

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLASILIKSAL UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMİNİN BAZI
ÖZELLİKLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Arife Aysun KARAASLAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Mart, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**OLASILIKSAL UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMİNİN BAZI
ÖZELLİKLERİNİN ARAŞTIRILMASI**

Arife Aysun KARAASLAN tarafından hazırlanan tez çalışması 01.03.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Doç. Dr. Yusuf ZEREN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Faik GÜRSOY, Üye
Adıyaman Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Vatan KARAKAYA sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Olasılıksal Uzaylarda Sabit Nokta Teoreminin Bazı Özelliklerinin Araştırılması başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Arife Aysun KARAASLAN

İmza



Bu alışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)
tarafından 2211-A Genel Yurteri Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.



Anneme
ve
biricik oğluma

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerini her zaman benimle paylaşan, kendisi ile çalışmaktan gurur duyup, feyzaldığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA' ya en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Doktora eğitim sürem boyunca 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' na teşekkür ederim.

Destekleriyle her zaman yanımda olan ve benim için birçok özveride bulunan başta annem olmak üzere, sevgili babam ve kardeşime en kalbi duygularıyla teşekkür ederim.

Sevgili eşim Mehmet Fatih KARAASLAN ve canım oğlum Yiğit Emir KARAASLAN' a destekleri için sonsuz teşekkür ederim.

Arife Aysun KARAASLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	5
2 TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Analiz Kaynaklı Temel Kavramlar	6
2.2 Sabit Nokta Teorisi Kaynaklı Kavramlar	9
2.3 Olasılıksal Metrik ve Normlu Uzaylardaki Temel Kavramlar	14
3 KISMİ SIRALI OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLER İÇİN SONUÇLAR	25
3.1 Kısmi Sıralı Olasılıksal Metrik Uzaylarda Büzülme Dönüşümler İçin n-li Sabit Nokta Teoremleri	25
4 NON-ARCHIMEDEAN Menger OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA BİR BÜZÜLME DÖNÜŞÜMÜ	44
4.1 Non-Archimedean Menger Olasılıksal Metrik Uzaylarda γ Büzülme Dönüşümü İçin Sabit nokta Teoremleri	44
4.2 Non-Archimedean Menger Olasılıksal Metrik Uzaylarda γ Büzülme Dönüşümü İçin En İyi Yaklaşım Noktası Teoremleri	52
5 S-OLASILIKSAL UZAYLARDA BAZI DÖNÜŞÜMLER İÇİN KUVVETLİ YAKINSAKLIK TEOREMLERİ	66
6 SONUÇ VE ÖNERİLER	70
KAYNAKÇA	71
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	76

SİMGELİSTESİ

F	Dağılım Fonksiyonu
L	Dağılım Fonksiyonlarının Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$F_{x,y}$	$F(x, y)$ Dağılım Fonksiyonu
$F_{x,y}(t)$	$F_{x,y}$ 'nin bir t değişkenindeki değeri
$(X, \leq)$	Kısmi Sıralı Küme
(X, d)	Metrik Uzay
(X, F, Δ)	Menger Olasılıksal Metrik Uzay
$(X, \ \cdot\)$	Normlu Uzay
(X, F)	Olasılıksal Metrik Uzay
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
L^+	Uzaklık Dağılım Fonksiyonu
Δ	Üçgen t-norm

Olasılıksal Uzaylarda Sabit Nokta Teoreminin Bazı Özelliklerinin Araştırılması

Arife Aysun KARAASLAN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bu tez çalışmasında olasılıksal metrik uzaylarda n -li sabit nokta teoremleri çalışılmış olup, ayrıca bu uzaylarda yeni bir büzölme dönüşümü ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; öncelikle literatür özetinden bahsedilmiş olup, ardından tezin amacı ve hipoteze yer verilmiştir.

İkinci bölümde; tezde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilmiştir.

Daha önce, kısmi sıralı olasılıksal metrik uzaylarda ikili-üçlü sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde; yapılan çalışmaların bir genellemesi olan n -li sabit nokta teoremlerinin bu olasılıksal metrik uzaylardaki çalışmalarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde; non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzaylarda γ -büzülme dönüşümü ve γ -zayıf büzülme dönüşümleri tanımları verilmiş olup, sabit nokta teoremleri çalışılmıştır. Ayrıca, birinci ve ikinci tipten γ -yakınsal büzülme dönüşümleri tanımlanarak, bu dönüşümler için en iyi yaklaşım noktası teoremleri ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde; S -olasılıksal normlu uzaylarda hemicontractive ve demicontractive dönüşümler için yakınsaklık teoremleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Olasılıksal metrik uzay, n -li sabit nokta, γ -büzülme dönüşümü, en iyi yaklaşım noktası, γ -yakınsal büzülme dönüşümü



Investigation of Some Properties of Fixed Point Theorem in Probabilistic Spaces

Arife Aysun KARAASLAN

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

In this thesis, n -tuple coincidence point theorems were studied in probabilistic metric spaces, and also we studied a new contraction in these spaces.

This study consists of six chapters.

Primarily, literature summary is given in the first section. Purpose of the thesis and hypothesis are included in this section.

In the second section; basic definitions and theorems that will be needed in the thesis are given.

In the third section; we gave the n -tuple fixed point theorems in partially ordered probabilistic metric spaces, which are the generalization of coupled and tripled fixed point theorems in these probabilistic spaces.

In the fourth section; we introduced the γ -contraction and γ -weak contraction in non-Archimedean Menger probabilistic metric spaces and also we studied fixed point theorems for these mappings. Additionally, we gave the definitions of γ -

proximal contractions of first and second type in non-Archimedean Menger probabilistic metric spaces and we established best proximity point theorems for these proximal contractions.

In fifth section; convergence theorems are given for hemicontractive and demicontractive mappings in S -probabilistic normed spaces.

Keywords: Probabilistic metric space, n -tuple fixed point, γ -contraction mapping, best proximity point, γ -proximal contraction mapping.



1.1 Literatür Özeti

Matematiğin tarihi gelişimi sürecinde pek çok matematiksel, fiziksel ve uzaklık kavramının görüldüğü diğer bilimsel yapılarda ortak idealizasyon sağlayan soyut metrik uzay formülasyonu 1906 yılında M. Fréchet tarafından tanıtılmıştır [1]. Üzerinde düşünülen nesneler noktalar, fonksiyonlar, kümeler ve hatta subjektif duyu deneyleri gibi çok çeşitli olabilir. Önemli olan; negatif olmayan bir gerçel sayıyı belirli bir kümenin elemanlarının her bir sıralı ikilisi ile ilişkilendirme olasılığıdır ve bu gibi elemanların ikilileri ve üçlülerile ilişkili sayıların belirli koşulları sağlamasıdır.

Bununla birlikte metrik uzaylar teorisinin uygulandığı bir çok örnekte, tek bir sayının bir çift eleman ile bu birleşimi gerçekçi bir biçimde aşırı idealleştirmedir. Bu iki nokta arasındaki mesafe olarak verilen sayının genellikle tek bir ölçümün sonucu değil, bir dizi ölçümün ortalaması olduğu sıradan bir uzunluk ölçümünde bile geçerlidir.

Poincaré, bilim felsefesi üzerine yazdığı bir çok makalesinde; matematik ve fizik arasındaki farkı şu şekilde tanımlamıştır:

Matematikte, eğer A' 'nın niceliği B' 'ye ve B' 'nin de niceliği C' 'ye eşit ise buradan A' 'nın niceliği C' 'ye eşittir denir. Yani terminolojide matematiksel eşitlik geçişli bir ilişkiye sahiptir.

Ancak gözlemlenebilir fiziksel süreklilikte, “eşit” ifadesi ayırt edilemez anlamına gelmektedir ve bu süreklilikte; “ A , B' 'ye eşit ise ve B , C' 'ye eşit ise”, hiçbir şekilde A' 'nın C' 'ye eşit olduğu sonucu çıkmaz. Fakat bu durum A , C' 'nin eşliğinde olmasa bile; A , B' 'nin eşliği içinde ve B , C' 'nin eşliği içinde olabilir şeklinde yorumlanmıştır. Poincaré, buna;

“deneyimin ham sonucu” demiş ve “ $A=B$, $B=C$, $A<C$ ” ilişkisinin fiziksel sürekliliğin formülü olarak kabul edilebileceğini belirtmiştir. Yani; fiziksel eşitlik geçişli bir ilişkiye sahip değildir.

Fakat bu kabul; “Bu düşünce ikna edici midir?” sorusunu ortaya çıkarmıştır.

Fiziksel niceliklerin ayırtedilebilir olup olmadığı sorusunun her zaman basit bir evet veya hayır ile cevaplanamayacağını kanıtlayan deneyler tasarlamak mümkündür. Aynı gözlemci, iki nesneyi bazen aynı bazen de ayırtedilebilir olarak görebilmektedir.

O zaman, geçişme özelliğine sahip matematiksel eşitliği ve geçişme özelliğine sahip olmayan fiziksel eşitlik ilişkisini birbirinden ayırmak yerine, matematikteki geçişli ilişkiyi korumak ve fiziksel ve fizyolojik niceliklerin ayırımı için bir olasılık, yani; 0 ve 1 arasında bulunan bir sayı ile tanımlamak daha uygun görülmüştür.

Bu fikrin detaylandırılması, uzaklık kavramına belirli bir sayıdan ziyade dağılım fonksiyonları kullanılarak istatistiksel olarak bakışa yol açmıştır. Metrik uzayların böyle bir olasılıksal genellemesi, fiziksel büyüklüklerin araştırılması için iyi uyarlanmış görülmektedir. Öklid’ in yaklaşımından daha farklı bir yaklaşım içeren olasılıksal yaklaşım nesnenin fiziğini genelleştirmek için yararlı bir araç olmuştur. Olasılıksal metrik uzay kavramı, iki nokta arasındaki mesafeyi tam bilmediğimiz durumlarda, bu mesafenin olası değerlerinin olasılıklarını bilmemize yardımcı olur.

Daha iyi ifadeyle; her bir x, y elemanları arasındaki uzaklık tek bir $d(x, y)$ uzaklık sayısı ile ilişkilendirilmek yerine bir $F_{x,y}$ dağılım fonksiyonu ile ilişkilendirilmelidir. Herhangi bir pozitif t sayısı için $F_{x,y}(t)$; x ile y arasındaki uzaklığın t ’ den küçük olma olasılığı olarak yorumlanır. Bu şekilde metrik uzay kavramının bir genellemesi elde edilir. Böyle bir genelleme ilk olarak 1942 yılında Karl Menger tarafından yapılmış olup, onu istatistiksel metrik uzay olarak adlandırmıştır [2]. Orjinal çalışmasında, Menger $F_{x,y}$ dağılım fonksiyonları için genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğini de içeren aksiyomlar verdi. Arada olma teorisini kurup olası uygulama alanlarını göstermiştir.

1943' de Menger' in çalışmasından kısa bir süre sonra A. Wald, Menger' in genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğini eleştirerek; belirtilmemiş bir işlev içermesinden dolayı dezavantaja sahip olacağını belirtti. Menger tarafından tanımlanan eşitsizliğin, sadece metrik uzaylar ve sınırlı koşullara sahip olan dağılım fonksiyonları ile ilişkilendirilmesini uygun görmeyerek üçgen eşitsizliğine alternatif olarak önerdiği makalesini yayınlamıştır [3].

1951 yılında Menger, daha önceki çalışmaların özeti, çeşitli spesifik örneklerin topluluğunu ve teoremin olası uygulamalarının daha fazla incelemelerini içeren bir makale ile istatistiksel metrik uzaylar üzerinde çalışmalarına devam etti. Bu makalede Menger, Wald' ın üçgen eşitsizliğini benimsedi [4]. Olasılıksal metrik uzaylardaki öncü alışmalar, Scheiwezer ve Sklar tarafından başlatılmıştır [5-7]. Ardından, Serstnev tarafından olasılıksal normlu uzaylar kavramı tanımlanmıştır [8-11].

Bir olasılıksal metrik uzayda; bir sabit noktanın varlığına ilişkin en iyi sonuç Sehgal tarafından elde edilmiştir [12-13]. Olasılıksal metrik uzay ve Menger olasılıksal metrik uzaylarda büzölme dönüşümleri için sabit nokta teoremlerine ait pek çok çalışma literatürde bulunmaktadır [14-36]. Ayrıca Das, Dutta ve Karakaya tarafından olasılıksal normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı üzerine çalışmalar yapılmış olup bu uzaylarda, kuvvetli istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktaları tanımları genişletilmiştir [37]. Das ve arkadaşları, olasılıkta istatistiksel yakınsaklık ile ilgili önceki yapılan yaklaşımlardan daha yeni ve daha genel metotlar tanımlamışlardır [38].

Guo ve Lakshmikantham 1987 yılında ikili sabit nokta kavramını tanımladılar [39]. Daha sonra, Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından karışık monotonluk özelliğini tanımlanarak sıralı metrik uzaylarda ikili sabit nokta teoremini verilmiştir [40]. Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından yapılan çalışma, yine Lakshmikantham ve Ćiric tarafından genişletilmiştir [41]. Berinde ve Borcut tarafından ikili sabit nokta teoremlerinin genellemesi olarak üçlü sabit nokta teoremleri verilmiştir [42]. Ertürk ve Karakaya tarafından da bir genelleme yapılarak kısmi sıralı uzaylarda n - li sabit nokta teoremleri çalışılmıştır [43]. Alam, İmdad ve Ali sıralı metrik

uzaylarda yapılan n -li sabit nokta sonuçlarını birleştiren bir çalışma hazırlamıştır [44]. Literatürde bu alanda pek çok çalışma bulunmaktadır [45-51].

Lineer olmayan analizde, sabit nokta teorisi bir metrik uzay, normlu lineer uzay veya topolojik vektör uzay gibi uzayların bir alt kümesi üzerinde tanımlı bir T dönüşümü için, $Tx = x$ denklemini çözmeye yarayan önemli bir araçtır. A ve B kümeleri boştan farklı olmak üzere, T dönüşümü, A' dan B' ye tanımlı ise bahsedilen $Tx = x$ denklemi mutlaka bir çözümü kabul etmez. Böyle durumlarda, x elemanına karar vermek için $d(x, Tx)$ hatasının minimum olması istenir. Olasılıksal metrik uzaylardaki karşılığı düşünülecek olursa, istenilen $F_{x, Tx}(t)$ hatasını maksimum yapacak şekilde bir x çözümü bulmaktır. En iyi yaklaşım noktası teoremleri, en uygun olan yaklaşık çözümlerin bulunması için gerekli koşulları sağlar. Ayrıca en iyi yaklaşım noktası teorisi, sabit nokta teorisinin bir genellemesidir. $T: A \rightarrow A$ dönüşümü düşünülürse, en iyi yaklaşım noktası sabit noktaya indirgenmiş olur. Bu alandaki çalışmalar, ilk olarak Fan tarafından başlatılmıştır [52]. Bir dönüşümün, en iyi yaklaşım noktasını bulmaya yönelik yapılan pek çok çalışma bulunmaktadır [53-66]. Son olarak, Su ve Zhang tarafından olasılıksal metrik uzaylarda en iyi yaklaşım noktasına ait tanım ve teoremler verilmiştir [67].

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, kısmi sıralı olasılıksal metrik uzaylarda n -li sabit nokta teoremleri elde edilecektir. Non-Archimedean Menger olasılıksal uzaylarda tanımlanan bir büzülme dönüşümü olan γ -büzülme dönüşümü ve zayıf γ -büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri verilecektir. Yine, non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzaylarda, birinci ve ikinci tipten γ -yakınsal büzülme dönüşümleri tanımlanacak ve bu dönüşümler için en iyi yaklaşım noktası teoremleri elde edilecektir. İspatlanan teoremleri destekleyen örnekler verilecektir.

S -olasılıksal normlu uzaylarda hemicontractive ve demicontractive dönüşümler ile ilgili çalışmalara yer verilecektir.

1.3 Hipotez

Üçüncü bölümde, $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere, (X, F, Δ) tam Menger olasılıksal metrik uzay olsun. Karışık h -monoton özelliğine sahip B ve h dönüşümleri için B' nin sürekli veya azalmayan (x_n) dizisinin x' e yakınsak ise $x_n \leq x$, artmayan (y_n) dizisinin y' ye yakınsak ise $y \leq y_n$ şartları altında n -li çakışma noktasına sahip oldukları gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, (X, F, Δ) tam bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayında büzülme dönüşümü ve γ -zayıf büzülme dönüşümü olduğu varsayılarak ispatlar verilmiştir. (X, F, Δ) tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayında, $T: A \rightarrow B$ dönüşümünün en iyi yaklaşım noktası teoremi verilirken, (A, B) çiftinin zayıf P-özellği sağladığı varsayılmıştır.

Teorem 4.4.' ün ispatı için, T dönüşümünün birinci tipten γ -yakınsal olduğu kabul edilmiştir. $T: A \rightarrow B$ dönüşümünün ikinci tipten γ -yakınsal olduğu ve A' nin B' ye göre yaklaşık kompakt olduğu kabul edilerek, Teorem 4.5 verilmiştir.

Beşinci bölümdeki, S -olasılıksal normlu uzaylarda çalışılan dönüşümlerin hemicontractive ve demicontractive oldukları varsayılmıştır.

2.1 Analiz Kaynaklı Temel Kavramlar

Tanım 2.1 X ve Y boş kümeden farklı iki küme olsun. $X \times Y$ kümesinin herhangi bir alt kümesine bağıntı adı verilir. Yani; " $\leq$ " $\subset X \times Y$ ise " $\leq$ " ye X ' den Y ' ye bir bağıntı denir. Bağıntı, ilk elemanı X kümesinden ve ikinci elemanı Y kümesinden olan sıralı ikililerin oluşturduğu bir kümedir.

Özel olarak, $\leq \subset X \times X$ ise " $\leq$ " ye X üzerinde bir bağıntı denir [68].

Tanım 2.2 X boştan farklı bir küme ve X üzerinde tanımlı " $\leq$ " bağıntısı aşağıdaki şartları sağlasın:

Her $x, y, z \in X$ için,

- (i) $x \leq x$ ' dir.
- (ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x \leq y$ ' dir.
- (iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ ' dir.

Bu durumda, " $\leq$ " bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

Kısmi sıralama bağıntısı ile donatılmış kümeye kısmi sıralı küme denir [68].

Tanım 2.3 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer $x, y \in X$ için, $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise o zaman x ve y elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlar denir [68].

Tanım 2.4 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir kümesi için, X ' in her eleman çifti karşılaştırılabilir olduğunda " $\leq$ " bağıntısına tam sıralama bağıntısı, $(X, \leq)$ ' ye de tam sıralı küme denir [68].

Tanım 2.5 $(X, \leq)$ ve $(\tilde{X}, \tilde{\leq})$ iki sıralı küme ve $h: X \rightarrow \tilde{X}$ bir dönüşümü için;

her $x, y \in X$, $x \leq y$ iken;

$h(x) \lesseqgtr h(y)$ oluyorsa h' 'ye monoton artan (veya azalmayan) ,

$h(y) \lesseqgtr h(x)$ oluyorsa h' 'ye monoton azalan (veya artmayan) fonksiyon denir.

Tanım 2.6 X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ için, aşağıdaki koşullar sağlanırsa, d' 'ye X üzerinde bir metrik (uzaklık fonksiyonu), (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir [68].

$$M1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$M2) d(x, y) = d(y, x),$$

$$M3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Tanım 2.7 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu metrik uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa, (x_n) dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir. $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [68].

Tanım 2.8 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu metrik uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [68].

Tanım 2.9 (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu metrik uzaydaki her (x_n) Cauchy dizisi, X' 'de yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [68].

Tanım 2.10 X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay adı verilir.

Her $x, y \in X$ ve her ς skaleri için,

$$N1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$N2) \|\varsigma \cdot x\| = |\varsigma| \|x\|,$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

X üzerinde bir norm, X üzerinde $x, y \in X$ için, $d(x, y) = \|x - y\|$ ile verilen bir metrik tanımlar ve bu metriğe norm tarafından türetilen metrik denir [68].

Tanım 2.11 X normlu uzayı, norm tarafından türetilen metriğe göre tam ise X 'e Banach uzayı adı verilir.

X uzayı; reel lineer uzay ise reel Banach uzayı, kompleks lineer uzay ise kompleks Banach uzayı adı verilir [68].

Tanım 2.12 X bir vektör uzayı ve K bir cisim olmak üzere, $\langle, \rangle: X \times X \rightarrow K$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, her x, y vektör çifti için aşağıdaki şartları sağlasın:

her $x, y, z \in X$ ve $\sigma \in K$ skaleri için,

$$I1) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$I2) \langle \sigma x, y \rangle = \sigma \langle x, y \rangle,$$

$$I3) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$I4) \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bu durumda; $\langle, \rangle$ işlemine X üzerinde bir iç çarpım denir.

