

### 1.1 Literatür Özeti

Modern matematiğin en önemli araçlarından birisi olan Cantor'un küme teorisi bir elemanın söz konusu kümeye üyeliği fikrine dayalıdır ve bu üyelik iki değerli bir kavram olup karakteristik fonksiyon ile ilişkilendirilir. Klasik küme teorisine göre herhangi bir  $X$  kümesi için  $A \subset X$  olmak üzere;

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.1)$$

fonksiyonu  $A$  kümesine ait karakteristik fonksiyon olarak adlandırılır. Bununla birlikte herhangi bir elemanın bir kümeye üyeliğinin  $[0,1]$  aralığındaki herhangi bir sayıyla ifade edilebilmesi fikri bulanık kümeler olarak adlandırılan teorinin gelişmesine olanak sağlamıştır. Bir bulanık kümede bir elemanın kümeye ait olup olmaması arasında kesin bir sınır yoktur. Bu durum bir elemanın kümeye ne kadar ait olup olmadığı sorusunu akla getirir. Klasik küme teorisi bu durumu ifade etmede yetersiz kaldığından Zadeh [1], bulanık küme (BK) kavramını tanımlamıştır. Bulanık küme teorisi geniş bir uygulama sahasına sahiptir. Çok kriterli karar problemleri de bulanık küme teorisinin uygulama alanları içerisinde yer almaktadır. Çok kriterli karar verme metotları, birçok araştırmacı tarafından farklı alanlara uygulanmıştır; fakat karar vericilerin eksik veya tam olmayan bilgi ile problemleri modellemeleri kolay değildir. Zadeh'in bulanık küme teorisi, belirsiz bilgiyi modelleyerek bu sorunun üstesinden gelmektedir. Zadeh'e göre bulanık bir küme sürekli bir üyelik derecesine sahip nesneler sınıfıdır. Böyle bir küme, her bir elemana  $[0,1]$  aralığında bir üyelik derecesi atayan üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Zadeh birleşim, kesişim, tümleyen, bağıntı, konvekslik gibi kavramları bu kümelere genişletmiş ve bulanık kümeler bağlamında bu kümelerin farklı özelliklerini belirlemiştir. Bulanık kümeler klasik

kümelerle göre daha genel ve potansiyel olarak daha geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Zadeh'in bulanık kümeler üzerine fikirleri kısa zamanda yapay zekâ [2], sinir ağıları [3], uzman sistemler [4], kontrol teori [5], karar problemleri [6], örüntü tanıma [7] ve yaklaşık mantık [8] gibi birçok dalda model olarak kullanılmıştır. Bulanık kümeler yukarıda değinilen birçok alanda önemli bir araç olarak kabul edilmesine rağmen, belirsizlik bilgisinin olmayışı sebebiyle bazı durumları ifade etme konusunda yetersiz kalmaktadır. Bu düşünceden yola çıkarak Atanassov [9] bulanık kümelerin bir genişlemesi olarak sezgisel bulanık küme (SBK) kavramını tanımlamıştır. Bulanık kümelerden farklı olarak sezgisel bulanık kümelerde bir üye olmama bilgisi mevcuttur. Üye olma ve üye olmama dereceleri toplamı 1'den küçük veya eşit olup bir tereddüt derecesi söz konusudur. Sezgisel bulanık kümeler üyelik, üye olmama ve tereddüt derecelerini aynı anda göz önünde bulundurur. Dolayısıyla bulanık kümelerle göre daha esnek, kullanışlı ve belirsizliği incelemeye elverişlidir. Benzer şekilde karar problemleri [10], tıbbi teşhis [11], sinir ağıları [12] gibi alanlarda birçok uygulaması mevcuttur. Gerçek hayatta karşılaşılan birçok problem için sezgisel bulanık kümelerde üyelik ve üye olmama derecelerini kesin sayılarla ifade etmek zordur. Bunun yerine genellikle değerler aralıklarla belirtilir. Atanassov ve Gargov [13], sezgisel bulanık küme kavramını aralık değerli sezgisel bulanık kümelerle (ADSBK) genelleştirmişlerdir. Ayrıca bu kümeler üzerinde bazı temel kuramsal işlemleri tanımlamışlardır.

Sezgisel bulanık kümelerde belirsizlik, üye olma ve üye olmama derecelerine bağlı olarak tanımlanmaktadır. Bununla birlikte reel hayatta belirsizliğin farklı çeşitleri bulunmaktadır. Örneğin; bir uzmana herhangi bir konu hakkında fikri sorulduğunda, doğruluk üyelik derecesini 0.5, belirsizlik üyelik derecesini 0.3, yanlışlık üyelik derecesini 0.7 olacak şekilde ifade edebilir. Bu durum bulanık ve sezgisel bulanık kümeler yardımıyla ifade edilemez. Bu düşünceye bağlı olarak Smarandache [14] belirsizlik derecesini bağımsız bir bileşen olarak tanımlayarak, Neutrosophic mantık ve Neutrosophic küme (NK) kavramlarını geliştirmiştir. Neutrosophic kümeler; klasik kümeler, bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler ve benzeri diğer kümelerin genel bir formudur. Doğruluk üyelik derecesi,

belirsizlik üyelik derecesi ve yanlışlık üyelik derecesi olarak adlandırılan üç üyelik derecesi ile karakterize edilirler. Neutrosophic bir kümede belirsizlik derecesi açıkça belirtilir ve diğer üyelik derecelerinden bağımsızdır. Bu üyelik dereceleri üzerinde  $]0^-,1^+[$  standart olmayan birim aralığında değer almaları dışında herhangi bir sınırlama yoktur.  $]0^-,1^+[$  standart olmayan birim aralığı  $[0,1]$  standart birim aralığının bir genişlemesidir. Günlük hayata uygun olarak pratik uygulamalarda daha rahat kullanılabilmesi adına neutrosophic kümelerin birçok özel durumları geliştirilmiş ve farklı uygulama alanları bulmuştur. Örneğin; Wang vd. [15] aralık değerli neutrosophic kümeleri (ADNK) ve tek değerli neutrosophic kümeleri (TDNK) [16] tanımlamıştır. Broumi vd. [17] TDNK üzerinde çalışmışlardır. Zhang vd. [18] ADNK tabanlı çok kriterli bir karar verme metodu önermişlerdir. Zhang vd. [19] ADNK bilgisi altında çok kriterli karar problemleri için bazı uygulamalara yer vermişlerdir. Zhang vd. [20] ADNK tabanlı bir korelasyon katsayısı geliştirmişlerdir. Broumi [21] ADNK üzerinde bir korelasyon katsayısı tanımlamıştır. Ye [22] çok kriterli karar problemleri için ADNK ve TDNK üzerinde geliştirilmiş korelasyon katsayısı tanımlamıştır. Ayrıca Ye [23] basitleştirilmiş neutrosophic kümeleri (BNK) tanımlayarak bazı cebirsel özelliklerini incelemiştir. Daha sonra Peng [24], Ye [23] tarafından verilen cebirsel işlemleri yeniden revize etmiştir. Literatürde bu kümelerin model olarak kullanıldığı birçok çalışma yer almaktadır. Majumdar ve Samanta [25] neutrosophic kümeler için benzerlik ve entropi ölçümü tanımlamışlardır. TDNK ve ADNK üzerinde benzerlik ölçüsü geliştirilmiştir ([26],[27]), Ye ([28],[29]) TDNK üzerinde korelasyon katsayısı tanımlayarak bir karar metodu geliştirmiştir. Şahin [30] ADNK üzerinde entropi ölçüsü tanımlamıştır. Huang [31] TDNK tabanlı bir benzerlik ölçüsü tanımlamıştır. Ye [32] tıbbi teşhis problemleri için BNK tabanlı geliştirilmiş bir benzerlik ölçüsü önermiştir. Peng vd. [33] basitleştirilmiş neutrosophic bilgi altında çok kriterli karar problemleri için yeni bir yaklaşım sunmuşlardır. Biswas vd. [34] TDNK tabanlı bir karar metodu geliştirmişlerdir. Şahin ve Liu [35] neutrosophic ortamda karar problemleri için bir metod geliştirmişlerdir, Şahin ve Küçük [36] neutrosophic soft kümeler üzerinde benzerlik ve entropi ölçüsü verilmiştir. Ayrıca neutrosophic kümelerin model

olarak kullanıldığı birçok çalışma mevcuttur ([37]-[44]). Çok kriterli karar verme süreçlerinde herhangi bir bilgi kaybı olmadan verilerin toplanması önemlidir. Bu noktada ortalama toplam operatörleri büyük rol oynamaktadır. Yakın zamanda neutrosophic kümeler için geliştirilen ortalama operatörleri üzerine birçok çalışma mevcuttur ([45]-[51]). Ekonomik, endüstriyel ve finansal çoğu karar verme problemlerinde karar vericilerin birçok kriteri göz önünde bulundurmaları gerekebilir. Bu nedenle bazı durumlarda karar problemleri karmaşık bir hal alabilir ve en iyi seçeneği belirlemek zorlaşabilir. Karar süreçlerini kolaylaştırmak adına birçok yöntem geliştirilmiştir. TOPSIS [52], VIKOR [53], ELECTRE [54] metotları bu amaca yönelik geliştirilen yöntemlerden birkaçıdır. Ayrıca 1984’ de Mareschal ve Vincke [55] karar problemleri için PROMETHEE yöntemini geliştirmişlerdir. PROMETHEE yöntemi ile incelenen karar problemlerinde her bir kriter için bir tercih fonksiyonu belirlenir ve söz konusu alternatifler bu tercih fonksiyonlarına göre değerlendirilir.

## **1.2 Tezin Amacı**

Yukarıda bahsedilen ve birbirlerinin eksikliklerini gidermek amacıyla geliştirilen küme teorileri karar problemlerinde sıkça uygulama alanı bulmuşlardır. Bu noktada son zamanlarda neutrosophic kümeler model olarak kullanılarak, karar süreçlerinin daha güvenilir olmasını sağlamaya çalışmaktadır ([31],[34]). Fakat karar süreçlerinde karar vericiler tercih bilgilerini sunarken tereddüt yaşayabilirler ([56],[57]) ve değerlendirmelerini ifade ederken her bir neutrosophic bilginin yanı sıra bir olasılık bilgisine gereksinim duyabilirler. Yakın zamanda neutrosophic bir sayıya olasılık bilgisi atanarak olasılık içeren basitleştirilmiş neutrosophic sayı kavramı tanımlanmış ve bu sorun kısmen ortadan kaldırılmıştır [58]. Fakat karar vericiler neutrosophic verilerle değerlendirme yaptıklarında her bir neutrosophic bileşenle ilişkili olarak tereddüt yaşayabilirler. Bu düşünce yeni bir küme teorisini gerektirmektedir. Bu nedenle bu tezde olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme (OBNK) olarak adlandırılan yeni bir küme tanımlanarak bazı kuramsal özellikleri incelenmiştir. Neutrosophic bileşenleri olasılıkları ile birlikte aynı zamanda düşünmek, günlük hayatta karşılaşılan problemleri tanımlama noktasında daha

etkili, güvenilir ve gerçekçi olmaktadır. Ayrıca bu küme teorisine bağlı olarak veri toplama amacıyla olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı aritmetik ortalama (OBNAAO) ve olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı geometrik ortalama (OBNAGO) operatörleri tanımlanmıştır. Bununla birlikte herhangi bir karar verme sürecinde önem arz eden kriter ve karar verici ağırlıklarını belirlemek için sırasıyla bulanık küme ölçümüne ve tercih fonksiyonuna bağlı olarak iki ayrı metot geliştirilmiştir. Klasik PROMETHEE yöntemi üzerinde geliştirmeler yapılarak olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic bilgi altında genişletilmiş PROMETHEE yöntemi ile çok kriterli bir karar metodu önerilmiştir. Önerilen metodun etkinliğini ve uygulanabilirliğini gözlemlemek için bir enerji kaynağı sıralama problemi ele alınarak sonuçlar diğer metotlar ile karşılaştırılmıştır.

### 1.3 Hipotez

Bu çalışmada ilk olarak sonlu bir  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  kümesi üzerinde tanımlanan  $A = \{\langle x; T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X\}$  neutrosophic kümesi için  $T_A(x)$ ,  $I_A(x)$  ve  $F_A(x)$  neutrosophic bileşenlerinin her birine  $P_{T_A(x)}, P_{I_A(x)}, P_{F_A(x)} \in (0,1]$  olacak şekilde bir olasılık bilgisi atamak suretiyle

$$N = \{\langle x; T_N(x)(P_{T_N(x)}), I_N(x)(P_{I_N(x)}), F_N(x)(P_{F_N(x)}) \rangle : x \in X\} \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilen ve olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme olarak adlandırılan yeni bir küme teorisi geliştirilip bazı yapısal özelliklerinin yanı sıra iç çarpım, mesafe ölçüsü, modül, projeksiyon operatörü, yakınlık katsayısı gibi bazı kavramlar tanımlanmıştır. Ayrıca bu kümeler ile ilişkili olarak olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic sayı kavramı tanımlanmıştır. Bu sayı kümeleri üzerinde iki ortalama operatörü verilerek karar süreçlerine veri toplama noktasında dahil edilmesi amaçlanmıştır. Daha sonra literatürde PROMETHEE olarak adlandırılan metot üzerinde karar verici ve kriter ağırlıklarının hesaplanmasını da içerecek şekilde bazı geliştirmelerin yapılması ve sunulan yeni küme teorisi baz alınarak bir çoklu karar verme metodunun geliştirilmesi hedeflenmektedir. Son olarak Türkiye’deki enerji kaynakları sıralama problemi üzerinde uygulanabilirliğinin test edilmesi öngörülmektedir.

## 2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

**Tanım 2.1 (Bulanık Küme).**  $X$  sabit bir küme ve  $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$  üyelik fonksiyonu olmak üzere;

$$A = \{\langle x, \mu_A(x) \rangle : x \in X\} \quad (2.1)$$

kümesi bulanık küme (BK) olarak adlandırılır. Burada  $\mu_A(x)$  ile  $x$  in  $A$  kümesine ait olma derecesi gösterilmektedir [1].

**Tanım 2.2 (Sezgisel Bulanık Küme).**  $X$  sabit bir küme olmak üzere;

$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ ,  $\nu_A: X \rightarrow [0,1]$  ve her  $x \in X$  için  $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$  olacak şekilde sırasıyla üyelik ve üye olmama fonksiyonu olarak adlandırılan  $\mu_A$  ve  $\nu_A$  fonksiyonları kullanılarak

$$A = \{\langle x; \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X\} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan küme sezgisel bulanık küme (SBK) olarak adlandırılır [9].

$\mu_A(x)$  ve  $\nu_A(x)$  ile  $x \in X$  in sırasıyla  $A$  kümesine ait olma derecesi ve ait olmama derecesi ifade edilir. Bulanık kümelerden farklı olarak sezgisel bulanık kümelerde;

$\pi_A: X \rightarrow [0,1]$  ve  $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$  ile tanımlı bir tereddüt fonksiyonu söz konusudur. Sezgisel bulanık kümeler üyelik derecesini, üye olmama derecesini ve tereddüt derecesini aynı anda göz önünde bulundurur. Dolayısıyla bulanık kümelere göre daha esnek, kullanışlı olup belirsizliği incelemeye daha elverişlidir.

Sezgisel bulanık kümeler  $\pi_A(x) = 0$  olduğu durumlarda Zadeh'in bulanık kümelerine indirgenmiş olur. Dolayısıyla bulanık kümeler sezgisel bulanık kümelerin özel bir durumudur.

**Tanım 2.3.**  $X$  sabit bir küme ve  $A = \{\langle x; \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X\}$ ,  $A_1 = \{\langle x; \mu_{A_1}(x), \nu_{A_1}(x) \rangle : x \in X\}$ ,  $A_2 = \{\langle x; \mu_{A_2}(x), \nu_{A_2}(x) \rangle : x \in X\}$  üç SBK olmak üzere;

- i.  $A^c = \{\langle x; \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X\}$ ;
- ii.  $A_1 \cap A_2 = \{\langle x; \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}, \max\{\nu_{A_1}(x), \nu_{A_2}(x)\} \rangle : x \in X\}$ ;
- iii.  $A_1 \cup A_2 = \{\langle x; \max\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}, \min\{\nu_{A_1}(x), \nu_{A_2}(x)\} \rangle : x \in X\}$ .

ile tanımlıdır [9].

Xu [59], sezgisel bulanık bir sayıyı (SBS) kısaca;

$\mu_\alpha \in [0,1]$ ,  $\nu_\alpha \in [0,1]$  ve  $\mu_\alpha + \nu_\alpha \leq 1$  olmak üzere  $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$  şeklinde göstermiştir.

$\alpha^+ = (1,0)$  ve  $\alpha^- = (0,1)$  ile sırasıyla en büyük ve en küçük sezgisel bulanık sayı gösterilmektedir.

Örneğin;  $\alpha = (0.5,0.2)$  sezgisel bulanık sayısı, 10 oydan oluşan bir seçim sırasında 5 oy lehte, 2 oy aleyhte ve 3 çekimser oy olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Sezgisel bulanık sayılar arasında karşılaştırmayı mümkün kılmak adına sırasıyla skor [60] ve kesinlik [61] fonksiyonları;

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \mu_\alpha - \nu_\alpha \\ h(\alpha) &= \mu_\alpha + \nu_\alpha \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonlara bağlı olarak geliştirilen karşılaştırma metodu [62] aşağıdaki şekildedir:

$\alpha_1, \alpha_2 \in SBS$  olmak üzere;

- $S(\alpha_1) < S(\alpha_2)$  ise  $\alpha_1, \alpha_2$  den küçük olup  $\alpha_1 < \alpha_2$  şeklinde gösterilir,
- $S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$  ise

(1)  $h(\alpha_1) < h(\alpha_2)$  ise  $\alpha_1, \alpha_2$  den küçük olup  $\alpha_1 < \alpha_2$  şeklinde gösterilir,

(2)  $h(\alpha_1) = h(\alpha_2)$  ise  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  eşit olup  $\alpha_1 = \alpha_2$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 2.1.**  $\alpha_1 = (0.4,0.3)$ ,  $\alpha_2 = (0.5,0.4)$  iki SBS olmak üzere;

$S(\alpha_1) = 0.1$ ,  $S(\alpha_2) = 0.1$  ve  $h(\alpha_1) = 0.7$  ve  $h(\alpha_2) = 0.9$  olup  $\alpha_1 < \alpha_2$  dir.

