

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PIEZOELEKTRİK/METAL/PIEZOELEKTRİK ÜÇ KATMANDAN OLUŞAN
DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASININ SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ**

FATİH AYLIKCI

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. NAZMİYE YAHNİOĞLU**

İSTANBUL, 2019

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PİEZOELEKTRİK/METAL/PİEZOELEKTRİK ÜÇ KATMANDAN OLUŞAN
DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASININ SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ**

Fatih AYLIKCI tarafından hazırlanan tez çalışması 29.03.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nihal UZCAN ERATLI
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Ülkü BABUŞÇU YEŞİL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Reşat KÖŞKER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nalan ANTAR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün 2016-07-03-DOP03 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Tez danışmanlığımı üstlenerek araştırma konusunun seçimi ve yürütülmesi sırasında değerli bilimsel uyarı ve önerilerinden yararlandığım, birlikte çalışmaktan büyük şeref duyduğum, beni gerek çalışmalarım konusunda gerek akademik yolda ilerlerken en iyi şekilde yönlendirmeye çalışan sayın Prof. Dr. Nazmiye Yahnioğlu hocama ve yardımlarını, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Surkay D. Akbarov hocamıza bana olan inançları ve güvenlerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi esnasında MATLAB programlama konusunda değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm çok değerli sayın Asst. Prof. Armağan Elibol hocama ve verdikleri desteklerden ötürü sayın Doç. Dr. Ülkü Babuşçu Yeşil hocama ve Doç. Dr. Fatma Aydın Akgün hocama sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Yaşamım boyunca her zaman varlıklarını yanımda hissettiğim aileme, bu tez çalışması süresince bazen ingilizce çevirilerde bana yardımcı olan ve ayrıca manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Ümit Kader Cengiz'e ve neredeyse beraber büyüdüğüm arkadaşım Gökçe Mihlaç Steiner'e verdiği destek için çok teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasını “Yıldız Teknik Üniversitesi Doktora Araştırma Projesi” kapsamında desteklediği için Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim (Proje numarası: 2016-07-03-DOP03).

Mart, 2019

Fatih AYLIKCI

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xx
ABSTRACT	xxii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	7
1.3 Orijinal Katkı.....	9
BÖLÜM 2	
BANT ÇATLAK İÇEREN PİEZOELEKTRİK SANDVİÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASI.....	11
2.1 Ele Alınan Problemin Formülasyonu.....	11
2.1.1 Alan denklemleri.....	15
2.1.2 Mekaniksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları	16
2.1.3 Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları	17
2.2 Ele Alınan Problemin Çözümü: Lineerleştirme İşlemleri	19
2.2.1 Sıfıncı yaklaşımın çözümü.....	23
2.2.2 Birinci yaklaşımın çözümü	28
2.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme.....	33
2.3.1 Problem 1 (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri	36
2.3.2 Problem 2 (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri	47

BÖLÜM 3

DİKDÖRTGEN KENAR ÇATLAK İÇEREN PİEZOELEKTRİK SANDVİÇ KALIN PLAĞIN

DELAMİNASYON BURKULMASI	53
3.1 Ele Alınan Problemin Formülasyonu.....	53
3.1.1 Alan denklemleri.....	56
3.1.2 Mekaniksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları	56
3.1.3 Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları	57
3.2 Ele Alınan Problemin Çözümü: Lineerleştirme İşlemleri	59
3.2.1 Sıfırıncı yaklaşımın çözümü.....	63
3.2.2 Birinci yaklaşımın çözümü	63
3.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme.....	65
3.3.1 Problem 3 (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri	66
3.3.2 Problem 4 (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri	82

BÖLÜM 4

DİKDÖRTGEN İÇ ÇATLAK İÇEREN PİEZOELEKTRİK SANDVİÇ KALIN PLAĞIN

DELAMİNASYON BURKULMASI	93
4.1 Ele Alınan Problemin Formülasyonu.....	93
4.1.1 Alan denklemleri.....	96
4.1.2 Mekaniksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları	97
4.1.3 Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları	98
4.2 Ele Alınan Problemin Çözümü: Lineerleştirme İşlemleri	99
4.2.1 Sıfırıncı yaklaşımın çözümü.....	103
4.2.2 Birinci yaklaşımın çözümü	103
4.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme.....	106
4.3.1 Problem 5 (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri	107
4.3.2 Problem 6 (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri	123

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER	130
KAYNAKLAR.....	134
ÖZGEÇMİŞ.....	140

SİMGE LİSTESİ

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$	Plâğın alt, orta ve üst katmanları
$S_L^\mp (S_U^\mp)$	Alt ve orta (orta ve üst) tabakalar arasında yer alan çatlağın alt ve üst sınırları
T_{jk}	Gerilme tansörü bileşeni
M_{ji}	Maxwell gerilme tansörü bileşeni
u_i	Mekanik yerdeğiştirme vektörü bileşeni
D_i	Elektriksel yerdeğiştirme vektörü bileşeni
s_{kl}	Green şekildeğiştirme tansörü bileşeni
e_{ikl}	Piezoelektrik sabiti
c_{ijkl}	Elastik sabiti
ϵ_{ik}	Dielektrik sabiti
E_{kl}	Elektrik alan bileşeni
ϕ	Elektriksel potansiyel
ϵ_0	Boşluğun elektriksel geçirgenliği
δ_{ij}	Kronecker sembolü

KISALTMA LİSTESİ

Al	Aluminyum
ÇİP	Çatlak İçermeyen Plak
PZT	Piezoelektrik
St	Çelik

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Bant çatlaklar içeren sandviç kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi a)Çözüm bölgesinin tamamı b) Çözüm bölgesinin 1/8'lik kısmı 12
Şekil 2.2	(a) Çözüm bölgesinin 1/8'inin sonlu elemanlara ayrıklaştırılması (b) Kullanılan sonlu eleman geometrisi (örnek eleman)..... 29
Şekil 2.3	Kritik şekildeğiştirme değerleri 36
Şekil 2.4	Kritik kuvvet değerleri ($\gamma = 1$, $h / \ell_1 = 0.2$) 38
Şekil 2.5	Kritik kuvvet değerleri ($h_F / \ell_1 = 0.05$, $h / \ell_1 = 0.2$) 39
Şekil 2.6	$x_2 = h_F + h_C + 0^+$ 'da $p = 0.1270$ ($< p_{cr} / c_{44}^{PZT-5H}$) 'te yüzey grafiği..... 40
Şekil 2.7	PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) 46
Şekil 2.8	PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) 46
Şekil 2.9	PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 ve Problem 2'den elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) 51
Şekil 2.10	PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 ve Problem 2'den elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) 51
Şekil 2.11	PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 2 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) 52
Şekil 2.12	PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 2 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) 52
Şekil 3.1	Kenar çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi

	(a) Çözüm bölgesinin tamamı	
	(b) Çözüm bölgesinin ¼'lük kısmı.....	54
Şekil 3.2	(a) Çözüm bölgesinin ¼'ünün sonlu elemanlara ayrıklaştırılması	
	(b) Kullanılan sonlu elemanların geometrisi (örnek eleman).....	65
Şekil 3.3	Farklı PZT/Al/PZT malzeme çiftleri ve Ox_3 yönündeki farklı çatlak	
	uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri.....	72
Şekil 3.4	Farklı PZT/St/PZT malzeme çiftleri ve Ox_3 yönündeki farklı çatlak	
	uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri.....	72
Şekil 3.5	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde	
	$c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (\ell_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.4, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) ...	73
Şekil 3.6	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde	
	$c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (\ell_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.7, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) ...	73
Şekil 3.7	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	
	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)	75
Şekil 3.8	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	
	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)	75
Şekil 3.9	PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	
	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)	75
Şekil 3.10	PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	
	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)	75
Şekil 3.11	PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	
	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)	76
Şekil 3.12	PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	
	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)	76
Şekil 3.13	PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	
	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)	76
Şekil 3.14	PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak	
	yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre	

	değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	76
Şekil 3.15	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	77
Şekil 3.16	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	77
Şekil 3.17	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	77
Şekil 3.18	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	77
Şekil 3.19	PZT4/Al/PZT-4 sandviç kalın plağın çatlak yüzeyinin burkulma modu a) $\ell_{30} / \ell_{10}^{(1)} = 0.5$, b) $\ell_{30} / \ell_{10}^{(2)} = 0.3636$, c) $\ell_{30} / \ell_{10}^{(3)} = 0.3077$, d) $\ell_{30}^{(1)} / \ell_{10} = 0.5$, e) $\ell_{30}^{(2)} / \ell_{10} = 0.3636$, f) $\ell_{30}^{(3)} / \ell_{10} = 0.3077$, g) (a)-(c) ile (d)-(f) de verilen çatlak geometrilerine ait çatlağın üst yüzeyi yerdeğiştirme grafikleri.....	79
Şekil 3.20	Al orta katmanlı farklı piezoelektrik sandviç kalın plaklar için $\ell_{30} / \ell_{10} = 0.4444$ ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin x_1 / ℓ_1 'e göre değişimlerinin karşılaştırılması.....	80
Şekil 3.21	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $\ell_{30} / \ell_{10} = 0.4444$ ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin farklı dış katman kalınlıklarına göre çatlak yüzey yerdeğiştirmesinin (v) x_1 / ℓ_1 'e göre grafiği.....	81
Şekil 3.22	PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 4 için x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	86
Şekil 3.23	PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 4 için x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	86
Şekil 3.24	PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 3 ve Problem 4'ten elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	87
Şekil 3.25	PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 3 ve Problem 4'ten elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	87

Şekil 3.26	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 4 için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.4, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....89
Şekil 3.27	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 4 için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.7, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....89
Şekil 3.28	PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....90
Şekil 3.29	PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....90
Şekil 3.30	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....91
Şekil 3.31	PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....91
Şekil 3.32	BaTiO ₃ /Al/ BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....91
Şekil 3.33	BaTiO ₃ /St/ BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....91
Şekil 3.34	PZT/Metal/PZT sandviç kalın plakta PZT dış katmanlarının sınırında verilen farklı sınır ve temas koşulları için (Problem 3 (açık devre) ve Problem 4 (kapalı devre)) çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($\ell_{30} / \ell_1 = 0.2, \ell_{30} / \ell_{10} = 0.2857, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0, x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....92
Şekil 4.1	İç çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi (a) Çözüm bölgesinin tamamı (b) Çözüm bölgesinin 1/8'lik kısmı.....94
Şekil 4.2	(a) Çözüm bölgesinin 1/8'inin sonlu elemanlara ayrıklaştırılması (b) Kullanılan sonlu elemanların geometrisi (örnek eleman).....105
Şekil 4.3	Farklı PZT/Al/PZT malzeme çiftleri ve Ox_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri.....113
Şekil 4.4	Farklı PZT/St/PZT malzeme çiftleri ve Ox_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri.....113
Şekil 4.5	PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için Problem 5 ve Problem 3 için

	farklı ℓ_{30} / ℓ_1 değerlerinde elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0, h / \ell_1 = 0.2, h_F / \ell_1 = 0.05, \ell_3 / \ell_1 = 1$).....	114
Şekil 4.6	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde $c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (\ell_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	115
Şekil 4.7	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde $c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (\ell_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.85, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	115
Şekil 4.8	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	117
Şekil 4.9	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	117
Şekil 4.10	PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	117
Şekil 4.11	PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	117
Şekil 4.12	PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	118
Şekil 4.13	PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	118
Şekil 4.14	PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	118
Şekil 4.15	PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	118
Şekil 4.16	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	119

Şekil 4.17	BaTiO ₃ /Al/ BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 ’e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	119
Şekil 4.18	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 ’e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	119
Şekil 4.19	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30} / ℓ_{10} değerlerinde x_1 / ℓ_1 ’e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$).....	119
Şekil 4.20	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $\ell_{30} / \ell_{10} = 0.8333$ ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda, farklı dış katman kalınlıkları için v değerlerinin x_1 / ℓ_1 ’e göre grafiği.....	122
Şekil 4.21	PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 6 için x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	127
Şekil 4.22	PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 6 için x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	127
Şekil 4.23	PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 5 ve Problem 6’dan elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	128
Şekil 4.24	PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç kalın plaklar için Problem 5 ve Problem 6’dan elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	128
Şekil 4.25	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 6 için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	129
Şekil 4.26	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 6 için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.85, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$).....	129

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1	$p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$ Kritik delaminasyon burkulma kuvveti ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5, h / \ell_1 = 0.2$)	34
Çizelge 2.2	$p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$ Kritik delaminasyon burkulma kuvveti ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5, h / \ell_1 = 0.15, \gamma = 1$).....	34
Çizelge 2.3	p_{cr} / c_{44}^{PZT-4} , Kritik delaminasyon burkulma kuvveti ($h / \ell_1 = 0.2,$ $h_F / \ell_1 = 0.05, \ell_{10} / \ell_1 = 0.5$).....	35
Çizelge 2.4	Seçilen PZT malzemelerin mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabiti değerleri	37
Çizelge 2.5	PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h / \ell_1 = 0.2, \ell_3 / \ell_1 = 1, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)	42
Çizelge 2.6	PZT-4/Al/PZT-4 sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h / \ell_1 = 0.2, \ell_3 / \ell_1 = 1, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)	42
Çizelge 2.7	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h / \ell_1 = 0.2, \ell_3 / \ell_1 = 1, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)	43
Çizelge 2.8	PZT-5H/St/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h / \ell_1 = 0.2, \ell_3 / \ell_1 = 1, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)	43
Çizelge 2.9	PZT-4/St/PZT-4 sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h / \ell_1 = 0.2, \ell_3 / \ell_1 = 1, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)	44
Çizelge 2.10	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h / \ell_1 = 0.2, \ell_3 / \ell_1 = 1, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)	44
Çizelge 2.11	PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik	

	basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	48
Çizelge 2.12	PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	48
Çizelge 2.13	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	49
Çizelge 2.14	PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	49
Çizelge 2.15	PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	50
Çizelge 2.16	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	50
Çizelge 3.1	İzotrop alüminyum plak için farklı dış katman kalınlıkları ve farklı x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri $\left(p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \right)$	66
Çizelge 3.2	Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri ve kenar çatlak boyutları için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $h_F/\ell_1 = 0.05$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$)	67
Çizelge 3.3	PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	68
Çizelge 3.4	PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	68
Çizelge 3.5	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)	69
Çizelge 3.6	PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik	

	basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....70
Çizelge 3.7	PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....70
Çizelge 3.8	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....71
Çizelge 3.9	Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için burkulma mod değişimine neden olan kritik çatlak boyutları oranı $(\ell_{30}/\ell_{10})^* (= \tau)$ değerleri.....78
Çizelge 3.10	PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....83
Çizelge 3.11	PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....83
Çizelge 3.12	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....84
Çizelge 3.13	PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....84
Çizelge 3.14	PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu).....85
Çizelge 3.15	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum1(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{Durum2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$

	($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu).....85
Çizelge 4.1	Aluminyum dikdörtgen plak için farklı dış katman kalınlıkları ve farklı x_3 yönündeki çatlak uzunlukları (ℓ_{30}) için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri $\left(p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \right)$106
Çizelge 4.2	Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri ve iç çatlak boyutları için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri p_{cr} / c_{44}^{PZT} $\left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $h_F/\ell_1 = 0.05$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$).....108
Çizelge 4.3	PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)....109
Çizelge 4.4	PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)....109
Çizelge 4.5	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)....110
Çizelge 4.6	PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)....111
Çizelge 4.7	PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)....111
Çizelge 4.8	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)....112

Çizelge 4.9	Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için burkulma mod değişimine neden olan kritik çatlak boyutları oranı $(\ell_{30} / \ell_{10})^* (= \tau)$ değerleri.....120
Çizelge 4.10	PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)....124
Çizelge 4.11	PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)....124
Çizelge 4.12	BaTiO ₃ /Al/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)....125
Çizelge 4.13	PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)....125
Çizelge 4.14	PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)....136
Çizelge 4.15	BaTiO ₃ /St/BaTiO ₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$ ($h/\ell_1 = 0.2, \ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, Ox_2$ kutuplanma doğrultusu)....126

**PIEZOELEKTRİK/METAL/PIEZOELEKTRİK ÜÇ KATMANDAN OLUŞAN
DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASININ SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ**

Fatih AYLIKCI

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU

Bu tez kapsamında, dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı metal (PZT/Metal/PZT) olan ve katmanları arasında birbirine özdeş ve paralel farklı geometrilerde (bant/kenar veya iç çatlak) ara çatlaklar içeren sandviç dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından etki eden tek eksenli statik dış basınç kuvveti altında, 3 boyutlu delaminasyon burkulma problemleri teorik olarak incelenmiştir. Ele alınan problemler, elektro-elastisite teorisinin lineerize edilmiş üç boyutlu kesin denklemleri çerçevesinde, parçalı homojen cisim modeli kullanılarak matematiksel olarak modellenmiş ve elde edilen sınırdeğer problemleri üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Ele alınan PZT sandviç plağa ait kritik parametrelerin belirlenmesinde “küçük başlangıç eğinti kriteri” kullanılmıştır. Bu kriter, yapıdaki çatlak yüzeylerinin yükleme yapılmadan önce, çok küçük ön eğriliklere sahip olduğunun kabulü ve dış basınç kuvveti etkisinde bu eğriliklerin gelişiminin incelenmesine dayanmaktadır [1].

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, piezoelektrik malzemeler ve teknolojideki kullanım alanları ile piezoelektrik sandviç kalın plakların delaminasyon burkulma problemleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, PZT/Metal/PZT dikdörtgen kalın plağın katmanları arasında bant çatlak olması durumunda, delaminasyon burkulma problemleri incelenmiştir. Ele alınan bazı sınırdeğer problemleri çerçevesinde, delaminasyon burkulma problemlerinin üç boyutlu matematiksel modeli, bu modelin sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal çözümü ve elde edilen sayısal sonuçların analizi verilmiştir. Bu bölümde ele alınan delaminasyon burkulma problemleri çerçevesinde, çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile elektriksel alan ile mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin kritik parametrelere etkileri tartışılmıştır.

Üçüncü bölümde, PZT/Metal/PZT dikdörtgen kalın plağın katmanları arasında dikdörtgen kenar çatlak olması durumunda, delaminasyon burkulma problemleri araştırılmıştır. Ele alınan bazı sınırdeğer problemleri çerçevesinde, bu problemlerin üç boyutlu matematiksel modeli ve sonlu elemanlar metodu yardımıyla sayısal çözümü ve elde edilen sayısal sonuçların analizi verilmiştir. Ele alınan duruma ait pek çok geometrik ve malzeme parametreleri ile yine elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin kritik parametrelere etkisi detaylı olarak analiz edilmiştir.

Dördüncü bölümde PZT/Metal/PZT dikdörtgen kalın plağın katmanları arasında dikdörtgen iç çatlak olması durumunda, delaminasyon burkulma problemleri araştırılmıştır. Ele alınan bazı sınırdeğer problemleri çerçevesinde, problemlerin üç boyutlu matematiksel modeli, sonlu elemanlar formülasyonu ve sayısal sonuçları irdelenmiştir. İncelenen sınırdeğer problemleri çerçevesinde çeşitli problem parametreleri ile elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin, kritik delaminasyon burkulma kuvvetine etkileri detaylı olarak tartışılmıştır.

Tezin beşinci bölümünde, Tez çalışmasında elde edilen bilimsel sonuçlar sistematik bir şekilde sunulmuş ve bu sonuçlara göre mühendislik uygulamaları için öneriler formüle edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: PZT sandviç kalın plak, 3B FEM, delaminasyon burkulma, bant-kenar-iç çatlak, kritik kuvvet

ABSTRACT

INVESTIGATION OF A BUCKLING DELAMINATION OF A RECTANGULAR THICK PLATE CONSISTING OF THREE PIEZOELECTRIC+METAL+PIEZOELECTRIC LAYERS BY USING FINITE ELEMENTS METHOD

Fatih AYLIKCI

Department of Mathematical Engineering

Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU

In this thesis, some buckling delamination problems of a sandwich rectangular thick plate with piezoelectric face and metal core layers (PZT/Metal/PZT) having same and parallel interface cracks (band cracks/rectangular edge cracks or rectangular inner cracks) between the face and core layers subjected to the unidirectional compressive forces on two edge-opposite surfaces were theoretically investigated. Mathematical modelling of the considered boundary value problems was made in the framework of the three dimensional linearized exact equations of electro-elasticity theory using piecewise-homogeneous body model and solved numerically by the three-dimensional (3D) finite element modelling. For determination of the critical parameters of the considered PZT rectangular sandwich thick plate was used the “initial imperfection criterion”. This criterion is based on the investigation of the development of the initial infinitesimal imperfections (or defects) on the cracks’ edge surfaces under external pressure forces, which exist before the loading [1].

This thesis consists of 5 chapters. In the first chapter, some information about the piezoelectric materials, their usage in technology and the buckling delamination problems of piezoelectric sandwich thick plates were given.

In the second chapter, some buckling delamination problems of PZT/Metal/PZT rectangular thick plates with interface band cracks between the layers were investigated. In the framework of some boundary value problems, the three dimensional mathematical model of buckling delamination problems, the numerical solution of this model with 3D finite element method and the analysis of obtained numerical results were given. Within the investigated buckling delamination problems in this chapter, the effects of various geometric and material parameters and, also the coupling effects between the electrical and mechanical fields on the critical parameters were discussed.

In the third chapter, buckling delamination problems of PZT/Metal/PZT rectangular thick plates with interface edge cracks between the layers were investigated. In the framework of some boundary value problems, the three dimensional mathematical model of buckling delamination problems, the numerical solution of this mathematical model with 3D finite elements method and the analysis of obtained numerical results were given. The effects of many geometric and material parameters of the considered case as well as the coupling effect of the electrical and mechanical fields on the critical parameters were analyzed in detail.

In the fourth chapter, buckling delamination problems of PZT/Metal/PZT rectangular thick plates with interface embedded cracks between the layers were investigated. Within the framework of some boundary value problems, three-dimensional mathematical model of the considered problems, 3D finite elements formulation and numerical results were examined. In the framework of the considered boundary value problems, the effects of various problem parameters and, also the coupling effects of the electrical and mechanical fields on the critical buckling delamination force were given in detail.

In the fifth chapter of the thesis, the conclusions which follow from the scientific results obtained throughout the thesis were presented systematically and according to these conclusions, the proposing are formulated for engineering applications.

Keywords: PZT sandwich thick plate, 3D FEM, buckling delamination, band-edge-embedded crack, critical force

1.1 Literatür Özeti

Bilim ve teknolojiadaki ilerlemeler ve mühendislik gereksinimler, yapı elemanlarında kullanılan klasik endüstriyel malzemelerin yerini, kompozit malzemeler gibi yeni teknolojik malzemelerin almasına neden olmuştur. Bilindiği üzere kompozit malzemeler, belirli bir amaca yönelik olarak, en az iki farklı malzemenin aralarında kimyasal etki olmaksızın bir araya getirilmesi ile oluşturulan malzemelerdir. Kompozit malzemeyi oluşturan malzemelerin her birine, bileşen adı verilir. Kompozit malzemeyi oluşturan malzemelerin bir arada durması görevini üstlenen bileşene matris; kompozit içerisinde yük taşıma görevini üstlenen bileşene takviye adı verilmektedir. Kompozit malzemeler bileşenlerin malzemesine, geometrik formuna vb. göre sınıflandırılmaktadırlar. Örneğin bileşenlerinin geometrik formuna göre: tanecik takviyeli, lif takviyeli veya levhalı olmak üzere üç gruba ayrılmaktadır ve bu sınıflandırma, kompozit malzemeler için kullanılan en yaygın sınıflandırmadır [2]. Pek çok bilim dalının katkıları ve üretim teknolojilerinin gelişimiyle üretilen kompozit malzemeler, bileşenlerinin tek başına sahip olmadığı, istenilen üstün kimyasal, fiziksel ve mekaniksel özelliklere sahip olup, çeşitli uygulamalarda yaygın kullanıma sahiptirler. Teorik ve deneysel olarak araştırılan, geliştirilen bu malzemelerin öncüleri, ahşap, kerpiç, beton vb. gibi kompozit olarak adlandırılabilen bileşik yapıli malzemelerdir. Dolayısıyla geliştirilen, üretilen pek çok malzemenin öncülerinin veya esin kaynağının tabiat olduğu söylenebilir.

Mühendislik uygulamalarında yapı elemanlarının işlevi süresince, etki eden dış yükler altında mekanik dayanımının, üretildiği malzemenin teorik dayanım limitlerine ulaşmadan daha önce hasara uğradığı görülür. Bu durum hem klasik endüstriyel malzemeler hem de teknolojik malzemeler (kompozit malzemeler) için yaygın olup, uygulamalarda sıkça tecrübe edilmektedir. Dolayısıyla, yapı elemanlarının yük taşıma kapasitesinin artırılması veya malzemenin teorik yük taşıma limitlerine yakınlaştırılması, bu yapı elemanının hasar sebeplerinin araştırılıp ortadan kaldırılması ile mümkün olur. Yapı elemanlarında oluşan hasar sebepleri için genel olarak, yapı elemanı malzemesinin veya yapı elemanının kendisinin oluşturulması esnasında meydana gelen yapısal kusurlar veya sonradan çevresel nedenler (sıcaklık, nem, korozyon vb) ve yükleme şekli (ani, uzun süreli, tekrarlı vb) nedenleriyle oluşabilen kusurlar olarak verilebilir. Kompozit malzemeler için bu kusurların incelenmesi, klasik endüstriyel malzemelere göre daha karmaşık ve geniş kapsamlı bir konudur. Kopmuş lifler, bileşenler arasında kalan boşluklar, matris malzemesindeki çatlaklar, ayrıca delikler, küçük boşluklar ve çeşitli dolgular veya yabancı tanecikler kompozit yapılarda bulunabilecek yapısal kusurlardan bazılarıdır. Bu kusurların bir tanesi veya birkaç tanesi her zaman yapı içerisinde mevcut olabilir ve yapı elemanının statik veya dinamik davranışına etkileri, birçok durumda, büyük önem taşır. Bu yapısal kusurlar yanında, yapı elemanının başlangıçtaki geometrik kusurları yine, dış yükleme yapıldıktan sonra yapı elemanının “kırılması”na öncül etki yaratabilir. Özellikle levhali kompozit malzemelerde küçük dış kuvvet altında yüzeydeki ince levhalarda veya kaplamalarda (ince film problemleri) meydana gelen büyük yerdeğiştirmeler (burkulma), kompozit malzemelerin yapısal bileşenleri ve yapı elemanları için kritik öneme sahiptir.

Kompozit yapı elemanlarında, bileşenlerin birbirinden ayrılması yani delaminasyon problemleri, kompoziti oluşturan bileşenler arasındaki mevcut boşluk-çatlak vb. kusurların veya farklı sebeplerle sonradan oluşabilecek benzeri kusurların, çeşitli dış etkiler nedeniyle büyüyerek yapının kırılmasına neden olduğuna dayandırılmaktadır [3], [4], [5], [6], [7]. Yapıdaki çatlağın büyümesi, dış kuvvetler altında çatlak ucunda oluşan gerilme yığılmasının (SIF), kritik değerini geçmesi ile açıklanmaktadır. Fakat her zaman yapıdaki çatlakta, çatlak ilerlemesi gerçekleşmemektedir. İnce levhaların birbirine yapıştırılması ile oluşturulan çok katlı kompozit malzemelerde levhalar

arasında bulunabilecek boşluklar (çatlaklar) nedeniyle, çatlak yüzeyini oluşturan ince levhanın küçük gerilme altında büyük yerdeğiştirme yaparak, stabilite kaybına uğraması diğer bir deyişle delaminasyon burkulması, söz konusu olabilmektedir [1], [8], [9], [10], [11], [12].

Elastik veya viskoelastik malzemelerden yapılmış çok katlı kompozit şerit-plak veya dikdörtgen kalın plaklara ait delaminasyon burkulma problemleri Akbarov ve öğrencileri tarafından kesin teoriler çerçevesinde sistemli olarak araştırılmıştır [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22]. Bu çalışmaların özeti [23], [24] çalışmalarında ve detayları ise [25] monografında verilmiştir.

Yapı elemanlarındaki kırılmanın, bu yapı elemanının kendisi ve/veya malzemesinin bileşenlerinin başlangıçtaki geometrik kusurlarının verilen yükleme altında, yapının kırılmasına (stabilite kaybına) sebep olduğu görüşleri deneysel bazı araştırmalara dayandırılmaktadır. Bu bakış açısına göre, kompozit içerisindeki bileşenlerin başlangıçtaki küçük geometrik kusurlarının, yükleme altında büyüyerek içyapıda gerilme düzensizliklerine [26], [27] ve dolayısıyla, bu elemanlarda stabilite kaybına sebep olması neticesinde kompozit malzemenin kırılması gerçekleşir [28], [29]. Lifli kompozit malzemelerin tek yönlü basınç altında kırılması problemlerinin üç boyutlu kesin teori çerçevesinde elastik ve viskoelastik kalın plaklar için incelenmesi ve teorik kırılma kriterinin belirlenmesi [30] çalışmasında verilmiştir. Bu alanda diğer bazı araştırmalar [31], [32], [33], [34], [35] olarak verilebilir.

Kompozit yapı elemanlarına yapıştırılan çeşitli ince levhaların dış yükler veya sıcaklık değişimi altında temel yapıdan yerel olarak ayrılması şeklinde (yüzey kaplamalarında görülen kabarcıklaşma vb.) karşılaşılan olaylar (coating), teorik ve deneysel olarak pek çok araştırmacı tarafından araştırılmıştır [9], [22], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47]. Bu çalışmalarda, yapı elemanının yüzeyine çeşitli işlemler (örneğin ısı işlemi) ile yapıştırılan ince film tabakaların, ortam şartlarının değişmesi ile bu ince tabakada oluşan ön gerilmeler nedeniyle yerel ayrılmaların (kabarcıklaşma) yani çatlakların görüldüğü ve bu kabarcıklaşmanın gelişimi, enerji yardımıyla araştırılmaktadır. Belirtelim ki, bu araştırmalar tabakalar arasındaki çatlakların boyunun

ince film tabaka kalınlığından büyük ancak, yapının boyutlarına göre küçük olması kabulü altında yapılmaktadır.

Delaminasyon burkulma problemlerinin araştırılması gerek malzeme ve gerek yapı elemanının geometrisi açısından çeşitli zorluklar içerdığinden, bu problemlerin incelenmesinde çoğunlukla sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal çözüm yöntemleri tercih edilmekle birlikte, sınır elemanları yönteminin kullanıldığı çalışmaları da mevcuttur [45], [48], [49], [50]. Elastik yapıların burkulma problemleri ve çözüm tekniklerine ait geniş özet [51] çalışmasında verilmiştir.

Yapı elemanlarından teknolojik beklentiler arttıkça veya ortaya çıkan olumsuzlukların giderilmesi istekleri, yapı elemanları için malzeme seçiminde çeşitliliğe yol açmaktadır. Örneğin, kompozit malzemenin delaminasyon vb. problemlerine çözüm olarak fonksiyonel derecelendirilmiş (FGM) malzemeler geliştirilmiştir.

Curie kardeşler 1880'li yılların başında, kristalli bir malzemedeki sıcaklık değişiminin, elektrik potansiyel oluşturmaları üzerine deneyler yapmışlardır. Aslında, bu etki 18. yüzyılın ortalarından itibaren Carl Linnaeus ve Franz Aepinus'un çalışmaları sayesinde bilinmekte olup bilim insanları, mekaniksel etki ile elektriksel potansiyel arasında bir ilişkinin olabileceği ve bu ilişkinin belirlenmesi üzerine çalışmaktadırlar. Curie kardeşlerin deneysel çalışmaları, doğadaki bazı malzemelere (çeşitli kristallerde, seramiklerde ve hatta kemiklerde) uygulanan mekaniksel etki neticesinde, oluşan elektrik potansiyelin tespiti ile mekaniksel etkinin elektriksel potansiyel oluşturduğu ispatlanmıştır. Bu etki, en güçlü olarak kuvars ve Rochelle tuzunda elde edilir. Curie kardeşler, piezoelektrik kuvars elektrometreyi icat ederek bu keşiflerini kullanıma sunmuşlardır. Daha sonra, matematikçi Gabriel Lippman, Curie kardeşlerin keşfinin tam tersi yani, "kristal malzemenin elektrik alanına yerleştirildiğinde, bu malzemenin mekanik deformasyona uğraması"nın da doğru olması gerektiğini teorik olarak göstermiştir. Curie kardeşler, yaptıkları deneysel çalışmalar ile Lippman'ın keşfini deneysel olarak doğrulayarak, bazı malzemelerde elektriksel alan ile mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin, çift yönlü olarak gerçeklendiğini ispatlamışlardır. Bu etkinin olduğu elastik malzemeler genel olarak elektro-elastik malzemeler olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla, bu malzemelere mekaniksel kuvvet etki ettiğinde,

yapısında kutuplanma (elektrik polarizasyon) tersine, elektrik alana yerleştirildiğinde mekanik deformasyon elde edilmektedir. Elektriksel ve mekanik alanların karşılıklı etkisi genel olarak karmaşık olup eğer, belirtilen alanlar arasındaki karşılıklı etki, özel olarak lineer seçilirse, bu malzemelere “piezoelektrik” malzeme adı verilmektedir. Doğada da bulunabilen piezoelektrik malzemeler, laboratuvar ortamında da üretilmektedir. Günümüzde piezoelektrik malzeme olarak çoğunlukla kurşun-zirkonyum-titanyum (PZT) seramik kullanılmaktadır. Bunun dışında kullanılan başlıca piezoelektrik malzemeler kuvars, turmalin, baryum titanat ($BaTiO_3$), çinko oksit (ZnO) ve PVDF (poli-vinidilin-klorür) dür.

Piezoelektrik malzemeler üzerine, sonraki en önemli gelişmelerden biri, 1910’da Woldemar Voigt tarafından, piezoelektrik özelliklere sahip 20 doğal kristal sınıfının ve kristal katılarda 18 olası makroskopik piezoelektrik malzeme katsayısının tanımlanmasıdır. Daha sonraları, Paul Langevin tarafından 1917’de denizaltıların yerinin belirleyebilecek ve su altında ultrasonik dalgalar üretebilecek, piezoelektrik kuvars kristalleri ile çelik levhalardan oluşan sandviç ultrasonik bir transdüser cihazı geliştirilmiştir. Bu cihaz, bu malzemelerin kullanıldığı ilk mühendislik uygulaması olarak verilebilir. Günümüzde birçok otomobil, sürücülere yardımcı olmak için, arabanın arka tamponu ile yoldaki herhangi bir engel arasındaki mesafeyi ölçmeye yarayan ultrasonik transdüserlere sahiptir.

Günümüzde piezoelektrik malzemelerin özelliklerinin belirlenmesi üzerine teorik ve deneysel pek çok araştırma yapılmaktadır. Yapılan araştırmalar neticesinde, bu malzemelerin kullanımı artmış ve pek çok aygıtta (elektro-mekaniksel aygıt) kullanımı yaygınlaşmıştır. Örneğin, çok küçük/hassas etkilerin (basınç, akım, sıcaklık vb. değişimlerinin) tespit edilmesinde piezoelektrik malzemelerden yapılmış sensörlerden, çeşitli sonar cihazlarından, tetikleyicilerden (transdüser) vb. yararlanılmaktadır. Ayrıca, enerji ile çalışan aygıtlarda hareketli parçalarda kullanılan piezoelektrik malzemeler yardımıyla, elektrik üretilmesi ve aygıtların elektrik ihtiyacının karşılanması (enerji hasatı), bu malzemelerin diğer önemli kullanım alanıdır. Hatta, bu yöndeki araştırmalar çeşitli tıbbi, endüstriyel ve askeri uygulamalarda kullanılan ve ilgili sistemlerin enerji üretiminde kullanılmak üzere, kendi enerjisini üreten küçük ve verimli cihazların yapılması ve yaygınlaştırılmasına olan ilgiyi ve ihtiyacı artırmıştır [52], [53].

Yukarıda verilen elektro-mekanik aygıtlarda, çoğunlukla, piezoelektrik malzemeden yapılmış levhalar, temel unsura (yapı elemanına) yapıştırılarak bir arada kullanılmaktadır (levhalı ve/veya sandviç kompozit yapı elemanları). Dolayısıyla temel unsur ile piezoelektrik malzemeden yapılmış levhaların bir araya getirilmesinde, özellikle de ara yüzeylerde çeşitli nedenler ve/veya teknolojik uyumsuzluklar nedeni ile boşluklar-çatlaklar vb. oluşabilmektedir. Bu ara yüzeyde oluşan çatlakların yapı elemanının mekaniksel davranışına önemli ölçüde etki gösterdiği, literatürde mevcut pek çok araştırmadan bilinmektedir. Ayrıca, elastik ve/veya piezoelektrik levhaların bir araya getirilmesi ile oluşturulan çok katlı kompozit malzemelerin, mühendislik uygulamalarında karşılaşılan ve üzerinde en çok çalışılan problemlerinden biri; bu malzemelerden yapılmış yapı elemanlarının levhalar doğrultusundaki dış basınç kuvveti etkisinde, levhaların birbirinden ayrılması yani, delaminasyon problemleridir. Delaminasyon olayının mekanizması, yapıdaki mikro çatlakların birleşerek makro çatlak oluşturması ve sonrasında makro çatlakların büyüyerek levhaların birbirinden ayrılmasına (delaminasyonu) sebep olması olarak açıklanmaktadır.

Son dönemlerde mekatronik, mikro sistem teknolojisi veya akıllı yapılar gibi modern teknik alanlarda, elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkilerinden yararlanan piezoelektrik malzemelerin kullanımı yaygınlaşmıştır. Mühendislik uygulamalarında piezoelektrik elemanlar (levha vb.) diğer yapı elemanları ile birleştirilerek oluşturulan kompozit yapılar, dış yükler altında ve/veya imalat sürecindeki çeşitli teknolojik uyumsuzluk gibi nedenlerle, kompozit malzemeler için karşılaşılan problemler ve daha fazlası PZT yapılar için incelemeye konu olmaktadır. Kompozit malzemelerin mekaniği için mekaniksel dış yüklerin etkisinin araştırılması yeterli iken, PZT malzemelerin mekaniğinin öğrenilmesi için sadece mekaniksel yükler değil aynı zamanda elektriksel yüklerin de etkisinin öğrenilmesi gerekmektedir.

Yapıda mevcut olduğu kabul edilen çatlak benzeri kusurlara dayandırılarak incelenen lineer elastik kırılma mekaniği problemleri, piezoelektrik yapı elemanları için pek çok araştırmacı tarafından geliştirilerek uygulanmıştır [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63]. 2010 yılına kadar piezoelektrik yapı elemanlarının kırılmasına ait yapılan çalışmaların geniş özeti [64] de verilmiştir.

Piezoelektrik malzemeden yapılmış plak, kiriş tipi yapı elemanlarının delaminasyon burkulma problemleri ile ilgili az sayıda inceleme yapılmıştır. Çatlak içeren çeşitli şerit-plak veya ince plaklar için çeşitli mekaniksel ve/veya elektriksel yükler etkisinde oluşan delaminasyon burkulma problemlerinin ele alındığı bazı çalışmalar [36], [65], [66], [67] olarak verilebilir. Bu alanda elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde matematiksel olarak modellenen delaminasyon burkulma problemleri PZT şerit-plaklar için [68] te ve eksenel simetrik kalın PZT plaklar için [69] da incelenmiştir.

Ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin çözümünde genel olarak sonlu elemanlar ve sınır elemanları kullanılmıştır [48], [70], [71]. Piezoelektrik yapı elemanları problemlerinin çözümünde sayısal yöntemlerin geliştirilmesine ait detaylı bir çalışma [72] de verilmiştir.

Yukarıda özetlenen literatür araştırmasında verildiği üzere, piezoelektrik malzemeden yapılmış çok katlı/sandviç PZT kompozit dikdörtgen kalın plaklarda meydana gelen delaminasyon burkulma problemlerinin, üç boyutlu kesin teoriler çerçevesinde incelenmesi ilk defa bu tez kapsamında ele alınmıştır. Tezde incelenen dikdörtgen kalın plağın, dış tabakalarının piezoelektrik malzemeden, orta tabakasının metal (elastik) malzemeden yapıldığı ve tabakalar arasında farklı düzlemsel çatlakların (bant çatlak/dikdörtgen kenar çatlak/dikdörtgen iç çatlak) olduğu kabul edilmiş ve çatlak düzlemlerine paralel etki eden eksenel statik dış basınç kuvveti altında, yapısında meydana gelen yerel ve/veya genel, delaminasyon burkulma ve/veya burkulma problemleri ele alınmıştır. Elde edilen bazı bilimsel sonuçlar [73] çalışmasında verilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, PZT/Metal/PZT üç katmandan oluşan dikdörtgen kalın plağın, ele alınan sınır koşulları ve yükleme durumu altında delaminasyon burkulma problemlerinin matematiksel olarak modellenmesi, ortaya çıkan sınırdeğer problemlerinin üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak incelenmesidir. Bu amaçla dikdörtgen kalın plağın katmanları arasında çatlak (bant çatlak/dikdörtgen kenar çatlak/dikdörtgen iç çatlak) bulunduğu ve başlangıçta çatlak yüzeylerinin çok küçük eğintilere sahip olduğu kabul edilmiştir. Bu plağa çatlak doğrultusunda uygulanan tek

eksenli statik dış basınç kuvveti etkisinde, çatlak yüzeylerindeki eğintilerin büyüyerek sonsuza gitmesi kriterinden, ele alınan kalın plağa ait kritik delaminasyon burkulma kuvveti elde edilmiştir. Sayısal incelemelerde bu kritik delaminasyon-burkulma kuvvetine, çeşitli malzeme ve geometrik parametreler ile elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisi araştırılmıştır.

Tez kapsamında dış katmanları piezoelektrik malzemeden, orta katmanı elastik (metal) malzemeden (PZT/Metal/PZT) yapılmış üç katmanlı sandviç dikdörtgen kalın plağın, katmanları arasında bant çatlak/dikdörtgen kenar çatlak/dikdörtgen iç çatlak olması durumlarının her biri için bu kalın plağın karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik basınç kuvveti etkisinde, çatlaklar ile dış yüzey arasında kalan parçanın delaminasyon burkulması, elektro elastisite teorisinin üç boyutlu lineer olmayan kesin alan denklemleri ve bağıntıları ile parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde modellenmiş ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak incelenmiştir. Öncelikle, lineer olmayan alan denklemlerinin çözümü, bu denklemlerdeki her bir büyüklük, seçilen küçük bir parametreye göre seri formda yazılarak, gerekli işlemler neticesinde bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş, sınırdeğer problemleri serisinin (seri-sınırdeğer problemlerinin) çözümüne dönüştürülmüştür. Bu seri-sınırdeğer problemlerinin özelliği, her sınırdeğer problemi kendisinden önceki her bir sınırdeğer problemine ait büyüklükleri içermesidir. Dolayısıyla herhangi bir sınırdeğer probleminin çözülebilmesi için kendisinden önceki, tüm sınırdeğer problemlerinin çözülmesi gerekmektedir. Belirtelim ki, tez kapsamında ele alınan problemlerin çözülmesinde, bu seri-sınırdeğer problemlerinden ilk iki sınırdeğer probleminin yani, sırasıyla sıfırıncı ve birinci sınırdeğer problemlerinin (yaklaşımların) ardışık çözümü gerekli ve yeterlidir.

Bu sınırdeğer problemlerinin her biri, 3 tanesi kısmi türevli mekaniksel, diğer 3 tanesi kısmi türevli elektriksel alan denklemleri, 18 tane bünye bağıntıları ile kinematik bağıntılardan oluşan, toplam 24 adet sistem denklemin verilen sınır koşulları çerçevesinde birlikte çözülmesini gerektirmektedir. Sıfırıncı yaklaşımın çözümü, dikdörtgen plağın yapısında çatlak olmadığı kabulü için analitik olarak elde edilmiştir. Ancak birinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü, cisimde biriken toplam elektro-mekanik potansiyel enerjiyi temsil eden fonksiyonel (bu fonksiyonelin Euler

denklemleri, birinci yaklaşımın alan denklemlerini yani üç boyutlu lineerize edilmiş elektro-elastisite teorisinin kesin denklemlerini vermektedir) ve Ritz tekniği yardımıyla, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi kullanılarak çözülmüştür. Çözüm yöntemi gereği, dikdörtgen plağı oluşturan her katman kendi içinde, 8 nodlu dikdörtgen formda sonlu elemanlara ayrılmıştır. Yerdeğiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından, nodlarda bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yerdeğiştirmeler ile elektrik potansiyel seçilmiştir. Bilinen işlemler dahilinde ele alınan sınırdeğer problemlerinin çözümü, lineer cebirsel denklemlerin çözümüne indirgenir. Hassas çözüm elde etme gayreti dahilinde cebirsel denklem takımının boyutu (NDOF) ortalama 1004925 olarak kullanılmıştır. Yukarıda verilen problemlerin modellemesinden çözümüne kadar olan tüm işlemler, Tez kapsamında ele alınan PZT/Metal/PZT dikdörtgen sandviç plağın katmanları arasında a) Çatlak içermeyen plak (ÇİP), b) bant çatlak, c) dikdörtgen kenar çatlak, d) dikdörtgen iç çatlak olması durumlarının her biri için ayrı ayrı ve birbirinden bağımsız olarak yapılmış ve sonuçlandırılmıştır. Sayısal çözümün gerektirdiği bütün algoritma ve bilgisayar programları, her bir problem için birbirinden bağımsız ve bütün olarak MATLAB yardımıyla yapılmıştır.

1.3 Orijinal Katkı

Piezoelektrik malzemelerin kullanımına bağlı olarak, bu malzemelerin her bilim dalı açısından özelliklerinin öğrenilmesine olan ilgi gün geçtikçe artmaktadır. Özellikle bu malzemelerden “enerji hasatı (energy harvesting)” yani enerji sağlayıcı malzemeler olarak yararlanılabilmesi, bu malzemeler üzerindeki ilginin çok daha artacağına göstergesidir. Bu alanda hali hazırda öncü araştırmalar çoğunlukla deneysel araştırmalardır. Ancak deneysel araştırmaların zorluğu ve kısıtlılığı göz önüne alındığında, daha geniş ve çok yönlü bilgi birikiminin ancak teorik araştırmalar ile sağlanabileceği açıktır. Bu anlamda ele alınan tez çalışması, piezoelektrik bileşenleri bulunan üç boyutlu yapı elemanlarının, kesin teoriler çerçevesinde mekaniğinin öğrenilmesi açısından önemli katkılar sağlayacaktır. Bunun yanında, ele alınan delaminasyon-burkulma problemlerinin kesin teoriler çerçevesinde matematiksel modelinin oluşturulması, üç boyutlu sonlu eleman formülasyonu ve sayısal çözümün

gerektirdiği algoritma ve programların tarafımızdan yapılması açısından önemli bir bilgi birikimi oluşturacaktır.

Literatür özetinde de verildiği üzere, piezoelektrik malzemedен yapılmış çok katlı/sandviç PZT kompozit dikdörtgen kalın plaklarda meydana gelen delaminasyon burkulma problemlerinin, üç boyutlu kesin teoriler çerçevesinde incelenmesi ilk defa bu tez kapsamında ele alınmıştır. Yani, tez kapsamında ele alınan delaminasyon burkulma problemleri, piezoelektrik dikdörtgen kalın plakların kesin teoriler çerçevesinde incelenmesi açısından ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır. Bu yüzden ele alınan problemlerin başarıyla çözülmesinin, şimdiye kadar literatürde mevcut iki boyutlu ve yaklaşık teoriler çerçevesinde çözülmüş problemlere ait sayısal sonuçların doğruluğunun (veya doğruluk sınırlarının) belirlenmesinde kullanılabilecek bir gösterge teşkil edeceği ve yapılacak sonraki araştırmalar için bir temel oluşturacağı öngörülmektedir.

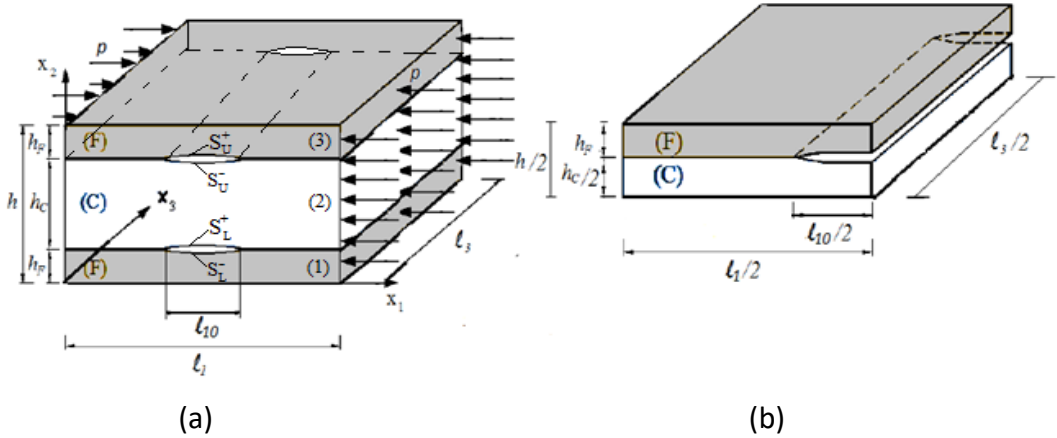
BANT ÇATLAK İÇEREN PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASI

Bu bölümde, Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 eksenleri doğrultusundaki kenar uzunlukları sırasıyla ℓ_1 , h ve ℓ_3 olan dikdörtgen kalın plağın Ox_2 eksenine dik yerleştirilmiş üç adet levhadan (tabakadan) oluştuğu; bu tabakalardan, dış tabakaların piezoelektrik (PZT), orta tabakanın ise metal malzemeden yapıldığı ve tabakalar arasında birbirine paralel iki adet, Ox_3 eksenine doğrultusunda, bant çatlak içerdiği kabul edilen plak ele alınmıştır. Bu dikdörtgen kalın plağın bazı sınır ve temas koşulları çerçevesinde delaminasyon burkulma problemi incelenecektir. İncelemelerde, bant çatlakların yüzeylerinin başlangıçta (dış yükleme yapılmadan önce) çok küçük ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Ele alınan delaminasyon burkulma problemlerine ait kritik parametreler, çatlaklar doğrultusunda ($x_1 = 0$; ℓ_1 düzlemlerinden) etki ettiği kabul edilen düzgün yayılı normal statik dış basınç kuvveti etkisinde, çatlak yüzeylerindeki bu küçük başlangıç ön eğintilerin gelişiminin incelenmesi ile belirlenecektir [1].

