

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN
DİFERENSİYEL GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Fatih ÇELİK

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Temmuz, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN
DİFERENSİYEL GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Fatih ÇELİK tarafından hazırlanan tez çalışması 24.07.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Murat SARI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Hiperyüzeyler Üzerinde Eğrilik Çizgilerinin Diferensiyel Geometrik Özellikleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Fatih ÇELİK

İmza

Sevgili eşim Şermin Çam Çelik'e



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının yürütülmesini sağlayan ve tüm süreçte bilgilerini, deneyimlerini ve öngörülerini benimle cömertçe paylaşan tez danışmanım Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL'e en derin teşekkürlerimi sunarım.

Saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU ve Prof. Dr. Salim YÜCE'ye tez izleme komitesinde yer aldıkları ve yaptıkları değerli yorumlar için teşekkür ederim.

Sağladıkları mesleki kolaylıklar sayesinde hem doktora çalışmalarımı hem de öğretmenlik mesleğimi aynı anda yürütmeme olanak veren Güngören Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi okul müdürü Ahmet GÜZELOĞLU, Sercan İNCE ve tüm idari kadroya teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında bana güven ve anlayış gösteren, motivasyon veren ve sevgisini ve inancını her zaman üzerimde hissettiğim sevgili eşim Şermin ÇAM ÇELİK'e sonsuz teşekkür ederim.

Fatih ÇELİK

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 $\mathbb{E}^3$ Uzayında Eğriler Teorisi	3
2.2 $\mathbb{E}^3$ Uzayında Yüzeyler Teorisi	4
2.3 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Eğriler	9
2.4 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Hiperyüzey Üzerindeki Eğriler	12
2.5 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Herhangi Bir Hiperyüzey için Şekil Operatörü	14
2.6 $\mathbb{E}^4$ Uzayında bir Hiperyüzeyin Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri	17
2.7 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Darboux Çatısı	21
2.7.1 Genişletilmiş Darboux Çatısının Türev Denklemleri	22
3 EĞRİLİK ÇİZGİSİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	24
3.1 Eğrilik Çizgisinin Hesaplanması	26
3.2 Eğrilik	28
3.3 Burulma	29
3.4 Singüler Durumlar	31
3.4.1 Eğrilik	31
3.4.2 Burulma	32
3.5 Dejenere Durumlar	33
4 $\mathbb{E}^4$ UZAYINDA BİR HIPERYÜZEY ÜZERİNDEKİ EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	37

4.1 Eğrilik Çizgisinin Hesaplanması	40
5 $\mathbb{E}^4$ UZAYINDA BİR HİPERYÜZEY ÜZERİNDEKİ EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN EĞRİLİKLERİ	45
5.1 Birinci Eğrilik (k_1)	45
5.2 İkinci Eğrilik (k_2)	49
5.3 Üçüncü Eğrilik (k_3)	55
6 $\mathbb{E}^4$ UZAYINDA ÖZEL REGLE HİPERYÜZEYLER VE AÇILABİLİRLİĞİ	58
6.1 Regle Hiperyüzey ve Açılabilirliği	58
7 UYGULAMA	64
8 SONUÇ VE ÖNERİLER	80
KAYNAKÇA	81
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	83

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{E}^4$	4-boyutlu Öklid uzayı
τ	$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında burulma
κ	$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında eğrilik
k_1	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 1. eğrilik
k_2	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2. eğrilik
k_3	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 3. eğrilik
τ_g^1	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 1. geodezik burulma
τ_g^2	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2. geodezik burulma
κ_g^1	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 1. geodezik eğrilik
κ_g^2	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2. geodezik eğrilik
$\langle, \rangle$	$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında iç çarpım
τ_g	Geodezik burulma
κ_g	Geodezik eğrilik
$\ \quad \ $	Norm
κ_n	Normal eğrilik
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar kümesi
$\mathbf{X}_p$	Tanjant vektör
$\mathbf{X}$	Vektör alanı

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 7.1 $P = (1, 0, 1, 0)$ noktasından geçen eğrilik çizgisi 69



Hiperyüzeyler Üzerinde Eğrilik Çizgilerinin Diferensiyel Geometrik Özellikleri

Fatih ÇELİK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu tez çalışması sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup, literatür özeti ve tezin amacını içermektedir.

İkinci bölümde, bu tezde çalışılan üç ve dört boyutlu Öklid uzaylarındaki eğriler, yüzeyler ve hiperyüzeyler ile ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, parametrik denklemlerle verilen bir yüzey üzerinde bir eğrilik çizgisinin elde edilmesi ve bu eğrilik çizgisinin eğriliğinin ve burulmasının hesaplanması detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca eğriliği ve burulmayı hesaplarırken ortaya çıkan singüler ve dejenere durumlar incelenmiştir.

Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler tezin orjinal kısımlarını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemlerle verilen bir hiperyüzey üzerindeki eğrilik çizgisinin nasıl elde edileceği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen eğrilik çizgilerinin Frenet eğrisi olmaları durumunda diferensiyel geometrik özellikleri, genişletilmiş Darboux çatısı kullanılarak hesaplanmıştır. Ayrıca, eğrilik çizgilerinin analitik olarak elde edilemediği durumlarda da bu eğrilerin eğriliklerinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir. Eğrilikler, Frenet vektörleri ve genişletilmiş Darboux vektörleri hesaplanırken 3-boyutlu uzayda ortaya çıkan singüler ve dejenere durumlar gözlenmemiştir.

Altıncı bölümde, dört boyutlu Öklid uzayında dayanak eğrisi, ikinci ve üçüncü eğriliklerinin oranı sabit bir Frenet eğrisi olan bir regle hiperyüzey inşa edilerek, bu hiperyüzey üzerinde dayanak eğrisinin eğrilik çizgisi olduğu gösterilmiştir. Buna ek olarak, elde edilen hiperyüzeyin singüler noktaları ile açılabilirliği araştırılmıştır.

Yedinci bölümde, tezin orjinal kısmında yapılan çalışmalar bir örnekle desteklenmiştir.

Sekizinci bölümde, orjinal kısımdaki sonuçlardan bahsedilmiş ve gelecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Frenet eğrisi, hiperyüzey, genişletilmiş Darboux çatısı, eğrilik çizgisi, eğrilikler



ABSTRACT

The Differential Geometry Properties of the Lines of Curvatures on the Parametric Hypersurfaces

Fatih ÇELİK

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This thesis consists of eight chapters.

The first chapter is devoted to the introduction which includes the literature review and the purpose of the thesis.

In the second chapter, basic concepts related to curves, surfaces and hypersurfaces in three and four dimensional Euclidean spaces studied in this thesis are introduced.

In the third chapter, obtaining a line of curvature on a parametric surface and computing the curvature and torsion of this line of curvature are examined in detail. In addition, the singular and degenerate cases that occur while computing curvature and torsion are examined.

The fourth, the fifth and the sixth chapters constitute the original parts of the thesis.

In the fourth chapter, it is shown how the lines of curvature on a parametric hypersurface in the Euclidean four space are obtained.

In the fifth chapter, if the lines of curvature obtained in the fourth section are Frenet curves, their differential geometric properties are computed using the extended Darboux frame along the curve. Moreover, it is shown that how the curvatures of these curves can be computed even when the lines of curvature cannot be obtained analytically. While computing the curvatures, Frenet vectors and extended Darboux vectors, the singular and degenerate cases appearing in 3-dimensional space were not

observed.

In the sixth chapter, by constructing a ruled hypersurface whose base curve is a Frenet curve with the ratio of its second and third curvatures is constant in Euclidean 4-space, it is shown that the base curve is a line of curvature on the obtained hypersurface. In addition, the singular points and developability of the obtained ruled hypersurface is investigated.

In the seventh chapter, the studies in the original part of the thesis are illustrated by an example.

In the eighth chapter, the results in the original part are mentioned and some future projects arising from this thesis are suggested.

Keywords: Frenet curves, hypersurfaces, extended Darboux frame, line of curvature, curvatures

1.1 Literatür Özeti

Yüzey üzerindeki bir eğrinin her noktasındaki hız vektörü bir asli doğrultuya karşılık geliyorsa o eğriye yüzey üzerinde bir eğrilik çizgisi denir, [1]. Diferensiyel Geometri’de önemli bir yere sahip olan eğrilik çizgisi kavramı ilk olarak Diferensiyel Geometri’nin kurucuları sayılan Monge ve Gauss (1796) tarafından, dört adet umbilik noktaya sahip bir elipsoidin eğrilik çizgilerini hesaplariken kullanılmıştır, [2].

Eğrilik çizgileri ile alakalı özellikle uygulamalı matematik, geometrik modelleme ve mühendislik alanında yayınlanmış birçok makale vardır, [3–5]. R.R. Martin, [3], 1983 yılında ilk kez yüzey üzerinde dört kenarı da eğrilik çizgisi olan yamalar tanımlamış ve buna da asli yama (principal patches) demiştir. Bu asli yamaları da “Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım” için kullanmıştır.

3-boyutlu Öklid uzayında bir parametrik yüzey $\mathbf{R}(u(s), v(s))$ için bir eğrilik çizgisi $\mathbf{c}(s)$ aşağıdaki diferensiyel denkleminin çözülmesi ile bulunabilir, [6]:

$$(EM - LF)(u')^2 + (EN - LG)u'v' + (FN - MG)(v')^2 = 0.$$

Eğer bu diferensiyel denklem analitik olarak çözülebilirse, $\mathbf{c}(s) = \mathbf{R}(u(s), v(s))$ eğrisinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri kolayca bulunabilir. Eğer $u(s)$ ve $v(s)$ fonksiyonları analitik olarak çözülemezse $\mathbf{c}(s)$ eğrilik çizgisi yaklaşık olarak hesaplanabilir ve bu yaklaşık eğrinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri için başka tekniklere ihtiyaç vardır. W. Che vd., [7], 2007 yılında 3-boyutlu Öklid uzayında kapalı yüzeylerin eğrilik çizgilerinin diferensiyel geometrik özelliklerini incelemişlerdir. T. Maekawa vd., [8], 2014 yılında 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik formdaki yüzeyler için aynı çalışmayı yapmışlardır. Bu çalışmada, parametrik bir yüzeyin üzerinde elde ettikleri eğrilik çizgilerinin diferensiyel geometrik özelliklerini inceleyen bir yöntem geliştirerek eğrilik çizgilerinin birim teğet vektörünü, eğrilik vektörünü, binormal vektörünü ve burulma vektörünü elde etmişlerdir. Aynı zamanda bu

yöntemle burulma ve eğriliklerin yüksek mertebeden türevleri hem dejenere hem de singüler durumlarda hesaplanmıştır, [9–12]. Ayrıca [8]’de eğrilik çizgilerinin eğriliği ve onun birinci türevini gemi inşasında kavisli levhaların oluşturulması için kullanmışlardır. Özellikle gemi inşaatı tasarımlarında çok kullanılan eğrilik çizgileri literatürde önemli bir yer tutmaktadır.

4-boyutlu Öklid uzayında hiperyüzeyler için eğrilik çizgileri son yıllarda çalışılmaktadır. 2015 yılında D. Lopes vd., [13], 2016 yılında ise J. Sotomayor vd., [14], sırasıyla, $\mathbb{E}^4$ uzayında daldırılmış hiperyüzeyler ve tıkız olmayan kuadrik hiperyüzeylerin eğrilik çizgilerinin geometrik yapılarını oluşturmuşlardır. 2001 yılında C. Gutierrez vd., [15], $\mathbb{E}^4$ uzayında 2-boyutlu daldırılmış yüzeylerin eğrilik çizgilerini veren diferensiyel denklemini kurmuşlardır. Ayrıca J. Sotomayor ve R. Garcia tarafından hazırlanan, [16] makalesinde yüzeyler üzerindeki eğrilik çizgileri ve umbilik noktaların geometrisi, eğrilik çizgilerinin ilk çalışıldığı zamanlardan günümüze kadar aktarılmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı; dört boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey üzerinde eğrilik çizgilerinin nasıl bulunabileceğini göstermek ve bu eğrilik çizgilerinin diferensiyel geometrik özelliklerinin nasıl elde edilebileceğini araştırmaktır. Ayrıca, elde edilen yöntemin doğruluğunun gösterilmesi için dayanak eğrisini eğrilik çizgisi kabul eden bir regle hiperyüzeyin nasıl inşa edilebileceğini araştırmaktır.

1.3 Hipotez

Dört boyutlu Öklid uzayında parametrik olarak verilmiş bir hiperyüzey üzerinde eğrilik çizgilerinin bulunabilmesini ve bulunan eğrilik çizgilerinin eğrilikleri ile Frenet vektörlerinin elde edilmesini sağlayan metotlar tezin literatüre kazandırdığı orijinal katkıdır.

Diğer taraftan, $\mathbb{E}^4$ uzayında ikinci ve üçüncü eğrilikleri oranı sabit olan bir Frenet eğrisini üzerinde eğrilik çizgisi kabul eden özel bir regle hiperyüzey inşa edilmiştir. Bu hiperyüzey kullanılarak tezde elde edilen metotların yeterliliği gösterilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan notasyon, tanım ve teoremlere değinilecektir. $\mathbf{R}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{X}$ gibi koyu harfler vektör, vektör alanı veya vektör fonksiyonları için kullanılacaktır. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ gibi iki vektörün iç çarpımı ve vektörel çarpımı, sırasıyla, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ve $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ile gösterilecektir. $\mathbb{R}^4$ vektör uzayında $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ gibi vektörlerin iç çarpımı ve vektörel çarpımları, sırasıyla, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ve $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}$ ile gösterilecektir. Tanım ve teoremler için ağırlıklı olarak, [1], [6], [17] ve [18] nolu kaynaklar kullanılmıştır.

2.1 $\mathbb{E}^3$ Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ 'de diferensiyellenebilir eğri denir.

Tanım 2.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ oluyorsa, α eğrisine regüler eğri denir.

Tanım 2.3. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verildiğinde $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ oluyorsa, α eğrisine birim hızlı eğri, s 'ye de yay parametresi denir.

Tanım 2.4. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\{\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(n-1)}(s)\}$ kümesi eğrinin her noktasında lineer bağımsız oluyorsa bu eğriye Frenet eğrisi denir.

Tanım 2.5. $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\mathbf{t} = \mathbf{c}'(s)$ ile tanımlanan $\mathbf{t}$ vektör alanına eğrinin birim teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.6. $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\|\mathbf{c}''(s)\| \neq 0$ olmak üzere, $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{c}''(s)}{\|\mathbf{c}''(s)\|}$ ile tanımlanan $\mathbf{n}$ vektör alanına $\mathbf{c}$ eğrisinin asli normal vektör alanı denir. Ayrıca, $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ ile tanımlanan $\mathbf{b}$ vektör alanına $\mathbf{c}$ eğrisinin binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.7. $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|\mathbf{c}''(s)\|$ ile tanımlanan fonksiyona $\mathbf{c}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $\kappa(s_0)$ reel sayısına ise eğrinin $\mathbf{c}(s_0)$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 2.8. $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ ile tanımlanan fonksiyona $\mathbf{c}$ eğrisinin burulma fonksiyonu, $\tau(s_0)$ reel sayısına ise eğrinin $\mathbf{c}(s_0)$ noktasındaki burulması denir.

Tanım 2.9. $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi boyunca tanımlanan $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ vektör alanları eğri boyunca her noktada birbirine ortogondur. $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ üçlüsüne $\mathbf{c}$ eğrisi boyunca Frenet çatı alanı denir.

Uyarı 2.1: Burulma, Frenet çatısının teğet vektörü etrafında dönme miktarının ölçüsüdür. Birim teğet vektörü ve asli normal vektörü tarafından belirlenen düzleme oskülatör düzlem denir. Burulma, aynı zamanda, eğrinin oskülatör düzleminden uzaklaşma miktarının da ölçüsüdür.

Tanım 2.10. $\kappa > 0$ eğrilikli ve τ burulmalı $\mathbf{c}(s)$ birim hızlı eğrisinin birim teğet, asli normal ve binormal vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ olmak üzere bu vektörlerin türevleri alındığı zaman elde edilen

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} \quad (2.3)$$

formüllerine Frenet-Serret formülleri denir.

Sonuç 2.1. $\mathbf{c}(s)$ eğrisinin türevleri (2.4) – (2.6) denklemlerini sağlar:

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{t}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{c}''(s) = \kappa \mathbf{n}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{c}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' = -\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b}. \quad (2.6)$$

2.2 $\mathbb{E}^3$ Uzayında Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.11. $D \subset \mathbb{E}^2$ bir bağlantılı açık küme ve $\mathbf{R} : D \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir regüler dönüşüm olsun. Eğer $\mathbf{R} : D \rightarrow \mathbf{R}(D)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\mathbf{R}(D)$ kümesine $\mathbb{E}^3$ uzayında bir regüler yüzey denir. Diğer bir deyişle, $\mathbf{R} : D \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ dönüşümü birebir, regüler ve $\mathbf{R}^{-1} : \mathbf{R}(D) \rightarrow D$ fonksiyonu sürekli oluyorsa, $\mathbf{R}(D) \subset \mathbb{E}^3$ alt kümesine $\mathbb{E}^3$ uzayında regüler yüzey denir, [19].

Tanım 2.12. $M, \mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. $\mathbf{c} : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M 'de diferensiyellenebilir eğri denir.

Tanım 2.13. $M, \mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey olsun. Bir $\mathbf{v}_P \in T_{\mathbb{E}^3}(P)$ tanjant vektörü için $\alpha(0) = P$ ve $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ olacak şekilde M üzerinde bir α eğrisi varsa $\mathbf{v}_P$ 'ye M üzerindeki P noktasında teğet vektörü denir. M 'nin P noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi $T_M(P)$ ile gösterilir, [18].

Tanım 2.14. $M, \mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey olsun. $\mathbb{E}^3$ uzayında bir $\mathbf{v}$ vektör alanı verildiğinde $\forall P \in M$ için $\mathbf{v}_P \in T_M(P)$ oluyorsa $\mathbf{v}$ vektör alanına M üzerinde teğet vektör alanı denir. M üzerindeki tüm teğet vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. $M, \mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve $\mathbf{N}_P \in T_{\mathbb{E}^3}(P)$ olmak üzere, eğer $\forall \mathbf{v}_P \in T_M(P)$ için $\langle \mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P \rangle = 0$ oluyorsa, $\mathbf{N}_P$ 'ye $P \in M$ noktasında M 'ye normal vektör denir. M yüzeyi üzerindeki her bir noktaya bir normal vektör karşılık getiren vektör alanına M üzerinde normal vektör alanı denir.

Teorem 2.1. $M, \mathbb{E}^3$ uzayında $f(x_1, x_2, x_3) = c$ kapalı denklemi ile verilen bir yüzey olsun. $\nabla f, M$ 'nin her bir noktasında sıfırdan farklı bir normal vektör alanıdır, [18].

Tanım 2.16. $M, \mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyinin her noktasında bir diferensiyellenebilir $\mathbf{N}$ normal vektör alanı tanımlanıyorsa, M yüzeyine yönlendirilebilir yüzey denir.

Tanım 2.17. $M \subset \mathbb{E}^3$ regüler yüzeyi verilsin. M yüzeyinin birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. $\mathbb{E}^3$ uzayında Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall \mathbf{X} \in \chi(M)$ için $S(\mathbf{X}) = -D_{\mathbf{X}}\mathbf{N}$ olarak tanımlanan $S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümüne M 'nin şekil operatörü denir, [1].

Tanım 2.18. $M \subset \mathbb{E}^3$ regüler yüzeyi verilsin. S şekil operatörü olmak üzere,

$$\kappa_n(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

ile tanımlanan $\kappa_n(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ sayısına M yüzeyinin $\mathbf{u}$ birim teğet vektörü doğrultusundaki normal eğriliği denir.

Daha genel olarak, herhangi bir $\mathbf{v} \in T_M(P)$ teğet vektörü için

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

ile tanımlanır. Yüzey üzerindeki P noktasındaki normal eğrilik, $\mathbf{v}$ teğet vektörü ile M 'nin P noktasındaki birim normal vektörü $\mathbf{N}_P$ 'nin belirlediği düzlemin M ile oluşturduğu dik kesit eğrisinin P noktasındaki eğriliğidir.

Teorem 2.2. (Meusnier)

Yüzey üzerindeki bir P noktasından geçen ve o noktadaki teğet doğruları aynı olan bütün eğriler o noktada aynı normal eğriliğe sahiptir, [1].

Tanım 2.19. M , E^3 uzayında bir yüzey ve M 'nin P noktasındaki şekil operatörü S_p olsun. $S_p(\mathbf{v}_p) = \lambda \mathbf{v}_p$ eşitliğini sağlayan λ sayılarına M yüzeyinin P noktasındaki asli eğrilikleri, $\mathbf{v}_p$ vektörüne de λ 'ya karşılık gelen asli doğrultu denir.

M üzerinde bir eğri $\mathbf{c}$ olsun. Eğer $\mathbf{c}$ eğrisinin her noktasındaki hız vektörü bir asli doğrultuya karşılık geliyorsa $\mathbf{c}$ eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisi (asli eğri) denir. Buna göre $\mathbf{c}$ eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul

$$S_p(\mathbf{c}') = \lambda \mathbf{c}'$$

olmasıdır, [18]. Kürenin şekil operatörü birim olduğundan, küre üzerinde her eğri bir asli eğridir.

Teorem 2.3. M , E^3 uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyi üzerindeki farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular ortogonaldır, [18].

Tanım 2.20. M , E^3 uzayında bir yüzey ve M 'nin P noktasındaki şekil operatörü S_p olmak üzere, $S_p = \lambda I_2$ oluyorsa, $P \in M$ noktasına M yüzeyinin umbilik noktası denir, [18].

Buna göre bir P noktasının umbilik nokta olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall \mathbf{w} \in T_p(M), \quad S_p(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w}$$

olmasıdır. Kürenin tüm noktaları birer umbilik noktadır. Yüzey üzerindeki umbilik noktalardaki tüm doğrultularda normal eğrilikler eşit olacağından o noktalarda asli doğrultular tanımlanamaz. Bu yüzden bu çalışmada yüzey üzerindeki noktalar umbilik olmayan noktalar olarak seçilecektir.

Teorem 2.4. M , $\mathbf{R}(u, v)$ parametrik denklemi ile verilen bir yüzey olsun. $\mathbf{w} = v_1 \mathbf{R}_u + v_2 \mathbf{R}_v$ vektörünün bir asli vektör olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{vmatrix} v_2^2 & -v_1 v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

olmasıdır, [1].

İspat. $\mathbf{w} = v_1 \mathbf{R}_u + v_2 \mathbf{R}_v$ vektörünü göz önüne alalım. Şekil operatörü lineer olduğundan

$$\begin{aligned} S(\mathbf{w}) \times \mathbf{w} &= S(v_1 \mathbf{R}_u + v_2 \mathbf{R}_v) \times (v_1 \mathbf{R}_u + v_2 \mathbf{R}_v) \\ &= [v_1 S(\mathbf{R}_u) + v_2 S(\mathbf{R}_v)] \times (v_1 \mathbf{R}_u + v_2 \mathbf{R}_v) \\ &= v_1^2 S(\mathbf{R}_u) \times \mathbf{R}_u + v_1 v_2 (S(\mathbf{R}_u) \times \mathbf{R}_v + S(\mathbf{R}_v) \times \mathbf{R}_u) + v_2^2 S(\mathbf{R}_v) \times \mathbf{R}_v \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde yazılır. Burada, $S(\mathbf{R}_u) = a\mathbf{R}_u + b\mathbf{R}_v$ ve $S(\mathbf{R}_v) = c\mathbf{R}_u + d\mathbf{R}_v$ alınırsa;

$$a = \frac{LG - MF}{EG - F^2}, \quad b = \frac{ME - LF}{EG - F^2}, \quad c = \frac{MG - NF}{EG - F^2}, \quad d = \frac{NE - MF}{EG - F^2}$$

olup,

$$S(\mathbf{R}_u) \times \mathbf{R}_u = -b\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v, \quad S(\mathbf{R}_u) \times \mathbf{R}_v = a\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v$$

ve

$$S(\mathbf{R}_v) \times \mathbf{R}_u = -d\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v, \quad S(\mathbf{R}_v) \times \mathbf{R}_v = c\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v$$

eşitlikleri (2.8)'de yerine yazılırsa

$$S(\mathbf{w}) \times \mathbf{w} = v_1^2 (-b\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v) + v_1 v_2 (a\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v - d\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v) + v_2^2 c\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v$$

veya düzenlenirse

$$S(\mathbf{w}) \times \mathbf{w} = \left(\frac{MG - NF}{EG - F^2} v_2^2 + \frac{LG - NE}{EG - F^2} v_1 v_2 + \frac{LF - ME}{EG - F^2} v_1^2 \right) \mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v \quad (2.9)$$

elde edilir. Buna göre, $\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v \neq \mathbf{0}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$\mathbf{w}$ vektörü bir asli vektördür $\iff S(\mathbf{w}) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} &\iff \frac{MG - NF}{EG - F^2} v_2^2 + \frac{LG - NE}{EG - F^2} v_1 v_2 + \frac{LF - ME}{EG - F^2} v_1^2 = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} v_2^2 & -v_1 v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. ■

Uyarı 2.2: Eğer $L - \kappa_n E = 0$, $M - \kappa_n F = 0$, $N - \kappa_n G = 0$ ise (2.7) eşitliği sağlanır. Bu durumda $P \in M$ noktası umbilik nokta olur.

Uyarı 2.3: Eğer $L - \kappa_n E = 0$ ise, $E \neq 0$ olduğundan, $\lambda \neq 0$ iken, $\kappa_n = \frac{L}{E} = \frac{M\lambda + L}{F\lambda + E}$ eşitliği kullanılırsa

$$(EM - LF)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad ME = LF$$

olur. Bu durumda;

i) $F \neq 0$ ise $M - \kappa_n F = 0$ olur. Yine $\kappa_n = \frac{L}{E} = \frac{N\lambda + M}{G\lambda + F}$ eşitliği ile $ME + NE\lambda = FL + GL\lambda$ olacağından, $FL - ME = (NE - GL)\lambda = 0$ bulunur. Bu durumda, $N - \kappa_n G = 0$ olur.

ii) $F = 0$ ise $ME = 0$ eşitliğinden $M = 0$ olur. Bu durumda $M - \kappa_n F = 0$ bulunur. Aynı şekilde $\kappa_n = \frac{L}{E} = \frac{N}{G}$ eşitliği ile de $N - \kappa_n G = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $\lambda \neq 0$ iken, $L - \kappa_n E = 0$, $M - \kappa_n F = 0$ veya $N - \kappa_n G = 0$ eşitliklerinden biri olması durumunda **Teorem 2.4**'den dolayı $P \in M$ noktası umbilik nokta olur.