**Teorem 2.1.**  $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ ,  $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1})$  ve  $\alpha_2 = (\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_2})$  üç SBS ve  $\lambda > 0$  olmak üzere;

- (1)  $\alpha^c = (\nu_\alpha, \mu_\alpha)$ ,
- (2)  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = (\min\{\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}\}, \max\{\nu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_2}\})$ ,
- (3)  $\alpha_1 \vee \alpha_2 = (\max\{\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}\}, \min\{\nu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_2}\})$ ,
- (4)  $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = (\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_2} - \mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})$ ,
- (5)  $\alpha_1 \otimes \alpha_2 = (\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} - \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})$ ,
- (6)  $\lambda\alpha = (1 - (1 - \mu_\alpha)^\lambda, \nu_\alpha^\lambda)$ ,
- (7)  $\alpha^\lambda = (\mu_\alpha^\lambda, 1 - (1 - \nu_\alpha)^\lambda)$

ile tanımlıdır ([59], [62]).

**Teorem 2.2.**  $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1})$ ,  $\alpha_2 = (\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_2}) \in SBS$  olmak üzere;

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Leftrightarrow \mu_{\alpha_1} \leq \mu_{\alpha_2} \text{ ve } \nu_{\alpha_1} \geq \nu_{\alpha_2} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlıdır [59].

**Tanım 2.4.**  $X \neq \emptyset$ ,  $\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x), \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x) \subset [0,1]$  ve  $\sup \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x) + \sup \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x) \leq 1$  olmak üzere;

$$\tilde{A} = \{\langle x; \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x), \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x) \rangle : x \in X\} \quad (2.5)$$

ile tanımlanan küme aralık değerli sezgisel bulanık küme (ADSBK) olarak adlandırılır [13].

$\inf \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \sup \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  ve  $\inf \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x) = \sup \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x)$  olduğu takdirde ADSBK, SBK ye indirgenir.

ADSBK üzerinde birleşim, kesişim, tümleyen gibi bazı kuramsal küme işlemleri incelenmiştir [13]. Ayrıca aralık değerli sezgisel bulanık sayı (ADSBS) kavramı tanımlanarak bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir [59].

Reel hayatta birçok durum için belirsizlik hakim olduğundan daha hassas bir yaklaşım geliştirilerek felsefenin bir alt dalı olan neutrosophy kavramı ortaya çıkmıştır. Birçok dilde kökenine bakıldığında kelime anlamı olarak nötral/nötr düşünceyi ifade etmektedir. Belirsizlik kavramını, üyelik ve üye olmama derecelerine bağlı olmaksızın ayrı bir bileşen olarak ifade edebilen bu sistem insan mantığına daha uygunluk göstermektedir. Buna bağlı olarak bulanık mantık ve bulanık küme kavramlarının sırasıyla neutrosophic mantık ve neutrosophic küme kavramlarına genellemesi yapılmıştır. Bu kavram özellikle yapay zeka, sinir ağları ve kuantum mekaniğinde sıkça uygulama alanı bulmuştur [63].

**Tanım 2.5 (Neutrosophic Küme).**  $X$  herhangi bir küme,  $x \in X$  olsun.  $X$  de bir  $A$  neutrosophic kümesi (NK), doğruluk üyelik fonksiyonu  $T_A$ , belirsizlik üyelik fonksiyonu  $I_A$  ve yanlışlık üyelik fonksiyonu  $F_A$  ile karakterize edilir.  $T_A(x)$ ,  $I_A(x)$  ve  $F_A(x)$ ,  $]0^-, 1^+[$  aralığında standart veya standart olmayan reel alt kümeler olup  $T_A: X \rightarrow ]0^-, 1^+[$ ,  $I_A: X \rightarrow ]0^-, 1^+[$ ,  $F_A: X \rightarrow ]0^-, 1^+[$  olmak üzere;

$$A = \{\{x; T_A(x), I_A(x), F_A(x)\}: x \in X\} \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca  $0^- \leq \sup T_A(x) + \sup I_A(x) + \sup F_A(x) \leq 3^+$  olacak şekilde bir sınırlandırmaya sahiptir [14].

$]0^-, 1^+[$  standart olmayan birim aralık olarak adlandırılır. Standart olmayan analiz 1960'da Abraham Robinson tarafından geliştirilmiştir.  $\varepsilon > 0$  olmak üzere;  $0^- = 0 - \varepsilon$  ve  $1^+ = 1 + \varepsilon$  olarak tanımlanır. Burada 0 ve 1 standart kısım,  $\varepsilon$  ise standart olmayan kısımdır.  $]0^-, 1^+[$  standart olmayan birim aralığının sağ ve sol sınırları belirsiz ve kesin değildir.

$S_1$  ve  $S_2$  reel standart veya reel standart olmayan iki aralık olmak üzere;

- $S_1 + S_2 = \{x: x = s_1 + s_2, s_1 \in S_1 \text{ ve } s_2 \in S_2\}$
- $\{1^+\} + S_2 = \{x: x = 1^+ + s_2, s_2 \in S_2\}$
- $S_1 - S_2 = \{x: x = s_1 - s_2, s_1 \in S_1 \text{ ve } s_2 \in S_2\}$
- $\{1^+\} - S_2 = \{x: x = 1^+ - s_2, s_2 \in S_2\}$
- $S_1 \times S_2 = \{x: x = s_1 \times s_2, s_1 \in S_1 \text{ ve } s_2 \in S_2\}$

şeklinde tanımlanır [64]. Neutrosophic kümelerde sezgisel bulanık kümelerden farklı olarak tereddüt derecesi, üye olma ve üye olmama derecelerinden bağımsız olarak tanımlanır. Aynı zamanda standart olmayan birim aralık üzerinde çalışma imkânı sunabildiğinden daha geniş bir çalışma alanına sahiptir. Dolayısıyla neutrosophic kümeler bilimsel, sosyal ve felsefi birçok alanda uygulanabilir bir yapıya sahiptir ([65]-[69]). Teorinin anlaşılması adına farklı alanlardaki neutrosophic yaklaşımlar aşağıda ifade edilmiştir [64]:

- Schrödinger'in kedi teorisine göre bir foton, kuantum durumunda aynı anda birden farklı yerde bulunabilir. Bu durum neutrosophic anlamda bir elemanın bir kümeye aynı anda ait olup olmaması veya bir elemanın aynı anda iki farklı kümeye ait olması şeklinde sunulur.
- Normal oda koşullarında cıva (Hg), ne katı ne de sıvı denilebilecek bir durumdadır.
- Felsefi olarak ise, bakış açısına göre kimine göre pozitif kimine göre negatif olabilen sosyal bir olgunun veya belirsiz bir ifadenin doğruluk değerinin değerlendirilmesi
- Yine Zen prensibine göre “ bugün sonsuzdur ve kendi içinde geçmiş ve geleceği içerir” önermesinin doğruluk değerinin değerlendirilmesi

Yukarıda örneklenen benzer durumları modelleme noktasında neutrosophy kavramı uygunluk göstermektedir.

**Tanım 2.6.**  $A, B \subseteq X$  neutrosophic birer küme olmak üzere her  $x \in X$  için

$$\begin{aligned}
 A \subseteq B &\Leftrightarrow \inf T_A(x) \leq \inf T_B(x), \sup T_A(x) \leq \sup T_B(x); \\
 \inf I_A(x) &\geq \inf I_B(x), \sup I_A(x) \geq \sup I_B(x); \\
 \inf F_A(x) &\geq \inf F_B(x), \sup F_A(x) \geq \sup F_B(x).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Mühendislik uygulamalarında kolaylıkla kullanılabilmesi amacıyla tek değerli neutrosophic kümeler aşağıda tanımlanmıştır.

**Tanım 2.7. (Tek Değerli Neutrosophic Küme).**  $X$  herhangi bir küme,  $x \in X$  olsun.  $X$  de tek değerli neutrosophic bir küme (TDNK) her bir  $x \in X$  için

$T_A(x), I_A(x), F_A(x) \in [0,1]$  olmak üzere doğruluk üyelik fonksiyonu, belirsizlik üyelik fonksiyonu ve yanlışlık üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir [16].

**Tanım 2.8.**  $A = \{\langle x; T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X\}$  ve  $B = \{\langle x; T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle : x \in X\}$  tek değerli neutrosophic kümeler olmak üzere;

$$(1) \quad A \cup B = \{\langle x; \max\{T_A(x), T_B(x)\}, \min\{I_A(x), I_B(x)\},$$

$$\min\{F_A(x), F_B(x)\} \rangle : x \in X\};$$

$$(2) \quad A \cap B = \{\langle x; \min\{T_A(x), T_B(x)\}, \max\{I_A(x), I_B(x)\},$$

$$\max\{F_A(x), F_B(x)\} \rangle : x \in X\}$$

$$(3) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow T_A(x) \leq T_B(x), I_A(x) \geq I_B(x) \text{ ve } F_A(x) \geq F_B(x);$$

$$(4) \quad A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A;$$

$$(5) \quad A^c = \{\langle x; F_A(x), 1 - I_A(x), T_A(x) \rangle : x \in X\}$$

ile tanımlıdır [16]. Neutrosophic kümeler, standart olmayan aralık kapsamında pratik uygulamalar için pek kullanışlı olmadığından, Ye [23] tarafından standart aralık kullanılarak tanımlanan basitleştirilmiş neutrosophic kümelere indirgenmiştir.

**Tanım 2.9 (Basitleştirilmiş Neutrosophic Küme).**  $X$  herhangi bir küme,  $x \in X$  olsun.  $A \subset X$  neutrosophic kümesi,  $T_A(x)$ ,  $I_A(x)$  ve  $F_A(x)$ ;  $[0,1]$  standart birim aralığında bir alt aralık veya alt küme olacak şekilde karakterize edilmek üzere;

$$A = \{\langle x; T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle : x \in X\} \quad (2.8)$$

ile tanımlı küme basitleştirilmiş neutrosophic küme (BNK) olarak adlandırılır.

$X$  tek bir elemana sahip ise  $A = \langle T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle$  basitleştirilmiş neutrosophic sayı (BNS) olarak adlandırılıp kısaca  $A = \langle T_A, I_A, F_A \rangle$  ile gösterilir.

**Tanım 2.10.**  $A, B \subseteq X$  basitleştirilmiş iki neutrosophic küme olmak üzere her  $x \in X$  için

$$A \subseteq B \Leftrightarrow T_A(x) \leq T_B(x), I_A(x) \geq I_B(x) \text{ ve } F_A(x) \geq F_B(x) \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlıdır [23].

**Tanım 2.11.**  $A, B \subseteq X$  basitleştirilmiş iki neutrosophic küme olmak üzere;

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlıdır [33].

**Tanım 2.12.**  $A = \langle T_A, I_A, F_A \rangle$  ve  $B = \langle T_B, I_B, F_B \rangle$  iki BNS olsun. Bu durumda

- (1)  $A \oplus B = \langle T_A + T_B - T_A T_B, I_A I_B, F_A F_B \rangle,$
- (2)  $A \otimes B = \langle T_A T_B, I_A + I_B - I_A I_B, F_A + F_B - F_A F_B \rangle,$
- (3)  $\lambda A = \langle 1 - (1 - T_A)^\lambda, (I_A)^\lambda, (F_A)^\lambda \rangle,$
- (4)  $A^\lambda = \langle (T_A)^\lambda, 1 - (1 - I_A)^\lambda, 1 - (1 - F_A)^\lambda \rangle$

şeklinde tanımlıdır [70].

**Teorem 2.2.**  $A, B, C$  üç BNS ve  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  pozitif reel sayılar olmak üzere;

- (1)  $A \oplus B = B \oplus A,$
- (2)  $A \otimes B = B \otimes A,$
- (3)  $\lambda(A \oplus B) = \lambda A \oplus \lambda B,$
- (4)  $(A \otimes B)^\lambda = A^\lambda \otimes B^\lambda,$
- (5)  $\lambda_1 A \oplus \lambda_2 A = (\lambda_1 + \lambda_2) A,$
- (6)  $A^{\lambda_1} \otimes A^{\lambda_2} = A^{(\lambda_1 + \lambda_2)},$
- (7)  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C),$
- (8)  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

şeklindedir [24].

**Tanım 2.13.**  $A = \langle T_A, I_A, F_A \rangle$  bir BNS olmak üzere;  $s(A)$  skor fonksiyonu,  $t(A)$  tamlık fonksiyonu ve  $k(A)$  kesinlik fonksiyonu sırasıyla;

$$\begin{aligned}
s(A) &= (T_A + 1 - I_A + 1 - F_A)/3, \\
t(A) &= T_A - F_A, \\
k(A) &= T_A
\end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır [24].

**Tanım 2.14.**  $A$  ve  $B$  iki BNS olsun. Bu durumda  $A$  ve  $B$  arasında aşağıdaki şekilde bir karşılaştırma metodu geliştirilmiştir [24]:

- (1)  $s(A) > s(B)$  ise  $A, B$  den büyük olup kısaca  $A > B$  ile gösterilir,
- (2)  $s(A) = s(B)$  ve  $t(A) > t(B)$  ise  $A > B$ ,
- (3)  $s(A) = s(B)$ ,  $t(A) = t(B)$  ve  $k(A) > k(B)$  ise  $A > B$ ,
- (4)  $s(A) = s(B)$ ,  $t(A) = t(B)$  ve  $k(A) = k(B)$  ise  $A$  ve  $B$  birbirlerinden farksız olup kısaca  $A \sim B$  ile gösterilir.

Yukarıda değinilen küme teorileri birçok karar verme problemlerinde model olarak kullanılmıştır ([19], [48],[55]). Böylece karar süreçleri nasıl daha objektif ve güvenilir kılınabilir sorusuna mukabil birçok farklı teknik geliştirilip literatüre katkı sağlanmıştır. Bu noktada bilgi toplama işi söz konusu olduğundan bir araç olarak ortalama toplam operatörleri sıkça kullanılmaktadır. Neutrosophic bir ortamda birçok operatör geliştirilmiştir ([23], [35], [58], [72], [79], [80]). Açıklayıcı olması bakımından geliştirilen temel operatörlerden birkaçı aşağıda sunulmaktadır.

**Tanım 2.15.**  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) basitleştirilmiş neutrosophic sayıların bir sınıfı ve  $w_j \in [0,1]$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  olmak üzere;

$$BNAAO(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_{j=1}^n w_j A_j \tag{2.12}$$

basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı aritmetik ortalama (BNAAO) operatörü olarak adlandırılır [24].

**Teorem 2.3.**  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) basitleştirilmiş neutrosophic sayıların bir sınıfı ve  $w_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  olmak üzere;

$$BNAAO(A_1, A_2, \dots, A_n) = \langle 1 - \prod_{j=1}^n (1 - T_{A_j})^{w_j}, \prod_{j=1}^n I_{A_j}^{w_j}, \prod_{j=1}^n F_{A_j}^{w_j} \rangle \quad (2.13)$$

şeklindedir [24].

**Tanım 2.16.**  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) basitleştirilmiş neutrosophic sayıların bir sınıfı ve  $w_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  olmak üzere;

$$BNAGO(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_{j=1}^n A_j^{w_j} \quad (2.14)$$

basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı geometrik ortalama (BNAGO) operatörü olarak adlandırılır [24].

**Teorem 2.4.**  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) basitleştirilmiş neutrosophic sayıların bir sınıfı ve  $w_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} &BNAGO(A_1, A_2, \dots, A_n) \\ &= \langle \prod_{j=1}^n T_{A_j}^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^n (1 - I_{A_j})^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_{A_j})^{w_j} \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklindedir [24].

## OLASILIKLI BASİTLEŞTİRİLMİŞ NEUTROSOPHIC KÜMELER

---

### 3.1 Temel Tanımlar ve Cebirsel Özellikler

Bu bölümde olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme kavramı tanımlanıp kuramsal küme özellikleri incelenmiştir. Ardından olasılıklı basitleştirilmiş sayı kavramı tanımlanarak bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Daha sonra olasılıklı basitleştirilmiş sayı kümeleri üzerinde iki ortalama operatörü tanımlanmıştır. Ayrıca bu kümeler üzerinde uzaklık, projeksiyon ölçüsü ve yakınlık katsayısı kavramları sunulmuştur.

**Tanım 3.1.**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme olmak üzere;

$$N = \{\langle x; T_N(x)(P_{T_N(x)}), I_N(x)(P_{I_N(x)}), F_N(x)(P_{F_N(x)}) : x \in X \rangle\} \quad (3.1)$$

kümesi olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme (OBNK) olarak adlandırılır.

Burada herhangi  $x \in X$  için  $0 < P_{T_N(x)}, P_{I_N(x)}, P_{F_N(x)} \leq 1$  olup  $T_N(x), I_N(x), F_N(x) \in [0,1]$  ve  $0 \leq T_N(x) + I_N(x) + F_N(x) \leq 3$  dir.