X uzayı üzerinde bir iç çarpım, X üzerinde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ şeklinde bir norm ve $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ metriğini tanımlar.

Bir tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı adı verilir [68].

Tanım 2.13 X bir metrik uzay olmak üzere, eğer X 'deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse, X uzayına kompakt adı verilir [68].

Tanım 2.14 X bir vektör uzay olsun. X 'teki tanım kümesinden K cismine tanımlanan lineer dönüşüme lineer fonksiyonel adı verilir. Burada, $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ 'dir [68].

Tanım 2.15 X bir vektör uzayı olmak üzere, X üzerinde tanımlanan tüm lineer fonksiyonların kümesine X' in cebirsel dualı adı verilir ve X^* ile gösterilir [68].

2.2 Sabit Nokta Teorisi Kaynaklı Kavramlar

Tanım 2.16 X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi $F_T (Fix(T))$ ile gösterilir [69].

Örnek 2.1

i) $X = \mathbb{R}$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $T(x) = \frac{1}{2}x + 1$ şeklinde tanımlansın. $F_T = \{2\}$,

ii) $X = \mathbb{R}$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $T(x) = x + 1$ şeklinde tanımlansın. $F_T = \emptyset$

olarak bulunur [69].

Tanım 2.17 X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ kuralı ile $T^n(x)$ tanımlansın.

$T^n(x)$ ifadesi x 'in T dönüşümü altındaki n -inci iterasyonu olarak adlandırılır [69].

Tanım 2.18 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için, $d(T(x), T(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $L > 0$ sayısı varsa, T 'ye bir Lipschitzian (veya L -Lipschitzian) dönüşüm adı verilir. Bir L -Lipschitzian T dönüşümü; $L < 1$ için büzülme(contraction) dönüşüm, $L = 1$ için genişlemeyen(nonexpansive) dönüşüm olur.

Eğer her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için, $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ ise T 'ye contractive dönüşüm denir [69].

Örnek 2.2

(i) $X = \mathbb{R}$, $M = \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ olmak üzere, $T: M \rightarrow M$ dönüşümü her $x \in M$ için, $Tx = \frac{1}{x}$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümü, $L = 4$ olmak üzere Lipschitzian'dır.

(ii) $X = \mathbb{R}$, $T : X \rightarrow X$, $\forall x \in X$ için, $Tx = \frac{x}{2} + 3$ şeklinde tanımlansın. T dönüşümü, büzülme dönüşümüdür.

(iii) $X = [1, \infty)$ olmak üzere, $T : X \rightarrow X$, $\forall x \in X$ için, $Tx = \frac{1}{x} + x$ şeklinde tanımlansın. T dönüşümü, contractive dönüşümdür [69].

Banach Büzülme Prensibi sabit nokta teorisindeki en önemli sonuçlardan biri olup bu teorem aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

“(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşüm olsun. O zaman, T' nin bir tek $u \in X$ sabit noktası vardır ve hatta herhangi bir $x \in X$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = u$ dur [70].”

Kısmi sıralama ile donatılmış bir metrik uzayda karışık monoton özelliği ve ikili sabit nokta kavramları 2006 yılında Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından tanımlanmış olup; bir büzülme koşulu altında ikili sabit noktanın varlık ve tekliğini içeren teoremler verilmiştir:

Tanım 2.19 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere $B : X \times X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $B(x, y)$ dönüşümü, birinci değişkeninde monoton azalmayan, ikinci değişkeninde monoton artmayan ise, yani her bir $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 &\Rightarrow B(x_1, y) \leq B(x_2, y) \\ \text{ve} \\ y_1, y_2 \in X, y_1 \leq y_2 &\Rightarrow B(x, y_1) \geq B(x, y_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ise, B' ye karışık monoton özelliğine sahiptir denir [40].

Tanım 2.20 $B : X \times X \rightarrow X$ olmak üzere, $B(x, y) = x$ ve $B(y, x) = y$ oluyorsa $(x, y) \in X \times X$ elemanına B dönüşümünün ikili sabit noktası denir [40].

$(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere, $B : X \times X \rightarrow X$ karışık monoton özelliğine sahip sürekli bir dönüşüm olsun. Bazı koşullar altında, B dönüşümünün ikili sabit noktasının varlığı ve tekliği gösterilmiştir [40].

Daha sonra 2009 yılında, Lakshmikantham ve Ćiric karışık monotonluk özelliğinden daha genel bir özelliğe sahip bir dönüşüm tanımlayıp Bhaskar ve Lakshmikantham' ın çalışmalarını genelleştirdiler [41].

Tanım 2.21 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere, $B: X \times X \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun. Eğer B dönüşümü, birinci değişkeninde monoton h -azalmayan ve ikinci değişkeninde monoton h -artmayan ise, yani her bir $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in X, h(x_1) \leq h(x_2) &\Rightarrow B(x_1, y) \leq B(x_2, y) \\ \text{ve} \\ y_1, y_2 \in X, h(y_1) \leq h(y_2) &\Rightarrow B(x, y_1) \geq B(x, y_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ise, B' ye karışık h -monoton özelliğine sahiptir denir [41].

Tanım 2.22 $B: X \times X \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olmak üzere, eğer $B(x, y) = h(x)$, $B(y, x) = h(y)$ eşitlikleri sağlanıyor ise $(x, y) \in X \times X$ elemanına B ve h dönüşümlerinin ikili çakışma noktası denir [41].

Tanım 2.23 X boştan farklı bir küme, $B: X \times X \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun. Eğer, her $x, y \in X$ için, $h(B(x, y)) = B(h(x), h(y))$ eşitliği varsa, B ve h dönüşümleri değişmelidir denir [41].

$(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere, $B: X \times X \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri, B karışık h -monoton özelliğine sahip dönüşümler olsun. Bazı koşullar altında, B ve h dönüşümlerinin ikili çakışma noktasına sahip oldukları ve bu noktanın tek olduğu gösterilmiştir.

2013 yılında, Ertürk ve Karakaya tarafından daha önceki çalışmaların bir genellemesi olarak n -li sabit nokta ve n -li çakışma noktası tanımları verilmiş olup kısmi sıralı tam metrik uzaylarda karışık h -monoton özelliğine sahip dönüşümlerin n -li çakışma noktasına sahip oldukları ve bu noktanın tekliği gösterilmiştir [43].

Tanım 2.24 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B: X^n \rightarrow X$ dönüşümü olsun. Eğer $B(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ tek değişkenlerinde monoton azalmayan ve çift değişkenlerinde monoton artmayan ise, yani her $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n \in X$ için,

$$\begin{aligned} y^1, z^1 \in X, y^1 \leq z^1 &\Rightarrow B(y^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \leq B(z^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \\ y^2, z^2 \in X, y^2 \leq z^2 &\Rightarrow B(x^1, y^2, x^3, \dots, x^n) \geq B(x^1, z^2, x^3, \dots, x^n) \\ &\vdots \\ y^n, z^n \in X, y^n \leq z^n &\Rightarrow B(x^1, x^2, x^3, \dots, y^n) \leq B(x^1, x^2, x^3, \dots, z^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ y^n, z^n \in X, y^n \leq z^n &\Rightarrow B(x^1, x^2, x^3, \dots, y^n) \geq B(x^1, x^2, x^3, \dots, z^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ise, B' ye karışık monoton özelliğine sahiptir denir [43].

Tanım 2.25 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B: X^n \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun. Eğer, $B(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ tek değişkenlerinde h -monoton azalmayan, çift değişkenlerinde h -monoton artmayan ise, yani her bir $x^1, \dots, x^n \in X$ için,

$$\begin{aligned} y^1, z^1 \in X, h(y^1) \leq h(z^1) &\Rightarrow B(y^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \leq B(z^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \\ y^2, z^2 \in X, h(y^2) \leq h(z^2) &\Rightarrow B(x^1, y^2, x^3, \dots, x^n) \geq B(x^1, z^2, x^3, \dots, x^n) \\ &\vdots \\ y^n, z^n \in X, h(y^n) \leq h(z^n) &\Rightarrow B(x^1, x^2, x^3, \dots, y^n) \leq B(x^1, x^2, x^3, \dots, z^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ y^n, z^n \in X, h(y^n) \leq h(z^n) &\Rightarrow B(x^1, x^2, x^3, \dots, y^n) \geq B(x^1, x^2, x^3, \dots, z^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned}$$

ise, B' ye karışık h -monoton özelliğine sahiptir denir [43].

Eğer, $h(x) = x$ ise bu tanım karışık monoton özelliğine indirgenir.

Tanım 2.26 X boştan farklı bir küme ve $B: X^n \rightarrow X$ dönüşümü için,

$$\begin{aligned} B(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) &= x^1 \\ B(x^2, x^3, \dots, x^n, x^1) &= x^2 \\ &\vdots \\ B(x^n, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) &= x^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

ise $(x^1, \dots, x^n) \in X^n$ elemanına, B' nin n -li sabit noktası denir [43].

Tanım 2.27 X boştan farklı bir küme ve $B: X^n \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olmak üzere, eğer

$$\begin{aligned} B(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) &= h(x^1) \\ B(x^2, x^3, \dots, x^n, x^1) &= h(x^2) \\ &\vdots \\ B(x^n, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) &= h(x^n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ise $(x^1, \dots, x^n) \in X^n$ elemanına, $B: X^n \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ 'nin n -li çakışma noktası denir.

Eğer, $h(x) = x$ ise $(x^1, \dots, x^n) \in X^n$, B 'nin n -li sabit noktası olur [43].

Tanım 2.28 X boştan farklı bir küme ve $B: X^n \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümler olmak üzere, eğer her $x^1, \dots, x^n \in X$ için,

$$h(B(x^1, x^2, \dots, x^n)) = B(h(x^1), h(x^2), \dots, h(x^n)) \quad (2.6)$$

ise B ve h dönüşümleri değişmeli (commutative) olarak adlandırılır [43].

Tanım 2.29 X bir reel Banach uzayı ve X^* onun bir dual uzayı olsun. X' ten 2^{X^*} , e dualite dönüşümü $\forall x \in X$ için,

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\| \|x^*\|, \|x^*\| = \|x\|\}$$

şeklinde tanımlansın.

D , X' in boş olmayan alt kümesi ve $T: D \rightarrow D$ dönüşümü olsun. Eğer, $F_T \neq \emptyset$ ve her $x \in D$, $w \in F_T$ için,

$$\langle Tx - w, j(x - w) \rangle \leq \|x - w\|^2$$

ise T dönüşümü hemicontractive olarak adlandırılır [71].

Tanım 2.30 H reel Hilbert uzayı ve K , H' in kapalı konveks alt kümesi olsun. T' nin sabit noktalarının kümesi boştan farklı ($F_T \neq \emptyset$) ve her $x \in H$, $w \in F_T$ için,

$$\|Tx - w\|^2 \leq \|x - w\|^2 + \kappa \|x - Tx\|^2, \quad \kappa \in (0, 1)$$

ise $T : K \rightarrow K$ dönüşümü demicontractive dönüşüm olarak adlandırılır.

Ayrıca bu eşitsizlik,

$$\langle x - Tx, w - Tx \rangle \leq \left(\frac{1 + \kappa}{2} \right) \|x - Tx\|^2$$

ifadesine denktir [72].

2.3 Olasılıksal Metrik ve Normlu Uzaylardaki Temel Kavramlar

Tanım 2.31 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlı, azalmayan, sol-süreklili olup $\inf\{F(t) : t \in \mathbb{R}\} = 0$ ve $\sup\{F(t) : t \in \mathbb{R}\} = 1$ ifadelerini sağlayan F fonksiyonuna dağılım fonksiyonları adı verilir. Dağılım fonksiyonu ek olarak; $F(0) = 0$ ifadesini de sağlarsa uzaklık dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır. Dağılım fonksiyonları kümesini L , uzaklık dağılım fonksiyonları kümesini L^+ ile göstereceğiz.

Heaviside fonksiyonu olarak da bilinen özel bir dağılım fonksiyonu

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır [6].

Tanım 2.32 X boştan farklı bir küme, $F : X \times X \rightarrow L^+$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. X kümesindeki her bir (x, y) nokta çifti için, $F(x, y)$ dağılım fonksiyonu $F_{x,y}$ ve $F_{x,y}$ 'nin bir t reel değişkenindeki değeri, $F_{x,y}(t)$ olsun. $F_{x,y}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın:

PM-I) Her $t > 0$ için, $F_{x,y}(t) = 1$ gerek ve yeter koşul $x = y$ olmasıdır,

PM-II) $F_{x,y}(0) = 0$,

PM-III) $F_{x,y} = F_{y,x}$,

PM-IV) Her $x, y, z \in X$ ve $t, s \geq 0$ için, $F_{x,y}(t) = 1$ ve $F_{y,z}(s) = 1$ ise, o zaman $F_{x,z}(t + s) = 1$ 'dir.

(X, F) ikilisi istatistiksel(olasılıksal) metrik uzay olarak adlandırılır [6].

PM-I koşulu, $x = y$ gerek ve yeter koşul $F_{x,y} = H$ olması ile eşdeğerdir. Metrik uzaylar ile olasılıksal metrik uzaylar arasında bir ilişki bulunmaktadır. Metrik uzaydaki her (x, y) nokta çifti için dağılım fonksiyonu $F_{x,y}(t) = H(t - d(x, y))$ şeklinde alınır; her metrik uzayın bir olasılıksal metrik uzay olduğu aşağıda verilmektedir:

PM-I) Her $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} F_{x,y}(t) = 1 &\Leftrightarrow H(t - d(x, y)) = 1 \\ &\Leftrightarrow d(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

elde edilir.

PM-II) $d(x, y) \geq 0$ olduğundan, $F_{x,y}(0) = H(0 - d(x, y)) = 0$ 'dır.

PM-III) $d(x, y) = d(y, x)$ olduğundan, her $t > 0$ için, $F_{x,y}(t) = F_{y,x}(t)$ 'dir.

PM-IV) $F_{x,y}(t) = 1 \Rightarrow H(t - d(x, y)) = 1$ 'dir. Yani; $t - d(x, y) > 0$ 'dır. Benzer şekilde,

$F_{y,z}(s) = 1 \Rightarrow s - d(y, z) > 0$ 'dır. Böylece $t + s - d(x, y) + d(y, z) > 0$ olur ki; bu da $t + s - d(x, z) > 0$ olduğunu gösterir.

$H(t + s - d(x, z)) = 1 \Rightarrow F_{x,z}(t + s) = 1$ olarak bulunur.

$F_{x,y}(t)$ 'nin verilen iki x ve y noktaları arasındaki uzaklığın, t 'den küçük olma olasılığı yorumu ile PM-I, PM-II ve PM-III koşulları metriğin ilk üç koşuluna direkt karşılık gelen genellemelerdir.

PM-IV koşulu ise metriktaki üçgen eşitsizliğinin minimal bir genellemesi olup; x ile y arasındaki uzaklık t 'den küçük ve aynı şekilde y ile z arasındaki uzaklık s 'den küçük ise o zaman x ile z arasındaki uzaklık $t + s$ 'den küçüktür şeklinde yorumlanır.

Orijinal formülasyonunda, Menger' in genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilmiştir:

PM-IVm) Her $t, s \geq 0$ için, $F_{x,z}(t + s) \geq \Delta(F_{x,y}(t), F_{y,z}(s))$ 'dır.

Aşağıda tanımı verilecek olan üçgen normlar, ilk olarak Karl Menger' in olasılıksal metrik uzaylar kapsamındaki çalışmasında ortaya çıkmıştır. Daha sonra, üçgen normların bulanık küme, bulanık mantık ve uygulamaları, genelleştirilmiş ölçü, lineer olmayan diferansiyel ve fark denklemleri gibi alanlar için de önemli olduğu görülmüştür.

Tanım 2.33 $\Delta: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ şeklinde birim kare üzerinde tanımlı,

(a) $\Delta(\rho, \omega) = \Delta(\omega, \rho)$ (Komütatif olma),

(b) $\Delta(\rho, \Delta(\omega, \rho')) = \Delta(\Delta(\rho, \omega), \rho')$ (Birleşme),

(c) $\rho' \geq \rho$ ve $\omega' \geq \omega$ ise $\Delta(\rho', \omega') \geq \Delta(\rho, \omega)$ (Monotonluk),

(d) $\Delta(\rho, 1) = \rho$ (Sınır koşulu),

şartlarını sağlayan bir ikili işlemdir. Δ fonksiyonuna üçgen norm veya t-norm adı verilir [6].

Komütatiflik, monotonluk ve sınır koşulu özelliklerinden her bir Δ üçgen normu ve $[0,1]$ ' de bulunan her bir ρ elemanı için,

$$\begin{aligned}\Delta(\rho, 1) &= \Delta(1, \rho) = \rho \\ \Delta(\rho, 0) &= \Delta(0, \rho) = 0\end{aligned}$$

sınır koşullarının da sağlandığı görülür.

Δ fonksiyonunun genel tanımlanışı nedeniyle, PM-IVm koşulu şu şekilde yorumlanabilir:

Bir üçgenin üçüncü kenarı hakkında bildiklerimiz, diğer iki kenar hakkında bildiklerimiz ile simetrik bir şekilde bağlantılıdır ve diğer iki kenar hakkında bildiklerimiz arttıkça, üçüncü kenara ilişkin bilgilerimiz de artar veya en azından azalmaz. Ancak; Δ' yı belirli bir fonksiyon seçerek daha kesin bir yorum yapılabilir.

Δ , t-normu için olası pek çok seçenek vardır. Başlıca Δ t-norm örnekleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\Delta_M(\rho, \omega) &= \min(\rho, \omega), \\
\Delta_P(\rho, \omega) &= \rho \cdot \omega, \\
\Delta_L(\rho, \omega) &= \max(\rho + \omega - 1, 0), \\
\Delta_D(\rho, \omega) &= \begin{cases} \min(\rho, \omega), & \max(\rho, \omega) = 1 \\ 0 & , \text{ diğ er durumlarda} \end{cases}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki Δ t-normları arasında $\Delta_D < \Delta_L < \Delta_P < \Delta_M$ şeklinde bir ilişki bulunmaktadır [6].

(X, F) bir olasılıksal metrik uzay ve Δ t-normu her $x, y, z \in X$ ve $t, s \geq 0$ için, $F_{x,z}(t+s) \geq \Delta(F_{x,y}(t), F_{y,z}(s))$ üçgen eşitsizliğini sağlarsa, (X, F, Δ) üçlüsüne bir Menger olasılıksal metrik uzay adı verilir.

PM-IVm*) Her $t, s \geq 0$ için, $F_{x,z}(\max\{t, s\}) \geq \Delta(F_{x,y}(t), F_{y,z}(s))$ ' dir.

PM-IV ile PM-IV* yer değiştirdiğinde; (X, F, Δ) non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olarak adlandırılır [6].

Not (X, F, Δ) uzayının non-archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olması için gerek ve yeter koşul her $x, y, z \in X$ ve $t \geq 0$ için,

$$F_{x,z}(t) \geq \Delta(F_{x,y}(t), F_{y,z}(t))$$

olmasıdır.

Örnek 2.3 $X = [0, +\infty)$ olmak üzere, $F : X \times X \rightarrow L$ fonksiyonu $x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için, $F_{x,y}(t) = H(t - d(x, y)) = H(t - |x - y|)$ şeklinde tanımlansın.

Δ , t-normu da minimum olarak alınırsa, $(X, F, \min)$ üçlüsü bir Menger uzayıdır.

Örnek 2.4 $X = [0, +\infty)$ ve Δ keyfi bir t-norm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$F_{x,y}(s) = \begin{cases} \frac{s}{s + |x - y|}, & s > 0 \\ 0 & , s = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde, (X, F, Δ) bir Menger uzayıdır [19].

Örnek 2.5 $X = [-1,1]$ ve Δ keyfi bir t-norm olmak üzere, her $x, y \in X$ için,

$$F_{x,y}(s) = \begin{cases} \frac{e^{-|x-y|}}{s}, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde, (X, F, Δ) bir Menger uzayıdır [18].

Tanım 2.34 (X, F, Δ) Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, A ve B , (X, F, Δ) olasılıksal uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. A 'daki bazı $y \in B$ ve her $t > 0$ için, $F_{y,x_n}(t) \rightarrow F_{y,A}(t)$ şartını sağlayan her (x_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse, A kümesi B kümesine göre yaklaşık kompakttır denir [61].

Her küme kendisi ile yaklaşık kompakttır.

