_i^m a_{ik}^{(n)} u_{in}, \quad k = \overline{1, m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

eşitliği ile verilen $\{\phi_{kn}\}_{k=\overline{1,m}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de bir parantez baz oluşturur. Ek olarak

$$\sup_n \{\|A_n\|_X, \|A_n^{-1}\|\} < +\infty, \quad \sup_n \{\|u_{kn}\|_X, \|v_{kn}\|_{X^*}\} < +\infty,$$

koşulları sağlanırsa, o zaman $\{\phi_{kn}\}_{k=\overline{1,m}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi X de sıradan bir baz olur, $\|A_n\|$ ise A_n matrisinin bir normudur.

$\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi $\{\hat{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ biortogonal sistemi ile $X \oplus \mathbb{C}^m$ uzayında bir baz olsun ve

$$\hat{u}_n = (u_n; \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_m^{(n)}), \quad \hat{v}_n = (v_n; \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \dots, \beta_m^{(n)}). \quad (2.59)$$

Aşağıdaki ifadede, keyfi bir $J = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ sayılar kümesi için, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminden $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_m}$ vektörleri çıkarılarak elde edilen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus J}$ sisteminin bazlık özelliklerini X uzayında inceleyelim.

Teorem 2.3. ([71]) $\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi ve bu sisteme biortogonal olan $\{\hat{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi ile $X \oplus \mathbb{C}^m$ uzayında bir baz olsun ve (2.59) eşitlikleri sağlansın. $J = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ m tane doğal sayının keyfi bir birleşimi olsun. O zaman $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus J}$ sisteminin X de bir baz olması için gerek ve yeter şart

$$\delta = \delta(J) = \det(\beta_i^{n_k})_i, k = \overline{1, m} \neq 0. \quad (2.60)$$

Dahası $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus J}$ sistemi

$$v_n^* = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} v_n & v_{n_1} & \dots & v_{n_m} \\ \beta_1^{(n)} & \beta_1^{(n_1)} & \dots & \beta_1^{(n_m)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_m^{(n)} & \beta_m^{(n_1)} & \dots & \beta_m^{(n_m)} \end{vmatrix},$$

biortogonal sistemine sahiptir. $\delta = 0$ için $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus J}$ sistemi X de tam ve minimal olmaz.

Bir sistemin belirli bir anlamda ve belirli koşullar altında bir baza yakınlığı onun izomorfik baz özelliğini sağladığını gösterir. Bu nedenle öncelikle p -baz ve p -yakın sistemleri kavramlarını verelim.

Tanım 2.9. X uzayındaki vektörlerden oluşan $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ve $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemlerinin p -yakın olması için

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|\phi_i - \psi_i\|_X^p < +\infty.$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Tanım 2.10. X uzayındaki bir $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ baz ve $\forall x \in X$ için

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, v_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \|x\|_X,$$

bağıntısını sağlayan bir $M > 0$ sayısı varsa o zaman $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemine X de p –baz denir. Burada $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemi $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in biortogonal sistemidir.

Bir sonraki ifade, bir sistemin bir baza p –yakın olduğunda o sisteme izomorfik bir baz oluşturması ile ilgili eşdeğer koşullar verir.

Teorem 2.4. $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ X de bir baz, $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ sistemi $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemine q –yakın olsun, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:

1. $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemi X de tamdır;
2. $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemi X de minimaldir;
3. $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sistemi $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e izomorfik bir baz oluşturur.

Bunlar ve diğer ifadeler hakkında daha fazla ayrıntı [72] de bulunabilir.

Ayrıca, Lebesgue uzayı $L_p(a, b)$ ile (a, b) aralığında ortanormal ve düzgün sınırlı olan

$$|\phi_i(t)| \leq M, \quad t \in (a, b), \quad i \in \mathbb{N}.$$

$\phi_i(t), i \in \mathbb{N}$ fonksiyonlar sistemine göre Fourier katsayıları arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki teoremi vermemiz gerekir.

Teorem 2.5. (F.Riss) ([73]) $1 < p \leq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O zaman

1. eğer $f \in L_p(a, b)$, o zaman f fonksiyonunun $c_i = \int_a^b f(t) \overline{\phi_i(t)} dt$ Fourier katsayıları aşağıdaki eşitsizliği sağlar

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |c_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L_p(a,b)};$$

2. eğer bir c_i sayılar dizisi için $\sum_{i=1}^{+\infty} |c_i|^p < +\infty$ sağlanırsa, o zaman bir $f \in L_q(a, b)$ fonksiyonu vardır öyle ki $c_i = \int_a^b f(t) \overline{\phi_i(t)} dt$ ve

$$\|f\|_{L_q(a,b)} \leq M^{\frac{2-p}{p}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |c_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tanım 2.11. [74](Muckenhoupt Koşulu) ρ ağırlık fonksiyonunun $A_p(I)$, ($\rho \in A_p(I)$) sınıfından olması için gerek ve yeter şart

$$A_p(\rho, I) := \sup_J \left(\frac{1}{|J|} \int_J \rho(x) dx \right) \left(\frac{1}{|J|} \int_J \rho^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} < +\infty,$$

olmasıdır. Burada supremum $J \subset I$ üzerinden alınır.

Aşağıdaki teoremlerden ise ara işlemlerde faydalanacağız.

Teorem 2.6. [75](Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi) (X, μ) ve (Y, ν) iki σ -sonlu ölçülü uzaylar olsun. T , görüntüleri Y deki ölçülebilir fonksiyonların bir kümesine giden X deki tüm basit fonksiyonların üzerinde tanımlanmış lineer bir operatör olsun. $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ olsun. Tüm basit f fonksiyonları için

$$\|Tf\|_{L_{q_0}(Y, d\nu)} \leq A_0 \|f\|_{L_{p_0}(X, d\mu)}, \quad \|Tf\|_{L_{q_1}(Y, d\nu)} \leq A_1 \|f\|_{L_{p_1}(X, d\mu)},$$

olduğunu varsayalım ($p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$). Sabit bir θ , ($0 < \theta < 1$) için

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

tanımlayalım. O zaman eğer f X de basit bir fonksiyon ise

$$\|Tf\|_{L_q(Y, d\nu)} \leq A_\theta \|f\|_{L_p(X, d\mu)},$$

olur. Burada $A_\theta \leq A_0^{1-\theta} A_1^\theta$ dir.

Teorem 2.7. [75] (Hausdorff-Young Eşitsizliği) $1 \leq p \leq 2$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. O zaman f fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$ için

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p,$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.8. [75] (Beppo-Levi Teoremi bir diğer adıyla Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) $\{f_n\}$ μ -ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun, hemen her yerde $f_n \uparrow f$ yakınsasın ve $\int_X f_1 d\mu > -\infty$. O zaman $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ olur.

3.1 Özdeğerler ve Özfonksiyonlar için Asimtotik Formüller

(1.1),(1.2) problemi için $\lambda = \rho^2$ kabul edelim. (1.2) de verilen sınır şartlarını

$$\left. \begin{aligned} U_v(y) &= U_{v1}(y) + U_{v2}(y), \\ v &= \overline{1,4}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

şeklinde yeniden düzenleyelim. Burada

$$\begin{aligned} U_{11}(y) &= y(-1), & U_{12}(y) &\equiv 0, \\ U_{21}(y) &\equiv 0, & U_{22}(y) &= y(1), \\ U_{31}(y) &= y(0-), & U_{32}(y) &= y(0+), \\ U_{41}(y) &= y'(0-), & U_{42}(y) &= -y'(0+) - \lambda m y(0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak tanımlayabiliriz. Şimdi (1.1),(1.2) probleminin özdeğerler ve özfonksiyonların asimtotik formülleri veren aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.1. ([17]) (1.1)-(1.2) spektral problemi aşağıda verilen iki basit özdeğerler dizisine sahiptir:

- $\lambda_{1,n} = (\pi n)^2, \quad n = 1, 2, \dots$
- $\lambda_{2,n} = (\rho_{2,n})^2, n = 0, 1, 2, \dots$

burada $\rho_{2,n} = \pi n + \frac{2}{\pi m n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ şeklinde asimtotik forma sahiptir. Bu özdeğerlere karşılık gelen $u_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$ özfonksiyonlar dizisini ise aşağıdaki şekilde formülize ederiz:

$$\begin{aligned} u_{2n-1}(x) &= \sin \pi n x, & n &= 1, 2, \dots \\ u_{2n}(x) &= \begin{cases} \sin \rho_{2,n}(1+x) & x \in [-1, 0] \\ \sin \rho_{2,n}(1-x) & x \in [0, 1] \end{cases}. \end{aligned}$$

İspat. (1.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olan, $x \in [-1, 0]$ için

$$y_{11}(x) = \sin \rho(1+x), \quad y_{12}(x) = \cos \rho(1+x),$$

fonksiyonları ile $x \in [0, 1]$ için

$$y_{21}(x) = \sin \rho x, \quad y_{22}(x) = \cos \rho x,$$

fonksiyonlarını alalım. Problem (1.1),(1.2) nin özfonksiyonlarını

$$y(x, \rho) = \begin{cases} c_{11}y_{11}(x) + c_{12}y_{12}(x) & x \in [-1, 0] \\ c_{21}y_{21}(x) + c_{22}y_{22}(x) & x \in [0, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c_{11} \sin \rho(1+x) + c_{12} \cos \rho(1+x) & x \in [-1, 0] \\ c_{21} \sin \rho x + c_{22} \cos \rho x & x \in [0, 1] \end{cases}, \quad (3.3)$$

şeklinde ele alalım. $y(x, \rho)$ fonksiyonunun (1.2) sınır koşullarını sağladığını kabul edelim. O zaman c_{jk} katsayılarının bulunması için doğrusal homojen

$$\left. \begin{aligned} c_{11}U_{11}(y_{11}) + c_{12}U_{11}(y_{12}) + c_{21}U_{12}(y_{21}) + c_{22}U_{12}(y_{22}) &= 0 \\ c_{11}U_{21}(y_{11}) + c_{12}U_{21}(y_{12}) + c_{21}U_{22}(y_{21}) + c_{22}U_{22}(y_{22}) &= 0 \\ c_{11}U_{31}(y_{11}) + c_{12}U_{31}(y_{12}) + c_{21}U_{32}(y_{21}) + c_{22}U_{32}(y_{22}) &= 0 \\ c_{11}U_{41}(y_{11}) + c_{12}U_{41}(y_{12}) + c_{21}U_{42}(y_{21}) + c_{22}U_{42}(y_{22}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

denklem sistemini alalım. Ve bu sistemin determinanı

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_{11}(y_{11}) & U_{11}(y_{12}) & U_{12}(y_{21}) & U_{12}(y_{22}) \\ U_{21}(y_{11}) & U_{21}(y_{12}) & U_{22}(y_{21}) & U_{22}(y_{22}) \\ U_{31}(y_{11}) & U_{31}(y_{12}) & U_{32}(y_{21}) & U_{32}(y_{22}) \\ U_{41}(y_{11}) & U_{41}(y_{12}) & U_{42}(y_{21}) & U_{42}(y_{22}) \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

şeklinde dir. (3.2) de tanımladığımız sınır şartlarını $U_{v1}(y_{ij}), U_{v2}(y_{ij}), v = \overline{1, 4}, i, j = 1, 2$ için hesapladığımızda

$$\begin{aligned} U_{11}(y_{11}) &= 0, & U_{11}(y_{12}) &= 1, & U_{12}(y_{21}) &= 0, & U_{12}(y_{22}) &= 0, \\ U_{21}(y_{11}) &= 0, & U_{21}(y_{12}) &= 0, & U_{22}(y_{21}) &= \sin \rho, & U_{22}(y_{22}) &= \cos \rho, \\ U_{31}(y_{11}) &= \sin \rho, & U_{31}(y_{12}) &= \cos \rho, & U_{32}(y_{21}) &= 0, & U_{32}(y_{22}) &= -1, \\ U_{41}(y_{11}) &= \rho \cos \rho, & U_{41}(y_{12}) &= -\rho \sin \rho, & U_{42}(y_{21}) &= -\rho, & U_{42}(y_{22}) &= -\rho^2 m, \end{aligned} \quad (3.6)$$

ifadelerini buluruz. Bu ifadeleri (3.5) determinantında yerine yazarak

$$\begin{aligned}\Delta(\rho) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \rho & \cos \rho \\ \sin \rho & \cos \rho & 0 & -1 \\ \rho \cos \rho & -\rho \sin \rho & -\rho & -\rho^2 m \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \sin \rho & \cos \rho \\ \sin \rho & 0 & -1 \\ \rho \cos \rho & -\rho & -\rho^2 m \end{vmatrix} = \\ &= -\rho \sin \rho \cos \rho - \rho \cos \rho \sin \rho - (-\rho^2 m \sin^2 \rho),\end{aligned}$$

olup

$$\Delta(\rho) = -\rho \sin \rho (\rho m \sin \rho - 2 \cos \rho) \quad (3.7)$$

bulunur. Buradan $\Delta(\rho)$ iki farklı sıfır dizisi vardır öyle ki bunlardan biri $\sin \rho$ nun sıfırlarından oluşan $\rho_{1,n} = \pi n$, diğeri ise $\delta(\rho) = \rho m \sin \rho - 2 \cos \rho$ fonksiyonunun sıfırlarından oluşan $\rho_{2,n}$ dizisidir. $\delta(\rho)$ fonksiyonunun sıfırlarının asimtotik formülünü bulmak için, Rouché teoremi ile, $\sin \rho$ ifadesininin sıfırlarını göz önüne alarak, $\rho \neq 0$ için

$$\rho_{2,n} = \pi n + \delta_n, \quad (3.8)$$

ifadesini $\delta(\rho)$ nun sıfırları kabul edelim. Daha da açık bir ifade ile

$$\delta(\rho) = \rho m \sin \rho - 2 \cos \rho = 0,$$

$$\sin \rho - \frac{2 \cos \rho}{\rho m} = 0, \quad (3.9)$$

ifadesinde $\rho \rightarrow +\infty$ olduğunda $\frac{2 \cos \rho}{\rho m}$ ifadesi çok küçük bir değer olacağından $\sin \rho$ nun sıfırlarına dikkate alıyoruz. Şimdi ise δ_n ifadesini bulalım. (3.8) ifadesini (3.9) de yazarak

$$\sin \delta_n = \frac{2}{m \rho_{2,n}} \cos \delta_n,$$

elde ederiz. $n \rightarrow +\infty$ iken $\delta_n \rightarrow 0$ olması ile

$$\delta_n = \frac{2}{\pi m n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

sonucuna ulaşırız. Böylece özdeğerleri göstermiş oluruz. $\rho_{1,n} = \pi n$ ifadesini (3.3) da yerine yazarak, (3.4) denklem sistemini göz önüne alıp

$$c_{12} = 0, \quad c_{22} = 0, \quad c_{21} = (-1)^n c_{11},$$

buluruz. Burada $c_{11} = 1$ olarak seçtiğimizde (3.3) ifadesinden $\lambda_{1,n} = (\pi n)^2$ özdeğerine

uygun

$$u_{2n-1}(x) = \sin \pi n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

özfonksiyonlar dizisini buluruz. Benzer olarak $\rho = \rho_{2,n}$ olduğunda (3.3) ve (3.4) den

$$c_{12} = 0, \quad c_{21} \sin \rho_{2,n} + c_{22} \cos \rho_{2,n} = 0, \quad c_{11} \sin \rho_{2,n} = c_{22},$$

ile

$$c_{21} \sin \rho_{2,n} + c_{11} \sin \rho_{2,n} \cos \rho_{2,n} = 0$$

elde ederiz. Burada $\sin \rho_{2,n} \neq 0$ olmasını dikkate alarak

$$c_{21} = -c_{11} \cos \rho_{2,n},$$

eşitliğine ulaşırız. $c_{11} = 1$ seçtiğimizde (3.3) dan $\lambda_{2,n} = (\rho_{2,n})^2$ özdeğerine karşılık gelen

$$u_{2n}(x) = \begin{cases} \sin \rho_{2,n}(1+x) & x \in [-1, 0] \\ \sin \rho_{2,n}(1-x) & x \in [0, 1] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

olup böylece teoremi ispatlamış oluruz. ■

3.2 Green Fonksiyon Yapısı

Şimdi ise (1.1),(1.2) probleminin Green fonksiyon yapısını oluşturalım. Problemin Green fonksiyonu (1.2) koşullarını sağlayan homojen olmayan