**Tanım 3.2.**  $X \neq \emptyset$  ve  $A = \{\langle x; T_A(x)(P_{T_A(x)}), I_A(x)(P_{I_A(x)}), F_A(x)(P_{F_A(x)}) \rangle : x \in X\}$ ,

$$A_1 = \{\langle x; T_{A_1}(x)(P_{T_{A_1}(x)}), I_{A_1}(x)(P_{I_{A_1}(x)}), F_{A_1}(x)(P_{F_{A_1}(x)}) \rangle : x \in X\},$$

$$A_2 = \{\langle x; T_{A_2}(x)(P_{T_{A_2}(x)}), I_{A_2}(x)(P_{I_{A_2}(x)}), F_{A_2}(x)(P_{F_{A_2}(x)}) \rangle : x \in X\} \quad \text{üç OBNK olmak üzere;}$$

$$(1) \quad A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow T_{A_1}(x) \leq T_{A_2}(x), P_{T_{A_1}(x)} \leq P_{T_{A_2}(x)}; I_{A_1}(x) \geq I_{A_2}(x),$$

$$P_{I_{A_1}(x)} \geq P_{I_{A_2}(x)}; F_{A_1}(x) \geq F_{A_2}(x), P_{F_{A_1}(x)} \geq P_{F_{A_2}(x)}$$

$$(2) \quad A^c = \{ \langle x; F_A(x)(P_{F_A(x)}), 1 - I_A(x)(1 - P_{I_A(x)}), T_A(x)(P_{T_A(x)}) \rangle : x \in X \}$$

$$(3) \quad A_1 \cap A_2 = \left\{ \left\langle x; \min\{T_{A_1}(x), T_{A_2}(x)\} \left( \min\{P_{T_{A_1}(x)}, P_{T_{A_2}(x)}\} \right), \right. \right. \\ \left. \left. \max\{I_{A_1}(x), I_{A_2}(x)\} \left( \max\{P_{I_{A_1}(x)}, P_{I_{A_2}(x)}\} \right), \right. \right. \\ \left. \left. \max\{F_{A_1}(x), F_{A_2}(x)\} \left( \max\{P_{F_{A_1}(x)}, P_{F_{A_2}(x)}\} \right) \right\rangle : x \in X \right\}$$

$$(4) \quad A_1 \cup A_2 = \left\{ \left\langle x; \max\{T_{A_1}(x), T_{A_2}(x)\} \left( \max\{P_{T_{A_1}(x)}, P_{T_{A_2}(x)}\} \right), \right. \right. \\ \left. \left. \min\{I_{A_1}(x), I_{A_2}(x)\} \left( \min\{P_{I_{A_1}(x)}, P_{I_{A_2}(x)}\} \right), \right. \right. \\ \left. \left. \min\{F_{A_1}(x), F_{A_2}(x)\} \left( \min\{P_{F_{A_1}(x)}, P_{F_{A_2}(x)}\} \right) \right\rangle : x \in X \right\}.$$

Basitleştirilmiş neutrosophic kümelerin olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic kümelerin özel bir hali olduğu açık bir şekilde görülebilir.

$X \neq \emptyset$  olmak üzere;  $A = \{ \langle x; T_A(x)(P_{T_A(x)}), I_A(x)(P_{I_A(x)}), F_A(x)(P_{F_A(x)}) \rangle : x \in X \}$  olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic kümesi verilsin. Özel olarak  $P_{T_A(x)} = P_{I_A(x)} = P_{F_A(x)} = 1$  olarak alınırsa basitleştirilmiş neutrosophic kümeler elde edilir.  $P_{T_\alpha}, P_{I_\alpha}, P_{F_\alpha} \in (0,1]$  ve  $0 \leq T_\alpha + I_\alpha + F_\alpha \leq 3$  olmak üzere kısaca  $\alpha = (T_\alpha(P_{T_\alpha}), I_\alpha(P_{I_\alpha}), F_\alpha(P_{F_\alpha}))$  ile olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic sayı (OBNS) gösterilmektedir. En büyük olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic sayı  $\alpha^+ = (1(1), 0(1), 0(1))$  olup en küçük olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic sayı ise  $\alpha^- = (0(1), 1(1), 1(1))$  dir.

**Tanım 3.3.**  $\alpha = (T_\alpha(P_{T_\alpha}), I_\alpha(P_{I_\alpha}), F_\alpha(P_{F_\alpha}))$ ,  $\beta = (T_\beta(P_{T_\beta}), I_\beta(P_{I_\beta}), F_\beta(P_{F_\beta}))$  iki OBNS olmak üzere;

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow T_\alpha \leq T_\beta, P_{T_\alpha} \leq P_{T_\beta}; I_\alpha \geq I_\beta, P_{I_\alpha} \geq P_{I_\beta}; F_\alpha \geq F_\beta, P_{F_\alpha} \geq P_{F_\beta} \quad (3.2)$$

ile tanımlıdır.

Tüm OBNS kümesi  $\Omega$  ile gösterilmek üzere,  $\Omega$  üzerinde bazı cebirsel işlemler aşağıda verilmiştir.

**Tanım 3.4.**

$\alpha = (T_\alpha(P_{T_\alpha}), I_\alpha(P_{I_\alpha}), F_\alpha(P_{F_\alpha})), \beta = (T_\beta(P_{T_\beta}), I_\beta(P_{I_\beta}), F_\beta(P_{F_\beta})) \in \Omega$  ve  $\lambda > 0$  olsun. O halde

$$(1) \quad \alpha \oplus \beta = \left( T_\alpha + T_\beta - T_\alpha T_\beta \left( 2! \frac{P_{T_\alpha} P_{T_\beta}}{P_{T_\alpha} + P_{T_\beta}} \right), I_\alpha I_\beta \left( 2! \frac{P_{I_\alpha} P_{I_\beta}}{P_{I_\alpha} + P_{I_\beta}} \right), F_\alpha F_\beta \left( 2! \frac{P_{F_\alpha} P_{F_\beta}}{P_{F_\alpha} + P_{F_\beta}} \right) \right)$$

$$(2) \quad \alpha \otimes \beta = \left( T_\alpha T_\beta \left( 2! \frac{P_{T_\alpha} P_{T_\beta}}{P_{T_\alpha} + P_{T_\beta}} \right), I_\alpha + I_\beta - I_\alpha I_\beta \left( 2! \frac{P_{I_\alpha} P_{I_\beta}}{P_{I_\alpha} + P_{I_\beta}} \right), F_\alpha + F_\beta - F_\alpha F_\beta \left( 2! \frac{P_{F_\alpha} P_{F_\beta}}{P_{F_\alpha} + P_{F_\beta}} \right) \right)$$

$$(3) \quad \lambda \alpha = \left( 1 - (1 - T_\alpha)^\lambda (P_{T_\alpha}), (I_\alpha)^\lambda (P_{I_\alpha}), (F_\alpha)^\lambda (P_{F_\alpha}) \right)$$

$$(4) \quad \alpha^\lambda = \left( (T_\alpha)^\lambda (P_{T_\alpha}), 1 - (1 - I_\alpha)^\lambda (P_{I_\alpha}), 1 - (1 - F_\alpha)^\lambda (P_{F_\alpha}) \right)$$

şeklinde tanımlıdır.

**Teorem 3.1.**  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 > 0$  ve  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$  olsun. Bu durumda

- (1)  $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_2 \oplus \alpha_1,$
- (2)  $\alpha_1 \otimes \alpha_2 = \alpha_2 \otimes \alpha_1,$
- (3)  $\lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \lambda \alpha_1 \oplus \lambda \alpha_2,$
- (4)  $(\alpha_1 \otimes \alpha_2)^\lambda = \alpha_1^\lambda \otimes \alpha_2^\lambda,$
- (5)  $\lambda_1 \alpha \otimes \lambda_2 \alpha = (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha,$
- (6)  $\alpha^{\lambda_1} \otimes \alpha^{\lambda_2} = \alpha^{\lambda_1 + \lambda_2},$

$$(7) \quad (\alpha^{\lambda_1})^{\lambda_2} = \alpha^{\lambda_1 \lambda_2}.$$

**İspat**

(1) Tanım 3.4 (1) gereğince;

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \oplus \alpha_2 \\ &= \left( T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} - T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \left( 2! \frac{P_{T_{\alpha_1}} P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}} \right), I_{\alpha_1} I_{\alpha_2} \left( 2! \frac{P_{I_{\alpha_1}} P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}} \right), \right. \\ & \quad \left. F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \left( 2! \frac{P_{F_{\alpha_1}} P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &= \left( T_{\alpha_2} + T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2} T_{\alpha_1} \left( 2! \frac{P_{T_{\alpha_2}} P_{T_{\alpha_1}}}{P_{T_{\alpha_2}} + P_{T_{\alpha_1}}} \right), I_{\alpha_2} I_{\alpha_1} \left( 2! \frac{P_{I_{\alpha_2}} P_{I_{\alpha_1}}}{P_{I_{\alpha_2}} + P_{I_{\alpha_1}}} \right), \right. \\ & \quad \left. F_{\alpha_2} F_{\alpha_1} \left( 2! \frac{P_{F_{\alpha_2}} P_{F_{\alpha_1}}}{P_{F_{\alpha_2}} + P_{F_{\alpha_1}}} \right) \right) = \alpha_2 \oplus \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

olup ispat tamamlanır.

(2) Tanım 3.4 (2) gereğince;

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \otimes \alpha_2 = \left( T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \left( 2! \frac{P_{T_{\alpha_1}} P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}} \right), I_{\alpha_1} + I_{\alpha_2} - I_{\alpha_1} I_{\alpha_2} \left( 2! \frac{P_{I_{\alpha_1}} P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}} \right), \right. \\ & \quad \left. F_{\alpha_1} + F_{\alpha_2} - F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \left( 2! \frac{P_{F_{\alpha_1}} P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &= \left( T_{\alpha_2} T_{\alpha_1} \left( 2! \frac{P_{T_{\alpha_2}} P_{T_{\alpha_1}}}{P_{T_{\alpha_2}} + P_{T_{\alpha_1}}} \right), I_{\alpha_2} + I_{\alpha_1} - I_{\alpha_2} I_{\alpha_1} \left( 2! \frac{P_{I_{\alpha_2}} P_{I_{\alpha_1}}}{P_{I_{\alpha_2}} + P_{I_{\alpha_1}}} \right), \right. \\ & \quad \left. F_{\alpha_2} + F_{\alpha_1} - F_{\alpha_2} F_{\alpha_1} \left( 2! \frac{P_{F_{\alpha_2}} P_{F_{\alpha_1}}}{P_{F_{\alpha_2}} + P_{F_{\alpha_1}}} \right) \right) = \alpha_2 \otimes \alpha_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

olup ispat tamamlanır.

(3) Tanım 3.4 (1) ve (3) özellikleri gereğince;

$$\lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \left(1 - \left(1 - (T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} - T_{\alpha_1}T_{\alpha_2})\right)\right)^\lambda \left(2! \frac{P_{T_{\alpha_1}}P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}}\right), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & I_{\alpha_1}^\lambda I_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{I_{\alpha_1}}P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}}\right), F_{\alpha_1}^\lambda F_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{F_{\alpha_1}}P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}}\right) \\ &= \left(1 - (1 - T_{\alpha_1})^\lambda (1 - T_{\alpha_2})^\lambda \left(2! \frac{P_{T_{\alpha_1}}P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}}\right), \right. \\ & \left. I_{\alpha_1}^\lambda I_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{I_{\alpha_1}}P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}}\right), F_{\alpha_1}^\lambda F_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{F_{\alpha_1}}P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Diğer yandan

$$\lambda\alpha_1 = \left(1 - (1 - T_{\alpha_1})^\lambda (P_{T_{\alpha_1}}), I_{\alpha_1}^\lambda (P_{I_{\alpha_1}}), F_{\alpha_1}^\lambda (P_{F_{\alpha_1}})\right) \quad (3.9)$$

ve

$$\lambda\alpha_2 = \left(1 - (1 - T_{\alpha_2})^\lambda (P_{T_{\alpha_2}}), I_{\alpha_2}^\lambda (P_{I_{\alpha_2}}), F_{\alpha_2}^\lambda (P_{F_{\alpha_2}})\right) \quad (3.10)$$

olup

$$\begin{aligned} \lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_2 &= \left(1 - (1 - T_{\alpha_1})^\lambda + 1 - (1 - T_{\alpha_2})^\lambda \right. \\ & \left. - \left(1 - (1 - T_{\alpha_1})^\lambda\right) \left(1 - (1 - T_{\alpha_2})^\lambda\right) \left(2! \frac{P_{T_{\alpha_1}}P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}}\right), \right. \\ & \left. I_{\alpha_1}^\lambda I_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{I_{\alpha_1}}P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}}\right), F_{\alpha_1}^\lambda F_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{F_{\alpha_1}}P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$= \left(1 - (1 - T_{\alpha_1})^\lambda (1 - T_{\alpha_2})^\lambda \left(2! \frac{P_{T_{\alpha_1}} P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}}\right), \right. \\ \left. I_{\alpha_1}^\lambda I_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{I_{\alpha_1}} P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}}\right), F_{\alpha_1}^\lambda F_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{F_{\alpha_1}} P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}}\right) \right) \quad (3.12)$$

(3.8) ve (3.12) eşitliklerinden

$$\lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_1 \quad (3.13)$$

elde edilir.

(4) Tanım 3.4 (2) ve (4) özelliklerinden

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)^\lambda = \left(T_{\alpha_1}^\lambda T_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{T_{\alpha_1}} P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}}\right), 1 - \left(1 - (I_{\alpha_1} + I_{\alpha_2} - I_{\alpha_1} I_{\alpha_2})\right)^\lambda \right. \\ \left. \left(2! \frac{P_{I_{\alpha_1}} P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}}\right), 1 - \left(1 - (F_{\alpha_1} + F_{\alpha_2} - F_{\alpha_1} F_{\alpha_2})\right)^\lambda \left(2! \frac{P_{F_{\alpha_1}} P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}}\right) \right) \quad (3.14)$$

$$= \left(T_{\alpha_1}^\lambda T_{\alpha_2}^\lambda \left(2! \frac{P_{T_{\alpha_1}} P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}}\right), 1 - (1 - I_{\alpha_1})^\lambda (1 - I_{\alpha_2})^\lambda \left(2! \frac{P_{I_{\alpha_1}} P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}}\right), \right. \\ \left. 1 - (1 - F_{\alpha_1})^\lambda (1 - F_{\alpha_2})^\lambda \left(2! \frac{P_{F_{\alpha_1}} P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}}\right) \right). \quad (3.15)$$

Ayrıca

$$\alpha_1^\lambda = \left(T_{\alpha_1}^\lambda (P_{T_{\alpha_1}}), 1 - (1 - I_{\alpha_1})^\lambda (P_{I_{\alpha_1}}), 1 - (1 - (1 - F_{\alpha_1}))^\lambda (P_{F_{\alpha_1}})\right) \quad (3.16)$$

ve

$$\alpha_2^\lambda = \left(T_{\alpha_2}^\lambda (P_{T_{\alpha_2}}), 1 - (1 - I_{\alpha_2})^\lambda (P_{I_{\alpha_2}}), 1 - (1 - (1 - F_{\alpha_2}))^\lambda (P_{F_{\alpha_2}})\right) \quad (3.17)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\alpha_1^\lambda \otimes \alpha_2^\lambda &= (T_{\alpha_1}^\lambda T_{\alpha_2}^\lambda \left( 2! \frac{P_{T_{\alpha_1}} P_{T_{\alpha_2}}}{P_{T_{\alpha_1}} + P_{T_{\alpha_2}}} \right), \\
1 - (1 - I_{\alpha_1})^\lambda (1 - I_{\alpha_2})^\lambda &\left( 2! \frac{P_{I_{\alpha_1}} P_{I_{\alpha_2}}}{P_{I_{\alpha_1}} + P_{I_{\alpha_2}}} \right), \\
1 - (1 - F_{\alpha_1})^\lambda (1 - F_{\alpha_2})^\lambda &\left( 2! \frac{P_{F_{\alpha_1}} P_{F_{\alpha_2}}}{P_{F_{\alpha_1}} + P_{F_{\alpha_2}}} \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.15) ve (3.18) eşitliklerinden

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)^\lambda = \alpha_1^\lambda \otimes \alpha_2^\lambda \tag{3.19}$$

olduğu elde edilir.

(5) Tanım 3.4 (3) eşitliği ile

$$\lambda_1 \alpha = \left( 1 - (1 - T_\alpha)^{\lambda_1} (P_{T_\alpha}), I_\alpha^{\lambda_1} (P_{I_\alpha}), F_\alpha^{\lambda_1} (P_{F_\alpha}) \right) \tag{3.20}$$

$$\lambda_2 \alpha = \left( 1 - (1 - T_\alpha)^{\lambda_2} (P_{T_\alpha}), I_\alpha^{\lambda_2} (P_{I_\alpha}), F_\alpha^{\lambda_2} (P_{F_\alpha}) \right) \tag{3.21}$$

olup

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \alpha \oplus \lambda_2 \alpha &= \left( 1 - (1 - T_\alpha)^{\lambda_1 + \lambda_2} (P_{T_\alpha}), I_\alpha^{\lambda_1 + \lambda_2} (P_{I_\alpha}), F_\alpha^{\lambda_1 + \lambda_2} (P_{F_\alpha}) \right) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha
\end{aligned} \tag{3.22}$$

olduğu elde edilir.

(6) Tanım 3.4 (4) özelliği ile

$$\alpha^{\lambda_1} = \left( T_\alpha^{\lambda_1} (P_{T_\alpha}), 1 - (1 - I_\alpha)^{\lambda_1} (P_{I_\alpha}), 1 - (1 - F_\alpha)^{\lambda_1} (P_{F_\alpha}) \right) \tag{3.23}$$

$$\alpha^{\lambda_2} = \left( T_\alpha^{\lambda_2} (P_{T_\alpha}), 1 - (1 - I_\alpha)^{\lambda_2} (P_{I_\alpha}), 1 - (1 - F_\alpha)^{\lambda_2} (P_{F_\alpha}) \right) \tag{3.24}$$

ve

$$\alpha^{\lambda_1} \otimes \alpha^{\lambda_2} = \left( T_{\alpha}^{\lambda_1} T_{\alpha}^{\lambda_2} (P_{T_{\alpha}}), 1 - (1 - I_{\alpha})^{\lambda_1} (1 - I_{\alpha})^{\lambda_2} (P_{I_{\alpha}}), \right. \\ \left. 1 - (1 - F_{\alpha})^{\lambda_1} (1 - F_{\alpha})^{\lambda_2} (P_{F_{\alpha}}) \right) \quad (3.25)$$

$$= \left( T_{\alpha}^{\lambda_1 + \lambda_2} (P_{T_{\alpha}}), 1 - (1 - I_{\alpha})^{\lambda_1 + \lambda_2} (P_{I_{\alpha}}), 1 - (1 - F_{\alpha})^{\lambda_1 + \lambda_2} (P_{F_{\alpha}}) \right) \\ = \alpha^{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (3.26)$$

(7) Tanım 3.4 (4) özelliğinden

$$(\alpha^{\lambda_1})^{\lambda_2} = \left( T_{\alpha}^{\lambda_1} (P_{T_{\alpha}}), 1 - (1 - I_{\alpha})^{\lambda_1} (P_{I_{\alpha}}), 1 - (1 - F_{\alpha})^{\lambda_1} (P_{F_{\alpha}}) \right)^{\lambda_2} \quad (3.27)$$

$$= \left( \left( T_{\alpha}^{\lambda_1} \right)^{\lambda_2} (P_{T_{\alpha}}), 1 - \left( 1 - (1 - (1 - I_{\alpha})^{\lambda_1}) \right)^{\lambda_2} (P_{I_{\alpha}}), \right. \\ \left. 1 - \left( 1 - (1 - (1 - F_{\alpha})^{\lambda_1}) \right)^{\lambda_2} (P_{F_{\alpha}}) \right) \quad (3.28)$$

$$= \left( T_{\alpha}^{\lambda_1 \lambda_2} (P_{T_{\alpha}}), 1 - (1 - I_{\alpha})^{\lambda_1 \lambda_2} (P_{I_{\alpha}}), 1 - (1 - F_{\alpha})^{\lambda_1 \lambda_2} (P_{F_{\alpha}}) \right) = \alpha^{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (3.29)$$

Olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic sayılar arasında sıralamayı mümkün kılan bazı kavramlar aşağıda verilmiştir.