$\mathbf{R}(u, v)$ parametrik yüzeyi üzerindeki birim hızlı olmayan bir eğri $\mathbf{c}(s) = \mathbf{R}(u(s), v(s))$ olsun. $\mathbf{c}(s)$ eğrisinin türevleri zincir kuralı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v', \quad (2.10)$$

$$\mathbf{c}''(s) = \mathbf{R}_{uu}(u')^2 + 2\mathbf{R}_{uv}u'v' + \mathbf{R}_{vv}(v')^2 + \mathbf{R}_{uu}u'' + \mathbf{R}_u u'' + \mathbf{R}_v v'', \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'''(s) = & \mathbf{R}_{uuu}(u')^3 + 3\mathbf{R}_{uuv}(u')^2v' + 3\mathbf{R}_{uvv}u'(v')^2 + \mathbf{R}_{vvv}(v')^3 \\ & + 3[\mathbf{R}_{uu}u'u'' + \mathbf{R}_{uv}(u''v' + u'v'') + \mathbf{R}_{vv}v'v''] + \mathbf{R}_{uu}u''' \\ & + \mathbf{R}_u u''' + \mathbf{R}_v v''', \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(4)}(s) = & \mathbf{R}_{uuuu}(u')^4 + 4\mathbf{R}_{uuuv}(u')^3v' + 6\mathbf{R}_{uuvv}(u')^2(v')^2 + 4\mathbf{R}_{uvvv}u'(v')^3 \\ & + \mathbf{R}_{vvvv}(v')^4 + 6[\mathbf{R}_{uuu}(u')^2u'' + \mathbf{R}_{uuv}(2u'u''v' + (u')^2v'') \\ & + \mathbf{R}_{uvv}(2v'v''u' + (v')^2u'') + \mathbf{R}_{vvv}(v')^2v''] + \mathbf{R}_{uu}(3(u'')^2 + 4u'u''') \\ & + \mathbf{R}_{uv}(4u'''v' + 6u''v'' + 4v'''u') + \mathbf{R}_{vv}(3(v'')^2 + 4v'v''') \\ & + \mathbf{R}_u u^{(4)} + \mathbf{R}_v v^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Tanım 2.21. $M \subset E^3$ regüler yüzeyi verilsin. $\mathbf{c} : I \rightarrow M$ eğrisi yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. $\mathbf{c}$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{t}$, yüzeyin $\mathbf{c}$ eğrisi boyunca kısıtlanmış birim normal vektör alanı $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(\mathbf{c}(s))$ ve $\mathbf{U} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ olmak üzere $\mathbf{c}$ eğrisi boyunca tanımlanan $\{\mathbf{t}, \mathbf{U}, \mathbf{N}\}$ ortonormal sistemine **Darboux** çatı alanı denir.

Darboux çatı alanı, Frenet çatı alanı gibi sadece eğriye değil aynı zamanda yüzeye de bağlıdır. Darboux çatısına göre türev denklemleri,

$$\mathbf{t}' = \kappa_g \mathbf{U} + \kappa_n \mathbf{N}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{U}' = -\kappa_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{N}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{N}' = -\kappa_n \mathbf{t} - \tau_g \mathbf{U} \quad (2.16)$$

şeklindedir. Burada κ_n ve κ_g , sırasıyla, yüzeyin normal ve jeodezik eğrilikleridir. τ_g de yüzeyin jeodezik burulması olarak adlandırılır. Bir eğrinin herhangi bir noktasındaki jeodezik eğriliği, eğrinin o noktasındaki teğet düzlemine dik izdüşüm eğrisinin eğriliğidir. Buna göre, [1];

$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}$ eğrisi yüzey üzerinde jeodezik eğridir.

$\kappa_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}$ eğrisi yüzey üzerinde asimptotik eğridir.

$\tau_g = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}$ eğrisi yüzey üzerinde asli eğridir.

$\mathbf{R}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ parametrik denklemi ile verilen yüzeyin birim normal vektör alanı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v}{\|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\|}. \quad (2.17)$$

$\mathbf{R}(u, v)$ yüzeyi üzerindeki $\mathbf{c}(s) = \mathbf{R}(u(s), v(s))$ eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbf{t}$ ve asli normal vektörü $\mathbf{n}$ olmak üzere, eğrilik vektörü,

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g = \kappa_n \mathbf{N} + \kappa_g \mathbf{U} \quad (2.18)$$

olarak yazılır. Burada, $\mathbf{k}_n$, normal eğrilik vektörü ve $\mathbf{k}_g$ ise jeodezik eğrilik vektörüdür. $\mathbf{k}_n$, $\mathbf{c}(s)$ eğrisinin $\mathbf{k}$ eğrilik vektörünün yüzey normali doğrultusundaki bileşenidir. $\mathbf{k}_g$, $\mathbf{c}(s)$ eğrisinin $\mathbf{k}$ eğrilik vektörünün $\mathbf{U} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ vektörü doğrultusundaki bileşenidir.

2.3 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Eğriler

Tanım 2.22. $\mathbb{R}^4$ uzayında standart baz $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ olmak üzere $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 y_i \mathbf{e}_i$ ve $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^4 z_i \mathbf{e}_i$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

ile tanımlanır, [20]:

Vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar, [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} &= -\mathbf{y} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{z} = \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{x} \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{w} \rangle &= \det\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{w} &= \mathbf{x} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Teorem 2.5. $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{b} = \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2 \otimes \mathbf{z}_2$ olacak şekilde $\mathbb{R}^4$ uzayında iki vektör alalım. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörlerinin iç çarpımı,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle & \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_2 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

olarak elde edilir, [21].

Sonuç 2.2.

$$\|\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}\|^2 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

Tanım 2.23. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\mathbf{T} = \alpha'(s)$ ile tanımlanan $\mathbf{T}$ vektör alanına eğrinin teğet vektör alanı denir. $\|\alpha''(s)\| \neq 0$ olmak üzere, $\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ ile tanımlanan $\mathbf{n}$ vektör alanına α eğrisinin asli normal vektör alanı denir.

Tanım 2.24. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir Frenet eğrisi için

$$\mathbf{b}_2(s) = \frac{\alpha'(s) \otimes \alpha''(s) \otimes \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \otimes \alpha''(s) \otimes \alpha'''(s)\|}$$

ile tanımlanan $\mathbf{b}_2$ vektör alanına α eğrisinin ikinci binormal vektör alanı denir. Ayrıca, $\mathbf{b}_1(s) = \mathbf{b}_2(s) \otimes \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{n}(s)$ ile tanımlı $\mathbf{b}_1$ vektör alanına α eğrisinin birinci binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.25. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi boyunca tanımlanan $\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ birim vektör alanları her noktada birbirine ortogonaldır. Bu durumda $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ dördlüsü, α eğrisi boyunca bir çatı alanı oluşturur. Buna Frenet çatı alanı denir, [18].

Teorem 2.6. Birim hızlı bir α eğrisi boyunca Frenet çatı alanı $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ olmak üzere α eğrisinin eğrilikleri

$$k_1 = \|\alpha''(s)\| \quad (2.22)$$

$$k_2 = \frac{\langle \mathbf{b}_1, \alpha'''(s) \rangle}{k_1(s)} \quad (2.23)$$

$$k_3 = \frac{\langle \mathbf{b}_2(s), \alpha^{(4)}(s) \rangle}{k_1(s)k_2(s)} \quad (2.24)$$

ile elde edilir, [22].

Teorem 2.7. α eğrisi boyunca Frenet çatı alanı $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ olmak üzere α eğrisi boyunca Frenet formülleri

$$\mathbf{T}' = k_1 \mathbf{n} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{n}' = -k_1 \mathbf{T} + k_2 \mathbf{b}_1 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{b}_1' = -k_2 \mathbf{n} + k_3 \mathbf{b}_2 \quad (2.27)$$

$$\mathbf{b}_2' = -k_3 \mathbf{b}_1 \quad (2.28)$$

ile verilir [23].

Sonuç 2.3. Bir α eğrisinin yüksek mertebeden türevleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\alpha'(s) = \mathbf{T}, \quad (2.29)$$

$$\alpha''(s) = k_1 \mathbf{n}, \quad (2.30)$$

$$\alpha'''(s) = -k_1^2 \mathbf{T} + k_1' \mathbf{n} + k_1 k_2 \mathbf{b}_1, \quad (2.31)$$

$$\alpha^{(4)}(s) = -3k_1 k_1' \mathbf{T} + (-k_1^3 + k_1'' - k_1 k_2^2) \mathbf{n} + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') \mathbf{b}_1 + k_1 k_2 k_3 \mathbf{b}_2. \quad (2.32)$$

Birim hızlı eğriler için yukarıda elde edilen Frenet vektörleri ve eğrilikler, birim hızlı olmayan eğriler için de elde edilebilir. Birim hızlı olmayan eğrilerin türevleri alınırken α eğrisinin birinci türevi için $\dot{\alpha}(t)$, ikinci türevi için $\ddot{\alpha}(t)$ ve daha yüksek mertebeden türevleri için de aynı şekilde notasyonlar kullanılacaktır.

Teorem 2.8. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı olmayan regüler bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri aşağıdaki şekilde bulunur, [23]:

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\dot{\alpha}(t) \otimes \ddot{\alpha}(t) \otimes \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t) \otimes \ddot{\alpha}(t) \otimes \ddot{\alpha}(t)\|},$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \otimes \dot{\alpha}(t) \otimes \ddot{\alpha}(t)}{\|\mathbf{b}_2 \otimes \dot{\alpha}(t) \otimes \ddot{\alpha}(t)\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \dot{\alpha}(t)}{\|\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \dot{\alpha}(t)\|},$$

$$k_1 = \frac{\langle \mathbf{n}, \ddot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t)\|^2}, \quad k_2 = \frac{\langle \mathbf{b}_1, \ddot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3 k_1}, \quad k_3 = \frac{\langle \mathbf{b}_2, \ddot{\alpha}(t) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t)\|^4 k_1 k_2}.$$

Geometrik olarak, bu eğrilikler aşağıdaki şekilde özel eğrileri karakterize eder [23], [22];

- k_1 eğriliği eğrinin teğet doğrultusundan ayrılma miktarının ölçüsüdür. $k_1 = 0$ olması durumunda eğri bir doğru olur.
- k_2 eğriliği eğrinin oskülatör düzlemden uzaklaşma miktarının ölçüsüdür. $k_2 = 0$ olması durumunda eğri düzlemsel olur.
- k_3 eğriliği eğrinin üç boyutlu altuzaydan uzaklaşma miktarının ölçüsüdür. $k_3 = 0$ olması durumunda eğri $\mathbb{E}^4$ uzayının 3-boyutlu altuzayında yatan bir eğri olur.

2.4 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Hiperyüzey Üzerindeki Eğriler

Tanım 2.26. $U \subset \mathbb{E}^4$ bir açık küme olsun. c sabit bir sayı olmak üzere

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c\}$$

alt kümesinde $\forall P \in M$ için $\nabla f(P) \neq 0$ oluyorsa M alt kümesine $\mathbb{E}^4$ uzayında 3—boyutlu yüzey veya hiperyüzey denir, [18].

Tanım 2.27. $M, \mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. $\alpha : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M 'de diferensiyellenebilir eğri denir.

Tanım 2.28. $M, \mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey olsun. Bir $\mathbf{v}_P \in T_{\mathbb{E}^4}(P)$ tanjant vektörü için $\alpha(0) = P$ ve $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ olacak şekilde M üzerinde bir α eğrisi varsa $\mathbf{v}_P$ 'ye M üzerindeki P noktasında teğet vektörü denir. M 'nin P noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi $T_M(P)$ ile gösterilir, [18].

Tanım 2.29. $M, \mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey olsun. $\mathbb{E}^4$ uzayında bir $\mathbf{v}$ vektör alanı verildiğinde $\forall P \in M$ için $\mathbf{v}_P \in T_M(P)$ oluyorsa $\mathbf{v}$ vektör alanına M üzerinde teğet vektör alanı denir. M üzerindeki tüm teğet vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.30. $M, \mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey ve $\mathbf{N}_P \in T_{\mathbb{E}^4}(P)$ olmak üzere, eğer $\forall \mathbf{v}_P \in T_M(P)$ için $\langle \mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P \rangle = 0$ oluyorsa, $\mathbf{N}_P$ 'ye $P \in M$ noktasında M 'ye normal vektör denir. M hiperyüzeyi üzerindeki her bir noktaya bir normal vektör karşılık getiren vektör alanına M üzerinde normal vektör alanı denir.

Teorem 2.9. M , $\mathbb{E}^4$ uzayında $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c$ kapalı denklemi ile verilen bir hiperyüzey olsun. ∇f , M 'nin her bir noktasında sıfırdan farklı bir normal vektör alanıdır.

İspat. M bir hiperyüzey olduğundan $\forall P \in M$ için $\nabla f(P) \neq 0$ dir. $\forall \mathbf{v}_P \in T_M(P)$ için $\langle \mathbf{v}_P, \nabla f(P) \rangle = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathbf{v}_P \in T_M(P)$ olduğundan M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha(0) = P$ ve $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ olacak şekilde en az bir $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi vardır. Her $t \in I$ için $\alpha(t) \in M$ olduğundan

$$f(\alpha(t)) = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)) = c$$

yazılır. Bu son eşitlikten t 'ye göre türev alınırsa

$$\frac{\partial f(\alpha(t))}{\partial x_1} \cdot \frac{d\alpha_1(t)}{dt} + \frac{\partial f(\alpha(t))}{\partial x_2} \cdot \frac{d\alpha_2(t)}{dt} + \frac{\partial f(\alpha(t))}{\partial x_3} \cdot \frac{d\alpha_3(t)}{dt} + \frac{\partial f(\alpha(t))}{\partial x_4} \cdot \frac{d\alpha_4(t)}{dt} = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada $t = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(P), \alpha'(0) \rangle &= 0 \\ \langle \nabla f(P), \mathbf{v}_P \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde $\nabla f(P) \in T_M(P)^\perp$ olur; yani, ∇f 'nin M üzerinde bir normal vektör alanı olduğu görülür. ■

Sonuç 2.4. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c$ kapalı denklemi ile verilen M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı $\mathbf{N} = \mp \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ dir.

Tanım 2.31. $\mathbb{E}^4$ uzayında regüler bir hiperyüzey

$$\mathbf{R}(u_1, u_2, u_3) = (x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3), w(u_1, u_2, u_3))$$

parametrik denklemi ile verilsin. $\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i}$, $i = 1, 2, 3$ olmak üzere M regüler olduğundan, $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ ve $\mathbf{R}_3$ kısmi türevleri her noktada lineer bağımsızdır. Bu nedenle M 'nin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3}{\|\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3\|} \quad (2.33)$$

ile tanımlanır.

M , $\mathbb{E}^4$ uzayında $\mathbf{R} = \mathbf{R}(u_1, u_2, u_3)$ parametrik denklemi ile verilen bir hiperyüzey ve

$\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olmak üzere eğrinin ilk dört türevi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\alpha'(s) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u'_i, \quad (2.34)$$

$$\alpha''(s) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u''_i + \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u'_i u'_j, \quad (2.35)$$

$$\alpha'''(s) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u'''_i + 3 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u'_i u''_j + \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u'_i u'_j u'_k, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(4)}(s) = & \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u_i^{(4)} + 4 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u'''_i u'_j + 3 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u''_i u''_j \\ & + 6 \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u'_i u'_j u''_k + \sum_{i,j,k,l=1}^3 \mathbf{R}_{ijkl} u'_i u'_j u'_k u'_l. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i}, \quad \mathbf{R}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u_i \partial u_j}, \\ \mathbf{R}_{ijk} &= \frac{\partial^3 \mathbf{R}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}, \quad \mathbf{R}_{ijkl} = \frac{\partial^4 \mathbf{R}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k \partial u_l}; \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

şeklindedir.

2.5 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Herhangi Bir Hiperyüzey için Şekil Operatörü

Tanım 2.32. $D : \chi(\mathbb{E}^4) \times \chi(\mathbb{E}^4) \rightarrow \chi(\mathbb{E}^4)$, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ fonksiyonu, $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \chi(\mathbb{E}^4)$ ve $\forall f, g \in C(\mathbb{E}^4, \mathbb{R})$ için

- $D_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f D_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g D_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$
- $D_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = \mathbf{X}[f]\mathbf{Y} + f D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$,

özelliklerini sağlıyorsa D 'ye $\mathbb{E}^4$ uzayında bir afin konneksiyon denir. Eğer D afin konneksiyonu

- $D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$
- $\mathbf{X}[\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle] = \langle D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle + \langle \mathbf{Y}, D_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} \rangle$

özelliklerini de sağlıyorsa D 'ye Riemann konneksiyonu denir, [18].

Tanım 2.33. $M, \mathbb{E}^4$ uzayında herhangi bir regüler hiperyüzey ve M 'nin birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. $D, \mathbb{E}^4$ uzayında Riemann konneksiyonu olmak üzere $\forall \mathbf{X} \in \chi(M)$ için

$$S(\mathbf{X}) = -D_{\mathbf{X}}\mathbf{N} \quad (2.38)$$

ile tanımlı $S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümüne M 'nin şekil operatörü denir. $\forall P \in M$ için $\mathbf{X}_P \in T_M(P)$ olup, $S_P(\mathbf{X}_P) = -D_{\mathbf{X}_P}\mathbf{N}$ şeklindedir.

$\mathbf{v}_P \in T_{\mathbb{E}^4}(P)$ ve $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(\mathbb{E}^4)$ türevlenebilir bir vektör alanı olmak üzere $\mathbf{X}$ 'in $\mathbf{v}_P$ yönündeki kovaryant türevi $D_{\mathbf{v}_P}\mathbf{X}$ ile gösterilir ve bu türev $D_{\mathbf{v}_P}\mathbf{X} = \frac{d}{dt}\mathbf{X}(P + t\mathbf{v})\big|_{t=0}$ şeklinde tanımlanır.

$\mathbf{v}_P = \sum_{i=1}^4 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bigg|_P$ olmak üzere kovaryant türev

$$D_{\mathbf{v}_P}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 v_P[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \bigg|_P$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \bigg|_P \right\}, i = 1, 2, 3, 4, T_{\mathbb{E}^4}(P)$ vektör uzayı için bir bazdır. $\alpha, \mathbb{E}^4$ uzayında bir eğri ve $\mathbf{X} \in \chi(\mathbb{E}^4)$ olsun. $\mathbf{X}$ 'in α 'nın $\alpha'(t)$ teğet vektörü yönündeki kovaryant türevi $D_{\alpha'(t)}\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\alpha(t)})'$ ile verilir.

Teorem 2.10. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey olsun. M 'nin şekil operatörü S olmak üzere

- i) S bir lineer operatördür,
- ii) S operatörü simetriktir.

İspat. i) Verilen her $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \chi(M)$ ve her $f, g \in C(M, \mathbb{R})$ için

$$S(f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}) = D_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{N} = fD_{\mathbf{X}}\mathbf{N} + gD_{\mathbf{Y}}\mathbf{N} = fS(\mathbf{X}) + gS(\mathbf{Y})$$

elde edilir. Bu durumda S operatörü lineerdir.

ii) S operatörünün simetrik olduğunu göstermek için her $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \chi(M)$ için $\langle S(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{X}, S(\mathbf{Y}) \rangle$ olduğu gösterilmelidir. $\langle \mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{N} \rangle = 0$ olduğundan

$$\mathbf{X}[\langle \mathbf{Y}, \mathbf{N} \rangle] = 0 \Rightarrow \langle D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{Y}, D_{\mathbf{X}}\mathbf{N} \rangle = 0$$

$$\mathbf{Y}[\langle \mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle] = 0 \Rightarrow \langle D_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{X}, D_{\mathbf{Y}}\mathbf{N} \rangle = 0$$

bulunur. Buradan

$$\langle [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{Y}, S(\mathbf{X}) \rangle - \langle \mathbf{X}, S(\mathbf{Y}) \rangle = 0$$

elde edilir. $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \chi(M)$ olduğundan $\langle S(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{X}, S(\mathbf{Y}) \rangle$ elde edilir. ■

Teorem 2.11. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve M 'nin birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. α , M üzerinde bir eğri ise

$$\langle \alpha'', \mathbf{N} \rangle = \langle S(\alpha'), \alpha' \rangle.$$

İspat. $\alpha' \in \chi(M)$ ve $\mathbf{N} \in \chi(M)^\perp$ olduğundan $\langle \alpha', \mathbf{N} \rangle = 0$ dır. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle \alpha'', \mathbf{N} \rangle + \langle \alpha', \mathbf{N}' \rangle = 0$$

ise

$$\langle \alpha'', \mathbf{N} \rangle = -\langle \alpha', \mathbf{N}' \rangle = -\langle \alpha', D_{\alpha'} \mathbf{N} \rangle = \langle \alpha', S(\alpha') \rangle$$

olarak bulunur. ■

Tanım 2.34. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve M 'nin şekil operatörü S olsun. $1 \leq q \leq 4$ olmak üzere, $I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \langle S^{q-1}(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle$ şeklinde tanımlanan I^q fonksiyonuna M 'nin q . temel formu denir.

Burada,

- $q = 1 \Rightarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$
- $q = 2 \Rightarrow II(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle S(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle$
- $q = 3 \Rightarrow III(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle S(\mathbf{X}), S(\mathbf{Y}) \rangle$
- $q = 4 \Rightarrow I^4(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle S^2(\mathbf{X}), S(\mathbf{Y}) \rangle.$

Eğer $g_{ij} = \langle \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j \rangle$ ve $h_{ij} = \langle S(\mathbf{R}_i), \mathbf{R}_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq 3$, alınırsa, $\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3\}$, $\chi(M)$ için bir baz oluşturduğundan, $\mathbf{X} = a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_2 + a_3 \mathbf{R}_3$ ve $\mathbf{Y} = b_1 \mathbf{R}_1 + b_2 \mathbf{R}_2 + b_3 \mathbf{R}_3 \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \\ &= \langle a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_2 + a_3 \mathbf{R}_3, b_1 \mathbf{R}_1 + b_2 \mathbf{R}_2 + b_3 \mathbf{R}_3 \rangle \\ &= g_{11} a_1 b_1 + g_{22} a_2 b_2 + g_{33} a_3 b_3 + g_{12} (a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &\quad + g_{13} (a_1 b_3 + a_3 b_1) + g_{23} (a_2 b_3 + a_3 b_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda birinci temel form

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = g_{11} a_1^2 + g_{22} a_2^2 + g_{33} a_3^2 + 2g_{12} a_1 a_2 + 2g_{13} a_1 a_3 + 2g_{23} a_2 a_3 \quad (2.39)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde ikinci temel form

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \langle S(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle \\
&= \langle S(a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_2 + a_3 \mathbf{R}_3), b_1 \mathbf{R}_1 + b_2 \mathbf{R}_2 + b_3 \mathbf{R}_3 \rangle \\
&= h_{11}a_1b_1 + h_{22}a_2b_2 + h_{33}a_3b_3 + h_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) \\
&\quad + h_{13}(a_1b_3 + a_3b_1) + h_{23}(a_2b_3 + a_3b_2)
\end{aligned}$$

olacağından

$$\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = h_{11}a_1^2 + h_{22}a_2^2 + h_{33}a_3^2 + 2h_{12}a_1a_2 + 2h_{13}a_1a_3 + 2h_{23}a_2a_3 \quad (2.40)$$

şeklindedir. Burada g_{ij} ve h_{ij} 'ye, sırasıyla, birinci ve ikinci temel form katsayıları denir.

Tanım 2.35. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve M 'nin şekil operatörü S olsun. M üzerinde herhangi bir $\mathbf{v}_p$ birim teğet vektörü için

$$\kappa_n(\mathbf{v}_p) = \langle S(\mathbf{v}_p), \mathbf{v}_p \rangle \quad (2.41)$$

sayısına M 'nin P noktasında $\mathbf{v}_p$ doğrultusunda normal eğriliği denir.

Eğer $\mathbf{w}_p$ herhangi bir teğet vektörü ise

$$\kappa_n(\mathbf{w}_p) = \frac{\langle S(\mathbf{w}_p), \mathbf{w}_p \rangle}{\langle \mathbf{w}_p, \mathbf{w}_p \rangle} = \frac{\Pi(\mathbf{w}_p, \mathbf{w}_p)}{I(\mathbf{w}_p, \mathbf{w}_p)} \quad (2.42)$$

olarak yazılır. $\mathbf{w}_p = a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_2 + a_3 \mathbf{R}_3 \in T_M(P)$ olmak üzere (2.39) ve (2.40) eşitlikleri (2.42)'de yerine yazılırsa,

$$\kappa_n(\mathbf{w}_p) = \frac{h_{11}a_1^2 + h_{22}a_2^2 + h_{33}a_3^2 + 2h_{12}a_1a_2 + 2h_{13}a_1a_3 + 2h_{23}a_2a_3}{g_{11}a_1^2 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3} \quad (2.43)$$

elde edilir.

2.6 $\mathbb{E}^4$ Uzayında bir Hiperyüzeyin Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri

Tanım 2.36. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve M 'nin şekil operatörü $S_p : T_M(P) \rightarrow T_M(P)$ olsun. S_p lineer dönüşümüne karşılık gelen özdeğerlere M 'nin P noktasındaki asli eğrilikleri, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlere asli doğrultular ve asli doğrultulardaki birim vektöre asli vektör denir.

Bu durumda eğer $\mathbf{v}_p$ herhangi bir teğet vektörü ise $S(\mathbf{v}_p) = \lambda \mathbf{v}_p$ eşitliğinde λ asli

eğrilik, $\mathbf{v}_p$ asli doğrultudur. $\mathbb{E}^4$ uzayında herhangi bir hiperyüzeyin asli eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ile gösterilir. M hiperyüzeyinin P noktasındaki asli eğrilikleri o noktadaki normal eğriliğin "extremal" değerleridir, [23].

Teorem 2.12. $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperyüzeyi M olsun. M 'nin asli eğrilikleri baz seçiminden bağımsızdır.