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = f(x), \quad (3.10)$$

problemin çözümünün integral ifadesinin çekirdeği, yani karşılık gelen integral operatörün çekirdeği olarak tanımlanır. (3.10),(1.2) probleminin genel çözümünü

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & x \in [-1, 0], \\ y_2(x) & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (3.11)$$

şeklinde alalım. Burada her bir $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralığında sabit varyasyon yöntemini uygulayarak $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi alalım:

$$y_1(x) = c_{11}y_{11}(x) + c_{12}y_{12}(x) + y_{01}(x), \quad x \in [-1, 0]$$

$$y_2(x) = c_{21}y_{21}(x) + c_{22}y_{22}(x) + y_{02}(x), \quad x \in [0, 1]$$

burada $y_{01}(x), y_{02}(x)$ fonksiyonları 3.10 denkleminin sırasıyla $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralığındaki özel çözümleridir. Sabit varyasyon yöntemine göre özel çözümler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{cases} y_{01}(x) = \int_{-1}^0 g_1(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi, \\ y_{02}(x) = \int_0^1 g_2(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi, \end{cases}$$

ve

$$g_1(x, \xi, \rho) = \begin{cases} -\frac{1}{2W_1(\xi)} (y_{11}(x)y_{12}(\xi) - y_{12}(x)y_{11}(\xi)), & x < \xi \\ \frac{1}{2W_1(\xi)} (y_{11}(x)y_{12}(\xi) - y_{12}(x)y_{11}(\xi)), & x > \xi \end{cases}$$

$$g_2(x, \xi, \rho) = \begin{cases} -\frac{1}{2W_2(\xi)} (y_{21}(x)y_{22}(\xi) - y_{22}(x)y_{21}(\xi)), & x < \xi \\ \frac{1}{2W_2(\xi)} (y_{21}(x)y_{22}(\xi) - y_{22}(x)y_{21}(\xi)), & x > \xi \end{cases}$$

olur. Burada $W_k(\xi), k = 1, 2$ ifadesi $y_{k1}(\xi), y_{k2}(\xi), k = 1, 2$ fonksiyonlarının Wronskian determinantıdır. Tüm ifadeleri hesaplayıp yerine koyduğumuzda $g_1(x, \xi, \rho) = g_2(x, \xi, \rho) = g(x, \xi, \rho)$ olup

$$\begin{cases} y_1(x) = c_{11}y_{11}(x) + c_{12}y_{12}(x) + \int_{-1}^0 g(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi, \\ y_2(x) = c_{21}y_{21}(x) + c_{22}y_{22}(x) + \int_0^1 g(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi \end{cases}, \quad (3.12)$$

$$g(x, \xi, \rho) = \begin{cases} -\frac{1}{2\rho} \sin \rho(x - \xi), & \xi < x, \\ \frac{1}{2\rho} \sin \rho(x - \xi), & x \leq \xi \end{cases}. \quad (3.13)$$

bulunur. Fonksiyon (3.11) ün (1.2) şartlarını sağladığını varsayalım. O zaman $c_{j,k}$ katsayılarının bulunması için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini alırız:

$$U_v(y) = c_{11}U_{v1}(y_{11}) + c_{12}U_{v1}(y_{12}) + c_{21}U_{v2}(y_{21}) + c_{22}U_{v2}(y_{22}) +$$

$$+ \int_{-1}^0 U_{v1}(g)f(\xi)d\xi + \int_0^1 U_{v2}(g)f(\xi)d\xi, \quad v = \overline{1, 4}. \quad (3.14)$$

$c_{j,k}$ sayılarını (3.14) den tanımlayalım ve (3.12) de yerine yazalım. O zaman (3.10),(1.2) probleminin çözümü için aşağıdaki formülü alırız:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = \int_{-1}^0 G_{11}(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi + \int_0^1 G_{12}(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi, & x \in [-1, 0], \\ y_2(x) = \int_{-1}^0 G_{21}(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi + \int_0^1 G_{22}(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi, & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.15)$$

Burada

$$G_{ik}(x, \xi, \rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} H_{ik}(x, \xi, \rho), \quad i, k = 1, 2$$

$$\begin{aligned}
H_{11}(x, \xi, \rho) &= \begin{vmatrix} g & y_{11} & y_{12} & 0 & 0 \\ U_{11}(g) & U_{11}(y_{11}) & U_{11}(y_{12}) & U_{12}(y_{21}) & U_{12}(y_{22}) \\ U_{21}(g) & U_{21}(y_{11}) & U_{21}(y_{12}) & U_{22}(y_{21}) & U_{22}(y_{22}) \\ U_{31}(g) & U_{31}(y_{11}) & U_{31}(y_{12}) & U_{32}(y_{21}) & U_{32}(y_{22}) \\ U_{41}(g) & U_{41}(y_{11}) & U_{41}(y_{12}) & U_{42}(y_{21}) & U_{42}(y_{22}) \end{vmatrix}, \\
H_{12}(x, \xi, \rho) &= \begin{vmatrix} 0 & y_{11} & y_{12} & 0 & 0 \\ U_{12}(g) & U_{11}(y_{11}) & U_{11}(y_{12}) & U_{12}(y_{21}) & U_{12}(y_{22}) \\ U_{22}(g) & U_{21}(y_{11}) & U_{21}(y_{12}) & U_{22}(y_{21}) & U_{22}(y_{22}) \\ U_{32}(g) & U_{31}(y_{11}) & U_{31}(y_{12}) & U_{32}(y_{21}) & U_{32}(y_{22}) \\ U_{42}(g) & U_{41}(y_{11}) & U_{41}(y_{12}) & U_{42}(y_{21}) & U_{42}(y_{22}) \end{vmatrix}, \\
H_{21}(x, \xi, \rho) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ U_{11}(g) & U_{11}(y_{11}) & U_{11}(y_{12}) & U_{12}(y_{21}) & U_{12}(y_{22}) \\ U_{21}(g) & U_{21}(y_{11}) & U_{21}(y_{12}) & U_{22}(y_{21}) & U_{22}(y_{22}) \\ U_{31}(g) & U_{31}(y_{11}) & U_{31}(y_{12}) & U_{32}(y_{21}) & U_{32}(y_{22}) \\ U_{41}(g) & U_{41}(y_{11}) & U_{41}(y_{12}) & U_{42}(y_{21}) & U_{42}(y_{22}) \end{vmatrix}, \\
H_{22}(x, \xi, \rho) &= \begin{vmatrix} g & 0 & 0 & y_{21} & y_{22} \\ U_{12}(g) & U_{11}(y_{11}) & U_{11}(y_{12}) & U_{12}(y_{21}) & U_{12}(y_{22}) \\ U_{22}(g) & U_{21}(y_{11}) & U_{21}(y_{12}) & U_{22}(y_{21}) & U_{22}(y_{22}) \\ U_{32}(g) & U_{31}(y_{11}) & U_{31}(y_{12}) & U_{32}(y_{21}) & U_{32}(y_{22}) \\ U_{42}(g) & U_{41}(y_{11}) & U_{41}(y_{12}) & U_{42}(y_{21}) & U_{42}(y_{22}) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Burada $\Delta(\rho)$ (3.5) determinantıdır. $U_{vk}(g), v = \overline{1,4}, k = 1,2$ değerlerini (3.13) de tanımlı g için hesaplayarak

$$\begin{aligned}
U_{11}(g) &= -\frac{1}{2\rho} \sin \rho(1 + \xi), & U_{12}(g) &= 0, \\
U_{21}(g) &= 0, & U_{22}(g) &= -\frac{1}{2\rho} \sin \rho(1 - \xi), \\
U_{31}(g) &= \frac{1}{2\rho} \sin \rho \xi, & U_{32}(g) &= \frac{1}{2\rho} \sin \rho \xi, \\
U_{41}(g) &= -\frac{1}{2} \cos \rho \xi, & U_{42}(g) &= -\frac{1}{2} \cos \rho \xi + \frac{1}{2} \rho m \sin \rho \xi,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde ederiz. (3.16) değerlerini, (3.6) ile (3.7) ifadelerini $H_{kj}(x, \xi, \rho)$ formüllerinde yerine yazarsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$H_{11}(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\rho} \sin \rho(x - \xi) & \sin \rho(1 + x) & \cos \rho(1 + x) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\rho} \sin \rho(1 + \xi) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \rho & \cos \rho \\ \frac{1}{2\rho} \sin \rho \xi & \sin \rho & \cos \rho & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} \cos \rho \xi & \rho \cos \rho & -\rho \sin \rho & -\rho & -\rho^2 m \end{vmatrix},$$

burada $x \leq \xi$ dir ($\xi < x$ durumunda determinantın 1. satır 1. sütun da bulunan

ifadesinin işareti ters (-) olur).

$$H_{12}(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} 0 & \sin \rho(1+x) & \cos \rho(1+x) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\rho} \sin \rho(1+\xi) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \rho & \cos \rho \\ \frac{1}{2\rho} \sin \rho \xi & \sin \rho & \cos \rho & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} \cos \rho \xi & \rho \cos \rho & -\rho \sin \rho & -\rho & -\rho^2 m \end{vmatrix},$$

$$H_{21}(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin \rho x & \cos \rho x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\rho} \sin \rho(1-\xi) & 0 & 0 & \sin \rho & \cos \rho \\ \frac{1}{2\rho} \sin \rho \xi & \sin \rho & \cos \rho & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} \cos \rho \xi + \frac{1}{2} \rho m \sin \rho \xi & \rho \cos \rho & -\rho \sin \rho & -\rho & -\rho^2 m \end{vmatrix},$$

ve

$$H_{22}(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\rho} \sin \rho(x-\xi) & 0 & 0 & \sin \rho x & \cos \rho x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\rho} \sin \rho(1-\xi) & 0 & 0 & \sin \rho & \cos \rho \\ \frac{1}{2\rho} \sin \rho \xi & \sin \rho & \cos \rho & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} \cos \rho \xi + \frac{1}{2} \rho m \sin \rho \xi & \rho \cos \rho & -\rho \sin \rho & -\rho & -\rho^2 m \end{vmatrix},$$

burada $x \leq \xi$ dir ($\xi < x$ durumunda determinantın 1. satır 1. sütun da bulunan ifadesinin işareti ters (-) olur).

Alınan determinantların ([76], sayfa 95) e benzer olarak dönüşümünü aldığımızda Green fonksiyonunun bileşenlerinin formüllerini elde ederiz. Bu formülleri aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 3.1. (3.10),(1.2) probleminin Green fonksiyonunun $G_{kj}(x, \xi, \rho)$ bileşenleri aşağıdaki şekildedir:

$$G_{11}(x, \xi, \rho) = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \sin \rho(x-\xi) + \frac{1}{\Delta(\rho)} \sin \rho(1+x) \sin \rho(1+\xi) \\ -\frac{1}{\rho \sin \rho} \sin \rho(1+x) \sin \rho \xi, & -1 \leq \xi < x \leq 0, \\ \frac{1}{\rho} \sin \rho(x-\xi) + \frac{1}{\Delta(\rho)} \sin \rho(1+x) \sin \rho(1+\xi) \\ -\frac{1}{\rho \sin \rho} \sin \rho x \sin \rho(1+\xi), & -1 \leq x \leq \xi \leq 0; \end{cases} \quad (3.17)$$

$$G_{22}(x, \xi, \rho) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \sin \rho(x - \xi) + \frac{1}{\Delta(\rho)} \sin \rho(1 - x) \sin \rho(1 - \xi) \\ + \frac{1}{\rho \sin \rho} \sin \rho x \sin \rho(1 - \xi), & 0 \leq \xi < x \leq 1, \\ \frac{1}{\rho} \sin \rho(x - \xi) + \frac{1}{\Delta(\rho)} \sin \rho(1 - x) \sin \rho(1 - \xi) \\ - \frac{1}{\rho \sin \rho} \sin \rho(1 - x) \sin \rho \xi, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1; \end{cases} \quad (3.18)$$

$$G_{12}(x, \xi, \rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} \sin \rho(1 + x) \sin \rho(1 - \xi), \quad x \in [-1, 0], \xi \in [0, 1]; \quad (3.19)$$

$$G_{21}(x, \xi, \rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} \sin \rho(1 - x) \sin \rho(1 + \xi), \quad x \in [0, 1], \xi \in [-1, 0]. \quad (3.20)$$

3.3 Lineerleştirilmiş Operatör ve Rezolvent Yapısı

Şimdi (1.1),(1.2) probleminin lineerleştirilmiş operatörünü kuralım. Bunun için öncelikle grand-Lebesgue uzaylarındaki problemimize uygun bir alt uzay oluşturalım.

Grand-Lebesgue uzayı, $[-\pi; \pi]$ aralığında tanımlı,

$$\|f\|_p = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty,$$

koşulunu sağlayan f ölçülebilir fonksiyonlarından oluşur ve $L_p(-\pi; \pi)$, $1 < p < +\infty$ ile gösterilir. $L_p(-\pi; \pi)$ uzayı $\|f\|_p$ normuna göre tam uzaydır([75]). Ancak bu uzay ayrılabilir değildir. Bunu göstermek adına $\alpha \in [0; 1)$ için

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \alpha, \\ (t - \alpha)^{-\frac{1}{p}}, & \alpha < t \leq 1, \end{cases}$$

fonksiyonlar ailesini ele alalım. $\alpha \in [0; 1)$. Böylece $\{f_\alpha\} \subset L_p(0; 1)$ olur. Ancak,

$$\begin{aligned} \|f_\alpha\|_p &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\alpha}^1 (t - \alpha)^{-1 + \frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t - \alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_{\alpha}^1 \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(1 - \alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty, \end{aligned}$$

bulunur. Burada keyfi iki farklı $\alpha, \beta \in [0; 1)$ aldığımızda ve $\alpha < \beta$ için

$$\begin{aligned} \|f_\alpha - f_\beta\|_p &\geq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_\alpha^\beta (t - \alpha)^{-1 + \frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(t - \alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} |^\beta \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(p(\beta - \alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(p(\beta - \alpha)^{\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Bu ise $L_p(0; 1)$ uzayının ayrılabilir olmadığını göstermektedir.

