

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYON n -UZAYININ CEBİRSEL YAPILARI VE
EĞRİLER TEORİSİ

Deniz ALTUN

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Temmuz, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYON n -UZAYININ CEBİRSEL YAPILARI VE EĞRİLER
TEORİSİ

Deniz ALTUN tarafından hazırlanan tez çalışması 15.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN, Üye
İstanbul Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kuaterniyon n -Uzayının Cebirsel Yapıları ve Eğriler Teorisi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Deniz ALTUN

İmza

Annem'e



TEŞEKKÜR

Gerek hayattaki duruşu gerekse olaylara yaklaşımı ile doktora eğitimim süresince benim için her anlamda bir öğretici olan, desteğini hep yanı başımda hissettiğim kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye en derin saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca, "Yüce Research Group" çalışma ortamını sonsuz özveri ve emekleri ile bize sağlayarak değerli arkadaşlarımla bu eğitim havasını solumaya beni de layık gördüğü için minnettarım.

Her daim desteklerini benden hiç esirgemeyen canım anneme ve sevgili eşim Hidayet ALTUN'a tüm içtenliğimle teşekkür ederim.

Deniz ALTUN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	viii
TABLO LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 $\mathbb{R}^n$ Kümesinin Cebirsel Yapısı	3
2.1.1 $\mathbb{R}^n$ Kümesinin $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	3
2.1.2 Halka Yapısı	6
2.1.3 Sıralama	8
2.1.4 $\mathbb{R}^n$ Uzayında Vektörel Fonksiyonlar	10
2.2 $\mathbb{C}^n$ Kümesinin Cebirsel Yapısı	14
2.2.1 $\mathbb{C}^n$ Uzayının Vektör Uzayı Yapıları	14
2.2.2 $\mathbb{C}^n$ Kümesinin Halka Yapısı	17
2.3 $\mathbb{H}$ Reel Kuaterniyon Uzayı	19
2.3.1 Kuaterniyon Uzayında İç Çarpım Fonksiyonları	23
2.3.2 Kuaterniyonun Normu	26
2.3.3 Kuaterniyonun Ters ve Bölme	27
2.3.4 $\mathbb{H}_p$ Uzayında Vektörel Çarpım	28
2.3.5 Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi	30
2.3.6 Reel Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü ve Euler Formülü	31
2.3.7 Reel Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimi	32
2.3.8 Reel Kuaterniyonların Kompleks Yapısı	34
2.3.9 Reel Kuaterniyonların Kompleks Matris Gösterimi	36
2.4 Kuaterniyon Uzayında Fonksiyonlar Teorisi	39

2.4.1	Reel Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar	39
2.4.2	Kuaterniyon Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Türevi	45
3	$\mathbb{H}$ UZAYINDA EĞRİLER TEORİSİ	47
3.1	$\mathbb{H}_p$ Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik Eğriler İçin Frenet-Serret Formülleri	47
3.2	$\mathbb{H}$ Uzayında Kuaterniyonik Eğriler için Frenet-Serret Formülleri	55
4	SİMPLEKTİK GEOMETRİ	64
4.1	V Simplektik Çarpım Uzayı	64
4.2	$\mathbb{H}^n$ Uzayı	67
4.2.1	$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{H}$ -Modül) Uzayında İç Çarpım ve Norm	69
4.2.2	$\mathbb{H}_p^n$ ($\mathbb{H}$ -Modül) Uzayında Vektörel Çarpım	72
4.3	Simplektik Dönüşüm	74
5	$\mathbb{H}^n$ KÜMESİ ÜZERİNDEKİ FARKLI GÖSTERİMLER	75
5.1	$\mathbb{H}^n$ Kümesi Üzerinde Halka Yapısı	75
5.2	$\mathbb{H}^n$ Kümesi Üzerinde Reel Sıralı n -liler Yardımı ile Gösterim	77
5.3	$\mathbb{H}^n$ Kümesi Üzerinde Kompleks Sıralı n -liler Yardımı ile Gösterim	83
6	$\mathbb{H}^n$ UZAYININ CEBİRSEL YAPILARI	91
6.1	$\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}^n$ Halkası Üzerindeki Modül Yapısı	91
6.1.1	$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Uzayının Bazı	93
6.1.2	$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Üzerinde İç Çarpım İşlemi	93
6.1.3	$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Üzerinde Norm İşlemi	96
6.1.4	$\mathbb{H}_p^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Uzayında Vektörel Çarpım	97
6.1.5	$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Üzerinde Çarpım İşlemi	99
6.2	$\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	100
6.2.1	$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}$ -Vektör Uzayı) Uzayının Bazı	102
6.2.2	$\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki İç Çarpım İşlemi	102
6.2.3	$\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki Norm İşlemi	104
6.3	$\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{C}^n$ Halkası Üzerindeki Modül Yapısı	107
6.4	$\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{C}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	108
6.4.1	$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{C}$ -Vektör Uzayı) Uzayının Bazı	108
7	$\mathbb{H}^n$ UZAYINDA ANALİZ	110
7.1	Reel Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar	110
7.1.1	$\mathbb{H}^n$ Uzayında Öklid Metriğine Göre Vektörel Limit	111
7.1.2	$\mathbb{H}^n$ Uzayında Sıralı Çarpım Metriğine Göre Vektörel Limit	113
7.1.3	$\mathbb{H}^n$ Uzayında Vektörel Süreklilik	116
7.1.4	$\mathbb{H}^n$ Uzayında Vektörel Türev	117

7.2	Reel n -Vektör Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar . .	123
7.3	Kuaterniyon Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar . . .	124
7.4	Kuaterniyon n -Vektör Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar	124
8	$\mathbb{H}^n$ UZAYINDA EĞRİLER TEORİSİ	125
8.1	$\mathbb{H}_p^n$ Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik Eğriler	125
8.1.1	$\mathbb{H}_p^n$ Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik Eğriler İçin Sıralı Çarpım Metriğine Göre Frenet-Serret Formülleri	126
8.2	$\mathbb{H}^n$ Uzayında Kuaterniyonik Eğriler	137
8.2.1	$\mathbb{H}^n$ Uzayında Kuaterniyonik Eğriler için Sıralı Çarpım Metriğine Göre Frenet-Serret Formülleri	138
9	SONUÇ VE ÖNERİLER	148
	KAYNAKÇA	149
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	152

SİMGE LİSTESİ

$\boxtimes_{\mathbb{C}^n}$	$\mathbb{C}^n$ uzayında çarpma işlemi
$\langle, \rangle_{\mathbb{C}^n}$	$\mathbb{C}^n$ uzayında iç çarpım işlemi
$\times$	$\mathbb{H}$ kümesi üzerinde çarpma işlemi
$\langle, \rangle_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{H}$ kümesi üzerinde kuaterniyonik iç çarpım işlemi
h	$\mathbb{H}$ kümesi üzerinde reel iç çarpım işlemi
$\oplus$	$\mathbb{H}$ kümesi üzerinde toplama işlemi
$\boxtimes$	$\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde çarpma işlemi
$\boxplus$	$\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde toplama işlemi
$\wedge_{\mathbb{H}_p}$	$\mathbb{H}_p$ uzayında vektörel çarpım işlemi
$\wedge_{\mathbb{H}_p^n}$	$\mathbb{H}_p^n$ uzayında vektörel çarpım işlemi
$\mathbb{C}^n$	n -boyutlu kompleks sayıların uzayı
$\mathbb{H}^n$	n -boyutlu reel kuaterniyonların kümesi
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu reel sayıların uzayı
$\mathbb{H}_p^n$	n -boyutlu reel uzaysal kuaterniyonların kümesi
$\mathbb{H}$	Reel kuaterniyonların kümesi
$\mathbb{H}_p$	Reel uzaysal kuaterniyonların kümesi
$\boxtimes_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbb{R}^n$ uzayında çarpma işlemi
$\langle, \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbb{R}^n$ uzayında iç çarpım işlemi
$+$	$\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ uzayında toplama işlemi
$\wedge_{\mathbb{R}^3}$	$\mathbb{R}^3$ uzayında vektörel çarpım işlemi

TABLO LİSTESİ

Tablo 5.1	$\mathbb{H}^n$ uzayında farklı gösterimlerle çarpma işlemi	90
Tablo 6.1	$\mathbb{H}^n$ uzayında farklı gösterimlerle iç çarpım işlemi	106



Kuaterniyon n -Uzayının Cebirsel Yapıları ve Eğriler Teorisi

Deniz ALTUN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, tezin giriş kısmı ile birlikte literatür özetini ve tezin amacını içermektedir. İkinci bölümde, n -boyutlu reel uzay, n -boyutlu kompleks uzay ve reel kuaterniyonlar uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiş, kuaterniyon değerli fonksiyon çeşitleri araştırılmıştır. Üçüncü bölümde, kuaterniyonik eğriler için Frenet-Serret formülleri Bharathi ve Nagaraj [1] temel alınarak açıklanmıştır. Dördüncü bölüm, $\mathbb{H}^n$ uzayı ile ilgili temel bilgilere ayrılmıştır. Tezin bu kısmına kadar bazı alt bölümler ve bu kısımdan sonraki bölümler orijinal bölümlerdir. Beşinci bölümde, n -boyutlu kuaterniyonlar kümesinin elemanlarının reel ve kompleks n -vektörler cinsinden olan farklı gösterimleri incelenmiştir. Altıncı bölümde, bu gösterimlerden yararlanarak $\mathbb{H}^n$ uzayının vektör uzayı veya modül yapıları verilmiş ayrıca iç çarpımları, normları ve bazıları tanımlanmıştır. Yedinci bölümde, kuaterniyon değerli fonksiyonlardan yararlanarak kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonların tanımlamaları yapılmıştır. Sekizinci bölümde, $\mathbb{H}^n$ uzayının incelenen cebirsel yapıları ve kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonlar temel alınarak n -boyutlu kuaterniyonik uzaydaki eğriler için Frenet-Serret formülleri elde edilmiş, elde edilen sonuçlar için örnekler verilmiştir. Son olarak, tezde bulunan orijinal sonuçlar ve gelecek çalışmalar için öneriler dokuzuncu bölüm olarak eklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Simplektik geometri, n -boyutlu kuaterniyonik uzay, Frenet-Serret formülleri, kuaterniyonik eğri, kuaterniyonik n -vektörler

ABSTRACT

Algebraic Structures of Quaternion n -Space and Theory of Curves

Deniz ALTUN

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis consists of nine chapters. The first part includes the introduction of the thesis, the literature review and the purpose of the thesis. In the second chapter, basic concepts related to n -dimensional real space, n -dimensional complex space and real quaternion space are given, and types of quaternion-valued functions are investigated. In the third chapter, Frenet-Serret formulas for quaternionic curves are explained in Bharathi and Nagaraj [1]. The fourth chapter is devoted to the basics of the $\mathbb{H}^n$ space. Some subsections up to this part of the thesis and the chapters after this part are original chapters. In the fifth chapter, different representations of the elements of the set of n -dimensional quaternions in terms of real and complex n -vectors are examined. In the sixth chapter, the vector space or module structures of the $\mathbb{H}^n$ space are given by using these representations, and its inner products, norms and bases are defined. In the seventh chapter, the definitions of quaternion valued vector functions are made by using quaternion valued functions. In the eighth chapter, Frenet-Serret formulas are obtained for curves in n -dimensional quaternionic space based on the algebraic structures of $\mathbb{H}^n$ space and vector functions with quaternion values, and examples are given for the obtained results. Finally, the original results in the thesis and suggestions for future studies are added as the ninth chapter.

Keywords: Symplectic geometry, n -dimensional quaternionic space, Frenet-Serret formulas, quaternionic curve, quaternionic n -vectors

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Kuaterniyonlar ilk olarak 1843 yılında İrlandalı Matematikçi Sir William Rowan Hamilton (4 Ağustos 1805 - 2 Eylül 1865) tarafından keşfedilmiştir. Keşfinden itibaren de matematiğin çoğu alanında gerek konuların temelini oluşturma gerekse ilerlemelerini sağlamada büyük fark yaratmıştır. Kuaterniyonların tarihçesi ve matematiğe etkileri ile ilgili bilgilere ve geniş kapsamlı bir çok çalışmaya [2] kaynağından ulaşılabilir. Bunun yanında, kuaterniyon sayı sistemi için temel olarak [3–7] kaynakları ve kuaterniyonların matematiğin bir çok alanı ile ilişkisini anlamlandırabilmek için [8–12] kaynakları incelenebilir. Çalışmamızın temelini oluşturacak olan kuaterniyonik eğriler ile ilgili en temel fonksiyonlar için öncelikle [13–17] kaynaklarındaki kuaterniyonik analiz kavramları incelenmiştir.

Literatürde, simplektik geometri adı altında çift boyutlu bir uzayın cebirsel yapıları ve matrisleri ele alınmıştır. Genel olarak, bir simplektik form cebirsel ve analitik bir takım şartları sağlayan 2-formdur [18, 19]. Ata [20], 2004 yılında dual kuaterniyonların simplektik yapısını incelemiştir. Bu inceleme kuaterniyon n -lileri için de özel olarak söz konusudur.

$\mathbb{H}^n$ kümesi ilk olarak 1940'lı yılların sonlarına doğru çalışılmıştır, [21]. Bu kümenin cebirsel yapısı kuaterniyonlar kümesi üzerinde çalışılmış olup, ayrıca kuaterniyonların kompleks yapısından yararlanılarak kompleks sayılar kümesi üzerinde de incelenmiştir [18, 19].

Uzaysal ve uzaysal olmayan kuaterniyon uzaylarında düzgün kuaterniyonik eğrilerin özellikleri 1987 yılında Bharathi ve Nagaraj tarafından incelenmiş, kuaterniyonik eğriler için Frenet-Serret formülleri verilmiştir [1]. Sonrasında, benzer formülasyonlar dual katsayılı kuaterniyonlar için elde edilmiştir [22, 23]. 2002 yılında yarı-Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler için Frenet-Serret formülleri Tuna [24] tarafından çalışılmıştır. 2005 yılında ise kuaterniyonlar ile Frenet-Serret formülleri için alternatif

bir temsil yöntemi geliştirilmiştir [25].

1.2 Tezin Amacı

Tezin temel amacı, $\mathbb{H}^n$ uzayındaki reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonların yardımı ile tanımlanan uzaysal kuaterniyonik ve kuaterniyonik eğriler için Frenet-Serret vektörlerini ve Frenet elemanlarını elde etmektir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada öncelikle, $\mathbb{H}^n$ kümesinin elemanlarının farklı gösterimlerinden yararlanılarak cebirsel yapılar kurulacaktır. Kuaterniyon uzayındaki fonksiyonlardan yararlanarak n -boyutlu kuaterniyonlar uzayındaki fonksiyonlar tanımlanacak, limit, süreklilik ve türev kavramları ile ilgili tanım, teorem ve sonuçlar elde edilecektir. Buradan hareketle tanımlanan kuaterniyonik vektörel fonksiyonlar $\mathbb{H}^n$ uzayında eğrilerin incelenmesine olanak sağlayacaktır. Öncelikle bu eğrilerin Frenet-Serret formülleri $\mathbb{H}_p^n$ uzayında uzaysal kuaterniyon n -vektörler kullanılarak elde edilecektir. Elde edilen Frenet-Serret formülleri kullanılarak $\mathbb{H}^n$ uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Frenet-Serret formülleri verilecektir. Sonuç olarak, $\mathbb{H}^n$ uzayında fonksiyonlar ve Frenet-Serret formülleri literatüre kazandırılacaktır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tezin orijinal kısmında kullanılan temel bilgilerden oluşmaktadır. Bu bölümde öncelikle n -boyutlu reel sayılardan ve n -boyutlu kompleks sayılardan oluşan kümelerin cebirsel yapıları verildi. Sonrasında kuaterniyon uzayı için tanım ve teoremler ele alındı. Ayrıca, kuaterniyon uzayında reel ve kuaterniyon değerli fonksiyonlar verildi.

2.1 $\mathbb{R}^n$ Kümesinin Cebirsel Yapısı

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ tane}}$ olmak üzere, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ için,

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{A} \mid \vec{A} = (a_i) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \cdots + a_n \vec{e}_n, \forall a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \}$$

reel sıralı n -lilerin kümesi şeklinde tanımlanır [26, 27].

2.1.1 $\mathbb{R}^n$ Kümesinin $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^n$ reel sayılar kümesi üzerinde $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ toplama işlemi, $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır [26, 27].

Sonuç 2.1. $\mathbb{R}^n$ kümesinin toplama işlemine göre birim elemanı $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere $(\mathbb{R}^n, +)$ ikilisi bir Abel gruptur.

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^n$ reel sıralı n -lilerin kümesi üzerinde $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{A} \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda \odot \vec{A} = \lambda \odot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. Skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ için,

- i. $\lambda \odot (\vec{A} \oplus \vec{B}) = (\lambda \odot \vec{A}) \oplus (\lambda \odot \vec{B})$
- ii. $(\lambda + \beta) \odot \vec{A} = (\lambda \odot \vec{A}) \oplus (\beta \odot \vec{A})$
- iii. $(\lambda \cdot \beta) \odot \vec{A} = \lambda \odot (\beta \odot \vec{A})$
- iv. $1 \odot \vec{A} = \vec{A}$

özelliklerini sağlar [26–28].

Sonuç 2.2. $\{\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya **n -boyutlu standart reel vektör uzayı** denir [26, 28]. Bu uzayın elemanlarına **reel n -vektör** denir [27].

2.1.1.1 $\mathbb{R}^n$ Uzayında İç Çarpım İşlemi

Tanım 2.4. n -boyutlu reel vektör uzayı üzerinde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ iç çarpım işlemi, $\forall \vec{A} = (a_i), \vec{B} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır [26–28].

Tanım 2.5. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu olup $\mathbb{R}^n$ kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır [26, 27].

Tanım 2.6. n -boyutlu reel vektör uzayı üzerinde norm işlemi, $\forall \vec{A} = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{A} &\rightarrow \|\vec{A}\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{R}^n}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dönüşümü ile,

$$\|\vec{A}\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (2.5)$$

pozitif reel sayısı olarak tanımlanır [26–28].

2.1.1.2 $\mathbb{R}^3$ Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 2.7. $\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olmak üzere, $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için,

$$\begin{aligned} \wedge_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\rightarrow \vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B} \end{aligned}$$

iki vektörün vektörel çarpımı işlemidir ve

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B} &= \sum_{k=1}^3 \det(\vec{e}_k, \vec{A}, \vec{B}) \vec{e}_k \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır. Aynı zamanda, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

şeklindeki sanal determinant ile de hesaplanabilir.

Teorem 2.2. Vektörel çarpım işlemi, $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

- i. $\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{A} = \sum_{k=1}^3 \det(\vec{e}_k, \vec{A}, \vec{A}) \vec{e}_k = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$
- ii. $\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B} = \sum_{k=1}^3 \det(\vec{e}_k, \vec{A}, \vec{B}) \vec{e}_k = - \sum_{k=1}^3 \det(\vec{e}_k, \vec{B}, \vec{A}) \vec{e}_k = -\vec{B} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{A}$
- iii. $(\vec{A} + \vec{B}) \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{C} = (\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{C}) + (\vec{B} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{C})$
- iv. $\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B}) + (\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{C})$
- v. $(\lambda \vec{A}) \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B} = \lambda (\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B}) = \vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} (\lambda \vec{B})$
- vi. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ lineer bağımlı ise $\vec{A} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{B} = \vec{0}$

özelliklerini sağlar [28].

Sonuç 2.3. İki vektörün vektörel çarpımı her iki vektöre de dik olan ve boyu bu iki vektör üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşit olan yeni bir vektördür [28, 29].

2.1.2 $\mathbb{R}^n$ Kümesinin Halka Yapısı¹

$\mathbb{R}^n$ kümesinin halka yapısını tarif etmek için bir toplama ve bir çarpma işlemine ihtiyacımız vardır. Toplama işlemi, Tanım 2.2 ile verildi. Diğer işlemler için [30] kaynağında $\mathbb{R}^2$ uzayı için verilen tanımları $\mathbb{R}^n$ uzayına genişleteceğiz.

Tanım 2.8. $\mathbb{R}^n$ reel sayılar kümesi üzerinde $\boxtimes_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ çarpma işlemi, $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işleme $\mathbb{R}^n$ kümesinde **sıralı çarpım** (bileşensel / koordinatsal / component-wise / element-wise / coordinate-wise multiplication) denir [30].

Teorem 2.3. *Sıralı çarpım işlemi, $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ için,*

- i. $(\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C} = \vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C})$
- ii. $\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{B} \boxplus \vec{C}) = (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}) \boxplus (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C})$
- iii. $(\vec{A} \boxplus \vec{B}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C} = (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}) \boxplus (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C})$
- iv. $\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B} = \vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}$
- v. $\vec{1}_{\mathbb{R}^n} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A} = \vec{A} \quad (\vec{1}_{\mathbb{R}^n} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n)$

özelliklerini sağlar.

İspat.

i.

$$\begin{aligned} (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C} &= [(a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (b_1, b_2, \dots, b_n)] \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= ((a_1 b_1) c_1, (a_2 b_2) c_2, \dots, (a_n b_n) c_n) \\ &= (a_1 (b_1 c_1), a_2 (b_2 c_2), \dots, a_n (b_n c_n)) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_n c_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} [(b_1, b_2, \dots, b_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (c_1, c_2, \dots, c_n)] \\ &= \vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}) \end{aligned}$$

¹Orijinal Bölüm

ii.

$$\begin{aligned}
\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{B} \boxplus \vec{C}) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} [(b_1, b_2, \dots, b_n) \boxplus (c_1, c_2, \dots, c_n)] \\
&= (a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n) \\
&= (a_1(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2), \dots, a_n(b_n + c_n)) \\
&= (a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 + a_2 c_2, \dots, a_n b_n + a_n c_n) \\
&= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \boxplus (a_1 c_1, a_2 c_2, \dots, a_n c_n) \\
&= [(a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (b_1, b_2, \dots, b_n)] \\
&\quad \boxplus [(a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (c_1, c_2, \dots, c_n)] \\
&= (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}) \boxplus (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C})
\end{aligned}$$

■

Sonuç 2.4. Çarpma işlemi birleşme, toplama üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliklerini sağlar. Çarpma işlemine göre birim eleman $\vec{1}_{\mathbb{R}^n} = (1, 1, \dots, 1)$ olmak üzere, $(\mathbb{R}^n, \boxplus, \boxtimes_{\mathbb{R}^n})$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

2.1.2.1 $\mathbb{R}^n$ Halkasında Ters Eleman ve Bölme işlemi

Tanım 2.9. $\forall \vec{A} = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ ($0 \leq i \leq n$) vektörünün tersi, $\forall a_i \neq 0$ olmak üzere,

$$\vec{\frac{1}{A}} = \vec{A}^{-1} = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \right) = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4. Ters işlemi, $\forall \vec{A} = (a_i), \vec{B} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ için,

- i. $\|\vec{A}^{-1}\| = \|\vec{A}\|^{-1}$
- ii. $\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}^{-1} = \vec{A}^{-1} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A} = \vec{1}$
- iii. $(\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B})^{-1} = \vec{A}^{-1} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}^{-1}, \forall a_i, b_i \neq 0$

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.10. $\mathbb{R}^n$ kümesinde bölme işlemi, $\forall \vec{A} = (a_i), \vec{B} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ ($0 \leq i \leq n$) için, $\forall b_i \neq 0$ olmak üzere,

$$\vec{\frac{A}{B}} = \vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}^{-1} = \vec{B}^{-1} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.3 $\mathbb{R}^n$ Üzerinde Sıralama Bağıntısı ve Metrik²

$\mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlanan sıralı çarpım işlemi Tanım 2.8 ile verildi. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -modül) üzerinde skaler ile çarpma işlemi, skaler olan değerler aynı zamanda $\mathbb{R}^n$ kümesinin elemanları olacağından bir sıralı çarpım işlemidir.

Bu alt bölümdeki tüm kavramlara [31] çalışmamızda yer verilmiştir.

2.1.3.1 $\mathbb{R}^n$ Üzerinde Sıralama Bağıntısı

Tanım 2.11. Her bir bileşeni reel sayı olan $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ n -vektörünü düşünelim. Her bir $a_i \in \mathbb{R}$ için sadece üç durum söz konusudur: $a_i > 0$, $a_i = 0$, $a_i < 0$. Bu durumda,

- eğer $\forall a_i > 0$ ise o zaman $\vec{A}$ n -vektörü pozitifdir. Bunu, $\vec{A} \succ \vec{0}$
- eğer $\forall a_i < 0$ ise o zaman $\vec{A}$ n -vektörü negatifdir. Bunu, $\vec{A} \prec \vec{0}$

olarak göstereceğiz. Ayrıca,

- " $\vec{A} \prec \vec{0}$ veya $\vec{A} = \vec{0}$ " ise $\vec{A} \preceq \vec{0}$
- " $\vec{A} \succ \vec{0}$ veya $\vec{A} = \vec{0}$ " ise $\vec{A} \succeq \vec{0}$

şeklinde ifade edeceğiz.

Tanım 2.12. $\forall \vec{A} = (a_i), \vec{B} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ için, $\vec{B} + (-\vec{A}) = \vec{B} - \vec{A}$ olarak yazalım. Eğer, $\vec{B} - \vec{A} \succ \vec{0}$ ($\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$ için $b_i - a_i > 0$) ise $\vec{B}$ n -vektörü $\vec{A}$ n -vektöründen büyüktür denir ve $\vec{B} \succ \vec{A}$ ile gösterilir.

Teorem 2.5. " $\vec{A} \preceq \vec{B} \iff \vec{A} \prec \vec{B}$ veya $\vec{A} = \vec{B}$ " olacak şekilde tanımlanan " $\preceq$ " bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat. Kısmi sıralama bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahiptir.

Yansıma: $\vec{A} \preceq \vec{A} \iff \vec{A} \prec \vec{A}$ veya $\vec{A} = \vec{A}$

Ters Simetri: $\vec{A} \preceq \vec{B}$ ve $\vec{B} \preceq \vec{A}$ ise $\vec{A} = \vec{B}$ olduğunu gösterelim:

²Orijinal Bölüm

$$\vec{A} \preceq \vec{B} \iff \vec{A} \prec \vec{B} \text{ veya } \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{B} \preceq \vec{A} \iff \vec{B} \prec \vec{A} \text{ veya } \vec{B} = \vec{A}$$

olduğundan $\vec{A} \preceq \vec{B}$ ve $\vec{B} \preceq \vec{A}$ ise $\vec{A} = \vec{B}$ elde edilir.

Geçişme: $\vec{A} \preceq \vec{B}$ ve $\vec{B} \preceq \vec{C}$ ise $\vec{A} \preceq \vec{C}$ olduğunu gösterelim:

$\vec{A} \preceq \vec{B}$ ve $\vec{B} \preceq \vec{C}$ ise tanımdan ($\vec{A} \preceq \vec{B} \iff \vec{A} \prec \vec{B}$ veya $\vec{A} = \vec{B}$) ve ($\vec{B} \preceq \vec{C} \iff \vec{B} \prec \vec{C}$ veya $\vec{B} = \vec{C}$) olduğundan,

- $\vec{A} \prec \vec{B}$ iken $\vec{B} \prec \vec{C}$ veya $\vec{B} = \vec{C}$ olabilir. Bu durumda,
 - $\vec{A} \prec \vec{B}$ ve $\vec{B} \prec \vec{C}$ için $\vec{A} \prec \vec{C}$ olduğunu gösterelim.
 $\forall \vec{A} = (a_i), \vec{B} = (b_i), \vec{C} = (c_i) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için,
 $\vec{A} \prec \vec{B}$ ise $a_i < b_i$ ve $\vec{B} \prec \vec{C}$ ise $b_i < c_i$ olur. Reel sayılar üzerindeki kısmi sıralama bağıntısına göre, $a_i < b_i$ ve $b_i < c_i$ ise $\forall a_i, c_i \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için $a_i < c_i$ için $a_i - c_i < 0$ olacağından $\vec{A} \prec \vec{C}$ bulunur.
 - $\vec{A} \prec \vec{B}$ ve $\vec{B} = \vec{C}$ ise $\vec{A} \prec \vec{C}$.
- $\vec{A} = \vec{B}$ iken $\vec{B} \prec \vec{C}$ veya $\vec{B} = \vec{C}$ olabilir. Bu durumda,
 - $\vec{A} = \vec{B}$ ve $\vec{B} \prec \vec{C}$ ise $\vec{A} \prec \vec{C}$.
 - $\vec{A} = \vec{B}$ ve $\vec{B} = \vec{C}$ ise $\vec{A} = \vec{C}$.

elde edilir. Buradan, $\vec{A} \prec \vec{C}$ veya $\vec{A} = \vec{C}$ ise $\vec{A} \preceq \vec{C}$ bulunur.

■

2.1.3.2 $\mathbb{R}^n$ Üzerinde Sıralı Çarpım Metriği

$\mathbb{R}^n$ üzerinde fonksiyonlar, skaler olan değerler yerine n -vektörler alınarak reel değerli fonksiyonlarla benzer şekilde tanımlanır. Reel n -vektör değerli fonksiyonlar ve türevleri ile ilgili detaylı bilgi [32–35] kaynaklarından edinilebilir.

Tanım 2.13. $\forall \vec{A} = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için, $f_{a_i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_{a_i}(x) = a_i^x$ şeklinde tanımlı fonksiyon reel üstel fonksiyon olmak üzere, $\vec{A} \succ \vec{0}$ ve $\forall a_i \neq 1$ ($1 \leq i \leq n$) olacak şekilde n -vektörler için $F_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu,

$$F_x(\vec{A}) = \vec{A}^x = (f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n}) = (a_1^x, a_2^x, \dots, a_n^x) \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonun iyi tanımlı olduğu açıktır.

Teorem 2.6. $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -modül) üzerinde, $\forall \vec{A} = (a_i) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü, üstel fonksiyon tanımı kullanılarak

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}} = (\sqrt{a_1^2}, \sqrt{a_2^2}, \dots, \sqrt{a_n^2}) = (|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|) \quad (2.11)$$

şeklinde bir norm tanımlar. Bu norm ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayı bir normlu uzaydır.

İspat. $\forall \vec{A} = (a_i) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) keyfi bir vektör olmak üzere,

(N1) $\|\vec{A}\| = (|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$ için her bir $|a_i| \geq 0$ olduğundan $\|\vec{A}\| \succeq \vec{0}$ olur.

(N2) $\|\vec{A}\| = (|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|) = \vec{0}$ için her bir $|a_i| = 0$ olduğundan $a_i = 0$ olur ve buradan $\vec{A} = \vec{0}$ dır.

(N3) $\forall \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ bir skaler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}\| &= (|\lambda_1 a_1|, |\lambda_2 a_2|, \dots, |\lambda_n a_n|) \\ &= (|\lambda_1| |a_1|, |\lambda_2| |a_2|, \dots, |\lambda_n| |a_n|) \\ &= \|\vec{\lambda}\| \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \|\vec{A}\| \end{aligned}$$

Not 2.1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için de, $\|\lambda \odot \vec{A}\| = |\lambda| \|\vec{A}\|$ eşitliği geçerlidir.

(N4) $\|\vec{A} \boxplus \vec{B}\| = (|a_1 + b_1|, |a_2 + b_2|, \dots, |a_n + b_n|)$ için üçgen eşitsizliğinden, her bir $i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|\vec{A} \boxplus \vec{B}\| &= (|a_1 + b_1|, |a_2 + b_2|, \dots, |a_n + b_n|) \\ &\preceq (|a_1| + |b_1|, |a_2| + |b_2|, \dots, |a_n| + |b_n|) = \|\vec{A}\| \boxplus \|\vec{B}\| \end{aligned}$$

yazılabilir. ■

Sonuç 2.5. Teorem 2.6 ile verilen norm, $\mathbb{R}^n$ -modül üzerinde, $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^n$ için,

$$d(\vec{A}, \vec{B}) = \|\vec{A} \boxplus (-\vec{B})\| \quad (2.12)$$

şeklinde verilen bir d metriği tanımlar.

2.1.4 $\mathbb{R}^n$ Uzayında Vektörel Fonksiyonlar

Vektör değerli fonksiyonlar için analiz kavramları reel değerli fonksiyonlardan yararlanarak yapılır.

Tanım 2.14. $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar olsun. $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **reel değişkenli reel değerli vektörel fonksiyon** denir [34].

2.1.4.1 Vektörel Limit

$\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ reel değişkenli reel değerli vektörel fonksiyon olmak üzere, fonksiyonun limit tanımında tanım ve değer kümeleri için Öklid metriğini göz önüne alalım. Burada, uzaklık kavramı reel sayılar üzerinde bilinen mutlak değer fonksiyonu ve $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde bilinen Öklid normudur.

Tanım 2.15. $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ reel değişkenli reel değerli vektörel fonksiyon olsun. $\vec{f}$ fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı, t_0 noktasında tanımlı olması gerekmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$\forall \varepsilon > 0$ için, $0 < |t - t_0| < \delta$ iken $\|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

varsa **$\vec{f}$ fonksiyonunun t değeri t_0 değerine yaklaşırken limiti $\vec{L}$ dir** denir ve sembolik olarak $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ şeklinde gösterilir [36].

Teorem 2.7. $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar olsun. $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ şeklinde tanımlansın. $\forall L_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) için, $\vec{f}$ fonksiyonunun t_0 noktasındaki limitinin $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i$ olmasıdır.

Yani, $\vec{f}$ fonksiyonunun t değeri t_0 değerine yaklaşırken limiti,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, her bir bileşen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) fonksiyonlarının limitidir [33].

İspat.

$(\Rightarrow) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. O halde, $\exists \delta > 0$ vardır ve $|t - t_0| < \delta$ iken $\|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon$ sağlanır.

$$\begin{aligned}\|\vec{r}(t) - \vec{L}\| &= \|(f_1(t) - L_1, f_2(t) - L_2, \dots, f_n(t) - L_n)\| \\ &= \sqrt{(f_1(t) - L_1)^2 + (f_2(t) - L_2)^2 + \dots + (f_n(t) - L_n)^2} < \varepsilon\end{aligned}$$

olduğundan, $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için,

$$|f_i(t) - L_i| = \sqrt{(f_i(t) - L_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(t) - L_i)^2} = \|\vec{r}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon$$

yazılabilir. Buradan, $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i$ olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman öyle bir $\delta_i > 0$ vardır ki $|t - t_0| < \delta_i$ iken $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $|f_i(t) - L_i| < \frac{\varepsilon}{n}$ yazılabilir. $\delta = \min\{\delta_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere, her bir $|t - t_0| < \delta$ için,

$$\begin{aligned}\|\vec{r}(t) - \vec{L}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(t) - L_i)^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sqrt{(f_i(t) - L_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n |f_i(t) - L_i| \\ &< n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$ elde edilir. ■

Teorem 2.8. $\vec{r}$ ve $\vec{s}$ reel değerli reel değişkenli vektörel fonksiyonlar, f skaler değerli fonksiyon olsun. $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{s}(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ mevcut olsun. Bu durumda,

- i. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}(t) \mp \vec{s}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) \mp \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{s}(t)$
- ii. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$
- iii. $\lim_{t \rightarrow t_0} \langle \vec{r}(t), \vec{s}(t) \rangle = \left\langle \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t), \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{s}(t) \right\rangle$
- iv. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}(t) \wedge \vec{s}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) \wedge \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{s}(t)$

eşitlikleri sağlanır [35].

2.1.4.2 Vektörel Süreklilik

$\vec{r}$, $[a, b]$ aralığında tanımlı vektörel bir fonksiyon olsun. Eğer,

- $\vec{r}(t_0)$ tanımlı,
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$ mevcut,
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

koşulları sağlanıyorsa $\vec{r}$ fonksiyonu bir $t_0 \in [a, b]$ noktasında süreklidir.

Eğer $\vec{r}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ise $\vec{r}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında süreklidir [34].

Teorem 2.9. $\vec{r}$, $[a, b]$ aralığında tanımlı vektörel bir fonksiyon olsun. $\vec{r}(t)$ fonksiyonunun bir $t_0 \in [a, b]$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun her bir bileşeninin t_0 noktasında sürekli olmasıdır [35].

Örnek 2.1. $\vec{r}(t) = \left(\ln(1-t), \frac{1}{t}, 3t \right)$ olmak üzere, $\vec{r}(t)$ fonksiyonunun sürekli olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: Fonksiyonun birinci bileşeni her $t < 1$ değeri için süreklidir, ikinci bileşeni $t \neq 0$ olması durumunda süreklidir ve üçüncü bileşeni her t değeri için süreklidir. Bu durumda, $\vec{r}(t)$ fonksiyonu sıfırdan farklı tüm $t < 1$ değerleri için sürekli olacaktır.

2.1.4.3 Vektörel Türev

Tanım 2.16. $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ reel değişkenli reel değerli vektörel fonksiyon olmak üzere, $h \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

limiti var ise bu limit değerine fonksiyonun $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevi denir ve sembolik olarak $\frac{d}{dt} \vec{r}(t_0)$ ya da $\vec{r}'(t_0)$ ile gösterilir [34].

Teorem 2.10. $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\vec{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ şeklinde tanımlanan $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun türevi, bileşenlerinin ayrı ayrı türevlerinin alınması ve türev fonksiyonunun bileşenleri olarak yazılması ile elde edilir [34]:

$$\vec{r}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t))$$

Teorem 2.11. $\vec{r}$ ve $\vec{s}$ reel değişkenli reel değerli vektörel fonksiyonlar, f skaler değerli fonksiyon olsun. $\vec{r}(t)$, $\vec{s}(t)$ ve f fonksiyonları t_0 noktasında türe ve sahip olsun. Bu durumda,

- i. $(\vec{r}(t_0) \mp \vec{s}(t_0))' = \vec{r}'(t_0) \mp \vec{s}'(t_0)$
- ii. $(f(t_0)\vec{r}(t_0))' = f'(t_0)\vec{r}(t_0) + f(t_0)\vec{r}'(t_0)$
- iii. $(\langle \vec{r}(t_0), \vec{s}(t_0) \rangle)' = \langle \vec{r}'(t_0), \vec{s}(t_0) \rangle + \langle \vec{r}(t_0), \vec{s}'(t_0) \rangle$
- iv. $(\vec{r}(t_0) \wedge \vec{s}(t_0))' = \vec{r}'(t_0) \wedge \vec{s}(t_0) + \vec{r}(t_0) \wedge \vec{s}'(t_0)$
- v. $(c\vec{r}(t_0))' = c\vec{r}'(t_0) \quad (c \in \mathbb{R})$
- vi. $(\vec{r}(f(t_0)))' = \vec{r}'(f(t_0))f'(t_0)$

eşitlikleri sağlanır [33, 35].

2.2 $\mathbb{C}^n$ Kümesinin Cebirsel Yapısı

Tanım 2.17. $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{n \text{ tane}}$ olmak üzere,

$$\mathbb{C}^n = \{ \vec{Z} \mid \vec{Z} = (z_i) = (z_1, z_2, \dots, z_n), \forall z_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n \}$$

kompleks sıralı n -lilerin kümesi şeklinde tanımlanır [27].

Not 2.2. $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^n$ için $\vec{Z} \in \mathbb{C}^n$ vektörü $\vec{Z} = \vec{A} + i\vec{B}$ ile de ifade edilebilir.

2.2.1 $\mathbb{C}^n$ Uzayının Vektör Uzayı Yapıları

Her reel sayı aynı zamanda bir kompleks sayı olduğundan her reel vektör uzayı da bir kompleks vektör uzayıdır. Ancak burada, kompleks vektör uzayının hangi küme üzerinde bir vektör uzayı olduğu konusuna dikkat edilmelidir. Bu kısımda, $\mathbb{C}^n$ uzayını $\mathbb{R}^n$ uzayının bir genişlemesi olarak ele alırken, $\mathbb{C}^n$ uzayının hem reel sayılar kümesi hem de kompleks sayılar kümesi üzerindeki vektör uzayı yapılarından bahsedeceğiz.

Tanım 2.18. $\mathbb{C}^n$ kompleks sayılar kümesi üzerinde $\oplus : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ toplama işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \vec{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\vec{Z} \oplus \vec{W} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \oplus (w_1, w_2, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n) \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır [26, 27].

Sonuç 2.6. $\mathbb{C}^n$ kümesinin toplama işlemine göre birim elemanı $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere $(\mathbb{C}^n, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur.

2.2.1.1 $\mathbb{C}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı ve İç Çarpım

$(\mathbb{C}^n, +)$ ikilisinin bir Abel grup olduğu Sonuç 2.6 ile verildi. Bu kısımda, $\mathbb{C}^n$ kümesi üzerinde reel skaler ile çarpım işlemi tanımı verilerek $\mathbb{C}^n$ kümesinin reel sayılar cismi üzerindeki vektör uzayı yapısı elde edildi.

Tanım 2.19. $\mathbb{C}^n$ kompleks sayılar kümesi üzerinde $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ reel skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda \odot \vec{Z} = \lambda \odot (z_1, z_2, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n) \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.12. Skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \vec{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ için,

- i. $\lambda \odot (\vec{Z} + \vec{W}) = (\lambda \odot \vec{Z}) + (\lambda \odot \vec{W})$
- ii. $(\lambda + \beta) \odot \vec{Z} = (\lambda \odot \vec{Z}) + (\beta \odot \vec{Z})$
- iii. $(\lambda \cdot \beta) \odot \vec{Z} = \lambda \odot (\beta \odot \vec{Z})$
- iv. $1_{\mathbb{R}} \odot \vec{Z} = \vec{Z}$

özelliklerini sağlar [27].

Sonuç 2.7. $\{\mathbb{C}^n, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır [27, 37]. Burada,

$$\mathbb{C}^n = Sp \{(1, 0, \dots, 0), (i, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, i, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1), (0, 0, \dots, i)\}$$

olduğundan $\dim \mathbb{C}^n = 2n$ elde edilir. Yani, $\mathbb{C}^n$ kümesi reel sayılar cismi üzerinde $2n$ -boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzayın elemanlarına **kompleks n -vektör** denir [27, 37].

Tanım 2.20. Bir kompleks n -vektörün eşleniği, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere, her bir bileşeninin eşleniğinin alınması ile,

$$\overline{\vec{Z}} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n}) \in \mathbb{C}^n \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır [27, 37].

Tanım 2.21. Kompleks $2n$ -boyutlu vektör uzayı üzerinde $\langle, \rangle_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli iç çarpım işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_i), \vec{W} = (w_i) \in \mathbb{C}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\langle \vec{Z}, \vec{W} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (z_i \overline{w_i} + w_i \overline{z_i}) \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.8. $\langle, \rangle_{\mathbb{C}^n}$ fonksiyonu $\{\mathbb{C}^n, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ uzayında reel değerli bir iç çarpım fonksiyonu olup $\mathbb{C}^n$ kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

Tanım 2.22. Kompleks $2n$ -boyutlu reel vektör uzayı üzerinde norm işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\vec{Z} \rightarrow \|\vec{Z}\|_{\mathbb{C}^n} = \sqrt{\langle \vec{Z}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{C}^n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.1.2 $\mathbb{C}^n$ Uzayının $\mathbb{C}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı ve İç Çarpım

$(\mathbb{C}^n, \mathbf{+})$ ikilisinin bir Abel grup olduğu Sonuç 2.6 ile verildi. Bu kısımda, $\mathbb{C}^n$ kümesi üzerinde kompleks skaler ile çarpım tanımı verilerek $\mathbb{C}^n$ kümesinin kompleks sayılar cismi üzerindeki vektör uzayı yapısı elde edildi.

Tanım 2.23. $\mathbb{C}^n$ kompleks sayılar kümesi üzerinde $\odot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ kompleks skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\lambda \odot \vec{Z} = \lambda \odot (z_1, z_2, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n) \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.13. Skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \vec{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{C}$ için,

- i. $\lambda \odot (\vec{Z} \mathbf{+} \vec{W}) = (\lambda \odot \vec{Z}) \mathbf{+} (\lambda \odot \vec{W})$
- ii. $(\lambda + \beta) \odot \vec{Z} = (\lambda \odot \vec{Z}) \mathbf{+} (\beta \odot \vec{Z})$
- iii. $(\lambda \cdot \beta) \odot \vec{Z} = \lambda \odot (\beta \odot \vec{Z})$
- iv. $1_{\mathbb{C}} \odot \vec{Z} = \vec{Z}$

özelliklerini sağlar [26, 27].

Sonuç 2.9. $\{\mathbb{C}^n, \mathbf{+}, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır [37]. Burada,

$$\mathbb{C}^n = \text{Sp} \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$$

olduğundan $\text{boy} \mathbb{C}^n = n$ elde edilir. Yani, $\mathbb{C}^n$ kümesi kompleks sayılar cismi üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayıdır [26, 27].

Tanım 2.24. Kompleks n -boyutlu vektör uzayı üzerinde $\langle, \rangle_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks değerli iç çarpım işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \vec{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\langle \vec{Z}, \vec{W} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır [27, 28, 37].

Tanım 2.25. $\langle, \rangle_{\mathbb{C}^n}$ fonksiyonu $\{\mathbb{C}^n, \mathbf{+}, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ uzayında kompleks değerli bir iç çarpım fonksiyonu olup $\mathbb{C}^n$ kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır, bu uzaya **n -boyutlu standart Hermit iç çarpım uzayı** denir [27, 37].