2.1 Ele Alınan Problemin Formülasyonu

Bu kısımda, Ox_2 eksenine dik yerleştirilmiş üç adet tabakadan oluşan ve tabakalar arasında band çatlak olduğu kabul edilen PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın delaminasyon burkulma problemine ait matematiksel model, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde üç boyutlu elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri yardımıyla yapılmıştır.

Ele alınan PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın yükleme durumu ve geometrik boyutları Şekil 2.1’de gösterilmektedir. Bu şekilde dış tabakalar F (Face) ve çekirdek tabaka C (Core) sembolleri ile işaretlenmiştir. Plağa bağlı $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat takımı, plağın yüklemenden önceki durumunu belirten Lagrange koordinatları ile ilişkilendirilmektedir. Ele alınan bu sandviç dikdörtgen kalın plağın Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 doğrultusundaki uzunlukları sırasıyla ℓ_1 , h ve ℓ_3 , dış katman kalınlıkları h_F ve orta katman kalınlığı h_C (burada $h = 2h_F + h_C$) olarak alınmıştır. ℓ_3 uzunluğu ile ℓ_1 uzunluğu arasında $\ell_3 = \gamma \ell_1$ ($\gamma \in R$) biçiminde bir ilişki vardır. Ayrıca dış ve orta katmanlar arasında ℓ_{10} genişliğinde paralel özdeş iki bant çatlak olduğu kabul edilmektedir (Şekil 2.1a). Geometrisi, yükleme durumu ve ileride verilecek olan sınır koşullarının $x_1 = \ell_1/2$, $x_3 = \ell_3/2$ ve $x_2 = h/2$ düzlemlerine göre simetrik olması özelliğinden, sayısal incelemeler çözüm bölgesinin 1/8’lik kısmında yapılacaktır (Şekil 2.1b).



Şekil 2.1 Bant çatlaklar içeren sandviç kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi

a)Çözüm bölgesinin tamamı b) Çözüm bölgesinin 1/8’lik kısmı

Ele alınan sınır-değer probleminin çözüm bölgesi,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 - S_L^\mp - S_U^\mp \quad (2.1)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\
\Omega_2 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\
\Omega_3 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq 2h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\
S_L^\mp &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\
S_U^\mp &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

dir. Burada, Ω_1 , Ω_2 ve Ω_3 'ler sırasıyla alt, orta ve üst katmanları, $S_L^\mp$ ($S_U^\mp$) alt ve orta (orta ve üst) tabakalar arasında yer alan çatlakların alt ve üst sınırlarını temsil etmektedir (Şekil 2.1).

Belirtilen delaminasyon burkulma probleminin incelenebilmesi için “küçük başlangıç eğinti kriteri” [1] kullanılacaktır. Bu nedenle çatlak yüzeylerinin, yükleme yapılmadan önce, çok küçük ön eğrilığe sahip olduğu ve bu eğriliklerin $x_2 = h_F$ ($x_2 = h_F + h_C$) ve $x_1 = \ell_1/2$ düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Buna göre çatlak yüzeylerinin denklemleri

$$x_2^\mp = h_F + \varepsilon f^\mp(x_1, x_3) \text{ ve } x_2^\mp = h_F + h_C + \varepsilon f^\mp(x_1, x_3) \tag{2.3}$$

olarak seçilir. Burada x_1 ve x_3 için

$$(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, \quad 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \tag{2.4}$$

dir. (2.3)'de ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen ön eğrilğin (eğintinin) derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametreyi; $f(x_1, x_3)$, bu ön eğintinin formunu gösteren fonksiyonu; üst indis “+” (“-”), ele alınan çatlakın üst (alt) yüzeyine ait büyüklükleri; ℓ_{10} , çatlakın Ox_1 yönündeki uzunluğunu; h_F ve h_C , sırasıyla dış tabakaların ve orta tabakanın kalınlıklarını göstermektedir. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned}
f^+(x_1, x_3) &= -f^-(x_1, x_3), \\
f^\mp((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)|_{0 \leq x_3 \leq \ell_3} &= f^\mp((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)|_{0 \leq x_3 \leq \ell_3} = 0, \\
\frac{df^\mp((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_3} &= \frac{df^\mp((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_3} = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

eşitliklerini sağladığı kabul edilmektedir.

(2.3) denklemleri çatlak yüzeylerinin denklemleridir. Bu yüzeyin parametrik denklemi

$x_1 = s_1$, $x_2 = F(s_1, s_3) = K + \varepsilon f^\mp(s_1, s_3)$, $x_3 = s_3$ ($K = h_F; h_F + h_C$) için bu yüzey üzerinde bir noktanın konumu $(s_1, F(s_1, s_3), s_3)$ şeklinde verilebilir. Bu noktanın yer vektörü yardımıyla yüzey normalinin denklemi

$$\vec{r} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}, \vec{n} = \frac{\partial \vec{r} / \partial s_1 \times \partial \vec{r} / \partial s_3}{\left| \partial \vec{r} / \partial s_1 \times \partial \vec{r} / \partial s_3 \right|} \quad (2.6)$$

den belirlenir. Buna göre $\vec{n}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} n_1^\mp &= \frac{\mp \varepsilon \frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}, \\ n_2^\mp &= \frac{\mp 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}, \\ n_3^\mp &= \frac{\mp \varepsilon \frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir [25]. (2.7)'de

$$\varepsilon^2 \left| \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^\mp(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2 \right| \ll 1 \quad (2.8)$$

olduğu kabul edilirse, buna dayanarak, (2.7) ile verilen ifadeler ε 'a bağlı kuvvet serisi olarak ifade edilebilir;

$$\begin{aligned} n_1^\mp &= \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r+1} n_{1r}^\mp(x_1, x_3), \quad n_2^\mp = \mp 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r} n_{2r}^\mp(x_1, x_3), \\ n_3^\mp &= \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r+1} n_{3r}^\mp(x_1, x_3). \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.1.1 Alan denklemleri

Ele alınan PZT sandviç dikdörtgen kalın plak için matematiksel modelleme, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde üç boyutlu elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde yapılacaktır. Ancak orta katman metal (elastik) seçildiği için bu tabakaya ait alan denklemleri üç boyutlu elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde yapılacaktır. Diğer bir deyişle orta tabaka için, PZT levhaların matematiksel modellemesinde kullanılan alan denklemleri ve bağıntılarında piezoelektrik ve elektriksel alan ile ilgili büyüklükler, denklem ve ifadeler ihmal edilerek kullanılacaktır. Dolayısıyla her üç tabakaya ait alan denklemleri, üç boyutlu elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde verilecektir. İlgili denklem ve bağıntılarda yazım kolaylığı açısından, kalın plağın alt, orta ve üst tabakaları sırasıyla r_1 , r_2 ve r_3 ile temsil edimiştir (Şekil 2.1 de $r_1 = 1; r_2 = 2$ ve $r_3 = 3$ dür) . (2.1) ve (2.2) de verilen çözüm bölgesinde her r_n ($n = 1, 2, 3$) için sağlanan alan denklemleri [74],

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ji}^{(r_n)}}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial D_j^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \\ K_{ji}^{(r_n)} &= T_{jk}^{(r_n)} \left(\delta_i^k + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) + M_{ji}^{(r_n)}, \quad T_{ij}^{(r_n)} = c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, \\ D_i^{(r_n)} &= e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, \quad s_{kl}^{(r_n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right), \\ M_{ji}^{(r_n)} &= \varepsilon_0 \left(E_i^{(r_n)} E_j^{(r_n)} - \frac{1}{2} E_k^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \delta_i^j \right), \quad E_k^{(r_n)} = -\frac{\partial \phi^{(r_n)}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dir. (2.10)'da $i; j; k; l = 1, 2, 3$ için T_{jk} , gerilme tansörü bileşenini; M_{ji} , Maxwell gerilme tansörü bileşenini; u_i , mekanik yerdeğiştirme vektörü bileşenini; D_i , elektriksel yerdeğiştirme vektörü bileşenini; s_{kl} , Green şekildeğiştirme tansörü bileşenini; e_{ikl} , piezoelektrik sabitini; c_{ijkl} , elastik sabitini; ε_{ik} , dielektrik sabitini; E_{kl} , elektrik alan bileşenini ve ϕ , elektriksel potansiyeli temsil etmektedir. Ayrıca ε_0 boşluğun elektriksel geçirgenliğini ve δ_{ij} Kronecker sembolünü göstermektedir.

(2.10)'da verilen dördüncü ve beşinci denklemler matris formunda

$$\begin{bmatrix} T_1^{(r_n)} \\ T_2^{(r_n)} \\ T_3^{(r_n)} \\ T_4^{(r_n)} \\ T_5^{(r_n)} \\ T_6^{(r_n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(r_n)} & c_{12}^{(r_n)} & c_{13}^{(r_n)} & c_{14}^{(r_n)} & c_{15}^{(r_n)} & c_{16}^{(r_n)} \\ c_{21}^{(r_n)} & c_{22}^{(r_n)} & c_{23}^{(r_n)} & c_{24}^{(r_n)} & c_{25}^{(r_n)} & c_{26}^{(r_n)} \\ c_{31}^{(r_n)} & c_{32}^{(r_n)} & c_{33}^{(r_n)} & c_{34}^{(r_n)} & c_{35}^{(r_n)} & c_{36}^{(r_n)} \\ c_{41}^{(r_n)} & c_{42}^{(r_n)} & c_{43}^{(r_n)} & c_{44}^{(r_n)} & c_{45}^{(r_n)} & c_{46}^{(r_n)} \\ c_{51}^{(r_n)} & c_{52}^{(r_n)} & c_{53}^{(r_n)} & c_{54}^{(r_n)} & c_{55}^{(r_n)} & c_{56}^{(r_n)} \\ c_{61}^{(r_n)} & c_{62}^{(r_n)} & c_{63}^{(r_n)} & c_{64}^{(r_n)} & c_{65}^{(r_n)} & c_{66}^{(r_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(r_n)} \\ s_2^{(r_n)} \\ s_3^{(r_n)} \\ s_4^{(r_n)} \\ s_5^{(r_n)} \\ s_6^{(r_n)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11}^{(r_n)} & e_{12}^{(r_n)} & e_{13}^{(r_n)} \\ e_{21}^{(r_n)} & e_{22}^{(r_n)} & e_{23}^{(r_n)} \\ e_{31}^{(r_n)} & e_{32}^{(r_n)} & e_{33}^{(r_n)} \\ e_{41}^{(r_n)} & e_{42}^{(r_n)} & e_{43}^{(r_n)} \\ e_{51}^{(r_n)} & e_{52}^{(r_n)} & e_{53}^{(r_n)} \\ e_{61}^{(r_n)} & e_{62}^{(r_n)} & e_{63}^{(r_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{(r_n)} \\ E_2^{(r_n)} \\ E_3^{(r_n)} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} D_1^{(r_n)} \\ D_2^{(r_n)} \\ D_3^{(r_n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11}^{(r_n)} & e_{12}^{(r_n)} & e_{13}^{(r_n)} & e_{14}^{(r_n)} & e_{15}^{(r_n)} & e_{61}^{(r_n)} \\ e_{21}^{(r_n)} & e_{22}^{(r_n)} & e_{23}^{(r_n)} & e_{24}^{(r_n)} & e_{25}^{(r_n)} & e_{26}^{(r_n)} \\ e_{31}^{(r_n)} & e_{32}^{(r_n)} & e_{33}^{(r_n)} & e_{34}^{(r_n)} & e_{35}^{(r_n)} & e_{36}^{(r_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(r_n)} \\ s_2^{(r_n)} \\ s_3^{(r_n)} \\ s_4^{(r_n)} \\ s_5^{(r_n)} \\ s_6^{(r_n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(r_n)} & \varepsilon_{12}^{(r_n)} & \varepsilon_{13}^{(r_n)} \\ \varepsilon_{21}^{(r_n)} & \varepsilon_{22}^{(r_n)} & \varepsilon_{23}^{(r_n)} \\ \varepsilon_{31}^{(r_n)} & \varepsilon_{32}^{(r_n)} & \varepsilon_{33}^{(r_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{(r_n)} \\ E_2^{(r_n)} \\ E_3^{(r_n)} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

olarak verilebilir. (2.10) numaralı denklemlerde kullanılan indis notasyonu, (2.12) matris formundaki eşitliklerde

$$c_{ijkl} \rightarrow c_{pq}, e_{ikl} \rightarrow e_{iq} \quad (2.13)$$

ve $i; j; k; l = 1, 2, 3$ için her ij ve kl ikilisi için

$$11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23; 32 \rightarrow 4, 13; 31 \rightarrow 5, 12; 21 \rightarrow 6 \quad (2.14)$$

kurallarına göre sadeleştirilmiştir.

2.1.2 Mekaniksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları

Ele alınan dikdörtgen plağın kuvvetlere ve mekaniksel yerdeğiştirmelere göre sınır ve temas koşulları bu kısımda verilecektir. Buna göre bant çatlak içeren dikdörtgen PZT kalın plağın sadece $x_1 = 0; \ell_1$ yüzeylerinden statik normal dış basınç kuvvetine (p) maruz olduğu, diğeri yüzeylerinden veya çatlakların yüzeylerinden plağa başka hiçbir mekaniksel dış kuvvetin etki etmediğı kabul edilmektedir. İncelenen plağın mesnet tipi olarak tüm yanal yüzeylerinden basit mesnet ile tutturulduğu yani, düşey (Ox_2 yönünde) yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlendiğı kabul edilmiştir. Mekaniksel büyüklüklere göre tabakalar arasında ideal temas koşullarının sağlandığı yani, tabakaların ara yüzeyinde gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin eşitliğı kabul edilmektedir. Buna göre,

sınır koşulları

$$\begin{aligned} u_2^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=0} = K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=\ell_1} = p, \\ K_{13}^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= K_{31}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = K_{33}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h} = K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=0} = 0, \\ K_{ji}^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= K_{ji}^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, K_{ji}^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = K_{ji}^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

tabakalar arasındaki ideal temas koşulları $0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2 \cup (\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1$
ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ için

$$\begin{aligned} K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C} \end{aligned} \quad (2.16)$$

olarak verilebilir.

2.1.3 Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları

Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları dikdörtgen plağın dış tabakaları için yani piezoelektrik levhaların sınırlarında geçerli olacaktır. Plağın orta tabakası elastik malzemeden yapıldığı için orta tabakada geçerli değildir. Bununla beraber matematik model, genel olarak her üç tabakanın piezoelektrik malzemeden yapılmış olması durumu için verilmiştir. Ayrıca ilave olarak, ele alınan PZT dikdörtgen kalın plak için orta tabakaya ait işlemlerde, piezoelektrik ve elektriksel alan büyüklükleri ihmal edilerek sayısal hesaplamalar yapılacaktır.

Elektriksel büyüklüklere göre iki farklı sınır koşulu için incelemeler yapılmıştır. Ele alınan sınır koşulları ile temas koşullarına ait matematiksel modelleme aşağıda verilmiştir.

A-Açık-devre sınır koşulu ve temas koşulları

Ele alınan PZT dikdörtgen plağın (PZT levhaların) tüm yanal yüzeylerinde elektrik potansiyelin sıfır olduğu yani, levhanın yanal yüzeylerinin yalıtkan olduğu kabul edilmektedir. Ancak PZT levhaların üst ve alt yüzeylerinden Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yerdeğiştirmenin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Yani, belirtilen yüzeylerin yalıtkan olmadığı (elektrik akımının mümkün olabildiği) durum “açık devre” koşulu olarak adlandırılmaktadır. Tabakalar arası temas koşulu için bu ara yüzeylerde elektriksel potansiyelin ve Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yerdeğiştirmelerin eşitliği

kabul edilmektedir. İlave olarak çatlakların içinin boş yani vakumlu olduğu kabul edilmiştir. Bu kabullere ait sınır ve temas koşullarının matematiksel modeli:

Sınır koşulları

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, D_2^{(r_1)}|_{x_2=0} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h} = 0, \\ D_j^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= D_j^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, D_j^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = D_j^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Temas koşulları $0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2 \cup (\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ için

$$\begin{aligned} \phi^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C} \end{aligned} \quad (2.18)$$

olarak verilebilir.

B-kapalı-devre sınır koşulu ve temas koşulları

Ele alınan kapalı-devre sınır koşullarında, PZT levhaların tüm dış yüzeylerinde (alt, üst yanal yüzeyler ile çatlak yüzeylerinde) elektrik potansiyelin sıfır olduğu yani, plağın yalıtkan olduğu (sınırlardan elektrik geçişinin mümkün olmadığı) durum “kapalı devre” koşulu olarak kabul edilmektedir. Tabakalar arası temas koşulları ile çatlakların içinin boş (vakumlu) olması durumlarına ait (2.18) de verilen koşullar, kapalı-devre sınır koşulu durumu için de geçerlidir. Verilenlere göre matematiksel modelleme:

Sınır koşulları,

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n),1}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),1}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \phi^{(r_1),1}|_{x_2=0} = 0, \phi^{(r_3),1}|_{x_2=h} = 0, \\ \phi^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= \phi^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \phi^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = \phi^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Temas koşulları $0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2 \cup (\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ için

$$\begin{aligned} \phi^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C} \end{aligned} \quad (2.20)$$

olarak yazılabilir.

2.2 Ele Alınan Problemin Çözümü: Lineerleştirme İşlemleri

Ele alınan bu sınırdeğer problemleri, dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı metal malzemeden yapılmış ve katmanlar arasında bant çatlak olan piezoelektrik dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde, çatlaklar civarında oluşan delaminasyon burkulma problemini temsil etmektedir. Ele alınan problem, nonlinear bir problemdir. Bu nonlinear problemin çözümü lineerleştirme işlemleri sonucunda, lineer seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenecektir. [18], [20], [25] çalışmalarına dayanarak aranan büyüklükler, boyutsuz küçük parametre olan ε 'ye göre seri formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(r_n)}; \varepsilon_{ij}^{(r_n)}; u_i^{(r_n)}; D_i^{(r_n)}; E_i^{(r_n)}; \phi^{(r_n)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(r_n),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_n),q}; u_i^{(r_n),q}; D_i^{(r_n),q}; E_i^{(r_n),q}; \phi^{(r_n),q} \right\}, \varepsilon \ll 1. \quad (2.21)$$

(2.21) ifadeleri (2.10),(2.15)-(2.20) alan denklemleri, sınır ve temas koşullarında yerine yazılarak, ε 'nin kuvvetlerine göre gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş alan denklemleri, sınır ve temas koşullarından oluşan seri-sınırdeğer problemleri elde edilir. Anlaşılır olsun diye ε 'nin kuvvetlerine göre düzenlenmiş her bir sınırdeğer problemi, bu kuvvete göre isimlendirilecektir. Örneğin sıfırıncı, birinci, vb. sınırdeğer problemi (veya yaklaşım). Ele alınan delaminasyon burkulma probleminin çözümü, (2.21) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinin çözümlerinin süperpozisyonu olarak elde edilecektir.

Belirtelim ki, sıfırıncı yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar da nonlinear olarak elde edilmektedir. Bu nedenle, bilinen mekaniksel görüşler doğrultusunda ele alınan katı cisim için $\delta_i^n + \partial u_i^{(0)} / \partial x_n \approx \delta_i^n$ ilişkisi kullanılarak, sıfırıncı yaklaşıma ait lineer olmayan denklem ve bağıntılar, uygun lineer denklem ve bağıntılar ile yer değiştirilmiş olur. Buna göre sıfırıncı yaklaşım için alan denklemleri,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{ji}^{(r_n),0}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n),0}}{\partial x_j} = 0, T_{ij}^{(r_n),0} = c_{ijkl}^{(r_n),0} s_{kl}^{(r_n),0} - e_{kij}^{(r_n),0} E_k^{(r_n),0}, \\
D_i^{(r_n),0} &= e_{ikl}^{(r_n),0} s_{kl}^{(r_n),0} + \varepsilon_{ik}^{(r_n),0} E_k^{(r_n),0}, E_k^{(r_n),0} = -\frac{\partial \phi^{(r_n),0}}{\partial x_k}, \\
s_{kl}^{(r_n),0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n),0}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n),0}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n),0}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(r_n),0}}{\partial x_k} \right),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları;

$$\begin{aligned}
u_2^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, T_{11}^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} = p, \\
T_{13}^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= T_{31}^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = T_{33}^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
T_{2i}^{(r_1),0} \big|_{x_2=h} &= T_{2i}^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} = 0,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları;

i)açık-devre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
D_2^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} = 0,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

ii)kapalı-devre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
\phi^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} &= \phi^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} = 0,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ve $0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2 \cup (\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ için mekaniksel alan büyüklüklerine göre katmanlar arasındaki temas koşulları,

$$\begin{aligned}
T_{2i}^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} &= T_{2i}^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, \\
T_{2i}^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= T_{2i}^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

ve elektriksel alan büyüklüklerine göre katmanlar arasındaki temas koşulları

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, \\
\phi^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

elde edilir. Benzer şekilde birinci yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar aşağıda verilmiştir. Buna göre;

Alan denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{ji}^{(r_n),1}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n),1}}{\partial x_j} = 0, K_{ji}^{(r_n),0} = G_{jikm}^{(r_n)} \frac{\partial u_m^{(r_n),1}}{\partial x_k} - R_{mji}^{(r_n)} E_m^{(r_n),1}, \\ D_k^{(r_n),1} &= R_{kji}^{(r_n)} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} - L_{kj}^{(r_n)} E_j^{(r_n),1}, G_{jikm}^{(r_n)} = c_{jikm}^{(r_n)} + T_{jk}^{(r_n),0} \delta_i^m, \\ L_{kj}^{(r_n)} &= \varepsilon_{kj}^{(r_n)}, R_{kji}^{(r_n)} = \varepsilon^{(r_n)} + \varepsilon_0 \left(E_k^{(r_n),0} \delta_i^j - E_j^{(r_n),0} \delta_i^k - E_m^{(r_n),0} \delta_i^m \delta_j^k \right),\end{aligned}\quad (2.28)$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları;

$$\begin{aligned}u_2^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, K_{11}^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} = K_{13}^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \\ K_{31}^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} &= K_{33}^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, K_{2i}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h} = K_{2i}^{(r_1),1} \big|_{x_2=0} = 0,\end{aligned}\quad (2.29)$$

Elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları;

i) açık-devre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}\phi^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h} = 0,\end{aligned}\quad (2.30)$$

ii) kapalı-devre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}\phi^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ \phi^{(r_1),1} \big|_{x_2=0} &= 0, \phi^{(r_3),1} \big|_{x_2=h} = 0,\end{aligned}\quad (2.31)$$

olur. $x_1 \in \left(\frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2}, \frac{\ell_1 + \ell_{10}}{2} \right)$ için mekaniksel alan büyüklüklerine göre çatlak

yüzeylerindeki sınır koşulları,

$$\begin{aligned}K_{2i}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F-0} &= -T_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \delta_i^1, K_{2i}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+0} = -T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \delta_i^1, \\ K_{2i}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C-0} &= -T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \delta_i^1, K_{2i}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C+0} = -T_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \delta_i^1,\end{aligned}\quad (2.32)$$

elektriksel alan büyüklüklerine göre çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F-0} &= -D_1^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+0} = -D_1^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \\
D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C-0} &= -D_1^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C+0} = -D_1^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

olur. $0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2 \cup (\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ için mekaniksel alan büyüklüklerine göre tabakalar arası temas koşulları,

$$\begin{aligned}
u_i^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= u_i^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\
\left(T_{21}^{(r_1),1} + T_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial u_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F} &= \left(T_{21}^{(r_2),1} + T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F}, \\
T_{22}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= T_{22}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, T_{23}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} = T_{23}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, \\
\left(T_{21}^{(r_3),1} + T_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial u_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F+h_C} &= \left(T_{21}^{(r_2),1} + T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F+h_C}, \\
T_{22}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= T_{22}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, T_{23}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = T_{23}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

elektiriksel alan büyüklüklerine göre tabakalar arası temas koşulları

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = \phi^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\
D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\
\phi^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F} = 0, \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = \phi^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\
D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

şeklinde elde edilir. Benzer yolla 2. ve sonraki diğer yaklaşımlara ait denklem ve bağıntılar elde edilebilir. Belirtelim ki, (2.21) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerindeki birinci ve sonraki yaklaşımlara ait alan denklemlerinin sol tarafları aynı ancak, eşitliğin sağ tarafları birbirlerinden farklılaşmaktadır ve her bir yaklaşım kendisinden önceki yaklaşıma ait büyüklükleri içermektedir. Ayrıca belirtelim ki, pek çok kaynakta gösterildiği gibi (2.21) yardımıyla elde edilen sıfırıncı ve birinci yaklaşımlardaki denklem ve ifadeler, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilitate Teorisi denklemleri ile çakışmaktadır [25].

Ele alınan üç katlı sandviç kalın plakta delaminasyona neden olan kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesinde, (2.21) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer

problemlerinden sadece sıfırinci ve birinci yaklaşımın çözülmesi yeterlidir. İkinci ve sonraki yaklaşımların çözümünün kullanılması kritik kuvvet değerini değiştirmemektedir. Çünkü, ikinci ve sonraki bütün yaklaşımlarda temel denklemlerin sol tarafı birinci yaklaşım ile üst üste çakışmakta sadece inhomojen kısmı farklılaşmaktadır. Tüm yaklaşımlardaki denklemlerin inhomojen kısımları kendisinden önceki her bir yaklaşımda elde edilen büyüklükleri içermektedir. Tez kapsamında amacımız, kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesi olduğundan ve bu değer, denklemin katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değer olarak elde edildiğinden, ikinci ve sonraki yaklaşımların kullanılması, sıfırinci ve birinci yaklaşım kullanılarak bulunan kritik kuvvet değerini değiştirmeyecek, ancak gerilme ve yerdeğiştirme yayılımının değerinin hassaslaştırılmasında etkili olacaktır.

2.2.1 Sıfırinci yaklaşımın çözümü

Bu kısımda, (2.21) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinden matematiksel modeli (2.22)-(2.27) ile verilen sıfırinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü ele alınacaktır. Buna göre dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı elastik ve katmanlar arası bant çatlak içeren bir dikdörtgen kalın plak ele alınmaktadır. Bu plağın tüm yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve topraklanmış, $x_1 = 0$ ile $x_1 = \ell_1$ karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı normal dış basınç kuvvetinin etkisinde olduğu, bunun dışında hiçbir yüzeyine mekaniksel ve/veya elektriksel başka bir yükün etki etmediği kabul edilmektedir.

Akbarov vd. [18], [20], [25] ve diğer birçok kaynakta belirtildiği üzere, çatlak içeren bir plağın dış yüzeyinden yapıdaki çatlaklar doğrultusunda etki eden dış kuvvetin yapı içerisinde oluşturduğu gerilme durumuna, çatlağın etkisinin olmadığı bilinmektedir. Buna dayanarak bant çatlaklar içeren dikdörtgen kalın plak için sıfırinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü yerine, bu plağın çatlak içermediği durumda sıfırinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü kullanılacaktır. Burada piezoelektrik ve metal malzemeden yapılmış katmanlar için çözüm ayrı ayrı belirlenecek ancak, yapının birliği açısından temas yüzeylerinde dış tabakalar ile orta tabakada oluşan şekildeğiştirmelerin eşit olması (uygunluk koşulu) koşulu kullanılacaktır. Bu durumda ele alınan plağın sınır koşulları, yükleme durumu, levhalar arası uygunluk koşulları ve

piezoelektrik levhalarda polarizasyon yönü Ox_2 seçilirse, (2.11) ve (2.12) ifadelerinden [74] dış katmanlar(F) ile orta katmana (C) ait bünye bağıntıları

$$T_{11}^F = c_{11}^F S_{11}^F + c_{13}^F S_{22}^F + c_{12}^F S_{33}^F - e_{31} E_2, \quad (2.36)$$

$$T_{11}^C = c_{11}^C S_{11}^C + c_{13}^C S_{22}^C + c_{12}^C S_{33}^C, \quad (2.37)$$

$$T_{22}^F = c_{13}^F S_{11}^F + c_{33}^F S_{22}^F + c_{13}^F S_{33}^F - e_{33} E_2, \quad (2.38)$$

$$T_{22}^C = c_{13}^C S_{11}^C + c_{33}^C S_{22}^C + c_{13}^C S_{33}^C, \quad (2.39)$$

$$T_{33}^F = c_{12}^F S_{11}^F + c_{13}^F S_{22}^F + c_{11}^F S_{33}^F - e_{31} E_2, \quad (2.40)$$

$$T_{33}^C = c_{12}^C S_{11}^C + c_{13}^C S_{22}^C + c_{11}^C S_{33}^C, \quad (2.41)$$

$$D_2^F = e_{31} S_{11}^F + e_{33} S_{22}^F + e_{31} S_{33}^F + \varepsilon_{33} E_2 \quad (2.42)$$

için aşağıda verilen eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} \text{i) Dış tabakalarda: } & T_{22}^F = 0, D_2^F = 0, E_1 = 0, E_3 = 0, \\ \text{ii) Orta tabakada: } & T_{22}^C = 0, \\ \text{iii) Tümbölge için: } & 2T_{11}^F h_F + T_{11}^C h_C = hp, \quad 2T_{33}^F h_F + T_{33}^C h_C = 0, \\ \text{iv) Tabakalar arasında: } & S_{11}^F = S_{11}^C, \quad S_{33}^F = S_{33}^C. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dış tabakalardaki $D_2^F = 0$ koşulu (2.42) da kullanılarak elektriksel alan bileşeni E_2 için

$$E_2 = -\frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}} S_{11}^F - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}} S_{22}^F - \frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}} S_{33}^F, \quad (2.44)$$

bulunur. $T_{22}^F = 0$ koşulu ve (2.44) eşitliği (2.36) kullanılarak, S_{22}^F Green şekil değiştirme tansörü bileşeni için;

$$S_{22}^F = -\frac{c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}}}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} S_{11}^F - \frac{c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}}}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} S_{33}^F \quad (2.45)$$

bulunur. Benzer şekilde orta tabakadaki $T_{22}^C = 0$ koşulu (2.39) de göz önüne alınırsa, S_{22}^C Green şekil değiştirme tansörü bileşeni için;

$$S_{22}^C = -\frac{c_{13}^C}{c_{33}^C} S_{11}^C - \frac{c_{13}^C}{c_{33}^C} S_{33}^C \quad (2.46)$$

elde edilir. (2.45) ve (2.46) ifadeleri (2.36) ve (2.37) kullanılarak tüm bölgede sağlanan

$2T_{11}^F h_F + T_{11}^C h_C = hp$ koşulunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2h_F \left(\left(c_{11}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} \right) S_{11}^F + \left(c_{12}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} \right) S_{33}^F \right) \\ + h_C \left(\left(c_{11}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C} \right) S_{11}^C + \left(c_{12}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C} \right) S_{33}^C \right) = hp \end{aligned} \quad (2.47)$$

eşitliği elde edilir. (2.47) denkleminde tabakalar arasındaki $S_{11}^F = S_{11}^C$ ve $S_{33}^F = S_{33}^C$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \left(2h_F \left(c_{11}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} \right) + h_C \left(c_{11}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C} \right) \right) S_{11}^F \\ + \left(2h_F \left(c_{12}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} \right) + h_C \left(c_{12}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C} \right) \right) S_{33}^F = hp \end{aligned} \quad (2.48)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.40) ve (2.41)'de (2.45) ve (2.46) yerine yazılır ve tabakalar

arasında $S_{11}^F = S_{11}^C$ ve $S_{33}^F = S_{33}^C$ koşulları yardımıyla tüm bölgede sağlanan

$2T_{33}^F h_F + T_{33}^C h_C = 0$ denkleminde

$$\begin{aligned}
& \left(2h_F \left(c_{12}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} \right) + h_C \left(c_{12}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C} \right) \right) S_{11}^F \\
& + \left(2h_F \left(c_{11}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}} \right) + h_C \left(c_{11}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C} \right) \right) S_{33}^F = 0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

elde edilir. (2.48) ve (2.49) denklemleri iki bilinmeyenli iki denklem olur. Bu iki denklemden S_{11}^F ve S_{33}^F bulunur. Bunlar,

$$S_{11}^F = hp \frac{2h_F Y + h_C B}{(2h_F(Y - X) - h_C(B - A))(2h_F(X + Y) + h_C(A + B))} \tag{2.50}$$

$$S_{33}^F = -hp \frac{2h_F X + h_C A}{(2h_F(Y - X) + h_C(B - A))(2h_F(X + Y) + h_C(A + B))} \tag{2.51}$$

dir. Benzer şekilde $S_{11}^F = S_{11}^C$ ve $S_{33}^F = S_{33}^C$ ile (2.46) yardımıyla orta tabaka için S_{11}^C ve S_{33}^C Green şekildeğiştirme tansörü bileşenleri elde edilir. Bunlar, (2.52) işaretlemeleri kullanılarak

$$S_{11}^C = hp \frac{2h_F C + h_C B}{(2h_F(C - D) + h_C(B - A))(2h_F(C + D) + h_C(A + B))}, \tag{2.52}$$

$$S_{33}^C = -hp \frac{2h_F D + h_C A}{(2h_F(C - D) + h_C(B - A))(2h_F(C + D) + h_C(A + B))}, \tag{2.53}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
X &= c_{12}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}}, Y = c_{11}^F + \frac{e_{31}e_{31}}{\varepsilon_{33}} - \frac{\left(c_{13}^F + \frac{e_{33}e_{31}}{\varepsilon_{33}} \right)^2}{c_{33}^F + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}}}, \\
A &= c_{12}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C}, B = c_{11}^C - \frac{c_{13}^C c_{13}^C}{c_{33}^C}, C = c_{11}^F - \frac{c_{13}^F c_{13}^F}{c_{33}^F}, D = c_{12}^F - \frac{c_{13}^F c_{13}^F}{c_{33}^F}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

dir. (2.50), (2.51), (2.54) ve (2.45) ifadeleri ve (2.36)'da yerine yazılırsa

$$T_{11}^F = \left(Y - X \frac{2h_F X + h_C A}{2h_F Y + h_C B} \right) S_{11}^F \quad (2.55)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.53), (2.54), (2.52) ve (2.46) ifadeleri (2.37)'de yerine yazılırsa

$$T_{11}^C = \left(B - A \frac{2h_F D + h_C A}{2h_F C + h_C B} \right) S_{11}^C \quad (2.56)$$

elde edilir. Benzer yolla

$$T_{33}^F = \left(X - Y \frac{2h_F X + h_C A}{2h_F Y + h_C B} \right) S_{11}^F \quad (2.57)$$

$$T_{33}^C = \left(A - B \frac{2h_F D + h_C A}{2h_F C + h_C B} \right) S_{11}^C \quad (2.58)$$

elde edilir. Buna göre plağın karşılıklı iki yanal yüzeyinden etki eden normal dış basınç kuvveti etkisinde, piezoelektrik ve metal malzemedan yapılmış tabakalarda oluşan gerilme durumu, plağa etki eden dış kuvvet, malzeme ve geometrik parametreler yardımıyla belirlenir. Plağın dış ve orta tabakalarında oluşan gerilme değerleri,

$$T_{11}^F = \frac{A^F}{A^C} T_{11}^C \quad (2.59)$$

$$T_{33}^F = \frac{B^F}{B^C} T_{33}^C \quad (2.60)$$

burada,

$$\begin{aligned} A^F &= Y - X \frac{2h_F X + h_C A}{2h_F Y + h_C B}, A^C = B - A \frac{2h_F D + h_C A}{2h_F C + h_C B}, \\ B^F &= X - Y \frac{2h_F X + h_C A}{2h_F Y + h_C B}, B^C = A - B \frac{2h_F D + h_C A}{2h_F C + h_C B} \end{aligned} \quad (2.61)$$

dir. Böylece ele alınan üç katmandan oluşan PZT dikdörtgen kalın plak için sıfırıncı yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin dış ve orta katmanlar için analitik çözümü, (2.43) koşulları çerçevesinde (2.50)-(2.61) ile verilebilir. Belirtelim ki, burada her tabaka için bulunan gerilme değerleri, birinci yaklaşımda uygun tabaka için denklem ve bağıntılardaki üst indis “0” ile verilen büyüklükleri temsil etmektedir.

2.2.2 Birinci yaklaşımın çözümü

Bu kısımda, (2.21) yardımıyla elde edilen birinci yaklaşıma ait ve matematiksel modeli (2.28)-(2.35) ile verilen sınırdeğer probleminin çözümü ele alınacaktır. Belirtelim ki, (2.28), (2.32), (2.33) ile (2.34) sınır ve temas koşullarında verilen “0” üst indisli büyüklükler sıfırinci yaklaşıma ait büyüklükleri göstermektedir. Yani birinci yaklaşımın çözümünü elde edebilmek için önce sıfırinci yaklaşım çözümlmelidir. Dolayısıyla, sıfırinci yaklaşıma ait büyüklükler önceden bulunur ve birinci yaklaşımda yerine yazılarak, ele alınan birinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü yapılabilir. Birinci yaklaşıma ait denklem ve ifadeler ile sınır koşulları karmaşık olduğundan çözüm sayısal olarak yapılabilir. Sayısal çözümün belirlenmesinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır.

Ele alınan problemlerin çözümünde, yöntem gereği çözüm bölgesi sonlu eleman adı verilen alt bölgeye ayrılır. Sonlu eleman ayrıklaştırması adı verilen bu işlem ile çözüm bölgesi, bölgenin geometrisine uygun olarak, dörtgen prizma şeklinde sonlu elemanlar ile ayrıklaştırılmıştır. Her sonlu elemanın köşe noktası nod olarak alınmış ve nodlarda bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yerdeğiştirmeler ile elektrik potansiyeli ϕ olarak seçilmiştir. Sonlu eleman modellemesi için cisimde biriken toplam elektromekanik enerjiyi ifade eden ve aşağıda verilen Π fonksiyoneli kullanılacaktır [74].

$$\begin{aligned}
 \Pi(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1}) = & \sum_{n=1}^3 \iiint_{\Omega_n} \left[\frac{1}{2} G_{ijkl}^{(r_n),1} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(r_n),1}}{\partial x_l} + R_{ijk}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(r_n),1}}{\partial x_k} - \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_l} \right] d\Omega_n - \iint_{S_L^-} T_{11}^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\
 & \iint_{S_L^+} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\
 & \iint_{S_U^+} T_{11}^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_L^-} D_1^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\
 & \iint_{S_L^+} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\
 & \iint_{S_U^+} D_1^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

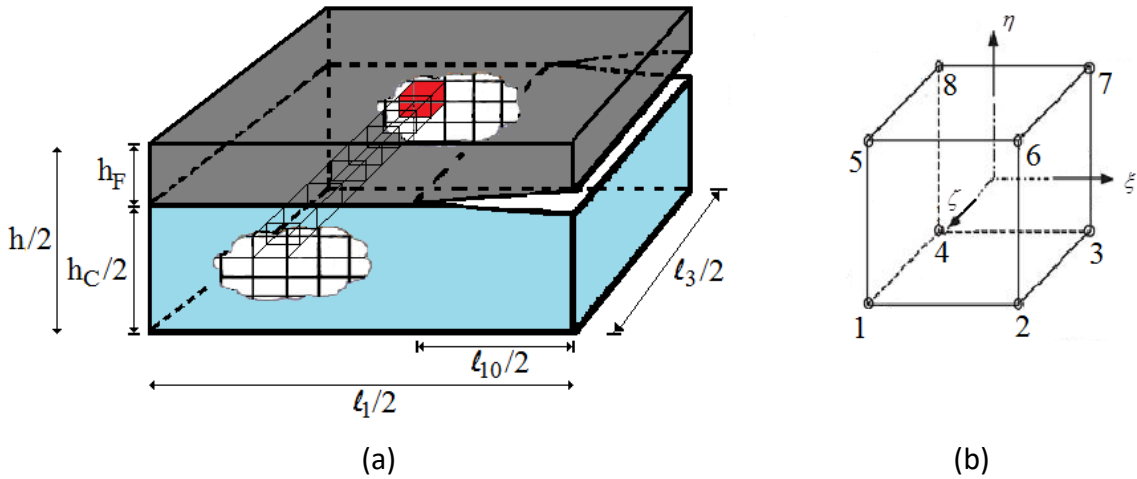
Belirtelim ki, (2.62) fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden yani,

$$\delta \Pi \left(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1} \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1^{(r_n),1}} \delta u_1^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2^{(r_n),1}} \delta u_2^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_3^{(r_n),1}} \delta u_3^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi^{(r_n),1}} \delta \phi^{(r_n),1} = 0 \quad (2.63)$$

eşitliğinden (2.28) alan denklemleri ile (2.29)-(2.33) sınır koşullarında, gerilmelere ve elektriksel yerdeğiştirmelere göre verilen sınır koşulları elde edilir.

Sonlu elemanlar modellemesi, plak geometrisinin ve sınır koşullarının $x_2 = h_F + h_C / 2$, $x_1 = \ell_1 / 2$ ve $x_3 = \ell_3 / 2$ düzlemlerine göre simetrik olmasından yararlanılarak, çözüm bölgesinin 1/8 lik kısmında yapılmıştır. Buna göre sonlu eleman ayrıklaştırması $V = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1 / 2; h_F + h_C / 2 \leq x_2 \leq 2h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3 / 2\}$ için $V = \bigcup_{k=1}^M V_k$ olacak

şekilde M adet 8 nodlu standart dikdörtgen prizmatik V_k sonlu elemanlarına ayrıklaştırılır (Şekil 2.2). Burada M kullanılan sonlu eleman adedini göstermektedir ve değeri, sayısal sonuçların yakınsaklığına göre ayrıca belirlenecektir. Tez kapsamında ele alınan V çözüm bölgesi, x_1 yönünde N_x , x_2 yönünde N_y ve x_3 yönünde N_z adet sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır. Dolayısıyla ayrıklaştırmada kullanılan toplam sonlu eleman sayısı $M = N_x * N_y * N_z$ bulunur.



Şekil 2.2 (a) Çözüm bölgesinin 1/8'inin sonlu elemanlara ayrıklaştırılması (b) Kullanılan sonlu eleman geometrisi (örnek eleman)

Şekil fonksiyonlarının normalize edilmiş $(O'\xi\eta\zeta)$ koordinatlarındaki ifadeleri

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), & N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), & N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\
N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \\
N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
\end{aligned} \tag{2.64}$$

dir. $(O x_1 x_2 x_3)$ koordinat sistemi ile normalize edilmiş $(O'\xi\eta\zeta)$ koordinat takımı arasında

$$\xi = \frac{2x_1 - (x_{1,i+1} + x_{1,i})}{x_{1,i+1} - x_{1,i}}, \eta = \frac{2x_2 - (x_{2,j+1} + x_{2,j})}{x_{2,j+1} - x_{2,j}}, \zeta = \frac{2x_3 - (x_{3,k+1} + x_{3,k})}{x_{3,k+1} - x_{3,k}}, \tag{2.65}$$

$1 \leq i \leq Nx, 1 \leq j \leq Ny, 1 \leq k \leq Nz,$

dönüşüm bağıntısı vardır. (2.65) da (x_1, x_2, x_3) seçilen noktanın ilk eksen (global eksen) takımındaki koordinatlarını ve $x_{s,k+1} (x_{s,k})$ ($s=1,2,3$) seçilen k. sonlu elemanın global eksen takımındaki s koordinatı doğrultusundaki üst (alt) noktasının koordinatını göstermektedir. Sonlu elemanlar yöntemi gereği çözüm, her sonlu elemanda polinom olarak seçilir. Bu polinomlar ilgili fonksiyonun nodlardaki değeri ve şekil fonksiyonlarının çarpımı olarak yazılır. Yani,

$$\begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \\ w^{(e)} \\ \phi^{(e)} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ w_i^{(e)} \\ \phi_i^{(e)} \end{Bmatrix} N_i, \quad e=1,2,...,M. \tag{2.66}$$

(2.66) ifadeleri (2.62) fonksiyoneliinde yerine yazılır ve Ritz tekniği yardımıyla bilinen işlemler dahilinde her sonlu eleman için ele alınan sınırdeğer probleminin çözümü,

$$K^{(e)} u^{(e)} = F^{(e)} \quad (e=1,2,...,M) \tag{2.67}$$

cebirsel denklem takımının çözümüne indirgenir [75]. (2.67) de $K^{(e)}$ $((K_{ij}^{(e)})_{4 \times 4}, i, j = 1, 2, ..., 8)$ rijidlik (stiffness) matrisi, $u^{(e)}$ $((u_i^{(e)})_{4 \times 1}, i = 1, 2, ..., 8)$ bilinmeyenleri içeren vektör ve $F^{(e)}$ $((F_i^{(e)})_{4 \times 1}, i = 1, 2, ..., 8)$ sağ taraf (kuvvet) vektörü

olarak isimlendirilir. (2.67)'deki $K_{ij}^{(e)}$ ($i,j=1,2,...,8$, $e=1,2,...,M$) katsayılar matrisinin elemanlarının normalize edilmiş koordinatlardaki ifadeleri,

$$K_{ij}^{(e)}(1,1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((c_{11}^{(r_n)} + T_{11}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + c_{55}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} + c_{66}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(1,2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((c_{66}^{(r_n)} + T_{22}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + c_{12}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(1,3) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((c_{55}^{(r_n)} + T_{33}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + c_{13}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(1,4) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(e_{11}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + e_{16}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + e_{15}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right. \\ \left. + e_{21}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + e_{26}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + e_{25}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right. \\ \left. + e_{31}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} + e_{36}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} + e_{35}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(2,1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((c_{66}^{(r_n)} + T_{22}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + c_{12}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(2,2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((c_{22}^{(r_n)} + T_{22}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + c_{44}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \right. \\ \left. + (c_{66}^{(r_n)} + T_{11}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(2,3) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((c_{44}^{(r_n)} + T_{33}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + c_{23}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(2,4) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(e_{16}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + e_{12}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + e_{14}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right. \\ \left. + e_{26}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + e_{22}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + e_{24}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right. \\ \left. + e_{36}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} + e_{32}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} + e_{34}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

$$K_{ij}^{(e)}(3,1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left((c_{55}^{(r_n)} + T_{33}^{(r_n),0}) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} + c_{13}^{(r_n)} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) J d\xi d\eta d\zeta,$$

[illegible]

dir. (2.68)'de J , $Ox_1x_2x_3$ ile $O'\xi\eta\zeta$ koordinat takımları arasındaki dönüşüme ait Jakobiyen olup (2.65) yardımıyla

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \frac{(x_{1,i+1} - x_{1,i})(x_{2,i+1} - x_{2,i})(x_{3,i+1} - x_{3,i})}{8} \quad (2.69)$$

bulunur. Her sonlu eleman için elde edilen (2.67) cebirsel denklemlerin uygun şekilde birleşiminden tüm çözüm bölgesine ait

$$Ku = F \quad (2.70)$$

cebirsel denklemler takımı elde edilir. (2.70) denklem tamına sınır koşulları basit satır/sütun işlemleri ile ilave edilerek, indirgenmiş sistem bulunur. İndirgenmiş sistemin çözümü ile nodlarda aranan değerler elde edilir. Amacımız, ele alınan piezoelektrik dikdörtgen kalın plağın içerdiği çatlaklar civarında delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesi olduğundan, bu kritik değerler (2.70)'deki katsayılar matrisinin determinantının sıfırlığından bulunabilir yani,

$$\det K = 0 \quad (2.71)$$

veya (2.70) de

$$p \rightarrow p_{cr} \text{ için } \left| u_2^{(3),1} \right|_{\substack{x_2=h_F+h_C+0 \\ x_1=\ell_1/2}} \rightarrow +\infty \quad (2.72)$$

için iterasyonlar yardımıyla da belirlenebilir. Tez kapsamında (2.72) deki iterasyonlar yardımıyla kritik dış basınç kuvvetinin bulunması tercih edilmiştir.

2.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

Tez kapsamında ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin incelenmesinde “küçük başlangıç eğinti kriteri” kullanılacaktır. Bu kritere göre dış yükleme yapılmadan önce (başlangıçta) plağın içerdiği çatlakların yüzeylerinin çok küçük ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Dış basınç kuvveti etkisinde bu ön eğriliklerin büyüyerek

sonsuz gitmesine karşı gelen kuvvet değeri, kritik delaminasyon burkulma değeri olarak belirlenecektir. Buna göre bu kısımda incelenen, bant çatlak içeren sandviç dikdörtgen kalın plağın çatlak yüzeylerinin ön eğintisini temsil eden (2.3) de verilen ve (2.5) koşullarını sağladığı kabul edilen $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu

$$f(x_1, x_3) = A\ell_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \left(\frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \right) \quad (2.73)$$

olarak seçilmiştir. Tez kapsamında ele alınan problemlerin çözümünden elde edilen sayısal sonuçların analizine geçmeden önce, tarafımızca yapılan ve sayısal araştırmaların gerektirdiği algoritma ve programların doğruluğu, test problemleri yardımıyla kontrol edilmiştir. Örneğin izotrop dikdörtgen kalın plak için uygun sınır koşullarında dış katman kalınlığının (h_F) değişimine göre, x_1 yönünde 100, x_2 yönünde 24, x_3 yönünde 100 sonlu eleman alınarak, tez çerçevesinde yapılan algoritma ve programlar yardımıyla bulunan sayısal sonuçlar ile Kaynak [20] de verilen uygun kritik kuvvet değerleri, farklı parametre değerleri için Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2’de verilmiştir.

Çizelge 2.1 $p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$ Kritik delaminasyon burkulma kuvveti ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h / \ell_1 = 0.2$)

	$h_F = 0.0250$	$h_F = 0.0375$	$h_F = 0.0500$
Akbarov vd. [20]	0.0120	0.0217	0.0336
Bu çalışma	0.0120	0.0217	0.0334

Çizelge 2.2 $p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$ Kritik delaminasyon burkulma kuvveti ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $h / \ell_1 = 0.15$, $\gamma = 1$)

h_F	Bu çalışma	Akbarov vd. [20]
0.01250	0.0055	0.0055
0.01875	0.0083	0.0083
0.03125	0.0165	0.0166
0.04375	0.0274	0.0275
0.05625	0.0399	0.0400

Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2 de verilen sayısal sonuçlardan, tarafımızca yapılan algoritma ve programlar ile elde edilen sayısal sonuçlar ile [20] de verilen uygun sayısal sonuçlar büyük oranda üst üste çakışmaktadır.