1943 yılında, Wald tarafından yeni bir üçgen eşitsizliği önerildi:

Tanım 2.35 Her $t \geq 0$ için üçgen eşitsizliği $F_{x,y}(t) \geq (F_{x,y} * F_{y,z})(t)$ şeklinde alınırsa (X, F, Δ) olasılıksal metrik uzayı Wald uzayı olarak adlandırılır. Burada $*$ işlemi konvolüsyon işlemini belirtmektedir, yani;

$$(F_{x,y} * F_{y,z})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{x,y}(t-t_1) dF_{y,z}(t_1) \text{ dir. } t_1 \geq t \text{ için, } F_{x,y}(t-t_1) = 0 \text{ ve } t_1 \leq 0 \text{ için,}$$

$$F_{y,z}(t_1) = 0 \text{ olacağından } (F_{x,y} * F_{y,z})(t) = \int_0^t F_{x,y}(t-t_1) dF_{y,z}(t_1) \text{ yazılır [3].}$$

Teorem 2.1 Bir Wald uzayı Δ_p çarpım t-normu altında bir Menger uzayıdır [3].

İspat Bir Wald uzayında, her $t, t_1 \geq 0$ ve $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned} F_{x,z}(t+t_1) &\geq \int_0^{t+t_1} F_{x,y}(t+t_1-t_2) dF_{y,z}(t_2) \\ &= \int_0^{t+t_1} \left[\int_0^{t+t_1-t_2} dF_{x,y}(s) \right] dF_{y,z}(t_2) \\ &= \iint_{\substack{s, t_2 \geq 0 \\ s+t_2 \leq t+t_1}} dF_{x,y}(s) dF_{y,z}(t_2). \end{aligned}$$

$$\iint_{\substack{s, t_2 \geq 0 \\ s+t_2 \leq t+t_1}} dF_{x,y}(s)dF_{y,z}(t_2) \geq \iint_{\substack{0 \leq s \leq t \\ 0 \leq t_2 \leq t_1}} dF_{x,y}(s)dF_{y,z}(t_2)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq s \leq t \\ 0 \leq t_2 \leq t_1}} dF_{x,y}(s)dF_{y,z}(t_2) &= \int_0^t \int_0^{t_1} dF_{x,y}(s)dF_{y,z}(t_2) \\ &= \int_0^t dF_{x,y}(s) \int_0^{t_1} dF_{y,z}(t_2) \\ &= F_{x,y}(t).F_{y,z}(t_1) \end{aligned}$$

olduğundan

$F_{x,z}(t+t_1) \geq F_{x,y}(t).F_{y,z}(t_1)$ elde edilir ve teorem gerçekleşir [3].

Olasılıksal metrik uzaylarda komşuluk kavramı Schweizer, Sklar ve Thorp tarafından tanımlanmıştır [7].

Tanım 2.36 (X, F) bir olasılıksal metrik uzay, $x \in X$ ve ε, λ pozitif reel sayılar olsun. x noktasının ε, λ komşuluğu ile X kümesinde $F_{x,y}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ şartını sağlayan bütün $y \in X$ elemanlarının kümesi ifade edilmektedir [7].

Yani, $N_x(\varepsilon, \lambda) = \{y : F_{x,y}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ ' dir. $N_x(\varepsilon, \lambda)$ ile x ile y arasındaki uzaklığın ε ' dan küçük olma olasılığı, $1 - \lambda$ ' dan büyüktür ifadesini sağlayan bütün $x \in X$ noktalarının kümesinden oluşur.

Tanım 2.37 (X, F) bir olasılıksal metrik uzay ve bu uzayda bir (x_n) dizisi olsun. (x_n) dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $F_{x_n, x}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_0(\varepsilon, \lambda)$ sayısının var olmasıdır [7].

Tanım 2.38 (X, F) bir olasılıksal metrik uzay ve bu uzayda bir (x_n) dizisi olsun. (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $F_{x_n, x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_0(\varepsilon, \lambda)$ sayısının var olmasıdır [7].

Tanım 2.39 (X, F) bir olasılıksal metrik uzay olsun. (X, F) ' deki her (x_n) Cauchy dizisi yine bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X, F) uzayı tamdır denir [7].

Normların değerlerinin sayılar yerine olasılıksal dağılım fonksiyonları ile ifade edildiği olasılıksal normlu uzaylar kavramı 1962' de Serstnev tarafından tanımlanmıştır [8].

Tanım 2.40 X bir reel vektör uzayı, $F: X \rightarrow L^+$ bir dönüşüm olsun. F' in $x \in X$ noktasındaki değeri F_x ve bir $t \in \mathbb{R}'$ de F_x' in değeri $F_x(t)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın:

PN-I) $F_x(t) = H(t)$ gerek ve yeter koşul $x = \theta$,

PN-II) $F_{\lambda x}(t) = F_x\left(\frac{t}{|\lambda|}\right)$, her $x \in X, \lambda \neq 0$,

PN-III) Her $x, y \in X$ ve $t, s \geq 0$ için, $F_x(t) = 1$ ve $F_y(s) = 1$ ise,

o zaman $F_{x+y}(t+s) = 1$ dir [8].

Olasılıksal metrik uzaylarda, Sehgal ve Bharucha tarafından tanımlanan temel büzülme dönüşümü tanımı ve Banach büzülme teoreminin olasılıksal metrik uzaylardaki hali verilecektir:

Tanım 2.41 (X, F) bir olasılıksal metrik uzay ve $T: (X, F) \rightarrow (X, F)$ dönüşümü olsun. T' nin büzülme dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul her bir $x, y \in X$ ve her $t \geq 0$ için,

$F_{Tx, Ty}(\alpha t) \geq F_{x, y}(t)$ eşitsizliğini sağlayan $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde, bir α sabitinin var olmasıdır.

Bu eşitsizlik; Tx ve Ty görüntü noktaları arasındaki uzaklığın αt ' den küçük olma olasılığı, en azından x ve y arasındaki uzaklığın t ' den küçük olma olasılığına eşittir şeklinde yorumlanır [13].

Teorem 2.2 Δ , her bir $t \in [0, 1]$ için $\Delta(t, t) \geq t$ ifadesini sağlayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, (X, F, Δ) bir tam Menger uzay olsun. Eğer T , X üzerinde

bir büzülme dnm ise, $Tx = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ noktası vardır. Hatta, her bir $y \in X$ için $T^n y \rightarrow x$ ' dir [13].

İspat İspatta ilk olarak teklik gösterilecektir:

$x \neq y$ ve $Tx = x$, $Ty = y$ olsun. O zaman PM-I' den $F_{x,y}(t) = c$ olacak şekilde $t > 0$ ve c ($0 \leq c < 1$) vardır. Her bir pozitif n tamsayısı için, T büzülme dnm olduğundan,

$$c = F_{x,y}(t) = F_{T^n x, T^n y}(t) \geq F_{x,y}\left(\frac{t}{\alpha^n}\right)$$

dir.

$n \rightarrow \infty$ iken $F_{x,y}\left(\frac{t}{\alpha^n}\right) \rightarrow 0$ olup $c = 1$ ' dir. Bu da; c ' nin seçimi ile çelişki yaratır. O zaman sabit nokta tektir.

Sabit noktanın varlığı için, keyfi bir $y \in X$ ve $x^n = T^n y, n = 1, 2, 3, \dots$ tanımlansın. $t, \lambda > 0$ ve $m > n$ için;

$$\begin{aligned} F_{x_n, x_m}(t) &\geq \Delta(F_{x_n, x_{n+1}}(t - \alpha t), F_{x_{n+1}, x_m}(\alpha t)) \\ &\geq \Delta\left(F_{y, x_1}\left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n}\right), F_{x_{n+1}, x_m}(\alpha t)\right) \end{aligned}$$

dir.

Menger uzayı olma ve üçgen normun monotonluk ezelliėinden,

$$\begin{aligned} F_{x_n, x_m}(t) &\geq \Delta\left(F_{y, x_1}\left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n}\right), \Delta(F_{x_{n+1}, x_{n+2}}(\alpha t - \alpha^2 t), F_{x_{n+2}, x_m}(\alpha^2 t))\right) \\ &\geq \Delta\left(F_{y, x_1}\left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n}\right), \Delta\left(F_{y, x_1}\left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n}\right), F_{x_{n+2}, x_m}(\alpha^2 t)\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. gen normun birleme ezelliėinden,

$$F_{x_n, x_m}(t) \geq \Delta\left(F_{y, x_1}\left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n}\right), F_{x_{n+2}, x_m}(\alpha^2 t)\right)$$

bulunur.

Sonlu sayıda adımdan sonra,

$$\begin{aligned}
F_{x_n, x_m}(t) &\geq \Delta \left(F_{y, x_1} \left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n} \right), F_{x_{m-1}, x_m}(\alpha^{m-n-1}t) \right) \\
&\geq \Delta \left(F_{y, x_1} \left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n} \right), F_{y, x_1} \left(\frac{t}{\alpha^n} \right) \right) \\
&\geq \Delta \left(F_{y, x_1} \left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n} \right), F_{y, x_1} \left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n} \right) \right) \\
&\geq F_{y, x_1} \left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n} \right)
\end{aligned}$$

dir. n yeterince büyük seçilirse;

$$F_{x_n, x_m}(t) \geq F_{y, x_1} \left(\frac{t - \alpha t}{\alpha^n} \right) > 1 - \lambda$$

olup, (x_n) bir Cauchy dizisidir.

(X, F, Δ) tam olasılıksal uzayı olduğundan $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n y = x'$ dir. Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$ olduğu gösterilecektir:

$\varepsilon > 0$ ve $\lambda > 0$ verilsin. $x_n \rightarrow x$ olması her $n \geq N$ için, $F_{x_n, x}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ olacak şekilde bir N tamsayısının varlığını gerektirir.

Hatta, her $n \geq N$ için $F_{Tx_n, Tx}(\varepsilon) \geq F_{x_n, x} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right) \geq F_{x_n, x}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ olup $Tx_n \rightarrow Tx'$ dir.

Böylece, $Tx = x'$ dir ve ispatın varlık kısmı da tamamlanır [13].

Su ve Zhang, 2014 yılında olasılıksal metrik uzaylar için yeni bir tanım verdiler ve bu uzayı S -olasılıksal metrik uzay olarak adlandırdılar. Bu tanımda üçgen eşitsizliğini yeni bir formda değiştirmişlerdir [67].

Tanım 2.42 X boştan farklı bir küme, F' in (x, y) noktasındaki değeri $F_{x, y}$ olmak üzere, $F : X \times X \rightarrow L^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

SPM-I) $F_{x, y}(t) = H(t)$ gerek ve yeter koşul $x = y$,

SPM-II) Her x, y ve $t \in (-\infty, \infty)$ için, $F_{x,y}(t) = F_{y,x}(t)$,

SPM-III) Her $x, y, z \in X$ için, $F_{x,y}(t) \geq F_{x,z}(t) * F_{z,y}(t)$.

Bu taktirde, (X, F) çifti S -olasılıksal metrik uzay olarak adlandırılır.

Burada $F_{x,z}(t) * F_{z,y}(t)$ gösterimi ile belirtilen işlem; $F_{x,z}(t)$ ile $F_{z,y}(t)$ arasındaki

konvolusyon işlemi olup $F_{x,z}(t) * F_{z,y}(t) = \int_0^{\infty} F_{x,z}(t-w) dF_{z,y}(w)$

şeklinde tanımlanır [67].

S -olasılıksal metrik uzaylar tanımından etkilenen Xu ve arkadaşları S -olasılıksal normlu uzaylar tanımını verdiler [73].

Tanım 2.43 X bir reel vektör uzayı, F' in x noktasındaki değeri F_x olmak üzere, $F : X \rightarrow L^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

SPN-I) $F_x(t) = H(t)$ gerek ve yeter koşul $x = \theta$,

SPN-II) Her $x \in X$, $t \in (-\infty, \infty)$ ve sıfırdan farklı $\varsigma \in K$ için, $F_{\varsigma x}(t) = F_x\left(\frac{t}{|\varsigma|}\right)$,

SPN-III) Her $x, y \in X$ için, $F_{x+y}(t) = F_x(t) * F_y(t)$.

Burada, $F_x(t) * F_y(t)$ işlemi yine $F_x(t) * F_y(t) = \int_0^{\infty} F_x(t-w) dF_y(w)$ şeklinde

tanımlanan $F_x(t)$ ile $F_y(t)$ arasındaki konvolusyon işlemidir.

S -olasılıksal normlu uzaylara ait bazı özellikler verilecektir:

(X, F) bir S -olasılıksal normlu uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ için,

$$\|x\|_F = \int_0^{\infty} t dF_x(t)$$

olarak tanımlanır.

t sürekli bir fonksiyon ve $F_x(t)$ sınırlı değişim fonksiyonu olduğundan bu integral iyi tanımlıdır. Yukarıdaki integral; $F_x(t)$ ' nin matematiksel beklentisidir. Bu

çalışmamızda $\|x\|_F = \int_0^\infty t dF_x(t) < \infty$ alınacaktır [73].

Teorem 2.2 (X, F) bir S -olasılıksal normlu uzay olsun. Bu uzaydaki bir $x \in X$ için,

$$\|x\|_F = \int_0^\infty t dF_x(t) \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

O zaman $\|\cdot\|_F$, X üzerinde bir normdur [73].

Teorem 2.3 (X, F) bir S -olasılıksal normlu (Banach) uzay olsun. $(X, \|\cdot\|_F)$ ' nin bir iç çarpım(Hilbert) uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$ için

$$\int_0^\infty t^2 d((2F_x(t) + 2F_y(t)) - (F_{x+y}(t) + F_{x-y}(t))) = 0 \text{ olmasıdır [73].}$$

Teorem 2.4 (X, F) Teorem 2.3' teki eşitliği sağlayan bir S -olasılıksal normlu (Banach) uzay olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty t^2 d(F_{x+y}(t) - F_{x-y}(t)) \text{ bir iç çarpım ve } \|x\|_F = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ ' dir [73].}$$

Xu ve arkadaşları, olasılıksal uzaylarda kuvvetli pseudocontractive dönüşüm tanımını verdiler [73].

Tanım 2.44 (X, F) olasılıksal normlu uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$, $s \in [0, \infty)$ ve $k \in (0, 1)$ için,

$$F_{Tx - Ty + x - y}(\sqrt{s}) \geq 4kF_{x - y}(s^2) + F_{Tx - Ty - x + y}(\sqrt{s})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T : X \rightarrow X$ dönüşümüne olasılıksal kuvvetli pseudocontractive dönüşüm denir [73].

KISMİ SIRALI OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SONUÇLAR

3.1 Kısmi Sıralı Olasılıksal Metrik Uzaylarda Büzülme Dönüşümleri İçin n -li Sabit Nokta Teoremleri

Kısmi sıralı metrik uzaylarda yapılan ikili çıkışma noktalarının varlık ve tekliğini içeren teoremler 2011 yılında, Hu ve Ma tarafından kısmi sıralı tam olasılıksal metrik uzaylarda verilmiştir [48].

$\Phi = \{\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+\}$ fonksiyon ailesi olmak üzere; her bir ϕ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

- (a) ϕ kesin artan,
- (b) ϕ sağdan üst yarı sürekli,
- (c) Her $t > 0$ için, $\sum_{n=0}^{\infty} \phi^n(t) < \infty$.

$\phi \in \Phi$ ise her $t > 0$ için, $\phi(t) < t$ dir [48].

Lemma 3.1 Δ sürekli bir t-norm ve (X, F, Δ) bir Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, her $t > 0$ için, $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{x_n, y_n}(t) = F_{x, y}(t)$ ' dir [48].

Lemma 3.2 Δ sürekli bir t-norm ve (x_n) ; (X, F, Δ) Menger olasılıksal metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer; her $t > 0$ ve $n \geq 1$ için,

$F_{x_n, x_{n+1}}(\phi(t)) \geq \min\{F_{x_{n-1}, x_n}(t), F_{x_n, x_{n+1}}(t)\}$ olacak şekilde bir $\phi \in \Phi$ fonksiyonu var ise o zaman (x_n) dizisi, X ' de bir Cauchy dizisidir [48].

Lemma 3.3 (X, F, Δ) bir Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için, $F_{x, y}(\phi(t) + 0) \geq F_{x, y}(t)$ ise $x = y$ ' dir [48].

Lemma 3.4 $\dot{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve bütün $\eta \neq l$ için, $\liminf_{\alpha \rightarrow \infty} c_{\alpha, \eta} = c_\eta$ ve $(c_{\alpha, \alpha})_{\alpha=1}^\infty$ sınırlı olacak şekilde $(c_{\alpha, j})_{\alpha=1}^\infty$, $j = 1, 2, \dots, n$ olsun. O zaman,

$$\liminf_{\alpha \rightarrow \infty} \dot{h}(c_{\alpha, 1}, c_{\alpha, 2}, \dots, c_{\alpha, n}) = \dot{h}(c_1, c_2, \dots, \liminf_{\alpha \rightarrow \infty} c_{\alpha, l}, \dots, c_n)$$

dır [49].

Teorem 3.1 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $\Delta = \Delta_M$ sürekli t-normu olmak üzere, (X, F, Δ) tam Menger olasılıksal metrik uzayı olsun. Karışık h -monoton özelliğine sahip $B: X \times X \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun. $h(x) \geq h(u)$ ve $h(y) \leq h(v)$ (veya $h(x) \leq h(u)$ ve $h(y) \geq h(v)$) eşitsizliklerini sağlayan her $x, y, u, v \in X$, $t > 0$ için,

$$F_{B(x, y), B(u, v)}(\phi(t)) \geq \min\{F_{h(x), h(u)}(t), F_{h(x), B(x, y)}(t), F_{h(u), B(u, v)}(t)\}$$

olacak şekilde $\phi \in \Phi$ var olsun. $B(X \times X) \subseteq h(X)$, h' nin sürekli ve B ile değişmeli olduğu ve aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilsin.

(a) B sürekli

veya

(b) X aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

(i) Eğer azalmayan (x_n) dizisi x' e yakınsak ise $x_n \leq x'$ dir.

(ii) Eğer artmayan (y_n) dizisi y' ye yakınsak ise $y \leq y_n'$ dir.

$h(x_0) \leq B(x_0, y_0)$ ve $h(y_0) \geq B(y_0, x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ var ise bu taktirde $h(x) = B(x, y)$ ve $h(y) = B(y, x)$ eşitliklerini sağlayan $x, y \in X$ vardır.

Yani; B ile h ikili çakışma noktasına sahiptir [48].

Teorem 3.2 Bir önceki teoremin hipotezine ek olarak; her $(x, y), (x^*, y^*) \in X \times X$ için, $(B(u, v), B(v, u)) \in X \times X'$ nin $(B(x, y), B(y, x))$ ve $(B(x^*, y^*), B(y^*, x^*))$ ile karşılaştırılabilir olacak şekilde $h(u) \leq h(v)$ veya $h(v) \leq h(u)$ eşitsizliklerini sağlayan bir $(u, v) \in X \times X$ var olduğu kabul edilsin.

Bu taktirde, B ve h tek bir ikili sabit noktaya sahiptir. Yani;

$x = h(x) = B(x, y)$ ve $y = h(y) = B(y, x)$ olacak şekilde $X \times X'$ de bir tek (x, y) elemanı vardır [48].

Örnek 3.1 $X = [0, 1]$, $d(l, m) = |l - m|$ ve $F_{l, m}(t) = H(t - d(l, m))$, $\Delta = \Delta_M$ olmak üzere, (X, F, Δ) bir tam Menger olasılıksal metrik uzayıdır.

$B: X \times X \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri,

$$B(l, m) = \begin{cases} \frac{l-m}{6}, & l, m \in [0, 1] \text{ ve } l \geq m \text{ ise,} \\ 0, & l < m \text{ ise} \end{cases}$$

ve

her $l \in X$ için, $h(l) = \frac{l}{2}$ şeklinde tanımlansınlar.

B dönüşümü karışık h -monoton özelliğini sağlar. $B(X \times X) \subseteq h(X)$, h sürekli ve B ile değiştirilebilir olduğundan, B' de sürekli dir.

$t \in [0, \infty)$ için, $\phi(t) = \frac{2}{3}t$ olsun.

$l_0 = 0$ ve $m_0 = k$, X' te iki nokta olmak üzere,

$$h(l_0) = h(0) = B(0, k) \leq B(l_0, m_0)$$

ve

$$h(m_0) = h(k) = \frac{k}{2} \geq \frac{k}{6} = B(k, 0) = B(m_0, l_0)$$

bulunur.