Bu sebeple $L_p(-\pi; \pi)$ uzayının ayrılabilir bir alt uzayını bulmalıyız. $\forall \delta > 0$ için

$$T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x + \delta), & x + \delta \in [-\pi; \pi], \\ 0, & x + \delta \in \mathbb{R} \setminus [-\pi; \pi], \end{cases} \quad f \in L_p(-\pi; \pi),$$

öteleme (shift) operatörünü düşünelim ve

$$\|T_\delta f - f\|_p \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0,$$

koşulunu sağlayan $f \in L_p(-\pi; \pi)$ fonksiyonlarından oluşan $\tilde{G}_p(-\pi; \pi)$ lineer manifoldunu düşünelim. $G_p(-\pi; \pi)$ ise $\tilde{G}_p(-\pi; \pi)$ manifoldunun $L_p(-\pi; \pi)$ de kapanışı olsun. Aşağıdaki lemmayı tanımlayabiliriz.

Lemma 3.2. $L_p(-\pi; \pi) \subset G_p(-\pi; \pi)$ sürekli gömmesi sağlanır ve bu gömme tamdır, yani,

$$G_p(-\pi; \pi) \setminus L_p(-\pi; \pi) \neq \emptyset.$$

İspat. $L_p(-\pi; \pi) \subset G_p(-\pi; \pi)$ olduğu açıktır. Bu gömmenin sürekliliği ise

$$\|f\|_{G_p} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L_{p-\varepsilon}} \leq \|f\|_{L_p} \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} 2^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \leq 2^{-\frac{1}{p}} (p-1) \|f\|_{L_p},$$

eşitsizliği ile gösterilir. Böylece $G_p(-\pi; \pi) \setminus L_p(-\pi; \pi) \neq \emptyset$ bağıntısını göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için $L_p(0; 1)$ uzayında olmayıp $G_p(0; 1)$ uzayına ait olan bir fonksiyon bulmamız yeterli olacaktır. Aşağıdaki fonksiyonlar ailesini düşünelim.

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & t \in [\exp\{-n^{2p}\}; 1] \\ 0, & t \notin [\exp\{-n^{2p}\}; 1]. \end{cases}$$

$\|f_n\|_p$ ve $\|f_n\|_p$ normları için

$$\|f_n\|_p \leq \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 t^{-1 + \frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p,$$

$$\|f_n\|_p = \left(\int_{\exp\{-n^{2p}\}}^1 t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} = n^2.$$

ifadeleri bulunur. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n\|_p}{n^2}$ serisinin yakınsaklığı $L_p(0; 1)$ uzayında $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{n^2}$ serisinin yakınsaklığını ifade eder. $f(t)$ ise bu seri toplamına eşit olsun. $f \in G_p(0; 1)$ olduğu açıktır. Şimdi $f \notin L_p(0; 1)$ olduğunu gösterelim.

$$S_m(t) = \sum_{n=1}^m \frac{f_n(t)}{n^2},$$

kısmi toplamını alalım. $m \rightarrow \infty$ iken S_m $L_{p-\varepsilon}(0; 1)$ de f e yakınsaması ile, S_m nin monoton azalmayan olmasından dolayı $m \rightarrow \infty$ iken S_m hemen her yerde f e yakınsar. Böylelikle $|S_m|^p$ hemen her yerde $|f|^p$ e yakınsar. Levi teoremi gereği,

$$\int_0^{2\pi} |S_m(t)|^p dt \rightarrow \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt, m \rightarrow \infty,$$

bulunur. Başka bir deyişle,

$$\int_0^{2\pi} |S_m(t)|^p dt = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^m \frac{f_n(t)}{n^2} \right|^p dt \geq \sum_{n=1}^m \frac{\int_0^{2\pi} |f_n(t)|^p dt}{n^{2p}} = \sum_{n=1}^m \frac{n^{2p}}{n^{2p}} = m$$

ifadesinden $m \rightarrow \infty$ iken $\int_0^{2\pi} |S_m(t)|^p dt \rightarrow +\infty$ olur. Dolayısıyla, $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt = +\infty$ bulunur. Bu ise ispatımızı tamamlar. ■

Lemma 3.3. $C_0^\infty[-\pi; \pi]$ uzayı $G_p(-\pi; \pi)$, $1 < p < +\infty$ de yoğunur.

İspat. İspat için keyfi bir $\eta > 0$ sayı ve keyfi bir $f \in G_p(-\pi; \pi)$ fonksiyonunu alalım. $\omega_\eta(t)$ ile

$$\omega_\eta(t) = \begin{cases} c_\eta \exp(-\frac{\eta^2}{\eta^2 - t^2}), & |t| \leq \eta, \\ 0, & |t| > \eta, \end{cases},$$

çekirdeğini gösterelim. Burada c_η sabiti $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(t) dt = 1$ olacak şekilde alınır. $f_\eta(\cdot)$ fonksiyonu $\omega_\eta(\cdot)$ ile tanımlanan bir konvolüsyon olsun, yani

$$f_\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) \omega_\eta(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(t-s) f(s) ds.$$

Bu tanımlamanın doğruluğu $L_p(-\pi; \pi) \subset L_1(-\pi; \pi)$ kapsamı ile ifade edilir. $f_\eta(t)$ nin sonsuz diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu açıktır. Minkowski eşitsizliğini

kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|f - f_\eta\|_p &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot) \omega_\eta(s) ds - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot - s) \omega_\eta(s) ds \right\|_p = \\
&= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\cdot - s) - f(\cdot)] \omega_\eta(s) ds \right\|_p = \\
&= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t-s) - f(t)] \omega_\eta(s) ds \right|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(s) \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} ds \leq \\
&\leq e_p \sup_{|s| \leq \eta} \|f(\cdot - s) - f(\cdot)\|_p \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

gösterilebilir. Dolayısıyla $C^\infty[-\pi; \pi]$, $G_p(-\pi; \pi)$ de yoğundur.

Keyfi bir $\eta > 0$ sayısı ve bir $f \in G_p(-\pi; \pi)$ fonksiyonunu düşünelim. Yukarıda ispat ettiğimiz gibi, öyle bir $g \in C^\infty[-\pi; \pi]$ fonksiyonu bulabiliriz ki

$$\|f - g\|_p < \frac{\eta}{3}, \quad (3.21)$$

ifadesi sağlanır. $\delta < \pi \left(\frac{\eta}{3e_p \|g\|_\infty} \right)^p$, $e_p = p - 1$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ seçelim. δ uzunluğundaki $E_\delta^+ = (\pi - \delta; \pi)$ ile $E_\delta^- = (-\pi; -\pi + \delta)$ aralıklarının alalım ve

$$g_\delta(t) = \begin{cases} g(t), & t \in (-\pi; \pi) \setminus (E_\delta^+ \cup E_\delta^-), \\ 0, & t \in E_\delta^+ \cup E_\delta^-. \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\|g - g_\delta\|_p &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{E_\delta^+ \cup E_\delta^-} |g(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \\
&\leq \|g\|_\infty \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} 2\delta \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\|g\|_\infty e_p \delta^{\frac{1}{p}}}{\pi^{\frac{1}{p}}} < \frac{\eta}{3},
\end{aligned} \quad (3.22)$$

eşitsizliği bulunur.

$$g_{\delta, \tau}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\delta(t-s) \omega_\tau(s) ds, \tau \in \mathbb{R},$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece $\tau < \frac{\delta}{2}$ için $g_{\delta,\tau} \in C_0^\infty[-\pi; \pi]$ olur. $\tau \rightarrow 0$ iken $\|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_p \rightarrow 0$ olduğundan, öyle bir $\tau < \frac{\delta}{2}$ bulabiliriz ve

$$\|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_p < \frac{\eta}{3}, \quad (3.23)$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla, (3.21), (3.22) ve (3.23) ifadelerini kullanarak

$$\|f - g_{\delta,\tau}\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\delta\|_p + \|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_p < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta,$$

eşitsizliğine ulaşır, yani $C_0^\infty[-\pi; \pi] \subset G_p(-\pi; \pi)$ de yoğun olur. ■

$GW_p^2(a; b)$, $1 < p < +\infty$ ile $W_p^2(a; b)$ ([77]) uzayının bir alt uzayını gösterelim ve bu alt uzay $f'' \in G_p(a; b)$ olacak şekildeki $f \in W_p^2(a; b)$ fonksiyonlarından oluşsun.

$$GW_p^2((-1; 0) \cup (0; 1)) = GW_p^2(-1; 0) \oplus GW_p^2(0; 1),$$

ifadesini tanımlayalım.

Öncelikle aşağıdaki lemmanın doğruluğunu göstermemiz gerekir.

Lemma 3.4. *Dirac delta fonksiyoneli $\delta_x(u) = u(x)$, $x \in (-1; 1)$ $GW_p^2(-1; 1)$ de lineer ve sınırlıdır ancak $G_p(-1; 1)$, $1 < p < +\infty$ de sınırsızdır.*

İspat. Sabit bir $x \in (-1; 1)$ noktası alalım. O zaman $\forall t \in (-1; 1)$ için

$$|\delta_x(u)| = |u(x)| = \left| u(t) + \int_t^x u'(s) ds \right| \leq |u(t)| + \int_t^x |u'(s)| ds,$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafının $[-1; 1]$ aralığı boyunca t ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} 2|\delta_x(u)| &\leq \int_{-1}^1 |u(t)| dt + \int_{-1}^1 \left(\int_t^x |u'(s)| ds \right) dt \leq \\ &\leq \int_{-1}^1 |u(t)| dt + 2 \int_{-1}^1 |u'(t)| dt, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\forall \varepsilon \in (0; p-1)$ için, $p-\varepsilon$ ile Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$|\delta_x(u)| \leq 2^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{-1}^1 |u(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + 2^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{-1}^1 |u'(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} (\|u\|_p + 2 \|u'\|_p) \leq 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} (\|u\|_p + \|u'\|_p) = \\ &\leq 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} (\|u\|_p + \|u'\|_p + \|u''\|_p) = 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|u\|_{GW_p^2}, \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır, yani δ_x fonksiyoneli $GW_p^2(-1; 1)$ de lineer ve sınırlıdır.

Şimdi δ_x fonksiyonelinin $G_p(-1; 1)$ de sınırlı olmadığını gösterelim. Tersini varsayalım, yani δ_x , $G_p(-1; 1)$ de sınırlı olsun. O zaman bir $M > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$|\delta_x(u)| \leq M \|u\|_p, \forall u \in G_p(-1; 1). \quad (3.24)$$

$\forall u \in L_p(-1; 1)$ için

$$\|u\|_p \leq 2^{-\frac{1}{p}}(p-1) \|u\|_p \quad (3.25)$$

bağıntısının sağlandığı grand norm tanımından kolayca görülür. O zaman (3.24) ve (3.25) den

$$|\delta_x(u)| \leq 2^{-\frac{1}{p}}(p-1)M \|u\|_p, \forall u \in L_p(-1; 1),$$

olur, yani δ_x $L_p(-1; 1)$ de sınırlıdır. Ancak bu durum δ_x fonksiyonelinin $L_p(-1; 1)$ de sınırsız olmasıyla çelişir. Böylece δ_x fonksiyoneli $G_p(-1; 1)$ de sınırsızdır. ■

Şimdi ise $G_p(-1; 1) \oplus C$ de bir A operatörü alalım ve

$$A(\hat{u}) = (-u'', u'(-0) - u'(+0))$$

şeklinde tanımlayalım.

$$D(A) = \left\{ \hat{u} = (u, \alpha) : u \in GW_p^2((-1; 0) \cup (0; 1)) \right\},$$

ise bu operatörün tanım kümesi olsun. A nın kapalı bir operatör olduğunu gösterelim.

$\hat{u}_n = (u_n, \alpha_n) \in D(A)$ keyfi bir dizi olsun öyle ki

$$\|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{G_p \oplus C} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\|A\hat{u}_n - \hat{v}\|_{G_p \oplus C} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

şartlarını sağlasın. Burada $\hat{u} = (u, \alpha)$ ve $\hat{v} = (v, \beta)$ olur. O zaman u_n dizisi $G_p(-1; 1)$ de u fonksiyonuna yakınsar ve u_n'' dizisi $G_p(-1; 1)$ de $-v$ ye yakınsar. Dolayısıyla u_n ve u_n'' dizileri sırasıyla u ve $-v$ ye $L_1(-1; 1)$ de yakınsar. u_n ve u_n' $[-1; 0]$ de mutlak sürekli olduğundan bir u' vardır ve u and u' fonksiyonları $[-1; 0]$ de mutlak sürekli. Dahası u_n'' dizisi $L_1(-1; 0)$ de u'' ne yakınsar. Buradan $u''(x) = -v(x)$ eşitliği $[-1; 0]$ de hemen her yerde sağlanır ve böylece $u'' \in G_p(-1; 0)$ olur, yani $u \in GW_p^2(-1; 0)$. $u \in GW_p^2(0; 1)$ olduğu da benzer biçimde gösterilir. Elde edilen sonuçlardan $\hat{u} \in D(A)$

olduğu görülür. Başka bir ifadeyle $\beta = u'(-0) - u'(0)$ eşitliği sağlanır. Nitekim $A(\hat{u}) = \hat{v}$, yani A nın $G_p(-1; 1) \oplus C$ de kapalılığı gösterilmiş olur.

Şimdi ise $G_p(-1; 1) \oplus C$ de bir L operatörünü

$$L(\hat{u}) = (-u'', u'(-0) - u'(0)) \quad (3.26)$$

formülü ile tanımlayalım ve

$$\begin{aligned} D(L) &= \\ &= \left\{ \hat{u} = (u, mu(0)) : u \in GW_p^2((-1; 0) \cup (0; 1)), u(-1) = u(1) = 0, u(-0) = u(+0) \right\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

tanım kümesi olsun. L nin kapalı yoğun tanımlı bir operatör olduğunu gösterelim.

$\forall \hat{u} = (u, \alpha) \in G_p(-1; 1) \oplus C$ için,

$$F(\hat{u}) = mu(0) - \alpha,$$

$$U_1(\hat{u}) = U_1(u) = u(-1),$$

$$U_2(\hat{u}) = U_2(u) = u(1),$$

$$U_3(\hat{u}) = U_3(u) = u(-0) - u(+0),$$

olsun. Buna göre $D(L)$,

$$\begin{aligned} D(L) &= \\ &= \left\{ \hat{u} \in G_p \oplus C : \hat{u} = (u, \alpha) \in GW_p^2((-1; 0) \cup (0; 1)), F(u) = 0, U_i(u) = 0, i = \overline{1, 3} \right\}, \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Lemma 3.4 gereği F ve U_i , $i = 1, 2, 3$ lineer fonksiyonelleri $GW_p^2(-1; 1) \oplus C$ de sınırlıdır ancak $G_p(-1; 1) \oplus C$ de sınırlı değildir. Buradan A operatörünün kapalılığında dolayı, Teorem 2.1 den A nın $D(L)$ ye kısıtlaması L $G_p(-1; 1) \oplus C$ de kapalı yoğun tanımlı bir operatördür. Böylece aşağıda verilen teoremi ispatlarız.

Teorem 3.2. (3.27) ile tanımlanan $D(L)$ tanım kümesi ve (3.26) formülü ile tanımlanan L operatörünü alalım. O zaman L $G_p(-1; 1) \oplus C$, $1 < p < +\infty$ de kapalı yoğun tanımlı bir operatördür.

Uyarı. Teorem 3.2, L nin $L_p(-1; 1) \oplus C$, $1 < p < +\infty$ de kapalı yoğun tanımlı bir operatör olduğunu söyleyen ifadenin kullanılmasıyla da kanıtlanabilir (bkz. Lemma 3, [17]). Bu tür bir ispat için, Lemma 3.4 tarafından sağlanan Dirac fonksiyonelinin

bu uzaylardaki uygun özelliklerinin bilinmesi gerekir.