[76] da Giannopoulos vd. tarafından çatlak içermeyen piezoelektrik sandviç (PZT-4/Al/PZT-4) şerit-plak için burkulma delaminasyon problemi sayısal ve deneysel olarak çalışılmıştır. [76] da ele alınan probleme ait sayısal sonuçlar ile tarafımızdan yapılan algoritma ve programlarda $\gamma (= \ell_3 / \ell_1)$ parametresinin sayısal değeri artırılarak (yani, düzlem şekil değiştirme durumu için) elde edilen sayısal sonuçlar Çizelge 2.3’de verilmektedir. Çizelge 2.3’de verilen sayısal sonuçlardan, $\gamma (= \ell_3 / \ell_1)$ parametresi arttıkça tarafımızca bulunan sayısal sonuçların, [76] da şerit-plak için elde edilen kritik parametre değerlerine yakınsadığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla, Tez kapsamında ele alınan problemlerin çözümünde kullanılacak olan ve tarafımızca yapılan algoritma ve programlar kullanılarak uygun test problemleri çerçevesinde bulunan sayısal sonuçların, özel durumda literatürdeki mevcut sayısal sonuçlara olan uygunluğu, bu algoritma ve programlara güveni teyit etmektedir.

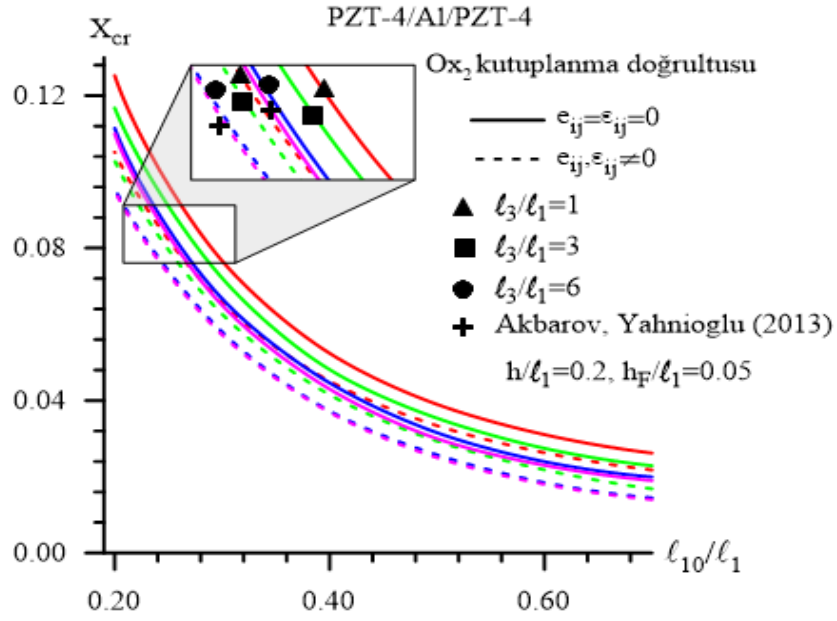
Çizelge 2.3 p_{cr} / c_{44}^{PZT-4} , Kritik delaminasyon burkulma kuvveti ($h / \ell_1 = 0.2$, $h_F / \ell_1 = 0.05$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$)

γ	Bu çalışma	Giannopoulos vd. [76] Sayısal Sonuç	Giannopoulos vd. [76] Deneysel Sonuç
1	5.2817	5.1300	4.9400
2	5.2361		
3	5.2074		
4	5.1802		
5	5.1626		

[68] de Akbarov ve Yahnioğlu katmanları arasında birbirine paralel iki çatlak bulunan sandviç (PZT-4/Al/PZT-4) şerit-plağın burkulma delaminasyonu incelenmiştir. Aynı problem, farklı $\gamma (= \ell_3 / \ell_1)$ değerleri ve farklı çatlak uzunlukları için tarafımızca çözümlenerek, sayısal sonuçlar Şekil 2.3’te grafik olarak verilmiştir. Grafikte verilen X_{cr} değeri kritik şekildeğiştirme değeridir ve T_{11}^C sıfırıncı yaklaşımdan elde edilen ön gerilme değeri olmak üzere X_{cr} ,

$$X_{cr} = T_{11}^C / c_{44}^{PZT-4} \quad (2.74)$$

şeklinde tanımlıdır.



Şekil 2.3 Kritik şekildeğiştirme değerleri

Grafikten görüldüğü üzere $\gamma (= \ell_3/\ell_1)$ parametresi arttıkça yani, düzlem şekil değiştirme durumuna yaklaştıkça, tarafımızca elde edilen sayısal sonuçlar [68] de ele alınan piezoelektrik şerit-plak için elde edilen sayısal sonuçlara hem piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin ihmal edilmesi ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$), hem de bu sabitlerin göz önüne alınması (yani, ihmal edilmemesi ($e_{ij} \neq 0; \varepsilon_{ij} \neq 0$)) durumlarının her ikisi için de [68] deki sayısal sonuçlara yakınsamaktadırlar.

Yukarıda verilen farklı test problemleri için literatürde verilen sayısal sonuçlar ile tarafımızca yapılan algoritma ve programlardan elde edilen sayısal sonuçların büyük oranda uyumlu olması, algoritma ve programlarımızın doğruluğunu garantilemektedir. Buna dayanarak, tezde ele alınan problemlerin çözümünde tarafımızca yapılan algoritma ve programların kullanımına güven sağlanmıştır.

2.3.1 Problem 1 (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri

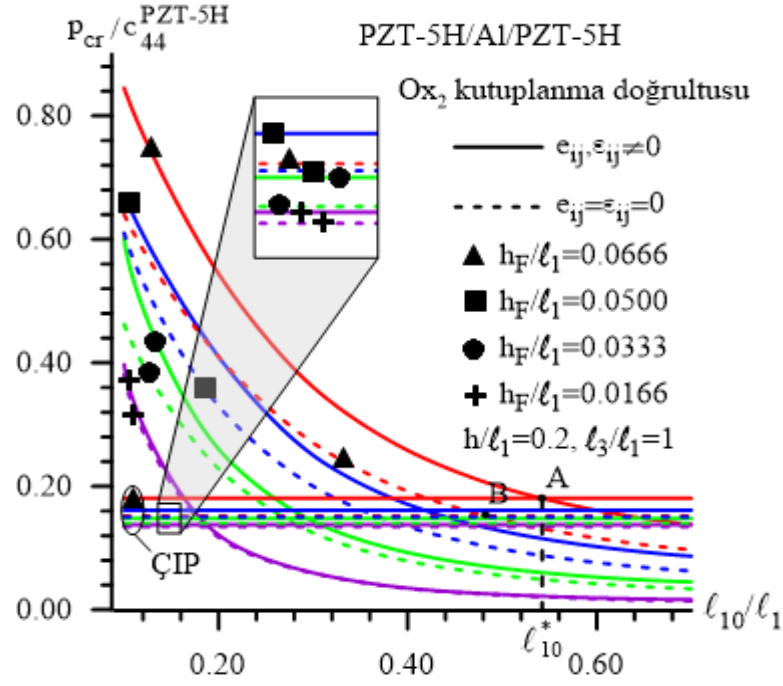
Bu kısımda, matematiksel modeli (2.10), (2.15)-(2.18) ile verilen dikdörtgen kalın plağın bütün yanal yüzeylerinde düşey yerdeğiştirme ile elektrik potansiyelin sıfır olduğu, plağın üst ve alt yüzeyleri ile çatlak yüzeylerinden hiçbir elektriksel veya mekaniksel yükün etki etmediği ve elektriksel yerdeğiştirme değişiminin olmadığı, sadece karşılıklı

iki yanal yüzeyinden çatlaklar doğrultusunda statik dış basınç kuvvetinin etki ettiği durum için bu plağa ait delaminasyon burkulma problemi ele alınmıştır. Kısım 2.2 de verilen lineerleştirme işlemleri dahilinde ele alınan problem, seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenir. Bu seri-sınırdeğer problemlerinden sıfırıncı yaklaşım (matematiksel modeli (2.22)-(2.24),(2.6) ve (2.27) ile verilmiştir) ve birinci yaklaşım (matematiksel modeli (2.28)-(2.30), (2.32)-(2.35) ile verilmiştir) için elde edilen uygun problemlerin çözümü Kısım 2.2.1 ve Kısım 2.2.2 de açıklandığı gibi yapılarak, farklı malzeme ve geometrik parametreler için elde edilen sayısal sonuçlar bu kısımda analiz edilecektir.

Çizelge 2.4 Seçilen PZT malzemelerin mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabiti değerleri

Malzemeler (Yang,2004)	$c_{11}^{(r_1)}$	$c_{12}^{(r_1)}$	$c_{13}^{(r_1)}$	$c_{33}^{(r_1)}$	$c_{44}^{(r_1)}$	$c_{66}^{(r_1)}$	$e_{31}^{(r_1)}$	$e_{33}^{(r_1)}$	$e_{15}^{(r_1)}$	$\epsilon_{11}^{(r_1)}$	$\epsilon_{33}^{(r_1)}$
PZT-4	13.9	7.78	7.40	11.5	2.56	3.06	-5.2	15.1	12.7	0.646	0.562
PZT-5H	12.6	7.91	8.39	11.7	2.30	2.35	-6.5	23.3	17.0	1.505	1.302
BaTiO ₃	15.0	6.53	6.62	14.6	4.39	4.24	-4.3	17.5	11.4	0.987	1.116
	$\times 10^{10} \text{ N/m}^2$						C/m^2			$\times 10^{-8} \text{ C/Vm}$	

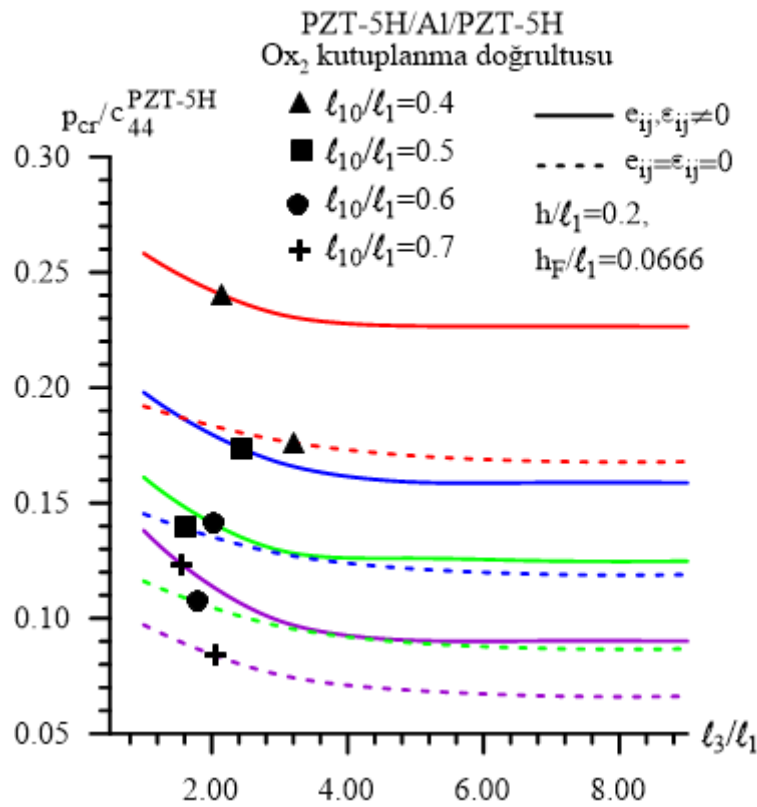
Tez kapsamında sayısal hesaplamalarda kullanılan piezoelektrik malzemelere ait malzeme sabitleri Çizelge 2.4’de verilmiştir. Ayrıca orta katman için Alüminyum (Al) ve Çelik (St) malzemeleri seçilmiştir. Al için malzeme sabitleri $E = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ve $\nu = 0.3$ alınmıştır. $\lambda (= \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu))$ ve $\mu (= E / 2(1 + \nu))$ Lamé sabitleri yardımıyla orta katman malzemesi çelik (St) için $\lambda = 92.6 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ve $\mu = 77.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ alınmıştır. Lamé sabitleri yardımıyla (2.11)’deki malzeme sabitleri $c_{11} = \lambda + 2\mu$, $c_{22} = c_{33} = c_{11}$, $c_{12} = c_{21} = \lambda$, $c_{13} = c_{31} = \lambda$, $c_{23} = c_{32} = \lambda$, $c_{66} = \mu$ ve $c_{44} = c_{55} = c_{66}$ olarak bulunur.



Şekil 2.4 Kritik kuvvet değerleri ($\gamma = 1$, $h / \ell_1 = 0.2$)

Şekil 2.4’de h_F (dış katmanların kalınlığı) ve ℓ_{10} (çatlağın Ox_1 eksenine doğrultusundaki uzunluğu) geometrik parametrelerinin değişimine göre ele alınan PZT-5H/Al/PZT-5H dikdörtgen piezoelektrik kalın plağın delaminasyon burkulmasına neden olan kritik dış basınç kuvvetine ait sayısal sonuçlar verilmiştir. Şekilde verilen kesikli çizgiler $e_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$ için yani, piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin ihmal edilmesi (elastik plak) durumuna ait sayısal sonuçları; sürekli çizgiler $e_{ij} \neq 0$; $\epsilon_{ij} \neq 0$ için yani, bu parametrelerin sayısal işlemlerde göz önüne alındığı (piezoelektrik plak) duruma ait sayısal sonuçları göstermektedir. Bu grafikten anlaşılabileceği üzere, dış katman kalınlığı (h_F) azaldıkça veya çatlak uzunluğu (ℓ_{10}) arttıkça kritik dış basınç kuvvetinin değeri azalmaktadır. Ayrıca piezoelektrik sandviç plakta (PZT-5H/Al/PZT-5H) h_F değeri arttıkça ve $e_{ij} \neq 0$; $\epsilon_{ij} \neq 0$ ile $e_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$ durumlarında elde edilen kritik dış basınç kuvvetleri arasındaki fark da artmaktadır. Dolayısıyla, PZT levha kalınlığı arttıkça belirlenen kritik parametre değeri, uygun elastik plak ($e_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$) için elde edilen değerden önemli ölçüde farklılaşmaktadır. Ayrıca Şekil 2.4’de çatlak içermeyen PZT-5H/Al/PZT-5H dikdörtgen piezoelektrik kalın plağın (Çatlak içermeyen Plak-ÇİP) tüm olarak burkulmasına ait sayısal sonuçlar yine $e_{ij} \neq 0$; $\epsilon_{ij} \neq 0$ ve $e_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$ durumları

için ayrı ayrı verilmiştir. Şekilde verilen grafiklerden belirli bir çatlak uzunluğu (bu kritik çatlak uzunluğu ℓ_{10}^* ile gösterilsin) için plağın tüm olarak burkulmasına sebep olan kritik dış kuvvet ile çatlak içeren plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kuvvetin birbirine eşit olduğu görülmektedir. Kritik kuvvetin eşitlendiği (örneğin, Şekil 2.4’de A ve B noktaları) ℓ_{10}^* kritik çatlak uzunluğunun sayısal değerinin hem dış katman kalınlığı (h_F) ve hem de malzeme özelliğine bağlı olduğu görülmektedir. Buna göre, $\ell_{10} > \ell_{10}^*$ ($\ell_{10} < \ell_{10}^*$) için çatlak içeren plağın delaminasyon burkulmasının, çatlak içermeyen uygun dikdörtgen plağın burkulmasından önce (sonra) gerçekleştiği söylenebilir. Diğer bir ifade ile belirli bir çatlak uzunluğundan küçük çatlak içeren plakların delaminasyon burkulmasının, çatlak içermeyen uygun plakların burkulmasından sonra gerçekleştiği sonucu çıkmaktadır.

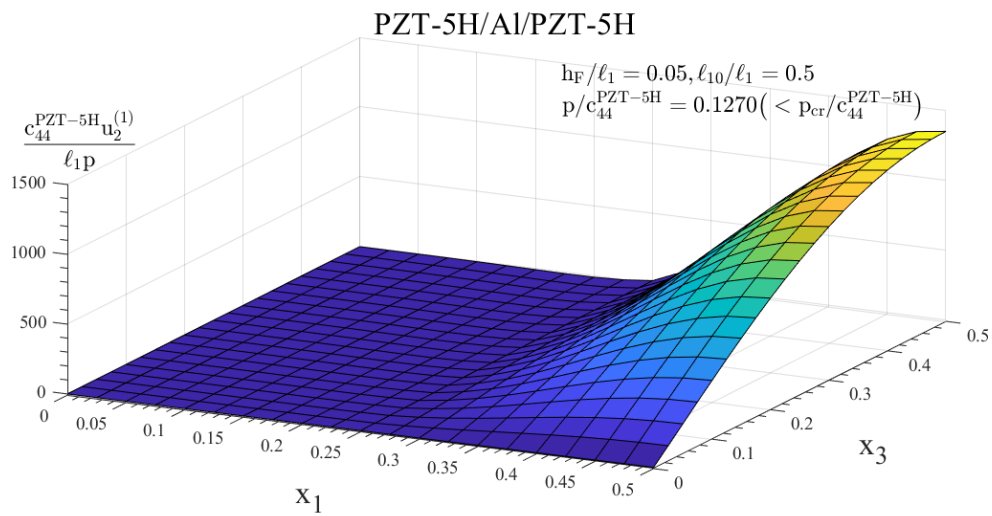


Şekil 2.5 Kritik kuvvet değerleri ($h_F / \ell_1 = 0.05$, $h / \ell_1 = 0.2$)

Şekil 2.5’de PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç dikdörtgen plağın delaminasyon burkulmasına ℓ_{10} ve γ parametrelerinin etkisi verilmiştir. Bu şekilde verilen grafiklere göre çatlak uzunluğu büyüdükçe kritik delaminasyon burkulma kuvvetinin değeri azalmakta ve her

bir ℓ_{10} için $\gamma (= \ell_3 / \ell_1)$ değeri arttıkça (yani, Ox_3 doğrultusunda plağın uzunluğu arttıkça diğer bir değişle düzlem şekil değiştirme durumuna yaklaştıkça), kritik delaminasyon burkulma kuvvetinin değeri azalarak belirli bir asimptoda yaklaşmaktadır. Bu durum hem elastik plak ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$) hem de piezoelektrik (PZT) plak ($e_{ij} \neq 0; \varepsilon_{ij} \neq 0$) için sağlanmakta ve her zaman PZT plak için bulunan kritik kuvvet değeri, elastik plak için belirlenen kritik kuvvet değerinden büyük bulunmaktadır.

Şekil 2.6'da PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç dikdörtgen plağın $h_F / \ell_1 = 0.05$, $h / \ell_1 = 0.2$ ve $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$ parametre değerlerinde $p = 0.1270 (< p_{cr} / c_{44}^{PZT-5H})$ için $x_2 = h_F + h_C + 0^+$ 'da yüzey grafiği verilmiştir. Bu şekilde verilen yüzey, ele alınan PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından uygulanan dış basınç kuvveti etkisinde Şekil 2.1'de gösterilen üst çatlağın üst yüzeyinin (S_U^+) açılma formunu göstermektedir. Tez kapsamında ele alınan problemlerin incelenmesinde "küçük başlangıç eğinti kriteri" nin uygulanacağı -yani, çatlak yüzeylerine başlangıçta çok küçük ön eğinti verileceği ve dış basınç kuvveti etkisinde bu eğintilerin büyüyerek sonsuza gitmesi durumu için kritik parametrelerin belirleneceği- belirtilmiştir. Bu kriter çerçevesinde, ele alınan plağa dış kuvvet etki etmeden önce çatlak yüzeylerine (2.73) ile verilen ön eğintinin formu ile Şekil 2.6'da elde edilen çatlak yüzeyi formunun benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir.



Şekil 2.6 $x_2 = h_F + h_C + 0^+$ 'da $p = 0.1270 (< p_{cr} / c_{44}^{PZT-5H})$ 'te yüzey grafiği

Çizelge 2.5-Çizelge 2.10'da farklı malzeme çiftleri, farklı dış katman kalınlıkları ile farklı çatlak uzunlukları için Problem 1'in çözümünden elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri gösterilmiştir. Bu çizelgelerde $\ell_3/\ell_1=1$ ve $h/\ell=0.2$ için farklı çatlak uzunlukları ve dış katman kalınlıkları ile PZT-5H/Al/PZT-5H (Çizelge 2.5), PZT-4/Al/PZT-4 (Çizelge 2.6), BaTiO₃/Al/BaTiO₃ (Çizelge 2.7), PZT-5H/St/PZT-5H (Çizelge 2.8), PZT-4/St/PZT-4 (Çizelge 2.9) ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ (Çizelge 2.10) malzeme çiftleri için elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Belirtilen çizelgelerde sayısal sonuçlar kesir formunda verilmiş olup, kesirlerin payındaki sayısal değer $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ (Durum 1) ve paydasındaki sayısal değer $e_{ij} \neq 0; \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2) için verilmiştir. Kesirlerin paydasında (Durum 2) verilen sayısal sonuçlar ile payında (Durum 1) verilen sayısal sonuçların karşılaştırılması sırasıyla, elektriksel alan ile mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin “alınması” ile “alınmaması” durumları arasındaki farkı göstermektedir. Buna ek olarak, bütün çizelgelerde $\ell_{10}/\ell_1=0$ (çizelgelerde en sağdaki sütun) için verilen sayısal sonuçlar, plakta herhangi bir arayüz çatlaklığı olmadığı durumda (yani, Çatlak içermeyen Plak-ÇİP durumunda) ele alınan plağın burkulmasına ait kritik burkulma değerlerini göstermektedir. Ayrıca bazı çizelgelerde elektriksel alan ile mekaniksel alanın karşılıklı etkileşiminin kritik delaminasyon burkulma kuvvetine etkisi

$$\text{Değ. Oranı} = \frac{p_{cr}/c_{44}^{PZT}(\text{Durum 2}) - p_{cr}/c_{44}^{PZT}(\text{Durum 1})}{p_{cr}/c_{44}^{PZT}(\text{Durum 1})} \quad (2.75)$$

ile verilmiştir. Buna göre PZT katman kalınlığı arttıkça ve çatlak uzunluğu azaldıkça, belirtilen alanların karşılıklı etkileşimi neticesinde PZT sandviç dikdörtgen plak için bulunan kritik delaminasyon burkulma kuvveti, elastik plağa ait kritik delaminasyon burkulma kuvvetine göre %37'ye varan oranlarda artmaktadır (Çizelge 2.5).

Çizelge 2.5-Çizelge 2.10'da verilen tüm sayısal sonuçlardan, sandviç plağın dış katmanlarının piezoelektrik malzeme (PZT) seçilmesi durumunun, kritik dış basınç kuvvetinde önemli değer artışına sebep olduğu görülmüştür. Bu artış piezoelektrik katman kalınlığındaki yani h_F/ℓ_1 'deki artışla birlikte daha dikkate değer hale gelmektedir. Aynı zamanda, elde edilen sayısal sonuçlardan çatlak uzunluğu ℓ_{10}/ℓ_1 arttıkça, p_{cr}/c_{44}^{PZT} değerlerinin azaldığı tespit edilmiştir.

Çizelge 2.5 PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP (Değ. Oranı)
	0.7 (Değ. Oranı)	0.6 (Değ. Oranı)	0.5 (Değ. Oranı)	0.4 (Değ. Oranı)	0.3 (Değ. Oranı)	0.2 (Değ. Oranı)	
0.0166	0.0148	0.0176	0.0229	0.0330	0.0552	0.1104	0.1233
	0.0164	0.0192	0.0248	0.0351	0.0599	0.1213	0.1277
	(%11)	(%10)	(%9)	(%7)	(%9)	(%9)	(%4)
0.0333	0.0360	0.0422	0.0555	0.0790	0.1246	0.2286	0.1234
	0.0451	0.0529	0.0672	0.0926	0.1432	0.2604	0.1301
	(%25)	(%25)	(%21)	(%17)	(%15)	(%14)	(%6)
0.0500	0.0648	0.0765	0.0988	0.1346	0.2001	0.3301	0.1261
	0.0868	0.1023	0.1274	0.1708	0.2502	0.4098	0.1413
	(%35)	(%34)	(%30)	(%27)	(%25)	(%24)	(%12)
0.0666	0.1022	0.1182	0.1453	0.1919	0.2703	0.4099	0.1622
	0.1380	0.1611	0.1979	0.2582	0.3606	0.5441	0.2004
	(%37)	(%36)	(%36)	(%35)	(%33)	(%32)	(%23)

Çizelge 2.6 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP (Değ. Oranı)
	0.7 (Değ. Oranı)	0.6 (Değ. Oranı)	0.5 (Değ. Oranı)	0.4 (Değ. Oranı)	0.3 (Değ. Oranı)	0.2 (Değ. Oranı)	
0.0166	0.0130	0.0161	0.0204	0.0298	0.0504	0.1058	0.1177
	0.0149	0.0183	0.0227	0.0332	0.0571	0.1193	0.1201
	(%15)	(%14)	(%11)	(%11)	(%13)	(%12)	(%2)
0.0333	0.0328	0.0403	0.0527	0.0741	0.1149	0.2053	0.1189
	0.0410	0.0489	0.0625	0.0876	0.1339	0.2554	0.1231
	(%25)	(%21)	(%19)	(%18)	(%17)	(%24)	(%4)
0.0500	0.0644	0.0759	0.0983	0.1334	0.1942	0.3111	0.1193
	0.0838	0.0983	0.1242	0.1663	0.2461	0.4028	0.1271
	(%30)	(%29)	(%25)	(%24)	(%27)	(%29)	(%7)
0.0666	0.0951	0.1158	0.1442	0.1822	0.2593	0.3954	0.1512
	0.1272	0.1501	0.1907	0.2477	0.3496	0.5341	0.1872
	(%34)	(%30)	(%32)	(%36)	(%35)	(%35)	(%24)

Çizelge 2.7 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox₂ kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP (Değ. Oranı)
	0.7 (Değ. Oranı)	0.6 (Değ. Oranı)	0.5 (Değ. Oranı)	0.4 (Değ. Oranı)	0.3 (Değ. Oranı)	0.2 (Değ. Oranı)	
0.0166	0.0075	0.0096	0.0131	0.0195	0.0326	0.0671	0.0692
	0.0077	0.0098	0.0133	0.0197	0.0328	0.0679	0.0701
	(%3)	(%2)	(%1)	(%1)	(%1)	(%1)	(%1)
0.0333	0.0213	0.0265	0.0351	0.0501	0.0790	0.1451	0.0697
	0.0228	0.0282	0.0371	0.0527	0.0833	0.1544	0.0734
	(%7)	(%6)	(%6)	(%5)	(%5)	(%6)	(%5)
0.0500	0.0442	0.0541	0.0697	0.0956	0.1423	0.2361	0.0863
	0.0479	0.0585	0.0752	0.1031	0.1541	0.2586	0.0965
	(%8)	(%8)	(%8)	(%8)	(%8)	(%10)	(%12)
0.0666	0.0757	0.0909	0.1142	0.1512	0.2137	0.3262	0.1086
	0.0830	0.0996	0.1251	0.1661	0.2364	0.3666	0.1245
	(%10)	(%10)	(%10)	(%10)	(%11)	(%12)	(%15)

Çizelge 2.8 PZT-5H/St/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox₂ kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP (Değ. Oranı)
	0.7 (Değ. Oranı)	0.6 (Değ. Oranı)	0.5 (Değ. Oranı)	0.4 (Değ. Oranı)	0.3 (Değ. Oranı)	0.2 (Değ. Oranı)	
0.0166	0.0461	0.0514	0.0625	0.0723	0.0913	0.1521	0.1543
	0.0495	0.0543	0.0674	0.0766	0.0985	0.1732	0.1673
	(%7)	(%6)	(%8)	(%6)	(%8)	(%14)	(%8)
0.0333	0.0891	0.1098	0.1298	0.1597	0.1917	0.3021	0.1872
	0.0998	0.1236	0.1506	0.1882	0.2257	0.3512	0.2193
	(%12)	(%13)	(%16)	(%18)	(%18)	(%16)	(%17)
0.0500	0.1336	0.1791	0.2153	0.2391	0.3055	0.4477	0.2139
	0.1566	0.1988	0.2495	0.2873	0.3653	0.5211	0.2564
	(%17)	(%20)	(%24)	(%22)	(%20)	(%21)	(%19)
0.0666	0.1988	0.2170	0.2525	0.2992	0.3805	0.5242	0.2712
	0.2583	0.2922	0.3300	0.4082	0.5106	0.6733	0.3275
	(%30)	(%35)	(%31)	(%36)	(%34)	(%28)	(%20)

Çizelge 2.9 PZT-4/St/PZT-4 sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0440	0.0492	0.0591	0.0681	0.0887	0.1503	0.1497
	0.0459	0.0521	0.0598	0.0732	0.0961	0.1701	0.1638
0.0333	0.0787	0.0965	0.1246	0.1362	0.1871	0.2983	0.1831
	0.1251	0.1365	0.1442	0.1841	0.2221	0.3453	0.2121
0.0500	0.1287	0.1654	0.2016	0.2356	0.3041	0.4311	0.1979
	0.1505	0.1918	0.2332	0.2825	0.3598	0.5157	0.2514
0.0666	0.1875	0.2039	0.2411	0.2845	0.3766	0.4855	0.2598
	0.2347	0.2812	0.3288	0.3871	0.4805	0.6557	0.3022

Çizelge 2.10 BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0113	0.0202	0.0319	0.0472	0.0792	0.1648	0.1622
	0.0114	0.0203	0.0320	0.0473	0.0793	0.1654	0.1657
0.0333	0.0293	0.0539	0.0728	0.1039	0.1651	0.3074	0.1644
	0.0321	0.0582	0.0761	0.1083	0.1720	0.3231	0.1701
0.0500	0.0777	0.0950	0.1228	0.1692	0.2538	0.4257	0.1713
	0.0839	0.1022	0.1312	0.1805	0.2715	0.4612	0.1982
0.0666	0.1122	0.1350	0.1702	0.2267	0.3227	0.4974	0.2123
	0.1225	0.1470	0.1849	0.2468	0.3534	0.5533	0.2552

Orta katmanın alüminyum veya çelik olarak seçilmesi durumunda, farklı h_F/ℓ_1 ve ℓ_{10}/ℓ_1 için elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılması neticesinde, orta katmanın çelik olması durumunda elde edilen p_{cr}/c_{44}^{PZT} değerlerinin, orta katmanın alüminyum seçilmesi durumunda elde edilen p_{cr}/c_{44}^{PZT} değerlerinden daha büyük olduğu tespit edilmiştir. Buna ek olarak, orta katmanı aynı malzeme ve dış katmanları farklı PZT malzemeleri için elde edilen sayısal sonuçların birbirleri ile karşılaştırılması neticesinde kritik delaminasyon burkulma kuvveti için

$$p_{cr} / c_{44}^{PZT-5H} > p_{cr} / c_{44}^{PZT-4} > p_{cr} / c_{44}^{BaTiO_3} \quad (2.76)$$

şeklinde bir ilişkinin yazılabileceği görülmüştür.

Şekil 2.7 ve 2.8’de katmanları arasında bant çatlak içeren sandviç dikdörtgen kalın plağın delaminasyon burkulması probleminde (Problem 1), PZT dış tabakalarda kutuplanma yönünün değiştirilmesinin, kritik delaminasyon burkulma kuvvetine etkileri grafik olarak verilmiştir. Sayısal işlemlerde PZT tabakalarının kutuplanma doğrultusu, koordinat eksenleri ile çıkışacak şekilde seçilmiştir. Kutuplanma doğrultusunun değişimi (2.11) ve (2.12) de verilen bünye denklemlerinde Çizelge 2.4’de verilen malzeme, piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin yerleşimi ile sağlanabilmektedir. Buna göre (2.11) ve (2.12) de verilen bünye denklemlerindeki matrisler,

Ox_1 kutuplanma doğrultusu

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{33} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Ox_2 kutuplanma doğrultusu

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}$$

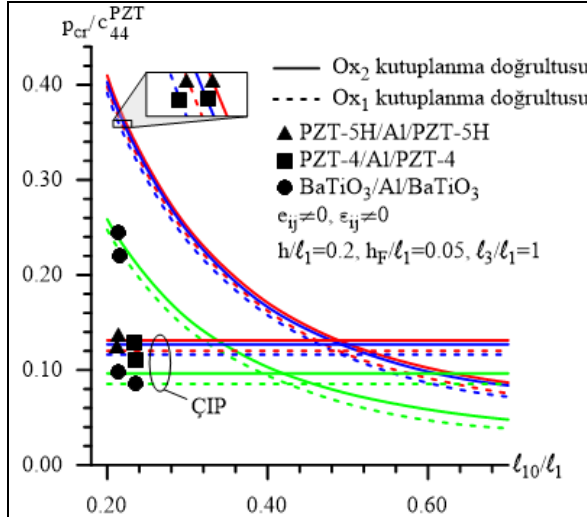
$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Ox_3 kutuplanma doğrultusu

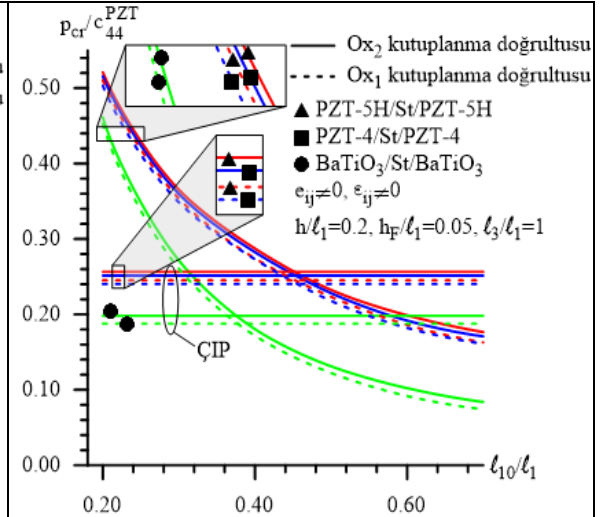
$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

olarak seçilir [74]. Bu matrislerde $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ 'dir.



Şekil 2.7 PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)



Şekil 2.8 PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)

Şekil 2.7 (Şekil 2.8)'de orta katman malzemesi alüminyum (çelik) olması durumunda, PZT dış katman malzemelerinde kutuplanma doğrultusunun Ox_1 (bünye bağıntıları (2.77)) veya Ox_2 (bünye bağıntıları (2.78)) olarak seçilmesinin elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetine etkisi grafik olarak verilmiştir. Bu grafiklerden aynı zamanda kutuplanma doğrultusunun, dış kuvvet doğrultusuna paralel (kutuplanma

doğrultusunun Ox_1) veya dış kuvvet doğrultusuna dik (kutuplanma doğrultusunun Ox_2) seçilmesinin sayısal sonuçlara etkisi de belirlenebilecektir. Şekil 2.7 ve Şekil 2.8’de verilen sayısal sonuçlardan, Ox_2 kutuplanma doğrultusu seçilmesinin (yani, kutuplanma doğrultusunun yüklemeye dik olarak seçilmesi), Ox_1 kutuplanma doğrultusu seçilmesi (yani, kutuplanma doğrultusunun dış kuvvete paralel doğru olarak seçilmesi) durumuna göre elde edilen sayısal sonuçlara daha fazla etki gösterdiği ve kritik değerleri artırdığı tespit edilmiştir. Diğer bir değişle, kutuplanma doğrultusunun dış yüklemeye dik doğru olarak seçilmesi, kritik parametre değerlerine daha fazla etki göstermektedir.

2.3.2 Problem 2 (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri

Bu kısımda, matematiksel modeli (2.28), (2.29), (2.31)-(2.35) ile verilen sınırdeğer probleminin çözümünden elde edilen sayısal sonuçlar ele alınacaktır. Bu problemde, ele alınan plağın piezoelektrik katmanların tüm yüzeylerinde (çatlak yüzeyleri hariç) elektriksel potansiyelin sıfır (kapalı devre (closed-circuit) sınır koşulu) olduğu kabul edilmiştir. Plağın diğer yüzeylerindeki sınır koşulları ile tabakalar arası temas koşulları önceki problem ile aynı alınmıştır.

Problem 2’nin çözümünden elde edilen sayısal sonuçlar Çizelge 2.11-Çizelge 2.16’de yine oran şeklinde verilmiş olup, oranın payı Durum 1 ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$) ve oranın paydası Durum 2 ($e_{ij} \neq 0$; $\varepsilon_{ij} \neq 0$) için bulunan kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerlerini göstermektedir. Bu çizelgelerde verilen sayısal sonuçlar, $h/\ell_1 = 0.2$ ve $\ell_3/\ell_1 = 1$ durumunda farklı piezoelektrik dış katman kalınlığı (h_F/ℓ_1) ve çatlak uzunluğu (ℓ_{10}/ℓ_1) için PZT-5H/Al/PZT-5H (Çizelge 2.11), PZT-4/Al/PZT-4 (Çizelge 2.12), BaTiO₃/Al/BaTiO₃ (Çizelge 2.13), PZT-5H/St/PZT-5H (Çizelge 2.14), PZT-4/St/PZT-4 (Çizelge 2.15) ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ (Çizelge 2.16) malzeme çiftleri için verilmiştir.

Çizelge 2.11 PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0138}{0.0154}$	$\frac{0.0176}{0.0186}$	$\frac{0.0239}{0.0243}$	$\frac{0.0344}{0.0346}$	$\frac{0.0592}{0.0597}$	$\frac{0.1174}{0.1203}$	$\frac{0.1233}{0.1259}$
0.0333	$\frac{0.0340}{0.0435}$	$\frac{0.0422}{0.0521}$	$\frac{0.0555}{0.0662}$	$\frac{0.0790}{0.0912}$	$\frac{0.1246}{0.1403}$	$\frac{0.2286}{0.2528}$	$\frac{0.1234}{0.1267}$
0.0500	$\frac{0.0628}{0.0853}$	$\frac{0.0765}{0.1004}$	$\frac{0.0983}{0.1261}$	$\frac{0.1346}{0.1679}$	$\frac{0.2001}{0.2446}$	$\frac{0.3301}{0.3989}$	$\frac{0.1261}{0.1305}$
0.0666	$\frac{0.0972}{0.1351}$	$\frac{0.1162}{0.1584}$	$\frac{0.1453}{0.1947}$	$\frac{0.1919}{0.2532}$	$\frac{0.2703}{0.3527}$	$\frac{0.4099}{0.5312}$	$\frac{0.1622}{0.1907}$

Çizelge 2.12 PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0120}{0.0131}$	$\frac{0.0151}{0.0160}$	$\frac{0.0204}{0.0209}$	$\frac{0.0298}{0.0301}$	$\frac{0.0494}{0.0498}$	$\frac{0.0998}{0.1078}$	$\frac{0.1177}{0.1186}$
0.0333	$\frac{0.0328}{0.0399}$	$\frac{0.0403}{0.0481}$	$\frac{0.0527}{0.0614}$	$\frac{0.0741}{0.0848}$	$\frac{0.1149}{0.1301}$	$\frac{0.2053}{0.2326}$	$\frac{0.1189}{0.1197}$
0.0500	$\frac{0.0644}{0.0819}$	$\frac{0.0779}{0.0971}$	$\frac{0.0988}{0.1216}$	$\frac{0.1334}{0.1625}$	$\frac{0.1942}{0.2362}$	$\frac{0.3111}{0.3832}$	$\frac{0.1193}{0.1265}$
0.0666	$\frac{0.0881}{0.1256}$	$\frac{0.0998}{0.1490}$	$\frac{0.1342}{0.1857}$	$\frac{0.1822}{0.2443}$	$\frac{0.2593}{0.3231}$	$\frac{0.3954}{0.5121}$	$\frac{0.1512}{0.1665}$

Çizelge 2.11-Çizelge 2.16’de verilen sayısal sonuçlardan, dış katman malzemesinin piezoelektrik seçilmesi, bu katmanların elastik seçilmesi durumunda elde edilen uygun kritik burkulma kuvveti değerlerine göre artışa sebep olmaktadır. Benzeri şekilde piezoelektrik katman kalınlığının yani, h_F/ℓ_1 değerinin artması, kritik burkulma kuvveti değerlerinde artışa ve çatlak uzunluğunun ℓ_{10}/ℓ_1 artması, kritik burkulma kuvveti değerlerinde azalmaya sebep olduğu tespit edilmiştir.

Çizelge 2.13 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox₂ kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0075}{0.0076}$	$\frac{0.0096}{0.0097}$	$\frac{0.0131}{0.0132}$	$\frac{0.0195}{0.0196}$	$\frac{0.0326}{0.0327}$	$\frac{0.0671}{0.0676}$	$\frac{0.0692}{0.0695}$
0.0333	$\frac{0.0213}{0.0227}$	$\frac{0.0265}{0.0281}$	$\frac{0.0351}{0.0369}$	$\frac{0.0501}{0.0523}$	$\frac{0.0790}{0.0823}$	$\frac{0.1451}{0.1515}$	$\frac{0.0697}{0.0704}$
0.0500	$\frac{0.0442}{0.0478}$	$\frac{0.0541}{0.0581}$	$\frac{0.0697}{0.0745}$	$\frac{0.0956}{0.1020}$	$\frac{0.1423}{0.1519}$	$\frac{0.2361}{0.2538}$	$\frac{0.0863}{0.0904}$
0.0666	$\frac{0.0757}{0.0825}$	$\frac{0.0909}{0.0987}$	$\frac{0.1142}{0.1237}$	$\frac{0.1512}{0.1637}$	$\frac{0.2137}{0.2327}$	$\frac{0.3262}{0.3598}$	$\frac{0.1086}{0.1157}$

Çizelge 2.14 PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox₂ kutuplanma doğrultusu)

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0461}{0.0478}$	$\frac{0.0514}{0.0522}$	$\frac{0.0625}{0.0652}$	$\frac{0.0723}{0.0741}$	$\frac{0.0913}{0.0956}$	$\frac{0.1521}{0.1611}$	$\frac{0.1543}{0.1591}$
0.0333	$\frac{0.0821}{0.1153}$	$\frac{0.0998}{0.1291}$	$\frac{0.1298}{0.1419}$	$\frac{0.1397}{0.1755}$	$\frac{0.1917}{0.2132}$	$\frac{0.3021}{0.3402}$	$\frac{0.1872}{0.2082}$
0.0500	$\frac{0.1336}{0.1455}$	$\frac{0.1854}{0.1875}$	$\frac{0.2016}{0.2363}$	$\frac{0.2456}{0.2758}$	$\frac{0.3155}{0.3542}$	$\frac{0.4511}{0.5107}$	$\frac{0.2139}{0.2411}$
0.0666	$\frac{0.1988}{0.2455}$	$\frac{0.2170}{0.2845}$	$\frac{0.2525}{0.3212}$	$\frac{0.2992}{0.3977}$	$\frac{0.3805}{0.5013}$	$\frac{0.5242}{0.6533}$	$\frac{0.2712}{0.3107}$

Aynı zamanda çizelgelerde verilen sayısal sonuçlardan, orta katman malzemesinin çelik seçilmesi durumunda elde edilen sayısal değerlerin, orta katman malzemesinin alüminyum seçilmesi durumunda bulunan sayısal sonuçlardan her zaman büyük olduğu ve Problem 1 için elde edilen (2.76) bağıntısının Problem 2 için de sağlandığı tespit edilmiştir.

Çizelge 2.15 PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

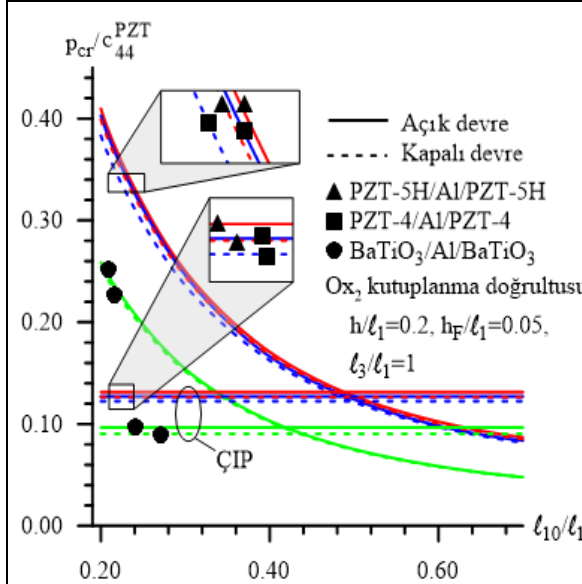
h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0440}{0.0443}$	$\frac{0.0492}{0.0502}$	$\frac{0.0591}{0.0594}$	$\frac{0.0681}{0.0703}$	$\frac{0.0887}{0.0902}$	$\frac{0.1503}{0.1592}$	$\frac{0.1497}{0.1526}$
0.0333	$\frac{0.0787}{0.1093}$	$\frac{0.0965}{0.1206}$	$\frac{0.1246}{0.1351}$	$\frac{0.1362}{0.1692}$	$\frac{0.1871}{0.2088}$	$\frac{0.2983}{0.3344}$	$\frac{0.1831}{0.2009}$
0.0500	$\frac{0.1287}{0.1317}$	$\frac{0.1791}{0.1834}$	$\frac{0.2153}{0.2267}$	$\frac{0.2391}{0.2654}$	$\frac{0.3041}{0.3394}$	$\frac{0.4477}{0.4089}$	$\frac{0.1979}{0.2402}$
0.0666	$\frac{0.1875}{0.2252}$	$\frac{0.2039}{0.2702}$	$\frac{0.2411}{0.3156}$	$\frac{0.2845}{0.3752}$	$\frac{0.3766}{0.4700}$	$\frac{0.4855}{0.6422}$	$\frac{0.2598}{0.2956}$

Çizelge 2.16 BaTiO₃/St/BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri ($h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, Ox_2 kutuplanma doğrultusu)

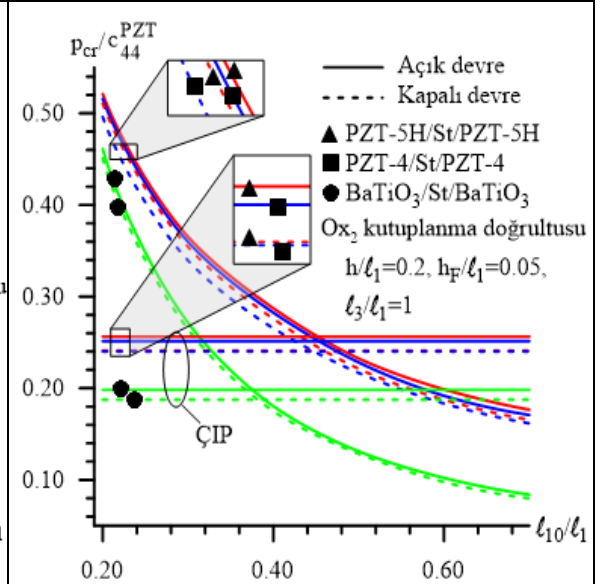
h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0113}{0.0114}$	$\frac{0.0202}{0.0203}$	$\frac{0.0319}{0.0320}$	$\frac{0.0472}{0.0473}$	$\frac{0.0792}{0.0793}$	$\frac{0.1648}{0.1651}$	$\frac{0.1622}{0.1648}$
0.0333	$\frac{0.0293}{0.0299}$	$\frac{0.0539}{0.0556}$	$\frac{0.0728}{0.0747}$	$\frac{0.1039}{0.1071}$	$\frac{0.1651}{0.1677}$	$\frac{0.3074}{0.3123}$	$\frac{0.1644}{0.1675}$
0.0500	$\frac{0.0777}{0.0798}$	$\frac{0.0950}{0.0977}$	$\frac{0.1228}{0.1285}$	$\frac{0.1692}{0.1751}$	$\frac{0.2538}{0.2643}$	$\frac{0.4257}{0.4509}$	$\frac{0.1713}{0.1874}$
0.0666	$\frac{0.1122}{0.1176}$	$\frac{0.1350}{0.1397}$	$\frac{0.1702}{0.1789}$	$\frac{0.2267}{0.2344}$	$\frac{0.3227}{0.3459}$	$\frac{0.4974}{0.5411}$	$\frac{0.2123}{0.2429}$

Şekil 2.9 (Şekil 2.10)'da orta katman alüminyum (çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri için Problem 1 (açık devre sınır koşulu) ve Problem 2 (kapalı devre sınır koşulu) için elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırması verilmiştir. Belirtelim ki, Problem 2'nin Problem 1'den farkı, PZT tabakanın üst ve alt yüzeylerinde elektrik potansiyelin sıfır olarak alınmasıdır. Elektrik potansiyel için ele alınan yeni sınır koşulları, mekaniksel dış kuvvet etkisindeki dikdörtgen kalın plağın kritik parametrelerinde değişime neden olmuştur. Elektrik potansiyele göre seçilen sınır

koşullarının sayısal sonuçlara etkisi, Problem 1 ve Problem 2 için elde edilen sayısal sonuçların birlikte verildiği Şekil 2.9 (orta katman malzemesi alüminyum) ve Şekil 2.10'da (orta katman malzemesi çelik) karşılaştırmalı olarak görülmektedir. Bu şekillerden, Problem 1 çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçların, Problem 2 çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlardan büyük olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, orta katman malzemesinin çelik olması durumunda Problem 1 ve Problem 2 için elde edilen sayısal sonuçlar arasındaki farkın, orta katmanın alüminyum olması durumunda Problem 1 ve Problem 2 için elde edilen uygun sayısal sonuçlar arasındaki farktan büyük olduğu görülmektedir.