Teorem 3.1' deki eşitsizliğin sağlandığı gösterilecektir:

$l, m, n, p \in X$ için, $h(l) \geq h(n)$ ve $h(m) \leq h(p)$ olduğunda $l \geq n$, $m \leq p'$ dir. Böylece Teorem 3.1' deki eşitsizlik ,

$$H\left(\frac{2t}{3} - |B(l, m) - B(n, p)|\right) \geq \min \left\{ H\left(t - \frac{l-n}{2}\right), H\left(t - \left|\frac{l}{2} - B(l, m)\right|\right), H\left(t - \left|\frac{n}{2} - B(n, p)\right|\right) \right\}$$

halini alır. H' ın tanımını gereği,

$t > \frac{l-n}{2}$, $t > \left|\frac{l}{2} - B(l, m)\right|$, $t > \left|\frac{n}{2} - B(n, p)\right|$ ise $\frac{2t}{3} > |B(l, m) - B(n, p)|$ olduğunu göstermek gerekecektir.

Aşağıdaki durumlar göz önüne alınırsa:

Durum 1: $l \geq m$ ve $n \geq p$, yani ; $m \leq p \leq n \leq l$ ise,

$$t > \frac{l-n}{2}, t > \frac{l}{2} - \frac{l-m}{6} = \frac{2l+m}{6}, t > \frac{n}{2} - \frac{n-p}{6} = \frac{2n+p}{6} \text{ olur.}$$

$$t > \frac{2l+m}{6} \geq \frac{l}{4} \text{ alındığı taktirde, } t > \frac{l}{4} \geq \frac{l}{4} - \frac{n-p}{4} = \frac{l-n}{4} + \frac{p}{4} \geq \frac{l-n}{4} + \frac{p-m}{4} \text{ bulunur}$$

$$\text{ve bu da } \frac{2t}{3} \geq \frac{l-m}{6} - \frac{n-p}{6} \text{ eşitsizliğini sağlar.}$$

Durum 2: $l \geq m$ ve $n < p$ ise,

$$t > \frac{l}{2} - \frac{l-m}{6} = \frac{2l+m}{6} \geq \frac{l-m}{4} \text{ olup, yine } \frac{2t}{3} \geq \frac{l-m}{6} = |B(l, m) - B(n, p)| \text{ eşitsizliği elde edilir.}$$

Durum 3: $n \leq l$ ve $m \leq p$ olduğu için $l < m$ ve $n \geq p$ olamaz.

Durum 4: $t > 0$ olduğu için $l < m$ ve $n < p$ olduğunda da $\frac{2t}{3} > |B(l, m) - B(n, p)|$ eşitsizliği sağlanacaktır.

Böylece B, h ve ϕ fonksiyonları Teorem 3.1' deki tüm şartları sağlar. $(0, 0)$ noktası B ve h' nin X' deki ikili çakışma noktasıdır [48].

Benzer şekilde, 2012 yılında Choudry ve arkadaşları tarafından kısmi sıralı olasılıksal metrik uzaylarda üçlü çakışma noktasına ait sonuçlar verilmiştir [49].

Kısmi sıralı olasılıksal metrik uzaylarda verilen ikili ve üçlü çakışma noktaları teoremleri ile kısmi sıralı tam metrik uzaylarda Ertürk ve Karakaya tarafından

verilen n -li çakışma noktası teoremlerinden ilham alınarak kısmi sıralı olasılıksal metrik uzaylarda n -li çakışma noktası varlık ve teklik teoremleri verilmiştir:

Tanım 3.1 (X, F, Δ) Menger olasılıksal metrik uzayı ve $B: X^n \rightarrow X$, $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun.

Her $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} B(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^1) = x^1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} B(x_k^2, \dots, x_k^n, x_k^1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^2) = x^2, \\ &\vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} B(x_k^n, x_k^1, \dots, x_k^{n-1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^n) = x^n \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde X' de $(x_k^1), (x_k^2), \dots, (x_k^n)$ olduğunda,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{h(B(x_k^1, \dots, x_k^n)), B(h(x_k^1), \dots, h(x_k^n))}(t) &= 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} F_{h(B(x_k^2, \dots, x_k^n, x_k^1)), B(h(x_k^2), \dots, h(x_k^n), h(x_k^1))}(t) &= 1, \\ &\vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} F_{h(B(x_k^n, x_k^1, \dots, x_k^{n-1})), B(h(x_k^n), h(x_k^1), \dots, h(x_k^{n-1}))}(t) &= 1 \end{aligned}$$

ise B ve h dönüşümleri uyumludur denir.

Teorem 3.3 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve Δ minimum t-norm olmak üzere (X, F, Δ) bir tam Menger olasılıksal metrik uzayı olsun. Karışık g -monoton özelliğine sahip $B: X^n \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun ve

$$\begin{aligned} h(x^1) &\geq h(y^1) \\ h(x^2) &\leq h(y^2) \\ &\vdots \\ h(x^n) &\geq h(y^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ h(x^n) &\leq h(y^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan her $t > 0$, $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n \in X$ için;

$$F_{B(x^1, x^2, \dots, x^n), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(\phi(t)) + p(1 - \max\{F_{h(x^1), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(\phi(t)), F_{h(y^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(t))\}) \\ \geq \min\{F_{h(x^1), h(y^1)}(t), F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(t), F_{h(y^1), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(t)\}$$

olacak şekilde $\phi \in \Phi$ ve $p \geq 0$ var olsun.

$B(X^n) \subseteq h(X)$, h' nin sürekli, monoton artan ve B ile değişmeli olduğu ve aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilsin.

Ayrıca;

a) B sürekli

veya

b) X aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

(i) Eğer azalmayan (x_n) dizisi x' e yakınsak ise $x_n \leq x'$ dir.

(ii) Eğer artmayan (y_n) dizisi y' ye yakınsak ise $y \leq y_n$ ' dir.

$$\begin{aligned} h(x_0^1) &\leq B(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\ h(x_0^2) &\geq B(x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n, x_0^1) \\ &\vdots \\ h(x_0^n) &\leq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ h(x_0^n) &\geq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

olacak şekilde $x_0^1, \dots, x_0^n \in X$ var ise,

$$\begin{aligned} B(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) &= h(x^1) \\ B(x^2, x^3, \dots, x^n, x^1) &= h(x^2) \\ &\vdots \\ B(x^n, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) &= h(x^n) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $x^1, \dots, x^n \in X$ vardır.

Yani; B ve h dönüşümleri n -li çakışma noktasına sahiptir.

İspat $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \in X$ (3.1) şartını sağlasın. $B(X^n) \subset h(X)$ olduğundan, her $k \geq 1$ için, $(x_k^1), (x_k^2), \dots, (x_k^n) \in X$ dizileri aşağıdaki şekilde kurulabilir:

$$\begin{aligned} h(x_k^1) &= B(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^n) \\ h(x_k^2) &= B(x_{k-1}^2, x_{k-1}^3, \dots, x_{k-1}^n, x_{k-1}^1) \\ &\vdots \\ h(x_k^n) &= B(x_{k-1}^n, x_{k-1}^1, \dots, x_{k-1}^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bir sonraki adımda $k \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} h(x_{k-1}^1) &\leq h(x_k^1) \\ h(x_{k-1}^2) &\geq h(x_k^2) \\ &\vdots \\ h(x_{k-1}^n) &\leq h(x_k^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ h(x_{k-1}^n) &\geq h(x_k^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

olduğu gösterilecektir.

Bu gösterim tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır.

(3.3)' teki sıralamalar (3.1)' den dolayı $k = 1$ için sağlanır. Yani;

$$\begin{aligned} h(x_0^1) &\leq B(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) = h(x_1^1) \\ h(x_0^2) &\geq B(x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n, x_0^1) = h(x_1^2) \\ &\vdots \\ h(x_0^n) &\leq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) = h(x_1^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ h(x_0^n) &\geq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) = h(x_1^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned}$$

dır.

Sıralamaların $k = m$ için, doğru olduğunu kabul edilsin:

$$\begin{aligned} h(x_{m-1}^1) &\leq B(x_m^1) \\ h(x_{m-1}^2) &\geq B(x_m^2) \\ &\vdots \\ h(x_{m-1}^n) &\leq B(x_m^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ h(x_{m-1}^n) &\geq B(x_m^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned}$$

dir.

Sıralamaların $k = m + 1$ için de doğru olduğunu gösterirsek istenilen elde edilmiş olur. B karışık h -monoton özelliğine sahip olduğundan,

$$\begin{aligned} h(x_m^1) &= B(x_{m-1}^1, x_{m-1}^2, \dots, x_{m-1}^n) \\ &\leq B(x_m^1, x_{m-1}^2, \dots, x_{m-1}^n) \\ &\leq B(x_m^1, x_m^2, x_{m-1}^3, \dots, x_{m-1}^{n-1}, x_{m-1}^n) \\ &\vdots \\ &\leq B(x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^{n-1}, x_m^n) = h(x_{m+1}^1) \end{aligned}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} h(x_m^2) &\geq B(x_m^2, x_m^3, \dots, x_m^n, x_m^1) = h(x_{m+1}^2) \\ &\vdots \\ h(x_m^n) &\leq B(x_m^n, x_m^1, \dots, x_m^{n-1}) = h(x_{m+1}^n) \quad (\text{Eğer } n \text{ tek ise}) \\ h(x_m^n) &\geq B(x_m^n, x_m^1, \dots, x_m^{n-1}) = h(x_{m+1}^n) \quad (\text{Eğer } n \text{ çift ise}) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece sıralamalar tüm $k \geq 1$ için sağlanır. Aşağıdaki sıralamalar yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dots &\geq h(x_k^1) \geq h(x_{k-1}^1) \geq \dots \geq h(x_1^1) \geq h(x_0^1) \\ \dots &\leq h(x_k^2) \leq h(x_{k-1}^2) \leq \dots \leq h(x_1^2) \leq h(x_0^2) \\ &\vdots \\ \dots &\geq h(x_k^n) \geq h(x_{k-1}^n) \geq \dots \geq h(x_1^n) \geq h(x_0^n) \quad (\text{Eğer } n \text{ tek ise}) \\ \dots &\leq h(x_k^n) \leq h(x_{k-1}^n) \leq \dots \leq h(x_1^n) \leq h(x_0^n) \quad (\text{Eğer } n \text{ çift ise}) \end{aligned}$$

$(h(x_k^1)), (h(x_k^2)), \dots, (h(x_k^n))$ dizilerinin Cauchy dizileri olduğu gösterilecektir.

Bunun için; önce $(h(x_k^1))'$ in Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} F_{h(x_k^1), h(x_{k+1}^1)}(\phi(t)) &= F_{B(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^n), B(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)}(\phi(t)) \\ &\geq \min\{F_{h(x_{k-1}^1), h(x_k^1)}(t), F_{h(x_{k-1}^1), B(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^n)}(t), F_{h(x_k^1), B(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)}(t)\} \\ &\quad - p(1 - \max\{F_{h(x_{k-1}^1), B(x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^n)}(\phi(t)), F_{h(x_k^1), B(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)}(\phi(t))\}) \\ &= \min\{F_{h(x_{k-1}^1), h(x_k^1)}(t), F_{h(x_{k-1}^1), h(x_k^1)}(t), F_{h(x_k^1), h(x_{k+1}^1)}(t)\} \\ &\quad - p(1 - \max\{F_{h(x_{k-1}^1), h(x_{k+1}^1)}(\phi(t)), F_{h(x_k^1), h(x_{k+1}^1)}(\phi(t))\}) \end{aligned}$$

$$F_{h(x_k^1), h(x_{k+1}^1)}(\phi(t)) \geq \min\{F_{h(x_{k-1}^1), h(x_k^1)}(t), F_{h(x_k^1), h(x_{k+1}^1)}(t)\} - p(1-1)$$

$$F_{h(x_k^1), h(x_{k+1}^1)}(\phi(t)) \geq \min\{F_{h(x_{k-1}^1), h(x_k^1)}(t), F_{h(x_k^1), h(x_{k+1}^1)}(t)\}$$

Lemma 3.2' den $(h(x_k^1))$ bir Cauchy dizisidir.

$$F_{h(x_k^2), h(x_{k+1}^2)}(\phi(t)) = F_{B(x_{k-1}^2, x_{k-1}^3, \dots, x_{k-1}^n, x_{k-1}^1), B(x_k^2, x_k^3, \dots, x_k^n, x_k^1)}(\phi(t))$$

$$\geq \min\{F_{h(x_{k-1}^2), h(x_k^2)}(t), F_{h(x_{k-1}^2), B(x_{k-1}^2, x_{k-1}^3, \dots, x_{k-1}^n, x_{k-1}^1)}(t), F_{h(x_k^2), B(x_k^2, x_k^3, \dots, x_k^n, x_k^1)}(t)\}$$

$$- p(1 - \max\{F_{h(x_{k-1}^2), B(x_k^2, \dots, x_k^n, x_k^1)}(\phi(t)), F_{h(x_k^2), B(x_{k-1}^2, x_{k-1}^3, \dots, x_{k-1}^n, x_{k-1}^1)}(\phi(t))\})$$

$$= \min\{F_{h(x_{k-1}^2), h(x_k^2)}(t), F_{h(x_{k-1}^2), h(x_k^2)}(t), F_{h(x_k^2), h(x_{k+1}^2)}(t)\}$$

$$- p(1 - \max\{F_{h(x_{k-1}^2), h(x_{k+1}^2)}(\phi(t)), F_{h(x_k^2), h(x_{k+1}^2)}(\phi(t))\})$$

$$F_{h(x_k^2), h(x_{k+1}^2)}(\phi(t)) \geq \min\{F_{h(x_{k-1}^2), h(x_k^2)}(t), F_{h(x_k^2), h(x_{k+1}^2)}(t)\} - p(1-1)$$

$$F_{h(x_k^2), h(x_{k+1}^2)}(\phi(t)) \geq \min\{F_{h(x_{k-1}^2), h(x_k^2)}(t), F_{h(x_k^2), h(x_{k+1}^2)}(t)\}$$

Lemma 3.2' den $(h(x_k^2))$ bir Cauchy dizisidir.

Benzer şekilde $(h(x_k^3)), \dots, (h(x_k^n))$ dizileri de Cauchy dizileridir ve X bir tam metrik uzay olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^1) = x^1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^2) = x^2$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^n) = x^n$$

olacak şekilde $x^1, \dots, x^n \in X$ vardır.

h dönüşümü sürekli olduğundan,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(h(x_k^1)) = h(x^1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(h(x_k^2)) = h(x^2)$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(h(x_k^n)) = h(x^n)$$

yazılabilir. (B, h) değişmeli olduğundan,

$$\begin{aligned}
h(h(x_{k+1}^1)) &= h(B(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)) = B(h(x_k^1), h(x_k^2), \dots, h(x_k^n)) \\
&\vdots \\
h(h(x_{k+1}^n)) &= h(B(x_k^n, x_k^1, \dots, x_k^{n-1})) = B(h(x_k^n), h(x_k^1), \dots, h(x_k^{n-1}))
\end{aligned} \tag{3.4}$$

dır. Gösterilmek istenilen aşağıdaki eşitliklerdir:

$$\begin{aligned}
B(x^1, x^2, \dots, x^n) &= h(x^1) \\
B(x^2, \dots, x^n, x^1) &= h(x^2) \\
&\vdots \\
B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}) &= h(x^n)
\end{aligned}$$

Öncelikle teoremin hipotezinde (a) ifadesinin sağlandığı durumu ele alalım.

(3.4)' ten,

$$\begin{aligned}
h(x^1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(h(x_{k+1}^1)) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(B(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} B(h(x_k^1), h(x_k^2), \dots, h(x_k^n)) \\
&= B(\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^1), \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^2), \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^n)) \\
&= B(x^1, x^2, \dots, x^n) \\
h(x^2) &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(h(x_{k+1}^2)) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(B(x_k^2, \dots, x_k^n, x_k^1)) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} B(h(x_k^2), \dots, h(x_k^n), h(x_k^1)) \\
&= B(\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^2), \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^n), \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^1)) \\
&= B(x^2, \dots, x^n, x^1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
h(x^n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(h(x_{k+1}^n)) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(B(x_k^n, x_k^1, \dots, x_k^{n-1})) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} B(h(x_k^n), h(x_k^1), \dots, h(x_k^{n-1})) \\
&= B(\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^n), \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^1), \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k^{n-1})) \\
&= B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1})
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi ise teoremin hipotezinde (b) ifadesinin sağlandığı durumu ele alalım:

$$\begin{aligned}
h(x_k^1) &\leq x^1 \\
h(x_k^2) &\geq x^2 \\
&\vdots \\
h(x_k^n) &\leq x^n \text{ (} n \text{ tek ise)} \\
h(x_k^n) &\geq x^n \text{ (} n \text{ çift ise)}
\end{aligned}$$

dır. Her $t > 0$, $0 < \lambda < 1$ için,

$$\begin{aligned}
&F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(t)) \\
&\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf [\min\{F_{h(h(x_k^1)), h(x^1)}(\lambda t), F_{h(h(x_k^1)), B(h(x_k^1), h(x_k^2), \dots, h(x_k^n)))(\lambda t), F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\lambda t)\} \\
&\quad - p(1 - \max\{F_{h(h(x_k^1)), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(\lambda t)), F_{h(x^1), B(h(x_k^1), h(x_k^2), \dots, h(x_k^n)))(\phi(\lambda t))\})] \\
&= \min\{\lim_{k \rightarrow \infty} F_{h(h(x_k^1)), h(x^1)}(\lambda t), \lim_{k \rightarrow \infty} \inf F_{h(h(x_k^1)), B(h(x_k^1), h(x_k^2), \dots, h(x_k^n)))(\lambda t), F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\lambda t)\} \\
&\quad - p(1 - \max\{\lim_{k \rightarrow \infty} F_{h(h(x_k^1)), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(\lambda t)), \lim_{k \rightarrow \infty} F_{h(x^1), B(h(x_k^1), h(x_k^2), \dots, h(x_k^n)))(\phi(\lambda t))\}) \\
&= \min\{F_{h(x^1), h(x^1)}(\lambda t), F_{h(x^1), h(x^1)}(\lambda t), F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\lambda t)\} \\
&\quad - p(1 - \max\{F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(\lambda t)), F_{h(x^1), h(x^1)}(\phi(\lambda t))\}) \\
&\geq \min\{1, F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\lambda t)\} - p(1 - 1) \\
&\geq F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\lambda t)
\end{aligned}$$

$$F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(t)) \geq F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\lambda t) \text{ bulunur.}$$

λ , $(0,1)$ 'de keyfi olduğundan $\lambda \rightarrow 1$ iken F dağılım fonksiyonunun sol süreklilik özelliği kullanılarak;

$$F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(t)) \geq F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(t)$$

elde edilir.

ϕ artan ve F dağılım fonksiyonu azalmayan olduğundan;

$$\phi(t) + 0 \geq \phi(t) \Rightarrow F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(t) + 0) \geq F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(t)) \geq F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(t)$$

olup Lemma 3.3' den, $h(x^1) = B(x^1, x^2, \dots, x^n)$ elde edilir.

Benzer işlemlerle,

$$h(x^2) = B(x^2, \dots, x^n, x^1), \dots, h(x^n) = B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1})$$

bulunur.

Böylece B ve h dönüşümleri, X 'de n -li çakışma noktasına sahiptir.

Teorem 3.3' de $p = 0$ alındığı taktirde; aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve Δ minimum t-norm olmak üzere (X, F, Δ) bir tam Menger olasılıksal metrik uzayı olsun. Karışık h -monoton özelliğine sahip $B: X^n \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun ve

$$\begin{aligned} h(x^1) &\geq h(y^1) \\ h(x^2) &\leq h(y^2) \\ &\vdots \\ h(x^n) &\geq h(y^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ h(x^n) &\leq h(y^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan her $t > 0$, $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n \in X$ için;

$$F_{B(x^1, x^2, \dots, x^n), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(\phi(t)) \geq \min\{F_{h(x^1), h(y^1)}(t), F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(t), F_{h(y^1), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(t)\}$$

olacak şekilde $\phi \in \Phi$ var olsun.

$B(X^n) \subseteq h(X)$, h' nin sürekli, monoton artan ve B ile değişmeli olduğu ve aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilsin:

Ayrıca;

a) B süreklidir

veya

b) X aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

(i) Eğer azalmayan (x_n) dizisi x' e yakınsak ise $x_n \leq x'$ dir.

(ii) Eğer artmayan (y_n) dizisi y' ye yakınsak ise $y \leq y_n$ ' dir.

$$\begin{aligned}
h(x_0^1) &\leq B(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\
h(x_0^2) &\geq B(x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n, x_0^1) \\
&\vdots \\
h(x_0^n) &\leq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\
h(x_0^n) &\geq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned}$$

olacak şekilde $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \in X$ var ise

$$\begin{aligned}
B(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) &= h(x^1) \\
B(x^2, x^3, \dots, x^n, x^1) &= h(x^2) \\
&\vdots \\
B(x^n, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) &= h(x^n)
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $x^1, \dots, x^n \in X$ vardır.