**Tanım 3.5.**  $\alpha = (T_{\alpha}(P_{T_{\alpha}}), I_{\alpha}(P_{I_{\alpha}}), F_{\alpha}(P_{F_{\alpha}})) \in \Omega$  olmak üzere;

$$S(\alpha) = \frac{T_{\alpha}P_{T_{\alpha}} + 1 - I_{\alpha}P_{I_{\alpha}} + 1 - F_{\alpha}P_{F_{\alpha}}}{3} \quad (3.30)$$

şeklinde tanımlanan  $S: \Omega \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu skor fonksiyonu olarak adlandırılır.

**Tanım 3.6.**  $\alpha = (T_{\alpha}(P_{T_{\alpha}}), I_{\alpha}(P_{I_{\alpha}}), F_{\alpha}(P_{F_{\alpha}})) \in \Omega$  olmak üzere;

$$H(\alpha) = T_\alpha P_{T_\alpha} - F_\alpha P_{F_\alpha} \quad (3.31)$$

şeklinde tanımlanan  $H: \Omega \rightarrow [-1,1]$  fonksiyonu kesinlik fonksiyonu olarak adlandırılır.

**Tanım 3.7.**  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$  olmak üzere;

(1)  $S(\alpha_1) > S(\alpha_2)$  ise  $\alpha_1, \alpha_2$  den büyük olup kısaca  $\alpha_1 > \alpha_2$  şeklinde gösterilir,

(2)  $S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$  ise

- $H(\alpha_1) > H(\alpha_2)$  ise  $\alpha_1 > \alpha_2$ ,
- $H(\alpha_1) = H(\alpha_2)$  ise  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  eşdeğer olup kısaca  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.1.**  $\alpha = (0.7(0.3), 0.3(0.4), 0.2(0.5))$  ve  $\beta = (0.4(0.5), 0.6(0.7), 0.5(0.8))$  iki OBNS olmak üzere;

$$S(\alpha) = \frac{0.7 \cdot 0.3 + (1 - 0.3 \cdot 0.4) + (1 - 0.2 \cdot 0.5)}{3} = 0.663$$

$$S(\beta) = \frac{0.4 \cdot 0.5 + (1 - 0.6 \cdot 0.7) + (1 - 0.5 \cdot 0.8)}{3} = 0.460$$
(3.32)

dolayısıyla  $S(\alpha) > S(\beta)$  olduğundan Tanım 3.7 gereği  $\alpha > \beta$  dir. Eşitliğin söz konusu olduğu durumda kesinlik fonksiyonu yardımıyla karşılaştırma yapılmaktadır.

**Tanım 3.8.**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme ve  $A$  ve  $B$  iki OBNK olsun.  $A$  ve  $B$  arasındaki genelleştirilmiş metrik ölçüsü;

$$d_G(A, B) = \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)}|^\delta + \right. \quad (3.33)$$

$$\left. |I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)}|^\delta + |F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 3.2.**  $A$  ve  $B$  OBNK üzere;

$$d_G(A, B) = \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)}|^\delta + \right. \quad (3.34)$$

$$\left. |I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)}|^\delta + |F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

ile tanımlanan  $d_G$  fonksiyonu metrik özelliklerini sağlar.

**İspat** Tanımlanan fonksiyonun metrik ölçüsü koşullarını sağladığı aşağıda gösterilmiştir.

$C = \{\langle x_k: T_C(x_k)(P_{T_C(x_k)}), I_C(x_k)(P_{I_C(x_k)}), F_C(x_k)(P_{F_C(x_k)}) \rangle: x_k \in X\}$  bir OBNK olmak üzere;

$$1) \quad d_G(A, B) = \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)}|^\delta + \right. \\ \left. |I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)}|^\delta + |F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \geq 0$$

$$2) \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \text{ için } A = B \text{ ise } T_A(x_k) = T_B(x_k), P_{T_A(x_k)} = P_{T_B(x_k)}; \\ I_A(x_k) = I_B(x_k), P_{I_A(x_k)} = P_{I_B(x_k)} \text{ ve } F_A(x_k) = F_B(x_k), P_{F_A(x_k)} = P_{F_B(x_k)}.$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
d_G(A, B) &= \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)}|^\delta \right. \\
&\quad + |I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)}|^\delta \\
&\quad \left. + |F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olduğu görülebilir.

$$\begin{aligned}
3) \quad d_G(A, B) &= \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)}|^\delta + \right. \\
&\quad \left. |I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)}|^\delta + |F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_B(x_k)P_{T_B(x_k)} - T_A(x_k)P_{T_A(x_k)}|^\delta + \right. \\
&\quad \left. |I_B(x_k)P_{I_B(x_k)} - I_A(x_k)P_{I_A(x_k)}|^\delta + |F_B(x_k)P_{F_B(x_k)} - F_A(x_k)P_{F_A(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= d_G(B, A) \\
4) \quad d_G(A, B) &= \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)}|^\delta + \right. \\
&\quad \left. |I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)}|^\delta + |F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)} - T_C(x_k)P_{T_C(x_k)} + T_C(x_k)P_{T_C(x_k)}|^\delta \right. \\
&\quad + |I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)} - I_C(x_k)P_{I_C(x_k)} + I_C(x_k)P_{I_C(x_k)}|^\delta + \\
&\quad \left. |F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)} - F_C(x_k)P_{F_C(x_k)} + F_C(x_k)P_{F_C(x_k)}|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n |T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_C(x_k)P_{T_C(x_k)}|^\delta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| T_B(x_k)P_{T_B(x_k)} - T_C(x_k)P_{T_C(x_k)} \right|^\delta + \left| I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_C(x_k)P_{I_C(x_k)} \right|^\delta + \\
& \left| I_B(x_k)P_{I_B(x_k)} - I_C(x_k)P_{I_C(x_k)} \right|^\delta + \left| F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_C(x_k)P_{F_C(x_k)} \right|^\delta + \\
& \left| F_B(x_k)P_{F_B(x_k)} - F_C(x_k)P_{F_C(x_k)} \right|^\delta \Big)^{\frac{1}{\delta}} \\
& \leq \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n \left| T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_C(x_k)P_{T_C(x_k)} \right|^\delta + \right. \\
& \left. \left| I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_C(x_k)P_{I_C(x_k)} \right|^\delta + \left| F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_C(x_k)P_{F_C(x_k)} \right|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} + \\
& \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n \left| T_B(x_k)P_{T_B(x_k)} - T_C(x_k)P_{T_C(x_k)} \right|^\delta + \left| I_B(x_k)P_{I_B(x_k)} - I_C(x_k)P_{I_C(x_k)} \right|^\delta \right. \\
& \left. + \left| F_B(x_k)P_{F_B(x_k)} - F_C(x_k)P_{F_C(x_k)} \right|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} = d_G(A, C) + d_G(B, C)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Özel olarak  $\delta = 1$  için

$$d_H(A, B) = \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n \left| T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)} \right| \right. \quad (3.36)$$

$$\left. \left| I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)} \right| + \left| F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)} \right| \right)$$

elde edilir ve  $d_H$  olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic Hamming ölçüsü olarak adlandırılır.  $\delta = 2$  için

$$d_E(A, B) = \left( \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n \left| T_A(x_k)P_{T_A(x_k)} - T_B(x_k)P_{T_B(x_k)} \right|^2 + \right. \quad (3.37)$$

$$\left. \left| I_A(x_k)P_{I_A(x_k)} - I_B(x_k)P_{I_B(x_k)} \right|^2 + \left| F_A(x_k)P_{F_A(x_k)} - F_B(x_k)P_{F_B(x_k)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir ve  $d_E$  olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic Öklid ölçüsü olarak adlandırılır.

**Tanım 3.9.**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme olmak üzere  $A$  ve  $B$  iki OBNK olsun.  $A$  ve  $B$  nin iç çarpımı

$$\begin{aligned}
 AB = & \sum_{k=1}^n (T_A(x_k)P_{T_A(x_k)}T_B(x_k)P_{T_B(x_k)} + \\
 & (1 - I_A(x_k))(1 - P_{I_A(x_k)})(1 - I_B(x_k))(1 - P_{I_B(x_k)}) + \\
 & (1 - F_A(x_k))(1 - P_{F_A(x_k)})(1 - F_B(x_k))(1 - P_{F_B(x_k)}))
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.10.**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme olmak üzere;  $X$  üzerinde tanımlı  $A = \{ \langle x_k: T_A(x_k)(P_{T_A(x_k)}), I_A(x_k)(P_{I_A(x_k)}), F_A(x_k)(P_{F_A(x_k)}) \rangle: x \in X \}$  OBNK verilsin. Bu durumda  $A$  nın modülü;

$$|A| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (T_A(x_k)P_{T_A(x_k)})^2 + ((1 - I_A(x_k))(1 - P_{I_A(x_k)}))^2 + ((1 - F_A(x_k))(1 - P_{F_A(x_k)}))^2} \tag{3.39}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.11.**  $A$  ve  $B$  iki OBNK ve

$$|B| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (T_B(x_k)P_{T_B(x_k)})^2 + ((1 - I_B(x_k))(1 - P_{I_B(x_k)}))^2 + ((1 - F_B(x_k))(1 - P_{F_B(x_k)}))^2} \tag{3.40}$$

olsun.  $A$  nın  $B$  üzerindeki projeksiyonu;

$$Proj_B(A) = \frac{AB}{|B|} \quad (3.41)$$

ile tanımlanır.

### Örnek 3.2.

$A = \{\langle 0.5(0.3), 0.2(0.4), 0.6(0.7) \rangle\}$ ,  $B = \{\langle 0.6(0.4), 0.4(0.5), 0.5(0.3) \rangle\}$  iki OBNK olsun.  $A$  ve  $B$  arasındaki projeksiyon değerleri aşağıdaki şekilde elde edilir:  $Proj_A A = 0.517$ ,  $Proj_B B = 0.520$ ,  $Proj_A B = 0.429$  ve  $Proj_B A = 0.427$ .

Burada projeksiyon değeri ne kadar büyük ise  $A$  ve  $B$  nin birbirlerine o kadar yakın oldukları söylenebilir.

**Teorem 3.3.**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme ve  $A$ ,  $B$  ve  $C$  üç OBNK olsun.

Bu durumda projeksiyon operatörü aşağıdaki koşulları sağlar:

- (1)  $0 \leq Proj_B A \leq |A| \leq \sqrt{3n}$ ,
- (2)  $A \subseteq B$  ise  $Proj_C A \leq Proj_C B$ ,
- (3)  $A = B$  ise  $Proj_B A = Proj_A B = |A| = |B|$ .

### İspat

- (1)  $0 \leq \frac{AB}{|A||B|} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{AB}{|B|} \leq |A|$  ve sırasıyla  $(1(1), 0(1), 0(1))$ ,  $(0(1), 1(1), 1(1))$  en büyük ve en küçük OBNS olmak üzere;

$$|A| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( (T_A(x_k)P_{T_A(x_k)})^2 + ((1 - I_A(x_k))(1 - P_{I_A(x_k)}))^2 + ((1 - F_A(x_k))(1 - P_{F_A(x_k)}))^2 \right)} \quad (3.42)$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (1^2 + (1 - 0)^2(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2(1 - 0)^2)} = \sqrt{3n} \quad (3.43)$$

olup  $0 \leq Proj_B A \leq |A| \leq \sqrt{3n}$ .

- (2)  $A, B$  ve  $C$  üç OBNK olmak üzere  $A \subset B$  ise her  $x_k \in X$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) için  
 $T_A(x_k) \leq T_B(x_k), P_{T_A(x_k)} \leq P_{T_B(x_k)}; I_A(x_k) \geq I_B(x_k), P_{I_A(x_k)} \geq P_{I_B(x_k)}$  ve  
 $F_A(x_k) \geq F_B(x_k), P_{F_A(x_k)} \geq P_{F_B(x_k)}$  dir.

Bu durumda  $|A| \leq |B|$  olacağından  $Proj_C A = \frac{AC}{|C|} \leq \frac{BC}{|C|} = Proj_C B$  eşitsizliği elde edilir.

- (3)  $A = B$  ise  $Proj_B A = \frac{AB}{|B|} = \frac{AA}{|A|} = |A| = |B| = Proj_A B$  dir.

**Tanım 3.12.**  $A$  ve  $B$  iki olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme olsun.  $A$  nın  $B$  üzerine normalleştirilmiş projeksiyon ölçüsü;

$$NProj_B A = \frac{Proj_B(A)}{Proj_B(A) + ||B| - Proj_B(A)|} \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlanır.

Normalleştirilmiş projeksiyon ölçüsü aşağıdaki koşulları sağlar:

- (1)  $0 \leq NProj_B(A) \leq 1$ ,  
(2)  $A \subseteq B \subseteq C$  ise  $NProj_C(A) \leq NProj_C(B)$ ,  
(3)  $A = B$  ise  $NProj_B(A) = 1$ .

**Tanım 3.13.**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme olmak üzere;  $A$  olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic bir küme ve

$$A^+ = \{ \langle x_k: \max\{T_A(x_k)\}(\max\{P_{T_A(x_k)}\}), \min\{I_A(x_k)\}(\min\{P_{I_A(x_k)}\}) \rangle, \min\{F_A(x_k)\}(\min\{P_{F_A(x_k)}\}) \rangle \} \quad (3.45)$$

$$A^- = \{ \langle x_k: \min\{T_A(x_k)\}(\min\{P_{T_A(x_k)}\}), \max\{I_A(x_k)\}(\max\{P_{I_A(x_k)}\}) \rangle, \max\{F_A(x_k)\}(\max\{P_{F_A(x_k)}\}) \rangle \} \quad (3.46)$$

sırasıyla pozitif ideal ve negatif ideal olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme olmak üzere  $A$  kümesinin geliştirilmiş projeksiyon ölçüsüne dayalı yakınlık katsayısı;

$$RC_A = \frac{Proj_{A^+}(A)}{Proj_{A^+}(A) + Proj_{A^-}(A)} \quad (3.47)$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 3.14.**  $A$  ve  $B$  iki OBNK olmak üzere  $A$  ve  $B$  arasındaki projeksiyon tabanlı fark operatörü  $Diff(A, B)$

$$\begin{aligned} Diff(A, B) &= RC_A - RC_B \\ &= \frac{Proj_{A^+}(A)}{Proj_{A^+}(A) + Proj_{A^-}(A)} - \frac{Proj_{B^+}(B)}{Proj_{B^+}(B) + Proj_{B^-}(B)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 3.4.**  $A, B$  iki OBNK olmak üzere  $Diff$  operatörü aşağıdaki koşulları sağlar:

- (1)  $-1 \leq Diff(A, B) \leq 1$ ,
- (2)  $A = B$  ise  $Diff(A, B) = 0$ ,
- (3)  $A \subseteq B$  ise  $Diff(A, B) \leq 0$ ,
- (4)  $Diff(A, B) + Diff(B, A) = 0$ .

## 3.2 Ortalama Operatörleri

Çalışmanın bu bölümünde OBNS baz alınarak geliştirilen aritmetik ve geometrik ortalama operatörleri tanımlanarak bir kısım özellikleri incelenmiştir. Tanımlanan bu operatörler ilerleyen bölümlerde değinileceği üzere bilgi toplama sürecinde bir araç olarak kullanılmaktadır.

**Tanım 3.15.**  $\alpha_j = \left( T_j(P_{T_j}), I_j(P_{I_j}), F_j(P_{F_j}) \right) \in \Omega \quad (j = 1, 2, \dots, n)$  olsun. Bu durumda olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı aritmetik ortalama (OBNAAO) operatörü;

$$OBNAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left( 1 - \prod_{j=1}^n (1 - T_j)^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_{T_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{T_j} \right)} \right), \right. \\ \left. \prod_{j=1}^n I_j^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_{I_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{I_j} \right)} \right), \prod_{j=1}^n F_j^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_{F_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{F_j} \right)} \right) \right) \quad (3.49)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $w_j$ ,  $\alpha_j$  nin ağırlığı olup  $w_j \in [0,1]$  ve  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  dir.

Her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $w_j = 1/n$  olarak alınırsa olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic aritmetik ortalama (OBNAO) operatörü elde edilir.

Ayrıca her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $P_{T_j} = P_{I_j} = P_{F_j} = 1$  olarak alınırsa (OBNAO) operatörü basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı aritmetik ortalama (BNAO) operatörüne indirgenir.