İspat. Teğet vektör uzayı $T_M(P)$ 'nin iki farklı bazı ϕ ve φ olsun. S şekil operatörünün bu bazlara karşılık gelen matrisi, sırasıyla, S_ϕ ve S_φ ise bu iki matris arasında öyle bir Q regüler matrisi vardır ki $S_\varphi = QS_\phi Q^{-1}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} P_{s_\varphi}(\lambda) &= |\lambda I_4 - S_\varphi| = |\lambda I_4 - QS_\phi Q^{-1}| = |\lambda QQ^{-1} - QS_\phi Q^{-1}| \\ &= |(\lambda Q - QS_\phi)Q^{-1}| = |Q(\lambda I_4 - S_\phi)Q^{-1}| = |Q| |\lambda I_4 - S_\phi| |Q^{-1}| \\ &= |\lambda I_4 - S_\phi| = P_{s_\phi}(\lambda) \end{aligned}$$

olacağından özdeğerler aynı olur. Bu durumda asli eğrilikler aynıdır. ■

Teorem 2.13. $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperyüzeyi M olsun. M 'nin farklı asli eğriliklerine karşılık gelen asli doğrultular birbirine ortogondur.

İspat. κ_1, κ_2 iki farklı asli eğrilik ve bu asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular, sırasıyla, $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p$ olsun. Bu durumda $S(\mathbf{v}_p) = \kappa_1 \mathbf{v}_p$ ve $S(\mathbf{w}_p) = \kappa_2 \mathbf{w}_p$ yazılır. S operatörü simetrik olduğundan $\langle S(\mathbf{v}_p), \mathbf{w}_p \rangle = \langle \mathbf{v}_p, S(\mathbf{w}_p) \rangle$ yazılır. Buradan

$$\langle \kappa_1 \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \rangle = \langle \mathbf{v}_p, \kappa_2 \mathbf{w}_p \rangle \Rightarrow \kappa_1 \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \rangle - \kappa_2 \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \rangle = 0 \Rightarrow (\kappa_1 - \kappa_2) \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \rangle = 0$$

bulunur. κ_1 ve κ_2 iki farklı asli eğrilik olduğundan $\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \rangle = 0$ elde edilir. ■

Tanım 2.37. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve M 'nin şekil operatörü S olsun.

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto K(P) = \det S_P$$

ile tanımlanan K fonksiyonuna Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(P)$ reel sayısına M 'nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir.

Teorem 2.14. $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperyüzeyi M olsun. M 'nin Gauss eğriliği baz seçiminden bağımsızdır.

İspat. ϕ ve φ , $T_M(P)$ vektör uzayı için iki farklı baz olsun. Bu bazlara karşılık gelen S şekil operatörünün matrisi S_ϕ ve S_φ ise iki matris arasında öyle bir Q regüler matrisi

vardır ki $S_\varphi = QS_\phi Q^{-1}$ olur. Buradan,

$$\det S_\varphi = \det(QS_\phi Q^{-1}) = \det Q \cdot \det S_\phi \cdot \det Q^{-1} = \det S_\phi$$

elde edilir. Bu durumda, S şekil operatörünün determinantiyla tanımlanan Gauss eğriliği baz seçiminden bağımsız olur. ■

Teorem 2.15. $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperyüzeyi M ve M 'nin P noktasındaki farklı asli eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 ise $K(P) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$ olur.

İspat. κ_1, κ_2 ve κ_3 asli eğriliklerine karşılık gelen asli vektörler $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ olsun. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri birbirlerine dik oldukları için $T_M(P)$ vektör uzayı için bir ortonormal baz oluştururlar. Bu durumda, $S(\mathbf{v}_i) = \kappa_i \mathbf{v}_i, 1 \leq i \leq 3$, olmak üzere $\varphi = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortonormal bazına göre yazılan şekil operatörünün matrisi

$$S_\varphi = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Gauss eğriliği baz seçiminden bağımsız olacağından,

$$K(P) = \det S_\varphi = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$$

elde edilir. ■

Tanım 2.38. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve M 'nin şekil operatörü S olsun.

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto H(P) = \frac{1}{3} \text{iz } S_P$$

ile tanımlanan H fonksiyonuna ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P)$ reel sayısına M 'nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir.

Teorem 2.16. $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperyüzeyi M olsun. M 'nin ortalama eğriliği baz seçiminden bağımsızdır.

İspat. ϕ ve $\varphi, T_M(P)$ vektör uzayı için iki farklı baz olsun. Bu bazlara karşılık gelen S şekil operatörünün matrisi S_ϕ ve S_φ ise iki matris arasında öyle bir Q regüler matrisi vardır ki $S_\varphi = QS_\phi Q^{-1}$ olur. Buradan,

$$\text{iz } S_\varphi = \text{iz}(QS_\phi Q^{-1}) = \text{iz}(Q^{-1}QS_\phi) = \text{iz } S_\phi$$

elde edilir. Bu durumda, S şekil operatörünün determinantıyla tanımlanan ortalama eğriliği baz seçiminden bağımsız olur. ■

Teorem 2.17. $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperyüzeyi M ve M 'nin P noktasındaki asli eğrilikleri κ_1 , κ_2 ve κ_3 ise $H(P) = \frac{1}{3}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)$ şeklindedir.

İspat. Teorem 2.15'in ispatında elde edilen şekil operatörünün matrisinden kolayca elde edilebilir. ■

Tanım 2.39. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve α , M üzerinde bir eğri olsun. Eğer M 'nin her noktasındaki hız vektörü bir asli doğrultuya karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisi (asli eğri) denir.

Bu durumda M üzerinde bir α eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul

$$S(\alpha') = \lambda \alpha'$$

olmasıdır.

Tanım 2.40. $M \subset \mathbb{E}^4$ hiperyüzeyinin $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S_P olsun. Eğer $S_P = \lambda I_3$ oluyorsa, P 'ye M 'nin umbilik noktası, $S_P = 0$ oluyorsa, P 'ye M 'nin flat noktası denir.

Örnek

$M \subset \mathbb{E}^4$ hiperyüzeyi $\mathbf{R}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3, u_1 u_2 u_3)$ parametrik denklemi ile verilsin. Bu halde,

$$\mathbf{R}_1 = (1, 0, 0, u_2 u_3) \text{ ve normlanmış } \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{R}_1}{\|\mathbf{R}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_2^2 u_3^2}} (1, 0, 0, u_2 u_3),$$

$$\mathbf{R}_2 = (0, 1, 0, u_1 u_3) \text{ ve normlanmış } \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{R}_2}{\|\mathbf{R}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2 u_3^2}} (0, 1, 0, u_1 u_3)$$

ve

$$\mathbf{R}_3 = (0, 0, 1, u_1 u_2) \text{ için } \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{R}_3}{\|\mathbf{R}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2 u_2^2}} (0, 0, 1, u_1 u_2)$$

bulunur.

Bu durumda, M 'nin birim normal vektör alanı, $\ell = \sqrt{1 + u_1^2 u_2^2 + u_1^2 u_3^2 + u_2^2 u_3^2}$ olmak üzere

$$\mathbf{N} = \frac{(u_2 u_3, u_1 u_3, u_1 u_2, -1)}{\ell}$$

olarak bulunur. Eğer M 'nin $P = (1, 1, 0, 0)$ noktasındaki teğet vektör uzayından $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$ ve $\mathbf{v}_3 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ vektörleri seçilirse,

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}_1) &= \frac{-1}{\|\mathbf{R}_1\|} D_{\mathbf{R}_1} \mathbf{N} = \frac{-1}{\|\mathbf{R}_1\|} \mathbf{N}_1 \\ &= \left(0, 0, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right) = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{v}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}_2) &= \frac{-1}{\|\mathbf{R}_2\|} D_{\mathbf{R}_2} \mathbf{N} = \frac{-1}{\|\mathbf{R}_2\|} \mathbf{N}_2 \\ &= \left(0, 0, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right) = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{v}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}_3) &= \frac{-1}{\|\mathbf{R}_3\|} D_{\mathbf{R}_3} \mathbf{N} = \frac{-1}{\|\mathbf{R}_3\|} \mathbf{N}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{v}_1 - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

olur. O halde, S şekil operatörünün matrisi için

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Şekil operatörünün özdeğerleri M 'nin asli eğriliklerine karşılık geldiğinden,

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} = 0$$

eşitliğinden M hiperyüzeyinin asli eğrilikleri $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak bulunur.

2.7 $\mathbb{E}^4$ Uzayında Darboux Çatısı

$M \subset \mathbb{E}^4$ bir hiperyüzey ve M 'nin birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. α , M üzerinde C^n sınıfından birim hızlı bir Frenet eğrisi olmak üzere, α 'nın birim teğet vektör alanı $\mathbf{T}$ ve hiperyüzeyin eğriye kısıtlanmış birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ için

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \text{ ve } \mathbf{N}(s) = N(\alpha(s))$$

yazılır. Eğer $\{N, T, \alpha''\}$ lineer bağımsız bir küme ise Gram-Schmidt metodu ile

$$E = \frac{\alpha'' - \langle \alpha'', N \rangle N}{\|\alpha'' - \langle \alpha'', N \rangle N\|} \quad (2.44)$$

olacak şekilde $\{N, T, E\}$ ortonormal kümesi elde edilebilir. Eğer $\{N, T, \alpha''\}$ lineer bağımlı ise, yani α'' ile N aynı doğrultuda ise $\{N, T, \alpha'''\}$ kümesine Gram-Schmidt metodu uygulanarak

$$E = \frac{\alpha''' - \langle \alpha''', N \rangle N - \langle \alpha''', T \rangle T}{\|\alpha''' - \langle \alpha''', N \rangle N - \langle \alpha''', T \rangle T\|} \quad (2.45)$$

elde edilir. Her iki durumda da $D = N \otimes T \otimes E$ tanımlanarak, birbirine dik T, E, D ve N birim vektör alanları elde edilir. Bu durumda, $\mathbb{E}^4$ uzayında α eğrisi boyunca genişletilmiş Darboux çatı alanı $\{T, E, D, N\}$ kurulabilir. Eğer $\{N, T, \alpha''\}$ kümesi lineer bağımsız ise bu çatıya “birinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanı”, $\{N, T, \alpha''\}$ kümesi lineer bağımlı ise bu çatıya “ikinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanı” denir, [24].

2.7.1 Genişletilmiş Darboux Çatısının Türev Denklemleri

$\{T, E, D, N\}$, $\chi(M)$ için bir ortonormal baz olduğundan birbirine dik T, E, D ve N birim vektörlerinin türevleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} T' &= \langle T', E \rangle E + \langle T', D \rangle D + \langle T', N \rangle N \\ E' &= \langle E', T \rangle T + \langle E', D \rangle D + \langle E', N \rangle N \\ D' &= \langle D', T \rangle T + \langle D', E \rangle E + \langle D', N \rangle N \\ N' &= \langle N', T \rangle T + \langle N', E \rangle E + \langle N', D \rangle D \end{aligned} \quad (2.46)$$

Birinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanı kurarken elde edilen (2.44) eşitliğinden, $T' = \|T' - \langle T', N \rangle N\| E + \langle T', N \rangle N$ olarak yazılırsa, $\langle T', D \rangle = 0$ elde edilir.

İkinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanı için $\{N, T, \alpha''\}$ lineer bağımlı olduğundan, $\alpha'' = \lambda N$ olarak yazılır. Bu durumda, $\langle T', E \rangle = \langle T', D \rangle = 0$ olarak bulunur. Ayrıca, $\alpha''' = \lambda' N + \lambda N'$ eşitliği (2.45)'de yerine yazılırsa $\langle N', D \rangle = 0$ olarak elde edilir.

Tanım 2.41. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir regüler hiperyüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin τ_g^1 ve τ_g^2 birinci ve ikinci mertebeden geodezik burulması, sırasıyla, $\tau_g^1 = \langle E', N \rangle$ ve $\tau_g^2 = \langle D', N \rangle$ olarak tanımlanır, [24].

Teorem 2.18. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir regüler hiperyüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul birinci ve ikinci mertebeden geodezik burulmalarının her noktada sıfır olmasıdır, [24].

Tanım 2.42. $M \subset \mathbb{E}^4$ bir regüler hiperyüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin κ_g^1 ve κ_g^2 birinci ve ikinci mertebeden geodezik eğrilikleri, sırasıyla, $\kappa_g^1 =$

$\langle \mathbf{T}', \mathbf{E} \rangle$ ve $\kappa_g^2 = \langle \mathbf{E}', \mathbf{D} \rangle$ olarak tanımlanır, [24].

(2.41)'de tanımlanan normal eğrilik $\kappa_n = \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle$ kullanılarak, “birinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanı” ve “ikinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanı” için türev denklemleri matris formunda, sırasıyla, aşağıdaki gibi yazılır, [24]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{E}' \\ \mathbf{D}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g^1 & 0 & \kappa_n \\ -\kappa_g^1 & 0 & \kappa_g^2 & \tau_g^1 \\ 0 & -\kappa_g^2 & 0 & \tau_g^2 \\ -\kappa_n & -\tau_g^1 & -\tau_g^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{E}' \\ \mathbf{D}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa_n \\ 0 & 0 & \kappa_g^2 & \tau_g^1 \\ 0 & -\kappa_g^2 & 0 & 0 \\ -\kappa_n & -\tau_g^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

3

EĞRİLİK ÇİZGİSİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik denklemi ile verilen bir regüler yüzey üzerindeki eğrilik çizgilerinin [8]'de verilen diferensiyel geometrik özellikleri incelenerek, yüzey üzerinde belirli bir noktadan geçen eğrilik çizgisinin nasıl bulunabileceği ve elde edilen eğrilik çizgisinin Frenet elemanlarının nasıl hesaplanacağı gösterilecektir.

$\mathbb{E}^3$ uzayında $\mathbf{R}(u, v)$ parametrik denklemiyle verilen herhangi hızlı bir $\mathbf{c}(s)$ eğrisi için $\mathbf{c}(s) = \mathbf{R}(u(s), v(s))$ yazılır. Bu eğrinin $\mathbf{c}'(s)$ teğet vektörü doğrultusunda $\mathbf{R}(u, v)$ yüzeyinin normal eğriliği

$$\kappa_n(\mathbf{c}'(s)) = \frac{S(\mathbf{c}'(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)}{\mathbf{c}'(s) \cdot \mathbf{c}'(s)}$$

olacağından,

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{S(\mathbf{c}'(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)}{\mathbf{c}'(s) \cdot \mathbf{c}'(s)} \\ &= \frac{S(\mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v') \cdot (\mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v')}{(\mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v') \cdot (\mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v')} \\ &= \frac{(u' S(\mathbf{R}_u) + v' S(\mathbf{R}_v)) \cdot (\mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v')}{\mathbf{R}_u \cdot \mathbf{R}_u (u')^2 + 2\mathbf{R}_u \cdot \mathbf{R}_v u' v' + \mathbf{R}_v \cdot \mathbf{R}_v (v')^2} \\ &= \frac{(-\mathbf{N}_u u' - \mathbf{N}_v v') \cdot (\mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v')}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} \\ &= \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$E = \mathbf{R}_u \cdot \mathbf{R}_u, \quad F = \mathbf{R}_u \cdot \mathbf{R}_v, \quad G = \mathbf{R}_v \cdot \mathbf{R}_v$$

birinci temel form katsayıları ve

$$L = -\mathbf{R}_u \cdot \mathbf{N}_u, \quad M = -\mathbf{R}_u \cdot \mathbf{N}_v, \quad N = -\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{N}_v$$

ikinci temel form katsayılarıdır. Yüzeyin P noktasındaki ve $\lambda = \frac{dv}{du}$ doğrultusundaki normal eğriliği, [6]

$$\kappa_n(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \quad (3.1)$$

olarak düzenlenebilir. $\lambda = \frac{dv}{du}$, yüzeyin P noktasından geçen $\mathbf{c}$ eğrisinin o noktadaki teğetinin doğrultusudur.

Normal eğriliğin maksimum ve minimum değerleri asli eğrilikleri verir. Bu nedenle bu eğrilikler normal eğriliğin birinci türevini sıfıra eşitleyerek hesaplanabilir. O halde

$$\frac{d\kappa_n}{d\lambda} = \frac{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(N\lambda + M) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(G\lambda + F)}{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)^2} = 0$$

eşitliğinden

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(N\lambda + M) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(G\lambda + F) = 0 \quad (3.2)$$

olup,

$$\kappa_n(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} = \frac{N\lambda + M}{G\lambda + F}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2) yeniden düzenlenirse,

$$(L + M\lambda + (M + N\lambda)\lambda)(G\lambda + F) - (E + F\lambda + (F + G\lambda)\lambda)(N\lambda + M) = 0$$

olacağından

$$(L + M\lambda)(G\lambda + F) - (E + F\lambda)(N\lambda + M) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\kappa_n(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} = \frac{N\lambda + M}{G\lambda + F} = \frac{M\lambda + L}{F\lambda + E} \quad (3.3)$$

olur. Bu durumda normal eğriliğin maksimum ve minimum değerleri, aşağıdaki homojen denklem sisteminin çözümleri olur:

$$\begin{aligned} (L - \kappa_n E)du + (M - \kappa_n F)dv &= 0 \\ (M - \kappa_n F)du + (N - \kappa_n G)dv &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.4) eşitliğindeki birinci dereceden homojen denklem sisteminin du ve dv için aşık olmaya çözümün olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} L - \kappa_n E & M - \kappa_n F \\ M - \kappa_n F & N - \kappa_n G \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

olmasıdır. Determinant hesaplanırsa

$$(EG - F^2)\kappa_n^2 - (EN + GL - 2FM)\kappa_n + (LN - M^2) = 0 \quad (3.6)$$

şeklinde ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde edilir. Gauss eğrilik (K) ve ortalama eğrilik (H), birinci ve ikinci temel formun katsayıları cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}. \quad (3.7)$$

(3.7)'deki eşitlikler (3.6)'da yerine yazılırsa κ_n için ikinci dereceden denklem

$$\kappa_n^2 - 2H\kappa_n + K = 0 \quad (3.8)$$

şeklinde basitleştirilebilir. Bu ikinci dereceden denklem çözülerek denklemin kökleri

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (3.9)$$

olarak bulunur. Normal eğriliğin maksimum ve minimum değerleri asli eğrilikleri verdiği için, κ_1 maksimum asli eğrilik, κ_2 minimum asli eğrilik olur, [1]. Bu durumda $\kappa_1 = \kappa_{max}$ ve $\kappa_2 = \kappa_{min}$ yazılabilir. Yüzey üzerinde alınan bir noktadaki teğet düzlemi içinde normal eğriliği maksimum ve minimum yapan doğrultulara asli doğrultular denir.

3.1 Eğrilik Çizgisinin Hesaplanması

Normal eğriliğin maksimum ve minimum değerlerinin (3.9)'da

$$\kappa_{max} = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_{min} = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (3.10)$$

olarak yazılabildiği ve bunların da asli eğrilikler olduğu biliniyor. Bu durumda, maksimum asli eğrilığe karşılık gelen asli doğrultuya λ_{max} ve minimum asli eğrilığe karşılık gelen asli doğrultuya λ_{min} denirse, bu asli doğrultular (3.4)'den aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\lambda_{max} = \frac{M - \kappa_{max}F}{N - \kappa_{max}G}, \quad \lambda_{min} = \frac{L - \kappa_{min}E}{M - \kappa_{min}F}. \quad (3.11)$$

(3.4) eşitliği yazılırken normal eğriliğin maksimum ve minimum değerleri olan asli eğrilikler kullanıldığı için bu asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular (3.4) eşitliğini sağlar. Bu denklemin birinci ve ikinci eşitliğinden ve $L - \kappa_n E \neq 0$, $M - \kappa_n F \neq 0$ olduğundan

$$u' = \frac{-(M - \kappa_n F) v'}{L - \kappa_n E}, \quad v' = \frac{-(L - \kappa_n E) u'}{M - \kappa_n F} \quad (3.12)$$

$$u' = \frac{-(N - \kappa_n G) v'}{M - \kappa_n F}, \quad v' = \frac{-(M - \kappa_n F) u'}{N - \kappa_n G} \quad (3.13)$$

olarak yazılır. Birim hızlı bir eğri için birinci temel form, [1]

$$I = d\mathbf{c} \cdot d\mathbf{c} = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = 1$$

olduğundan, (3.12) eşitliğinden u' , birinci temel formda yerine yazılırsa

$$E \left(\frac{-(M - \kappa_n F) v'}{L - \kappa_n E} \right)^2 + 2F \left(\frac{-(M - \kappa_n F) v'}{L - \kappa_n E} \right) v' + G(v')^2 = 1$$

olup,

$$u' = \pm \frac{M - \kappa_n F}{\sqrt{E(M - \kappa_n F)^2 - 2F(M - \kappa_n F)(L - \kappa_n E) + G(L - \kappa_n E)^2}} \quad (3.14)$$

$$v' = \pm \frac{L - \kappa_n E}{\sqrt{E(M - \kappa_n F)^2 - 2F(M - \kappa_n F)(L - \kappa_n E) + G(L - \kappa_n E)^2}} \quad (3.15)$$

eşitlikleri elde edilir. Aynı şekilde (3.13)'teki v' eşitliği birinci temel form eşitliğinde yerine yazılırsa

$$u' = \pm \frac{N - \kappa_n G}{\sqrt{E(N - \kappa_n G)^2 - 2F(M - \kappa_n F)(N - \kappa_n G) + G(M - \kappa_n F)^2}} \quad (3.16)$$

$$v' = \pm \frac{M - \kappa_n F}{\sqrt{E(N - \kappa_n G)^2 - 2F(M - \kappa_n F)(N - \kappa_n G) + G(M - \kappa_n F)^2}} \quad (3.17)$$

elde edilir.

Eğrilik çizgisini bulmak için (3.14) – (3.15) ve (3.16) – (3.17) eşitliklerinden birinin seçilip, yay parametresine göre integral alınması gerekir. Hangi eşitliğin seçileceği, katsayılarının büyüklüğüne bağlı olduğunu söyleyen bir algoritma ile bulunabilir (Alourdas vd., [25]). Bu algoritmaya göre, her iki eşitlikte de $M - \kappa_n F$ ortak bulunduğu için, $|L - \kappa_n E| \geq |N - \kappa_n G|$ ise (3.12), aksi takdirde (3.13)'ün kullanılması gerekir. Aynı algoritmadan dolayı, kullanılan eşitliğin işaret seçimi [9] ve [10]'da detaylı olarak incelenmiştir. Kullanılacak eşitlik ve işaret seçimi yapıldıktan sonra, eğrilik çizgisini bulmak için lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi $u(s_0) = u_0$ ve $v(s_0) = v_0$

başlangıç şartı ile çözülür ve elde edilen $u(s)$ ve $v(s)$ fonksiyonları yüzey üzerinde yerine yazılırsa, yüzey üzerinde $\mathbf{c}(s_0) = \mathbf{R}(\mathbf{u}(s_0), \mathbf{v}(s_0)) = \mathbf{P}$ başlangıç noktasından geçen $\mathbf{c}$ eğrilik çizgisi, Runge-Kutta metodu gibi bazı nümerik tekniklerle elde edilir, [26].

3.2 Eğrilik

Eğrilik çizgisi yüzey üzerinde bir eğri olarak düşünülebildiği gibi bir uzay eğrisi olarak da düşünülebilir. Bu durumda, eğrilik çizgisinin ikinci türevi aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\mathbf{c}''(s) = \kappa_n \mathbf{N} + \kappa_g \mathbf{U} = \mathbf{R}_u u'' + \mathbf{R}_v v'' + \boldsymbol{\alpha}_2. \quad (3.18)$$

Burada

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{R}_{uu} (u')^2 + 2\mathbf{R}_{uv} u'v' + \mathbf{R}_{vv} (v')^2 \quad (3.19)$$

şeklindedir. u' ve v' (3.12)'de hesaplandığından (2.10)'dan $\mathbf{t}$ hesaplanabilir. (3.18) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{R}_u$ ve $\mathbf{R}_v$ ile iç çarpılırsa

$$Eu'' + Fv'' - \kappa_g (\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_u) = -\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{R}_u \quad (3.20)$$

$$Fu'' + Gv'' - \kappa_g (\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_v) = -\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{R}_v \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.20) ve (3.21)'de u'' , v'' ve κ_g bilinmeyenlerdir. Bu durumda denklem sistemini çözmek için üçüncü bir denklem daha yazılmalıdır. Bu denklemi elde etmek için (3.4)'ün ilk denkleminin türevi alınır

$$\frac{d}{ds} ((L - \kappa_n E) du + (M - \kappa_n F) dv) = 0 \Rightarrow (L - \kappa_n E) u'' + (M - \kappa_n F) v'' = \boldsymbol{\beta}_1 \quad (3.22)$$

elde edilir. Burada

$$\boldsymbol{\beta}_1 = -(L' - \kappa_n' E - \kappa_n E') u' - (M' - \kappa_n' F - \kappa_n F') v' \quad (3.23)$$

şeklindedir. (3.23)'de bulunan birinci ve ikinci temel formların katsayılarının türevleri, sırasıyla,

$$E' = 2(\mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v') \cdot \mathbf{R}_u, \quad F' = 2(\mathbf{R}_{uv} u' + \mathbf{R}_{vv} v') \cdot \mathbf{R}_v,$$

$$L' = (\mathbf{N}_{uu} u' + \mathbf{N}_{uv} v') \cdot \mathbf{R}_u + \mathbf{N}_u \cdot (\mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v')$$

ve

$$M' = (\mathbf{N}_{uv} u' + \mathbf{N}_{vv} v') \cdot \mathbf{R}_u + \mathbf{N}_v \cdot (\mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v')$$

olarak yazılır. (3.20) – (3.22) eşitlikleri bir arada yazılırsa

$$Eu'' + Fv'' - \kappa_g (\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_u) = -\alpha_2 \cdot \mathbf{R}_u$$

$$Fu'' + Gv'' - \kappa_g (\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_v) = -\alpha_2 \cdot \mathbf{R}_v$$

$$(L - \kappa_n E)u'' + (M - \kappa_n F)v'' = \beta_1$$

biçiminde homojen olmayan lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin matris formu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} E & F & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_u \\ F & G & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_v \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \\ \kappa_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 \cdot \mathbf{R}_u \\ -\alpha_2 \cdot \mathbf{R}_v \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Eğer (3.24)'deki katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olursa sistemden u'' , v'' ve κ_g bulunabilir. Böylece eğrilik çizgisinin eğriliği

$$\kappa = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2} \quad (3.25)$$

denklemini kullanarak elde edilir.