Yani, B ve h dönüşümleri n -li çakışma noktasına sahiptir.

Teorem 3.3' de $\phi(t) = ct$, $c \in (0,1)$ alındığı taktirde; Sonuç 3.2 elde edilir.

Sonuç 3.2 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve Δ minimum t-norm olmak üzere (X, F, Δ) bir tam Menger olasılıksal metrik uzayı olsun. Karışık h -monoton özelliğine sahip $B: X^n \rightarrow X$ ve $h: X \rightarrow X$ dönüşümleri olsun ve

$$\begin{aligned}
h(x^1) &\geq h(y^1) \\
h(x^2) &\leq h(y^2) \\
&\vdots \\
h(x^n) &\geq h(y^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\
h(x^n) &\leq h(y^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)}
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan her $t > 0$, $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n \in X$ için;

$$\begin{aligned}
F_{B(x^1, x^2, \dots, x^n), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(ct) + p(1 - \max\{F_{h(x^1), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(ct), F_{h(y^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(ct)\}) \\
\geq \min\{F_{h(x^1), h(y^1)}(t), F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(t), F_{h(y^1), B(y^1, y^2, \dots, y^n)}(t)\}
\end{aligned}$$

olacak şekilde $p \geq 0$ var olsun.

$B(X^n) \subseteq h(X)$, h' nin sürekli, monoton artan ve B ile değişmeli olduğu ve aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilsin:

Ayrıca;

a) B sürekli

veya

b) X aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

(i) Eğer azalmayan (x_n) dizisi x' e yakınsak ise $x_n \leq x'$ dir.

(ii) Eğer artmayan (y_n) dizisi y' ye yakınsak ise $y \leq y_n$ ' dir.

$$\begin{aligned} h(x_0^1) &\leq B(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\ h(x_0^2) &\geq B(x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n, x_0^1) \\ &\vdots \\ h(x_0^n) &\leq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ h(x_0^n) &\geq B(x_0^n, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n-1}) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \in X$ var ise,

$$\begin{aligned} B(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) &= h(x^1) \\ B(x^2, x^3, \dots, x^n, x^1) &= h(x^2) \\ &\vdots \\ B(x^n, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) &= h(x^n) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $x^1, x^2, \dots, x^n \in X$ vardır. Yani; B ve h dönüşümleri n -li çakışma noktasına sahiptir.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini belirten teorem verilecektir.

X^n üzerinde sıralama aşağıdaki şekilde bir sıralama bağıntısı verilebilir:

Her $(x^1, x^2, \dots, x^n), (x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}) \in X^n$ için,

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, \dots, x^n) \leq (x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}) &\Leftrightarrow x^1 \leq x^{1*}, x^2 \geq x^{2*}, \dots, x^n \leq x^{n*} \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)} \\ &\quad x^n \geq x^{n*} \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)} \end{aligned}$$

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}) \Leftrightarrow x^1 = x^{1*}, x^2 = x^{2*}, \dots, x^n = x^{n*}$$

dir.

Teorem 3.4 Teorem 3.3' ün hipotezine ek olarak,

her $(x^1, \dots, x^n), (x^{1*}, \dots, x^{n*}) \in X^n$ için,

$$(B(y^1, y^2, \dots, y^n), B(y^2, \dots, y^n, y^1), \dots, B(y^n, y^1, \dots, y^{n-1}))$$

n -lisinin

$$(B(x^1, x^2, \dots, x^n), B(x^2, \dots, x^n, x^1), \dots, B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}))$$

ve

$$(B(x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}), B(x^{2*}, \dots, x^{n*}, x^{1*}), \dots, B(x^{n*}, x^{1*}, \dots, x^{(n-1)*}))$$

ile karşılaştırılabilir olacak şekilde bir $(y^1, \dots, y^n) \in X^n$ elemanının varlığını kabul edilsin. Bu taktirde, B ve h dönüşümleri ortak tek bir n -li sabit noktaya sahiptir.

Yani,

$$\begin{aligned} x^1 &= h(x^1) = B(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ x^2 &= h(x^2) = B(x^2, \dots, x^n, x^1) \\ &\vdots \\ x^n &= h(x^n) = B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}) \end{aligned}$$

dir.

İspat Bir önceki teoremden dolayı, n -li çakışma kümesi boş kümeden farklıdır.

$(x^1, \dots, x^n)$ ve $(x^{1*}, \dots, x^{n*})$ çakışma noktası ise, yani eğer;

$$\begin{aligned} h(x^1) &= B(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ h(x^2) &= B(x^2, \dots, x^n, x^1) \\ &\vdots \\ h(x^n) &= B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
h(x^{1*}) &= B(x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}) \\
h(x^{2*}) &= B(x^{2*}, \dots, x^{n*}, x^{1*}) \\
&\vdots \\
h(x^{n*}) &= B(x^{n*}, x^{1*}, \dots, x^{(n-1)*})
\end{aligned}$$

ise

$$h(x^1) = h(x^{1*}), h(x^2) = h(x^{2*}), \dots, h(x^n) = h(x^{n*}) \quad (3.5)$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilecektir.

Kabulümüzden dolayı

$$(B(x^1, x^2, \dots, x^n), B(x^2, \dots, x^n, x^1), \dots, B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1})) \quad (3.6)$$

ve

$$(B(x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*}), B(x^{2*}, \dots, x^{n*}, x^{1*}), \dots, B(x^{n*}, x^{1*}, \dots, x^{(n-1)*})) \quad (3.7)$$

elemanları

$$(B(y^1, y^2, \dots, y^n), B(y^2, \dots, y^n, y^1), \dots, B(y^n, y^1, \dots, y^{n-1})) \quad (3.8)$$

ile karşılaştırılabilir olacak şekilde $(y^1, \dots, y^n) \in X^n$ vardır.

$$y^1 = y_0^1, y^2 = y_0^2, \dots, y^n = y_0^n$$

ve

$$\begin{aligned}
h(y_k^1) &= B(y_{k-1}^1, y_{k-1}^2, \dots, y_{k-1}^n) \\
h(y_k^2) &= B(y_{k-1}^2, \dots, y_{k-1}^n, y_{k-1}^1) \\
&\vdots \\
h(y_k^n) &= B(y_{k-1}^n, y_{k-1}^1, \dots, y_{k-1}^{n-1})
\end{aligned}$$

olacak şekilde, $(h(y_k^1)), \dots, (h(y_k^n))$ dizileri tanımlanabilir.

(3.6) ve (3.7) denklemlerinin (3.8) ile karşılaştırılabilir olma özelliğinden dolayı,

$$(h(x^1), h(x^2), \dots, h(x^n)) \geq (h(x^1), h(x^2), \dots, h(x^n)) = (h(y_0^1), h(y_0^2), \dots, h(y_0^n))$$

olduğu varsayalım.

Her k için;

$$h(x^1) \geq h(y_k^1), h(x^2) \leq h(y_k^2), \dots, h(x^n) \geq h(y_k^n) \text{ (Eğer } n \text{ tek ise)}$$

$$h(x^n) \leq h(y_k^n) \text{ (Eğer } n \text{ çift ise)}$$

yazılabilir.

Her bir $k \geq 1$ için;

$$\begin{aligned} F_{h(x^1), h(y_{k+1}^1)}(\phi(t)) &= F_{B(x^1, x^2, \dots, x^n), B(y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^n)}(\phi(t)) \\ &\geq \min\{F_{h(x^1), h(y_k^1)}(t), F_{h(x^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(t), F_{h(y_k^1), B(y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^n)}(t)\} \\ &\quad - p(1 - \max\{F_{h(x^1), B(y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^n)}(\phi(t)), F_{h(y_k^1), B(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\phi(t))\}) \\ &= \min\{F_{h(x^1), h(y_k^1)}(t), F_{h(x^1), h(x^1)}(t), F_{h(y_k^1), h(y_{k+1}^1)}(t)\} \\ &\quad - p(1 - \max\{F_{h(x^1), h(y_{k+1}^1)}(\phi(t)), F_{h(y_k^1), h(x^1)}(\phi(t))\}) \\ &\geq \min\{F_{h(x^1), h(y_k^1)}(t), F_{h(y_k^1), h(y_{k+1}^1)}(t)\} \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} F_{h(x^n), h(y_{k+1}^n)}(\phi(t)) &= F_{B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1}), B(y_k^n, y_k^1, \dots, y_k^{n-1})}(\phi(t)) \\ &\geq \min\{F_{h(x^n), h(y_k^n)}(t), F_{h(x^n), B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1})}(t), F_{h(y_k^n), B(y_k^n, y_k^1, \dots, y_k^{n-1})}(t)\} \\ &\quad - p(1 - \max\{F_{h(x^n), B(y_k^n, y_k^1, \dots, y_k^{n-1})}(\phi(t)), F_{h(y_k^n), B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1})}(\phi(t))\}) \\ &= \min\{F_{h(x^n), h(y_k^n)}(t), F_{h(x^n), h(x^n)}(t), F_{h(y_k^n), h(y_{k+1}^n)}(t)\} \\ &\quad - p(1 - \max\{F_{h(x^n), h(y_{k+1}^n)}(\phi(t)), F_{h(y_k^n), h(x^n)}(\phi(t))\}) \\ &\geq \min\{F_{h(x^n), h(y_k^n)}(t), F_{h(y_k^n), h(y_{k+1}^n)}(t)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$k \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa, Lemma 3.2 ve Lemma 3.3' den,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} h(y_{k+1}^1) &= h(x^1) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} h(y_{k+1}^2) &= h(x^2) \\ &\vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} h(y_{k+1}^n) &= h(x^n) \end{aligned}$$

elde edilir ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} h(y_{k+1}^1) &= h(x^{1*}) \\
\lim_{k \rightarrow \infty} h(y_{k+1}^2) &= h(x^{2*}) \\
&\vdots \\
\lim_{k \rightarrow \infty} h(y_{k+1}^n) &= h(x^{n*})
\end{aligned}$$

olduğu da gösterilir.

Üçgen eşitsizliği özelliğinden,

$$\begin{aligned}
F_{h(x^1), h(x^{1*})}(t) &\geq \Delta\{F_{h(x^1), h(y_{k+1}^1)}(t/2), F_{h(y_{k+1}^1), h(x^{1*})}(t/2)\} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty), \\
F_{h(x^2), h(x^{2*})}(t) &\geq \Delta\{F_{h(x^2), h(y_{k+1}^2)}(t/2), F_{h(y_{k+1}^2), h(x^{2*})}(t/2)\} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty), \\
&\vdots \\
F_{h(x^n), h(x^{n*})}(t) &\geq \Delta\{F_{h(x^n), h(y_{k+1}^n)}(t/2), F_{h(y_{k+1}^n), h(x^{n*})}(t/2)\} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, $h(x^1) = h(x^{1*}), h(x^2) = h(x^{2*}), \dots, h(x^n) = h(x^{n*})$ eşitlikleri yazılır.

B ve h değişmeli olduğundan,

$$\begin{aligned}
h(h(x^1)) &= h(B(x^1, x^2, \dots, x^n)) = B(h(x^1), h(x^2), \dots, h(x^n)), \\
h(h(x^2)) &= h(B(x^2, \dots, x^n, x^1)) = B(h(x^2), \dots, h(x^n), h(x^1)), \\
&\vdots \\
h(h(x^n)) &= h(B(x^n, x^1, \dots, x^{n-1})) = B(h(x^n), h(x^1), \dots, h(x^{n-1}))
\end{aligned}$$

dir.

$h(x^1) = z^1, h(x^2) = z^2, \dots, h(x^n) = z^n$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
h(z^1) &= B(z^1, z^2, \dots, z^n), \\
h(z^2) &= B(z^2, \dots, z^n, z^1), \\
&\vdots \\
h(z^n) &= B(z^n, z^1, \dots, z^{n-1})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, $(z^1, z^2, \dots, z^n)$ bir n -li çakışma noktasıdır.

$x^{1*} = z^1, \dots, x^{n*} = z^{n*}$ kabulumüzden $h(z^1) = h(x^1), h(z^2) = h(x^2), \dots, h(z^n) = h(x^n)$ olur.

Yani;

$$h(z^1) = z^1, h(z^2) = z^2, \dots, h(z^n) = z^n$$

dir.

$$\begin{aligned} z^1 &= h(z^1) = B(z^1, z^2, \dots, z^n), \\ z^2 &= h(z^2) = B(z^2, \dots, z^n, z^1), \\ &\vdots \\ z^n &= h(z^n) = B(z^n, z^1, \dots, z^{n-1}) \end{aligned}$$

olur ki; bu da $(z^1, \dots, z^n)$ 'nin, B ve h dönüşümlerinin ortak bir n -li sabit noktası olduğunu verir.

Bu sabit noktanın tekliğini göstermek için; $(q^1, q^2, \dots, q^n)$ başka bir n -li sabit nokta olsun.

$$\begin{aligned} q^1 &= h(q^1) = h(z^1), \\ q^2 &= h(q^2) = h(z^2), \\ &\vdots \\ q^n &= h(q^n) = h(z^n) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ortak sabit noktanın tekliğini gösterir.

NON-ARCHIMEDEAN MENDER OLASILIKSAL METRİK UZAYLARDA BİR BÜZÜLME DÖNÜŞÜMÜ

4.1 Non-Archimedean Menger Olasılıksal Metrik Uzaylarda γ Büzülme Dönüşümü İçin Sabit Nokta Teoremleri

Sezen, 2019 yılında Tanım 4.1' de belirtilen özelliklere sahip γ -büzülme dönüşümünü tanımlayıp, fuzzy metrik uzaylarda bu dönüşüm için sabit nokta teoremlerini incelemiştir [74]. Bu bölümde; γ -büzülme dönüşümünün non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzaylara uygulanan tanımı üzerinde çalışılmıştır. Non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzaylarda bu dönüşüm için sabit nokta teoremleri incelenmiş olup teoremlerin sonucunu destekleyen örnek verilmiştir. Ayrıca, yine bu uzaylarda zayıf γ -büzülme dönüşümü tanımı verilip, sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Tanım 4.1 $\gamma: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ kesin artan, sürekli bir dönüşüm ve her bir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif sayı dizisi için, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(a_n) = \infty$ olsun. γ fonksiyonlarının ailesi Γ olsun.

(X, F, Δ) bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay ve bu Menger olasılıksal uzay üzerinde tanımlı $T: X \rightarrow X$ dönüşümü olsun.

Her $x, y \in X$ ve $\gamma \in \Gamma$ için,

$$F_{Tx, Ty}(t) < 1 \Rightarrow \gamma(F_{Tx, Ty}(t)) \geq \gamma(F_{x, y}(t)) + \delta \quad (4.1)$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne γ -büzülme dönüşümü denir.

Örnek 4.1 $\gamma \in \Gamma$ olsun. γ dönüşümüne ait bazı örnekler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}\gamma_a(z) &= \frac{1}{1-z}, \\ \gamma_b(z) &= \frac{1}{1-z} + z, \\ \gamma_c(z) &= \frac{1}{1-z^2}, \\ \gamma_d(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-z}}.\end{aligned}$$

Her γ dönüşümü sürekli bir dönüşümdür [74].

Teorem 4.1 (X, F, Δ) bir tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayı ve $T : X \rightarrow X$ bir γ -büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde, T dönüşümü X non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat $x_0 \in X$ keyfi ve sabit olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, (x_n) dizisi $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde tanımlansın. Eğer, $x_n = x_{n+1}$ olduğunu gösterirsek; T dönüşümünün sabit noktasının varlığı gösterilmiş olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. γ -büzülme dönüşümünün tanımından,

$$\gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) \geq \gamma(F_{x_{n-1}, x_n}(t)) + \delta$$

yazılır.

Tanım uygulanmaya devam edildiğinde,

$$\begin{aligned}\gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) &\geq \gamma(F_{x_{n-1}, x_n}(t)) + \delta \\ &= \gamma(F_{Tx_{n-2}, Tx_{n-1}}(t)) + \delta \\ &\geq \gamma(F_{x_{n-2}, x_{n-1}}(t)) + 2\delta \\ &\vdots \\ &\geq \gamma(F_{x_0, x_1}(t)) + n\delta\end{aligned}\tag{4.2}$$

elde edilir.

$n \rightarrow \infty$ iken, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) = \infty$ olup γ dönüşümünün tanımı kullanılarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t) = 1\tag{4.3}$$

elde edilir ki; bu da sabit noktanın varlığını belirtir.

Şimdi (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. Kabul edelim ki; (x_n) Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda,

$F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0) < 1 - \varepsilon$ ve $F_{x_{m(j)-1}, x_{n(j)}}(t_0) \geq 1 - \varepsilon$, $m_j > n_j + 1$ olacak şekilde iki pozitif tamsayı dizileri (m_j) , (n_j) ve $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t_0 > 0$ vardır. Her $j \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0) \\ &\geq \Delta(F_{x_{m(j)}, x_{m(j)-1}}(t_0), F_{x_{m(j)-1}, x_{n(j)}}(t_0)) \\ &\geq \Delta(F_{x_{m(j)}, x_{m(j)-1}}(t_0), (1 - \varepsilon)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir.

(4.4) eşitsizliğinde $j \rightarrow \infty$ iken limit alınıp (4.3) kullanılırsa,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0) = 1 - \varepsilon \quad (4.5)$$

bulunur.

t-normun özelliğinden,

$$\begin{aligned} F_{x_{m(j)+1}, x_{n(j)+1}}(t_0) &\geq \Delta(F_{x_{m(j)+1}, x_{m(j)}}(t_0), F_{x_{m(j)}, x_{n(j)+1}}(t_0)) \\ &\geq \Delta(F_{x_{m(j)+1}, x_{m(j)}}(t_0), \Delta(F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0), F_{x_{n(j)}, x_{n(j)+1}}(t_0))) \end{aligned}$$

elde edilir.

$j \rightarrow \infty$ iken limit alındığında,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{x_{m(j)+1}, x_{n(j)+1}}(t_0) = 1 - \varepsilon \quad (4.6)$$

elde edilir.

γ -büzülme dönüşümü tanımında $x = x_{m(j)}$ ve $y = x_{n(j)}$ alınırsa,

$$\gamma(F_{x_{m(j)+1}, x_{n(j)+1}}(t)) \geq \gamma(F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t)) + \delta \quad (4.7)$$

olur.

(4.7)' de $j \rightarrow \infty$ iken limit alınıp (4.1), (4.5), (4.6) ve γ dönüşümünün sürekliliği kullanıldığında, $\gamma(1-\varepsilon) \geq \gamma(1-\varepsilon) + \delta$ elde edilir ki; bu da bir çelişki oluşturur. Böylece (x_n) dizisi X' de bir Cauchy dizisi olup, (X, F, Δ) non-Archimedean Menger olasılıksal uzayı tam olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$ olacak şekilde $\omega \in X$ vardır. T' nin sürekliliğinden,

$$F_{T\omega, \omega}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Tx_n, x_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_{n+1}, x_n}(t) = 1$$

yazılır.

Son olarak, T' nin sabit noktasının tekliği gösterilecektir.

Kabul edelim ki; T' nin ω_1 ve ω_2 iki farklı sabit noktası olsun. $\omega_1, \omega_2 \in X$ için, $\omega_1 \neq \omega_2$ ve $T\omega_1 = \omega_1, T\omega_2 = \omega_2$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \gamma(F_{T\omega_1, T\omega_2}(t)) &\geq \gamma(F_{T\omega_1, T\omega_2}(t)) + \delta \\ \gamma(F_{\omega_1, \omega_2}(t)) &\geq \gamma(F_{T\omega_1, T\omega_2}(t)) + \delta \end{aligned}$$

bulunup, çelişki elde edilir.

O zaman, T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1' i gerçekleyen bir örnek verilecektir:

Örnek 4.2 $X = [0, 1)$, $\Delta(\rho, \omega) = \min\{\rho, \omega\}$ olsun. $F_{c,d}(t)$, her $t > 0$ için;

$$F_{c,d}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \max\{c, d\}}, & c \neq d \\ 1, & c = d \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$\gamma: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \frac{1}{1-x}$ ve X üzerinde tanımlı T dönüşümü, $\forall x \in X$ için,

$$T(x) = \frac{2x^2}{5} \text{ olsun.}$$

(X, F, Δ) bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayıdır.