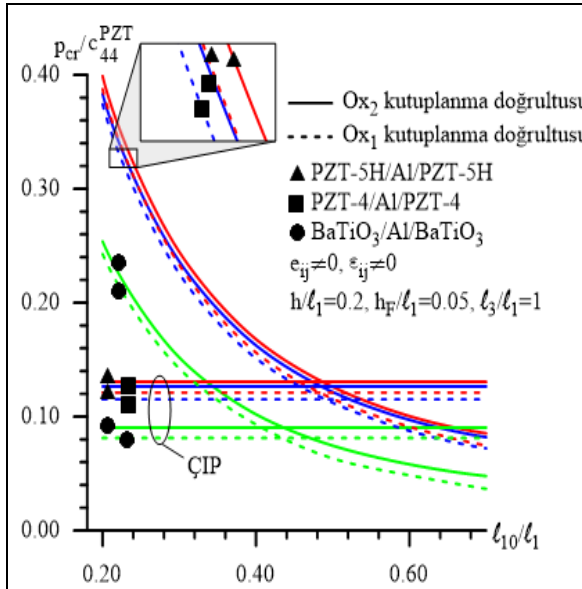
Şekil 2.9 PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 ve Problem 2'den elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)



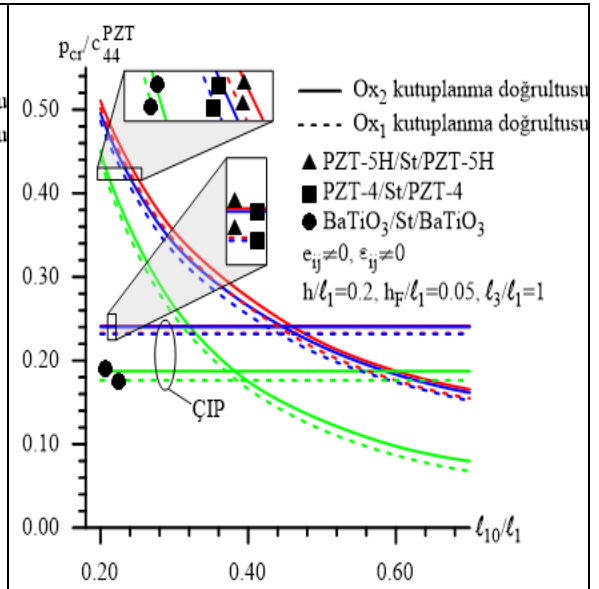
Şekil 2.10 PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 1 ve Problem 2'den elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)

Şekil 2.11 (Şekil 2.12)'de Problem 2 için orta katman alüminyum (çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri için farklı kutuplanma doğrultularının seçiminin sayısal sonuçlara etkisi verilmiştir. Bu şekillerden, Ox_2 kutuplanma

doğrultusu seçilmesi ile elde edilen sayısal sonuçların, Ox_1 kutuplanma doğrultusu seçilmesi ile elde edilen sayısal sonuçlardan daha büyük olduğu görülmüştür. Buna göre dış yüklemeye dik doğrultunun kutuplanma doğrultusu seçilmesi, yüklemeye paralel kutuplanma doğrultusu seçilmesine göre sayısal sonuçlara daha fazla etki etmekte ve kritik parametre değerlerini büyütmektedir. Bununla beraber, orta katmanın malzemesinin çelik seçilmesi (Şekil 2.12), bu katmanın alüminyum olması durumuna (Şekil 2.11) göre kritik parametre değerlerini büyütmeyle beraber, farklı kutuplanma doğrultuları seçiminin sayısal sonuçlara etkisi daha azdır. Yani, kutuplanma doğrultusunun değişiminin sayısal sonuçlara etkisi, orta katmanın alüminyum olması durumunda -bu katmanın çelik olması durumuna göre- daha fazla olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 2.11 PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 2 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)



Şekil 2.12 PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 2 için x_1 ve x_2 kutuplanma yönünden elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)

DİKDÖRTGEN KENAR ÇATLAK İÇEREN PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASI

Bu bölümde, tez çerçevesinde ele alınan sandviç kalın plağın tabakaları arasında birbirine paralel ve aynı ölçülerde kenar çatlakların olması durumuna ait bazı sınırdeğer problemlerin matematiksel modeli, sayısal çözümü ve elde edilen sayısal sonuçların analizi verilecektir. İncelemelerde, piezoelektrik dış katmanlar ve elastik orta tabakadan oluştuğu kabul edilen sandviç dikdörtgen kalın plağın, orta ve dış tabakaları arasında bulunan özdeş, birbirine paralel iki adet kenar çatlağın yüzeylerinin başlangıçta çok küçük ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Ele alınan bazı sınır koşulları çerçevesinde modellenen sandviç kalın plağa ait delaminasyon burkulma problemleri, çatlak yüzeylerinde var olduğu kabul edilen çok küçük ön eğintilerin, statik dış basınç kuvveti etkisinde gelişiminin incelenmesine dönüştürülmesi ve kritik parametre değerlerinin belirlenmesi yine “küçük başlangıç eğinti kriteri” çerçevesinde yapılacaktır [1].

3.1 Ele Alınan Problemin Formülasyonu

Bu bölümde ele alınan sınırdeğer problemleri, bir önceki bölümde verilen sınırdeğer probleminden, sınır koşulları ve çatlak geometrisi açılarından farklılık göstermektedir. Bu farklılıkların bir önceki bölümde verilen matematiksel modelde göz önüne alınması ile ele alınan sınırdeğer problemlerine ait matematiksel model elde edilebilir. Dolayısıyla, bu bölümde ele alınan problemlerin matematiksel modeli, Elektro-Elastisite teorisinin geometrik lineer olmayan üç boyutlu kesin alan denklemleri kullanılarak,

parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Dikdörtgen kenar çatlaklar içeren sandviç kalın plağın geometrisi ve yükleme durumu Şekil 3.1’de verilmiştir.

Ele alınan sınırdeğer probleminin çözüm bölgesi,

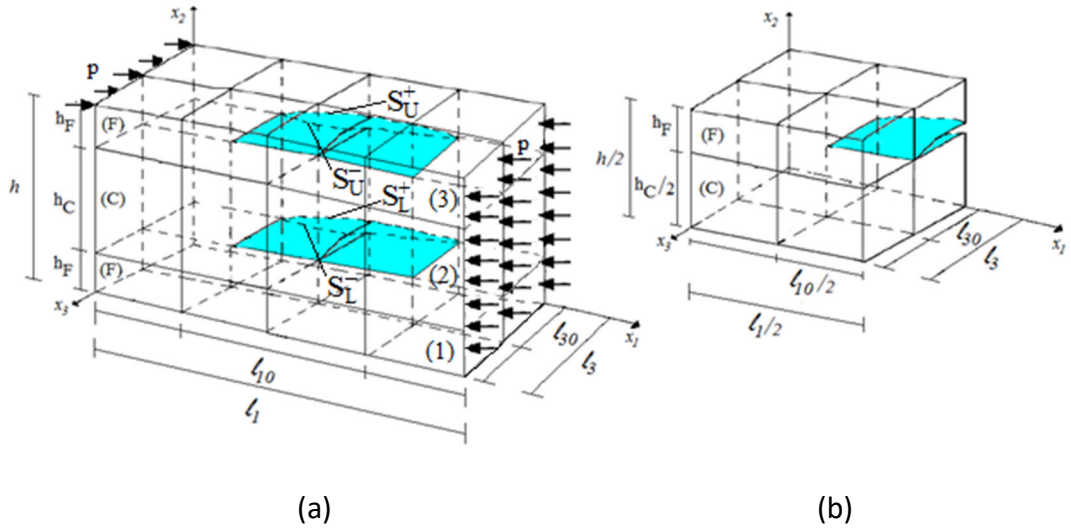
$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 - S_L^{\mp} - S_U^{\mp} \quad (3.1)$$

burada,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ \Omega_2 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ \Omega_3 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ S_L^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ S_U^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

dir. (3.1) ve (3.2)’de Ω_1 , Ω_2 ve Ω_3 ’ler sırasıyla alt, orta ve üst katmanları (tabakaları);

$S_L^{\mp}(S_U^{\mp})$ alt ve orta (orta ve üst) tabakalar arasında yer alan çatlağın alt (üst indis “-” yani, $S_L^-(S_U^-)$) ve üst (üst indis “+” yani, $S_L^+(S_U^+)$) yüzeylerini temsil etmektedir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Kenar çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi

(a) Çözüm bölgesinin tamamı (b) Çözüm bölgesinin ¼’lük kısmı

Ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin incelenebilmesi için “küçük başlangıç eğinti kriteri” [1] kullanılacaktır. Bu nedenle çatlak yüzeylerinin, yükleme yapılmadan

önce, çok küçük ön eğrilığe sahip olduğu ve bu eğriliklerin alt çatlak için $x_2 = h_F$ ile $x_1 = \ell_1 / 2$ ve üst çatlak için $x_2 = h_F + h_C$ ile $x_1 = \ell_1 / 2$ düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Buna göre çatlak yüzeylerinin denklemleri $(\ell_1 - \ell_{10}) / 2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10}) / 2$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_{30}$ için

$$x_2^{\mp} = h_F + \varepsilon f^{\mp}(x_1, x_3) \text{ ve } x_2^{\mp} = h_F + h_C + \varepsilon f^{\mp}(x_1, x_3) \quad (3.3)$$

olarak seçilir. (3.3)'te ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen ön eğrilığın (eğintinin) derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametreyi; $f(x_1, x_3)$, bu ön eğintinin formunu gösteren fonksiyonu; üst indis "+" ("−"), ele alınan çatlağın üst (alt) yüzeyine ait büyüklükleri; ℓ_{10} , çatlağın Ox_1 eksenine doğrultusundaki uzunluğunu; ℓ_{30} , çatlağın Ox_3 eksenine doğrultusundaki uzunluğunu; h_F ve h_C , sırasıyla dış tabakaların ve orta tabakanın kalınlıklarını göstermektedir. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned} f^+(x_1, x_3) &= -f^-(x_1, x_3), f^{\mp}(x_1, \ell_{30})|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0, \\ f^{\mp}((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} &= f^{\mp}((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} = 0, \\ \frac{df^{\mp}((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} &= \frac{df^{\mp}((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{30}} = 0, \\ \frac{df^{\mp}(x_1, \ell_{30})}{dx_1} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} &= 0, \frac{df^{\mp}(x_1, \ell_{30})}{dx_3} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitliklerini sağladığı kabul edilmektedir.

(3.3) denklemleri çatlak yüzeylerinin denklemleridir. Bu yüzeyin parametrik denklemi $x_1 = s_1$, $x_2 = F(s_1, s_3) = K + \varepsilon f^{\mp}(s_1, s_3)$, $x_3 = s_3$ ($K = h_F; h_F + h_C$) için bu yüzeyin birim normal vektörünün bileşenleri, (2.6)-(2.8) yardımıyla ε 'a bağlı kuvvet serisi olarak ifade edilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} n_1^{\mp} &= \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r+1} n_{1r}^{\mp}(x_1, x_3), n_2^{\mp} = \mp 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r} n_{2r}^{\mp}(x_1, x_3), \\ n_3^{\mp} &= \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r+1} n_{3r}^{\mp}(x_1, x_3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. Bu ifadeler, çatlak yüzeyi üzerinde sınır koşullarının elde edilmesinde ileride kullanılacaktır.

3.1.1 Alan denklemleri

Dış tabakaları ile orta tabakası arasında paralel özdeş dikdörtgen çatlaklar içeren PZT dikdörtgen sandviç kalın plak için (3.1) çözüm bölgesinde sağlanan yönetici denklemler, her r_n ($n=1,2,3$) katman için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ji}^{(r_n)}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \\ K_{ji}^{(r_n)} &= T_{jk}^{(r_n)} \left(\delta_i^k + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) + M_{ji}^{(r_n)}, D_i^{(r_n)} = e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \\ T_{ij}^{(r_n)} &= c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, s_{kl}^{(r_n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) \\ M_{ji}^{(r_n)} &= \varepsilon_0 \left(E_i^{(r_n)} E_j^{(r_n)} - \frac{1}{2} E_k^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \delta_i^j \right), E_k^{(r_n)} = -\frac{\partial \phi^{(r_n)}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Bünye denklemleri,

$$\begin{aligned} \{T\} &= [C]\{s\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} &= [e]\{s\} + [\varepsilon]\{E\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak verilebilir [74]. (3.6)'de bilinen notasyonlar kullanılmıştır. (3.7) eşitliklerinde verilen matrisler sırasıyla (2.11) ve (2.12) de verilmiştir. Bu kısımda kullanılan sembollerin açıklaması detaylı olarak Kısım 2.1.1'de verildiği için burada tekrar edilmeyecektir.

3.1.2 Mekaniksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları

Bu kısımda ele alınan delaminasyon burkulma problemi için ele alınan plağın mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları; üç yanal yüzeyinden basit mesnetli ve sadece $x_1=0; \ell_1$ yüzeylerinden statik dış basınç kuvvetine maruz olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, plağın alt/üst ve çatlak yüzeylerinden herhangi bir dış kuvvetin etki etmediği kabul edilmektedir. Buna göre mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
u_2^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n)}|_{x_3=\ell_3} = 0, \\
K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=0} &= K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=\ell_1} = p, K_{13}^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} = 0 \\
K_{31}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} &= K_{33}^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = K_{32}^{(r_n)}|_{x_3=0} = 0, \\
K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h} &= K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=0} = 0, \\
K_{ji}^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= K_{ji}^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \\
K_{ji}^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ &= K_{ji}^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0, \quad i, j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak verilebilir.

Mekaniksel büyüklüklere göre sandviç kalın plağın tabakaları arasındaki ideal temas koşulları $\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\}$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ ile $(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2$ ve $\ell_{30} \leq x_3 \leq \ell_3$ için

$$\begin{aligned}
K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\
K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak sağlandığı kabul edilmektedir.

3.1.3 Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları

Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları dikdörtgen plağın dış tabakaları için yani piezoelektrik levhaların sınırlarında geçerli olacaktır. Plağın orta tabakası elastik malzemeden yapıldığı için orta tabakanın sınırlarında geçerli değildir. Bununla beraber matematik modelin genel olması açısından, her üç tabakanın piezoelektrik malzemeden yapılmış olması durumu için sınır ve temas koşulları verilmiştir ancak, sayısal hesaplamalarda orta tabakanın PZT olmadığı durumu göz önünde bulundurularak işlemler yapılmıştır.

Bir önceki bölümde olduğu gibi bu kısımda da elektriksel büyüklüklere göre iki farklı sınır koşulu için incelemeler yapılmıştır. Ele alınan sınır koşulları ile temas koşullarına ait matematiksel modelleme aşağıda verilmiştir.

A-Açık-devre sınır koşulu ve temas koşulları

Ele alınan PZT dikdörtgen plağın (PZT levhaların) tüm yanal yüzeylerinde elektrik potansiyelin sıfır olduğu yani, levhanın yanal yüzeylerinin yalıtkan olduğu kabul

edilmektedir. Ancak PZT levhaların üst ve alt yüzeylerinden Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yerdeğiştirmenin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Yani belirtilen yüzeylerin yalıtkan olmadığı (elektrik akımının mümkün olabildiği) durum “açık devre” koşulu olarak adlandırılmaktadır. Tabakalar arası temas koşulu için bu ara yüzeylerde elektriksel potansiyelin ve Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yerdeğiştirmelerin eşitliği kabul edilmektedir. İlave olarak çatlakların içinin boş yani vakumlu olduğu kabul edilmiştir. Bu kabullere ait sınır ve temas koşullarının matematiksel modeli;

Sınır koşulları

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ D_2^{(r_1)}|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3)}|_{x_2=h} = 0, D_j^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ = D_j^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \\ D_j^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ &= D_j^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Temas koşulları $\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\}$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ ile $(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2$ ve $\ell_{30} \leq x_3 \leq \ell_3$ için

$$\begin{aligned} \phi^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C} \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak verilebilir.

B-Kapalı-devre sınır koşulu ve temas koşulları

Ele alınan kapalı-devre sınır koşullarında, PZT levhaların tüm dış yüzeylerinde (alt, üst yanal yüzeyler ile çatlak yüzeylerinde) elektrik potansiyelin sıfır olduğu yani, plağın tüm yüzeylerinden yalıtkan olduğu (sınırlardan elektrik geçişinin mümkün olmadığı) durum “kapalı devre” koşulu olarak kabul edilmektedir. Tabakalar arası temas koşulları kapalı-devre sınır koşulu durumu için de geçerlidir. Verilenlere göre matematiksel modelleme

Sınır koşulları

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n),1}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \phi^{(r_1)}|_{x_2=0} = 0, \phi^{(r_3)}|_{x_2=h} = 0, \\ \phi^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= \phi^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \phi^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = \phi^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Temas koşulları $\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\}$ ve $0 \leq x_3 \leq \ell_3$ ile $(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2$ ve $\ell_{30} \leq x_3 \leq \ell_3$ için

$$\begin{aligned} \phi^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olarak verilebilir.

3.2 Ele Alınan Problemin Çözümü: Lineerleştirme İşlemleri

Ele alınan bu sınırdeğer problemleri dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı metal (elastik) malzemeden yapılmış ve katmanlar arasında dikdörtgen kenar çatlak olan piezoelektrik dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde, çatlaklar civarında oluşan delaminasyon burkulma problemini temsil etmektedir. Ele alınan problem nonlinear bir problemidir. Bu nonlinear problemin çözümü, Kısım 2.2 de verildiği gibi, lineerleştirme işlemleri sonucunda lineer seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenecektir [18], [20], [25]. Aranacak büyüklükler, boyutsuz küçük parametre olan ε 'a göre seri formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{\sigma_{ij}^{(r_n)}; \varepsilon_{ij}^{(r_n)}; u_i^{(r_n)}; D_i^{(r_n)}; E_i^{(r_n)}; \phi^{(r_n)}\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{\sigma_{ij}^{(r_n),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_n),q}; u_i^{(r_n),q}; D_i^{(r_n),q}; E_i^{(r_n),q}; \phi^{(r_n),q}\}, \varepsilon \ll 1. \quad (3.14)$$

(3.14) ifadeleri ele alınan açık devre (kapalı devre) durumuna ait problem için (3.6)-(3.12) ile (3.10) ve (3.11) ((3.6)-(3.12) ile (3.12) ve (3.13)) alan denklemleri, sınır ve temas koşullarında yerine yazılır ve (3.5) göz önünde bulundurularak ε 'un kuvvetlerine göre gruplaştırılırsa, her bir problem için bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş alan denklemleri, sınır ve temas koşullarından oluşan seri-sınırdeğer problemleri elde edilir. Anlaşılır olması açısından, ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenmiş her bir sınırdeğer problemi, ε 'nın kuvvetine göre isimlendirilecektir. Örneğin sıfırıncı, birinci, vb. sınırdeğer problemi (veya yaklaşım). Ele alınan lineer olmayan delaminasyon burkulma probleminin çözümü, (3.14) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinin çözümlerinin süperpozisyonu olarak elde edilecektir.

Belirtelim ki, sıfırncı yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar da nonlinear olarak elde edilmektedir. Bu nedenle, bilinen mekaniksel görüşler doğrultusunda ele alınan katı cisim için $\delta_i^n + \partial u_i^{(0)} / \partial x_n \approx \delta_i^n$ kullanılarak, sıfırncı yaklaşıma ait lineer olmayan denklem ve bağıntılar, uygun lineer denklem ve bağıntılar ile yer değiştirmiş olur. Buna göre sıfırncı yaklaşım için alan denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ji}^{(r_n),0}}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial D_j^{(r_n),0}}{\partial x_j} = 0, \quad T_{ij}^{(r_n),0} = c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n),0} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n),0}, \\ D_i^{(r_n),0} &= e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n),0} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n),0}, \quad E_k^{(r_n),0} = -\frac{\partial \phi^{(r_n),0}}{\partial x_k}, \\ s_{kl}^{(r_n),0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n),0}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n),0}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u_2^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n),0} \big|_{x_3=\ell_3} = 0, T_{11}^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} = p, \\ T_{13}^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= T_{31}^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = T_{33}^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ T_{2i}^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} &= T_{2i}^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları

i) Açık devre sınır koşulları

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ D_2^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

ii) Kapalı devre sınır koşulları

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ \phi^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} &= \phi^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\} &\quad \text{ve} \quad 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \quad \text{ile} \\ (\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 &\quad \text{ve} \quad \ell_{30} \leq x_3 \leq \ell_3 \quad \text{için;} \end{aligned}$$

mekanik alan büyüklüklerine göre temas koşulları,

$$\begin{aligned}
T_{2i}^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} &= T_{2i}^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, \\
T_{2i}^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= T_{2i}^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elektrik alan büyüklüklerine göre temas koşulları,

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, \\
\phi^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. Benzer şekilde birinci yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar aşağıda verilmiştir. Buna göre;

Alan denklemleri,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{ji}^{(r_n),1}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n),1}}{\partial x_j} = 0, K_{ji}^{(r_n),1} = G_{jikm}^{(r_n)} \frac{\partial u_m^{(r_n),1}}{\partial x_k} - R_{mji}^{(r_n)} E_m^{(r_n),1}, \\
D_k^{(r_n),1} &= R_{kji}^{(r_n)} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} - L_{kj}^{(r_n)} E_j^{(r_n),1}, G_{jikm}^{(r_n)} = c_{jikm}^{(r_n)} + T_{jk}^{(r_n),0} \delta_i^m, \\
L_{kj}^{(r_n)} &= \varepsilon_{kj}^{(r_n)}, R_{kji}^{(r_n)} = \varepsilon^{(r_n)} + \varepsilon_0 \left(E_k^{(r_n),0} \delta_i^j - E_j^{(r_n),0} \delta_i^k - E_m^{(r_n),0} \delta_i^m \delta_j^k \right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
u_2^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n),1} \big|_{x_3=\ell_3} = 0, K_{11}^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} = K_{13}^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \\
K_{31}^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} &= K_{33}^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} = K_{32}^{(r_n),1} \big|_{x_3=0} = 0, K_{2i}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h} = K_{2i}^{(r_1),1} \big|_{x_2=0} = 0,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elektiriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları,

i) Açık-devre sınır koşulları

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h} = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ii) Kapalı-devre sınır koşulları

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_n),1} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),1} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
\phi^{(r_1),1} \big|_{x_2=0} &= 0, \phi^{(r_3),1} \big|_{x_2=h} = 0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$x_1 \in \left(\frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2}, \frac{\ell_1 + \ell_{10}}{2} \right) \text{ ve } x_3 \in (0, \ell_{30}) \text{ için};$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları,

$$\begin{aligned} K_{2i}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F-0} &= -T_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \delta_i^1, K_{2i}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+0} = -T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \delta_i^1, \\ K_{2i}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C-0} &= -T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \delta_i^1, K_{2i}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C+0} = -T_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \delta_i^1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Elektriksel alan büyüklüklerine göre çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları,

$$\begin{aligned} D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F-0} &= -D_1^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+0} = -D_1^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \\ D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C-0} &= -D_1^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C+0} = -D_1^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\} \quad \text{ve} \quad 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \quad \text{ile}$$

$$(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \quad \text{ve} \quad \ell_{30} \leq x_3 \leq \ell_3 \quad \text{için};$$

mekaniksel alan büyüklüklerine temas koşulları,

$$\begin{aligned} u_i^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= u_i^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\ \left(T_{21}^{(r_1),1} + T_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial u_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F} &= \left(T_{21}^{(r_2),1} + T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F}, \\ T_{22}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= T_{22}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, T_{23}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} = T_{23}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, \\ \left(T_{21}^{(r_3),1} + T_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial u_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F+h_C} &= \left(T_{21}^{(r_2),1} + T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F+h_C}, \\ T_{22}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= T_{22}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, T_{23}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = T_{23}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

elektriksel alan büyüklüklerine göre temas koşulları,

$$\begin{aligned} \phi^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = \phi^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\ D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde. İkinci ve daha sonraki yaklaşımlara ait denklem ve bağıntılar benzer yolla elde edilebilir. Ancak ele alınan problem çerçevesinde sıfıncı ve birinci yaklaşımın incelenmesi yeterli olduğu için sadece bu yaklaşımların verilmesi ile yetinilecektir [25].

3.2.1 Sıfıncı yaklaşımın çözümü

Bu kısımda (3.14) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinden matematiksel modeli (3.16)-(3.17), (3.19) ile (3.20) (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer problemi) ve (3.16)-(3.16) ile (3.18)-(3.20) (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer problemi) ile verilen sıfıncı yaklaşıma ait sınırdeğer problemlerinin çözümü ele alınacaktır. Buna göre dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı metal (elastik) ve katmanlar arası kenar çatlak içeren bir dikdörtgen kalın plak ele alınmaktadır (Şekil 3.1).

Bu yaklaşıma ait sınırdeğer problemi için yapıda bulunan çatlaklar gerilme durumuna etki etmediğinden; sıfıncı yaklaşımın çözümü, çatlak içermeyen uygun dikdörtgen plak için yapılmaktadır. Dolayısıyla, bu kısımda incelenen sıfıncı yaklaşımın çözümü Kısım 2.2.1 de verilen çözüm ile aynı olacağından, bu kısımda çözüm tekrar edilmeyecektir.

3.2.2 Birinci yaklaşımın çözümü

Bu kısımda, (3.14) yardımıyla elde edilen birinci yaklaşıma ait ve matematiksel modeli (3.21)-(3.23) ile (3.25) - (3.28) (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer problemi) ve (3.21)-(3.22) ile (3.24)-(3.28) (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer problemi) ile verilen sınırdeğer problemlerinin çözümü ele alınacaktır. Belirtelim ki, (3.21), (3.25)-(3.27) denklem, sınır ve temas koşullarında verilen “0” üst indisli büyüklükler, sıfıncı yaklaşıma ait büyüklükleri göstermektedir. Yani birinci yaklaşımın çözümünü elde edebilmek için önce bir önceki bölümde olduğu gibi, sıfıncı yaklaşım çözümlidir. Dolayısıyla, sıfıncı yaklaşıma ait büyüklükler önceden bulunur ve birinci yaklaşımda yerine yazılarak, ele alınan birinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü yapılabilir. Birinci yaklaşımın çözümü, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak yapılacaktır.

Ele alınan problemlerin çözümünde, yöntem gereği çözüm bölgesi sonlu eleman adı verilen alt bölgelere ayrılır. Sonlu eleman ayrıklaştırması adı verilen bu işlem ile çözüm bölgesi, dörtgen prizma şeklinde sonlu elemanlar ile ayrıklaştırılmıştır. Her sonlu elemanın nodlarında bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yerdeğiştirmeler ile elektrik potansiyeli ϕ seçilmiştir. Sonlu eleman modellemesi için cisimde biriken toplam elektro-mekanik enerjiyi ifade eden Π fonksiyoneli,

$$\begin{aligned}
\Pi\left(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1}\right) = & \sum_{n=1}^3 \iiint_{\Omega_n} \left[\frac{1}{2} G_{ijkl}^{(r_n),1} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(r_n),1}}{\partial x_l} + R_{ijk}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(r_n),1}}{\partial x_k} - \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_l} \right] d\Omega_n - \iint_{S_L^-} T_{11}^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_L^+} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_U^+} T_{11}^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_L^-} D_1^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_L^+} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_U^+} D_1^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3
\end{aligned} \tag{3.29}$$

kullanılacaktır [74]. Belirtelim ki, (3.29) fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden yani,

$$\begin{aligned}
\delta \Pi\left(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1}\right) = & \frac{\partial \Pi}{\partial u_1^{(r_n),1}} \delta u_1^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2^{(r_n),1}} \delta u_2^{(r_n),1} \\
& + \frac{\partial \Pi}{\partial u_3^{(r_n),1}} \delta u_3^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi^{(r_n),1}} \delta \phi^{(r_n),1} = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

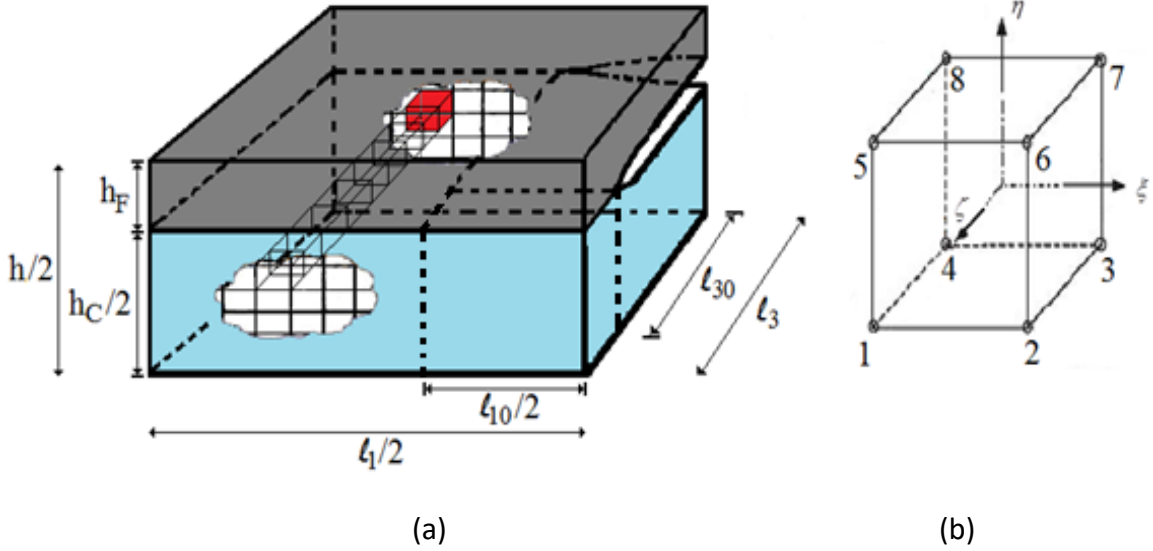
eşitliğinden (3.21) alan denklemleri ile (3.22)-(3.26) sınır koşullarında, gerilmelere ve elektriksel yerdeğiştirmelere göre verilen sınır koşulları elde edilir.

Sonlu elemanlar modellemesi, plak geometrisinin ve sınır koşullarının $x_2 = h_F + h_C / 2$ ve $x_1 = \ell_1 / 2$ düzlemlerine göre simetrik olmasından yararlanılarak, çözüm bölgesinin 1/4 kısmında yapılmıştır. Buna göre her Ω_i (Ω_i (i=2,2,3)'ler (3.2)'de verilmiştir) katmanın kendi içerisinde ayrı olmak üzere sonlu eleman ayrıklaştırması, $V = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1 / 2; h_F + h_C / 2 \leq x_2 \leq 2h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}$ için

$V = \bigcup_{k=1}^M V_k$ olacak şekilde toplam M adet 8 nodlu standart dikdörtgen prizmatik V_k

sonlu elemanlarına ayrıklaştırılır (Şekil 3.2). Burada M kullanılan toplam sonlu eleman adedini göstermektedir ve değeri, sayısal sonuçların farklı M değerleri için yakınsaklığına göre ayrıca belirlenecektir. Tez kapsamında ele alınan V çözüm bölgesi,

x_1 yönünde N_x , x_2 yönünde N_y ve x_3 yönündeki N_z adet sonlu elemana ayrılaştırılmıştır. Dolayısıyla ayrılaştırmada kullanılan toplam sonlu eleman sayısı $M = N_x * N_y * N_z$ bulunur.



Şekil 3.2 (a) Çözüm bölgesinin ¼'ünün sonlu elemanlara ayrılaştırılması (b) Kullanılan sonlu elemanların geometrisi (örnek eleman)

Bu bölümde ele alınan problemin birinci yaklaşımına ait çözüm, 2. Bölüm, Kısım 2.2.2'de verildiği gibi uygulanmış olup, bu kısımda ayrıca verilmeyecektir.

3.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

Ele alınan sandviç kalın plağın tabakaları arasında kenar çatlakların olması durumuna ait sayısal sonuçların verilmesinden önce, yapılan algoritma ve programların doğruluğunun test edildiği, test problemlerine ait sayısal sonuçlar Çizelge 3.1'de verilmiştir. Bu çizelgede verilen sayısal sonuçlar farklı l_{30}/l_1 için $h/l_1 = 0.15$ ve $l_3/l_1 = 1$ için plağın tüm katmanları alüminyum alınarak belirlenmiştir. Belirtelim ki, $l_{30}/l_1 = 0.3$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar ile aynı durumda [20] de verilen sayısal sonuçlar ile tamamen üst üste düşmektedir. Ayrıca, x_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu artırıldıkça yani çatlak, bant çatlak durumuna yaklaştırıldıkça, kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerlerinin azalarak, bant çatlak durumundaki değere yaklaştığı görülmektedir [20]. Dolayısıyla, burada verilen veya verilmeyen çok sayıdaki, karşılaştırma-doğrulama testleri sonucunda tarafımızdan yapılan algoritma ve

programlara güven teyit edilmiş olmaktadır. Bu kısımda incelenen, kenar çatlak içeren sandviç dikdörtgen kalın plağın çatlak yüzeylerinin ön eğintisini temsil eden (3.3)'te verilen ve (3.4) koşullarını sağlayan $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu

$$f(x_1, x_3) = A\ell_{10} \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell_{10}}\left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2}\right)\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2\ell_{30}}(x_3 - \ell_{30})\right) \quad (3.31)$$

olarak seçilmiştir.

Çizelge 3.1 İzotrop alüminyum plak için farklı dış katman kalınlıkları ve farklı x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri

$$\left(p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \right)$$

h_F / ℓ_1	ℓ_{30} / ℓ_1							Bant çatlak [20]
	0.3 Akbarov vd. [20]	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
0.03750	0.0300	0.0242	0.0220	0.0210	0.0204	0.0201	0.0198	0.0217
0.04375	0.0375	0.0304	0.0277	0.0263	0.0256	0.0252	0.0249	0.0275
0.05000	0.0454	0.0370	0.0337	0.0321	0.0312	0.0307	0.0303	0.0336
0.05625	0.0536	0.0439	0.0400	0.0381	0.0370	0.0364	0.0360	0.0400

3.3.1 Problem 3 (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri

Ele alınan plakta x_2 kutuplanma yönü ve açık devre sınır koşulları sağlandığı durum için yani, (3.21)-(3.23), (3.25)-(3.28) sınırdeğer problemi çerçevesinde (Problem 3) elde edilen sayısal sonuçlar, Çizelge 2.4'de verilen PZT malzeme sabitleri kullanılarak ve farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için verilmiştir. Çizelge 3.2'de $h / \ell_1 = 0.2$, $h_F / \ell_1 = 0.05$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$ için x_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları ve farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için kenar çatlak içeren PZT dikdörtgen kalın plakların

delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerleri $e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ (Durum 1) ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2) durumlarında ayrı ayrı verilmiştir. Bu çizelgede verilen sayısal sonuçlardan x_3 yönündeki çatlak uzunluğu arttıkça, kritik değerin azaldığı görülmektedir.

Çizelge 3.2 Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri ve kenar çatlak boyutları için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri $p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{Durum 1 (e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{Durum 2 (e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$
 $(h / \ell_1 = 0.2, h_F / \ell_1 = 0.05, \ell_{10} / \ell_1 = 0.5)$

	ℓ_{30} / ℓ_1						ÇİP
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
PZT-5H/Al/ PZT-5H	$\frac{0.1078}{0.1310}$	$\frac{0.0985}{0.1173}$	$\frac{0.0941}{0.1109}$	$\frac{0.0916}{0.1078}$	$\frac{0.0900}{0.1059}$	$\frac{0.0890}{0.1046}$	$\frac{0.1261}{0.1413}$
PZT4/Al/ PZT-4	$\frac{0.1077}{0.1264}$	$\frac{0.0980}{0.1138}$	$\frac{0.0933}{0.1082}$	$\frac{0.0907}{0.1051}$	$\frac{0.0891}{0.1034}$	$\frac{0.0880}{0.1024}$	$\frac{0.1193}{0.1271}$
BaTiO ₃ /Al/ BaTiO ₃	$\frac{0.0748}{0.0789}$	$\frac{0.0681}{0.0717}$	$\frac{0.0648}{0.0683}$	$\frac{0.0631}{0.0662}$	$\frac{0.0620}{0.0652}$	$\frac{0.0612}{0.0644}$	$\frac{0.0863}{0.0965}$
PZT-5H/St/ PZT-5H	$\frac{0.2227}{0.2675}$	$\frac{0.2023}{0.2332}$	$\frac{0.1926}{0.2179}$	$\frac{0.1873}{0.2098}$	$\frac{0.1839}{0.2052}$	$\frac{0.1818}{0.2022}$	$\frac{0.2139}{0.2564}$
PZT-4/St/ PZT-4	$\frac{0.2089}{0.2441}$	$\frac{0.1885}{0.2147}$	$\frac{0.1786}{0.2014}$	$\frac{0.1733}{0.1945}$	$\frac{0.1699}{0.1902}$	$\frac{0.1677}{0.1879}$	$\frac{0.1979}{0.2514}$
BaTiO ₃ /St/ BaTiO ₃	$\frac{0.1351}{0.1423}$	$\frac{0.1224}{0.1281}$	$\frac{0.1163}{0.1213}$	$\frac{0.1128}{0.1178}$	$\frac{0.1108}{0.1153}$	$\frac{0.1095}{0.1140}$	$\frac{0.1713}{0.1982}$

Çizelge 3.3-3.8'de verilen sayısal sonuçlar $h / \ell_1 = 0.2, \ell_{30} / \ell_1 = 0.3, \ell_3 / \ell_1 = 1$ durumunda, farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri ve PZT dış katman kalınlıkları ile Ox_1 yönündeki farklı çatlak uzunlukları (ℓ_{10} / ℓ_1) için $e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ (Durum 1-Elastik plak) ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2-PZT plak) durumlarında ayrı ayrı elde edilmiştir. Belirtelim ki, ele alınan dikdörtgen plağın herhangi bir çatlak içermemesi (Çatlak içermeyen Plak-ÇİP) durumu ve açık devre sınır koşullu problem için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetine ait Çizelge 3.3-Çizelge 3.8'de yer verilen sayısal sonuçlar, Kısım 2.3.1'de Çizelge 2.5-Çizelge 2.10 da verilen sayısal sonuçlar ile aynıdır.

Çizelge 3.3 PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0291	0.0300	0.0331	0.0422	0.0639	0.1201	0.1233
	0.0379	0.0428	0.0433	0.0480	0.0654	0.1242	0.1277
0.0333	0.0637	0.0669	0.0754	0.0945	0.1361	0.2369	0.1234
	0.0945	0.0969	0.0996	0.1136	0.1528	0.2551	0.1301
0.0500	0.1114	0.1173	0.1314	0.1603	0.2190	0.3437	0.1261
	0.1592	0.1613	0.1691	0.1939	0.2536	0.3881	0.1413
0.0666	0.1658	0.1737	0.1915	0.2275	0.2960	0.4279	0.1622
	0.2225	0.2257	0.2389	0.2741	0.3491	0.4999	0.2004

Çizelge 3.4 PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0269	0.0273	0.0297	0.0367	0.0542	0.1027	0.1177
	0.0339	0.0356	0.0362	0.0408	0.0563	0.1037	0.1201
0.0333	0.0638	0.0661	0.0730	0.0895	0.1257	0.2114	0.1189
	0.0852	0.0865	0.0899	0.1041	0.1408	0.2338	0.1231
0.0500	0.1156	0.1201	0.1323	0.1584	0.2111	0.3201	0.1193
	0.1497	0.1517	0.1603	0.1854	0.2431	0.3691	0.1271
0.0666	0.1765	0.1829	0.1993	0.2329	0.2691	0.4149	0.1512
	0.2190	0.2227	0.2372	0.3471	0.3471	0.4925	0.1872

Çizelge 3.3-Çizelge 3.8’de farklı malzeme çiftleri, farklı dış katman kalınlıkları ile farklı Ox_1 yönündeki çatlak uzunlukları için Problem 3 durumunda elde edilen kritik burkulma kuvvet değerleri verilmiştir. Bu çizelgelerde verilen sayısal sonuçlar Ox_1

yönündeki farklı çatlak uzunlukları ve dış katman kalınlıkları ile PZT-5H/Al/PZT-5H (Çizelge 3.3), PZT-4/Al/PZT-4 (Çizelge 3.4), BaTiO₃/Al/BaTiO₃ (Çizelge 3.5), PZT-5H/St/PZT-5H (Çizelge 3.6), PZT-4/St/PZT-4 (Çizelge 3.7) ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ (Çizelge 3.8) malzeme çiftleri için verilmiştir. Bu çizelgelerde sayısal sonuçlar kesir şeklinde verilmiş olup; kesirlerin payındaki sayısal değer $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ (Durum 1) ve paydasındaki sayısal değer $e_{ij} \neq 0; \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2) için elde edilen sayısal sonuçları göstermektedir. Kesirlerin payında verilen sayısal sonuçlar ile paydasında verilen sayısal sonuçlar, elektriksel alan ile mekanik alanların karşılıklı etkisinin, kritik delaminasyon burkulma kuvvetine olan etkisini göstermektedir.

Çizelge 3.5 BaTiO₃/Al/ BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0168}{0.0187}$	$\frac{0.0172}{0.0188}$	$\frac{0.0189}{0.0202}$	$\frac{0.0235}{0.0244}$	$\frac{0.0350}{0.0355}$	$\frac{0.0669}{0.0672}$	$\frac{0.0692}{0.0701}$
0.0333	$\frac{0.0408}{0.0454}$	$\frac{0.0426}{0.0465}$	$\frac{0.0477}{0.0510}$	$\frac{0.0590}{0.0620}$	$\frac{0.0838}{0.0871}$	$\frac{0.1430}{0.1483}$	$\frac{0.0697}{0.0734}$
0.0500	$\frac{0.0784}{0.0857}$	$\frac{0.0823}{0.0887}$	$\frac{0.0915}{0.0974}$	$\frac{0.1107}{0.1167}$	$\frac{0.1494}{0.1569}$	$\frac{0.2310}{0.2434}$	$\frac{0.0863}{0.0965}$
0.0666	$\frac{0.1280}{0.1375}$	$\frac{0.1336}{0.1427}$	$\frac{0.1468}{0.1556}$	$\frac{0.1732}{0.1830}$	$\frac{0.2233}{0.2365}$	$\frac{0.3198}{0.3415}$	$\frac{0.1086}{0.1245}$

Çizelge 3.3-Çizelge 3.8'de verilen tüm sayısal sonuçlardan, katmanları arasında kenar çatlak içeren sandviç plağın dış katmanlarının piezoelektrik malzeme (PZT) seçilmesi durumunun, kritik dış basınç kuvvetinde önemli değer artışına sebep olduğu görülmüştür. Bu artış, piezoelektrik katman kalınlığındaki yani h_F/ℓ_1 arttıkça, artmaktadır. Aynı zamanda, elde edilen sayısal sonuçlardan p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerlerinin x_1 yönündeki çatlak uzunluğu ℓ_{10}/ℓ_1 arttıkça azaldığı tespit edilmiştir.

Çizelge 3.6 PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0808	0.0821	0.0902	0.1125	0.1685	0.3083	0.1543
	0.1031	0.1146	0.1171	0.1263	0.1687	0.3292	0.1673
0.0333	0.1575	0.1631	0.1815	0.2252	0.3235	0.5675	0.1872
	0.2238	0.2396	0.2439	0.2682	0.3517	0.5854	0.2193
0.0500	0.2384	0.2484	0.2749	0.3337	0.4558	0.7206	0.2139
	0.3384	0.3537	0.3621	0.4003	0.5104	0.7773	0.2564
0.0666	0.2958	0.3076	0.3371	0.3995	0.5208	0.7574	0.2712
	0.4075	0.4187	0.4312	0.4793	0.5973	0.8492	0.3275

Çizelge 3.7 PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0729	0.0734	0.0783	0.0952	0.1391	0.2603	0.1497
	0.0867	0.0947	0.0956	0.1050	0.1417	0.2640	0.1638
0.0333	0.1519	0.1550	0.1682	0.2034	0.2840	0.4800	0.1831
	0.1975	0.2073	0.2106	0.2354	0.3110	0.5157	0.2121
0.0500	0.2351	0.2406	0.2612	0.3096	0.4110	0.6252	0.1979
	0.3062	0.3155	0.3243	0.3626	0.4643	0.7021	0.2514
0.0666	0.2974	0.3053	0.3296	0.3822	0.4850	0.6803	0.2598
	0.3803	0.3875	0.4018	0.4498	0.5614	0.7921	0.3022

Çizelge 3.8 BaTiO₃/St/ BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0437	0.0442	0.0478	0.0588	0.0870	0.1673	0.1622
	0.0487	0.0491	0.0514	0.0610	0.0879	0.1676	0.1657
0.0333	0.0899	0.0929	0.1028	0.1263	0.1795	0.3105	0.1644
	0.1025	0.1037	0.1110	0.1329	0.1855	0.3194	0.1701
0.0500	0.1457	0.1515	0.1672	0.2016	0.2731	0.4277	0.1713
	0.1637	0.1668	0.1798	0.2129	0.2854	0.4477	0.1982
0.0666	0.1981	0.2057	0.2251	0.2657	0.3442	0.4983	0.2123
	0.2181	0.2234	0.2409	0.2811	0.3632	0.5292	0.2552

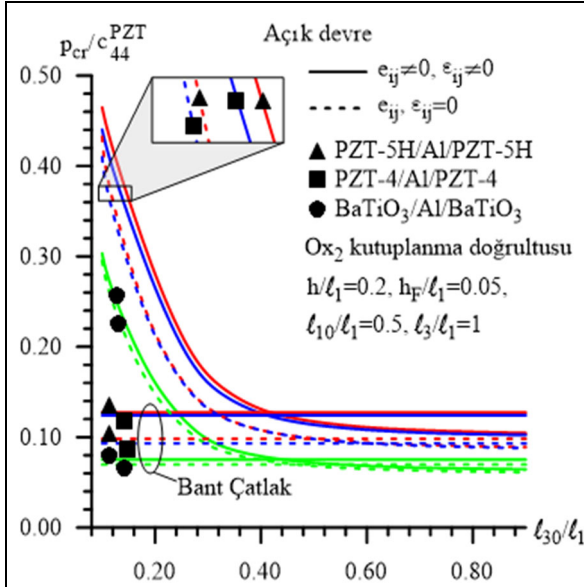
Orta katmanın alüminyum veya çelik olarak seçilmesi durumunda h_F/ℓ_1 ve ℓ_{10}/ℓ_1 'e göre elde edilen sayısal sonuçların birbirine göre karşılaştırılması neticesinde, orta katmanın çelik olması durumunda elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerlerinin, orta katmanın alüminyum seçilmesi durumunda elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerlerinden daha büyük olduğu tespit edilmiştir. Buna ek olarak, farklı PZT malzemeleri için elde edilen sayısal sonuçların birbirleri ile karşılaştırılması neticesinde

$$p_{cr} / c_{44}^{PZT-5H} > p_{cr} / c_{44}^{PZT-4} > p_{cr} / c_{44}^{BaTiO_3} \quad (3.32)$$

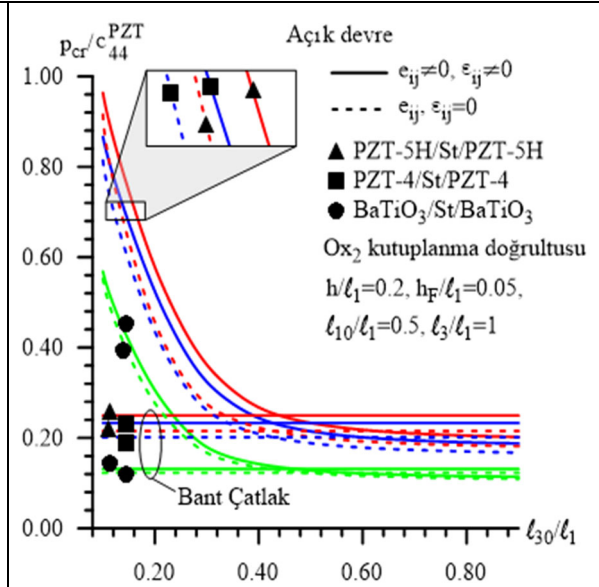
şeklinde bir ilişkinin yazılabileceği görülmüştür.

Şekil 3.3 (Şekil 3.4)'te Problem 3 için orta katman alüminyum (çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri ve Ox_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları (ℓ_{30}/ℓ_1) için elde edilen sonuçlar Durum 1 ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$) ve Durum 2 ($e_{ij} \neq \varepsilon_{ij} \neq 0$) için ayrı ayrı verilmiştir. Bu şekillerde verilen grafiklerden, Ox_3 yönündeki çatlak uzunluğu arttıkça plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerlerinin azaldığı, orta katman malzemesinin çelik seçilmesinin, bu katmanın alüminyum olmasına nazaran kritik delaminasyon burkulma değerlerini artırdığı görülmektedir. Ayrıca kenar çatlağın

Ox_3 yönündeki uzunluğu (ℓ_{30}/ℓ_1) arttıkça elde edilen kritik değerler, bant çatlak durumu için elde edilen uygun kritik değerlere küçülerek yaklaştığı ve belirli bir çatlak boyutları için kenar çatlak ile bant çatlak içeren dikdörtgen plak için elde edilen sayısal sonuçların çakıştığı tespit edilmiştir. Belirtelim ki, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te verilen sayısal sonuçlar, sandviç plağın bant çatlak içermesi durumunda plağın bütün yanıl kenarlarından, kenar çatlak içermesi durumunda ise $x_3 = 0$ yüzeyi hariç diğer yanıl kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş olması durumu için verilmiştir. Sınır koşullarındaki bu farklılığın, önceden öngörölmeyen ancak grafiklerde görölen kenar çatlak/bant çatlak içeren plak için bulunan sayısal sonuçların çakışmasının nedeni olarak söylenebilir.



