

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÖKLİD DÜZLEMİNDE VE ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ



ESRA ERKAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2019

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD DÜZLEMİNDE VE ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ

Esra ERKAN tarafından hazırlanan tez çalışması 05.04.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Filiz KANBAY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Melek MASAL
Sakarya Üniversitesi



Bu çalışma, TÜBİTAK BİDEB 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

Bu tezde ilk olarak, tezin başlığında yer alan Bézier eğrileri ile ilgili detaylı bilgilere yer verilmiştir. Ayrıca, tasarımda önemli bir yere sahip olan bu eğrilerin Tasarım Eğrileri sınıfında bulunan diğer türlerinden de bahsedilmiştir. Bununla birlikte, Mühendislik ve alanı ve Uygulamalı Matematik açısından önemli çalışmalarda yer bulan bu eğrilerin, diferansiyel geometri açısından incelenmesi amaçlandığından, bir eğrinin karakteristik özelliklerine dair bilgi veren Serret-Frenet elemanları literatürde eksik kalan yanı ile E^2 Öklid düzleminde ve E^3 Öklid uzayında incelenmiştir. Son olarak, bir algoritma tanımı verilerek Bézier eğrilerinin algoritmik tanımına yer verilmiş ve bu tanım kullanılarak eğrinin her noktasında Serret-Frenet elemanları düzlemsel ve uzaysal olarak incelenmiştir. Ayrıca, algoritma kullanılmadan bulunan sonuçlar ile algoritma tanımı yardımıyla bulunan sonuçlar karşılaştırılmış ve bu sonuçların aynı olduğu örneklerle gösterilmiştir.

Tez çalışmalarım boyunca her öğrencisine gösterdiği ihtimamı esirgemedi bana da gösteren, “hayatımın bir dönemini geçirmek isterim” diyerek ilk kez ailemden ayrılışımın biletini kestiğim İstanbul’daki gurbetimde hem maddi hem manevi desteğini esirgemeyen; bir “Eğitim Sevdalısı” olarak nitelendirdiğim ve bu sevdasının bitmek bilmeyen enerjisiyle bütünleşerek nice öğrenciye ışık tutacağına inandığım saygıya değer danışman Hocam Prof. Dr. Salim YÜCE’ye;

Bir borç olduğu ve ödemenin en uygun zamanının bu satırlar olduğu düşüncesiyle, en derin duygularla teşekkürlerimi, saygı ve sevgilerimi sunarım.

Nisan, 2019

Esra ERKAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	viii
KISALTMA LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
ÖZET	xii
ABSTRACT.....	xiii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	3
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 İnterpolasyonlar	4
2.1.1 Lagrange Polinom İnterpolasyonu	5
2.1.2 Parametrik Kübik (Hermit) İnterpolasyon	7
2.1.2.1 Matris Yaklaşımı	11
2.1.3 Kübik Spline İnterpolasyon	12
2.1.4 İnterpolasyon ve Yaklaşım Karşılaştırması	21
2.2 Algoritmalar	23
2.2.1 Paraboller	23
2.2.2 De Casteljau Algoritması	25
2.3 Bézier Eğrileri	28
2.3.1 Lineer Bézier Eğrisi	32
2.3.2 Kuadratik Bézier Eğrisi	33
2.3.3 Kübik Bézier Eğrisi	33
2.3.4 Bileşik Bézier Eğrileri	33
2.3.5 Bézier Eğrisinin Matris Formu	35

2.4	Bernstein Polinomu ve Uygulamaları	37
2.4.1	Bernstein Polinomunun Özellikleri	37
2.4.2	Bézier Eğrisinin Türevleri	41
2.4.3	E^3 Öklid Uzayında Bézier Eğrilerinin Uç Noktalardaki Serret-Frenet Elemanları	45
2.5	Rasyonel Bézier Eğrileri.....	56
2.5.1	Rasyonel Bézier Eğrilerinin	59
2.6	Diğer Tasarım Eğrileri.....	59
2.6.1	B-Spline Eğrileri	59
2.6.1.1	Spline Kavramı.....	59
2.6.1.2	Bases-Spline (B-Spline) Eğri.....	60
2.6.1.3	B-Spline Karma Fonksiyonlar	62
2.6.2	NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) Eğriler	64
2.7	Tasarım Eğrileri Arasındaki İlişki	67

BÖLÜM 3

E^2 ÖKLİD DÜZLEMİNDE BEZIER EĞRİLERİ	68
3.1 E^2 Öklid Düzleminde Kuadratik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları	70
3.2 E^2 Öklid Düzleminde Kübik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları	78
3.3 E^2 Öklid Düzleminde n . dereceden Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları	86
3.4 E^2 Öklid Düzleminde Bézier Eğrileri için Algoritma Metodu ve Bu Metod Yardımıyla Bézier Eğrilerinin Serret-Frenet Elemanları	91
3.4.1 E^2 Öklid Düzleminde Kuadratik Bézier Eğrileri için Algoritma ile Serret-Frenet Elemanları	100
3.4.2 E^2 Öklid Düzleminde Kübik Bézier Eğrileri için Algoritma ile Serret-Frenet Elemanları	103

BÖLÜM 4

E^3 ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ	109
4.1 E^3 Öklid Uzayında Kuadratik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları	110
4.2 E^3 Öklid Uzayında Kübik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları	116
4.3 E^3 Öklid Uzayında n . dereceden Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları	124
4.5 E^3 Öklid Uzayında Bézier Eğrileri için Algoritma Metodu ve Bu Metod Yardımıyla Bézier Eğrisinin Serret-Frenet Elemanları.....	135
4.5.1 E^3 Öklid Uzayında n . dereceden Bézier Eğrileri için Algoritma Metodu ve Bu Metod Yardımıyla Bézier Eğrisinin Serret-Frenet Elemanları.....	140

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER	146
KAYNAKLAR.....	147
ÖZGEÇMİŞ.....	149



SİMGE LİSTESİ

$[M]_H$	Hermit interpolasyon için katsayılar matrisi
$[G]_H$	Hermit interpolasyon için geometrik katsayılar matrisi
C^k	k . mertebeden parçalı süreklilik
Δ	Kontrol noktaları için ileri fark operatörü
b_i^r	De Casteljau Algoritmasındaki ara kontrol noktaları
$B[P, t]$	Kontrol çokgeni ile Bézier eğrisini birleştiren lineer operatör
$P(t)$	n . dereceden Bézier eğrisi
$B_{i,n}$	Bézier eğrileri için Bernstein baz fonksiyonu
b_i	Bézier eğrileri için kontrol noktaları
$P1(t)$	Lineer Bézier eğrisi
$P2(t)$	Kuadratik Bézier eğrisi
$P3(t)$	Kübik Bézier eğrisi
Q^ω	Üç- boyutlu uzaydaki noktanın projektif uzaya karşılık gelen noktası
ω	Kontrol noktaları ile birleşen ağırlıklar ya da homojen koordinat
$\hat{b}_i$	Homojen kontrol noktaları
$R_{i,n}(t)$	Rasyonel Bézier eğrileri için baz fonksiyonu
T	Afin dönüşüm
$N_{i,k}(t)$	k . dereceden B-Spline eğrisi için i . karma (baz) fonksiyonu
$[t_i, \dots, t_{i+k}]$	Düğüm noktaları
J	Orijin etrafında saat yönünün tersine $\pi/2$ açılı dönme veren lineer dönüşüm
$P_{i,k}(t)$	Bézier eğrisi için ara kontrol noktaları

KISALTMA LİSTESİ

B-Spline	Bases-Spline
BDT	Bilgisayar Destekli Tasarım
BDÜ	Bilgisayar Destekli Üretim
NURBS	Non-Uniform Rational B-Spline

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1	a. Parçalı lineer interpolasyon b. Üçüncü mertebeden Lagrange interpolasyon	5
Şekil 2. 2	Lagrange interpolasyon için aşırı salınımlar	6
Şekil 2. 3	Verilen noktalar için lineer ve lagrange interpolasyon	7
Şekil 2. 4	Parametrik kübik eğri üzerindeki nokta	8
Şekil 2. 5	Parçalı parametrik kübik interpolasyon	9
Şekil 2. 6	Bir parçanın uçlarındaki teğet vektörler	9
Şekil 2. 7	Teğet vektörlerin büyüklüğündeki değişimin eğri üzerindeki etkisi	9
Şekil 2. 8	Fiziksel Spline	12
Şekil 2. 9	Parametrik süreklilik örnekleri: (a) Süreksizlik; (b) C^0 ; (c) C^1 ; (d) C^2	13
Şekil 2. 10	İki kübik Spline parça	15
Şekil 2. 11	Serbest form şekillerin örnekleri	21
Şekil 2. 12	Eğrinin verilen noktalara yaklaşımı	22
Şekil 2. 13	Paraboller: Tekrarlı lineer interpolasyon ile kurulan yapı	24
Şekil 2. 14	Üç teğet teoremi	25
Şekil 2. 15	Kübik durum için De Casteljau algoritması	26
Şekil 2. 16	Bézier eğrisinin noktalara yaklaşımı	28
Şekil 2. 17	Bézier eğrisinin konveks tekne özelliği	29
Şekil 2. 18	Bézier eğrisinin ilk ve son noktalar arasında interpolate olması	30
Şekil 2. 19	Bir kontrol noktasının değişimi ile Bézier eğrisinin değişimi	30
Şekil 2. 20	Kübik Bézier Eğrisi için karma fonksiyonlar	31
Şekil 2. 21	Kapalı eğriler	32
Şekil 2. 22	Bézier eğrisinin lokal kontrol sağlamaması	32
Şekil 2. 23	Bileşik (parçalı) Bézier Eğrisi	34
Şekil 2. 24	a. Airfol (kanat) eğri temsili. b. Araba gövdesinin eğri simülasyonu	34
Şekil 2. 25	İkinci dereceden Bernstein polinomları	38
Şekil 2. 26	Üçüncü dereceden Bernstein polinomları	38
Şekil 2. 27	Dördüncü dereceden Bernstein polinomları	38
Şekil 2. 28	Örnek 2.6'daki üçüncü dereceden Bézier eğri	55
Şekil 2. 29	Farklı ağırlıklara sahip rasyonel Bézier eğriler	57
Şekil 2. 30	Uzaysal rasyonel Bézier eğri	58
Şekil 2. 31	Spline örnekleri	59
Şekil 2. 32	Ağırlıklarla Spline gösterimi	60
Şekil 2. 33	Aradeğerleme ve Yaklaşım Spline'ları	60

Şekil 2. 34	B-Spline eğrinin lokal kontrol etkisi	61
Şekil 2. 35	B-Spline eğri için düğüm noktaları	63
Şekil 2. 36	Parametrik olarak dağılım gösteren düğümlerin eğri üzerindeki etkisi.....	64
Şekil 2. 37	Periyodik olmayan kübik rasyonel B-Spline	65
Şekil 2. 38	Kübik NURBS örnekleri.....	65
Şekil 2. 39	Koniklerin Kuadratik NURBS temsili.....	66
Şekil 2. 40	Tasarım eğrileri şeması	67
Şekil 3. 1	Kuadratik Bézier eğrisi	77
Şekil 3. 2	Kübik Bézier eğrisi	85
Şekil 3. 3	$i = 0$ ve $n = 4$ için ara noktalar	91
Şekil 4. 1	Kuadratik Bézier eğrisi	116
Şekil 4. 2	Kübik Bézier eğrisi	123
Şekil 4. 3	Serret-Frenet çatısı ile kübik Bézier eğrisi.....	124
Şekil 4. 4	$i = 0$ ve $n = 4$ için ara noktalar	135
Şekil 4. 3	E^3 uzayında kübik Bézier eğrisi.....	142

ÖKLİD DÜZLEMİNDE VE ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ

Esra ERKAN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tezde genellikle Bilgisayar Bilimleri ve Uygulamalı Matematik'te kullanılan temel bir algoritma yardımıyla ve bu algoritma olmaksızın E^2 Öklid düzlemi ve E^3 Öklid uzayında Bézier eğrilerinin rolünü incelenmiştir. E^2 Öklid düzlemi ve E^3 Öklid uzayındaki birim hızlı olmayan eğrilerin Serret-Frenet elemanlarına ait formüller için 2016 yılındaki Gray ve diğerlerinin eserinden yararlanılmıştır. Düzlemsel Bézier eğrilerinin uç noktalarda ve her $t \in [0,1]$ parametresi için Serret-Frenet elemanlarını bulmada bu formüller kullanılmıştır. Ayrıca, bu elemanlar, ara noktaları temel alan algoritma yardımıyla tanımlanan düzlemsel Bézier eğrisi için tekrar ele alınmıştır. Son olarak, literatürde sadece uç noktalarda bahsedilen uzaysal Bézier eğrilerinin bu elemanları, her $t \in [0,1]$ parametresi için ele alınmıştır. Ek olarak, bu elemanlar, uzaysal Bézier eğrisi için yukarıda bahsedilen algoritma kullanılarak her $t \in [0,1]$ parametresi için ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bézier eğrisi, Serret-Frenet çatısı, de Casteljau algoritması

BEZIER CURVES IN EUCLIDEAN PLANE AND EUCLIDEAN SPACE

Esra ERKAN

Department of Mathematics

PhD Thesis

Adviser: Prof. Dr. Salim YÜCE

In thesis, it is analyzed the role of Bézier curves in Euclidean plane E^2 and Euclidean space E^3 by the help of the fundamental algorithm which is widely preferred in Computer Science and Applied Mathematics and without using this algorithm. The Serret-Frenet elements of non-unit speed curves in the Euclidean plane E^2 and Euclidean space E^3 are given by Gray et al. in 2016. We handled these formulas to find Serret-Frenet elements of planar Bézier curve at the end points and for all parameters $t \in [0,1]$. And then, we rearranged these elements for a planar Bézier curve, which is defined with the algorithm that is used intermediate points.

Finally, in the literature, the spatial Bézier curve only given at the starting and ending points, so we improve these elements for all parameters $t \in [0,1]$. In addition, we compute these elements for all parameters $t \in [0,1]$ using algorithm that is before cited for spatial Bézier curve.

Keywords: Bézier curve, Serret-Frenet frame, de Casteljau algorithm

1.1 Literatür Özeti

Parametrik kübik eğrileri tanımlamak amacıyla kullanılan interpolasyon teknikleri, ilk defa Fransız araba şirketi Renault'da mühendis olan Pierre Bézier tarafından kullanılmış, onunla bilinir hale gelmiş ve yine interpolasyon tekniklerinden daha fazla esneklik sağlaması için Bézier eğrilerine temel oluşturan De Casteljau algoritmasını geliştirmiştir, [1].

Eğri ve yüzey tasarımı için, Paul de Casteljau 1959 yılında bir formül üzerinde çalışmaya başlamıştır. Aynı amaçla, Pierre Bézier, Paul de Casteljau'nun çalışmasından bağımsız ve habersiz olarak aynı formülü geliştirdi. Bézier'in 1968 yılında yayınlanan bu çalışmalarının bir sonucu olarak, teori Bézier'in ismi ile bilinir hale geldi. Bu çalışmaların bir sonucu olarak, Bézier'in formülü, sıralı bir nokta kümesine ait olan $b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol köşeleri ya da kontrol noktalarının kullanılarak orijinal eğriye yaklaşımı sağlayan bir metoda dayanır, [1]. Böylece, bu eğri itme-çekme etkisiyle kontrol noktalarının davranışından etkilenir, [2].