**Teorem 3.5 (Monotonluk).**

$\alpha_j = (T_j(P_{T_j}), I_j(P_{I_j}), F_j(P_{F_j}))$ ,  $\alpha_j^* = (T_j^*(P_{T_j^*}), I_j^*(P_{I_j^*}), F_j^*(P_{F_j^*})) \in \Omega$  olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic sayılardan oluşan iki aile olmak üzere her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $T_j \leq T_j^*$ ,  $P_{T_j} \leq P_{T_j^*}$ ;  $I_j \geq I_j^*$ ,  $P_{I_j} \geq P_{I_j^*}$ ;  $F_j \geq F_j^*$ ,  $P_{F_j} \geq P_{F_j^*}$  ise

$$OBNAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq OBNAO(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \quad (3.50)$$

**İspat** Her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $T_j \leq T_j^*$  olduğundan

$$\prod_{j=1}^n (1 - T_j)^{w_j} \geq \prod_{j=1}^n (1 - T_j^*)^{w_j} \quad (3.51)$$

$$1 - \prod_{j=1}^n (1 - T_j)^{w_j} \leq 1 - \prod_{j=1}^n (1 - T_j^*)^{w_j} \quad (3.52)$$

elde edilir. Ayrıca her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $I_j \geq I_j^*$  ve  $F_j \geq F_j^*$  olduğundan

$$\prod_{j=1}^n I_j^{w_j} \geq \prod_{j=1}^n (I_j^*)^{w_j} \quad (3.53)$$

$$\prod_{j=1}^n F_j^{w_j} \geq \prod_{j=1}^n (F_j^*)^{w_j} \quad (3.54)$$

Her bir bileşenin olasılık değerleri  $\forall j = 1, 2, \dots, n$  için  $P_{T_j} \leq P_{T_j^*}$  olduğundan

$$\frac{\prod_{j=1}^n P_{T_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{T_j} \right)} \leq \frac{\prod_{j=1}^n P_{T_j^*}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{T_j^*} \right)} \quad (3.55)$$

Benzer şekilde her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $P_{I_j} \geq P_{I_j^*}$  ve  $P_{F_j} \geq P_{F_j^*}$  olduğundan

$$\frac{\prod_{j=1}^n P_{I_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{I_j} \right)} \geq \frac{\prod_{j=1}^n P_{I_j^*}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{I_j^*} \right)} \quad (3.56)$$

ve

$$\frac{\prod_{j=1}^n P_{F_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{F_j} \right)} \geq \frac{\prod_{j=1}^n P_{F_j^*}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{F_j^*} \right)} \quad (3.57)$$

olduğu elde edilir. OBNAAO operatörü kullanılarak elde edilen sonuçları

$$\alpha = (T(P_T), I(P_I), F(P_F)) = OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (3.58)$$

$$\alpha^* = (T^*(P_{T^*}), I^*(P_{I^*}), F^*(P_{F^*})) = OBNAAO(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \quad (3.59)$$

şeklinde alalım. Bu durumda

$$T \leq T^*, P_T \leq P_{T^*}; I \geq I^*, P_I \geq P_{I^*} \text{ ve } F \geq F^*, P_F \geq P_{F^*} \quad (3.60)$$

olduğundan

$$OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq OBNAAO(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \quad (3.61)$$

elde edilir.

**Teorem 3.6 (İdempotentlik).**  $\alpha_j = (T_j(P_{T_j}), I_j(P_{I_j}), F_j(P_{F_j})) \in \Omega$  ve  $w_j \in [0,1]$ ,  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  olacak şekilde  $w_j$ ,  $\alpha_j$  nin ağırlığı olsun.

Her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $T_j = T$ ,  $P_{T_j} = P_T$ ;  $I_j = I$ ,  $P_{I_j} = P_I$  ve  $F_j = F$ ,  $P_{F_j} = P_F$  olacak şekilde  $\alpha = (T(P_T), I(P_I), F(P_F)) \in \Omega$  için

$$OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha \quad (3.62)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** (3.5) eşitliğinden

$$OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left( 1 - \prod_{j=1}^n (1 - T)^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_T}{\prod_{k=2}^n (\sum_{j=1}^k P_T)} \right), \right. \quad (3.63)$$

$$\left. \prod_{j=1}^n I^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_I}{\prod_{k=2}^n (\sum_{j=1}^k P_I)} \right), \prod_{j=1}^n F^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_F}{\prod_{k=2}^n (\sum_{j=1}^k P_F)} \right) \right)$$

$$= \left( 1 - (1 - T)^{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \left( n! \frac{(P_T)^n}{2P_T 3P_T \dots nP_T} \right) \right. \quad (3.64)$$

$$\left. I^{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \left( n! \frac{(P_I)^n}{2P_I 3P_I \dots nP_I} \right), F^{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \left( n! \frac{(P_F)^n}{2P_F 3P_F \dots nP_F} \right) \right)$$

$$= \left( 1 - (1 - T) \left( n! \frac{(P_T)^n}{(P_T)^{n-1}} \right), I \left( n! \frac{(P_I)^n}{(P_I)^{n-1}} \right), F \left( n! \frac{(P_F)^n}{(P_F)^{n-1}} \right) \right) \quad (3.65)$$

$$= (T(P_T), I(P_I), F(P_F)) = \alpha$$

**Teorem 3.7 (Sınırlılık).**  $\alpha_j = (T_j(P_{T_j}), I_j(P_{I_j}), F_j(P_{F_j})) \in \Omega$   $j = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere;

$$\min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (3.66)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat**  $\alpha^- = \min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  ve  $\alpha^+ = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  olarak alınsın. Teorem 3.5 den

$$\begin{aligned} OBNAAO(\alpha^-, \alpha^-, \dots, \alpha^-) &\leq OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &\leq OBNAAO(\alpha^+, \alpha^+, \dots, \alpha^+) \end{aligned} \quad (3.67)$$

yazılabilir. Ayrıca Teorem 3.6 gereğince;

$$OBNAAO(\alpha^-, \alpha^-, \dots, \alpha^-) = \alpha^- \quad (3.68)$$

$$OBNAAO(\alpha^+, \alpha^+, \dots, \alpha^+) = \alpha^+ \quad (3.69)$$

olduğu görülebilir. Sonuç olarak

$$\alpha^- \leq OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \alpha^+ \quad (3.70)$$

olduğundan

$$\min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq OBNAAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (3.71)$$

olup ispat tamamlanır.

**Tanım 3.16.**  $\alpha_j = \left( T_j(P_{T_j}), I_j(P_{I_j}), F_j(P_{F_j}) \right) \in \Omega$   $j = 1, 2, \dots, n$  olsun.

Olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı geometrik ortalama (OBNAGO) operatörü;

$$\begin{aligned} OBNAGO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = & \left( \prod_{j=1}^n (T_j)^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_{T_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{T_j} \right)} \right), \right. \\ & 1 - \prod_{j=1}^n (1 - I_j)^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_{I_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{I_j} \right)} \right), \\ & \left. 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_j)^{w_j} \left( n! \frac{\prod_{j=1}^n P_{F_j}}{\prod_{k=2}^n \left( \sum_{j=1}^k P_{F_j} \right)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $w_j$ ,  $\alpha_j$  nin ağırlığı olup  $w_j \in [0,1]$  ve  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  dir.

**Teorem 3.8.**

$$\alpha_j = \left( T_j(P_{T_j}), I_j(P_{I_j}), F_j(P_{F_j}) \right), \alpha_j^* = \left( T_j^*(P_{T_j^*}), I_j^*(P_{I_j^*}), F_j^*(P_{F_j^*}) \right) \in \Omega$$

( $j = 1, 2, \dots, n$ ) olsun. Bu durumda OBNAGO operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(1) Monotonluk

Her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $T_j \leq T_j^*$ ,  $P_{T_j} \leq P_{T_j^*}$ ;  $I_j \geq I_j^*$ ,  $P_{I_j} \geq P_{I_j^*}$  ve  $I_j \geq I_j^*$ ,  $P_{I_j} \geq P_{I_j^*}$  ise

$$OBNAGO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq OBNAGO(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*). \quad (3.73)$$

(2) İdempotentlik

Her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $T_j = T$ ,  $P_{T_j} = P_T$ ;  $I_j = I$ ,  $P_{I_j} = P_I$  ve  $F_j = F$ ,  $P_{F_j} = P_F$  ise

$$OBNAGO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha \quad (3.74)$$

(3) Sınırlılık

$$\min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq OBNAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (3.75)$$

**İspat** Yukarıdaki özellikler OBNAO operatörü için yapılan ispat metotlarına benzer şekilde gösterilebilir.

## 4.1 Klasik PROMETHEE

PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation) ilk olarak 1985’ de Brans and Vincke [55] tarafından tanımlanmıştır. PROMETHEE yöntemi verilen bir kritere göre alternatiflerin ikili karşılaştırılmalarını mümkün kılar. Bu metotta izlenecek adımlar aşağıda verilmiştir.

$A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  alternatiflerin kümesi ve  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  kriterlerin kümesi olsun.

**Adım 1.** Karar matrisinin oluşturulması.

$A_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) alternatiflerinin  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) kriterlerine göre karar matrisleri inşa edilir.

**Adım 2.** Alternatifler arasındaki tercih değerlerinin hesaplanması.

Öncelikle her bir kriter için alternatifler arasındaki fark aşağıda verildiği üzere hesaplanır.

$$d_j(A_s, A_v) = p_j(A_s) - p_j(A_v) \quad (s = 1, 2, \dots, n; v = 1, 2, \dots, n), (j = 1, 2, \dots, m) \quad (4.1)$$

Burada  $A_s$  ve  $A_v$  alternatiflerinin  $C_j$  kriteri üzerinden farkı  $d_j(A_s, A_v)$  ile gösterilmiştir.

PROMETHEE yöntemi her bir kriter ölçütü için farklı fonksiyon tipleri ile karşılaştırma yapabilme imkânı sunmaktadır. Bu noktada Brans [55] tarafından sunulan altı adet tercih fonksiyonu Tablo 4.1’ de verilmektedir.

**Tablo 4. 1** Tercih Fonksiyonları

|                            | Tercih Fonksiyonu                                                                                 | Grafik |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| İkinci tip<br>(U tipi)     | $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq p \\ 1, & x > p \end{cases}$                                    |        |
| Üçüncü tip<br>(V tipi)     | $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/p, & 0 \leq x \leq p \\ 1, & x > p \end{cases}$          |        |
| Dördüncü tip<br>(Seviyeli) | $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq q \\ 1/2, & q < x \leq p \\ 1, & x > p \end{cases}$             |        |
| Beşinci tip<br>(Lineer)    | $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq q \\ \frac{x-q}{p-q}, & q < x \leq p \\ 1, & x > p \end{cases}$ |        |
| Altıncı tip<br>(Gaussian)  | $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}, & x > 0 \end{cases}$               |        |

$f_j$  karar verici tarafından belirlenen bir tercih fonksiyonu olmak üzere her bir kriter için alternatiflerin birbirlerine olan üstünlükleri (4.2) eşitliğinde verildiği şekilde belirlenir.

$$P_j(A_s, A_v) = f_j(d_j(A_s, A_v)) = \begin{cases} 0, & d_j(A_s, A_v) \leq e \\ \frac{d_j(A_s, A_v) - e}{f - e}, & e \leq d_j(A_s, A_v) \leq f \\ 1, & d_j(A_s, A_v) \geq f \end{cases} \quad (4.2)$$

Burada, alternatifler arasındaki farkı  $[0,1]$  aralığındaki değerler ile ilişkilendirilen bir lineer tercih fonksiyonu kullanılmıştır.

**Adım 3.** Tercih indeksinin hesaplanması.

Kriter ağırlıklarının hesaba katılması ile alternatifler arasındaki tercih indeksi (4.3) eşitliği yardımıyla hesaplanır.

$$\pi(A_s, A_v) = \sum_{s=1}^n w_j P_j(A_s, A_v) \quad (4.3)$$

**Adım 3.** Pozitif ve negatif akışın hesaplanması.

Her bir alternatif için sırasıyla  $\varphi^+$  pozitif akış ve  $\varphi^-$  negatif akış değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\varphi^+(A_s) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq s}}^n \pi(A_s, A_v) \quad (4.4)$$

$$\varphi^-(A_s) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq s}}^n \pi(A_v, A_s) \quad (4.5)$$

(4.4) ve (4.5) eşitlikleri yardımıyla, iki alternatif arasındaki kısmi sıralama aşağıdaki şekilde yapılabilir:

- (1)  $\varphi^+(A_s) > \varphi^+(A_v)$  ve  $\varphi^-(A_s) < \varphi^-(A_v)$  ise  $A_s$  alternatifi  $A_v$  alternatifine göre tercih edilir.

(2)  $\varphi^+(A_s) = \varphi^+(A_v)$  ve  $\varphi^-(A_s) = \varphi^-(A_v)$  ise  $A_s$  ve  $A_v$  alternatifleri arasında fark bulunmamaktadır.

(3)  $\varphi^+(A_s) > \varphi^+(A_v)$ ,  $\varphi^-(A_s) > \varphi^-(A_v)$  veya

$\varphi^+(A_s) < \varphi^+(A_v)$ ,  $\varphi^-(A_s) < \varphi^-(A_v)$  ise karşılaştırma yapılamaz.

**Adım 4.** Net akışın hesaplanması.

Her bir alternatifin net akış değeri

$$\varphi(A_s) = \varphi^+(A_s) - \varphi^-(A_v) \quad (4.6)$$

ile hesaplanır. Net akış değeri büyük olan daha önceliklidir. Böylelikle alternatiflerin tam sıralaması elde edilir.

## 4.2 Genişletilmiş PROMETHEE

### 4.2.1 Karar Verici Ağırlıklarının Belirlenmesi

Çok kriterli karar problemlerinde, her bir karar vericinin ağırlıkları sonuçlar üzerinde belirleyici bir etkiye sahiptirler. Dolayısıyla karar verici ağırlıklarını daha objektif bir şekilde belirlemek oldukça önemlidir. Bu bölümde her bir karar verici ağırlıklarını belirlemek için tercih fonksiyonu kullanılarak yeni bir metot sunulmuştur.

$A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  alternatiflerin,  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  kriterlerin,  $D = \{D_1, D_2, \dots, D_t\}$  karar vericilerin kümesi ve

$R = (r_{ij}^p)$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; p = 1, 2, \dots, t$ ) karar vericiler tarafından belirlenen karar matrisi olsun.

Bu metotta aşağıdaki adımlar izlenecektir:

**Adım 1.** Ortalama karar matrisinin oluşturulması.

Elemanları olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic sayılar olan  $D^+$  ortalama karar matrisi ve  $D^-$  tümleyen matrisi, olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic aritmetik ortalama (OBNAO) operatörü kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\begin{aligned}
D^+ &= (r_{ij}^+) = OBNAO(r_{ij}^1, r_{ij}^2, \dots, r_{ij}^t) \\
D^- &= (r_{ij}^-) = \left( OBNAO(r_{ij}^1, r_{ij}^2, \dots, r_{ij}^t) \right)^c
\end{aligned} \tag{4.7}$$

**Adım 2.** Pozitif ve negatif tercih değerlerinin hesaplanması.

Her bir karar verici tarafından oluşturulan karar matrislerinin  $D^+$  ve  $D^-$  ortalama matrislerine göre pozitif ve negatif tercih değerleri sırasıyla aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\varepsilon_p^+ = P(D^p, D^+) \text{ ve } \varepsilon_p^- = P(D^-, D^p) \quad (p = 1, 2, \dots, t) \tag{4.8}$$

Burada  $D^p$ ,  $p$ . karar vericiye ait olan karar matrisidir.  $P(D^p, D^+)$  ve  $P(D^-, D^p)$  sırasıyla  $D^p$  nin  $D^+$  ye olan tercih bilgisi ile  $D^-$  nin  $D^p$  ye olan tercih bilgisini ifade eder.

Bu çalışmada aşağıda şekilde tanımlanan lineer tercih fonksiyonu kullanılmıştır.

$$P(D^p, D^+) = \begin{cases} 0, & d(D^p, D^+) \leq e \\ \frac{d(D^p, D^+) - e}{f - e}, & e < d(D^p, D^+) \leq f \\ 1, & d(D^p, D^+) \geq f \end{cases} \tag{4.9}$$

$$P(D^-, D^p) = \begin{cases} 0, & d(D^-, D^p) \leq e \\ \frac{d(D^-, D^p) - e}{f - e}, & e < d(D^-, D^p) \leq f \\ 1, & d(D^-, D^p) \geq f \end{cases} \tag{4.10}$$

$e$  ve  $f$  sırasıyla farksızlık ve kesin tercihe ait parametreler olup

$$\begin{aligned}
d(D^p, D^+) &= \frac{1}{n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^n d_E(r_{sj}^p, r_{sj}^+) \\
d(D^-, D^p) &= \frac{1}{n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^n d_E(r_{sj}^-, r_{sj}^p)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

ile tanımlanır. Burada  $d_E$ , (3.37) eşitliğinde tanımlanan Öklid metrik fonksiyonudur.

**Adım 3.** Net tercih değerlerinin hesaplanması.

$D^p$  ( $p = 1, 2, \dots, t$ ) karar vericilerine ait olan net tercih değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\tilde{\varepsilon}_p^{net} = \chi \tilde{\varepsilon}_p^+ + (1 - \chi) \tilde{\varepsilon}_p^- \quad (p = 1, 2, \dots, t) \quad (4.12)$$

Burada  $\chi \in [0, 1]$  risk indeksi olmak üzere;

$$\tilde{\varepsilon}_p^+ = 1 - \frac{P(D^p, D^+)}{\sum_{p=1}^t P(D^p, D^+)}, \quad \tilde{\varepsilon}_p^- = \frac{P(D^p, D^-)}{\sum_{p=1}^t P(D^p, D^-)} \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlıdır.

**Adım 4.** Karar verici ağırlıklarının hesaplanması.

$D^p$  ( $p = 1, 2, \dots, t$ ) karar verici ağırlıkları;

$$\gamma_p = \frac{\tilde{\varepsilon}_p^{net}}{\sum_{p=1}^t \tilde{\varepsilon}_p^{net}}, \quad p = 1, 2, \dots, t \quad (4.14)$$

şeklinde hesaplanır.

#### 4.2.2 Kriter Ağırlıklarının Belirlenmesi

**Tanım 4.1 (Bulanık Küme Ölçüsü).**  $X \neq \emptyset$  ve  $\eta: P(X) \rightarrow [0, 1]$  olmak üzere;

- 1)  $\eta(\emptyset) = 0$  ve  $\eta(X) = 1$ ,
- 2)  $A, B \in P(X)$  ve  $A \subseteq B$  ise  $\eta(A) \leq \eta(B)$

özelliklerini sağlayan  $\eta$  bulanık küme ölçüsü olarak adlandırılır [81].