T' nin bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilecek olup, bunu iki durumda inceleyeceğiz:

Durum 1: $c, d \in (0,1)$ için $d > c$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$c > c^2$ ve $d > d^2$ olup $\max\{c, d\} > \max\{Tc, Td\}$ ' dir. O zaman, $\delta \in (0,1)$ vardır öyle ki;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\max\{c, d\}} + 1 + \delta &\leq \frac{1}{\max\{Tc, Td\}} + 1 \\ \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \max\{c, d\}}} + \delta &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \max\{Tc, Td\}}} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - F_{c,d}(t)} + \delta &\leq \frac{1}{1 - F_{Tc,Td}(t)} \\ \gamma(F_{c,d}(t)) + \delta &\leq \gamma(F_{Tc,Td}(t)) \\ \gamma(F_{Tc,Td}(t)) &\geq \gamma(F_{c,d}(t)) + \delta \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2: $c = 0$ ve $d \in (0,1)$ olsun. $c^2 = 0$ ve $d > d^2$ olup, $\max\{c, d\} > \max\{Tc, Td\}$ ' dir.

Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \max\{c, d\}} &< \frac{1}{1 + \max\{Tc, Td\}} \\ F_{c,d}(t) &< F_{Tc,Td}(t) \end{aligned}$$

bulunur.

O zaman, $\delta \in (0,1)$ vardır öyle ki;

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - F_{c,d}(t)} + \delta &\leq \frac{1}{1 - F_{Tc,Td}(t)} \\ \gamma(F_{c,d}(t)) + \delta &\leq \gamma(F_{Tc,Td}(t)) \\ \gamma(F_{Tc,Td}(t)) &\geq \gamma(F_{c,d}(t)) + \delta \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu da, her iki durum için, T' nin bir γ -büzülme dönüşümü olduğunu gösterir. Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olup, $c = 0$, T' nin bir tek sabit noktasıdır.

Tanım 4.2 (X, F, Δ) bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere $T : X \rightarrow X$ dönüşümü, her $x, y \in X$ ve $\gamma \in \Gamma$ için,

$$F_{Tx, Ty}(t) < 1 \Rightarrow \gamma(F_{Tx, Ty}(t)) \geq \gamma(\min\{F_{x, y}(t), F_{x, Tx}(t), F_{y, Ty}(t)\}) + \delta \quad (4.8)$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ mevcut ise T dönüşümüne γ -zayıf büzülme dönüşümü denir.

Her γ -büzülme dönüşümü bir γ -zayıf büzülme dönüşümüdür [74].

Teorem 4.2 (X, F, Δ) bir tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayı ve $T : X \rightarrow X$ bir γ -zayıf büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde, T dönüşümü X non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat $x_0 \in X$ keyfi ve sabit olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, (x_n) dizisi $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde tanımlansın. Eğer, $x_n = x_{n+1}$ olduğunu gösterirsek; T dönüşümünün sabit noktasının varlığı gösterilmiş olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. γ -büzülme dönüşümünün tanımından,

$$\begin{aligned} \gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) &\geq \gamma(\min\{F_{x_{n-1}, x_n}(t), F_{x_{n-1}, Tx_{n-1}}(t), F_{x_n, Tx_n}(t)\}) + \delta \\ &= \gamma(\min\{F_{x_{n-1}, x_n}(t), F_{x_{n-1}, x_n}(t), F_{x_n, x_{n+1}}(t)\}) + \delta \\ &= \gamma(\min\{F_{x_{n-1}, x_n}(t), F_{x_n, x_{n+1}}(t)\}) + \delta \end{aligned} \quad (4.9)$$

dir. Eğer,

$\min\{F_{x_{n-1}, x_n}(t), F_{x_n, x_{n+1}}(t)\} = F_{x_n, x_{n+1}}(t)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ mevcut ise, (4.9)' u kullanarak;

$$\begin{aligned} \gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) &= \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) \\ &\geq \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) + \delta \\ &> \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) \end{aligned}$$

olur ki; bu da bir çelişki oluşturur.

Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\min\{F_{x_{n-1}, x_n}(t), F_{x_n, x_{n+1}}(t)\} = F_{x_{n-1}, x_n}(t) \quad (4.10)$$

dir.

γ -büzülme dönüşümünün özelliği, (4.9) ve (4.10)' dan, $F_{x_n, x_{n+1}}(t) > F_{x_{n-1}, x_n}(t)$ elde ederiz.

(4.9) kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) \geq \gamma(F_{x_{n-1}, x_n}(t)) + \delta$$

olup devam edilirse,

$$\gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) \geq \gamma(F_{x_0, x_1}(t)) + n\delta$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ iken limit alındığında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) = \infty \text{ olup } \gamma \text{ dönüşümünün tanımından,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t) = 1 \text{ elde edilir.}$$

(x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu Teorem 4.1' deki gibi gösterilebilir.

(X, F, Δ) non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayı tam olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega \text{ olacak şekilde } \omega \in X \text{ mevcuttur.}$$

Şimdi ω ' nın T dönüşümünün bir sabit noktası olduğu gösterilecektir:

Durum 1: Her bir $n \in \mathbb{N}$ için, $k_n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x_{k_n+1} = T\omega$ ve $k_0 = 1, k_n > k_{n-1}$.

Buradan,

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T\omega = T\omega$$

bulunur.

Durum 2: $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için, $x_{n+1} \neq T\omega$ 'dır; yani, her $n \geq n_0$ için $F_{T\omega, \omega}(t) < 1$ ' dir. γ fonksiyonunun özelliği ve (4.8)' den,

$$\begin{aligned}\gamma(F_{x_{n+1}, T\omega}(t)) &= \gamma(F_{T\omega, T\omega}(t)) \\ &\geq \gamma(\min\{F_{x_n, \omega}(t), F_{x_n, T\omega}(t), F_{\omega, T\omega}(t)\}) + \delta \\ &= \gamma(\min\{F_{x_n, \omega}(t), F_{x_n, x_{n+1}}(t), F_{\omega, T\omega}(t)\}) + \delta\end{aligned}\tag{4.11}$$

ifadesi elde edilir.

Eğer $F_{\omega, T\omega}(t) < 1$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n, \omega}(t) = 1$ olur ve $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_1$ için,

$\min\{F_{x_n, \omega}(t), F_{x_n, x_{n+1}}(t), F_{\omega, T\omega}(t)\} = F_{\omega, T\omega}(t)$ ' dir.

(4.11)' i kullanarak, her $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ için,

$$\gamma(F_{x_{n+1}, T\omega}(t)) \geq \gamma(F_{\omega, T\omega}(t)) + \delta\tag{4.12}$$

bulunur.

Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa,

$\gamma(F_{\omega, T\omega}(t)) \geq \gamma(F_{\omega, T\omega}(t)) + \delta$ olup; bir çelişki oluşturur.

Böylece, $F_{\omega, T\omega}(t) = 1$ ' dir.

Durum 1 ve **Durum 2** sonucunda ω, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Son olarak, T' nin sabit noktasının tekliği gösterilecektir.

Kabul edelim ki; T' nin ω_1 ve ω_2 iki farklı sabit noktası olsun.

$\omega_1, \omega_2 \in X$ için, $\omega_1 \neq \omega_2$ ve $T\omega_1 = \omega_1, T\omega_2 = \omega_2$

olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}\gamma(F_{\omega_1, \omega_2}(t)) &= \gamma(F_{T\omega_1, T\omega_2}(t)) \\ &\geq \gamma(\min\{F_{\omega_1, \omega_2}(t), F_{\omega_1, T\omega_1}(t), F_{\omega_2, T\omega_2}(t)\}) + \delta \\ &= \gamma(\min\{F_{\omega_1, \omega_2}(t), F_{\omega_1, \omega_1}(t), F_{\omega_2, \omega_2}(t)\}) + \delta \\ &= \gamma(F_{\omega_1, \omega_2}(t)) + \delta\end{aligned}\tag{4.13}$$

bulunup, çelişki elde edilir.

0 zaman, $F_{\omega_1, \omega_2}(t) = 1$ olup $\omega_1 = \omega_2$ ' dir. Bu da; T dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterir.

4.2 Non-Archimedean Menger Olasılıksal Metrik Uzaylarda γ Büzülme Dönüşümü İçin En İyi Yaklaşım Noktası Teoremleri

Bu bölümde, non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzaylarda γ -büzülme dönüşümü için en iyi yaklaşım noktası teoremleri verilecek olup; birinci ve ikinci tipten γ -yakınsal büzülme dönüşümü kavramlarını tanımlanıp, bu yakınsal büzülme dönüşümleri için en iyi yaklaşım noktası teoremleri verilecektir. Ayrıca, sonuçları destekleyen örnekler verilecektir.

Bir (X, F, Δ) Menger olasılıksal metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi A ve B olsun. Aşağıda verilen notasyonlar kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t) &= \sup\{F_{x,y}(t) : x \in A, y \in B\}; \\ A_0(t) &= \{x \in A : \text{bazı } y \in B \text{ için } F_{x,y}(t) = F_{A,B}(t)\}; \\ B_0(t) &= \{y \in B : \text{bazı } x \in A \text{ için } F_{x,y}(t) = F_{A,B}(t)\}. \end{aligned}$$

Tanım 4.3 Bir X non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayının boş olmayan alt kümelerinin bir çifti (A, B) ve $A_0(t) \neq \emptyset$ olsun. (A, B) çiftinin zayıf P-özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul $x_1, x_2 \in A_0$ ve $y_1, y_2 \in B_0$ için,

$$\begin{cases} F_{x_1, y_1}(t) = F_{A,B}(t) \\ F_{x_2, y_2}(t) = F_{A,B}(t) \end{cases} \Rightarrow F_{x_1, x_2}(t) \geq F_{y_1, y_2}(t)$$

olmasıdır [62].

Örnek 4.3 $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve her $x \in X$ için, $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere, her $t > 0$ için,

$$F_{x,y}(t) = \frac{t}{t + d(x, y)} \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

(X, F, Δ) bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayıdır.

$$A = \{(0, 0)\} \text{ ve } B = \{(1, 0), (-1, 0)\} \text{ olsun. } d(A, B) = 1 \text{ ve } F_{A,B}(t) = \frac{t}{t + d(A, B)} = \frac{t}{t + 1},$$

dir. Buradan,

$$F_{x_1, y_1}(t) = F_{A, B}(t)$$

$$F_{x_2, y_2}(t) = F_{A, B}(t)$$

eşitlikleri var ise,

$$(x_1, y_1) = ((0, 0), (1, 0)) \text{ ve } F_{x_1, y_1}(t) = F_{(0, 0), (1, 0)}(t) = 1,$$

$$(x_2, y_2) = ((0, 0), (-1, 0)) \text{ ve } F_{x_2, y_2}(t) = F_{(1, 0), (-1, 0)}(t) = \frac{t}{t+2}$$

elde edilir.

Bu da $F_{x_1, x_2}(t) > F_{y_1, y_2}(t)$ sonucunu verir.

Dolayısıyla, (A, B) çifti zayıf P-özelliğine sahiptir.

Tanım 4.4 Bir (X, F, Δ) non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi A ve B olsun. $g: A \rightarrow A$ dönüşümü her $x_1, x_2 \in A$ için, $F_{gx_1, gx_2}(t) = F_{x_1, x_2}(t)$ eşitliğini sağlarsa izometri olarak adlandırılır [62].

Tanım 4.5 Bir (X, F, Δ) non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi A ve B olsun. $S: A \rightarrow B$ dönüşümü ve $g: A \rightarrow A$ izometri olsun. Eğer; her $x_1, x_2 \in A$ için, $F_{Sgx_1, Sgx_2}(t) = F_{Sx_1, Sx_2}(t)$ eşitliği sağlanıyor ise S dönüşümü g' ye göre izometrik uzaklığı korur denir [62].

Örnek 4.4 $X = [0, 1] \times \mathbb{R}$ ve her $x \in X$ için, $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere, her $t > 0$

için, $F_{x, y}(t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ şeklinde tanımlansın.

$A = \{(0, x) : \forall x \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere $g: A \rightarrow A$ dönüşümü $g(0, x) = (0, -x)$ şeklinde tanımlansın. $x = (0, x_1)$ ve $y = (0, y_1) \in A$ için,

$$F_{x, y}(t) = \frac{t}{t + d(x, y)} = F_{gx, gy}(t) \text{ ' dir. Böylece, } g \text{ bir izometridir.}$$

Teorem 4.3 (X, F, Δ) bir tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, A ve B bu uzayın boş olmayan alt kümeleri ve $A_0(t)$ boş olmayan,

kapalı bir alt küme olsun. $T : A \rightarrow B$, $T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$ olacak şekilde bir γ -büzölme dönüşümü olsun. (A, B) çifti, zayıf P-özelliğini sağlasın.

O zaman, $F_{x^*, Tx^*}(t) = F_{A,B}(t)$ olacak şekilde; T' nin A' da bir tek en iyi yaklaşım noktası x^* noktası vardır.

İspat İspata $A_0(t)$ ' de bir x_0 elemanı seçerek başlansın. $T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$ olduğundan, $F_{x_1, Tx_0}(t) = F_{A,B}(t)$ olacak şekilde bir $x_1 \in A_0(t)$ bulunabilir. Hatta, $T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$ olduğundan, $F_{x_2, Tx_1}(t) = F_{A,B}(t)$ olacak şekilde bir $x_2 \in A_0(t)$ bulunabilir. Bu şekilde devam edildiğinde, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{x_{n+1}, Tx_n}(t) = F_{A,B}(t) \quad (4.14)$$

eşitliğini sağlayan $(x_n) \in A_0(t)$ dizisi elde edilir.

(A, B) çifti zayıf P-özelliğine sahip olduğundan (4.14)' den, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{x_n, x_{n+1}}(t) \geq F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t) \quad (4.15)$$

elde edilir. Şimdi, (x_n) dizisinin $A_0(t)$ ' de yakınsak olduğu gösterilecektir.

Eğer, $F_{Tx_{n_0-1}, Tx_{n_0}}(t) = 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise, (4.15)' den $F_{x_{n_0}, x_{n_0+1}}(t) = 1$ buluruz; bu da $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olmasını gerektirir. Buradan,

$$Tx_{n_0} = Tx_{n_0+1} \Rightarrow F_{Tx_{n_0}, Tx_{n_0+1}}(t) = 1 \quad (4.16)$$

dır.

(4.15) ve (4.16)' dan,

$$F_{x_{n_0+2}, x_{n_0+1}}(t) \geq F_{Tx_{n_0+1}, Tx_{n_0}}(t) = 1 \Rightarrow x_{n_0+2} = x_{n_0+1}$$

elde edilir.

Böylece, her $n \geq n_0$ için, $x_n = x_{n_0}$ olup (x_n) dizisi $A_0(t)$ ' de yakınsaktır. Ayrıca,

$$F_{x_{n_0}, Tx_{n_0}}(t) = F_{x_{n_0+1}, Tx_{n_0}}(t) = F_{A,B}(t)$$

olduğu elde edilir.

Bu da; x_{n_0} ' in T dönüşümünün en iyi yaklaşım noktası olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. Bu nedenle, her $n \in \mathbb{N}$ için, $F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t) \neq 1$ olduğunu varsayalım. γ - büzölme dönüşümü tanımından ve (4.15)' den,

$$\begin{aligned} \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) &\geq \gamma(F_{x_{n-1}, x_n}(t)) + \delta \\ &\geq \gamma(F_{x_{n-2}, x_{n-1}}(t)) + 2\delta \\ &\vdots \\ &\geq \gamma(F_{x_0, x_1}(t)) + n\delta \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir.

(4.17)' de $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa; $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) = \infty$ bulunur.

Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n, x_{n+1}}(t) = 1 \quad (4.18)$$

dir.

Bu adımdan sonra (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki; (x_n) Cauchy dizisi olmasın.

Bu durumda,

$$F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0) < 1 - \varepsilon \text{ ve } F_{x_{m(j)-1}, x_{n(j)}}(t_0) \geq 1 - \varepsilon \quad (4.19)$$

$m_j > n_j + 1$ olacak şekilde iki pozitif tamsayı dizileri (m_j) , (n_j) ve $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t_0 > 0$ vardır. Her $j \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\geq F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0) \\ &\geq \Delta(F_{x_{m(j)}, x_{m(j)-1}}(t_0), F_{x_{m(j)-1}, x_{n(j)}}(t_0)) \\ &\geq \Delta(F_{x_{m(j)}, x_{m(j)-1}}(t_0), (1 - \varepsilon)) \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir.

(4.20) eşitsizliğinde $j \rightarrow \infty$ iken limit alınıp (4.18) kullanılırsa,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0) = 1 - \varepsilon \quad (4.21)$$

bulunur. t-normun özelliğinden,

$$\begin{aligned} F_{x_{m(j)+1}, x_{n(j)+1}}(t_0) &\geq \Delta(F_{x_{m(j)+1}, x_{m(j)}}(t_0), F_{x_{m(j)}, x_{n(j)+1}}(t_0)) \\ &\geq \Delta(F_{x_{m(j)+1}, x_{m(j)}}(t_0), \Delta(F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t_0), F_{x_{n(j)}, x_{n(j)+1}}(t_0))) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir önceki eşitsizlikte $j \rightarrow \infty$ iken limit alındığında,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{x_{m(j)+1}, x_{n(j)+1}}(t_0) = 1 - \varepsilon \quad (4.22)$$

elde edilir.

γ -büzülme dönüşümü tanımında $x = x_{m(j)}$ ve $y = x_{n(j)}$ alınırsa,

$$\gamma(F_{x_{m(j)+1}, x_{n(j)+1}}(t)) \geq \gamma(F_{x_{m(j)}, x_{n(j)}}(t)) + \delta \quad (4.23)$$

olur.

(4.23)' de $j \rightarrow \infty$ iken limit alınıp; (4.1), (4.21), (4.22) ve γ dönüşümünün sürekliliği kullanıldığında, $\gamma(1 - \varepsilon) \geq \gamma(1 - \varepsilon) + \delta$ elde edilir ki; bu da bir çelişki oluşturur. Böylece, (x_n) dizisi X' de bir Cauchy dizisidir.

$A_0(t)$, tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayı (X, F, Δ) ' nın kapalı alt kümesi olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ olacak şekilde $x^* \in A_0(t)$ vardır.

T' nin sürekliliğinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_{n+1}, Tx_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{x^*, Tx^*}(t) \text{ yazılır.}$$

Bu da, x^* ' in T dönüşümünün bir en iyi yaklaşım noktası olduğunu gösterir.

Son olarak, T' nin en iyi yaklaşım noktasının tekliği gösterilecektir.

Kabul edelim ki; T' nin ω_1 ve ω_2 iki farklı en iyi yaklaşım noktası olsun.

$$\omega_1, \omega_2 \in A \text{ için, } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ ve } F_{\omega_1, T\omega_1}(t) = F_{\omega_2, T\omega_2}(t) = F_{A,B}(t)$$

olsun. (A, B) çifti zayıf P-özelliğine sahip olduğundan $F_{\omega_1, \omega_2}(t) \geq F_{T\omega_1, T\omega_2}(t)$ ve $\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow F_{\omega_1, \omega_2}(t) \neq 1$ dir. Böylece,

$$\gamma(F_{\omega_1, \omega_2}(t)) \geq \gamma(F_{T\omega_1, T\omega_2}(t)) \geq \gamma(F_{\omega_1, \omega_2}(t)) + \delta > \gamma(F_{\omega_1, \omega_2}(t))$$

bulunup, çelişki elde edilir.

O zaman, T dönüşümü tek bir en iyi yaklaşım noktasına sahiptir.

Teorem 4.3' ü gerçekleyen bir örnek verilecektir:

Örnek 4.5 $X = [0,1] \times \mathbb{R}$ ve (X, F, Δ) , Örnek 4.4' de tanımlanan metrik ve dağılım fonksiyonu ile bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olsun.

$A = \{(0, x) : \forall x \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{(1, y) : \forall y \in \mathbb{R}\}$ olacak şekilde A ve B kümeleri verilsin.

$A_0(t) = A$, $B_0(t) = B$ olup, $d(A, B) = 1$ ve $F_{A,B}(t) = \frac{t}{t+1}$ bulunur.