Bézier eğrisi, $(n+1)$ kontrol noktasına sahip n . dereceden $P(t)$ parametrik eğrisidir ve b_i değerleri, E^n Öklid uzayında kontrol noktalarını temsil etmek üzere,

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ile tanımlanır, [3]. Yani, Bézier eğrileri, kontrol noktaları adı verilen vektör değerli katsayılara sahip Bernstein polinomları adlı baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu ile verilir, [2].

Bézier eğrilerinin teorisi, BDT alanında önemlidir. Çünkü Bézier eğrisi, bu alanda kullanılan polinom bazları arasında nümerik olarak en kararlı yapıya sahip olandır ve parçalı polinom eğrileri için ideal bir geometrik gösterimi vardır, [4]. Parçalı polinom eğriler ya da fonksiyonlar, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde yaklaşık çözümü vermesi için sıklıkla kullanılır. Bézier eğrileri, dinamik sistemleri, diferansiyel denklemleri ve ısı-dalga denklemlerini çözmede kullanılır, [5].

Bézier eğrileri, BDT/BDÜ alanında serbest form eğrileri inşa etmek için güçlü yapılardır. Diğer taraftan, eksiklikleri de vardır; baz fonksiyonlarının seçimiyle Bézier eğrilerinin şekli, kontrol noktaları ile belirlenir. Bu eksikliği gidermek için, çoğu bilim adamı Bézier eğrilerine benzer yeni eğriler oluşturmuştur, [6,7].

Bézier eğrileri, Tıp ve Mühendislik alanlarını içine alan çeşitli uygulamalarda yararlanılan sürekli eğriliğe sahip tipik parametrik eğrilerden biridir. Bir Bézier eğrisinin iki parçasını oluşturma ya da parçalı yöntem, eğrilik ve burulma gibi özel bir şeklin gereksinimlerini yerine getirerek o şekli oluşturma ve sürekliliğini koruma yönünden ilgi çekicidir, [8]. Öklid geometrisindeki eğrilik ve burulma gibi diferansiyel invariantların özellikleri, [9,10,11] çalışmalarında incelenmiştir.

BDT alanında sağladıkları kolaylık açısından çoğunlukla ilgi gören eğri tipleri; Bézier, B-Spline, Rasyonel Bézier eğrileri ve en gelişmiş olduğunu söyleyebileceğimiz NURBS eğrileridir. Bu sebeple, çalışmamızda anlaşılabilirliği açısından bu eğri tiplerini temel olarak ele alan [1,4,12] çalışmaları incelenmiştir.

Ayrıca, Bézier eğrileri için uç noktalarda tanımlanan eğrilik ve burulma formüllerinin yer aldığı [4,13] eserleri, diferansiyel geometri açısından geometrik anlamlarına yer veren [14] eseri ile birlikte Serret-Frenet elemanlarına açıkça yer veren [15] çalışması incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

E^3 Öklid uzayında Bézier eğrilerinin uç noktaları için Serret-Frenet elemanlarının ele alındığı [4,13,14,15] çalışmaları ışığında, öncelikle E^2 Öklid düzlemindeki birim hızlı olmayan Bézier eğriler için Serret-Frenet elemanlarının, her $t \in [0,1]$ parametresi için ve özel durum olarak uç noktalarda bulunması amaçlanmıştır. İlaveten, bir algoritma yardımıyla algoritmik Bézier eğrisi tanımı verilerek her $t \in [0,1]$ parametresi ve özel durum olarak $t = 0$ ve $t = 1$ için bu elemanları bulmak amaçlanmıştır.

Ayrıca, literatürde E^3 Öklid uzayında uç noktalar için verilen Serret-Frenet elemanlarının her $t \in [0,1]$ parametresi için bulunması ve bir algoritma yardımıyla yine bu elemanların her $t \in [0,1]$ parametresi için bulunması amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, öncelikle tezimizin başlığında yer alan Bézier eğrileri hakkında gerekli bilgiler verilip, düzlemsel ve uzaysal Bézier eğrilerinin her $t \in [0,1]$ parametresine bağlı olarak Serret-Frenet elemanları incelenecektir. Ayrıca, algoritma ve bu algoritma yardımıyla verilen Bézier eğrisinin tanımı hem E^2 Öklid düzleminde hem de E^3 Öklid uzayında incelenecektir. Ek olarak, algoritma ile tanımlanan Bézier eğrileri için bu uzaylarda Serret-Frenet elemanları her $t \in [0,1]$ parametresi için incelenecektir. Böylece, literatüre her $t \in [0,1]$ parametresi için Serret-Frenet elemanlarının yer aldığı düzlemsel ve uzaysal Bézier eğrileri ile ilgili detaylı bir incelemeye yer veren bir kaynak kazandırılmış olacaktır.

BÖLÜM 2

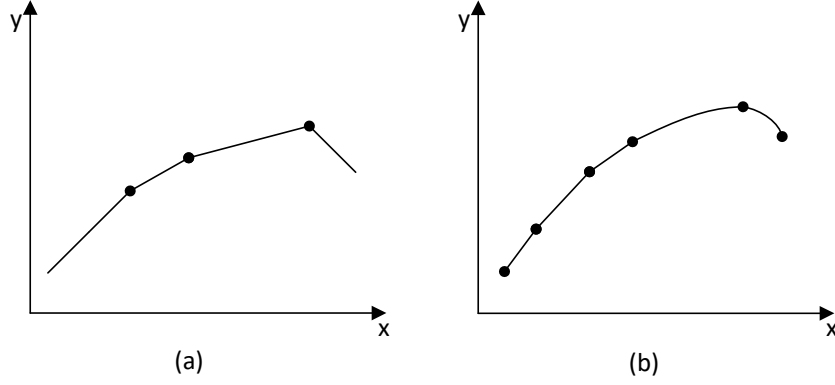
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde [1,4,12,13,14,15] çalışmalarında yer alan interpolasyon, interpolasyon yardımıyla verilen algoritmalar, Bézier eğrisi ve derecesine bağlı olarak türleri, Bézier eğrisinin matris formu, Bézier eğrisi tanımında önemli yeri olan Bernstein polinomu ve özellikleri, Bézier eğrisinin türevleri, uç noktalardaki Serret-Frenet elemanları ayrıca Bézier eğrilerinin genelleştirmesi olan Rasyonel Bézier eğrisi gibi diğer tasarım eğrileri incelenmiştir.

2.1 İnterpolasyonlar

Mühendislik alanında, genellikle veri değerleri kümesine uydurulan keyfi bir eğri bulma problemi ile karşılaşılır. Bu problem ile deneysel verilerin kümesine bir eğri uydurmaya çalışıldığında karşılaşılır. Popüler çözüm yöntemi, en küçük kareler yaklaşımıdır. Bu yaklaşım, gözlemler dizisini tanımlayan en iyi eğriyi verir.

Yayılmış veriler için interpolasyon problemleri, mühendislik alanında yaygındır. Bu yöntem, hesaplamalarda kullanılan gerçek noktalara uzanmayan fonksiyon değerlerini bulmak için sıklıkla gereklidir. İnterpole etme (uydurma), komşu noktaları kullanan bu değerleri bulmak için kullanılır. Şekil 2.1’de veri interpolasyon örnekleri gösterilmektedir.



Şekil 2.1 (a) Parçalı lineer interpolasyon. (b) Üçüncü mertebeden Lagrange interpolasyon.

Eğer kesinlik (hassasiyet), temel değerlendirme ise, parçalı lineer interpolasyon uygun çözüm olabilir.

$$f(x) = f(x_i) + [f(x_{i+1}) - f(x_i)][(x - x_i) / d] ; d = x_{i+1} - x_i \quad (2.1)$$

ile verilen lineer interpolasyon formülü, keyfi x_i ve x_{i+1} noktaları arasındaki x değerinin herhangi değeri için $f(x)$ fonksiyonunu hesaplar.

Diğer bir popüler interpolasyon türü, polinom fonksiyonlarını kullanır. Lagrange polinomları, bu interpolasyon polinomlarının en basitleri arasındadır, [1].

2.1.1 Lagrange Polinom İnterpolasyonu

$(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ ile tanımlanan düzlem noktaları dizisini ele alalım. Burada $x_i < x_j$ ($i < j$) olmak üzere n . dereceden interpolasyon polinomu,

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x) \quad (2.2)$$

şeklinde hesaplanır. Burada,

$$L_{i,n}(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

şeklinde verilir. Formülün kısa gösterimi,

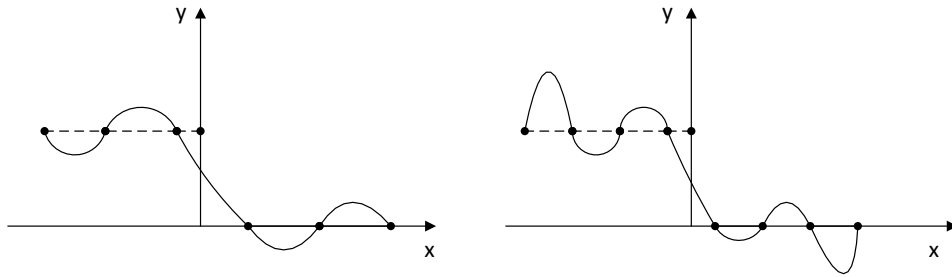
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\prod$, $j = i$ durumu dışında 0'dan n 'ye değişen j ile elde edilen n tane elemanın çarpımını gösterir. $x = x_i$ olduğunda, y ile çarpılan kısmın 1 sayısına eşit olduğu görülebilir. Fakat x , herhangi bir başka koordinata eşitlenince sonuç sıfır gelir. İki nokta arasındaki bir doğrunun denklemi, $n=1$ yazılmasıyla,

$$f_1(x) = y_0 L_{0,1}(x) + y_1 L_{1,1}(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} \quad (2.4)$$

elde edilir. Birinci dereceden en yakın denklem ya da bilinen teğet doğru denklemi elde edilir.

Lagrange polinomu, derecesi kullanılan noktaların sayısına bağlı olan polinoma sahip olmanın bir dezavantajına sahiptir. En az hatayı araştırmak için, eğer kullanılan noktaların sayısı arttırılırsa, sonuç, Şekil 2.2'de gösterildiği gibi aşırı salınımlara bağlı olan daha yüksek dereceli bir polinomdur. Çoğu mühendislik uygulamasında bu salınımlar, kabul edilemezdir, [1].



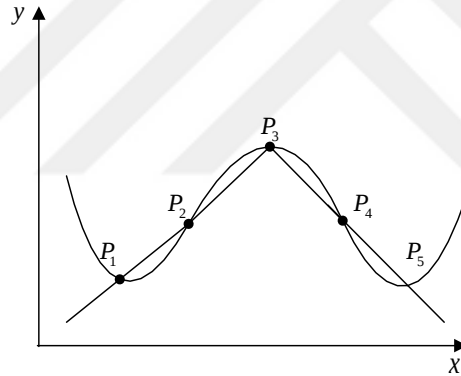
Şekil 2.2 Lagrange interpolasyon için aşırı salınımlar

Örnek 2.1 $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (2,2)$, $P_2 = (3,3)$, $P_3 = (4,2)$, $P_4 = (5,1)$ noktalarını interpolate etmek için Lagrange polinomunu kullanınız.

Çözüm interpolasyon polinomu, $f_4(x) = \sum_{i=0}^4 y_i L_{i,4}(x)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= y_0 L_{0,4}(x) + y_1 L_{1,4}(x) + y_2 L_{2,4}(x) + y_3 L_{3,4}(x) + y_4 L_{4,4}(x) \\
&= 1 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + 2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\
&\quad + 3 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + 2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\
&\quad + 1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \\
f_4(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)} \\
&\quad + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} \\
&\quad + 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Verilen noktaları interpolate eden bu fonksiyon için lineer ve Lagrange interpolasyon grafiği, Şekil 2.3’de gösterilmektedir, [1].



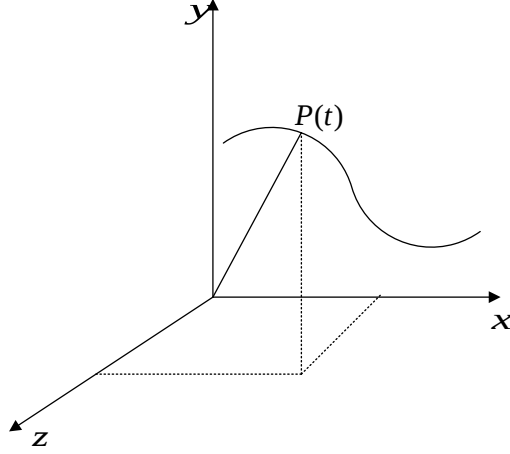
Şekil 2.3 Verilen noktalar için lineer ve lagrange interpolasyon

2.1.2 Parametrik Kübik (Hermit) İnterpolasyon

Bir parametrik kübik eğri,

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 a_i t^i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $P(t)$, Şekil 2.4’de olduğu gibi eğri üzerindeki bir noktadır.



Şekil 2.4 Parametrik kübik eğri üzerindeki nokta

(2.5) eşitliğinin açılımı,

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0 \quad (2.6)$$

şeklindedir. Bu eşitlik,

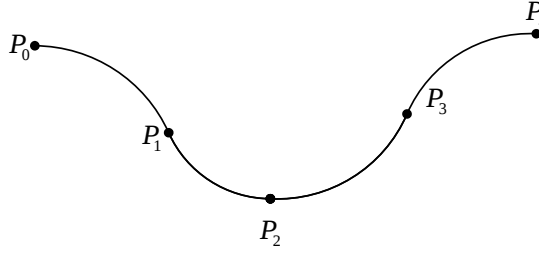
$$\begin{aligned} x(t) &= a_{3x} t^3 + a_{2x} t^2 + a_{1x} t^1 + a_{0x} \\ y(t) &= a_{3y} t^3 + a_{2y} t^2 + a_{1y} t^1 + a_{0y} \\ z(t) &= a_{3z} t^3 + a_{2z} t^2 + a_{1z} t^1 + a_{0z} \end{aligned} \quad (2.7)$$

olacak şekilde $P(t)$ eğrisinin denkleminin üç bileşenine ayrılabilir.

(2.7) denklem sistemini çözebilmek için, 12 bilinmeyen (cebirsel katsayılar olarak bilinen) a_{ij} katsayıları belirlenmelidir. a_{ij} değerlerinin değişmesiyle bir eğrinin şeklini kontrol etmek zordur. Daha sezgisel bir yaklaşım, geometrik kısıtlamaları sağlayan uygun sınır koşullarını oluşturmaktır. Sınır koşulları, 12 cebirsel katsayının hesaplanması için gerekli 12 denklemin düzenlenmesine izin verir.