Şimdi ise L operatörünün rezolvent yapısını kuralım. Sabit bir $\hat{f} \in G_p(-1; 1) \oplus C$, $\hat{f} = (f, \beta)$ için

$$L\hat{u} - \lambda\hat{u} = \hat{f}, \quad (3.28)$$

eşitliğini düşünelim. (3.28) eşitliği aşağıdaki gibi problem şeklinde yazılabilir:

$$\begin{cases} u''(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u'(-0) - u'(0) - \lambda mu(0) = \beta \\ U_i(u) = 0, i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.29)$$

Problem (3.29) çözümleri ile ilgili aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.5. ([40]) (3.28) denkleminin $\hat{u} = (u; mu(0))$ çözümleri için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$\begin{aligned} u(x, \rho) = & \frac{\beta \sin \rho(1+x)}{\rho(2 \cos \rho - \rho m \sin \rho)} - \frac{1}{\rho} \int_{-1}^x f(\xi) \sin \rho(x - \xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_x^0 f(\xi) \sin \rho(x - \xi) d\xi + \frac{1}{\Delta(\rho)} \int_{-1}^0 f(\xi) \sin \rho(1+x) \sin \rho(1+\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{\rho \sin \rho} \int_{-1}^x f(\xi) \sin \rho(1+x) \sin \rho \xi d\xi - \frac{1}{\rho \sin \rho} \int_x^0 f(\xi) \sin \rho x \sin \rho(1+\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{\Delta(\rho)} \int_0^1 f(\xi) \sin \rho(1+x) \sin \rho(1-\xi) d\xi, \quad x \in [-1; 0]; \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} u(x, \rho) = & \frac{\beta \sin \rho(1-x)}{\rho(2 \cos \rho - \rho m \sin \rho)} - \frac{1}{\rho} \int_0^x f(\xi) \sin \rho(x - \xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_x^1 f(\xi) \sin \rho(x - \xi) d\xi + \frac{1}{\Delta(\rho)} \int_0^1 f(\xi) \sin \rho(1-x) \sin \rho(1-\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{\rho \sin \rho} \int_0^x f(\xi) \sin \rho x \sin \rho(1-\xi) d\xi + \frac{1}{\rho \sin \rho} \int_x^1 f(\xi) \sin \rho(1-x) \sin \rho \xi d\xi + \\ & + \frac{1}{\Delta(\rho)} \int_{-1}^0 f(\xi) \sin \rho(1-x) \sin \rho(1+\xi) d\xi, \quad x \in [0; 1], \end{aligned} \quad (3.31)$$

burada $\lambda = \rho^2$, L operatörünün rezolvent kümesine aittir. Dolayısıyla

$$u(0, \rho) = \frac{1}{\rho(2 \cos \rho - \rho m \sin \rho)} \times$$

$$\times \left[\beta \sin \rho + \int_{-1}^0 f(\xi) \sin \rho (1 + \xi) d\xi + \int_0^1 f(\xi) \sin \rho (1 - \xi) d\xi \right]. \quad (3.32)$$

olur.

İspat. (3.29) denkleminin çözümleri

$$u(x, \rho) = \begin{cases} c_{11}y_{11}(x) + c_{12}y_{12}(x) + y_1(x), & x \in [-1, 0], \\ c_{21}y_{21}(x) + c_{22}y_{22}(x) + y_2(x), & x \in [0, 1]; \end{cases} \quad (3.33)$$

burada $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ (3.15) den tanımlanır. (3.11) de tanımlanan $y(x)$ (1.2) koşullarını sağladığından,

$$U_v(y) = 0, \quad v = \overline{1, 4}, \quad (3.34)$$

olur. Şimdi $u(x, \rho)$ fonksiyonunun $U_v(u) = 0, v = 1, 2, 3, U_4(u) = \beta$ koşullarını sağladığını kabul edelim. O zaman (3.33) ve (3.34) dan

$$\begin{cases} c_{11}U_{v1}(y_{11}) + c_{12}U_{v1}(y_{12}) + c_{21}U_{v2}(y_{21}) + c_{22}U_{v2}(y_{22}) = 0, & v = 1, 2, 3; \\ c_{11}U_{41}(y_{11}) + c_{12}U_{41}(y_{12}) + c_{21}U_{42}(y_{21}) + c_{22}U_{42}(y_{22}) = \beta. \end{cases}$$

c_{jk} bilinmeyen katsayılarına göre sistemi çözerek

$$c_{11} = -\frac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{11}(y_{12}) [U_{22}(y_{21})U_{32}(y_{22}) - U_{22}(y_{22})U_{32}(y_{21})],$$

$$c_{12} = \frac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{11}(y_{11}) [U_{22}(y_{21})U_{32}(y_{22}) - U_{22}(y_{22})U_{32}(y_{21})],$$

$$c_{21} = \frac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{22}(y_{22}) [U_{11}(y_{11})U_{31}(y_{12}) - U_{11}(y_{12})U_{31}(y_{11})],$$

$$c_{22} = -\frac{\beta}{\Delta(\rho)} U_{22}(y_{21}) [U_{11}(y_{11})U_{31}(y_{12}) - U_{11}(y_{12})U_{31}(y_{11})].$$

Bulunan bu c_{jk} değerlerini (3.33) de yerine yazarak ve (3.6), (3.17)-(3.20) formüllerini göz önüne alarak, (3.30) ve (3.31) formüllerinin geçerliliği sağlanır. (3.32) formülü ise (3.30) (veya (3.31)) formülünde $x = 0$ alınarak gösterilmiş olur. ■

ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN GRAND-LEBESGUE UZAYLARINDA BAZLIĞI

4.1 Özfonksiyonlar Sisteminin $L_p) \oplus \mathbb{C}$ Uzaylarında Bazlığı

Bir önceki bölümde tanımladığımız L operatörünün özfonksiyonları (1.1)-(1.2) probleminin özfonksiyonları ile çakışır ve karşılık gelen özvektörler [17]

$$\hat{u}_{2n-1}(x) = (u_{2n-1}(x), 0), n \in N$$

$$\hat{u}_{2n}(x) = (u_{2n}(x), m \sin \rho_{2,n}), n \in Z_+,$$

şeklinde. Şimdi $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ uzayında $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sisteminin bazlığı üzerine aşağıdaki ana teoremimizi ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.1. L operatörünün $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ özvektörler sistemi $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ uzayı için bir baz oluşturur.

İspat. Sistemler için bazlık kriterlerinin koşullarını burada ispatlamalıyız (bkz. [78]). Bunun için, ilk olarak $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sisteminin tamlığını ispatlayalım. Keyfi bir $\hat{u} \in G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ vektörü alalım ve $\eta > 0$ keyfi bir sayı olsun. Lemma 3.2 den $L_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C} \subset G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de yoğundur. Dolayısıyla bir $\hat{v} \in L_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ vektörü vardır öyle ki

$$\|\hat{u} - \hat{v}\|_{G_p \oplus \mathbb{C}} < \eta. \quad (4.1)$$

$\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sisteminin $L_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de tamlığından (bkz. Theorem 1, [17]), bir $\hat{w} \in L(\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+})$ vektörü vardı öyle ki

$$\|\hat{v} - \hat{w}\|_{L_p \oplus \mathbb{C}} < \eta. \quad (4.2)$$

(3.25) ve (4.2) den

$$\|\hat{v} - \hat{w}\|_{G_p \oplus \mathbb{C}} \leq 2^{-\frac{1}{p}}(p-1) \|\hat{v} - \hat{w}\|_{L_p \oplus \mathbb{C}} < 2^{-\frac{1}{p}}(p-1)\eta, \quad (4.3)$$

elde ederiz. O zaman üçgen eşitsizliğini uygulayarak ve (4.1) ve (4.3) eşitsizliklerini göz önüne alarak

$$\begin{aligned}\|\hat{u} - \hat{w}\|_{G_p \oplus \mathbb{C}} &\leq \|\hat{u} - \hat{v}\|_{G_p \oplus \mathbb{C}} + \|\hat{v} - \hat{w}\|_{G_p \oplus \mathbb{C}} \leq \\ &< \eta + 2^{-\frac{1}{p}}(p-1)\eta = M\eta,\end{aligned}$$

olduğunu gösteririz, yani $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sistemi $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de tamdır.

Şimdi $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sisteminin $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de minimalliğini gösterelim. [17] de gösterildiği gibi, $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sistemi $L_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de $\{\hat{v}_n\}_{n \in Z_+}$: $\hat{v}_n(x) = (v_n(x), mv(0))$ şeklinde biortogonal eşlenik vektörler sistemine sahiptir. Burada $v_n(x)$, $n \in Z_+$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}v''(x) + \lambda v(x) &= 0, x \in (-1; 0) \cup (0; 1), \\ \left. \begin{aligned}v(-1) &= v(1) = 0 \\ v(-0) &= v(+0) \\ v'(-0) - v'(0) &= \lambda \tilde{m}v(0)\end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

eşlenik spektral probleme karşılık gelen özfonksiyonlardır ve

$$v_{2n-1}(x) = \sin \pi n x, n \in N,$$

$$v_{2n}(x) = \begin{cases} c_{2n} \sin \bar{\rho}_{2,n}(1+x), x \in [-1; 0] \\ c_{2n} \sin \bar{\rho}_{2,n}(1-x), x \in [0; 1] \end{cases}, n \in Z_+, \quad (4.4)$$

şeklindedir. c_{2n} ise

$$c_{2n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (4.5)$$

koşulunu sağlayan normalleştirilmiş sayılardır. Dahası p ve $n \in Z_+$ den bağımsız bir $a > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$|\langle \hat{u}, \hat{v}_n \rangle| \leq a \|\hat{u}\|_{L_p \oplus \mathbb{C}},$$

olur.

Şimdi ise $\{\hat{v}_n\}_{n \in Z_+}$ sisteminin $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sistemine $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de biortogonal eşlenik sistem olduğunu

$$\langle \hat{u}, \hat{v}_n \rangle = \int_{-1}^1 u(x) \overline{v_n}(x) dx + \alpha m v_n(0), \quad \hat{u} = (u, \alpha),$$

formülü ile gösterelim. Aslında her sabit $\varepsilon \in (0; p-1)$ için

$$|< \hat{u}, \hat{v}_n >| \leq a \|\hat{u}\|_{L_{p-\varepsilon} \oplus \mathbb{C}} \leq a_1 \|\hat{u}\|_{G_p \oplus \mathbb{C}}, \quad (4.6)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ sistemi $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de minimaldir.

Son olarak geriye sadece

$$S_n(\hat{f}) = \sum_{k=0}^n < \hat{f}, \hat{v}_k > \hat{u}_k, \quad \hat{f} \in G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C},$$

projektörler dizisinin $G_p(-1; 1) \oplus \mathbb{C}$ de düzgün sınırlılığını göstermek kalıyor. Bunun için öncelikle

$$\begin{aligned} \Gamma_{2n-1} &= \left\{ \rho : |\rho - \rho_{1,n}| = \frac{1}{2\pi mn} \right\}, n \in N; \\ \Gamma_{2n} &= \left\{ \rho : |\rho - \rho_{2,n}| = \frac{1}{2\pi mn} \right\}, n \in Z_+; \\ C_n &= \left\{ \rho : |\rho| = \pi(n + \frac{1}{2}), 0 \leq \arg \rho \leq \pi \right\}, n \in Z_+ \end{aligned}$$

çemberlerini tanımlayalım ve Γ'_{2n-1} , Γ'_{2n} ve C'_n ise $\lambda = \rho^2$ dönüşümüne uygun görüntüleri olsun. O zaman L operatörünün $R(\lambda)$ rezolvent operatörünü kullanarak S_n operatörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$S_n(\hat{f}) = \sum_{k=0}^n E_k(\hat{f}),$$

burada $\{E_n\}_{n \in Z_+}$ projektörler dizisi

$$\begin{aligned} E_{2n-1}\hat{f} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_{2n-1}} R(\lambda)\hat{f} d\lambda = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{2n-1}} \rho R(\rho^2)\hat{f} d\rho, n \in N; \\ E_{2n}\hat{f} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_{2n}} R(\lambda)\hat{f} d\lambda = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{2n}} \rho R(\rho^2)\hat{f} d\rho, n \in Z_+, \end{aligned}$$

formülleri ile tanımlanır. $R(\rho^2)\hat{f} = \hat{u}(x, \rho) = (u(x, \rho); mu(0, \rho))$ bakış açısıyla,

$$\begin{aligned} S_{2n-1}\hat{f}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_n} R(\lambda)\hat{f}(x) d\lambda = \frac{1}{\pi i} \int_{C_n} \rho R(\rho^2)\hat{f}(x) d\rho = \frac{1}{\pi i} \int_{C_n} \rho \hat{u}(x, \rho) d\rho = \\ &= \frac{1}{\pi i} \left(\int_{C_n} \rho u(x, \rho) d\rho; \int_{C_n} m\rho u(0, \rho) d\rho \right) = \frac{1}{\pi i} (J_n(x), mJ_n(0)), n \in Z_+, \end{aligned}$$

elde ederiz. [79] den görüleceği gibi

$$|\sin \rho| \leq M_0 e^{|\rho| \sin \varphi}, \rho = |\rho| \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

eşitsizliği sağlanır. Dahası merkezleri $\Delta_1(\rho) = 2 \cos \rho - m \rho \sin \rho$ in sıfırları olan bazı δ yarıçaplı çemberlerin dışındaki yeterince büyük $|\rho|$ değerleri için

$$|\Delta_1(\rho)| \geq M_1 |\rho| e^{|\rho| \sin \varphi},$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliklerden, $\rho = |\rho| \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ve merkezleri $\Delta_1(\rho)$ nun sıfırların olan bazı δ yarıçaplı çemberlerin dışındaki yeterince büyük $|\rho|$ değerleri için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\left| \frac{\sin \rho(1+x)}{\Delta_1(\rho)} \right| \leq \frac{M_0 e^{|\rho| x \sin \varphi}}{M_1 |\rho|} \leq \frac{M_2}{|\rho|}, \forall x \in [-1; 0]. \quad (4.7)$$