3.3 Burulma

Bölüm 3.2'deki eğrilik hesabında kullanıldığı gibi eğrilik çizgisinin burulması hesaplanırken eğrinin üçüncü türevi (2.6) ve (2.12) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{c}'''(s) = -\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b} = \mathbf{R}_u u''' + \mathbf{R}_v v''' + \alpha_3. \quad (3.26)$$

Burada

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & \mathbf{R}_{uuu} (u')^3 + 3\mathbf{R}_{uuv} (u')^2 v' + 3\mathbf{R}_{uvv} (v')^2 u' + \mathbf{R}_{vvv} (v')^3 \\ & + 3[\mathbf{R}_{uu} u' u'' + \mathbf{R}_{uv} (u'' v' + u' v'') + \mathbf{R}_{vv} v' v''] \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklindedir. (2.11) kullanılarak $\mathbf{n}$ hesaplanabilir. (3.26) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{R}_u$ ve $\mathbf{R}_v$ ile iç çarpılırsa, sırasıyla,

$$Eu''' + Fv''' - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) \kappa' - \kappa (\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_u) \tau = -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_u - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_u \quad (3.28)$$

$$Fu''' + Gv''' - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) \kappa' - \kappa (\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_v) \tau = -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_v - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_v \quad (3.29)$$

elde edilir. Ayrıca, (2.12) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{n}$ ile iç çarpılırsa

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) u''' + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) v''' - \kappa' = -\alpha_3 \cdot \mathbf{n} \quad (3.30)$$

elde edilir.

(3.28)–(3.30) denklemlerinde u''' , v''' , κ' ve τ bilinmeyenlerdir. Bu durumda denklem sistemini çözmek için dördüncü bir denklem daha yazılmalıdır. Bu denklemi elde etmek için (3.22)'nin türevi alınır

$$(L - \kappa_n E) u''' + (M - \kappa_n F) v'' = -\beta_2 \quad (3.31)$$

elde edilir. Burada

$$\beta_2 = - \left\{ \begin{array}{l} 2(L' - \kappa'_n E - \kappa_n E') u' + 2(M' - \kappa'_n F - \kappa_n F') v' + \\ (L' - \kappa''_n E - 2\kappa'_n E' - \kappa_n E'') u' + (M' - \kappa'_n F - 2\kappa'_n F' - \kappa_n F'') v' \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

şeklindedir.

(3.32)'de bulunan birinci ve ikinci temel form katsayılarının ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} E'' &= 2 \left(\mathbf{R}_{uuu} (u')^2 + 2\mathbf{R}_{uuv} u' v' + \mathbf{R}_{uvv} (v')^2 + \mathbf{R}_{uu} u'' + \mathbf{R}_{uv} v'' \right) \cdot \mathbf{R}_u \\ &\quad + 2 \left\| \mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v' \right\|^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} F'' &= 2 \left(\mathbf{R}_{uuv} (u')^2 + 2\mathbf{R}_{uvv} u' v' + \mathbf{R}_{vvv} (v')^2 + \mathbf{R}_{uv} u'' + \mathbf{R}_{vv} v'' \right) \cdot \mathbf{R}_u \\ &\quad + 2 \left\| \mathbf{R}_{uv} u' + \mathbf{R}_{vv} v' \right\|^2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} L'' &= \left(\mathbf{N}_{uuu} (u')^2 + 2\mathbf{N}_{uuv} u' v' + \mathbf{N}_{uvv} (v')^2 + \mathbf{N}_{uu} u'' + \mathbf{N}_{uv} v'' \right) \cdot \mathbf{R}_u \\ &\quad + \left(\mathbf{N}_{uu} u' + \mathbf{N}_{uv} v' \right) \cdot \left(\mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v' \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{R}_{uuv} (u')^2 + 2\mathbf{R}_{uvv} u' v' + \mathbf{R}_{vvv} (v')^2 + \mathbf{R}_{uv} u'' + \mathbf{R}_{vv} v'' \right) \cdot \mathbf{N}_u \\ &\quad + \left(\mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v' \right) \cdot \left(\mathbf{N}_{uu} u' + \mathbf{N}_{uv} v' \right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
M'' = & \left(\mathbf{N}_{uuu} (u')^2 + 2\mathbf{N}_{uvv} u' v' + \mathbf{N}_{vvv} (v')^2 + \mathbf{N}_{uv} u'' + \mathbf{N}_{vv} v'' \right) \cdot \mathbf{R}_u \\
& + \left(\mathbf{N}_{uv} u' + \mathbf{N}_{vv} v'' \right) \cdot \left(\mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v' \right) \\
& + \left(\mathbf{R}_{uuu} (u')^2 + 2\mathbf{R}_{uvv} u' v' + \mathbf{R}_{vvv} (v')^2 + \mathbf{R}_{uv} u'' + \mathbf{R}_{vv} v'' \right) \cdot \mathbf{N}_v \\
& + \left(\mathbf{R}_{uu} u' + \mathbf{R}_{uv} v' \right) \cdot \left(\mathbf{N}_{uv} u' + \mathbf{N}_{vv} v' \right).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

(3.28) – (3.31) eşitlikleri ile elde edilen denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} E & F & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) & -\kappa (\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_u) \\ F & G & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) & -\kappa (\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_v) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u & \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v & -1 & 0 \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''' \\ v''' \\ \kappa' \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_u - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_u \\ -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_v - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_v \\ -\alpha_3 \cdot \mathbf{n} \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

elde edilir ve katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması durumunda eğrilik çizgisinin burulması hesaplanabilir.

3.4 Singüler Durumlar

(3.24) ve (3.37)'de katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olduğu durumlarda parametrik yüzey üzerindeki bir eğrilik çizgisinin eğriliği ve burulması hesaplanabilir. Bu bölümde katsayılar matrisinin determinantının sıfır olduğu koşullar incelenecektir.

3.4.1 Eğrilik

(3.24)'deki A matrisinin determinanı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\det A = \det & \begin{bmatrix} E & F & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_u \\ F & G & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_v \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F & 0 \end{bmatrix} \\
= & \left(\{-F(M - \kappa_n F) + G(L - \kappa_n E)\} \mathbf{R}_u + \{EM - FL\} \mathbf{R}_v \right) \cdot \mathbf{U} \\
= & (\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v) \cdot \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Burada

$$\alpha = \{-F(M - \kappa_n F) + G(L - \kappa_n E)\}, \quad \beta = \{EM - FL\}$$

şeklindedir.

Determinantın sıfır olması için $\alpha = \beta = 0$ ya da $\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v$ ile $\mathbf{U}$ vektörlerinin birbirine dik olması gerekir. Bu iki durum ayrı ayrı incelenecektir.

Eğer $\alpha = \beta = 0$ ise $EM = FL$ olacağından $L - \kappa_n E = 0$ olur. $\alpha = 0$ olduğunda $G(L - \kappa_n E) = F(M - \kappa_n F)$ elde edileceğinden $F \neq 0$ ise $M - \kappa_n F = 0$ olur. Bu durumda $N - \kappa_n G = 0$ olur. **Uyarı 2.2'**deki sonuç göz önüne alınırsa, $\alpha = \beta = 0$ durumu, $P \in M$ noktasının umbilik olmasını gerektirir.

Eğer $(\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v) \perp U$ ise $\mathbf{R}(u, v)$ parametrik yüzeyi üzerinde alınan bir P noktası için $\{\mathbf{R}_u, \mathbf{R}_v\}$, $T_P(M)$ için bir bazdır. $(\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v) \perp \mathbf{N}$ olduğu için $(\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v) \perp U$ ise $\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v$, P noktasından geçen bir eğrilik çizgisinin o noktadaki teğet vektörüne paralel olur. Bu durumda $\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v$ vektörü bir asli vektör olur. Dönel yüzeyler için u ve v parametre eğrilerinin eğrilik çizgileri olduğu biliniyor, [1]. Bu durumda $F = M = 0$ ve $L - \kappa_n E \neq 0$ olduğundan, (3.4)'den

$$u' = 0$$

olur. u ve v parametre eğrilerinin teğet vektörleri ile eğrilik çizgisinin teğet vektörleri çakışacağından u yönündeki teğet, bir c sabiti için

$$\mathbf{R}_u = c(\mathbf{R}_u u' + \mathbf{R}_v v')$$

eşitliğini sağlar. Her iki taraf $\mathbf{R}_v$ ile iç çarpılırsa

$$F = cFu' + cGv' \Rightarrow Gv' = 0$$

olacağı için

$$v' = 0$$

olur. Bu durumda, bir asli vektör eğer parametre eğrisine teğet ise tanımsızdır. Sonuç olarak, (3.38)'deki durumun en azından dönel yüzeyler için bir çelişki oluşturduğu gösterilebilir.

3.4.2 Burulma

(3.37)'deki B matrisin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \det B &= \det \begin{bmatrix} E & F & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) & -\kappa(\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_u) \\ F & G & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) & -\kappa(\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_v) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u & \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v & -1 & 0 \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \kappa [(\{F(M - \kappa_n F) - G(L - \kappa_n E)\} \mathbf{R}_u + \{-E(M - \kappa_n F) + F(L - \kappa_n E)\} \mathbf{R}_v) \cdot \mathbf{b}] \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir. Burada $(a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) = (a \times b) \cdot (c \times d)$ özelliği kullanılmıştır. Bu durumda

$$\gamma = \kappa \{F(M - \kappa_n F) - G(L - \kappa_n E)\}$$

$$\delta = \kappa \{-E(M - \kappa_n F) + F(L - \kappa_n E)\}$$

yazılırsa, (3.37)'deki matrisin determinantının sıfır olması için

$$(\gamma \mathbf{R}_u + \delta \mathbf{R}_v) \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.40)$$

olması gerekir. Eğer $\kappa = 0$ ise γ ve δ aynı anda sıfır olur. Aksi takdirde, $EG - F^2 \neq 0$ olduğundan γ ve δ sadece umbilik noktalarda sıfıra eşit olur. $\gamma \mathbf{R}_u + \delta \mathbf{R}_v$ vektörü yüzeyin hesaplanan noktasındaki teğet düzlemin içinde olduğundan, $(\gamma \mathbf{R}_u + \delta \mathbf{R}_v) \cdot \mathbf{b} = 0$ eşitliği o noktadan geçen eğrilik çizgisinin düzlemsel olduğunu gösterir. Bu durumda eğrilik çizgisinin burulması sıfıra eşit olur. (3.28) – (3.30) yeniden düzenlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$Eu''' + Fv''' - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) \kappa' = -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_u - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_u$$

$$Fu''' + Gv''' - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) \kappa' = -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_v - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_v$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) u''' + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) v''' - \kappa' = -\alpha_3 \cdot \mathbf{n}$$

Bu denklem sistemi matris formunda yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} E & F & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) \\ F & G & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u & \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''' \\ v''' \\ \kappa' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_u - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_u \\ -\alpha_3 \cdot \mathbf{R}_v - \kappa^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_v \\ -\alpha_3 \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\gamma \mathbf{R}_u + \delta \mathbf{R}_v$ vektörü asli doğrultuya paralel olduğu zaman **Uyarı 2.2**'deki sonuç göz önüne alınırsa bu vektörün asli doğrultu olması dönel yüzeyler için bir çelişki oluşturur.

3.5 Dejenere Durumlar

Bölüm 3.3'de eğrilik çizgisinin burulması hesaplanırken **Bölüm 3.2**'de bulunan κ eğriliğinin sıfırdan farklı olduğunu kabul edilmiştir. Bu bölümde $\kappa = 0$ ve $\kappa' \neq 0$ iken eğriliğin birinci türevi ve burulmanın nasıl hesaplandığı gösterilecektir. Daha sonra, bu bölümde kullanılan yöntem, $\kappa = \kappa' = \dots = \kappa^{(m-4)} = 0$ ve $\kappa^{(m-3)} \neq 0$ durumuna genelleştirilecektir.

Eğer $\kappa = 0$ ve $\kappa' \neq 0$ ise $\mathbf{c}(s)$ eğrisinin Frenet çatısı tanımlanamaz. Bu durumda (2.6) eşitliği $\mathbf{c}'''(s) = \kappa' \mathbf{n}$ olarak ifade edilebilir. (3.26) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\mathbf{c}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} = \mathbf{R}_u u''' + \mathbf{R}_v v''' + \boldsymbol{\alpha}_3 \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.42)'nin iki tarafı $\mathbf{t}$ ile iç çarpılırsa

$$(\mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_u) u''' + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_v) v''' = -\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \mathbf{t} \quad (3.43)$$

olur. (3.31) eşitliği ile birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki matris sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_u & \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_v \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''' \\ v''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \mathbf{t} \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$\det \begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_u & \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_v \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F \end{bmatrix} \neq 0$ olduğu durumda bu matris sisteminden u''' ve v''' bulunabilir. Buradan $\mathbf{c}'''(s)$ hesaplanabilir. Eğer determinant sıfır ise $\alpha = M - \kappa_n F$ ve $\beta = -(L - \kappa_n E)$ için $(\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v) \cdot \mathbf{t} = 0$ olur. Farklı asli eğrilikler için asli doğrultular birbirine dik olacağından ve $\mathbf{t}$ asli doğrultu olduğundan, $\alpha \mathbf{R}_u + \beta \mathbf{R}_v$ asli doğrultu olur. Dönel yüzeyler için bu durum bir çelişki oluşturur. Sonuç olarak $\mathbf{c}'''(s) \cdot \mathbf{c}'''(s) = \kappa' \mathbf{n} \cdot \kappa' \mathbf{n} = (\kappa')^2$ eşitliğini kullanarak κ' hesaplanabilir. Aynı zamanda asli normal $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{c}'''(s)}{\kappa'}$ ile bulunabilir.

Dejenere durumda burulmayı hesaplamak için eğrinin dördüncü mertebeden türevi

$$\mathbf{c}^{(4)}(s) = \kappa'' \mathbf{n} + 2\kappa' \tau \mathbf{b} = \boldsymbol{\alpha}_4 + \mathbf{R}_u u^{(4)} + \mathbf{R}_v v^{(4)} \quad (3.45)$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_4 = & \mathbf{R}_{uuuu} (u')^4 + 4\mathbf{R}_{uuuv} (u')^3 v' + 6\mathbf{R}_{uuvv} (u')^2 v'^2 + 4\mathbf{R}_{uvvv} (v')^3 u' \\ & + \mathbf{R}_{vvvv} (v')^4 + 6[\mathbf{R}_{uuu} (u')^2 u'' + \mathbf{R}_{uuv} (2u' u'' v' + (u')^2 v'')] \\ & + 6[\mathbf{R}_{uvv} (2v' v'' u' + (v')^2 u'') + \mathbf{R}_{vvv} (v')^2 v' + \mathbf{R}_{uu} (3(u'')^2 + 4u' u'')] \\ & + \mathbf{R}_{uv} (4u''' v' + 6u'' v' + 4v''' u') + \mathbf{R}_{vv} (3(v'')^2 + 4v' v'') \end{aligned} \quad (3.46)$$

şeklinde dir. (3.45) eşitliğinin iki tarafı, sırasıyla, $\mathbf{R}_u$, $\mathbf{R}_v$ ve $\mathbf{n}$ ile iç çarpılırsa

$$Eu^{(4)} + Fv^{(4)} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) \kappa'' - 2\kappa' (\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_u) \tau = -\boldsymbol{\alpha}_4 \cdot \mathbf{R}_u \quad (3.47)$$

$$Fu^{(4)} + Gv^{(4)} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) \kappa'' - 2\kappa' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) \tau = -\boldsymbol{\alpha}_4 \cdot \mathbf{R}_v \quad (3.48)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) u^{(4)} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) v^{(4)} - \kappa'' = -\alpha_4 \cdot \mathbf{n} \quad (3.49)$$

elde edilir. Ayrıca (3.4) denklem sisteminin ilk denkleminin üçüncü mertebeden türevi alınır

$$(L - \kappa_n E) u^{(4)} + (M - \kappa_n F) v^{(4)} = \beta_3 \quad (3.50)$$

elde edilir. Burada

$$\beta_3 = \{(L - \kappa_n E) u^{(4)} + (M - \kappa_n F) v^{(4)}\} - \frac{d^{(3)}}{ds^3} \{(L - \kappa_n E) u' + (M - \kappa_n F) v'\}$$

şeklinde dir. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} E & F & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) & -2\kappa'(\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_u) \\ F & G & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) & -2\kappa'(\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_v) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u & \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v & -1 & 0 \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(4)} \\ v^{(4)} \\ \kappa'' \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_4 \cdot \mathbf{R}_u \\ -\alpha_4 \cdot \mathbf{R}_v \\ -\alpha_4 \cdot \mathbf{n} \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

elde edilir.

Genel olarak, $\kappa = \kappa' = \dots = \kappa^{(m-4)} = 0$ ve $\kappa^{(m-3)} \neq 0$ ise, o zaman

$$\mathbf{c}^{(m)}(s) = \kappa^{(m-2)} \mathbf{n} + (m-2)\kappa^{(m-3)} \tau \mathbf{b} = \mathbf{R}_u u^{(m)} + \mathbf{R}_v v^{(m)} + \alpha_m \quad (3.52)$$

eşitliği elde edilir. (3.52) eşitliğinin iki tarafı sırasıyla $\mathbf{R}_u$, $\mathbf{R}_v$ ve $\mathbf{n}$ ile iç çarpılırsa

$$Eu^{(m)} + Fv^{(m)} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) \kappa^{(m-2)} - (m-2)\kappa^{(m-3)} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_u) \tau = -\alpha_m \cdot \mathbf{R}_u \quad (3.53)$$

$$Fu^{(m)} + Gv^{(m)} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) \kappa^{(m-2)} - (m-2)\kappa^{(m-3)} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_v) \tau = -\alpha_m \cdot \mathbf{R}_v \quad (3.54)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) u^{(m)} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) v^{(m)} - \kappa^{(m-2)} = -\alpha_m \cdot \mathbf{n} \quad (3.55)$$

elde edilir. Ayrıca (3.4)'ün ilk denkleminin $(m-1)$. mertebeden türevi alınır

$$(L - \kappa_n E) u^{(m)} + (M - \kappa_n F) v^{(m)} = \beta_{m-1} \quad (3.56)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \beta_{m-1} &= \{(L - \kappa_n E) u^{(m)} + (M - \kappa_n F) v^{(m)}\} \\ &\quad - \frac{d^{(m-1)}}{ds^{(m-1)}} \{(L - \kappa_n E) u' + (M - \kappa_n F) v'\} \end{aligned}$$

olup, bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$A = \begin{bmatrix} E & F & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u) & -(m-2)\kappa^{(m-3)}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_u) \\ F & G & -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v) & -(m-2)\kappa^{(m-3)}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_v) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_u & \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_v & -1 & 0 \\ L - \kappa_n E & M - \kappa_n F & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$X = \begin{bmatrix} u^{(m)} \\ v^{(m)} \\ \kappa^{(m-2)} \\ \tau \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{R}_u \\ -\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{R}_v \\ -\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{n} \\ \beta_{m-1} \end{bmatrix}$$

için

$$AX = B \quad (3.57)$$

elde edilir.

$\mathbb{E}^4$ UZAYINDA BİR HİPERYÜZEY ÜZERİNDEKİ EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu ve bundan sonraki bölümler tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $\mathbb{E}^4$ uzayında parametrik denklemi ile verilmiş bir hiperyüzey üzerindeki eğrilik çizgisi [8]'de verilen yöntemin genişletilmesi ile bulunmuştur.

M , $\mathbb{E}^4$ uzayında $\mathbf{R} = \mathbf{R}(u_1, u_2, u_3)$ parametrik denklemi ile verilen bir hiperyüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı olmayan bir eğri olmak üzere $\alpha(s) = \mathbf{R}(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ yazılır. Bu eğrinin α' teğet vektörü doğrultusunda $\mathbf{R}(u_1, u_2, u_3)$ hiperyüzeyinin normal eğriliği

$$\kappa_n(\alpha'(s)) = \frac{S(\alpha'(s)) \cdot \alpha'(s)}{\alpha'(s) \cdot \alpha'(s)}$$

olacağından,

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{\text{II}}{\text{I}} \\ &= \frac{\langle S(\alpha'(s)), \alpha'(s) \rangle}{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle} \\ &= \frac{\langle S(\mathbf{R}_1 u'_1 + \mathbf{R}_2 u'_2 + \mathbf{R}_3 u'_3), \mathbf{R}_1 u'_1 + \mathbf{R}_2 u'_2 + \mathbf{R}_3 u'_3 \rangle}{\langle \mathbf{R}_1 u'_1 + \mathbf{R}_2 u'_2 + \mathbf{R}_3 u'_3, \mathbf{R}_1 u'_1 + \mathbf{R}_2 u'_2 + \mathbf{R}_3 u'_3 \rangle} \\ &= \frac{\langle u'_1 S(\mathbf{R}_1) + u'_2 S(\mathbf{R}_2) + u'_3 S(\mathbf{R}_3), \mathbf{R}_1 u'_1 + \mathbf{R}_2 u'_2 + \mathbf{R}_3 u'_3 \rangle}{g_{11}(u'_1)^2 + 2g_{12}u'_1 u'_2 + 2g_{13}u'_1 u'_3 + 2g_{23}u'_2 u'_3 + g_{22}(u'_2)^2 + g_{33}(u'_3)^2} \\ &= \frac{\langle -\mathbf{N}_1 u'_1 - \mathbf{N}_2 u'_2 - \mathbf{N}_3 u'_3, \mathbf{R}_1 u'_1 + \mathbf{R}_2 u'_2 + \mathbf{R}_3 u'_3 \rangle}{g_{11}(u'_1)^2 + 2g_{12}u'_1 u'_2 + 2g_{13}u'_1 u'_3 + 2g_{23}u'_2 u'_3 + g_{22}(u'_2)^2 + g_{33}(u'_3)^2} \\ &= \frac{h_{11}(u'_1)^2 + 2h_{12}u'_1 u'_2 + 2h_{13}u'_1 u'_3 + 2h_{23}u'_2 u'_3 + h_{22}(u'_2)^2 + h_{33}(u'_3)^2}{g_{11}(u'_1)^2 + 2g_{12}u'_1 u'_2 + 2g_{13}u'_1 u'_3 + 2g_{23}u'_2 u'_3 + g_{22}(u'_2)^2 + g_{33}(u'_3)^2} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\lambda = \frac{du_2}{du_1}$, $\mu = \frac{du_3}{du_1}$ ($du_1 \neq 0$) olmak üzere hiperyüzeyin P

noktasındaki (λ, μ) doğrultusundaki normal eğriliği, [21]

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{h_{11} + 2h_{12}\lambda + 2h_{13}\mu + 2h_{23}\lambda\mu + h_{22}\lambda^2 + h_{33}\mu^2}{g_{11} + 2g_{12}\lambda + 2g_{13}\mu + 2g_{23}\lambda\mu + g_{22}\lambda^2 + g_{33}\mu^2} \quad (4.1)$$

olarak yazılır.

Normal eğriliğin ekstremal değerleri asli eğrilikleri verdiğinden, (4.1) eşitliğinin λ ve μ 'ye göre kısmi türevleri alınır,

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial \lambda} = \frac{(2h_{12} + 2h_{23}\mu + 2h_{22}\lambda)I - II(2g_{12} + 2g_{23}\mu + 2g_{22}\lambda)}{(g_{11} + 2g_{12}\lambda + 2g_{13}\mu + 2g_{23}\lambda\mu + g_{22}\lambda^2 + g_{33}\mu^2)^2} \quad (4.2)$$

ve

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial \mu} = \frac{(2h_{13} + 2h_{23}\lambda + 2h_{33}\mu)I - II(2g_{13} + 2g_{23}\lambda + 2g_{33}\mu)}{(g_{11} + 2g_{12}\lambda + 2g_{13}\mu + 2g_{23}\lambda\mu + g_{22}\lambda^2 + g_{33}\mu^2)^2} \quad (4.3)$$

olup, $\frac{\partial \kappa_n}{\partial \lambda} = \frac{\partial \kappa_n}{\partial \mu} = 0$ için

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{II}{I} = \frac{h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu}{g_{12} + g_{22}\lambda + g_{23}\mu} = \frac{h_{13} + h_{23}\lambda + h_{33}\mu}{g_{13} + g_{23}\lambda + g_{33}\mu}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.2) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} 0 &= (2h_{12} + 2h_{22}\lambda + 2h_{23}\mu)(g_{11} + \lambda(g_{12} + g_{22}\lambda + g_{23}\mu) \\ &\quad + \mu(g_{13} + g_{23}\lambda + g_{33}\mu) + \lambda g_{12} + \mu g_{13}) \\ &\quad - (2g_{12} + 2g_{21}\mu + 2g_{22}\lambda)(h_{11} + \lambda(h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu) \\ &\quad + \mu(h_{13} + h_{23}\lambda + h_{33}\mu) + \lambda h_{12} + \mu h_{13}) \\ &= (h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu)(g_{11} + \lambda g_{12} + \mu g_{13}) \\ &\quad + \lambda(h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu)(g_{12} + g_{22}\lambda + g_{23}\mu) \\ &\quad + \mu(h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu)(g_{13} + g_{23}\lambda + g_{33}\mu) \\ &\quad - (g_{12} + g_{22}\lambda + g_{23}\mu)(h_{11} + h_{12}\lambda + h_{13}\mu) \\ &\quad - \lambda(h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu)(g_{12} + g_{22}\lambda + g_{23}\mu) \\ &\quad - \mu(h_{13} + h_{23}\lambda + h_{33}\mu)(g_{12} + g_{23}\lambda + g_{22}\mu) \\ &= (h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu)(g_{11} + \lambda g_{12} + \mu g_{13}) \\ &\quad - (g_{12} + g_{22}\lambda + g_{23}\mu)(h_{11} + h_{12}\lambda + h_{13}\mu) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, M hiperyüzeyinin (λ, μ) doğrultusundaki normal eğriliği için

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{II}{I} = \frac{h_{12} + h_{22}\lambda + h_{23}\mu}{g_{12} + g_{22}\lambda + g_{23}\mu} = \frac{h_{13} + h_{23}\lambda + h_{33}\mu}{g_{13} + g_{23}\lambda + g_{33}\mu} = \frac{h_{11} + h_{12}\lambda + h_{13}\mu}{g_{11} + g_{12}\lambda + g_{13}\mu} \quad (4.4)$$

bulunur. O halde $\left(\frac{du_2}{du_1}, \frac{du_3}{du_1}\right)$ doğrultusu boyunca κ_n asli eğriliği aşağıdaki homojen

denklem sistemini sağlar:

$$\begin{cases} (h_{11} - \kappa_n g_{11}) du_1 + (h_{12} - \kappa_n g_{12}) du_2 + (h_{13} - \kappa_n g_{13}) du_3 = 0 \\ (h_{12} - \kappa_n g_{12}) du_1 + (h_{22} - \kappa_n g_{22}) du_2 + (h_{23} - \kappa_n g_{23}) du_3 = 0 \\ (h_{13} - \kappa_n g_{13}) du_1 + (h_{23} - \kappa_n g_{23}) du_2 + (h_{33} - \kappa_n g_{33}) du_3 = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{pmatrix} h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \\ h_{13} - \kappa_n g_{13} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & h_{33} - \kappa_n g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.5)'deki denklem sisteminin aşıkâr olmayan çözümlerinin bulunması için (4.6)'daki katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır, yani

$$\begin{aligned} & (g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12} g_{23} g_{13} - g_{11} g_{22} g_{33}) \kappa_n^3 + (2h_{12} g_{13} g_{23} \\ & - 2h_{12} g_{12} g_{33} + 2h_{13} g_{12} g_{23} + 2h_{23} g_{12} g_{13} + h_{22} g_{11} g_{33} - h_{23} g_{11} g_{22} \\ & + h_{11} g_{22} g_{33} - 2h_{13} g_{22} g_{13} - 2h_{23} g_{11} g_{23} - h_{23} g_{12}^2 - h_{22} g_{13}^2 - h_{11} g_{23}^2) \kappa_n^2 \\ & + (2h_{12} h_{33} g_{12} - 2h_{12} h_{23} g_{13} - 2h_{13} h_{23} g_{12} + 2h_{11} h_{23} g_{23} + 2h_{13} h_{22} g_{13} \\ & - h_{11} h_{22} g_{33} - h_{22} h_{33} g_{11} - h_{11} h_{33} g_{22} - h_{12} h_{13} g_{23} + h_{23}^2 g_{11} + h_{22} g_{13}^2 \\ & + h_{12}^2 g_{33}) \kappa_n + 2h_{12} h_{13} h_{23} + h_{11} h_{22} h_{33} - h_{12}^2 h_{33} - h_{13}^2 h_{22} - h_{11} h_{23}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

olmalıdır. Burada **Sonuç 2.2**'den

$$\|\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3\|^2 = g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12} g_{23} g_{13} - g_{11} g_{22} g_{33}$$

olduğu göz önüne alınırsa, (4.7)'nin başkatsayısı sıfırdan farklıdır. Bu da (4.7) denkleminin κ_n 'e göre üçüncü dereceden bir denklem olduğunu gösterir.