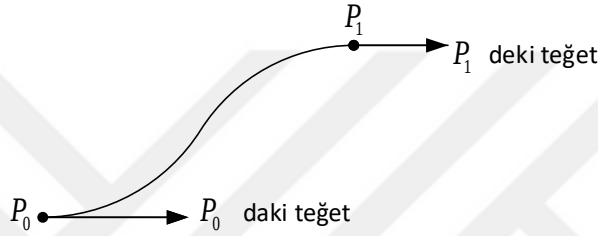
Problemin çözülmesi, interpolasyonlardan biri olduğundan bu noktaların koordinatlarının bilindiğini varsaymak mantıklıdır.

Olası çözüm, parçalı şekildeki interpolasyonun uygulanmasıdır. Yani, iki nokta parametrik kübik eğriyle birlikte Şekil 2.5’de gösterildiği gibi interpolate edilir.



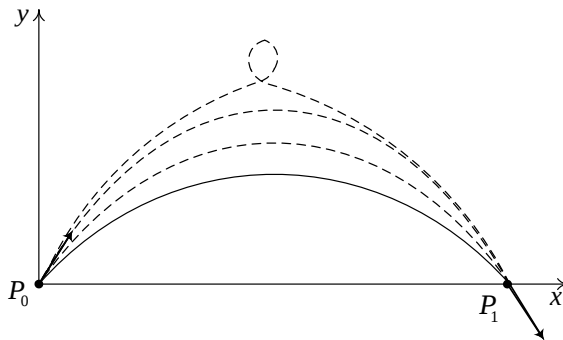
Şekil 2.5 Parçalı parametrik kübik interpolasyon

Her parçanın bilinen sonuç koordinatları yardımıyla, 12 denklemden gerekli olan 6 tanesi ara noktalardan elde edilir. Diğer 6 denklem, Şekil 2.6'da gösterildiği gibi her parçanın iki ucundaki teğet vektörlerin kullanılmasıyla elde edilir.



Şekil 2.6 Bir parçanın uç noktalarındaki teğet vektörler

Teğet vektörlerin doğrultusu, eğrinin uç noktalarındaki eğimini (doğrultu kosinüslerini) oluşturur. Vektörlerin büyüklüklerindeki değişimler, eğrinin şeklin değişimine izin verir. Örneğin; uç noktalardaki sabit eğim için, teğet vektörlerin büyüklüğündeki değişim, Şekil 2.7'de gösterildiği gibi parametrik kübik eğri üzerinde değişikliklere sebep olacaktır.



Şekil 2.7 Teğet vektörlerin büyüklüğündeki değişimin eğri üzerindeki etkisi

Bir kübik eğriyi tanımlamak, uç noktaları ve teğet vektörleri kullanmak için seçilen bu yöntem, Hermit interpolasyonun bir türüdür. Her kübik eğri parçası, 0 değerinden 1 değerine parametrelendirilir. İki uç nokta, t parametre değerinin limit değerlerine;

yani $P(0)$ ve $P(1)$ değerlerine karşılık gelir. $t = 0$ ve $t = 1$, (2.6) eşitliğinde yazılarak, iki uç vektör ve katsayılar arasında

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0 \\ P(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ilişkisi bulunur. Teğet vektörleri bulmak için, (2.6) eşitliği, t' ye göre türevi alınarak,

$$P'(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \quad (2.9)$$

elde edilir. İki uç noktadaki teğet vektörler, $t = 0$ ve $t = 1$ değerlerinin son eşitlikte yazılmasıyla

$$\begin{aligned} P'(0) &= a_1 \\ P'(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.6) eşitliğindeki a_i katsayıları, sınır koşulları (uç noktalar ve teğet vektörler) cinsinden

$$\begin{aligned} a_0 &= P(0) \\ a_1 &= P'(0) \\ a_2 &= -3P(0) + 3P(1) - 2P'(0) - P'(1) \\ a_3 &= 2P(0) - 2P(1) + P'(0) + P'(1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde açıkça yazılabilir. a_i katsayıları, (2.6) eşitliğinde yazılarak ve terimler tekrar düzenlenerek

$$P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P(0) + (-2t^3 + 3t^2)P(1) + (t^3 - 2t^2 + t)P'(0) + (t^3 - t^2)P'(1) \quad (2.12)$$

şeklinde elde edilir.

$P(0)$, $P(1)$, $P'(0)$, $P'(1)$ değerleri, geometrik katsayılar olarak adlandırılır ve (2.12) eşitliğindeki vektör büyüklüklerini temsil eder. Bu vektör büyüklüklerinin polinom katsayıları, genellikle karma (blending) fonksiyonlar olarak bilinir. Bu karma fonksiyonlardaki t parametresinin 0'dan 1'e değişmesiyle eğri parçası üzerindeki

birkaç nokta bulunur. (2.12) eşitliğinin Şekil 2.5'deki parçalar kümesinin herhangi parametrik kübik parçası için geçerli olduğuna dikkat ediniz.

Özetle; parametrik kübik eğriler, konum ve eğim sürekliliğine sahip parçalı kübik polinomlar ile gösterilir. Parametre değeri, her parça için 0 değerinden 1 değerine değişir, [1].

2.1.2.1 Matris Yaklaşımı

(2.6) ve (2.12) eşitlikleri,

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ve

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

matris formunda ya da daha kısa olarak

$$\begin{aligned} P(t) &= [t] \cdot [A] \text{ cebirsel form} \\ P(t) &= [t] \cdot [M] \cdot [G] \text{ geometrik form} \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, geometrik modellemede kullanılan ikinci eşitlik, tektir.

$[t]$ ve $[M]$ matrisleri, herhangi kübik eğri için invaryanttır. Sadece $[G]$ matrisi, uç noktaları ve teğet vektörleri özelleştirerek yeni bir parametrik kübik eğri üretme amacıyla değiştirilebilir. $[M]_{4 \times 4}$ matrisi, Hermit matris olarak bilinir. Bu matrisi diğerlerinden ayırmak için $[M]_H$ ve $[G]$, $[G]_H$ ile ifade edilecektir. (2.15) eşitliğinde,

$[A]$: cebirsel katsayılar matrisi

$[G]_H$: geometrik katsayılar matrisi

şeklindedir. (2.15) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$[A] = [M]_H [G]_H \quad (2.16)$$

ve tersi alınır

$$[G]_H = [M]_H^{-1} [A] \quad (2.17)$$

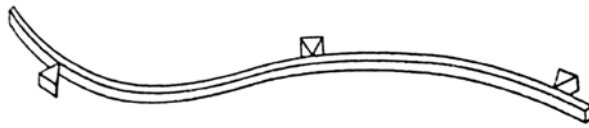
sonuçları elde edilir. Son eşitlikte,

$$[M]_H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

şeklindedir, [1].

2.1.3 Kübik Spline İnterpolasyon

BDT alanında karşılaşılan interpolasyon problemleri, Spline fonksiyonları yardımıyla uygun şekilde çözülebilir. Spline fikri, verilen nokta dizisinden geçen düzgün bir eğri çizmek için kullanılan ince ve esnek bir şerit kullanımına dayanır. Fiziksel olarak Spline, Şekil 2.8’de gösterildiği gibi esnek bir şeride sebep olan uygun ağırlıkların eklenmesiyle şekillenir.



Şekil 2.8 Fiziksel Spline

Bu, Bernoulli-Euler denklemi uygulamaları için ince ve elastik bir kiriş olarak düşünülebilir. Bu takdirde, küçük sapmalar dikkate alınır, eğrilik varsayılan eğrinin ikinci türevine yaklaşır.

Fiziksel Spline’daki ağırlıklar, basit destek vazifesi görürse, parçalı kübik polinom eğrisi, her destekte ikinci türeve göre süreklilik, yani konum, teğet ve eğrilığe göre süreklilik oluşturur.

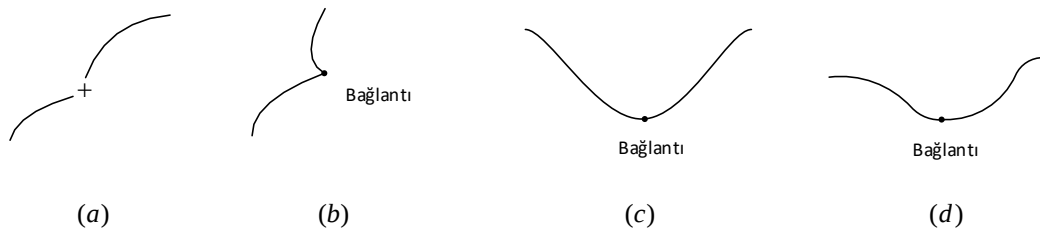
Mühendislik alanındaki problemlerde, veri değerlerinin sayıca fazla olduğu durumda parçalı kübik Spline'ların özelliklerinin kullanımı avantajlıdır. Standart polinom interpolasyonu (örneğin Lagrange interpolasyonu) interpolate edilmiş eğri üzerinde olası salınımlara neden olarak yüksek mertebeden polinomlar oluşturur.

Kübik Spline interpolasyon, çok kesin (hassas) değerlerin geniş kümesine bağlı olan çoğu mühendislik uygulamasında tercih edilir. Örnek olarak materyal özelliklerinin büyüklükleri (kalınlık, esneklik katsayısı vb.) ya da çeşitli mühendislik sistemlerinin simülasyonundan elde edilen sonuçlar verilebilir.

Bilgisayar grafikleri ve geometrik modellemedeki Spline terimi, parametrik sürekliliğe sahip geometrik yapının parçalı parametrik gösterimini ifade eder.

Bir kübik Spline, parçalar arasındaki bağlantı noktalarında ikinci mertebeden türev sürekliliğine sahip parçalı kübik polinom ile temsil edilir.

Parçalı süreklilik, sayısal üst simgeye sahip C harfi ile temsil edilir. Sürekliliğin en basit formu, C^0 sürekliliğidir. Bu ise, eğride boşluk ve atlamaların olmayacağını ifade eder. C^1 sürekliliği için eğri, birinci türev sürekliliğine sahip veya eğimlidir. C^2 sürekliliği için eğri, ikinci türev sürekliliği veya eğriliğe sahiptir. Şekil 2.9, bu durumların örneklerini göstermektedir. Bu sürekliliklere ihtiyacın sebebi, parametrik formüller ile ilgilidir.



Şekil 2.9 Parametrik süreklilik örnekleri: (a) Süreksizlik; (b) C^0 ; (c) C^1 ; (d) C^2

Buradaki süreklilik terimi, daima parametrik sürekliliği ifade etmektedir. Daha genel süreklilik ihtiyacı olan sürekliliğin bağımsız ölçüm parametrelendirmesi olan geometrik süreklilik, [4] numaralı eserde tanımlanmaktadır.

Kübik Spline parçaları, ayrı ayrı parametrelendirildiğinde t parametresi her parça için 0 ve 1 arasında değişir. O hâlde, normalleştirilmiş kübik Spline, parçalar arasındaki birinci mertebeden sürekliliği sağlayan Hermit interpolasyonun özel bir durumudur.

Bir kübik Spline'da, birinci türev değerleri, ikinci türevlerle uyumlu olacak şekilde seçilir. Karma fonksiyon (blending) matrisi, normalleştirilmiş kübik Spline için ($0 \leq t \leq 1$), Hermit interpolasyonda kullanıldığı gibi

$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

şeklindedir. Her parça için kübik Spline fonksiyonu, (2.14) eşitliği ile

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix}$$

ya da

$$P(t) = [t] \cdot [M]_H \cdot [G]_H \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. Parametrik kübik formülasyonda olduğu gibi, $[t]$ ve $[M]$ matrisleri, tüm kübik Spline parçaları için invarianttır. Değişim sadece bir parçadan diğerine değişen $[G]_H$ geometrik matrisinde oluşur. $[G]_H$ matrisindeki uç nokta vektörleri, herhangi kübik parça için bilinir fakat teğet vektörler bulunmalıdır. Böylece, ikinci türev sürekliliği uygulanmış olur.

Bir eğri parçasının herhangi bir noktasında, P_i değerleri devamındaki parçanın başlangıç noktasının ikinci türeviyle, bir eğri parçasının bitiş noktasındaki ikinci türevi çıkışacak şekilde seçilmelidir. Bu şart,

$$P''_{i-1}(1) = P''_i(0) \quad (2.21)$$

ile ifade edilir.

$$P_i(t) = a_{3i}t^3 + a_{2i}t^2 + a_{1i}t + a_{0i} \quad (2.22)$$

ile tanımlanan kübik polinom için ikinci türev,

$$P_i''(t) = 6a_{3i}t + 2a_{2i} \quad (2.23)$$

şeklindedir. Uygun parametre değerleri için, bu ifade (2.21) eşitliğinde yazılırsa,

$$\underbrace{6a_{3(i-1)} + 2a_{2(i-1)}}_{(i-1). \text{ parçası için } t=1} = \underbrace{2a_{2i}}_{i. \text{ parça için } t=0} \quad (2.24)$$

eşitliği elde edilir. (2.11) eşitliklerindeki

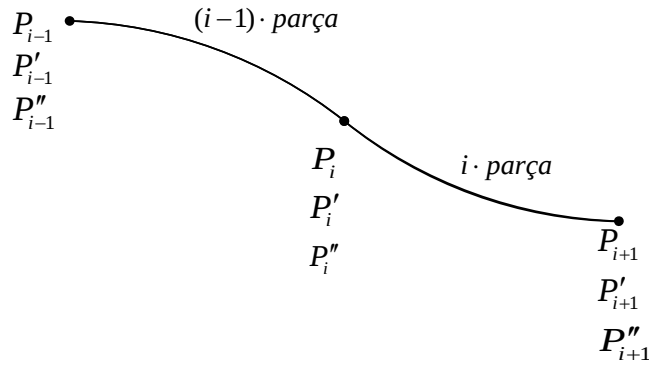
$$a_2 = -3P(0) + 3P(1) - 2P'(0) - P'(1)$$

$$a_3 = 2P(0) - 2P(1) + P'(0) + P'(1)$$

değerleri, (2.24) eşitliğinde yazılabilir. Bu yazımı gerçekleştirmeden önce notasyonu basitleştirmek amacıyla, i 'nin tüm değerleri için P_i , $P_i(0)$ ile P_i' , $P_i'(0)$ ile gösterilsin. Aynı zamanda, C^0 konum sürekliliğinden, tüm i değerleri için, Şekil 2.10'da gösterildiği gibi

$$P_i(1) = P_{i+1}(0)$$

eşitliği geçerlidir.