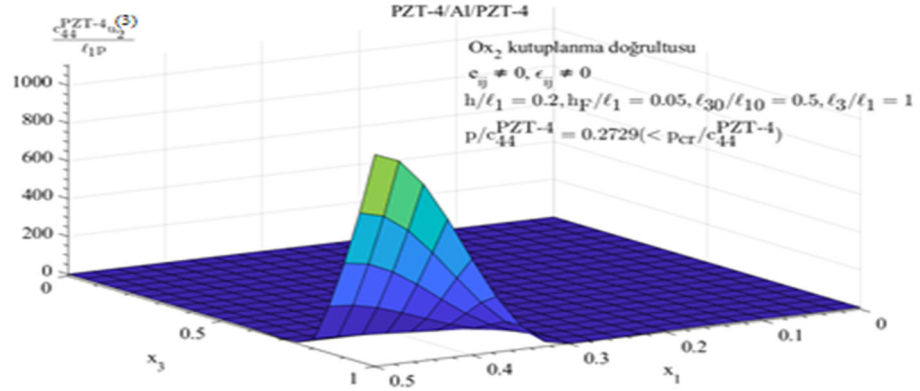
Şekil 3.3 Farklı PZT/Al/PZT malzeme çiftleri ve Ox_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri



Şekil 3.4 Farklı PZT/St/PZT malzeme çiftleri ve Ox_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri

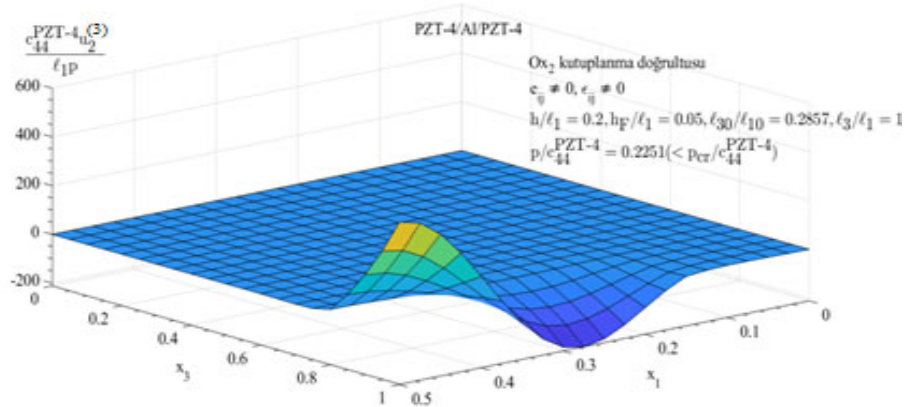
PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C$ 'deki çatlağın üst yüzeyine ($x_2 = h_F + h_C + 0, 0 \leq x_3 \leq \ell_3, 0 \leq x_1 \leq \ell_1 / 2$) (Şekil 3.1) ait noktaların, düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin grafiğı (yani, çatlak yüzeyi burkulma modu) Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 ile verilmiştir. Şekil 3.5'te verilen yüzey grafiğinin elde edilmesinde

kullanılan parametre değerleri $\ell_3 / \ell_1 = 1$, $\ell_{30} / \ell_1 = 0.2$, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.4$, $\ell_{30} / \ell_{10} = 0.5$, $h_F / \ell_1 = 0.05$, $h / \ell_1 = 0.2$, $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ alınmıştır. Grafik çiziminde kullanılan parametre değerleri için Şekil 3.5'te verilen ve çatlak yüzeyinin burkulma modunu gösteren yüzey grafiği, (3.31) ile verilen ön eğintinin formuna uygun düşmektedir. Bununla beraber, Şekil 3.6'da sadece farklı çatlak boyutları için (yani, $\ell_{10} / \ell_1 = 0.7$, $\ell_{30} / \ell_{10} = 0.2857$ alınması ve diğer parametre değerlerinin aynı alınması durumunda) bu yüzeyde çizilen yüzey grafiği, (3.31) ile verilen ön eğintinin formuna uygun düşmemektedir.



Şekil 3.5 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde

$c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (\ell_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.4$, $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$)



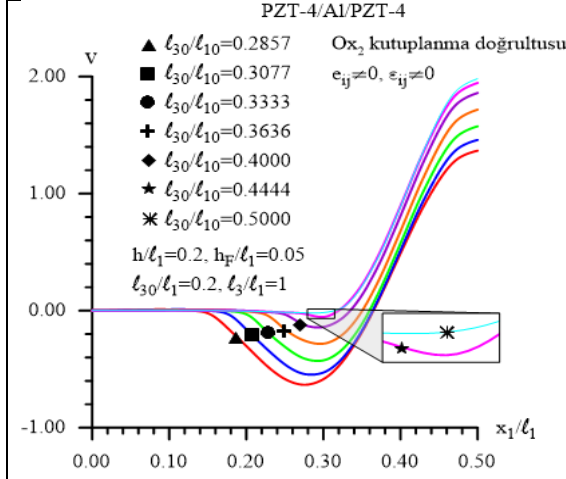
Şekil 3.6 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde

$c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (\ell_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.7$, $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$)

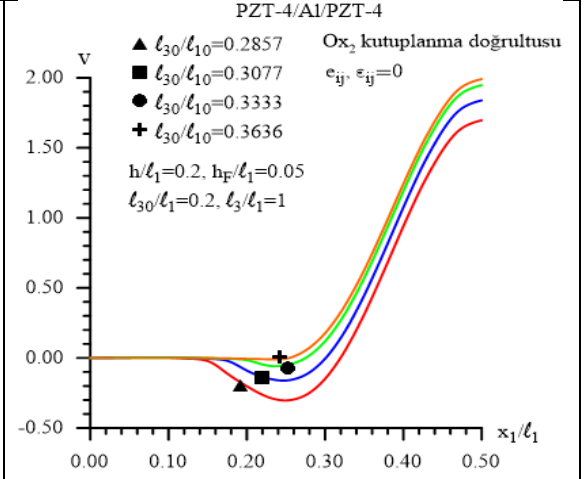
Çatlağın geometrik boyutlarının (veya çatlak kenar uzunlukları oranının) değişimi neticesinde oluşan bu durumu açıklayabilmek için Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğuna oranının (ℓ_{30} / ℓ_{10}) değişiminin, burkulma modları (yani, çatlak yüzeyindeki düşey yerdeğiştirmelerin yayılımı) üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Bu amaçla farklı malzeme çiftleri için piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır olup olmamasına göre ℓ_{30} / ℓ_{10} oranının çeşitli değerleri için, $x_3 = 0$ ve $x_2 = h_F + h_C + 0$ düzlemlerinin ara kesitindeki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yerdeğiştirmelerin, x_1 / ℓ_1 'e göre yayılımı Şekil 3.7-Şekil 3.18 ile verilmiştir. Bu şekillerde piezoelektrik sandviç kalın plakların delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerleri $\ell_{30} / \ell_1 = 0.2, \ell_3 / \ell_1 = 1, h_F / \ell_1 = 0.05, h / \ell_1 = 0.2$ için verilmiştir. Şekil 3.7-Şekil 3.18 de verilen grafiklerde düşey eksendeki v 'nin değeri

$$v = 2u_2^{(r_3)} \left(\left(\max_{0 \leq x_1 / \ell_1 \leq 0.5} u_2^{(r_3)} - \min_{0 \leq x_1 / \ell_1 \leq 0.5} u_2^{(r_3)} \right) \right)^{-1} \quad (3.33)$$

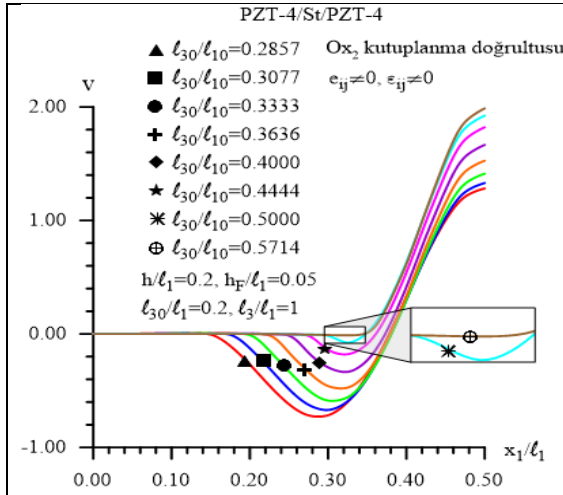
şeklinde belirlenmiştir. Şekildeki grafiklerden, burkulma modlarının ℓ_{30} / ℓ_{10} oranına önemli ölçüde bağlı olduğu görülmektedir. Bu oran küçüldükçe çatlak yüzeyindeki düşey yerdeğiştirmelerin yayılımının (çatlak yüzeyi burkulma modunun), başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ve (3.31) fonksiyonu ile gösterilen ön eğinti formundan farklı bir formda olduğu tespit edilmiştir. Bu farklılığın oluşumu ve gelişimi Şekil 3.7-Şekil 3.18 de detaylı şekilde verilmiştir.



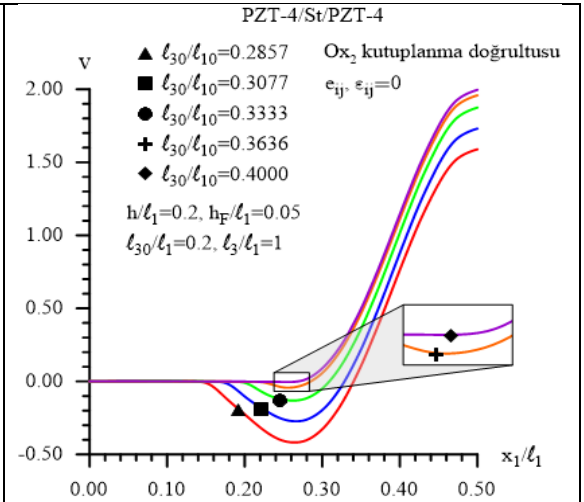
Şekil 3.7 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



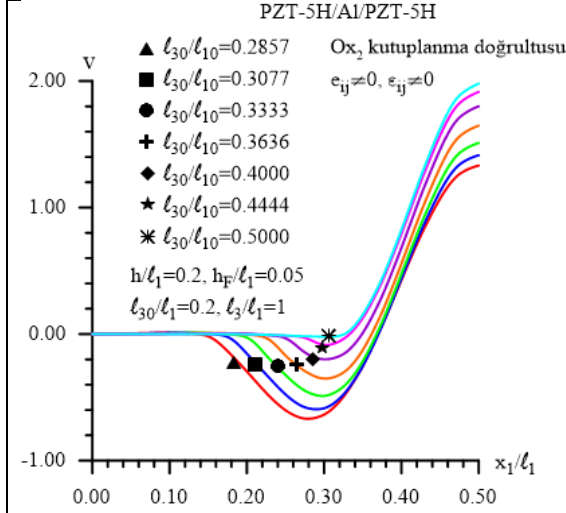
Şekil 3.8 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



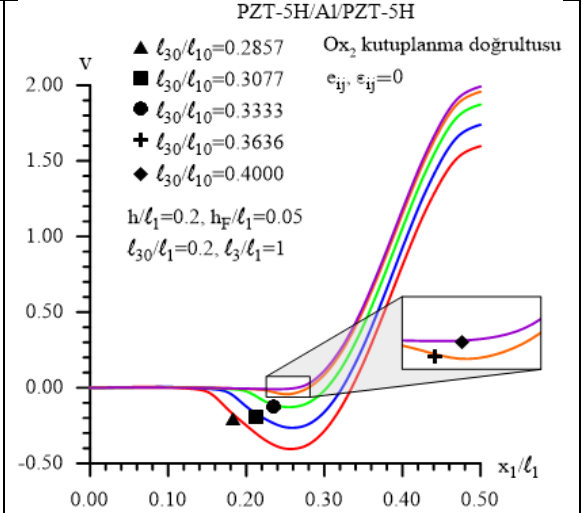
Şekil 3.9 PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



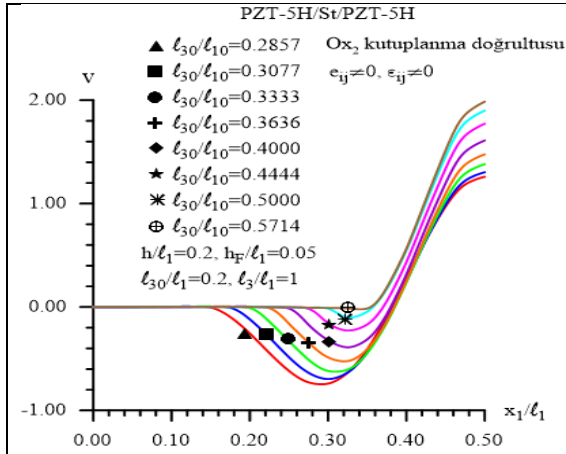
Şekil 3.10 PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



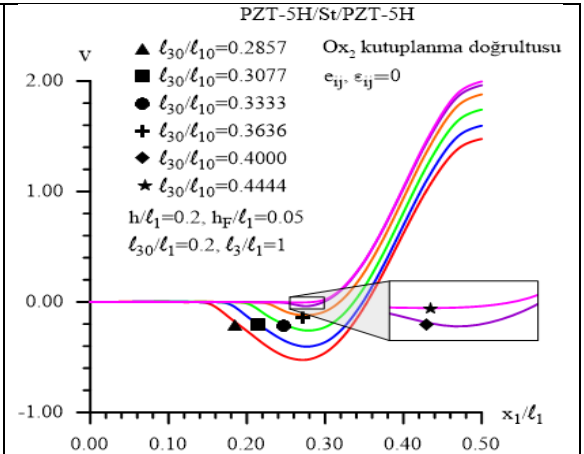
Şekil 3.11 PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



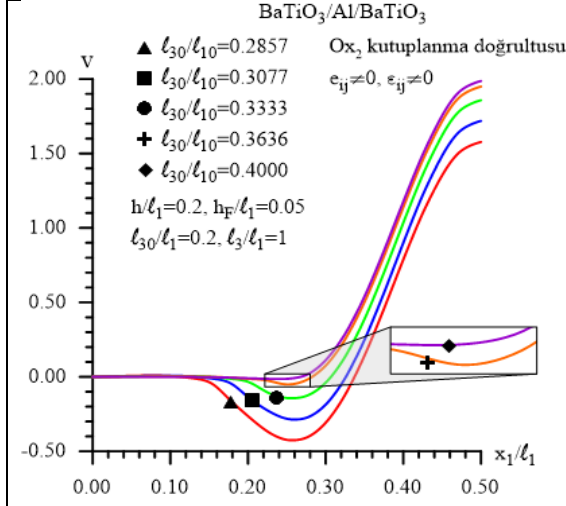
Şekil 3.12 PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



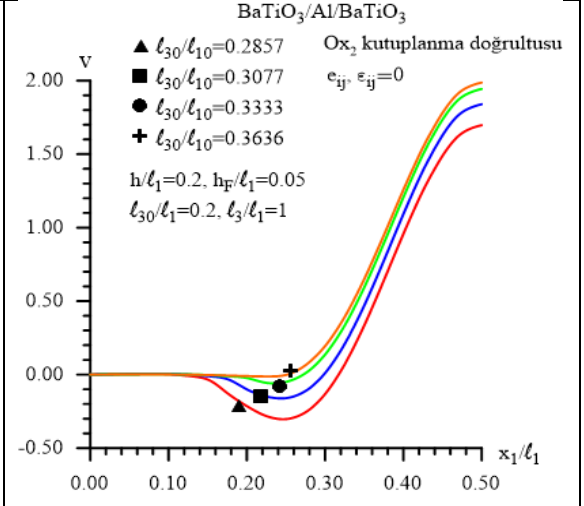
Şekil 3.13 PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



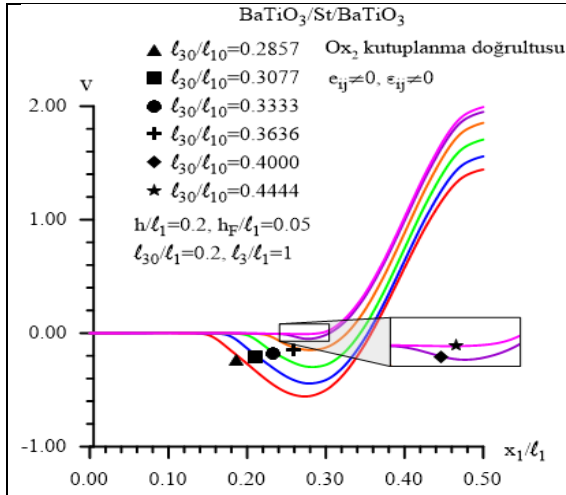
Şekil 3.14 PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



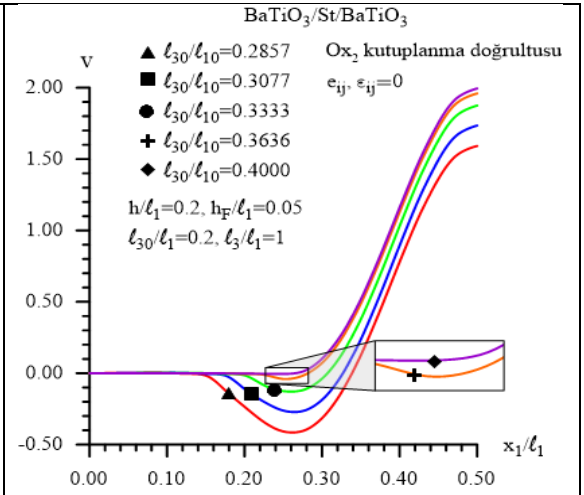
Şekil 3.15 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 3.16 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 3.17 BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 3.18 BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)

Burkulma modunun, başlangıç ön eğinti formu ile aynı olduğu en küçük ℓ_{30} / ℓ_{10} oranının değeri $(\ell_{30} / \ell_{10})^* = \tau = \text{sabit}$ ile gösterilirse Şekil 3.7-Şekil 3.18 grafiklerinden yararlanılarak, τ değerleri için Çizelge 3.9 oluşturulabilir. Her $\ell_{30} / \ell_{10} < \tau$ için çatlak yüzeyi burkulma modunun, başlangıçta verilen ön eğinti formundan farklı bir formda olduğu Şekil 3.7-Şekil 3.18 'de açıkça görülmektedir. Çatlak kenar uzunlukları oranının burkulma modu üzerindeki etkisi, farklı mühendislik uygulamalarında karşılaşılan yüzey kırışıklıklarının açıklanması yönünden önemli görülmektedir. Bu alanda araştırmalar yapan Hutchinson ve öğrencilerinin [38], [43] çalışmalarında da deneysel olarak yüzey burkulma modları araştırılmıştır. Bu araştırmacıların deneysel olarak belirledikleri yüzey burkulma modlarının, tarafımızdan ele alınan burkulma problemlerinde sayısal olarak elde edilmesi dikkate değer önemli bir sonuçtur. Ayrıca, yüzeyin burkulma modlarının sadece ℓ_{30} / ℓ_{10} oranına değil aynı zamanda malzeme özelliklerine de bağlı olduğu Çizelge 3.9 da görülmektedir. Yani, plak malzemesinin elastik olması ($e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$) veya PZT olması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) yanında orta katman (alüminyum veya çelik) ve dış katmanın (PZT-5H, PZT 4 ve BaTiO₃) olduğu malzemenin özelliklerinden de etkilendiği görülmektedir. Buna göre, örneğin, ele alınan PZT sandviç kalın plakta dış katmanın BaTiO₃ alınması durumunda, diğer PZT malzemelerine göre daha küçük çatlak boyutları için burkulma mod değişimi oluşurken; orta katman malzemesi alüminyum için, orta katmanın çelik olması durumuna göre daha küçük çatlak boyutları için burkulma mod değişimi gerçekleşmektedir.

Çizelge 3.9 Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için burkulma mod değişimine neden

olan kritik çatlak boyutları oranı $(\ell_{30} / \ell_{10})^* (= \tau)$ değerleri

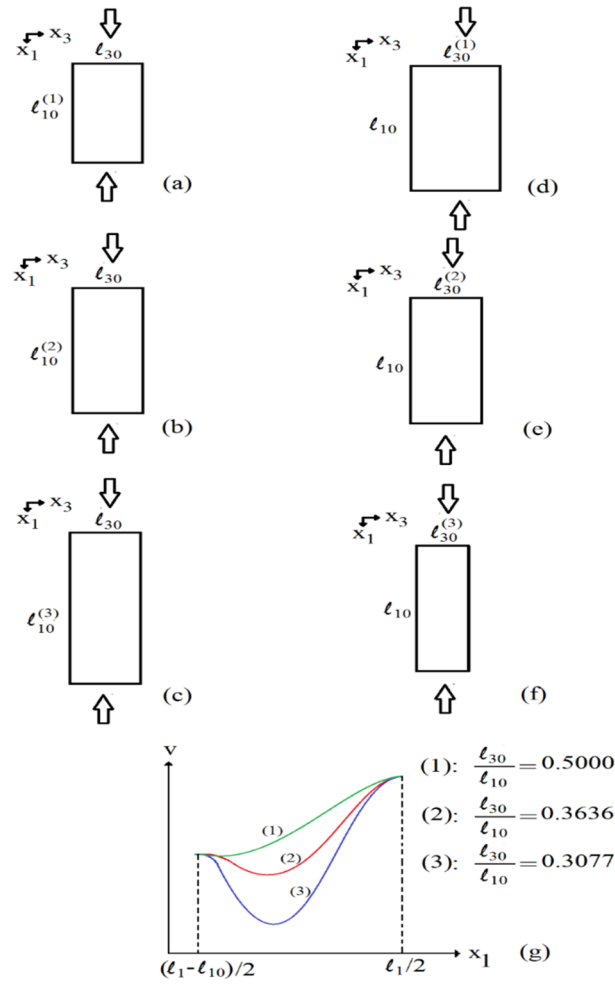
Malzeme Çiftleri	τ	
	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$
PZT-5H/Al/PZT-5H	0.5000	0.4000
PZT-4/Al/PZT-4	0.5000	0.3636
BaTiO ₃ /Al/ BaTiO ₃	0.4000	0.3636
PZT-5H/St/PZT-5H	0.5714	0.4444
PZT-4/St/PZT-4	0.5714	0.4000
BaTiO ₃ /St/ BaTiO ₃	0.4444	0.4000

Diğer bir deyişle dış katmanı farklı PZT malzemelerden oluşan PZT sandviç dikdörtgen plağın çatlak yüzeyi burkulma mod değişimleri ile ilgili olarak τ (Çizelge 3.9) değerleri için

$$\tau^{PZT-5H} > \tau^{PZT-4} > \tau^{BaTiO_3}. \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \tau^{St} &> \tau^{Al}, \\ \tau^{e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0} &> \tau^{e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

eşitsizliklerinin yazılabildiği görülmektedir.



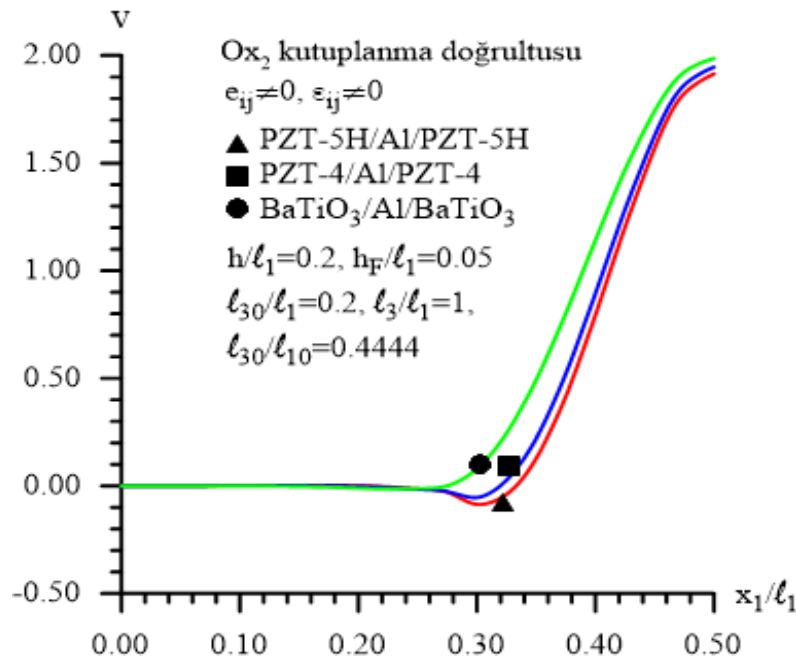
Şekil 3.19 PZT4/Al/PZT-4 sandviç kalın plağın çatlak yüzeyinin burkulma modu

$$\text{a) } \ell_{30} / \ell_{10}^{(1)} = 0.5, \text{ b) } \ell_{30} / \ell_{10}^{(2)} = 0.3636, \text{ c) } \ell_{30} / \ell_{10}^{(3)} = 0.3077,$$

$$\text{d) } \ell_{30}^{(1)} / \ell_{10} = 0.5, \text{ e) } \ell_{30}^{(2)} / \ell_{10} = 0.3636, \text{ f) } \ell_{30}^{(3)} / \ell_{10} = 0.3077,$$

g) (a)-(c) ile (d)-(f) de verilen çatlak geometrilerine ait çatlaklağın üst yüzeyi yerdeğiştirme grafikleri

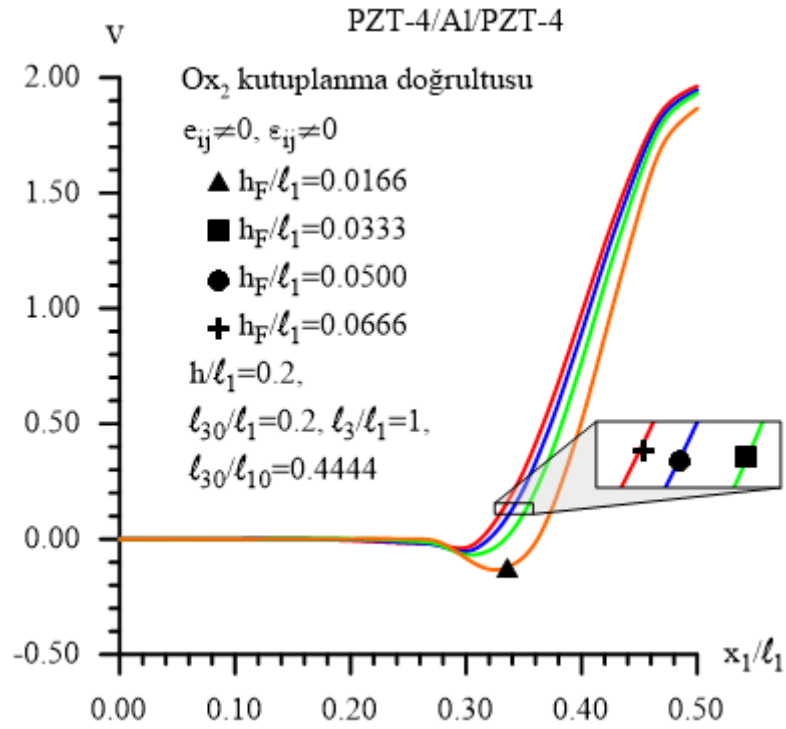
Şekil 3.19'da PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plağın çatlak geometrisinin burkulma modu üzerine etkileri ayrıntılı biçimde verilmiştir. Bu şekle göre ℓ_{30}/ℓ_1 çatlak uzunluğu sabit tutulup ℓ_{10}/ℓ_1 çatlak uzunluğu artırılınca (Şekil 3.19a-Şekil 3.19c) plakta çatlak yüzeyi burkulma modu, plağa yükleme yapılmadan önce çatlak yüzeylerinde var olduğu kabul edilen ve analitik ifadesi (3.31) ile verilen ön eğinti formundan uzaklaşmaktadır. Benzer şekilde, ℓ_{10}/ℓ_1 çatlak uzunluğu sabit tutulup ℓ_{30}/ℓ_1 çatlak uzunluğu azaltıldıkça (Şekil 3.19d-Şekil 3.19f) da burkulma mod değişimi elde edilmektedir. Bu iki durum göz önüne alındığında, ℓ_{30}/ℓ_{10} oranı azaldıkça, diğer bir değişle $\ell_{30}/\ell_{10} < \tau$ için çatlak yüzeyi burkulma modu başlangıçta verilen (3.31) ön eğintinin formundan uzaklaşmaktadır (Çizelge 3.9). PZT-4/Al/PZT-4 sandviç plak için açıklanan bu durum, her bir PZT/Metal/PZT ve elastik sandviç plakların uygun ℓ_{30}/ℓ_{10} oranları için elde edilmektedir.



Şekil 3.20 Al orta katmanlı farklı piezoelektrik sandviç kalın plaklar için $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.4444$ ve $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin x_1/ℓ_1 'e göre değişimlerinin karşılaştırılması

Şekil 3.20 de PZT/Al/PZT sandviç kalın plağın farklı dış katman malzemeleri için çatlak yüzeyinin $x_3 = 0$ ve $x_2 = h_F + h_C + 0$ düzlemlerinin ara kesitinde grafiği verilmiştir.

Şekil incelendiğinde, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.4444$ oranı için Çizelge 3.9 da verilen τ değerleri de göz önüne alındığında $\tau^{BaTiO_3} < 0.4444$ olduğundan, BaTiO₃/Al/ BaTiO₃ plağı için burkulma mod değişimi olmadığı ancak $\tau^{PZT-5H} > 0.4444$ ve $\tau^{PZT^4} > 0.4444$ olduğundan PZT-5H/Al/ PZT-5H ve PZT-4/Al/PZT-4 için ele alınan çatlak boyutları için burkulma mod değişiminin gerçekleştiği Şekil 3.20 de verilen grafikten görülmektedir.



Şekil 3.21 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.4444$ ve $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin farklı dış katman kalınlıklarına göre çatlak yüzey yerdeğiştirmesinin (v) x_1/ℓ_1 'e göre grafiği

Şekil 3.21'de verilen grafiklerde PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plağın farklı dış katman kalınlıklarının, delaminasyon burkulma moduna etkisi verilmiştir. Bu grafikler incelendiğinde ve Şekil 3.20 için yapılan açıklamalar göz önüne alındığında, dış katman kalınlığının da delaminasyon burkulma moduna etki gösterdiği ve kritik oran τ değerini değiştirdiği görülmektedir. Dolayısıyla, h_F değeri arttıkça kritik oran τ değerinin azaldığı tespit edilmiştir. Sonuç olarak, bu kısımda yapılan incelemeler neticesinde, çatlak yüzeyi burkulma mod değişimine, çatlak kenar uzunluklarının oranı (ℓ_{30}/ℓ_{10}),

çatlağın üst veya alt yüzeyinde yer alan en küçük katman kalınlığı (h_F) ile ara yüzey çatlağını içeren katmanların malzemelerinin etki gösterdiği söylenebilir. Ayrıca, çatlak yüzeyindeki burkulma mod değişimindeki esas farklılaşmanın, dış yüklemenin etki ettiği doğrultuda gerçekleştiği ve dış kuvvete dik olan çatlak uzunluğu küçüldükçe kritik ℓ_{30}/ℓ_{10} oranının sağlandığı yani, yüklemeye paralel çatlak uzunluğunun, yüklemeye dik doğrultudaki çatlak uzunluğundan büyük olduğu durumlar için burkulma mod değişiminin gerçekleştiği söylenebilir.

3.3.2 Problem 4 (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri

Bu bölümde (3.21)-(3.22), (3.24)-(3.28) çerçevesinde ele alınan delaminasyon burkulma problemine (Problem 4) ait sayısal sonuçlar verilecektir. Ele alınan bu problemde, bir önceki kısımda (Kısım 3.3.1) ele alınan sınırdeğer probleminden sadece elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları değiştirilerek, ele alınan delaminasyon burkulma problemine ait kritik parametrelere elektriksel alan parametrelerinin etkisi belirlenmeye çalışılacaktır.

Bu kısımda ele alınan probleme (Problem 4) ait elde edilen sayısal sonuçlar Çizelge 3.10- Çizelge 3.15’de, Durum 1 ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$) ve Durum 2 ($e_{ij} \neq 0; \varepsilon_{ij} \neq 0$) için verilmiştir. Bu Çizelgelarda verilen sayısal sonuçlar, yukarıdaki gibi, $h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.3$, $\ell_3/\ell_1 = 1$ parametre değerleri ile farklı piezoelektrik katman kalınlığı (h_F/ℓ_1) ve çatlak uzunluğu (ℓ_{10}/ℓ_1) için PZT-5H/Al/PZT-5H (Çizelge 3.10), PZT-4/Al/PZT-4 (Çizelge 3.11), BaTiO₃/Al/BaTiO₃ (Çizelge 3.12), PZT-5H/St/PZT-5H (Çizelge 3.13), PZT-4/St/PZT-4 (Çizelge 3.14) ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ (Çizelge 3.15) de verilmiştir. Belirtelim ki, Çizelge 3.10-Çizelge 3.15 çizelgelerinde son sütunda her bir h_F/ℓ_1 için ÇİP’e (Çatlak içermeyen Plak) ait kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri verilmiştir ve bu değerler, Kısım 2.3.2 de verilen Çizelge 2.11-Çizelge 2.16’larda yer alan uygun değerler ile aynıdır.

Çizelge 3.10 PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	ÇİP
0.0166	0.0291	0.0300	0.0331	0.0422	0.0639	0.1201	0.1233
	0.0373	0.0421	0.0427	0.0474	0.0644	0.1232	0.1259
0.0333	0.0637	0.0669	0.0754	0.0945	0.1361	0.2369	0.1234
	0.0936	0.0960	0.0988	0.1127	0.1512	0.2513	0.1267
0.0500	0.1114	0.1173	0.1314	0.1603	0.2190	0.3437	0.1261
	0.1581	0.1604	0.1678	0.1926	0.2516	0.3841	0.1413
0.0666	0.1658	0.1737	0.1915	0.2275	0.2960	0.4279	0.1622
	0.2212	0.2245	0.2375	0.2725	0.3470	0.4960	0.1907

Çizelge 3.11 PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0269	0.0273	0.0297	0.0367	0.0542	0.1027	0.1177
	0.0335	0.0351	0.0356	0.0402	0.0553	0.1032	0.1186
0.0333	0.0638	0.0661	0.0730	0.0895	0.1257	0.2114	0.1189
	0.0843	0.0855	0.0889	0.1029	0.1389	0.2290	0.1197
0.0500	0.1156	0.1201	0.1323	0.1584	0.2111	0.3201	0.1193
	0.1483	0.1501	0.1587	0.1837	0.2402	0.3633	0.1265
0.0666	0.1765	0.1829	0.1993	0.2329	0.2691	0.4149	0.1512
	0.2170	0.2207	0.2353	0.2707	0.3435	0.4863	0.1665

Çizelge 3.12 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0168	0.0172	0.0189	0.0235	0.0350	0.0669	0.0692
	0.0186	0.0187	0.0200	0.0242	0.0353	0.0670	0.0695
0.0333	0.0408	0.0426	0.0477	0.0590	0.0838	0.1430	0.0697
	0.0452	0.0463	0.0508	0.0617	0.0866	0.1469	0.0704
0.0500	0.0784	0.0823	0.0915	0.1107	0.1494	0.2310	0.0863
	0.0855	0.0884	0.0970	0.1163	0.1561	0.2415	0.0904
0.0666	0.1280	0.1336	0.1468	0.1732	0.2233	0.3198	0.1086
	0.1373	0.1422	0.1551	0.1823	0.2352	0.3390	0.1157

Çizelge 3.13 PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0808	0.0821	0.0902	0.1125	0.1685	0.3083	0.1543
	0.1020	0.1129	0.1150	0.1244	0.1655	0.3196	0.1591
0.0333	0.1575	0.1631	0.1815	0.2252	0.3235	0.5675	0.1872
	0.2218	0.2370	0.2409	0.2653	0.3471	0.5753	0.2082
0.0500	0.2384	0.2484	0.2749	0.3337	0.4558	0.7206	0.2139
	0.3356	0.3502	0.3584	0.3965	0.5054	0.7661	0.2411
0.0666	0.2958	0.3076	0.3371	0.3995	0.5208	0.7574	0.2712
	0.4046	0.4153	0.4284	0.4757	0.5926	0.8413	0.3107

Çizelge 3.10-3.15’de verilen sayısal sonuçlardan, dış katman malzemesinin piezoelektrik seçilmesi, kritik burkulma kuvveti değerlerinde artışa; piezoelektrik katman kalınlığının yani, h_F/ℓ_1 değerinin artması, kritik burkulma kuvveti değerlerinde

artışa; çatlak uzunluğu ℓ_{10}/ℓ_1 artması, kritik burkulma kuvveti değerlerinde azalmaya sebep olmuştur.

Çizelge 3.14 PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0729}{0.0855}$	$\frac{0.0734}{0.0930}$	$\frac{0.0783}{0.0942}$	$\frac{0.0952}{0.1031}$	$\frac{0.1391}{0.1399}$	$\frac{0.2603}{0.2617}$	$\frac{0.1497}{0.1526}$
0.0333	$\frac{0.1519}{0.1949}$	$\frac{0.1550}{0.2042}$	$\frac{0.1682}{0.2082}$	$\frac{0.2034}{0.2322}$	$\frac{0.2840}{0.3060}$	$\frac{0.4800}{0.5034}$	$\frac{0.1831}{0.2009}$
0.0500	$\frac{0.2351}{0.3028}$	$\frac{0.2406}{0.3115}$	$\frac{0.2612}{0.3203}$	$\frac{0.3096}{0.3581}$	$\frac{0.4110}{0.4575}$	$\frac{0.6252}{0.6891}$	$\frac{0.1979}{0.2402}$
0.0666	$\frac{0.2974}{0.3762}$	$\frac{0.3053}{0.3831}$	$\frac{0.3296}{0.3975}$	$\frac{0.3822}{0.4448}$	$\frac{0.4850}{0.5543}$	$\frac{0.6803}{0.7807}$	$\frac{0.2598}{0.2956}$

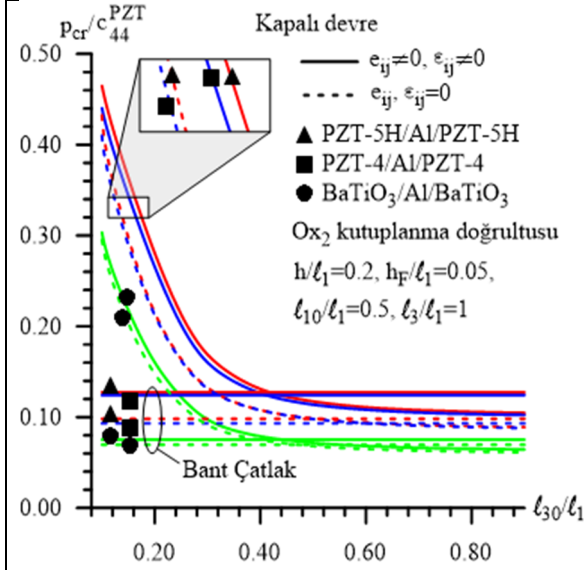
Çizelge 3.15 BaTiO₃/St/BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

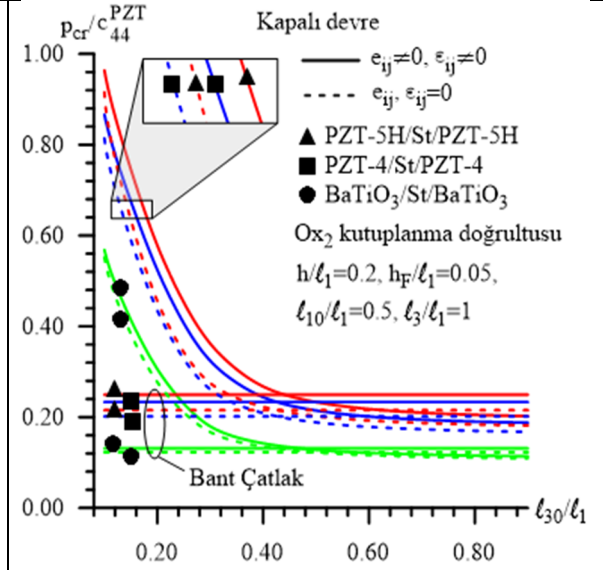
$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.3, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0437}{0.0484}$	$\frac{0.0442}{0.0487}$	$\frac{0.0478}{0.0510}$	$\frac{0.0588}{0.0606}$	$\frac{0.0870}{0.0872}$	$\frac{0.1673}{0.1674}$	$\frac{0.1622}{0.1648}$
0.0333	$\frac{0.0899}{0.1018}$	$\frac{0.0929}{0.1031}$	$\frac{0.1028}{0.1106}$	$\frac{0.1263}{0.1322}$	$\frac{0.1795}{0.1844}$	$\frac{0.3105}{0.3160}$	$\frac{0.1644}{0.1675}$
0.0500	$\frac{0.1457}{0.1629}$	$\frac{0.1515}{0.1662}$	$\frac{0.1672}{0.1792}$	$\frac{0.2016}{0.2119}$	$\frac{0.2731}{0.2836}$	$\frac{0.4277}{0.4435}$	$\frac{0.1713}{0.1874}$
0.0666	$\frac{0.1981}{0.2171}$	$\frac{0.2057}{0.2228}$	$\frac{0.2251}{0.2400}$	$\frac{0.2657}{0.2799}$	$\frac{0.3442}{0.3610}$	$\frac{0.4983}{0.5250}$	$\frac{0.2123}{0.2429}$

Ayrıca, orta katman malzemesinin çelik seçilmesi durumunda her bir h_F/ℓ_1 ve ℓ_{10}/ℓ_1 için elde edilen sayısal değerlerin, orta katman malzemesinin alüminyum seçilmesi durumunda aynı h_F/ℓ_1 ve ℓ_{10}/ℓ_1 değerleri için elde edilen sayısal sonuçlardan büyük olduğu ve Problem 3 için elde edilen (3.32) bağıntısının, Problem 4 için de sağlandığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu parametre değişimlerinin kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerine etkisinin, önceki bölümlerde verildiği gibi oluştuğu söylenebilir.



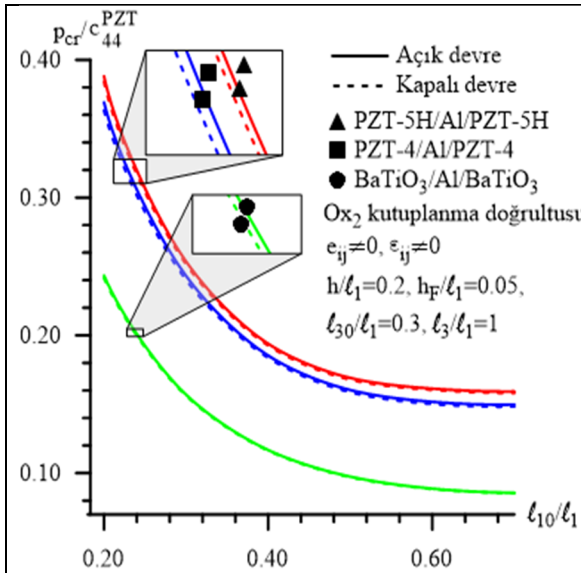
Şekil 3.22 PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 4 için x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen sonuçların karşılaştırılması



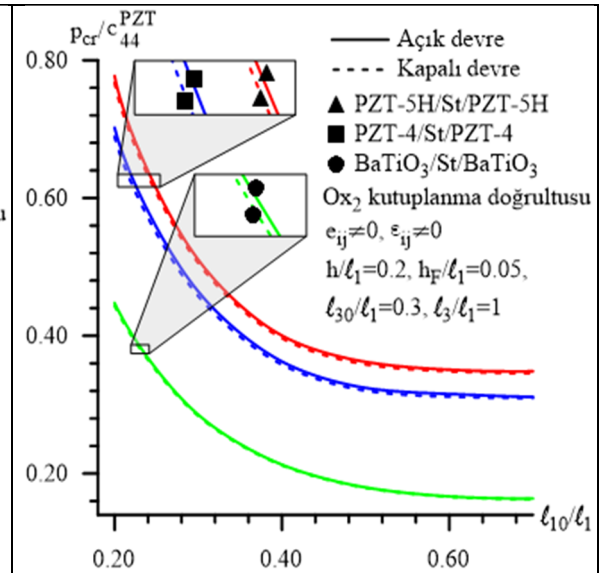
Şekil 3.23 PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 4 için x_3 yönündeki çatlak uzunlukları için elde edilen sonuçların karşılaştırılması

Şekil 3.22 (Şekil 3.23)'de Problem 4 için orta katman Alüminyum (Çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri için x_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları (ℓ_{30}/ℓ_1) için elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu şekillerde verilen sayısal sonuçlara göre Ox_3 yönündeki çatlak uzunluğu arttıkça plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerleri, Problem 3'te de olduğu gibi, azalarak belirli bir asimptota yaklaşmaktadır. Ayrıca kenar çatlak Ox_3 yönündeki uzunluğu (ℓ_{30}/ℓ_1) arttıkça elde edilen kritik değerler, yapıda katmanlar arasında bant çatlak

olması durumu için elde edilen uygun kritik değerlere küçülerek yaklaşmakta ve belirli bir çatlak boyutları için her iki duruma ait kritik sayısal sonuçlar çakışmaktadır. Her iki problemten (bant çatlak ve kenar çatlak) elde edilen sayısal sonuçların çakıştığı ℓ_{30}/ℓ_1 değerleri neredeyse aynı olduğundan bu değer in plağın orta ve dış katmanlarının malzemesinin değişiminden etkilenmediği veya önemli ölçüde etkilenmediği söylenebilir. Belirtelim ki, Şekil 3.22 ve Şekil 3.23’de verilen sayısal sonuçlar, sandviç plağın bant çatlak içermesi durumunda plağın bütün yanal kenarlarından; kenar çatlak içermesi durumunda ise $x_3 = 0$ yüzeyi hariç diğer yanal kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş olması durumu için verilmiştir.



Şekil 3.24 PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 3 ve Problem 4’ten elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\epsilon_{ij} \neq 0, \epsilon_{ij} \neq 0$)

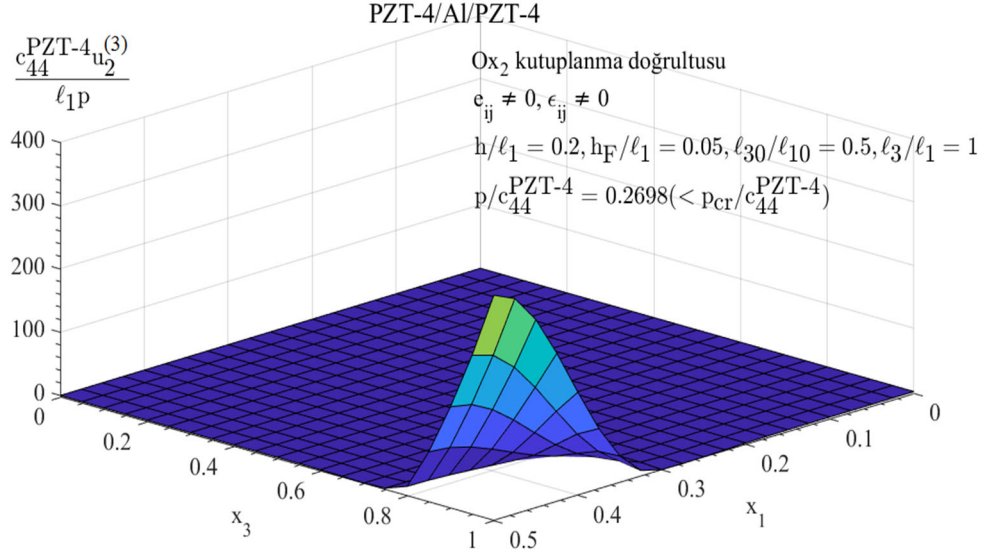


Şekil 3.25 PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 3 ve Problem 4’ten elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\epsilon_{ij} \neq 0, \epsilon_{ij} \neq 0$)

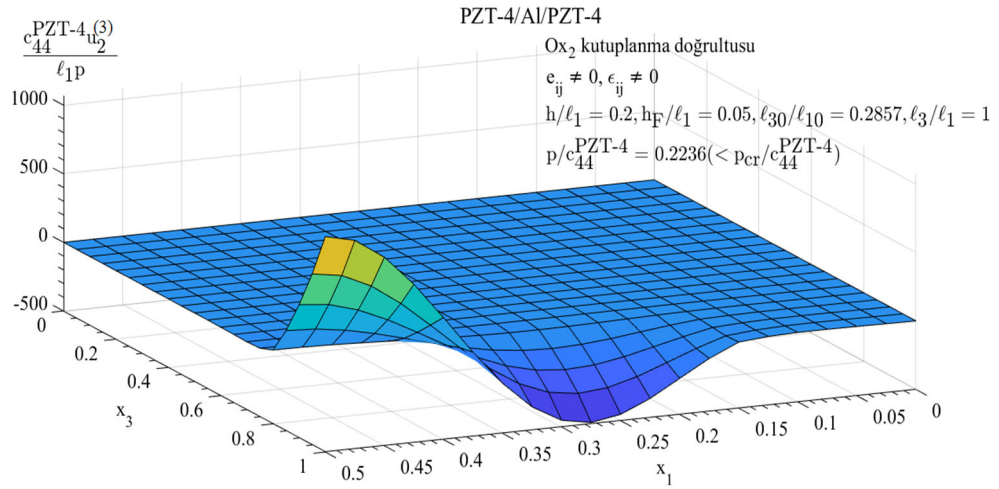
Şekil 3.24 (Şekil 3.25)’de orta katman Alüminyum (Çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri için PZT dış katmanlarının sınırında verilen farklı sınır ve temas koşulları (Problem 3 (açık devre) ve Problem 4 (kapalı devre)) için elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu iki şekilde verilen sayısal sonuçlardan, elektriksel alan

büyükliklerine göre alınan farklı sınır koşullarının kritik değerlere etkisi için açık devre sınır koşullu sınırdeğer problemi (Problem 3) için elde edilen kritik değerlerin, kapalı devre sınır koşullu sınırdeğer problemi (Problem 4) çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlardan büyük olduğu söylenebilir. Yani elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşullarının değişimi, az olmakla beraber, kritik parametre değerlerinde yine değişime neden olmaktadır. Bu değişimin miktarı, Kısım 3.2.1 de verilen Çizelge 3.3-Çizelge 3.8 ile bu kısımda verilen Çizelge 3.10-Çizelge 3.16 çizelgelerindeki uygun değerler ile karşılaştırılması sonucu belirlenebilir. Burada Problem 3 ve Problem 4 arasında elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşullarının farklılık içermesine karşın, mekanik yükleme altında kritik parametrelerin belirlendiği unutulmamalıdır. Bu açıdan bakıldığında, her iki problem için mekanik yükleme altında belirlenen kritik parametreler arasında farkın olması; ele alınan PZT sandviç dikdörtgen plağın bu iki problem çerçevesinde ve elektriksel yükleme altında belirlenecek kritik parametreleri arasında oluşacak farkın daha fazla olabileceği öngörülebilir.

PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C$ 'deki çatlağın üst yüzeyine (Şekil 3.1) ait noktaların düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin grafiği (burkulma modu) Şekil 3.26 ($\ell_{10}/\ell_1 = 0.4$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.5$) ve Şekil 3.27 ($\ell_{10}/\ell_1 = 0.7$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.2857$) 'da $\ell_3/\ell_1 = 1$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.2$, $h_F/\ell_1 = 0.05$, $h/\ell_1 = 0.2$, $e_{ij} \neq 0$, ve $\varepsilon_{ij} \neq 0$ parametre değerleri için verilmiştir. Şekil 3.26 ($\ell_{30}/\ell_{10} = 0.5$)'da verilen çatlak yüzeyine ait burkulma modu , bir önceki alt bölümde verilen ve çatlak yüzeylerinin ön eğintisini gösteren (3.31) fonksiyonu ile uyumlu olmasına karşın, Şekil 3.27 ($\ell_{30}/\ell_{10} = 0.2857$)'de verilen çatlak yüzeyi burkulma modu, (3.31) ile verilen ön eğintinin formu ile uyuşmamaktadır.