Karar sürecinde, kriterler arasında bir ilişki olabilir ve kriterlerin farklı kombinasyonları göz önünde bulundurularak kriter ağırlıkları belirlenebilir.

$C$  kriter kümesine ait elemanların ağırlığı kriter kombinasyonlarının bulanık küme ölçüsü ile ifade edilebilir.

Sugeno  $\lambda$ -bulanık küme ölçüsüne [81] göre  $C_y, C_z \in \mathcal{C}$  ( $y = 1, 2, \dots, m; z = 1, 2, \dots, m$ ) kriter kombinasyonlarının bulanık küme ölçüsü

$$\eta(C_y \cup C_z) = \eta(C_y) + \eta(C_z) + \lambda \eta(C_y) \eta(C_z), A \cap B = \emptyset \quad (4.15)$$

ile hesaplanır.

$\lambda=0$  ise  $\mu$  toplamsaldır; yani

$$\eta(C_y \cup C_z) = \eta(C_y) + \eta(C_z) \quad y = 1, 2, \dots, m; z = 1, 2, \dots, m \quad (4.16)$$

$\lambda > 0$  ise  $\mu$  süper toplamsaldır yani  $C_y$  ve  $C_z$  kriterleri birlikte düşünüldüğünde ağırlık ölçümü artar dolayısıyla kriterlerin birbirleri üzerinde pozitif bir etkisi hesaba katılır.

$\lambda < 0$  ise alt toplamsaldır yani

$$\eta(C_y \cup C_z) < \eta(C_y) + \eta(C_z) \quad (4.17)$$

olup birbirleri üzerinde negatif etkilerinin olduğu söylenir.

$\lambda$  parametresi Sugeno tarafından verilen

$$C = \bigcup_{y=1}^m C_y \quad (4.18)$$

ve

$$\eta(C) = \eta\left(\bigcup_{y=1}^m C_y\right) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left( \prod_{y=1}^m (1 + \lambda \eta(C_y)) - 1 \right), & \lambda \neq 0 \\ \sum_{y=1}^m \eta(C_y), & \lambda = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

denklemleri ile belirlenebilir [81].

$P(C)$ ,  $C$  nin kuvvet kümesi olmak üzere, herhangi  $C_y \in P(C)$  ( $y = 1, 2, \dots, m$ )

altkümesi için  $\eta(C_y)$  bulanık küme ölçüsü

$$\eta(C_y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left( \prod_{x_y \in C_y} (1 + \lambda \eta(x_y)) - 1 \right), & \lambda \neq 0 \\ \sum_{x_y \in C_y} \eta(x_y), & \lambda = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

ile tanımlanır.

$\eta(C) = 1$  olduğundan  $\lambda$  değeri,

$$\lambda + 1 = \prod_{y=1}^m (1 + \lambda \eta(C_y)) \quad (4.21)$$

denklemleri ile elde edilir.

(4.21) eşitliğinin çözümü ile  $\lambda$  belirlenir ve (4.19) eşitliği kullanılarak kriter kombinasyonlarının bulanık küme ölçümleri hesaplanır.

Yukarıda değinilen bilgiler ışığında bu bölümde her bir alternatif için kriterlerin ayrı ayrı göreceli ağırlıkları hesaplanacaktır. Kriterler arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurmak üzere, karar matrisinde her bir alternatif için kriterlere göre olan değerlendirme verileri azalan sıraya göre yeniden düzenlenir. Kabul edelim ki;  $s$ . alternatif için  $r_{s\sigma(1)} > r_{s\sigma(2)} > \dots > r_{s\sigma(n)}$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) ve  $C_{s\sigma(j)}$ ,  $r_{s\sigma(j)}$  ile ilişkili kriter olsun.  $\lambda$ -bulanık küme ölçüsü kullanılarak her bir alternatif üzerinde kriter ağırlığı

$$w_{s\sigma(j)} = \eta(A_{s\sigma(j)}) - \eta(A_{s\sigma(j-1)}) \quad (4.22)$$

şeklinde hesaplanır.

Burada  $w_{s\sigma(j)}$ ,  $A_s$  alternatifinin  $C_{s\sigma(j)}$  kriterine ait ağırlığı olmak üzere;

$$A_{s\sigma(j)} = \{C_{\sigma(t)}: t \leq j, j \geq 1\} (j = 1, 2, \dots, m), A_{k\sigma(0)} = \emptyset \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlıdır.

#### 4.2.3 Karar Adımları

Olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic bir ortamda karar verici ve kriter ağırlıklarını da belirleyebilecek şekilde önerilen genişletilmiş PROMETHEE yöntemi ile en iyi alternatifi seçmek için aşağıdaki adımlar izlenir.

**Adım 1.**  $R^p = (r_{ij}^p)$  karar matrisinin belirlenmesi.

$r_{ij}^p$ ,  $A_i$  alternatifinin  $C_j$  kriterine göre  $D_p$  karar vericisine ait olan değerlendirmesidir. Burada her  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $p = 1, 2, \dots, t$  için  $0 \leq T_{ij}^p + I_{ij}^p + F_{ij}^p \leq 3$  ve  $0 < P_{T_{ij}^p}, P_{I_{ij}^p}, P_{F_{ij}^p} \leq 1$  olmak üzere karar vericilere ait performans değerleri  $r_{ij}^p = \left( T_{ij}^p(P_{T_{ij}^p}), I_{ij}^p(P_{I_{ij}^p}), F_{ij}^p(P_{F_{ij}^p}) \right)$  formundadır.

**Adım 2.**  $\gamma_p$  ( $p = 1, 2, \dots, t$ ) karar verici ağırlıklarının belirlenmesi.

Karar verici ağırlıkları Bölüm 4.2.1 de önerilen metot kullanılarak hesaplanır.

**Adım 3.** Ortalama grup karar matrisinin oluşturulması.

OBNAAO operatörü kullanılarak  $R = (r_{ij}) = \left( T_{ij}(P_{T_{ij}}), I_{ij}(P_{I_{ij}}), F_{ij}(P_{F_{ij}}) \right)$

ortalama grup karar matrisi aşağıda belirtilen şekilde oluşturulur.

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= OBNAAO(r_{ij}^1, r_{ij}^2, \dots, r_{ij}^t) \\
&= \left\{ 1 - \prod_{p=1}^t (1 - T_{ij}^p)^{\gamma_p} \left( t! \frac{\prod_{p=1}^t P_{T_{ij}}^p}{\prod_{l=2}^t \left( \sum_{p=1}^l P_{T_{ij}}^p \right)} \right), \right. \\
&\quad \left. \prod_{p=1}^t (I_{ij}^p)^{\gamma_p} \left( t! \frac{\prod_{p=1}^t P_{I_{ij}}^p}{\prod_{l=2}^t \left( \sum_{p=1}^l P_{I_{ij}}^p \right)} \right), \prod_{p=1}^t (F_{ij}^p)^{\gamma_p} \left( t! \frac{\prod_{p=1}^t P_{F_{ij}}^p}{\prod_{l=2}^t \left( \sum_{p=1}^l P_{F_{ij}}^p \right)} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

**Adım 4.** Kriter ağılıklarının belirlenmesi.

$\lambda$ -bulanık küme ölçüsü kullanılarak her bir alternatif için

$w_s = (w_{s1}, w_{s2}, \dots, w_{sm})^T$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) kriter ağırlık vektörü Bölüm 4.2.2 de önerilen metot ile belirlenir.

**Adım 5.** Alternatiflerin ikili karşılaştırmalarının yapılması.

Her bir kriter üzerinde (3.48) eşitliği ile verilen *Diff* operatörü tabanlı tercih fonksiyonu kullanılarak alternatiflerin ikili karşılaştırmaları aşağıdaki gibi yapılır.

$A^+ = \left( \max\{T_{ij}\} \left( \max\{P_{T_{ij}}\} \right), \min\{I_{ij}\} \left( \min\{P_{I_{ij}}\} \right), \min\{F_{ij}\} \left( \min\{P_{F_{ij}}\} \right) \right)$  pozitif  
ve  $A^- = \left( \min\{T_{ij}\} \left( \min\{P_{T_{ij}}\} \right), \max\{I_{ij}\} \left( \max\{P_{I_{ij}}\} \right), \max\{F_{ij}\} \left( \max\{P_{F_{ij}}\} \right) \right)$   
negatif ideal kümeler olmak üzere;

$$Diff_j(A_s, A_v) = RC_{A_{s_j}} - RC_{A_{v_j}} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
RC_{A_{s_j}} &= \frac{Proj(A_{s_j}, A_j^+)}{Proj(A_{s_j}, A_j^+) + Proj(A_{s_j}, A_j^-)} \\
RC_{A_{v_j}} &= \frac{Proj(A_{v_j}, A_j^+)}{Proj(A_{v_j}, A_j^+) + Proj(A_{v_j}, A_j^-)}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olup

$$P_j(A_s, A_v) = f_j \left( Diff_j(A_s, A_v) \right) \quad s = 1, 2, \dots, n, v = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \quad (4.27)$$

$$P_j(A_s, A_v) = \begin{cases} 0, & |Diff_j(A_s, A_v)| \leq e \\ \frac{|Diff_j(A_s, A_v)| - e}{f - e}, & e < |Diff_j(A_s, A_v)| \leq f \\ 1, & |Diff_j(A_s, A_v)| \geq f \end{cases} \quad (4.28)$$

ile hesaplanır.

Burada  $e$  ve  $f$  karar verici tarafından belirlenen eşik değerleridir.

#### **Adım 6.** Tercih indekslerinin belirlenmesi

Tüm kriterlerin düşünülmesi ile alternatiflerin tercih indeksleri aşağıdaki şekilde hesaplanır. Kriter önem indeksi  $\theta \in [0,1]$  ve  $w_{svj} = w_{sj}^\theta w_{vj}^{1-\theta}$  olmak üzere;

$$\pi(A_s, A_v) = \sum_{j=1}^m w_{svj} P_j(A_s, A_v), \quad s = 1, 2, \dots, n; v = 1, 2, \dots, n \quad (4.29)$$

ile hesaplanır. Burada  $w_{sj}$ ,  $w_{vj}$  sırasıyla  $A_s$  ve  $A_v$  alternatiflerine göre  $C_j$  kriterinin ağırlığını göstermektedir.

#### **Adım 7.** Pozitif ve negatif akışın hesaplanması

Her bir alternatif için sırasıyla pozitif ve negatif akış değerleri sırasıyla

$$\varphi^+(A_s) = \frac{1}{n-1} \sum_{v=1, s \neq v}^n \pi(A_s, A_v) \quad (4.30)$$

$$\varphi^-(A_s) = \frac{1}{n-1} \sum_{v=1, s \neq v}^n \pi(A_v, A_s) \quad (4.31)$$

şeklinde hesaplanır.

#### **Adım 8.** Net akışın hesaplanması

Tam sıralamayı elde etmek için

$$\varphi(A_s) = \varphi^+(A_s) - \varphi^-(A_v) \quad (4.32)$$

ile net akış hesaplanır. Böylece net akış değerlerine göre alternatifler arasında tam sıralama elde edilir. Net akış değeri ne kadar büyükse alternatif o kadar tercih edilir.

Çok kriterli karar verme metotları karar süreçlerinde önemli bir role sahiptir. Karar problemlerinin karmaşık yapısı nedeniyle farklı küme teorilerine bağlı olarak birçok teknik geliştirilmiştir. Bu bölümde genişletilmiş PROMETHEE yöntemi referans alınarak OBNS tabanlı bir enerji problemi ile bu tezde geliştirilen teorinin bir uygulaması yapılacaktır.

### 5.1 Çok Kriterli Bir Karar Verme Problemi

Enerji talebi giderek dünyanın en önemli problemi haline gelmektedir. Bugün genel olarak fosil yakıtlar kullandığımızdan, hava, su ve çevre kirliliğini azaltmak için alternatif kaynakların araştırılması gerekmektedir. Bu bölümde inceleyeceğimiz problemde beş alternatifimiz bulunmaktadır:

- Jeotermal ( $A_1$ )
- Rüzgâr enerjisi ( $A_2$ )
- Hidroelektrik ( $A_3$ )
- Güneş enerjisi ( $A_4$ )
- Biokütle enerjisi ( $A_5$ )

Verilen alternatifler şu kriterlere göre değerlendirilecektir:

- Enerji kaynağı kalitesi ( $C_1$ )
- Çevresel etkisi ( $C_2$ )
- Ekonomik ( $C_3$ )
- Teknolojik ( $C_4$ )
- Sosyo-politik ( $C_5$ )

Kriterlerin bulanık küme ölçüsü değerleri özel olarak  $\eta(\emptyset) = 0$ ,  $\eta(C_1) = 0.35$ ,  $\eta(C_2) = 0.3$ ,  $\eta(C_3) = 0.25$ ,  $\eta(C_4) = 0.2$  ve  $\eta(C_5) = 0.4$  şeklinde belirlenmiştir.

$\{D_1, D_2, D_3\}$  karar vericileri tarafından belirlenen değerlendirme verileri Tablo (5.1-5.3) de verilmiştir.

**Tablo 5. 1**  $D_1$  karar matrisi

|       | $C_1$                            | $C_2$                            | $C_3$                            |
|-------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $A_1$ | $(0.6(0.8), 0.3(0.9), 0.2(0.9))$ | $(0.8(0.8), 0.1(0.9), 0.1(0.7))$ | $(0.8(0.8), 0.1(1), 0.2(0.7))$   |
| $A_2$ | $(0.8(1), 0.3(0.8), 0.5(0.7))$   | $(0.7(0.9), 0.2(1), 0.4(0.8))$   | $(0.8(0.9), 0.2(0.7), 0.3(1))$   |
| $A_3$ | $(0.8(0.9), 0.2(0.7), 0.3(1))$   | $(0.6(1), 0.1(0.9), 0.2(1))$     | $(0.5(0.9), 0.3(0.9), 0.5(0.8))$ |
| $A_4$ | $(0.7(1), 0.2(1), 0.2(0.7))$     | $(0.8(0.8), 0.2(0.9), 0.2(0.9))$ | $(0.7(1), 0.4(1), 0.1(0.9))$     |
| $A_5$ | $(0.8(0.9), 0.1(0.9), 0.3(0.8))$ | $(0.8(1), 0.3(0.8), 0.2(1))$     | $(0.8(1), 0.4(0.7), 0.2(0.9))$   |
|       | $C_4$                            | $C_5$                            |                                  |
| $A_1$ | $(0.6(0.9), 0.2(0.9), 0.3(0.7))$ | $(0.7(1), 0.4(1), 0.3(1))$       |                                  |
| $A_2$ | $(0.7(0.8), 0.2(1), 0.1(0.8))$   | $(0.8(0.9), 0.1(1), 0.1(0.9))$   |                                  |
| $A_3$ | $(0.7(0.8), 0.3(0.8), 0.3(1))$   | $(0.7(0.8), 0.2(0.8), 0.2(0.9))$ |                                  |
| $A_4$ | $(0.8(0.9), 0.1(1), 0.2(0.8))$   | $(0.6(0.9), 0.3(1), 0.3(1))$     |                                  |
| $A_5$ | $(0.8(1), 0.1(0.7), 0.2(0.9))$   | $(0.5(1), 0.1(0.8), 0.2(0.8))$   |                                  |

**Tablo 5. 2**  $D_2$  karar matrisi

|       | $C_1$                          | $C_2$                          | $C_3$                          |
|-------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $A_1$ | (0.3(0.7), 0.2(0.9), 0.3(0.9)) | (0.6(0.9), 0.2(0.7), 0.1(0.8)) | (0.4(1), 0.1(1), 0.2(0.9))     |
| $A_2$ | (0.6(0.6), 0.8(0.7), 0.4(1))   | (0.7(0.7), 0.2(0.9), 0.1(1))   | (0.6(0.8), 0.2(0.5), 0.1(0.8)) |
| $A_3$ | (0.8(1), 0.2(0.9), 0.1(0.8))   | (0.5(0.8), 0.3(0.7), 0.2(0.8)) | (0.3(1), 0.4(0.7), 0.5(1))     |
| $A_4$ | (0.7(0.8), 0.2(1), 0.1(0.8))   | (0.6(0.6), 0.1(1), 0.3(0.9))   | (0.5(0.8), 0.2(1), 0.1(0.8))   |
| $A_5$ | (0.8(0.9), 0.1(0.8), 0.6(0.7)) | (0.8(1), 0.4(0.8), 0.2(1))     | (0.4(0.9), 0.2(0.9), 0.1(1))   |
|       | $C_4$                          | $C_5$                          |                                |
| $A_1$ | (0.8(0.8), 0.1(1), 0.2(0.8))   | (0.5(0.8), 0.4(1), 0.2(0.9))   |                                |
| $A_2$ | (0.8(0.7), 0.2(0.9), 0.2(0.8)) | (0.8(0.9), 0.2(0.9), 0.1(0.7)) |                                |
| $A_3$ | (0.7(0.8), 0.3(0.9), 0.2(1))   | (0.7(1), 0.2(0.8), 0.6(1))     |                                |
| $A_4$ | (0.6(1), 0.1(0.8), 0.3(0.5))   | (0.4(0.6), 0.3(0.9), 0.3(0.9)) |                                |
| $A_5$ | (0.4(0.9), 0.3(1), 0.3(1))     | (0.6(0.8), 0.2(1), 0.2(1))     |                                |

**Tablo 5. 3**  $D_3$  karar matrisi

|       | $C_1$                          | $C_2$                          | $C_3$                        |
|-------|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| $A_1$ | (0.7(1), 0.2(0.9), 0.1(0.8))   | (0.6(0.6), 0.2(1), 0.1(1))     | (0.5(0.8), 0.2(1), 0.1(0.9)) |
| $A_2$ | (0.8(0.9), 0.1(0.8), 0.4(1))   | (0.8(0.9), 0.2(0.9), 0.1(0.9)) | (0.8(1), 0.2(0.9), 0.6(1))   |
| $A_3$ | (0.7(1), 0.2(0.8), 0.2(0.9))   | (0.7(0.7), 0.4(1), 0.2(0.7))   | (0.5(0.9), 0.7(0.8), 0.5(1)) |
| $A_4$ | (0.5(0.9), 0.6(0.7), 0.2(0.8)) | (0.5(1), 0.5(0.8), 0.4(0.9))   | (0.8(0.9), 0.3(1), 0.7(0.8)) |
| $A_5$ | (0.6(0.9), 0.6(1), 0.3(0.9))   | (0.7(0.8), 0.6(0.7), 0.3(0.8)) | (0.6(1), 0.2(0.9), 0.6(0.8)) |
|       | $C_4$                          | $C_5$                          |                              |
| $A_1$ | (0.4(1), 0.2(1), 0.1(1))       | (0.8(0.9), 0.5(1), 0.2(1))     |                              |
| $A_2$ | (0.5(0.7), 0.2(0.9), 0.1(0.8)) | (0.8(1), 0.1(0.7), 0.2(0.7))   |                              |
| $A_3$ | (0.6(1), 0.2(1), 0.6(1))       | (0.7(0.9), 0.1(0.8), 0.4(0.8)) |                              |
| $A_4$ | (0.8(0.9), 0.1(0.7), 0.6(0.9)) | (0.6(0.8), 0.2(1), 0.2(0.9))   |                              |
| $A_5$ | (0.5(0.9), 0.4(0.8), 0.4(0.8)) | (0.5(0.8), 0.2(0.8), 0.6(1))   |                              |

En iyi alternatifi seçmek için Bölüm 4.2.3 de önerilen yaklaşım kullanılacaktır.