Şekil 2.10 İki kübik Spline parça

Son eşitlik ile birlikte, a_2 ve a_3 değerleri (2.24) eşitliğinde yazılarak ve $P_i(1)$ ile $P_{i+1}(0)$ tüm durumları göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
& 6(2P_{i-1}(0) - 2P_{i-1}(1) + P'_{i-1}(0) + P'_{i-1}(1)) + 2(-3P_{i-1}(0) + 3P_{i-1}(1) - 2P'_{i-1}(0) - P'_{i-1}(1)) \\
& = 2(-3P_{2i}(0) + 3P_{2i}(1) - 2P'_{2i}(0) - P'_{2i}(1))
\end{aligned} \tag{2.25}$$

elde edilir ve $P_i(1) = P_{i+1}(0)$ (veya $P_{i-1}(1) = P_i(0)$) yazılırsa

$$P'_{i-1}(0) + 4P'_i(0) + P'_{i+1}(0) = 3(P_{i+1}(0) - P_{i-1}(0)) \tag{2.26}$$

sonucu elde edilir. Son eşitlikte, $t=0$ değeri, tüm terimleri ifade eder. Daha önce belirtildiği gibi notasyonu basitleştirmek için gözardı edilmiştir. (2.26) eşitliğinin tüm kübik Spline parçalar üzerindeki iteratif (tekrarlı) uygulaması, iç teğetlerinin tümünün hesaplanmasını sağlar.

Bir kübik Spline'in, P_0 noktasından P_{m-1} noktasına; m tane noktaya interpolate edilen $(m-1)$ parçaya sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda, (2.26) eşitliği gibi $(m-2)$ tane denklemi beraberinde getirerek, $(m-2)$ tane iç bağlantı noktası bulundurur. m tane teğet vektöre ihtiyaç duyulduğundan fazladan sınırlandırmalar, kübik Spline eğrisini sınırlamaktadır. Ortak olarak kullanılan iki sınırlama,

- Bilinen uç teğet vektörler; P'_0 ve P'_{m-1}
- P_0 ve P_{m-1} uç noktalarındaki ikinci türevlerin sıfıra eşit olması ($P''_0 = 0$, $P''_{m-1} = 0$)

şeklindedir. Bu, doğal kübik Spline eğrisini ifade eder.

Birinci durum: Tüm Spline parçaları üzerinde (2.26) eşitliğinin iteratif (tekrarlı) kullanımı ve kübik Spline'in iki uç teğet vektörü,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 4 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \\ . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \\ P'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_0 \\ 3(P'_2 - P'_0) \\ . \\ . \\ 3(P'_{m-1} - P'_{m-3}) \\ P'_{m-1} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

şeklinde matris formunda temsil edilebilir. Bu matris denkleminin çözümü, tüm teğet vektörlerin değerlerini verir. Çözüm,

$$\begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \\ P'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 4 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \\ . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P'_0 \\ 3(P'_2 - P'_0) \\ . \\ . \\ 3(P'_{m-1} - P'_{m-3}) \\ P'_{m-1} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

ya da

$$[P'_i] = [M]_{Cs}^{-1} [G]_{Cs} \quad (2.29)$$

şeklinde ifade edilir. $[M]_{Cs}$ matrisinin üçgensel olduğuna dikkat ediniz. Yani, sıfırdan farklı değerler, sadece köşegen üzerinde (alt ve üst köşegenler) oluşur. Bu matrisin tersi, hesaplanabilirliği açısından daha az işlem gerektirir. m bilinmeyenli bu denklem sistemin çözümü, Gauss yok etme metodu ile elde edilir, [1].

Örnek 2.2 $P'_0 = (1,1)$ ve $P'_3 = (-1,1)$ teğet vektörleri ile $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (4,4)$, $P_3 = (6,0) \in E^2$ nokta vektörlerini ele alalım. Kübik Spline interpolasyon için gerekli olan P_1 ve P_2 noktalarındaki teğet vektörleri bulunuz.

Çözüm (2.27) eşitliği kullanılarak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3(4-0) & 3(4-0) \\ 3(6-2) & 3(0-1) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 12 \\ 12 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, teğetlerin yer aldığı sütun matrisi için katsayısında yer alan 4×4 tipindeki matrisin tersi alınırsa

$$\begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 12 \\ 12 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 12 \\ 12 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 31/15 & 48/15 \\ 41/15 & -27/15 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

İkinci durum: (2.26) eşitliği tekrar kullanılır ve ikinci türevler, kübik Spline'nın ilk ve son noktalarında sıfıra eşitlenir. İlk noktada, yani P_0 noktasında ($t=0$ için), ikinci türev sınırlaması, (2.23) eşitliğinin

$$2a_{2i} = 0$$

veya

$$a_{2i} = 0 \quad (2.30)$$

şeklinde olmasını gerektirir. a_{2i} değeri, (2.11) eşitliğinde yazılırsa

$$3(P_1 - P_0) - 2P'_0 - P'_1 = 0 \quad (2.31)$$

ya da

$$2P'_0 + P'_1 = 3(P_1 - P_0)$$

elde edilir. Son nokta, yani P_{m-1} noktası ($t=1$ için) ikinci türevi sıfıra eşit olacak şekilde seçilerek (2.23) eşitliğine yazılır ve düzenlenirse

$$P'_{m-2} + 2P'_{m-1} = 3(P_{m-1} - P_{m-2}) \quad (2.32)$$

elde edilir. m bilinmeyenli m denklemin matris formu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & 4 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 4 & 1 \\ . & . & . & . & . & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ P'_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_1 - P_0) \\ 3(P_2 - P_0) \\ \vdots \\ 3(P_{m-1} - P_{m-3}) \\ 3(P_m - P_{m-2}) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

şeklindedir. P'_i değerleri, birinci veya ikinci durum ile elde edildiğinden (2.20) eşitliği, kübik Spline üzerindeki noktaları verir, [1].

Örnek 2.3 Doğal kübik Spline kullanarak Örnek 2.2'deki problemi çözünüz. Ayrıca, her Spline parçası için $t = \frac{1}{3}$ ve $t = \frac{2}{3}$ değerleri için kübik Spline üzerindeki noktaları bulunuz.

Çözüm (2.33) eşitliği, teğet vektörlerini bulmak için kullanılır. Böylece,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 12 \\ 12 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

yazılır ve

$$\begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 26 & -7 & 2 & -1 \\ -7 & 14 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 14 & -7 \\ -1 & 2 & -7 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 12 \\ 12 & -3 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

elde edilir. İlk parçada $t = \frac{1}{3}$ ve $t = \frac{2}{3}$ değerleri ile eğri üzerindeki noktaları bulmak için (2.19) ve (2.20) eşitlikleri kullanılır.

$t = \frac{1}{3}$ değeri için;

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^3 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = [0.666 \quad 0.0372] \text{ (Birinci parça için)}$$

elde edilir ve $t = \frac{2}{3}$ değeri için;

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^3 & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = [1.332 \quad 0.2964] \text{ (ikinci parça için)}$$

elde edilir. (2.19) ve (2.20) eşitlikleri, ikinci ve üçüncü parçalara uygulanır. Her iki durumda sadece, geometrik matris değişir. Her parametrik değer için, ilk iki matris aynı kalır.

İkinci parça için,

$$[G]_H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve eğri değerleri,

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = [2.666 \quad 2.223] \text{ (ikinci parça için)}$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = [3.333 \quad 3.444] \text{ (ikinci parça için)}$$

şeklindedir.

Üçüncü parça için,

$$[G]_H = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

ve eğri değerleri,

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = [4.666 \quad 3.407] \text{ (Üçüncü parça için)}$$

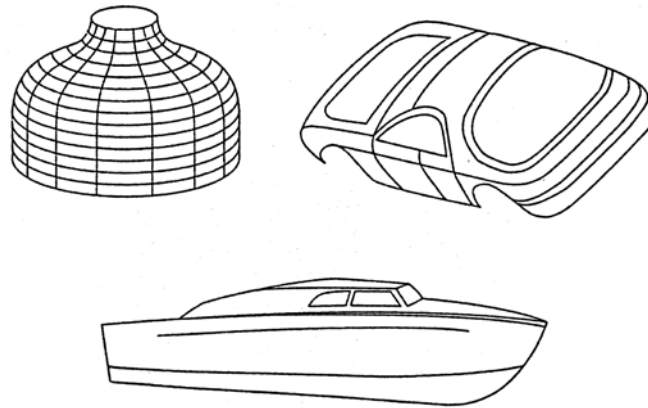
$$P\left(\frac{2}{3}\right) = [5.333 \quad 1.925] \text{ (Üçüncü parça için)}$$

şeklindedir.

Özetle; kübik Spline, parçalar arasındaki bağlantı noktalarında ikinci türev sürekliliğine sahip parçalı kübik polinomlarla gösterilir. 0 ve 1 arasında normalleştirilmiş parametreye sahip olan kübik Spline, Hermit interpolasyonun özel bir halidir. Her parçanın sonunda birinci türev değerleri, ikinci türev sürekliliğini sağlayacak şekilde seçilir, [1].

2.1.4 İnterpolasyon ve Yaklaşım Karşılaştırması

BDT alanındaki eğrilerin gösterimi için yapılan matematiksel yaklaşımlar ya interpolasyon ya da yaklaşım teorilerine dayanır. Eğri tasarımı problemi, bir veri uydurma problemi ise, klasik interpolasyon çözümleri kullanılır. Diğer tipteki problemlerde, bu çözümler kullanılmaz. Bir arabanın tamponu, bir uçağın gövde ve kanatları arasındaki geçiş, geminin gövdesi, bir kahve kupasının kulpu, bir insanın bacağındaki uyluk kemiği gibi görünüşte ilgisiz olan nesneler, ortak bir özelliği paylaşır: Bunlar, düzlem, silindirik veya küresel yüzeyler türünden temsil edilemeyen, serbest form yüzeylerle tanımlanır. Şekil 2.11, ilgili birkaç örnek göstermektedir.



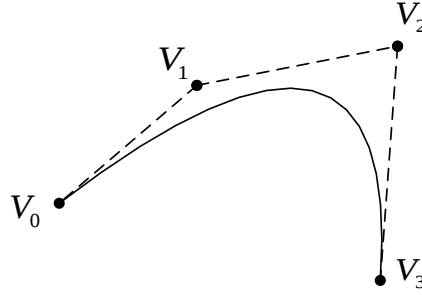
Şekil 2.11 Serbest form şekillerin örnekleri

Serbest formlu eğri ve yüzeylerin tasarımı, bu türün mühendislik alanındaki problemlerinde son derece önemlidir. Bilindiği üzere bu tasarım problemleri, tasarı geometri yöntemleriyle ele alınmıştır. Örneğin; araba gövdeleri, birkaç belirli özelliği

olan doğrular ve düzlem kesitleri ile tanımlanan dış yüzeylere sahiptir. Bu bilgiyle, daha yüksek modeller, stamp bilgisayar programında oluşturulur ve prototipler (kalıplar), frezeleme makinaları yardımıyla üretilir. Bilgisayar kullanma avantajı, bu yöntemi tamamen değiştirdi. Öncelikle, bilgisayar komutlarıyla yönlendirilen frezeleme makinaları geliştirilmiştir. Bilgisayarlı modeller, var olan eğri ve yüzey tanımlarından sayısal bir yöntemle oluşturulmuştur. Kısa sürede, daha yüksek model ya da çizim yapmak yerine kavramsal olarak serbest form şekli tasarlamak için bilgisayar kullanmak mümkün olmuştur. Böylece, BDT çağı doğmuştur.

BDT alanında özellikle tasarım problemlerinde en önemli kriter, eğri ya da yüzeyin düzgünlüğü ile ilgilidir. Bir tasarımın başarılı olması için gerekli olan; interpolasyon kalitesini düşünmeksizin tasarımın görünümünün tasarımcının değerlendirmesine uygunluğudur.

Tasarımdaki değişimlerin sınırlandırılması önemlidir. Bu yüzden, sınırlı alanda gerçekleştirilen değişimler, eğrinin ya da yüzeyin şeklini tamamen etkilemez. Yaklaşım metodları, bu ihtiyaçları gidermek için (en azından kısmen) tasarlanmıştır. Eğrilerin temsili için yapılan bu yaklaşımlar, Şekil 2.12’de gösterildiği gibi orijinal noktalara yaklaşan fakat bu noktalardan tam olarak geçmeyen düzgün şekli sağlar.



Şekil 2.12 Eğrinin verilen noktalara yaklaşımı

Son zamanlarda BDT alanında en çok kullanılan iki yaklaşım metodu, Bézier ve B-Spline olmuştur, [1].

2.2 Algoritmalar

De Casteljau algoritması, eğri ve yüzey tasarımı alanındaki en temel olanlardan biri olmasına rağmen şaşırtıcı şekilde basittir. Temel cazibesi, geometri ve cebir arasındaki güzel bir etkileşimdir: çok sezgisel geometrik bir yapı, güçlü bir teoriye götürür.

Tarihsel olarak, bu durum, 1959 yılında Paul De Casteljau'nun başladığı algoritma ile ilgilidir. Tek yazılı kanıt, her ikisine kolayca ulaşılamayan teknik raporlar olan “P. De Casteljau. Outillages méthodes calcul. Technical report, A. Citroen, Paris, 1959” ve “P. De Casteljau Courbes et surfaces a poles. Technical report, A. Citroen, Paris, 1963” çalışmalarında yer almaktadır. William Boehm, 1975 yılında raporların kopyalarını elde edene kadar De Casteljau'nun çalışması gözden kaçmıştır. O zamandan itibaren, De Casteljau'nun ismi daha da popülerlik kazanmıştır, [4].

2.2.1 Paraboller

Bir parabolü üretmek için basit bir yapı ele alacağız ve basit bir genelleştirme bizi Bézier eğrilerine götürecektir. b_0, b_1, b_2, E^3 uzayında herhangi üç nokta ve $t \in \mathbb{R}$ olsun.

$$b_0^1 = (1-t)b_0 + tb_1$$

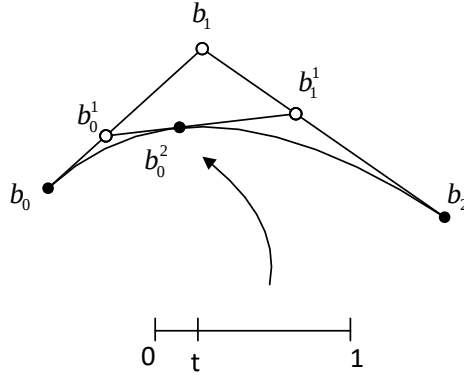
$$b_1^1 = (1-t)b_1 + tb_2$$

$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t)$$

(doğrunun barisantrik koordinatları da diyebileceğimiz) eşitliklerini oluşturalım. İlk iki eşitliği, üçüncü eşitliğe ekleyerek

$$b_0^2(t) = (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2 \quad (2.34)$$

eşitliği elde edilir. Bu, t parametresine göre düzenlenmiş kuadratik ifadedir (üst simge dereceyi gösterir) ve böylece $b_0^2(t)$, t parametresi $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a değişirken bir parabol çizer. Bu parabolü b^2 ile göstereceğiz. Bu yapı, tekrarlı lineer interpolasyon ile üretilir. Geometrik yorumu, Şekil 2.13'de gösterilmektedir.



Şekil 2.13 Paraboller: Tekrarlı lineer interpolasyon ile kurulan yapı

$0 \leq t \leq 1$ için, $b^2(t)$, b_0, b_1, b_2 ile şekillenen üçgenin içerisinde. Özel olarak $b^2(0) = b_0$ ve $b^2(1) = b_2$ dir.