$\gamma : [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, her $x \in X$ için, $\gamma(x) = \frac{1}{1-x}$ şeklinde tanımlansın. $T : A \rightarrow B$

dönüşümü $T(0, x) = \left(1, \frac{x}{6}\right)$ olsun. Buradan, $T(A_0(t)) = B_0(t)$ ' dir.

$$F_{a_1, Tx_1}(t) = F_{A,B}(t)$$

$$F_{a_2, Tx_2}(t) = F_{A,B}(t)$$

olsun. $(a_1, x_1) = \left(\left(0, -\frac{b_1}{6}\right), 0, -b_1\right)$ veya $(a_2, x_2) = \left(\left(0, -\frac{b_2}{6}\right), 0, -b_2\right)$ ' dir. (4.1)' den,

$$\begin{aligned} \gamma(F_{a_1, a_2}(t)) &= \gamma\left(F_{\left(0, -\frac{b_1}{6}\right)\left(0, -\frac{b_2}{6}\right)}(t)\right) = \gamma\left(\frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{6}}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{6}}} > \frac{1}{1 - \frac{t}{t + |b_1 - b_2|}} = \gamma\left(\frac{t}{t + |b_1 - b_2|}\right) \\ &= \gamma(F_{x_1, x_2}(t)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yani; $\gamma(F_{a_1,a_2}(t)) > \gamma(F_{x_1,x_2}(t))$ dır. Dolayısıyla, bir $\delta \in (0,1)$ vardır öyle ki; $\gamma(F_{a_1,a_2}(t)) \geq \gamma(F_{x_1,x_2}(t)) + \delta$ dır. T , bir γ -büzülme dönüşümü olup, $(0,0)$ da T dönüşümünün tek bir en iyi yaklaşım noktasıdır.

Tanım 4.6 A ve B , (X, F, Δ) non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun. $T : A \rightarrow B$ dönüşümü olmak üzere, her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in A$ ve $t > 0$ için,

$$\begin{cases} F_{u_1, Tx_1}(t) = F_{A,B}(t) \\ F_{u_2, Tx_2}(t) = F_{A,B}(t) \\ F_{u_1, u_2}(t), F_{x_1, x_2}(t) < 1 \end{cases} \Rightarrow \gamma(F_{u_1, u_2}(t)) \geq \gamma(F_{x_1, x_2}(t)) + \delta \quad (4.24)$$

ifadesini sağlayan bir $\delta \in (0,1)$ var ise, T' ye birinci tipten γ -yakınsal büzülme dönüşümü denir.

Tanım 4.7 A ve B , (X, F, Δ) non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun. $T : A \rightarrow B$ dönüşümü olmak üzere, her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in A$ ve $t > 0$ için,

$$\begin{cases} F_{u_1, Tx_1}(t) = F_{A,B}(t) \\ F_{u_2, Tx_2}(t) = F_{A,B}(t) \\ F_{Tu_1, Tu_2}(t), F_{Tx_1, Tx_2}(t) < 1 \end{cases} \Rightarrow \gamma(F_{Tu_1, Tu_2}(t)) \geq \gamma(F_{Tx_1, Tx_2}(t)) + \delta \quad (4.25)$$

ifadesini sağlayan bir $\delta \in (0,1)$ var ise, T' ye ikinci tipten γ -yakınsal büzülme dönüşümü denir.

Teorem 4.4 (X, F, Δ) bir tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, A ve B bu uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun öyle ki $A_0(t) \neq \emptyset$ dır. $T : A \rightarrow B$ ve $g : A \rightarrow A$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

- (1) $T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$,
- (2) $T : A \rightarrow B$ sürekli birinci tipten bir γ -yakınsal bir büzülme dönüşümü,
- (3) g bir izometri,

$$(4) A_0(t) \subseteq g(A_0(t)).$$

O zaman, A' da tek bir x elemanı vardır öyle ki $F_{gx, Tx}(t) = F_{A, B}(t)$ ' dir.

İspat A_0 ' da bir x_0 elemanı seçilerek ispata başlansın. $T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$ ve $A_0(t) \subseteq g(A_0(t))$ olduğundan $F_{gx_1, Tx_0}(t) = F_{A, B}(t)$ olacak şekilde bir $x_1 \in A_0(t)$ elemanı bulunabilir. $Tx_1 \in T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$ ve $A_0(t) \subseteq g(A_0(t))$ olduğundan $F_{gx_2, Tx_1}(t) = F_{A, B}(t)$ olacak şekilde bir $x_2 \in A_0(t)$ bulunabilir.

Bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{gx_{n+1}, Tx_n}(t) = F_{A, B}(t) \quad (4.26)$$

olacak şekilde, $A_0(t)$ ' de bir (x_n) dizisi elde edilir.

Bu (x_n) dizisinin $A_0(t)$ ' de yakınsak olduğu gösterilecektir. Eğer, $F_{gx_n, gx_{n+1}}(t) = 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise dizinin yakınsaklığı açıktır. Bu nedenle, her $n \in \mathbb{N}$ için, $F_{gx_n, gx_{n+1}}(t) \neq 1$ olsun. T , birinci tip bir γ -yakınsal büzülme dönüşümü olduğundan,

$$\begin{aligned} \gamma(F_{gx_n, gx_{n+1}}(t)) &\geq \gamma(F_{x_{n-1}, x_n}(t)) + \delta \\ \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) &\geq \gamma(F_{x_{n-1}, x_n}(t)) + \delta \\ &\geq \vdots \\ &\geq \gamma(F_{x_0, x_1}(t)) + n\delta \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir.

(4.27)' de $n \rightarrow \infty$ iken limit alınır;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(F_{x_n, x_{n+1}}(t)) = \infty \text{ bulunur.}$$

İspatın geri kalanında, Teorem 4.3.' ün ispatındaki yöntemler ile devam edilirse (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. (X, F, Δ) tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayı kapalı alt kümeye sahip olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. T, g ve F sürekli olduğundan (4.26)' da $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa; $F_{gx, Tx}(t) = F_{A, B}(t)$ bulunur.

Şimdi bu x elemanının tekliği gösterilecektir. Aksi kabul edilsin:

$F_{gx^*, Tx^*}(t) = F_{A, B}(t)$ eşitliğini sağlayan $x \neq x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in A$ vardır. g bir izometri ve T birinci tipten γ -yakınsal bir büzülme dönüşümü olduğundan $\gamma(F_{x, x^*}(t)) = \gamma(F_{gx, gx^*}(t)) \geq \gamma(F_{x, x^*}(t)) + \delta > \gamma(F_{x, x^*}(t))$ bulunur.

Bu da bir çelişki oluşturacağından; $x = x^*$ ' dir.

Örnek 4.5 $X = [-2, 2] \times \mathbb{R}$ ve $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere her $t > 0$ için, $F_{x, y}(t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ olsun. (X, F, Δ) bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayıdır.

$A = \{(-2, x) : \forall x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(2, y) : \forall y \in \mathbb{R}\}$ olsun. $A_0(t) = A$, $B_0(t) = B$, $d(A, B) = 4$ ve $F_{A, B}(t) = \frac{t}{t + 4}$ tür. $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $x \in X$ için, $\gamma(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ olsun.

Ayrıca, $T : A \rightarrow B$ ve $g : A \rightarrow A$ dönüşümleri sırasıyla, $T(-2, x) = \left(2, \frac{x}{2}\right)$ ve $g(-2, x) = (-2, -x)$ şeklinde tanımlansınlar. $T(A_0(t)) = B_0(t)$, $A_0(t) = g(A_0(t))$ ve g bir izometridir.

$$F_{a_1, Tx_1}(t) = F_{A, B}(t)$$

$$F_{a_2, Tx_2}(t) = F_{A, B}(t)$$

olduğu düşünülürse, $(a_1, x_1) = \left(\left(-2, \frac{b_1}{2}\right), (-2, b_1)\right)$ ve $(a_2, x_2) = \left(\left(-2, \frac{b_2}{2}\right), (-2, b_2)\right)$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\gamma(F_{a_1, a_2}(t)) &= \gamma\left(F_{\left(-2, \frac{b_1}{2}\right)\left(-2, \frac{b_2}{2}\right)}(t)\right) = \gamma\left(\frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{1 - \left(\frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{2}}\right)^2} > \frac{1}{1 - \left(\frac{t}{t + |b_1 - b_2|}\right)^2} \\
&= \gamma\left(\frac{t}{t + |b_1 - b_2|}\right) = \gamma(F_{x_1, x_2}(t))
\end{aligned} \tag{4.28}$$

(4.28)' den $\gamma(F_{a_1, a_2}(t)) > \gamma(F_{x_1, x_2}(t))$ bulunur.

Böylece, $\gamma(F_{a_1, a_2}(t)) \geq \gamma(F_{x_1, x_2}(t)) + \delta$ olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ vardır.

Buradan, T birinci tipten γ -yakınsal büzülme dönüşümü olup $(-2,0)$, T dönüşümünün en iyi yaklaşım noktasıdır.

Eğer, Teorem 4.4' teki g dönüşümü özdeşlik dönüşümü alındığında, Sonuç 4.1 elde edilir:

Sonuç 4.1 (X, F, Δ) bir tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, A ve B bu uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun öyle ki $A_0(t) \neq \emptyset'$ dir. $T : A \rightarrow B$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$(1) T(A_0(t)) \subseteq B_0(t),$$

(2) $T : A \rightarrow B$ sürekli birinci tipten bir γ -yakınsal bir büzülme dönüşümüdür.

O zaman, T' nin A' da tek bir en iyi yaklaşım noktası vardır.

Teorem 4.5 (X, F, Δ) bir tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, A ve B bu uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun öyle ki $A_0(t) \neq \emptyset'$ dir. A, B' ye göre yaklaşık kompakt olup $T : A \rightarrow B$ ve $g : A \rightarrow A$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$(1) T(A_0(t)) \subseteq B_0(t),$$

(2) $T : A \rightarrow B$ sürekli ikinci tipten bir γ -yakınsal bir büzülme dönüşümü,

(3) g bir izometri,

(4) $A_0(t) \subseteq g(A_0(t))$,

(5) T dönüşümü, g dönüşümüne göre izometrik uzaklığı korur.

O zaman, A' da tek bir x elemanı vardır öyle ki $F_{gX, Tx}(t) = F_{A, B}(t)$ ' dir.

Hatta, $F_{gX^*, Tx^*}(t) = F_{A, B}(t)$ eşitliğini sağlayan A' da başka bir x^* elemanı var ise, $Tx = Tx^*$ ' dir.

İspat $T(A_0)$ ' da bir Tx_0 elemanı seçilerek ispata başlansın. $T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$ ve $A_0(t) \subseteq g(A_0(t))$ olduğundan $F_{gX_1, Tx_0}(t) = F_{A, B}(t)$ olacak şekilde bir $x_1 \in A_0(t)$ elemanı bulunabilir. $Tx_1 \in T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$ ve $A_0(t) \subseteq g(A_0(t))$ olduğundan $F_{gX_2, Tx_1}(t) = F_{A, B}(t)$ olacak şekilde bir $x_2 \in A_0(t)$ bulunabilir. Bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{gX_{n+1}, Tx_n}(t) = F_{A, B}(t) \quad (4.29)$$

olacak şekilde B' de bir (Tx_n) dizisi elde edilir. Bu (Tx_n) dizisinin B' de yakınsak olduğu gösterilecektir. Eğer, $F_{Tx_n, Tx_{n_0+1}}(t) = 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise dizinin yakınsaklığı açıktır. Bu nedenle, her $n \in \mathbb{N}$ için, $F_{Tx_n, Tx_{n+1}}(t) \neq 1$ olsun. T , ikinci tip bir γ -yakınsal büzülme dönüşümü olduğundan ve T , g' ye göre izometrik uzaklığı koruduğundan,

$$\begin{aligned} \gamma(F_{Tx_n, Tx_{n+1}}(t)) &\geq \gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) + \delta \\ \gamma(F_{Tx_n, Tx_{n+1}}(t)) &\geq \gamma(F_{Tx_{n-1}, Tx_n}(t)) + \delta \\ &\geq \vdots \\ &\geq \gamma(F_{Tx_0, Tx_1}(t)) + n\delta \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir.

(4.30)' da $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(F_{Tx_n, Tx_{n+1}}(t)) = \infty$ bulunur. İspatın geri kalanında Teorem 4.3.' ün ispatındaki şekilde devam edilirse (Tx_n) dizisinin B' de bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir.

(X, F, Δ) tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzayı kapalı alt kümeye sahip olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. Üçgen eşitsizliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} F_{y,A}(t) &\geq F_{y,gx_n}(t) \geq \Delta(F_{y,Tx_{n-1}}(t), F_{Tx_{n-1},gx_n}(t)) \\ &= \Delta(F_{y,Tx_{n-1}}(t), F_{A,B}(t)) \\ &\geq \Delta(F_{y,Tx_{n-1}}(t), F_{y,A}(t)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde edilir.

(4.31)' de $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{y,gx_n}(t) = F_{y,A}(t)$$

elde edilir.

A, B' ye göre yaklaşık kompakt olduğundan (gx_n) dizisinin A' da bir s elemanına yakınsak bir (gx_{n_j}) alt dizisi vardır.

Böylece, $F_{s,y}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_{gx_{n_j}, Tgx_{n_j-1}}(t) = F_{y,A}(t)$ olup; bu $s \in A_0(t)$ olmasını gerektirir.

$A_0(t) \subseteq g(A_0(t))$ olduğundan, $s = gx$ olacak şekilde bir $x \in A_0(t)$ vardır. $\lim_{j \rightarrow \infty} gx_{n_j} = gx$ ve g izometri olduğundan, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$ elde edilir. T dönüşümü sürekli ve (Tx_n)

dizisi y elemanına yakınsak olduğundan, $\lim_{j \rightarrow \infty} Tx_{n_j} = Tx = y'$ dir. Buradan,

$F_{gx,Tx}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_{gx_{n_j}, Tgx_{n_j}}(t) = F_{A,B}(t)$ elde edilir.

Şimdi bu x elemanının tekliği gösterilecektir. Aksi kabul edilsin:

$F_{gx^*,Tx^*}(t) = F_{A,B}(t)$ eşitliğini sağlayan $Tx \neq Tx^*$ olacak şekilde bir $x^* \in A_0(t)$ vardır.

$F_{x,Tx^*}(t) \neq 1$ olup; T ikinci tipten γ -yakınsal bir büzülme dönüşümü olduğundan ve

T dönüşümü g' ye izometrik uzaklığı koruduğundan

$\gamma(F_{Tx,Tx^*}(t)) = \gamma(F_{Tgx,Tgx^*}(t)) \geq \gamma(F_{x,x^*}(t)) + \delta > \gamma(F_{x,x^*}(t))$ bulunur.

Bu da bir çelişki oluşturacağından; $Tx \neq Tx^*$ dır.

Teorem 4.5' i destekleyen örnek verilecektir.

Örnek 4.6 $X = \mathbb{R} \times [0,1]$ ve $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere her $t > 0$

için, $F_{x,y}(t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ olsun. (X, F, Δ) bir non-Archimedean Menger olasılıksal

metrik uzayıdır.

$A = \{(x, 0) : \forall x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(y, 1) : \forall y \in \mathbb{R}\}$ olsun. $A_0(t) = A$, $B_0(t) = B$, $d(A, B) = 1$ ve

$F_{A,B}(t) = \frac{t}{t+1}$ tür. $\gamma : [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $x \in X$ için, $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ olsun.

Ayrıca, $T : A \rightarrow B$ ve $g : A \rightarrow A$ dönüşümleri sırasıyla $T(x, 0) = \left(\frac{x}{3}, 1\right)$ ve

$g(x, 0) = (-x, 0)$ şeklinde tanımlansınlar. $T(A_0(t)) = B_0(t)$, $A_0(t) = g(A_0(t))$ ve g bir

izometridir. Ayrıca, $F_{Tg x_1, Tg x_2}(t) = F_{Tx_1, Tx_2}(t)$ olup, T dönüşümü g ' ye göre uzaklığı korur.

$$F_{a_1, Tx_1}(t) = F_{A,B}(t)$$

$$F_{a_2, Tx_2}(t) = F_{A,B}(t)$$

olduğu düşünülürse,

$$(a_1, x_1) = \left(\left(\frac{b_1}{3}, 0\right), b_1, 0\right) \text{ ve } (a_2, x_2) = \left(\left(\frac{b_2}{3}, 0\right), b_2, 0\right)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \gamma(F_{Ta_1, Ta_2}(t)) &= \gamma\left(F_{\left(\frac{b_1}{9}, 1\right)\left(\frac{b_2}{9}, 1\right)}(t)\right) = \gamma\left(\frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{9}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{9}}}} > \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{3}}}} \\ &= \gamma\left(\frac{t}{t + \frac{|b_1 - b_2|}{3}}\right) = \gamma(F_{Tx_1, Tx_2}(t)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.32)' den $\gamma(F_{Ta_1, Ta_2}(t)) > \gamma(F_{Tx_1, Tx_2}(t))$ bulunur.

Böylece, $\gamma(F_{Ta_1, Ta_2}(t)) \geq \gamma(F_{Tx_1, Tx_2}(t)) + \delta$ olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ vardır.

Buradan, T ikinci tipten γ -yakınsal büzülme dönüşümü olup; $(0,0)$ noktası T dönüşümünün en iyi yaklaşım noktasıdır.

Eğer Teorem 4.5.' teki g dönüşümü özdeşlik dönüşümü alındığında Sonuç 4.2. elde edilir:

Sonuç 4.2 (X, F, Δ) bir tam non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzay olmak üzere, A ve B bu uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun öyle ki $A_0(t) \neq \emptyset$ dir. $T : A \rightarrow B$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın:

(1) $T(A_0(t)) \subseteq B_0(t)$,

(2) $T : A \rightarrow B$ sürekli ikinci tipten bir γ -yakınsal bir büzülme dönüşümüdür.

O zaman, T ' nin A ' da tek bir en iyi yaklaşım noktası vardır.

S-OLASILIKSAL UZAYLARDA BAZI DÖNÜŞÜMLER İÇİN KUVVETLİ YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Su ve Zhang, 2014 yılında yeni bir metrik uzay tanımlayıp, ismine S -olasılıksal metrik uzaylar adını vermişlerdir [67]. Onlardan esinlenen Xu, Guan ve Su ise 2015 yılında S -olasılıksal normlu uzaylar tanımını verdiler. Bu uzayda bazı dönüşümler için yakınsaklık teoremlerini çalışmışlardır [73]. Bu dönüşümlerden biri olan pseudocontractive dönüşümler, hemicontractive dönüşümlerin bir alt sınıfıdır.

Bu bölümde, S -olasılıksal normlu uzaylarda hemicontractive ve demicontractive dönüşümlere ait çalışmalar yer alacaktır.

Teorem 5.1 H reel Hilbert uzayı olmak üzere K , H' in kompakt, konveks alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ sürekli hemicontractive dönüşüm olsun. Bazı $\lambda \in (0,1)$ için, $(v_n) \subset [\lambda, 1-\lambda]$ ifadesini sağlayan (v_n) , $[0,1]'$ de bir reel sayı dizisi olsun. Keyfi bir $x_0 \in K$ ve K' da bir (x_n) dizisi için, $\sum_{n \geq 1} \|Tx_n - x_{n+1}\| < \infty$ ifadesini sağlayan (x_{n+1}) dizisi $x_{n+1} = (1-v_n)x_n + v_nTx_n$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda (x_{n+1}) dizisi T' nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar [71].

Tanım 5.1 (X, F) olasılıksal normlu uzay olsun. Her $x \in X$, $w \in \text{Fix}(T)$, $s \in [0, \infty)$ için,

$$F_{Tx-Tw+x-w}(s) \geq 4F_{x-w}(s) + F_{Tx-x}(s) \quad (5.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne olasılıksal hemicontractive dönüşüm denir.

Teorem 5.2 (X, F) koşulunu sağlayan bir olasılıksal Banach uzayı, X' in kapalı, konveks alt kümesi K ve $T: K \rightarrow K$ sürekli bir hemicontractive dönüşüm olsun. Bu durumda verilen herhangi bir $x_0 \in K$ için,

$$x_{n+1} = (1-v_n)x_n + v_nTx_n$$

iterasyon dizisi T' nin bir sabit noktasına olasılıksal olarak yakınsar. Burada v_n ,
Teorem 5.1' deki şartları sağlayan bir reel sayı dizisidir.

İspat Burada dikkat edilmesi gereken nokta

$$F_{Tx-Tw+x-w}(s), 4F_{x-w}(s) + F_{Tx-x}(s)$$

azalmayan ve

$$F_{Tx-Tw+x-w}(0) = 0, 4F_{x-w}(0) + F_{Tx-x}(0) = 0$$

olmasıdır..