NOT: $A \neq 0$ olmak üzere, üçüncü dereceden $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 ise

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \frac{C}{A}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{D}{A}$$

olarak yazılır.

Bu durumda (4.7) denkleminin kökleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ asli eğrilikleri olacağından,

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = -\frac{2h_{12}h_{13}b_{23} + h_{11}h_{22}h_{33} - h_{12}^2 h_{33} - h_{13}^2 h_{22} - h_{11}h_{23}^2}{g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{11}g_{22}g_{33}} := K_1 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_3 &= \frac{2h_{12}g_{13}g_{23} - 2h_{12}g_{12}g_{33} + 2h_{13}g_{12}g_{23} + 2h_{23}g_{12}g_{13}}{g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{11}g_{22}g_{33}} \\ &+ \frac{h_{22}g_{19}g_{33} - h_{23}g_{11}g_{22} + h_{11}g_{22}g_{33} - 2h_{13}g_{22}g_{13}}{g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{11}g_{22}g_{33}} \\ &+ \frac{-2h_{33}g_{11}g_{23} - h_{23}g_{12}^2 - h_{22}g_{13}^2 - h_{11}g_{23}^2}{g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{11}g_{22}g_{33}} := K_2 \\ &= K_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3}{3} &= -\frac{2h_{12}h_{33}g_{12} - 2h_{12}h_{23}g_{13} - 2h_{13}h_{23}g_{12} + 2h_{11}h_{23}g_{23}}{3(g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{11}g_{22}g_{33})} \\ &+ \frac{-h_{22}h_{33}g_{11} - h_{11}h_{33}g_{22} + 2h_{13}h_{22}g_{13} - h_{11}h_{22}g_{33}}{3(g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{11}g_{22}g_{33})} \\ &- \frac{-h_{12}h_{13}g_{23} + h_{23}^2 g_{11} + h_{22}g_{13}^2 + h_{12}^2 g_{33}}{3(g_{12}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{22} + g_{23}^2 g_{11} - 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{11}g_{22}g_{33})} := K_3 \quad (4.9) \end{aligned}$$

olmak üzere (4.7) denklemi

$$\kappa_n^3 - 3K_3 \kappa_n^2 + K_2 \kappa_n - K_1 = 0 \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde K_1 değeri hiperyüzeyin Gauss eğriliği, K_3 değeri ise hiperyüzeyin ortalama eğriliğidir.

4.1 Eğrilik Çizgisinin Hesaplanması

Bu bölümde $\mathbb{E}^4$ uzayında parametrik olarak verilen bir hiperyüzey üzerindeki eğrilik çizgilerinin nasıl elde edileceği gösterilecektir. (4.5) denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \\ h_{13} - \kappa_n g_{13} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & h_{33} - \kappa_n g_{33} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

için $rank A = 0$ olması durumunda hiperyüzey üzerindeki tüm noktalar umbilik olacağından katsayılar matrisi için $rank A = 1$ veya $rank A = 2$ olmalıdır.

Bu tezde $rank A = 2$ kabul edilecektir. Bu durumda A matrisinin 2×2 altmatrislerinden en az birinin determinantı sıfırdan farklıdır.

$\lambda = \frac{du_2}{du_1}$, $\mu = \frac{du_3}{du_1}$ parametre seçimi için A matrisinin sıfırdan farklı alt determinantı olarak

$$(h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \neq 0$$

kabul edilirse, (4.5) denklem sisteminin birinci ve ikinci eşitliği için

$$\begin{aligned} (h_{12} - \kappa_n g_{12})u'_2 + (h_{13} - \kappa_n g_{13})u'_3 &= -(h_{11} - \kappa_n g_{11})u'_1 \\ (h_{22} - \kappa_n g_{22})u'_2 + (h_{23} - \kappa_n g_{23})u'_3 &= -(h_{12} - \kappa_n g_{12})u'_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} a_1 &= (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{13} - \kappa_n g_{13}), \\ a_2 &= (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) - (h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{23} - \kappa_n g_{23}), \\ a_3 &= (h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{22} - \kappa_n g_{22}) - (h_{12} - \kappa_n g_{12})^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

olarak alınır ve (4.12) denklem sisteminin çözümü için Cramer kuralı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} u'_2 &= \frac{\begin{vmatrix} -(h_{11} - \kappa_n g_{11})u'_1 & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ -(h_{12} - \kappa_n g_{12})u'_1 & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{a_2}{a_1} u'_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

ve

$$\begin{aligned} u'_3 &= \frac{\begin{vmatrix} h_{12} - \kappa_n g_{12} & -(h_{11} - \kappa_n g_{11})u'_1 \\ h_{22} - \kappa_n g_{22} & -(h_{12} - \kappa_n g_{12})u'_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{a_3}{a_1} u'_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Birim hızlı regüler eğriler için birinci temel form

$$g_{11}(u'_1)^2 + g_{22}(u'_2)^2 + g_{33}(u'_3)^2 + 2g_{12}u'_1u'_2 + 2g_{13}u'_1u'_3 + 2g_{23}u'_2u'_3 = 1 \quad (4.16)$$

olduğundan u'_2 ve u'_3 eşitlikleri (4.16)'da yerine yazılırsa,

$$(u'_1)^2 \left(g_{11} + g_{22} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2 + 2g_{12} \frac{a_2}{a_1} + 2g_{13} \frac{a_3}{a_1} + 2g_{23} \frac{a_2 a_3}{a_1^2} \right) = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$(u'_1)^2 \left(\frac{g_{11}a_1^2 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3}{a_1^2} \right) = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$(u'_1)^2 = \frac{a_1^2}{g_{11}a_1^2 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{cases} u'_1 = \mp \frac{a_1}{\sqrt{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2}} \\ u'_2 = \mp \frac{a_2}{\sqrt{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2}} \\ u'_3 = \mp \frac{a_3}{\sqrt{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2}} \end{cases} \quad (4.17)$$

şeklinde birinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi bulunur. (4.17) denklem sistemi, $u_1(s_0) = u_1^0$, $u_2(s_0) = u_2^0$ ve $u_3(s_0) = u_3^0$ başlangıç şartı ile çözülür ve elde edilen $u_1(s)$, $u_2(s)$ ve $u_3(s)$ fonksiyonları hiperyüzey üzerinde yerine yazılırsa, hiperyüzey üzerinde $\alpha(s_0) = \mathbf{R}(u_1(s_0), u_2(s_0), u_3(s_0)) = P$ başlangıç noktasından geçen α eğrilik çizgisi, Runge-Kutta metodu gibi bazı nümerik tekniklerle elde edilir, [26]. Böylece hiperyüzey üzerindeki eğrilik çizgisi yaklaşık olarak hesaplanabilir.

Diğer taraftan $u'_1 \neq 0$ için

$$(h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{23} - \kappa_n g_{23})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \neq 0$$

veya

$$(h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{23} - \kappa_n g_{23})^2 \neq 0$$

kabul edilirse, sırasıyla,

$$\begin{aligned} a_1 &= (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{13} - \kappa_n g_{13})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) \\ a_2 &= (h_{13} - \kappa_n g_{13})^2 - (h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) \\ a_3 &= (h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

veya

$$\begin{aligned} a_1 &= (h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{23} - \kappa_n g_{23})^2 \\ a_2 &= (h_{13} - \kappa_n g_{13})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) \\ a_3 &= (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

olmak üzere (4.17) sağlanır.

Uyarı 4.1: $\lambda = \frac{du_1}{du_2}$, $\mu = \frac{du_3}{du_2}$, ($du_2 \neq 0$) olmak üzere hiperyüzeyin (λ, μ) doğrultusundaki normal eğriliği için,

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{h_{22} + 2h_{12}\lambda + 2h_{23}\mu + 2h_{13}\lambda\mu + h_{11}\lambda^2 + h_{33}\mu^2}{g_{22} + 2g_{12}\lambda + 2g_{23}\mu + 2g_{13}\lambda\mu + g_{11}\lambda^2 + g_{33}\mu^2} \quad (4.20)$$

olacağından benzer işlemler yapılırsa

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{II}{I} = \frac{h_{22} + h_{12}\lambda + h_{23}\mu}{g_{22} + g_{12}\lambda + g_{23}\mu} = \frac{h_{23} + h_{13}\lambda + h_{33}\mu}{g_{23} + g_{13}\lambda + g_{33}\mu} = \frac{h_{12} + h_{11}\lambda + h_{13}\mu}{g_{12} + g_{11}\lambda + g_{13}\mu} \quad (4.21)$$

elde edilir.

Normal eğriliğin extremal değerlerini veren asli doğrultular (4.5) denklem sistemini sağlar. Bu durumda (4.11)'deki A matrisinin diğer altmatrislerinin determinantları

$$(h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \neq 0$$

$$(h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{13} - \kappa_n g_{13})^2 \neq 0$$

ve

$$(h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{23} - \kappa_n g_{23})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \neq 0$$

,sırasıyla, (4.13), (4.18) ve (4.19) denklemlerini vereceğinden elde edilecek u'_1, u'_2, u'_3 koordinat fonksiyonlarının türevleri de aynı olur.

Uyarı 4.2: $\lambda = \frac{du_1}{du_3}$, $\mu = \frac{du_2}{du_3}$, ($du_3 \neq 0$) olmak üzere hiperyüzeyin (λ, μ)

doğrultusundaki normal eğriliği için,

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{h_{33} + 2h_{13}\lambda + 2h_{23}\mu + 2h_{12}\lambda\mu + h_{11}\lambda^2 + h_{22}\mu^2}{g_{33} + 2g_{13}\lambda + 2g_{23}\mu + 2g_{12}\lambda\mu + g_{11}\lambda^2 + g_{22}\mu^2} \quad (4.22)$$

olacağından

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{II}{I} = \frac{h_{23} + h_{12}\lambda + h_{22}\mu}{g_{23} + g_{12}\lambda + g_{22}\mu} = \frac{h_{33} + h_{13}\lambda + h_{23}\mu}{g_{33} + g_{13}\lambda + g_{23}\mu} = \frac{h_{13} + h_{11}\lambda + h_{12}\mu}{g_{13} + g_{11}\lambda + g_{12}\mu} \quad (4.23)$$

elde edilir.

Normal eğriliğin extremal değerlerini veren asli doğrultular (4.5) denklem sistemini sağlar. Bu durumda (4.11)'deki A matrisinin diğer altmatrislerinin determinantları

$$(h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{22} - \kappa_n g_{22}) - (h_{12} - \kappa_n g_{12})^2 \neq 0$$

$$(h_{11} - \kappa_n g_{11})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \neq 0$$

ve

$$(h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) \neq 0$$

,sırasıyla, (4.13), (4.18) ve (4.19) denklemlerini vereceğinden elde edilecek eğrilik çizgisi değişmez.

$\mathbb{E}^4$ UZAYINDA BİR HİPERYÜZEY ÜZERİNDEKİ EĞRİLİK ÇİZGİLERİNİN EĞRİLİKLERİ

Bu bölümde (4.17) denklem sisteminden elde edilen bir eğrilik çizgisinin eğrilikleri, Frenet vektörleri ve Darboux vektörlerinin nasıl elde edilebileceği gösterilecektir. Aynı zamanda bu eğriliklerin hesaplanması sırasında oluşabilecek singüler ve dejenere durumlar da incelenecektir.

$\mathbb{E}^4$ uzayında $\mathbf{R} = \mathbf{R}(u_1, u_2, u_3)$ parametrik denklemi ile verilen bir hiperyüzey M ve (4.17) sisteminden bu hiperyüzey üzerinde elde edilen eğrilik çizgisi α olsun. α eğrisinin bir Frenet eğrisi olduğunu kabul edelim. M hiperyüzeyinin α eğrisi boyunca birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ ve α eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbf{T}$ olsun. α eğrisi hem eğrilik çizgisi hem de Frenet eğrisi olduğundan $\{\mathbf{N}, \mathbf{T}, \alpha''\}$ kümesi eğri boyunca lineer bağımsızdır. Bu durumda eğri boyunca “birinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanı” kurulabilir, [24].

5.1 Birinci Eğrilik (k_1)

α eğrisi boyunca birinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanını göz önüne alalım. α eğrisinin ikinci türevi için $\alpha'' = \kappa_g^1 \mathbf{E} + \kappa_n \mathbf{N}$ ve $\alpha''(s) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u_i'' + \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i' u_j'$ olduğu kullanılırsa,

$$\alpha'' = k_g^1 \mathbf{E} + \kappa_n \mathbf{N} = \mathbf{R}_1 u_1'' + \mathbf{R}_2 u_2'' + \mathbf{R}_3 u_3'' + \Omega_1 \quad (5.1)$$

olarak yazılır. Burada $\Omega_1 = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i' u_j'$ alınmıştır.

(4.17) denkleminde u_1', u_2' ve u_3' bilindiğinden, Ω_1 hesaplanabilir. (5.1) eşitliğinin iki tarafı, sırasıyla, $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ ve $\mathbf{R}_3$ ile iç çarpılırsa,

$$k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle = g_{11} u_1'' + g_{12} u_2'' + g_{13} u_3'' + \langle \Omega_1, \mathbf{R}_1 \rangle \quad (5.2)$$

$$k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle = g_{12} u_1'' + g_{22} u_2'' + g_{23} u_3'' + \langle \Omega_1, \mathbf{R}_2 \rangle \quad (5.3)$$

$$k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle = g_{13} u_1'' + g_{23} u_2'' + g_{33} u_3'' + \langle \Omega_1, \mathbf{R}_3 \rangle \quad (5.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\alpha' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u'_i$ ve $\langle \mathbf{E}, \alpha' \rangle = 0$ olacağından, $u'_1 \neq 0$ için

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle = -\frac{u'_2 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle}{u'_1} - \frac{u'_3 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle}{u'_1} \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.5) eşitliği (5.2)'de yerine yazılırsa

$$\left(-\frac{u'_2 k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle}{u'_1} - \frac{u'_3 k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle}{u'_1} \right) = g_{11} u''_1 + g_{12} u''_2 + g_{13} u''_3 + \langle \Omega_1, \mathbf{R}_1 \rangle$$

olacağından, (5.3) ve (5.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{u'_2}{u'_1} (g_{12} u''_1 + g_{22} u''_2 + g_{23} u''_3 + \langle \Omega_1, \mathbf{R}_2 \rangle) - \frac{u'_3}{u'_1} (g_{13} u''_1 + g_{23} u''_2 + g_{33} u''_3 + \langle \Omega_1, \mathbf{R}_3 \rangle) \right] \\ & = g_{11} u''_1 + g_{12} u''_2 + g_{13} u''_3 + \langle \Omega_1, \mathbf{R}_1 \rangle \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte yeniden düzenleme yapılırsa,

$$\left(\sum_{i=1}^3 u'_i g_{1i} \right) u''_1 + \left(\sum_{i=1}^3 u'_i g_{2i} \right) u''_2 + \left(\sum_{i=1}^3 u'_i g_{3i} \right) u''_3 = -\langle \Omega_1, \alpha' \rangle \quad (5.6)$$

elde edilir. (4.5) denklem sisteminde ilk iki denklemin s parametresine göre türevleri alınır, sırasıyla,

$$(h_{11} - \kappa_n g_{11}) u''_1 + (h_{12} - \kappa_n g_{12}) u''_2 + (h_{13} - \kappa_n g_{13}) u''_3 = \rho_1 \quad (5.7)$$

$$(h_{12} - \kappa_n g_{12}) u''_1 + (h_{22} - \kappa_n g_{22}) u''_2 + (h_{23} - \kappa_n g_{23}) u''_3 = \rho_2 \quad (5.8)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \rho_1 = & -(h'_{11} - \kappa'_n g_{11} - \kappa_n g'_{11}) u'_1 - (h'_{12} - \kappa'_n g_{12} - \kappa_n g'_{12}) u'_2 \\ & - (h'_{13} - \kappa'_n g_{13} - \kappa_n g'_{13}) u'_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \rho_2 = & -(h'_{12} - \kappa'_n g_{12} - \kappa_n g'_{12}) u'_1 - (h'_{22} - \kappa'_n g_{22} - \kappa_n g'_{22}) u'_2 \\ & - (h'_{23} - \kappa'_n g_{23} - \kappa_n g'_{23}) u'_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. ρ_1 ve ρ_2 eşitliklerinde yer alan birinci ve ikinci temel form katsayılarının yay parametresine göre türevleri, sırasıyla, $1 \leq i, j, k, l \leq 3$ için,

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{R}_i, \frac{d}{ds} \mathbf{R}_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ik} u'_k, \mathbf{R}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{R}_i, \sum_{l=1}^3 \mathbf{R}_{jl} u'_l \right\rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h'_{ij} &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{N}, \mathbf{R}_{ij} \rangle \\ &= \left\langle \frac{d\mathbf{N}}{ds}, \mathbf{R}_{ij} \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}, \frac{d}{ds} \mathbf{R}_{ij} \right\rangle \\ &= \langle -\kappa_n \mathbf{T}, \mathbf{R}_{ij} \rangle + \left\langle \mathbf{N}, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u'_k \right\rangle \end{aligned}$$

olarak yazılır. (5.6), (5.3), (5.4), (5.7) ve (5.8) eşitlikleri, sırasıyla, bir arada yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 u'_i g_{1i} \right) u''_1 + \left(\sum_{i=1}^3 u'_i g_{2i} \right) u''_2 + \left(\sum_{i=1}^3 u'_i g_{3i} \right) u''_3 &= -\langle \Omega_1, \alpha' \rangle \\ g_{12} u''_1 + g_{22} u''_2 + g_{23} u''_3 - k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle &= -\langle \Omega_1, \mathbf{R}_2 \rangle \\ g_{13} u''_1 + g_{23} u''_2 + g_{33} u''_3 - k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle &= -\langle \Omega_1, \mathbf{R}_3 \rangle \\ (h_{11} - \kappa_n g_{11}) u''_1 + (h_{12} - \kappa_n g_{12}) u''_2 + (h_{13} - \kappa_n g_{13}) u''_3 &= \rho_1 \\ (h_{12} - \kappa_n g_{12}) u''_1 + (h_{22} - \kappa_n g_{22}) u''_2 + (h_{23} - \kappa_n g_{23}) u''_3 &= \rho_2 \end{aligned}$$

şeklinde homojen olmayan lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 u'_i g_{1i} & \sum_{i=1}^3 u'_i g_{2i} & \sum_{i=1}^3 u'_i g_{3i} & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & -1 & 0 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & 0 & -1 \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \\ k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -\langle \Omega_1, \alpha' \rangle \\ -\langle \Omega_1, \mathbf{R}_2 \rangle \\ -\langle \Omega_1, \mathbf{R}_3 \rangle \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

olmak üzere $\mathcal{W}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ şeklindedir.

Şimdi $\mathcal{W}$ matrisinin determinantının sıfır olup olmayacağını araştıralım.

$$\begin{aligned} \det \mathcal{W} &= -\det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 u_i' g_{1i} & \sum_{i=1}^3 u_i' g_{2i} & \sum_{i=1}^3 u_i' g_{3i} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & -1 \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 u_i' g_{1i} & \sum_{i=1}^3 u_i' g_{2i} & \sum_{i=1}^3 u_i' g_{3i} \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olacağından, son eşitlikteki determinant birinci satıra göre açılır ve (4.13) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \det \mathcal{W} &= \left(\sum_{i=1}^3 u_i' g_{1i} \right) \det \begin{pmatrix} h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{pmatrix} \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^3 u_i' g_{2i} \right) \det \begin{pmatrix} h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^3 u_i' g_{3i} \right) \det \begin{pmatrix} h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{pmatrix} \\ &= (u_1' g_{11} + u_2' g_{12} + u_3' g_{13}) a_1 + (u_1' g_{12} + u_2' g_{22} + u_3' g_{23}) a_2 \\ &\quad + (u_1' g_{13} + u_2' g_{23} + u_3' g_{33}) a_3 \\ &= \mp \frac{g_{11} a_1^2 + 2g_{12} a_1 a_2 + 2g_{13} a_1 a_3 + 2g_{23} a_2 a_3 + g_{22} a_2^2 + g_{33} a_3^2}{\sqrt{g_{11} a_1^2 + 2g_{12} a_1 a_2 + 2g_{13} a_1 a_3 + 2g_{23} a_2 a_3 + g_{22} a_2^2 + g_{33} a_3^2}} \\ &= \mp \sqrt{g_{11} a_1^2 + 2g_{12} a_1 a_2 + 2g_{13} a_1 a_3 + 2g_{23} a_2 a_3 + g_{22} a_2^2 + g_{33} a_3^2} \quad (5.11) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan son eşitlik birinci temel formun karekökü olduğu için $\det \mathcal{W} \neq 0$ elde edilir. Bu durumda, katsayılar sayılar matrisi regülerdir.

$\mathcal{W}$ matrisinin determinantı sıfır olmayacağından u_1'' , u_2'' , u_3'' , $k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle$ ve $k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle$ bulunabilir. Bu durumda α'' , $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{T}' - \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}}{\|\mathbf{T}' - \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}\|}$ ve k_g^1 kolayca hesaplanabilir. Sonuç olarak

(4.17) denklem sisteminden elde edilen eğrilik çizgisinin birinci eğriliği

$$k_1 = \sqrt{(\kappa_n)^2 + (k_g^1)^2} \quad (5.12)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Ayrıca $k_1 = 0$ olduğu zaman (4.12) eşitliğinden α eğrisinin ikinci türevi sıfır olur. O zaman $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$ kümesi lineer bağımlı olacağından, bu durum α eğrisinin Frenet eğrisi olması ile çelişir. Böylece k_1 sıfırdan farklıdır.