Şekil 2.13'deki noktaların oranlarının

$$oran(b_0, b_0^1, b_1) = oran(b_1, b_1^1, b_2) = oran(b_0^1, b_0^2, b_1^1) = \frac{t}{1-t}$$

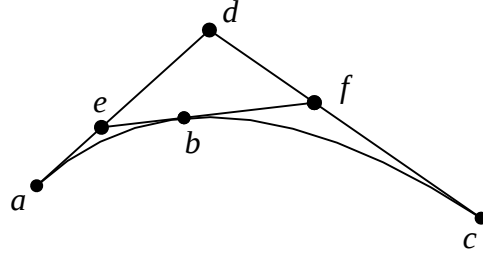
şeklinde olduğu görülür. Böylece, parabol yapımız afin olarak değişmezdir. Çünkü, parçalı lineer interpolasyon, afin olarak değişmezdir.

Bir parabolün aynı zamanda düzlemsel bir eğri olduğuna dikkat ediniz. Çünkü, $b^2(t)$, üç noktanın barisantrik kombinasyonudur. (2.34) eşitliğinin incelenmesiyle

$$b_0^2(t) = \underbrace{(1-t)^2}_{(I)} b_0 + \underbrace{2t(1-t)}_{(II)} b_1 + \underbrace{t^2}_{(III)} b_2 \Rightarrow (I) + (II) + (III) = 1$$

olduğu görülür.

Son olarak, parabol yapımızla yakından ilişkili olan analitik geometriden bir teorem ifade edelim. Bir parabol üzerinde üç ayrık nokta a, b, c olsun. b noktasındaki teğet, sırasıyla, e ve f noktalarının üzerinde bulunduğu a ve c noktalarındaki teğeti kessin. a ve c noktalarındaki teğetler, d noktasında kesişsin. Şekil 2.14, eğri üzerindeki üç noktaya ait olan teğetlerin kesişim noktalarını göstermektedir.



Şekil 2.14 Üç teğet teoremi

Öyleyse, $oran(a, e, d) = oran(e, b, f) = oran(d, f, c)$ şeklinde yazılabilir. Bu *üç teğet teoremi*, parabollerin bir özelliğini tanımlar: De Casteljau algoritması, yapısal eşi olarak incelenebilir, [4].

2.2.2 De Casteljau Algoritması

Paraboller, düzlemsel eğrilerdir. Bununla birlikte, çoğu uygulama gerçek uzaysal eğrileri ihtiyaç duyar. Bu amaç doğrultusunda, bir parabol için oluşturulan bir önceki yapı, keyfi n . dereceden bir polinom eğrisini üretmek için genelleştirilebilir:

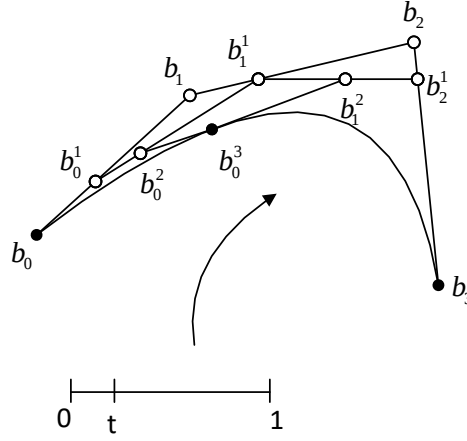
$b_0, b_1, \dots, b_n \in E^3$ ve $t \in I$ verilsin.

$$b_i^r(t) = (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t); \quad r = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-r \quad (2.35)$$

ve $b_i^0(t) = b_i$ yapısını kuracağız. Öyleyse, $b_0^n(t)$, b^n eğrisi üzerindeki t parametre değeri ile bir noktadır.

$b_0, b_1, \dots, b_n$ ile şekillenen P çokgeni, b^n eğrisinin *kontrol çokgeni* ya da *Bézier kontrol çokgeni* olarak adlandırılır¹. Benzer şekilde, b_i çokgen köşeleri, *kontrol noktaları* ya da *Bézier noktaları* olarak adlandırılır. Şekil 2.15, De Casteljau algoritması için $t = 1/4$ parametre değeri için kübik durumu gösterir.

¹ Dört kontrol noktasının olduğu kübik durumda: Bu noktalar, üç boyutta bir tetrahedron oluşturur. Bu tetrahedrondan ilk kez 1923 yılında William Blaschke (W. Blaschke. Differential geometrie. Chelsea, 1953. Reprint of the original 1923 edition) bahsetmiştir: O, bunu “oskulator tetrahedron” olarak adlandırmıştır.



Şekil 2.15 Kübik durum için De Casteljau algoritması

$b_0^n(t)$, $b_0^n(t) = B[b_0, b_1, \dots, b_n; t] = B[P, t]$ ya da kısaca $b^n = B[b_0, \dots, b_n] = BP$ şeklinde de yazılır. Bu notasyon, kontrol çokgeni ile Bézier eğrisini birleştiren (lineer) operatör olacak şekilde B 'yi tanımlar. Yaklaşım teorisinden alınan bir terminoloji olarak; $B[b_0, \dots, b_n]$ eğrisinin, kontrol çokgenine Bernstein-Bézier yaklaşımı olduğu söylenebilir.

$b_i^r(t)$ ara katsayıları, noktaların üçgensel dizisi içerisinde kolayca yazılır. De Casteljau şeması diyeceğimiz bu üçgensel dizi için kübik durum örneği şu şekildedir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & b_0 \\
 & & & & & & b_0^1 \\
 & & & & & b_1 & b_0^2 \\
 & & & & b_1^1 & & b_0^3 \\
 & & b_2 & & b_1^2 & & \\
 & & b_2^1 & & & & \\
 b_3 & & & & & &
 \end{array} \tag{2.36}$$

Bu üçgensel nokta dizisi, De Casteljau algoritması için oluşturulan yazılım kodunda iki-boyutlu dizinin kullanımını önerir gibi görünür. Bu, bilgisayar belleği için gereksiz olacaktır. Ancak, sadece sol sütunu yazmak için ve uygun bir şekilde düzeltme yapmak için yeterlidir. Uygulama için Örnek 2.4'e bakınız, [4].

Örnek 2.4 Düzlemsel kübik durum ve $t=1/2$ değeri için De Casteljau şeması yardımıyla Bézier eğrisi üzerindeki noktayı hesaplayınız, [4].

Çözüm Doğrunun barisantrik koordinatları olarak da ifade edilen eşitlikler $t=1/2$ değeri için yazılırsa, yani

$$b_0^1 = (1-t)b_0 + tb_1$$

$$b_1^1 = (1-t)b_1 + tb_2$$

$$b_2^1 = (1-t)b_2 + tb_3$$

eşitliklerinde verilen t değeri yerine yazılırsa

$$b_0^1 = \frac{b_0 + b_1}{2} = (0,1)$$

$$b_1^1 = \frac{b_1 + b_2}{2} = (4,2)$$

$$b_2^1 = \frac{b_2 + b_3}{2} = (6,1)$$

elde edilir. (2.34) eşitliği yardımıyla b_0^2 ve b_1^2 bulunur ve böylece b_0^3 için (2.35) eşitliği kullanılır. Bulunan değerler, üçgensel nokta dizisi şeklinde (2.36) eşitliği ile verilen yapıya benzer olarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & & & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & & & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} & & \\ & & & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix} 5 \\ 3/2 \end{bmatrix} & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} & \\ & & & & & & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

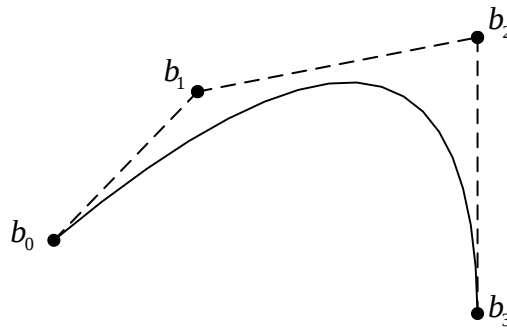
2.3 Bézier Eğrileri

Bu bölümde [1] eserinde yer alan Bézier eğrileri ile ilgili bazı temel bilgiler verilecektir. Bölüm 2.1’de parametrik kübik eğrileri tanımlamak için kullanılan interpolasyon teknikleri, Fransız araba şirketi Renault’da mühendis olan Pierre Bézier ile bilinirdi. 1960’lı yılların başlarında, Bézier, tasarımcıya interpolasyon tekniklerinden daha büyük bir esneklik vermek için matematiksel bir formül üzerinde çalışmaya başladı. Bu matematiksel formülün rastlantısal ve bağımsız olarak Citroën araba şirketinde mühendis olan De Casteljau tarafından geliştirilmiş olması ilginçtir. Çünkü, Bézier’in çalışmasının hesaplamaları, ki şimdilerde kendi adıyla bilinen teorisi, birkaç yayında ortaya çıkmıştır.

Bézier eğrileri, Şekil 2.16’da gösterildiği gibi eğriye yaklaşımı sağlayan (noktalardan geçme şartı olmaksızın) ve sıralı noktalar kümesi olan $(b_0, ..., b_n)$ *kontrol noktaları* ya da *kontrol köşelerini* kullanır. Bu noktalar, grafik ekranında temsil edilebilir ve kullanıcıya eğrinin şeklini kontrol imkânı verir. Bézier eğrileri, serbest şekilli eğrilerin temsilde kullanılan polinom fonksiyonlarını baz almıştır. n . dereceden Bézier eğrisi, $n+1$ kontrol noktasına sahip bir parametrik fonksiyondur, [1] ve

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i \quad (2.37)$$

ile verilir. Burada, b_i notasyonu kontrol noktalarıdır, [3].



Şekil 2.16 Bézier eğrisinin noktalara yaklaşımı

$B_{i,n}(t)$ fonksiyonu Bézier gösterimi için, karma fonksiyondur ve Bernstein polinomları, n polinomun derecesi olmak üzere

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.38)$$

ile tanımlanır ve

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.39)$$

binom katsayılarıdır. Bu karma fonksiyonlar,

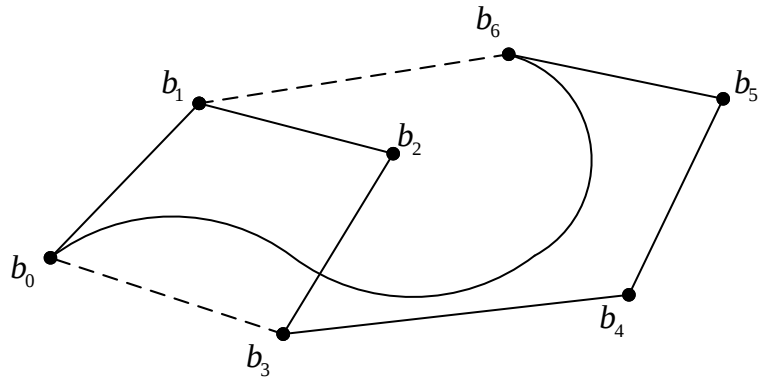
$$B_{i,n}(t) \geq 0, \quad \text{tüm } i \text{ değerleri için } 0 \leq t \leq 1$$

ve

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

şartlarını sağlarlar.

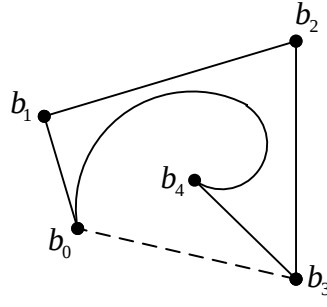
Bu eşitliklerden ikincisi, normalleştirme özelliğidir. Bu şartlar, eğrinin tümüyle kontrol noktaları tarafından oluşturulan konveks tekne içinde kalmasına zorlar (Şekil 2.17).



Şekil 2.17 Bézier eğrisinin konveks tekne özelliği

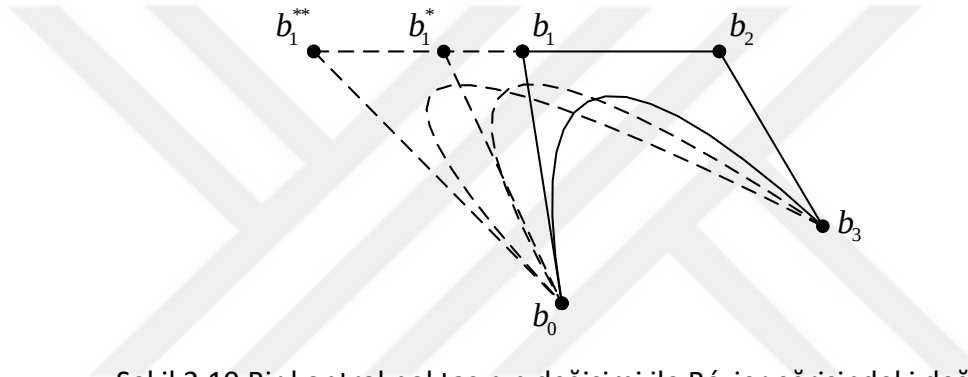
Konveks tekne, kontrol noktaları arasına gerilmiş bir lastiğin oluşturduğu çokgen olarak düşünülebilir.

Bezier karma fonksiyonları, $n+1$ kontrol noktasıyla n . dereceden polinom üretir. Ayrıca, eğriyi ilk ve son noktaları arasında interpolate olmaya zorlar (Şekil 2.18).



Şekil 2.18 B zier eğrisinin ilk ve son noktalar arasında interpolate olması

Aradaki kontrol noktaları, sadece eğriyi kendilerine doğru  eker ve eğrinin istenen  ekle ulaşması için kullanılırlar. Şekil 2.19, bir kontrol noktasının hareketiyle B zier eğrisinin şeklinin değişimini göstermektedir.