(3.30) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} J_n(0) &= \beta \int_{C_n} \frac{\sin \rho}{\rho \Delta_1(\rho)} d\rho + \int_{C_n} \left(\int_{-1}^0 f(\xi) \frac{\sin \rho(1+\xi)}{\rho \Delta_1(\rho)} d\xi \right) d\rho + \\ &\quad + \int_{C_n} \left(\int_0^1 f(\xi) \frac{\sin \rho(1-\xi)}{\rho \Delta_1(\rho)} d\xi \right) d\rho = \\ &= \beta \int_{C_n} \frac{\sin \rho}{\rho \Delta_1(\rho)} d\rho + \int_{C_n} \left(\int_{-1}^0 f(\xi) \frac{\sin \rho(1+\xi)}{\rho \Delta_1(\rho)} d\xi \right) d\rho + \\ &\quad + \int_{C_n} \left(\int_{-1}^0 f(-\xi) \frac{\sin \rho(1+\xi)}{\rho \Delta_1(\rho)} d\xi \right) d\rho, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, (4.7) ve $p - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0; p - 1)$ ile Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |J_n(0)| &\leq |\beta| \int_{C_n} \left| \frac{\sin \rho}{\rho \Delta_1(\rho)} \right| |d\rho| + \int_{C_n} \left(\int_{-1}^0 |f(\xi)| \left| \frac{\sin \rho(1+\xi)}{\rho \Delta_1(\rho)} \right| d\xi \right) |d\rho| + \\ &\quad + \int_{C_n} \left(\int_{-1}^0 |f(-\xi)| \left| \frac{\sin \rho(1+\xi)}{\rho \Delta_1(\rho)} \right| d\xi \right) |d\rho| \leq \\ &\leq M_2 \int_{C_n} \frac{1}{|\rho|} |d\rho| \left(|\beta| + \int_{-1}^0 |f(\xi)| d\xi + \int_0^1 |f(\xi)| d\xi \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \pi M_2 \left(|\beta| + \left(\int_{-1}^0 |f(\xi)|^{p-\varepsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\int_0^1 |f(\xi)|^{p-\varepsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right) \leq \\
&\leq 2\pi M_2 \left(|\beta| + \|f\|_{L_{p-\varepsilon}(-1;1)} \right) \leq 2\pi M_2 \left(|\beta| + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{G_p(-1;1)} \right) \leq \\
&\leq M_3 \left(|\beta| + \|f\|_{G_p(-1;1)} \right), \tag{4.8}
\end{aligned}$$

olduğunu gösterebiliriz. Ayrıca, [17] de elde edilen sonuçlardan, (3.32) ile, f ve p den bağımsız bir $M_4 > 0$ sabitinin vardır öyle ki yeteri kadar büyük n için

$$|J_n(x)| \leq M_4 \int_{-1}^0 \frac{|f(\xi)|}{-x-\xi} d\xi = M_4 H(g)(-x), \forall x \in [-1; 0], \tag{4.9}$$

bağıntısı sağlanır. Burada $g(x) = |f(-x)|$ dir. H Hilbert dönüşümünün $L_p(0;1)$ grand-Lebesgue uzayında sınırlı olmasından dolayı (bkz. [77]), pozitif bir $M_5 > 0$ sabiti vardır ve

$$\|H(g)\|_{G_p(0;1)} \leq M_5 \|g\|_{G_p(0;1)} = M_5 \|f\|_{G_p(-1;0)}, \tag{4.10}$$

olur. Böylece (4.9) ve (4.10) den

$$\|J_n\|_{G_p(-1;0)} \leq M_4 \|H(g)\|_{G_p(0;1)} \leq M_6 \|f\|_{G_p(-1;0)}, \tag{4.11}$$

göstermiş oluruz ($M_6 = M_4 M_5$). Benzer bir argümanla, f ve p den bağımsız $M_7 > 0$ varlığını gösterebiliriz öyle ki

$$\|J_n\|_{G_p(0;1)} \leq M_7 \|f\|_{G_p(0;1)}, \tag{4.12}$$

sağlanır. O zaman (4.11) ve (4.12) eşitsizliklerini hesaba katarak,

$$\begin{aligned}
&\|J_n\|_{G_p(-1;1)} \leq \|J_n\|_{G_p(-1;0)} + \|J_n\|_{G_p(0;1)} \leq \\
&\leq M_6 \|f\|_{G_p(-1;0)} + M_7 \|f\|_{G_p(0;1)} \leq M_8 \|f\|_{G_p(-1;1)}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

elde ederiz ($M_8 = M_6 + M_7$).

Şimdi $\|S_{2n-1}(\hat{f})\|_{G_p \oplus C}$ normu için bir sınır bulalım. (4.8) ve (4.13) bağıntısını

kullanarak

$$\begin{aligned} \|S_{2n-1}(\hat{f})\|_{G_p(-1;1) \oplus C} &= \frac{1}{\pi} \left(\|J_n\|_{G_p(-1;1)} + |mJ_n(0)| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(M_8 \|f\|_{G_p(-1;1)} + |m| M_3 \left(|\beta| + \|f\|_{G_p(-1;1)} \right) \right) \leq M \|\hat{f}\|_{G_p \oplus C}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

ifadesini elde ederiz ($M = \frac{2(M_8 + |m|M_4)}{\pi}$). Geriye $\|S_{2n}(\hat{f})\|_{G_p \oplus C}$ normu kalır. $S_{2n}\hat{f}$ ifadesini aşağıdaki formda yeniden yazalım:

$$S_{2n}\hat{f} = S_{2n-1}\hat{f} + \langle \hat{f}, \hat{v}_{2n} \rangle \hat{u}_{2n}.$$

Açıkçası, $a_0 = \sup_n \|\hat{u}_n\|_{G_p(-1;1) \oplus C} < +\infty$ olur. Dolayısıyla, (4.6) ve (4.14) kullanarak, üçgen eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} \|S_{2n}(\hat{f})\|_{G_p(-1;1) \oplus C} &\leq \|S_{2n-1}(\hat{f})\|_{G_p(-1;1) \oplus C} + |\langle \hat{f}, \hat{v}_{2n} \rangle| \|\hat{u}_{2n}\|_{G_p(-1;1) \oplus C} \leq \\ &\leq (M + a_0 a_1) \|\hat{f}\|_{G_p(-1;1) \oplus C} = K \|\hat{f}\|_{G_p(-1;1) \oplus C}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) den, $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğu görülür. Böylece, $\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi $G_p(-1;1) \oplus C$ de bir baz oluşturur. ■

4.2 Özfonksiyonlar Sisteminin L_p Uzaylarında Bazlığı

Teorem 4.1 (1.1)-(1.2) probleminin $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ özvektörler sisteminin $G_p(-1;1)$, $1 < p < +\infty$ de tamlığını ifade etmektedir. Aslında, aksi takdirde,

$$\langle u_n, v \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

ifadesini sağlayacak şekilde $G_p(-1;1)$ de sıfır olmayan sürekli bir fonksiyonel v vardır. $\hat{v}$ ile $G_p(-1;1) \oplus C$ de bir fonksiyoneli

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \langle u, v \rangle,$$

formülü ile tanımlayalım. Açıkçası $\hat{v} \in G_p(-1;1) \oplus C$ de sıfır olmayan sürekli lineer bir fonksiyoneldir ve

$$\langle \hat{u}_n, \hat{v} \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Bu $\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sisteminin $G_p(-1; 1) \oplus C$ uzayında tamlığı ile çelişir. Şimdi $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sisteminin $G_p(-1; 1)$ de bazlığını düşünelim.

Teorem 4.2. Her $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ için, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+, n \neq 2k_0}$ sistemi $G_p(-1; 1)$, $1 < p < +\infty$ de bir baz oluşturur.

İspat. Keyfi bir $f \in G_p(-1; 1)$ fonksiyonu düşünelim. (4.5) den, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemine biortogonal olan $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ için

$$v_{2n}(0) = c_{2n} \sin \bar{\rho}_{2,n} \neq 0, n \in \mathbb{Z}_+,$$

bağıntısı sağlanır. $\hat{f} = (f; \beta)$, $\beta = -\frac{\langle f, v_{2k_0} \rangle}{m v_{2k_0}(0)}$ vektörünü $\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ bazına ayrıştırarak,

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \hat{f}, \hat{v}_n \rangle \hat{u}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\langle f, v_n \rangle + \beta \overline{m v_n(0)}) \hat{u}_n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\langle f, v_n \rangle - \frac{\langle f, v_{2k_0} \rangle}{m v_{2k_0}(0)} \overline{m v_n(0)} \right) \hat{u}_n = \\ &= \sum_{n=0, n \neq 2k_0}^{+\infty} \left(\langle f, v_n \rangle - \frac{\langle f, v_{2k_0} \rangle}{v_{2k_0}(0)} \overline{v_n(0)} \right) \hat{u}_n = \\ &= \sum_{n=0, n \neq 2k_0}^{+\infty} \left(\langle f, v_n \rangle - \frac{\langle f, v_{2k_0} \rangle}{v_{2k_0}(0)} \overline{v_n(0)} \right) \hat{u}_n = \\ &= \sum_{n=0, n \neq 2k_0}^{+\infty} \langle f, v_n - \frac{v_n(0)}{v_{2k_0}(0)} v_{2k_0} \rangle \hat{u}_n, \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$f = \sum_{n=0, n \neq 2k_0}^{+\infty} \langle f, v_n - \frac{v_n(0)}{v_{2k_0}(0)} v_{2k_0} \rangle u_n = \sum_{n=0, n \neq 2k_0}^{+\infty} \langle f, v_n^* \rangle u_n, \quad (4.16)$$

olur $(v_n^* = v_n - \frac{v_n(0)}{v_{2k_0}(0)} v_{2k_0}, n \neq 2k_0)$. Başka bir ifadeyle, $\{v_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}_+, n \neq 2k_0}$ ve $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+, n \neq 2k_0}$ sistemleri biortogonaldir. Aslında,

$$\langle u_k, v_n^* \rangle = \langle u_k, v_n \rangle - \frac{\overline{v_n(0)}}{v_{2k_0}(0)} \langle u_k, v_{2k_0} \rangle = \langle u_k, v_n \rangle = \delta_{nk}, n, k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{2k_0\}.$$

Bu nedenle, $f \in G_p(-1; 1)$ $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+, n \neq 2k_0}$ sistemine göre tek bir (4.16) ayrışımaya sahiptir. Sonuç olarak $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+, n \neq 2k_0}$ sistemi $G_p(-1; 1)$ de bir baz oluşturur. ■

5

ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN AĞIRLIKLIL GRAND-LEBESGUE UZAYLARINDA BAZLIĞI

Bu bölümde aşağıdaki sürekli olmayan spektral problemi $L_{p),\rho}(0,1)$, $1 < p < +\infty$ ağırlıklı grand-Lebesgue uzaylarında ele alacağız ve $\rho(\cdot)$ genel bir ağırlık fonksiyonu olacak.

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y(1) = 0, \\ y\left(\frac{1}{3} - 0\right) &= y\left(\frac{1}{3} + 0\right), \\ y'\left(\frac{1}{3} - 0\right) - y'\left(\frac{1}{3} + 0\right) &= \lambda m y\left(\frac{1}{3}\right), \end{aligned} \right\}, \quad (5.2)$$

burada λ spektral bir parametre ve m sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır.

[17, 80] de problem (5.1), (5.2) nin özdeğerlerinin $\lambda_{1,n} = (\rho_{1,n})^2, n \in \mathbb{N}$, ve $\lambda_{2,n} = (\rho_{2,n})^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ iki serisine sahip olduğu gösterilir ve burada

$$\rho_{1,n} = 3\pi n, \quad \rho_{2,n} = \frac{3\pi n}{2} + \frac{2 + (-1)^n}{\pi m n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

şeklindedir. Bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar ise

$$y_{1,n}(x) = \sin 3\pi n x, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

$$y_{2,n}(x) = \begin{cases} \sin \rho_{2,n}(x - \frac{1}{3}) + \sin \rho_{2,n}(x + \frac{1}{3}), & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \sin \rho_{2,n}(1 - x), & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases} \quad (5.4)$$

formülleri ile ifade edilir.

5.1 Ağırlıklı Grand-Lebesgue Uzaylarında Üstel ve Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri

$\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir ağırlık fonksiyonu olsun. $A_p(a, b)$, $1 < p < +\infty$ ise Muckenhoupt sınıfını gösterebilirsin, yani

$$\sup_{I \subset [a, b]} \frac{1}{|I|} \int_I \rho(t) dt \left(\frac{1}{|I|} \int_I \rho(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} < +\infty.$$

koşulunu sağlayan $\rho(t)$ ağırlık fonksiyonlarının sınıfını ifade etsin.

$L_{p,\rho}(a, b)$ uzayı $[a, b]$ aralığındaki ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan ve aşağıda tanımlı sonlu norma sahip f fonksiyonlarının bir Banach uzayı olan ağırlıklı grand-Lebesgue uzayını gösterebilirsin.

$$\|f\|_{L_{p,\rho}(a,b)} = \|f\rho\|_{L_p(a,b)}.$$

Aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.1. $\rho, A_p(0, 1)$, $1 < p < +\infty$ sınıfına ait bir ağırlık fonksiyonu olsun. O zaman $\forall r \in (1, r_0)$ için $L_{p,\rho}(0, 1) \subset L_r(0, 1)$ sürekli gömmesi olacak şekilde bir $r_0 \in (1, +\infty)$ sayısı vardır.

İspat. İspat için öncelikle $L_{p,\rho}(0, 1)$ uzayındaki durumu ispatlayalım. $A_p(0, 1)$ sınıfı üzerindeki sonuç gereği, $\rho \in A_{p-\varepsilon}(0, 1)$ ifadesini sağlayan bir $0 < \varepsilon < p - 1$ vardır.

Şimdi bir $r_0 \in (1, p)$: $\frac{1}{r_0} = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-\varepsilon}$ seçelim. O zaman

$$\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1} = \frac{pr_0}{p-r_0}. \quad (5.5)$$

(5.5) den

$$\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1} > \frac{pr}{p-r}, \quad \forall r \in (1, r_0), \quad (5.6)$$

elde ederiz. $\rho^{-1} \in (L_{p-\varepsilon}(0, 1))^*$ olmasından, (5.6) ile $\forall r \in (1, r_0)$ için $\rho^{-r} \in (L_{\frac{p}{r}}(0, 1))^*$ ifadesi de sağlanır. O zaman $\forall f \in L_{p,\rho}(0, 1)$ için $|f(t)|^r = |f(t)\rho(t)|^r \rho^{-r}(t)$ eşitliğinden, $|f(t)\rho(t)|^r \in L_{\frac{p}{r}}(0, 1)$ ve $\rho^{-r} \in (L_{\frac{p}{r}}(0, 1))^*$ olur. Buradan $\forall r \in (1, r_0)$ için $f \in L_r(0, 1)$ bulunur. Hatta $\frac{p}{r}$ üssü ile Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^1 |f(t)\rho(t)|^r \rho^{-r}(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \leq$$

$$\leq c_{p,r}(\rho) \left(\int_0^1 |f(t)\rho(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad (5.7)$$

elde edilir. Burada $c_{p,r}(\rho) = \left(\int_0^1 \rho(t)^{-\frac{pr}{p-r}} dt \right)^{\frac{p-r}{pr}} < +\infty$.

Ayrıca, $0 < \varepsilon < p - 1$ sayısını $\rho \in A_{p-\varepsilon}(0, 1)$ olacak şekilde seçelim. İspat edilen ile, $\forall r \in (1, r_0)$ için bir $r_0 \in (1, +\infty)$ vardır öyle ki $L_{p-\varepsilon,\rho}(0, 1) \subset L_r(0, 1)$ gömmesi sağlanır. Böylece, $L_{p,\rho}(0, 1) \subset L_{p-\varepsilon,\rho}(0, 1)$ gömmesine göre, $L_{p,\rho}(0, 1) \subset L_r(0, 1)$ elde ederiz. Son olarak (5.7) ifadesini hesaba katarak

$$\|f\|_{L_r(0,1)} \leq c_{p,r}(\rho) \|f\|_{L_{p-\varepsilon,\rho}(0,1)} \leq c_{p,r}(\rho) \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L_{p,\rho}(0,1)},$$

elde ederiz, yani gömme sürekli olur. ■

Bu kısımda aşağıdaki teoremi vermemiz yararlı olacaktır.

Teorem 5.1. ([75, 81, 82]) $G_p(a, b)$, $1 < p < +\infty$, uzayı aşağıdaki koşulu sağlayan $f \in L_p(a, b)$ fonksiyonlarından oluşur:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b |f(t)|^{p-\varepsilon} dt = 0.$$

$G_{p,\rho}(a, b)$, $\rho f \in G_p(a, b)$ olacak şekildeki f fonksiyonlarının $L_{p,\rho}(a, b)$ uzayının bir alt uzayı olsun. Üstel fonksiyonların klasik sisteminin $G_{p,\rho}(-1, 1)$ uzayında bir baz oluşturduğunu ispatlayalım.