Teorem 2.14. Kompleks n -boyutlu vektör uzayı üzerinde kompleks değerli iç çarpım fonksiyonu, $\forall \vec{Z}, \vec{W} \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

- i. $\langle \vec{Z}, \vec{W} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \overline{\langle \vec{W}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{C}^n}}$
- ii. $\langle \lambda \odot \vec{Z}, \vec{W} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \odot \langle \vec{Z}, \vec{W} \rangle_{\mathbb{C}^n}$
- iii. $\langle \vec{Z}, \lambda \odot \vec{W} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda} \odot \langle \vec{Z}, \vec{W} \rangle_{\mathbb{C}^n}$

özelliklerini sağlar [27, 37].

Sonuç 2.10. Kompleks n -vektörlerin $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayı yapısındaki norm işlemi [27, 37] kaynaklarında geçmekle birlikte, Tanım 2.22 ile verdiğimiz kompleks $2n$ -boyutlu reel sayılar cismi üzerindeki vektör uzayı yapısında tanımlanan norm işlemi ile aynı reel sayı sonucunu verir.

2.2.2 $\mathbb{C}^n$ Kümesinin Halka Yapısı

$\mathbb{C}^n$ kümesi üzerinde toplama işlemi Tanım 2.18 ile verildi. Bu kısımda, $\mathbb{C}^n$ kümesinin halka yapısını tarif etmekte kullanacağımız çarpma işlemi için Tanım 2.8 ile verilen $\mathbb{R}^n$ uzayındaki sıralı çarpım işlemini $\mathbb{C}^n$ uzayına genişleteceğiz.

Tanım 2.26. $\mathbb{C}^n$ kompleks sayılar kümesi üzerinde $\boxtimes_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ çarpma işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \vec{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (w_1, w_2, \dots, w_n) = (z_1 w_1, z_2 w_2, \dots, z_n w_n) \quad (2.20)$$

şeklinde $\mathbb{C}^n$ elemanlarının sıralı çarpımı olarak tanımlanır.

Teorem 2.15. Çarpma işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \vec{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n), \vec{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{C}^n$ için,

- i. $(\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W}) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{K} = \vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (\vec{W} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{K})$
- ii. $\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (\vec{W} \oplus \vec{K}) = (\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W}) \oplus (\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{K})$
- iii. $(\vec{Z} \oplus \vec{W}) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{K} = (\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{K}) \oplus (\vec{W} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{K})$
- iv. $\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W} = \vec{W} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z}$
- v. $\vec{1}_{\mathbb{C}^n} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z} = \vec{Z}$
- vi. $\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z} = \vec{1}_{\mathbb{C}^n}$, olacak şekilde $\forall z_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ için,
 $\vec{Z}^{-1} = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_n} \right) = (z_1^{-1}, z_2^{-1}, \dots, z_n^{-1})$

özelliklerini sağlar.

İspat.

iv.

$$\begin{aligned}
 \vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W} &= (z_1, z_2, \dots, z_n) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (w_1, w_2, \dots, w_n) \\
 &= (z_1 w_1, z_2 w_2, \dots, z_n w_n) \\
 &= (w_1 z_1, w_2 z_2, \dots, w_n z_n) \\
 &= (w_1, w_2, \dots, w_n) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (z_1, z_2, \dots, z_n) \\
 &= \vec{W} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z}
 \end{aligned}$$

v.

$$\begin{aligned}
 \vec{1}_{\mathbb{C}^n} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z} &= (1, 1, \dots, 1) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (z_1, z_2, \dots, z_n) \\
 &= (1z_1, 1z_2, \dots, 1z_n) \\
 &= (z_1, z_2, \dots, z_n) = \vec{Z}
 \end{aligned}$$

■

Sonuç 2.11. Çarpma işlemi birleşme ve dağılma özelliklerini sağlar. Çarpma işlemine göre birim eleman $\vec{1}_{\mathbb{C}^n} = (1, 1, \dots, 1)$ olmak üzere her elemanın tersi mevcut değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{C}^n, \oplus, \boxtimes_{\mathbb{C}^n})$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

Teorem 2.16. Kompleks n -boyutlu vektör uzayı üzerinde eşlenik işlemi, $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için,

- i. $\vec{Z} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \overline{\vec{Z}} = (z_1 \bar{z}_1, z_2 \bar{z}_2, \dots, z_n \bar{z}_n) = (|z_1|^2, |z_2|^2, \dots, |z_n|^2)$
- ii. $\overline{(\overline{\vec{Z}})} = \vec{Z}$

özelliklerini sağlar.

2.3 $\mathbb{H}$ Reel Kuaterniyon Uzayı

Sir William Rowan Hamilton, 1843 yılında kuaterniyonları keşfetmiş ve iki vektör için iç çarpım ve vektörel çarpımın yanı sıra bölümün de mümkün olabileceğini göstermiştir. Kuaterniyonların nasıl keşfedildiği ve gelişimi ile ilgili daha geniş bilgi için Hamilton'ın kendi makaleleri de baz alınarak 1974 yılında yayımlanan Naiman'ın doktora tezinden yararlanılabilir [2].

Günümüze kadar matematiğin çeşitli alanlarında yapılan birçok çalışmada kuaterniyon sayı sistemi kullanılmıştır. Kuaterniyonlar dönmeyi, ötelemeyi ve katı cisimlerin hareketlerini üç boyutlu uzayda geometrik olarak temsil eden önemli araçlardandır. Bu temsil kuaterniyonların bilgisayar alanında kullanımını da yaygınlaştırmıştır [3, 4].

Kuaterniyonlar ve diğer kuaterniyon sayı sistemleri ile ilgili bilgiler [38] kaynağından detaylı bir şekilde incelenebilir.

Tanım 2.27. $\vec{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 0, 1)$ birim vektörleri $\mathbb{R}^4$ uzayının standart baz vektörleri olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 &= +1 \\ \vec{e}_1^2 &= \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = -1 \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3\end{aligned}\tag{2.21}$$

özelliklerine sahip olsun. Buna göre bir reel kuaterniyon, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3\tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanır. Reel kuaterniyonların kümesi,

$$\mathbb{H} = \{q \mid q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^4\}$$

ile ifade edilir. Kuaterniyonlar kümesinin her bir elemanı $S_q = a\vec{e}_0$ reel (skaler) kısım, $V_q = \mathbf{q} = b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3$ vektörel kısım olmak üzere,

$$q = S_q + V_q = S_q + \mathbf{q}\tag{2.23}$$

olarak yazılabilir [3].

Tanım 2.28. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde $\oplus : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ toplama işlemi, $\forall q = S_q + V_q, p = S_p + V_p \in \mathbb{H}$ için,

$$q \oplus p = (S_q + V_q) \oplus (S_p + V_p) = S_{q+p} + V_{q+p} \quad (2.24)$$

veya $q = a_1 \vec{e}_0 + b_1 \vec{e}_1 + c_1 \vec{e}_2 + d_1 \vec{e}_3, p = a_2 \vec{e}_0 + b_2 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + d_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

$$q \oplus p = (a_1 + a_2) \vec{e}_0 + (b_1 + b_2) \vec{e}_1 + (c_1 + c_2) \vec{e}_2 + (d_1 + d_2) \vec{e}_3 \in \mathbb{H} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.12. $\mathbb{H}$ kümesinin toplama işlemine göre birim elemanı $0_{\mathbb{H}} = 0 \vec{e}_0 + 0 \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3$ olmak üzere $(\mathbb{H}, \oplus)$ ikilisi bir Abel gruptur [3].

Tanım 2.29. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ reel skaler ile çarpma işlemi, $\forall q = S_q + V_q \in \mathbb{H}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda \odot q = \lambda \odot (S_q + V_q) = \lambda S_q + \lambda V_q \quad (2.26)$$

veya $q = a \vec{e}_0 + b \vec{e}_1 + c \vec{e}_2 + d \vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$\lambda \odot q = (\lambda a) \vec{e}_0 + (\lambda b) \vec{e}_1 + (\lambda c) \vec{e}_2 + (\lambda d) \vec{e}_3 \in \mathbb{H} \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.17. Skaler ile çarpma işlemi, $\forall q, p \in \mathbb{H}$ ve $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ için,

- i. $\lambda \odot (q \oplus p) = (\lambda \odot q) \oplus (\lambda \odot p)$
- ii. $(\lambda + \beta) \odot q = (\lambda \odot q) \oplus (\beta \odot q)$
- iii. $(\lambda \beta) \odot q = \lambda \odot (\beta \odot q)$
- iv. $1_{\mathbb{R}} \odot q = q$

özelliklerini sağlar.

Sonuç 2.13. $(\mathbb{H}, \oplus)$ Abel grubu ve reel skaler ile çarpma işlemi ile birlikte $\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır, $\mathbb{H} = Sp \{ \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ olduğundan $boy \mathbb{H} = 4$ elde edilir [3]. Yani, $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Sonuç 2.14. $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayına izomorftur. Her $q = a \vec{e}_0 + b \vec{e}_1 + c \vec{e}_2 + d \vec{e}_3$ kuaterniyonuna bir tek (a, b, c, d) sıralı dördlüsü karşılık gelir. $q = a \vec{e}_0 + b \vec{e}_1 + c \vec{e}_2 + d \vec{e}_3$ yazılışına q kuaterniyonunun kanonik gösterimi denir.

Tanım 2.30. Bir kuaterniyon sadece vektörel kısımdan oluşuyorsa, yani, reel kısmı sıfır ise bu kuaterniyona **uzaysal** (pure, vektörel) **kuaterniyon** denir. Uzaysal kuaterniyonların uzayı $\mathbb{H}_p$ ile gösterilir [3].

Sonuç 2.15. $\mathbb{H}_p$ uzaysal kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayına izomorftur. Her $q = b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3$ kuaterniyonuna bir tek (b, c, d) sıralı üçlüsü karşılık gelir.

Tanım 2.31. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde eşitlik, $\forall q = S_q + V_q$, $p = S_p + V_p \in \mathbb{H}$ için ,

$$q = p \Leftrightarrow S_q = S_p \text{ ve } V_q = V_p \quad (2.28)$$

veya $q = a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3$, $p = a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$q = p \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2 \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 2.32. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesinde çarpma işlemi, $\forall q = a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3$, $p = a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q \times p &= (a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3) \times (a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3) \\ &= a_1a_2(\vec{e}_0 \times \vec{e}_0) + b_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + c_1c_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + d_1d_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) \\ &\quad + a_1b_2(\vec{e}_0 \times \vec{e}_1) + a_1c_2(\vec{e}_0 \times \vec{e}_2) + a_1d_2(\vec{e}_0 \times \vec{e}_3) \\ &\quad + a_2b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_0) + a_2c_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_0) + a_2d_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_0) \\ &\quad + b_1c_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + b_1d_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + c_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \\ &\quad + c_1d_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + d_1b_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + d_1c_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. (2.21) eşitlikleri kullanılır ve terimler gruplandırılırsa,

$$\begin{aligned} q \times p &= a_1a_2 - (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + a_1(b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3) \\ &\quad + a_2(b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3) + (c_1d_2 - d_1c_2)\vec{e}_1 \\ &\quad + (d_1b_2 - b_1d_2)\vec{e}_2 + (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.30)$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (q, p) &\rightarrow q \times p \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi bir iç işlemdir. Tanım 2.4 ve Tanım 2.7 kullanıldığında,

$$q \times p = S_q S_p - \langle V_q, V_p \rangle_{\mathbb{R}^3} + S_q V_p + S_p V_q + V_q \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p$$

elde edilir [3, 8–10].

Burada, V_q ve V_p uzaysal kuaterniyonlar olduklarından aynı zamanda $\mathbb{R}^3$ uzayında da birer vektördür ve $\langle . \rangle_{\mathbb{R}^3}$, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki iç çarpım işlemi, $\wedge_{\mathbb{R}^3}$, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki vektörel çarpım işlemidir.

Sonuç 2.16. $(\mathbb{H}, \oplus, \times)$ üçlüsü birimli bir halkadır [3, 8, 9].

İspat. $\forall q, p, r \in \mathbb{H}$ için, kuaterniyon çarpımı birleşme özelliğini sağlar;

$$(q \times p) \times r = q \times (p \times r),$$

kuaterniyon çarpımı, kuaterniyon toplamı üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliklerini sağlar;

$$q \times (p \oplus r) = (q \times p) \oplus (q \times r),$$

$$(q \oplus p) \times r = (q \times r) \oplus (p \times r),$$

kuaterniyon çarpımının birim elemanı;

$$1_{\mathbb{H}} = 1\vec{e}_0 + 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

şeklindedir. ■

Not 2.3. Kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir, yani, $q \times p \neq p \times q$ [3, 8, 9].

Sonuç 2.17. İki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı, $\forall \mathbf{q} = b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3$ ve $\mathbf{p} = b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ için,

$$\times : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{H}$$

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{q} \times \mathbf{p}$$

dönüşümü ile

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = -\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{R}^3} + \mathbf{q} \wedge_{\mathbb{R}^3} \mathbf{p} \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.18. İki uzaysal kuaterniyonun dik olması durumunda $\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \mathbf{q} \wedge_{\mathbb{R}^3} \mathbf{p}$ eşitliği, paralel olması durumunda $\mathbf{q} \times \mathbf{p} = -\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{R}^3}$ eşitliği sağlanır [3].

Tanım 2.33. Bir q kuaterniyonunun eşleniği, $\forall q = S_q + V_q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$\bar{q} = S_q - V_q = a\vec{e}_0 - b\vec{e}_1 - c\vec{e}_2 - d\vec{e}_3 \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.18. Eşlenik işlemi, $\forall q, p \in \mathbb{H}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

- i. $\overline{q \oplus p} = \bar{q} \oplus \bar{p}$
- ii. $\overline{q \times p} = \bar{p} \times \bar{q}$
- iii. $\overline{\bar{q}} = q$
- iv. $\overline{\lambda \odot q} = \lambda \odot \bar{q}$
- v. $S_q = \frac{q \oplus \bar{q}}{2}$
- vi. $V_q = \frac{q \oplus (-\bar{q})}{2}$
- vii. $q = a\vec{e}_0$ ise $\bar{q} = q$
- viii. $q = b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3$ ise $\bar{q} = -q$

özelliklerini sağlar [3, 5, 10].

2.3.1 Kuaterniyon Uzayında İç Çarpım Fonksiyonları

Kuaterniyonların reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğu Sonuç 2.13 ile verildi. Burada, reel değerli bir iç çarpım tanımı verilecek. Aynı zamanda, her küme kendi üzerinde bir vektör uzayı olduğundan kuaterniyon değerli bir iç çarpımın varlığından da bahsedebiliriz.

2.3.1.1 Kuaterniyonlarda Reel Değerli İç Çarpım

Teorem 2.19. $\forall q = S_q + V_q, p = S_p + V_p \in \mathbb{H}$ için,

$$h(q, p) = \frac{1}{2} [q \times \bar{p} \oplus p \times \bar{q}] = S_{q \times \bar{p}} = S_{p \times \bar{q}} \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanan $h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur [8, 9].

İspat.

i. Simetri özelliği: $\forall q, p \in \mathbb{H}$ için,

$$h(q, p) = S_{q \times \bar{p}} = S_{\overline{q \times \bar{p}}} = S_{p \times \bar{q}} = h(p, q),$$

ii. Bilineerlik özelliği: $\forall q, p, r \in \mathbb{H}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$h(q, p \oplus r) = S_{q \times (\overline{p \oplus r})} = S_{q \times \overline{p} \oplus q \times \overline{r}} = S_{q \times \overline{p}} + S_{q \times \overline{r}} = h(q, p) + h(q, r),$$

$$h(q \oplus p, r) = S_{(\overline{q \oplus p}) \times r} = S_{\overline{q} \times r \oplus \overline{p} \times r} = S_{\overline{q} \times r} + S_{\overline{p} \times r} = h(q, r) + h(p, r),$$

$$h(\lambda \odot q, p) = S_{(\lambda \odot q) \times \overline{p}} = S_{\lambda \odot (q \times \overline{p})} = \lambda S_{q \times \overline{p}} = \lambda h(q, p),$$

iii. Pozitif tanımlılık özelliği: $\forall q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$h(q, q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0 \text{ ve } h(q, q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

sağlanır. ■

Not 2.4. Reel değerli kuaterniyon iç çarpımı, $\forall q = a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3$ ve $p = a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$h(q, p) = \frac{1}{2} [q \times \overline{p} \oplus p \times \overline{q}] \quad (2.34)$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 2.32 ile verilen kuaterniyon çarpımı ve Tanım 2.33 ile verilen eşlenik işleminin kullanılması ile,

$$\begin{aligned} q \times \overline{p} &= (a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3) \times (a_2\vec{e}_0 - b_2\vec{e}_1 - c_2\vec{e}_2 - d_2\vec{e}_3) \\ &= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (-a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2)\vec{e}_1 \\ &\quad + (-a_1c_2 + c_1a_2 - d_1b_2 + b_1d_2)\vec{e}_2 + (-a_1d_2 + d_1a_2 - b_1c_2 + c_1b_2)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p \times \overline{q} &= (a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3) \times (a_1\vec{e}_0 - b_1\vec{e}_1 - c_1\vec{e}_2 - d_1\vec{e}_3) \\ &= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (a_1b_2 - b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\vec{e}_1 \\ &\quad + (a_1c_2 - c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)\vec{e}_2 + (a_1d_2 - d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

hesaplandığında

$$h(q, p) = \frac{1}{2} [q \times \overline{p} \oplus p \times \overline{q}] = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 \quad (2.35)$$

reel sayısı elde edilir.

Tanım 2.34. h fonksiyonu $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi üzerinde reel değerli iç çarpım fonksiyonu olup $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır [20].

Tanım 2.35. $\forall q, p \in \mathbb{H}$ kuaterniyonları için $h(q, p) = 0$ ise q ve p kuaterniyonlarına **h -ortogonaldir** denir [8, 9].

Teorem 2.20. $\mathbb{H}$ uzayında reel değerli iç çarpım, $\forall q = a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3$ ve $p = a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$h(q \times p, q) = h(q, p \times q) = 0$$

özellikliğini sağlar.

İspat. $\forall q = a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3, p = a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3, r = a_3\vec{e}_0 + b_3\vec{e}_1 + c_3\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$h(q \times p, r) = c_1d_2b_3 - d_1c_2b_3 + b_2d_1c_3 - b_1d_2c_3 + b_1c_2d_3 - c_1b_2d_3$$

şeklinde hesaplanır ve $r = q$ alınırsa,

$$h(q \times p, q) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$h(q, p \times r) = c_2d_3b_1 - d_2b_1c_3 + b_3d_2c_1 - b_2d_3c_1 + b_2c_3d_1 - b_3c_2d_1$$

şeklinde hesaplandığından $r = q$ alınırsa,

$$h(q, p \times q) = 0$$

elde edilir. ■

2.3.1.2 Kuaterniyonlarda Kuaterniyon Değerli İç Çarpım

Teorem 2.21. $\forall q, p \in \mathbb{H}$ için,

$$\langle q, p \rangle_{\mathbb{H}} = q \times \bar{p} \tag{2.36}$$

şeklinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur.

İspat.

i. Simetri özelliği: $\forall q, p \in \mathbb{H}$ için, Tanım 2.18 ile verilen ii. ve iii. özellikleri kullanılırsa,

$$\langle q, p \rangle_{\mathbb{H}} = q \times \bar{p} = \overline{(q \times \bar{p})} = \overline{(p \times q)} = \overline{\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}}},$$

ii. Bilineerlik özelliği: $\forall q, p, r \in \mathbb{H}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{H}$ için,

$$\begin{aligned}\langle q, p \oplus r \rangle_{\mathbb{H}} &= q \times \overline{(p \oplus r)} = q \times (\bar{p} \oplus \bar{r}) = (q \times \bar{p}) \oplus (q \times \bar{r}) = \langle q, p \rangle_{\mathbb{H}} \oplus \langle q, r \rangle_{\mathbb{H}}, \\ \langle q \oplus p, r \rangle_{\mathbb{H}} &= \langle q, r \rangle_{\mathbb{H}} \oplus \langle p, r \rangle_{\mathbb{H}}, \\ \langle \lambda \times q, p \rangle_{\mathbb{H}} &= (\lambda \times q) \times \bar{p} = \lambda \times (q \times \bar{p}) = \lambda \times \langle q, p \rangle_{\mathbb{H}}, \\ \langle q, \lambda \times p \rangle_{\mathbb{H}} &= q \times \overline{(\lambda \times p)} = q \times (\bar{p} \times \bar{\lambda}) = (q \times \bar{p}) \times \bar{\lambda} = \langle q, p \rangle_{\mathbb{H}} \times \bar{\lambda},\end{aligned}$$

iii. Pozitif tanımlılık özelliği: $\forall q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$\langle q, q \rangle_{\mathbb{H}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0 \text{ ve } \langle q, q \rangle_{\mathbb{H}} = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

sağlanır. ■

Not 2.5. $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ -modül) üzerindeki kuaterniyon değerli kuaterniyon iç çarpımı, $\forall q = a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3, p = a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$\langle q, p \rangle_{\mathbb{H}} = q \times \bar{p} \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 2.32 ile verilen kuaterniyon çarpımı ve Tanım 2.33 ile verilen eşlenik işleminin kullanılması ile,

$$\begin{aligned}\langle q, p \rangle_{\mathbb{H}} = q \times \bar{p} &= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (-a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2)\vec{e}_1 \\ &\quad + (-a_1c_2 + c_1a_2 - d_1b_2 + b_1d_2)\vec{e}_2 + (-a_1d_2 + d_1a_2 - b_1c_2 + c_1b_2)\vec{e}_3\end{aligned}$$

kuaterniyonu elde edilir.

Sonuç 2.19. $\langle, \rangle_{\mathbb{H}}$ fonksiyonu $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi üzerinde kuaterniyon değerli iç çarpım fonksiyonu olup $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

2.3.2 Kuaterniyonun Normu

Tanım 2.36. Bir reel kuaterniyonun normu, $\forall q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$\begin{aligned}\|.\| : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\rightarrow \|q\| = \sqrt{h(q, q)} = \sqrt{\langle q, q \rangle_{\mathbb{H}}} = \sqrt{q \times \bar{q}}\end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ise

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \tag{2.39}$$

pozitif reel sayısını verir [3, 5, 10].

Teorem 2.22. Norm dönüşümü, $\forall q, p \in \mathbb{H}$ için,

- i. $\|q \times p\| = \|q\| \|p\| = \|p \times q\|$
- ii. $\|q \oplus p\| \leq \|q\| + \|p\|$
- iii. $\|q\|^2 + \|p\|^2 = \frac{1}{2} (\|q \oplus p\|^2 + \|q \oplus (-p)\|^2)$
- iv. $\|q\| = \|\bar{q}\|$
- v. $\|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0$

özelliklerini sağlar [3, 5, 10].

İspat.

ii. $\forall q = a_1 \vec{e}_0 + b_1 \vec{e}_1 + c_1 \vec{e}_2 + d_1 \vec{e}_3, p = a_2 \vec{e}_0 + b_2 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + d_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$\begin{aligned} \|q \oplus p\|^2 &= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2 + (d_1 + d_2)^2 \\ &= \|q\|^2 + \|p\|^2 + 2S_{q \times \bar{p}} \end{aligned}$$

$$(\|q\| + \|p\|)^2 = (\|q\| + \|\bar{p}\|)^2 = \|q\|^2 + \|\bar{p}\|^2 + 2\|q \times \bar{p}\|$$

eşitlikleri ve $\|q \times \bar{p}\| \geq S_{q \times \bar{p}}$ eşitsizliğinden istenen elde edilir. ■

Tanım 2.37. q_0 reel kuaterniyonu için $\|q_0\| = 1$ ise q_0 kuaterniyonuna **birim reel kuaterniyon** denir ve herhangi bir q kuaterniyonu için $q = \|q\| q_0$ şeklinde tanımlanır [3].

2.3.3 Kuaterniyonun Tersine ve Bölme

Tanım 2.38. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde $(\cdot)^{-1} : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow \mathbb{H} - \{0\}$ dönüşümü ile verilen bir kuaterniyonun tersi işlemi, $\forall q \in \mathbb{H}$ için,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.23. Ters fonksiyonu, $\forall q, p \in \mathbb{H}$ için,

- i. $\|q^{-1}\| = \|q\|^{-1}$
- ii. $q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1_{\mathbb{H}}$
- iii. $(p \times q)^{-1} = q^{-1} \times p^{-1}, p \times q \neq 0$

özelliklerini sağlar [3].

Sonuç 2.20. $\forall q \in \mathbb{H} (q \neq 0)$ kuaterniyonunun tersi $q^{-1} = \|q\|^{-2} \odot \bar{q}$ ile tanımlanabileceğinden $\mathbb{H}$ cebiri bir bölüm cebiridir [3, 6, 10].

Tanım 2.39. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall p \in \mathbb{H}$ kuaterniyonunu $\forall q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonuna bölmek için p kuaterniyonunu q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından bu çarpma iki türdür: $r_1 = p \times q^{-1}$ kuaterniyonuna **p kuaterniyonunun q ile sağdan bölümü**, $r_2 = q^{-1} \times p$ kuaterniyonuna **p kuaterniyonunun q ile soldan bölümü** denir.

Not 2.6. $\forall q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{H}$ için, eşlenik, norm ve invers işlemleri ile

- $\overline{(q_1 \oplus q_2 \oplus \dots \oplus q_n)} = \bar{q}_1 \oplus \bar{q}_2 \oplus \dots \oplus \bar{q}_n$
- $\overline{(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n)} = \bar{q}_n \times \bar{q}_{n-1} \times \dots \times \bar{q}_1$
- $\|q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n\| = \|q_1\| \|q_2\| \dots \|q_n\|$
- $(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n)^{-1} = q_n^{-1} \times q_{n-1}^{-1} \times \dots \times q_1^{-1}$

bağıntıları elde edilir [3].

2.3.4 $\mathbb{H}_p$ Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 2.40. $\mathbb{H}_p$ uzayının standart bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olmak üzere, $\forall \mathbf{q} = b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3$, $\mathbf{p} = b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ için,

$$\begin{aligned} \wedge_{\mathbb{H}_p} : \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p &\rightarrow \mathbb{H}_p \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\rightarrow \mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p} \end{aligned}$$

işlemi iki uzaysal kuaterniyonun vektörel çarpımı işlemidir ve

$$\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p} = (c_1d_2 - c_2d_1)\vec{e}_1 + (b_2d_1 - b_1d_2)\vec{e}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{e}_3 \quad (2.41)$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda, $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p}$ uzaysal kuaterniyonlarının vektörel çarpımı,

$$\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

şeklindeki sanal determinant ile de hesaplanabilir [6].

Teorem 2.24. Vektörel çarpım işlemi, $\forall \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}_p$,

- i. $\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p} = -\mathbf{p} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{q}$
- ii. $\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\mathbf{p} \oplus \mathbf{r}) = (\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p}) \oplus (\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{r})$
- iii. $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $(\lambda \odot \mathbf{q}) \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p} = \mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\lambda \odot \mathbf{p}) = \lambda \odot (\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p})$
- iv. $\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\mathbf{p} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{r}) + \mathbf{p} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\mathbf{r} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{q}) + \mathbf{r} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p}) = 0_{\mathbb{H}_p}$
- v. $\lambda \in \mathbb{H}_p$ için, $b_k \lambda_1 + c_k \lambda_2 + d_k \lambda_3 = 0$ ($1 \leq k \leq 2$) olmak üzere,

$$[(\mathbf{q} \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p}] \oplus [\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\mathbf{p} \times \lambda)] = (\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p}) \times \lambda$$

özelliklerini sağlar.

İspat.

v. $\forall \mathbf{q} = b_1 \vec{e}_1 + c_1 \vec{e}_2 + d_1 \vec{e}_3$, $\mathbf{p} = b_2 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + d_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ ve $\lambda = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \lambda &= -(b_1 \lambda_1 + c_1 \lambda_2 + d_1 \lambda_3) \vec{e}_0 + (c_1 \lambda_3 - \lambda_2 d_1) \vec{e}_1 \\ &\quad + (\lambda_1 d_1 - b_1 \lambda_3) \vec{e}_2 + (b_1 \lambda_2 - \lambda_1 c_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

bulunur. Ve, $b_1 \lambda_1 + c_1 \lambda_2 + d_1 \lambda_3 = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p} &= (\lambda_1 d_1 d_2 - b_1 \lambda_3 d_2 - c_2 b_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1 c_1) \vec{e}_1 \\ &\quad + (b_2 b_1 \lambda_2 - b_2 \lambda_1 c_1 - c_1 \lambda_3 d_2 + \lambda_2 d_1 d_2) \vec{e}_2 \\ &\quad + (c_1 \lambda_3 c_2 - \lambda_2 d_1 c_2 - b_2 \lambda_1 d_1 + b_2 b_1 \lambda_3) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \times \lambda &= -(b_2 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + d_2 \lambda_3) \vec{e}_0 + (c_2 \lambda_3 - \lambda_2 d_2) \vec{e}_1 \\ &\quad + (\lambda_1 d_2 - b_2 \lambda_3) \vec{e}_2 + (b_2 \lambda_2 - \lambda_1 c_2) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $b_2 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + d_2 \lambda_3 = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\mathbf{p} \times \lambda) &= (c_1 b_2 \lambda_2 - c_1 \lambda_1 c_2 - \lambda_1 d_2 d_1 + b_2 \lambda_3 d_1) \vec{e}_1 \\ &\quad + (c_2 \lambda_3 d_1 - \lambda_2 d_2 d_1 - b_1 b_2 \lambda_2 + b_1 \lambda_1 c_2) \vec{e}_2 \\ &\quad + (b_1 \lambda_1 d_2 - b_1 b_2 \lambda_3 - c_2 \lambda_3 c_1 + \lambda_2 d_2 c_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$\begin{aligned} [(\mathbf{q} \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p}] \oplus [\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} (\mathbf{p} \times \lambda)] &= (c_1 b_2 \lambda_2 - b_1 \lambda_3 d_2 - c_2 b_1 \lambda_2 + b_2 \lambda_3 d_1) \vec{e}_1 \\ &+ (c_2 \lambda_3 d_1 - b_2 \lambda_1 c_1 - c_1 \lambda_3 d_2 + b_1 \lambda_1 c_2) \vec{e}_2 \\ &+ (b_1 \lambda_1 d_2 - \lambda_2 d_1 c_2 - b_2 \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 c_1) \vec{e}_3 \\ &= (\mathbf{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \mathbf{p}) \times \lambda \end{aligned}$$

bulunur. ■

2.3.5 Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

Bir $q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3$ kuaterniyonu,

$$q = \|q\| \frac{a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3}{\|q\|} = \|q\| \left[\frac{a}{\|q\|} \vec{e}_0 + \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\|q\|} \left(\frac{b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right) \right]$$

olarak yazıldığında q ile reel eksen arasındaki açı θ olmak üzere, $\cos \theta = \frac{a}{\|q\|}$ ve $\sin \theta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\|q\|}$ olarak alınırsa, q reel kuaterniyonunun kutupsal gösterimi, $\vec{e}_0 = 1$ için,

$$q = \|q\| \left(\cos \theta + \left(\frac{b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right) \sin \theta \right)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\vec{n} = \frac{b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}$$

yazılırsa, q birim reel kuaterniyonunun kutupsal gösterimi,

$$q = \cos \theta + \vec{n} \sin \theta \tag{2.42}$$

olarak tanımlanır [3, 6, 10].

Not 2.7. Burada, $\vec{n}$ bir uzaysal birim kuaterniyondur. Kompleks sayılarda i birimi dönmeyi sağladığı gibi, $\vec{n}$ birimi de kuaterniyonlarda dönmeye karşılık gelir. $\vec{n}$ vektörüne dik bir P düzlemine ait vektörü q ile soldan (sağdan) çarpmak demek, vektörü, $\vec{n}$ etrafında pozitif (negatif) yönde θ kadar döndürmek demektir.

2.3.6 Reel Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü ve Euler Formülü

Tanım 2.41. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyon cebirinde tüm birim reel kuaterniyonların kümesi $\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \|q\| = 1\}$ ve $\mathbb{H}$ reel kuaterniyon cebirinde tüm birim uzaysal reel kuaterniyonların kümesi $\mathbb{S}^2 = \{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{n}\| = 1, \vec{n} = -\vec{n}\}$ olarak tanımlanır [7, 11].

Teorem 2.25. $\mathbb{S}^3$ ve $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesinin birer alt kümesidir. Ayrıca, $\mathbb{S}^3$ kuaterniyon çarpımı altında bir gruptur [7, 11].

Teorem 2.26. $\mathbb{S}^3$ grubu, $SU(2) = \{A \in \mathbb{C}_2^2 \mid \det A = 1\}$ üniter matrislerin grubuna izomorftur [7, 11].

Teorem 2.27. $\cos \alpha + \vec{n} \sin \alpha$ ve $\cos \beta + \vec{n} \sin \beta$ birim reel kuaterniyonlar, $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ olmak üzere,

$$(\cos \alpha + \vec{n} \sin \alpha) \times (\cos \beta + \vec{n} \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \vec{n} \sin(\alpha + \beta) \quad (2.43)$$

eşitliği geçerlidir [7, 11].

İspat. $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ için $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$ ve $\vec{n} \wedge \vec{n} = 0$ olduğundan $\vec{n}^2 = \vec{n} \times \vec{n} = -1$ dir.

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + \vec{n} \sin \alpha) \times (\cos \beta + \vec{n} \sin \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \vec{n}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) + (\vec{n} \times \vec{n}) \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \vec{n}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos(\alpha + \beta) + \vec{n} \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.28. *De Moivre formülü* $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ ve $q = \cos \theta + \vec{n} \sin \theta \in \mathbb{S}^3$ iken, reel kuaterniyonlar için ,

$$q^k = (\cos \theta + \vec{n} \sin \theta)^k = \cos(k\theta) + \vec{n} \sin(k\theta) \quad (2.44)$$

sağlanır [7, 11].

Teorem 2.29. $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ için $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$, $\vec{n} \wedge \vec{n} = 0$ ve $\vec{n}^2 = \vec{n} \times \vec{n} = -1$ iken, $\vec{n}^3 = -\vec{n}$, $\vec{n}^4 = 1$, ... yazılabilir. Reel kuaterniyonlar için **Euler formülü**, herhangi bir θ açısı için,

$$e^{\vec{n}\theta} = \cos \theta + \vec{n} \sin \theta \quad (2.45)$$

olarak elde edilir [6, 7, 11].

İspat.

$$\begin{aligned}
e^{\vec{n}\theta} &= 1 + \vec{n}\theta + \frac{(\vec{n}\theta)^2}{2!} + \frac{(\vec{n}\theta)^3}{3!} + \frac{(\vec{n}\theta)^4}{4!} + \frac{(\vec{n}\theta)^5}{5!} + \dots \\
&= 1 + \vec{n}\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \vec{n}\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \vec{n}\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + \vec{n}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)
\end{aligned}$$

eşitliği için sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının Maclaurin açılımları göz önüne alındığında,

$$e^{\vec{n}\theta} = \cos \theta + \vec{n} \sin \theta$$

elde edilir. ■

2.3.7 Reel Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimi

Kuaterniyonlar cebirinde değişme özelliği olmaması sebebiyle hem sol çarpım hem de sağ çarpım yardımıyla iki farklı reel matris gösterimi ortaya çıkar.

Tanım 2.42. Her $q, x \in \mathbb{H}$ için,

$$\begin{aligned}
L_q : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\
x &\rightarrow L_q(x) = q \times x
\end{aligned} \tag{2.46}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm sol çarpım,

$$\begin{aligned}
R_q : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\
x &\rightarrow R_q(x) = x \times q
\end{aligned} \tag{2.47}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm sağ çarpım olarak tanımlanır.

Teorem 2.30. L_q ve R_q dönüşümleri lineer dönüşümlerdir.

İspat.

i. L_q dönüşümü lineerdir: $\forall q, p, r \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
L_q(p \oplus r) &= q \times (p \oplus r) \\
&= (q \times p) \oplus (q \times r) \\
&= L_q(p) \oplus L_q(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_q(\lambda \odot p) &= q \times (\lambda \odot p) \\
&= \lambda \odot (q \times p) \\
&= \lambda \odot L_q(p)
\end{aligned}$$

ii. R_q dönüşümü lineerdir: $\forall q, p, r \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
R_q(p \oplus r) &= (p \oplus r) \times q \\
&= (p \times q) \oplus (r \times q) \\
&= R_q(p) \oplus R_q(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_q(\lambda \odot p) &= (\lambda \odot p) \times q \\
&= \lambda \odot (p \times q) \\
&= \lambda \odot R_q(p)
\end{aligned}$$

■

Sonuç 2.21. L_q ve R_q lineer dönüşümlerine 4×4 tipinde kare matrisler karşılık gelir [9, 11].

İspat. $q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ ve $\mathbb{H} = Sp\{\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
L_q(1) &= q \times 1 = a + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \\
L_q(\vec{e}_1) &= q \times \vec{e}_1 = -b + a\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 - c\vec{e}_3 \\
L_q(\vec{e}_2) &= q \times \vec{e}_2 = -c - d\vec{e}_1 + a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3 \\
L_q(\vec{e}_3) &= q \times \vec{e}_3 = -d + c\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 + a\vec{e}_3
\end{aligned}$$

değerleri bulunarak matris formunda,

$$A_{L_q} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

olarak yazılır.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} R_q(1) &= 1 \times q = a + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \\ R_q(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 \times q = -b + a\vec{e}_1 - d\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \\ R_q(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 \times q = -c + d\vec{e}_1 + a\vec{e}_2 - b\vec{e}_3 \\ R_q(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 \times q = -d - c\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + a\vec{e}_3 \end{aligned}$$

değerleri bulunarak matris formunda

$$A_{R_q} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

olarak yazılır. ■

Not 2.8. Eğer $\|q\| = 1$ ise, $A_{L_q} [A_{L_q}]^T = I_4$, $A_{R_q} [A_{R_q}]^T = I_4$ ve $\det(A_{L_q}) = \|q\|^2$ olduğundan $\det(A_{R_q}) = \|q\|^2 = 1$ olduğu görülür. Yani, A_{L_q} ve A_{R_q} matrisleri ortogonaldır [9, 11].

2.3.8 Reel Kuaterniyonların Kompleks Yapısı

Bu kısımda, birim elemanlarla olan işlemler Tanım 2.29 ile verilen $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dış işlemi yardımıyla yapılmıştır.

Tanım 2.43. Reel kuaterniyonlar Cayley-Dickson gösterimi kullanılarak kompleks sayıların sıralı ikilisi şeklinde, $\forall q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ için,

$$q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 = (a + b\vec{e}_1) + (c + d\vec{e}_1)\vec{e}_2 \quad (2.50)$$

olarak, ayrıca

$$q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 = (a + b\vec{e}_1) + \vec{e}_2(c - d\vec{e}_1) \quad (2.51)$$

şeklinde iki türlü ifade edilebilir.

Aynı zamanda, $\forall z = a + b\vec{e}_1, w = c + d\vec{e}_1, t = c - d\vec{e}_1 \in \mathbb{C}$ için,

$$q = z + w\vec{e}_2 \quad (2.52)$$

ve

$$q = z + \vec{e}_2 t \quad (2.53)$$

olarak yazılabilir [5, 8, 12].

Tanım 2.44. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde $\odot : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ kompleks skaler ile çarpma işlemi, (2.52) eşitliğindeki gösterim dikkate alınırsa, $\forall q = z + w\vec{e}_2 \in \mathbb{H}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\lambda \odot q = \lambda \odot (z + w\vec{e}_2) = (\lambda z) + (\lambda w)\vec{e}_2 \quad (2.54)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.31. Skaler ile çarpma işlemi, $\forall q, p \in \mathbb{H}$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için,

- i. $\lambda \odot (q \oplus p) = (\lambda \odot q) \oplus (\lambda \odot p)$
- ii. $(\lambda + \mu) \odot q = (\lambda \odot q) \oplus (\mu \odot q)$
- iii. $(\lambda \cdot \mu) \odot q = \lambda \odot (\mu \odot q)$
- iv. $1 \odot q = q$

özelliklerini sağlar.

Sonuç 2.22. $(\mathbb{H}, \oplus)$ Abel grubu ve $\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır, $\mathbb{H} = \text{Sp}\{\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_2\}$ olduğundan $\text{boy}\mathbb{H} = 2$ elde edilir. Yani, reel kuaterniyonların uzayı kompleks sayılar cismi üzerinde 2-boyutlu bir vektör uzayıdır [3, 8, 9, 12].

Sonuç 2.23. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların uzayında Tanım 2.32 ile verilen kuaterniyon çarpımının kompleks sayılar cinsinden yazılışı, (2.52) eşitliğindeki yazılışa göre, $\forall q = (a_1 + b_1\vec{e}_1) + (c_1 + d_1\vec{e}_1)\vec{e}_2 = z_1 + w_1\vec{e}_2$, $p = (a_2 + b_2\vec{e}_1) + (c_2 + d_2\vec{e}_1)\vec{e}_2 = z_2 + w_2\vec{e}_2 \in \mathbb{H}$ için,

$$q \times p = (z_1 + w_1\vec{e}_2) \times (z_2 + w_2\vec{e}_2) = (z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2)\vec{e}_2 \quad (2.55)$$

olarak, ve (2.53) eşitliğindeki yazılışa göre, $\forall q = (a_1 + b_1\vec{e}_1) + \vec{e}_2(c_1 - d_1\vec{e}_1) = z_1 + \vec{e}_2 t_1$, $p = (a_2 + b_2\vec{e}_1) + \vec{e}_2(c_2 - d_2\vec{e}_1) = z_2 + \vec{e}_2 t_2 \in \mathbb{H}$ için,

$$q \times p = (z_1 + \vec{e}_2 t_1) \times (z_2 + \vec{e}_2 t_2) = (z_1 z_2 - \bar{t}_1 t_2) + \vec{e}_2(\bar{z}_1 t_2 + t_1 z_2) \quad (2.56)$$

olarak ifade edilir.

İspat. $\forall q = a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3, p = a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ olmak üzere, kuaterniyonlarda çarpma işleminin sonucu, $q = z_1 + w_1\vec{e}_2, p = z_2 + w_2\vec{e}_2 \in \mathbb{H}$ elemanları göz önüne alınarak uygun şekilde gruplandırma yapılırsa,

$$\begin{aligned}
q \times p &= (a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3) \times (a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)\vec{e}_0 + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - d_1c_2)\vec{e}_1 \\
&\quad + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)\vec{e}_2 + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - c_1b_2)\vec{e}_3 \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{e}_1 - (c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)\vec{e}_1 \\
&\quad + [(a_1c_2 - b_1d_2) + (a_1d_2 + b_1c_2)\vec{e}_1 + (a_2c_1 + d_1b_2) + (a_2d_1 - c_1b_2)\vec{e}_1]\vec{e}_2 \\
&= (z_1z_2 - w_1\bar{w}_2) + (z_1w_2 + w_1\bar{z}_2)\vec{e}_2
\end{aligned}$$

$q = z_1 + \vec{e}_2t_1, p = z_2 + \vec{e}_2t_2 \in \mathbb{H}$ elemanları göz önüne alınarak uygun şekilde gruplandırma yapılırsa,

$$\begin{aligned}
q \times p &= (a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3) \times (a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)\vec{e}_0 + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - d_1c_2)\vec{e}_1 \\
&\quad + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)\vec{e}_2 + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - c_1b_2)\vec{e}_3 \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{e}_1 - (c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)\vec{e}_1 \\
&\quad + \vec{e}_2[(a_1c_2 - b_1d_2) + (-a_1d_2 - b_1c_2)\vec{e}_1 + (a_2c_1 + d_1b_2) + (-a_2d_1 + c_1b_2)\vec{e}_1] \\
&= (z_1z_2 - \bar{t}_1t_2) + (\bar{z}_1t_2 + t_1z_2)\vec{e}_2
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

2.3.9 Reel Kuaterniyonların Kompleks Matris Gösterimi

Kuaterniyonlar cebirinde değişme özelliği olmaması sebebiyle (2.52) ve (2.53) eşitliklerinde ifade edilen her iki yazılış için de hem sol çarpım hem de sağ çarpım yardımıyla iki farklı kompleks matris gösterimi ortaya çıkar.

Tanım 2.45. Her $q, x \in \mathbb{H}$ için, $L_q(x) = q \times x$ şeklinde tanımlanan dönüşüm sol çarpım, $R_q(x) = x \times q$ şeklinde tanımlanan dönüşüm sağ çarpım olarak tanımlanır.

Teorem 2.32. L_q ve R_q dönüşümleri lineer dönüşümlerdir.