Şekil 2.19 Bir kontrol noktasının değişimi ile B zier eğrisindeki değişim

Karma fonksiyonların kullanımına bir örnek olarak b_0, b_1, b_2, b_3 kontrol noktalarını göz önüne alalım. $n+1=4$ olduğundan polinomun derecesi $n=3$ tür. (2.37) eşitliği açılırsa,

$$P(t) = B_{0,3}(t)b_0 + B_{1,3}(t)b_1 + B_{2,3}(t)b_2 + B_{3,3}(t)b_3 \quad (2.40)$$

elde edilir. (2.38) eşitliğinde verilen Bernstein polinomlarına göre

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= \frac{3!}{0! \cdot 3!} t^0 (1-t)^3 = (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) &= \frac{3!}{1! \cdot 2!} t^1 (1-t)^2 = 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) &= \frac{3!}{2! \cdot 1!} t^2 (1-t) = 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) &= \frac{3!}{3! \cdot 0!} t^3 (1-t)^0 = t^3 \end{aligned} \quad (2.41)$$

şeklinde dört karma fonksiyon vardır. Normalleştirme özelliği, karma fonksiyonlara uygulandığında,

$$[(1-t)^3] + [3t(1-t)^2] + [3t^2(1-t)] + t^3 = 1 \quad (2.42)$$

elde edilir. Yani karma fonksiyonların toplamı 1'e eşittir. Bu fonksiyonlar (2.40) eşitliğinde yazılırsa,

$$P(t) = (1-t)^3 b_0 + 3t(1-t)^2 b_1 + 3t^2(1-t) b_2 + t^3 b_3 \quad (2.43)$$

elde edilir. Bézier eğrisinin ilk ve son kontrol noktalarından geçtiği bilinir. Buna göre,

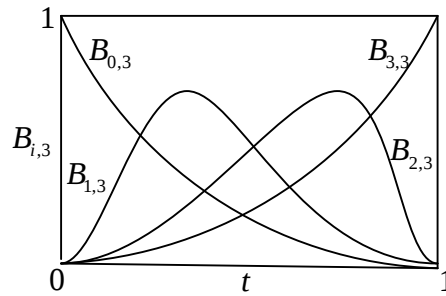
$$\begin{aligned} t=0 \text{ için } P(0) &= b_0 \\ t=1 \text{ için } P(1) &= b_3 \end{aligned} \quad (2.44)$$

yazılır. Bu değerler için karma fonksiyonlar,

$$\begin{aligned} t=0 \text{ için } B_{0,3} &= 1 \\ t=1 \text{ için } B_{3,3} &= 1 \text{ ve } B_{1,3} = B_{2,3} = 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

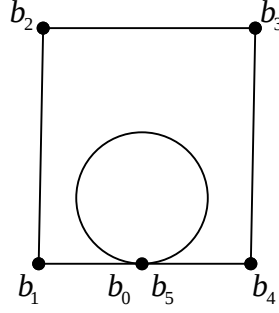
Kübik Bézier eğrisi için karma fonksiyonların çizimi Şekil 2.20'de gösterilmiştir.



Şekil 2.20 Kübik Bézier eğrisi için karma fonksiyonlar

Her bir kontrol noktası, bu nokta ile birleştirilen karma fonksiyon tarafından ağırlıklanır ve her bir noktanın etkisi, t parametre değeri 0'dan 1'e artarken değişir. Karma fonksiyonlar, aynı zamanda Bézier eğrisini ilk iki ve son iki kontrol noktalarını birleştiren doğrulara teğet olması için zorlar.

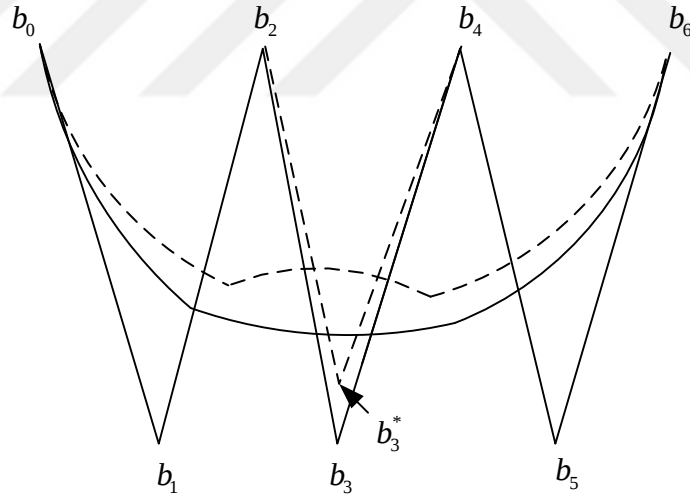
Kapalı eğriler, Şekil 2.21’de gösterildiği gibi kontrol noktalarının ilk ve son noktalarının çakıştırılmasıyla elde edilir.



Şekil 2.21 Kapalı eğriler

Bézier eğrileri için karma fonksiyonlar olarak kullanılan Bernstein polinomları, tek bir polinom eğrisiyle kontrol noktaları dizisine yaklaşım gösterir. Sonuçlanan şeklin derecesi, bu yüzden kontrol noktalarının sayısına bağlı olarak değişir.

Bézier eğrilerinde lokal kontrol sağlanmaz. Yani, bir kontrol noktasının değişmesi tüm eğri parçasının şeklini değiştirir (Şekil 2.22).



Şekil 2.22 Bézier eğrisinin lokal kontrol sağlamaması

2.3.1 Lineer Bézier Eğrisi

Lineer Bézier eğrisi, iki b_0 ve b_1 kontrol noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. n . dereceden $(n+1)$ kontrol noktasına sahip Bézier eğrisi için verilen (2.37) eşitliğinde $(n+1) = 2$ yani iki kontrol noktası alınmasıyla, $n = 1$ yani birinci dereceden Bézier eğrisi denklemi

$$P1(t) = \sum_{i=0}^1 B_{i,1}(t)b_i = (1-t)b_0 + tb_1 \quad (2.45)$$

ile verilir.

2.3.2 Kuadratik Bézier Eğrisi

Kuadratik yani ikinci dereceden Bézier eğrisi, (2.37) eşitliğinde $(n+1)=3$ yani üç kontrol noktası alınmasıyla, $n=2$ yani ikinci dereceden Bézier eğrisi denklemi

$$P2(t) = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t)b_i = (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)tb_1 + t^2 b_2 \quad (2.46)$$

ile verilir.

2.3.3 Kübik Bézier Eğrisi

Kübik yani üçüncü dereceden Bézier eğrisi, (2.37) eşitliğinde $(n+1)=4$ yani dört kontrol noktası alınmasıyla, $n=3$ yani üçüncü dereceden Bézier eğrisi denklemi

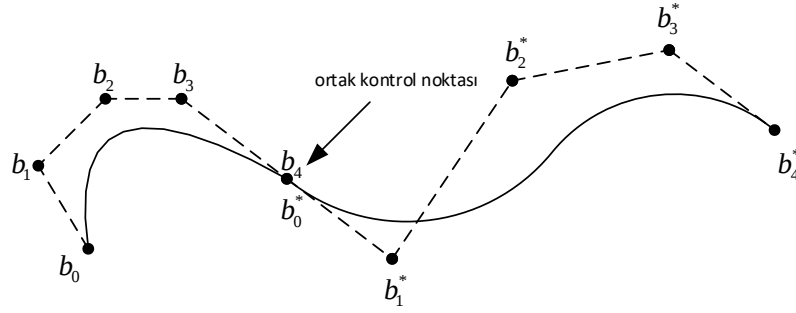
$$P3(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t)b_i = (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 tb_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3 \quad (2.47)$$

ile verilir.

2.3.4 Bileşik Bézier Eğrileri

İyileştirilmiş bir tasarım esnekliği için çok sayıda kontrol noktasına ihtiyaç vardır. Bu durumda, polinomun yüksek derece ile sonuçlanması, şeklin kontrolünü zorlaştıracaktır.

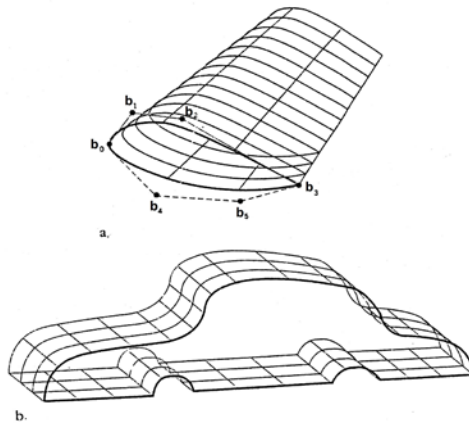
Eğrinin derecesini düşürmek ve ihtiyaç duyulan tasarım esnekliğini elde etmek için çok sayıda kontrol noktası olan eğriler, düşük dereceli birkaç parçanın birleştirilmesiyle elde edilir (Şekil 2.23).



Şekil 2.23 Bileşik (parçalı) Bézier eğrisi

Şekil 2.23'te gösterildiği gibi $b_0b_1b_2b_3b_4$ ve $b_0^*b_1^*b_2^*b_3^*b_4^*$ olmak üzere iki parça kullanılmıştır. C^1 sürekliliği, genelde C^0 sürekliliğini (bağlantılı olma) sağlayan parçalı Bézier eğrilerine uygulanır. Bu şartın sağlanması için, bağlantı noktasında birleşen kontrol çokgeninin kenarları, bir doğruyu şekillendirmelidir. Yani, iki parçayı birleştiren kontrol noktası, bunun öncesi ve sonrasındaki noktaları birleştiren noktalar ile doğrusal olmalıdır. Şekil 2.23, bu şartları gösterir. Örneğin; Şekil 2.24 (a), C^0 sürekliliğine sahip ve kontrol çokgenleri, $b_0b_1b_2b_3, b_0b_4b_5b_3$ olan iki Bézier parçasının birleştirilmesiyle oluşturulan bir airfol (kanat) eğrisini göstermektedir ve parçalar için kontrol çokgenleri, $b_0b_1b_2b_3$ ve $b_0b_4b_5b_3$ şeklindedir. Şekil 2.24 (b), C^1 sürekliliği ile birleşen birkaç kübik Bézier eğrisi ile şekillenen araba gövdesinin eğri simülasyonunu göstermektedir. Aynı zamanda b_0^* olan b_4 bağlantı kontrol noktası, b_3 ve b_1^* kontrol noktalarını bir doğruya birleştirir.

Bézier formülünün uygulaması, Şekil 2.24 (a) ve Şekil 2.24 (b)'de gösterilmektedir, [1].



Şekil 2.24 (a) Airfol (kanat) eğri temsili. (b) Araba gövdesinin eğri simülasyonu

2.3.5 Bézier Eğrisinin Matris Formu

Kübik Bézier eğrileri, matris formunda uygun olarak ifade edilebilirler. Örneğin;

$$P(t) = (1-t)^3 b_0 + 3t(1-t)^2 b_1 + 3t^2(1-t)b_2 + t^3 b_3$$

ile verilen kübik Bezier eğrisini düşünelim. Bu eşitlik matris formunda,

$$P(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

ya da

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1-3t+3t^2-t^3 & 3t-6t^2+3t^3 & 3t^2-3t^3 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade,

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

veya daha kısa formda,

$$P(t) = [t]_{1 \times 4} [M]_{B(4 \times 4)} [b]_{B(4 \times 1)} \quad (2.51)$$

şeklinde indirgenerek yazılabilir, [1].

Örnek 2.5 Bézier eğrilerinin C^1 sürekliliği ihtiyacı, iki eğriyi ortak bir noktada aynı parametrik eğimi paylaşmaya zorlar. Aşağıda kontrol noktaları dizisi ile tanımlanan iki Bézier eğrisi verilsin.

1.eğri $A(2,3,4)$, $B(3,1,5)$, $C(x,y,z)$, $D(3,4,3)$

2.eğri $D(3, 4, 3)$, $E(2, 6, 0)$, $F(5, 7, 5)$, $G(5, 2, 3)$

x, y, z değerleri için C^1 sürekliliğini sağlayan cebirsel şartları bulunuz.

Çözüm (2.48) eşitliği, teğet vektörleri bulmak için t parametresine göre türevlenebilir:

$$P'(t) = [-3(1-t)^2 \quad 3(3t^2 - 4t + 1) \quad -3t(3t - 2) \quad 3t^2] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Parçalar arasındaki C^1 sürekliliğini sağlamak amacıyla ilk parça için $t = 1$ değerindeki $P'(t)$, ikinci parça için $t = 0$ değerindeki $P'(t)$ değerine eşitlenmelidir.

- İlk parça için $t = 1$ değeri;

$$P'_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 3(D - C)$$

- İkinci parça için $t = 0$ değeri;

$$P'_2(0) = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \\ G \end{bmatrix} = 3(E - D)$$

C^1 sürekliliği gereği $P'_1(1) = P'_2(0)$ eşitliği sağlanmalıdır.

Teğet vektör için değişken büyüklükleri hesaba katılarak bu eşitlik,

$$P'_1(1) = k \cdot P'_2(0) \quad (k : \text{sabit})$$

şeklinde yazılabilir. Değerler yerine yazılarak,

$$3(D - C) = 3k(E - D)$$

$$3[(3, 4, 3) - (x, y, z)] = 3k[(2, 6, 0) - (3, 4, 3)]$$

eşitliği elde edilir. Buradan işlemler sonucu,

$$x = 3 + k$$

$$y = 4 - 2k$$

$$z = 3 + 3k$$

cebirsel şartları elde edilir, [1].

2.4 Bernstein Polinomu ve Uygulamaları

2.4.1 Bernstein Polinomunun Özellikleri

(2.38) eşitliği ile ifade edilen Bernstein polinomları, Bézier eğrilerinin özelliklerini meydana getiren birkaç önemli özelliğe sahiptir, [13].

- **Birim bölüntü:** n . dereceden Bernstein polinomlarının toplamı 1'dir.

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1, \quad t \in [0, 1] \quad (2.52)$$

Birim bölüntü özelliği aşağıdaki şekilde ispat edilebilir:

$$((1-t) + t)^n = 1 \text{ olmak üzere, } \forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ için } (x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \text{ Binom}$$

teoreminin uygulanmasıyla,

$$((1-t) + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$$

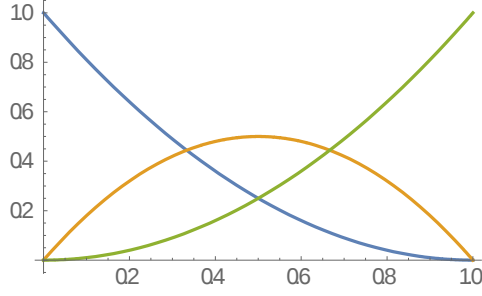
elde edilir.

- **Pozitiflik:** Bernstein polinomları, $[0, 1]$ aralığı üzerinde pozitiflerdir.

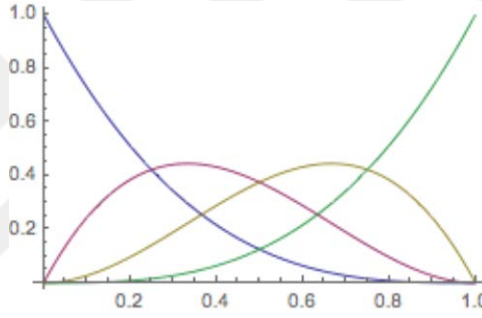
$$B_{i,n}(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1] \quad (2.53)$$

- **Simetri:** $B_{n-i,n}(t) = B_{i,n}(1-t)$, $i = 0, \dots, n$

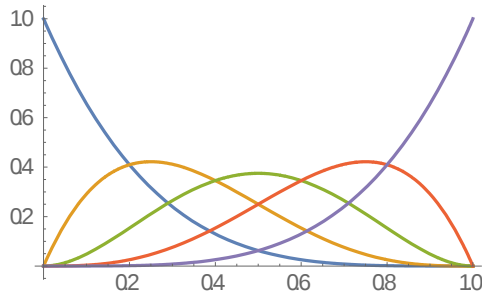
Böylece, $B_{n-i,n}(t)$ fonksiyonunun grafiği, $B_{i,n}(1-t)$ fonksiyonunun grafiğinin yansımasıdır. Bu, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden Bernstein polinomlarının grafiklerini gösteren Şekil 2.25, Şekil 2.26 ve Şekil 2.27' de gözlemlenebilir.