5.2 İkinci Eğrilik (k_2)

İkinci eğriliğin hesaplanabilmesi için α eğrilik çizgisinin üçüncü türevinin bulunması gerekir. α bir eğrilik çizgisi olduğundan birinci ve ikinci mertebeden geodezik burulmaları τ_g^1 ve τ_g^1 sıfırdır, [24]. α eğrisinin $\alpha'' = k_g^1 \mathbf{E} + \kappa_n \mathbf{N}$ ikinci türevinin s parametresine göre tekrar türevi alınır $\alpha''' = (k_g^1)' \mathbf{E} - k_1^2 \mathbf{T} + k_g^1 k_g^2 \mathbf{D} + \kappa_n' \mathbf{N}$ elde edilir. Diğer taraftan, (2.59) kullanılırsa

$$(k_g^1)' \mathbf{E} - k_1^2 \mathbf{T} + k_g^1 k_g^2 \mathbf{D} + \kappa_n' \mathbf{N} = \mathbf{R}_1 u_1''' + \mathbf{R}_2 u_2''' + \mathbf{R}_3 u_3''' + \Omega_2 \quad (5.13)$$

elde edilir. Burada

$$\Omega_2 = 3 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i' u_j'' + \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u_i' u_j' u_k'$$

olup, bilinmektedir. (5.13) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ ve $\mathbf{R}_3$ ile iç çarpılırsa,

$$g_{11} u_1''' + g_{12} u_2''' + g_{33} u_3''' - (k_g^1)' (\mathbf{E}, \mathbf{R}_1) - k_g^1 k_g^2 (\mathbf{D}, \mathbf{R}_1) = -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_1 \rangle \quad (5.14)$$

$$g_{12} u_1''' + g_{22} u_2''' + g_{23} u_3''' - (k_g^1)' (\mathbf{E}, \mathbf{R}_2) - k_g^1 k_g^2 (\mathbf{D}, \mathbf{R}_2) = -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_2 \rangle \quad (5.15)$$

$$g_{33} u_1''' + g_{23} u_2''' + g_{33} u_3''' - (k_g^1)' (\mathbf{E}, \mathbf{R}_3) - k_g^1 k_g^2 (\mathbf{D}, \mathbf{R}_3) = -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_3 \rangle \quad (5.16)$$

sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde u_1''' , u_2''' , u_3''' , $(k_g^1)'$ ve k_g^2 bilinmeyenlerdir. Beş bilinmeyenli bir denklem sisteminin tek bir çözümünün olması için en az beş denklem gerektiğinden, bilinmeyenlerin bulunabilmesi için (5.14), (5.15) ve (5.16) ile beraber bu bilinmeyenleri içeren iki denklem daha bulunması gerekir. (5.7) ve (5.8) eşitliklerinin türevleri alınır,

$$(h_{11} - \kappa_n g_{11}) u_1''' + (h_{12} - \kappa_n g_{12}) u_2''' + (h_{13} - \kappa_n g_{13}) u_3''' = \rho_3 \quad (5.17)$$

$$(h_{12} - \kappa_n g_{12}) u_1''' + (h_{22} - \kappa_n g_{22}) u_2''' + (h_{23} - \kappa_n g_{23}) u_3''' = \rho_4 \quad (5.18)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\rho_3 = & -\left(h''_{11} - \kappa''_n g_{11} - 2\kappa'_n g'_{11} - \kappa_n g''_{11}\right)u'_1 - 2\left(h'_{11} - \kappa'_n g_{11} - \kappa_n g_{11}\right)u''_1 \\ & -\left(h''_{12} - \kappa''_n g_{12} - 2\kappa'_n g'_{12} - \kappa_n g''_{12}\right)u'_2 - 2\left(h'_{12} - \kappa'_n g_{12} - \kappa_n g_{12}\right)u''_2 \\ & -\left(h''_{13} - \kappa''_n g_{13} - 2\kappa'_n g'_{13} - \kappa_n g''_{13}\right)u'_3 - 2\left(h'_{13} - \kappa'_n g_{13} - \kappa_n g_{13}\right)u''_3,\end{aligned}\quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}\rho_4 = & -\left(h''_{12} - \kappa''_n g_{12} - 2\kappa'_n g'_{12} - \kappa_n g''_{12}\right)u'_1 - 2\left(h'_{12} - \kappa'_n g_{12} - \kappa_n g_{12}\right)u''_1 \\ & -\left(h''_{22} - \kappa''_n g_{22} - 2\kappa'_n g'_{22} - \kappa_n g''_{22}\right)u'_2 - 2\left(h'_{22} - \kappa'_n g_{22} - \kappa_n g_{22}\right)u''_2 \\ & -\left(h''_{23} - \kappa''_n g_{23} - 2\kappa'_n g'_{23} - \kappa_n g''_{23}\right)u'_3 - 2\left(h'_{23} - \kappa'_n g_{23} - \kappa_n g_{23}\right)u''_3\end{aligned}\quad (5.20)$$

şeklindedir.

ρ_3 ve ρ_4 eşitliklerinde yer alan birinci ve ikinci temel form katsayılarının yay uzunluğu parametresine göre ikinci türevleri, sırasıyla, $1 \leq i, j \leq 3$ için,

$$\begin{aligned}g''_{ij} = & \frac{d}{ds} \left(\left\langle \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ik} u'_k, \mathbf{R}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{R}_i, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{jk} u'_k \right\rangle \right) \\ = & \left\langle \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{m=1}^3 \mathbf{R}_{ikm} u'_m \right) u'_k + \mathbf{R}_{ik} u''_k \right], \mathbf{R}_j \right\rangle + 2 \left\langle \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ik} u'_k, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{jk} u'_k \right\rangle \\ & + \left\langle \mathbf{R}_i, \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{m=1}^3 \mathbf{R}_{jkm} u'_m \right) u'_k + \mathbf{R}_{jk} u''_k \right] \right\rangle\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}h''_{ij} = & \frac{d}{ds} \left(\left\langle -\kappa_n \mathbf{T}, \mathbf{R}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u'_k \right\rangle \right) \\ = & \left\langle -\kappa'_n \mathbf{T} - \kappa_n \mathbf{T}', \mathbf{R}_j \right\rangle + \left\langle -\kappa_n \mathbf{T}, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{jk} u'_k \right\rangle \\ & + \left\langle \mathbf{N}', \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u'_k \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}, \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{m=1}^3 \mathbf{R}_{ijk m} u'_m \right) u'_k + \mathbf{R}_{ijk} u''_k \right] \right\rangle \\ = & \left\langle -\kappa'_n \mathbf{T} - \kappa_n k_g^1 \mathbf{E} - \kappa_n^2 \mathbf{N}, \mathbf{R}_j \right\rangle + \left\langle -\kappa_n \mathbf{T}, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{jk} u'_k \right\rangle \\ & + \left\langle -\kappa_n \mathbf{T}, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u'_k \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}, \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{m=1}^3 \mathbf{R}_{ijk m} u'_m \right) u'_k + \mathbf{R}_{ijk} u''_k \right] \right\rangle\end{aligned}$$

olarak yazılır. (5.12) – (5.16) eşitlikleri, sırasıyla, tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}
g_{11}u_1''' + g_{12}u_2''' + g_{13}u_3''' - (k_g^1)' \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle - k_g^1 k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle &= -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_1 \rangle \\
g_{12}u_1''' + g_{22}u_2''' + g_{23}u_3''' - (k_g^1)' \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle - k_g^1 k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle &= -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_2 \rangle \\
g_{13}u_1''' + g_{23}u_2''' + g_{33}u_3''' - (k_g^1)' \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle - k_g^1 k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle &= -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_3 \rangle \\
(h_{11} - \kappa_n g_{11})u_1''' + (h_{12} - \kappa_n g_{12})u_2''' + (h_{13} - \kappa_n g_{13})u_3''' &= \rho_3 \\
(h_{12} - \kappa_n g_{12})u_1''' + (h_{22} - \kappa_n g_{22})u_2''' + (h_{23} - \kappa_n g_{23})u_3''' &= \rho_4
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde katsayılar matrisi

$$Q = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle & -k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle & -k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle & -k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

ve

$$X = \begin{pmatrix} u_1''' \\ u_2''' \\ u_3''' \\ (k_g^1)' \\ k_g^2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_1 \rangle \\ -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_2 \rangle \\ -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_3 \rangle \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

alınırsa, bu sistem $QX = S$ şeklinde matris formunda yazılır. Şimdi Q katsayılar matrisinin determinantının sıfır olup olmayacağını araştıralım. Q matrisinin determinantı 5. sütuna göre açılırsa,

$$\begin{aligned}
\det Q &= k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} & g_{23} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ g_{12} & g_{23} & g_{33} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 \end{vmatrix} \\
&- k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 \end{vmatrix} \\
&+ k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte yer alan 4×4 'lük determinantlar 4. sütuna göre açılarak ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} & g_{23} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \begin{vmatrix} g_{13} & g_{23} & g_{33} \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix} \\
&+ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix} \\
&= -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle (g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3) \\
&+ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle (g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3), \\
& \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \begin{vmatrix} g_{13} & g_{23} & g_{33} \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix} \\
&+ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix} \\
&= -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle (g_{13}a_1 + g_{23}a_2 + g_{33}a_3) \\
&+ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle (g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 \end{vmatrix} \\
= -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix} \\
+ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ h_{11} - \kappa_n g_{11} & h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{13} - \kappa_n g_{13} \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} \end{vmatrix} \\
= -\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle (g_{12}a_1 + g_{22}a_2 + g_{23}a_3) \\
+ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle (g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + g_{13}a_3)$$

bulunur.

$$A = a_1 g_{13} + a_2 g_{23} + a_3 g_{33}$$

$$B = a_1 g_{12} + a_2 g_{22} + a_3 g_{23}$$

$$C = a_1 g_{11} + a_2 g_{12} + a_3 g_{13}$$

olmak üzere Q matrisinin determinanı iç çarpımın bilineer olma özelliğinden aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\det Q = k_g^1 \left(\langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle \left[\langle \mathbf{E}, -\mathbf{A}\mathbf{R}_2 + \mathbf{B}\mathbf{R}_3 \rangle \right] + \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle \left[\langle \mathbf{E}, \mathbf{A}\mathbf{R}_1 - \mathbf{C}\mathbf{R}_3 \rangle \right] \right. \\
\left. + \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle \left[\langle \mathbf{E}, -\mathbf{B}\mathbf{R}_1 + \mathbf{C}\mathbf{R}_2 \rangle \right] \right).$$

Son eşitlik tekrar düzenlenirse, Q matrisinin determinanı için

$$\det Q = k_g^1 \left[A \left(\langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle - \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \right) \right. \\
- B \left(\langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle - \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \right) \\
\left. + C \left(\langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle - \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \right) \right]$$

veya

$$\det Q = k_g^1 \det \begin{pmatrix} A & B & C \\ \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle & \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle & \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \end{pmatrix}$$

elde edilir. (4.17) ve (5.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} A &= a_1 g_{13} + a_2 g_{23} + a_3 g_{33} \\ &= \det \mathcal{W} (u'_1 g_{13} + u'_2 g_{23} + u'_3 g_{33}) \\ &= \det \mathcal{W} \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= a_1 g_{12} + a_2 g_{22} + a_3 g_{23} \\ &= \det \mathcal{W} (u'_1 g_{12} + u'_2 g_{22} + u'_3 g_{23}) \\ &= \det \mathcal{W} \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= a_1 g_{11} + a_2 g_{12} + a_3 g_{13} \\ &= \det \mathcal{W} (u'_1 g_{11} + u'_2 g_{12} + u'_3 g_{13}) \\ &= \det \mathcal{W} \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle \end{aligned}$$

yazılabileceğinden,

$$\det Q = k_g^1 \det \mathcal{W} \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle & \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle & \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle & \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle & \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle & \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle \end{pmatrix}$$

elde edilir. **Teorem 2.5** kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \det Q &= k_g^1 \det \mathcal{W} \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{D} \otimes \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_1 \rangle \\ &= k_g^1 \|\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3\| \det \mathcal{W} \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \\ &= k_g^1 \|\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3\| \det \mathcal{W} \end{aligned}$$

bulunur. Birinci tip genişletilmiş Darboux çatı alanının türev denklemlerinden, (2.47), $\mathbf{T}' = k_g^1 \mathbf{E} + \kappa_n \mathbf{N}$ olacağı için eğer birinci mertebeden geodezik eğrilik k_g^1 sıfır ise α eğrilik çizgisi aynı zamanda bir geodezik eğri olur. Asli eğri olan bir Frenet eğrisi geodezik eğri olamayacağından, k_g^1 sıfır olamaz. O halde, Q katsayılar matrisi regüler olup, sistemin tek bir çözümü vardır. Böylece u_1''', u_2''' ve u_3''' bulunabileceğinden eğrilik çizgisinin α''' türevi elde edilir. **Tanım 2.24'**den eğrilik çizgisinin $\mathbf{b}_1$ ve $\mathbf{b}_2$ birinci ve ikinci binormal vektörleri hesaplanabilir. O halde, eğrilik çizgisinin ikinci eğriliği

$$k_2 = \frac{\langle \mathbf{b}_1, \alpha''' \rangle}{k_1}$$

ile elde edilir. Ayrıca, birinci eğriliğin ilk türevi $k_1' = \langle \mathbf{n}, \alpha''' \rangle$ ile bulunur.

Ayrıca $k_2 = 0$ olduğu zaman (2.31) eşitliğinden $\alpha'''(s) = -k_1^2 \mathbf{t} + k_1' \mathbf{n}$ olur. Bu durumda $k_1 \alpha'''(s) = -k_1^3 \alpha' + k_1' \alpha''$ olacağından $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$ kümesi lineer bağımlı olur. O zaman α eğrisinin Frenet olması ile çelişir. Böylece, ikinci eğrilik k_2 sıfır olamaz.

5.3 Üçüncü Eğrilik (k_3)

Üçüncü eğriliğin hesaplanabilmesi için eğrilik çizgisinin dördüncü mertebeden türevini bulmalıyız. α eğrisinin $\alpha''' = (k_g^1)' \mathbf{E} - k_1^2 \mathbf{T} + k_g^1 k_g^2 \mathbf{D} + \kappa_n' \mathbf{N}$ türevinin s parametresine göre tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha^{(4)} = & \left[-2k_1 k_1' - k_g^1 (k_g^1)' - \kappa_n \kappa_n' \right] \mathbf{T} + \left[(k_g^1)'' - k_1^2 k_g^1 - k_g^1 (k_g^2)^2 \right] \mathbf{E} \\ & + \left[2(k_g^1)' k_g^2 + k_g^1 (k_g^2)' \right] \mathbf{D} + \left[-k_1^2 \kappa_n + \kappa_n'' \right] \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.23)$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\alpha^{(4)} = \mathbf{R}_1 u_1^{(4)} + \mathbf{R}_2 u_2^{(4)} + \mathbf{R}_3 u_3^{(4)} + \Omega_3$$

olduğu biliniyor. Burada

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & 4 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i''' u_j' + 3 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i'' u_j'' \\ & + 6 \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u_i' u_j' u_k'' + \sum_{i,j,k,l=1}^3 \mathbf{R}_{ijkl} u_i' u_j' u_k' u_l' \end{aligned}$$

şeklinde dir. Böylece

$$\begin{aligned} \alpha^{(4)} = & \left[-2k_1 k_1' - k_g^1 (k_g^1)' - \kappa_n \kappa_n' \right] \mathbf{T} + \left[(k_g^1)'' - k_1^2 k_g^1 - k_g^1 (k_g^2)^2 \right] \mathbf{E} \\ & + \left[2(k_g^1)' k_g^2 + k_g^1 (k_g^2)' \right] \mathbf{D} + \left[-k_1^2 \kappa_n + \kappa_n'' \right] \mathbf{N} \\ = & \mathbf{R}_1 u_1^{(4)} + \mathbf{R}_2 u_2^{(4)} + \mathbf{R}_3 u_3^{(4)} + \Omega_3 \end{aligned} \quad (5.24)$$

olup, (5.24) eşitliğinde her iki taraf, sırasıyla, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ ve $\mathbf{R}_3$ ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & g_{11} u_1^{(4)} + g_{12} u_2^{(4)} + g_{13} u_3^{(4)} - k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle (k_g^2)' - \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle (k_g^1)'' \\ = & -\langle \Omega_3, \mathbf{R}_1 \rangle + \left[-2k_1 k_1' - k_g^1 (k_g^1)' - \kappa_n \kappa_n' \right] \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ & - \left[k_1^2 k_g^1 - k_g^1 (k_g^2)^2 \right] \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle + 2(k_g^1)' k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
& g_{12}u_1^{(4)} + g_{22}u_2^{(4)} + g_{23}u_3^{(4)} - k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle (k_g^2)' - \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle (k_g^1)'' \\
& = -\langle \Omega_3, \mathbf{R}_2 \rangle + \left[-2k_1k_1' - k_g^1 (k_g^1)' - \kappa_n \kappa_n' \right] \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle \\
& \quad - \left[k_1^2 k_g^1 - k_g^1 (k_g^2)^2 \right] \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle + 2 (k_g^1)' k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
& g_{13}u_1^{(4)} + g_{23}u_2^{(4)} + g_{33}u_3^{(4)} - k_g^1 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle (k_g^2)' - \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle (k_g^1)'' \\
& = -\langle \Omega_3, \mathbf{R}_3 \rangle + \left[-2k_1k_1' - k_g^1 (k_g^1)' - \kappa_n \kappa_n' \right] \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle \\
& \quad - \left[k_1^2 k_g^1 - k_g^1 (k_g^2)^2 \right] \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle + 2 (k_g^1)' k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle
\end{aligned} \tag{5.27}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminde $u_1^{(4)}$, $u_2^{(4)}$, $u_3^{(4)}$, $(k_g^2)'$ ve $(k_g^1)''$ bilinmeyenlerini bulabilmek için (5.25) – (5.27) denklemlerinin yanında iki tane denkleme daha ihtiyaç vardır. Bunun için (5.17) ve (5.18) eşitliklerinin türevleri alınırsa,

$$(h_{11} - \kappa_n g_{11})u_1^{(4)} + (h_{12} - \kappa_n g_{12})u_2^{(4)} + (h_{13} - \kappa_n g_{13})u_3^{(4)} = \rho_5 \tag{5.28}$$

$$(h_{12} - \kappa_n g_{12})u_1^{(4)} + (h_{22} - \kappa_n g_{22})u_2^{(4)} + (h_{23} - \kappa_n g_{23})u_3^{(4)} = \rho_6 \tag{5.29}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\rho_5 = & -\left(h_{11}''' - \kappa_n''' g_{11} - 3\kappa_n'' g_{11}' - 3\kappa_n' g_{11}'' - \kappa_n g_{11}'''\right)u_1' \\
& -\left(3h_{11}'' - 3\kappa_n'' g_{11} - 4\kappa_n' g_{11}' - 2\kappa_n g_{11}'' - 2\kappa_n g_{11}'\right)u_1'' \\
& -\left(3h_{11}' - 3\kappa_n' g_{11} - 2\kappa_n g_{11}' - \kappa_n g_{11}''\right)u_1''' \\
& -\left(h_{12}''' - \kappa_n''' g_{12} - 3\kappa_n'' g_{12}' - 3\kappa_n' g_{12}'' - \kappa_n g_{12}'''\right)u_2' \\
& -\left(3h_{12}'' - 3\kappa_n'' g_{12} - 4\kappa_n' g_{12}' - 2\kappa_n g_{12}'' - 2\kappa_n g_{12}'\right)u_2'' \\
& -\left(3h_{12}' - 3\kappa_n' g_{12} - 2\kappa_n g_{12}' - \kappa_n g_{12}''\right)u_2''' \\
& -\left(h_{13}''' - \kappa_n''' g_{13} - 3\kappa_n'' g_{13}' - 3\kappa_n' g_{13}'' - \kappa_n g_{13}'''\right)u_3' \\
& -\left(3h_{13}'' - 3\kappa_n'' g_{13} - 4\kappa_n' g_{13}' - 2\kappa_n g_{13}'' - 2\kappa_n g_{13}'\right)u_3'' \\
& -\left(3h_{13}' - 3\kappa_n' g_{13} - 2\kappa_n g_{13}' - \kappa_n g_{13}''\right)u_3'''
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
\rho_6 = & -\left(h_{12}''' - \kappa_n''' g_{12} - 3\kappa_n'' g_{12}' - 3\kappa_n' g_{12}'' - \kappa_n g_{12}'''\right) u_1' \\
& -\left(3h_{12}'' - 3\kappa_n'' g_{12} - 4\kappa_n' g_{12}' - 2\kappa_n g_{12}'' - 2\kappa_n g_{12}'\right) u_1'' \\
& -\left(3h_{12}' - 3\kappa_n' g_{12} - 2\kappa_n g_{12}' - \kappa_n g_{12}''\right) u_1''' \\
& -\left(h_{22}''' - \kappa_n''' g_{22} - 3\kappa_n'' g_{22}' - 3\kappa_n' g_{22}'' - \kappa_n g_{22}'''\right) u_2' \\
& -\left(3h_{22}'' - 3\kappa_n'' g_{22} - 4\kappa_n' g_{22}' - 2\kappa_n g_{22}'' - 2\kappa_n g_{22}'\right) u_2'' \\
& -\left(3h_{22}' - 3\kappa_n' g_{22} - 2\kappa_n g_{22}' - \kappa_n g_{22}''\right) u_2''' \\
& -\left(h_{23}''' - \kappa_n''' g_{23} - 3\kappa_n'' g_{23}' - 3\kappa_n' g_{23}'' - \kappa_n g_{23}'''\right) u_3' \\
& -\left(3h_{23}'' - 3\kappa_n'' g_{23} - 4\kappa_n' g_{23}' - 2\kappa_n g_{23}'' - 2\kappa_n g_{23}'\right) u_3'' \\
& -\left(3h_{23}' - 3\kappa_n' g_{23} - 2\kappa_n g_{23}' - \kappa_n g_{23}''\right) u_3'''
\end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde. ρ_5 ve ρ_6 eşitliklerinde yer alan birinci ve ikinci temel form katsayılarının yay parametresine göre üçüncü türevleri, sırasıyla, $1 \leq i, j, k, l, m \leq 3$ için,

$$g_{ij}''' = \frac{d}{ds} \left(\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{m=1}^3 \mathbf{R}_{ikm} u_m' \right) u_k' + \mathbf{R}_{ik} u_k'' \right], \mathbf{R}_j \right\rangle \\ & + 2 \left\langle \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ik} u_k', \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{jk} u_k' \right\rangle \\ & + \left\langle \mathbf{R}_i, \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{m=1}^3 \mathbf{R}_{jkm} u_m' \right) u_k' + \mathbf{R}_{jk} u_k'' \right] \right\rangle \end{aligned} \right)$$

ve

$$h_{ij}''' = \frac{d}{ds} \left(\begin{aligned} & \left\langle -\kappa_n' \mathbf{T} - \kappa_n \mathbf{T}', \mathbf{R}_j \right\rangle + \left\langle -\kappa_n \mathbf{T}, \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{jk} u_k' \right\rangle \\ & + \left\langle \mathbf{N}', \sum_{k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u_k' \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}, \sum_{k=1}^3 \left[\left(\sum_{m=1}^3 \mathbf{R}_{ijkm} u_m' \right) u_k' + \mathbf{R}_{ijk} u_k'' \right] \right\rangle \end{aligned} \right)$$

olarak yazılır.

(5.25) – (5.29) eşitlikleri, sırasıyla, tekrar yazılırsa beş bilinmeyenli bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde katsayılar matrisi (5.21)'deki ile aynıdır. Bu katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olacağından sistemin tek çözümü vardır. Bu sistemden $u_1^{(4)}, u_2^{(4)}, u_3^{(4)}$ bilinmeyenlerini bulunarak, (2.24) eşitliği yardımıyla

$$k_3 = \frac{\langle \mathbf{b}_2, \alpha^{(4)} \rangle}{k_1 k_2}$$

eğriliği elde edilir.

$\mathbb{E}^4$ UZAYINDA ÖZEL REGLE HİPERYÜZEYLER VE AÇILABİLİRLİĞİ

Bu bölümde $\mathbb{E}^4$ uzayında alınan bir Frenet eğrisini eğrilik çizgisi kabul eden bir regle hiperyüzeyin nasıl inşa edilebileceği araştırılacaktır. Böylece elde edilen bu hiperyüzeyler bir önceki bölümde sunulan metodun örneklendirilmesinde kullanılarak, sonuçların doğru olup olmadığının teyit edilmesi sağlanacaktır. Buna ek olarak, burada elde edilen hiperyüzey, 4-boyutlu Öklid uzayında eğrilik çizgileri ile ilgili bundan sonraki yapılacak çalışmalara da örnek sunması bakımından önemlidir.

6.1 Regle Hiperyüzey ve Açılabilirliği

$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim teğet vektörü $\mathbf{e}_0$ ve yay parametresi s olan bir eğri olsun. β eğrisi boyunca doğrultman uzayının bir ortonormal bazı $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)\}$ olmak üzere, $\mathbb{E}^4$ uzayında dayanak eğrisi β olan bir regle hiperyüzey

$$\varphi : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^4, \quad \varphi(s, u, v) = \beta(s) + u\mathbf{e}_1(s) + v\mathbf{e}_2(s),$$

şeklinde parametrize edilir.

$$\text{rank}[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2] = 4 - k \quad (6.1)$$

olmak üzere, $k = 1$ ise regle hiperyüzeye açılabilir; $k = 0$ ise açılabilir değildir, denir [27]. Açılabilir regle hiperyüzey, doğrultman uzayının her noktasında hiperyüzeyin teğet hiperdüzlemi aynı olan bir regle hiperyüzeydir, [28].

β eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikler k_1, k_2, k_3 olmak üzere eğri için $\frac{k_3}{k_2}$ değerinin sabit olduğunu kabul edelim. β boyunca $\forall s \in I$ için

$$\mathcal{D}_1(s) = \mathbf{b}_1(s), \quad \mathcal{D}_2(s) = k_2\mathbf{n}(s) - k_3\mathbf{b}_2(s) \quad (6.2)$$

vektör alanlarını göz önüne alalım. $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan, $\mathcal{D}_2$

vektör alanı normlanırsa

$$\bar{\mathcal{D}}_2(s) = \frac{\mathcal{D}_2(s)}{\|\mathcal{D}_2(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \{k_2 \mathbf{n}(s) - k_3 \mathbf{b}_2(s)\} \quad (6.3)$$

elde edilir. Bu durumda $\{\mathcal{D}_1, \bar{\mathcal{D}}_2\}$ kümesi ortonormal olur. $\bar{\mathcal{D}}_2$ vektör alanının s 'ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_2'(s) &= \left(\frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \right)' \mathbf{n}(s) + \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{n}'(s) \\ &\quad - \left(\frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \right)' \mathbf{b}_2(s) - \frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{b}_2'(s) \\ &= \left(\frac{k_3^2 k_2' - k_2 k_3 k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathbf{n}(s) + \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} (-k_1 \mathbf{T}(s) + k_2 \mathbf{b}_1(s)) \\ &\quad - \left(\frac{k_2^2 k_3' - k_2 k_3 k_2'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathbf{b}_2(s) + \frac{k_3^2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{b}_1(s) \\ &= -\frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{T}(s) + \left(\frac{k_3^2 k_2' - k_2 k_3 k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathbf{n}(s) \\ &\quad + \sqrt{k_2^2 + k_3^2} \mathbf{b}_1(s) - \left(\frac{k_2^2 k_3' - k_2 k_3 k_2'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathbf{b}_2(s) \end{aligned} \quad (6.4)$$

olarak bulunur.

Dayanak eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ ve doğrultman uzayının ortonormal bazı $\{\mathcal{D}_1, \bar{\mathcal{D}}_2\}$ olan regle hiperyüzeyi $\mathcal{D}_1 \bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyi olarak gösterelim. Bu durumda bu regle hiperyüzey

$$\mathbf{R}(s, u, v) = \beta(s) + u \mathcal{D}_1(s) + v \bar{\mathcal{D}}_2(s), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (6.5)$$

şeklinde parametrik olarak ifade edilebilir. Şimdi bu regle hiperyüzeyin singüler noktalarını araştıralım ve β eğrisinin bu regle hiperyüzey üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğunu gösterelim.