İspat.

i. L_q dönüşümü lineerdir: İspatta tercihen (2.52) eşitliğindeki gösterimi kullanalım ve ihtiyaç duyulan çarpım işlemi için (2.55) eşitliğinden yararlanalım. $\forall q = z_1 + w_1 \vec{e}_2$, $p = z_2 + w_2 \vec{e}_2$, $r = z_3 + w_3 \vec{e}_2 \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
 L_q(p \oplus r) &= (z_1 + w_1 \vec{e}_2) \times [(z_2 + w_2 \vec{e}_2) \oplus (z_3 + w_3 \vec{e}_2)] \\
 &= (z_1 + w_1 \vec{e}_2) \times [(z_2 + z_3) + (w_2 + w_3) \vec{e}_2] \\
 &= [z_1(z_2 + z_3) - w_1 \overline{(w_2 + w_3)}] + [z_1(w_2 + w_3) + w_1 \overline{(z_2 + z_3)}] \vec{e}_2 \\
 &= [(z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}) + (z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}) \vec{e}_2] \oplus [(z_1 z_3 - w_1 \overline{w_3}) + (z_1 w_3 + w_1 \overline{z_3}) \vec{e}_2] \\
 &= (q \times p) \oplus (q \times r) \\
 &= L_q(p) \oplus L_q(r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_q(\lambda \odot p) &= (z_1 + w_1 \vec{e}_2) \times [\lambda \odot (z_2 + w_2 \vec{e}_2)] \\
 &= (z_1 + w_1 \vec{e}_2) \times (\lambda z_2 + \lambda w_2 \vec{e}_2) \\
 &= [\lambda(z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2})] + [\lambda(z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2})] \vec{e}_2 \\
 &= \lambda \odot [(z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}) + (z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}) \vec{e}_2] \\
 &= \lambda \odot L_q(p)
 \end{aligned}$$

ii. R_q dönüşümü lineerdir: İspatta tercihen (2.53) eşitliğindeki gösterimi kullanalım ve ihtiyaç duyulan çarpım işlemi için (2.56) eşitliğinden yararlanalım. $\forall q = z_1 + \vec{e}_2 t_1$, $p = z_2 + \vec{e}_2 t_2$, $r = z_3 + \vec{e}_2 t_3 \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
 R_q(p \oplus r) &= [(z_2 + \vec{e}_2 t_2) \oplus (z_3 + \vec{e}_2 t_3)] \times (z_1 + \vec{e}_2 t_1) \\
 &= [(z_2 + z_3) + \vec{e}_2(t_2 + t_3)] \times (z_1 + \vec{e}_2 t_1) \\
 &= [(z_2 + z_3)z_1 - \overline{(t_2 + t_3)}t_1] + \vec{e}_2 [(z_2 + z_3)t_1 + (t_2 + t_3)z_1] \\
 &= [(z_2 z_1 - \overline{t_2} t_1 + \vec{e}_2(\overline{z_2} t_1 + t_2 z_1))] \oplus [(z_3 z_1 - \overline{t_3} t_1) + \vec{e}_2(\overline{z_3} t_1 + t_3 z_1)] \\
 &= (p \times q) \oplus (r \times q) \\
 &= R_q(p) \oplus R_q(r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_q(\lambda \odot p) &= [\lambda \odot (z_2 + \vec{e}_2 t_2)] \times (z_1 + \vec{e}_2 t_1) \\
 &= (\lambda z_2 + \vec{e}_2 \lambda t_2) \times (z_1 + \vec{e}_2 t_1) \\
 &= [\lambda(z_2 z_1 - \overline{t_2} t_1)] + \vec{e}_2 [\lambda(\overline{z_2} t_1 + z_1 t_2)] \\
 &= \lambda \odot [(z_2 z_1 - \overline{t_2} t_1) + \vec{e}_2(\overline{z_2} t_1 + z_1 t_2)] \\
 &= \lambda \odot R_q(p)
 \end{aligned}$$

■

Sonuç 2.24. L_q ve R_q lineer dönüşümlerine 2×2 tipinde kare matrisler karşılık gelir [5, 11].

İspat. L_q ve R_q lineer dönüşümlerine karşılık gelen matrisleri (2.52) ve (2.53) eşitliklerinde ifade edilen her iki yazılış için de bulalım: $q = z_1 + w_1 \vec{e}_2 \in \mathbb{H}$, $z_1, w_1 \in \mathbb{C}$ için, $\mathbb{H} = Sp\{1, \vec{e}_2\}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} L_q(1) &= q \times 1 = (z_1 + w_1 \vec{e}_2) \times 1 = z_1 + w_1 \vec{e}_2 \\ L_q(\vec{e}_2) &= q \times \vec{e}_2 = (z_1 + w_1 \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 = z_1 \vec{e}_2 + w_1 \vec{e}_2 \vec{e}_2 = z_1 \vec{e}_2 - w_1 = -w_1 + z_1 \vec{e}_2 \end{aligned}$$

değerleri bulunarak matris formunda,

$$A_{L_q} = \begin{bmatrix} z_1 & -w_1 \\ w_1 & z_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2 \quad (2.57)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} R_q(1) &= 1 \times q = 1 \times (z_1 + w_1 \vec{e}_2) = z_1 + w_1 \vec{e}_2 \\ R_q(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 \times q = \vec{e}_2 \times (z_1 + w_1 \vec{e}_2) = \vec{e}_2 z_1 + \vec{e}_2 w_1 \vec{e}_2 = \bar{z}_1 \vec{e}_2 + \bar{w}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_2 = -\bar{w}_1 + \bar{z}_1 \vec{e}_2 \end{aligned}$$

değerleri bulunarak matris formunda,

$$A_{R_q} = \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{w}_1 \\ w_1 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2 \quad (2.58)$$

olarak yazılır. Burada, $\det(A_{R_q}) = z_1 \bar{z}_1 + w_1 \bar{w}_1 = \|q\|^2$ olduğu görülür.

Diğer türlü yazılışta, $q = (a + b\vec{e}_1) + \vec{e}_2(c - d\vec{e}_1) = z_1 + \vec{e}_2 t_1 \in \mathbb{H}$, $z_1, t_1 \in \mathbb{C}$ için, $\mathbb{H} = Sp\{1, \vec{e}_2\}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} L_q(1) &= q \times 1 = (z_1 + \vec{e}_2 t_1) \times 1 = z_1 + \vec{e}_2 t_1 \\ L_q(\vec{e}_2) &= q \times \vec{e}_2 = (z_1 + \vec{e}_2 t_1) \times \vec{e}_2 = z_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 t_1 \vec{e}_2 = z_1 \vec{e}_2 + t_1 \vec{e}_2 \vec{e}_2 = -\bar{t}_1 + \vec{e}_2 \bar{z}_1 \end{aligned}$$

değerleri bulunarak matris formunda,

$$A_{L_q} = \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{t}_1 \\ t_1 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2 \quad (2.59)$$

olarak yazılır. Burada, $\det(A_{L_q}) = z_1 \bar{z}_1 + t_1 \bar{t}_1 = \|q\|^2$ olduğu görülür.

Benzer şekilde,

$$R_q(1) = 1 \times q = 1 \times (z_1 + \vec{e}_2 t_1) = z_1 + \vec{e}_2 t_1$$

$$R_q(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \times q = \vec{e}_2 \times (z_1 + \vec{e}_2 t_1) = \vec{e}_2 z_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_2 t_1 = \vec{e}_2 z_1 - t_1 = -t_1 + \vec{e}_2 z_1$$

değerleri bulunarak matris formunda,

$$A_{R_q} = \begin{bmatrix} z_1 & -t_1 \\ t_1 & z_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2 \quad (2.60)$$

olarak yazılır. ■

2.4 Kuaterniyon Uzayında Fonksiyonlar Teorisi

Bu bölümde, reel değişkenli kuaterniyon değerli ve kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlarla ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

2.4.1 Reel Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar

$\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi ve $t \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir reel kuaterniyonun kutupsal gösterimini de göz önüne alarak iki şekilde kuaterniyon değerli fonksiyon tanımlı vereceğiz.

Tanım 2.46. $a, b, c, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $q : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ dönüşümü ile $q(t) = a(t)\vec{e}_0 + b(t)\vec{e}_1 + c(t)\vec{e}_2 + d(t)\vec{e}_3$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyon** denir.

Tanım 2.47. Bir birim reel kuaterniyonun kutupsal gösterimi $q = \cos \theta + \vec{n} \sin \theta = e^{\vec{n}\theta}$ olmak üzere, kuaterniyon t parametresinin bir fonksiyonu ise θ ve $\vec{n}$ uzaysal birim kuaterniyonları da t parametresine bağlıdır ve reel değişkenli kuaterniyon değerli bir fonksiyon,

$$q(t) = \cos(\theta(t)) + \vec{n}(t) \sin(\theta(t)) \quad (2.61)$$

ile de tanımlanır [4, 11].

2.4.1.1 Reel Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlarda Limit

Literatürde, reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar için türev konusu dahil bir çok inceleme yapılmıştır. Bu fonksiyonlarla ilgili limit ve süreklilik kavramlarının açıklamaları net olmayıp literatürdeki eksikliğe istinaden bu bölümde öncelikle limit ve süreklilik ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş, sonrasında türev konusu kaynaklardan da yararlanarak işlenmiştir.

Kuaterniyon değerli fonksiyonlarda limit tanımı, değer kümesinde Tanım 2.36 ile verilen $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ kuaterniyon uzayındaki norm dikkate alınarak tanımlanacaktır. Kuaterniyon değerli fonksiyonlar için verilen analiz kavramları reel değerli fonksiyonlardan yararlanarak yapılır.

Tanım 2.48. $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyon olsun. q fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı, t_0 noktasında tanımlı olması gerekmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$\forall \varepsilon > 0$ için, $0 < |t - t_0| < \delta$ iken $\|q(t) - L\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa “ q fonksiyonunun t değeri t_0 değerine yaklaşırken limiti L dir” denir ve sembolik olarak, $\lim_{t \rightarrow t_0} q(t) = L$ olarak gösterilir.

Teorem 2.33. $a, b, c, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $q : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ fonksiyonu $q(t) = a(t)\vec{e}_0 + b(t)\vec{e}_1 + c(t)\vec{e}_2 + d(t)\vec{e}_3$ şeklinde tanımlansın. q fonksiyonunun t_0 noktasındaki limitinin $\lim_{t \rightarrow t_0} q(t) = L$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{t \rightarrow t_0} q(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) \right) \vec{e}_0 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} b(t) \right) \vec{e}_1 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \right) \vec{e}_2 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} d(t) \right) \vec{e}_3$ olmasıdır.

Yani, q fonksiyonunun t değeri t_0 değerine yaklaşırken limiti, bileşenlerinin ayrı ayrı limitleri bulunarak hesaplanabilir. Burada, her bir bileşen reel fonksiyonların limitidir.

Teorem 2.34. q ve p reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar, f skaler değerli fonksiyon olmak üzere, $\lim_{t \rightarrow t_0} q(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} p(t)$ ve $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ mevcut olsun. Bu durumda,

- i. $\lim_{t \rightarrow t_0} (q(t) \mp p(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} q(t) \mp \lim_{t \rightarrow t_0} p(t)$
- ii. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)q(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} q(t)$
- iii. $\lim_{t \rightarrow t_0} \langle q(t), p(t) \rangle = \left\langle \lim_{t \rightarrow t_0} q(t), \lim_{t \rightarrow t_0} p(t) \right\rangle$
- iv. $\lim_{t \rightarrow t_0} (q(t) \wedge p(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} q(t) \wedge \lim_{t \rightarrow t_0} p(t)$

eşitlikleri sağlanır.

2.4.1.2 Reel Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlarda Süreklilik

q , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değişkenli kuaterniyon değerli bir fonksiyon olsun. Eğer,

- $q(t_0)$ tanımlı,
- $\lim_{t \rightarrow t_0} q(t)$ mevcut,
- $\lim_{t \rightarrow t_0} q(t) = q(t_0)$

koşulları sağlanıyorsa q fonksiyonu bir $t_0 \in [a, b]$ noktasında süreklidir.

Eğer, q fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ise, q fonksiyonu $[a, b]$ aralığında süreklidir.

Teorem 2.35. q , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değişkenli kuaterniyon değerli bir fonksiyon olsun. $q(t)$ fonksiyonunun bir $t_0 \in [a, b]$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun her bir bileşeninin t_0 noktasında sürekli olmasıdır.

2.4.1.3 Reel Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlarda Türev

$a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevi,

$$a'(t) = \frac{d}{dt}(a(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t_0 + h) - a(t_0)}{h} \quad (2.62)$$

şeklinde tanımlanır. Reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonların türevini, Tanım 2.46 ve Tanım 2.47 ifadelerinden yola çıkarak iki şekilde vereceğiz.

Tanım 2.49. Tanım 2.46 ile $q(t) = a(t)\vec{e}_0 + b(t)\vec{e}_1 + c(t)\vec{e}_2 + d(t)\vec{e}_3$ şeklinde verilen reel değişkenli kuaterniyon değerli $q(t)$ fonksiyonunun $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevi,

$$q'(t) = \frac{d}{dt}(q(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(t_0 + h) - q(t_0)}{h} \quad (2.63)$$

şeklinde tanımlanır [13].

Teorem 2.36. $q(t) = a(t)\vec{e}_0 + b(t)\vec{e}_1 + c(t)\vec{e}_2 + d(t)\vec{e}_3$ şeklinde tanımlanan reel değişkenli kuaterniyon değerli $q(t)$ fonksiyonunun türevi, $a, b, c, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının türevleri yardımıyla, bileşenlerinin ayrı ayrı türevlerinin alınması ve türev fonksiyonunun bileşenleri olarak yazılması ile elde edilir:

$$q'(t) = a'(t)\vec{e}_0 + b'(t)\vec{e}_1 + c'(t)\vec{e}_2 + d'(t)\vec{e}_3.$$

Teorem 2.37. Tanım 2.47 ile $q(t) = \cos(\theta(t)) + \vec{n}(t) \sin(\theta(t))$ şeklinde kutupsal gösterim ile verilen reel değişkenli kuaterniyon değerli q fonksiyonunun türevi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q(t)) &= q'(t) = -\theta'(t) \sin(\theta(t)) + \vec{n}'(t) \sin(\theta(t)) + \vec{n}(t) \theta'(t) \cos(\theta(t)) \\ &= \vec{n}(t) \theta'(t) [\vec{n}(t) \sin(\theta(t)) + \cos(\theta(t))] + \vec{n}'(t) \sin(\theta(t)) \\ &= \vec{n}(t) \theta'(t) q(t) + \vec{n}'(t) \sin(\theta(t)) \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilir [4, 11].

Teorem 2.38. $q, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar ve $\lambda(t)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere, $t \in \mathbb{R}$ için,

- i. $\frac{d}{dt} [q(t) \oplus p(t)] = \frac{d}{dt} q(t) \oplus \frac{d}{dt} p(t)$
- ii. $\frac{d}{dt} [q(t) - p(t)] = \frac{d}{dt} q(t) - \frac{d}{dt} p(t)$
- iii. $\frac{d}{dt} [\lambda(t) \odot q(t)] = \lambda(t) \odot \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \oplus \left(\frac{d}{dt} \lambda(t) \right) \odot q(t)$
- iv. $\frac{d}{dt} [q(t) \times p(t)] = \left(\frac{d}{dt} q(t) \times p(t) \right) \oplus \left(q(t) \times \frac{d}{dt} p(t) \right)$
- v. $\frac{d}{dt} [h(q(t), p(t))] = h\left(\frac{d}{dt} q(t), p(t)\right) + h\left(q(t), \frac{d}{dt} p(t)\right)$

vi. $q, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$ reel değişkenli uzaysal kuaterniyon değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} [q(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} p(t)] = \left[\left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} p(t) \oplus q(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \right]$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

iv. $\forall q(t) = a_1(t)\vec{e}_0 + b_1(t)\vec{e}_1 + c_1(t)\vec{e}_2 + d_1(t)\vec{e}_3,$

$p(t) = a_2(t)\vec{e}_0 + b_2(t)\vec{e}_1 + c_2(t)\vec{e}_2 + d_2(t)\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q(t) \times p(t) &= a_1(t)a_2(t) - (b_1(t)b_2(t) + c_1(t)c_2(t) + d_1(t)d_2(t)) \\ &\quad + a_1(t)(b_2(t)\vec{e}_1 + c_2(t)\vec{e}_2 + d_2(t)\vec{e}_3) \\ &\quad + a_2(t)(b_1(t)\vec{e}_1 + c_1(t)\vec{e}_2 + d_1(t)\vec{e}_3) \\ &\quad + (c_1(t)d_2(t) - d_1(t)c_2(t))\vec{e}_1 \\ &\quad + (d_1(t)b_2(t) - b_1(t)d_2(t))\vec{e}_2 \\ &\quad + (b_1(t)c_2(t) - c_1(t)b_2(t))\vec{e}_3 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [q(t) \times p(t)] &= a'_1(t)a_2(t) + a_1(t)a'_2(t) - b'_1(t)b_2(t) - b_1(t)b'_2(t) \\ &\quad - c'_1(t)c_2(t) - c_1(t)c'_2(t) - d'_1(t)d_2(t) - d_1(t)d'_2(t) \\ &\quad + a'_1(t)(b_2(t)\vec{e}_1 + c_2(t)\vec{e}_2 + d_2(t)\vec{e}_3) \\ &\quad + a_1(t)(b'_2(t)\vec{e}_1 + c'_2(t)\vec{e}_2 + d'_2(t)\vec{e}_3) \\ &\quad + a'_2(t)(b_1(t)\vec{e}_1 + c_1(t)\vec{e}_2 + d_1(t)\vec{e}_3) \\ &\quad + a_2(t)(b'_1(t)\vec{e}_1 + c'_1(t)\vec{e}_2 + d'_1(t)\vec{e}_3) \\ &\quad + (c'_1(t)d_2(t) + c_1(t)d'_2(t) - d'_1(t)c_2(t) - d_1(t)c'_2(t))\vec{e}_1 \\ &\quad + (d'_1(t)b_2(t) + d_1(t)b'_2(t) - b'_1(t)d_2(t) - b_1(t)d'_2(t))\vec{e}_2 \\ &\quad + (b'_1(t)c_2(t) + b_1(t)c'_2(t) - c'_1(t)b_2(t) - c_1(t)b'_2(t))\vec{e}_3 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade uygun şekilde gruplandırıldığında,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [q(t) \times p(t)] &= [a'_1(t)a_2(t) - b'_1(t)b_2(t) - c'_1(t)c_2(t) - d'_1(t)d_2(t) \\
&\quad + a'_1(t)(b_2(t)\vec{e}_1 + c_2(t)\vec{e}_2 + d_2(t)\vec{e}_3) \\
&\quad + a'_2(t)(b_1(t)\vec{e}_1 + c_1(t)\vec{e}_2 + d_1(t)\vec{e}_3) \\
&\quad + (c'_1(t)d_2(t) - d'_1(t)c_2(t))\vec{e}_1 + (d'_1(t)b_2(t) - b'_1(t)d_2(t))\vec{e}_2 \\
&\quad + (b'_1(t)c_2(t) - c'_1(t)b_2(t))\vec{e}_3] \\
&\oplus [a_1(t)a'_2(t) - b_1(t)b'_2(t) - c_1(t)c'_2(t) - d_1(t)d'_2(t) \\
&\quad + a_1(t)(b'_2(t)\vec{e}_1 + c'_2(t)\vec{e}_2 + d'_2(t)\vec{e}_3) \\
&\quad + a_2(t)(b'_1(t)\vec{e}_1 + c'_1(t)\vec{e}_2 + d'_1(t)\vec{e}_3) \\
&\quad + (c_1(t)d'_2(t) - d_1(t)c'_2(t))\vec{e}_1 + (d_1(t)b'_2(t) - b_1(t)d'_2(t))\vec{e}_2 \\
&\quad + (b_1(t)c'_2(t) - c_1(t)b'_2(t))\vec{e}_3] \\
&= \left(\frac{d}{dt} q(t) \times p(t) \right) \oplus \left(q(t) \times \frac{d}{dt} p(t) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

v. (iv.) özelliği ve Not 2.4 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [h(q(t), p(t))] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (q(t) \times \overline{p(t)} \oplus p(t) \times \overline{q(t)}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} (q(t) \times \overline{p(t)}) + \frac{d}{dt} (p(t) \times \overline{q(t)}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} q(t) \times \overline{p(t)} \right) \oplus \left(q(t) \times \frac{d}{dt} \overline{p(t)} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} p(t) \times \overline{q(t)} \right) \oplus \left(p(t) \times \frac{d}{dt} \overline{q(t)} \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{d}{dt} \overline{q(t)} = \overline{\frac{d}{dt} q(t)}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [h(q(t), p(t))] &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} q(t) \times \overline{p(t)} \oplus p(t) \times \overline{\frac{d}{dt} q(t)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[q(t) \times \overline{\frac{d}{dt} p(t)} \oplus \frac{d}{dt} p(t) \times \overline{q(t)} \right] \\
&= h \left(\frac{d}{dt} q(t), p(t) \right) + h \left(q(t), \frac{d}{dt} p(t) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

vi. $q(t) = b_1(t)\vec{e}_1 + c_1(t)\vec{e}_2 + d_1(t)\vec{e}_3$, $p(t) = b_2(t)\vec{e}_1 + c_2(t)\vec{e}_2 + d_2(t)\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere, Tanım 2.40 ile verilen vektörel çarpım işlemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [q(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} p(t)] &= \frac{d}{dt} [(c_1(t)d_2(t) - c_2(t)d_1(t))\vec{e}_1 + (b_2(t)d_1(t) - b_1(t)d_2(t))\vec{e}_2 \\
&\quad + (b_1(t)c_2(t) - b_2(t)c_1(t))\vec{e}_3] \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} c_1(t) \right) d_2(t) + c_1(t) \left(\frac{d}{dt} d_2(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} c_2(t) \right) d_1(t) - c_2(t) \left(\frac{d}{dt} d_1(t) \right) \right] \vec{e}_1 \\
&\quad + \left[\left(\frac{d}{dt} b_2(t) \right) d_1(t) + b_2(t) \left(\frac{d}{dt} d_1(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} b_1(t) \right) d_2(t) - b_1(t) \left(\frac{d}{dt} d_2(t) \right) \right] \vec{e}_2 \\
&\quad + \left[\left(\frac{d}{dt} b_1(t) \right) c_2(t) + b_1(t) \left(\frac{d}{dt} c_2(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} b_2(t) \right) c_1(t) - b_2(t) \left(\frac{d}{dt} c_1(t) \right) \right] \vec{e}_3 \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} c_1(t) \right) d_2(t) - c_2(t) \left(\frac{d}{dt} d_1(t) \right) \right] \vec{e}_1 + \left[\left(\frac{d}{dt} b_2(t) \right) d_1(t) - b_1(t) \left(\frac{d}{dt} d_2(t) \right) \right] \vec{e}_2 \\
&\quad + \left[\left(\frac{d}{dt} b_1(t) \right) c_2(t) - b_2(t) \left(\frac{d}{dt} c_1(t) \right) \right] \vec{e}_3 \\
&\quad \oplus \left[c_1(t) \left(\frac{d}{dt} d_2(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} c_2(t) \right) d_1(t) \right] \vec{e}_1 + \left[b_2(t) \left(\frac{d}{dt} d_1(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} b_1(t) \right) d_2(t) \right] \vec{e}_2 \\
&\quad + \left[d_1(t) \left(\frac{d}{dt} c_2(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} d_2(t) \right) c_1(t) \right] \vec{e}_3 \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} p(t) \oplus q(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

2.4.2 Kuaterniyon Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Türevi

Tanım 2.50. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi, $q = a\vec{e}_0 + b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ ve $f_k : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \leq k \leq 3$) olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\theta : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\
q &\rightarrow \theta(q) = f_0(q)\vec{e}_0 + f_1(q)\vec{e}_1 + f_2(q)\vec{e}_2 + f_3(q)\vec{e}_3
\end{aligned} \tag{2.64}$$

fonksiyonuna **kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyon** denir [14].

Tanım 2.51. θ kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyon olmak üzere, kuaterniyon uzayı değişmeli olmadığından, $\frac{[\theta(q \oplus h) - \theta(q)]}{h}$ oranı düşünüldüğünde türev tanımı için iki farklı olasılık ortaya çıkar. Bunlar, $h \in \mathbb{H}$ için, $[\theta(q \oplus h) - \theta(q)](h)^{-1}$ veya $(h)^{-1}[\theta(q \oplus h) - \theta(q)]$ şeklindedir.

Buradan,

$$A(q) = \lim_{h \rightarrow 0} \{ [\theta(q \oplus h) - \theta(q)](h)^{-1} \} \quad (2.65)$$

limiti var ise bu limit θ kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonunun $q \in \mathbb{H}$ noktasındaki sağ türev,

$$B(q) = \lim_{h \rightarrow 0} \{ (h)^{-1} [\theta(q \oplus h) - \theta(q)] \} \quad (2.66)$$

limiti var ise bu limit θ kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonunun $q \in \mathbb{H}$ noktasındaki sol türev gösterimidir. [13, 15].

Bu tanım bazı fonksiyonların türevlerini bulmakta yararlı olsa da çoğu özel fonksiyon için yetersizdir. Kuaterniyon uzayında diferansiyellenebilirlik, türev gibi kavramlar ve daha kapsamlı tanımlamalar [15–17] kaynaklarından edinilebilir.

3

$\mathbb{H}$ UZAYINDA EĞRİLER TEORİSİ

Bu bölümde, uzaysal kuaterniyoniyonik eğriler ve kuaterniyonik eğriler için Bharathi ve Nagaraj [1] tarafından verilen Frenet-Serret formülasyonları incelenmiştir.

3.1 $\mathbb{H}_p$ Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik Eğriler İçin Frenet-Serret Formülleri

Tanım 3.1. Uzaysal kuaterniyonların uzayı $\mathbb{H}_p = \{\gamma \in \mathbb{H} \mid \gamma + \bar{\gamma} = 0\}$ olsun. $s \in I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ yay parametresi olmak üzere,

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$$
$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{k=1}^3 \gamma_k(s) \vec{e}_k$$

ile tanımlanan reel değişkenli kuaterniyon değerli γ dönüşümüne $\mathbb{H}_p$ uzayında **uzaysal kuaterniyonik eğri** denir [1].

Tanım 3.2. $\mathbb{H}_p$ uzayında $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. γ eğrisinin her noktasındaki hız vektörü $\gamma'(s)$ olmak üzere,

$$\|\gamma'(s)\|_{\mathbb{H}_p}^2 = h(\gamma'(s), \gamma'(s)) = \frac{1}{2} [\gamma'(s) \times \bar{\gamma}'(s) + \gamma'(s) \times \bar{\gamma}'(s)] = \gamma'(s) \times \bar{\gamma}'(s) = 1$$

eşitliğinden, $\|\gamma'(s)\|_{\mathbb{H}_p} = 1$ ise γ eğrisine birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğri denir [1].

Teorem 3.1. $\mathbb{H}_p$ uzayında $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$ birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. γ eğrisinin birim teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s) = \sum_{k=1}^3 \gamma'_k(s) \vec{e}_k$ olmak üzere, t ve t' h-ortogonaldır ve ayrıca $t' \times \bar{t}$ bir uzaysal kuaterniyondur [1].

İspat. Birim hızlı uzaysal kuaterniyonik γ eğrisi parametrik olarak,

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{k=1}^3 \gamma_k(s) \vec{e}_k$$

olarak verilsin.

Birim hızlı eğri tanımı ile elde edilen $\|\gamma'(s)\|_{\mathbb{H}_p}^2 = \|t(s)\|_{\mathbb{H}_p}^2 = t(s) \times \overline{t(s)} = 1$ ifadesinin her iki tarafının türevi alınır, kuaterniyonik çarpımın türevi tanımına göre,

$$t' \times \bar{t} + t \times (\bar{t})' = 0 \quad (3.1)$$

elde edilir. $t(s) = \sum_{k=1}^3 \gamma_k'(s) \vec{e}_k$ bir uzaysal kuaterniyon olduğuna göre eşlenik tanımı gereğince $\bar{t}(s) = -\sum_{k=1}^3 \gamma_k'(s) \vec{e}_k$ yazılabilir. $\bar{t}'(s) = -\sum_{k=1}^3 \gamma_k''(s) \vec{e}_k$ ve $(\bar{t})'(s) = -\sum_{k=1}^3 \gamma_k''(s) \vec{e}_k$ olduğundan,

$$\bar{t}'(s) = (\bar{t})'(s) \quad (3.2)$$

elde edilir. Böylece,

$$h(t, t') = \frac{1}{2} [t' \times \bar{t} + t \times \bar{t}']$$

eşitliğinde (3.1) ile (3.2) eşitlikleri göz önüne alınır,

$$h(t, t') = 0 \quad (3.3)$$

bulunacaktır. Yani, kuaterniyonik anlamda t ve t' h -ortogonaldır.

Tekrardan (3.1) eşitliği kuaterniyonlarda eşlenik kavramı dikkate alınarak düzenlenirse,

$$t' \times \bar{t} + t \times (\bar{t})' = t' \times \bar{t} + \bar{\bar{t}} \times (\bar{t}') = t' \times \bar{t} + \overline{(t' \times \bar{t})} = 0$$

elde edilir. Buradan, $t' \times \bar{t}$ ifadesinin bir uzaysal kuaterniyon olduğu sonucu görülür. ■

Şimdi, öncelikle $t(s)$ ve $t'(s)$ vektörlerinin h -ortogonal olmasından yola çıkarak Frenet 3-ayaklısını elde edelim.

Tanım 3.3. $\mathbb{H}_p$ uzayında $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $t(s) = \gamma'(s) = \sum_{k=1}^3 \gamma'_k(s) \vec{e}_k$ birim teğet vektör olmak üzere,

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|_{\mathbb{H}_p}} \quad (3.4)$$

birim vektörünü tanımlayalım. Burada t ve t' h -ortogonal olduğundan, $h(t(s), n(s)) = 0$ eşitliği (3.4) eşitliğinde yapılan seçim ve (3.3) eşitliği gereği açıktır.

Şimdi $b(s)$ vektörü $b(s) = t(s) \times n(s)$ olarak seçilirse, aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\text{i. } t(s) \times n(s) = b(s) = -n(s) \times t(s) \quad (3.5)$$

$$\text{ii. } t(s) \times b(s) = -n(s) = -b(s) \times t(s) \quad (3.6)$$

$$\text{iii. } n(s) \times b(s) = t(s) = -b(s) \times n(s) \quad (3.7)$$

$$\text{iv. } t \times \bar{n} = \bar{b} : \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} t \times \bar{n} &= -\langle t, \bar{n} \rangle + t \wedge \bar{n} \\ &= -\langle t, -n \rangle + t \wedge (-n) \\ &= \langle t, n \rangle - t \wedge n \\ &= -t \wedge n \\ &= -b \\ &= \bar{b}, \end{aligned}$$

$$\text{v. } n \times \bar{t} = b : \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} n \times \bar{t} &= -\langle n, \bar{t} \rangle + n \wedge \bar{t} \\ &= -\langle n, -t \rangle + n \wedge (-t) \\ &= \langle n, t \rangle - n \wedge t \\ &= -n \wedge t \\ &= b \end{aligned}$$

$$\text{vi. } t \times \bar{b} = n \text{ ve } b \times \bar{t} = \bar{n} \quad (3.10)$$

$$\text{vii. } n \times \bar{b} = \bar{t} \text{ ve } b \times \bar{n} = t \quad (3.11)$$

Bu özellikler sayesinde, Not 2.4 gereğince,

$$h(t, n) = \frac{1}{2} [t \times \bar{n} + n \times \bar{t}] = \frac{1}{2} [\bar{b} + b] = 0 \quad (3.12)$$

$$h(t, b) = \frac{1}{2} [t \times \bar{b} + b \times \bar{t}] = \frac{1}{2} [n + \bar{n}] = 0 \quad (3.13)$$

$$h(n, b) = \frac{1}{2} [n \times \bar{b} + b \times \bar{n}] = \frac{1}{2} [\bar{t} + t] = 0 \quad (3.14)$$

$$h(b, b) = \frac{1}{2} [b \times \bar{b} + b \times \bar{b}] = b \times \bar{b} = -\langle b, \bar{b} \rangle + b \wedge \bar{b} = 1 \quad (3.15)$$

bulunur. Böylece, $\{t(s), n(s), b(s)\}$ h -ortonormal vektör sistemi elde edilir. Bu sisteme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı denir. $t(s)$, $n(s)$ ve $b(s)$ vektörlerine de $\mathbb{H}_p$ uzayında **birim hızlı eğrinin Frenet vektörleri** adı verilir [1].

Tanım 3.4. $\mathbb{H}_p$ uzayında γ eğrisinin birinci eğriliği,

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|_{\mathbb{H}_p} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem 3.2. $\mathbb{H}_p$ uzayında birim hızlı γ eğrisinin birim teğet vektörü t , birinci eğriliği κ olsun.

$$t'(s) = \kappa(s) n(s) \quad (3.17)$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. (3.4) ve (3.16) eşitliklerinden açıkça görülür. ■

Teorem 3.3. $\mathbb{H}_p$ uzaysal kuaterniyonların uzayı, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ birim aralık olmak üzere $s \in I$ yay parametrelî,

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{k=1}^3 \gamma_k(s) \vec{e}_k$$

eğrisinin $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere, $t'(s)$, $n'(s)$, $b'(s)$ türev vektörleri ve eğrilikler arasındaki ilişki,

$$t'(s) = \kappa n(s)$$

$$n'(s) = -\kappa t(s) + \tau b(s)$$

$$b'(s) = -\tau n(s)$$

ile verilir [1].

İspat. $t'(s)$, $n'(s)$, $b'(s)$ türev vektörleri ve $\kappa(s)$, $\tau(s)$ eğrilikleri arasındaki ilişki için, $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ortonormal bir sistem oluşturduğundan,

$$t'(s) = a_{11}t(s) + a_{12}n(s) + a_{13}b(s) \quad (3.18)$$

$$n'(s) = a_{21}t(s) + a_{22}n(s) + a_{23}b(s) \quad (3.19)$$

$$b'(s) = a_{31}t(s) + a_{32}n(s) + a_{33}b(s) \quad (3.20)$$

yazılabilir. Burada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i, j \leq 3$) katsayılarını hesaplayalım.

(3.18) ifadesi sırasıyla t , n ve b ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(t', t) &= a_{11}h(t, t) + a_{12}h(n, t) + a_{13}h(b, t) \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

ve (3.12), (3.13) eşitlikleri ve Teorem 3.1 yardımıyla,

$$a_{11} = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(t', n) &= a_{11}h(t, n) + a_{12}h(n, n) + a_{13}h(b, n) \\ &= a_{12} \end{aligned}$$

ve (3.17) eşitliği kullanılırsa $h(t', n) = h(\kappa n, n) = \kappa h(n, n) = \kappa$ olduğundan, (3.12) ve (3.14) eşitlikleri kullanıldığında,

$$a_{12} = \kappa$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(t', b) &= a_{11}h(t, b) + a_{12}h(n, b) + a_{13}h(b, b) \\ &= a_{13} \end{aligned}$$

olmak üzere, (3.17) eşitliği kullanılırsa $h(t', b) = h(\kappa n, b) = \kappa h(n, b) = 0$ olduğundan, (3.13) ve (3.14) eşitlikleri kullanıldığında,

$$a_{13} = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak (3.18) ifadesi,

$$t'(s) = \kappa(s)n(s) \quad (3.21)$$

olarak elde edilir.

(3.19) ifadesi sırasıyla t , n ve b ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(n', t) &= a_{21}h(t, t) + a_{22}h(n, t) + a_{23}h(b, t) \\ &= a_{21} \end{aligned}$$

olmak üzere, (3.12) eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında,

$$\frac{1}{2} [t' \times \bar{n} + t \times (\bar{n})' + n' \times \bar{t} + n \times (\bar{t})'] = 0$$

elde edilir.

t ve n birer uzaysal kuaterniyon olduğundan ve (3.2) eşitliği t ve n için geçerli olduğundan eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} [t' \times \bar{n} + n \times (\bar{t}')] + \frac{1}{2} [t \times (\bar{n}') + n' \times \bar{t}] = 0$$

olarak yazılır ve bu denklem,

$$h(t', n) + h(n', t) = 0$$

eşitliğini verir. Burada,

$h(n', t) = -h(t', n) = -a_{12}$ bulunduğundan,

$$a_{21} = -\kappa$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(n', n) &= a_{21}h(t, n) + a_{22}h(n, n) + a_{23}h(b, n) \\ &= a_{22} \end{aligned}$$

olmak üzere, $h(n, n) = \frac{1}{2} [n \times \bar{n} + n \times \bar{n}] = n \times \bar{n} = 1$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa, (3.2) eşitliği n için geçerli olduğundan, eşitlik tekrar düzenlenirse, $n' \times \bar{n} + n \times \bar{n}' = 0$ elde edilir. Bu eşitlik, $h(n', n) = 0$ demektir.

Buradan,

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(n', b) &= a_{21}h(t, b) + a_{22}h(n, b) + a_{23}h(b, b) \\ &= a_{23} \end{aligned}$$

olmak üzere, (3.14) eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında,

$$\frac{1}{2} \left[n' \times \bar{b} + n \times (\bar{b})' + b' \times \bar{n} + b \times (\bar{n})' \right] = 0$$

elde edilir.

n ve b birer uzaysal kuaterniyon olduğundan ve (3.2) eşitliği n ve b için geçerli olduğundan eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} \left[n' \times \bar{b} + b \times (\bar{n})' \right] + \frac{1}{2} \left[n \times (\bar{b})' + b' \times \bar{n} \right] = 0$$

olarak yazılır. Bu denklem,

$$h(n', b) + h(n, b') = 0$$

eşitliğini verir. Burada, $h(n', b) = a_{23} = -h(n, b')$ bulunduğundan $a_{23} = \tau$ alınırsa (3.19) ifadesi,

$$n'(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s) \tag{3.22}$$

olarak elde edilir. Burada elde edilen

$$a_{23} = h(n', b) = \tau \tag{3.23}$$

ifadesine γ birim hızlı eğrisinin **ikinci eğriliği** veya **burulması** adı verilir.

(3.20) ifadesi, sırasıyla, t , n ve b ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(b', t) &= a_{31}h(t, t) + a_{32}h(n, t) + a_{33}h(b, t) \\ &= a_{31} \end{aligned}$$

olmak üzere, (3.13) eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında,

$$\frac{1}{2} \left[t' \times \bar{b} + t \times (\bar{b})' + b' \times \bar{t} + b \times (\bar{t})' \right] = 0$$

elde edilir.

Ayrıca, t ve b birer uzaysal kuaterniyon olduğundan ve (3.2) eşitliği t ve b için geçerli olduğundan, eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} \left[t' \times \bar{b} + b \times (\bar{t}') \right] + \frac{1}{2} \left[t \times (\bar{b}') + b' \times \bar{t} \right] = 0$$

olarak yazılır. Buradan,

$$h(t', b) + h(b', t) = 0$$

eşitliği elde edilir.

(3.14) ve (3.17) eşitlikleri kullanılırsa $h(t', b) = h(\kappa n, b) = \kappa h(n, b) = 0$ olduğundan,

$h(b', t) = -h(t', b) = -a_{13}$ bulunur ve

$$a_{31} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(b', n) &= a_{31}h(t, n) + a_{32}h(n, n) + a_{33}h(b, n) \\ &= a_{32} \end{aligned}$$

ve

$h(n', b) = \tau$ ve $h(b', n) = -h(n', b) = a_{32}$ bulunduğundan,

$$a_{32} = -\tau$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(b', b) &= a_{31}h(t, b) + a_{32}h(n, b) + a_{33}h(b, b) \\ &= a_{33} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$h(b, b) = \frac{1}{2} [b \times \bar{b} + b \times \bar{b}] = b \times \bar{b} = 1 \text{ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır,}$$

(3.2) eşitliği n için geçerli olduğundan, eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$b' \times \bar{b} + b \times \bar{b}' = 0$$

olarak elde edilir. O halde, $h(b', b) = 0$ bulunur. Yani,

$$a_{33} = 0$$

elde edilir.

Sonuçta, (3.20) ifadesi,

$$b'(s) = -\tau n(s) \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. ■

Uzaysal kuaterniyonik eğriler için Frenet-Serret formüllerinin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Sonucun, E^3 Öklid uzayında verilen bir birim hızlı eğrinin Frenet formülleri ile benzerlik taşıdığına dikkat ediniz. Ancak buradaki tüm büyüklüklerin birer uzaysal kuaterniyon oldukları unutulmamalıdır.

3.2 $\mathbb{H}$ Uzayında Kuaterniyonik Eğriler için Frenet-Serret Formülleri

Tanım 3.5. Kuaterniyonik uzayda $s \in I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ yay parametresi olmak üzere,

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{k=0}^3 \beta_k(s) \vec{e}_k$$

ile tanımlanan reel değişkenli kuaterniyon değerli dönüşüme $\mathbb{H}$ uzayında **kuaterniyonik eğri** denir [1].

Tanım 3.6. $\mathbb{H}$ uzayında $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ kuaterniyonik eğri verilsin. β eğrisinin her noktasındaki hız vektörü $\beta'(s)$ olmak üzere,

$$\|\beta'(s)\|_{\mathbb{H}} = h(\beta'(s), \beta'(s)) = \frac{1}{2} [\beta'(s) \times \overline{\beta'(s)} + \beta'(s) \times \overline{\beta'(s)}] = \beta'(s) \times \overline{\beta'(s)} = 1$$

ise β eğrisine **birim hızlı kuaterniyonik eğri** denir [1].

Teorem 3.4. $\mathbb{H}$ uzayında, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ birim hızlı kuaterniyonik eğrisi verilsin. β eğrisinin birim teğet vektörü $T(s) = \beta'(s) = \sum_{k=0}^3 \beta'_k(s) \vec{e}_k$ ve $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|_{\mathbb{H}}}$ olmak üzere, T ve T' h-ortogonaldır ve ayrıca $N \times \overline{T}$ bir uzaysal kuaterniyondur [1].

İspat. Birim hızlı kuaterniyonik β eğrisi parametrik olarak,

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{k=0}^3 \beta_k(s) \vec{e}_k, \quad \vec{e}_0 = +1$$

şeklinde verilsin.

Birim hızlı eğri tanımı ile elde edilen $\|\beta'(s)\|_{\mathbb{H}} = \|T(s)\|_{\mathbb{H}} = T(s) \times \overline{T}(s) = 1$ ifadesinin her iki tarafının türevi alınır, kuaterniyonik çarpımın türevi tanımına göre,

$$T' \times \overline{T} + T \times (\overline{T})' = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. $T(s) = \sum_{k=0}^3 \beta'_k(s) \vec{e}_k$ bir uzaysal olmayan kuaterniyon olduğuna göre eşlenik tanımı gereğince $\overline{T}(s) = \beta'_0 - \sum_{k=1}^3 \beta'_k(s) \vec{e}_k$ yazılabilir. $\overline{T}'(s) = \beta''_0 - \sum_{k=1}^3 \beta''_k(s) \vec{e}_k$ ve $(\overline{T})'(s) = \beta''_0 - \sum_{k=1}^3 \beta''_k(s) \vec{e}_k$ olduğundan,

$$\overline{T}'(s) = (\overline{T})'(s) \quad (3.26)$$

elde edilir. Böylece,

$$h(T, T') = \frac{1}{2} [T' \times \overline{T} + T \times \overline{T}'] \quad (3.27)$$

eşitliğinde (3.25) ve (3.26) eşitlikleri göz önüne alınır

$$h(T, T') = 0 \quad (3.28)$$

bulunacaktır. Yani, kuaterniyonik anlamda T ve T' h -ortogonaldır.

(3.27) ve (3.28) eşitliklerinden,

$$T' \times \bar{T} + T \times \bar{T}' = 0 \quad (3.29)$$

olduğu açıktır.

(3.29) eşitliği kuaterniyonlarda eşlenik kavramı dikkate alınarak düzenlenirse,

$$T' \times \bar{T} + T \times (\bar{T})' = T' \times \bar{T} + \bar{\bar{T}} \times \bar{T}' = T' \times \bar{T} + \overline{(T' \times T)} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{T'}{\|T'\|_{\mathbb{H}}} \times \bar{T} + \left(\frac{T'}{\|T'\|_{\mathbb{H}}} \times \bar{T} \right) = 0$$

elde edilir. $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|_{\mathbb{H}}}$ olduğundan,

$$N \times \bar{T} + \overline{(N \times \bar{T})} = 0$$

bulunur. Buradan, $N \times \bar{T}$ ifadesinin bir uzaysal kuaterniyon olduğu görülür. ■

Not 3.1. $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ birim hızlı kuaterniyonik eğrisi verilsin. T ve N birim kuaterniyon olduğundan $t = N \times \bar{T}$ seçildiğinde,

$$\|t(s)\| = t(s) \times \bar{t}(s) = (N \times \bar{T}) \times \overline{(N \times \bar{T})} = N \times ((\bar{T} \times T) \times \bar{N}) = N \times \bar{N} = 1$$

bulunur. Yani, t kuaterniyonu da birim kuaterniyondur ve bu durumda,

$$t \times T = (N \times \bar{T}) \times T = (N \times T^{-1}) \times T = N$$

olup,

$$N = t \times T \quad (3.30)$$

elde edilir.

Şimdi, öncelikle (3.30) eşitliğinden yola çıkarak Frenet 4-ayaklısını elde edelim.

Tanım 3.7. Kuaterniyonların uzayı $\mathbb{H}$, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ kuaterniyonik eğrisi verilsin. β eğrisinin birim teğet vektörü $T(s) = \beta'(s) = \sum_{k=0}^3 \beta'_k(s) \vec{e}_k$ olmak üzere,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|_{\mathbb{H}}} \quad (3.31)$$

birim vektörünü tanımlayalım.

Burada, T ve T' h -ortogonal olduğundan, $h(T(s), N(s)) = 0$ eşitliği (3.31) eşitliğinde yapılan seçim ve (3.28) eşitliği gereği açıktır.