Şekil 2.25 İkinci dereceden Bernstein polinomları



Şekil 2.26 Üçüncü dereceden Bernstein polinomları



Şekil 2.27 Dördüncü dereceden Bernstein polinomları

- **Rekürsiyon (Özyineleme):** n . dereceden Bernstein polinomları, $(n-1)$ dereceli polinomlar cinsinden

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t), \quad i = 0, \dots, n \quad (2.54)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $B_{-1,n-1}(t) = 0$ ve $B_{n,n-1}(t) = 0$ 'dır.

Özyineleme özelliği de aşağıdaki şekilde ispat edilebilir:

Bernstein polinomunun (2.38) eşitliği kullanılarak,

$$B_{i,n-1}(t) = \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-1-i} t^i$$

$$B_{i-1,n-1}(t) = \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^{i-1}$$

yazılabilir ve $i = 0$ için, $B_{-1,n-1}(t) = 0$ olduğundan

$$B_{0,n}(t) = \binom{n}{0} (1-t)^{n-0} t^0 = (1-t)^n = (1-t)(1-t)^{n-1} = (1-t)B_{0,n-1}(t) + tB_{-1,n-1}(t)$$

bulunur. Benzer şekilde, $i = n$ için $B_{n,n-1}(t) = 0$ olduğundan

$$B_{n,n}(t) = \binom{n}{n} (1-t)^{n-n} t^n = t^n = (1-t) \cdot 0 + t \cdot t^{n-1} = (1-t)B_{n,n-1}(t) + tB_{n-1,n-1}(t)$$

bulunur. $1 \leq i \leq n-1$ için,

$$(1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) = \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-i} t^i + \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^i$$

$$= \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) (1-t)^{n-i} t^i$$

bulunur ve $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$ olmasından $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$ yazılmasıyla

$$(1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = B_{i,n}(t)$$

bulunur.

Birim bölüntü ve pozitiflik özelliği, Bézier eğrisinin dönüşümler altında invaryant olma ve konveks tekne özelliği olan iki önemli özelliğini meydana getirir. Simetri özelliğinin bir sonucu olarak, bir simetrik kontrol çokgeni, simetrik bir eğriyi meydana getirir. Rekürsiyon özelliği, de Casteljau algoritmasını meydana getirir.

Teorem 2.1 n . dereceden $B_{i,n}(t)$ Bernstein polinomlarının birinci ve ikinci türevleri

$$B'_{i,n}(t) = \frac{(i-nt)}{t(1-t)} B_{i,n}(t), \quad (2.55)$$

$$B''_{i,n}(t) = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_{i,n}(t), \quad (2.56)$$

$$B'_{i,n}(t) = n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) \quad (2.57)$$

eşitliklerini sağlar, [13].

İspat $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ Bernstein polinomunda çarpım kuralıyla türev alınarak,

$$\begin{aligned} B'_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} \left(-(n-i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right) \\ &= \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right) \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \\ &= \frac{(i-nt)}{t(1-t)} B_{i,n}(t) \end{aligned}$$

(2.55) eşitliği ispatlanır.

(2.55) eşitliğinin türevinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned} B''_{i,n}(t) &= \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right)' B_{i,n}(t) + \frac{(i-nt)}{t(1-t)} B'_{i,n}(t) \\ &= \frac{(2it - nt^2 - i)}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) + \frac{(i-nt)^2}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) \end{aligned}$$

$$B''_{i,n}(t) = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_{i,n}(t)$$

(2.56) eşitliği ispatlanır.

(2.57) eşitliğini ispatlamak için (2.55) eşitliğinin sağ tarafında Bernstein polinomu tanımı kullanılarak elde edilen $B_{i-1,n-1}(t)$ ve $B_{i,n-1}(t)$ Bernstein polinomlarının farklarının alınmasıyla,

$$\begin{aligned} B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t) &= \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^{i-1} - \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-i-1} t^i \\ &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^{i-1} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} (1-t)^{n-i-1} t^i \\ &= \left(\frac{(n-1)!}{t(n-i)!(i-1)!} - \frac{(n-1)!}{(1-t)(n-i-1)!i!} \right) (1-t)^{n-i} t^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(n-1)!}{t(n-i)(n-i-1)!(i-1)!} - \frac{(n-1)!}{(1-t)(n-i-1)!i(i-1)!} \right) (1-t)^{n-i} t^i \\
&= \left(\frac{(n-1)!}{(n-i-1)!(i-1)!} \right) \cdot \left(\frac{1}{t(n-i)} - \frac{1}{(1-t)i} \right) (1-t)^{n-i} t^i \\
&= \left(\frac{(n-1)!}{(n-i-1)!(i-1)!} \right) \cdot \left(\frac{1}{(n-i)i} \right) \cdot \left(\frac{i-nt}{(1-t)t} \right) (1-t)^{n-i} t^i \\
&= \left(\frac{(n-1)!}{(n-i)!i!} \right) \cdot \left(\frac{i-nt}{(1-t)t} \right) (1-t)^{n-i} t^i
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade n ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t) &= \left(\frac{(n-1)!}{(n-i)!i!} \right) \cdot \left(\frac{i-nt}{(1-t)t} \right) (1-t)^{n-i} t^i \\
&= \frac{n}{n} \cdot \left(\frac{(n-1)!}{(n-i)!i!} \right) \cdot \left(\frac{i-nt}{(1-t)t} \right) (1-t)^{n-i} t^i \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i-nt}{(1-t)t} \right) \cdot \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} t^i
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(i-nt)}{t(1-t)} B_{i,n}(t)$$

şeklinde yazılır. Buradan da,

$$n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) = \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right) B_{i,n}(t)$$

ve (2.55) eşitliği ile

$$n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) = B'_{i,n}(t)$$

ya da

$$B'_{i,n}(t) = n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) \text{ elde edilir. Böylece, (2.57) eşitliği ispatlanır. } \square$$

2.4.2 Bézier Eğrisinin Türevleri

Teğetleri ve normalleri belirleme gibi eğrileri kapsayan birçok uygulama, türevlerin hesabını gerektirir. Bézier eğrilerinin türevleri, Bernstein polinomlarının türevlerinden

elde edilir. Örneğin; kübik Bernstein polinomlarının türevleri,

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, B_{1,3}(t) = 3(1-t)^2t, B_{2,3}(t) = 3(1-t)t^2, B_{3,3}(t) = t^3$$

olmak üzere,

$$B'_{0,3}(t) = -3(1-t)^2 = -3B_{0,2}(t)$$

$$B'_{1,3}(t) = 3(1-t)^2 - 6t(1-t) = 3(1-4t+3t^2) = 3B_{0,2}(t) - 3B_{1,2}(t)$$

$$B'_{2,3}(t) = 3t(2-3t) = 3B_{1,2}(t) - 3B_{2,2}(t)$$

$$B'_{3,3}(t) = 3t^2 = 3B_{2,2}(t)$$

şeklindedir.

Böylece, $P(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t)b_i$ kübik Bézier eğrisinin türevi,

$$\begin{aligned} P'(t) &= -3B_{0,2}(t)b_0 + 3(B_{0,2}(t) - B_{1,2}(t))b_1 + 3(B_{1,2}(t) - B_{2,2}(t))b_2 + 3B_{2,2}(t)b_3 \\ &= 3B_{0,2}(t)(b_1 - b_0) + 3B_{1,2}(t)(b_2 - b_1) + 3B_{2,2}(t)(b_3 - b_2) \end{aligned}$$

şeklindedir, [13].

n . dereceden Bézier eğrileri için yukarıdaki formülünün genelleştirilmesi Teorem 2.2'de ifade edilir, [13].

Teorem 2.2 n . dereceden bir Bézier eğrisinin birinci türevi, $\Delta^1 b_i = b_{i+1} - b_i$ olmak üzere

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \quad (2.58)$$

şeklindedir, [13].

İspat Teorem 2.1'deki (2.57) eşitliği ve $B_{-1,n-1}(t) = B_{n,n-1}(t) = 0$ olduğu gerçeği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
P'(t) &= \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(t)b_i = \sum_{i=0}^n n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t))b_i \\
&= \sum_{i=0}^n n \cdot B_{i-1,n-1}(t)b_i - \sum_{i=0}^n n \cdot B_{i,n-1}(t)b_i \\
&= \sum_{i=0}^n n \cdot B_{i-1,n-1}(t)b_i - \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_{i,n-1}(t)b_i
\end{aligned}$$

elde edilir. Son satırın ilk toplamı tekrar numaralandırılarak

$$P'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_{i,n-1}(t)b_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_{i,n-1}(t)b_i = \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_{i,n-1}(t)(b_{i+1} - b_i) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\Delta^1 b_i$$

sonucu elde edilir. Burada $\Delta^1 b_i = b_{i+1} - b_i$ olup *ileri fark operatörü* olarak adlandırılır. $\square$

$P(t)$ Bézier eğrisinin ikinci ve daha yüksek mertebeden türevleri, birinci türev formülünün tekrarlı uygulanmasıyla elde edilir. Bu formül, düzlemsel Bézier eğrilerinde olduğu gibi uzaysal olanında da geçerlidir, [13].

Sonuç 2.1 n . dereceden bir Bézier eğrisinin ikinci türevi, $\Delta^2 b_i = (\Delta^1 b_{i+1} - \Delta^1 b_i) = (b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)$ olmak üzere

$$P''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t)\Delta^2 b_i \quad (2.59)$$

şeklindedir, [13].

Sonuç 2.2 n . dereceden bir Bézier eğrisinin r . türevi, $\Delta^r b_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}$ fark

denklemini olmak üzere,

$$P^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t) \quad (2.60)$$

şeklindedir. Ayrıca, $\Delta^r b_j = \Delta^{r-1} b_{j+1} - \Delta^{r-1} b_j$ eşitliği vardır, [13].

Sonuç 2.3 n . dereceden bir Bézier eğrisinin r . türevinin $t=0$ ve $t=1$ başlangıç ve bitiş noktalarındaki değerleri,

$$\begin{aligned}
P^{(r)}(t)|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t)|_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0 \\
P^{(r)}(t)|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t)|_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_{n-r}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

şeklindedir, [13].

İspat (2.60) eşitliği daha açık olarak,

$$\begin{aligned}
P^{(r)}(t)|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t)|_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} (\Delta^r b_0 B_{0,n-r}(t) + \Delta^r b_1 B_{1,n-r}(t) + \dots + \Delta^r b_{n-r} B_{n-r,n-r}(t)) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \left(\Delta^r b_0 \binom{n-r}{0} (1-t)^{n-r} t^0 + \Delta^r b_1 \binom{n-r}{1} (1-t)^{n-r-1} t^1 + \dots + \Delta^r b_{n-r} \binom{n-r}{n-r} (1-t)^0 t^{n-r} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, $t = 0$ ve $t = 1$ değerleri son ifadede yazılarak,

$$\begin{aligned}
P^{(r)}(t)|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t)|_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0 \\
P^{(r)}(t)|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t)|_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_{n-r}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

elde edilir.

Sonuç 2.3 ile $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki birinci, ikinci ve üçüncü türevler,

- $t = 0$ başlangıç noktası için

$$\begin{aligned}
P'(t)|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-1)!} \Delta^1 b_0 = n \Delta^1 b_0 \\
P''(t)|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 b_0 = n(n-1) (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) \\
P'''(t)|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-3)!} \Delta^3 b_0 = n(n-1)(n-2) (\Delta^2 b_1 - \Delta^2 b_0) = n(n-1)(n-2) (\Delta^1 b_2 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

- $t = 1$ bitiş noktası için

$$\begin{aligned}
P'(t)|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-1)!} \Delta b_{n-1} = n \Delta^1 b_{n-1} \\
P''(t)|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 b_{n-1} = n(n-1) (\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}) \\
P'''(t)|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-3)!} \Delta^3 b_{n-1} = n(n-1)(n-2) (\Delta^2 b_{n-2} - \Delta^2 b_{n-3}) = n(n-1)(n-2) (\Delta^1 b_{n-1} - 2\Delta^1 b_{n-2} + \Delta^1 b_{n-3})
\end{aligned} \tag{2.64}$$

şeklinde elde edilir, [13].

Sonuç 2.4 n . dereceden bir Bézier eğrisinin üçüncü türevi, $\Delta^3 b_i = (\Delta^2 b_{i+1} - \Delta^2 b_i) = ((\Delta^1 b_{i+2} - \Delta^1 b_{i+1}) - (\Delta^1 b_{i+1} - \Delta^1 b_i)) = (\Delta^1 b_{i+2} - 2\Delta^1 b_{i+1} + \Delta^1 b_i)$ olmak üzere

$$P'''(t) = n(n-1)(n-2) \sum_{i=0}^{n-3} B_{i,n-3}(t) \Delta^3 b_i \tag{2.65}$$

şeklindedir, [13].

2.4.3 E^3 Öklid Uzayında Bézier Eğrilerinin Uç Noktalardaki Serret-Frenet Elemanları

$P(t)$ Bézier eğrisinin başlangıç ve bitiş noktalarındaki $\{T, N, B\}$ ortonormal Serret-Frenet elemanlarını hesaplayalım ([4,13,15]):

Ortonormal çatı olmasından,

$$\langle T, T \rangle = 1, \langle N, N \rangle = 1, \langle B, B \rangle = 1$$

$$\langle T, N \rangle = 0, \langle T, B \rangle = 0, \langle N, B \rangle = 0$$

şartları sağlanır.

$P(t)$ Bézier eğrisinin hız vektörü,

$$v = \left\| \frac{dP(t)}{dt} \right\|$$

ile yay parametresinin uzunluğu,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dP(t)}{dt} \right\| dt$$

ile verilir.

Teorem 2.3 $b_i \in E^3$ kontrol noktaları olmak üzere, birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı,

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}, \quad (2.66)$$

$$N|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \phi - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \phi, \quad (2.67)$$

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \quad (2.68)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, ϕ , $\Delta^1 b_0$ ve $\Delta^1 b_1$ arasındaki açıdır, [15].

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki Serret-Frenet çatısı $\{T, N, B\}|_{t=0}$ hesaplandığında teğet vektör, (2.63) eşitliklerinden

$$T|_{t=0} = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}|_{t=0} = \frac{n\Delta^1 b_0}{\|n\Delta^1 b_0\|} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir. Binormal vektör, (2.63) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} B|_{t=0} &= \frac{P'(t) \times P''(t)}{\|P'(t) \times P''(t)\|}|_{t=0} = \frac{[n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)\Delta^2 b_0]}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)\Delta^2 b_0\|} = \frac{[n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)]}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|} \\ &= \frac{\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)}{\|\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \end{aligned}$$

ve asal normal vektör

$$N|_{t=0} = B \times T|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \times \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \frac{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir. Son satırda E^3 uzayında verilen Lagrange özdeşliği kullanılarak

$$N|_{t=0} = \frac{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle \Delta^1 b_1 - \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \rangle \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|\Delta^1 b_0\|} = \frac{\|\Delta^1 b_0\|^2 \Delta^1 b_1 - \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \cos \phi \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|\Delta^1 b_0\|}$$

yazılır. Burada, ϕ , $\Delta^1 b_0$ ve $\Delta^1 b_1$ arasındaki açıdır. Ayrıca,

$\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| = \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \sin \phi$ yerleştirilerek düzenlenirse

$$N|_{t=0} = \frac{\|\Delta^1 b_0\|^2 \Delta^1 b_1 - \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \cos \phi \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|^2 \sin \phi} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \frac{1}{\sin \phi} - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \phi$$

$$N|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \phi - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \phi$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.4 $b_i \in E^3$ kontrol noktaları olmak üzere, birim hızlı olmayan n . dereceden

$P(t)$ Bezier eğrisinin $t = 1$ bitiş noktasında $\{T, N, B\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı

$$T|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}, \quad (2.69)$$

$$N|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \psi - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \psi, \quad (2.70)$$

$$B|_{t=1} = -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \quad (2.71)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, ψ , $\Delta^1 b_{n-2}$ ve $\Delta^1 b_{n-1}$ arasındaki açıdır, [15].