Teorem 5.2. ρ ağırlık fonksiyonu $A_p(-1, 1)$ sınıfından olsun. O zaman üstel fonksiyonların $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $G_{p,\rho}(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$ uzayında bir bazdır.

İspat. Kolaylıkla görülür ki

$$\langle f, v_n \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-in\pi x} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

eşitliği ile verilen $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ fonksiyonların sistemi $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemine biortogonaldır. [74, 83] den bilindiği gibi, eğer $\rho \in A_p(-1, 1)$ ise, o zaman üstellerin $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p,\rho}(-1, 1)$ de baz oluşturur. O zaman $L_{p,\rho}(-1, 1)$ uzayının $G_{p,\rho}(-1, 1)$ de yoğunluğundan, $L_{p,\rho}(-1, 1) \subset G_{p,\rho}(-1, 1)$ gömmesini de hesaba katarak, $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin $G_{p,\rho}(-1, 1)$ de tam olduğunu gösterebiliriz. Aslında $f \in G_{p,\rho}(-1, 1)$ ve $\delta > 0$ alalım. O zaman $L_{p,\rho}(-1, 1)$ nin $G_{p,\rho}(-1, 1)$ de yoğunluğundan bir $g \in L_{p,\rho}(-1, 1)$

vardır öyle ki

$$\|f - g\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} < \frac{\delta}{2}. \quad (5.8)$$

$\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p,\rho}(-1,1)$ de tam olduğundan,

$$\|g - h\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} < \frac{\delta}{2c}, \quad (5.9)$$

olacak şekilde bir $h \in \text{span}\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ vardır ve burada $c > 0$ sayısı $\|f\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} \leq c \|f\|_{L_{p,\rho}(-1,1)}, f \in L_{p,\rho}(-1,1)$ eşitsizliğini sağlar. Buradan (5.8) ve (5.9) kullanılarak

$$\|f - h\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} \leq \|f - g\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} + \|g - h\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} < \delta,$$

elde edilir yani $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ $G_{p,\rho}(-1,1)$ de tamdır. Son olarak

$$S_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^m \langle f, v_n \rangle e^{in\pi x}, \forall f \in G_{p,\rho}(-1,1), m \in \mathbb{Z}_+.$$

projeksiyonlar dizisinin düzgün sınırlılığını göstermemiz gerekmektedir. $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p,\rho}(-1,1)$ uzayında bir baz oluşturmasından, bir $c_p > 0$ öyle ki

$$\|S_m(f)\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} \leq c_p \|f\|_{L_{p,\rho}(-1,1)}. \quad (5.10)$$

$\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ alalım. $\varepsilon : \varepsilon_0 \leq \varepsilon < p-1$ için Riesz-Thorin teoremine göre

$$\|S_m(f)\|_{L_{p-\varepsilon,\rho}(-1,1)} \leq c_1(p, \varepsilon_0) \|f\|_{L_{p-\varepsilon,\rho}(-1,1)}, \quad (5.11)$$

olur ve $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ için, Hölder eşitsizliği ve (5.10) kullanılarak,

$$\|S_m(f)\|_{L_{p-\varepsilon,\rho}(-1,1)} \leq c_2(p, \varepsilon_0) \|f\|_{L_{p-\varepsilon_0,\rho}(-1,1)}. \quad (5.12)$$

ifadesine ulaşırız. Böylece (5.11) ve (5.12) i dikkate alarak

$$\begin{aligned} \|S_m(f)\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} &\leq \sup_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|S_m(f)\|_{L_{p-\varepsilon,\rho}(-1,1)} + \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|S_m(f)\|_{L_{p-\varepsilon,\rho}(-1,1)} \leq \\ &\leq c_1(p, \varepsilon_0) \|f\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} + c_3(p, \varepsilon_0) \|f\|_{L_{p,\rho}(-1,1)} = c(p, \varepsilon_0) \|f\|_{L_{p,\rho}(-1,1)}, \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz, yani $\|S_m\| \leq c(p, \varepsilon_0)$ bulunur. ■

Şimdi trigonometrik sistemlerin ağırlıklı grand-Lebesgue uzaylarındaki bazlığını ele alalım.

Teorem 5.3. ρ ağırlık fonksiyonu $A_p(0,1)$ sınıfına ait olsun. O zaman sinüslerin

$\{\sin \pi n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve cosinüslerin $\{\cos \pi n x\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemleri $G_{p,\rho}(0,1)$, $1 < p < +\infty$ uzayında baz oluşturlar.

İspat. $\theta(x)$, $\rho(x)$ fonksiyonunun $[-1,1]$ e bir çift genişlemesi olsun, yani

$$\theta(t) = \begin{cases} \rho(t), t \in [0,1] \\ \rho(-t), t \in [-1,0] \end{cases}.$$

$\rho \in A_p(0,1)$ den, $\theta \in A_p(-1,1)$ olduğunu gösterelim. Keyfi bir $I \subset [-1,1]$, $I = I_1 \cup I_2$ aralığı için, $I_1 = I \cap [0,1]$ ve $I_2 = I \cap [-1,0]$ olmak üzere,

$$I_+ = \begin{cases} I_1, |I_2| \leq |I_1| \\ I_2, |I_1| \leq |I_2| \end{cases},$$

ifadesini düşünelim. $J = I_+ \cup I_-$ olsun ve buradaki I_- kümesi I_+ kümesindeki sayıların ters sayılarından oluşsun. $I \subset J \subset [-1,1]$ olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned} & \sup_{I \subset [-1,1]} \frac{1}{|I|} \int_I \theta(t) dt \left(\frac{1}{|I|} \int_I \theta(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \leq \\ & \leq \sup_{I \subset [-1,1]} \frac{1}{|I_+|} \int_{I_+} \theta(t) dt \left(\frac{1}{|I_+|} \int_{I_+} \theta(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} = \\ & = \sup_{I \subset [-1,1]} \frac{2}{|I_+|} \int_{I_+} \theta(t) dt \left(\frac{2}{|I_+|} \int_{I_+} \theta(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} = \\ & = 2^p \sup_{I \subset [0,1]} \frac{1}{|I|} \int_I \rho(t) dt \left(\frac{1}{|I|} \int_I \rho(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} < +\infty \end{aligned}$$

Keyfi bir $f \in G_{p,\rho}(0,1)$ fonksiyonu alalım ve tek bir şekilde genişletelim, şöyle ki,

$$F(t) = \begin{cases} f(t), t \in [0,1] \\ -f(t), t \in [-1,0] \end{cases},$$

alalım. O zaman

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_{p,\theta}(-1,1)} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 |F(t)\theta(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |f(t)\rho(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \|f\|_{L_{p,\rho}(0,1)} < +\infty \end{aligned}$$

Yani, $F \in L_{p,\theta}(-1,1)$. Teorem 5.1 den hemen görülür ki $F \in G_{p,\theta}(-1,1)$. O zaman F

$\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ bazında aşağıdaki formda genişletilebilir:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x}.$$

c_n katsayıları için

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(t) e^{-in\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) e^{-in\pi t} dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) e^{in\pi t} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 f(t) (e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}) dt = \frac{1}{2i} \int_0^1 f(t) \sin \pi n t dt = \frac{1}{2i} \langle f, g_n \rangle, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

elde ederiz, $\langle f, g_n \rangle = 2 \int_0^1 f(x) \sin \pi n x dx$. $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $\{\sin \pi n t\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemine biortogonal olduğu açıktır. $c_{-n} = -c_n$, $n \in \mathbb{N}$, $c_0 = 0$ eşitliklerini dikkate alarak, $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=-m}^m c_n e^{i\pi n t} &= \sum_{n=1}^m c_n e^{i\pi n t} - \sum_{n=1}^m c_n e^{-i\pi n t} = \sum_{n=1}^m c_n (e^{i\pi n t} - e^{-i\pi n t}) = \\ &= 2i \sum_{n=1}^m c_n \sin \pi n t = \sum_{n=1}^m \langle f, g_n \rangle \sin \pi n t, \end{aligned}$$

elde ederiz. $F(t) - \sum_{n=-m}^m c_n e^{i\pi n t}$ ifadesinin $f(t) - \sum_{n=1}^m \langle f, g_n \rangle \sin \pi n t$ nin $[-1, 1]$ aralığına tek genişlemesi olduğu açıktır. Böylece, $m \rightarrow \infty$ olduğunda,

$$\left\| f - \sum_{n=1}^m \langle f, g_n \rangle \sin \pi n t \right\|_{L_{p,\rho}(0,1)} = \left\| F - \sum_{n=-m}^m c_n e^{i\pi n t} \right\|_{L_{p,\theta}(-1,1)} \rightarrow 0,$$

elde ederiz, yani $\{\sin \pi n t\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi $G_{p,\rho}(0, 1)$ de baz olur.

$\{\cos \pi n t\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sisteminin $G_{p,\rho}(0, 1)$ uzayında bazlığının ispatı da benzer şekilde bulunur. ■

Yorum 5.1. i) ρ ağırlık fonksiyonu $A_p(-1, 1)$ sınıfından olsun. O zaman üstel fonksiyonların $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sisteminin $G_{p,\rho}(-1, 1)$, $1 < p < +\infty$ uzayında r-baz olacak şekilde bir $r > 2$ sayısı vardır.

ii) ρ ağırlık fonksiyonu $A_p(0, 1)$ sınıfından olsun. O zaman $\{\sin \pi n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{\cos \pi n x\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ trigonometrik sistemlerinin $G_{p,\rho}(0, 1)$, $1 < p < +\infty$ uzayında r-baz olacak şekilde bir $r > 2$ sayısı vardır.

Aslında, Lemma 5.1 ile, $G_{p,\rho}(0, 1) \subset L_{r'}(0, 1)$, $r' = \frac{r}{r-1}$ sürekli gömmesinin olduğu bir

$r > 2$ vardır.

Böylece, Hausdorff-Young teoreminden, $\forall f \in G_{p),\rho}(0,1)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \|f\|_{L_{r',\rho}(0,1)} \leq M \|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)},$$

burada $c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-in\pi x} dx$. Böylece, $\{e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistemi $G_{p),\rho}(0,1)$ de r -baz olur. Sinüs ve Cosinüs sistemlerinin $G_{p),\rho}(0,1)$ de r -bazlığı ise benzer şekilde kurulur.

5.2 Özfonksiyonlar Sisteminin $L_{p),\rho} \oplus \mathbb{C}$ Uzaylarında Bazlığı

$GW_p^2(a,b)$, $1 < p < +\infty$ ile $W_p^2(a,b)$ grand-Sobolev (bkz. [71]) uzayının bir alt uzayını gösterelim ve bu alt uzay $f'' \in G_p(a,b)$ şeklindeki $f \in W_p^2(a,b)$ fonksiyonlarından oluşsun.

$$GW_p^2\left(\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)\right) = GW_p^2\left(0, \frac{1}{3}\right) \oplus GW_p^2\left(\frac{1}{3}, 1\right),$$

ifadesini alalım. $G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ uzayında bir L operatörünü düşünelim ve bu operatörü

$$L(\hat{y}) = \left(-y''; y'\left(\frac{1}{3}-0\right) - y'\left(\frac{1}{3}+0\right)\right), \quad (5.13)$$

formülü ile tanımlayalım. Bu operatörün $D_p(L)$ tanım kümesi ise

$$\hat{y} = \left(y; my\left(\frac{1}{3}\right)\right) \in GW_p^2\left(\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)\right) \oplus \mathbb{C},$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşsun ve bu fonksiyonlar

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y\left(\frac{1}{3}-0\right) = y\left(\frac{1}{3}+0\right),$$

koşullarını sağlasın.

[70, 80] in sonuçlarından,

$$y \in W_p^2\left(\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)\right), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y\left(\frac{1}{3}-0\right) = y\left(\frac{1}{3}+0\right),$$

şeklideki $\hat{y} = (y, my(\frac{1}{3}))$ elemanlarından oluşan $D_p(L)$ tanım kümesi ve (5.13) ile tanımlanan L operatörü $L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ de kompakt rezolvente sahip kapalı yoğun olarak tanımlı bir operatördür. Dahası L operatörünün ve (5.1),(5.2) probleminin

özdeğerleri çakışıktır, L operatörünün özfonksiyon ve ilgili fonksiyonlarının $\{\hat{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistemi (5.1), (5.2) probleminin özfonksiyon ve ilgili fonksiyonlarının aşağıda verilen $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi ile ifade edilir:

$$\hat{y}_n = \left(y_n; m y_n \left(\frac{1}{3} \right) \right). \quad (5.14)$$

Bu faktörler $G_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ uzayındaki $D_p(L)$ tanım kümesine sahip L operatörü için de geçerlidir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.4. $G_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}, 1 < p < +\infty$ uzayında $D_p(L)$ tanım kümesi ve (5.13) formülü ile tanımlanan L operatörünü alalım. O zaman L operatörü $G_p(-1, 1) \oplus \mathbb{C}$ de bir kompakt rezolvent ile kapalı, yoğun olarak tanımlı bir operatördür. L operatörünün ve (5.1), (5.2) probleminin özdeğerleri çakışıktır, uygun özvektörleri ise

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1,n}(x) &= \left(y_{1,n}(x); m y_{1,n} \left(\frac{1}{3} \right) \right), & n \in \mathbb{N} \\ \hat{y}_{2,n}(x) &= \left(y_{2,2n}(x); m y_{2,2n} \left(\frac{1}{3} \right) \right), & n \in \mathbb{Z}_+ \\ \hat{y}_{3,n}(x) &= \left(y_{2,2n-1}(x); m y_{2,2n-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right), & n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (5.15)$$

şeklinde dir. Burada $\{y_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{y_{2,n}\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemleri sırasıyla (5.3) ve (5.4) ile ifade edilir.

İspat. Açıkçası

$$D_p(L) \subset D_p(L) \subset D_{p-\varepsilon}(L), \quad \varepsilon \in (0, p-1)$$

şeklinde sürekli gömmeleri vardır. Keyfi $\hat{y} \in G_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ alalım ve $\delta > 0$ pozitif bir sayı olsun. $L_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ nin $G_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ de yoğunluğu sebebiyle bir $\hat{u} \in L_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ vardır öyle ki

$$\|\hat{y} - \hat{u}\|_{L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}} < \delta. \quad (5.16)$$

$D_p(L)$, $L_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ uzayında yoğun olduğundan, $\hat{v} \in D_p(L)$ bulunabilir ve

$$\|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}} < \delta,$$

olur. $L_p(0, 1) \subset L_p(0, 1)$ gömmesinin sürekliliği

$$\|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}} \leq c \|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}} < c\delta, \quad (5.17)$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısının varlığını gösterir. Böylece (5.16) ve (5.17) den

$$\|\hat{y} - \hat{v}\|_{L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}} \leq \|\hat{y} - \hat{u}\|_{L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}} + \|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}} < \delta + c\delta = (1+c)\delta,$$

elde ederiz. Bu nedenle $D_p(L) \subset D_{p_j}(L)$ kapsamını düşünerek, $\hat{y} \in \overline{D_{p_j}(L)}$ sonucuna varırız.