Şimdi $B(s)$ vektörü $B(s) = n(s) \times T(s)$ olarak seçilirse, Not 2.4 gereğince aşağıdakiler sağlanır:

i. B birim kuaterniyondur:

$$\begin{aligned} h(B, B) &= B \times \bar{B} \\ &= (n \times T) \times (\overline{n \times T}) \\ &= (n \times T) \times (\bar{T} \times \bar{n}) \\ &= n \times ((T \times \bar{T}) \times \bar{n}) \\ &= n \times \bar{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} h(T, N) &= \frac{1}{2} [(T \times \bar{N}) + (N \times \bar{T})] \\ &= \frac{1}{2} [(T \times (\overline{t \times T})) + ((t \times T) \times \bar{T})] \\ &= \frac{1}{2} [(T \times (\bar{T} \times \bar{t})) + ((t \times T) \times \bar{T})] \\ &= \frac{1}{2} (\bar{t} + t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

iii.

$$\begin{aligned}
h(T, B) &= \frac{1}{2} [(T \times \overline{B}) + (B \times \overline{T})] \\
&= \frac{1}{2} [(T \times (\overline{n \times T})) + ((n \times T) \times \overline{T})] \\
&= \frac{1}{2} [(T \times (\overline{T} \times \overline{n})) + ((n \times T) \times \overline{T})] \\
&= \frac{1}{2} (\overline{n} + n) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

iv.

$$\begin{aligned}
h(N, B) &= \frac{1}{2} [(N \times \overline{B}) + (B \times \overline{N})] \\
&= \frac{1}{2} [((t \times T) \times (\overline{n \times T})) + ((n \times T) \times (\overline{t \times T}))] \\
&= \frac{1}{2} [t \times ((T \times \overline{T}) \times \overline{n}) + n \times ((T \times \overline{T}) \times \overline{t})] \\
&= \frac{1}{2} (t \times \overline{n} + n \times \overline{t}) \\
&= \frac{1}{2} h(t, n) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Dolayısıyla $\{T, N, B\}$ sistemi h -ortogonaldır.

Şimdi $D(s)$ vektörü $D(s) = b(s) \times T(s)$ olarak seçilirse, Not 2.4 gereğince aşağıdakiler sağlanır:

i. D birim kuaterniyondur:

$$\begin{aligned}
h(D, D) &= D \times \overline{D} \\
&= (b \times T) \times (\overline{b \times T}) \\
&= (b \times T) \times (\overline{T} \times \overline{b}) \\
&= b \times ((T \times \overline{T}) \times \overline{b}) \\
&= b \times \overline{b} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
 h(T, D) &= \frac{1}{2} [(T \times \overline{D}) + (B \times \overline{T})] \\
 &= \frac{1}{2} [(T \times (\overline{b \times T})) + ((b \times T) \times \overline{T})] \\
 &= \frac{1}{2} [(T \times (\overline{T \times b})) + ((b \times T) \times \overline{T})] \\
 &= \frac{1}{2} (\overline{b} + b) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

iii.

$$\begin{aligned}
 h(N, D) &= \frac{1}{2} [(N \times \overline{D}) + (D \times \overline{N})] \\
 &= \frac{1}{2} [(t \times T) \times (\overline{b \times T}) + (b \times T) \times (\overline{t \times T})] \\
 &= \frac{1}{2} [(t \times ((T \times \overline{T}) \times \overline{b})) + b \times ((T \times \overline{T}) \times \overline{t})] \\
 &= \frac{1}{2} (t \times \overline{b} \times b \times t) \\
 &= h(t, b) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

iv.

$$\begin{aligned}
 h(B, D) &= \frac{1}{2} [(B \times \overline{D}) + (D \times \overline{B})] \\
 &= \frac{1}{2} [(n \times T) \times (\overline{b \times T}) + ((b \times T) \times (\overline{n \times T}))] \\
 &= \frac{1}{2} [n \times ((T \times \overline{T}) \times \overline{b}) + b \times ((T \times \overline{T}) \times \overline{n})] \\
 &= \frac{1}{2} (n \times \overline{b} + b \times \overline{n}) \\
 &= \frac{1}{2} h(n, b) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dolayısıyla $\{T, N, B, D\}$ vektör sistemi h -ortogonaldır. Bu sisteme β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı denir. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ ve $D(s)$ vektörlerine de $\mathbb{H}$ **uza-yında birim hızlı eğrinin Frenet vektörleri** adı verilir [1].

Tanım 3.8. $\mathbb{H}$ uzayında β eğrisinin eğriliği,

$$K(s) = \|T'(s)\|_{\mathbb{H}} \quad (3.38)$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem 3.5. $\mathbb{H}$ uzayında birim hızlı β eğrisinin birim teğet vektörü T , eğriliği K olsun.

$$T'(s) = K(s)N(s) \quad (3.39)$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. (3.31) ve (3.38) eşitliklerinden açıkça görülür. ■

Teorem 3.6. Kuaterniyonların uzayı $\mathbb{H}$, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ birim aralık, $s \in I$ yay parametresi ve β eğrisinin birim teğet vektörü $T(s) = \beta'(s) = \sum_{k=0}^3 \beta'_k(s) \vec{e}_k$ ile $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|_{\mathbb{H}}}$ olmak üzere,

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{k=0}^3 \beta_k(s) \vec{e}_k$$

eğrisinin $\forall s \in I$ için $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s), D(s)\}$ ve eğrilikleri $\kappa(s), K(s), (\tau - K)(s)$ olmak üzere, $T'(s), N'(s), B'(s), D'(s)$ ve eğrilikler arasındaki ilişki,

$$T'(s) = K(s)N(s)$$

$$N'(s) = -K(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\kappa(s)N(s) + (\tau(s) - K(s))D(s)$$

$$D'(s) = -(\tau(s) - K(s))B(s)$$

ile verilir [1].

İspat. $T'(s), N'(s), B'(s), D'(s)$ türev vektörleri ve $\kappa(s), K(s), (\tau - K)(s)$ eğrilikleri arasındaki ilişkiyi elde edelim:

Teorem 3.5 ile $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ olduğu gösterildi.

(3.30) eşitliğinin türevi alınır,

$$N' = t' \times T + t \times T'$$

elde edilir ve burada (3.17) ve (3.39) eşitlikleri kullanılırsa,

$$N' = (\kappa n) \times T + t \times (KN)$$

bulunur. (3.30) eşitliğinden aynı zamanda $t \times N = -T$ yazılabilir, bu durumda,

$$N' = -KT + \kappa B \quad (3.40)$$

yazılabilir.

$B = n \times T$ ifadesinin türevi alınır,

$$B' = n' \times T + n \times T'$$

elde edilir ve burada (3.22) ve (3.39) eşitlikleri kullanılırsa,

$$B' = (-\kappa t + \tau b) \times T + n \times (KN)$$

bulunur. Buradan,

$$B' = -\kappa(t \times T) + \tau(b \times T) + K(n \times N)$$

eşitliğinde (3.30) eşitliği ve $n \times N = -D$ olduğu kullanılır, eşitlik düzenlenirse,

$$B' = -\kappa N + (\tau - K) D \quad (3.41)$$

yazılabilir.

$D = b \times T$ ifadesinin türevi alınır,

$$D' = b' \times T + b \times T'$$

elde edilir ve burada (3.24) ve (3.39) eşitlikleri kullanılırsa,

$$D' = (-\tau n) \times T + b \times (KN)$$

bulunur.

Buradan,

$$D' = -\tau(n \times T) + K(b \times N)$$

eşitliğinde $B = n \times T$ seçimi ve $b \times N = B$ olduğu kullanılır, eşitlik düzenlenirse,

$$D' = -(\tau - K)B \quad (3.42)$$

yazılabilir. ■

Kuaterniyonik eğriler için Frenet-Serret formüllerinin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \\ D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau - K \\ 0 & 0 & -(\tau - K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Dikkat edilirse, E^4 Öklid uzayında verilen bir eğrinin Frenet formüllerinden farklı bir eşitlik elde edilmiştir. E^4 uzayındaki Frenet formülleri hakkında geniş bilgiye Aléssio [39] kaynağından ulaşılabilir.

4

SİMPLEKTİK GEOMETRİ

Simplektik kelimesi ilk olarak 1946 yılında Hermann Weyl tarafından Klasik Gruplar adlı kitabında bilinear, ters-simetrik ve non-dejenere özelliklerine sahip olan bir lie grup yapısını tanımlamak için kullanılan bir terimdir. Simplektik geometri çift boyutlu uzaylar için geçerlidir. Öklid ve Riemann geometrisinde aşına olunan 1-boyutlu uzunluk ve açılardan ziyade 2-boyutlu nesnelerin boyutlarını ölçer [18, 19].

4.1 V Simplektik Çarpım Uzayı

Tanım 4.1. V vektör kümesi bir toplamsal Abel grup olmak üzere $(\mathbb{H}, \oplus, \times)$ halkası üzerinde

$$\begin{aligned} \cdot : V \times \mathbb{H} &\rightarrow V \\ (\vec{v}, q) &\rightarrow \vec{v}q \end{aligned} \tag{4.1}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $\forall \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \forall q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için,

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)q = \vec{v}_1q + \vec{v}_2q$
- $\vec{v}(q_1 \oplus q_2) = \vec{v}q_1 + \vec{v}q_2$
- $\vec{v}(q_1 \times q_2) = (\vec{v}q_1)q_2$
- $\vec{v}1_{\mathbb{H}} = \vec{v}$

özellikleri sağlanıyorsa V kümesine $\mathbb{H}$ üzerinde **sağ $\mathbb{H}$ -modül** denir [8, 19].

Not 4.1. Tezin tümünde işlemler sağ modül üzerinde yapılacaktır.

Tanım 4.2. V , $\mathbb{H}$ üzerinde bir sağ $\mathbb{H}$ -modül olsun.

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) &\rightarrow \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

dönüşümünü $\forall \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \forall q \in \mathbb{H}$ için,

- $\langle \vec{v}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle$
- $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 q \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle q$
- $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \overline{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle}$
- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ve $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

özellikleri sağlanıyorsa V sağ $\mathbb{H}$ -modülüne **simplektik çarpım uzayı** denir.

Simplektik çarpım uzayında $\forall q, p \in \mathbb{H}$ için, $\langle \vec{v}_1 q, \vec{v}_2 p \rangle = \bar{q} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle p$ eşitliğinden yararlanılarak kuaterniyonların, iç çarpım fonksiyonunun içine ya da dışına yazılması dikkate alındığı sürece kuaterniyonik simplektik çarpım uzayında çalışma, kompleks iç çarpım uzayında çalışmaya benzerdir [8, 19].

Tanım 4.3. V simplektik çarpım uzayında norm,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Teorem 4.1. V sağ $\mathbb{H}$ -modül olsun. V üzerinde kuaterniyonik Cauchy-Schwarz eşitsizliği, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ için,

$$|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle| \leq \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \quad (4.4)$$

ile ifade edilir [8].

Teorem 4.2. V sağ $\mathbb{H}$ -modül olsun. V üzerinde kuaterniyonik Bessel eşitsizliği, $\forall \vec{v}_i \in V$ ($i = 1, 2, \dots, n$) için $\|\vec{v}_i\| = 1$ ise,

$$\sum_{i=1}^n |\langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \quad (4.5)$$

sağlanır [8].

Tanım 4.4. V , $\mathbb{H}$ üzerinde sıfırdan farklı bir sağ $\mathbb{H}$ -modül olsun. $W \subseteq V$ boş kümeden farklı bir alt küme olmak üzere, $W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ vektör sistemini ele alalım. $\forall \vec{v} \in V$ için, $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i q_i$ olacak şekilde $q_i \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) varsa W vektör sistemi V uzayını geriyor veya üretiyor denir. $V = Sp \{W\}$ ile gösterilir [8].

Tanım 4.5. V , $\mathbb{H}$ üzerinde sıfırdan farklı bir sağ $\mathbb{H}$ -modül olsun. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ vektörlerinin bir kümesi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ olsun. $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{H}$ için $\sum_{i=1}^n \vec{v}_i q_i = \vec{0}$ iken $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0 \in \mathbb{H}$ oluyorsa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ vektör sistemi $\mathbb{H}$ -lineer bağımsızdır [8].

Tanım 4.6. V bir sağ $\mathbb{H}$ -modül ve $W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, V uzayında bir vektör kümesi olsun. Eğer $W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ vektör sistemi $\mathbb{H}$ -lineer bağımsız ve $V = Sp \{W\}$ ise $W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ vektör sistemine V sağ $\mathbb{H}$ -modülünün bir bazıdır denir [8].

Teorem 4.3. V bir sağ $\mathbb{H}$ -modül olsun. $V = Sp \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ olmak üzere, V uzayının $n \leq m$ olacak şekilde n elemanlı bir bazı vardır. V uzayının her bir bazı n elemandan oluşur. Eğer, $1 \leq i \leq n$ iken $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i \in V$ vektörleri $\mathbb{H}$ -lineer bağımsız ise o zaman V uzayının $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i$ vektörlerini içeren bir bazı vardır [8].

Tanım 4.7. V sağ $\mathbb{H}$ -modülünün bazındaki vektörlerin sayısına sağ $\mathbb{H}$ -modülün boyutu denir [8].

Teorem 4.4. V , n -boyutlu kuaterniyonik Hilbert uzayı olsun. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ vektörleri için $r \leq n$ olmak üzere $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ $\mathbb{H}$ -lineer bağımsız bir küme olsun. $1 \leq r \leq n$ için,

$$\vec{y}_r = \vec{v}_r - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\langle \vec{y}_j, \vec{v}_r \rangle}{\langle \vec{y}_j, \vec{y}_j \rangle} \vec{y}_j \quad (4.6)$$

olmak üzere $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_r\}$ ortogonal sistem ve

$$E_r = \vec{y}_r (\|\vec{y}_r\|)^{-1} \quad (4.7)$$

tanımlandığında $\{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ sistemi ortonormal sistem olup V uzayını üretir [8].

Tanım 4.8. V ve W , $\mathbb{H}$ üzerinde iki sağ $\mathbb{H}$ -modül olsun. $T : V \rightarrow W$ dönüşümü, $\forall \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ ve $\forall q \in \mathbb{H}$ için,

- $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$
- $T(\vec{v}q) = T(\vec{v})q$

özelliklerini sağlıyorsa T dönüşümüne endomorfizm dönüşümü denir.

Özel olarak; eğer $V = W$ ise V uzayından V uzayına tanımlı tüm endomorfizmlerin kümesi bir halkadır. Bu halkaya endomorfizmalar halkası denir ve $End_{\mathbb{H}}V$ ile gösterilir [8].

Teorem 4.5. V uzayından V uzayına tanımlı tüm endomorfizmlerin kümesi kuaterniyonik değerli $n \times n$ tipinde matrislerin kümesine izomorftur ve $End_{\mathbb{H}}V \cong M_n(\mathbb{H})$ gösterimi ile ifade edilir [8].

Tanım 4.9. V , n -boyutlu kuaterniyonik Hilbert uzayı olsun. Her $T : V \rightarrow V$ endomorfizmi için, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ olmak üzere,

$$\langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, T^*(\vec{v}_2) \rangle$$

olacak şekilde bir tek $T^* : V \rightarrow V$ endomorfizmi vardır. Hatta, $T \rightarrow T^*$ dönüşümü, $\forall T, T_1, T_2 \in End_{\mathbb{H}}V$ için,

- $T^{**} = T$
- $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
- $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$

özelliklerini sağlıyor ise $End_{\mathbb{H}}V$ halkası üzerinde bir involutif (terslenebilir) operatördür denir [8].

4.2 $\mathbb{H}^n$ Uzayı

Tanım 4.10. Bileşenleri reel kuaterniyonlar olan $\mathbb{H}^n$ kümesi,

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \cdots \times \mathbb{H} = \{\vec{q} = (q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n) \mid q_i \in \mathbb{H}, 1 \leq i \leq n\}$$

ile ifade edilir. Bu kümenin her bir bileşeni kuaterniyon olduğundan, bu bileşenler $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$, $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$, $\dots$, $q_n = S_{q_n} + V_{q_n}$ olarak yazıldığında,

$$\begin{aligned} \vec{q} &= (S_{q_1} + V_{q_1}, S_{q_2} + V_{q_2}, \dots, S_{q_n} + V_{q_n}) \\ &= (S_{q_1}, S_{q_2}, \dots, S_{q_n}) + (V_{q_1}, V_{q_2}, \dots, V_{q_n}) \\ &= S_{\vec{q}} + V_{\vec{q}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Yani, $\mathbb{H}^n$ kümesinin her bir elemanı $S_{\vec{q}}$ reel (skaler) kısım ve $V_{\vec{q}}$ vektörel kısım toplamı olarak yazılır.

Tanım 4.11. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde $\boxplus : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ toplama işlemi, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\vec{q} \boxplus \vec{p} = (q_1 \oplus p_1, q_2 \oplus p_2, \dots, q_n \oplus p_n) \quad (4.9)$$

veya $\forall \vec{q} = S_{\vec{q}} + V_{\vec{q}}, \vec{p} = S_{\vec{p}} + V_{\vec{p}} \in \mathbb{H}^n$ olmak üzere,

$$\vec{q} \boxplus \vec{p} = S_{\vec{q} \boxplus \vec{p}} + V_{\vec{q} \boxplus \vec{p}} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Sonuç 4.1. $\mathbb{H}^n$ kümesinin toplama işlemine göre birim elemanı $\vec{0}_{\mathbb{H}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ olmak üzere, $(\mathbb{H}^n, \boxplus)$ ikilisi toplama işlemine göre bir Abel gruptur [3].

İspat.

- i. Kapalılık Özelliği: $\vec{q} \boxplus \vec{p} \in \mathbb{H}^n$.
- ii. Birleşme Özelliği: $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{H}^n$ için, $(\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxplus \vec{r} = \vec{q} \boxplus (\vec{p} \boxplus \vec{r})$ eşitliği sağlanır.
- iii. Ters Eleman: $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için, $-\vec{q} = (-q_1, -q_2, \dots, -q_n)$.
- iv. Birim Eleman: $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için, $\vec{q} \boxplus \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.
- v. Değişme Özelliği: $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ için, $\vec{q} \boxplus \vec{p} = \vec{p} \boxplus \vec{q}$ eşitliği sağlanır.

Sonuç olarak, $(\mathbb{H}^n, \boxplus)$ ikilisi bir Abel gruptur. ■

Tanım 4.12. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde $\odot : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^n$ skaler ile çarpım işlemi, $\forall \vec{q} = (q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n, \lambda \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

$$\vec{q} \odot \lambda = (q_i) \odot \lambda = (q_i \times \lambda) = (q_1 \times \lambda, q_2 \times \lambda, \dots, q_n \times \lambda) \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.6. Skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{H}$ için,

- i. $(\vec{q} \boxplus \vec{p}) \odot \lambda = (\vec{q} \odot \lambda) \boxplus (\vec{p} \odot \lambda)$
- ii. $\vec{q} \odot (\lambda \oplus \mu) = (\vec{q} \odot \lambda) \boxplus (\vec{q} \odot \mu)$
- iii. $\vec{q} \odot (\lambda \times \mu) = (\vec{q} \odot \lambda) \odot \mu$
- iv. $\vec{q} \odot 1_{\mathbb{H}} = \vec{q}$

özelliklerini sağlar.

Sonuç 4.2. $\{\mathbb{H}^n, \boxplus, \mathbb{H}, \oplus, \times, \odot\} = \mathbb{H}^n$ altılısı bir sağ $\mathbb{H}$ -modüldür. Bu modülün elemanlarını *kuaterniyon n-vektör* olarak adlandıracaktır.

Örnek 4.1. $\vec{q} = (i+2j+k, -2i+3j-5k) \in \mathbb{H}_p^2$, $\vec{p} = (3+2k, 2-3i+j) \in \mathbb{H}^2$ verilsin. $\vec{q}$ bir uzaysal kuaterniyon 2-vektör olduğundan aynı zamanda $V_{\vec{q}} = (i+2j+k, -2i+3j-5k)$ olarak yazılır. $\vec{p} = (3, 2) + (2k, -3i+j) = S_{\vec{p}} + V_{\vec{p}}$ olarak yazılabilir. $\lambda = 4 \in \mathbb{R}$ bir skaler olmak üzere,

$$\begin{aligned} 4\vec{q} \boxplus \vec{p} &= (4i + 8j + 4k, -8i + 12j - 20k) \boxplus (3 + 2k, 2 - 3i + j) \\ &= (3 + 4i + 10j + 4k, 2 - 11i + 13j - 20k) \in \mathbb{H}^2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 4.13. Bir kuaterniyon n -vektör eşitlik 4.8 ile verilen $\vec{q} = S_{\vec{q}} + V_{\vec{q}}$ şeklindeki yazılışa göre sadece vektörel kısımdan oluşuyorsa, yani, reel kısmı sıfır vektörü ise bu kuaterniyon n -vektöre **uzaysal** (pure, vektörel) **kuaterniyon n -vektör** denir. Ayrıca, bir kuaterniyon n -vektörün her bir bileşeninin birer uzaysal kuaterniyon olması ile de bu kuaterniyon n -vektör uzaysal kuaterniyon n -vektör olarak adlandırılır. Uzaysal kuaterniyon n -vektörlerin uzayı,

$$\mathbb{H}_p^n = \mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p \times \cdots \times \mathbb{H}_p = \{\vec{q} = (q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n) \mid q_i \in \mathbb{H}_p, 1 \leq i \leq n\}$$

ile ifade edilir. $\mathbb{H}^n$ kümesi için sağlanan işlemler $\mathbb{H}_p^n$ kümesi için de sağlandığından $\{\mathbb{H}_p^n, \boxplus, \boxtimes, \oplus, \times, \odot\} = \mathbb{H}_p^n$ altılısı da bir uzaysal sağ $\mathbb{H}$ -modüldür.

4.2.1 $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{H}$ -Modül) Uzayında İç Çarpım ve Norm

Teorem 4.7. $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n, q_i, p_i \in \mathbb{H} (1 \leq i \leq n)$ için,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times p_i \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanan $\langle, \rangle_{\mathbb{H}^n} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur [3].

İspat.

i. Simetri özelliği: $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times p_i = \sum_{i=1}^n \overline{(\bar{p}_i \times q_i)} = \overline{\left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \times q_i \right)} = \overline{\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}},$$

ii. Bilineerlik özelliği: $\forall \vec{q}, \vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{H}$ için,

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}, \vec{p} \boxplus \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} \oplus \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}, \\ \langle \vec{q} \boxplus \vec{p}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n} \oplus \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}, \\ \langle \vec{q} \odot \lambda, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \sum_{i=1}^n \overline{(q_i \times \lambda)} \times p_i = \sum_{i=1}^n (\bar{\lambda} \times \bar{q}_i) \times p_i = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda} \times (\bar{q}_i \times p_i) = \bar{\lambda} \times \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}, \\ \langle \vec{q}, \vec{p} \odot \lambda \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times (p_i \times \lambda) = \sum_{i=1}^n ((\bar{q}_i \times p_i) \times \lambda) = \left(\sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times p_i \right) \times \lambda = \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} \times \lambda,\end{aligned}$$

iii. Pozitif tanımlılık özelliği: $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için, Tanım 2.36 yardımıyla,

$$\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \|q_1\|^2 + \|q_2\|^2 + \dots + \|q_n\|^2 \geq 0 \text{ ve } \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n} = 0 \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{0}$$

sağlanır. ■

Tanım 4.14. $\langle, \rangle_{\mathbb{H}^n}$ fonksiyonu $\mathbb{H}^n$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{H}^n$ üzerinde **simplektik çarpma** denir. Ayrıca, $\mathbb{H}^n$ kümesi de bu çarpım ile birlikte simplektik çarpım uzayıdır [3, 8].

Not 4.2. $\mathbb{H}^n$ uzayı bir sol $\mathbb{H}$ -modül iken, skaler ile çarpım, $\odot : \mathbb{H} \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ dönüşümü ile,

$$\lambda \odot \vec{q} = \lambda \odot (q_i) = (\lambda \times q_i) = (\lambda \times q_1, \lambda \times q_2, \dots, \lambda \times q_n) \quad (4.13)$$

şeklindedir. Simplektik çarpım,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n q_i \times \bar{p}_i \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlı olup bilineerlik özellikleri,

- $\langle \vec{q}, \lambda \odot \vec{p} \rangle = \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle \times \bar{\lambda}$
- $\langle \lambda \odot \vec{q}, \vec{p} \rangle = \lambda \times \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle$

olarak elde edilir.

Tanım 4.15. $\mathbb{H}^n$ simplektik çarpım uzayında $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^n} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ norm işlemi, $1 \leq i \leq n$ için,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} = \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times q_i} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır. $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|q_i\|^2} = \sqrt{\|q_1\|^2 + \|q_2\|^2 + \dots + \|q_n\|^2} \quad (4.16)$$

pozitif reel sayısıdır.

Tanım 4.16. $\mathbb{H}^n$ bir simplektik çarpım uzayı ve $\vec{q} \in \mathbb{H}^n$ olsun. $\vec{q}$ n -vektörünü normuna bölerek elde edilen $\vec{q}_0 = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}}$ n -vektörüne **normlanmış n -vektör** denir.

Teorem 4.8. $\mathbb{H}^n$ bir simplektik çarpım uzayı ve $\vec{q} \in \mathbb{H}^n$ olsun. $\vec{q}_0 = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}}$ n -vektörü birim vektördür.

Tanım 4.17. $\mathbb{H}^n$ simplektik çarpım uzayında $\vec{q} \in \mathbb{H}^n$ için $\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} = 1$ ise $\vec{q}$ vektörüne **birim vektör** denir [8].

Örnek 4.2. $\vec{q} = (1-2i+k, 3j-5k)$, $\vec{p} = (i-2j, 2-3j+k) \in \mathbb{H}^2$ için, $\lambda = 3+2i-j \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $\langle \vec{q} \odot \lambda, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^2}$ değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \vec{q} \odot \lambda &= (q_1 \times \lambda, q_2 \times \lambda) \\ &= ((1-2i+k) \times (3+2i-j), (3j-5k) \times (3+2i-j)) \\ &= (7-3i+j+5k, 3-5i-j-21k) \\ \overline{\vec{q} \odot \lambda} &= (7+3i-j-5k, 3+5i+j+21k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{q} \odot \lambda, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^2} &= (\overline{q_1 \times \lambda}) \times p_1 \oplus (\overline{q_2 \times \lambda}) \times p_2 \\ &= (-5-3i-19j-5k) \oplus (-12+74i-12j+30k) \\ &= -17+71i-31j+25k \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} &= \sqrt{\|\vec{q}_1\|^2 + \|\vec{q}_2\|^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{1+4+1})^2 + (\sqrt{9+25})^2} \\ &= \sqrt{6+34} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

4.2.2 $\mathbb{H}_p^n$ ($\mathbb{H}$ -Modül) Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 4.18. $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}_p^n$ için,

$$\begin{aligned} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} : \mathbb{H}_p^n \times \mathbb{H}_p^n &\rightarrow \mathbb{H}_p^n \\ (\vec{q}, \vec{p}) &\rightarrow \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} \end{aligned}$$

işlemi iki uzaysal kuaterniyon n -vektörün vektörel çarpımı işlemidir ve

$$\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} = (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1, q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2, \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n) \quad (4.17)$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.9. Vektörel çarpım işlemi, $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i), \vec{r} = (r_i) \in \mathbb{H}_p^n$, $\forall q_i = b_{1i}\vec{e}_1 + c_{1i}\vec{e}_2 + d_{1i}\vec{e}_3, p_i = b_{2i}\vec{e}_1 + c_{2i}\vec{e}_2 + d_{2i}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ ($1 \leq i \leq n$), $\lambda = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ için,

- i. $\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} = -\vec{p} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{q}$
- ii. $\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \boxplus \vec{r}) = (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) \boxplus (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{r})$
- iii. $b_{ki}\lambda_1 + c_{ki}\lambda_2 + d_{ki}\lambda_3 = 0$ ($1 \leq k \leq 2$) ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere,

$$[(\vec{q} \odot \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}] \boxplus [\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \odot \lambda)] = (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) \odot \lambda$$
- iv. $\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{r}) \boxplus \vec{p} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{r} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{q}) \boxplus \vec{r} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) = \vec{0}_{\mathbb{H}_p^n}$

özelliklerini sağlar.

İspat.

i. $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}_p^n$ için, Teorem 2.24 (i.) ile verilen $q \wedge_{\mathbb{H}_p} p = -p \wedge_{\mathbb{H}_p} q$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} &= (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1, q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2, \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n) \\ &= (-p_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} q_1, -p_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} q_2, \dots, -p_n \wedge_{\mathbb{H}_p} q_n) \\ &= -\vec{p} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{q} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i), \vec{r} = (r_i) \in \mathbb{H}_p^n$ için, Teorem 2.24 (ii.) ile verilen $q \wedge_{\mathbb{H}_p} (p \oplus r) = (q \wedge_{\mathbb{H}_p} p) \oplus (q \wedge_{\mathbb{H}_p} r)$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \boxplus \vec{r}) &= (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_1 \oplus r_1), q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_2 \oplus r_2), \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_n \oplus r_n)) \\ &= ((q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1) \oplus (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} r_1), (q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2) \oplus (q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} r_2), \\ &\quad \dots, (q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n) \oplus (q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} r_n)) \\ &= (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1, q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2, \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n) \\ &\quad \boxplus (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} r_1, q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} r_2, \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} r_n) \\ &= (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) \boxplus (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{r}) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}_p^n$, $\lambda \in \mathbb{H}_p$ için, Tanım 4.12 ile verilen $\odot : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^n$ işlemi kullanılarak,

$$(\vec{q} \odot \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} = ((q_1 \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1, (q_2 \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2, \dots, (q_n \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n)$$

ve

$$\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \odot \lambda) = (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_1 \times \lambda), q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_2 \times \lambda), \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_n \times \lambda))$$

yazılabilir.

Teorem 2.24 (v.) ile verilen $[(q \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} p] \oplus [q \wedge_{\mathbb{H}_p} (p \times \lambda)] = (q \wedge_{\mathbb{H}_p} p) \times \lambda$ özelliği kullanılırsa, $b_{ki}\lambda_1 + c_{ki}\lambda_2 + d_{ki}\lambda_3 = 0$ ($1 \leq k \leq 2$) ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} [(\vec{q} \odot \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}] \boxplus [\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \odot \lambda)] &= [(q_1 \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1 \oplus q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_1 \times \lambda), \\ &\quad (q_2 \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2 \oplus q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_2 \times \lambda), \dots \\ &\quad , (q_n \times \lambda) \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n \oplus q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} (p_n \times \lambda)] \\ &= ((q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1) \times \lambda, (q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2) \times \lambda, \dots \\ &\quad , (q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n) \times \lambda) \\ &= (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) \odot \lambda \end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.3 Simplektik Dönüşüm

Tanım 4.19. $\mathbb{H}^n$ bir simplektik modül olsun. $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ için, $\sigma : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ lineer dönüşümü $\langle \sigma(\vec{q}), \sigma(\vec{p}) \rangle = \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle$ eşitliğini sağlıyorsa σ dönüşümüne $\mathbb{H}^n$ üzerinde simplektik dönüşüm denir [8, 20].

Teorem 4.10. $\sigma : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ simplektik dönüşüm olsun. σ , birebir ve örtendir [8, 9].

Teorem 4.11. $\sigma : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ simplektik dönüşüm ise σ nın tersi olan σ^{-1} dönüşümü de $\mathbb{H}^n$ üzerinde bir simplektik dönüşümdür [18, 20].

Tanım 4.20. Simplektik dönüşümlerin kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba simplektik grup denir ve $Sp(n, \mathbb{H})$ ile gösterilir [18, 20].

$$S_p(n, \mathbb{H}) = \{ \sigma \mid \sigma : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n, \forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n, \langle \sigma(\vec{q}), \sigma(\vec{p}) \rangle = \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle \} \quad (4.18)$$

Teorem 4.12. $\mathbb{H}^n$ üzerindeki standart baz $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ olmak üzere $\vec{q} \in \mathbb{H}^n$ birim vektör ise $\sigma(\vec{e}_i) = \vec{q}$ ($1 \leq i \leq n$) olacak şekilde bir $\sigma : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ simplektik dönüşümü vardır [9].

Teorem 4.13. σ , $\mathbb{H}^n$ üzerinde bir simplektik dönüşüm olsun. Eğer, σ dönüşümüne karşılık gelen matris $Q = [\vec{q}_{ij}]_{n \times n}$ ise $(\overline{Q})^T Q = [\delta_{ij}]$ sağlanır [18, 20].

Tanım 4.21. Simplektik dönüşümlerin grubuna izomorf olan matrislerin grubuna simplektik matrislerin grubu denir ve $S_p(n)$ ile gösterilir [9, 20].

$$S_p(n) = \left\{ Q \in \mathbb{H}_n^n \mid (\overline{Q})^T Q = I_n \right\} \quad (4.19)$$

Tanım 4.22. Tanım 4.15 göz önüne alındığında, $\forall q_i \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\sum_{i=1}^n \|q_i\|_{\mathbb{H}^n}^2 = 1 \quad (4.20)$$

iken, $\mathbb{S}^n = \{ \vec{q} \in \mathbb{H}^n \mid \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} = 1 \}$ kümesine $\mathbb{H}^n$ üzerinde birim küre adı verilir [8, 9].

Bu bölümde, $\mathbb{H}^n$ kümesinin elemanlarının, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ kümelerinin elemanları cinsinden yazılışları incelendi.

5.1 $\mathbb{H}^n$ Kümesi Üzerinde Halka Yapısı

Sonuç 4.1 ile $(\mathbb{H}^n, \oplus)$ Abel grup olduğu söylendi. Şimdi, bu toplama işlemi ile birlikte $\mathbb{H}^n$ uzayının halka yapısını tarif etmek için bir çarpma işlemi tanımlayacağız.

Tanım 5.1. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde $\boxtimes : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ çarpma işlemi, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemi $\mathbb{H}^n$ uzayında **sıralı çarpım** işlemi olarak adlandıracağız.

Sonuç 5.1. $(\mathbb{H}^n, \oplus, \boxtimes)$ üçlüsü birimli bir halkadır.

İspat.

i. Birleşme Özelliği: Sonuç 2.16 ile verilen, kuaterniyonlarda birleşme özelliği kullanıldığında, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$(\vec{q} \boxtimes \vec{p}) \boxtimes \vec{r} = \vec{q} \boxtimes (\vec{p} \boxtimes \vec{r})$$

eşitliği sağlanır.

ii. Dağılma Özelliği: Sonuç 2.16 ile verilen, kuaterniyonlarda sağdan ve soldan dağılma özellikleri kullanıldığında, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$(\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxtimes \vec{r} = (\vec{q} \boxtimes \vec{r}) \boxplus (\vec{p} \boxtimes \vec{r}) \text{ ve } \vec{q} \boxtimes (\vec{p} \boxplus \vec{r}) = (\vec{q} \boxtimes \vec{p}) \boxplus (\vec{q} \boxtimes \vec{r})$$

eşitlikleri sağlanır.

iii. Birim Eleman: $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için, $\vec{q} \boxtimes \vec{1} = \vec{1} \boxtimes \vec{q} = \vec{1}$ olduğundan, çarpma işlemine göre birim eleman her bir bileşeni 1 olan $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)$ n -vektörüdür.

Sonuç olarak, $(\mathbb{H}^n, \boxplus, \boxtimes)$ üçlüsü birimli bir halkadır. ■

Not 5.1. Bileşensel olarak değerlendirildiğinde, kuaterniyonlarda değişme özelliği olmadığından $\boxtimes$ işlemi de değişmeli değildir, yani, $\vec{q} \boxtimes \vec{p} \neq \vec{p} \boxtimes \vec{q}$.

Tanım 5.2. $\mathbb{H}^n$ kümesinde iki kuaterniyon n -vektörün eşitliği, $\forall \vec{q} = (q_i) = S_{\vec{q}} + V_{\vec{q}}, \vec{p} = (p_i) = S_{\vec{p}} + V_{\vec{p}} \in \mathbb{H}^n$ olmak üzere,

$$\vec{q} = \vec{p} \Leftrightarrow (q_i) = (p_i) \text{ veya } S_{\vec{q}} = S_{\vec{p}} \text{ ve } V_{\vec{q}} = V_{\vec{p}} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.3. Bir $\vec{q} \in \mathbb{H}^n$ elemanının eşleniği $\bar{\vec{q}}$ ile gösterilir ve $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = S_{\vec{q}} + V_{\vec{q}}$ olmak üzere,

$$\bar{\vec{q}} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n) = (S_{q_1} - V_{q_1}, S_{q_2} - V_{q_2}, \dots, S_{q_n} - V_{q_n}) = S_{\vec{q}} - V_{\vec{q}} \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.1. Eşlenik işlemi, $\forall \vec{q}, \vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{H}^n$ için,

- i. $\overline{\vec{q} \boxplus \vec{p}} = \bar{\vec{q}} \boxplus \bar{\vec{p}}$
- ii. $\overline{\vec{q} \boxtimes \vec{p}} = \bar{\vec{p}} \boxtimes \bar{\vec{q}}$
- iii. $\overline{\bar{\vec{q}}} = \vec{q}$
- iv. $S_{\vec{q}} = \frac{\vec{q} \boxplus \bar{\vec{q}}}{2}$
- v. $V_{\vec{q}} = \frac{\vec{q} \boxplus (-\bar{\vec{q}})}{2}$
- vi. $\vec{q} = (S_{q_1}, S_{q_2}, \dots, S_{q_n}) = S_{\vec{q}}$ ise $\bar{\vec{q}} = \vec{q}$
- vii. $\vec{q} = (V_{q_1}, V_{q_2}, \dots, V_{q_n}) = V_{\vec{q}}$ ise $\bar{\vec{q}} = -\vec{q}$

özelliklerini sağlar.

İspat.

ii. Tanım 5.1 ile verilen çarpma işlemi dikkate alındığında, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\overline{\vec{q} \boxtimes \vec{p}} = (\overline{q_1 \times p_1}, \overline{q_2 \times p_2}, \dots, \overline{q_n \times p_n})$$

yazılabilir. Teorem 2.18 (ii.) ile verilen kuaterniyonlarda eşlenik işlemi özelliğinden,

$$\overline{\vec{q} \boxtimes \vec{p}} = (\overline{p_1} \times \overline{q_1}, \overline{p_2} \times \overline{q_2}, \dots, \overline{p_n} \times \overline{q_n}) = \vec{p} \boxtimes \vec{q}$$

elde edilir. ■

5.2 $\mathbb{H}^n$ Kümesi Üzerinde Reel Sıralı n -liler Yardımı ile Gösterim

Bir reel kuaterniyon n -vektörünü, sıralı n -lilerin tanımından yola çıkarak $\mathbb{R}^n$ uzayının elemanları cinsinden tanımlayalım. Burada öncelikle, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki elemanların Tanım 2.27 ile verilen birimlerle çarpımı için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 5.4. $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $q \in \mathbb{H}$ için,

$$\vec{A}q = (a_1 \times q, a_2 \times q, \dots, a_n \times q) \quad (5.4)$$

işlemini tanımlayalım. Burada, $\forall a_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) ve $q \in \mathbb{H}$ olduğundan $a_i \times q \in \mathbb{H}$ olup $\vec{A}q \in \mathbb{H}^n$ olduğu görülür. Böylece,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ (\vec{A}, q) &\rightarrow \vec{A}q = (a_1 \times q, a_2 \times q, \dots, a_n \times q) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 5.5. $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ kuaterniyon sıralı n -lisi $\mathbb{H}^n$ kümesinin bir elemanıdır. Burada,

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \vec{e}_0 + b_1 \vec{e}_1 + c_1 \vec{e}_2 + d_1 \vec{e}_3 \in \mathbb{H} \\ q_2 &= a_2 \vec{e}_0 + b_2 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + d_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H} \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= a_n \vec{e}_0 + b_n \vec{e}_1 + c_n \vec{e}_2 + d_n \vec{e}_3 \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

kuaterniyonları için,

$$\vec{q} = (a_1\vec{e}_0 + b_1\vec{e}_1 + c_1\vec{e}_2 + d_1\vec{e}_3, a_2\vec{e}_0 + b_2\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + d_2\vec{e}_3, \dots, a_n\vec{e}_0 + b_n\vec{e}_1 + c_n\vec{e}_2 + d_n\vec{e}_3)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\vec{q} &= (a_1, a_2, \dots, a_n)\vec{e}_0 + (b_1, b_2, \dots, b_n)\vec{e}_1 + (c_1, c_2, \dots, c_n)\vec{e}_2 + (d_1, d_2, \dots, d_n)\vec{e}_3 \\ &= \vec{A}\vec{e}_0 + \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3\end{aligned}\quad (5.5)$$

elde edilir. Böylece, $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\vec{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere kuaterniyon n -vektörlerin kümesi,

$$\mathbb{H}^n = \{ \vec{q} \mid \vec{q} = \vec{A}\vec{e}_0 + \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^n \}$$

şeklinde de tanımlanır.

Tanım 4.10 ile verilen bir n -vektörün skaler ve vektörel kısımlarının toplamı şeklinde yazılması göz önüne alındığında, benzer şekilde $S_{\vec{q}} = \vec{A}\vec{e}_0$ skaler kısım ve $V_{\vec{q}} = \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3$ vektörel kısım olduğu açıktır.

Sonuç 5.2. Tanım 4.13 göz önüne alınırsa, uzaysal kuaterniyon n -vektörlerin uzayı, $\forall \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\vec{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\mathbb{H}_p^n = \{ \vec{q} \mid \vec{q} = \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^n \} \quad (5.6)$$

olarak yazılabilir.

Sonuç 5.3. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde $\forall \vec{q} = (q_i)$, $\vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ olmak üzere, Tanım 5.1 ile $\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n)$ şeklinde verilen sıralı çarpım işlemi, Tanım 5.5 ile verilen gösterim kullanıldığında,

$$\forall \vec{q} = \vec{A}_1\vec{e}_0 + \vec{B}_1\vec{e}_1 + \vec{C}_1\vec{e}_2 + \vec{D}_1\vec{e}_3, \vec{p} = \vec{A}_2\vec{e}_0 + \vec{B}_2\vec{e}_1 + \vec{C}_2\vec{e}_2 + \vec{D}_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n \text{ için,}$$

$$\begin{aligned}\vec{q} \boxtimes \vec{p} &= (\vec{A}_1\vec{e}_0 + \vec{B}_1\vec{e}_1 + \vec{C}_1\vec{e}_2 + \vec{D}_1\vec{e}_3) \boxtimes (\vec{A}_2\vec{e}_0 + \vec{B}_2\vec{e}_1 + \vec{C}_2\vec{e}_2 + \vec{D}_2\vec{e}_3) \\ &= (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 - \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \vec{e}_0 \\ &\quad + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_1 \\ &\quad + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 + \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_2 \\ &\quad + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1) \vec{e}_3\end{aligned}\quad (5.7)$$

ifadesine eşittir.