**Adım 1.** Karar verici ağırlıklarının belirlenmesi.

Bölüm 4.2.1 de önerilen metot kullanılarak  $\gamma = (\gamma_p)$  ( $p = 1,2,3$ ) her bir karar verici ağırlığı sırasıyla 0.390, 0.325 ve 0.285 şeklinde hesaplanmıştır. ( $e = 0.05, f = 0.4$ )

**Adım 2.** Ortalama grup karar matrisinin oluşturulması.

OBNAO operatörü kullanılarak oluşturulan genelleştirilmiş grup karar matrisi Tablo 5.4 de verilmiştir.

**Tablo 5. 4** Genelleştirilmiş karar matrisi

|       | $C_1$                                      | $C_2$                                      |
|-------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $A_1$ | (0.558(0.896), 0.234(0.9), 0.187(0.831))   | (0.695(0.663), 0.153(0.909), 0.1(0.896))   |
| $A_2$ | (0.749(0.81), 0.302(0.779), 0.436(0.915))  | (0.733(0.851), 0.2(0.914), 0.172(0.889))   |
| $A_3$ | (0.776(0.980), 0.2(0.788), 0.187(0.889))   | (0.604(0.747), 0.212(0.909), 0.2(0.747))   |
| $A_4$ | (0.653(0.889), 0.273(0.778), 0.16(0.779))  | (0.675(0.857), 0.207(0.842), 0.278(0.9))   |
| $A_5$ | (0.756(0.9), 0.167(0.941), 0.376(0.840))   | (0.776(0.857), 0.401(0.730), 0.224(0.857)) |
|       | $C_3$                                      | $C_4$                                      |
| $A_1$ | (0.629(0.821), 0.122(1), 0.164(0.851))     | (0.642(0.941), 0.16(0.980), 0.192(0.896))  |
| $A_2$ | (0.749(0.941), 0.2(0.851), 0.256(0.952))   | (0.696(0.713), 0.2(0.914), 0.125(0.8))     |
| $A_3$ | (0.442(0.914), 0.419(0.788), 0.5(0.952))   | (0.674(0.923), 0.267(0.941), 0.32(1))      |
| $A_4$ | (0.684(0.889), 0.294(1), 0.174(0.813))     | (0.749(0.914), 0.1(0.747), 0.312(0.755))   |
| $A_5$ | (0.652(0.98), 0.262(0.851), 0.218(0.842))  | (0.629(0.914), 0.212(0.791), 0.278(0.842)) |
|       | $C_5$                                      |                                            |
| $A_1$ | (0.684(0.889), 0.426(1), 0.234(0.980))     |                                            |
| $A_2$ | (0.8(0.964), 0.125(0.765), 0.122(0.719))   |                                            |
| $A_3$ | (0.7(0.889), 0.164(0.8), 0.348(0.842))     |                                            |
| $A_4$ | (0.544(0.751), 0.267(0.98), 0.267(0.914))  |                                            |
| $A_5$ | (0.535(0.821), 0.153(0.821), 0.273(0.952)) |                                            |

**Adım 3.** Kriter kombinasyonlarının  $\lambda$ -bulanık küme ölçüsü değerlerinin hesaplanması.

(4.21) eşitliği kullanılarak  $\lambda$  değeri  $-0.688$  olarak hesaplanmıştır. Ayrıca (4.19) eşitliği ile kriter kombinasyonlarının  $\lambda$ -bulanık küme ölçüsü değerleri Tablo 5.5 de verilmiştir.

**Tablo 5. 5**  $\lambda$ -Bulanık küme ölçüsü değerleri

| Kriter          |       | Kriter         |       | Kriter              |       | Kriter                        |       |
|-----------------|-------|----------------|-------|---------------------|-------|-------------------------------|-------|
| $\{\emptyset\}$ | 0     | $\{C_1, C_4\}$ | 0.617 | $\{C_1, C_2, C_3\}$ | 0.732 | $\{C_2, C_4, C_5\}$           | 0.79  |
| $\{C_1\}$       | 0.35  | $\{C_1, C_5\}$ | 0.69  | $\{C_1, C_2, C_4\}$ | 0.79  | $\{C_3, C_4, C_5\}$           | 0.732 |
| $\{C_2\}$       | 0.3   | $\{C_2, C_3\}$ | 0.459 | $\{C_1, C_2, C_5\}$ | 0.848 | $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$      | 0.881 |
| $\{C_3\}$       | 0.25  | $\{C_2, C_4\}$ | 0.538 | $\{C_1, C_3, C_4\}$ | 0.732 | $\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$      | 0.931 |
| $\{C_4\}$       | 0.2   | $\{C_2, C_5\}$ | 0.617 | $\{C_1, C_3, C_5\}$ | 0.795 | $\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$      | 0.973 |
| $\{C_5\}$       | 0.4   | $\{C_3, C_4\}$ | 0.459 | $\{C_1, C_4, C_5\}$ | 0.848 | $\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$      | 0.931 |
| $\{C_1, C_2\}$  | 0.617 | $\{C_3, C_5\}$ | 0.545 | $\{C_2, C_3, C_4\}$ | 0.664 | $\{C_2, C_3, C_4, C_5\}$      | 0.881 |
| $\{C_1, C_3\}$  | 0.545 | $\{C_4, C_5\}$ | 0.617 | $\{C_2, C_3, C_5\}$ | 0.732 | $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ | 1     |

**Adım 4.** Kriter ağırlıklarının hesaplanması.

$A_s$  ( $s = 1,2,3,4,5$ ) alternatifleri için kriter ağırlıkları belirlenir. İlk olarak her bir alternatif için değerlendirme verileri azalan sıraya göre yeniden düzenlenmiştir. Örnek olarak burada  $A_1$  alternatifi için kriter ağırlıkları hesaplanacaktır:  $A_1$  alternatifinin  $C_j$  ( $j = 1,2,3,4,5$ ) kriterlerine göre olan  $(r_{1j})$  değerlendirme verileri  $S(r_{13}) > S(r_{12}) > S(r_{15}) > S(r_{11}) > S(r_{14})$  olacak şekilde yeniden düzenlenir. Böylece kriterler  $\{C_3, C_2, C_5, C_1, C_4\}$  şeklinde sıralanır. (4.22) eşitliği kullanılarak  $A_1$  alternatifi için kriter ağırlıkları;

$$w_3 = \eta(C_3) - \eta(\emptyset) = 0.25, \quad w_2 = \eta(C_2, C_3) - \eta(C_3) = 0.209, \quad w_5 = \eta(C_2, C_3, C_5) - \eta(C_2, C_3) = 0.273, \\ w_1 = \eta(C_1, C_2, C_3, C_5) - \eta(C_2, C_3, C_5) = 0.199 \quad \text{ve} \quad w_4 = \eta(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) - \eta(C_1, C_2, C_3, C_5) = 0.069$$

şeklinde hesaplanır.

Benzer şekilde diğer alternatiflere göre kriter ağırlıkları elde edilebilir. Tablo 5.6 da her bir alternatif üzerinden hesaplanan kriter ağırlıkları verilmiştir.

**Tablo 5. 6** Kriter ağırlıkları

|       | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 0.199 | 0.209 | 0.250 | 0.069 | 0.273 |
| $A_2$ | 0.273 | 0.069 | 0.259 | 0.200 | 0.199 |
| $A_3$ | 0.317 | 0.300 | 0.115 | 0.068 | 0.199 |
| $A_4$ | 0.119 | 0.149 | 0.259 | 0.200 | 0.273 |
| $A_5$ | 0.231 | 0.125 | 0.027 | 0.217 | 0.400 |

**Adım 5.** Alternatiflerin ikili karşılaştırmaları.

Lineer tercih fonksiyonu kullanılarak her bir kriter için alternatiflerin ikili karşılaştırmaları

$$P_j(A_s, A_v) = f_j \left( Diff_j(A_s, A_v) \right) \quad j = 1,2,3,4,5; s = 1,2,3,4,5, v = 1,2,3,4,5 \quad (5.1)$$

formülü ile hesaplanır. Burada  $e$  ve  $f$  eşik değerleri sırasıyla 0.05 ve 0.2 olarak alınmıştır. Bu adımla ilişkili olarak, her bir alternatifin her bir kritere göre olan yakınlık katsayıları (4.26) eşitliği kullanılarak Tablo 5.7 de verilmiştir.

**Tablo 5. 7** Alternatiflerin yakınlık katsayıları

|            | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $RC_{A_1}$ | 0.420 | 0.419 | 0.465 | 0.486 | 0.476 |
| $RC_{A_2}$ | 0.494 | 0.528 | 0.575 | 0.427 | 0.597 |
| $RC_{A_3}$ | 0.578 | 0.434 | 0.373 | 0.491 | 0.512 |
| $RC_{A_4}$ | 0.494 | 0.507 | 0.526 | 0.564 | 0.328 |
| $RC_{A_5}$ | 0.530 | 0.565 | 0.550 | 0.490 | 0.370 |

**Adım 6.** Tercih indekslerinin hesaplanması

Alternatiflerin tercih indeks matrisi (4.29) eşitliği kullanılarak Tablo 5.8 de verilmiştir.

**Tablo 5. 8** Alternatiflerin tercih indeks matrisi

| $\pi$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | —     | 0.305 | 0.251 | 0.205 | 0.330 |
| $A_2$ | 0.305 | —     | 0.340 | 0.350 | 0.301 |
| $A_3$ | 0.227 | 0.323 | —     | 0.421 | 0.324 |
| $A_4$ | 0.290 | 0.350 | 0.421 | —     | 0.040 |
| $A_5$ | 0.330 | 0.301 | 0.324 | 0.04  | —     |

**Adım 7.** Pozitif, negatif ve net akış değerlerinin hesaplanması

Her bir alternatif için hesaplanan pozitif, negatif ve net akış değerleri (4.30), (4.31) ve (4.32) eşitlikleri kullanılarak Tablo 5.9 da verilmiştir.

**Tablo 5. 9** Alternatiflerin akış değerleri

|       | $\varphi^+(A_s)$ | $\varphi^-(A_s)$ | $\varphi^{net}(A_s)$ |
|-------|------------------|------------------|----------------------|
| $A_1$ | 0.273            | 0.288            | -0.015               |
| $A_2$ | 0.248            | 0.320            | -0.072               |
| $A_3$ | 0.267            | 0.334            | -0.067               |
| $A_4$ | 0.203            | 0.254            | -0.051               |
| $A_5$ | 0.166            | 0.249            | -0.082               |

Net akış verilerine göre alternatiflerin sıralamasının  $A_1 > A_4 > A_3 > A_2 > A_5$  olduğu gözlemlenmektedir ve sonuç olarak en uygun seçeneğin  $A_1$  alternatifi olduğu sonucuna ulaşılır.

## 5.2 Karşılaştırma Analizi

Son zamanlarda neutrosophic küme teorisi tıp, ekonomi, endüstri ve mühendislik gibi birçok alana uygulanmıştır. Bununla birlikte bu teori yaşadığımız evrendeki yetersizlik, eksiklik ve belirsizliği modellemek için yeterli değildir. Bu ihtiyacı karşılamak için bu çalışmada karar vericilerin risk durumunu da göz önünde bulunduracak şekilde olasılık ve neutrosophy kavramlarını birleştirerek olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme teorisi önerilmiştir. Önerilen yöntemin ne kadar pratik ve uygulanabilir olduğunu test etmek için literatürde var olan çeşitli yöntemler yukarıda verilen enerji kaynağı sıralama problemine uygulanmıştır. Her bir yöntem için sıralama sonuçları Tablo 5.10 da verildiği şekilde elde edilmiş ve önerilen yöntem ile diğerleri arasındaki farkların nedenleri aşağıda açıklanmaktadır.

Bu çalışmada önerilen yaklaşım, tercih bilgileri olasılık değerleri olmaksızın klasik neutrosophic bilgiye indirgenerek uygulanmıştır. Sonuçlarımız ([35], [58]) çalışması ile paralel olup diğer mevcut yöntemlerin sonuçları ile kısmen tutarlıdır. Farklılığın nedenleri ise pozitif ideal çözüm ve negatif ideal çözümün her ikisinin karar sürecine dahil edilmesi ve her bir alternatif için kriterlerin göreceli

ağırlıklarının dikkate alınmasıdır. Ayrıca klasik PROMETHEE yönteminde kriter ağırlıkları her bir alternatif için aynı olurken geliştirilen metot ile göreceli olarak farklı kriter ağırlıkları elde edilebilmiştir. Kriter ağırlıklarının farklı önem dereceleri ile düşünülmesi tercih sırasını etkilemektedir. Ayrıca karar vericilerin ağırlıklarını daha objektif bir şekilde belirleyebilmek için tercih fonksiyonuna bağlı olarak yeni bir yöntem sunulmuştur. Karar verici ağırlığını belirleme noktasında diğer metotlardan farklı olarak her bir karar vericinin süreçteki baskınlığı dikkate alınmıştır. Daha açık olarak karar vericilerin pozitif ve negatif baskınlıkları hesaba katılarak karar verici ağırlıkları belirlenmiştir.

**Tablo 5. 10** Karşılaştırma Analizi

| Karar metodu                                          | Tercih sıralaması             | En iyi alternatif | En kötü alternatif |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------|--------------------|
| [58]                                                  | $A_1 > A_4 > A_2 > A_5 > A_3$ | $A_1$             | $A_3$              |
| [76]                                                  | $A_2 > A_1 > A_4 > A_5 > A_3$ | $A_2$             | $A_3$              |
| [82]                                                  | $A_2 > A_4 > A_3 > A_1 > A_5$ | $A_2$             | $A_5$              |
| [24]                                                  | $A_2 > A_1 > A_4 > A_5 > A_3$ | $A_2$             | $A_3$              |
| BNAAO                                                 | $A_2 > A_1 > A_4 > A_5 > A_3$ | $A_2$             | $A_3$              |
| BNAGO                                                 |                               |                   |                    |
| [83]                                                  | $A_2 > A_1 > A_4 > A_5 > A_3$ | $A_2$             | $A_3$              |
| [35]                                                  | $A_1 > A_4 > A_2 > A_5 > A_3$ | $A_1$             | $A_3$              |
| Olasılık değerleri olmaksızın genişletilmiş PROMETHEE | $A_1 > A_4 > A_2 > A_5 > A_3$ | $A_1$             | $A_3$              |

İnsan faktörünün bulunduğu her yerde bir belirsizlik söz konusudur. Bu nedenle problemleri modelleme sürecinde klasik basitleştirilmiş neutrosophic kümelere ek olarak bir olasılık bilgisine ihtiyaç duyulabilir. Bu ihtiyaca yönelik olarak bu tezde olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic küme olarak adlandırılan yeni bir küme teorisi tanımlanmıştır. Böylece neutrosophic ve olasılık kavramları birleştirilerek daha kapsamlı bilginin elde edilmesi sağlanmıştır. Bu küme ile ilişkili sayı kavramı tanımlanarak bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Daha sonra karar sürecinde önemli bir role sahip olan bazı ortalama toplam operatörleri tanımlanarak bir kısım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmada çok kriterli grup karar problemleri için kullanılan PROMETHEE yöntemi olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic bilgiyle uyumlu olarak genişletilmiştir. Kriterlerin ağırlık bilgileri, aralarındaki korelasyon göz önünde bulundurularak belirlenmiştir. Genişletilmiş PROMETHEE yönteminde olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic tercihlerin olmasının yanı sıra her bir alternatif için göreceli kriter ağırlıkları hesaplanmıştır. Ayrıca karar verici ağırlıklarını belirlemek için her bir karar vericinin süreçteki pozitif ve negatif tercih değerlerini dikkate alan bir yöntem geliştirilmiştir. Daha sonra önerilen yöntemin geçerliliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için genişletilmiş PROMETHEE yöntemi olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic bilgi ile yenilenebilir enerji kaynakları sıralama problemine uygulanmıştır.

Genel olarak bu çalışmada geliştirilen PROMETHEE yönteminin mevcut diğer çalışmalara göre bazı avantajları vardır. Bunlar aşağıda özetlenmiştir:

- 1) Karar vericiler tarafından verilen performans değerleri diğerlerinin aksine olasılıklı basitleştirilmiş neutrosophic bilgiye dayanmaktadır.
- 2) Karar verici ağırlıkları PROMETHEE bileşenleri kullanılarak belirlenmiştir.
- 3) Kriterlerin ağırlık vektörü, kriterler arasındaki ilişkiyi dikkate alan bulanık küme ölçüsü yardımıyla her bir alternatif için göreceli olarak belirlenmiştir.

- 4) Klasik PROMETHEE yönteminin aksine alternatiflerin tercih indeksleri önerilen ağırlık belirleme yöntemi ile belirlenen kriter ağırlıkları ile hesaplanmıştır.
- 5) Her bir kritere göre alternatiflerin birbirlerine olan tercihlerini belirlemek için mesafe ölçüsü yerine sadece alternatifler arasındaki benzerlik oranını değil açığı da hesaba katan projeksiyon operatörü tabanlı *Diff* fonksiyonu kullanılmıştır.