Şimdi L in $G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ operatörünün kapalılığını gösterelim. $\hat{x}_n \in D_p(L)$ ve $L(\hat{x}_n) = \hat{z}_n$ dizileri $G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ uzayında sırasıyla $\hat{x} \in G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ ve $\hat{z} \in G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ ifadelerine yakınsak olsun. $\varepsilon \in (0, p-1)$ sabit sayısını alalım. $\hat{x}_n \in D_{p-\varepsilon}(L)$ olmasından ve $D_p(L) \subset D_{p-\varepsilon}(L)$ gömmesinin sürekliliğinden $\hat{x}_n$ dizisinin $\hat{x}$ e $L_{p-\varepsilon}(0,1) \oplus \mathbb{C}$ yakınsaklığını elde ederiz. L operatörünün $L_{p-\varepsilon}(0,1) \oplus \mathbb{C}$ de kapalılığından (bkz. [80]) $\hat{x} \in D_{p-\varepsilon}(L)$ ve $L(\hat{x}) = \hat{z}$ ifadelerini elde ederiz. $\hat{z} \in G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ ve $L(\hat{x}) = \hat{z}$ ile $x'' \in G_p(0,1)$ ve böylece $\hat{x} \in D_p(L)$ olur, yani L operatörü $G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ de kapalıdır. Kalan kısmın ise ispatı açıktır. ■

[80] den bilindiği gibi, $D_p(L)$ ile L operatörünün özvektörler ve ilgili vektörlerinin sistemi $L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ de bir baz oluşturur ve onun biortogonal eşlenik sistemi

$$\hat{z}_n = \left(z_n; \overline{m}z_n \left(\frac{1}{3} \right) \right), \quad (5.18)$$

şeklindedir. Burada $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi aşağıda verilen uygun adjoint (eş) spektral operatörün özfonksiyonlar sistemidir:

$$z''(x) + \lambda z(x) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right),$$

$$z(0) = z(1) = 0,$$

$$z\left(\frac{1}{3} - 0\right) = z\left(\frac{1}{3} + 0\right),$$

$$z'\left(\frac{1}{3} - 0\right) - z'\left(\frac{1}{3} + 0\right) = \lambda \overline{m}z\left(\frac{1}{3}\right).$$

$\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi ise

$$z_{1,n}(x) = 2 \sin 3\pi n x \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.19)$$

$$z_{2,n}(x) = \begin{cases} c_{2,n} \left(\sin \frac{3\pi n}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) + \sin \frac{3\pi n}{2} \left(x + \frac{1}{3} \right) \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ c_{2,n} \sin \frac{3\pi n}{2} (1-x) + O\left(\frac{1}{n}\right) & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.20)$$

formülleri ile belirlenir. Burada $c_{2,n}$ aşağıdaki asimtotik bağlantıların geçerli olduğu normalleştirilmiş sayılardır:

$$c_{2,n} = \frac{2 + (-1)^n}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Benzer ifadelerin $G_{p,\rho}(0,1) \oplus \mathbb{C}$ uzayında $D_p(L)$ tanım kümesi ile L operatörü için sağlandığını ispatlayalım.

Teorem 5.5. ρ ağırlık fonksiyonu $A_p(0,1)$ sınıfına ait olsun. O zaman L operatörünün özvektörler ve ilgili vektörlerin $\{\hat{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi $G_{p,\rho}(0,1) \oplus \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$ uzayında bir baz oluşturur.

İspat. Teorem 5.4 den görülür ki L operatörünün özvektörler ve ilgili vektörlerin $\{\hat{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi (5.14) ve (5.15) formülleri ile tanımlanır. $\{\hat{z}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi aynı zamanda $\{\hat{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sistemi için $G_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ de biortogonal bir sistem olduğunu göstermede bir zorluk yoktur. Aşağıdaki fonksiyonlar sistemini düşünelim

$$\begin{aligned} u_{1,n}(x) &= \sin 3\pi nx, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_{2,n}(x) &= \begin{cases} 2(-1)^n \sin 3\pi nx & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \sin 3\pi nx & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_{3,n}(x) &= \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\cos 3\pi(n - \frac{1}{2})x & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

(5.4) ve (5.21) formüllerini karşılaştırarak

$$\begin{aligned} y_{1,n}(x) &= u_{1,n}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \\ y_{2,2n}(x) &= u_{2,n}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N} \\ y_{2,2n-1}(x) &= u_{3,n}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

elde ederiz. Aşağıdaki ifadeleri alalım

$$e_{1,n}(x) = \begin{cases} \sin 3\pi nx & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases},$$

$$e_{2,n}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \sin 3\pi nx & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases},$$

$$e_{3,n}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\cos 3\pi(n - \frac{1}{2})x & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}.$$

Teorem 5.3, $\{\sin 3\pi nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $G_{p),\rho}(0, \frac{1}{3})$ de bir baz oluşturduğunu ifade eder. Değişkeni $t = \frac{3x-1}{2}$ şeklinde değiştirerek, $\{\sin 3\pi nx; -\cos 3\pi(n - \frac{1}{2})x\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $G_{p),\rho}(\frac{1}{3}, 1)$ de bazlık özellikleri $\{\sin \pi nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $G_{p),\rho}(0, 1)$ de bazlık özelliklerine indirgenir. Böylece, $\{e_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi $G_{p),\rho}(0, 1)$ de bir baz oluşturur. (5.21) ifadesine göre, $\{u_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi $\{e_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi aracılığıyla

$$u_{i,n}(x) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(n)} e_{j,n}(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.23)$$

forlümüne dönüştürülür. (5.23) dönüşüm matrisi katsayıları

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

şeklindedir ve $\det A_n = 1 - 2(-1)^n \neq 0$. Bu nedenle Teorem 2.3 ile, $\{u_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi de $G_{p),\rho}(0, 1)$ de bir baz oluşturur. Buradan alınır ki $\{\hat{u}_0\} \cup \{\hat{u}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi $G_{p),\rho}(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ de bir baz oluşturur ve

$$\hat{u}_0(x) = (0, 1), \quad \hat{u}_{i,n}(x) = (u_{i,n}(x); 0), \quad i = \overline{1,3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ayrıca, keyfi bir $\hat{f} = (f, \alpha) \in L_{p),\rho}(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ alındığında, Lemma 5.1 gereği, $L_{p),\rho}(0, 1)$ nin $L_r(0, 1)$ de sürekli gömülmesi olacak şekilde bir $r \in (1, 2)$ sayısı vardır. O zaman $f \in L_r(0, 1)$ ve Hausdorff-Young eşitsizliği ile $L_{p),\rho}(0, 1) \subset L_r(0, 1)$ sürekli gömmesine göre

$$\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{+\infty} | \langle f, e_{i,n} \rangle |^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \leq M \|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)}, \quad (5.24)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $M > 0$ bir sayı ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Buradan kolaylıkla görülür ki $\{v_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi $\{e_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi aracılığıyla

$$v_{i,n}(x) = \sum_{j=1}^3 b_{ij}^{(n)} e_{j,n}(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{N},$$

formuna dönüşür ve dönüşüm matrisi $B_n = (b_{i,j}^{(n)}) = (A_n^{-1})^*$ olur. O zaman

$$|\langle f, v_{i,n} \rangle|^{r'} \leq \left(\sum_{j=1}^3 |b_{ij}^{(n)}|^r \right)^{\frac{r'}{r}} \sum_{j=1}^3 |\langle f, e_{j,n} \rangle|^{r'}.$$

Dolayısıyla, (5.24) dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, v_{i,n} \rangle|^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} &\leq \sup_n \left(\sum_{j=1}^3 |b_{ij}^{(n)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, e_{i,n} \rangle|^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \leq \\ &\leq M_1 \sup_n \left(\sum_{j=1}^3 |b_{ij}^{(n)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)} = M_2 \|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

elde edilir. Böylece (5.25) ifadesi ve $\langle f, v_0 \rangle = \alpha$ göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, v_{i,n} \rangle|^{r'} + |\langle f, v_0 \rangle|^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} &\leq \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, v_{i,n} \rangle|^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} + |\langle f, v_0 \rangle|^{r'} \leq \\ &\leq M_2 \|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)} + |\alpha| \leq M_2 \left(\|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)} + |\alpha| \right) = M_2 \|\hat{f}\|_{L_{p),\rho}(0,1)}, \end{aligned}$$

alınır. Bu eşitsizlik ise $\{\hat{u}_0\} \cup \{\hat{u}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $G_{p),\rho}(0,1) \oplus \mathbb{C}$ de bir r' -baz oluşturduğunu gösterir. Şimdi

$$\begin{aligned} \hat{y}_0(x) &= (y_0(x), 1) = (0, 1), \\ \hat{y}_{1,n}(x) &= \left(y_{1,n}(x), m y_{1,n} \left(\frac{1}{3} \right) \right), \\ \hat{y}_{2,n}(x) &= \left(y_{2,2n}(x), m y_{2,2n} \left(\frac{1}{3} \right) \right), \\ \hat{y}_{3,n}(x) &= \left(y_{2,2n-1}(x), m y_{2,2n-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right). \end{aligned}$$

ifadelerini ele alalım. (5.22) den $\forall r : r > 1$ için

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \|\hat{y}_{i,n} - \hat{u}_{i,n}\|_{L_{p),\rho}(0,1) \oplus \mathbb{C}}^r < +\infty,$$

koşulu bulunur ve böylece $\{\hat{y}_0\} \cup \{\hat{y}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ ve $\{\hat{u}_0\} \cup \{\hat{u}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemleri r -yakın olur. [80] sonuçlarından $\{\hat{y}_0\} \cup \{\hat{y}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $L_p(0,1) \oplus \mathbb{C}$ de

minimal olduğu görülür ve onun biortogonal $\{\hat{v}_0\} \cup \{\hat{v}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi

$$\hat{v}_0(x) = (0; 1), \quad \hat{v}_{i,n}(x) = (v_{i,n}(x); 0), \quad i = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{N},$$

formunda olur. Burada

$$v_{1,n}(x) = \begin{cases} \frac{6}{1-2(-1)^n} \sin 3\pi n x & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\frac{6(-1)^n}{1-2(-1)^n} \sin 3\pi n x & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases},$$

$$v_{2,n}(x) = \begin{cases} -\frac{6}{1-2(-1)^n} \sin 3\pi n x & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{3}{1-2(-1)^n} \sin 3\pi n x & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases},$$

$$v_{3,n}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -3 \cos 3\pi (n - \frac{1}{2}) x & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}.$$

$L_p(0, 1) \subset L_p(0, 1) \subset L_{p-\varepsilon}(0, 1), 0 < \varepsilon < p - 1$ gömülmesini göz önüne alarak, $\{\hat{v}_0\} \cup \{\hat{v}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $L_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ de ki lineer sürekli fonksiyonellerin bir sistemi olduğunu görürüz, yani $\{\hat{y}_0\} \cup \{\hat{y}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemi $L_p(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ de minimaldir. Böylece $\{\hat{u}_0\} \cup \{\hat{u}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $G_{p,\rho}(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ de bir r' -baz olması ve $\{\hat{y}_0\} \cup \{\hat{y}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sisteminin $\{\hat{u}_0\} \cup \{\hat{u}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemine r -yakın olmasından, $\{\hat{y}_0\} \cup \{\hat{y}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sisteminin minimalliği ve Teorem 5.1 ile birlikte açıkça ifade edebiliriz ki $\{\hat{y}_0\} \cup \{\hat{y}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ $G_{p,\rho}(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ de $\{\hat{u}_0\} \cup \{\hat{u}_{i,n}\}_{i=\overline{1,3}, n \in \mathbb{N}}$ sistemine izomorfik bir baz oluşturur. Böylece teoremi ispatlamış oluruz. ■

5.3 Özfunksiyonlar Sisteminin $L_{p,\rho}$ Uzaylarında Bazlığı

Bir önceki kısımda (5.1), (5.2) problemini $G_{p,\rho}(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ uzayında incelemiştik. Sıradaki teoremde ise, (5.1), (5.2) probleminin özvektörler ve ilgili vektörlerinin $\{y_0\} \cup \{y_{i,n}\}_{i=1,2,n \in \mathbb{N}}$ sisteminin bazlık özelliklerini $G_{p,\rho}(0, 1), 1 < p < +\infty$ uzayında çalışacağız.

Teorem 5.6. ρ ağırlık fonksiyonu $A_p(0, 1)$ sınıfına ait olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1. eğer $\{y_0\} \cup \{y_{i,n}\}_{i=1,2,n \in \mathbb{N}}$ sisteminden basit bir özdeğere karşılık gelen keyfi bir $y_{2,n_0}(x)$ fonksiyonunu atarsak, ortaya çıkan sistem $G_{p,\rho}(0, 1), 1 < p < +\infty$ uzayında bir baz oluşturur;
2. eğer $\{y_0\} \cup \{y_{i,n}\}_{i=1,2,n \in \mathbb{N}}$ sisteminden keyfi bir $y_{1,n_0}(x)$ fonksiyonunu atarsak, ortaya çıkan sistem $G_{p,\rho}(0, 1), 1 < p < +\infty$ uzayında bir baz olmaz. Dahası bu sistem $G_{p,\rho}(0, 1), 1 < p < +\infty$ de tam ve minimal de olamaz.

İspat. Teorem (5.14) den, $\{\hat{y}_0\} \cup \{\hat{y}_{i,n}\}_{i=1,2,n \in \mathbb{N}}$ sistemi

$$\hat{y}_0(x) = (0, 1),$$

$$\hat{y}_{i,n}(x) = \left(y_{i,n}(x); m y_{i,n} \left(\frac{1}{3} \right) \right), \quad i = 1, 2,$$

$G_{p),\rho}(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ de bir baz oluşturur ve (5.19), (5.20) formülleri ile verilen biortogonal bir $\{\hat{z}_0\} \cup \{\hat{z}_{i,n}\}_{i=1,2,n \in \mathbb{N}}$ sistemine sahiptir. $y_{2,n_0}(x)$, (5.1), (5.2) probleminin basit bir özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyonu olsun. $y_{2,n_0}(x)$ nin olmadığı $\{y_0\} \cup \{y_{i,n}\}_{i=1,2,n \in \mathbb{N}}$ sistemi için $\delta = \overline{m} z_{2,n_0} \left(\frac{1}{3} \right) \neq 0$ sağlandığından, Teorem 5.1 sayesinde bu sistemin $G_{p),\rho}(0, 1)$ de bir baz oluşturduğunu söyleyebiliriz, yani 1. ifade sağlanmış olur.

Sıradaki ise, keyfi bir $y_{1,n_0}(x)$ fonksiyonunu alalım ve $y_{1,n_0}(x)$ nin çıkarıldığı $\{y_0\} \cup \{y_{i,n}\}_{i=1,2,n \in \mathbb{N}}$ sisteminin bazlık özelliği sorusunu düşünelim. Bu sistem için $\delta = \overline{m} z_{1,n_0} \left(\frac{1}{3} \right) = 0$ ifadesine sahibiz. O zaman Teorem 5.1 den ortaya çıkan sistemin $G_{p),\rho}(0, 1)$ de tam ve minimal olmadığı sonucuna ulaşmış oluruz. ■

6 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez ile yapılan çalışmalar neticesinde standart olmayan uzaylardan biri olan grand-Lebesgue uzaylarında bir spektral problem incelenmiş ve benzer problemler için bazlık özelliklerinin incelenmesinde farklı yöntemlere başvurulması gerektiği görülmüştür. Dikkat edilecek olursa, (1.1),(1.2) probleminin özfonksiyonlar sisteminin grand-Lebesgue uzaylarında bir baz oluşturduğunun ispatı için bazlık kriterlerinden (tamlık, minimallik ve projeksiyonların düzgün sınırlılığı) yararlanılmıştır. Ancak ağırlıklı grand-Lebesgue uzayı için ele alınan (5.1),(5.2) probleminin özfonksiyonlar sisteminin bazlığı bir takım ara teoremler kullanılarak ispatlanmıştır. Bu ise problemde ifade ettiğimiz iki ucu sabit bir telde, yükü telin tam ortası yerine $\frac{1}{3}$. noktasından asıldığında hem özdeğer ve özfonksiyonların asimtotik formüllerini hem de özfonksiyonlar sisteminin bazlık özelliklerini incelemek için farklı metodlar gerekmektedir. Bu nedenle, bu tür problemlerin grand-Lebesgue uzayları gibi standart olmayan uzaylarda incelenmesi yeni metotların bulunması ve kullanılmasını gerekli hale getirmiştir.