İspat. Tanım 5.1 ile tanımlanan $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde çarpma işlemi, $\forall \vec{q} = (q_i)$, $\vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall q_i = a_{1i}\vec{e}_0 + b_{1i}\vec{e}_1 + c_{1i}\vec{e}_2 + d_{1i}\vec{e}_3$, $p_i = a_{2i}\vec{e}_0 + b_{2i}\vec{e}_1 + c_{2i}\vec{e}_2 + d_{2i}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n) \in \mathbb{H}^n \quad (5.8)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_1 \times p_1 &= (a_{11}\vec{e}_0 + b_{11}\vec{e}_1 + c_{11}\vec{e}_2 + d_{11}\vec{e}_3) \times (a_{21}\vec{e}_0 + b_{21}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + d_{21}\vec{e}_3) \\ &= (a_{11}a_{21} - b_{11}b_{21} - c_{11}c_{21} - d_{11}d_{21})\vec{e}_0 + (a_{11}b_{21} + b_{11}a_{21} + c_{11}d_{21} - d_{11}c_{21})\vec{e}_1 \\ &\quad + (a_{11}c_{21} + c_{11}a_{21} - b_{11}d_{21} + d_{11}b_{21})\vec{e}_2 + (a_{11}d_{21} + d_{11}a_{21} + b_{11}c_{21} - c_{11}b_{21})\vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 \times p_2 &= (a_{12}\vec{e}_0 + b_{12}\vec{e}_1 + c_{12}\vec{e}_2 + d_{12}\vec{e}_3) \times (a_{22}\vec{e}_0 + b_{22}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + d_{22}\vec{e}_3) \\ &= (a_{12}a_{22} - b_{12}b_{22} - c_{12}c_{22} - d_{12}d_{22})\vec{e}_0 + (a_{12}b_{22} + b_{12}a_{22} + c_{12}d_{22} - d_{12}c_{22})\vec{e}_1 \\ &\quad + (a_{12}c_{22} + c_{12}a_{22} - b_{12}d_{22} + d_{12}b_{22})\vec{e}_2 + (a_{12}d_{22} + d_{12}a_{22} + b_{12}c_{22} - c_{12}b_{22})\vec{e}_3 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned} q_n \times p_n &= (a_{1n}\vec{e}_0 + b_{1n}\vec{e}_1 + c_{1n}\vec{e}_2 + d_{1n}\vec{e}_3) \times (a_{2n}\vec{e}_0 + b_{2n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + d_{2n}\vec{e}_3) \\ &= (a_{1n}a_{2n} - b_{1n}b_{2n} - c_{1n}c_{2n} - d_{1n}d_{2n})\vec{e}_0 + (a_{1n}b_{2n} + b_{1n}a_{2n} + c_{1n}d_{2n} - d_{1n}c_{2n})\vec{e}_1 \\ &\quad + (a_{1n}c_{2n} + c_{1n}a_{2n} - b_{1n}d_{2n} + d_{1n}b_{2n})\vec{e}_2 + (a_{1n}d_{2n} + d_{1n}a_{2n} + b_{1n}c_{2n} - c_{1n}b_{2n})\vec{e}_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler yerine yazılır

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes \vec{p} &= (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n) \\ &= [(a_{11}a_{21} - b_{11}b_{21} - c_{11}c_{21} - d_{11}d_{21}), (a_{12}a_{22} - b_{12}b_{22} - c_{12}c_{22} - d_{12}d_{22}) \\ &\quad , \dots, (a_{1n}a_{2n} - b_{1n}b_{2n} - c_{1n}c_{2n} - d_{1n}d_{2n})]\vec{e}_0 \\ &\quad + [(a_{11}b_{21} + b_{11}a_{21} + c_{11}d_{21} - d_{11}c_{21}), (a_{12}b_{22} + b_{12}a_{22} + c_{12}d_{22} - d_{12}c_{22}) \\ &\quad , \dots, (a_{1n}b_{2n} + b_{1n}a_{2n} + c_{1n}d_{2n} - d_{1n}c_{2n})]\vec{e}_1 \\ &\quad + [(a_{11}c_{21} + c_{11}a_{21} - b_{11}d_{21} + d_{11}b_{21}), (a_{12}c_{22} + c_{12}a_{22} - b_{12}d_{22} + d_{12}b_{22}) \\ &\quad , \dots, (a_{1n}c_{2n} + c_{1n}a_{2n} - b_{1n}d_{2n} + d_{1n}b_{2n})]\vec{e}_2 \\ &\quad + [(a_{11}d_{21} + d_{11}a_{21} + b_{11}c_{21} - c_{11}b_{21}), (a_{12}d_{22} + d_{12}a_{22} + b_{12}c_{22} - c_{12}b_{22}) \\ &\quad , \dots, (a_{1n}d_{2n} + d_{1n}a_{2n} + b_{1n}c_{2n} - c_{1n}b_{2n})]\vec{e}_3 \end{aligned}$$

ve birim vektörlere göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\vec{q} \boxtimes \vec{p} = & [(a_{11}a_{21}, a_{12}a_{22}, \dots, a_{1n}a_{2n}) - (b_{11}b_{21}, b_{12}b_{22}, \dots, b_{1n}b_{2n}) \\
& - (c_{11}c_{21}, c_{12}c_{22}, \dots, c_{1n}c_{2n}) - (d_{11}d_{21}, d_{12}d_{22}, \dots, d_{1n}d_{2n})] \vec{e}_0 \\
& + [(a_{11}b_{21}, a_{12}b_{22}, \dots, a_{1n}b_{2n}) + (b_{11}a_{21}, b_{12}a_{22}, \dots, b_{1n}a_{2n}) \\
& + (c_{11}d_{21}, c_{12}d_{22}, \dots, c_{1n}d_{2n}) - (d_{11}c_{21}, d_{12}c_{22}, \dots, d_{1n}c_{2n})] \vec{e}_1 \\
& + [(a_{11}c_{21}, a_{12}c_{22}, \dots, a_{1n}c_{2n}) + (c_{11}a_{21}, c_{12}a_{22}, \dots, c_{1n}a_{2n}) \\
& - (b_{11}d_{21}, b_{12}d_{22}, \dots, b_{1n}d_{2n}) + (d_{11}b_{21}, d_{12}b_{22}, \dots, d_{1n}b_{2n})] \vec{e}_2 \\
& + [(a_{11}d_{21}, a_{12}d_{22}, \dots, a_{1n}d_{2n}) + (d_{11}a_{21}, d_{12}a_{22}, \dots, d_{1n}a_{2n}) \\
& + (b_{11}c_{21}, b_{12}c_{22}, \dots, b_{1n}c_{2n}) - (c_{11}b_{21}, c_{12}b_{22}, \dots, c_{1n}b_{2n})] \vec{e}_3
\end{aligned}$$

kuaterniyon n -vektörü elde edilir. $\vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, $\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n})$, $\vec{A}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\vec{B}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$, $\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n})$, $\vec{D}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde tanımlı çarpma işlemi, (5.7) eşitliğindeki gibi elde edilir. ■

Sonuç 5.4. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında uzaysal kuaterniyon n -vektörlerin simplektik çarpımı,

$\forall \vec{q} = \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3$, $\vec{p} = \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p^n$ ve $\forall \vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, $\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n})$, $\vec{B}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$, $\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n})$, $\vec{D}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned}
\vec{q} \boxtimes \vec{p} = & (\vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3) \boxtimes (\vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3) \\
= & -(\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \vec{e}_0 + (\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2) \vec{e}_1 \\
& + (-\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2) \vec{e}_2 + (\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2) \vec{e}_3
\end{aligned}$$

ifadesine eşittir.

İspat. $\forall a_{ki} \in \mathbb{H}_p^n$ için $a_{ki} = 0$ ($1 \leq k \leq 2$) ($1 \leq i \leq n$) alınarak Sonuç 5.3 ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Sonuç 5.5. $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{H}$ -modül) üzerinde Teorem 4.7 ile $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ olmak üzere $\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times p_i$ şeklinde verilen simplektik çarpma, Tanım 5.5 ile verilen gösterim kullanıldığında, $\forall \vec{q} = \vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3, \vec{p} = \vec{A}_2 \vec{e}_0 + \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \langle \vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3, \vec{A}_2 \vec{e}_0 + \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \rangle_{\mathbb{H}^n} \\ &= (\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{C}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{D}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_0 \\ &\quad + (\langle \vec{A}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{B}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{C}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{D}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_1 \\ &\quad + (\langle \vec{A}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{C}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{B}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{D}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_2 \\ &\quad + (\langle \vec{A}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{D}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{B}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{C}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

ifadesine eşittir.

İspat. Teorem 4.7 ile verilen simplektik çarpma, $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall q_i = a_{1i} \vec{e}_0 + b_{1i} \vec{e}_1 + c_{1i} \vec{e}_2 + d_{1i} \vec{e}_3, p_i = a_{2i} \vec{e}_0 + b_{2i} \vec{e}_1 + c_{2i} \vec{e}_2 + d_{2i} \vec{e}_3 \in \mathbb{H} \ (1 \leq i \leq n)$ için,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \bar{q}_1 \times p_1 + \bar{q}_2 \times p_2 + \cdots + \bar{q}_n \times p_n \in \mathbb{H}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 \times p_1 &= (a_{11} \vec{e}_0 - b_{11} \vec{e}_1 - c_{11} \vec{e}_2 - d_{11} \vec{e}_3) \times (a_{21} \vec{e}_0 + b_{21} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 + d_{21} \vec{e}_3) \\ &= (a_{11} a_{21} + b_{11} b_{21} + c_{11} c_{21} + d_{11} d_{21}) \vec{e}_0 + (a_{11} b_{21} - b_{11} a_{21} - c_{11} d_{21} + d_{11} c_{21}) \vec{e}_1 \\ &\quad + (a_{11} c_{21} - c_{11} a_{21} - d_{11} b_{21} + b_{11} d_{21}) \vec{e}_2 + (a_{11} d_{21} - d_{11} a_{21} - b_{11} c_{21} + c_{11} b_{21}) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 \times p_2 &= (a_{12} \vec{e}_0 - b_{12} \vec{e}_1 - c_{12} \vec{e}_2 - d_{12} \vec{e}_3) \times (a_{22} \vec{e}_0 + b_{22} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 + d_{22} \vec{e}_3) \\ &= (a_{12} a_{22} + b_{12} b_{22} + c_{12} c_{22} + d_{12} d_{22}) \vec{e}_0 + (a_{12} b_{22} - b_{12} a_{22} - c_{12} d_{22} + d_{12} c_{22}) \vec{e}_1 \\ &\quad + (a_{12} c_{22} - c_{12} a_{22} - d_{12} b_{22} + b_{12} d_{22}) \vec{e}_2 + (a_{12} d_{22} - d_{12} a_{22} - b_{12} c_{22} + c_{12} b_{22}) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \bar{q}_n \times p_n &= (a_{1n} \vec{e}_0 - b_{1n} \vec{e}_1 - c_{1n} \vec{e}_2 - d_{1n} \vec{e}_3) \times (a_{2n} \vec{e}_0 + b_{2n} \vec{e}_1 + c_{2n} \vec{e}_2 + d_{2n} \vec{e}_3) \\ &= (a_{1n} a_{2n} + b_{1n} b_{2n} + c_{1n} c_{2n} + d_{1n} d_{2n}) \vec{e}_0 + (a_{1n} b_{2n} - b_{1n} a_{2n} - c_{1n} d_{2n} + d_{1n} c_{2n}) \vec{e}_1 \\ &\quad + (a_{1n} c_{2n} - c_{1n} a_{2n} - d_{1n} b_{2n} + b_{1n} d_{2n}) \vec{e}_2 + (a_{1n} d_{2n} - d_{1n} a_{2n} - b_{1n} c_{2n} + c_{1n} b_{2n}) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılır ve birim vektörlere göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \bar{q}_1 \times p_1 + \bar{q}_2 \times p_2 + \cdots + \bar{q}_n \times p_n \\
&= [(a_{11}a_{21} + b_{11}b_{21} + c_{11}c_{21} + d_{11}d_{21}) + (a_{12}a_{22} + b_{12}b_{22} + c_{12}c_{22} + d_{12}d_{22}) \\
&\quad + \cdots + (a_{1n}a_{2n} + b_{1n}b_{2n} + c_{1n}c_{2n} + d_{1n}d_{2n})] \vec{e}_0 \\
&\quad + [(a_{11}b_{21} - b_{11}a_{21} - c_{11}d_{21} + d_{11}c_{21}) + (a_{12}b_{22} - b_{12}a_{22} - c_{12}d_{22} + d_{12}c_{22}) \\
&\quad + \cdots + (a_{1n}b_{2n} - b_{1n}a_{2n} - c_{1n}d_{2n} + d_{1n}c_{2n})] \vec{e}_1 \\
&\quad + [(a_{11}c_{21} - c_{11}a_{21} + b_{11}d_{21} - d_{11}b_{21}) + (a_{12}c_{22} - c_{12}a_{22} + b_{12}d_{22} - d_{12}b_{22}) \\
&\quad + \cdots + (a_{1n}c_{2n} - c_{1n}a_{2n} + b_{1n}d_{2n} - d_{1n}b_{2n})] \vec{e}_2 \\
&\quad + [(a_{11}d_{21} - d_{11}a_{21} - b_{11}c_{21} + c_{11}b_{21}) + (a_{12}d_{22} - d_{12}a_{22} - b_{12}c_{22} + c_{12}b_{22}) \\
&\quad + \cdots + (a_{1n}d_{2n} - d_{1n}a_{2n} - b_{1n}c_{2n} + c_{1n}b_{2n})] \vec{e}_3 \\
&= [(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \cdots + a_{1n}a_{2n}) + (b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} + \cdots + b_{1n}b_{2n}) \\
&\quad + (c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + \cdots + c_{1n}c_{2n}) + (d_{11}d_{21} + d_{12}d_{22} + \cdots + d_{1n}d_{2n})] \vec{e}_0 \\
&\quad + [(a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{2n}) - (b_{11}a_{21} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1n}a_{2n}) \\
&\quad - (c_{11}d_{21} + c_{12}d_{22} + \cdots + c_{1n}d_{2n}) + (d_{11}c_{21} + d_{12}c_{22} + \cdots + d_{1n}c_{2n})] \vec{e}_1 \\
&\quad + [(a_{11}c_{21} + a_{12}c_{22} + \cdots + a_{1n}c_{2n}) - (c_{11}a_{21} + c_{12}a_{22} + \cdots + c_{1n}a_{2n}) \\
&\quad + (b_{11}d_{21} + b_{12}d_{22} + \cdots + b_{1n}d_{2n}) - (d_{11}b_{21} + d_{12}b_{22} + \cdots + d_{1n}b_{2n})] \vec{e}_2 \\
&\quad + [(a_{11}d_{21} + a_{12}d_{22} + \cdots + a_{1n}d_{2n}) - (d_{11}a_{21} + d_{12}a_{22} + \cdots + d_{1n}a_{2n}) \\
&\quad - (b_{11}c_{21} + b_{12}c_{22} + \cdots + b_{1n}c_{2n}) + (c_{11}b_{21} + c_{12}b_{22} + \cdots + c_{1n}b_{2n})] \vec{e}_3
\end{aligned}$$

kuaterniyonu elde edilir. $\vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, $\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n})$, $\vec{A}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\vec{B}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$, $\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n})$, $\vec{D}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, simplektik iç çarpım, (5.9) eşitliğindeki gibi elde edilir. ■

Sonuç 5.6. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında uzaysal kuaterniyon n -vektörlerin simplektik çarpımı, $\forall \vec{q} = \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3$, $\vec{p} = \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p^n$ ve $\forall \vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, $\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n})$, $\vec{B}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$, $\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n})$, $\vec{D}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}_p^n} &= \langle \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3, \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \rangle_{\mathbb{H}_p^n} \\
&= (\langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{C}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{D}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_0 + (-\langle \vec{C}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{D}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_1 \\
&\quad + (\langle \vec{B}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{D}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_2 + (-\langle \vec{B}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{C}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_3
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\forall \vec{A}_1, \vec{A}_2 \in \mathbb{R}^n$ için $\vec{A}_1 = \vec{0}$, $\vec{A}_2 = \vec{0}$ alınarak Sonuç 5.5 ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Sonuç 5.7. $\mathbb{H}^n$ simplektik çarpım uzayında norm, $\forall \vec{q} = \vec{A}\vec{e}_0 + \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$, $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^n$ için, Sonuç 5.5 ve Tanım 5.5 kullanıldığında,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} = \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}} = \sqrt{\|\vec{A}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\vec{B}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\vec{C}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\vec{D}\|_{\mathbb{R}^n}^2} \quad (5.10)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 5.8. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında uzaysal kuaterniyon n -vektörlerin normu, $\forall \vec{q} = \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$, $\forall \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^n$ için, Sonuç 5.5 ve Tanım 5.5 kullanıldığında,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}_p^n} = \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}} = \sqrt{\|\vec{B}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\vec{C}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\vec{D}\|_{\mathbb{R}^n}^2} \quad (5.11)$$

olarak elde edilir.

5.3 $\mathbb{H}^n$ Kümesi Üzerinde Kompleks Sıralı n -liler Yardımı ile Gösterim

Bölüm 2.3.8 ile bir reel kuaterniyonun kompleks sayılar cinsinden iki türlü ifade edilebildiği verildi. Bu bölümde, Tanım 5.5 ile verilen bir reel kuaterniyon n -vektör için de benzer bir ifadeden bahsedeceğiz. Burada öncelikle, $\mathbb{C}^n$ uzayındaki elemanların Tanım 2.27 ile verilen birimlerle çarpımı için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 5.6. $\forall \vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $q \in \mathbb{H}$ için,

$$\vec{Z}q = (z_1 \times q, z_2 \times q, \dots, z_n \times q)$$

işlemini tanımlayalım. Burada, $\forall z_i \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq n$) ve $q \in \mathbb{H}$ olduğundan $z_i \times q \in \mathbb{H}$ olup $\vec{Z}q \in \mathbb{H}^n$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C}^n \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ (\vec{Z}, q) &\rightarrow \vec{Z}q = (z_1 \times q, z_2 \times q, \dots, z_n \times q) \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 5.7. $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\vec{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\vec{q} = \vec{A}\vec{e}_0 + \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3$ n -vektörü,

$$\vec{q} = (\vec{A} + \vec{B}\vec{e}_1) + (\vec{C} + \vec{D}\vec{e}_1)\vec{e}_2 \quad (5.13)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &= \vec{A} + \vec{B}\vec{e}_1 \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)\vec{e}_1 \\ &= (a_1 + b_1\vec{e}_1, a_2 + b_2\vec{e}_1, \dots, a_n + b_n\vec{e}_1) \\ &= (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{Z}_2 &= \vec{C} + \vec{D}\vec{e}_1 \\ &= (c_1, c_2, \dots, c_n) + (d_1, d_2, \dots, d_n)\vec{e}_1 \\ &= (c_1 + d_1\vec{e}_1, c_2 + d_2\vec{e}_1, \dots, c_n + d_n\vec{e}_1) \\ &= (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

kompleks n -vektörler olmak üzere, kuaterniyon n -vektörlerin kümesi,

$$\mathbb{H}^n = \{ \vec{q} \mid \vec{q} = (\vec{A} + \vec{B}\vec{e}_1) + (\vec{C} + \vec{D}\vec{e}_1)\vec{e}_2 = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1\vec{e}_2, \vec{Z}_1, \vec{W}_1 \in \mathbb{C}^n \} \quad (5.14)$$

şeklinde de tanımlanır. Buna ek olarak, ikinci türlü gösterim,

$$\mathbb{H}^n = \{ \vec{q} \mid \vec{q} = (\vec{A} + \vec{B}\vec{e}_1) + \vec{e}_2(\vec{C} - \vec{D}\vec{e}_1) = \vec{Z}_1 + \vec{e}_2\vec{T}_1, \vec{Z}_1, \vec{T}_1 \in \mathbb{C}^n \} \quad (5.15)$$

şeklindedir.

Sonuç 5.9. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde Tanım 5.1 ile $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ olmak üzere $\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n)$ şeklinde verilen sıralı çarpım işlemi, (5.14) eşitliğindeki yazılışa göre,

$$\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1\vec{e}_2, \vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{W}_2\vec{e}_2 \in \mathbb{H}^n, \vec{Z}_1, \vec{W}_1, \vec{Z}_2, \vec{W}_2 \in \mathbb{C}^n \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes \vec{p} &= (\vec{Z}_1 + \vec{W}_1\vec{e}_2) \boxtimes (\vec{Z}_2 + \vec{W}_2\vec{e}_2) \\ &= \left(\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z}_2 - \vec{W}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W}_2 \right) + \left(\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W}_2 + \vec{W}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z}_2 \right) \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

olarak, ve (5.15) eşitliğindeki yazılışa göre,

$\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{e}_2 \vec{T}_1, \vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{e}_2 \vec{T}_2 \in \mathbb{H}^n, \vec{Z}_1, \vec{T}_1, \vec{Z}_2, \vec{T}_2 \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes \vec{p} &= (\vec{Z}_1 + \vec{e}_2 \vec{T}_1) \boxtimes (\vec{Z}_2 + \vec{e}_2 \vec{T}_2) \\ &= (\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z}_2 - \vec{T}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{T}_2) + \vec{e}_2 (\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{T}_2 + \vec{T}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z}_2) \end{aligned} \quad (5.17)$$

olarak ifade edilir.

İspat. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde Tanım 5.1 ile verilen sıralı çarpım işlemi,

$$\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (z_{11} + w_{11} \vec{e}_2, z_{12} + w_{12} \vec{e}_2, \dots, z_{1n} + w_{1n} \vec{e}_2),$$

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (z_{21} + w_{21} \vec{e}_2, z_{22} + w_{22} \vec{e}_2, \dots, z_{2n} + w_{2n} \vec{e}_2) \in \mathbb{H}^n \text{ için,}$$

$$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n)$$

olmak üzere, Sonuç 2.23 eşitlik (5.15) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} q_1 \times p_1 &= (z_{11} + w_{11} \vec{e}_2) \times (z_{21} + w_{21} \vec{e}_2) \\ &= (z_{11} z_{21} - w_{11} \bar{w}_{21}) + (z_{11} w_{21} + w_{11} \bar{z}_{21}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 \times p_2 &= (z_{12} + w_{12} \vec{e}_2) \times (z_{22} + w_{22} \vec{e}_2) \\ &= (z_{12} z_{22} - w_{12} \bar{w}_{22}) + (z_{12} w_{22} + w_{12} \bar{z}_{22}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned} q_n \times p_n &= (z_{1n} + w_{1n} \vec{e}_2) \times (z_{2n} + w_{2n} \vec{e}_2) \\ &= (z_{1n} z_{2n} - w_{1n} \bar{w}_{2n}) + (z_{1n} w_{2n} + w_{1n} \bar{z}_{2n}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

değerleri $\mathbb{H}$ elemanları cinsinden elde edilir. Bu eşitlikler birim vektörlere göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes \vec{p} &= (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n) \\ &= [(z_{11} z_{21} - w_{11} \bar{w}_{21}) + (z_{11} w_{21} + w_{11} \bar{z}_{21}) \vec{e}_2, \\ &\quad (z_{12} z_{22} - w_{12} \bar{w}_{22}) + (z_{12} w_{22} + w_{12} \bar{z}_{22}) \vec{e}_2, \dots, \\ &\quad (z_{1n} z_{2n} - w_{1n} \bar{w}_{2n}) + (z_{1n} w_{2n} + w_{1n} \bar{z}_{2n}) \vec{e}_2] \\ &= [(z_{11} z_{21} - w_{11} \bar{w}_{21}), (z_{12} z_{22} - w_{12} \bar{w}_{22}), \dots, (z_{1n} z_{2n} - w_{1n} \bar{w}_{2n})] \\ &\quad + [(z_{11} w_{21} + w_{11} \bar{z}_{21}), (z_{12} w_{22} + w_{12} \bar{z}_{22}), \dots, (z_{1n} w_{2n} + w_{1n} \bar{z}_{2n})] \vec{e}_2 \\ &= [(z_{11} z_{21}, z_{12} z_{22}, \dots, z_{1n} z_{2n}) - (w_{11} \bar{w}_{21}, w_{12} \bar{w}_{22}, \dots, w_{1n} \bar{w}_{2n})] \\ &\quad + [(z_{11} w_{21}, z_{12} w_{22}, \dots, z_{1n} w_{2n}) + (w_{11} \bar{z}_{21}, w_{12} \bar{z}_{22}, \dots, w_{1n} \bar{z}_{2n})] \vec{e}_2 \end{aligned}$$

yazılabilir.

$\vec{Z}_1 = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1n})$, $\vec{W}_1 = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n})$, $\vec{Z}_2 = (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2n})$, $\vec{W}_2 = (w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere, çarpma işlemi, (5.16) eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (z_{11} + \vec{e}_2 t_{11}, z_{12} + \vec{e}_2 t_{12}, \dots, z_{1n} + \vec{e}_2 t_{1n}),$$

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (z_{21} + \vec{e}_2 t_{21}, z_{22} + \vec{e}_2 t_{22}, \dots, z_{2n} + \vec{e}_2 t_{2n}) \in \mathbb{H}^n \text{ için,}$$

$$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n)$$

olmak üzere, Sonuç 2.23 eşitlik (2.56) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} q_1 \times p_1 &= (z_{11} + \vec{e}_2 t_{11}) \times (z_{21} + \vec{e}_2 t_{21}) \\ &= (z_{11}z_{21} - \bar{t}_{11}t_{21}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{11}t_{21} + t_{11}z_{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 \times p_2 &= (z_{12} + \vec{e}_2 t_{12}) \times (z_{22} + \vec{e}_2 t_{22}) \\ &= (z_{12}z_{22} - \bar{t}_{12}t_{22}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{12}t_{22} + t_{12}z_{22}) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned} q_n \times p_n &= (z_{1n} + \vec{e}_2 t_{1n}) \times (z_{2n} + \vec{e}_2 t_{2n}) \\ &= (z_{1n}z_{2n} - \bar{t}_{1n}t_{2n}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{1n}t_{2n} + t_{1n}z_{2n}) \end{aligned}$$

değerleri $\mathbb{H}$ elemanları cinsinden elde edilir. Bu eşitlikler birim vektörlere göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes \vec{p} &= (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n) \\ &= [(z_{11}z_{21} - \bar{t}_{11}t_{21}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{11}t_{21} + t_{11}z_{21}), \\ &\quad (z_{12}z_{22} - \bar{t}_{12}t_{22}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{12}t_{22} + t_{12}z_{22}), \dots, \\ &\quad (z_{1n}z_{2n} - \bar{t}_{1n}t_{2n}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{1n}t_{2n} + t_{1n}z_{2n})] \\ &= [(z_{11}z_{21} - \bar{t}_{11}t_{21}), (z_{12}z_{22} - \bar{t}_{12}t_{22}), \dots, (z_{1n}z_{2n} - \bar{t}_{1n}t_{2n})] \\ &\quad + \vec{e}_2 [(\bar{z}_{11}t_{21} + t_{11}z_{21}), (\bar{z}_{12}t_{22} + t_{12}z_{22}), \dots, (\bar{z}_{1n}t_{2n} + t_{1n}z_{2n})] \\ &= [(z_{11}z_{21}, z_{12}z_{22}, \dots, z_{1n}z_{2n}) - (\bar{t}_{11}t_{21}, \bar{t}_{12}t_{22}, \dots, \bar{t}_{1n}t_{2n})] \\ &\quad + \vec{e}_2 [(\bar{z}_{11}t_{21}, \bar{z}_{12}t_{22}, \dots, \bar{z}_{1n}t_{2n}) + (t_{11}z_{21}, t_{12}z_{22}, \dots, t_{1n}z_{2n})] \end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{Z}_1 = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1n})$, $\vec{T}_1 = (t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n})$, $\vec{Z}_2 = (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2n})$, $\vec{T}_2 = (t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere, çarpma işlemi, (5.17) eşitliğindeki gibi elde edilir. ■

Sonuç 5.10. $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{H}$ -modül) üzerinde Teorem 4.7 ile $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ olmak üzere $\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times p_i$ şeklinde verilen simplektik çarpma, (5.14) eşitliğindeki yazılışa göre, $\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2, \vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{W}_2 \vec{e}_2, \vec{Z}_1, \vec{W}_1, \vec{Z}_2, \vec{W}_2 \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \langle \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2, \vec{Z}_2 + \vec{W}_2 \vec{e}_2 \rangle_{\mathbb{H}^n} \\ &= \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{Z}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} + \langle \vec{W}_1, \vec{W}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) + \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{W}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle \vec{W}_1, \vec{Z}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

olarak, ve (5.15) eşitliğindeki yazılışa göre, $\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{e}_2 \vec{T}_1, \vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{e}_2 \vec{T}_2, \vec{Z}_1, \vec{T}_1, \vec{Z}_2, \vec{T}_2 \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \langle \vec{Z}_1 + \vec{e}_2 \vec{T}_1, \vec{Z}_2 + \vec{e}_2 \vec{T}_2 \rangle_{\mathbb{H}^n} \\ &= \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{Z}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} + \langle \vec{T}_1, \vec{T}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) + \vec{e}_2 \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{T}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle \vec{T}_1, \vec{Z}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

ifadesine eşittir.

İspat. Teorem 4.7 ile verilen simplektik çarpma, $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \langle (q_1, q_2, \dots, q_n), (p_1, p_2, \dots, p_n) \rangle_{\mathbb{H}^n} \\ &= \bar{q}_1 \times p_1 + \bar{q}_2 \times p_2 + \dots + \bar{q}_n \times p_n \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (z_{11} + w_{11} \vec{e}_2, z_{12} + w_{12} \vec{e}_2, \dots, z_{1n} + w_{1n} \vec{e}_2), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (z_{21} + w_{21} \vec{e}_2, z_{22} + w_{22} \vec{e}_2, \dots, z_{2n} + w_{2n} \vec{e}_2)$ için, eşitlik (2.55) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 \times p_1 &= (z_{11} - w_{11} \vec{e}_2) \times (z_{21} + w_{21} \vec{e}_2) \\ &= (z_{11} z_{21} + w_{11} \bar{w}_{21}) + (z_{11} w_{21} - w_{11} \bar{z}_{21}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 \times p_2 &= (z_{12} - w_{12} \vec{e}_2) \times (z_{22} + w_{22} \vec{e}_2) \\ &= (z_{12} z_{22} + w_{12} \bar{w}_{22}) + (z_{12} w_{22} - w_{12} \bar{z}_{22}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \bar{q}_n \times p_n &= (z_{1n} - w_{1n} \vec{e}_2) \times (z_{2n} + w_{2n} \vec{e}_2) \\ &= (z_{1n} z_{2n} + w_{1n} \bar{w}_{2n}) + (z_{1n} w_{2n} - w_{1n} \bar{z}_{2n}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılır ve birim vektörlere göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \bar{q}_1 \times p_1 + \bar{q}_2 \times p_2 + \cdots + \bar{q}_n \times p_n \\
&= (z_{11}z_{21} + w_{11}\bar{w}_{21} + z_{12}z_{22} + w_{12}\bar{w}_{22} + \cdots + z_{1n}z_{2n} + w_{1n}\bar{w}_{2n}) \\
&\quad + (z_{11}w_{21} - w_{11}\bar{z}_{21} + z_{12}w_{22} - w_{12}\bar{z}_{22} + \cdots + z_{1n}w_{2n} - w_{1n}\bar{z}_{2n})\vec{e}_2 \\
&= [(z_{11}z_{21} + z_{12}z_{22} + \cdots + z_{1n}z_{2n}) + (w_{11}\bar{w}_{21} + w_{12}\bar{w}_{22} + \cdots + w_{1n}\bar{w}_{2n})] \\
&\quad + [(z_{11}w_{21} + z_{12}w_{22} + \cdots + z_{1n}w_{2n}) - (w_{11}\bar{z}_{21} + w_{12}\bar{z}_{22} + \cdots + w_{1n}\bar{z}_{2n})]\vec{e}_2
\end{aligned}$$

bulunur.

$\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1\vec{e}_2, \vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{W}_2\vec{e}_2$ ve $\vec{Z}_1 = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1n}), \vec{W}_1 = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}), \vec{Z}_2 = (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2n}), \vec{W}_2 = (w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere, Teorem 4.7 ile tanımlanan simplektik çarpma ve Tanım 2.24 ile verilen kompleks değerli iç çarpım göz önüne alındığında (5.18) eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (z_{11} + \vec{e}_2 t_{11}, z_{12} + \vec{e}_2 t_{12}, \dots, z_{1n} + \vec{e}_2 t_{1n}),$$

$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (z_{21} + \vec{e}_2 t_{21}, z_{22} + \vec{e}_2 t_{22}, \dots, z_{2n} + \vec{e}_2 t_{2n})$ için, eşitlik (2.56) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 \times p_1 &= (z_{11} - \vec{e}_2 t_{11}) \times (z_{21} + \vec{e}_2 t_{21}) \\
&= (z_{11}z_{21} + \bar{t}_{11}t_{21}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{11}t_{21} - t_{11}z_{21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_2 \times p_2 &= (z_{12} - \vec{e}_2 t_{12}) \times (z_{22} + \vec{e}_2 t_{22}) \\
&= (z_{12}z_{22} + \bar{t}_{12}t_{22}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{12}t_{22} - t_{12}z_{22})
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\bar{q}_n \times p_n &= (z_{1n} - \vec{e}_2 t_{1n}) \times (z_{2n} + \vec{e}_2 t_{2n}) \\
&= (z_{1n}z_{2n} + \bar{t}_{1n}t_{2n}) + \vec{e}_2 (\bar{z}_{1n}t_{2n} - t_{1n}z_{2n})
\end{aligned}$$

değerleri yerine yazılır ve birim vektörlere göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \bar{q}_1 \times p_1 + \bar{q}_2 \times p_2 + \cdots + \bar{q}_n \times p_n \\
&= (z_{11}z_{21} + \bar{t}_{11}t_{21} + z_{12}z_{22} + \bar{t}_{12}t_{22} + \cdots + z_{1n}z_{2n} + \bar{t}_{1n}t_{2n}) \\
&\quad + \vec{e}_2 (\bar{z}_{11}t_{21} - t_{11}z_{21} + \bar{z}_{12}t_{22} - t_{12}z_{22} + \cdots + \bar{z}_{1n}t_{2n} - t_{1n}z_{2n}) \\
&= [(z_{11}z_{21} + z_{12}z_{22} + \cdots + z_{1n}z_{2n}) + (\bar{t}_{11}t_{21} + \bar{t}_{12}t_{22} + \cdots + \bar{t}_{1n}t_{2n})] \\
&\quad + \vec{e}_2 [(\bar{z}_{11}t_{21} + \bar{z}_{12}t_{22} + \cdots + \bar{z}_{1n}t_{2n}) - (t_{11}z_{21} + t_{12}z_{22} + \cdots + t_{1n}z_{2n})]
\end{aligned}$$

bulunur.

$\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{T}_1 \vec{e}_2, \vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{T}_2 \vec{e}_2$ ve $\vec{Z}_1 = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1n}), \vec{T}_1 = (t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}), \vec{Z}_2 = (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2n}), \vec{T}_2 = (t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere, Teorem 4.7 ile tanımlanan simplektik çarpma ve Tanım 2.24 ile verilen kompleks değerli iç çarpım göz önüne alındığında (5.19) eşitliğindeki gibi elde edilir. ■

Sonuç 5.11. $\mathbb{H}^n$ simplektik çarpım uzayında norm işlemi, $\forall \vec{Z}_1, \vec{W}_1 \in \mathbb{C}^n$ iken $\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2 \in \mathbb{H}^n$ için, Sonuç 5.10 ve (5.18) eşitliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} &= \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}} = \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{Z}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} + \langle \vec{W}_1, \vec{W}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) + \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{W}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle \vec{W}_1, \vec{Z}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) \vec{e}_2 \\ &= \sqrt{\|\vec{Z}_1\|_{\mathbb{C}^n}^2 + \|\vec{W}_1\|_{\mathbb{C}^n}^2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

bulunur. $\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{e}_2 \vec{T}_1 \in \mathbb{H}^n$ için, Sonuç 5.10 ve (5.19) eşitliği kullanıldığında,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n} = \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}} = \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{Z}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} + \langle \vec{T}_1, \vec{T}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) + \vec{e}_2 \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{T}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle \vec{T}_1, \vec{Z}_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) \quad (5.21)$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.2. (5.14) eşitliğindeki gösterim göz önüne alındığında, $\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2$ ve $\forall \vec{Z}_1, \vec{W}_1 \in \mathbb{C}^n$ için $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$,

$$\phi(\vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2) = \phi \left(\begin{bmatrix} z_{11} + z_{12} \vec{e}_2 \\ z_{21} + z_{22} \vec{e}_2 \\ \vdots \\ z_{n1} + z_{n2} \vec{e}_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{n1} \\ -\bar{z}_{12} \\ -\bar{z}_{22} \\ \vdots \\ -\bar{z}_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ -\vec{W}_1 \end{bmatrix} = \phi(\vec{q}) \quad (5.22)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm biyektif bir lineer dönüşümdür [8].

Tablo 5.1 $\mathbb{H}^n$ uzayında farklı gösterimlerle çarpma işlemi

Gösterim	Çarpma İşlemi
$\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$	$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n)$
$\vec{q} = \vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3$ $\vec{p} = \vec{A}_2 \vec{e}_0 + \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3$	$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes \vec{p} = & (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 - \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \vec{e}_0 \\ & + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_1 \\ & + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 + \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_2 \\ & + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$
$\vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2$ $\vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{W}_2 \vec{e}_2$	$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = \left(\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{Z}_2 - \vec{W}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \overline{\vec{W}_2} \right) + \left(\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{W}_2 + \vec{W}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \overline{\vec{Z}_2} \right) \vec{e}_2$

Bu bölümde, bilinen reel ve kompleks vektör uzaylarının tanımlarından, aynı zamanda Bölüm 2.1 ile verilen $\mathbb{R}^n$ uzayındaki ve Bölüm 2.2 ile verilen $\mathbb{C}^n$ uzayındaki tanımlardan yararlanarak $\mathbb{H}^n$ uzayının bu uzaylar üzerindeki cebirsel yapıları elde edildi.

6.1 $\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}^n$ Halkası Üzerindeki Modül Yapısı

Bir n -vektörün, $\mathbb{H}^n$ üzerinde reel sıralı n -liler yardımı ile yazılabildiği Bölüm 5.2 ile verildi. Bu bölümde, aynı gösterimi kullanarak $\mathbb{H}^n$ uzayının $\mathbb{R}^n$ halkası üzerindeki modül yapısını elde edeceğiz ve bu uzay üzerinde tanımlanan iç çarpım ve norm tanımlarını vereceğiz.

Tanım 6.1. Bölüm 5.2 ile tanımı verilen,

$$\mathbb{H}^n = \{ \vec{q} \mid \vec{q} = \vec{A}\vec{e}_0 + \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^n \}$$

kümesi üzerinde $\square : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ şeklindeki reel skaler n -vektör ile çarpma işlemini, $\forall \vec{q} = \vec{A}\vec{e}_0 + \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} \vec{q} \square \vec{\lambda} &= (\vec{A}\vec{e}_0 + \vec{B}\vec{e}_1 + \vec{C}\vec{e}_2 + \vec{D}\vec{e}_3) \square \vec{\lambda} \\ &= (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_0 + (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_1 + (\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_2 + (\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu çarpım, Bölüm 2.1 ile verilen $\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlanan sıralı çarpım işlemi yardımıyla, $\forall \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n), \vec{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} \vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (a_1 \lambda_1, a_2 \lambda_2, \dots, a_n \lambda_n) \\ \vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda} &= (b_1, b_2, \dots, b_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (b_1 \lambda_1, b_2 \lambda_2, \dots, b_n \lambda_n) \\ \vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda} &= (c_1, c_2, \dots, c_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (c_1 \lambda_1, c_2 \lambda_2, \dots, c_n \lambda_n) \\ \vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda} &= (d_1, d_2, \dots, d_n) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (d_1 \lambda_1, d_2 \lambda_2, \dots, d_n \lambda_n) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\vec{q} \boxdot \vec{\lambda} &= (a_1 \lambda_1, a_2 \lambda_2, \dots, a_n \lambda_n) \vec{e}_0 + (b_1 \lambda_1, b_2 \lambda_2, \dots, b_n \lambda_n) \vec{e}_1 \\
&\quad + (c_1 \lambda_1, c_2 \lambda_2, \dots, c_n \lambda_n) \vec{e}_2 + (d_1 \lambda_1, d_2 \lambda_2, \dots, d_n \lambda_n) \vec{e}_3 \\
&= (a_1 \lambda_1 \vec{e}_0 + b_1 \lambda_1 \vec{e}_1 + c_1 \lambda_1 \vec{e}_2 + d_1 \lambda_1 \vec{e}_3, a_2 \lambda_2 \vec{e}_0 + b_2 \lambda_2 \vec{e}_1 \\
&\quad + c_2 \lambda_2 \vec{e}_2 + d_2 \lambda_2 \vec{e}_3, \dots, a_n \lambda_n \vec{e}_0 + b_n \lambda_n \vec{e}_1 + c_n \lambda_n \vec{e}_2 + d_n \lambda_n \vec{e}_3) \\
&= ((a_1 \vec{e}_0 + b_1 \vec{e}_1 + c_1 \vec{e}_2 + d_1 \vec{e}_3) \odot \lambda_1, (a_2 \vec{e}_0 + b_2 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + d_2 \vec{e}_3) \odot \lambda_2, \\
&\quad \dots, (a_n \vec{e}_0 + b_n \vec{e}_1 + c_n \vec{e}_2 + d_n \vec{e}_3) \odot \lambda_n)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Yani, $\forall q_i = a_i \vec{e}_0 + b_i \vec{e}_1 + c_i \vec{e}_2 + d_i \vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\boxed{\vec{q} \boxdot \vec{\lambda} = (q_1 \odot \lambda_1, q_2 \odot \lambda_2, \dots, q_n \odot \lambda_n)} \quad (6.2)$$

şeklinde de tanımlanır.

Teorem 6.1. $\mathbb{H}^n$ üzerinde reel skaler n -vektör ile çarpma işlemi, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{\lambda}, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$ için,

- i. $(\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxdot \vec{\lambda} = (\vec{q} \boxdot \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{p} \boxdot \vec{\lambda})$
- ii. $\vec{q} \boxdot (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\mu}) = (\vec{q} \boxdot \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{q} \boxdot \vec{\mu})$
- iii. $\vec{q} \boxdot (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}) = (\vec{q} \boxdot \vec{\lambda}) \boxtimes \vec{\mu}$
- iv. $\vec{q} \boxdot \vec{1}_{\mathbb{R}^n} = \vec{q}$

özelliklerini sağlar.

İspat.

$\forall \vec{q} = \vec{A} \vec{e}_0 + \vec{B} \vec{e}_1 + \vec{C} \vec{e}_2 + \vec{D} \vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{\lambda}, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$ için,

ii.

$$\begin{aligned}
\vec{q} \boxdot (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\mu}) &= [\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\mu})] \vec{e}_0 + [\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\mu})] \vec{e}_1 \\
&\quad + [\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\mu})] \vec{e}_2 + [\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\mu})] \vec{e}_3
\end{aligned}$$

Buradan, Teorem 2.3 (ii.) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\vec{q} \boxdot (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\mu}) &= [(\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_0 + [(\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_1 \\
&\quad + [(\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_2 + [(\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_3 \\
&= [(\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_0 + (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_1 + (\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_2 + (\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_3] \\
&\quad \boxplus [(\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}) \vec{e}_0 + (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}) \vec{e}_1 + (\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}) \vec{e}_2 + (\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}) \vec{e}_3] \\
&= [(\vec{A} \vec{e}_0 + \vec{B} \vec{e}_1 + \vec{C} \vec{e}_2 + \vec{D} \vec{e}_3) \boxdot \vec{\lambda}] \boxplus [(\vec{A} \vec{e}_0 + \vec{B} \vec{e}_1 + \vec{C} \vec{e}_2 + \vec{D} \vec{e}_3) \boxdot \vec{\mu}] \\
&= (\vec{q} \boxdot \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{q} \boxdot \vec{\mu})
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}\vec{q} \boxtimes (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}) &= [\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_0 + [\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_1 \\ &\quad + [\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_2 + [\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu})] \vec{e}_3\end{aligned}$$

Buradan, Teorem 2.3 (i.) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\vec{q} \boxtimes (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}) &= [(\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}] \vec{e}_0 + [(\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}] \vec{e}_1 \\ &\quad + [(\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}] \vec{e}_2 + [(\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\mu}] \vec{e}_3 \\ &= [(\vec{A} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_0 + (\vec{B} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_1 + (\vec{C} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_2 + (\vec{D} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_3] \boxtimes \vec{\mu} \\ &= [(\vec{A} \vec{e}_0 + \vec{B} \vec{e}_1 + \vec{C} \vec{e}_2 + \vec{D} \vec{e}_3) \boxtimes \vec{\lambda}] \boxtimes \vec{\mu} \\ &= (\vec{q} \boxtimes \vec{\lambda}) \boxtimes \vec{\mu}\end{aligned}$$

■

Sonuç 6.1. $(\mathbb{R}^n, +, \boxtimes_{\mathbb{R}^n})$ bir halka ve $(\mathbb{H}^n, \boxplus)$ yapısı bir Abel grup olmak üzere, tanımlanan skaler n -vektör ile çarpma işlemi ile birlikte $\{\mathbb{H}^n, \boxplus, \mathbb{R}^n, +, \boxtimes_{\mathbb{R}^n}, \boxtimes\}$ altılısı bir modüldür.

6.1.1 $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Uzayının Bazı

$\forall \vec{q} = \vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$ yazılışı ile $\mathbb{H}^n = Sp\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olduğundan $\text{boy } \mathbb{H}^n = 4$ elde edilir. Yani, $\mathbb{H}^n$ uzayı $\mathbb{R}^n$ halkası üzerinde 4-boyutlu bir modüldür.

6.1.2 $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Üzerinde İç Çarpım İşlemi

Teorem 6.2. $\forall \vec{q} = \vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3, \vec{p} = \vec{A}_2 \vec{e}_0 + \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{A}_1, \vec{B}_1, \vec{C}_1, \vec{D}_1, \vec{A}_2, \vec{B}_2, \vec{C}_2, \vec{D}_2 \in \mathbb{R}^n$ için $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde tanımlanan,

$$\begin{aligned}\langle, \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\vec{q}, \vec{p}) &\rightarrow \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{A}_1 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3, \vec{A}_2 + \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \\ &= \vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2\end{aligned}\tag{6.3}$$

dönüşümü bir iç çarpım fonksiyonudur.

İspat. i. Simetri özelliği: $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}$$

ii. Bilineerlik özelliği: $\forall \vec{q}, \vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}, \vec{p} \boxplus \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \\ \langle \vec{q} \boxplus \vec{p}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \\ \langle \vec{q} \boxdot \vec{\lambda}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}\end{aligned}$$

iii. Pozitif tanımlılık özelliği: $\forall \vec{q} = \vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$, $\forall \vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, $\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n}) \in \mathbb{R}^n$ için, tanımdan,

$$\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{A}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_1 + \vec{B}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_1 + \vec{C}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1 + \vec{D}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_1 &= (a_{11}^2, a_{12}^2, \dots, a_{1n}^2) \\ \vec{B}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_1 &= (b_{11}^2, b_{12}^2, \dots, b_{1n}^2) \\ \vec{C}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1 &= (c_{11}^2, c_{12}^2, \dots, c_{1n}^2) \\ \vec{D}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1 &= (d_{11}^2, d_{12}^2, \dots, d_{1n}^2)\end{aligned}$$

olduğundan, $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall q_i = a_{1i} \vec{e}_0 + b_{1i} \vec{e}_1 + c_{1i} \vec{e}_2 + d_{1i} \vec{e}_3 \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= (a_{11}^2 + b_{11}^2 + c_{11}^2 + d_{11}^2, a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2 + d_{12}^2, \dots, a_{1n}^2 + b_{1n}^2 + c_{1n}^2 + d_{1n}^2) \\ &= (\|q_1\|^2, \|q_2\|^2, \dots, \|q_n\|^2)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Tanım 2.11 göz önüne alındığında her bir $\|q_i\|^2 \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) olduğundan iç çarpım değeri pozitiftir. Aynı zamanda, $\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{0}$ sağlanır. ■

Sonuç 6.2. $\langle, \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}$ fonksiyonu $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur. $\mathbb{H}^n$ kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

Tanım 6.2. $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ kuaterniyon n -vektörleri için $\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0}$ ise $\vec{q}$ ve $\vec{p}$ kuaterniyon n -vektörlerine **ortogonaldir** denir.

Sonuç 6.3. $\forall \vec{q} = \vec{A}_1 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3$, $\vec{p} = \vec{A}_2 + \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, $\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n})$, $\vec{A}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\vec{B}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$, $\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n})$, $\vec{D}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{A}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{C}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{D}_1 \boxdot_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 \quad (6.4)$$

iç çarpımı,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = (h(q_1, p_1), h(q_2, p_2), \dots, h(q_n, p_n)) \quad (6.5)$$

şeklinde veya,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[(\vec{q} \boxtimes \vec{p}) \boxplus (\vec{p} \boxtimes \vec{q}) \right] \quad (6.6)$$

şeklinde de yazılabilir.