Teorem 6.1. $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir Frenet eğrisi ve eğri boyunca $\frac{k_3}{k_2}$ sabit olsun. Bu durumda,

i) (s_0, u_0, v_0) noktasının $\beta(s)$ eğrisinin $\mathcal{D}_1 \bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyi üzerinde singüler olması için gerek ve yeter şart

$$v_0 = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{k_1 k_2}$$

olmasıdır.

ii) β eğrisi $\mathcal{D}_1\bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisidir.

İspat. i) $\forall s \in I$ için $\frac{k_3}{k_2}$ sabit olan birim hızlı bir β Frenet eğrisi için

$$\mathbf{R}(s, u, v) = \beta(s) + u\mathcal{D}_1(s) + v\bar{\mathcal{D}}_2(s), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

parametrik denklemi ile verilen $\mathcal{D}_1\bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyini göz önüne alalım. (6.4) eşitliği kullanılırsa, $\mathbf{R}_s$ kısmi türevi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= \beta'(s) + u\mathcal{D}_1'(s) + v\bar{\mathcal{D}}_2'(s) \\ &= \mathbf{T}(s) + u(-k_2\mathbf{n}(s) + k_3\mathbf{b}_2(s)) - \frac{k_1k_2v}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}\mathbf{T}(s) + v\sqrt{k_2^2 + k_3^2}\mathbf{b}_1(s) \\ &\quad + v\left(\frac{k_3^2k_2' - k_2k_3k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathbf{n}(s) - v\left(\frac{k_2^2k_3' - k_2k_3k_2'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathbf{b}_2(s) \end{aligned}$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= \left(1 - \frac{k_1k_2v}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}\right)\mathbf{T}(s) + \left(v\left(\frac{k_3^2k_2' - k_2k_3k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - uk_2\right)\mathbf{n} \\ &\quad + v\sqrt{k_2^2 + k_3^2}\mathbf{b}_1(s) + \left(uk_3 - v\left(\frac{k_2^2k_3' - k_2k_3k_2'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)\mathbf{b}_2(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, hiperyüzeyin u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri alınır, sırasıyla,

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{b}_1(s), \quad \mathbf{R}_v = \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}\{k_2\mathbf{n}(s) - k_3\mathbf{b}_2(s)\}$$

olur.

$$\sigma_1 = 1 - \frac{v\kappa_1\kappa_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}, \quad \sigma_2 = \left(v\left(\frac{k_3^2k_2' - k_2k_3k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - uk_2\right),$$

$$\sigma_3 = v\sqrt{k_2^2 + k_3^2}, \quad \sigma_4 = \left(uk_3 - v\left(\frac{k_2^2k_3' - k_2k_3k_2'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right),$$

$$\sigma_5 = \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}, \quad \sigma_6 = -\frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}_s \otimes \mathbf{R}_u \otimes \mathbf{R}_v \\
&= (\sigma_1 \mathbf{T}(s) + \sigma_2 \mathbf{n}(s) + \sigma_3 \mathbf{b}_1(s) + \sigma_4 \mathbf{b}_2(s)) \otimes \mathbf{b}_1(s) \otimes (\sigma_5 \mathbf{n}(s) + \sigma_6 \mathbf{b}_2(s)) \\
&= \sigma_1 \sigma_5 \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{b}_1(s) \otimes \mathbf{n}(s) + \sigma_1 \sigma_6 \mathbf{T}(s) \otimes \mathbf{b}_1(s) \otimes \mathbf{b}_2(s) \\
&\quad + \sigma_2 \sigma_6 \mathbf{n}(s) \otimes \mathbf{b}_1(s) \otimes \mathbf{b}_2(s) + \sigma_4 \sigma_5 \mathbf{b}_2(s) \otimes \mathbf{b}_1(s) \otimes \mathbf{n}(s) \\
&= \sigma_1 \sigma_5 \mathbf{b}_2(s) - \sigma_1 \sigma_6 \mathbf{n}(s) + \sigma_2 \sigma_6 \mathbf{T}(s) - \sigma_4 \sigma_5 \mathbf{T}(s) \\
&= (\sigma_2 \sigma_6 - \sigma_4 \sigma_5) \mathbf{T}(s) - \sigma_1 \sigma_6 \mathbf{n}(s) + \sigma_1 \sigma_5 \mathbf{b}_2(s) \tag{6.7} \\
&= \gamma_1 \mathbf{T}(s) + \gamma_2 \mathbf{n}(s) + \gamma_3 \mathbf{b}_2(s) \tag{6.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sigma_2 \sigma_6 - \sigma_4 \sigma_5 \\
&= -\frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} v \left(\frac{k_3^2 k_2' - k_2 k_3 k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{k_2 k_3 u}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \\
&\quad - \frac{k_2 k_3 u}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} - \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} v \left(\frac{k_2^2 k_3' - k_2 k_3 k_2'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= v \left(\frac{k_2 k_3^2 k_3' - k_3^3 k_2' + k_2^2 k_3 k_2' - k_2^3 k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^2} \right) \\
&= v \left(\frac{k_2^2 (k_3 k_2' - k_2 k_3') - k_3^2 (k_3 k_2' - k_2 k_3')}{(k_2^2 + k_3^2)^2} \right) \\
&= v \frac{(k_2^2 - k_3^2) \left(\frac{k_2}{k_3} \right)' k_3^2}{(k_2^2 + k_3^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= -\sigma_1 \sigma_6 \\
&= \frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} - \frac{k_1 k_2 k_3 v}{k_2^2 + k_3^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= \sigma_1 \sigma_5 \\
&= \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} - \frac{k_1 k_2^2 v}{k_2^2 + k_3^2}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\left(\frac{k_2}{k_3} \right)' = 0$ olduğundan, $\mathcal{D}_1 \bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyi üzerinde bir noktanın

singüler olması için gerek ve yeter şart $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ olmasıdır. Bu durumda,

$$v_0 = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{k_1 k_2}$$

olur.

ii) β eğrisinin noktaları için $u = v = 0$ olduğunu biliyoruz. Ancak, $u = v = 0$ olması durumunda singüler durum oluşmayacağından, her $s \in I$ için $\beta(s)$ eğrisi hiperyüzey üzerinde regülerdir. Bu durumda,

$$\|\mathbf{R}_s \otimes \mathbf{R}_u \otimes \mathbf{R}_v\| = \sqrt{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

olacağından, $\mathcal{D}_1 \bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3}{\|\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3\|} = \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}} \mathbf{n}(s) + \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}} \mathbf{b}_2(s) \quad (6.9)$$

olarak bulunur. Birim normal vektör alanının β eğrisine kısıtlanması

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\beta(s)} &= \frac{\frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}}{\frac{k_2^2}{k_2^2 + k_3^2} + \frac{k_3^2}{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{n}(s) + \frac{\frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}}{\frac{k_2^2}{k_2^2 + k_3^2} + \frac{k_3^2}{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{b}_2(s) \\ &= \frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{n}(s) + \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{b}_2(s) \end{aligned}$$

olduğundan, s parametresine göre türevi

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_{\beta(s)} &= \left(\frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \right)' \mathbf{n}(s) + \frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} (-k_1 \mathbf{T}(s) + k_2 \mathbf{b}_1(s)) \\ &\quad + \left(\frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \right)' \mathbf{b}_2(s) + \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} (-k_3 \mathbf{b}_1(s)) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^2}} \right)' \mathbf{n}(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2}} \right)' \mathbf{b}_2(s) - \frac{k_1 k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{T}(s) \\ &= -\frac{k_1 k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \mathbf{T}(s) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, β eğrisi $\mathcal{D}_1 \bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyi üzerinde eğrilik çizgisidir. ■

Teorem 6.2. $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir Frenet eğrisi ve $\frac{k_3}{k_2}$ oranı eğri boyunca sabit olsun. β eğrisi ile irtibatlı $\mathcal{D}_1 \bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyi açılabilir.

İspat. β eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbf{T}$ olsun. β eğrisi ile irtibatlı $\mathcal{D}_1\bar{\mathcal{D}}_2$ -regle hiperyüzeyinin açılabilir olduğunu gösterebilmek için $\text{rank}[\mathbf{T}, \mathcal{D}_1, \bar{\mathcal{D}}_2, \mathcal{D}'_1, \bar{\mathcal{D}}'_2] = 3$ olduğunu göstermeliyiz. (6.4) eşitliğinde $\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)' = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{D}'_1 = \mathbf{b}_1'(s) = -k_2\mathbf{n}(s) + k_3\mathbf{b}_2(s)$$

ve

$$\bar{\mathcal{D}}'_2 = -\frac{k_1k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}\mathbf{T}(s) + \frac{k_2^2 + k_3^2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}\mathbf{b}_1(s)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \text{rank}[\mathbf{T}, \mathcal{D}_1, \bar{\mathcal{D}}_2, \mathcal{D}'_1, \bar{\mathcal{D}}'_2] &= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} & 0 & -\frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ \frac{-k_1k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} & 0 & \sqrt{k_2^2 + k_3^2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} & 0 & -\frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \end{aligned}$$

olup, istenen elde edilir. ■

Bu bölümde daha önceki bölümlerde elde edilen sonuçların uygulaması gösterilecektir. Parametrik denklemi verilen bir hiperyüzey üzerinde başlangıç noktası belli olan bir eğrilik çizgisi bulunarak, elde edilen eğrilik çizgisinin eğriliklerinin çalışmamızda ortaya konan metot yardımıyla nasıl bulunabileceği gösterilecektir.

$u_1, u_3 \in \mathbb{R}, u_2 \neq \frac{9}{\sqrt{2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u_1, u_2, u_3) = & \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}u_2 \right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u_3 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \right. \\ & \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}u_2 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}u_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \\ & \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}u_2 \right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \\ & \left. \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}u_2 \right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_3 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right) \quad (7.1) \end{aligned}$$

parametrik hiperyüzeyini göz önüne alalım. Bu hiperyüzeyin u_1 , u_2 ve u_3 değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(-\sqrt{2} + \frac{2}{3}u_2 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \right. \\ & \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}u_2 \right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_3 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \\ & - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}u_2 \right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_3 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \\ & \left. \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}u_2 \right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right), \quad (7.2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{R}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), -\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), -\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right) \quad (7.4)$$

şeklinde dir. (7.2) – (7.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3 &= -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} & i & j & k & l \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{-1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{-2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \end{vmatrix} \\ &+ u_2 \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \begin{vmatrix} & i & j & k & l \\ -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sqrt{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{-2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} & i & j & k & l \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{-1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ 0 & 0 & \frac{-3}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{3}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \end{vmatrix} \\ &+ u_2 \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \begin{vmatrix} & i & j & k & l \\ -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sqrt{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right) & -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right) \\ &- \frac{2}{27} u_2 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right) \\ &= \left(-\frac{2}{27} u_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

olup, bu vektörün normu

$$\|\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3\| = \sqrt{2} \left(-\frac{2}{27} u_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

olarak elde edilir. $u_2 \neq \frac{9\sqrt{2}}{2}$ olduğundan, hiperyüzeyin birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3}{\|\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{R}_3\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

olur.

Hiperyüzeyin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{11} &= \left(\left(-\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 \right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}u_3 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \right. \\ &\quad \left(-\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}u_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_1\right), \\ &\quad -\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9}u_2 \right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}u_3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right), \\ &\quad \left. -\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9}u_2 \right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}u_3 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u_1\right) \right), \\ \mathbf{R}_{12} &= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right), -\sqrt{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right), -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \right), \\ \mathbf{R}_{13} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right), -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right), -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{R}_{23} = \mathbf{R}_{33} = 0$$

olduğundan, hiperyüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları, sırasıyla, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 - \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{2}{9}u_2^2 + \frac{4}{9}u_3^2, & g_{12} &= -\frac{4}{9}u_3, \\ g_{13} &= \frac{4}{9}u_2, & g_{22} &= \frac{4}{9}, & g_{23} &= 0, & g_{33} &= 1, \end{aligned} \quad (7.7)$$

ve

$$h_{11} = \frac{u_2}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_{12} = h_{13} = h_{22} = h_{23} = h_{33} = 0. \quad (7.8)$$

Bu durumda, $\lambda = \frac{du_2}{du_1}$, $\mu = \frac{du_3}{du_1}$ ($du_1 \neq 0$) olmak üzere hiperyüzeyin bir P noktasındaki

(λ, μ) doğrultusundaki normal eğriliği,

$$\begin{aligned}\kappa_n(\lambda, \mu) &= \frac{h_{11} + 2h_{12}\lambda + 2h_{13}\mu + 2h_{23}\lambda\mu + h_{22}\lambda^2 + h_{33}\mu^2}{g_{11} + 2g_{12}\lambda + 2g_{13}\mu + 2g_{23}\lambda\mu + g_{22}\lambda^2 + g_{33}\mu^2} \\ &= \frac{\frac{u_2}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{2}{9}u_2^2 + \frac{4}{9}u_3^2\right) - \frac{8}{9}u_3\lambda + \frac{8}{9}u_2\mu + \frac{4}{9}\lambda^2 + \mu^2}\end{aligned}\quad (7.9)$$

olduğundan, (7.9) eşitliğinin λ ve μ değişkenlerine göre kısmi türevleri alınır, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa_n}{\partial \lambda} &= \frac{\left(\frac{u_2}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{8}{9}u_3 + \frac{8}{9}\lambda\right)}{\left(\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{2}{9}u_2^2 + \frac{4}{9}u_3^2\right) - \frac{8}{9}u_3\lambda + \frac{8}{9}u_2\mu + \frac{4}{9}\lambda^2 + \mu^2\right)^2} \\ \frac{\partial \kappa_n}{\partial \mu} &= \frac{\left(\frac{u_2}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{8}{9}u_2 + 2\mu\right)}{\left(\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{2}{9}u_2^2 + \frac{4}{9}u_3^2\right) - \frac{8}{9}u_3\lambda + \frac{8}{9}u_2\mu + \frac{4}{9}\lambda^2 + \mu^2\right)^2}\end{aligned}\quad (7.10)$$

elde edilir. $u_2 \neq \frac{9\sqrt{2}}{2}$ olduğundan,

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \kappa_n}{\partial \mu} = 0$$

eşitliklerinden $\lambda = u_3$ ve $\mu = -\frac{4}{9}u_2$ olur. Bulunan bu değerler (7.9) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\kappa_n(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\left(\frac{u_2}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

elde edilir. Eğer $\omega = \frac{u_2}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak alınır,

$$h_{11} - \kappa_n g_{11} = \omega - \frac{1}{2\omega} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{2}{9}u_2^2 + \frac{4}{9}u_3^2\right) = \frac{-1}{\omega} \left(\frac{8u_2^2}{81} + \frac{2u_3^2}{9}\right) \quad (7.11)$$

$$h_{12} - \kappa_n g_{12} = \frac{2}{9\omega}u_3 \quad (7.12)$$

$$h_{13} - \kappa_n g_{13} = -\frac{2}{9\omega}u_2 \quad (7.13)$$

$$h_{22} - \kappa_n g_{22} = -\frac{2}{9\omega} \quad (7.14)$$

$$h_{23} - \kappa_n g_{23} = 0 \quad (7.15)$$

$$h_{33} - \kappa_n g_{33} = -\frac{1}{2\omega} \quad (7.16)$$

şeklinde yazılır. Bu değerler (4.11) denklem sisteminin katsayılar matrisinde yerine

yazılırsa

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\omega} \left(\frac{8u_2^2}{81} + \frac{2u_3^2}{9} \right) & \frac{2}{9\omega}u_3 & -\frac{2}{9\omega}u_2 \\ \frac{2}{9\omega}u_3 & -\frac{2}{9\omega} & 0 \\ -\frac{2}{9\omega}u_2 & 0 & -\frac{1}{2\omega} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

veya $\mathcal{A}$ matrisinde ikinci satır u_3 , üçüncü satır ise $\frac{-4}{9}u_2$ ile çarpılıp, iki satır da birinci satıra eklenirse

$$\mathcal{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9\omega}u_3 & -\frac{2}{9\omega} & 0 \\ -\frac{2}{9\omega}u_2 & 0 & -\frac{1}{2\omega} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Yeni matrisin ikinci ve üçüncü satırları lineer bağımsız olduğundan $\text{rank } \mathcal{A} = 2$ olur. Ayrıca

$$(h_{22} - \kappa_n g_{12})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{23} - \kappa_n g_{23})^2 = \frac{1}{9\omega^2}$$

sıfırdan farklı olacağı için

$$a_4 = (h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{23} - \kappa_n g_{23})^2 = \frac{1}{9\omega^2}$$

$$a_5 = (h_{13} - \kappa_n g_{13})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) = \frac{u_3}{9\omega^2}$$

ile gösterilir ve

$$a_1 = (h_{12} - \kappa_n g_{12})(h_{23} - \kappa_n g_{23}) - (h_{22} - \kappa_n g_{22})(h_{13} - \kappa_n g_{13}) = -\frac{4u_2}{81\omega^2}$$

olduğu göz önüne alınırsa, (4.17) denklem sistemine karşılık gelen denklem sistemi

$$u'_1 = \frac{a_4}{\sqrt{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2}}$$

$$= \pm \frac{\frac{1}{9\omega^2}}{\frac{\sqrt{2}}{9\omega}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\omega},$$

$$u'_2 = \frac{a_5}{\sqrt{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2}}$$

$$= \pm \frac{\frac{u_3}{9\omega^2}}{\frac{\sqrt{2}}{9\omega}} = \pm \frac{u_3}{\sqrt{2}\omega},$$

$$u'_3 = \frac{a_1}{\sqrt{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + 2g_{13}a_1a_3 + 2g_{23}a_2a_3 + g_{22}a_2^2 + g_{33}a_3^2}}$$

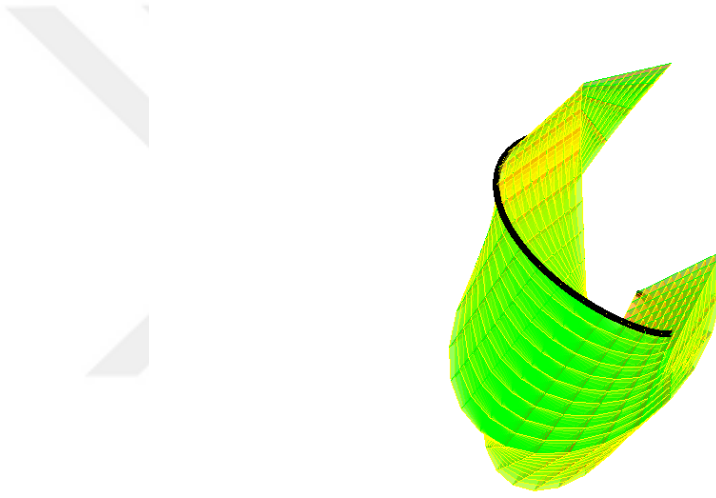
$$= \mp \frac{\frac{4u_2}{81\omega^2}}{\frac{\sqrt{2}}{9\omega}} = \mp \frac{4u_2}{9\sqrt{2}\omega} \quad (7.18)$$

şeklinde elde edilir. Burada u'_1 ve u'_2 eşitliklerinde $+(-)$ işareti alındığında u'_3

eşitliğinde $-(+)$ işaretinin alınması gerekmektedir. Böylece (7.18) diferansiyel denklem sistemi $u_1(0) = 0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0$ başlangıç şartı ile çözülür ve elde edilen u_1, u_2, u_3 fonksiyonları hiperyüzey üzerinde yerine yazılırsa, hiperyüzey üzerinde $\beta(0) = \mathbf{R}(u_1(0), u_2(0), u_3(0)) = (1, 0, 1, 0) = P$ başlangıç noktasından geçen β eğrilik çizgisi

$$\beta(s) = \mathbf{R}(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$$

şeklinde elde edilir. Eğer (7.18) eşitliğinde işaretler, sırasıyla, $-, -, +$ olarak seçilir ve elde edilen sistem $u_1(0) = 0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0$ başlangıç şartı ile birlikte MATLAB R2014a'nın ode45 fonksiyonu yardımıyla çözülürse bir eğrilik çizgisi elde edilir. Bu eğrilik çizgisinin ve hiperyüzeyin parametre yüzeylerinin $w = 0$ hiperdüzlemi üzerine paralel izdüşümü alınarak elde edilen izdüşümler Şekil 7.1'de gösterilmiştir.



Şekil 7.1 $P = (1, 0, 1, 0)$ noktasından geçen eğrilik çizgisi

Bunun yanısıra,

$$u'_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\omega}, \quad u'_2 = -\frac{u_3}{\sqrt{2}\omega}, \quad u'_3 = \frac{4u_2}{9\sqrt{2}\omega}$$

sistemi için $u_1(0) = 0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0$ başlangıç şartı göz önüne alındığında, $u'_1 = 1, u'_2 = u'_3 = 0$, yani β eğrisinin P noktasındaki birim teğet vektörü $\beta'(0) = \mathbf{R}_1 u'_1(0) + \mathbf{R}_2 u'_2(0) + \mathbf{R}_3 u'_3(0)$ eşitliğinden

$$\beta'(0) = \mathbf{R}_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak elde edilir.

Bu bölümün bundan sonraki kısmında bu eğrinin $\beta(0) = (1, 0, 1, 0)$ noktasındaki

Frenet elemanları ve eğrilikleri hesaplanacaktır.

Birinci eğrilik

Birinci eğriliği bulmak için elde edilen sonuçları (5.9) denklem sisteminde yerine yazmalıyız. Ancak burada

$$(h_{22} - \kappa_n g_{12})(h_{33} - \kappa_n g_{33}) - (h_{23} - \kappa_n g_{23})^2 = \frac{1}{9\omega^2} \neq 0$$

olduğu göz önüne alınırsa, (5.9) denklem sisteminin dördüncü ve beşinci denklemleri yerine (4.5) eşitliğinin ikinci ve üçüncü eşitliklerinin türevlerinin alınmasıyla elde edilen eşitlikleri kullanmalıyız. Bu duruma karşılık gelen denklem sistemi

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 u'_i g_{1i} & \sum_{i=1}^3 u'_i g_{2i} & \sum_{i=1}^3 u'_i g_{3i} & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & -1 & 0 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & -1 & 0 \\ h_{12} - \kappa_n g_{12} & h_{22} - \kappa_n g_{22} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & 0 & 0 \\ h_{13} - \kappa_n g_{13} & h_{23} - \kappa_n g_{23} & h_{33} - \kappa_n g_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u''_1 \\ u''_2 \\ u''_3 \\ k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ k_g^2 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\langle \Omega_1, \beta' \rangle \\ -\langle \Omega_1, \mathbf{R}_2 \rangle \\ -\langle \Omega_1, \mathbf{R}_3 \rangle \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde. Buradaki katsayılar matrisinin birinci denkleminin katsayıları için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 u'_i g_{1i} &= u'_1 g_{11} + u'_2 g_{12} + u'_3 g_{13} \\ &= -\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{9} u_2 + \frac{2}{9} u_2^2 + \frac{4}{9} u_3^2 \right) \\ &\quad - \frac{u_3}{\omega\sqrt{2}} \left(-\frac{4}{9} u_3 \right) + \frac{4u_2}{9\sqrt{2}} \left(\frac{4}{9} u_2 \right) \\ &= -\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{9} u_2 + \frac{2}{9} u_2^2 + \frac{4}{9} u_3^2 - \frac{4}{9} u_3^2 - \frac{16}{81} u_2^2 \right) \\ &= -\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{9} u_2 \right)^2 \\ &= -\frac{2\omega^2}{\omega\sqrt{2}} \\ &= -\omega\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 u'_i g_{2i} &= u'_1 g_{12} + u'_2 g_{22} + u'_3 g_{23} \\ &= -\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \left(-\frac{4}{9} u_3 + \frac{4}{9} u_3 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 u'_i g_{3i} &= u'_1 g_{13} + u'_2 g_{23} + u'_3 g_{33} \\
&= -\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \left(\frac{4}{9} u_2 - \frac{4}{9} u_2 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.21}$$

eşitlikleri yazılır. Ayrıca $\Omega_1 = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u'_i u'_j$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_1, \mathbf{R}_1 \rangle &= \left\langle \mathbf{R}_{11} (u'_1)^2 + 2\mathbf{R}_{12} u'_1 u'_2 + 2\mathbf{R}_{13} u'_1 u'_3, \mathbf{R}_1 \right\rangle \\
&= \frac{2u_3}{9\omega},
\end{aligned} \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_1, \mathbf{R}_2 \rangle &= \left\langle \mathbf{R}_{11} (u'_1)^2 + 2\mathbf{R}_{12} u'_1 u'_2 + 2\mathbf{R}_{13} u'_1 u'_3, \mathbf{R}_2 \right\rangle \\
&= \frac{7}{9\omega} + \frac{4\sqrt{2}}{9\omega^2},
\end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_1, \mathbf{R}_3 \rangle &= \left\langle \mathbf{R}_{11} (u'_1)^2 + 2\mathbf{R}_{12} u'_1 u'_2 + 2\mathbf{R}_{13} u'_1 u'_3, \mathbf{R}_3 \right\rangle \\
&= \frac{2u_3}{9\omega^2}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