Olasılıksal hemicontractive olmasından dolayı, her $x \in X$, $w \in \text{Fix}(T)$ için,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s dF_{Tx-Tw+x-w}(s) &\leq 4 \int_0^\infty s dF_{x-w}(s) + \int_0^\infty s dF_{Tx-Tw-(x-w)}(s) \\ \int_0^\infty s^2 d(F_{Tx-Tw+x-w}(s) - F_{Tx-Tw-x+w}(s)) &\leq 4 \int_0^\infty s^2 dF_{x-w}(s) \\ \frac{1}{4} \int_0^\infty s^2 d(F_{Tx-Tw+x-w}(s) - F_{Tx-Tw-x+w}(s)) &\leq 4 \int_0^\infty s^2 dF_{x-w}(s) \\ \langle Tx - Tw, x - w \rangle &\leq \|x - w\|_F^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu $T : K \rightarrow K$ dönüşümünün $(X, \|\cdot\|_F)$ Hilbert uzayında sürekli hemicontractive bir dönüşüm olduğunu gösterir. Teorem 5.1' i kullanarak $x_{n+1} = (1 - v_n)x_n + v_nTx_n$ şeklinde tanımlanan iterasyon dizisi $\|\cdot\|_F$ normunda w' ya yakınsar. $\|\cdot\|_F$ normundaki yakınsaklık olasılıksal yakınsaklığı gerektirir. Böylece verilen iterasyon dizisi w' a olasılıksal olarak yakınsar.

Teorem 5.3 H reel Hilbert uzayı olmak üzere K , H' in kompakt, konveks alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ sürekli demicontractive dönüşüm ve T' nin bir sabit noktası w olmak üzere T , w' da Fréchet diferensiyellenebilir ve $I - T'(w)$ terslenebilir olsun. O zaman $0 < a \leq u_n \leq b < 1 - k$ koşulunu sağlayan (u_n) kontrol dizisi ve

$x_{n+1} = (1-u_n)x_n + u_nTx_n$ iterasyonu ile üretilen (x_n) dizisi w' ya kuvvetli yakınsar [71].

Tanım 5.2 (X, F) olasılıksal normlu uzay olsun. Her $x \in X$, $w \in \text{Fix}(T)$, $s \in [0, \infty)$ için,

$$F_{x-2Tx+w}(s) \geq (2+2k)F_{x-Tx}(s) + F_{x-w}(s) \quad (5.2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne olasılıksal demicontractive dönüşüm denir.

Teorem 5.4 (X, F) koşulunu sağlayan bir olasılıksal Banach uzayı, X' in kapalı, konveks alt kümesi K ve $T: K \rightarrow K$ sürekli bir demicontractive dönüşüm ve T' nin bir sabit noktası $w \in K$ olmak üzere; T, w' da Fréchet diferensiyellenebilir ve $I - T'(w)$ terslenebilir olsun. O zaman $0 < a \leq u_n \leq b < 1 - k$ koşulunu sağlayan (u_n) kontrol dizisi ve $x_{n+1} = (1-u_n)x_n + u_nTx_n$ iterasyonu ile üretilen (x_n) dizisi w' ya olasılıksal yakınsar.

İspat Burada dikkat edilmesi gereken nokta

$$F_{x-2Tx+w}(s), (2+2k)F_{x-Tx}(s) + F_{x-w}(s)$$

azalmayan

ve

$$F_{x-2Tx+w}(0) = 0, (2+2k)F_{x-Tx}(0) + F_{x-w}(0) = 0$$

olmasıdır.

Olasılıksal demicontractive olmasından dolayı, her $x \in X$, $w \in \text{Fix}(T)$ için,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty s dF_{x-2Tx+w}(s) &\leq (2+2k) \int_0^\infty s dF_{x-Tx}(s) + \int_0^\infty s dF_{x-w}(s) \\
\int_0^\infty s^2 dF_{x-2Tx+w}(s) &\leq (2+2k) \int_0^\infty s^2 dF_{x-Tx}(s) + \int_0^\infty s^2 dF_{x-w}(s) \\
\int_0^\infty s^2 d(F_{x-2Tx+w}(s) - F_{x-w}(s)) &\leq \frac{4}{2}(1+k) \int_0^\infty s^2 dF_{x-Tx}(s) \\
\frac{1}{4} \int_0^\infty s^2 d(F_{x-2Tx+w}(s) - F_{x-w}(s)) &\leq \frac{(1+k)}{2} \int_0^\infty s^2 dF_{x-Tx}(s) \\
\langle x-Tx, w-Tx \rangle &\leq \frac{(1+k)}{2} \|x-Tx\|_F^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu $T : K \rightarrow K$ dönüşümünün $(X, \|\cdot\|_F)$ Hilbert uzayında sürekli demicontractive bir dönüşüm olduğunu gösterir. Teorem 5.3' ü kullanarak $x_{n+1} = (1-\nu_n)x_n + \nu_n Tx_n$ şeklinde tanımlanan iterasyon dizisi $\|\cdot\|_F$ normunda w' ya yakınsar. $\|\cdot\|_F$ normundaki yakınsaklık olasılıksal yakınsaklığı gerektirir. Böylece verilen iterasyon dizisi w' ya olasılıksal olarak yakınsar.

Bu çalışmada, üçüncü bölümde kısmi sıralı tam Menger olasılıksal metrik uzaylarda büzülme tipte dönüşümler için, ikili ve üçlü sabit nokta ve çakışma noktası varlığını göstermek adına yapılan çalışmaların bir genellemesi olan n -li sabit nokta ve çakışma noktası üzerine çalışılmıştır.

Farklı özelliklere sahip tam metrik uzaylar üzerinde benzer çalışmalar yapılabilir.

Dördüncü bölümde, bir non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzaylarda γ -büzülme dönüşümü olarak adlandırılan yeni bir büzülme dönüşümü tanımı verilmiştir. Ardından γ -zayıf büzülme dönüşümü tanımı verilmiş olup bu iki büzülme dönüşümlerinin tek bir sabit noktaya sahip oldukları gösterilmiştir. Birinci ve ikinci tipten γ -yakınsal büzülme tanımları verilerek, bu dönüşümler için en iyi yaklaşım noktası teoremleri verilmiştir. Sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Yukarıda belirtilen çalışmalardan ilham alınarak, non-Archimedean Menger olasılıksal metrik uzaylarda tanımlamış olduğumuz γ -büzülme dönüşümlerinin çok değerli versiyonları tanımlanıp, bu çok değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri çalışılabilir. Ayrıca, genelleştirilmiş γ -yakınsal büzülme dönüşümleri tanımlanabilir.

Beşinci bölümde ise S -olasılıksal normlu uzaylarda hemicontractive ve demicontractive dönüşümler üzerine çalışmalar yapılmıştır. Dönüşüm tipi değiştirilerek, yeni çalışmalar yapılabilir.

- [1] M. Fréchet, "Sur quelques points du calcul fonctionnel," *Red Circ. Mat. Polermo*, vol. 22, pp. 1-74, 1906.
- [2] K. Menger, "Statistical metrics," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 29, pp. 535-537, 1942.
- [3] A. Wald, "On a statistical generalization of metric spaces," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 29, pp. 196-197.
- [4] K. Menger, "Probabilistic theories of relations," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 37, pp. 178-180.
- [5] B. Schweizer ve A. Sklar, "Statistical metric spaces," *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 10, pp. 313-334, 1960.
- [6] B. Schweizer ve A. Sklar, "Probabilistic metric spaces," *North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics*, New York, 1983.
- [7] B. Schweizer ve A. Sklar ve E. Thorp, "The metrization of statistical metric spaces," *Pacific Journal of Mathematics*, pp. 673-677, 1960.
- [8] A. N. Serstnev, "Random normed spaces. Questions of completeness," *Kazan Gos. Univ. Ucen. Zap.*, pp. 3-20, 1962.
- [9] A. N. Serstnev, "Best approximation problems in random spaces," *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 3, pp. 539-542, 1963.
- [10] A. N. Serstnev, "On a probabilistic generalization of a metric spaces," *Kazan Gos. Univ. Ucen. Zap.*, pp. 3-11, 1964.
- [11] C. Alsina, B. Schweizer ve A. Sklar, "On the definition of probabilistic normed space," *Aequationes Mathematicae*, pp. 91-98, 1993.
- [12] V. M. Sehgal, "Some fixed point theorems in functional analysis and probability (Ph.D. thesis)," *Wayne State University*, 1966.
- [13] V. M. Sehgal ve A. T. Bharucha-Reid, "Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces," *Mathematical System Theory*, vol. 6, pp. 97-102, 1972.
- [14] O. Hadzic, "Fixed point theory in probabilistic metric spaces," *Serbian Academy of Sciences and Arts, Branch in Novi Sad University*, Novi Sad, 1997.
- [15] O. Hadzic, "Some theorems on the fixed points in probabilistic metric and random normed spaces," *Boll. Un. Mat. Ital.*, p.p. 381-391, 1982.
- [16] D. Mihet, "Fixed point theorems in probabilistic metric spaces," *Chaos, Solitons&Fractals*, vol. 41, no. 2, pp. 1014-1019, 2009.
- [17] D. Mihet, "Altering distances in probabilistic Menger spaces," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods&Applications*, vol. 71, no. 7-8, pp. 2734-2738, 2009.

- [18] J. Ali, M. Imdad ve D. Bahuguna, "Common fixed point theorems in Menger spaces with common property (E.A)," *Computers&Mathematics with Applications*, vol. 60, no. 12, pp. 3152-3159, 2010.
- [19] M. Imdad, J. Ali ve M. Tanveer, "Coincidence and common fixed point theorems for nonlinear contractions in Menger pm-spaces," *Chaos,Solitons and Fractals*, vol. 42, pp. 3121-3129, 2009.
- [20] S. S. Chang, Y. J. Cho ve S. M. Kang, "Probabilistic metric spaces and nonlinear operator theory," Sichuen University Press, Chengdu, China, 1994.
- [21] J.-X. Fang, "Common fixed point theorems of compatible and weakly compatible maps in Menger spaces," *Nonlinear Analysis-Theory&Applications*, vol. 71, no. 5-6, pp. 1833-1843, 2009.
- [22] S. S. Chang, "On some fixed point theorems in probabilistic metric space and its application," *Z. Wahr, Verv, Gebiete*, vol. 63, pp. 463- 474, 1983.
- [23] S. S. Chang, "On some fixed point theorems for generalized Meir-Keeler type mappings," *J. Sichoun Univ., Natural Sci. Edition*, vol. 2, pp. 17-23, 1983.
- [24] L. Ciric, "Solving the Banach fixed point principle for nonlinear contractions in probabilistic metric spaces," *Nonlinear Analysis*, vol. 72, pp. 2009-2018, 2010.
- [25] J. Jachymski, "On probabilistic ϕ -contractions on Menger spaces," *Nonlinear Analysis*, vol. 73, pp. 1131-1137, 2010.
- [26] Y. Liu ve Z. Li, "Coincidence point theorems in probabilistic and fuzzy metric spaces," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, no. 1, pp. 58-70, 2007.
- [27] S. Cauhan, B. D. Pant ve M. Imdad, "Coincidence and common fixed point theorems in non-Archimedean Menger pm-spaces," *Cubo*, vol. 15, pp. 1-44, 2013.
- [28] S. S. Chan, Y. J. Cho ve S. M. Kang, "Nonlinear operator theory in probabilistic metric spaces," Nova Science Publishers, New York, 2001.
- [29] J. Fang ve Y. Gao, "Common fixed point theorems under strict contractive conditions in Menger spaces," *Nonlinear Analysis*, no. 70, pp. 184-193, 2009.
- [30] A. Razani ve K. Fouladgar, "Extension of contractive maps in the Menger probabilistic metric space," *Chaso Solitons Fractalss*, vol. 34, pp. 1724-1731, 2016.
- [31] V. Radu, "Some fixed point theorems in probabilistic metric spaces," *Lect Notes Math*, pp. 125-133, 1987.
- [32] D. O'Regan ve R. Saadati, "Nonlinear contraction theorems in probabilistic spaces," *Applied Mathematics and Computation*, pp. 86-93, 2008.
- [33] G. Modi, "Common fixed point theorem in probabilistic metric spaces," *International Mathematical*, vol. 6, no. 63, pp. 3121-3129, 2011.
- [34] T. L. Hicks, "Fixed point theory in probabilistic metric spaces," *Review of Research, Fac. Sci. Math. Series, Univ of Novi Sad*, vol. 13, pp. 63-72, 1983.

- [35] J. F. Tian, X. M. Hu ve G. Zhang, "Fixed point results for probabilistic ϕ - contraction in generalized probabilistic metric spaces," Journal of Nonlinear Science and Applications, vol. 8, pp. 1150-1165, 2015.
- [36] V. Gregori, J. J. Minana ve S. Morillas, "On probabilistic ϕ -contractions in Menger spaces," Fuzzy Sets and Systems, pp. 114-118, 2017.
- [37] P. Das, K. Dutta ve V. Karakaya, "On cluster points, continuity and boundedness associated with the generalized statistical convergence in probabilistic normed spaces," Abstract and Applied Analysis, pp. 1-10, 2014.
- [38] P. Das, S. Som, S. Ghosal ve V. Karakaya, "A notion of $\alpha\beta$ -statistical convergence of order γ in probability," Kragujevac Journal of Mathematics, vol. 42, no. 1, pp. 51-67, 2018.
- [39] D. Guo ve V. Lakshmikantham, "Couple fixed points of nonlinear operators with applications," Nonlinear Analysis: Theory, Methods&Applications, vol. 11, no. 5, pp. 623-632, 1987.
- [40] T. G. Bhaskar ve V. Lakshmikantham, "Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications," Nonlinear Analysis: Theory, Methods&Applications, vol. 65, no. 7, pp. 1379-1393, 2006.
- [41] V. Lakshmikantham ve L. Ćirić, "Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces," Nonlinear Analysis, no. 70, pp. 4341-4349, 2009.
- [42] V. Berinde ve M. Borcut, "Triple fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces," Nonlinear Analysis: Theory, Methods&Applications, vol. 74, no. 15, pp. 4889-4897, 2011.
- [43] M. Ertürk ve V. Karakaya, "n-tuplet fixed point theorems for contractive mappings in partially ordered metric spaces," Journal of Inequalities and Applications, vol. 2013, article 196, 2013.
- [44] A. Alam, M. Imdad ve J. Ali, "Unified multi-tupled fixed point theorems involving mixed monotone property in ordered metric spaces," Cogent Mathematics, vol. 3, Article ID 1248270, 2016.
- [45] H. Aydi, B. Samet ve C. Vetro, "Coupled fixed point results in cone metric spaces for w-compatible mappings," Fixed Point Theory and Applications, vol. 2011, article 27, 2011.
- [46] M. Abbas, H. Aydi ve E. Karapınar, "Tripled fixed points of multivalued nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces," Abstract and Applied Analysis, vol. 2011, article ID 812690, 2011.
- [47] H. Aydi, E. Karapınar ve W. Shatanawi, "Tripled coincidence point results for generalized contractions in ordered generalized metric spaces," Fixed Point Theory and Applications, vol. 2012, article 101, 2012.
- [48] X.-Q. Hu ve X.-Y.B. Ma, "Coupled coincidence point theorems under contractive conditions in partially ordered probabilistic metric spaces," Nonlinear Analysis-Theory&Applications, vol. 74, no. 17, pp. 6451-6458, 2011.

- [49] B. S. Choudry, K. Das, S. Bhandari ve P. Das “Tripled coincidence point results in partially ordered probabilistic metric spaces,” *Journal of Physical Science*, vol. 16, pp. 9-22, 2012.
- [50] V. H. Badshah, S. Jain, A. Jain ve S. Mandloi, “Coupled fixed point theorem in Menger space,” *International Journal of Theoretical&Applied Science*, vol. 8, pp. 24-28, 2016.
- [51] S. Wang, G. Gu ve Y. J. Cho, “Coupled fixed point theorems in partially ordered Menger space,” *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, no. 37, pp. 531-542, 2014.
- [52] K. Fan, “Extentions of two fixed point theorems of F.E. Browder,” *Math. Z.*, vol. 122, pp. 234-240, 1969.
- [53] M. A. Al-Thaga ve N. Shahzad, “Convergence and existence results for best proximity points,” *Nonlinear Analysis*, vol. 70, pp. 3665-3671, 2009.
- [54] W. A. Kirk, S. Reich ve P. Veeramani, “Proximal retracts and best proximity pair theorems,” *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 24, pp. 851-862, 2003.
- [55] A. A. Eldered ve P. Veeramani, “Existence and convergence of best proximity points,” *Journal of Mathematical Analysis Application*, vol. 323, pp. 1001-1006, 2006.
- [56] C. D. Bari, T. Suzuki ve C. Vetro, “Best proximity points for cyclic-Meir-Keeler contractions,” *Nonlinear Analysis*, vol. 69, pp. 3790-3794, 2008.
- [57] S. S. Basha ve P. Veeramani, “Best approximations and best proximity pairs,” *Acta Science Mathematics*, vol. 63, pp. 289-300, 1997.
- [58] S. S. Basha, “Best proximity point theorems generalizing the contraction principle,” *Nonlinear Analysis*, vol. 74, pp. 5844-5850, 2011.
- [59] J. B. Prolla, “Fixed point theorems for set valued mappings and existence of best approximations,” *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 5, pp. 449-455, 1982-1983.
- [60] V. M. Sehgal ve S. P. Singh, “A generalization to multifunctions of Fan’s best approximation,” in *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 102, pp. 534-537, 1988.
- [61] V. M. Sehgal ve S. P. Singh, “A theorem on the best approximations,” *Numerical Functional Analysis and Optimizations*, vol. 10, pp. 181-184, 1989.
- [62] G. A. Anastassiou, Y. J. Chou, R. Saadati ve Y. O. Yang, “Common best proximity points for proximally commuting mappings in non-Archimedean pm-spaces,” *Journal of Computational Analysis and Applications*, vol. 20, no. 6, pp. 1021-1030, 2016.
- [63] Z. Raza, N. Saleem ve M. Abbas, “Optimal coincidence points for proximal quasi-contraction mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces,” *Journal of Nonlinear Science and Applications*, vol. 9, pp. 3787-3801, 2016.

- [64] S. Reich, "Approximate selections, best approximations, fixed points and invariant sets," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 62, no. 1, pp. 104-113, 1978.
- [65] H. Shayanpour, M. Shams ve A. Nematizadeh, "Some results on best proximity point on star-shaped sets in probabilistic Banach(Menger) spaces," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 1, 2016.
- [66] M. Sen ve A. F. Roldan, " Some results on best proximity points of cyclic alpha-psi contraction in Menger probabilistic metric spaces," *Math. Sci.*, pp. 95-111, 2017.
- [67] Y. Su ve J. Zhang, "Fixed point and best proximity point theorems for contractions in a new class of probabilistic metric space," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 170, 2014.
- [68] E. Kreyszig, "Introductory functional analysis with applications," Wiley., 1989.
- [69] V. Berinde, "Iterative approximation of fixed Points," Springer, Berlin, 2007.
- [70] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales," *Fund. Math.*, 1922..
- [71] R. Shrivastava, A. Rajput ve S. K. Singh, "Iteration process for hemi-contractive mappings on Hilbert space," *IMACST*, vol. 3, no. 4, pp. 199-201, 2012.
- [72] C. Mongkolkeha, Y. J. Cho ve P. Kumam, "Convergence theorems for k-demicontractive mappings in Hilbert spaces," *Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 16, no. 4, pp. 1065-1082, 2013.
- [73] Y. Xu, J. Guan ve Y. Su, "Weak and strong convergence theorems of fixed points for nonexpansive mappings and strongly pseudocontractive mappings in a new class of probabilistic normed spaces," *Fixed Point Theory and Applications*, 2015.
- [74] M. Sezen Sangurlu, "Fixed point theorems for new type contractive mappings," *Journal of Function Spaces*, 2019.

Konferans Bildirileri

1. A.A. Karaaslan ve V. Karakaya, “ Convergence theorems for some mappings in a type of probabilistic normed spaces,” 4th International Conference on Analysis and Its Applications, Kırşehir, 2018.
2. A.A. Karaaslan, V. Karakaya ve M. Ertürk, “ n-tuplet coincidence point theorems in partially ordered probabilistic metric spaces,” International Conference Operators on Morrey-Type spaces and applications, Kırşehir, 2017.
3. A.A. Karaaslan ve V. Karakaya, “ Convergence theorems of fixed points for hemicontractive mappings in S-probabilistic normed spaces,” International Conference on Analysis and Its Applications, Kırşehir, 2016.
4. A.A. Karaaslan, V. Karakaya, “ Some fixed point conclusions in probabilistic metric spaces,” International Mathematics Symposium, Çankırı, 2014.

Makaleler

1. A.A. Karaaslan, V. Karakaya, “ n-tuplet coincidence point theorems in partially ordered probabilistic metric spaces,” Journal of Function Spaces, Article ID 6595408, 2018.
2. A.A. Karaaslan, V. Karakaya, “ Some fixed point theorems for a contraction type in non-Archimedean Menger probabilistic spaces” . (submitted)
3. A.A. Karaaslan, V. Karakaya, “ Best proximity point theorems in non-Archimedean Menger probabilistic spaces” . (submitted)

Ödüller

1. 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs Programı, TÜBİTAK.