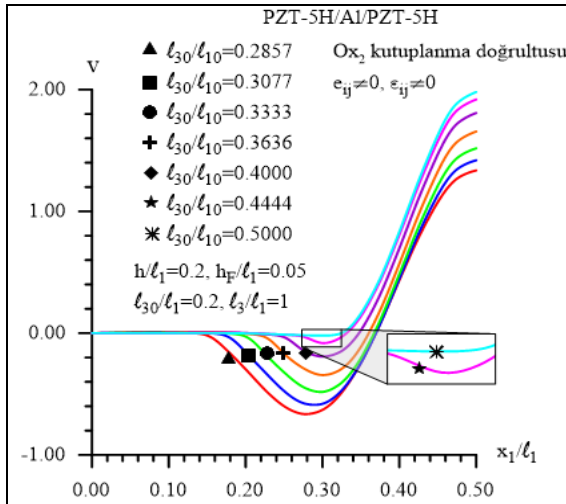
Şekil 3.26 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 4 için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.4$, $e_{ij} \neq 0$, $\epsilon_{ij} \neq 0$)



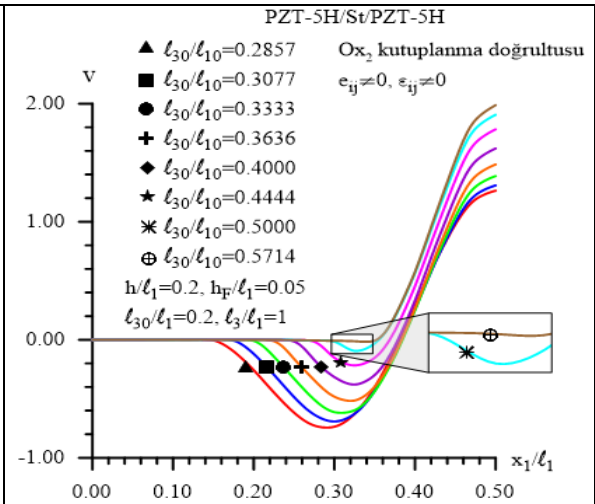
Şekil 3.27 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 4 için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.7$, $e_{ij} \neq 0$, $\epsilon_{ij} \neq 0$)

Farklı malzeme çiftleri için ℓ_{30} / ℓ_{10} oranının çeşitli değerleri için, $x_3 = 0$ ve $x_2 = h_F + 0$ düzlemlerinin ara kesitindeki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yerdeğiştirmelerin, x_1 / ℓ_1 'e göre yayılımı Şekil 3.28-Şekil 3.33 ile verilmiştir. Bu grafiklerde düşey eksendeki değerler bir önceki alt bölümde verilen v (3.33)

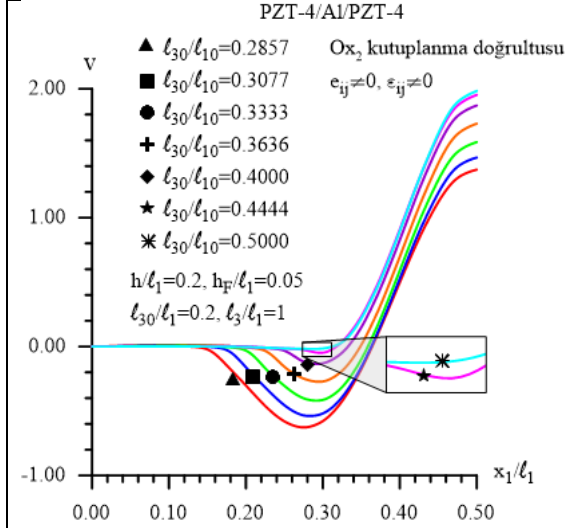
değerleridir. Şekillerdeki grafiklerden, Problem 3'te de olduğu gibi burkulma modlarının ℓ_{30}/ℓ_{10} oranına önemli ölçüde bağlı olduğu görülmektedir. Bu oran büyüdükçe çatlak yüzeyindeki düşey yerdeğiştirmelerin yayılımının, başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen (3.31) fonksiyonu ile gösterilen ön eğinti formuna yaklaştığı, aksi durumda çatlak yüzeyi burkulma modunun, başlangıçta verilen ön eğinti formundan farklı bir formda oluştuğu tespit edilmiştir. Bu farklılığın oluşumu ve gelişimi Şekil 3.28-Şekil 3.33 şekillerinde detaylı şekilde gösterilmiştir. Bu şekillerde piezoelektrik sabitlerin sıfır olmadığı Durum 2 için sayısal sonuçlar verilmiştir. Çünkü piezoelektrik sabitlerin sıfır olması durumunda (Durum 1) piezoelektrik sandviç kalın plakların delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerleri ve çatlak yüzeylerindeki düşey yerdeğiştirmelerin yayılımı Problem 3'teki uygun sonuçlarla aynıdır. Burkulma modunun, başlangıç ön eğinti formu ile aynı olduğu en küçük ℓ_{30}/ℓ_{10} oranının değeri $(\ell_{30}/\ell_{10})^* = \tau = \text{sabit}$ ile gösterilirse Şekil 3.28-Şekil 3.33 grafiklerinden yararlanılarak, τ değerleri için Problem 3'te elde edilen (3.34) ve (3.35) bağıntılarının Problem 4 için de geçerli olduğu görülmüştür.



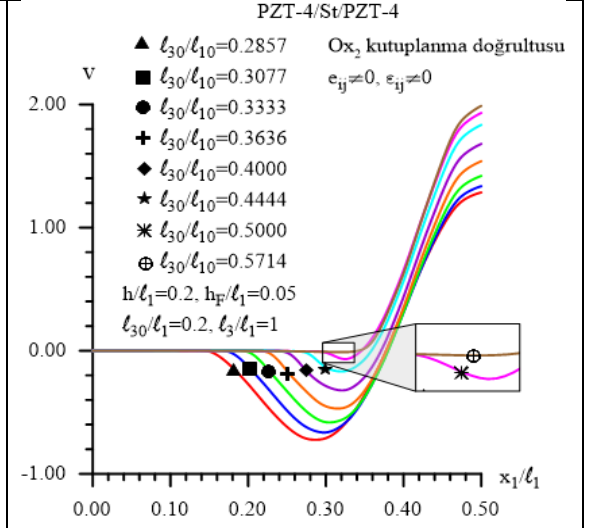
Şekil 3.28 PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30}/ℓ_{10} değerlerinde x_1/ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



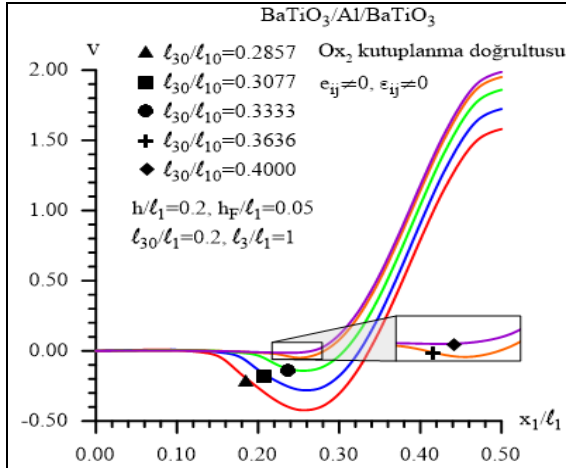
Şekil 3.29 PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30}/ℓ_{10} değerlerinde x_1/ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0$)



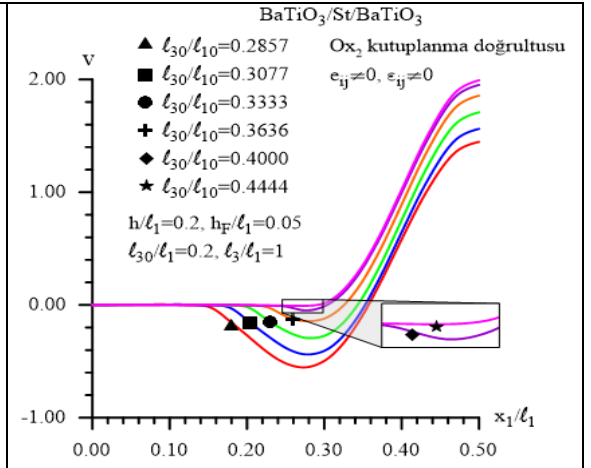
Şekil 3.30 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30}/ℓ_{10} değerlerinde x_1/ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



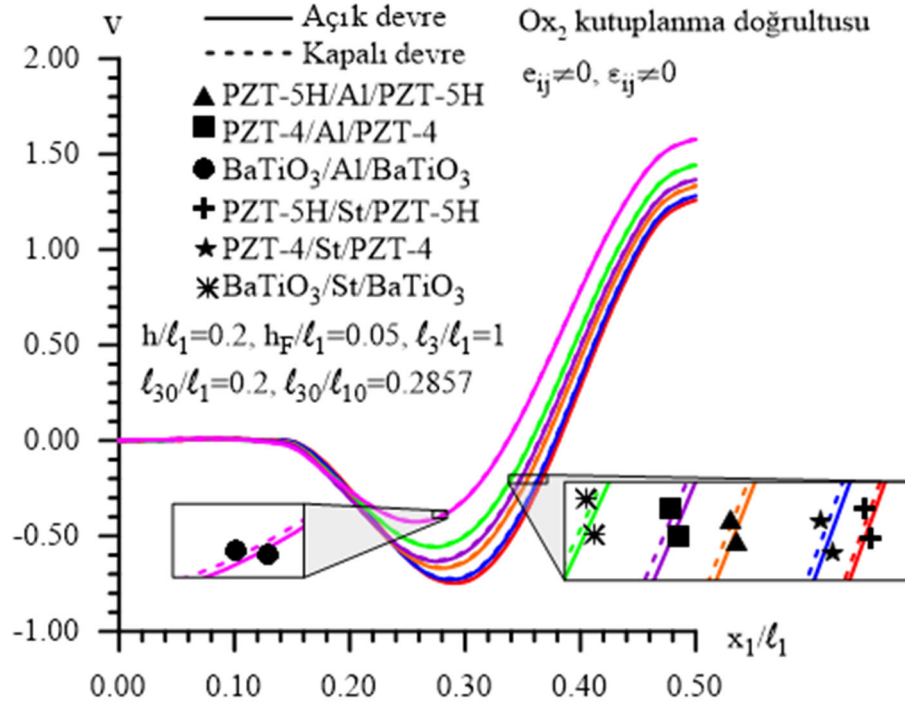
Şekil 3.31 PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30}/ℓ_{10} değerlerinde x_1/ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 3.32 BaTiO₃/Al/ BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30}/ℓ_{10} değerlerinde x_1/ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 3.33 BaTiO₃/St/ BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı ℓ_{30}/ℓ_{10} değerlerinde x_1/ℓ_1 'e göre değişimi ($x_3 = 0$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 3.34 PZT/Metal/PZT sandviç kalın plakta PZT dış katmanlarının sınırında verilen farklı sınır ve temas koşulları için (Problem 3 (açık devre) ve Problem 4 (kapalı devre)) çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin x_1 / ℓ_1 'e göre değişimi

$$(\ell_{30} / \ell_1 = 0.2, \ell_{30} / \ell_{10} = 0.2857, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0, x_3 = 0, x_2 = h_F + h_C + 0)$$

Şekil 3.34'de orta katmanın alüminyum (çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri için PZT dış katmanlarının sınırında verilen farklı sınır ve temas koşulları (Problem 3 (açık devre) ve Problem 4 (kapalı devre)) için çatlak yüzeyinin $x_3 = 0$ ve $x_2 = h_F + h_C + 0$ düzlemlerinin ara kesitinde grafikleri verilmiştir. Bu şekle göre $\ell_{30} / \ell_{10} = 0.2857$ oranı için her bir malzeme çifti için burkulma mod değişimi incelenmiş olup burkulma modunun, başlangıç ön eğinti formu ile aynı olduğu en küçük ℓ_{30} / ℓ_{10} oranının değeri olan τ hakkında aşağıdaki bağıntının yazılabildiği görülmüştür:

$$\tau^{\text{Problem 3}} > \tau^{\text{Problem 4}}. \quad (3.36)$$

DİKDÖRTGEN İÇ ÇATLAK İÇEREN PİEZOELEKTRİK SANDVIÇ KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASI

Bu bölümde, tez çerçevesinde ele alınan sandviç kalın plağın tabakaları arasında birbirine paralel ve aynı ölçülerde dikdörtgen iç çatlakların olması durumuna ait bazı sınırdeğer problemlerin matematiksel modeli, sayısal çözümü ve elde edilen sayısal sonuçların analizi verilecektir. İncelemelerde, piezoelektrik dış katmanlar ve metal orta tabakadan oluştuğu kabul edilen sandviç dikdörtgen kalın plağın, orta ve dış tabakaları arasında özdeş, birbirine paralel iki adet dikdörtgen iç çatlağın bulunduğu ve çatlakların yüzeylerinin başlangıçta, yani yükleme yapılmadan önce çok küçük ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Ele alınan bazı sınırdeğer problemleri çerçevesinde sandviç PZT dikdörtgen plağın, çatlaklar doğrultusunda etkiyen tek yönlü normal dış basınç kuvveti etkisinde, çatlak yüzeylerindeki yerdeğiştirmelerin büyüyerek sonsuza gitmesi (küçük başlangıç eğinti kriteri), teorik olarak kritik delaminasyon burkulma parametrelerinin belirlenmesi için kullanılacaktır [1].

4.1 Ele Alınan Problemin Formülasyonu

Bu bölümde ele alınan sınırdeğer problemleri, daha önceki bölümlerde verilen sınırdeğer probleminden, sınır koşulları ve çatlak geometrisi açılarından farklılık göstermekle birlikte, matematiksel modelleme açısından daha karmaşık ve zordur. Diğer taraftan önceki bölümlerde ele alınan sınırdeğer problemleri, burada ele alınan sınırdeğer problemlerinin özel hali olarak düşünülebilir. Belirtilen farklılıkların daha önce verilen matematiksel modellemelerde göz önüne alınması ile ele alınan sınırdeğer problemlerine ait matematiksel model elde edilebilir. Bu bölümde de ele alınan

problemlerin matematiksel modeli, Elektro-Elastisite teorisinin geometrik lineer olmayan üç boyutlu kesin alan denklemleri kullanılarak, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Dikdörtgen iç çatlaklar içeren sandviç kalın plağın geometrisi ve yükleme durumu Şekil 4.1’de verilmiştir.

Ele alınan sınırdeğer probleminin çözüm bölgesi,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 - S_L^\mp - S_U^\mp \quad (4.1)$$

burada

$$\Omega_1 = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\},$$

$$\Omega_2 = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\},$$

$$\Omega_3 = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\},$$

$$S_L^\mp = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F \mp 0; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\},$$

$$S_U^\mp = \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C \mp 0; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\}.$$

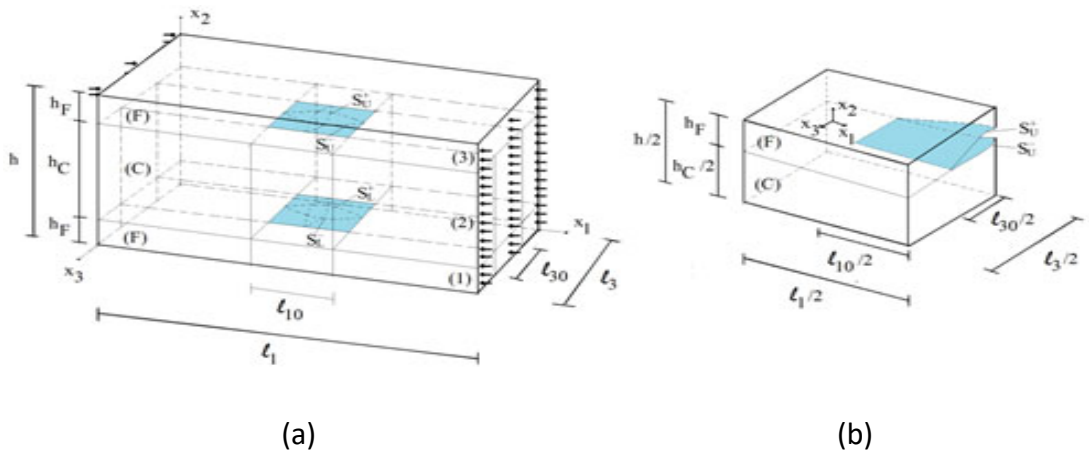
$$(4.2)$$

dir. (4.1) ve (4.2)’de Ω_1 , Ω_2 ve Ω_3 ’ler sırasıyla alt, orta ve üst katmanları (tabakaları);

$S_L^\mp (S_U^\mp)$ alt ve orta (orta ve üst) tabakalar arasında yer alan çatlakın alt (üst indis “-“

yani, $S_L^-(S_U^-)$ ve üst (üst indis “+“ yani, $S_L^+(S_U^+)$) yüzeylerini temsil etmektedir (Şekil

4.1).



Şekil 4.1 İç çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi

(a) Çözüm bölgesinin tamamı (b) Çözüm bölgesinin 1/8’lik kısmı

Ele alınan delaminasyon burkulma problemlerinin incelenebilmesi için “küçük başlangıç eğinti kriteri” [1] kullanılacaktır. Bu nedenle çatlak yüzeylerinin, yükleme yapılmadan önce, çok küçük ön eğrilığe sahip olduğu ve bu eğriliklerin hem alt çatlak ($x_2 = h_F$ konumundaki) hem de üst çatlak ($x_2 = h_F + h_C$ konumundaki) için $x_1 = \ell_1 / 2$ ile $x_3 = \ell_3 / 2$ düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Buna göre çatlak yüzeylerinin denklemleri $(\ell_1 - \ell_{10}) / 2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10}) / 2$ ve $(\ell_3 - \ell_{30}) / 2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30}) / 2$ için

$$x_2^{\mp} = h_F + \varepsilon f^{\mp}(x_1, x_3) \text{ ve } x_2^{\mp} = h_F + h_C + \varepsilon f^{\mp}(x_1, x_3) \quad (4.3)$$

olarak seçilir. (4.3)'te ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen ön eğrilğin (eğintinin) derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametreyi; $f(x_1, x_3)$, bu ön eğintinin formunu gösteren fonksiyonu; üst indis “+” (“-”), ele alınan çatlığın üst (alt) yüzeyine ait büyüklükleri; ℓ_{10} , çatlığın Ox_1 yönündeki uzunluğunu; ℓ_{30} , çatlığın Ox_3 yönündeki uzunluğunu; h_F ve h_C , sırasıyla dış tabakaların ve orta tabakanın kalınlıklarını göstermektedirler. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun $(\ell_1 - \ell_{10}) / 2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10}) / 2$ ve $(\ell_3 - \ell_{30}) / 2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30}) / 2$ için

$$\begin{aligned} f^+(x_1, x_3) &= -f^-(x_1, x_3), \\ f^{\mp}((\ell_1 - \ell_{10}) / 2, x_3) &|_{(\ell_3 - \ell_{30}) / 2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30}) / 2} = 0, \\ f^{\mp}((\ell_1 + \ell_{10}) / 2, x_3) &|_{(\ell_3 - \ell_{30}) / 2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30}) / 2} = 0, \\ f^{\mp}(x_1, (\ell_3 - \ell_{30}) / 2) &|_{(\ell_1 - \ell_{10}) / 2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10}) / 2} = 0, \\ f^{\mp}(x_1, (\ell_3 + \ell_{30}) / 2) &|_{(\ell_1 - \ell_{10}) / 2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10}) / 2} = 0, \\ \frac{df^{\mp}((\ell_1 - \ell_{10}) / 2, x_3)}{dx_1} &|_{(\ell_3 - \ell_{30}) / 2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30}) / 2} = 0, \\ \frac{df^{\mp}((\ell_1 + \ell_{10}) / 2, x_3)}{dx_1} &|_{(\ell_3 - \ell_{30}) / 2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30}) / 2} = 0, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{df^{\mp}(x_1, (\ell_3 - \ell_{30})/2)}{dx_3} \right|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0, \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{df^{\mp}(x_1, (\ell_3 + \ell_{30})/2)}{dx_3} \right|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0$$

eşitliklerini sağladığı kabul edilmektedir.

(4.3) denklemi çatlak yüzeylerinin denklemleridir. Bu yüzeyin parametrik denklemi $x_1 = s_1$, $x_2 = F(s_1, s_3) = K + \varepsilon f^{\mp}(s_1, s_3)$, $x_3 = s_3$ ($K = h_F; h_F + h_C$) için bu yüzeyin birim normal vektörünün bileşenleri, (2.6)-(2.8) yardımıyla ε 'a bağlı kuvvet serisi olarak ifade edilebilir. Böylece,

$$n_1^{\mp} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r+1} n_{1r}^{\mp}(x_1, x_3), n_2^{\mp} = \mp 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r} n_{2r}^{\mp}(x_1, x_3), \quad (4.5)$$

$$n_3^{\mp} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{2r+1} n_{3r}^{\mp}(x_1, x_3).$$

bulunur. Bu ifadeler, çatlak yüzeyi üzerinde sınır koşullarının elde edilmesinde ileride kullanılacaktır.

4.1.1 Alan denklemleri

Dış tabakalar ile orta tabaka arasında paralel özdeş dikdörtgen çatlaklar içeren PZT dikdörtgen sandviç kalın plak için (4.1) çözüm bölgesinde sağlanan yönetici denklemler, her r_n ($n=1,2,3$) katman için,

$$\frac{\partial K_{ji}^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial D_j^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \quad (4.6)$$

$$K_{ji}^{(r_n)} = T_{jk}^{(r_n)} \left(\delta_i^k + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) + M_{ji}^{(r_n)}, D_i^{(r_n)} = e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}$$

$$T_{ij}^{(r_n)} = c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, s_{kl}^{(r_n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right)$$

$$M_{ji}^{(r_n)} = \varepsilon_0 \left(E_i^{(r_n)} E_j^{(r_n)} - \frac{1}{2} E_k^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \delta_i^j \right), E_k^{(r_n)} = -\frac{\partial \phi^{(r_n)}}{\partial x_k}$$

Bünye denklemleri,

$$\begin{aligned}\{T\} &= [C]\{s\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} &= [e]\{s\} + [\varepsilon]\{E\}\end{aligned}\quad (4.7)$$

olarak verilebilir (Yang, 2004) [74]. (4.6)'da bilinen notasyonlar kullanılmıştır. (4.7) eşitliklerinde verilen matrislerin açık ifadeleri sırasıyla (2.11) ve (2.12) de verilmiştir. Bu kısımda kullanılan sembollerin açıklaması detaylı olarak 2.1.1'de verildiği için burada tekrar edilmeyecektir.

4.1.2 Mekaniksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları

Bu kısımda ele alınan delaminasyon burkulma problemi için ele alınan plağın mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları; dört yanal yüzeyinden basit mesnetli ve sadece $x_1 = 0; \ell_1$ yüzeylerinden tek eksenli normal statik dış basınç kuvvetine maruz olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, plağın alt/üst ve çatlak yüzeylerinden herhangi bir yükün etki etmediği kabul edilmektedir. Buna göre mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}u_2^{(r_n)}|_{x_1=0; \ell_1} &= 0, u_2^{(r_n)}|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \\ K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=0} &= K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=\ell_1} = p, K_{13}^{(r_n)}|_{x_1=0; \ell_1} = 0 \\ K_{31}^{(r_n)}|_{x_3=0; \ell_3} &= K_{33}^{(r_n)}|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \\ K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h} &= K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=0} = 0, \\ K_{ji}^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= K_{ji}^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \\ K_{ji}^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ &= K_{ji}^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0\end{aligned}\quad (4.8)$$

olarak verilebilir.

Mekaniksel büyüklüklere göre sandviç kalın plağın tabakaları arasındaki ideal temas koşulları

$$\begin{aligned}\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\} \quad &\text{ve} \\ \{0 \leq x_3 \leq (\ell_3 - \ell_{30})/2\} \cup \{(\ell_3 + \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq \ell_3\} \quad &\text{için}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}\end{aligned}\quad (4.9)$$

sağlandığı kabul edilmektedir.

4.1.3 Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları

Elektriksel büyüklüklere göre sınır ve temas koşulları dikdörtgen plağın dış tabakaları için yani piezoelektrik levhaların sınırlarında geçerli olacaktır. Plağın orta tabakası elastik malzemeden yapıldığı için orta tabakada geçerli değildir. Bununla beraber matematik modelin genel olması açısından, her üç tabakanın piezoelektrik malzemeden yapılmış olması durumu için sınır ve temas koşulları verilmiştir ancak, sayısal hesaplamalarda orta tabakanın elastik olduğu göz önünde bulundurularak işlemler yapılmıştır.

Önceki bölümlerde olduğu gibi bu kısımda da elektriksel büyüklüklere göre iki farklı sınır koşulu için incelemeler yapılmıştır. Ele alınan sınır koşulları ile temas koşullarına ait matematiksel modelleme aşağıda verilmiştir.

A-Açık-devre sınır koşulu ve temas koşulları

Ele alınan PZT dikdörtgen plağın (PZT levhaların) tüm yanal yüzeylerinde elektrik potansiyelin sıfır olduğu yani, levhanın yanal yüzeylerinin yalıtkan olduğu kabul edilmektedir. Ancak PZT levhaların üst ve alt yüzeylerinden Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yerdeğiştirmenin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Yani belirtilen yüzeylerin yalıtkan olmadığı (elektrik akımının mümkün olabildiği) durum “açık devre” koşulu olarak adlandırılmaktadır. Tabakalar arası temas koşulu için bu ara yüzeylerde elektriksel potansiyelin ve Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yerdeğiştirmelerin eşitliği kabul edilmektedir. İlave olarak çatlakların içinin boş yani vakumlu olduğu kabul edilmiştir. Bu kabullere ait sınır ve temas koşullarının matematiksel modeli;

Sınır koşulları

$$\begin{aligned} \phi^{(r_n)}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ D_2^{(r_1)}|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3)}|_{x_2=h} = 0, D_j^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ = D_j^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \\ D_j^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ &= D_j^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Temas koşulları} \quad & \{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\} \quad \text{ve} \\ & \{0 \leq x_3 \leq (\ell_3 - \ell_{30})/2\} \cup \{(\ell_3 + \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq \ell_3\} \quad \text{için} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}\end{aligned}\quad (4.11)$$

olarak verilebilir.

B-Kapalı-devre sınır koşulu ve temas koşulları

Ele alınan kapalı-devre sınır koşullarında, PZT levhaların tüm dış yüzeylerinde (alt, üst yanal yüzeyler ile çatlak yüzeylerinde) elektrik potansiyelin sıfır olduğu yani, plağın tüm yüzeylerinden yalıtkan olduğu (sınırlardan elektrik geçişinin mümkün olmadığı) durum “kapalı devre” koşulu olarak kabul edilmektedir. Tabakalar arası temas koşulları ile çatlakların içinin boş (vakumlu) olması durumlarına ait yukarıda verilen koşullar, kapalı-devre sınır koşulu durumu için de geçerlidir. Verilenlere göre matematiksel modelleme

Sınır koşulları

$$\begin{aligned}\phi^{(r_n),1}|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),1}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \phi^{(r_1),1}|_{x_2=0} = 0, \phi^{(r_3),1}|_{x_2=h} = 0, \\ \phi^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= \phi^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \phi^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = \phi^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0\end{aligned}\quad (4.12)$$

Temas koşulları $\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\}$ ve $\{0 \leq x_3 \leq (\ell_3 - \ell_{30})/2\} \cup \{(\ell_3 + \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq \ell_3\}$ için

$$\begin{aligned}\phi^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}\end{aligned}\quad (4.13)$$

olarak verilebilir.

4.2 Ele Alınan Problemin Çözümü: Lineerleştirme İşlemleri

Ele alınan bu sınırdeğer problemleri dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı metal (elastik) malzemeden yapılmış ve katmanlar arasında dikdörtgen iç çatlak olan piezoelektrik dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde, çatlaklar civarında oluşan delaminasyon burkulma problemini temsil etmektedir. Ele alınan problem nonlinear bir problemidir. Bu nonlinear problemin çözümü, Kısım 2.2 de verildiği gibi, lineerleştirme işlemleri sonucunda lineer seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenecektir [18], [20], [25]. Aranacak büyüklükler, boyutsuz küçük parametre olan ε ’a göre seri formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(r_n)}; \varepsilon_{ij}^{(r_n)}; u_i^{(r_n)}; D_i^{(r_n)}; E_i^{(r_n)}; \phi^{(r_n)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(r_n),q}; \varepsilon_{ij}^{(r_n),q}; u_i^{(r_n),q}; D_i^{(r_n),q}; E_i^{(r_n),q}; \phi^{(r_n),q} \right\}, \varepsilon \ll 1. \quad (4.14)$$

(4.14) ifadeleri ele alınan açık devre (kapalı devre) durumuna ait problem için (4.6)-(4.9) ile (4.10) ve (4.11) ((4.6)-(4.9) ile (4.12) ve (4.13)) alan denklemleri, sınır ve temas koşullarında yerine yazılarak, (4.5)'de göz önünde bulundurularak ε 'un kuvvetlerine göre gruplaştırılırsa, her bir problem için bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş alan denklemleri, sınır ve temas koşullarından oluşan seri-sınırdeğer problemleri elde edilir. Anlaşılır olması açısından, ε 'nin kuvvetlerine göre düzenlenmiş her bir sınırdeğer problemi, ε 'nin kuvvetine göre isimlendirilecektir. Örneğin sıfırncı, birinci, vb. sınırdeğer problemi (veya yaklaşım). Ele alınan delaminasyon burkulma probleminin çözümü, (4.14) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinin çözümlerinin süperpozisyonu olarak elde edilecektir.

Belirtelim ki, sıfırncı yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar da nonlinear elde edilmektedir. Bu nedenle, bilinen mekaniksel görüşler doğrultusunda ele alınan katı cisim için $\delta_i^n + \partial u_i^{(0)} / \partial x_n \approx \delta_i^n$ ilişkisi kullanılarak, sıfırncı yaklaşıma ait lineer olmayan denklem ve bağıntılar, uygun lineer denklem ve bağıntılar ile yer değiştirilmiş olunur. Buna göre sıfırncı yaklaşım için alan denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ji}^{(r_n),0}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n),0}}{\partial x_j} = 0, T_{ij}^{(r_n),0} = c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n),0} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n),0}, \\ D_i^{(r_n),0} &= e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n),0} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n),0}, E_k^{(r_n),0} = -\frac{\partial \phi^{(r_n),0}}{\partial x_k}, \\ s_{kl}^{(r_n),0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n),0}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n),0}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u_2^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, u_2^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, T_{11}^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} = p, \\ T_{13}^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= T_{31}^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = T_{33}^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ T_{2i}^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} &= T_{2i}^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları

i) Açık devre sınır koşulları

$$\begin{aligned}\phi^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ D_2^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} = 0\end{aligned}\quad (4.17)$$

ii) Kapalı devre sınır koşulları

$$\begin{aligned}\phi^{(r_n),0} \big|_{x_1=0;\ell_1} &= 0, \phi^{(r_n),0} \big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ \phi^{(r_1),0} \big|_{x_2=0} &= \phi^{(r_3),0} \big|_{x_2=h} = 0\end{aligned}\quad (4.18)$$

$\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\}$ ve
 $\{0 \leq x_3 \leq (\ell_3 - \ell_{30})/2\} \cup \{(\ell_3 + \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq \ell_3\}$ için mekanik alan büyüklüklerine göre temas koşulları,

$$\begin{aligned}T_{2i}^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} &= T_{2i}^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, \\ T_{2i}^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= T_{2i}^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}\end{aligned}\quad (4.19)$$

elektrik alan büyüklüklerine göre temas koşulları,

$$\begin{aligned}\phi^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1),0} \big|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3),0} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_2),0} \big|_{x_2=h_F+h_C}\end{aligned}\quad (4.20)$$

elde edilir. Benzer şekilde birinci yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar aşağıda verilmiştir.

Buna göre;

Alan denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{ji}^{(r_n),1}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n),1}}{\partial x_j} = 0, K_{ji}^{(r_n),0} = G_{jikm}^{(r_n)} \frac{\partial u_m^{(r_n),1}}{\partial x_k} - R_{mji}^{(r_n)} E_m^{(r_n),1}, \\ D_k^{(r_n),1} &= R_{kji}^{(r_n)} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} - L_{kj}^{(r_n)} E_j^{(r_n),1}, G_{jikm}^{(r_n)} = c_{jikm}^{(r_n)} + T_{jk}^{(r_n),0} \delta_i^m, \\ L_{kj}^{(r_n)} &= \varepsilon_{kj}^{(r_n)}, R_{kji}^{(r_n)} = \varepsilon^{(r_n)} + \varepsilon_0 \left(E_k^{(r_n),0} \delta_i^j - E_j^{(r_n),0} \delta_i^k - E_m^{(r_n),0} \delta_i^m \delta_j^k \right)\end{aligned}\quad (4.21)$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
u_2^{(r_n),1} |_{x_1=0;\ell_1} = 0, u_2^{(r_n),1} |_{x_3=0;\ell_3} = 0, K_{11}^{(r_n),1} |_{x_1=0;\ell_1} = K_{13}^{(r_n),1} |_{x_1=0;\ell_1} = 0, \\
K_{31}^{(r_n),1} |_{x_3=0;\ell_3} = K_{33}^{(r_n),1} |_{x_3=0;\ell_3} = K_{32}^{(r_n),1} |_{x_3=0} = 0, K_{2i}^{(r_3),1} |_{x_2=h} = K_{2i}^{(r_1),1} |_{x_2=0} = 0,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elektiriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları,

i) Açık-devre sınır koşulları

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_n),1} |_{x_1=0;\ell_1} = 0, \phi^{(r_n),1} |_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
D_2^{(r_1),1} |_{x_2=0} = D_2^{(r_3),1} |_{x_2=h} = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ii) Kapalı-devre sınır koşulları

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_n),1} |_{x_1=0;\ell_1} = 0, \phi^{(r_n),1} |_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
\phi^{(r_1),1} |_{x_2=0} = 0, \phi^{(r_3),1} |_{x_2=h} = 0,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$x_1 \in \left(\frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2}, \frac{\ell_1 + \ell_{10}}{2} \right) \text{ ve } x_3 \in \left(\frac{\ell_3 - \ell_{30}}{2}, \frac{\ell_3 + \ell_{30}}{2} \right) \text{ için;}$$

mekaniksel alan büyüklüklerine göre çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
K_{2i}^{(r_1),1} |_{x_2=h_F-0} = -T_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \delta_i^1, K_{2i}^{(r_2),1} |_{x_2=h_F+0} = -T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \delta_i^1, \\
K_{2i}^{(r_2),1} |_{x_2=h_F+h_C-0} = -T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \delta_i^1, K_{2i}^{(r_3),1} |_{x_2=h_F+h_C+0} = -T_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \delta_i^1,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Elektiriksel alan büyüklüklerine göre çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
D_2^{(r_1),1} |_{x_2=h_F-0} = -D_1^{(r_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, D_2^{(r_2),1} |_{x_2=h_F+0} = -D_1^{(r_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \\
D_2^{(r_2),1} |_{x_2=h_F+h_C-0} = -D_1^{(r_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, D_2^{(r_3),1} |_{x_2=h_F+h_C+0} = -D_1^{(r_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\{0 \leq x_1 \leq (\ell_1 - \ell_{10})/2\} \cup \{(\ell_1 + \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq \ell_1\} \tag{4.26}$$

ve

$$\{0 \leq x_3 \leq (\ell_3 - \ell_{30})/2\} \cup \{(\ell_3 + \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq \ell_3\} \text{ için ;}$$

mekaniksel alan büyüklüklerine temas koşulları,

$$\begin{aligned}
u_i^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= u_i^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\
\left(T_{21}^{(r_1),1} + T_{11}^{(r_1),0} \frac{\partial u_i^{(r_1),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F} &= \left(T_{21}^{(r_2),1} + T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F}, \\
T_{22}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= T_{22}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, T_{23}^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} = T_{23}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, \\
\left(T_{21}^{(r_3),1} + T_{11}^{(r_3),0} \frac{\partial u_i^{(r_3),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F+h_C} &= \left(T_{21}^{(r_2),1} + T_{11}^{(r_2),0} \frac{\partial u_i^{(r_2),1}}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_2=h_F+h_C}, \\
T_{22}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} &= T_{22}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, T_{23}^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = T_{23}^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C},
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elektiriksel alan büyüklüklerine göre temas koşulları,

$$\begin{aligned}
\phi^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, \phi^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = \phi^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C}, \\
D_2^{(r_1),1} \big|_{x_2=h_F} &= D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_2),1} \big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3),1} \big|_{x_2=h_F+h_C},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

şeklindedir.

4.2.1 Sıfırncı yaklaşımın çözümü

Bu kısımda (4.14) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinden matematiksel modeli (4.15)-(4.20) ile verilen sıfırncı yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü ele alınacaktır. Buna göre dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı elastik ve katmanlar arası iç çatlak içeren bir dikdörtgen kalın plak ele alınmaktadır (Şekil 4.1). Bu plağın $x_1=0; \ell_1$ ve $x_3=0; \ell_3$ yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve tüm yanal yüzeylerinden topraklanmış ve $x_1=0$ ile $x_1=\ell_1$ karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı normal dış basınç kuvvetinin etkisinde olduğu, bunun dışında hiçbir yüzeyine mekaniksel ve/veya elektriksel başka bir yükün etki etmediği kabul edilmektedir.

Bu bölümde incelenen problem için sıfırncı yaklaşımın çözümü (2.36)-(2.42) koşulları aynı kaldığından önceki bölümlerde verilen çözüm ile aynıdır. Sıfırncı yaklaşımın çözümü, Kısım 2.2.1 deki çözüm olarak kullanılacaktır.

4.2.2 Birinci yaklaşımın çözümü

Bu kısımda, (4.14) yardımıyla elde edilen birinci yaklaşıma ait ve matematiksel modeli (4.21)-(4.28) ile verilen sınırdeğer probleminin çözümü ele alınacaktır. Belirtelim ki,

(4.25), (4.26) ile (4.27) sınır ve temas koşullarında verilen “,0” üst indisli büyüklükler sıfırcı yaklaşıma ait büyüklükleri göstermektedir. Yani birinci yaklaşımın çözümünü elde edebilmek için önce, sıfırcı yaklaşım çözülmelidir. Dolayısıyla, sıfırcı yaklaşıma ait büyüklükler önceden bulunur ve birinci yaklaşımda yerine yazılarak, ele alınan birinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü yapılabilir. Birinci yaklaşıma ait denklem ve ifadeler ile sınır koşulları karmaşık olduğundan çözüm sayısal olarak yapılabilir. Sayısal çözümün belirlenmesinde üç boyutlu sonlu elemanlar algoritması kullanılacaktır.

Ele alınan problemlerin çözümünde, yöntem gereği çözüm bölgesi sonlu eleman adı verilen alt bölgelere ayrılır. Sonlu eleman ayrıklaştırması adı verilen bu işlem ile çözüm bölgesi, bölgenin geometrisine uygun olarak, dörtgen prizma şeklinde sonlu elemanlar ile ayrıklaştırılmıştır. Her sonlu elemanın köşe noktası nod olarak alınmış ve nodlarda bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yerdeğiştirmeler (u_1, u_2 ve u_3) ile elektrik potansiyel (ϕ) seçilmiştir. Sonlu eleman modellemesi için cisimde biriken toplam elektro-mekanik enerjiyi ifade eden ve aşağıda verilen Π fonksiyoneli kullanılacaktır [74].

$$\begin{aligned}
\Pi(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1}) = & \sum_{n=1}^3 \iiint_{\Omega_n} \left[\frac{1}{2} G_{ijkl}^{(r_n),1} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(r_n),1}}{\partial x_l} + R_{ijk}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(r_n),1}}{\partial x_k} - \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(r_n)} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_l} \right] d\Omega_n - \iint_{S_L^-} T_{11}^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_L^+} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} T_{11}^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_U^+} T_{11}^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} u_1^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_L^-} D_1^{(1),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_L^+} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \iint_{S_U^-} D_1^{(2),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 dx_3 - \\
& \iint_{S_U^+} D_1^{(3),0} \frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1} \phi^{(3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 dx_3
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Belirtelim ki, (4.29) fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden yani,

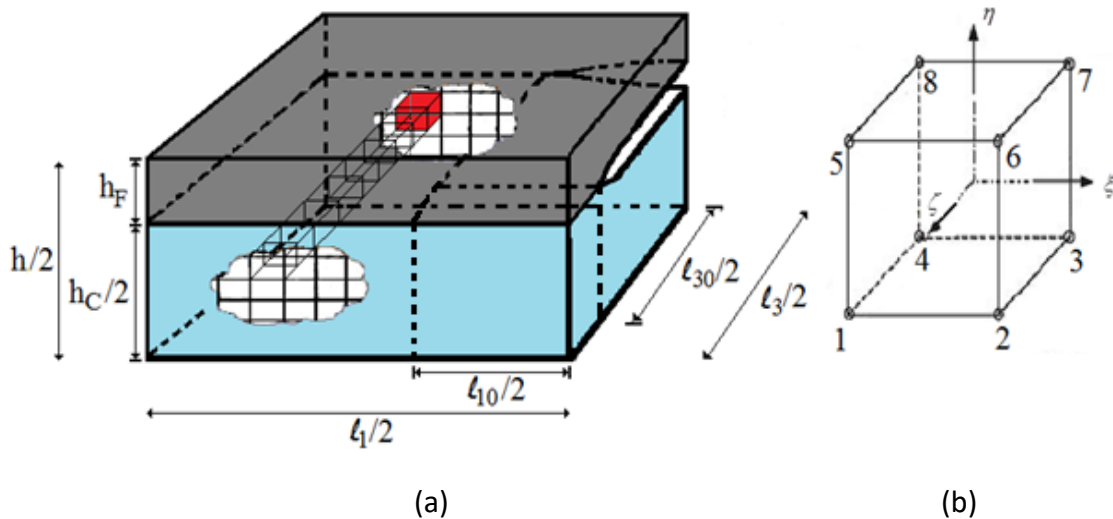
$$\delta \Pi \left(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1} \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1^{(r_n),1}} \delta u_1^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2^{(r_n),1}} \delta u_2^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_3^{(r_n),1}} \delta u_3^{(r_n),1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi^{(r_n),1}} \delta \phi^{(r_n),1} = 0 \quad (4.30)$$

eşitliğinden (4.21) alan denklemleri ile (4.22)-(4.26) da gerilmelere ve elektriksel yerdeğiştirmelere göre verilen sınır koşulları elde edilir.

Sonlu elemanlar modellemesi, plak geometrisinin ve sınır koşullarının $x_2 = h_F + h_C / 2$, $x_1 = \ell_1 / 2$ ve $x_3 = \ell_3 / 2$ düzlemlerine göre simetrik olmasından yararlanılarak, çözüm bölgesinin 1/8 lik kısmında yapılmıştır. Buna göre sonlu eleman ayrıklaştırması

$$V = \{ 0 \leq x_1 \leq \ell_1 / 2; h_F + h_C / 2 \leq x_2 \leq 2h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3 / 2 \} \quad \text{için} \quad V = \bigcup_{k=1}^M V_k \quad \text{olacak}$$

şekilde M adet 8 nodlu standart dikdörtgen prizmatik V_k sonlu elemanlarına ayrıklaştırılır (Şekil 4.2). Burada M kullanılan sonlu eleman adedini göstermektedir ve değeri, sayısal sonuçların yakınsaklığına göre ayrıca belirlenecektir. Tez kapsamında ele alınan V çözüm bölgesi, x_1 yönünde N_x , x_2 yönünde N_y ve x_3 yönündeki N_z adet sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır. Dolayısıyla ayrıklaştırmada kullanılan toplam sonlu eleman sayısı $M = N_x * N_y * N_z$ bulunur.



Şekil 4.2 (a) Çözüm bölgesinin 1/8'inin sonlu elemanlara ayrıklaştırılması (b) Kullanılan sonlu elemanların geometrisi (örnek eleman)

Birinci yaklaşımın çözüm aşamaları, önceki bölümlerde verilen uygun alt bölüm ile aynı olduğundan bu kısımda tekrar edilmemiştir. Detaylar için örneğin Kısım 2.2.2 incelenebilir.

4.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

Bu kısımda incelenen, iç çatlak içeren sandviç dikdörtgen kalın plağın çatlak yüzeylerinin ön eğintisini temsil eden (4.3)'te verilen ve (4.4) koşullarını sağlayan $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu

$$f(x_1, x_3) = A\ell_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{30}} \left(x_3 - \frac{\ell_3 - \ell_{30}}{2} \right) \right) \quad (4.31)$$

olarak seçilmiştir.

Çizelge 4.1 Alüminyum dikdörtgen plak için farklı dış katman kalınlıkları ve farklı x_3 yönündeki çatlak uzunlukları (ℓ_{30}) için elde edilen kritik delaminasyon burkulma

$$\text{kuvvetleri} \left(p_{cr} / \mu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \right)$$

h_F / ℓ_1	ℓ_{30} / ℓ_1					Bant çatlak [20]
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
0.01250	0.0112	0.0084	0.0071	0.0064	0.0060	0.0055
0.01875	0.0172	0.0131	0.0110	0.0099	0.0092	0.0083
0.02500	0.0251	0.0192	0.0161	0.0144	0.0134	0.0120
0.03175	0.0345	0.0265	0.0223	0.0199	0.0185	0.0166
0.03750	0.0451	0.0348	0.0293	0.0262	0.0243	0.0217
0.04375	0.0564	0.0438	0.0371	0.0331	0.0306	0.0275
0.05000	0.0684	0.0535	0.0453	0.0405	0.0374	0.0336
0.05625	0.0807	0.0635	0.0539	0.0483	0.0445	0.0400

Ele alınan sandviç kalın plağın tabakaları arasında iç çatlakların olması durumuna ait sayısal sonuçların verilmesinden önce, yapılan algoritma ve programların doğruluğunun test edildiği, test problemlerine ait sayısal sonuçlar Çizelge 4.1'de verilmiştir. Bu çizelgede verilen sayısal sonuçlar farklı ℓ_{30} / ℓ_1 çatlak uzunlukları için $h / \ell_1 = 0.15$, $\ell_3 / \ell_1 = 1$ ve plağın tüm katmanları alüminyum alınarak belirlenmiştir. Belirtelim ki,

$\ell_{30}/\ell_1=0.5$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar ile aynı durumda Akbarov vd. [20] deki verilen sayısal sonuçlar ile tamamen üst üste düşmektedir. Ayrıca, x_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu artırıldıkça yani, tabakalar arasındaki iç çatlak bant çatlak durumuna yaklaştırıldıkça, kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri azalarak, [20] deki bant çatlak durumundaki değere yaklaştığı görülmektedir. Dolayısıyla, burada verilen veya verilmeyen çok sayıdaki, karşılaştırma-doğrulama testleri sonucunda tarafımızdan yapılan algoritma ve programlara güven sağlanmıştır.

4.3.1 Problem 5 (Açık-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri

Ele alınan plakta x_2 kutuplanma yönü ve açık devre sınır koşulları sağlandığı durum için yani, (4.21)-(4.23), (4.25)-(4.28) sınırdeğer problemi çerçevesinde (Problem 5) elde edilen sayısal sonuçlar, Çizelge 2.4’de verilen PZT malzeme sabitleri kullanılarak ve farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için verilmiştir. Çizelge 4.2’de $h/\ell_1=0.2$, $h_F/\ell_1=0.05$, $\ell_{10}/\ell_1=0.5$ için x_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları ve farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için iç çatlak içeren PZT dikdörtgen kalın plakların delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerleri $e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0$ (Durum 1) ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2) durumlarında ayrı ayrı verilmiştir. Bu çizelgede verilen sayısal sonuçlardan x_3 yönündeki çatlak uzunluğu arttıkça, kritik değerin azaldığı görülmektedir. Bu kritik değerin, x_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu artırıldıkça yani iç çatlak, bant çatlak durumuna yaklaştırıldıkça, bant çatlak için elde edilen kritik değere (Çizelge 2.5-Çizelge 2.10) yaklaştığı görülmektedir. Dolayısıyla, bu sonuçlar, Tezde verilen sayısal sonuçların kendi içinde de tutarlı olduğunu ve her bir problem için birbirinden bağımsız ayrı yapılan algoritma ve programların doğruluğunu bir kez daha teyit etmektedir. Ayrıca bu çizelgede ele alınan dikdörtgen kalın plağın herhangi bir çatlak içermemesi (Çatlak İçermeyen Plak (ÇİP)) durumuna ait sayısal sonuçlar Kısım 2.3.1’de Çizelge 2.5-Çizelge 2.10’dan alınmıştır.