şeklinde. $\kappa_n = \frac{1}{2\omega}$ olduğundan s parametresine göre birinci türevi $\kappa'_n = \frac{u_3}{18\sqrt{2}\omega^3}$ olur. Ayrıca, birinci ve ikinci temel form katsayılarının birinci türevleri

$$g'_{11} = \frac{2u_3}{9\omega} - \frac{4u_2 u_3}{81\sqrt{2}\omega}, \quad g'_{12} = \frac{-16u_2}{81\sqrt{2}\omega}, \quad g'_{13} = \frac{-4u_3}{9\sqrt{2}\omega},$$

$$g'_{22} = 0, \quad g'_{23} = 0, \quad g'_{33} = 0,$$

$$h'_{11} = \frac{-u_3}{9\sqrt{2}\omega}, \quad h'_{12} = h'_{13} = h'_{22} = h'_{23} = h'_{33} = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -(h'_{12} - \kappa'_n g_{12} - \kappa_n g'_{12}) u'_1 - (h'_{22} - \kappa'_n g_{22} - \kappa_n g'_{22}) u'_2 \\
&\quad - (h'_{23} - \kappa'_n g_{23} - \kappa_n g'_{23}) u'_3 \\
&= \kappa'_n (g_{12} u'_1 + g_{22} u'_2) + \kappa_n (g'_{12} u'_1) \\
&= \frac{u_3}{18\sqrt{2}\omega^3} \left(\left(\frac{-4u_3}{9} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}\omega} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{-u_3}{\sqrt{2}\omega} \right) \right) + \frac{1}{2\omega} \left(\frac{-16u_2}{81\sqrt{2}\omega} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}\omega} \right) \\
&= \frac{4u_2}{81\omega^3},
\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= -(h'_{13} - \kappa'_n g_{13} - \kappa_n g'_{13})u'_1 - (h'_{23} - \kappa'_n g_{23} - \kappa_n g'_{23})u'_2 \\
&\quad - (h'_{33} - \kappa'_n g_{33} - \kappa_n g'_{33})u'_3 \\
&= \kappa'_n (g_{13}u'_1 + g_{33}u'_3) + \kappa_n (g'_{13}u'_1) \\
&= \frac{u_3}{18\sqrt{2}\omega^3} \left(\left(\frac{4u_2}{9} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}\omega} \right) + \frac{4u_2}{9\sqrt{2}\omega} \right) + \frac{1}{2\omega} \left(\frac{-4u_3}{9\sqrt{2}\omega} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}\omega} \right) \\
&= \frac{u_3}{9\omega^3}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

değerleri elde edilir. Bulunan bütün değerler yeni denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -\omega\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-4u_3}{9} & \frac{4}{9} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{4u_2}{9} & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{2u_3}{9} & \frac{-2}{9\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2u_2}{9\omega} & 0 & \frac{-1}{2\omega} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u''_1 \\ u''_2 \\ u''_3 \\ k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_3}{9\sqrt{2}\omega^2} \\ \frac{-7}{9\omega} - \frac{4\sqrt{2}}{9\omega^2} \\ \frac{-2u_2}{9\omega^2} \\ \frac{4u_2}{81\omega^3} \\ \frac{u_3}{9\omega^3} \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

veya satırların yerleri değiştirilirse

$$\begin{pmatrix} \omega\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2u_3}{9\omega} & \frac{-2}{9\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2u_2}{9\omega} & 0 & \frac{-1}{2\omega} & 0 & 0 \\ \frac{-4u_3}{9\omega} & \frac{4}{9} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{4u_2}{9} & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u''_1 \\ u''_2 \\ u''_3 \\ k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle \\ k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-u_3}{9\sqrt{2}\omega^2} \\ \frac{4u_2}{81\omega^3} \\ \frac{u_3}{9\omega^3} \\ \frac{-7}{9\omega} - \frac{4\sqrt{2}}{9\omega^2} \\ \frac{-2u_3}{9\omega^2} \end{pmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü

$$u''_1 = -\frac{u_3}{18\omega^3} \tag{7.28}$$

$$u''_2 = -\frac{u_3^2}{18\omega^3} - \frac{2u_2}{9\omega^2} \tag{7.29}$$

$$u''_3 = \frac{2u_2u_3}{81\omega^3} - \frac{2u_3}{9\omega^2} \tag{7.30}$$

$$k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle = \frac{7}{9\omega} + \frac{4\sqrt{2}}{9\omega^2} - \frac{8u_2}{81\omega^2} = -\frac{1}{9\omega} \tag{7.31}$$

$$k_g^1 \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle = \frac{2u_3}{9\omega^2} - \frac{2u_3}{9\omega^2} = 0 \tag{7.32}$$

şeklindedir. $\beta(s)$ birim hızlı eğrilik çizgisinin birinci eğriliğini hesaplamak için $\|\beta''(s)\| = \sqrt{\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle}$ hesaplanmalıdır.

$$\beta''(s) = \mathbf{R}_1 u''_1(s) + \mathbf{R}_2 u''_2(s) + \mathbf{R}_3 u''_3(s) + \Omega_1$$

eşitliği kullanılarak elde edilen

$$\begin{aligned}\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle &= g_{11} (u_1''(s))^2 + 2g_{12} u_1''(s) u_2''(s) + 2g_{13} u_1''(s) u_3''(s) \\ &+ g_{22} (u_2''(s))^2 + g_{33} (u_3''(s))^2 + 2u_1''(s) \langle \Omega_1, \mathbf{R}_1 \rangle \\ &+ 2u_2''(s) \langle \Omega_1, \mathbf{R}_2 \rangle + 2u_3''(s) \langle \Omega_1, \mathbf{R}_3 \rangle + \langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle\end{aligned}\quad (7.33)$$

eşitliğinde $u_i''(s)$ ve $\langle \Omega_1, \mathbf{R}_i \rangle$, ($i = 1, 2, 3$) bilindiğinden birinci eğriliği hesaplayabilmek için $\langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle$ iç çarpımını bulmalıyız.

$$\Omega_1 = \mathbf{R}_{11} (u_1')^2 + 2\mathbf{R}_{12} u_1' u_2' + 2\mathbf{R}_{13} u_1' u_3'$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle &= (u_1')^4 \langle \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{11} \rangle + 4(u_1')^3 u_2' \langle \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{12} \rangle + 4(u_1')^3 u_3' \langle \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{13} \rangle \\ &+ 4(u_1')^2 (u_2')^2 \langle \mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{12} \rangle + 8(u_1')^2 u_2' u_3' \langle \mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{13} \rangle \\ &+ 4(u_1')^2 (u_3')^2 \langle \mathbf{R}_{13}, \mathbf{R}_{13} \rangle\end{aligned}\quad (7.34)$$

olarak bulunur. Burada

$$\langle \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{11} \rangle = \frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9} u_2 + \frac{10}{81} u_2^2 + \frac{2}{9} u_3^3 \quad (7.35)$$

$$\langle \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{12} \rangle = -\frac{2}{9} u_3 \quad (7.36)$$

$$\langle \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{13} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{2}{9} u_2 \quad (7.37)$$

$$\langle \mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{12} \rangle = \frac{2}{9} \quad (7.38)$$

$$\langle \mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{13} \rangle = 0 \quad (7.39)$$

$$\langle \mathbf{R}_{13}, \mathbf{R}_{13} \rangle = \frac{4}{9} \quad (7.40)$$

şeklindedir. Bu eşitlikler $\langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle$ iç çarpımında yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle &= (u'_1)^4 \left[\frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{10}{81}u_2^2 + \frac{2}{9}u_3^3 \right] + 4(u'_1)^3 u'_2 \left[-\frac{2}{9}u_3 \right] \\
&\quad + 4(u'_1)^3 u'_3 \left[\frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{2}{9}u_2 \right] + 4(u'_1)^2 (u'_2)^2 \left[\frac{2}{9} \right] + 4(u'_1)^2 (u'_3)^2 \left[\frac{4}{9} \right] \\
&= \frac{1}{18\omega^4} \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{29}{81}u_2^2 + u_3^3 \right)
\end{aligned} \tag{7.41}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle &= \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{2}{9}u_2^2 + \frac{4}{9}u_3^2 \right) \left(-\frac{u_3}{18\omega^3} \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(-\frac{4}{9}u_3 \right) \left(-\frac{u_3}{18\omega^3} \right) \left(-\frac{u_3^2}{18\omega^3} - \frac{2u_2}{9\omega^2} \right) \\
&\quad + 2 \left(\frac{4}{9}u_2 \right) \left(-\frac{u_3}{18\omega^3} \right) \left(\frac{2u_1u_3}{81\omega^3} - \frac{2u_3}{9\omega^2} \right) \\
&\quad + \frac{4}{9} \left(-\frac{u_3^2}{18\omega^3} - \frac{2u_2}{9\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{2u_2u_3}{81\omega^3} - \frac{2u_3}{9\omega^2} \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(-\frac{u_3}{18\omega^3} \right) \left(\frac{2u_3}{9\omega} \right) + 2 \left(-\frac{u_3^2}{18\omega^3} - \frac{2u_2}{9\omega^2} \right) \left(\frac{7}{9\omega} + \frac{4\sqrt{2}}{9\omega^2} \right) \\
&\quad + 2 \left(\frac{2u_2u_3}{81\omega^3} - \frac{2u_3}{9\omega^2} \right) \left(\frac{2u_3}{9\omega^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{18\omega^4} \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{9}u_2 + \frac{29}{81}u_2^2 + u_3^3 \right) \\
&= \frac{u_2}{1458\omega^4} [5u_2 - 45\sqrt{2}] + \frac{5}{36\omega^4}
\end{aligned} \tag{7.42}$$

bulunur. Böylece $\beta(0) = (1, 0, 1, 0)$ noktasındaki birinci eğrilik $k_1(0) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ olarak hesaplanır.

İkinci eğrilik

$\beta(s)$ birim hızlı eğrilik çizgisinin ikinci eğriliğini hesaplamak için (5.12) – (5.16)

denklemleri ile elde edilen

$$\begin{aligned}
g_{11}u_1'''' + g_{12}u_2'''' + g_{13}u_3'''' - (k_g^1)' \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle - k_g^1 k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle &= -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_1 \rangle \\
g_{12}u_1'''' + g_{22}u_2'''' + g_{23}u_3'''' - (k_g^1)' \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle - k_g^1 k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle &= -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_2 \rangle \\
g_{13}u_1'''' + g_{23}u_2'''' + g_{33}u_3'''' - (k_g^1)' \langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle - k_g^1 k_g^2 \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle &= -k_1^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle - \langle \Omega_2, \mathbf{R}_3 \rangle \\
(h_{12} - \kappa_n g_{12})u_1'''' + (h_{22} - \kappa_n g_{22})u_2'''' + (h_{23} - \kappa_n g_{23})u_3'''' &= \rho_3 \\
(h_{13} - \kappa_n g_{13})u_1'''' + (h_{23} - \kappa_n g_{23})u_2'''' + (h_{33} - \kappa_n g_{33})u_3'''' &= \rho_4
\end{aligned}$$

denklem sisteminin $\beta(0) = (1, 0, 1, 0)$ noktasındaki katsayılar matrisini hesaplayalım:

$s = 0$ için $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$ ve $u_3(0) = 0$ olacağından eğrinin birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad g_{22} = \frac{4}{9}, \quad g_{23} = 0, \quad g_{33} = 1, \\
h_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_{12} = h_{13} = h_{22} = h_{23} = h_{33} = 0,
\end{aligned}$$

ve (4.11) matrisinin katsayıları

$$\begin{aligned}
h_{11} - \kappa_n g_{11} = 0, \quad h_{12} - \kappa_n g_{12} = 0, \quad h_{22} - \kappa_n g_{22} = \frac{2\sqrt{2}}{9}, \\
h_{23} - \kappa_n g_{23} = 0, \quad h_{13} - \kappa_n g_{13} = 0, \quad h_{33} - \kappa_n g_{33} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned} \tag{7.43}$$

olur.

$\beta''(0) = \Omega_1 = \mathbf{R}_{11} = \left(\frac{-2}{3}, 0, \frac{-1}{3}, 0\right)$ ve $\mathbf{N}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ olup, bunlar $\mathbb{E}^4$ uzayında β eğrisi boyunca $\{\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{N}\}$ genişletilmiş Darboux çatı alanı için verilen $\mathbf{E} = \frac{\beta'' - \langle \beta'', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}}{\|\beta'' - \langle \beta'', \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}\|}$ ve $\mathbf{D} = \mathbf{N} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{E}$ eşitliklerinde yerine konulursa

$$\mathbf{E}(0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \mathbf{D}(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

elde edilir. Bu durumda (5.21) katsayılar matrisinin elemanları,

$$\mathbf{R}_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{R}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right), \quad \mathbf{R}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_1 \rangle &= 0, \quad \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_1 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_1 \rangle = 1 \\
\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_2 \rangle &= \frac{2}{3}, \quad \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_2 \rangle = 0 \\
\langle \mathbf{E}, \mathbf{R}_3 \rangle &= 0, \quad \langle \mathbf{D}, \mathbf{R}_3 \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}_3 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{7.44}$$

olarak bulunur.

$\Omega_2 = \mathbf{R}_{111}(u_1')^3 = \mathbf{R}_{111}(0) = \left(0, -\frac{2\sqrt{6}}{9}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ eşitliği kullanılırsa, $\langle \Omega_2, \mathbf{R}_1 \rangle = -\frac{5}{9}$, $\langle \Omega_2, \mathbf{R}_2 \rangle = 0$ ve $\langle \Omega_2, \mathbf{R}_3 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{9}$ olur. Bu durumda, tüm eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1''' \\ u_2''' \\ u_3''' \\ (k_g^1)' \\ k_g^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

olup, denklem sisteminin bilinmeyenleri

$$u_1''' = 0, \quad u_2''' = 0, \quad u_3''' = 0, \quad (k_g^1)' = 0, \quad k_g^2 = -\frac{2}{3}$$

olarak elde edilir. (2.36) eşitliğinden

$$\beta'''(s) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u_i'' + 3 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i' u_j'' + \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u_i' u_j' u_k'$$

olarak yazılabileceğinden, $s = 0$ için

$$\beta'''(0) = \mathbf{R}_{111}(0)(u_1')^3 = \Omega_2 = \left(0, -\frac{2\sqrt{6}}{9}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

bulunur.

$\mathbb{E}^4$ uzayında birim hızlı $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\beta'(s) \otimes \beta''(s) \otimes \beta'''(s)}{\|\beta'(s) \otimes \beta''(s) \otimes \beta'''(s)\|}$$

ile tanımlanan ikinci binormal vektör alanını $\beta(0) = (1, 0, 1, 0)$ noktasında hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \beta''(0) &= \left(\frac{-2}{3}, 0, \frac{-1}{3}, 0\right) \\ \beta'''(0) &= \left(0, -\frac{2\sqrt{6}}{9}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right) \end{aligned}$$

olup,

$$\beta'(0) \otimes \beta''(0) \otimes \beta'''(0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{6}}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{27} (-1, 0, 2, 0)$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\mathbf{b}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

şeklinde elde edilir.

β eğrisinin asli normal vektör alanı ise $\mathbf{n}(0) = \frac{\beta''(0)}{\|\beta''(0)\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1, 0)$ olarak ve β eğrisinin birinci binormal vektör alanı da

$$\mathbf{b}_1(0) = \mathbf{b}_2(0) \otimes \mathbf{t}(0) \otimes \mathbf{n}(0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

olur. Sonuç olarak, $\beta(s)$ birim hızlı eğrilik çizgisinin $\beta(0) = (1, 0, 1, 0)$ noktasındaki ikinci eğriliği

$$k_2(0) = \frac{\langle \mathbf{b}_1(0), \beta'''(0) \rangle}{k_1(0)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{5}}$$

olarak hesaplanır.

Üçüncü eğrilik

Benzer şekilde $\beta(s)$ birim hızlı eğrilik çizgisinin üçüncü eğriliğini hesaplamak için (5.25) – (5.29) denklemleri ile verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi (5.12) – (5.16)'daki ile aynı olduğundan, sadece sabitler matrisinin terimlerini bulmak yeterlidir. Burada,

$$\Omega_3 = \mathbf{R}_{1111}(0)(u_1')^4 = \mathbf{R}_{1111}(0) = \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{1}{9}, 0 \right)$$

olup,

$$\langle \Omega_3, \mathbf{R}_1 \rangle = 0, \quad \langle \Omega_3, \mathbf{R}_2 \rangle = -\frac{3\sqrt{2}}{27}, \quad \langle \Omega_3, \mathbf{R}_3 \rangle = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan β birim hızlı eğrilik çizgisinin $\beta(0) = (1, 0, 1, 0)$ noktasındaki birinci eğriliği, birinci eğriliğinin türevi, birinci jeodezik eğriliği, birinci jeodezik eğriliğinin türevi, ikinci jeodezik eğriliği, normal eğriliği ve normal eğriliğinin türevi,

sırasıyla,

$$k_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad k'_1 = 0, \quad k_g^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad (k_g^1)' = 0, \quad k_g^2 = -\frac{2}{3}, \quad \kappa_n = -1, \quad \kappa'_n = 0$$

olur. Bu durumda, (5.25) – (5.29) denklemleri ile verilen denklem sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ u_3^{(4)} \\ (k_g^1)'' \\ (k_g^2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olup, bu sistem çözülürse

$$u_1^{(4)} = 0, \quad u_2^{(4)} = 0, \quad u_3^{(4)} = 0, \quad (k_g^2)' = 0, \quad (k_g^1)'' = 0$$

olarak elde edilir.

(2.37) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \beta^{(4)}(s) = & \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i u_i^{(4)} + 4 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i''' u_j' + 3 \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{R}_{ij} u_i'' u_j'' \\ & + 6 \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{R}_{ijk} u_i' u_j' u_k'' + \sum_{i,j,k,j=1}^3 \mathbf{R}_{ijkl} u_i' u_j' u_k' u_l' \end{aligned}$$

olduğundan, $s = 0$ için

$$\beta^{(4)}(0) = \mathbf{R}_{1111}(0) (u_1')^4 = \mathbf{R}_{1111}(0) = \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{1}{9}, 0 \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak, eğrilik çizgisinin $\beta(0) = (1, 0, 1, 0)$ noktasındaki üçüncü eğriliği

$$k_3(0) = \frac{\langle \mathbf{b}_2(0), \beta^{(4)}(0) \rangle}{k_1(0)k_2(0)} = \frac{-\frac{2}{9\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{3} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{5}} \right)} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

olarak hesaplanır.

Uyarı 7.1: (7.18)'deki diferensiyel denklem sisteminde u'_1 , u'_2 ve u'_3 için işaret seçimini $-$, $-$, $+$ olacak şekilde alalım:

$$u'_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\omega}, \quad u'_2 = -\frac{u_3}{\sqrt{2}\omega}, \quad u'_3 = \frac{4u_2}{9\sqrt{2}\omega}.$$

u_2' ve u_3' eşitliklerini, sırasıyla, $\frac{4}{9}u_2$ ve u_3 ile çarpar ve taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{4}{9}u_2u_2' + u_3u_3' = 0 \quad (7.46)$$

elde edilir. (7.46) denkleminde iki tarafın integrali alınır, $\frac{4}{9}u_2^2 + u_3^2 = c$, $c > 0$ bir sabit, bulunur. $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$ ve $u_3(0) = 0$ başlangıç şartı ile birlikte $c = 0$ olacağından, $\forall s \in I$ için $u_2(s) = 0$ ve $u_3(s) = 0$ elde edilir. Bu durumda, $\omega = \frac{u_2(s)}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ eşitliğinde $u_2(s) = 0$ yazılırsa $\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bulunur. Sonuç olarak, (7.18) denklem sisteminin ilk denkleminde $u_1' = 1$ elde edilir. İki tarafın integrali alınır ve $u_1(0) = 0$ başlangıç şartı ile yerine konulursa $u_1(s) = s$ olur. Böylece, (7.1) parametrik denklemi ile verilmiş hiperyüzeyin $\beta(0) = \mathbf{R}(u_1(0), u_2(0), u_3(0)) = (1, 0, 1, 0)$ noktasından geçen eğrilik çizgisi

$$\beta(s) = \mathbf{R}(s, 0, 0) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right), \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s\right) \right) \quad (7.47)$$

olarak elde edilir. (7.47)'de bulunan eğrinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri [29] nolu makalede verilmiştir. Elde edilen sonuçlar [29] nolu makalede verilen sonuçlarla karşılaştırıldığında sonuçların birebir uyumlu olduğu, bu da tez çalışmasında sunulan metodun yeterince doğru olduğunu göstermektedir. Sadece ikinci eğrilik hesaplanırken ortaya çıkan işaret farklılığı [29]'da bulunan birinci binormal vektörün çalışmamızda bulunan vektör ile zıt yönde bulunmasından kaynaklanmaktadır.

Uyarı 7.2: Ortaya çıkan değişimlerle matematiksel yapıların lokal ve global özellikleri arasında anlamlı ilişkiler vardır.

8 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik bir yüzey üzerinde [8]'de verilen yöntem ve teknikler ile elde edilen eğrilik çizgilerinin diferensiyel geometrik özellikleri, 4-boyutlu Öklid uzayında parametrik bir hiperyüzey için genişletilmiştir. Bu yapılırken, umbilik noktalarda asli doğrultular tanımlanamayacağı için, elde edilen eğrilik çizgilerinin hiperyüzey üzerindeki umbilik olmayan noktalardan geçmesi önemlidir. Böylece parametrik denklemleri verilen bir hiperyüzey üzerinde başlangıç noktası bilinen bir eğrilik çizgisinin nasıl bulunabileceğine yönelik bir metot verilmiştir. Bu metodun uygulanabilmesi için hiperyüzey üzerinde genişletilmiş Darboux çatısına ihtiyaç duyulduğundan, aranılan eğrilik çizgisinin bir Frenet eğrisi olma şartı konmuştur. Ayrıca eğrilik çizgisini elde etmede kullanılan denklem sisteminin 3×3 katsayılar matrisinin rankının 2 olması hali göz önüne alınmıştır. Bunun yanı sıra, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında ikinci ve üçüncü eğrilikleri oranı sabit olan bir Frenet eğrisini üzerinde eğrilik çizgisi kabul eden özel bir regle hiperyüzey tanımlanmıştır. Tanımlanan bu özel hiperyüzeyin singüler noktaları ve açılabilirliği araştırılmıştır. Elde edilen teorik bilgiler yardımıyla, eğrilikleri ve Frenet vektörleri daha önceden bilinen bir eğri üzerinde uygulanarak, bulunan metodun yeterliliği ortaya konmuştur.

Bu yapılan çalışmaya ek olarak, 4-boyutlu Öklid uzayında eğrilik çizgisini elde etmede kullanılan (4.5) denklem sisteminin 3×3 katsayılar matrisinin rankının 1 olması hali göz önüne alınarak benzer metot araştırılabilir. Ayrıca, $\mathbb{E}^4$ uzayında kapalı denklemleri verilen bir hiperyüzey veya $\mathbb{E}^4$ uzayında bir yüzey üzerinde de eğrilik çizgilerinin nasıl bulunabileceği ve bu eğrilerin diferensiyel geometrik özellikleri incelenebilir.

-
- [1] B. O’neill, *Elementary differential geometry*. Academic press, 2014.
 - [2] I. R. Porteous, “Ridges and umbilics of surfaces,” in *Proceedings on Mathematics of surfaces II*, Clarendon Press, 1987, pp. 447–458.
 - [3] R. Martin, “Principal patches-a new class of surface patch based on differential geometry,” in *Eurographics*, vol. 83, 1983, pp. 47–55.
 - [4] M. J. Che, “Lines in computer aided geometric design,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 7, no. 1, pp. 1–4, 1990.
 - [5] D. Dutta, R. R. Martin, M. J. Pratt, “Cyclides in surface and solid modeling,” *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 13, no. 1, pp. 53–59, 1993.
 - [6] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*. Courier Corporation, 1961.
 - [7] W. Che, J.-C. Paul, X. Zhang, “Lines of curvature and umbilical points for implicit surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 24, no. 7, pp. 395–409, 2007.
 - [8] H. K. Joo, T. Yazaki, M. Takezawa, T. Maekawa, “Differential geometry properties of lines of curvature of parametric surfaces and their visualization,” *Graphical models*, vol. 76, no. 4, pp. 224–238, 2014.
 - [9] N. M. Patrikalakis, T. Maekawa, *Shape interrogation for computer aided design and manufacturing*. Springer Science & Business Media, 2009.
 - [10] T. Maekawa, F.-E. Wolter, N. M. Patrikalakis, “Umbilics and lines of curvature for shape interrogation,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 13, no. 2, pp. 133–161, 1996.
 - [11] R. T. Farouki, “On integrating lines of curvature,” *Computer aided geometric design*, vol. 15, no. 2, pp. 187–192, 1998.
 - [12] X. Ye, T. Maekawa, “Differential geometry of intersection curves of two surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 16, no. 8, pp. 767–788, 1999.
 - [13] D. Lopes, J. Sotomayor, R. Garcia, “Partially umbilic singularities of hypersurfaces of $\mathbb{R}^4$,” *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 139, no. 4, pp. 431–472, 2015.
 - [14] J. Sotomayor, R. Garcia, “Lines of curvature on quadric hypersurfaces of $\mathbb{R}^4$,” *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 37, no. 3, pp. 288–306, 2016.
 - [15] C. Gutierrez, I. Guadalupe, R. Tribuzy, V. Guincz, “A differential equation for lines of curvature on surfaces immersed in $\mathbb{R}^4$,” *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 2, no. 2, pp. 207–220, 2001.
 - [16] J. Sotomayor, R. Garcia, “Lines of curvature on surfaces, historical comments and recent developments,” *arXiv preprint arXiv:0712.1585*, 2007.

- [17] M. P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [18] H. Hacisalihoglu, “Diferensiyel geometri,” *Inonu Univ. yayinlari, mat.*, vol. 2, p. 227, 1983.
- [19] S. Yüce, “Öklid uzayında diferansiyel geometri,” *Pegem Akademi*, pp. 1–557, 2017.
- [20] M. Z. Williams, F. M. Stein, “A triple product of vectors in four-space,” *Mathematics Magazine*, vol. 37, no. 4, pp. 230–235, 1964.
- [21] Y. Aminov, *The geometry of submanifolds*. CRC Press, 2001.
- [22] H. Gluck, “Higher curvatures of curves in euclidean space,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 73, no. 7, pp. 699–704, 1966.
- [23] O. Aléssio, “Differential geometry of intersection curves in $\mathbb{R}^4$ of three implicit surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 26, no. 4, pp. 455–471, 2009.
- [24] M. Düldül, B. U. Düldül, N. Kuruoğlu, E. Özdamar, “Extension of the darboux frame into euclidean 4-space and its invariants,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 6, pp. 1628–1639, 2017.
- [25] P. Alourdaz, G. Hottel, S. Tuohy, “A design and interrogation system for modelling with rational b-splines,” 1990.
- [26] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods in Scientific Computing: Volume 1*. Siam, 2008, vol. 103.
- [27] R. Aslaner, “Hyperruled surfaces in minkowski 4-space,” *Iranian Journal of Science and Technology (Sciences)*, vol. 29, no. 3, pp. 341–347, 2005.
- [28] V. Milousheva, G. Ganchev, “One-parameter systems of developable surfaces of codimension two in euclidean space,” in *Proceedings of the Third International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy, 2002, pp. 328–336.
- [29] S. Deshmukh, I. Al-Dayel, K. Ilarslan, “Frenet curves in euclidean 4-space,” *International Electronic Journal of Geometry*, vol. 10, no. 2, pp. 56–66, 2017.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgileri: clk.fa17@gmail.com

Konferans Bildirisi

1. F. Çelik, M. Düldül, “Computation of the lines of curvature of parametric hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$ ”, 16th International Geometry Symposium, Manisa, Türkiye, 04 Temmuz 2018, ss.225