Problemimizde ise yükün, telin bir başka noktasından asılması durumunda ortaya çıkabilecek zorluklar ve bu zorluklar için öğrenilmesi gereken yeni yöntemlerin varlığı, yeni çalışmalarında beni fazlasıyla motive etmektedir. Örneğin yükün telin orta noktası ile $\frac{1}{3}$. noktasında olması durumunda özdeğerlerin asimtotik formülleri benzer yöntemler ile ancak farklı şekilde bulunmaktadır. Yükün bir başka konumda olması özdeğerler için yeni asimtotik formüllerin bulunmasını gerektirmektedir.

Ayrıca sisteme dışarıdan bir başka kuvvet uygulandığında elde edilen problemin hem özdeğerleri hem de özfonksiyonlarının asimtotik formülleri değişeceğinden, yeni oluşacak özfonksiyonlar sisteminin bazlık özelliklerinin incelenmesi bu alandaki araştırmacılar için geniş bir çalışma sahası oluşturmaktadır.

- [1] B. T. Bilalov, Z. G. Guseynov, "Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in variable spaces," *Mediterranean journal of mathematics*, vol. 9, no. 3, pp. 487–498, 2012.
- [2] B. Bilalov, Z. Guseynov, "Basicity criterion for perturbed systems of exponents in lebesgue spaces with variable summability," in *Dokl. RAN*, vol. 436, 2011, pp. 586–589.
- [3] L. Boccardo, "Quelques problèmes de dirichlet avec données dans de grands espaces de sobolev," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, vol. 325, no. 12, pp. 1269–1272, 1997.
- [4] D. Belkić, P. Dando, J. Main, H. S. Taylor, S. Shin, "Decimated signal diagonalization for fourier transform spectroscopy," *The Journal of Physical Chemistry A*, vol. 104, no. 50, pp. 11 677–11 684, 2000.
- [5] L. Collatz, *Eigenvalue Problems (with Technical Applications)*. Nauka, Moscow, 1968.
- [6] D. L. Russell, "On exponential bases for the sobolev spaces over an interval," *Journal of Mathematical analysis and applications*, vol. 87, no. 2, pp. 528–550, 1982.
- [7] A. M. Sedletskii, "Approximation properties of systems of exponentials in sobolev spaces," *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, no. 6, pp. 3–8, 1999.
- [8] B. T. Bilalov, T. R. Muradov, "Defective bases of banach spaces," *Proc. IMM NAS Azerbaijan*, vol. 21, pp. 23–26, 2005.
- [9] X. He, H. Volkmer, "Riesz bases of solutions of sturm-liouville equations," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 7, no. 3, pp. 297–307, 2001.
- [10] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*. Courier Corporation, 2013.
- [11] F. V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary value problems*. Academic Press, New York, 1968.
- [12] A. A. Shkalikov, "Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions," *Functional analysis and its applications*, vol. 16, no. 4, pp. 324–326, 1982.
- [13] N. Y. Kapustin, E. I. Moiseev, "On spectral problems with a spectral parameter in the boundary condition," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 33, no. 1, pp. 115–119, 1997.
- [14] V. D. Milman, "Geometric theory of banach spaces. part i. the theory of basis and minimal systems," *Russian Mathematical Surveys*, vol. 25, no. 3, p. 111, 1970.

- [15] N. K. Bari, "Biorthogonal systems and bases in hilbert space," *Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 148, pp. 69–107, 1951.
- [16] M. I. Kadets, "The exact value of the paley-wiener constant," in *Doklady Akademii Nauk*, Russian Academy of Sciences, vol. 155, 1964, pp. 1253–1254.
- [17] T. B. Gasymov, S. J. Mammadova, "On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition," *Trans. NAS Azerb*, vol. 26, no. 4, pp. 103–116, 2006.
- [18] T. Gasymov, A. Akhtyamov, N. Ahmedzade, "On the basicity in weighted lebesgue spaces of eigenfunctions of a second-order differential operator with a diccontinuty point," *Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics*, vol. 46, pp. 32–44, 2020.
- [19] N. Y. Kapustin, "Oscillation properties of solutions of a nonself-adjoint spectral problem with spectral parameter in the boundary condition," *Differential Equations*, vol. 35, no. 8, pp. 1031–1034, 1999.
- [20] N. Y. Kapustin, E. I. Moiseev, "The basis property in l_p of the systems of eigenfunctions corresponding to two problems with a spectral parameter in the boundary condition," *Differential Equations*, vol. 36, no. 10, pp. 1498–1501, 2000.
- [21] A. A. Shkalikov, "Basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions," *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, no. 6, pp. 12–21, 1982.
- [22] A. Shkalikov, "Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions," *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 33, no. 6, pp. 1311–1342, 1986.
- [23] B. B. T. Oglu, T. B. o. Gasymov, "On basicity of eigenfunctions of second order discontinuous differential operator," *Ufa Mathematical Journal*, vol. 9, no. 1, 2017.
- [24] B. T. Bilalov, A. A. Quliyeva, "On basicity of exponential systems in morrey-type spaces," *International Journal of mathematics*, vol. 25, no. 06, p. 1 450 054, 2014.
- [25] B. Bilalov, "On basicity of perturbed exponential system in morrey-type spaces," *Siberian Mathematical Journal*, vol. 60, pp. 249–271, 2019.
- [26] B. Bilalov, T. Gasymov, A. Guliyeva, "On the solvability of the riemannn boundary value problem in morrey–hardy classes," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 40, no. 5, pp. 1085–1101, 2016.
- [27] B. BT, "Basicity of some systems of exponents, cosines and sines," *Differents Uravneniya*, vol. 26, pp. 10–16, 1990.
- [28] B. Bilalov, "On bases for some systems of exponentials, cosines, and sines in l_p ," in *Doklady Mathematics*, Pleiades Publishing, Ltd., vol. 64, 2001, pp. 29–31.
- [29] B. Bilalov, "The basis properties of some systems of exponential functions, cosines, and sines," *Siberian Mathematical Journal*, vol. 45, no. 2, pp. 214–221, 2004.

- [30] S. Sadigova, "The general solution of the homogeneous riemann problem in the weighted smirnov classes with general weight," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 9, no. 2, pp. 117–130, 2019.
- [31] T. Najafov, N. Nasibova, "On the noetherness of the riemann problem in generalized weighted hardy classes," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 109–125, 2015.
- [32] B. Bilalov, A. Huseynli, S. El-Shabrawy, "Basis properties of trigonometric systems in weighted morrey spaces," 2019.
- [33] B. Bilalov, F. Seyidova, "Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in morrey-type spaces," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 4, pp. 1850–1866, 2019.
- [34] D. V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces: Foundations and harmonic analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [35] I. I. Sharapudinov, "Topology of the space $L^{p(\cdot)}(0, 1)$," *Matematicheskie Zametki*, vol. 26, no. 4, pp. 613–632, 1979.
- [36] I. I. Sharapudinov, "On direct and inverse theorems of approximation theory in variable lebesgue and sobolev spaces," 2014.
- [37] Z. CT, "Morrey space," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 98, no. 4, pp. 586–592, 1986.
- [38] C. B. Morrey, "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 43, no. 1, pp. 126–166, 1938.
- [39] X. Fan, D. Zhao, "On the spaces $L_p(x)(\Omega)$ and $W_{k,p}(x)(\Omega)$," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 263, no. 2, pp. 424–446, 2001.
- [40] A. DR., *Morrey Spaces*. Springer International Publishing, 2015.
- [41] V. M. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, S. G. Samko, *Integral operators in non-standard function spaces*. Springer, 2016.
- [42] N. Samko, "Weighted hardy and singular operators in morrey spaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 350, no. 1, pp. 56–72, 2009.
- [43] A. Fiorenza, M. Krbeć, "On the domain and range of the maximal operator," *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 158, pp. 43–61, 2000.
- [44] Y. Zeren, "Some questions of harmonic analysis in weighted morrey type spaces," *Afrika Matematika*, vol. 30, no. 1, pp. 129–150, 2019.
- [45] Y. Zeren, R. H. Abdullayeva, S. Cetin, "On morrey-type classes of harmonic functions," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, vol. 67, no. 3, pp. 501–516, 2018.
- [46] Y. Zeren, "On the riesz potential in morrey spaces, associated with the laplace–bessel differential operator," *Integral Transforms and Special Functions*, vol. 19, no. 8, pp. 607–612, 2008.
- [47] T. Iwaniec, C. Sbordone, "On the integrability of the jacobian under minimal hypotheses," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 119, no. 2, pp. 129–143, 1992.

- [48] A. Fiorenza, A. Mercaldo, J.-M. Rakotoson, “Regularity and comparison results in grand sobolev spaces for parabolic equations with measure data,” *Applied mathematics letters*, vol. 14, no. 8, pp. 979–981, 2001.
- [49] A. Fiorenza, A. Mercaldo, J. M. Rakotoson, “Regularity and uniqueness results in grand sobolev spaces for parabolic equations with measure data,” *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, vol. 8, no. 4, p. 893, 2002.
- [50] A. Fiorenza, C. Sbordone, “Existence and uniqueness results for solutions of nonlinear equations with right hand side in L^1 ,” *Studia Mathematica*, vol. 3, no. 127, pp. 223–231, 1998.
- [51] L. Greco, T. Iwaniec, C. Sbordone, “Inverting the p-harmonic operator,” *Manuscripta Mathematica*, vol. 92, no. 1, pp. 249–258, 1997.
- [52] C. Sbordone, “Nonlinear elliptic equations with right hand side in nonstandard spaces,” 1998.
- [53] C. Sbordone, “Grand sobolev spaces and their application to variational problems,” *Le Matematiche*, vol. 51, no. 2, pp. 335–347, 1996.
- [54] C. Capone, A. Fiorenza, G. E. Karadzhov, “Grand orlicz spaces and global integrability of the jacobian,” *Mathematica Scandinavica*, pp. 131–148, 2008.
- [55] G. Di Fratta, A. Fiorenza, “A direct approach to the duality of grand and small lebesgue spaces,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 70, no. 7, pp. 2582–2592, 2009.
- [56] A. Fiorenza, B. Gupta, P. Jain, “The maximal theorem for weighted grand lebesgue spaces,” *Studia Mathematica*, vol. 188, pp. 123–133, 2008.
- [57] P. Koskela, X. Zhong, “Minimal assumptions for the integrability of the jacobian,” *Ricerche di Matematica*, vol. 51, no. 2, pp. 297–312, 2002.
- [58] J. Rakotoson *et al.*, “Some new applications of the pointwise relations for the relative rearrangement,” *Advances in Differential Equations*, vol. 7, no. 5, pp. 617–640, 2002.
- [59] A. Fiorenza, J. Rakotoson, “New properties of small lebesgue spaces and their applications,” *Mathematische Annalen*, vol. 326, no. 3, pp. 543–561, 2003.
- [60] A. Fiorenza, “Duality and reflexivity in grand lebesgue spaces,” *Collectanea Mathematica*, pp. 131–148, 2000.
- [61] A. Fiorenza, G. Karadzhov, “Grand and small lebesgue spaces and their analogs,” *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, vol. 23, no. 4, pp. 657–681, 2004.
- [62] A. Fiorenza, B. Gupta, P. Jain, “The maximal theorem for weighted grand lebesgue spaces,” *Studia Mathematica*, vol. 188, pp. 123–133, 2008.
- [63] A. Fiorenza, M. R. Formica, A. Gogatishvili, “On grand and small lebesgue and sobolev spaces and some applications to pde’s,” *Differ. Equ. Appl*, vol. 10, no. 1, pp. 21–46, 2018.
- [64] I. Ahmed, A. Fiorenza, A. Hafeez, “Some interpolation formulae for grand and small lorentz spaces,” *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 17, no. 2, pp. 1–21, 2020.

- [65] V. Kokilashvili, A. Meskhi, "A note on the boundedness of the hilbert transform in weighted grand lebesgue spaces," 2009.
- [66] V. Kokilashvili, A. Meskhi, "Trace inequalities for fractional integrals in grand lebesgue spaces," *Studia Mathematica*, vol. 2, no. 210, pp. 159–176, 2012.
- [67] V. Kokilashvili, A. Meskhi, M. A. Ragusa, "Weighted extrapolation in grand morrey spaces and applications to partial differential equations," *Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni*, vol. 30, no. 1, pp. 67–92, 2019.
- [68] A. Meskhi, Y. Sawano, "Density, duality and preduality in grand variable exponent lebesgue and morrey spaces," *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 15, no. 3, pp. 1–15, 2018.
- [69] V. Lyantse, O. Storozh, "Methods of unbounded operators theory," *Kiev, Ukraine: Nauk. dumka*, 1983.
- [70] B. Bilalov, T. Gasymov, G. Maharramova, "Basis property of eigenfunctions in lebesgue spaces for a spectral problem with a point of discontinuity," *Differential Equations*, vol. 55, no. 12, pp. 1544–1553, 2019.
- [71] T. B. Gasymov, "On necessary and sufficient conditions of basicity of some defective systems in banach spaces," *Trans. NAS Azerb*, vol. 26, no. 1, pp. 65–70, 2006.
- [72] B. T. O. Bilalov, *Some questions of approximation*. Elm., 2016.
- [73] A. Zygmund, *Trigonometric series*. Cambridge university press, 2002, vol. 1.
- [74] B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for the hardy maximal function," *Transactions of the American Mathematical Society*, pp. 207–226, 1972.
- [75] R. E. Castillo, H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces*. Springer, 2016.
- [76] M. A. Naimark, *Lineinye differentsialnye operatory*. Nauka Publ., Moscow, 1969.
- [77] V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, S. Samko, *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces: Volume 2: Variable Exponent Hölder, Morrey–Campanato and Grand Spaces*. Birkhäuser, 2016, vol. 249.
- [78] K. S. (Editor), *Functional Analysis*. Nauka Publishing House, Moscow, 1972.
- [79] B. M. Levitan, I. S. Sargsyan, *Introduction to Spectral Theory: Self-Adjoint Ordinary Differential Operators*. Science, Main edition of physical and mathematical literature, 1970.
- [80] T. B. Gasymov, G. V. Maharramova, "On completeness of eigenfunctions of the spectral problem," *Caspian J. of Appl. Math., Ecology and Economics*, vol. 3, no. 2, pp. 66–76, 2015.
- [81] Y. Zeren, M. ISMAILOV, F. ŞİRİN, "On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-lebesgue space," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 5, pp. 1595–1611, 2020.
- [82] Y. Zeren, M. ISMAILOV, C. Karaçam, "Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand lebesgue spaces," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 3, pp. 1027–1041, 2020.

- [83] R. A. Hunt, W.-S. Young, “A weighted norm inequality for fourier series,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 80, no. 2, pp. 274–277, 1974.