Çizelge 4.2 Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri ve iç çatlak boyutları için elde edilen

$$\text{kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right)$$

$$(h/\ell_1 = 0.2, h_F/\ell_1 = 0.05, \ell_{10}/\ell_1 = 0.5)$$

	ℓ_{30}/ℓ_1					Bant Çatlak	ÇİP
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9		
PZT-5H/Al/ PZT-5H	$\frac{0.2003}{0.2667}$	$\frac{0.1577}{0.2077}$	$\frac{0.1336}{0.1726}$	$\frac{0.1192}{0.1520}$	$\frac{0.1097}{0.1382}$	$\frac{0.0988}{0.1274}$	$\frac{0.1261}{0.1413}$
PZT-4/Al/ PZT-4	$\frac{0.1979}{0.2541}$	$\frac{0.1554}{0.1986}$	$\frac{0.1320}{0.1661}$	$\frac{0.1182}{0.1469}$	$\frac{0.1093}{0.1339}$	$\frac{0.0983}{0.1242}$	$\frac{0.1193}{0.1271}$
BaTiO ₃ /Al/ BaTiO ₃	$\frac{0.1367}{0.1485}$	$\frac{0.1077}{0.1164}$	$\frac{0.0915}{0.0983}$	$\frac{0.0819}{0.0878}$	$\frac{0.0753}{0.0806}$	$\frac{0.0697}{0.0752}$	$\frac{0.0863}{0.0965}$
PZT-5H/St/ PZT-5H	$\frac{0.4122}{0.5434}$	$\frac{0.3215}{0.4231}$	$\frac{0.2717}{0.3471}$	$\frac{0.2425}{0.3015}$	$\frac{0.2242}{0.2718}$	$\frac{0.2153}{0.2495}$	$\frac{0.2139}{0.2564}$
PZT-4/St/ PZT-4	$\frac{0.3916}{0.4915}$	$\frac{0.3062}{0.3832}$	$\frac{0.2576}{0.3158}$	$\frac{0.2291}{0.2758}$	$\frac{0.2104}{0.2501}$	$\frac{0.2016}{0.2332}$	$\frac{0.1979}{0.2514}$
BaTiO ₃ /St/ BaTiO ₃	$\frac{0.2492}{0.2717}$	$\frac{0.1946}{0.2105}$	$\frac{0.1643}{0.1764}$	$\frac{0.1466}{0.1563}$	$\frac{0.1353}{0.1435}$	$\frac{0.1228}{0.1312}$	$\frac{0.1713}{0.1982}$

Çizelge 4.3-4.8’de verilen sayısal sonuçlar $h/\ell_1 = 0.2$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_3/\ell_1 = 1$ durumunda, farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri ve PZT dış katman kalınlıkları ile Ox_1 yönündeki farklı çatlak uzunlukları (ℓ_{10}/ℓ_1) için $e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ (Durum 1-Elastik plak) ve $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2-PZT plak) durumlarında ayrı ayrı elde edilmiştir. Belirtelim ki, ele alınan dikdörtgen plağın herhangi bir çatlak içermemesi (Çatlak İçermeyen Plak-ÇİP) durumu ve açık devre sınır koşullu problem için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetine ait Çizelge 4.3-Çizelge 4.8’de yer verilen sayısal sonuçlar, Kısım 2.3.1’de Çizelge 2.5-Çizelge 2.10 da verilen sayısal sonuçlar ile aynıdır.

Çizelge 4.3 PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, \alpha_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0470	0.0483	0.0490	0.0542	0.0727	0.1236	0.1233
	0.0518	0.0588	0.0632	0.0644	0.0775	0.1307	0.1277
0.0333	0.1092	0.1125	0.1141	0.1241	0.1576	0.2519	0.1234
	0.1342	0.1481	0.1556	0.1599	0.1879	0.2837	0.1301
0.0500	0.1887	0.1972	0.2003	0.2115	0.2557	0.3683	0.1261
	0.2378	0.2571	0.2667	0.2750	0.3160	0.4389	0.1413
0.0666	0.2792	0.2919	0.2972	0.3093	0.3505	0.4612	0.1622
	0.3473	0.3690	0.3800	0.3912	0.4401	0.5740	0.2004

Çizelge 4.4 PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, \alpha_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0411	0.0431	0.0435	0.0473	0.0618	0.1082	0.1177
	0.0447	0.0503	0.0531	0.0545	0.0664	0.1117	0.1201
0.0333	0.1049	0.1097	0.1111	0.1189	0.1470	0.2261	0.1189
	0.1244	0.1362	0.1413	0.1458	0.1725	0.2596	0.1231
0.0500	0.1882	0.1950	0.1979	0.2112	0.2490	0.3453	0.1193
	0.2300	0.2470	0.2541	0.2625	0.3023	0.4172	0.1271
0.0666	0.2689	0.2796	0.2845	0.2993	0.3469	0.4498	0.1512
	0.3460	0.3686	0.3777	0.3889	0.4368	0.5652	0.1872

Çizelge 4.3-Çizelge 4.8’de farklı malzeme çiftleri, farklı dış katman kalınlıkları ile farklı α_1 yönündeki çatlak uzunlukları için Problem 5 durumunda elde edilen kritik burkulma kuvvet değerleri verilmiştir. Bu çizelgelerde verilen sayısal sonuçlar, α_1 yönündeki farklı çatlak uzunlukları ve dış katman kalınlıkları ile PZT-5H/Al/PZT-5H (Çizelge 4.3), PZT-4/Al/PZT-4 (Çizelge 4.4), BaTiO₃/Al/BaTiO₃ (Çizelge 4.5), PZT-5H/St/PZT-5H (Çizelge 4.6),

PZT-4/St/PZT-4 (Çizelge 4.7) ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ (Çizelge 4.8) malzeme çiftleri için verilmiştir. İlave olarak, bu çizelgelerde sayısal sonuçlar kesir şeklinde verilmiş olup; kesirlerin payındaki sayısal değer $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ (Durum 1) ve paydasındaki sayısal değer $e_{ij} \neq 0; \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Durum 2) için elde edilen sayısal sonuçları göstermektedir. Kesirlerin payında verilen sayısal sonuçlar ile paydasında verilen sayısal sonuçlar, elektriksel alan ile mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin, kritik delaminasyon burkulma kuvvetine olan etkisini göstermektedir. Bu etkinin PZT katman kalınlığı (h_F/ℓ_1) arttıkça, arttığı tespit edilmiştir.

Çizelge 4.5 BaTiO₃/Al/ BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, \alpha_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0254}{0.0266}$	$\frac{0.0262}{0.0282}$	$\frac{0.0265}{0.0284}$	$\frac{0.0293}{0.0307}$	$\frac{0.0391}{0.0400}$	$\frac{0.0697}{0.0706}$	$\frac{0.0692}{0.0701}$
0.0333	$\frac{0.0680}{0.0726}$	$\frac{0.0701}{0.0763}$	$\frac{0.0710}{0.0771}$	$\frac{0.0769}{0.0823}$	$\frac{0.0966}{0.1021}$	$\frac{0.1519}{0.1595}$	$\frac{0.0697}{0.0734}$
0.0500	$\frac{0.1304}{0.1402}$	$\frac{0.1350}{0.1466}$	$\frac{0.1367}{0.1485}$	$\frac{0.1456}{0.1568}$	$\frac{0.1744}{0.1865}$	$\frac{0.2478}{0.2651}$	$\frac{0.0863}{0.0965}$
0.0666	$\frac{0.2064}{0.2231}$	$\frac{0.2143}{0.2328}$	$\frac{0.2173}{0.2362}$	$\frac{0.2277}{0.2465}$	$\frac{0.2621}{0.2832}$	$\frac{0.3452}{0.3750}$	$\frac{0.1086}{0.1245}$

Çizelge 4.3-Çizelge 4.8’de verilen tüm sayısal sonuçlardan, katmanları arasında iç çatlak içeren sandviç plağın dış katmanlarının piezoelektrik malzeme (PZT) seçilmesi durumunun, kritik dış basınç kuvvetinde önemli değer artışına sebep olduğu görülmüştür. Bu artış, piezoelektrik katman kalınlığındaki yani h_F/ℓ_1 arttıkça, artmaktadır. Aynı zamanda, elde edilen sayısal sonuçlardan p_{cr}/c_{44}^{PZT} değerlerinin x_1 yönündeki çatlak uzunluğu (ℓ_{10}/ℓ_1) arttıkça azaldığı tespit edilmiştir.

Çizelge 4.6 PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, \alpha_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.1245}{0.1318}$	$\frac{0.1299}{0.1505}$	$\frac{0.1313}{0.1670}$	$\frac{0.1439}{0.1701}$	$\frac{0.1914}{0.1999}$	$\frac{0.3327}{0.3454}$	$\frac{0.1543}{0.1673}$
0.0333	$\frac{0.2583}{0.3020}$	$\frac{0.2699}{0.3375}$	$\frac{0.2734}{0.3638}$	$\frac{0.2950}{0.3754}$	$\frac{0.3734}{0.4307}$	$\frac{0.6014}{0.6467}$	$\frac{0.1872}{0.2193}$
0.0500	$\frac{0.3869}{0.4635}$	$\frac{0.4053}{0.5084}$	$\frac{0.4122}{0.5434}$	$\frac{0.4385}{0.5581}$	$\frac{0.5297}{0.6285}$	$\frac{0.7689}{0.8679}$	$\frac{0.2139}{0.2564}$
0.0666	$\frac{0.4647}{0.5687}$	$\frac{0.4870}{0.6140}$	$\frac{0.4971}{0.6474}$	$\frac{0.5228}{0.6655}$	$\frac{0.6071}{0.7386}$	$\frac{0.8122}{0.9593}$	$\frac{0.2712}{0.3275}$

Çizelge 4.7 PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, \alpha_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.1053}{0.1111}$	$\frac{0.1127}{0.1265}$	$\frac{0.1137}{0.1381}$	$\frac{0.1222}{0.1406}$	$\frac{0.1581}{0.1674}$	$\frac{0.2778}{0.2801}$	$\frac{0.1497}{0.1638}$
0.0333	$\frac{0.2350}{0.2687}$	$\frac{0.2501}{0.2989}$	$\frac{0.2541}{0.3207}$	$\frac{0.2693}{0.3281}$	$\frac{0.3309}{0.3793}$	$\frac{0.5117}{0.5684}$	$\frac{0.1831}{0.2121}$
0.0500	$\frac{0.3620}{0.4255}$	$\frac{0.3832}{0.4643}$	$\frac{0.3915}{0.4912}$	$\frac{0.4106}{0.5042}$	$\frac{0.4821}{0.5701}$	$\frac{0.6710}{0.7835}$	$\frac{0.1979}{0.2514}$
0.0666	$\frac{0.4479}{0.5403}$	$\frac{0.4718}{0.5809}$	$\frac{0.4842}{0.6078}$	$\frac{0.5035}{0.6243}$	$\frac{0.5701}{0.6932}$	$\frac{0.7332}{0.8946}$	$\frac{0.2598}{0.3022}$

Çizelge 4.8 BaTiO₃/St/ BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr} / c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1} (e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)}{\text{Durum 2} (e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1 = 0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1 = 1, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5, \alpha_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0632	0.0662	0.0668	0.0731	0.0970	0.1744	0.1622
	0.0655	0.0711	0.0720	0.0767	0.0990	0.1755	0.1657
0.0333	0.1442	0.1509	0.1527	0.1642	0.2063	0.3286	0.1644
	0.1530	0.1641	0.1670	0.1760	0.2167	0.3421	0.1701
0.0500	0.2227	0.2351	0.2492	0.2644	0.3174	0.4567	0.1713
	0.2505	0.2664	0.2717	0.2846	0.3347	0.4845	0.1982
0.0666	0.3114	0.3256	0.3321	0.3480	0.4021	0.5351	0.2123
	0.3346	0.3535	0.3614	0.3761	0.4319	0.5772	0.2552

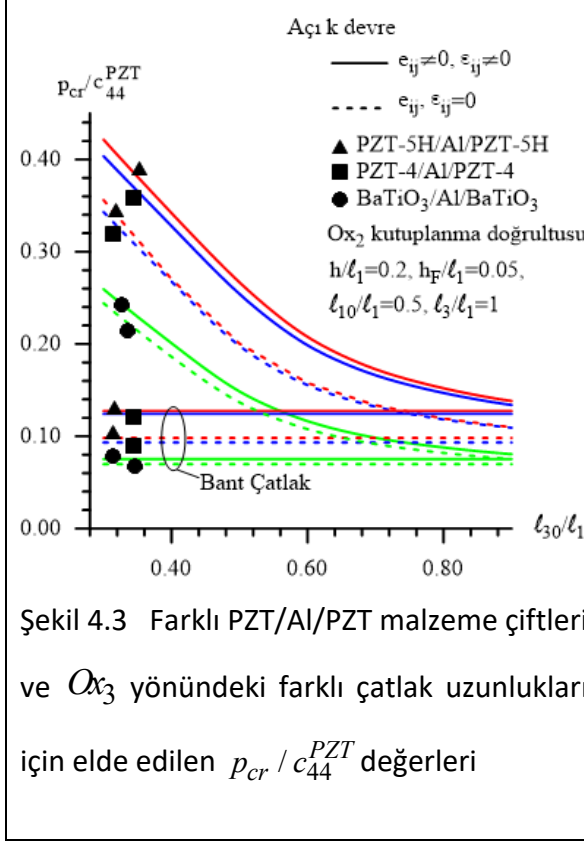
Orta katmanın Alüminyum veya Çelik olarak seçilmesi durumunda h_F/ℓ_1 ve ℓ_{10}/ℓ_1 'e göre elde edilen sayısal sonuçların birbirine göre karşılaştırılması neticesinde, orta katmanın Çelik olması durumunda elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerlerinin, orta katmanın Alüminyum seçilmesi durumunda elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerlerinden daha büyük olduğu tespit edilmiştir. Buna ek olarak, farklı PZT malzemeleri için elde edilen sayısal sonuçların birbirleri ile karşılaştırılması neticesinde

$$p_{cr} / c_{44}^{PZT-5H} > p_{cr} / c_{44}^{PZT-4} > p_{cr} / c_{44}^{BaTiO_3} \quad (4.32)$$

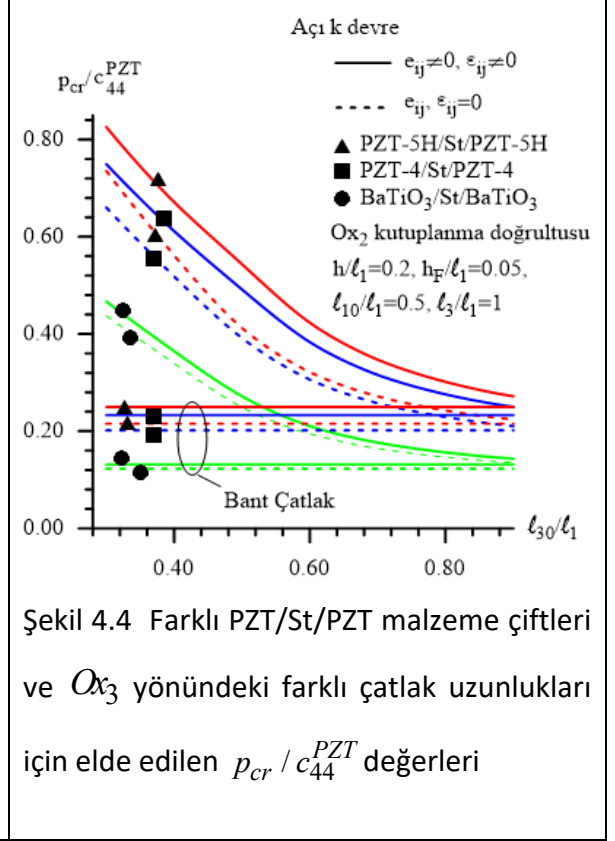
şeklinde bir ilişkinin yazılabileceği görülmüştür.

Şekil 4.3 (Şekil 4.4)'te Problem 5 için orta katman alüminyum (çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri ve α_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları (ℓ_{30}/ℓ_1) için elde edilen sonuçlar Durum 1 ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$) ve Durum 2 ($e_{ij} \neq \varepsilon_{ij} \neq 0$) için ayrı ayrı verilmiştir. Bu şekillerde verilen grafiklerden, α_3 yönündeki çatlak uzunluğu arttıkça plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerlerinin azaldığı, orta katman malzemesinin çelik seçilmesinin, bu katmanın alüminyum olmasına nazaran kritik delaminasyon burkulma değerlerini artırdığı görülmektedir. Ayrıca Çizelge 4.2 için

yapılan yorum yani, kenar çatlak α_3 yönündeki uzunluğu (ℓ_{30}/ℓ_1) arttıkça elde edilen kritik değerlerin, dikdörtgen plağın yapısında bant çatlak içermesi durumu için bulunan kritik değerlere küçülerek yaklaştığı sonucu, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de açıkça görülmektedir.



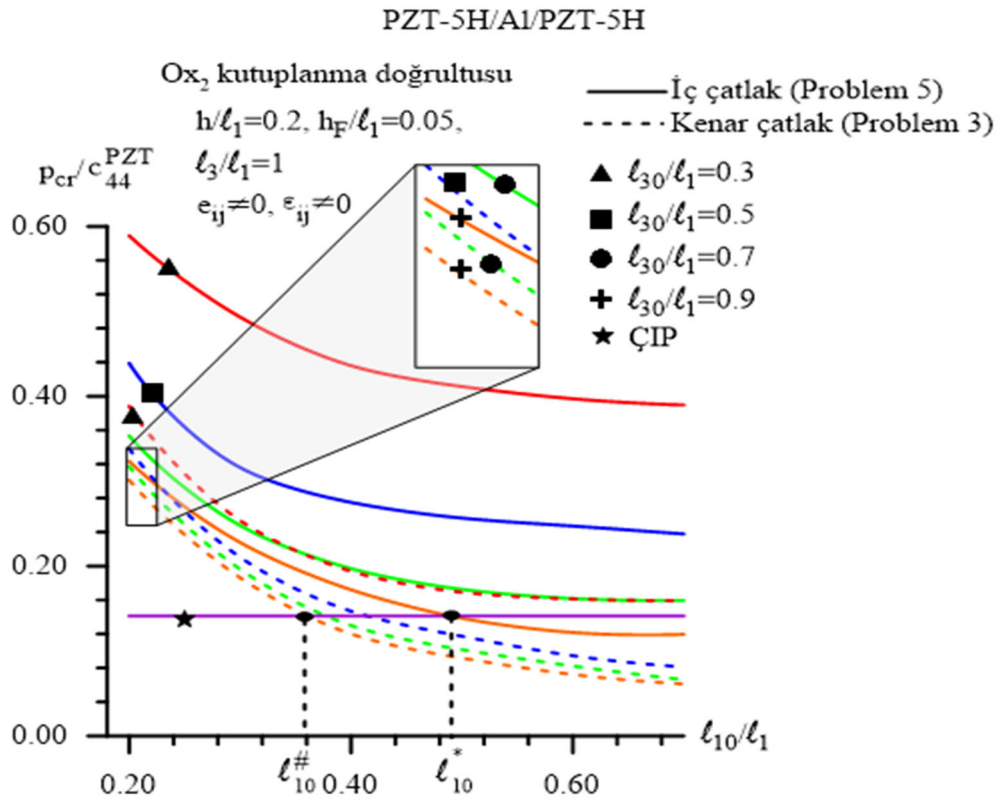
Şekil 4.3 Farklı PZT/Al/PZT malzeme çiftleri ve α_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri



Şekil 4.4 Farklı PZT/St/PZT malzeme çiftleri ve α_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları için elde edilen p_{cr} / c_{44}^{PZT} değerleri

Şekil 4.5'de PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç dikdörtgen plağın delaminasyon burkulmasına plağın yapısındaki çatlak kenar ya da iç çatlak olmasının etkisi farklı çatlak uzunlukları (ℓ_{30}/ℓ_{10}) ve $e_{ij} \neq 0, \epsilon_{ij} \neq 0$ için verilmiştir. Şekilde verilen grafiklere göre, ele alınan plağın katmanları arasında iç çatlak olması durumunda elde edilen kritik değerlerin, bu yapıda katmanlar arasında aynı geometrik özelliklere sahip kenar çatlak içermesi durumunda elde edilen sonuçlardan daha büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.5'te çatlak içermeyen PZT-5H/Al/PZT-5H dikdörtgen piezoelektrik kalın plağın (ÇIP) tüm olarak burkulmasına ait sayısal sonuçlar yine $e_{ij} \neq 0, \epsilon_{ij} \neq 0$ durumu için verilmiştir. Şekilde verilen grafiklerden belirli bir çatlak uzunluğu (bu kritik çatlak uzunluğu, yapısında iç çatlak içeren plak için ℓ_{10}^* ; yapısında kenar çatlak içeren plak için $\ell_{10}^\#$ ile gösterilsin) için plağın tüm olarak burkulmasına sebep olan kritik dış kuvvet ile çatlak

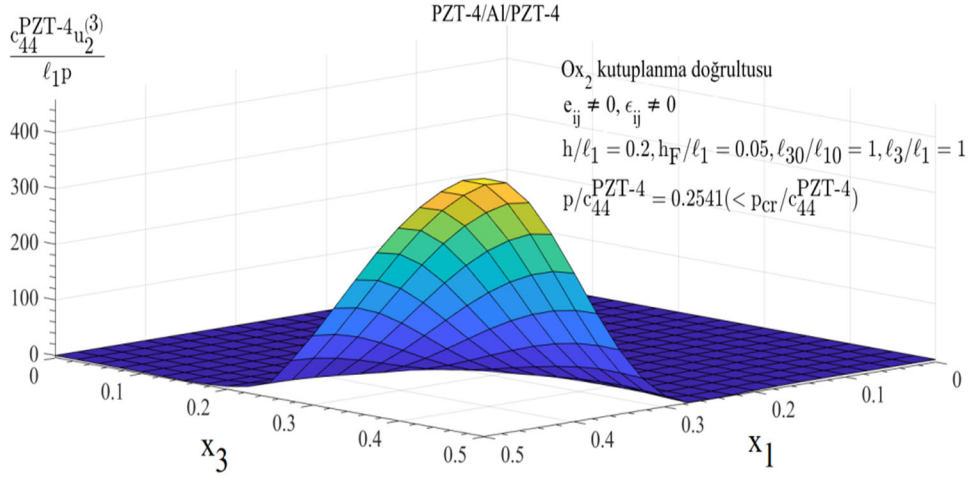
içeren plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kuvvetin birbirine eşit olduğu görülmektedir. Kritik kuvvetin eşitlendiği kritik çatlak uzunluğunun sayısal değeri hem çatlak uzunluğuna (ℓ_{30}) ve hem de malzemenin yapısındaki çatlağın yapısına (kenar çatlak/iç çatlak) bağımlı olduğu görülmektedir. Buna göre, $\ell_{10} > \ell_{10}^*(\ell_{10}^{\#})$ ($\ell_{10} < \ell_{10}^*(\ell_{10}^{\#})$) için çatlak içeren plağın delaminasyon burkulmasının, çatlak içermeyen dikdörtgen plağın burkulmasından önce (sonra) gerçekleştiği söylenebilir. Diğer bir ifade ile belirli bir çatlak uzunluğundan küçük çatlak içeren plakların delaminasyon burkulmasının, çatlak içermeyen plakların burkulmasından sonra gerçekleştiği sonucu çıkmaktadır. Ayrıca yapıda kenar çatlak ($\ell_{10}^{\#}$) veya iç çatlağın (ℓ_{10}^*) olması durumları karşılaştırıldığında, $\ell_{10}^* > \ell_{10}^{\#}$ eşitsizliği yazılabilir.



Şekil 4.5 PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için Problem 5 ve Problem 3 için farklı

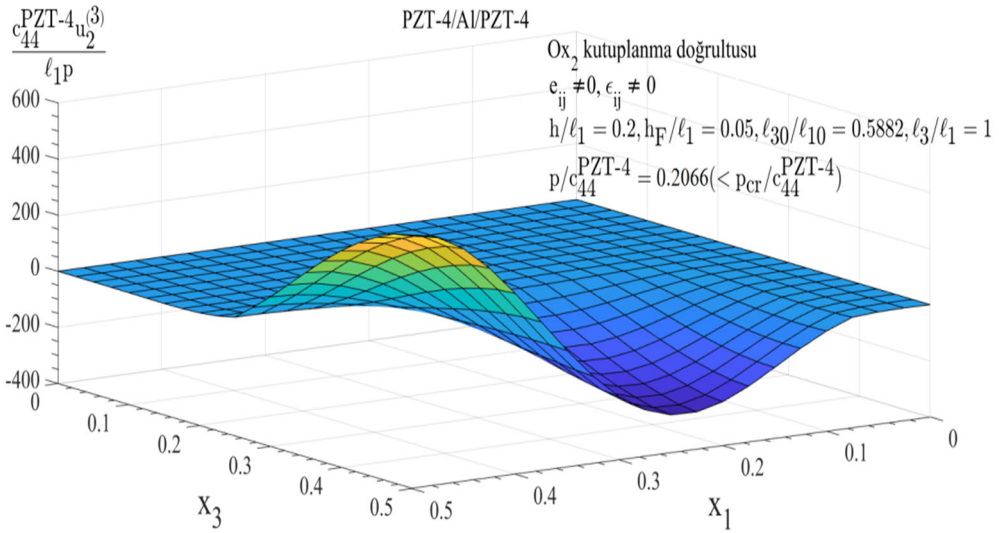
ℓ_{30}/ℓ_1 değerlerinde elde edilen p_{cr}/c_{44}^{PZT} değerleri ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0,$

$h/\ell_1=0.2, h_F/\ell_1=0.05, \ell_3/\ell_1=1$)



Şekil 4.6 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde

$c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (l_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($l_{10} / l_1 = 0.5, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)



Şekil 4.7 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinde

$c_{44}^{PZT-4} u_2^{(3)} / (l_1 p)$ yerdeğiştirme grafiği ($l_{10} / l_1 = 0.85, e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)

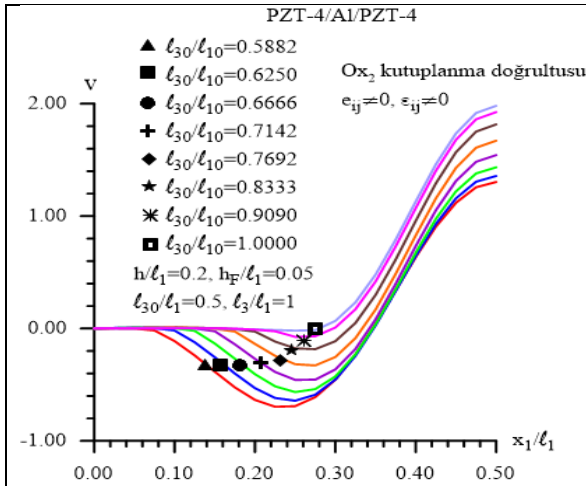
PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C$ 'deki çatlakın üst yüzeyine ($x_2 = h_F + h_C + 0, 0 \leq x_3 \leq l_3 / 2, 0 \leq x_1 \leq l_1 / 2$) (Şekil 4.1) ait noktaların, düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin grafiği (yani, çatlak yüzeyi burkulma modu) Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 ile verilmiştir. Şekil 4.6'da verilen çatlak yüzeyi yerdeğiştirme grafiğinin elde edilmesinde kullanılan parametre değerleri $l_3 / l_1 = 1, l_{30} / l_1 = 0.5, l_{10} / l_1 = 0.5,$

$\ell_{30}/\ell_{10}=1$, $h_F/\ell_1=0.05$, $h/\ell_1=0.2$, $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ alınmıştır. Grafik çiziminde kullanılan parametre değerleri için Şekil 4.6'da verilen ve çatlak yüzeyinin burkulma modunu gösteren yüzey grafiği, (4.31) ile verilen ön eğintinin formuna uygun düşmektedir. Fakat, Şekil 4.7'de sadece farklı çatlak boyutları için (yani, $\ell_{10}/\ell_1=0.85$, $\ell_{30}/\ell_{10}=0.5882$ alınması ve diğer parametre değerlerinin aynı alınması durumunda) bu yüzeyde çizilen yüzey grafiği, (4.31) ile verilen ön eğintinin formuna uygun düşmemektedir.

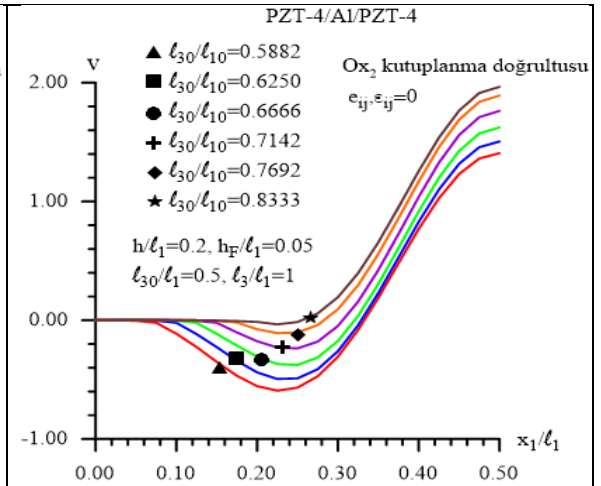
Çatlağın geometrik boyutlarının (veya çatlak kenar uzunlukları oranının) değişimi neticesinde oluşan bu durumu açıklayabilmek için Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğuna oranının (ℓ_{30}/ℓ_{10}) değişiminin, burkulma modları (yani, çatlak yüzeyindeki düşey yerdeğiştirmelerin yayılımı) üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Bu amaçla farklı malzeme çiftleri için piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır olup olmamasına göre ℓ_{30}/ℓ_{10} oranının çeşitli değerleri için, $x_3 = \ell_3/2$ ve $x_2 = h_F + h_C + 0$ düzlemlerinin ara kesitindeki çatlak yüzeyinde bulunan düşey yerdeğiştirmelerin, x_1/ℓ_1 'e göre yayılımı Şekil 4.8 - Şekil 4.19 da verilmiştir. Bu şekillerdeki sayısal sonuçlar $\ell_{30}/\ell_1=0.5$, $\ell_3/\ell_1=1$, $h_F/\ell_1=0.05$, $h/\ell_1=0.2$ için verilmiştir. Şekil 4.8 - Şekil 4.19 da verilen grafiklerde düşey eksendeki v 'nin değeri

$$v = 2u_2^{(r_3)} \left(\left(\max_{0 \leq x_1/\ell_1 \leq 0.5} u_2^{(r_3)} - \min_{0 \leq x_1/\ell_1 \leq 0.5} u_2^{(r_3)} \right) \right)^{-1} \quad (4.33)$$

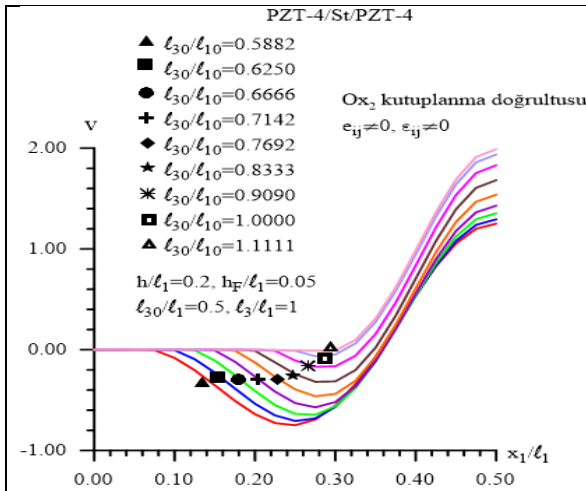
şeklinde belirlenmiştir. Şekildeki grafiklerden, burkulma modlarının ℓ_{30}/ℓ_{10} oranına önemli ölçüde bağlı olduğu görülmektedir. Bu oran küçüldükçe çatlak yüzeyindeki düşey yerdeğiştirmelerin yayılımının (çatlak yüzeyi burkulma modunun), başlangıçta çatlak yüzeylerine verilen ve (4.31) fonksiyonu ile gösterilen ön eğinti formundan farklı bir formda oluştuğu tespit edilmiştir. Bu farklılığın oluşumu ve gelişimi Şekil 4.8-Şekil 4.19 ile detaylı şekilde verilmiştir.



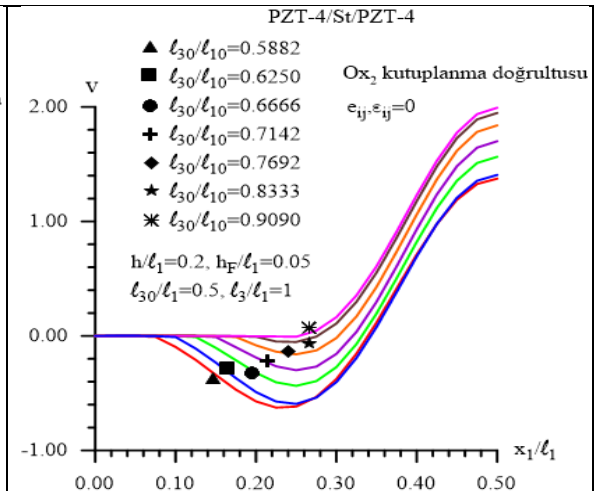
Şekil 4.8 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2, x_2 = h_F + h_C + 0$)



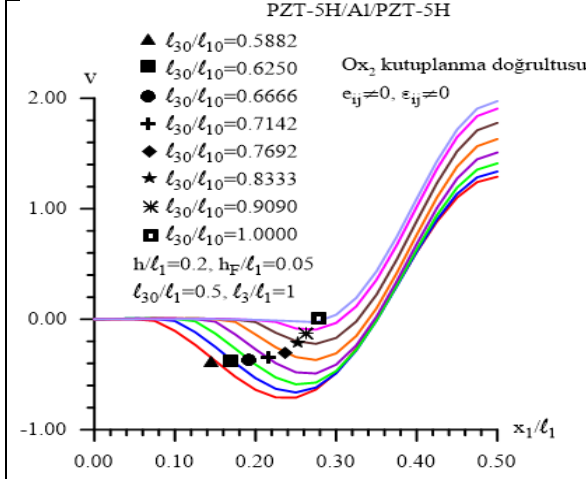
Şekil 4.9 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2, x_2 = h_F + h_C + 0$)



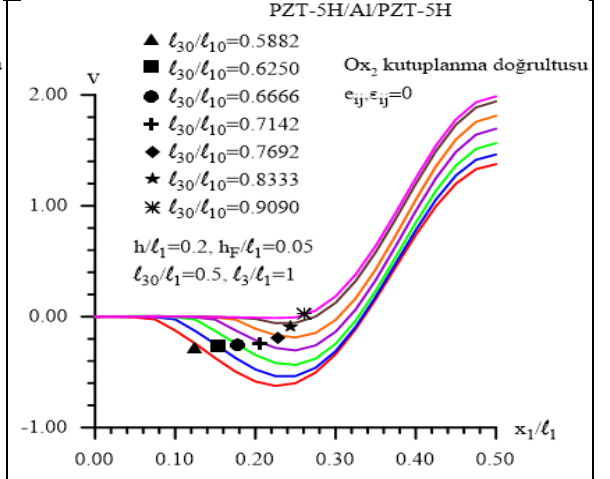
Şekil 4.10 PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2, x_2 = h_F + h_C + 0$)



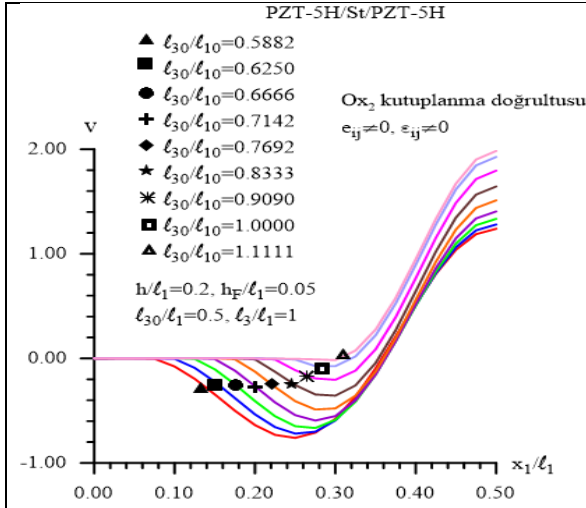
Şekil 4.11 PZT-4/St/PZT-4 sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2, x_2 = h_F + h_C + 0$)



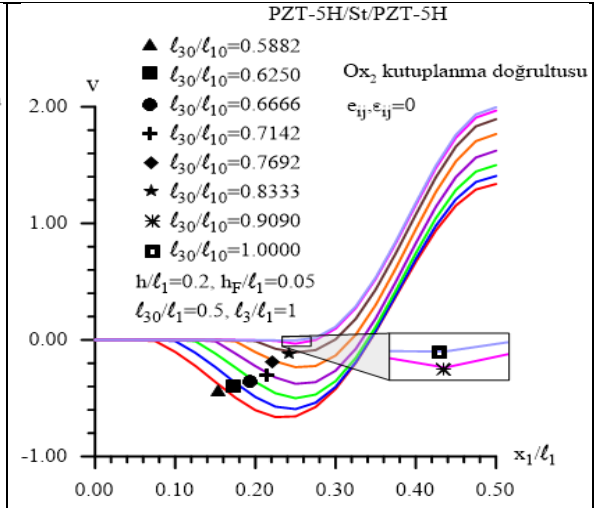
Şekil 4.12 PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



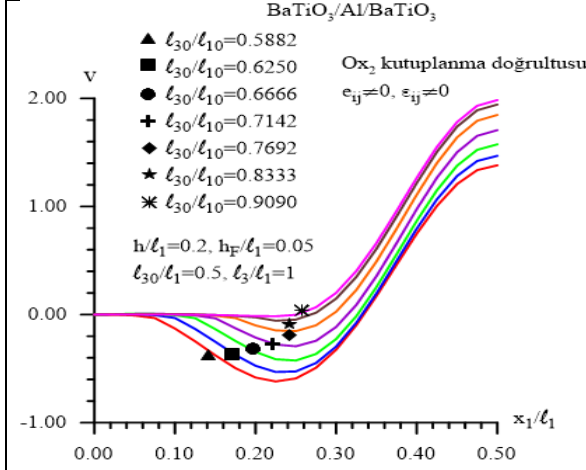
Şekil 4.13 PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



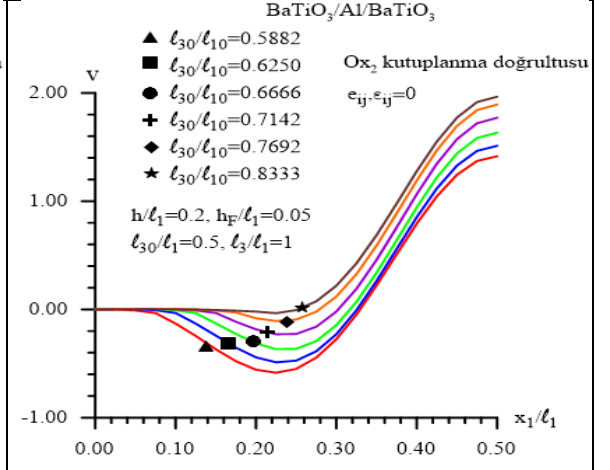
Şekil 4.14 PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



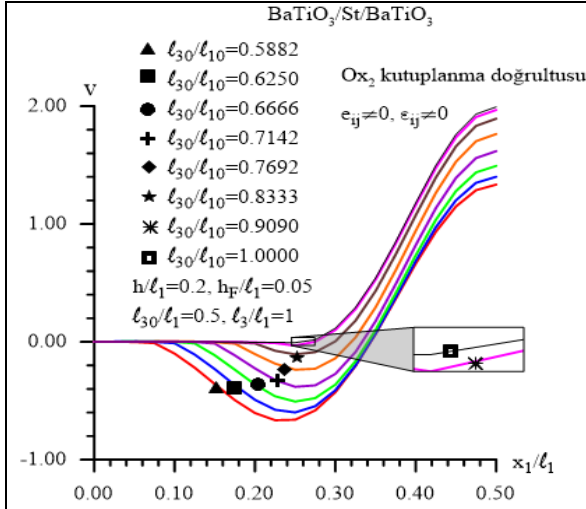
Şekil 4.15 PZT-5H/St/PZT-5H sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



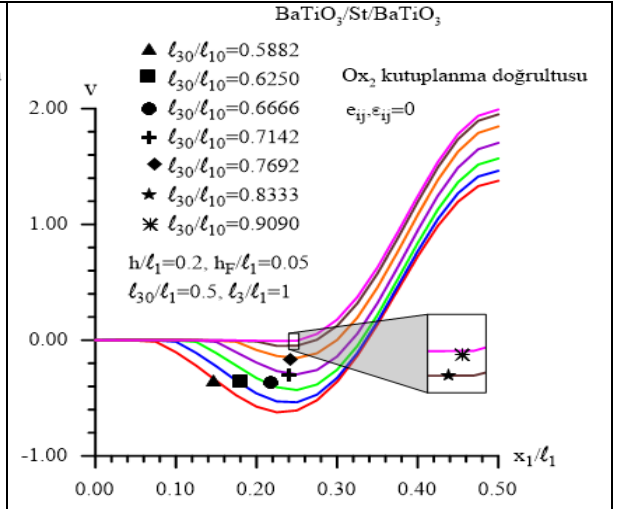
Şekil 4.16 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 4.17 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 4.18 BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)



Şekil 4.19 BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plak için $e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$ durumunda çatlak yüzeyindeki yerdeğiştirmelerin, bazı l_{30}/l_{10} değerlerinde x_1/l_1 'e göre değişimi ($x_3 = l_3/2$, $x_2 = h_F + h_C + 0$)

Burkulma modunun, başlangıç ön eğinti formu ile aynı olduğu en küçük ℓ_{30}/ℓ_{10} oranının değeri $(\ell_{30}/\ell_{10})^* = \tau = \text{sabit}$ ile gösterilirse Şekil 4.8-Şekil 4.19 grafiklerinden yararlanılarak, τ değerleri için Çizelge 4.9 oluşturulabilir. Her $\ell_{30}/\ell_{10} < \tau$ için çatlak yüzeyi burkulma modunun, başlangıçta verilen ön eğinti formundan farklı bir formda oluştuğu Şekil 4.8-Şekil 4.19 'da açıkça görülmektedir. Çatlak kenar uzunlukları oranının burkulma modu üzerindeki etkisi, farklı mühendislik uygulamalarında karşılaşılan yüzey kırışıklıklarının açıklanması yönünden önemli görülmektedir. Bu alanda araştırmalar yapan Hutchinson ve öğrencilerinin [38], [43] çalışmalarında da deneysel olarak yüzey burkulma modları araştırılmıştır. Bu araştırmacıların deneysel olarak belirledikleri yüzey burkulma modlarının, tarafımızdan ele alınan burkulma problemlerinde sayısal olarak elde edilmesi dikkate değer önemli bir sonuçtur. Ayrıca, yüzeyin burkulma modlarının sadece ℓ_{30}/ℓ_{10} oranına değil aynı zamanda malzeme özelliklerine de bağlı olduğu Çizelge 4.9 da görülmektedir. Yani, plak malzemesinin elastik olması ($e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$) veya PZT olması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$) yanında orta katman (alüminyum veya çelik) ve dış katmanın (PZT-5H, PZT 4 ve BaTiO₃) oluştuğu malzemenin özelliklerinden de etkilendiği görülmektedir. Buna göre, örneğin, ele alınan PZT sandviç kalın plakta dış katmanın BaTiO₃ alınması durumunda, diğer PZT malzemelerine göre daha küçük çatlak boyutları için burkulma mod değişimi oluşurken; orta katman malzemesi alüminyum için, orta katmanın çelik olması durumuna göre daha küçük çatlak boyutları için burkulma mod değişimi gerçekleşmektedir.

Çizelge 4.9 Farklı PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için burkulma mod değişimine neden

olan kritik çatlak boyutları oranı $(\ell_{30}/\ell_{10})^* (= \tau)$ değerleri

Malzeme Çiftleri	τ	
	$e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$	$e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0$
PZT-5H/Al/PZT-5H	1.0000	0.9090
PZT-4/Al/PZT-4	1.0000	0.8333
BaTiO ₃ /Al/ BaTiO ₃	0.9090	0.8333
PZT-5H/St/PZT-5H	1.1111	1.0000
PZT-4/St/PZT-4	1.1111	0.9090
BaTiO ₃ /St/ BaTiO ₃	1.0000	0.9090

Diğer bir deyişle dış katmanı farklı PZT malzemelerden oluşan PZT sandviç dikdörtgen plağın çatlak yüzeyi burkulma mod değişimleri ile ilgili olarak τ (Çizelge 3.9) değerleri için

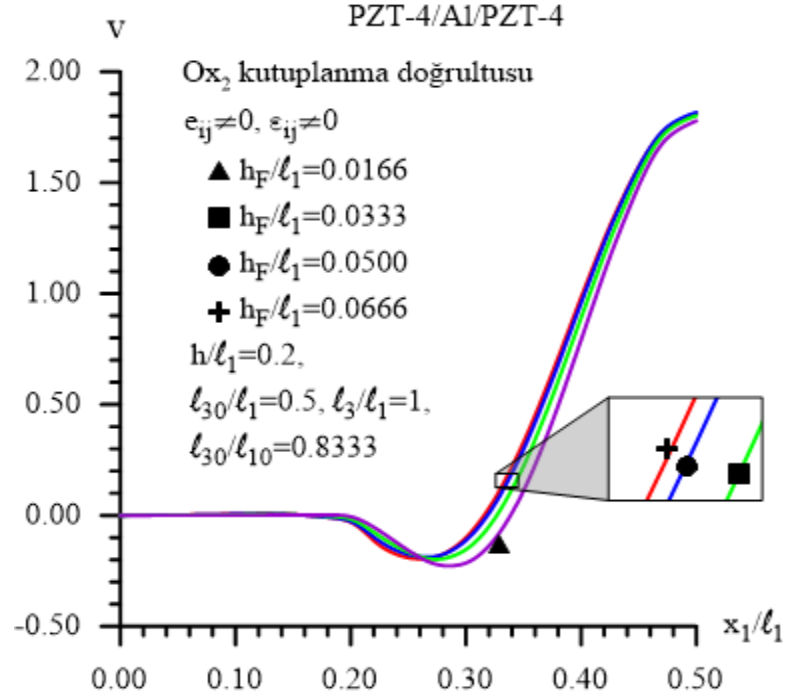
$$\tau^{PZT-5H} > \tau^{PZT-4} > \tau^{BaTiO_3}. \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \tau^{St} &> \tau^{Al}, \\ \tau^{e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0} &> \tau^{e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

eşitsizliklerinin yazılabildiği görülmektedir.

Ele alınan piezoelektrik dikdörtgen sandviç kalın plağın kenar çatlak içermesi durumunda elde edilen τ değerleri (Çizelge 3.9), bu plağın iç çatlak içermesi durumunda elde edilen τ değerlerinden (Çizelge 4.9) daha küçük kalmaktadır. Yani ele alınan plağın burkulma modu, ele alınan plağın kenar çatlak içermesi durumunda burkulma mod değişimi, iç çatlak içermesi durumunda elde edilen burkulma mod değişiminden daha küçük $\tau (= (\ell_{30} / \ell_{10})^*)$ değerleri için gerçekleşmektedir.

Bölüm 3'te PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plağın çatlak geometrisinin burkulma modu üzerine etkilerinin ayrıntılı biçimde verildiği Şekil 3.19, bu bölümde iç çatlaklar içeren PZT4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $\ell_{30} / \ell_{10}^{(1)} = \ell_{30}^{(1)} / \ell_{10} = 1.0000$, $\ell_{30} / \ell_{10}^{(2)} = \ell_{30}^{(2)} / \ell_{10} = 0.8333$, $\ell_{30} / \ell_{10}^{(3)} = \ell_{30}^{(3)} / \ell_{10} = 0.7142$ değerleri için geçerlidir. Yani, ℓ_{30} / ℓ_1 çatlak uzunluğu sabit tutulup ℓ_{10} / ℓ_1 çatlak uzunluğu artırılınca (Şekil 3.19a-Şekil 3.19c) plakta çatlak yüzeyi burkulma modu, plağa yükleme yapılmadan önce çatlak yüzeylerinde var olduğu kabul edilen ve analitik ifadesi (4.31) ile verilen ön eğinti formundan uzaklaşmaktadır. Benzer şekilde, ℓ_{10} / ℓ_1 çatlak uzunluğu sabit tutulup ℓ_{30} / ℓ_1 çatlak uzunluğu azaltıldıkça (Şekil 3.19d-Şekil 3.19f) da burkulma mod değişimi elde edilmektedir. Bu iki durum göz önüne alındığında dolayısıyla, ℓ_{30} / ℓ_{10} oranı azaldıkça, diğer bir deyişle $\ell_{30} / \ell_{10} < \tau$ için çatlak yüzeyi burkulma modu başlangıçta verilen (4.31) ön eğintinin formundan uzaklaşmaktadır (Çizelge 4.9). PZT-4/Al/PZT-4 sandviç plak için açıklanan bu durum, her bir PZT/Metal/PZT ve elastik sandviç plakların ℓ_{30} / ℓ_{10} oranları için elde edilmektedir.



Şekil 4.20 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $\ell_{30}/\ell_{10} = 0.8333$ ve $e_{ij} \neq 0$, $\varepsilon_{ij} \neq 0$ durumunda, farklı dış katman kalınlıkları için v değerlerinin x_1/ℓ_1 'e göre grafiği

Şekil 4.20'de verilen grafiklerde PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plağın farklı dış katman kalınlıklarının, delaminasyon burkulma moduna etkisi verilmiştir. Bu grafikler incelendiğinde dış katman kalınlığının da delaminasyon burkulma moduna etki gösterdiği ve kritik oran τ değerini değiştirdiği görülmektedir. Dolayısıyla, h_F değeri arttıkça kritik oran τ değerinin azaldığı tespit edilmiştir. Sonuç olarak, bu kısımda yapılan incelemeler neticesinde, çatlak yüzeyi burkulma mod değişimine, çatlak kenar uzunluklarının oranı (ℓ_{30}/ℓ_{10}), çatlağın üst veya alt yüzeyinde yer alan en küçük katman kalınlığı (h_F) ile ara yüzey çatlağını içeren katmanların malzemelerinin etki gösterdiği söylenebilir. Ayrıca, çatlak yüzeyindeki burkulma mod değişimindeki esas farklılaşmanın, dış yüklemenin etki ettiği doğrultuda gerçekleştiği ve dış kuvvete dik olan çatlak uzunluğu küçüldükçe kritik ℓ_{30}/ℓ_{10} oranının sağlandığı yani, yüklemeye paralel çatlak uzunluğunun, yüklemeye dik doğrultudaki çatlak uzunluğundan büyük olduğu durumlar için burkulma mod değişiminin gerçekleştiği söylenebilir.

4.3.2 Problem 6 (Kapalı-devre sınır koşullu sınırdeğer probleminin) sayısal çözümleri

Bu bölümde (4.21)-(4.22), (4.24)-(4.28) çerçevesinde ele alınan delaminasyon burkulma problemine (Problem 6) ait sayısal sonuçlar verilecektir. Ele alınan bu problemde, bir önceki kısımda (Kısım 4.3.1) ele alınan sınırdeğer probleminden sadece elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşulları değiştirilerek, ele alınan delaminasyon burkulma problemine ait kritik parametrelere elektriksel alan parametrelerinin etkisi belirlenmeye çalışılacaktır.