İspat. $\forall \vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}), \vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}),$
 $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n}), \vec{A}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \vec{B}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}),$
 $\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}), \vec{D}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 \\ &= (a_{11}a_{21}, a_{12}a_{22}, \dots, a_{1n}a_{2n}) + (b_{11}b_{21}, b_{12}b_{22}, \dots, b_{1n}b_{2n}) \\ &\quad + (c_{11}c_{21}, c_{12}c_{22}, \dots, c_{1n}c_{2n}) + (d_{11}d_{21}, d_{12}d_{22}, \dots, d_{1n}d_{2n}) \\ &= (a_{11}a_{21} + b_{11}b_{21} + c_{11}c_{21} + d_{11}d_{21}, a_{12}a_{22} + b_{12}b_{22} + c_{12}c_{22} + d_{12}d_{22}, \\ &\quad \dots, a_{1n}a_{2n} + b_{1n}b_{2n} + c_{1n}c_{2n} + d_{1n}d_{2n}) \end{aligned}$$

bulunur. Yani, reel değerli kuaterniyon iç çarpımı olarak verilen (2.33) eşitliğinden,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = (h(q_1, p_1), h(q_2, p_2), \dots, h(q_n, p_n))$$

elde edilir. Aynı zamanda, (6.5) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (h(q_1, p_1), h(q_2, p_2), \dots, h(q_n, p_n)) &= \left[\frac{1}{2}(q_1 \times \bar{p}_1 \oplus p_1 \times \bar{q}_1), \frac{1}{2}(q_2 \times \bar{p}_2 \oplus p_2 \times \bar{q}_2), \right. \\ &\quad \left. \dots, \frac{1}{2}(q_n \times \bar{p}_n \oplus p_n \times \bar{q}_n) \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \boxtimes (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) = (q_1 \times \bar{p}_1, q_2 \times \bar{p}_2, \dots, q_n \times \bar{p}_n)$$

$$\vec{p} \boxtimes \vec{q} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \boxtimes (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n) = (p_1 \times \bar{q}_1, p_2 \times \bar{q}_2, \dots, p_n \times \bar{q}_n)$$

olduğundan iç çarpım,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[(\vec{q} \boxtimes \vec{p}) \boxplus (\vec{p} \boxtimes \vec{q}) \right]$$

şeklinde de tanımlanır. ■

Not 6.1. (6.4), (6.5) ve (6.6) eşitlikleri aynı iç çarpım fonksiyonunu ifade eder.

6.1.3 $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Üzerinde Norm İşlemi

$\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) üzerinde norm işleminin sonucu bir reel n -vektör olacağından, norm işlemi Bölüm 2.1.3.2 ile verilen sıralı çarpım metriği yardımıyla tanımlanmıştır.

Tanım 6.3. $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü ile tanımlı norm fonksiyonu, $\forall \vec{q} = \vec{A}_1 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}^n$ için, (6.4) eşitliği yardımı ile,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_1 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_1 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1} \quad (6.7)$$

şeklinde, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için, (6.5) eşitliği yardımı ile,

$$\begin{aligned} \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\sqrt{h(q_1, q_1)}, \sqrt{h(q_2, q_2)}, \dots, \sqrt{h(q_n, q_n)} \right) \\ &= \left(\sqrt{\|q_1\|^2}, \sqrt{\|q_2\|^2}, \dots, \sqrt{\|q_n\|^2} \right) = (\|q_1\|, \|q_2\|, \dots, \|q_n\|) \end{aligned} \quad (6.8)$$

şeklinde, (6.6) eşitliği yardımı ile,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\vec{q} \boxtimes \vec{q}) \boxplus (\vec{q} \boxtimes \vec{q})]} = \sqrt{\vec{q} \boxtimes \vec{q}} \quad (6.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 6.3. Norm fonksiyonu, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ için,

- i. $\|\vec{q} \boxtimes \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \|\vec{p} \boxtimes \vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}$
- ii. $\|\vec{q} \boxplus \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \leq \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} + \|\vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}$
- iii. $\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \left\| \vec{q} \right\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}$
- iv. $\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = 0 \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{0}$

özelliklerini sağlar.

İspat.

ii. n -vektörlerin toplamı $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ için, $\vec{q} \boxplus \vec{p} = (q_1 \oplus p_1, q_2 \oplus p_2, \dots, q_n \oplus p_n)$ olduğundan,

$$\|\vec{q} \boxplus \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = (\|q_1 \oplus p_1\|, \|q_2 \oplus p_2\|, \dots, \|q_n \oplus p_n\|)$$

yazılabilir. Burada, Teorem 2.22 (ii.) özelliği göz önüne alındığında, $\forall q_i, p_i \in \mathbb{H}$

$(1 \leq i \leq n)$ için, $\|q_i \oplus p_i\| \leq \|q_i\| + \|p_i\|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|\vec{q} \boxplus \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &\leq (\|q_1\| + \|p_1\|, \|q_2\| + \|p_2\|, \dots, \|q_n\| + \|p_n\|) \\ &= (\|q_1\|, \|q_2\|, \dots, \|q_n\|) \boxplus (\|p_1\|, \|p_2\|, \dots, \|p_n\|) \\ &= \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus \|\vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

6.1.4 $\mathbb{H}_p^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Uzayında Vektörel Çarpım

$\mathbb{H}_p^n$ uzayındaki elemanların reel n -vektörler yardımı ile gösterimi göz önüne alındığında,

$\forall \vec{q} = (q_i) = \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3, \vec{p} = (p_i) = \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p^n$ için,

$$\begin{aligned} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} : \mathbb{H}_p^n \times \mathbb{H}_p^n &\rightarrow \mathbb{H}_p^n \\ (\vec{q}, \vec{p}) &\rightarrow \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} \end{aligned}$$

işlemi iki uzaysal kuaterniyon n -vektörün vektörel çarpım işlemidir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} &= (\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_1 + (\vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \vec{e}_2 \\ &\quad + (\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1) \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{6.10}$$

ile ifade edilir. Aynı zamanda bu çarpım,

$$\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \vec{B}_1 & \vec{C}_1 & \vec{D}_1 \\ \vec{B}_2 & \vec{C}_2 & \vec{D}_2 \end{vmatrix}$$

şeklindeki sanal determinant ile de hesaplanabilir: Gerçekten

$\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}_p^n$ için,

Tanım 4.18 ile verilen $\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \vec{p} = (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1, q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2, \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n)$ tanımını kullanılırsa,

$\forall q_{ki} = b_{ki}\vec{e}_1 + c_{ki}\vec{e}_2 + d_{ki}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p$ ($1 \leq k \leq 2$, $1 \leq i \leq n$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} & (q_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_1, q_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} p_2, \dots, q_n \wedge_{\mathbb{H}_p} p_n) \\ &= ((c_{11}d_{21} - c_{21}d_{11})\vec{e}_1 + (b_{11}d_{21} - b_{21}d_{11})\vec{e}_2 + (b_{11}c_{21} - b_{21}c_{11})\vec{e}_3, \\ & (c_{12}d_{22} - c_{22}d_{12})\vec{e}_1 + (b_{12}d_{22} - b_{22}d_{12})\vec{e}_2 + (b_{12}c_{22} - b_{22}c_{12})\vec{e}_3, \\ & \dots, ((c_{1n}d_{2n} - c_{2n}d_{1n}) + (b_{1n}d_{2n} - b_{2n}d_{1n})\vec{e}_2 + (b_{1n}c_{2n} - b_{2n}c_{1n})\vec{e}_3) \\ &= (c_{11}d_{21} - c_{21}d_{11}, c_{12}d_{22} - c_{22}d_{12}, \dots, c_{1n}d_{2n} - c_{2n}d_{1n})\vec{e}_1 \\ &+ (b_{11}d_{21} - b_{21}d_{11}, b_{12}d_{22} - b_{22}d_{12}, \dots, b_{1n}d_{2n} - b_{2n}d_{1n})\vec{e}_2 \\ &+ (b_{11}c_{21} - b_{21}c_{11}, b_{12}c_{22} - b_{22}c_{12}, \dots, b_{1n}c_{2n} - b_{2n}c_{1n})\vec{e}_3 \end{aligned}$$

yazılabilir. $\vec{B}_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$, $\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$, $\vec{D}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n})$, $\vec{B}_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$, $\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n})$, $\vec{D}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p} \vec{p} &= (\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1)\vec{e}_1 + (\vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2)\vec{e}_2 \\ &+ (\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 6.4. Vektörel çarpım işlemi, $\forall \vec{q}, \vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{H}_p^n$, $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ için,

- i. $\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} = -\vec{p} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{q}$
- ii. $\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \boxplus \vec{r}) = (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) \boxplus (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{r})$
- iii. $(\vec{q} \boxplus \vec{\lambda}) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} = \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \boxplus \vec{\lambda}) = (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) \boxplus \vec{\lambda}$
- iv. $\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{r}) + \vec{p} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{r} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{q}) + \vec{r} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) = \vec{0}_{\mathbb{H}_p^n}$

özelliklerini sağlar.

İspat.

iii. $\forall \vec{q} = \vec{B}_1\vec{e}_1 + \vec{C}_1\vec{e}_2 + \vec{D}_1\vec{e}_3$, $\vec{p} = \vec{B}_2\vec{e}_1 + \vec{C}_2\vec{e}_2 + \vec{D}_2\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p^n$ ve $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} (\vec{q} \boxplus \vec{\lambda}) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} &= [(\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda})]\vec{e}_1 \\ &+ [\vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) - (\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2]\vec{e}_2 \\ &+ [(\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda})]\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Teorem 2.3, (i) ve (iv) şıkları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\vec{q} \boxdot \vec{\lambda}) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} &= [\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{D}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) - (\vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1] \vec{e}_1 \\
&+ [(\vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{D}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda})] \vec{e}_2 \\
&+ [\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} (\vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) - (\vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1] \vec{e}_3 \\
&= \vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (\vec{p} \boxdot \vec{\lambda})
\end{aligned}$$

ayrıca,

$$\begin{aligned}
(\vec{q} \boxdot \vec{\lambda}) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p} &= [(\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}] \vec{e}_1 \\
&+ [(\vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}] \vec{e}_2 \\
&+ [(\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1) \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\lambda}] \vec{e}_3 \\
&= (\vec{q} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{p}) \boxdot \vec{\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

6.1.5 $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) Üzerinde Çarpım İşlemi

Teorem 6.5. $\mathbb{H}^n$ uzayında Tanım 5.1 ile verilen sıralı çarpım işlemi,

$$\boxed{\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (S_{\vec{q}} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} S_{\vec{p}}) \boxplus \left(-\langle V_{\vec{q}}, V_{\vec{p}} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \right) \boxplus (V_{\vec{p}} \boxdot S_{\vec{q}}) \boxplus (V_{\vec{q}} \boxdot S_{\vec{p}}) \boxplus (V_{\vec{q}} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} V_{\vec{p}})} \quad (6.11)$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n}$ işlemi $\mathbb{H}_p^n$ uzayında iç çarpıma ve $\wedge_{\mathbb{H}_p^n}$ işlemi $\mathbb{H}_p^n$ uzayında vektörel çarpıma karşılık gelir.

İspat. $\mathbb{H}^n$ uzayında çarpım işleminin,

$$\begin{aligned}
\vec{q} \boxtimes \vec{p} &= (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 - \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \vec{e}_0 \\
&+ (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_1 \\
&+ (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 + \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_2 \\
&+ (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1) \vec{e}_3
\end{aligned}$$

ifadesine eşit olduğu Sonuç 5.3 ile elde edildi. Bu eşitlik düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\vec{q} \boxtimes \vec{p} = & [\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 - (\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2)] \vec{e}_0 \\
& + [(\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2) \vec{e}_1 + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2) \vec{e}_2 + (\vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \vec{e}_3] \\
& + [(\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2) \vec{e}_1 + (\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2) \vec{e}_2 + (\vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2) \vec{e}_3] \\
& + (\vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2 - \vec{C}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1) \vec{e}_1 \\
& + (\vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_1 - \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2) \vec{e}_2 \\
& + (\vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 - \vec{B}_2 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_1) \vec{e}_3
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\vec{A}_1 = S_{\vec{q}}$ ve $\vec{A}_2 = S_{\vec{p}}$ olmak üzere, Tanım 6.1, Teorem 6.2 kullanılır ve Bölüm 6.1.4 göz önüne alınırsa,

$$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (S_{\vec{q}} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} S_{\vec{p}}) \boxplus \left(-\langle V_{\vec{q}}, V_{\vec{p}} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \right) \boxplus (V_{\vec{p}} \boxtimes S_{\vec{q}}) \boxplus (V_{\vec{q}} \boxtimes S_{\vec{p}}) \boxplus (V_{\vec{q}} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} V_{\vec{p}})$$

elde edilir. ■

Sonuç 6.4. $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}_p^n$ ise $S_{\vec{q}} = \vec{0}$ ve $S_{\vec{p}} = \vec{0}$ olacağından $\mathbb{H}_p^n$ uzayındaki iki uzaysal kuaterniyon n -vektörün çarpımı,

$$\vec{q} \boxtimes \vec{p} = -\langle V_{\vec{q}}, V_{\vec{p}} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus V_{\vec{q}} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} V_{\vec{p}} \quad (6.12)$$

şeklinde de yazılır.

6.2 $\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı

Tanım 6.4. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde $\boxtimes : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ reel skaler ile çarpma işlemini, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\vec{q} \boxtimes \lambda = (q_1 \odot \lambda, q_2 \odot \lambda, \dots, q_n \odot \lambda) \quad (6.13)$$

veya $\forall \vec{q} = S_{\vec{q}} + V_{\vec{q}} \in \mathbb{H}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\vec{q} \boxtimes \lambda = (S_{\vec{q}} + V_{\vec{q}}) \boxtimes \lambda = S_{\vec{q}} \lambda + V_{\vec{q}} \odot \lambda \quad (6.14)$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 6.6. $\mathbb{H}^n$ üzerinde reel skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ için,

- i. $(\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxtimes \lambda = (\vec{q} \boxtimes \lambda) \boxplus (\vec{p} \boxtimes \lambda)$
- ii. $\vec{q} \boxtimes (\lambda + \beta) = (\vec{q} \boxtimes \lambda) \boxplus (\vec{q} \boxtimes \beta)$
- iii. $\vec{q} \boxtimes (\lambda \beta) = (\vec{q} \boxtimes \lambda) \boxtimes \beta$
- iv. $\vec{q} \boxtimes 1 = \vec{q}$

özelliklerini sağlar.

İspat.

i. $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için $\vec{q} \boxplus \vec{p} = (q_1 \oplus p_1, q_2 \oplus p_2, \dots, q_n \oplus p_n)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxtimes \lambda &= (q_1 \oplus p_1, q_2 \oplus p_2, \dots, q_n \oplus p_n) \boxtimes \lambda \\ &= ((q_1 \oplus p_1) \odot \lambda, (q_2 \oplus p_2) \odot \lambda, \dots, (q_n \oplus p_n) \odot \lambda) \end{aligned}$$

yazılır ve Teorem 2.17 (i.) ile verilen $(q \oplus p) \odot \lambda = (q \odot \lambda) \oplus (p \odot \lambda)$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxtimes \lambda &= ((q_1 \odot \lambda) \oplus (p_1 \odot \lambda), (q_2 \odot \lambda) \oplus (p_2 \odot \lambda), \dots, (q_n \odot \lambda) \oplus (p_n \odot \lambda)) \\ &= [(q_1 \odot \lambda), (q_2 \odot \lambda), \dots, (q_n \odot \lambda)] \boxplus [(p_1 \odot \lambda), (p_2 \odot \lambda), \dots, (p_n \odot \lambda)] \\ &= (\vec{q} \boxtimes \lambda) \boxplus (\vec{p} \boxtimes \lambda) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $\forall \vec{q} = (q_i) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\vec{q} \boxtimes (\lambda + \beta) = (q_1 \odot (\lambda + \beta), q_2 \odot (\lambda + \beta), \dots, q_n \odot (\lambda + \beta))$$

yazılır ve Teorem 2.17 (ii.) ile verilen $q \odot (\lambda + \beta) = (q \odot \lambda) \oplus (q \odot \beta)$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes (\lambda + \beta) &= ((q_1 \odot \lambda) \oplus (q_1 \odot \beta), (q_2 \odot \lambda) \oplus (q_2 \odot \beta), \dots, (q_n \odot \lambda) \oplus (q_n \odot \beta)) \\ &= [(q_1 \odot \lambda), (q_2 \odot \lambda), \dots, (q_n \odot \lambda)] \boxplus [(q_1 \odot \beta), (q_2 \odot \beta), \dots, (q_n \odot \beta)] \\ &= (\vec{q} \boxtimes \lambda) \boxplus (\vec{q} \boxtimes \beta) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\forall \vec{q} = (q_i) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\vec{q} \boxtimes (\lambda \beta) = (q_1 \odot (\lambda \beta), q_2 \odot (\lambda \beta), \dots, q_n \odot (\lambda \beta))$$

yazılır ve Teorem 2.17 (iii.) ile verilen $q \odot (\lambda\beta) = (q \odot \lambda) \odot \beta$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\vec{q} \boxtimes (\lambda\beta) &= ((q_1 \odot \lambda) \odot \beta, (q_2 \odot \lambda) \odot \beta, \dots, (q_n \odot \lambda) \odot \beta) \\ &= [(q_1 \odot \lambda), (q_2 \odot \lambda), \dots, (q_n \odot \lambda)] \boxtimes \beta \\ &= (\vec{q} \boxtimes \lambda) \boxtimes \beta\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 6.5. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisim ve $(\mathbb{H}^n, \boxplus)$ yapısı bir Abel grup olmak üzere, tanımlanan skaler ile çarpma işlemi ile birlikte $\{\mathbb{H}^n, \boxplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \boxtimes\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

6.2.1 $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}$ -Vektör Uzayı) Uzayının Bazı

$\mathbb{H}^n = \{\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \mid q_i = a_{1i}\vec{e}_0 + b_{1i}\vec{e}_1 + c_{1i}\vec{e}_2 + d_{1i}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}, 1 \leq i \leq n\}$ uzayının elemanları, reel n -vektörlerin uzayında i . bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olan birim baz vektörleri $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$ ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{q} &= (q_1, q_2, \dots, q_n) \\ &= \vec{e}_1 q_1 + \vec{e}_2 q_2 + \dots + \vec{e}_n q_n \\ &= \vec{e}_1 (a_{11} + b_{11}\vec{e}_1 + c_{11}\vec{e}_2 + d_{11}\vec{e}_3) + \vec{e}_2 (a_{12} + b_{12}\vec{e}_1 + c_{12}\vec{e}_2 + d_{12}\vec{e}_3) + \dots \\ &\quad + \vec{e}_n (a_{1n} + b_{1n}\vec{e}_1 + c_{1n}\vec{e}_2 + d_{1n}\vec{e}_3) \\ &= a_{11}(\vec{e}_1\vec{e}_0) + a_{12}(\vec{e}_2\vec{e}_0) + \dots + a_{1n}(\vec{e}_n\vec{e}_0) + b_{11}(\vec{e}_1\vec{e}_1) + b_{12}(\vec{e}_2\vec{e}_1) + \dots + b_{1n}(\vec{e}_n\vec{e}_1) \\ &\quad + c_{11}(\vec{e}_1\vec{e}_2) + c_{12}(\vec{e}_2\vec{e}_2) + \dots + c_{1n}(\vec{e}_n\vec{e}_2) + d_{11}(\vec{e}_1\vec{e}_3) + d_{12}(\vec{e}_2\vec{e}_3) + \dots + d_{1n}(\vec{e}_n\vec{e}_3)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada, $\vec{e}_i\vec{e}_j$ ($1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq 3$) çarpımı Tanım 5.4 ile verilen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^n$ işlemi yardımıyla yapılmıştır. Böylece,

$$\mathbb{H}^n = Sp\{\vec{e}_1\vec{e}_0, \vec{e}_2\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\vec{e}_0, \vec{e}_1\vec{e}_1, \vec{e}_2\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\vec{e}_1, \vec{e}_1\vec{e}_2, \vec{e}_2\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\vec{e}_2, \vec{e}_1\vec{e}_3, \vec{e}_2\vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\vec{e}_3\}$$

yazılabilir. O halde $\dim \mathbb{H}^n = 4n$ elde edilir. Yani, $\mathbb{H}^n$ uzayı $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $4n$ -boyutlu bir vektör uzayıdır.

6.2.2 $\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki İç Çarpım İşlemi

Teorem 6.7. $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n), \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{q}, \vec{p}) &\rightarrow \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^n h(q_i, p_i) = h(q_1, p_1) + h(q_2, p_2) + \dots + h(q_n, p_n)\end{aligned}$$

dönüşümü bir iç çarpım fonksiyonudur.

İspat. **i.** Simetri özelliği: $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}},$$

ii. Bilineerlik özelliği: $\forall \vec{q}, \vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{p} \boxplus \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} + \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}, \\ \langle \vec{q} \boxplus \vec{p}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} + \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}, \\ \langle \vec{q} \boxtimes \lambda, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} \lambda = \langle \vec{q}, \vec{p} \boxtimes \lambda \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

iii. Pozitif tanımlılık özelliği: $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^n h(q_i, q_i) = \|q_1\|^2 + \|q_2\|^2 + \dots + \|q_n\|^2 \geq 0 \text{ ve } \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = 0 \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{0}$$

sağlanır. ■

Sonuç 6.6. $\langle, \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu olup $\mathbb{H}^n$ kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

Tanım 6.5. $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ kuaterniyon n -vektörleri için $\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = 0$ ise $\vec{q}$ ve $\vec{p}$ kuaterniyon n -vektörlerine **ortogonaldir** denir.

Teorem 6.8. $\mathbb{H}^n$ uzayında reel değerli iç çarpım, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\langle \vec{q} \boxtimes \vec{p}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \langle \vec{q}, \vec{p} \boxtimes \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = 0 \quad (6.15)$$

özelliğini sağlar.

İspat. $\mathbb{H}^n$ uzayında Tanım 5.1 ile verilen sıralı çarpım işlemi ve Teorem 6.7 ile verilen $\langle, \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ iç çarpım işlemi kullanılarak, $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\langle \vec{q} \boxtimes \vec{p}, \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = h(q_1 \times p_1, r_1) + h(q_2 \times p_2, r_2) + \dots + h(q_n \times p_n, r_n)$$

yazılabilir. Burada, Teorem 2.20 ile verilen $\mathbb{H}$ uzayındaki özellik kullanılır ve $\vec{r} = \vec{q}$ alınırsa,

$$\langle \vec{q} \boxtimes \vec{p}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \boxtimes \vec{r} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = h(q_1, p_1 \times r_1) + h(q_2, p_2 \times r_2) + \dots + h(q_n, p_n \times r_n)$$

yazılabildiğinden, $\vec{r} = \vec{q}$ alınırsa,

$$\langle \vec{q}, \vec{p} \boxtimes \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = 0$$

elde edilir. ■

6.2.3 $\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Cismi Üzerindeki Norm İşlemi

Tanım 6.6. $\mathbb{H}^n$ kümesinde norm, $\forall \vec{q} \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} : \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{q} &\rightarrow \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n h(q_i, p_i)} \end{aligned} \quad (6.16)$$

dönüşümü ile $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sqrt{\|q_1\|^2 + \|q_2\|^2 + \dots + \|q_n\|^2} \quad (6.17)$$

pozitif reel sayısı olarak tanımlanır.

Teorem 6.9. Norm fonksiyonu, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ için,

- i. $\|\vec{q} \boxtimes \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \|\vec{p} \boxtimes \vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}$
- ii. $\|\vec{q} \boxplus \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} \leq \|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} + \|\vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}$
- iii. $\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \left\| \vec{q} \right\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}$
- iv. $\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = 0 \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{0}$

özelliklerini sağlar.

İspat.

i. $\forall \vec{q} = (q_i), \vec{p} = (p_i) \in \mathbb{H}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için $\vec{q} \boxtimes \vec{p} = (q_1 \times p_1, q_2 \times p_2, \dots, q_n \times p_n)$ olduğundan,

$$\|\vec{q} \boxtimes \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sqrt{\|q_1 \times p_1\|^2 + \|q_2 \times p_2\|^2 + \dots + \|q_n \times p_n\|^2}$$

yazılır ve Teorem 2.22 (i.) ile verilen $\|q \times p\| = \|p \times q\|$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|\vec{q} \boxtimes \vec{p}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \sqrt{\|p_1 \times q_1\|^2 + \|p_2 \times q_2\|^2 + \dots + \|p_n \times q_n\|^2} \\ &= \|\vec{p} \boxtimes \vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\forall \vec{q} = (q_i) \in \mathbb{H}^n$ için,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sqrt{\|q_1\|^2 + \|q_2\|^2 + \cdots + \|q_n\|^2}$$

yazılır ve Teorem 2.22 (iv.) ile verilen $\|q\| = \|\bar{q}\|$ özelliği kullanılırsa, $\vec{q} = (q_i)$ elemanın eşleniği $\bar{\vec{q}} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n)$ olduğundan,

$$\|\vec{q}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sqrt{\|\bar{q}_1\|^2 + \|\bar{q}_2\|^2 + \cdots + \|\bar{q}_n\|^2} = \|\bar{\vec{q}}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}$$

elde edilir. ■



Tablo 6.1 $\mathbb{H}^n$ uzayında farklı gösterimlerle iç çarpım işlemi

Gösterim Vektör Uzayı	$\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$	$\vec{q} = \vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1 + \vec{C}_1 \vec{e}_2 + \vec{D}_1 \vec{e}_3$ $\vec{p} = \vec{A}_2 \vec{e}_0 + \vec{B}_2 \vec{e}_1 + \vec{C}_2 \vec{e}_2 + \vec{D}_2 \vec{e}_3$	$\vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2$ $\vec{p} = \vec{Z}_2 + \vec{W}_2 \vec{e}_2$
$\mathbb{H}^n, \mathbb{H}$	$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i \times p_i$	$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = (\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{C}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{D}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_0$ $+ (\langle \vec{A}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{B}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{C}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{D}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_1$ $+ (\langle \vec{A}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{C}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{B}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{D}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_2$ $+ (\langle \vec{A}_1, \vec{D}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{D}_1, \vec{A}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \vec{B}_1, \vec{C}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{C}_1, \vec{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) \vec{e}_3$	$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{Z}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} + \langle \vec{W}_1, \vec{W}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) + \left(\langle \vec{Z}_1, \vec{W}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle \vec{W}_1, \vec{Z}_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} \right) \vec{e}_2$
$\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^n$	$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = (h(q_1, p_1), h(q_2, p_2), \dots, h(q_n, p_n))$	$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{A}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{B}_2 + \vec{C}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{C}_2 + \vec{D}_1 \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{D}_2$	
$\mathbb{H}^n, \mathbb{R}$	$\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^n h(q_i, p_i)$		

6.3 $\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{C}^n$ Halkası Üzerindeki Modül Yapısı

Bir n -vektörün, $\mathbb{H}^n$ üzerinde kompleks sıralı n -liler yardımı ile yazılabildiği Bölüm 5.3 ile verildi. Bu bölümde, aynı gösterimi kullanarak $\mathbb{H}^n$ uzayının $\mathbb{C}^n$ halkası üzerindeki modül yapısını elde edeceğiz.

Tanım 6.7. Tanım 5.7 ile verilen,

$$\mathbb{H}^n = \{ \vec{q} \mid \vec{q} = (\vec{A}_1 \vec{e}_0 + \vec{B}_1 \vec{e}_1) + (\vec{C}_1 \vec{e}_0 + \vec{D}_1 \vec{e}_1) \vec{e}_2 = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2, \vec{Z}_1, \vec{W}_1 \in \mathbb{C}^n \} \quad (6.18)$$

kümesi üzerinde $\boxtimes : \mathbb{H}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ skaler ile çarpma işlemini, $\forall \vec{Z}_1 = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\vec{W}_1 = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, $\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2 \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\vec{q} \boxtimes \vec{\lambda} = (\vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2) \boxtimes \vec{\lambda} = (\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{\lambda}) + (\vec{W}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{\lambda}) \vec{e}_2 \quad (6.19)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\vec{Z}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{\lambda} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (z_1 \lambda_1, z_2 \lambda_2, \dots, z_n \lambda_n)$$

$$\vec{W}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{\lambda} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \boxtimes_{\mathbb{C}^n} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (w_1 \lambda_1, w_2 \lambda_2, \dots, w_n \lambda_n)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxtimes \vec{\lambda} &= (z_1 \lambda_1, z_2 \lambda_2, \dots, z_n \lambda_n) + (w_1 \lambda_1, w_2 \lambda_2, \dots, w_n \lambda_n) \vec{e}_2 \\ &= ((z_1 \lambda_1) + (w_1 \lambda_1) \vec{e}_2, (z_2 \lambda_2) + (w_2 \lambda_2) \vec{e}_2, \dots, (z_n \lambda_n) + (w_n \lambda_n) \vec{e}_2) \\ &= (\lambda_1 \odot_{\mathbb{C}} (z_1 + w_1 \vec{e}_2), \lambda_2 \odot_{\mathbb{C}} (z_2 + w_2 \vec{e}_2), \dots, \lambda_n \odot_{\mathbb{C}} (z_n + w_n \vec{e}_2)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Yani, $\forall q_i = z_i + w_i \vec{e}_2 \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\boxed{\vec{q} \boxtimes \vec{\lambda} = (\lambda_1 \odot_{\mathbb{C}} q_1, \lambda_2 \odot_{\mathbb{C}} q_2, \dots, \lambda_n \odot_{\mathbb{C}} q_n)} \quad (6.20)$$

şeklinde de tanımlanır.

Teorem 6.10. $\mathbb{H}^n$ üzerinde kompleks skaler n -vektör ile çarpma işlemi, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \vec{\lambda}, \vec{\beta} \in \mathbb{C}^n$ için,

- i. $(\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxtimes \vec{\lambda} = (\vec{q} \boxtimes \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{p} \boxtimes \vec{\lambda})$
- ii. $\vec{q} \boxtimes (\vec{\lambda} \boxplus \vec{\beta}) = (\vec{q} \boxtimes \vec{\lambda}) \boxplus (\vec{q} \boxtimes \vec{\beta})$
- iii. $\vec{q} \boxtimes (\vec{\lambda} \boxtimes_{\mathbb{C}^n} \vec{\beta}) = (\vec{q} \boxtimes \vec{\lambda}) \boxtimes \vec{\beta}$
- iv. $\vec{q} \boxtimes \vec{1}_{\mathbb{C}^n} = \vec{q}$

özelliklerini sağlar.

Sonuç 6.7. $(\mathbb{C}^n, \boxplus, \boxtimes_{\mathbb{C}^n})$ bir halka ve $(\mathbb{H}^n, \boxplus)$ yapısı bir Abel grup olmak üzere, tanım-

lanan çarpma işlemi ile birlikte $\{\mathbb{H}^n, \boxplus, \mathbb{C}^n, \boxplus, \boxtimes_{\mathbb{C}^n}, \boxdot\}$ altılısı bir modüldür.

Ayrıca, $\forall \vec{q} = \vec{Z}_1 + \vec{W}_1 \vec{e}_2 \in \mathbb{H}^n$ yazılışı ile $\mathbb{H}^n = Sp\{\vec{1}, \vec{e}_2\}$ yazılabilir. O halde, $\text{boy}\mathbb{H}^n = 2$ elde edilir. Yani, $\mathbb{H}^n$ uzayı $\mathbb{C}^n$ halkası üzerinde 2-boyutlu bir modüldür.

6.4 $\mathbb{H}^n$ Uzayının $\mathbb{C}$ Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı

Tanım 6.8. $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde $\boxdot : \mathbb{H}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^n$ skaler ile çarpma işlemini, $\forall \vec{q} = z_1 \vec{e}_1 + z_2 \vec{e}_2 + \dots + z_n \vec{e}_n + w_1 (\vec{e}_1 \vec{e}_2) + w_2 (\vec{e}_2 \vec{e}_2) + \dots + w_n (\vec{e}_n \vec{e}_2) \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \vec{q} \boxdot \lambda &= (z_1 \vec{e}_1 + z_2 \vec{e}_2 + \dots + z_n \vec{e}_n + w_1 (\vec{e}_1 \vec{e}_2) + w_2 (\vec{e}_2 \vec{e}_2) + \dots + w_n (\vec{e}_n \vec{e}_2)) \boxdot \lambda \\ &= (z_1 \lambda) \vec{e}_1 + (z_2 \lambda) \vec{e}_2 + \dots + (z_n \lambda) \vec{e}_n \\ &\quad + (w_1 \lambda) (\vec{e}_1 \vec{e}_2) + (w_2 \lambda) (\vec{e}_2 \vec{e}_2) + \dots + (w_n \lambda) (\vec{e}_n \vec{e}_2) \end{aligned} \quad (6.21)$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 6.11. $\mathbb{H}^n$ üzerinde kompleks skaler ile çarpma işlemi, $\forall \vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için,

- i. $(\vec{q} \boxplus \vec{p}) \boxdot \lambda = (\vec{q} \boxdot \lambda) \boxplus (\vec{p} \boxdot \lambda)$
- ii. $\vec{q} \boxdot (\lambda \oplus \mu) = (\vec{q} \boxdot \lambda) \boxplus (\vec{q} \boxdot \mu)$
- iii. $\vec{q} \boxdot (\lambda \mu) = (\vec{q} \boxdot \lambda) \boxdot \mu$
- iv. $\vec{q} \boxdot 1 = \vec{q}$

özelliklerini sağlar.

Sonuç 6.8. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kompleks sayılar cismi ve $(\mathbb{H}^n, \boxplus)$ yapısı bir Abel grup olmak üzere, tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $\{\mathbb{H}^n, \boxplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \boxdot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

6.4.1 $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{C}$ -Vektör Uzayı) Uzayının Bazı

$\mathbb{H}^n = \{\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \mid q_i \in \mathbb{H}, 1 \leq i \leq n\}$ uzayının elemanları,

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 + b_1 \vec{e}_1 + c_1 \vec{e}_2 + d_1 \vec{e}_3 = (a_1 + b_1 \vec{e}_1) + (c_1 + d_1 \vec{e}_1) \vec{e}_2 = z_1 + w_1 \vec{e}_2 \\ q_2 &= a_2 + b_2 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + d_2 \vec{e}_3 = (a_2 + b_2 \vec{e}_1) + (c_2 + d_2 \vec{e}_1) \vec{e}_2 = z_2 + w_2 \vec{e}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= a_n + b_n \vec{e}_1 + c_n \vec{e}_2 + d_n \vec{e}_3 = (a_n + b_n \vec{e}_1) + (c_n + d_n \vec{e}_1) \vec{e}_2 = z_n + w_n \vec{e}_2 \end{aligned}$$

olarak yazılabildiğinden, $\forall z_i, w_i \in \mathbb{C}, (1 \leq i \leq n)$ için,

$$\begin{aligned}\vec{q} &= (q_1, q_2, \dots, q_n) \\ &= (z_1 + w_1 \vec{e}_2, z_2 + w_2 \vec{e}_2, \dots, z_n + w_n \vec{e}_2)\end{aligned}$$

olduğundan, $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$ ($1 \leq i \leq n$) vektörleri $\mathbb{R}^n$ uzayının birim vektörleri olmak üzere, Tanım 5.4 ile verilen işlem yardımıyla,

$$\vec{q} = z_1 \vec{e}_1 + z_2 \vec{e}_2 + \dots + z_n \vec{e}_n + w_1 (\vec{e}_1 \vec{e}_2) + w_2 (\vec{e}_2 \vec{e}_2) + \dots + w_n (\vec{e}_n \vec{e}_2)$$

olarak da yazılabilir.

Böylece,

$$\mathbb{H}^n = Sp \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_1 \vec{e}_2, \vec{e}_2 \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \vec{e}_2 \}$$

yazılabilir. O halde, $\text{boy} \mathbb{H}^n = 2n$ elde edilir. Yani, $\mathbb{H}^n$ uzayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde $2n$ -boyutlu bir vektör uzayıdır.

Bölüm 2.4 ile kuaterniyon değerli fonksiyonlar incelendi. Bu bölümde,

- $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$
- $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$
- $\vec{\theta} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^n$
- $\vec{\Theta} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$

şeklindeki kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonları inceleyeceğiz. Bu incelemeler için, tanımladığımız fonksiyonların tanım ve değer kümelerinde hangi metrik sistem üzerinde çalıştığımız önemli bir rol oynayacaktır.

$\mathbb{H}^n$ uzayındaki fonksiyonlar için analiz kavramlarını ele alırken Bölüm 6 ile verdiğimiz $\mathbb{H}^n$ uzayının cebirsel yapılarından yararlanacağız.

7.1 Reel Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar

Öncelikle reel fonksiyon ve vektörel fonksiyon uzayları için verilen analiz kavramlarında göz önüne alınan metriğin Öklid metriği olduğunu belirtelim. Bölüm 2.1.4 ile $\mathbb{R}^n$ uzayında vektörel fonksiyonlar için gerekli tanımlamalar verildi. Bu tanımlamalar genişletildiğinde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu için analiz kavramları $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ uzaylarında tanımlı Öklid metriği göz önüne alınarak belirlenebilir [34].

Bu bölümde, $\mathbb{H}^n$ uzayında analiz kavramlarını, $\mathbb{H}^n$ uzayının cebirsel yapılarını düşünerek ve hem Öklid metriğini hem de Bölüm 2.1.3.2 ile tanımladığımız $\mathbb{R}^n$ üzerindeki sıralı çarpım metriğini kullanarak vereceğiz.

Şimdi, $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ fonksiyonunu ifade ederek bu fonksiyonun limit tanımını iki metriği de göz önüne alarak verelim.

Tanım 7.1. $\mathbb{H}^n$ reel kuaterniyon n -vektörlerin kümesi, $t \in I \subset \mathbb{R}$ reel parametre ve $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ t &\rightarrow \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))\end{aligned}$$

fonksiyonuna **reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyon** denir.

Tanım 7.2. $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(t)$ vektörü t parametresinin her değeri için aynı vektörü veriyorsa $\vec{\gamma}$ vektörüne **sabit vektör** denir.

7.1.1 $\mathbb{H}^n$ Uzayında Öklid Metriğine Göre Vektörel Limit

$\mathbb{H}^n$ uzayında elde edilen limit değeri bir reel n -vektördür. Değer kümesindeki uzaklık kavramını Öklid metriğini kullanarak açıklayalım.

Tanım 7.3. $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyon olsun. $\vec{\gamma}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı, a noktasında tanımlı olması gerekmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$\forall \varepsilon > 0$ için, $0 < |t - a| < \delta$ iken $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa “ $\vec{\gamma}$ fonksiyonunun t değeri a değerine yaklaşırken limiti $\vec{L}$ dir” denir ve sembolik olarak $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L}$ ile gösterilir.

Teorem 7.1. $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olsun. $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$, $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ olsun. $\forall L_i \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) için, $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ fonksiyonunun $a \in \mathbb{R}$ noktasındaki limitinin $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n) \in \mathbb{H}^n$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{t \rightarrow a} \gamma_i(t) = L_i$ olmasıdır.

Yani, $\vec{\gamma}$ fonksiyonunun t değeri a değerine yaklaşırken limiti, eğer varsa,

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} \gamma_1(t), \lim_{t \rightarrow a} \gamma_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} \gamma_n(t) \right)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, her bir bileşen Bölüm 2.4.1.1’de verilen reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonların limitidir.

İspat.

$(\Rightarrow) \lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L}$ olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. O halde, $\exists \delta > 0$ vardır ve $|t - a| < \delta$ iken $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} < \varepsilon$ sağlanır.

$$\begin{aligned}\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \|(\gamma_1(t) - L_1, \gamma_2(t) - L_2, \dots, \gamma_n(t) - L_n)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} \\ &= \sqrt{\|\gamma_1(t) - L_1\|^2 + \|\gamma_2(t) - L_2\|^2 + \dots + \|\gamma_n(t) - L_n\|^2} < \varepsilon\end{aligned}$$

olduğundan, $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için,

$$\begin{aligned}\|\gamma_i(t) - L_i\| &= \sqrt{\|\gamma_i(t) - L_i\|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\gamma_i(t) - L_i\|^2} \\ &= \|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} < \varepsilon\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan, $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için,

$$\lim_{t \rightarrow a} \gamma_i(t) = L_i$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\lim_{t \rightarrow a} \gamma_i(t) = L_i$ olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman öyle bir $\delta_i > 0$ vardır ki $|t - a| < \delta_i$ iken $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\|\gamma_i(t) - L_i\| < \frac{\varepsilon}{n}$ yazılabilir.

$\delta = \min\{\delta_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere, her bir $|t - a| < \delta$ iken,

$$\begin{aligned}\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\gamma_i(t) - L_i\|^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\|\gamma_i(t) - L_i\|^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \|\gamma_i(t) - L_i\| \\ &< \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L}$ elde edilir. ■

Örnek 7.1. $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ fonksiyonu $\vec{\gamma}(t) = ((t + 4)i + k, (t^2 - 3)j) \in \mathbb{H}^2$ olsun. $\vec{\gamma}$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasındaki limitinin $\vec{L} = (4i + k, -3j)$ olduğunu limitin formal tanımını kullanarak gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{H}^2$ uzayı üzerinde Öklid metriği dikkate alındığında, $\forall \varepsilon > 0$ için, $|t-0| = |t| < \delta$ iken $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ değerinin olup olmadığını araştırıyoruz.

$$\begin{aligned}\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \|(ti, t^2j)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} \\ &= \sqrt{\|ti\|^2 + \|t^2j\|^2} \\ &= \sqrt{t^2 + t^4} \\ &= |t|\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

$|t| < \delta$ iken $\delta = 1$ alındığında $|t| < 1$ ve $\sqrt{1-t^2} < \sqrt{2}$ yazılabileceğinden $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\}$ seçilebilir.

Buradan, $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = |t|\sqrt{1+t^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = \varepsilon$ bulunur ve $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = (4i + k, -3j)$ olarak elde edilir.

7.1.2 $\mathbb{H}^n$ Uzayında Sıralı Çarpım Metriğine Göre Vektörel Limit

$\mathbb{H}^n$ uzayında elde edilen limit değeri bir reel n -vektördür. Değer kümesindeki uzaklık kavramını sıralı çarpım metriğini kullanarak açıklayalım.

Tanım 7.4. $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyon olsun. $\vec{\gamma}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı, a noktasında tanımlı olması gerekmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$\forall \vec{\varepsilon} > \vec{0}$ için, $0 < |t - a| < \delta_i$ iken $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} < \vec{\varepsilon}$ olacak şekilde $\exists \delta_i = \delta_i(\varepsilon_i) > 0$ ($1 \leq i \leq n$) varsa **$\vec{\gamma}$ fonksiyonunun t değeri a değerine yaklaşırken sıralı çarpım metriğine göre limiti $\vec{L}$ dir** denir ve sembolik olarak $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L}$ ile gösterilir.

Teorem 7.2. $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olsun. $\forall L_i \in \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) için, $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ fonksiyonunun sıralı çarpım metriğine göre a noktasındaki limitinin $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n) \in \mathbb{H}^n$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{t \rightarrow a} \gamma_i(t) = L_i$ olmasıdır.

Yani, $\vec{\gamma}$ fonksiyonunun t değeri a değerine yaklaşırken limiti,

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} \gamma_1(t), \lim_{t \rightarrow a} \gamma_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} \gamma_n(t) \right) \quad (7.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, her bir bileşen Bölüm 2.4.1.1'de verilen reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonların limitidir.

İspat.

($\Rightarrow$) $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L}$ olsun. $\vec{\varepsilon} \succ \vec{0}$ olsun. Yani, Tanım 2.11 ile verilen $\mathbb{R}^n$ uzayındaki sıralama bağıntısına göre $\forall \varepsilon_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) için $\varepsilon_i > 0$ olsun. O halde, $\forall \varepsilon_i$ için, $|t - a| < \delta_i$ iken $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} < \vec{\varepsilon}$ olacak şekilde $\exists \delta_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) vardır.

$$\begin{aligned} \|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \|(\gamma_1(t) - L_1, \gamma_2(t) - L_2, \dots, \gamma_n(t) - L_n)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \\ &= (\|\gamma_1(t) - L_1\|, \|\gamma_2(t) - L_2\|, \dots, \|\gamma_n(t) - L_n\|) < \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \end{aligned}$$

yazılır ve $\|\gamma_i(t) - L_i\| \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) olduğundan, $\forall \varepsilon_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\|\gamma_i(t) - L_i\| < \varepsilon_i$$

yazılabilir. Buradan, $|t - a| < \delta_i$ ($1 \leq i \leq n$) iken,

$$\lim_{t \rightarrow a} \gamma_i(t) = L_i$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\lim_{t \rightarrow a} \gamma_i(t) = L_i$ olsun. $\vec{\varepsilon} \succ \vec{0}$ olsun. O halde, $\forall \varepsilon_i$ ($1 \leq i \leq n$) için $\varepsilon_i > 0$ yazılır. Her bir bileşen için öyle bir $\delta_i > 0$ vardır ki $|t - a| < \delta_i$ iken $\forall i = \{1, 2, \dots, n\}$ için $\|\gamma_i(t) - L_i\| < \varepsilon_i$ yazılabilir. Buradan, $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} < \vec{\varepsilon}$ olur, ve $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{L}$ elde edilir. ■

Örnek 7.2. $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ fonksiyonu $\vec{\gamma}(t) = (2t + 2t^2i, t^3 + tj, t + t^2k) \in \mathbb{H}^3$ olsun. $\vec{\gamma}$ fonksiyonunun $t = 3$ noktasındaki limitinin $\vec{L} = (6 + 18i, 27 + 3j, 3 + 9k)$ olduğunu limitin formal tanımını kullanarak gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{H}^3$ uzayı üzerinde sıralı çarpım metriği göz önüne alındığında, $\forall \vec{\varepsilon} \succ \vec{0}$ için, $|t - 3| < \delta_i$ iken $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^3}^{\mathbb{R}^3} < \vec{\varepsilon}$ olacak şekilde her bir bileşen için $\exists \delta_i > 0$ ($1 \leq i \leq 3$) değerinin olup olmadığını araştırıyoruz.

$$\vec{\gamma}(t) - \vec{L} = ((2t - 6) + (2t^2 - 18)i, (t^3 - 27) + (t - 3)j, (t - 3) + (t^2 - 9)k)$$

olduğundan, Tanım 6.3 ile verilen $\mathbb{H}^n$ ($\mathbb{R}^n$ -Modül) üzerindeki norm tanımından,

$$\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^3}^{\mathbb{R}^3} = (\|(2t - 6) + (2t^2 - 18)i\|, \|(t^3 - 27) + (t - 3)j\|, \|(t - 3) + (t^2 - 9)k\|)$$

yazılır.