Ayrıca pozitif ve negatif ideal çözümlerin çözüm sürecine dahil edilmesi ile daha kesin sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezde önerilen küme teorisine bağlı olarak gelecekte entropi ölçüsü, korelasyon katsayısı, benzerlik ölçüsü kavramları tanımlanabilir. Veriler arasındaki ilişkiyi veya üstünlük durumlarını dikkate alan ortalama operatörleri geliştirilebilir. Ayrıca farklı karar verme teknikleri için sunulan küme teorisi model olarak kullanılabilir.

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", *Information and Control*, c. 8, ss. 338–353, 1965.
- [2] E. P. Klement, "Fuzzy Logic in Artificial Intelligence CD Technical Report 94 /67 Technische Universitat Wien Institut fur Informations systeme Abteilung fur Datenbanken und Expertensysteme", sayı July, 1997.
- [3] J. J. Buckley ve Y. Hayashi, "Fuzzy neural networks: A survey", *Fuzzy Sets Syst.*, c. 66, sayı 1, ss. 1–13, 1994.
- [4] S. Mitra, "Fuzzy MLP based expert system for medical diagnosis", *Fuzzy Sets Syst.*, c. 65, sayı 2–3, ss. 285–296, 1994.
- [5] H. Ying, W. Siler, ve J. J. Buckley, "Fuzzy control theory: a nonlinear case", *Automatica*, c. 26, sayı 3, ss. 513–520, 1990.
- [6] C. T. Chen, "Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment", *Fuzzy Sets Syst.*, c. 114, sayı 1, ss. 1–9, 2000.
- [7] S. Mitra ve S. K. Pal, "Fuzzy sets in pattern recognition and machine intelligence", *Fuzzy Sets Syst.*, c. 156, sayı 3, ss. 381–386, 2005.
- [8] J. F. Baldwin, "Using a Fuzzy Logic", *Fuzzy Sets Syst.*, c. 2, ss. 309–325, 1979.
- [9] K. T. Atanassov, "Fuzzy set and Systems", c. 20, ss. 87–96, 1986.
- [10] H. Liu ve G. Wang, "NMulti-criteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy Title", *Eu J Oper Res*, c. 179(1), ss. 220–233, 2007.
- [11] D. Anuradha ve D. Kalpanapriya, "Intuitionistic fuzzy ANOVA and its application in medical diagnosis", *Res. J. Pharm. Technol.*, c. 11, sayı 2, ss. 653–656, 2018.
- [12] E. Sotirova, "Neural network for defining intuitionistic fuzzy sets in e-learning", c. 15, sayı May, ss. 33–36, 2009.
- [13] K. Atanassov ve G. Gargov, "Interval valued intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets Syst.*, c. 31, sayı 3, ss. 343–349, 1989.
- [14] F. Smarandache, "Florentin Smarandache A Unifying Field In Logics : Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability. Isbn 1-879585-76-6 American Research Press Rehoboth Florentin Smarandache A Unifying Field In Logics : Neutrosophic Logic.", Romania, Ss. 0–143, 2003.
- [15] H. Wang, P. Madiraju, Y. Zhang, ve R. Sunderraman, "Interval Neutrosophic Sets", 2004.
- [16] H. Wang, F. Smarandache, R. Sunderraman, ve Y.-Q. Zhang, "Single valued neutrosophic sets", *Multisp. Multistructure*, c. 4, ss. 410–413, 2010.

- [17] B. Said, M. Talea, A. Bakali, ve F. Smarandache, “Single Valued Neutrosophic Graphs”, *J. New Theory*, sayı 10, ss. 86–101, 2016.
- [18] H. Y. Zhang, J. Q. Wang, ve X. H. Chen, “Interval neutrosophic sets and their application in multicriteria decision making problems”, *Sci. World J.*, c. 2014, 2014.
- [19] H. Zhang, J. Wang, ve X. Chen, “An outranking approach for multi-criteria decision-making problems with interval-valued neutrosophic sets”, *Neural Comput. Appl.*, c. 27, sayı 3, ss. 615–627, 2016.
- [20] H. Y. Zhang, P. Ji, J. Q. Wang, ve X. H. Chen, “An Improved Weighted Correlation Coefficient Based on Integrated Weight for Interval Neutrosophic Sets and its Application in Multi-criteria Decision-making Problems”, *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, c. 8, sayı 6, ss. 1027–1043, 2015.
- [21] S. Broumi ve F. Smarandache, “Correlation coefficient of interval neutrosophic set”, *Appl. Mech. Mater.*, c. 436, ss. 511–517, 2013.
- [22] J. Ye, “Improved correlation coefficients of single valued neutrosophic sets and interval neutrosophic sets for multiple attribute decision making”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 27, sayı 5, ss. 2453–2462, 2014.
- [23] J. Ye, “A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 26, sayı 5, ss. 2459–2466, 2014.
- [24] J. J. Peng, J. Q. Wang, J. Wang, H. Y. Zhang, ve X. H. Chen, “Simplified neutrosophic sets and their applications in multi-criteria group decision-making problems”, *Int. J. Syst. Sci.*, c. 47, sayı 10, ss. 2342–2358, 2016.
- [25] P. Majumdar ve S. K. Samanta, “On similarity and entropy of neutrosophic sets”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 26, sayı 3, ss. 1245–1252, 2014.
- [26] J. Ye ve Q. S. Zhang, “Single valued neutrosophic similarity measures for multiple attribute decision making”, *Neutrosophic Sets Syst.*, c. 2, ss. 48–54, 2014.
- [27] J. Ye, “Similarity measures between interval neutrosophic sets and their applications in multicriteria decision-making”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 26, sayı 1, ss. 165–172, 2014.
- [28] J. Ye, “Multicriteria decision-making method using the correlation coefficient under single-valued neutrosophic environment”, *Int. J. Gen. Syst.*, c. 42, sayı 4, ss. 386–394, 2013.
- [29] J. Ye, “Clustering methods using distance-based similarity measures of single-valued neutrosophic sets”, *J. Intell. Syst.*, c. 23, sayı 4, ss. 379–389, 2014.
- [30] R. Şahin, “Cross-entropy measure on interval neutrosophic sets and its applications in multicriteria decision making”, *Neural Comput. Appl.*, c. 28, sayı 5, ss. 1177–1187, 2017.

- [31] H. L. Huang, "New Distance Measure of Single-Valued Neutrosophic Sets and Its Application", Sch. Math. Stat. Minnan Norm. Univ. Zhangzhou 363000, People's Repub. China.
- [32] J. Ye, "Improved cosine similarity measures of simplified neutrosophic sets for medical diagnoses", *Artif. Intell. Med.*, c. 63, sayı 3, ss. 171–179, 2015.
- [33] J. J. Peng, J. Q. Wang, H. Y. Zhang, ve X. H. Chen, "An outranking approach for multi-criteria decision-making problems with simplified neutrosophic sets", *Appl. Soft Comput. J.*, c. 25, ss. 336–346, 2014.
- [34] P. Biswas, S. Pramanik, ve B. C. Giri, "TOPSIS method for multi-attribute group decision-making under single-valued neutrosophic environment", *Neural Comput. Appl.*, c. 27, sayı 3, ss. 727–737, 2016.
- [35] R. Şahin ve P. Liu, "Maximizing deviation method for neutrosophic multiple attribute decision making with incomplete weight information", *Neural Comput. Appl.*, c. 27, sayı 7, ss. 2017–2029, 2016.
- [36] R. Şahin ve A. Küçük, "On similarity and entropy of neutrosophic soft sets", *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 27, sayı 5, ss. 2417–2430, 2014.
- [37] S. Ye ve J. Ye, "Dice similarity measure between single valued neutrosophic multisets and its application in medical diagnosis.", *Neutrosophic Sets Syst.*, c. 6, ss. 48–52, 2014.
- [38] F. Karaaslan, "Correlation coefficients of single-valued neutrosophic refined soft sets and their applications in clustering analysis", *Neural Comput. Appl.*, c. 28, sayı 9, ss. 2781–2793, 2017.
- [39] P. Biswas, S. Pramanik, ve B. C. Giri, "Entropy Based Grey Relational Analysis Method for Multi- Attribute Decision Making under Single Valued Neutrosophic Assessments", *Neutrosophic Sets Syst.*, c. 2, ss. 105–113, 2014.
- [40] R. Şahin, "An approach to neutrosophic graph theory with applications", *Soft Comput.*, c. 23, sayı 2, ss. 569–581, 2019.
- [41] E. Bolturk ve C. Kahraman, "A novel interval-valued neutrosophic AHP with cosine similarity measure", *Soft Comput.*, c. 22, sayı 15, ss. 4941–4958, 2018.
- [42] S. Ye, J. Fu, ve J. Ye, "Medical diagnosis using distance-based similarity measures of single valued neutrosophic multisets", *Neutrosophic Sets Syst.*, c. 7, ss. 47–52.
- [43] M. Abdel-Basset, M. Mohamed, A. N. Hussien, ve A. K. Sangaiah, "A novel group decision-making model based on triangular neutrosophic numbers", *Soft Comput.*, c. 22, sayı 20, ss. 6629–6643, 2018.
- [44] P. Biswas, S. Pramanik, ve B. Giri, "A New Methodology for Neutrosophic Multi-attribute Decisionmaking with Unknown Weight Information", *Neutrosophic Sets Syst.*, c. 3, sayı September, ss. 42–52, 2014.

- [45] P. Liu, Y. Chu, Y. Li, ve Y. Chen, “Some generalized neutrosophic number hamacher aggregation operators and their application to group decision making”, *Int. J. Fuzzy Syst.*, c. 16, sayı 2, ss. 242–255, 2014.
- [46] C. Liu ve Y. Luo, “Correlated aggregation operators for simplified neutrosophic set and their application in multi-attribute group decision making”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 30, sayı 3, ss. 1755–1761, 2016.
- [47] P. Liu ve G. Tang, “Some power generalized aggregation operators based on the interval neutrosophic sets and their application to decision making”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 30, sayı 5, ss. 2517–2528, 2016.
- [48] R. Şahin ve P. Liu, “Some approaches to multi criteria decision making based on exponential operations of simplified neutrosophic numbers”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 32, sayı 3, ss. 2083–2099, 2017.
- [49] P. Liu ve H. Li, “Multiple attribute decision-making method based on some normal neutrosophic Bonferroni mean operators”, *Neural Comput. Appl.*, c. 28, sayı 1, ss. 179–194, 2017.
- [50] S. Shao, X. Zhang, ve Q. Zhao, “Multi-attribute decision making based on probabilistic neutrosophic hesitant fuzzy Choquet aggregation operators”, *Symmetry (Basel)*, c. 11, sayı 5, 2019.
- [51] P. Liu ve Y. Wang, “Multiple attribute decision-making method based on single-valued neutrosophic normalized weighted Bonferroni mean”, *Neural Comput. Appl.*, c. 25, sayı 7–8, ss. 2001–2010, 2014.
- [52] C. L. Hwang ve A. S. M. Masud, “Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications”, *Lect. Notes Econ. Math. Syst.*, c. 1, sayı 164, s. 358, 1979.
- [53] S. Opricovic ve G. H. Tzeng, “Multicriteria planning of post-earthquake sustainable reconstruction”, *Comput. Civ. Infrastruct. Eng.*, c. 17, sayı 3, ss. 211–220, 2002.
- [54] B.R, R.B, ve S.B, “ELECTRE: une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples”, *Rev Française Informat Rech. Opérationnelle*, c. 3, ss. 31–56, 1969.
- [55] M.B ve V.JP, “PROMETHEE a new family of outranking methods in multi criteria analysis”, *Brans JP Oper Res*, c. 84, ss. 477–490, 1984.
- [56] H. gang Peng, H. yu Zhang, ve J. qiang Wang, “Probability multi-valued neutrosophic sets and its application in multi-criteria group decision-making problems”, *Neural Comput. Appl.*, c. 30, sayı 2, ss. 563–583, 2018.
- [57] D. Dubois, E. Pap, ve H. Prade, “Hybrid Probabilistic-Possibilistic Mixtures and Utility Functions”, ss. 51–73, 2000.
- [58] R. Şahin ve P. Liu, “Possibility-induced simplified neutrosophic aggregation operators and their application to multi-criteria group decision-making”, *J. Exp. Theor. Artif. Intell.*, c. 29, sayı 4, ss. 769–785, 2017.

- [59] Z. Xu, "Intuitionistic fuzzy aggregation operators.", IEEE Trans. Fuzzy Syst., c. 15, sayı 6, ss. 1179–1187, 2007.
- [60] S. M. Chen ve J. M. Tan, "Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory", Fuzzy Sets Syst., c. 67, sayı 2, ss. 163–172, 1994.
- [61] D. H. Hong ve C. H. Choi, "Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory", Fuzzy Sets Syst., c. 114, sayı 1, ss. 103–113, 2000.
- [62] Z. Xu ve R. R. Yager, "Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets", Int. J. Gen. Syst., c. 35, sayı 4, ss. 417–433, 2006.
- [63] F. Smarandache ve S. Osman, Neutrosophy in Arabic Philosophy. 2016.
- [64] F. Smarandache, "Neutrosophic set-A generalization of the intuitionistic fuzzy set", 2006 IEEE Int. Conf. Granul. Comput., c. 1, sayı 1, ss. 38–42, 2006.
- [65] F. Smarandache ve L. Vlădăreanu, "Applications of neutrosophic logic to robotics: An introduction", Proc. - 2011 IEEE Int. Conf. Granul. Comput. GrC 2011, sayı November, ss. 607–612, 2011.
- [66] F. Smarandache ve M. Teodorescu, "Neutrosophy, Method of Uncertainties Process Analysis", c. 2038, sayı September, 2017.
- [67] E. Rashno, A. Akbari, ve B. Nasersharif, "A Convolutional Neural Network model based on Neutrosophy for Noisy Speech Recognition", ss. 87–92, 2019.
- [68] A. L. Jousselme ve P. Maupin, "Neutrosophy in situation analysis", Proc. Seventh Int. Conf. Inf. Fusion, FUSION 2004, c. 1, sayı July, ss. 400–406, 2004.
- [69] A. Karaşan ve C. Kahraman, "A novel interval-valued neutrosophic EDAS method: prioritization of the United Nations national sustainable development goals", Soft Comput., c. 22, sayı 15, ss. 4891–4906, 2018.
- [70] J. J. Peng, J. Q. Wang, J. Wang, H. Y. Zhang, ve X. H. Chen, "Simplified neutrosophic sets and their applications in multi-criteria group decision-making problems", Int. J. Syst. Sci., c. 47, sayı 10, ss. 2342–2358, 2016.
- [71] G. Beliakov, M. Pagola, ve T. Wilkin, "Vector valued similarity measures for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets", Inf. Sci. (Ny)., c. 280, ss. 352–367, 2014.
- [72] J. J. Peng, J. qiang Wang, X. hui Wu, J. Wang, ve X. hong Chen, "Multi-valued Neutrosophic Sets and Power Aggregation Operators with Their Applications in Multi-criteria Group Decision-making Problems", Int. J. Comput. Intell. Syst., c. 8, sayı 2, ss. 345–363, 2015.
- [73] H. Ju, "Multicriteria fuzzy decision-making methods based on interval-valued fuzzy sets", Proc. - 2012 5th Int. Conf. Intell. Comput. Technol.

Autom. ICICTA 2012, c. 179, ss. 217–220, 2012.

- [74] Z. Xu, “Intuitionistic preference relations and their application in group decision making”, *Inf. Sci. (Ny).*, c. 177, sayı 11, ss. 2363–2379, 2007.
- [75] J. Ye, “Vector similarity measures of simplified neutrosophic sets and their application in multicriteria decision making”, *Int. J. Fuzzy Syst.*, c. 16, sayı 2, ss. 204–211, 2014.
- [76] J. Ye, “Single valued neutrosophic cross-entropy for multicriteria decision making problems”, *Appl. Math. Model.*, c. 38, sayı 3, ss. 1170–1175, 2014.
- [77] R. Şahin, M. Karabacak, R. Sahin, ve M. Karabacak, “A multi attribute decision making method based on inclusion measure for interval neutrosophic sets”, *Int. J. Adv. Eng. Sci. Appl. Math.*, c. 2, sayı 2, ss. 13–15, 2015.
- [78] Z. P. Tian, H. Y. Zhang, J. Wang, J. Q. Wang, ve X. H. Chen, “Multi-criteria decision-making method based on a cross-entropy with interval neutrosophic sets”, *Int. J. Syst. Sci.*, c. 47, sayı 15, ss. 3598–3608, 2016.
- [79] X. hui Wu, J. qiang Wang, J. juan Peng, ve X. hong Chen, “Cross-Entropy and Prioritized Aggregation Operator with Simplified Neutrosophic Sets and Their Application in Multi-Criteria Decision-Making Problems”, *Int. J. Fuzzy Syst.*, c. 18, sayı 6, ss. 1104–1116, 2016.
- [80] P. Liu ve L. Shi, “The generalized hybrid weighted average operator based on interval neutrosophic hesitant set and its application to multiple attribute decision making”, *Neural Comput. Appl.*, c. 26, sayı 2, ss. 457–471, 2014.
- [81] S. M, “Theory of fuzzy integral and its application”, *Dr. thesis. Tokyo Inst. Technol.*, 1974.
- [82] R. Şahin ve A. Küçük, “Subsethood measure for single valued neutrosophic sets”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, c. 29, sayı 2, ss. 525–530, 2015.
- [83] K., GD, Ş. R, “A novel hybrid approach for simplified neutrosophic decision-making with completely unknown weight information”, *Int J Uncertain Quantif*, c. 8, sayı 2, ss. 161–173, 2018.

## TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

---

**İletişim Bilgisi:** fatmaaltun@gumushane.edu.tr

### Makaleler

1. F., Altun., R., Şahin & C., Güler, “Multi-criteria decision making approach based on PROMETHEE with probabilistic simplified neutrosophic sets”, Soft Computing, doi:10.1007/s00500-019-04244-4, 2019.