Bu kısımda ele alınan probleme (Problem 6) ait elde edilen sayısal sonuçlar Çizelge 4.10-Çizelge 4.15’de, Durum 1 ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$) ve Durum 2 ($e_{ij} \neq 0$; $\varepsilon_{ij} \neq 0$) için verilmiştir. Bu çizelgelerde verilen sayısal sonuçlar, yukarıdaki gibi, $h/\ell_1=0.2$, $\ell_{30}/\ell_1=0.5$, $\ell_3/\ell_1=1$ parametre değerleri ile farklı piezoelektrik katman kalınlığı (h_F/ℓ_1) ve çatlak uzunluğu (ℓ_{10}/ℓ_1) için PZT-5H/Al/PZT-5H (Çizelge 4.10), PZT-4/Al/PZT-4 (Çizelge 4.11), BaTiO₃/Al/BaTiO₃ (Çizelge 4.12), PZT-5H/St/PZT-5H (Çizelge 4.13), PZT-4/St/PZT-4 (Çizelge 4.14) ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ (Çizelge 4.15) de verilmiştir. Belirtelim ki, Çizelge 4.10-Çizelge 4.15 çizelgelerinde son sütunda her bir h_F/ℓ_1 için ÇIP’e (Çatlak içermeyen Plak) ait kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri verilmiştir ve bu değerler, Kısım 2.3.2 de verilen Çizelge 2.11-Çizelge 2.16’larda yer alan değerler ile aynıdır.

Çizelge 4.10-4.15’de verilen sayısal sonuçlardan, dış katman malzemesinin piezoelektrik seçilmesi, kritik burkulma kuvveti değerlerinde artışa; piezoelektrik katman kalınlığının yani, h_F/ℓ_1 değerinin artması, kritik burkulma kuvveti değerlerinde artışa; çatlak uzunluğu ℓ_{10}/ℓ_1 artması, kritik burkulma kuvveti değerlerinde azalmaya sebep olmuştur. Ayrıca, orta katman malzemesinin çelik seçilmesi durumunda her bir h_F/ℓ_1 ve ℓ_{10}/ℓ_1 için elde edilen sayısal değerlerin, orta katman malzemesinin alüminyum seçilmesi durumunda aynı h_F/ℓ_1 ve ℓ_{10}/ℓ_1 değerleri için elde edilen sayısal sonuçlardan büyük olduğu ve Problem 5 için elde edilen (4.32) bağıntısının, Problem 6 için de sağlandığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla, bu parametre değişimlerinin kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerine etkisi, önceki bölümlerde verildiği gibi olduğu söylenebilir.

Çizelge 4.10 PZT-5H/Al/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, \text{ } Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0470}{0.0514}$	$\frac{0.0483}{0.0582}$	$\frac{0.0490}{0.0625}$	$\frac{0.0542}{0.0637}$	$\frac{0.0727}{0.0765}$	$\frac{0.1236}{0.1265}$	$\frac{0.1233}{0.1259}$
0.0333	$\frac{0.1092}{0.1330}$	$\frac{0.1125}{0.1467}$	$\frac{0.1141}{0.1539}$	$\frac{0.1241}{0.1582}$	$\frac{0.1576}{0.1858}$	$\frac{0.2519}{0.2792}$	$\frac{0.1234}{0.1267}$
0.0500	$\frac{0.1887}{0.2355}$	$\frac{0.1972}{0.2544}$	$\frac{0.2003}{0.2635}$	$\frac{0.2115}{0.2717}$	$\frac{0.2557}{0.3125}$	$\frac{0.3683}{0.4334}$	$\frac{0.1261}{0.1305}$
0.0666	$\frac{0.2792}{0.3428}$	$\frac{0.2919}{0.3648}$	$\frac{0.2972}{0.3751}$	$\frac{0.3093}{0.3864}$	$\frac{0.3505}{0.4354}$	$\frac{0.4612}{0.5682}$	$\frac{0.1622}{0.1907}$

Çizelge 4.11 PZT-4/Al/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, \text{ } Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	$\frac{0.0411}{0.0443}$	$\frac{0.0431}{0.0498}$	$\frac{0.0435}{0.0525}$	$\frac{0.0473}{0.0538}$	$\frac{0.0618}{0.0653}$	$\frac{0.1082}{0.1084}$	$\frac{0.1177}{0.1186}$
0.0333	$\frac{0.1049}{0.1231}$	$\frac{0.1097}{0.1346}$	$\frac{0.1111}{0.1395}$	$\frac{0.1189}{0.1440}$	$\frac{0.1470}{0.1700}$	$\frac{0.2261}{0.2541}$	$\frac{0.1189}{0.1197}$
0.0500	$\frac{0.1882}{0.2279}$	$\frac{0.1950}{0.2439}$	$\frac{0.1979}{0.2506}$	$\frac{0.2112}{0.2589}$	$\frac{0.2490}{0.2981}$	$\frac{0.3453}{0.4098}$	$\frac{0.1193}{0.1265}$
0.0666	$\frac{0.2689}{0.3435}$	$\frac{0.2796}{0.3639}$	$\frac{0.2845}{0.3723}$	$\frac{0.2993}{0.3836}$	$\frac{0.3469}{0.4310}$	$\frac{0.4498}{0.5568}$	$\frac{0.1512}{0.1665}$

Çizelge 4.12 BaTiO₃/Al/BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0254	0.0262	0.0265	0.0293	0.0391	0.0697	0.0692
	0.0265	0.0281	0.0283	0.0305	0.0398	0.0699	0.0695
0.0333	0.0680	0.0701	0.0710	0.0769	0.0966	0.1519	0.0697
	0.0724	0.0759	0.0768	0.0819	0.1015	0.1579	0.0704
0.0500	0.1304	0.1350	0.1367	0.1456	0.1744	0.2478	0.0863
	0.1396	0.1457	0.1477	0.1560	0.1855	0.2628	0.0904
0.0666	0.2064	0.2143	0.2173	0.2277	0.2621	0.3452	0.1086
	0.2221	0.2317	0.2349	0.2452	0.2815	0.3721	0.1157

Çizelge 4.13 PZT-5H/St/PZT-5H plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.1245	0.1299	0.1313	0.1439	0.1914	0.3327	0.1543
	0.1305	0.1489	0.1649	0.1680	0.1970	0.3237	0.1591
0.0333	0.2583	0.2699	0.2734	0.2950	0.3734	0.6014	0.1872
	0.2991	0.3341	0.3625	0.3710	0.4254	0.6353	0.2082
0.0500	0.3869	0.4053	0.4122	0.4385	0.5297	0.7689	0.2139
	0.4591	0.5031	0.5365	0.5509	0.6209	0.8560	0.2411
0.0666	0.4647	0.4870	0.4971	0.5228	0.6071	0.8122	0.2712
	0.5635	0.6078	0.6393	0.6572	0.7301	0.9481	0.3107

Çizelge 4.14 PZT-4/St/PZT-4 plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç

$$\text{kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.1053	0.1127	0.1137	0.1222	0.1581	0.2778	0.1497
	0.1099	0.1249	0.1361	0.1386	0.1644	0.2781	0.1526
0.0333	0.2350	0.2501	0.2541	0.2693	0.3309	0.5117	0.1831
	0.2657	0.2951	0.3160	0.3232	0.3732	0.5548	0.2009
0.0500	0.3620	0.3832	0.3915	0.4106	0.4821	0.6710	0.1979
	0.4204	0.4582	0.4836	0.4965	0.5610	0.7682	0.2402
0.0666	0.4479	0.4718	0.4842	0.5035	0.5701	0.7332	0.2598
	0.5343	0.5735	0.5990	0.6151	0.6829	0.8880	0.2956

Çizelge 4.15 BaTiO₃/St/BaTiO₃ plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik

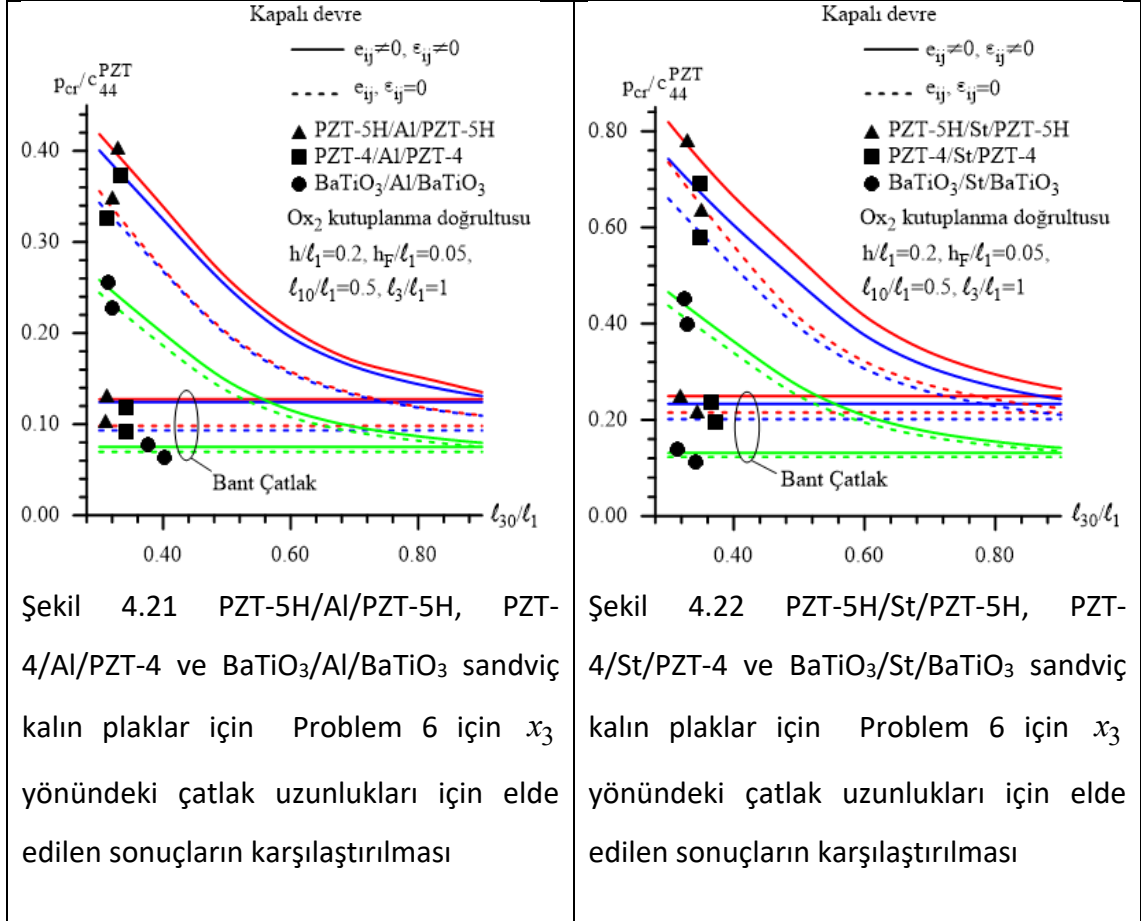
$$\text{basınç kuvveti değerleri } p_{cr}/c_{44}^{PZT} \left(\frac{\text{Durum 1}(e_{ij}=0, \varepsilon_{ij}=0)}{\text{Durum 2}(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)} \right) (h/\ell_1=0.2,$$

$$\ell_3/\ell_1=1, \ell_{30}/\ell_1=0.5, Ox_2 \text{ kutuplanma doğrultusu})$$

h_F/ℓ_1	ℓ_{10}/ℓ_1						ÇİP
	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	
0.0166	0.0632	0.0662	0.0668	0.0731	0.0970	0.1744	0.1622
	0.0652	0.0707	0.0717	0.0763	0.0983	0.1751	0.1648
0.0333	0.1442	0.1509	0.1527	0.1642	0.2063	0.3286	0.1644
	0.1523	0.1633	0.1660	0.1751	0.2154	0.3384	0.1675
0.0500	0.2227	0.2351	0.2492	0.2644	0.3174	0.4567	0.1713
	0.2491	0.2646	0.2701	0.2832	0.3352	0.4799	0.1874
0.0666	0.3114	0.3256	0.3321	0.3480	0.4021	0.5351	0.2123
	0.3328	0.3517	0.3592	0.3739	0.4291	0.5723	0.2429

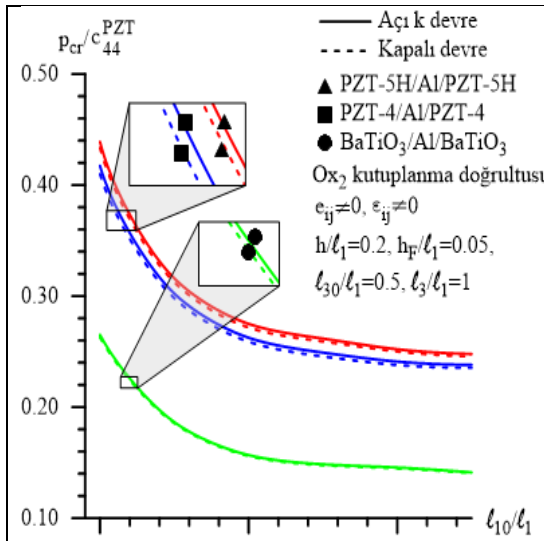
Şekil 4.21 (Şekil 4.22)'de Problem 6 için orta katman Alüminyum (Çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri için x_3 yönündeki farklı çatlak uzunlukları (ℓ_{30}/ℓ_1) için elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu şekillerde verilen sayısal sonuçlara göre

Ox_3 yönündeki çatlak uzunluğu arttıkça plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik kuvvet değerleri, Problem 5'te de olduğu gibi, azalarak belirli bir asimptota yaklaşmaktadır. Belirtelim ki, Şekil 4.21 ve Şekil 4.22'de verilen sayısal sonuçlar, sandviç plağın bant çatlak ve/veya iç çatlak içermesi durumunda plağın bütün yanal kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş olması durumu için verilmiştir.

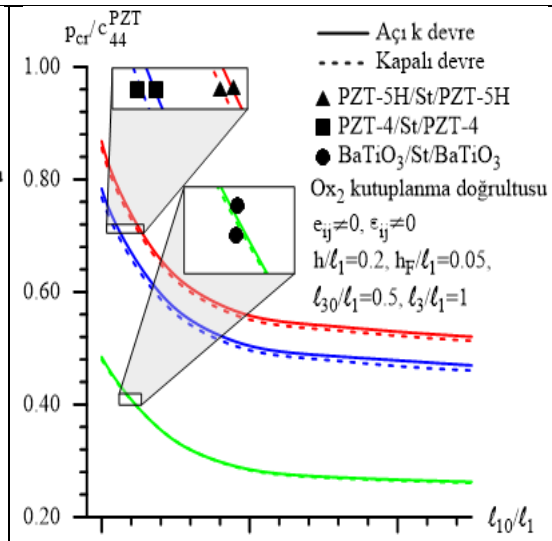


Şekil 4.23 (Şekil 4.24)'te orta katman Alüminyum (Çelik) olması durumunda farklı PZT dış katman malzemeleri için PZT dış katmanlarının sınırında verilen farklı sınır ve temas koşulları (Problem 5 (açık devre) ve Problem 6 (kapalı devre)) için elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu iki şekilde verilen sayısal sonuçlardan, elektriksel alan büyüklüklerine göre farklı alınan sınır koşullarının kritik değerlere etkisi için açık devre sınır koşullu sınırdeğer problemi (Problem 5) için elde edilen kritik değerlerin, kapalı devre sınır koşullu sınırdeğer problemi (Problem 6) çerçevesinde elde edilen sayısal sonuçlardan büyük olduğu söylenebilir. Yani elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşullarının değişimi, az olmakla beraber, kritik parametre değerlerinde yine değişime

neden olmaktadır (Problem 5 için Çizelge 4.3-Çizelge 4.8 ve Problem 6 için Çizelge 4.10-Çizelge 4.15). Burada Problem 5 ve Problem 6 arasında elektriksel alan büyüklüklerine göre sınır koşullarının farklılık içermesine karşın, mekanik yükleme altında kritik parametrelerin belirlendiği unutulmamalıdır. Bu açıdan bakıldığında, her iki problem için mekanik yükleme altında belirlenen kritik parametreler arasında farkın olması; ele alınan PZT sandviç dikdörtgen plağın bu iki problem çerçevesinde ve elektriksel yükleme altında belirlenecek kritik parametreleri arasında oluşacak farkın daha fazla olabileceği öngörülebilir.



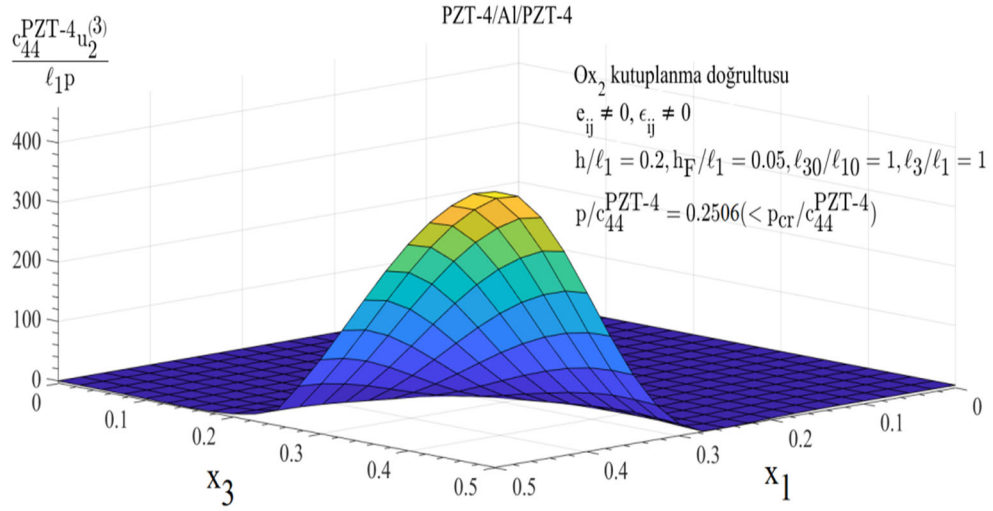
Şekil 4.23 PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4 ve BaTiO₃/Al/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 5 ve Problem 6'dan elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)



Şekil 4.24 PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 ve BaTiO₃/St/BaTiO₃ sandviç kalın plaklar için Problem 5 ve Problem 6'dan elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$)

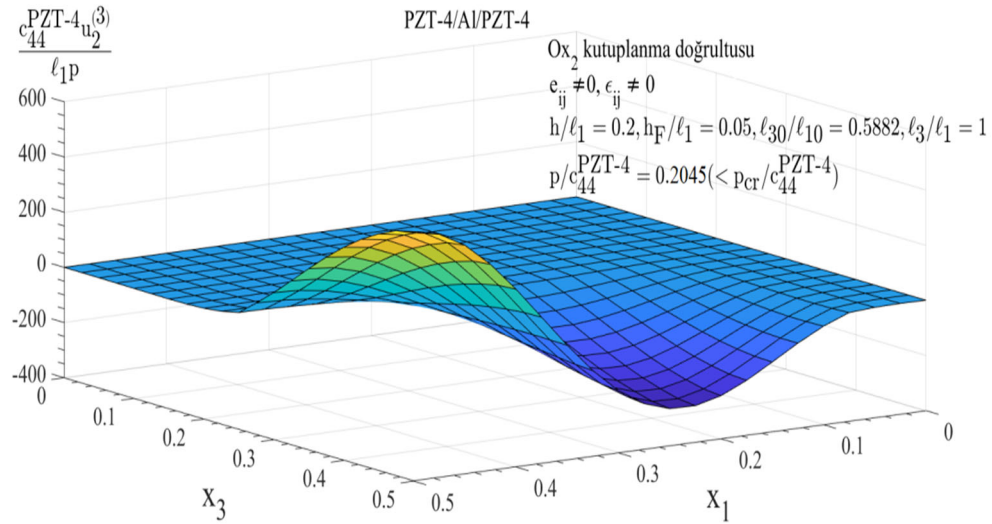
PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C$ 'deki çatlağın üst yüzeyine (Şekil 4.1) ait noktaların düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin grafiği (burkulma modu) Şekil 4.25 ($l_{10}/l_1 = 0.5, l_{30}/l_{10} = 1$) ve Şekil 4.25 ($l_{10}/l_1 = 0.85, l_{30}/l_{10} = 0.5882$) 'da $l_3/l_1 = 1, l_{30}/l_1 = 0.5, h_F/l_1 = 0.05, h/l_1 = 0.2, e_{ij} \neq 0$, ve $\varepsilon_{ij} \neq 0$ parametre değerleri için verilmiştir. Şekil 4.25'te verilen çatlak yüzeyine ait burkulma modu, bir önceki alt bölümde verilen ve çatlak yüzeylerinin ön eğintisini gösteren (4.31)

fonksiyonu ile uyumlu olmasına karşın, Şekil 4.26’da verilen çatlak yüzeyi burkulma modu, (4.31) ile verilen ön eğintinin formu ile uyuşmamaktadır.



Şekil 4.25 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 6

için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.5$, $e_{ij} \neq 0$, $\epsilon_{ij} \neq 0$)



Şekil 4.26 PZT-4/Al/PZT-4 sandviç kalın plak için $x_2 = h_F + h_C + 0$ yüzeyinin Problem 6

için grafiği ($\ell_{10} / \ell_1 = 0.85$, $e_{ij} \neq 0$, $\epsilon_{ij} \neq 0$)

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında ilk defa dış tabakaları piezoelektrik, orta tabakası metal malzemeden yapılmış ve tabakaları arasında bant/dikdörtgen kenar/dikdörtgen iç çatlaklar içeren sandviç dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti altında çatlaklar civarında oluşan 3-boyutlu delaminasyon burkulma problemleri incelenmiştir. Bu incelemeler piezoelektrik malzemeler için elektro-elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik doğrusal olmayan kesin denklemleri ve parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Uygun nonlinear problemlerin çözümü küçük parametreler yöntemi ile seri biçiminde aranmıştır.

Delaminasyon burkulma kriteri olarak “küçük başlangıç eğinti kriteri” yani, çatlak yüzeylerinde yükleme yapılmadan önce var olduğu kabul edilen çok küçük ön eğriliklerin, dış basınç kuvveti altında büyüyerek sonsuza gitmesine sebep olan dış kuvvet, kritik delaminasyon burkulma kuvveti olarak belirlenmiştir. Teze konu olan kritik parametrelerinin bulunması için yukarıda belirtilen seri-sınırdeğer problemlerinden sıfırıncı ve birinci sınırdeğer probleminin (yaklaşımın) çözülmesinin yeterli olduğu gösterilmiş ve birinci yaklaşıma ait olan denklemler ve bağıntıların lineerize edilmiş üç boyutlu stabilite-burkulma denklem ve bağıntıları ile örtüştüğü tespit edilmiştir. Sıfırıncı yaklaşıma ait olan sınırdeğer probleminin çözümü klasik lineer elektro-elastisite teorisi çerçevesinde, birinci yaklaşıma ait olan problem ise tarafımızdan geliştirilen üç boyutlu sonlu elemanlar algoritma ve programları yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür.

Sayısal sonuçlar çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin, kritik delaminasyon burkulma kuvvetine etkisi, katmanlar arasında bant çatlak/dikdörtgen kenar çatlak/dikdörtgen iç çatlak olması durumları için

ayrı ayrı detaylı olarak elde edilmiş ve incelenmiştir. Bu incelemeler neticesinde PZT-5H, PZT-4 ile BaTiO₃ piezoelektrik malzemeler ve çelik (St) ile alüminyum (Al) metal malzemeler kullanılarak, PZT/Metal/PZT malzeme çiftleri için elde edilen yeni bilimsel neticeler aşağıdaki gibi özetlenebilir;

- I. Dış katmanların piezoelektrik (PZT) malzemeden yapılmış olması, aynı katmanın elastik malzemeden yapılmış olmasına göre kritik delaminasyon burkulma kuvvetini önemli ölçüde artırmaktadır (yani elektriksel ve mekanik alanların karşılıklı etkisinin göz önüne alınması kritik delaminasyon burkulma kuvvetini önemli ölçüde artırmaktadır). Ayrıca, PZT katmanlarının kalınlıklarının artırılması (h_F) kritik kuvvet değerini daha da büyötmektedir (Çizelge 2.5-vd, Çizelge 3.3-vd, Çizelge 4.3-vd).
- II. Ele alınan PZT sandviç plakta katmanlar arasında çatlakların olması, kritik delaminasyon burkulma kuvvetinin değerini küçölmektedir. Mevcut duruma göre yapıda bant çatlak olması, dikdörtgen kenar veya dikdörtgen iç çatlak olmasına göre en küçük delaminasyon burkulma kuvvetini vermektedir. Dikdörtgen kenar veya dikdörtgen iç çatlakın boyutları bant çatlakla yaklaştırıldıkça elde edilen kritik kuvvet değerleri, bant çatlak için elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetine “asimptotik olarak” yakınsamaktadır (Şekil 3.3, Şekil 3.22, Şekil 4.3-, Şekil 4.21 vd.). Diğer taraftan yapıda bant çatlak olması durumunda x_3 doğrultusunda plakın uzunluğunun artırılması ile elde edilen kritik kuvvet değerleri, düzlem şekil değıştirme varsayımı altında incelenen çatlak içeren PZT sandviç şerit-plakların delaminasyon burkulma problemleri çerçevesinde bulunan ve literatürde verilen kritik kuvvet değerine “asimptotik olarak” yakınsamaktadır (Şekil 2.3).
- III. PZT sandviç plakın katmanları arasındaki çatlak boyutları arttırıldıkça, kritik kuvvet değeri azalmaktadır. Tersine, yapıdaki çatlak boyutları küçöüldükçe kritik kuvvet değeri artmakta ve bazı çatlak boyutları için elde edilen kritik kuvvet değeri, yapının tüm olarak burkulması durumunda (çatlak içermeyen PZT sandviç plak (ÇIP) durumunda) elde edilen kritik burkulma kuvvetinden büyük kalmaktadır (Şekil 2.4, Şekil 4.5).

IV. Kritik delaminasyon burkulma kuvvetinin değerine, çatlakların geometrik ölçüleri, dış tabaka malzemesi ile orta katman malzemesi etki göstermektedir:

- a. İncelenen PZT sandviç dikdörtgen kalın plaklar için orta katman malzemesinin aynı ve fakat farklı PZT dış katman malzemeleri için elde edilen kritik kuvvet değerleri arasında,

$$p_{cr} / c_{44}^{PZT-5H} > p_{cr} / c_{44}^{PZT-4} > p_{cr} / c_{44}^{BaTiO_3}$$

eşitsizliğin yazılabildiği,

- b. Diğer taraftan, aynı PZT dış katman malzemesi ve fakat orta katmanın çelik (St) veya alüminyum (Al) seçilmesi durumunda,

$$(p_{cr} / c_{44}^{PZT})_{St} > (p_{cr} / c_{44}^{PZT})_{Al}$$

eşitsizliğin yazılabildiği tespit edilmiştir.

V. Ele alınan PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın mekaniksel yükleme altında incelenmesi durumu için elektriksel büyüklüklere göre sınır koşullarının değiştirilmesinin (açık devre sınır koşulu, kapalı devre sınır koşulu) kritik kuvvet değerini değiştirdiği tespit edilmiştir (Şekil 2.9-Şekil 2.10, Şekil 3.24-Şekil 3.25, Şekil 4.23-Şekil 4.24).

VI. Ele alınan PZT dış katman malzemelerinde kutuplanma doğrultusunun Ox_2 veya Ox_1 olarak değiştirilmesi, kritik delaminasyon burkulma kuvvetini değiştirmektedir. Bununla beraber, kutuplanma doğrultusunun dış kuvvet düzlemine dik olarak seçilmesinin, kritik kuvvet değerine etkisinin daha fazla olduğu tespit edilmiştir (Şekil 2.7-Şekil 2.8, Şekil 2.11-Şekil 2.12).

VII. Ele alınan PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın katmanları arasında dikdörtgen kenar veya dikdörtgen iç çatlak olması durumları ve verilen dış basınç kuvveti altında, bazı parametre değerlerinde çatlak yüzeyi burkulma modunun, bu yüzeylere başlangıçta verilen ön eğinti formundan farklı formda gerçekleştiği tespit edilmiştir (Şekil 3.5-Şekil 3.6, Şekil 3.26-Şekil 3.27, Şekil 4.6-Şekil 4.7, Şekil 4.25-Şekil 4.26). Yapılan detaylı incelemelerde çatlak yüzeyi burkulma mod değişimine çatlak boyutlarının (ℓ_{10}, ℓ_{30}) , dış katman (PZT katman) kalınlığının (h_F) ve katmanların malzemesinin (PZT veya elastik malzeme olmasının) etki gösterdiği tespit edilmiştir.

- VIII. Dış basınç kuvveti altında çatlak yüzeyi burkulma mod değişiminin, genel olarak, dış kuvvet doğrultusundaki çatlak uzunluğunun buna dik doğrultudaki çatlak uzunluğundan büyük olduğu durumlar için gerçekleştiği tespit edilmiştir. Tabakaları arasında kenar ve/veya iç çatlak içeren PZT sandviç dikdörtgen kalın plak için mod değişiminin olduğu parametre değerleri tespit edilerek $\left(\tau \left(= (\ell_{30}/\ell_{10})^* \right) \right)$ ele alınan malzeme çiftleri için karşılaştırılması neticesinde,
- $$\tau^{PZT-5H} > \tau^{PZT-4} > \tau^{BaTiO_3},$$
- $$\tau^{St} > \tau^{Al},$$
- $$\tau^{e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0} > \tau^{e_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0}.$$

eşitsizliklerinin sağlandığı tespit edilmiştir (Çizelge 3.9, Şekil 3.20, Çizelge 4.9).

- IX. Ayrıca, tabakalar arasında kenar ve/veya iç çatlak olması durumları için PZT dış katman kalınlığının artmasının ve kapalı devre elektriksel sınır koşullarının uygulanmasının τ değerini düşürdüğü (Şekil 3.21, Şekil 4.20, Şekil 3.34); yapıda iç çatlak olması durumunda elde edilen τ değerlerinin, yapıda kenar çatlak olması durumunda elde edilen τ değerlerinden daha büyük olduğu tespit edilmiştir (Çizelge 3.9, Çizelge 4.9).

Yukarıda özetlenen tez ve elde edilen bilimsel sonuçlar çerçevesinde, bu tez çalışmasının piezoelektrik bileşenleri bulunan üç boyutlu yapı elemanlarının, kesin teoriler çerçevesinde, mekaniğinin öğrenilmesinde hem teorik hem de uygulama açılarından önemli katkılar sağlayacağı öngörülmektedir. Ayrıca, ele alınan problemlerin başarıyla çözülmesi, şimdiye kadar literatürde mevcut iki boyutlu ve yaklaşık teoriler çerçevesinde incelenmiş problemlere ait sayısal sonuçların doğruluğunun veya doğruluk sınırlarının belirlenmesinde de kullanılabilecek bir gösterge teşkil edeceğini de göstermektedir. Bundan başka, ele alınan delaminasyon-burkulma problemlerinin kesin teoriler çerçevesinde matematiksel modelinin oluşturulması, üç boyutlu sonlu eleman formülasyonu ve sayısal çözümün gerektirdiği algoritma ve programların tarafımızdan yapılmasının önemli bir bilgi birikimi oluşturacağı, bu ve benzeri alanlardaki mevcut ve/veya sonraki bilimsel çalışmaların tayininde ve esaslandırılmasında etkili/yol gösterici olacağı öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Hoff, N.J., (1954). "Buckling and Stability", Journal of the Royal Aeronautical Society, 58: 3-52.
- [2] Christensen, R.M., (1979). Mechanics of composite materials, John Wiley and Sons International, New York.
- [3] Erdogan, F., (2000). "Fracture mechanics", International Journal of Solids and Structures, 37 (1): 171-183.
- [4] Kachanov, L., (1988). Delamination buckling of composite materials, Mechanics of Elastic Stabilities Series, Vol. 14, Springer Netherlands.
- [5] Kachanov, L.M., (1976). "Fracture of composite materials by means a delamination", Mekhanika Polimerov, 5: 918–922.
- [6] Kardomateas, G. A., Pelegri, A. A. ve Malik, B., (1995). "Growth of internal delaminations under cyclic compression in composite plates", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 43 (6): 847-868.
- [7] Thouless, M.D., Jensen, H.M. ve Liniger, E.G., (1994). "Delamination from edge flaws", Proceedings of the Royal Society of London Series A, 447 (1930): 271-279.
- [8] Chai, H., Babcock, C.D. ve Knauss, W.G., (1981). "One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling", International Journal of Solids and Structures, 17 (11): 1069-1083.
- [9] Evans, A.G. ve Hutchinson, J.W., (1984). "On the mechanics of delamination and spalling in compressed films", International Journal of Solids and Structures, 20: 455-466.
- [10] Leissa, A.W., (1985). Buckling of laminated composite plates and shell panels, No. OSURF-762513/713464, Ohio State Univ. Research Foundation Columbus.
- [11] Obdržálek, V. ve Vrbka, J., (2010). "On buckling of a plate with multiple delaminations", Engineering Mechanics, 17 (1): 37-47.

- [12] Wang, J.T.S., Cheng, S.H. ve Lin, C.C., (1995). "Local buckling of delaminated beams and plates using continuous analysis", *Journal of Composite Materials*, 29 (10): 1374-1402.
- [13] Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2002). "Delamination of unidirectional viscoelastic composite materials", *Mechanics of Composite Materials*, 38 (1): 17-24.
- [14] Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2002). "On the buckling of the elastic and viscoelastic composite circular thick plate with a penny-shaped crack", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 21 (2): 269-279.
- [15] Akbarov, S.D. ve Rzayev, O.G., (2003). "On the delamination of a viscoelastic composite circular plate", *International Applied Mechanics*, 39 (3): 368-374.
- [16] Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2010). "Delamination buckling of a rectangular orthotropic composite plate containing a band crack", *Mechanics of Composite Materials*, 46: 493-504.
- [17] Akbarov, S., Yahnioglu, N. ve Karatas, E., (2010). "Buckling delamination of a rectangular plate containing a rectangular crack and made from elastic and viscoelastic composite materials", *International Journal of Solids and Structures*, 47 (25-26): 3426-3434.
- [18] Akbarov, S., Yahnioglu, N. ve Karatas, E.E., (2012). "3D FEM analysis of the buckling delamination of a rectangular viscoelastic composite plate with an embedded rectangular crack under two-axial compression", *CMC: Computers, Materials and Continua*, 30 (1): 1-18.
- [19] Akbarov, S., Yahnioglu, N. ve Karatas, E. E., (2014). "A 3D FEM analysis of buckling delamination of a rectangular plate with an inner rectangular crack under a biaxial compressive force", *Mechanics of Composite Materials*, 49 (6): 585-594.
- [20] Akbarov, S., Yahnioglu, N. ve Tekin, A., (2010). "3D FEM analysis of the buckling delamination of a rectangular sandwich plate containing interface rectangular cracks and made from elastic and viscoelastic materials", *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 64 (2): 147-186.
- [21] Rzayev, G., (2002). "Local buckling around an interfacial crack in a viscoelastic sandwich plate", *Mechanics of Composite Materials*, 38 (3): 233-242.
- [22] Rzayev, O.G. ve Akbarov, S.D., (2002). "Local buckling of the elastic and viscoelastic coating around the penny-shaped interface crack", *International Journal of Engineering Science*, 40 (13): 1435-1451.
- [23] Akbarov, S.D., (2013). "Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey I: solution method and problems related to the plane strain state", *Mechanics of Composite Materials*, 48 (6): 681-692.

- [24] Akbarov, S.D., (2013). "Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks: Survey II (Axisymmetric and 3D problems)", *Mechanics of Composite Materials*, 49 (1): 97-106.
- [25] Akbarov, S., (2013). *Stability loss and Buckling delamination*, Springer.
- [26] Akbarov, S.D. ve Guz, A.N., (2000). *Mechanics of curved composites*, Vol. 78, Springer Science & Business Media.
- [27] Akbarov, S.D. ve Kosker, R., (2004). "Internal stability loss of two neighboring fibers in a viscoelastic matrix", *International Journal of Engineering Science*, 42 (17-18): 1847-1873.
- [28] Akbarov, S.D., (1998). "On the three-dimensional stability loss problems of elements of structures of viscoelastic composite materials". *Mechanics of Composite Materials*, 34 (6): 537-544.
- [29] Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2001). "A method of investigation of the general theory of stability problems on structural elements fabricated from viscoelastic composite materials", *Composites Part B: Engineering*, 32 (5): 475-482.
- [30] Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioglu, N., (1997). "On the fracture of the unidirectional composites in compression", *International Journal of Engineering Science*, 35 (12-13): 1115-1136.
- [31] Akbarov, S. D., Cilli, A. ve Guz, A.N., (1997). "The theoretical strength limit in compression of viscoelastic layered composite materials", *Composites Part B: Engineering*, 30 (5): 465-472.
- [32] Akbarov, S.D. ve Kocaturk, T., (1997). "Fibre stability in anisotropic matrix at small strains", *Mechanics of Composite Materials*, 33 (5): 423-429.
- [33] Akbarov, S. D., Yahnioglu, N. ve Kutug, Z., (2001). "On the three-dimensional stability loss problem of the viscoelastic composite plate", *International Journal of Engineering Science*, 39 (13): 1443-1457.
- [34] Guz, A.N., (1999). *Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies*, Berlin: Springer – Verlag.
- [35] Kutug, Z., Yahnioglu, N. ve Akbarov, S.D., (2003). "The loss of stability analyses of an elastic and viscoelastic composite circular plate in the framework of three-dimensional linearized theory", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 22 (3): 475-488.
- [36] Evans, A.G. ve Hutchinson, J.W., (1995). "The thermomechanical integrity of thin films and multilayers", *Acta Metallurgica et Materialia*, 43 (7): 2507-2530.
- [37] Gioia, G. ve Ortiz, M., (1997). "Delamination of compressed thin films", *Advances in Applied Mechanics*, 33 (8): 119-192.

- [38] Hutchinson, J.W., He, M.Y. ve Evans, A.G., (2000). "The influence of imperfections on the nucleation and propagation of buckling driven delaminations", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 (4): 709-734.
- [39] Hutchinson, J.W. ve Suo, Z., (1991). "Mixed mode cracking in layered materials", *Advances in Applied Mechanics*, 29: 63-191.
- [40] Hutchinson, J.W., Thouless, M.D. ve Liniger, E.G., (1992). "Growth and configurational stability of circular, buckling-driven film delaminations", *Acta Metallurgica et Materialia*, 40 (2): 295-308.
- [41] Moon, M.W., Chung, J.W., Lee, K.R., Oh, K.H., Wang, R. ve Evans, A.G., (2002). "An experimental study of the influence of imperfections on the buckling of compressed thin films", *Acta Materialia*, 50 (5): 1219-1227.
- [42] Moon, M.W., Lee, K.R., Oh K.H. ve Hutchinson, J.W., (2004). "Buckle delamination on patterned substrates", *Acta Materialia*, 52 (10): 3151-3159.
- [43] Moon, M.W., Jensen, H.M., Hutchinson, J.W. ve Oh, K.H., (2002). "The characterization of telephone cord buckling of compressed thin films on substrates", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50: 2355-2377.
- [44] Nilsson, K.F., Thesken, J.C., Sindelar, P., Giannakopoulos, A.E. ve Stoåkers, B., (1993). "A theoretical and experimental investigation of buckling induced delamination growth", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 (4): 749-782.
- [45] Nilsson, K.F. ve Giannakopoulos, A.E., (1995). "A finite element analysis of configurational stability and finite growth of buckling driven delamination", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43 (12): 1983-2021.
- [46] Toth, F., Rammerstorfer, F.G., Cordill, M.J. ve Fischer, F.D., (2013). "Detailed modelling of delamination buckling of thin films under global tension", *Acta Materialia*, 61: 2425-2433.
- [47] Wang, J.S. ve Evans, A.G., (1998). "Measurement and analysis of buckling and buckle propagation in compressed oxide layers on superalloy substrates", *Acta Materialia*, 46 (14): 4993-5005.
- [48] Jerome, R. ve Ganesan, N., (2010). "New generalized plane strain FE formulation for the buckling analysis of piezocomposite beam", *Finite Elements in Analysis and Design*, 46: 896-904.
- [49] Sanz, J. A., Ariza M.P. ve Dominguez, J., (2005). "Three-dimensional BEM for piezoelectric fracture analysis", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29 (6): 586-596.
- [50] Shang, F., Kuna, M. ve Abendroth, M., (2003). "Finite element analyses of three-

- dimensional crack problems in piezoelectric structures”, *Engineering Fracture Mechanics*, 70 (2): 143-160.
- [51] Suleiman, O.M.E., (2015). Introduction and literature review on buckling of composite laminated plates, Lap Lambert Academic Publishing, Germany.
 - [52] Anton, S.R. ve Sodano, H.A., (2007). “A review of power harvesting using piezoelectric materials”, *Smart Materials and Structures*, 16 (3): R1.
 - [53] Yang, Z., Zhou, S., Zu, J. ve Inman, D., (2018). “High-performance piezoelectric energy harvesters and their applications”, *Joule*, 2 (4): 642-697.
 - [54] Akbarov, S. ve Yahnioglu, N., (2016). “On the total electro-mechanical potential energy and energy release rate at the interface crack tips in an initially stressed sandwich plate-strip with piezoelectric face and elastic core layers”, *International Journal of Solids and Structures*, 88-89: 119-130.
 - [55] Banks-Sills, L., Motola, Y. ve Shemesh, L., (2008). “The M-integral for calculating intensity factors of an impermeable crack in a piezoelectric material”, *Engineering Fracture Mechanics*, 75 (5): 901-925.
 - [56] Kumar, S. ve Singh, R.N., (1996). “Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings”, *Acta materialia*, 44 (1): 173-200.
 - [57] Kumar, S. ve Singh, R.N., (1997). “Energy release rate and crack propagation in piezoelectric materials. Part II: combined mechanical and electrical loads”, *Acta materialia*, 45 (2): 859-868.
 - [58] Mehta, K. ve Virkar, A.V., (1990). “Fracture mechanisms in ferroelectric-ferroelastic lead zirconate titanate (Zr: Ti= 0.54: 0.46) ceramics”, *Journal of the American Ceramic Society*, 73 (3): 567-574.
 - [59] Pak, Y.E., (1992). “Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials”, *International Journal of Fracture*, 54 (1): 79-100.
 - [60] Parton, V.Z., (1976). “Fracture mechanics of piezoelectric materials”, *Acta Astronautica*, 3 (9-10): 671-683.
 - [61] Rao, S.S. ve Sunar, M., (1994). “Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures”, *Applied Mechanics Reviews*, 47: 113-123.
 - [62] Schneider, G.A. ve Heyer, V., (1999). “Influence of the electric field on Vickers indentation crack growth in BaTiO₃”, *Journal of the European Ceramic Society*, 19 (6-7): 1299-1306.
 - [63] Sosa, H., (1992). “On the fracture mechanics of piezoelectric solids”, *International Journal of Solids and Structures*, 29 (21): 2613-2622.

- [64] Kuna, M., (2010). "Fracture mechanics of piezoelectric materials - Where are we right now?", *Engineering Fracture Mechanics*, 77 (2): 309-326.
- [65] Hu, Y.T., Yang, J.S. ve Jiang, Q., (2002). "A model for electroelastic plates under biasing fields with applications in buckling analysis", *International Journal of Solids and Structures*, 39: 2629-2642.
- [66] Yan, Y. ve Shang, F., (2009). "Cohesive zone modeling of interfacial delamination in PZT thin films", *International Journal of Solids and Structures*, 46 (13): 2739-2749.
- [67] Yang, J.S., (1998). "Buckling of a piezoelectric plate", *International Journal of Solids and Structures*, 44: 399-408.
- [68] Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2013). "Buckling delamination of a sandwich plate-strip with piezoelectric face and elastic core layers", *Applied Mathematical Modelling*, 37 (16-17): 8029-8038.
- [69] Cafarova, F.I., Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2017). "Buckling delamination of the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc with penny-shaped interface cracks", *Smart Structures and Systems*, 19 (2): 163-79.
- [70] Groh, U. ve Kuna, M., (2005). "Efficient boundary element analysis of cracks in 2D piezoelectric structures", *International Journal of Solids and Structures*, 42 (8): 2399-2416.
- [71] Kuna, M., (1998). "Finite element analyses of crack problems in piezoelectric structures", *Computational Materials Science*, 13 (1-3): 67-80.
- [72] Kuna, M., (2006). "Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures: a survey", *Archive of Applied Mechanics*, 76 (11-12): 725-745.
- [73] Aylikci, F., Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., (2018). "Buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate containing interface inner band cracks", *Composite Structures*, 202: 9-16.
- [74] Yang, J., (2004). *An introduction to the theory of piezoelectricity*, Vol. 9, Springer Science & Business Media.
- [75] Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., (1989). *The finite element method, basic formulation and linear problems*, 4th ed. London: McGraw-Hill Book Company vol. 1.
- [76] Giannopoulos, G., Santafe, F., Monreal, J. ve Vantomme, J., (2007). "Thermal, electrical, mechanical coupled mechanics for initial buckling analysis of smart plates and beams using discrete layer kinematics", *International Journal of Solids and Structures*, 44: 4707-4722.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fatih AYLIKCI
Doğum Tarihi ve Yeri : 13.06.1989, Üsküdar/İstanbul
Yabancı Dili : Almanca, İngilizce
E-posta : faylikci@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Teorik Matematik	Marmara Üniversitesi	2014
Lisans	İlköğr. Matematik Öğr.	İstanbul Üniversitesi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Üsküdar Ahmet Keleşoğlu Anadolu Lisesi	2007

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2013-	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Aylikci, F., Akbarov, S., Yahnioglu, N., (2018). "Buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate containing interface inner band cracks", Composite Structures, 202: 9-16.
2. Aylikci, F., Yahnioglu, N., Elibol, A., (2018). "FEM analysis of the influence of the plate geometry on the buckling delamination of a piezoelectric sandwich rectangular thick plate", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2: 193-202.
3. Aylikci, F., Yahnioglu, N., (2018). "The effect of crack size on the buckling delamination mode (surface wrinkles) of a piezoelectric sandwich rectangular thick plate with interface edge cracks", AIP Conference Proceedings, 1: 020048-1-020048-2.
4. Aylikci, F., Dernek, N., (2018). "Some relations on the double $L_{\{22\}}$ -integral transform and their applications", Mediterranean Journal of Mathematics, 15 (37): 1-21.
5. Dernek, A.N., Aylikci, F., (2017). "Some results on the $P_{(v,2n)}$, $K_{(v,n)}$ and $H_{(v,n)}$ -integral transforms", Turkish Journal of Mathematics, 2: 337-349.
6. Aylikci, F., Dernek, N., Ölçücü, E.Ö., (2015). "New identities and Parseval type relations for the generalized integral transforms $L_{(4n)}$, $P_{(4n)}$, $F_{(s,2n)}$ and $F_{(c,2n)}$ ", Applied Mathematics and Computation, 269: 536-547.
7. Aylikci, F., Dernek, N., Kivrak, S., (2016). "An alternative technique for solving ordinary differential equations", Konuralp Journal of Mathematics, 1: 68-79.
8. Aylikci, F., Dernek, N., (2014). "Identities for the L_n -transform, the $L_{(2n)}$ -transform and the $P_{(2n)}$ transform and their applications", Journal of Inequalities and Special Functions, 4: 1-16.

Bildiri

1. Aylikci, F., Akbarov, S., Yahnioglu, N., (2018). "3D FEM analysis of a buckling delamination of a piezoelectric sandwich rectangular plate with interface edge cracks", 4th International Conference on Mechanics of Composites, 9-12 Temmuz 2018, Madrid, İspanya.
2. Aylikci, F., Yahnioglu, N., (2018). "The effect of crack size on the buckling delamination mode (surface wrinkles) of a piezoelectric sandwich rectangular thick plate with interface edge cracks", Turkish Physical Society 34th International Physics Congress, 5-9 Eylül 2018, Muğla, Türkiye.
3. Yahnioglu, N., Aylikci, F., (2017). "3D FEM analysis of buckling of a piezoelectric rectangular thick plate", 6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications IECMSA-2017, 15-18 Ağustos 2017, Budapeşte, Macaristan.
4. Aylikci, F., Akbarov, S., Yahnioglu, N., (2017). "Buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate containing interface inner band cracks", 20th International Conference on Composite Structures (ICCS20), 4-7 Eylül 2017, Paris, Fransa.

5. Aylikci, F., Yahnioglu, N., Akbarov, S., (2018). "Buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate with closed- circuit conditions", 1st International Conference on Innovations in Natural Science and Engineering, 3-5 Ocak 2018, Famagusta, Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti.
6. Aylikci, F., Yahnioglu, N., Elibol, A., (2018). "The effect of boundary conditions on the critical parameters in the buckling delamination of PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate", 7th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2018), 28-31 Ağustos 2018, Kiev, Ukrayna.
7. Aylikci, F., Yahnioglu, N., Elibol, A., (2017). "Piezoelektrik sandviç dikdörtgen kalın plağın delaminasyon burkulmasının FEM ile incelenmesi", TUMTMK 20. Ulusal Mekanik Kongresi, 5-9 Eylül 2017, Bursa, Türkiye.
8. Dernek, N., Aylikci, F., (2018) "Some Parseval type relations on the $P_{(v,4n)}$ -integral transform", International Conference on Mathematical Advances and Its Applications, 11-13 Mayıs 2018, İstanbul, Türkiye.
9. Dernek, N. , Aylikci, F., (2017). "Identities for the double $L_{(22)}$ -integral transform", 6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2017), 15-18 Ağustos 2017, Budapeşte, Macaristan.
10. Dernek, N., Aylikci, F., (2017). "On applications of the double $L_{(22)}$ -transform", International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017), 10-12 Mayıs 2017, İstanbul, Türkiye.
11. Dernek, N., Aylikci, F., Yürekli, O., (2016). "New Identities on the generalized exponential and Mellin integral transforms and their applications", 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2016), 16-19 Ağustos 2016, Belgrad, Sırbistan.
12. Dernek, N., Aylikci, F., Kıvrak, S., (2015). "An alternative technique for solving ordinary differential equations", 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2015), 31 Ağustos - 3 Eylül 2015, Atina, Yunanistan.
13. Dernek, N., Aylikci, F., Balaban, G., (2015) "New identities for the generalized Glasser transform, the generalized Laplace transform and the $E_{(2n,1)}$ -transform", 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2015), 31 Ağustos - 3 Eylül 2015, Atina, Yunanistan.

Proje

Bu doktora tez çalışması Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: 2016-07-03-DOP03