Birinci bileşen için,

$$\begin{aligned}\|(2t-6) + (2t^2-18)i\| &= \sqrt{(2t-6)^2 + (2t^2-18)^2} \\ &= 2|t-3|\sqrt{1+(t+3)^2}\end{aligned}$$

$|t-3| < \delta_1$ iken $\delta_1 = 1$ alındığında $|t-3| < 1$ ve $\sqrt{1+(t+3)^2} < \sqrt{50}$ yazılabilir.

$$\|(2t-6) + (2t^2-18)i\| < |t-3|2\sqrt{50} < \left(\frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{50}}\right)2\sqrt{50} = \varepsilon_1$$

olduğundan $\forall \varepsilon_1 > 0$ için $\exists \delta_1 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{50}}\right\}$ seçilebilir.

İkinci bileşen için,

$$\begin{aligned}\|(t^3-27) + (t-3)j\| &= \sqrt{(t^3-27)^2 + (t-3)^2} \\ &= |t-3|\sqrt{1+(t^2+3t+9)^2}\end{aligned}$$

$|t-3| < \delta_2$ iken $\delta_2 = 1$ alındığında $|t-3| < 1$ ve $\sqrt{1+(t^2+3t+9)^2} < \sqrt{1370}$ yazılabilir.

$$\|(t^3-27) + (t-3)j\| < |t-3|\sqrt{1370} < \left(\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{1370}}\right)\sqrt{1370} = \varepsilon_2$$

olduğundan $\forall \varepsilon_2 > 0$ için $\exists \delta_2 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{1370}}\right\}$ seçilebilir.

Üçüncü bileşen için,

$$\begin{aligned}\|(t-3) + (t^2-9)k\| &= \sqrt{(t-3)^2 + (t^2-9)^2} \\ &= |t-3|\sqrt{1+(t+3)^2} \\ &< |t-3|\sqrt{50} < \left(\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{50}}\right)\sqrt{50} = \varepsilon_3\end{aligned}$$

olduğundan $\forall \varepsilon_3 > 0$ için $\exists \delta_3 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{50}}\right\}$ seçilebilir.

Burada, $\forall \varepsilon_i > 0$ ($1 \leq i \leq 3$) için $\exists \delta_i > 0$ ($1 \leq i \leq 3$) bulunabildiğinden $\vec{\gamma}$ fonksiyonu için sıralı çarpım metriğine göre $\lim_{t \rightarrow 3} \vec{\gamma}(t) = (6 + 18i, 27 + 3j, 3 + 9k)$ elde edilir.

Not 7.1. $\vec{\gamma}(t) = (2t + 2t^2i, t^3 + tj, t + t^2k) \in \mathbb{H}^3$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun limitini aynı zamanda Öklid metriğini kullanarak çözelim:

$\forall \varepsilon > 0$ için, $0 < |t - 3| < \delta$ iken $\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^3}^{\mathbb{R}} < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ değerinin olup olmadığını araştırıyoruz.

$$\begin{aligned}\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \|((2t - 6) + (2t^2 - 18)i, (t^3 - 27) + (t - 3)j, (t - 3) + (t^2 - 9)k)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} \\ &= |t - 3| \sqrt{6 + 5(t + 3)^2 + (t^2 + 3t + 9)^2}\end{aligned}$$

yazılabilir. $|t - 3| < \delta$ iken $\delta = 1$ alındığında $|t - 3| < 1$ ve $\sqrt{6 + 5(t + 3)^2 + (t^2 + 3t + 9)^2} < \sqrt{1620}$ yazılabileceğinden, $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{1620}} \right\}$ seçilebilir. Buradan,

$$\|\vec{\gamma}(t) - \vec{L}\|_{\mathbb{H}^3}^{\mathbb{R}} = |t - 3| \sqrt{6 + 5(t + 3)^2 + (t^2 + 3t + 9)^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{1620}} \sqrt{1620} = \varepsilon$$

bulunur ve $\vec{\gamma}$ fonksiyonu için Öklid metriğine göre de $\lim_{t \rightarrow 3} \vec{\gamma}(t) = (6 + 18i, 27 + 3j, 3 + 9k)$ elde edilir. Bu sonuç, sıralı çarpım metriği göz önüne alınarak bulunan sonucun aynısıdır.

7.1.3 $\mathbb{H}^n$ Uzayında Vektörel Süreklilik

$\vec{\gamma}$, $[c, d]$ reel sayı aralığında tanımlı, reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyon olsun. Eğer,

- $\vec{\gamma}(a)$ tanımlı,
- $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t)$ mevcut,
- $\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(a)$

koşulları sağlanıyorsa $\vec{\gamma}$ fonksiyonu bir $a \in [c, d]$ noktasında süreklidir.

Eğer $\vec{\gamma}$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığının her noktasında sürekli ise $\vec{\gamma}$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığında süreklidir.

Teorem 7.3. $\vec{\gamma}$, $[c, d]$ aralığında tanımlı reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel bir fonksiyon olsun. $\vec{\gamma}(t)$ fonksiyonunun bir $a \in [c, d]$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun her bir bileşeninin a noktasında sürekli olmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$) $\vec{\gamma}(t)$ fonksiyonu bir $a \in [c, d]$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda,

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(a) = (\gamma_1(a), \gamma_2(a), \dots, \gamma_n(a))$$

yazılabilir. Teorem 7.2 gereğince,

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} \gamma_1(t), \lim_{t \rightarrow a} \gamma_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} \gamma_n(t) \right)$$

şeklindedir. İki ifadenin eşitliğinden,

$$\lim_{t \rightarrow a} \gamma_1(t) = \gamma_1(a), \lim_{t \rightarrow a} \gamma_2(t) = \gamma_2(a), \dots, \lim_{t \rightarrow a} \gamma_n(t) = \gamma_n(a)$$

elde edilir. Yani, her bir bileşen a noktasında süreklidir.

($\Leftarrow$) $\vec{\gamma}(t)$ fonksiyonunun her bir bileşeni a noktasında sürekli olsun. O halde, Teorem 7.2 gereğince,

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{\gamma}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} \gamma_1(t), \lim_{t \rightarrow a} \gamma_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} \gamma_n(t) \right) = (\gamma_1(a), \gamma_2(a), \dots, \gamma_n(a)) = \vec{\gamma}(a)$$

yazılabilir. Yani, $\vec{\gamma}(t)$ fonksiyonu bir $a \in [c, d]$ noktasında süreklidir. ■

7.1.4 $\mathbb{H}^n$ Uzayında Vektörel Türev

Bu bölümde, kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonlarda türev kavramından bahsedeceğiz. Bir kuaterniyon n -vektör ile bir reel skalerin çarpımı için Tanım 6.4 ile $\mathbb{H}^n$ kümesi üzerinde verilen $\square : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ skaler çarpım işlemi kullanılacaktır.

Tanım 7.5. Tanım 7.1 ile $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ şeklinde verilen $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonunun $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevi, $h \in \mathbb{R}$ için,

$$\vec{\gamma}'(t_0) = \frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t_0 + h) - \vec{\gamma}(t_0)}{h} \quad (7.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 7.4. Bir $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonun türevi, $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlarının türevi yardımıyla, bileşenlerinin ayrı ayrı türevlerinin alınması ve türev fonksiyonunun bileşenleri olarak yazılması ile elde edilir:

$$\vec{\gamma}'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t)).$$

İspat. $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t), \gamma_2(t+h) - \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t+h) - \gamma_n(t))$$

olarak yazılabildiğinden, Teorem 7.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t), \gamma_2(t+h) - \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t+h) - \gamma_n(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \frac{\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)}{h}, \dots, \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right) \\ &= (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 7.5. $\lambda, I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış bir skaler değerli fonksiyon, $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\beta}$ reel değişkenli kuaterniyon değerli türevlenebilir birer vektörel fonksiyon olmak üzere,

$$i. \quad \frac{d}{dt} (\vec{\gamma}(t) \mp \vec{\beta}(t)) = \frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \mp \frac{d}{dt} \vec{\beta}(t)$$

ii. $\square : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ reel skaler ile çarpma işlemi olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} (\vec{\gamma}(t) \square \lambda(t)) = \left(\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \right) \square \lambda(t) \boxplus \vec{\gamma}(t) \square \left(\frac{d}{dt} \lambda(t) \right)$$

$$iii. \quad \frac{d}{dt} [\vec{\gamma}(t) \boxtimes \vec{\beta}(t)] = \left(\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \boxtimes \vec{\beta}(t) \right) \boxplus \left(\vec{\gamma}(t) \boxtimes \frac{d}{dt} \vec{\beta}(t) \right)$$

$$iv. \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \right\rangle + \left\langle \vec{\gamma}(t), \frac{d}{dt} \vec{\beta}(t) \right\rangle$$

v. $\vec{\gamma}, \vec{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p^n$ reel değişkenli uzaysal kuaterniyon değerli türevlenebilir vektörel fonksiyonlar olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} (\vec{\gamma}(t) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{\beta}(t)) = \left[\left(\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \right) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{\beta}(t) \right] \boxplus \left[\vec{\gamma}(t) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \left(\frac{d}{dt} \vec{\beta}(t) \right) \right].$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

i.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{\gamma}(t) \mp \vec{\beta}(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(\vec{\gamma}(t+h) \mp \vec{\beta}(t+h)) - (\vec{\gamma}(t) \mp \vec{\beta}(t))]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)) \mp (\vec{\beta}(t+h) - \vec{\beta}(t))]}{h} \\
&= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h} \right) \mp \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\beta}(t+h) - \vec{\beta}(t)}{h} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \mp \frac{d}{dt} \vec{\beta}(t)
\end{aligned}$$

ii. $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\vec{\gamma}(t) \boxtimes \lambda(t) = (\gamma_1(t) \odot \lambda(t), \gamma_2(t) \odot \lambda(t), \dots, \gamma_n(t) \odot \lambda(t))$$

olarak yazılabildiğinden, Teorem 7.4 kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}(\vec{\gamma}(t) \boxtimes \lambda(t)) = \left(\frac{d}{dt}(\gamma_1(t) \odot \lambda(t)), \frac{d}{dt}(\gamma_2(t) \odot \lambda(t)), \dots, \frac{d}{dt}(\gamma_n(t) \odot \lambda(t)) \right)$$

yazılabilir. Teorem 2.38 (iii.) özelliği kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}(\vec{\gamma}(t) \boxtimes \lambda(t)) = \left(\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \right) \boxtimes \lambda(t) + \vec{\gamma}(t) \boxtimes \left(\frac{d}{dt} \lambda(t) \right)$$

elde edilir.

iii. $\vec{\gamma} = (\gamma_i)$, $\vec{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{H}^n$ ($1 \leq i \leq n$) için Tanım 5.1 ile verilen sıralı çarpım işlemi gereğince $\vec{\gamma}(t) \boxtimes \vec{\beta}(t) = (\gamma_1(t) \times \beta_1(t), \gamma_2(t) \times \beta_2(t), \dots, \gamma_n(t) \times \beta_n(t))$ ifadesinin türevi, Teorem 7.4 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{\gamma}(t) \boxtimes \vec{\beta}(t)) &= \frac{d}{dt}(\gamma_1(t) \times \beta_1(t), \gamma_2(t) \times \beta_2(t), \dots, \gamma_n(t) \times \beta_n(t)) \\
&= \left(\frac{d}{dt}(\gamma_1(t) \times \beta_1(t)), \frac{d}{dt}(\gamma_2(t) \times \beta_2(t)), \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{d}{dt}(\gamma_n(t) \times \beta_n(t)) \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Her bir $\gamma_i, \beta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli kuaterniyon değerli

fonksiyon için Teorem 2.38 (vi.) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{\gamma}(t) \boxtimes \vec{\beta}(t)) &= \left[\left(\frac{d}{dt} \gamma_1 \right) \times \beta_1 \oplus \gamma_1 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_1 \right), \right. \\
&\quad \left(\frac{d}{dt} \gamma_2 \right) \times \beta_2 \oplus \gamma_2 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_2 \right), \dots, \\
&\quad \left. \left(\frac{d}{dt} \gamma_n \right) \times \beta_n \oplus \gamma_n \times \left(\frac{d}{dt} \beta_n \right) \right] \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} \gamma_1 \right) \times \beta_1, \left(\frac{d}{dt} \gamma_2 \right) \times \beta_2, \dots, \left(\frac{d}{dt} \gamma_n \right) \times \beta_n \right] \\
&\quad \boxplus \left[\gamma_1 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_1 \right), \gamma_2 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_2 \right), \dots, \gamma_n \times \left(\frac{d}{dt} \beta_n \right) \right] \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \right) \boxtimes \vec{\beta}(t) \right] \boxplus \left[\vec{\gamma}(t) \boxtimes \left(\frac{d}{dt} \vec{\beta}(t) \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv. İç çarpımın türevi ispatını öncelikle $\mathbb{H}^n$ uzayının incelemiş olduğumuz yapılarının her biri için ayrı ayrı verelim.

- $\mathbb{H}^n$ uzayının $\mathbb{H}$ uzayı üzerindeki sağ-modül yapısı için iç çarpım tanımı:

$$\langle \vec{\gamma}, \vec{\beta} \rangle_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i \times \beta_i \tag{7.3}$$

olmak üzere, türevi,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i(t) \times \beta_i(t) \right) \\
&= \frac{d}{dt} (\bar{\gamma}_1(t) \times \beta_1(t) \oplus \bar{\gamma}_2(t) \times \beta_2(t) \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_n(t) \times \beta_n(t)) \\
&= \frac{d}{dt} (\bar{\gamma}_1(t) \times \beta_1(t)) \oplus \frac{d}{dt} (\bar{\gamma}_2(t) \times \beta_2(t)) \oplus \dots \oplus \frac{d}{dt} (\bar{\gamma}_n(t) \times \beta_n(t))
\end{aligned}$$

yazılır. Teorem 2.38 (iv.) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \rangle_{\mathbb{H}^n} &= \left[\left(\frac{d}{dt} \bar{\gamma}_1 \right) \times \beta_1 \oplus \bar{\gamma}_1 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_1 \right) \right] \oplus \left[\left(\frac{d}{dt} \bar{\gamma}_2 \right) \times \beta_2 \oplus \bar{\gamma}_2 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_2 \right) \right] \\
&\quad \oplus \dots \oplus \left[\left(\frac{d}{dt} \bar{\gamma}_n \right) \times \beta_n \oplus \bar{\gamma}_n \times \left(\frac{d}{dt} \beta_n \right) \right] \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} \bar{\gamma}_1 \right) \times \beta_1 \oplus \left(\frac{d}{dt} \bar{\gamma}_2 \right) \times \beta_2 \oplus \dots \oplus \left(\frac{d}{dt} \bar{\gamma}_n \right) \times \beta_n \right] \\
&\quad \oplus \left[\bar{\gamma}_1 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_1 \right) \oplus \bar{\gamma}_2 \times \left(\frac{d}{dt} \beta_2 \right) \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_n \times \left(\frac{d}{dt} \beta_n \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Her bir $1 \leq i \leq n$ için, $\left(\frac{d}{dt}\vec{\gamma}_i(t)\right) = \overline{\left(\frac{d}{dt}\gamma_i(t)\right)}$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\rangle_{\mathbb{H}^n} = \left\langle\frac{d}{dt}\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\right\rangle_{\mathbb{H}^n} \oplus \left\langle\vec{\gamma}(t),\frac{d}{dt}\vec{\beta}(t)\right\rangle_{\mathbb{H}^n}$$

elde edilir.

- $\mathbb{H}^n$ uzayının $\mathbb{R}^n$ halkası üzerindeki modül yapısı için iç çarpım tanımı:

$$\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = (h(\gamma_1(t),\beta_1(t)), h(\gamma_2(t),\beta_2(t)), \dots, h(\gamma_n(t),\beta_n(t))) \quad (7.4)$$

olmak üzere, türevi, Teorem 7.4 kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{d}{dt}h(\gamma_1(t),\beta_1(t)), \frac{d}{dt}h(\gamma_2(t),\beta_2(t)), \dots, \frac{d}{dt}h(\gamma_n(t),\beta_n(t))\right)$$

yazılır. Teorem 2.38 (v.) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(h\left(\frac{d}{dt}\gamma_1,\beta_1\right)+h\left(\gamma_1,\frac{d}{dt}\beta_1\right), h\left(\frac{d}{dt}\gamma_2,\beta_2\right)+h\left(\gamma_2,\frac{d}{dt}\beta_2\right), \right. \\ &\quad \left. \dots, h\left(\frac{d}{dt}\gamma_n,\beta_n\right)+h\left(\gamma_n,\frac{d}{dt}\beta_n\right)\right) \\ &= \left[h\left(\frac{d}{dt}\gamma_1,\beta_1\right), h\left(\frac{d}{dt}\gamma_2,\beta_2\right), \dots, h\left(\frac{d}{dt}\gamma_n,\beta_n\right)\right] \\ &\quad \mathbf{+} \left[h\left(\gamma_1,\frac{d}{dt}\beta_1\right), h\left(\gamma_2,\frac{d}{dt}\beta_2\right), \dots, h\left(\gamma_n,\frac{d}{dt}\beta_n\right)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \left\langle\frac{d}{dt}\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\right\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \mathbf{+} \left\langle\vec{\gamma}(t),\frac{d}{dt}\vec{\beta}(t)\right\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}$$

elde edilir.

- $\mathbb{H}^n$ uzayının $\mathbb{R}$ cismi üzerindeki modül yapısı için iç çarpım tanımı:

$$\begin{aligned} \langle\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= \sum_{i=1}^n h(\gamma_i(t),\beta_i(t)) \\ &= h(\gamma_1(t),\beta_1(t)) + h(\gamma_2(t),\beta_2(t)) + \dots + h(\gamma_n(t),\beta_n(t)) \end{aligned} \quad (7.5)$$

olmak üzere, türevi,

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{\gamma}(t),\vec{\beta}(t)\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \frac{d}{dt}h(\gamma_1(t),\beta_1(t)) + \frac{d}{dt}h(\gamma_2(t),\beta_2(t)) + \dots + \frac{d}{dt}h(\gamma_n(t),\beta_n(t))$$

yazılır. Teorem 2.38 (v.) özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} &= h\left(\frac{d}{dt}\gamma_1, \beta_1\right) + h\left(\gamma_1, \frac{d}{dt}\beta_1\right) + h\left(\frac{d}{dt}\gamma_2, \beta_2\right) + h\left(\gamma_2, \frac{d}{dt}\beta_2\right) + \\
&\quad \cdots + h\left(\frac{d}{dt}\gamma_n, \beta_n\right) + h\left(\gamma_n, \frac{d}{dt}\beta_n\right) \\
&= \left[h\left(\frac{d}{dt}\gamma_1, \beta_1\right) + h\left(\frac{d}{dt}\gamma_2, \beta_2\right) + \cdots + h\left(\frac{d}{dt}\gamma_n, \beta_n\right) \right] \\
&\quad + \left[h\left(\gamma_1, \frac{d}{dt}\beta_1\right) + h\left(\gamma_2, \frac{d}{dt}\beta_2\right) + \cdots + h\left(\gamma_n, \frac{d}{dt}\beta_n\right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} = \left\langle \frac{d}{dt}\vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \right\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}} + \left\langle \vec{\gamma}(t), \frac{d}{dt}\vec{\beta}(t) \right\rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\mathbb{H}^n$ uzayında iç çarpımın türevi genel olarak,

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\vec{\gamma}(t), \vec{\beta}(t) \right\rangle + \left\langle \vec{\gamma}(t), \frac{d}{dt}\vec{\beta}(t) \right\rangle$$

şeklinde dir.

v. $\vec{\gamma} = (\gamma_i), \vec{\beta} = (\beta_i) \in \mathbb{H}_p^n$ ($1 \leq i \leq n$) için Tanım 4.18 ile verilen $\vec{\gamma}(t) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{\beta}(t) = (\gamma_1(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_1(t), \gamma_2(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_2(t), \dots, \gamma_n(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_n(t))$ ifadesinin türevi, Teorem 7.4 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\vec{\gamma}(t) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{\beta}(t)) &= \frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_1(t), \gamma_2(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_2(t), \dots, \gamma_n(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_n(t)) \\
&= \left(\frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_1(t)), \frac{d}{dt} (\gamma_2(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_2(t)), \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{d}{dt} (\gamma_n(t) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_n(t)) \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Her bir $\gamma_i, \beta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$ ($1 \leq i \leq n$) reel değişkenli uzaysal kuaterniyon değerli fonksiyon için Teorem 2.38 (vi.) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{\gamma}(t) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{\beta}(t)) &= \left[\left(\frac{d}{dt} \gamma_1 \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_1 \oplus \gamma_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} \beta_1 \right), \right. \\
&\quad \left(\frac{d}{dt} \gamma_2 \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_2 \oplus \gamma_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} \beta_2 \right), \dots, \\
&\quad \left. \left(\frac{d}{dt} \gamma_n \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_n \oplus \gamma_n \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} \beta_n \right) \right] \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} \gamma_1 \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_1, \left(\frac{d}{dt} \gamma_2 \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_2, \dots, \left(\frac{d}{dt} \gamma_n \right) \wedge_{\mathbb{H}_p} \beta_n \right] \\
&\quad \boxplus \left[\gamma_1 \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} \beta_1 \right), \gamma_2 \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} \beta_2 \right), \dots, \gamma_n \wedge_{\mathbb{H}_p} \left(\frac{d}{dt} \beta_n \right) \right] \\
&= \left[\left(\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) \right) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{\beta}(t) \right] \boxplus \left[\vec{\gamma}(t) \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \left(\frac{d}{dt} \vec{\beta}(t) \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 7.6. *Sabit bir $\vec{\gamma}$ reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyonun türevi sıfır vektörüdür.*

İspat. Tanım 7.2 gereğince $\vec{\gamma}(t+h) = \vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{0}}{h} = \vec{0}$$

elde edilir. ■

7.2 Reel n -Vektör Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar

Tanım 7.6. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi, $\mathbb{R}^n$ reel n -vektörlerin kümesi, $\mathbb{H}^n$ reel kuaterniyon n -vektörlerin kümesi, $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ reel n -vektör parametresi ve $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \leq k \leq 3$) fonksiyonları kullanılarak tanımlanan, ($1 \leq i \leq n$) için,

$$\begin{aligned}
\Phi_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{H} \\
\vec{t} &\rightarrow \Phi_i(\vec{t}) = g_0(\vec{t}) \vec{e}_0 + g_1(\vec{t}) \vec{e}_1 + g_2(\vec{t}) \vec{e}_2 + g_3(\vec{t}) \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{7.6}$$

reel n -vektör değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\vec{\Phi} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{H}^n \\
\vec{t} &\rightarrow \vec{\Phi}(\vec{t}) = (\Phi_1(\vec{t}), \Phi_2(\vec{t}), \dots, \Phi_n(\vec{t}))
\end{aligned} \tag{7.7}$$

fonksiyonuna **reel n -vektör değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyon** denir.

7.3 Kuaterniyon Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar

Tanım 7.7. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi, $\mathbb{H}^n$ reel kuaterniyon n -vektörlerin kümesi, $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyon ve $\theta_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ($1 \leq i \leq n$) kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{\theta} : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ q &\rightarrow \vec{\theta}(q) = (\theta_1(q), \theta_2(q), \dots, \theta_n(q))\end{aligned}\tag{7.8}$$

funksiyonuna **kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyon** denir. Ayrıca, $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ yazılır.

7.4 Kuaterniyon n -Vektör Değişkenli Kuaterniyon Değerli Vektörel Fonksiyonlar

Tanım 7.8. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonların kümesi, $\mathbb{H}^n$ reel kuaterniyon n -vektörlerin kümesi, $\vec{q} \in \mathbb{H}^n$ reel n -vektör ve $F_k : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \leq k \leq 3$) fonksiyonlarını kullanarak tanımlanan, ($1 \leq s \leq m$) için,

$$\begin{aligned}\theta_s : \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{H} \\ \vec{q} &\rightarrow \theta_s(\vec{q}) = F_0(\vec{q})\vec{e}_0 + F_1(\vec{q})\vec{e}_1 + F_2(\vec{q})\vec{e}_2 + F_3(\vec{q})\vec{e}_3\end{aligned}\tag{7.9}$$

kuaterniyon n -vektör değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{\Theta} : \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{H}^m \\ \vec{q} &\rightarrow \vec{\Theta}(\vec{q}) = (\theta_1(\vec{q}), \theta_2(\vec{q}), \dots, \theta_m(\vec{q}))\end{aligned}\tag{7.10}$$

funksiyonuna **kuaterniyon n -vektör değişkenli kuaterniyon değerli vektörel fonksiyon** denir.

Bu bölümde, öncelikle $\mathbb{H}_p^n$ uzaysal kuaterniyon n -vektörlerin uzayında ve sonrasında $\mathbb{H}^n$ kuaterniyon n -vektörlerin uzayında eğriler incelenecek. Bu eğrilerin Frenet-Serret formülleri elde edilirken, hem Öklid metriği hem de Bölüm 2.1.3.2 ile tanımladığımız $\mathbb{R}^n$ üzerindeki sıralı çarpım metriği dikkate alınarak sonuçlar verilecektir.

8.1 $\mathbb{H}_p^n$ Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik Eğriler

Bu bölümde öncelikle $\mathbb{H}_p^n$ uzayında uzaysal kuaterniyonik eğri tanımını verelim.

Tanım 8.1. Uzaysal kuaterniyonik n -vektörlerin uzayı,

$$\mathbb{H}_p^n = \{ \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \mid \gamma_i + \bar{\gamma}_i = 0, \gamma_i = \gamma_{i1}\vec{e}_1 + \gamma_{i2}\vec{e}_2 + \gamma_{i3}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}_p, 1 \leq i \leq n \}$$

olsun. Bu uzayda $s \in I \subset \mathbb{R}$ yay parametresi olmak üzere, $j = 1, 2, 3$ için,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}_p^n \\ s &\rightarrow \vec{\gamma}(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s)) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{1j}(s) \vec{e}_j, \sum_{j=1}^3 \gamma_{2j}(s) \vec{e}_j, \dots, \sum_{j=1}^3 \gamma_{nj}(s) \vec{e}_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n \end{aligned}$$

ile tanımlanan reel değişkenli uzaysal kuaterniyon değerli vektörel $\vec{\gamma}$ fonksiyonuna $\mathbb{H}_p^n$ uzayında **n -boyutlu uzaysal kuaterniyonik eğri** denir. Burada, γ_i ($1 \leq i \leq n$) fonksiyonları Tanım 3.1 ile verilen $\mathbb{H}_p$ uzayında birer uzaysal kuaterniyonik eğridir.

8.1.1 $\mathbb{H}_p^n$ Uzayında Uzaysal Kuaterniyonik Eğriler İçin Sıralı Çarpım Metriğine Göre Frenet-Serret Formülleri

Bu bölümde, $\mathbb{H}_p^n$ uzayında bir n -vektörün uzunluğu hesaplanırken sıralı çarpım metriği dikkate alınacaktır. Tüm ispatlar, Sonuç 6.3 ile verilen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ iç çarpım işlemi, Tanım 6.3 ile verilen $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ norm işlemi, Tanım 6.2 ile verilen ortogonallık kavramı, Teorem 5.1 ile verilen eşlenik işlemi özellikleri ve Teorem 7.5 ile verilen türev özellikleri yardımı ile uzaysal kuaterniyonik n -vektörler için yapılacaktır.

Tanım 8.2. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p^n$ n -boyutlu uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\vec{\gamma}$ eğrisinin her noktasındaki n -vektörü $\vec{\gamma}'(s)$ olmak üzere $\|\vec{\gamma}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{1}$ ise $\vec{\gamma}$ eğrisine **n -boyutlu birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğri** denir. Bu durumda,

$$\left[\|\vec{\gamma}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^2 = \langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}'(s) \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\gamma}'(s) \boxtimes \vec{\gamma}'(s) \right) \boxplus \left(\vec{\gamma}'(s) \boxtimes \vec{\gamma}'(s) \right) \right] = \vec{1}$$

eşitliğinden, birim hızlı eğriler için $\vec{\gamma}'(s) \boxtimes \vec{\gamma}'(s) = \vec{1}$ eşitliği dikkate alınır.

Tanım 8.3. Her s reel parametresi için $\|\vec{\gamma}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \neq \vec{0}$ veya $\vec{\gamma}'(s) \neq \vec{0}$ ise $\vec{\gamma}$ eğrisine **n -boyutlu uzaysal kuaterniyonik regüler eğri** denir.

Teorem 8.1. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p^n$ n -boyutlu birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\vec{\gamma}$ eğrisinin birim teğet n -vektörü $\vec{t}(s) = \vec{\gamma}'(s) = \left(\sum_{j=1}^3 \gamma'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ olmak üzere, $\vec{t}$ ve $\vec{t}'$ ortogonaldır ve ayrıca $\vec{t}' \boxtimes \vec{t}$ bir uzaysal kuaterniyon n -vektördür.

İspat. Birim hızlı uzaysal kuaterniyonik $\vec{\gamma}$ eğrisi parametrik olarak,

$$\vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p^n$$

$$s \rightarrow \vec{\gamma}(s) = \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$$

şeklinde verilsin.

Birim hızlı eğri tanımı ile elde edilen $\left[\|\vec{\gamma}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^2 = \left[\|\vec{t}(s)\|_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^2 = \vec{t}(s) \boxtimes \vec{t}(s) = \vec{1}$ ifadesinin her iki tarafının türevi alınır, $\mathbb{H}^n$ uzayında Teorem 7.5 (iii.) ile verilen çarpma işleminin türev özelliğine göre,

$$\left(\vec{t}' \boxtimes \vec{t} \right) \boxplus \left(\vec{t} \boxtimes \vec{t}' \right) = \vec{0} \quad (8.1)$$

elde edilir. $\vec{t}(s) = \left(\sum_{j=1}^3 \gamma'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ bir uzaysal kuaterniyon n -vektör olduğuna göre, Teorem 5.1 ile verilen eşlenik işlemi özellikleri gereğince $\overline{\vec{t}}(s) = - \left(\sum_{j=1}^3 \gamma'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ yazılabilir. $\overline{\vec{t}'}(s) = - \left(\sum_{j=1}^3 \gamma''_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ ve $(\overline{\vec{t}})'(s) = - \left(\sum_{j=1}^3 \gamma''_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ olduğundan,

$$\overline{\vec{t}'}(s) = (\overline{\vec{t}})'(s) \quad (8.2)$$

elde edilir. Böylece,

$$\langle \vec{t}, \vec{t}' \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} [(\vec{t}' \boxtimes \vec{t}) \boxplus (\vec{t} \boxtimes \overline{\vec{t}'})]$$

eşitliğinde (8.1) ile (8.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\langle \vec{t}, \vec{t}' \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0} \quad (8.3)$$

bulunacaktır. Yani, Tanım 6.2 ile verilen ortogonallik kavramı gereğince $\mathbb{H}^n$ uzayında $\vec{t}$ ve $\vec{t}'$ uzaysal kuaterniyon n -vektörleri ortogonaldır.

Tekrardan (8.1) eşitliği Teorem 5.1 ile verilen kuaterniyon n -vektörlerde eşlenik işlemi özellikleri dikkate alınarak düzenlenirse,

$$(\vec{t}' \boxtimes \vec{t}) \boxplus (\vec{t} \boxtimes (\overline{\vec{t}'})) = (\vec{t}' \boxtimes \vec{t}) \boxplus (\overline{\vec{t}} \boxtimes (\vec{t}')) = (\vec{t}' \boxtimes \vec{t}) \boxplus (\overline{\vec{t}' \boxtimes \vec{t}}) = \vec{0}$$

elde edilir. Buradan, $\vec{t}' \boxtimes \vec{t}$ ifadesinin bir uzaysal kuaterniyon n -vektör olduğu sonucu görülür. ■

Şimdi, öncelikle $\vec{t}(s)$ ve $\vec{t}'(s)$ uzaysal kuaterniyon n -vektörlerinin ortogonal olmasından yola çıkarak Frenet 3-ayaklısını inşa edelim.

Tanım 8.4. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p^n$ n -boyutlu uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin.

$\vec{t}(s) = \vec{\gamma}'(s) = \left(\sum_{j=1}^3 \gamma'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ birim teğet n -vektör olmak üzere,

$$\vec{n}(s) = \vec{t}'(s) \boxdot_p \left[\|\vec{t}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \quad (8.4)$$

n -vektörünü tanımlayalım. Tanım 4.17 göz önüne alındığında $\vec{n}$ n -vektörü birimdir. Burada $\vec{t}$ ve $\vec{t}'$ ortogonal olduğundan, $\langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0}$ eşitliği (8.4) eşitliğinde yapılan seçim ve (8.3) eşitliği gereği açıktır.

Şimdi $\vec{b}(s)$ n -vektörü $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \boxtimes \vec{n}(s)$ olarak seçilirse, Sonuç 6.4 kullanıldığında, aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$i. \quad \vec{t}(s) \boxtimes \vec{n}(s) = \vec{b}(s) = -\vec{n}(s) \boxtimes \vec{t}(s) \quad (8.5)$$

$$ii. \quad \vec{t}(s) \boxtimes \vec{b}(s) = -\vec{n}(s) = -\vec{b}(s) \boxtimes \vec{t}(s) \quad (8.6)$$

$$iii. \quad \vec{n}(s) \boxtimes \vec{b}(s) = \vec{t}(s) = -\vec{b}(s) \boxtimes \vec{n}(s) \quad (8.7)$$

$$iv. \quad \vec{t} \boxtimes \vec{n} = \vec{\bar{b}} : \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} \vec{t} \boxtimes \vec{n} &= -\left\langle \vec{t}, \vec{n} \right\rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus \vec{t} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{n} \\ &= -\left\langle \vec{t}, -\vec{n} \right\rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus \vec{t} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (-\vec{n}) \\ &= \left\langle \vec{t}, \vec{n} \right\rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} - \vec{t} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{n} \\ &= -\vec{t} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{n} \\ &= -\vec{b} \\ &= \vec{\bar{b}} \end{aligned}$$

$$v. \quad \vec{n} \boxtimes \vec{t} = \vec{b} : \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \boxtimes \vec{t} &= -\left\langle \vec{n}, \vec{t} \right\rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus \vec{n} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{t} \\ &= -\left\langle \vec{n}, -\vec{t} \right\rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus \vec{n} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} (-\vec{t}) \\ &= \left\langle \vec{n}, \vec{t} \right\rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} - \vec{n} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{t} \\ &= -\vec{n} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{t} \\ &= \vec{b} \end{aligned}$$

$$vi. \quad \vec{t} \boxtimes \vec{\bar{b}} = \vec{n} \text{ ve } \vec{b} \boxtimes \vec{\bar{t}} = \vec{n} \quad (8.10)$$

$$vii. \quad \vec{n} \boxtimes \vec{\bar{b}} = \vec{t} \text{ ve } \vec{b} \boxtimes \vec{\bar{n}} = \vec{t} \quad (8.11)$$

Bu özellikler sayesinde, Sonuç 6.3, eşitlik (6.6) gereğince,

$$\langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[(\vec{t} \boxtimes \vec{n}) \boxplus (\vec{n} \boxtimes \vec{t}) \right] = \frac{1}{2} [\vec{b} \boxplus \vec{b}] = \vec{0} \quad (8.12)$$

$$\langle \vec{t}(s), \vec{b}(s) \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[(\vec{t} \boxtimes \vec{b}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes \vec{t}) \right] = \frac{1}{2} [\vec{n} \boxplus \vec{n}] = \vec{0} \quad (8.13)$$

$$\langle \vec{n}(s), \vec{b}(s) \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[(\vec{n} \boxtimes \vec{b}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes \vec{n}) \right] = \frac{1}{2} [\vec{t} \boxplus \vec{t}] = \vec{0} \quad (8.14)$$

$$\langle \vec{b}(s), \vec{b}(s) \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[(\vec{b} \boxtimes \vec{b}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes \vec{b}) \right] = \vec{b} \boxtimes \vec{b} = - \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus \vec{b} \wedge_{\mathbb{H}_p^n} \vec{b} = \vec{1} \quad (8.15)$$

bulunur. Böylece, $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ ortonormal n -vektör sistemi sıralı çarpım metriği kullanılarak elde edilir. Bu sisteme, $\vec{\gamma}$ eğrisinin $\vec{\gamma}(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı denir. $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$ ve $\vec{b}(s)$ n -vektörlerine de **n -boyutlu uzaysal kuaterniyonların uzayında birim hızlı eğrinin Frenet n -vektörleri** adı verilir.

Tanım 8.5. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında $\vec{\gamma}$ eğrisinin birinci eğriliği,

$$\vec{\kappa}(s) = \left\| \vec{t}'(s) \right\|_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \quad (8.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 8.2. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında birim hızlı $\vec{\gamma}$ eğrisinin birim teğet n -vektörü $\vec{t}$, birinci eğriliği $\vec{\kappa}$ olsun.

$$\vec{t}'(s) = \vec{n}(s) \boxtimes_p \vec{\kappa}(s) \quad (8.17)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (8.4) ve (8.16) eşitliklerinden açıkça görülür. ■

Teorem 8.3. $\mathbb{H}_p^n$ n -boyutlu uzaysal kuaterniyonların uzayı, $I \subset \mathbb{R}$ birim aralık olmak üzere $s \in I$ yay parametrelî,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}_p^n \\ s &\rightarrow \vec{\gamma}(s) = \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n \end{aligned}$$

eğrisinin $\forall s \in I$ için $\vec{\gamma}(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ ve eğrilikleri $\vec{\kappa}(s)$, $\vec{\tau}(s)$ olmak üzere, $\vec{t}'(s)$, $\vec{n}'(s)$, $\vec{b}'(s)$ n -vektörlerinin türevleri ve eğrilikler

arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned}\vec{t}'(s) &= \vec{n}(s) \boxtimes_p \vec{\kappa}(s) \\ \vec{n}'(s) &= (\vec{t}(s) \boxtimes_p (-\vec{\kappa}(s))) \boxplus (\vec{b}(s) \boxtimes_p \vec{\tau}(s)) \\ \vec{b}'(s) &= \vec{n}(s) \boxtimes_p (-\vec{\tau}(s))\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat. $\vec{t}'(s)$, $\vec{n}'(s)$, $\vec{b}'(s)$ n -vektörlerin türevleri ve $\vec{\kappa}(s)$, $\vec{\tau}(s)$ eğrilikleri arasındaki ilişki için, $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ ortonormal bir sistem oluşturduğundan,

$$\vec{t}'(s) = (\vec{t}(s) \boxtimes_p a_{11}) \boxplus (\vec{n}(s) \boxtimes_p a_{12}) \boxplus (\vec{b}(s) \boxtimes_p a_{13}) \quad (8.18)$$

$$\vec{n}'(s) = (\vec{t}(s) \boxtimes_p a_{21}) \boxplus (\vec{n}(s) \boxtimes_p a_{22}) \boxplus (\vec{b}(s) \boxtimes_p a_{23}) \quad (8.19)$$

$$\vec{b}'(s) = (\vec{t}(s) \boxtimes_p a_{31}) \boxplus (\vec{n}(s) \boxtimes_p a_{32}) \boxplus (\vec{b}(s) \boxtimes_p a_{33}) \quad (8.20)$$

yazılabilir. Burada $a_{ij} \in \mathbb{R}^n$, $(1 \leq i, j \leq 3)$ katsayılarını hesaplayalım.

(8.18) ifadesi sırasıyla $\vec{t}$, $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned}\bullet \quad \langle \vec{t}', \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{11} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{12} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{13} \right) \\ &= a_{11}\end{aligned}$$

eşitliği ile (8.12) ve (8.13) eşitlikleri ve Teorem 8.1 yardımı ile,

$$a_{11} = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\bullet \quad \langle \vec{t}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{11} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{12} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{13} \right) \\ &= a_{12}\end{aligned}$$

ve (8.17) eşitliği kullanılırsa $\langle \vec{t}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{n} \boxtimes_p \vec{\kappa}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{\kappa} = \vec{\kappa}$ olduğundan, (8.12) ve (8.14) eşitlikleri kullanıldığında,

$$a_{12} = \vec{\kappa}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\bullet \quad \langle \vec{t}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{11} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{12} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_p a_{13} \right) \\ &= a_{13}\end{aligned}$$

olmak üzere, (8.17) eşitliği kullanılırsa $\langle \vec{t}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{n} \boxdot_P \vec{k}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{k} = \vec{0}$ olduğundan, (8.13) ve (8.14) eşitlikleri kullanıldığında,

$$a_{13} = 0$$

elde edilir. Sonuçta, (8.18) ifadesi,

$$\vec{t}'(s) = \vec{n}(s) \boxdot_P \vec{k}(s) \quad (8.21)$$

olarak elde edilir.

(8.19) ifadesi sırasıyla $\vec{t}$, $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \vec{n}', \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxdot_P a_{21} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxdot_P a_{22} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxdot_P a_{23} \right) \\ &= a_{21} \end{aligned}$$

olmak üzere, (8.12) eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında,

$$\frac{1}{2} \left[\left(\vec{t}' \boxtimes \vec{n} \right) \boxplus \left(\vec{t} \boxtimes (\vec{n}') \right) \boxplus \left(\vec{n}' \boxtimes \vec{t} \right) \boxplus \left(\vec{n} \boxtimes (\vec{t}') \right) \right] = \vec{0}$$

elde edilir.

$\vec{t}$ ve $\vec{n}$ birer uzaysal kuaterniyon n -vektör olduğundan ve (8.2) eşitliği $\vec{t}$ ve $\vec{n}$ için geçerli olduğundan eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} \left[\left(\vec{t}' \boxtimes \vec{n} \right) \boxplus \left(\vec{n} \boxtimes (\vec{t}') \right) \right] \boxplus \frac{1}{2} \left[\left(\vec{t} \boxtimes (\vec{n}') \right) \boxplus \left(\vec{n}' \boxtimes \vec{t} \right) \right] = \vec{0}$$

olarak yazılır ve bu denklem,

$$\langle \vec{t}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{t}, \vec{n}' \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0}$$

eşitliğini verir. Burada,

$$\langle \vec{t}, \vec{n}' \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = -\langle \vec{t}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = -a_{12} \text{ bulunduğundan,}$$

$$a_{21} = -\vec{k}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \vec{n}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxdot_P a_{21} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxdot_P a_{22} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxdot_P a_{23} \right) \\ &= a_{22} \end{aligned}$$

olmak üzere, $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[(\vec{n} \boxtimes \vec{n}) \boxplus (\vec{n} \boxtimes \vec{n}) \right] = \vec{n} \boxtimes \vec{n} = \vec{1}$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır, (8.2) eşitliği $\vec{n}$ için geçerli olduğundan, eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$(\vec{n} \boxtimes \vec{n}) \boxplus (\vec{n} \boxtimes \vec{n}) = \vec{0} \text{ elde edilir. Bu denklem,}$$

$$\langle \vec{n}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0} \text{ demektir. Buradan,}$$

$$a_{22} = \vec{0}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \vec{n}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus a_{21} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus a_{22} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxplus a_{23} \right) \\ &= a_{23} \end{aligned}$$

olmak üzere, (8.14) eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında,

$$\frac{1}{2} \left[(\vec{n}' \boxtimes \vec{b}) \boxplus (\vec{n} \boxtimes (\vec{b})') \boxplus (\vec{b}' \boxtimes \vec{n}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes (\vec{n})') \right] = \vec{0}$$

elde edilir.

$\vec{n}$ ve $\vec{b}$ birer uzaysal kuaterniyon n -vektör olduğundan ve (8.2) eşitliği $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ n -vektörleri için geçerli olduğundan eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} \left[(\vec{n}' \boxtimes \vec{b}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes (\vec{n}')) \right] + \frac{1}{2} \left[(\vec{n} \boxtimes (\vec{b}')) \boxplus (\vec{b}' \boxtimes \vec{n}) \right] = \vec{0}$$

olarak yazılır ve,

$$\langle \vec{n}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{n}, \vec{b}' \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0}$$

eşitliği elde edilir. Burada, $\langle \vec{n}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = a_{23} = -\langle \vec{n}, \vec{b}' \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n}$ bulunduğundan $a_{23} = \vec{\tau}(s)$ alınır (8.19) ifadesi,

$$\vec{n}'(s) = (\vec{t}(s) \boxplus \vec{\kappa}(s)) \boxplus (\vec{b}(s) \boxplus \vec{\tau}(s)) \quad (8.22)$$

olarak elde edilir. Burada elde edilen,

$$a_{23} = \langle \vec{n}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{\tau}(s) \quad (8.23)$$

ifadesine $\mathbb{H}_p^n$ uzayında $\vec{\gamma}$ birim hızlı eğrisinin **ikinci eğriliği** veya **burulması** adı verilir.

(8.20) ifadesi, sırasıyla, $\vec{t}$, $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \vec{b}', \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{31} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{32} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{33} \right) \\ &= a_{31} \end{aligned}$$

olmak üzere, (8.13) eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında,

$$\frac{1}{2} \left[\left(\vec{t}' \boxtimes \vec{b} \right) \boxplus \left(\vec{t} \boxtimes \left(\vec{b}' \right)' \right) \boxplus \left(\vec{b}' \boxtimes \vec{t} \right) \boxplus \left(\vec{b} \boxtimes \left(\vec{t}' \right)' \right) \right] = \vec{0}$$

elde edilir.

Ayrıca, $\vec{t}$ ve $\vec{b}$ birer uzaysal kuaterniyon n -vektör olduğundan ve (8.2) eşitliği $\vec{t}$ ve $\vec{b}$ uzaysal kuaterniyon n -vektörleri için geçerli olduğundan, eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} \left[\left(\vec{t}' \boxtimes \vec{b} \right) \boxplus \left(\vec{b} \boxtimes \left(\vec{t}' \right)' \right) \right] \boxplus \frac{1}{2} \left[\left(\vec{t} \boxtimes \left(\vec{b}' \right)' \right) \boxplus \left(\vec{b}' \boxtimes \vec{t} \right) \right] = \vec{0}$$

olarak yazılır. Buradan,

$$\langle \vec{t}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} + \langle \vec{b}', \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0}$$

eşitliği elde edilir.

(8.14) ve (8.17) eşitlikleri kullanılırsa $\langle \vec{t}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{n} \square_P \vec{k}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \boxtimes_{\mathbb{R}^n} \vec{k} = \vec{0}$ olduğundan, $\langle \vec{b}', \vec{t} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = -\langle \vec{t}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = -a_{13}$ bulunur ve

$$a_{31} = \vec{0}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \vec{b}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{31} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{32} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{33} \right) \\ &= a_{32} \end{aligned}$$

ve $\langle \vec{n}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{\tau}$ ve $\langle \vec{b}', \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = -\langle \vec{n}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = a_{32}$ bulunduğundan,

$$a_{32} = -\vec{\tau}(s)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle \vec{b}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} &= \left(\langle \vec{t}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{31} \right) \boxplus \left(\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{32} \right) \boxplus \left(\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \square_P a_{33} \right) \\ &= a_{33} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{b} \boxtimes \vec{b} \right) \boxplus \left(\vec{b} \boxtimes \vec{b} \right) \right] = \vec{b} \boxtimes \vec{b} = \vec{1}$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır,

(8.2) eşitliği $\vec{n}$ için geçerli olduğundan, eşitlik tekrar düzenlenirse,

$$\left(\vec{b} \boxtimes \vec{b} \right) \boxplus \left(\vec{b} \boxtimes \vec{b} \right) = \vec{0}$$

olarak elde edilir. O halde, $\langle \vec{b}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0}$ bulunur. Yani,

$$a_{33} = \vec{0}$$

elde edilir. Sonuçta, (8.20) ifadesi,

$$\vec{b}'(s) = \vec{n}(s) \boxplus_p (-\vec{\tau}(s)) \quad (8.24)$$

olarak elde edilir. ■

Sonuç 8.1. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında, eşitlik (8.16) ile verilen $\vec{\gamma}$ eğrisinin birinci eğriliği, aynı zamanda,

$$\vec{\kappa}(s) = (\kappa_1(s), \kappa_2(s), \dots, \kappa_n(s))$$

olarak da yazılabilir. Burada, her bir $\kappa_i(s)$ ($1 \leq i \leq n$) değeri $\mathbb{H}$ uzayındaki γ_i kuaterniyonik eğrilerinin eşitlik (3.16) ile verilen eğriliğidir.

Sonuç 8.2. $\mathbb{H}_p^n$ uzayında, eşitlik (8.23) ile verilen $\vec{\gamma}$ eğrisinin burulması, aynı zamanda,

$$\vec{\tau}(s) = (\tau_1(s), \tau_2(s), \dots, \tau_n(s))$$

olarak da yazılabilir. Burada, her bir $\tau_i(s)$ ($1 \leq i \leq n$) değeri $\mathbb{H}$ uzayındaki γ_i kuaterniyonik eğrilerinin eşitlik (3.23) ile verilen burulmasıdır.

Örnek 8.1. $\vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p^2$ eğrisi $s \rightarrow \vec{\gamma}(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ için,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(s) = & \left(\left(\frac{s}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \vec{e}_3, \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{3} \cos s - \frac{\sqrt{7}}{3} \sin s \right) \vec{e}_1 + \frac{s}{3} \vec{e}_2 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \cos s - \frac{1}{3} \sin s \right) \vec{e}_3 \right) \end{aligned}$$

olarak verilsin. Sıralı çarpım metriğini kullanarak bu eğrinin Frenet 2-vektörlerini ve Frenet formüllerini bulunuz.

Çözüm Öncelikle $\vec{\gamma}$ eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Burada $\gamma_1, \gamma_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_p$ kuaterniyonik eğrileri için,

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}'(s) &= (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s)) \\ &= \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \vec{e}_3, \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{1}{3} \sin s - \frac{\sqrt{7}}{3} \cos s \right) \vec{e}_1 + \frac{1}{3} \vec{e}_2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \sin s - \frac{1}{3} \cos s \right) \vec{e}_3 \right)\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\left[\|\vec{\gamma}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^2}^2 \right]^2 &= \langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}'(s) \rangle_{\mathbb{H}_p^2}^{\mathbb{R}^2} = \vec{\gamma}'(s) \boxtimes \overline{\vec{\gamma}'(s)} \\ &= (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s)) \boxtimes (\overline{\gamma'_1(s)}, \overline{\gamma'_2(s)}) \\ &= (\gamma'_1(s) \times \overline{\gamma'_1(s)}, \gamma'_2(s) \times \overline{\gamma'_2(s)}) \\ &= (\|\gamma'_1(s)\|_{\mathbb{H}_p}^2, \|\gamma'_2(s)\|_{\mathbb{H}_p}^2) \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos s + \frac{3}{8} \cos^2 s + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos s + \frac{3}{8} \cos^2 s + \frac{3}{4} \sin^2 s, \right. \\ &\quad \left. \frac{8}{9} \sin^2 s + \frac{2\sqrt{7}}{9} \sin s \cos s + \frac{8}{9} \cos^2 s + \frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{7}}{9} \sin s \cos s \right) \\ &= (1, 1) = \vec{1}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\vec{\gamma}$ eğrisi birim hızlıdır.

γ_1 eğrisinin birim teğet vektörü t_1 ve γ_2 eğrisinin birim teğet vektörü t_2 olmak üzere, $\vec{\gamma}$ eğrisinin birim teğet uzaysal kuaterniyon 2-vektörü,

$$\vec{t}(s) = \vec{\gamma}'(s) = (t_1(s), t_2(s))$$

olarak yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\vec{t}'(s) &= \vec{\gamma}''(s) = (t'_1(s), t'_2(s)), \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \vec{e}_3, \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{1}{3} \cos s + \frac{\sqrt{7}}{3} \sin s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \cos s + \frac{1}{3} \sin s \right) \vec{e}_3 \right)\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}
\|\vec{t}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^2}^{\mathbb{R}^2} &= (\|t'_1(s)\|, \|t'_2(s)\|) \\
&= \left(\sqrt{\frac{3}{8}\sin^2 s + \frac{3}{8}\sin^2 s + \frac{3}{4}\cos^2 s}, \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{1}{9}\cos^2 s - \frac{2\sqrt{7}}{9}\cos s \sin s + \frac{7}{9}\sin^2 s + \frac{7}{9}\cos^2 s + \frac{2\sqrt{7}}{9}\cos s \sin s + \frac{1}{9}\sin^2 s} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\vec{n}(s) = \vec{t}'(s) \boxtimes_p \left[\|\vec{t}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^2}^{\mathbb{R}^2} \right]^{-1}$ tanımı gereğince,

$$\begin{aligned}
\vec{n}(s) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \vec{e}_3, \right. \\
&\quad \left(-\frac{1}{3} \cos s + \frac{\sqrt{7}}{3} \sin s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \cos s + \frac{1}{3} \sin s \right) \vec{e}_3 \Big) \boxtimes_p \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_2 + \cos s \vec{e}_3, \right. \\
&\quad \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_3 \Big)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vec{n}'(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_2 - \sin s \vec{e}_3 \right. \\
&\quad \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_1 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \sin s + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_3 \Big)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \boxtimes \vec{n}(s)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\vec{b}(s) &= \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \vec{e}_3, \right. \\
&\quad \left(-\frac{1}{3} \sin s - \frac{\sqrt{7}}{3} \cos s \right) \vec{e}_1 + \frac{1}{3} \vec{e}_2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \sin s - \frac{1}{3} \cos s \right) \vec{e}_3 \Big) \\
&\boxtimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_2 + \cos s \vec{e}_3, \right. \\
&\quad \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_3 \Big) \\
&= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_2 + \left(-\frac{1}{2} \sin s \right) \vec{e}_3, \right. \\
&\quad \left(\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{6\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_1 + \frac{4}{3\sqrt{2}} \vec{e}_2 + \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} \cos s - \frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_3 \Big)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve

$$\begin{aligned}\vec{b}'(s) = & \left(\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_2 + \left(-\frac{1}{2} \cos s \right) \vec{e}_3, \right. \\ & \left. \left(-\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} \sin s + \frac{1}{6\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_1 + \left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} \sin s - \frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_3 \right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu eğrinin $\vec{\kappa}(s) = \|\vec{t}'(s)\|_{\mathbb{H}_p^2}^{\mathbb{R}^2}$ eğriliği ve $\vec{\tau}(s) = \langle \vec{n}', \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^2}^{\mathbb{R}^2}$ burulması ise,

$$\vec{\kappa}(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$\vec{\tau}(s) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$$

olarak elde edilir. Bulunan bu eşitlikler neticesinde $\vec{\gamma}$ eğrisinin Frenet 2-vektörleri arasındaki ilişki Teorem 8.3 ve Sonuç 8.1 ile verilen eşitlikleri sağlar.

8.2 $\mathbb{H}^n$ Uzayında Kuaterniyonik Eğriler

Bu bölümde öncelikle $\mathbb{H}^n$ uzayında kuaterniyonik eğri tanımını verelim.

Tanım 8.6. Kuaterniyonik n -vektörlerin uzayı,

$$\mathbb{H}^n = \{ \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \mid \beta_i = \beta_{i0}\vec{e}_0 + \beta_{i1}\vec{e}_1 + \beta_{i2}\vec{e}_2 + \beta_{i3}\vec{e}_3 \in \mathbb{H}, 1 \leq i \leq n \}$$

olsun. Bu uzayda $s \in I \subset \mathbb{R}$ yay parametresi olmak üzere, $j = 0, 1, 2, 3$ için,

$$\begin{aligned}\vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ s &\rightarrow \vec{\beta}(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \dots, \beta_n(s)) \\ &= \left(\sum_{j=0}^3 \beta_{1j}(s) \vec{e}_j, \sum_{j=0}^3 \beta_{2j}(s) \vec{e}_j, \dots, \sum_{j=0}^3 \beta_{nj}(s) \vec{e}_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^3 \beta_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n\end{aligned}$$

ile tanımlanan reel değişkenli kuaterniyon değerli vektörel $\vec{\beta}$ dönüşümüne $\mathbb{H}^n$ **uza-
yında n -boyutlu kuaterniyonik eğri** denir. Burada, β_i ($1 \leq i \leq n$) fonksiyonlarının her biri Tanım 3.5 ile verilen $\mathbb{H}$ uzayında kuaterniyonik eğridir.

8.2.1 $\mathbb{H}^n$ Uzayında Kuaterniyonik Eğriler için Sıralı Çarpım Metriğine Göre Frenet-Serret Formülleri

Bölüm 8.1.1 kısmında kullanılan $\mathbb{H}^n$ uzayı için verilen tüm formülasyonlar bu bölümde kuaterniyonik n -vektörler için kullanılacaktır.

Tanım 8.7. $\mathbb{H}^n$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ n -boyutlu kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\vec{\beta}$ eğrisinin her noktasındaki n -vektörü $\vec{\beta}'(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left[\|\vec{\beta}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^2 &= \langle \vec{\beta}'(s), \vec{\beta}'(s) \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\beta}'(s) \boxtimes \vec{\beta}'(s) \right) \boxplus \left(\vec{\beta}'(s) \boxtimes \vec{\beta}'(s) \right) \right] = \vec{\beta}'(s) \boxtimes \vec{\beta}'(s) = \vec{1} \end{aligned}$$

ise $\vec{\beta}$ eğrisine **n -boyutlu birim hızlı kuaterniyonik eğri** denir.

Tanım 8.8. Her s reel parametresi için $\|\vec{\beta}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \neq \vec{0}$ veya $\vec{\beta}'(s) \neq \vec{0}$ ise $\vec{\beta}$ eğrisine **n -boyutlu kuaterniyonik regüler eğri** denir.

Teorem 8.4. $\mathbb{H}^n$ uzayında, $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ n -boyutlu birim hızlı kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\vec{\beta}$ eğrisinin birim teğet n -vektörü $\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = \left(\sum_{j=0}^3 \beta'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ ve $\vec{N}(s) = \vec{T}'(s) \boxtimes \left[\|\vec{T}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1}$ olmak üzere, $\vec{T}$ ve $\vec{T}'$ ortogonaldır ve ayrıca $\vec{N} \boxtimes \vec{T}$ bir uzaysal kuaterniyon n -vektördür.

İspat. Birim hızlı kuaterniyonik $\vec{\beta}$ eğrisi parametrik olarak,

$$\begin{aligned} \vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ s &\rightarrow \vec{\beta}(s) = \left(\sum_{j=0}^3 \beta_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n \end{aligned}$$

şeklinde verilsin.

n -boyutlu birim hızlı kuaterniyonik eğri tanımı ile elde edilen $\left[\|\vec{\beta}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^2 = \left[\|\vec{T}(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^2 = \vec{T}(s) \boxtimes \vec{T}(s) = \vec{1}$ ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa, $\mathbb{H}^n$ uzayında Teorem 7.5 (iii.) ile verilen çarpma işleminin türev özelliğine göre,

$$\left(\vec{T}' \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\vec{T} \boxtimes \left(\vec{T}' \right)' \right) = \vec{0} \quad (8.25)$$

elde edilir. $\vec{T}(s) = \left(\sum_{j=0}^3 \beta'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ bir uzaysal olmayan kuaterniyon n -vektör olduğuna göre Teorem 5.1 ile verilen eşlenik işlemi özellikleri gereğince

$$\begin{aligned}\overline{\vec{T}}(s) &= (\beta'_{i0})_{i=1}^n - \left(\sum_{j=1}^3 \beta'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n \text{ yazılabilir.} \quad \overline{\vec{T}'}(s) = (\beta''_{i0})_{i=1}^n - \left(\sum_{j=1}^3 \beta''_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n \\ \text{ve } \left(\overline{\vec{T}} \right)'(s) &= (\beta''_{i0})_{i=1}^n - \left(\sum_{j=1}^3 \beta''_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n \text{ olduğundan,}\end{aligned}$$

$$\overline{\vec{T}'}(s) = \left(\overline{\vec{T}} \right)'(s) \quad (8.26)$$

elde edilir. Böylece,

$$\langle \vec{T}, \vec{T}' \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{T}' \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\vec{T} \boxtimes \left(\overline{\vec{T}} \right)' \right) \right] \quad (8.27)$$

eşitliğinde (8.25) ve (8.26) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\langle \vec{T}, \vec{T}' \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0} \quad (8.28)$$

bulunacaktır. Yani, Tanım 6.3 ile verilen ortogonalite kavramı gereğince $\mathbb{H}^n$ uzayında $\vec{T}$ ve $\vec{T}'$ kuaterniyon n -vektörleri ortogonaldır.

(8.27) ve (8.28) eşitliklerinden,

$$\left(\vec{T}' \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\vec{T} \boxtimes \overline{\vec{T}'} \right) = \vec{0} \quad (8.29)$$

olduğu açıktır.

(8.29) eşitliği kuaterniyon n -vektörlerde Teorem 5.1 ile verilen eşlenik işlemi özellikleri dikkate alınarak düzenlenirse,

$$\left(\vec{T}' \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\vec{T} \boxtimes \left(\overline{\vec{T}'} \right)' \right) = \left(\vec{T}' \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\overline{\vec{T}} \boxtimes \left(\overline{\vec{T}'} \right)' \right) = \left(\vec{T}' \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\overline{\vec{T}' \boxtimes \vec{T}} \right) = \vec{0}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\left(\vec{T}' \boxtimes \left[\left\| \vec{T}' \right\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \right) \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\overline{\left(\vec{T}' \boxtimes \left[\left\| \vec{T}' \right\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \right) \boxtimes \vec{T}} \right) = \vec{0}$$

elde edilir. $\vec{N}(s) = \vec{T}'(s) \boxtimes \left[\left\| \vec{T}'(s) \right\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1}$ olduğundan,

$$\left(\vec{N} \boxtimes \vec{T} \right) \boxplus \left(\overline{\vec{N} \boxtimes \vec{T}} \right) = \vec{0}$$

bulunur. Buradan, $\vec{N} \boxtimes \vec{T}$ ifadesinin Tanım 4.13 ifadesine göre bir uzaysal kuaterniyon n -vektör olduğu görülür. ■

Not 8.1. $\vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ n -boyutlu birim hızlı kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\vec{T}$ ve $\vec{N}$ birim kuaterniyon n -vektörler olduğundan $\vec{t} = \vec{N} \boxtimes \vec{T}$ seçildiğinde,

$$\left[\|\vec{t}(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^2 = \vec{t}(s) \boxtimes \overline{\vec{t}(s)} = (\vec{N} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \overline{(\vec{N} \boxtimes \vec{T})} = \vec{N} \boxtimes \left((\vec{T} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{N} \right) = \vec{N} \boxtimes \vec{N} = \vec{1}$$

bulunur. Yani, $\vec{t}$ kuaterniyon n -vektörü de birim kuaterniyon n -vektördür ve bu durumda,

$$\vec{t} \boxtimes \vec{T} = (\vec{N} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{T} = (\vec{N} \boxtimes \vec{T}^{-1}) \boxtimes \vec{T} = \vec{N}$$

olup,

$$\vec{N} = \vec{t} \boxtimes \vec{T} \quad (8.30)$$

elde edilir.

Şimdi, öncelikle (8.30) eşitliğinden yola çıkarak Frenet 4-ayaklısını inşa edelim.

Tanım 8.9. Kuaterniyon n -vektörlerin uzayı $\mathbb{H}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ birim aralık ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere bir $\vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\vec{\beta}$ eğrisinin birim teğet kuaterniyon n -vektörü $\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = \left(\sum_{j=1}^n \beta'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$ olmak üzere,

$$\vec{N}(s) = \vec{T}'(s) \boxtimes \left[\|\vec{T}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \quad (8.31)$$

birim kuaterniyon n -vektörünü tanımlayalım. Burada $\vec{T}$ ve $\vec{T}'$ ortogonal olduğundan, $\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} = \vec{0}$ eşitliği (8.31) eşitliğinde yapılan seçim ve (8.28) eşitliği gereği açıktır.

Şimdi, $\vec{B}(s)$ n -vektörü $\vec{B}(s) = \vec{n}(s) \boxtimes \vec{T}(s)$ olarak seçilirse, Sonuç 6.3 gereğince aşağıdakiler sağlanır:

i. $\vec{B}$ birim kuaterniyon n -vektördür:

$$\begin{aligned} \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \vec{B} \boxtimes \vec{B} \\ &= (\vec{n} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\vec{n} \boxtimes \vec{T}) \\ &= (\vec{n} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\vec{T} \boxtimes \vec{n}) \\ &= \vec{n} \boxtimes ((\vec{T} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{n}) \\ &= \vec{n} \boxtimes \vec{n} \\ &= \vec{1} \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{T} \boxtimes \vec{N} \right) \boxplus \left(\vec{N} \boxtimes \vec{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{T} \boxtimes \left(\overline{\vec{t} \boxtimes \vec{T}} \right) \right) \boxplus \left(\left(\vec{t} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \vec{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{T} \boxtimes \left(\vec{T} \boxtimes \vec{t} \right) \right) \boxplus \left(\left(\vec{t} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \vec{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{t} \boxplus \vec{t} \right) \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{8.32}$$

iii.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{T}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{T} \boxtimes \vec{B} \right) \boxplus \left(\vec{B} \boxtimes \vec{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{T} \boxtimes \left(\vec{n} \boxtimes \vec{T} \right) \right) \boxplus \left(\left(\vec{n} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \vec{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{T} \boxtimes \left(\vec{T} \boxtimes \vec{n} \right) \right) \boxplus \left(\left(\vec{n} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \vec{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{n} \boxplus \vec{n} \right) \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{8.33}$$

iv.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{N}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{N} \boxtimes \vec{B} \right) \boxplus \left(\vec{B} \boxtimes \vec{N} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\left(\vec{t} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \left(\vec{n} \boxtimes \vec{T} \right) \right) \boxplus \left(\left(\vec{n} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \left(\vec{t} \boxtimes \vec{T} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{t} \boxtimes \left(\left(\vec{T} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \vec{n} \right) \right) \boxplus \left(\vec{n} \boxtimes \left(\left(\vec{T} \boxtimes \vec{T} \right) \boxtimes \vec{t} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\vec{t} \boxtimes \vec{n} \right) \boxplus \left(\vec{n} \boxtimes \vec{t} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \langle \vec{t}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Dolayısıyla $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ kuaterniyon n -vektör sistemi ortogonaldır.

Şimdi $\vec{D}(s)$ kuaterniyon n -vektörü $\vec{D}(s) = \vec{b}(s) \boxtimes \vec{T}(s)$ olarak seçilirse, Sonuç 6.3 gereğince aşağıdakiler sağlanır:

i. $\vec{D}$ birim kuaterniyon n -vektördür:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{D}, \vec{D} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \vec{D} \boxtimes \overline{\vec{D}} \\
&= (\vec{b} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\overline{\vec{b} \boxtimes \vec{T}}) \\
&= (\vec{b} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\vec{\bar{T}} \boxtimes \vec{\bar{b}}) \\
&= \vec{b} \boxtimes ((\vec{T} \boxtimes \vec{\bar{T}}) \boxtimes \vec{\bar{b}}) \\
&= \vec{b} \boxtimes \vec{\bar{b}} \\
&= \vec{1}
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{T}, \vec{D} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \frac{1}{2} [(\vec{T} \boxtimes \vec{D}) \boxplus (\vec{D} \boxtimes \vec{\bar{T}})] \\
&= \frac{1}{2} [(\vec{T} \boxtimes (\vec{b} \boxtimes \vec{T})) \boxplus ((\vec{b} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{\bar{T}})] \\
&= \frac{1}{2} [(\vec{T} \boxtimes (\vec{\bar{T}} \boxtimes \vec{\bar{b}})) \boxplus ((\vec{b} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{\bar{T}})] \\
&= \frac{1}{2} (\vec{\bar{b}} \boxplus \vec{b}) \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{8.35}$$

iii.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{N}, \vec{D} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \frac{1}{2} [(\vec{N} \boxtimes \vec{D}) \boxplus (\vec{D} \boxtimes \vec{\bar{N}})] \\
&= \frac{1}{2} [((\vec{t} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\vec{b} \boxtimes \vec{T})) \boxplus ((\vec{b} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\vec{\bar{t}} \boxtimes \vec{\bar{T}}))] \\
&= \frac{1}{2} [(\vec{t} \boxtimes ((\vec{T} \boxtimes \vec{\bar{T}}) \boxtimes \vec{\bar{b}})) \boxplus (\vec{b} \boxtimes ((\vec{T} \boxtimes \vec{\bar{T}}) \boxtimes \vec{\bar{t}}))] \\
&= \frac{1}{2} ((\vec{t} \boxtimes \vec{\bar{b}}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes \vec{\bar{t}})) \\
&= \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_p^n}^{\mathbb{R}^n} \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{8.36}$$

iv.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{B}, \vec{D} \rangle_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} &= \frac{1}{2} \left[(\vec{B} \boxtimes \vec{D}) \boxplus (\vec{D} \boxtimes \vec{B}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[((\vec{n} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\vec{b} \boxtimes \vec{T})) \boxplus ((\vec{b} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes (\vec{n} \boxtimes \vec{T})) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\vec{n} \boxtimes ((\vec{T} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{b})) \boxplus (\vec{b} \boxtimes ((\vec{T} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{n})) \right] \\
&= \frac{1}{2} ((\vec{n} \boxtimes \vec{b}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes \vec{n})) \\
&= \frac{1}{2} \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle_{\mathbb{H}_P^n}^{\mathbb{R}^n} \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Dolayısıyla $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{D}\}$ kuaterniyon n -vektör sistemi ortogonaldır. Bu sisteme, $\vec{\beta}$ eğrisinin $\vec{\beta}(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı denir. $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$, $\vec{B}(s)$ ve $\vec{D}(s)$ kuaterniyon n -vektörlerine de $\mathbb{H}^n$ uzayında birim hızlı eğrinin Frenet n -vektörleri adı verilir.

Tanım 8.10. $\mathbb{H}^n$ uzayında $\vec{\beta}$ eğrisinin eğriliği,

$$\vec{K}(s) = \|\vec{T}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \tag{8.38}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 8.5. $\mathbb{H}^n$ uzayında birim hızlı $\vec{\beta}$ eğrisinin birim teğet kuaterniyon n -vektörü $\vec{T}$, eğriliği $\vec{K}$ olsun.

$$\vec{T}'(s) = \vec{N}(s) \boxtimes \vec{K}(s) \tag{8.39}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (8.31) ve (8.38) eşitliklerinden açıkça görülür. ■

Teorem 8.6. Kuaterniyon n -vektörlerin uzayı $\mathbb{H}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ birim aralık, $s \in I$ yay parametresi ve $\vec{\beta}$ eğrisinin birim teğet kuaterniyon n -vektörü $\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = \left(\sum_{j=0}^3 \beta'_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n$

ile $\vec{N}(s) = \vec{T}'(s) \boxtimes \left[\|\vec{T}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^n \\
s &\rightarrow \vec{\beta}(s) = \left(\sum_{j=0}^3 \beta_{ij}(s) \vec{e}_j \right)_{i=1}^n
\end{aligned}$$

eğrisinin $\forall s \in I$ için $\vec{\beta}(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s), \vec{D}(s)\}$ ve eğrilikleri $\vec{\kappa}(s)$, $\vec{K}(s)$, $(\vec{\tau}(s) - \vec{K}(s))$ olmak üzere, $\vec{T}'(s)$, $\vec{N}'(s)$, $\vec{B}'(s)$, $\vec{D}'(s)$ ve eğrilikler

arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned}\vec{T}'(s) &= \vec{N}(s) \boxtimes \vec{K}(s) \\ \vec{N}'(s) &= (\vec{T}(s) \boxtimes -\vec{K}(s)) \boxplus (\vec{B}(s) \boxtimes \vec{\kappa}(s)) \\ \vec{B}'(s) &= (\vec{N}(s) \boxtimes -\vec{\kappa}(s)) \boxplus (\vec{D}(s) \boxtimes (\vec{\tau}(s) - \vec{K}(s))) \\ \vec{D}'(s) &= \vec{B}(s) \boxtimes -(\vec{\tau}(s) - \vec{K}(s))\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat. $\vec{T}'(s)$, $\vec{N}'(s)$, $\vec{B}'(s)$, $\vec{D}'(s)$ n -vektörlerinin türevleri ve $\vec{\kappa}(s)$, $\vec{K}(s)$, $(\vec{\tau} - \vec{K})(s)$ eğrilikleri arasındaki ilişkiyi elde edelim:

Teorem 8.5 ile $\vec{T}'(s) = \vec{N}(s) \boxtimes \vec{K}(s)$ olduğu gösterildi.

(8.30) eşitliğinin türevi alınır,

$$\vec{N}' = (\vec{t}' \boxtimes \vec{T}) \boxplus (\vec{t} \boxtimes \vec{T}')$$

elde edilir ve burada (8.17) ve (8.39) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\vec{N}' = ((\vec{n} \boxtimes_p \vec{\kappa}) \boxtimes \vec{T}) \boxplus (\vec{t} \boxtimes (\vec{N} \boxtimes \vec{K}))$$

elde edilir. (8.30) eşitliğinden aynı zamanda $\vec{t} \boxtimes \vec{N} = -\vec{T}$ yazılabilir, bu durumda,

$$\vec{N}' = (\vec{T} \boxtimes -\vec{K}) \boxplus (\vec{B} \boxtimes \vec{\kappa}) \tag{8.40}$$

elde edilir.

$\vec{B} = \vec{n} \boxtimes \vec{T}$ ifadesinin türevi alınır,

$$\vec{B}' = (\vec{n}' \boxtimes \vec{T}) \boxplus (\vec{n} \boxtimes \vec{T}')$$

elde edilir ve burada (8.22) ve (8.39) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\vec{B}' = (((\vec{t} \boxtimes_p -\vec{\kappa}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes_p \vec{\tau})) \boxtimes \vec{T}) \boxplus (\vec{n} \boxtimes (\vec{N} \boxtimes \vec{K}))$$

elde edilir. Buradan,

$$\vec{B}' = (((\vec{t} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes -\vec{\kappa}) \boxplus ((\vec{b} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes \vec{\tau})) \boxplus ((\vec{n} \boxtimes \vec{N}) \boxtimes \vec{K})$$

eşitliğinde (8.30) eşitliği ve $\vec{n} \boxtimes \vec{N} = -\vec{D}$ olduğu kullanılır, eşitlik düzenlenirse,

$$\vec{B}' = (\vec{N} \boxtimes -\vec{\kappa}) \boxplus (\vec{D} \boxtimes (\vec{\tau} - \vec{K})) \quad (8.41)$$

elde edilir.

$\vec{D} = \vec{b} \boxtimes \vec{T}$ ifadesinin türevi alınır,

$$\vec{D}' = \vec{b}' \boxtimes \vec{T} + \vec{b} \boxtimes \vec{T}'$$

elde edilir ve burada (8.24) ve (8.39) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\vec{D} = ((\vec{n} \boxtimes_p - \vec{\tau}) \boxtimes \vec{T}) \boxplus (\vec{b} \boxtimes (\vec{N} \boxtimes \vec{K}))$$

elde edilir. Buradan,

$$\vec{D}' = ((\vec{n} \boxtimes \vec{T}) \boxtimes -\vec{\tau}) \boxplus ((\vec{b} \boxtimes \vec{N}) \boxtimes \vec{K})$$

eşitliğinde $\vec{B} = \vec{n} \boxtimes \vec{T}$ seçimi ve $\vec{b} \boxtimes \vec{N} = \vec{B}$ olduğu kullanılır, eşitlik düzenlenirse,

$$\vec{D}' = \vec{B} \boxtimes -(\vec{\tau} - \vec{K}) \quad (8.42)$$

elde edilir. ■

Örnek 8.2. $\vec{\beta} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ eğrisi $s \rightarrow \vec{\beta}(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s))$ için,

$$\vec{\beta}(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_0 + \frac{1}{2} \sin s \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} s \vec{e}_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_3, \right. \\ \left. \frac{1}{3} \sin s \vec{e}_0 - \frac{1}{3} s \vec{e}_1 - \frac{1}{3} \cos s \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{7}}{3} s \vec{e}_3 \right)$$

olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet 2-vektörlerini ve Frenet formüllerini bulunuz.

Çözüm Öncelikle $\vec{\beta}$ eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Burada, $\beta_1, \beta_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ için,

$$\vec{\beta}'(s) = (\beta_1'(s), \beta_2'(s)) \\ = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_0 + \frac{1}{2} \cos s \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_3, \right. \\ \left. \frac{1}{3} \cos s \vec{e}_0 - \frac{1}{3} \vec{e}_1 + \frac{1}{3} \sin s \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{7}}{3} \vec{e}_3 \right)$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\left[\|\vec{\beta}'(s)\|_{\mathbb{H}^2}^{\mathbb{R}^2} \right]^2 &= \langle \vec{\beta}'(s), \vec{\beta}'(s) \rangle_{\mathbb{H}^2}^{\mathbb{R}^2} = \vec{\beta}'(s) \boxtimes \overline{\vec{\beta}'(s)} \\
&= \left(\|\beta'_1(s)\|_{\mathbb{H}}^2, \|\beta'_2(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{8} \sin^2 s + \frac{1}{4} \cos^2 s + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \sin^2 s, \frac{1}{9} \cos^2 s + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \sin^2 s + \frac{7}{9} \right) \\
&= (1, 1) = \vec{1}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\vec{\beta}$ eğrisi birim hızlıdır.

β_1 eğrisinin birim teğet vektörü T_1 ve β_2 eğrisinin birim teğet vektörü T_2 olmak üzere, $\vec{\beta}$ eğrisinin birim teğet kuaterniyon 2-vektörü,

$$\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = (T_1(s), T_2(s))$$

olarak yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(s) = \vec{\beta}''(s) &= (T'_1(s), T'_2(s)) \\
&= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_0 - \frac{1}{2} \sin s \vec{e}_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_3, -\frac{1}{3} \sin s \vec{e}_0 + \frac{1}{3} \cos s \vec{e}_2 \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\|\vec{T}'(s)\|_{\mathbb{H}^2}^{\mathbb{R}^2} &= (\|T'_1(s)\|_{\mathbb{H}}, \|T'_2(s)\|_{\mathbb{H}}) \\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{8} \cos^2 s + \frac{1}{4} \sin^2 s + \frac{1}{8} \cos^2 s}, \sqrt{\frac{1}{9} \sin^2 s + \frac{1}{9} \cos^2 s} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbb{H}^n$ uzayında $\vec{\beta}$ eğrisinin eğriliği $\vec{K}(s) = \|\vec{T}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n}$ olduğundan,

$$\vec{K}(s) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$$

bulunur. Buradan, $\vec{N}(s) = \vec{T}'(s) \boxtimes \left[\|\vec{T}'(s)\|_{\mathbb{H}^n}^{\mathbb{R}^n} \right]^{-1}$ tanımı gereğince,

$$\begin{aligned}
\vec{N}(s) &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_0 - \frac{1}{2} \sin s \vec{e}_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_3, -\frac{1}{3} \sin s \vec{e}_0 + \frac{1}{3} \cos s \vec{e}_2 \right) \boxtimes_p \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)^{-1} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_0 - \sin s \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \vec{e}_3, -\sin s \vec{e}_0 + \cos s \vec{e}_2 \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca, Örnek 8.1 ile ele alınan $\vec{t} = \vec{N} \boxtimes \vec{T}$ eşitliğini sağlayan $\vec{t}$ n -vektörünü birim teğet kuaterniyon n -vektör kabul eden $\vec{\gamma}$ eğrisinin Frenet n -vektörleri $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ olmak üzere, $\vec{B}(s) = \vec{n}(s) \boxtimes \vec{T}(s)$ ve $\vec{D}(s) = \vec{b}(s) \boxtimes \vec{T}(s)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\vec{B}(s) &= \vec{n}(s) \boxtimes \vec{T}(s) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_2 + \cos s \vec{e}_3, \right. \\ &\quad \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_3 \Big) \\ &\boxtimes \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_0 + \frac{1}{2} \cos s \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_3, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \cos s \vec{e}_0 - \frac{1}{3} \vec{e}_1 + \frac{1}{3} \sin s \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{7}}{3} \vec{e}_3 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s e_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s e_1 + \frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin s e_3, \right. \\ &\quad \left. -\frac{4}{3\sqrt{2}} \cos s e_0 - \frac{1}{6\sqrt{2}} e_1 - \frac{4}{3\sqrt{2}} \sin s e_2 + \frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} e_3 \right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}\vec{D}(s) &= \vec{b}(s) \boxtimes \vec{T}(s) \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos s \right) \vec{e}_2 + \left(-\frac{1}{2} \sin s \right) \vec{e}_3, \right. \\ &\quad \left(\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{6\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_1 + \frac{4}{3\sqrt{2}} \vec{e}_2 + \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} \cos s - \frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} \sin s \right) \vec{e}_3 \Big) \\ &\boxtimes \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_0 + \frac{1}{2} \cos s \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin s \vec{e}_3, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \cos s \vec{e}_0 - \frac{1}{3} \vec{e}_1 + \frac{1}{3} \sin s \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{7}}{3} \vec{e}_3 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_3, \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} e_3 \right)\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak, ortogonal $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \vec{D}\}$ kuaterniyon n -vektör sistemi elde edilir. Ayrıca, Örnek 8.1 ile ele alınan $\vec{\gamma}$ eğrisinin eğrilikleri olan $\vec{\kappa}(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$ ve $\vec{\tau}(s) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ kullanılırsa $\vec{\beta}$ eğrisinin Teorem 8.6 ile verilen Frenet formülleri sağlanır.

9 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, $\mathbb{H}^n$ uzayının cebirsel yapılarını ele almak için öncelikle n -boyutlu reel ve n -boyutlu kompleks uzaylar ile ilgili temel kavramlardan bahsedildi. Bu kısımda orijinal olarak, n -boyutlu reel uzayın halka yapısı, yine $\mathbb{R}^n$ uzayında bir sıralama bağıntısı ve sıralı çarpım metriği tanımlandı. Diğer taraftan, eğrileri tanımlamakta kullandığımız $\mathbb{H}^n$ uzayındaki vektörel fonksiyonları incelemek için öncelikle $\mathbb{H}$ uzayında kuaterniyonik fonksiyonlar ile ilgili temel kavramlardan bahsedildi.

Literatürde bulunan $\mathbb{H}^n$ uzayının kuaterniyon uzayı üzerinde çalışılan tüm yapı ve özellikleri haricinde, $\mathbb{H}^n$ uzayının $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ uzayları üzerindeki cebirsel yapıları da incelendi. Cebirsel yapıları oluştururken sadelik açısından $\mathbb{H}^n$ uzayının elemanlarının farklı gösterimleri de orijinal bölüm olarak çalışıldı. Bu vesile ile, $\mathbb{H}^n$ uzayında n -boyutlu kuaterniyonik eğrilerin Frenet-Serret formüllerini oluştururken çalışılan farklı gösterimlerden ve kuaterniyon uzayında [1] çalışması baz alınarak temel olarak verilen kuaterniyonik eğrilerin Frenet-Serret formüllerinden yararlanıldı.

Tezde, n -boyutlu kuaterniyonik eğrilerin Frenet-Serret formülleri; n -boyutlu birim hızlı γ uzaysal kuaterniyonik eğrileri ve n -boyutlu birim hızlı β kuaterniyonik eğrileri baz alınarak hesaplanmıştır. Gelecek çalışmalar için, öncelikle n -boyutlu bir kuaterniyonik eğrinin birim hızlı olmadığı durumlardaki formülasyonların elde edilmesi öngörülmüştür. Ayrıca, incelenen cebirsel yapılar dikkate alınarak farklı vektör uzayı ya da modül yapıları üzerinde çalışılarak [1] kaynağından bağımsız olarak tekrardan n -boyutlu kuaterniyonik eğriler için farklı formülasyonların elde edilebilirliği araştırılabilir.

- [1] K. Bharathi, M. Nagaraj, “Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formula,” *Indian J. Pure Appl. Math*, vol. 18, no. 6, pp. 507–511, 1987.
- [2] A. R. Naiman, “The role of quaternions in the history of mathematics,” 1975.
- [3] H. H. Hacısalihoğlu, *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*. Gazi Üniversitesi, 1983.
- [4] D. Eberly, “Quaternion algebra and calculus,” *Magic Software Inc*, vol. 26, 2002.
- [5] F. Zhang, “Quaternions and matrices of quaternions,” *Linear algebra and its applications*, vol. 251, pp. 21–57, 1997.
- [6] J. P. Morais, S. Georgiev, W. Sprössig, *Real quaternionic calculus handbook*. Springer, 2014.
- [7] E. Cho, “De Moivre’s formula for quaternions,” *Applied mathematics letters*, vol. 11, no. 6, pp. 33–35, 1998.
- [8] D. R. Farenick, B. A. Pidkowich, “The spectral theorem in quaternions,” *Linear algebra and its applications*, vol. 371, pp. 75–102, 2003.
- [9] J. P. Ward, *Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 403.
- [10] P. R. Girard, *Quaternions, Clifford algebras and relativistic physics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [11] Ö. Bektaş, “Oktoniyonik eğriler ve karakteristik özellikleri,” Ph.D. dissertation, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, 2015.
- [12] J. Baez, “The octonions,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 39, no. 2, pp. 145–205, 2002.
- [13] A. Sudbery, “Quaternionic analysis,” in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, vol. 85, 1979, pp. 199–225.
- [14] C. A. Deavours, “The quaternion calculus,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 80, no. 9, pp. 995–1008, 1973.
- [15] O. Dzagnidze *et al.*, “On the differentiability of quaternion functions,” *Tbilisi Mathematical Journal*, vol. 5, no. 1, pp. 1–15, 2012.
- [16] O. Dzagnidze, “On some new properties of quaternion functions,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 235, no. 5, pp. 557–603, 2018.
- [17] G. Gentili, D. C. Struppa, “A new theory of regular functions of a quaternionic variable,” *Advances in Mathematics*, vol. 216, no. 1, pp. 279–301, 2007.

- [18] A. C. Da Silva, *Lectures on symplectic geometry*. Sistema librum 2.0, 2005, vol. 3575.
- [19] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, 2. Oxford University Press, 1999.
- [20] E. Ata, “Dual kuaterniyonlar üzerinde simplektik geometri,” *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, no. 006, pp. 221–230, 2004.
- [21] C. C. Chevalley, “Theory of lie groups,” 1946.
- [22] A. Sivridağ, R. Güneş, S. Keleş, “The Serret-Frenet formulae for dual quaternion-valued functions of a single real variable,” *Mechanism and machine theory*, vol. 29, no. 5, pp. 749–754, 1994.
- [23] A. Dağdeviren, “Dual kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonik eğriler,” Ph.D. dissertation, Doktora tezi, 2018.
- [24] A. Tuna, “Yarı öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri,” Ph.D. dissertation, Fen Bilimleri Enstitüsü, Süleyman Demirel Üniversitesi, 2002.
- [25] S. Demir, K. Özdaş, “Reel kuaterniyonlarla Serret-Frenet formülleri,” *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, vol. 9, no. 3, pp. 1–7, 2005.
- [26] M. L. Eaton, *Multivariate statistics: a vector space approach*. 1983.
- [27] S. F. Andrilli, D. Hecker, *Elementary linear algebra*. Amsterdam; Boston: Elsevier Academic Press, 2010.
- [28] S. Yüce, *Lineer Cebir*. Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.
- [29] S. Yüce, *Analitik geometri*. Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.
- [30] B. Davvaz, V. Leoreanu, *Hyperring theory and applications*, Int. Academic Press, 2007.
- [31] D. Altun, S. Yüce, “Algebraic structure and basics of analysis of n -dimensional quaternionic space,” *Heliyon*, vol. 7, no. 6, e07375, 2021.
- [32] S. Yüce, *Öklid uzayında diferansiyel geometri*. Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.
- [33] *The libretexts library*. [Online]. Available: [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_\(OpenStax\)/13%3A_Vector-Valued_Functions/13.2%3A_Calculus_of_Vector-Valued_Functions](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/13%3A_Vector-Valued_Functions/13.2%3A_Calculus_of_Vector-Valued_Functions) (visited on 04/04/2020).
- [34] H. Anton, I. C. Bivens, S. Davis, *Calculus: early transcendentals*. John Wiley, 2009.
- [35] *Ximera open courses*. [Online]. Available: <https://ximera.osu.edu/mooculus/calculus3/calculusAndVectorValuedFunctions/titlePage> (visited on 05/10/2020).
- [36] *The libretexts library*. [Online]. Available: [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_\(Apex\)/12%3A_Functions_of_Several_Variables/12.2%3A_Limits_and_Continuity_of_Multivariable_Functions](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(Apex)/12%3A_Functions_of_Several_Variables/12.2%3A_Limits_and_Continuity_of_Multivariable_Functions) (visited on 04/04/2020).
- [37] R. Larson, *Elementary linear algebra*. Nelson Education, 2016.
- [38] S. Yüce, *Sayılar ve Geometri*. Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.

- [39] O. Aléssio, “Differential geometry of intersection curves in R^4 of three implicit surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 26, no. 4, pp. 455–471, 2009.



TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. D. Altun, S. Yüce, “Algebraic Structure and Basics of Analysis of n -Dimensional Quaternionic Space”, Heliyon, vol. 7, no. 6, e07375, 2021.

Konferans Bildirisi

1. D. Altun, S. Yüce, “ $\mathbb{H}^n$ Kuaterniyonik Uzayın Cebirsel Yapıları”, 32. Ulusal Matematik Sempozyumu, Samsun, Türkiye, 31 Ağustos - 03 Eylül 2019, ss.43.
2. D. Altun, S. Yüce, “Algebraic Structure of n -Dimensional Quaternionic Space”, International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering (ICMASE2020), Ankara, Türkiye, 9 - 10 Temmuz 2020.

Kitap

1. D. Altun, “Reel Kuaterniyonlar”, Sayılar ve Geometri (1. Baskı) içinde (ss.311-359), S. Yüce, Pegem Akademi Yayıncılık, ISBN:978-625-7880-36-7, 2020.