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Serret-Frenet çatısı $\{T, N, B\}|_{t=1}$ hesaplandığında teğet vektör, (2.64) eşitliklerinden

$$T|_{t=1} = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}|_{t=1} = \frac{n\Delta^1 b_{n-1}}{\|n\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir. Binormal vektör, (2.64) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} B|_{t=1} &= \frac{P'(t) \times P''(t)}{\|P'(t) \times P''(t)\|}|_{t=1} = \frac{\left[n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)\Delta^2 b_{n-2} \right]}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)\Delta^2 b_{n-2}\|} = \frac{\left[n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}) \right]}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|} \\ &= \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times (\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times (\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|} = -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \end{aligned}$$

ve asal normal vektör

$$N|_{t=1} = B \times T|_{t=1} = -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \times \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{(\Delta^1 b_{n-2} \times \Delta^1 b_{n-1}) \times \Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \cdot \|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir. Son satırda E^3 uzayında verilen Lagrange özdeşliği kullanılarak

$$N|_{t=1} = \frac{\langle \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle \Delta^1 b_{n-1} - \langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\| \Delta^1 b_{n-1} \cos \psi - \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde de yazılır. Burada, ψ , $\Delta^1 b_{n-2}$ ve $\Delta^1 b_{n-1}$ arasındaki açıdır. Ayrıca,

$$\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| = \|\Delta^1 b_{n-1}\| \|\Delta^1 b_{n-2}\| \sin \psi \text{ yerleştirilerek düzenlenirse}$$

$$N|_{t=1} = \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\| \Delta^1 b_{n-1} \cos \psi - \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \|\Delta^1 b_{n-2}\| \sin \psi} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \psi - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \psi$$

şeklinde de elde edilir. $\square$

Teorem 2.5 $b_0, \dots, b_n \in E^3$ kontrol noktaları olmak üzere, birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasında eğrilik ve burulması

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^2} \sin \phi$$

$$\tau|_{t=0} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}$$
(2.72)

şeklindedir. Burada, ϕ , $\Delta^1 b_0$ ile $\Delta^1 b_1$ arasındaki açıdır, [15].

İspat $t=0$ başlangıç noktasında birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin eğriligi

$$\kappa|_{t=0} = \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3} \Big|_{t=0} = \frac{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|}{\|n\Delta^1 b_0\|^3} = \frac{n^2(n-1)}{n^3} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3}$$

ile verildiğinden buradan,

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3}$$
(2.72a)

elde edilir. Ayrıca,

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \sin \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^2} \sin \phi$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki burulması,

$$\begin{aligned}
\tau|_{t=0} &= \frac{\det(P'(t), P''(t), P'''(t))}{\|P'(t) \times P''(t)\|^2} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{(n\Delta^1 b_0, n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0), n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_2 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0))}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|^2} \\
&= \frac{\langle n\Delta^1 b_0, n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) \times n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_2 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0) \rangle}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_0, (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) \times (\Delta^1 b_2 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0) \rangle}{\|\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_0, (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) + (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_0) - (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + 2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \rangle}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2} \\
&= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 \rangle}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\tau|_{t=0} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2} \quad (2.72b)$$

şeklinde de ifade edilir. $\square$

Sonuç 2.1 (2.72a) ve (2.72b) eşitlikleri ile verilen

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3}$$

ve

$$\tau|_{t=0} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}$$

ifadelerinin

$$\kappa|_{t=0} = 2 \frac{n-1}{n} \frac{Alan(b_0, b_1, b_2)}{\|b_1 - b_0\|^3}$$

ve

$$\tau|_{t=0} = \frac{3}{2} \frac{n-2}{n} \frac{Hacim(b_0, b_1, b_2, b_3)}{[Alan(b_0, b_1, b_2)]^2}$$

şeklinde yazılmasıyla da geometrik bir yorum kazandırılmış olur, [14] (Sayfa 86-87).

Teorem 2.6 $b_0, \dots, b_n \in E^3$ kontrol noktaları olmak üzere, birim hızlı olmayan n .

dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki eğrilik ve burulması

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=1} &= \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2} \sin \psi \\ \tau|_{t=1} &= -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} \end{aligned} \quad (2.73)$$

şeklindedir. Burada, ψ , $\Delta^1 b_{n-1}$ ile $\Delta^1 b_{n-2}$ arasındaki açıdır, [15].

İspat Birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki eğriliği,

$$\kappa|_{t=1} = \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3} = \frac{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|}{\|n\Delta^1 b_{n-1}\|^3} = \frac{n^2(n-1)}{n^3} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3}$$

$$\kappa|_{t=1} = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \quad (2.73a)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1}\| \|\Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \sin \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2} \sin \psi$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 1$ bitiş noktasındaki burulması

$$\begin{aligned}
 \tau|_{t=1} &= \frac{\det(P'(t), P''(t), P'''(t))}{\|P'(t) \times P''(t)\|^2} \\
 &= \frac{\det(n\Delta^1 b_{n-1}, n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}), n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_{n-1} - 2\Delta^1 b_{n-2} + \Delta^1 b_{n-3}))}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|^2} \\
 &= \frac{\langle n\Delta^1 b_{n-1}, n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}) \times n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_{n-1} - 2\Delta^1 b_{n-2} + \Delta^1 b_{n-3}) \rangle}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|^2} \\
 &= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, -2(\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}) + (\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-3}) - (\Delta^1 b_{n-2} \times \Delta^1 b_{n-1}) - (\Delta^1 b_{n-2} \times \Delta^1 b_{n-3}) \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times (\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|^2} \\
 &= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, -(\Delta^1 b_{n-2} \times \Delta^1 b_{n-3}) \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2}
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\tau|_{t=1} = -\frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} \quad (2.73b)$$

şeklinde de ifade edilebilir. $\square$

Sonuç 2.2 (2.73a) ve (2.73b) eşitlikleri ile verilen

$$\kappa|_{t=1} = \frac{(n-1) \|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{n \|\Delta^1 b_{n-1}\|^3}$$

ve

$$\tau|_{t=1} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2}$$

ifadelerinin

$$\kappa|_{t=1} = 2 \frac{n-1}{n} \frac{\text{Alan}(b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|^3}$$

ve

$$\tau|_{t=1} = -\frac{3}{2} \frac{n-2}{n} \frac{\text{Hacim}(b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)}{[\text{Alan}(b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)]^2}$$

şeklinde yazılmasıyla da geometrik bir yorum kazandırılmış olur, [14].

Örnek 2.6 $b_0 = (2, 2, 1)$, $b_1 = (3, 0, 4)$, $b_2 = (6, -3, 2)$, $b_3 = (4, 2, 3) \in E^3$ kontrol noktaları ile verilen üçüncü dereceden Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktası ve $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarını bulunuz.

Çözüm Öncelikle, $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! i!}$ olmak üzere

$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,n}(t) t^i (1-t)^{n-i} b_i$ ile verilen Bézier eğrisinin denklemi açıkça ifade edilirse,

$$\begin{aligned} P(t) &= B_{0,3}(t) t^0 (1-t)^{3-0} b_0 + B_{1,3}(t) t^1 (1-t)^{3-1} b_1 + B_{2,3}(t) t^2 (1-t)^{3-2} b_2 + B_{3,3}(t) t^3 (1-t)^{3-3} b_3 \\ &= \binom{3}{0} (1-t)^3 b_0 + \binom{3}{1} t(1-t)^2 b_1 + \binom{3}{2} t^2(1-t) b_2 + \binom{3}{3} t^3 b_3 \\ &= (1-t)^3 (1, 2, 1) + 3t(1-t)^2 (3, 0, 4) + 3t^2(1-t) (6, -3, 2) + t^3 (4, 2, 3) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, üçüncü dereceden Bézier eğrisi denklemi

$$P(t) = ((1-t)^3 + 9t(1-t) + 18t^2(1-t) + 4t^3, 2(1-t)^3 - 9t^2(1-t) + 2t^3, (1-t)^3 + 12t(1-t) + 6t^2(1-t) + 3t^3)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de Frenet elemanları için ihtiyaç duyulacak olan aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta^1 b_0 &= b_1 - b_0 = (1, -2, 3), \quad \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle = 14, \quad \|\Delta^1 b_0\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle} = \sqrt{14} \\ \Delta^1 b_1 &= b_2 - b_1 = (3, -3, -2), \quad \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle = 22, \quad \|\Delta^1 b_1\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle} = \sqrt{22} \\ \Delta^1 b_2 &= b_3 - b_2 = (-2, 5, 1), \quad \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_2 \rangle = 30, \quad \|\Delta^1 b_2\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_2 \rangle} = \sqrt{30} \end{aligned}$$

$$\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (13, 11, 3), \quad \|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| = \sqrt{299}$$

$$\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (7, 1, 9), \quad \|\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2\| = \sqrt{131}$$

$$\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 + (-2) + 27 = 32$$

elde edilir. Ayrıca, $\Delta^1 b_0$ ile $\Delta^1 b_1$ arasındaki açı ϕ ve $\Delta^1 b_1$ ile $\Delta^1 b_2$ arasındaki açı ψ için,

$$\bullet \quad \|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| = \|\Delta^1 b_0\| \|\Delta^1 b_1\| \sin \phi \Rightarrow \sqrt{299} = \sqrt{14} \sqrt{22} \sin \phi \Rightarrow \sin \phi = \frac{\sqrt{299}}{\sqrt{308}}$$

bulunur. Böylece,

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{299}{308}} = \frac{3}{\sqrt{308}}, \quad \cot \phi = \frac{3}{\sqrt{299}}, \quad \csc \phi = \frac{\sqrt{308}}{\sqrt{299}}$$

bulunur.

$$\bullet \quad \|\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2\| = \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_2\| \sin \psi \Rightarrow \sqrt{131} = \sqrt{22} \sqrt{30} \sin \psi \Rightarrow \sin \psi = \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{660}}$$

bulunur. Böylece,

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{131}{660}} = \frac{\sqrt{529}}{\sqrt{660}}, \quad \cot \psi = \frac{\sqrt{529}}{\sqrt{131}}, \quad \csc \psi = \frac{\sqrt{660}}{\sqrt{131}}$$

bulunur. Buradan,

- $t = 0$ başlangıç noktası için Frenet elemanları ($n = 3$ ile),

$$T|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3)$$

$$N|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \phi - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \phi = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{299}}(3, -3, -2) - \frac{3}{\sqrt{14} \sqrt{299}}(1, -2, 3)$$

$$B|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{299}}(13, 11, 3)$$

$$\kappa|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^2} \sin \phi = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{22}}{14} \frac{\sqrt{299}}{\sqrt{308}} = \frac{\sqrt{299}}{21\sqrt{14}}$$

$$\tau|_{t=0} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{299} = \frac{32}{897}$$

şeklinde elde edilir.

- $t = 1$ bitiş noktası için Frenet elemanları ($n = 3$ ile),

$$T|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{\Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} (-2, 5, 1)$$

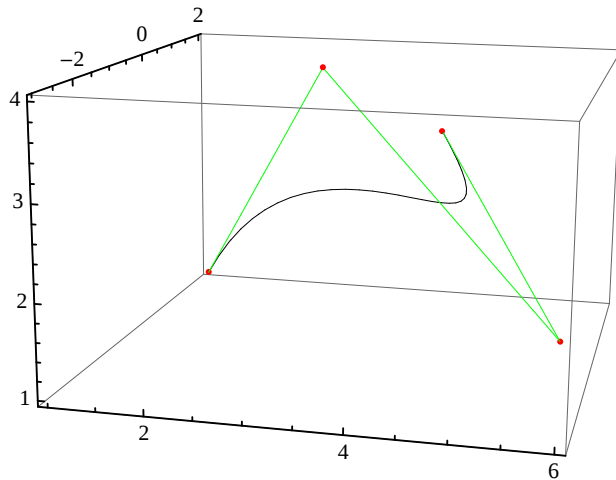
$$\begin{aligned} N|_{t=1} &= \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \psi - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \psi = \frac{\Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|} \cot \psi - \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \psi \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \frac{\sqrt{529}}{\sqrt{131}} (-2, 5, 1) - \frac{1}{\sqrt{22}} \frac{\sqrt{660}}{\sqrt{131}} (3, -3, -2) \end{aligned}$$

$$B|_{t=1} = -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} = -\frac{\Delta^1 b_2 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_2 \times \Delta^1 b_1\|} = \frac{\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{131}} (7, 1, 9)$$

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2} \sin \psi = \frac{2}{3} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_2\|^2} \sin \psi = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{22}}{30} \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{660}} = \frac{\sqrt{131}}{45\sqrt{30}}$$

$$\tau|_{t=1} = \frac{n-2}{n} \frac{-\det(\Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} = \frac{1}{3} \frac{-\det(\Delta^1 b_2, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0)}{\|\Delta^1 b_2 \times \Delta^1 b_1\|^2} = \frac{1}{3} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2\|^2} = \frac{32}{393}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 2.28 Örnek 2.6'daki üçüncü dereceden Bézier eğrisi

2.5 Rasyonel Bézier Eğrileri

Serbest form eğri ve koniklerin birleşmesine olanak sağladığı için rasyonel eğrilere ihtiyaç duyulur. Rasyonel kavramı, bilindiği üzere bu iki polinom fonksiyonun oranından elde edilmesi anlamında kullanılır. Bu tip eğriler, projektif dönüşümler altında invarianttır. Örneğin; bir rasyonel eğrinin perspektif projeksiyonu, kendi başına bir rasyonel eğridir. Fakat, rasyonel olmayan eğriler için bu sağlanmaz. Bu gösterimin BDT uygulamaları, homojen koordinat kavramını kullanır. Yani, n – boyutlu uzaydaki noktaların izdüşümlerinin $(n-1)$ – boyutlu uzayda temsil edilen noktaların olmasıdır.

Üç boyutlu Öklid uzayında tanımlanan bir nokta, 4-boyutlu homojen uzayda $Q^w = (\omega x, \omega y, \omega z, \omega)$ noktasına karşılık gelen bir gösterime sahiptir. Burada $\omega \geq 0$ olmak üzere, çoğunlukla ağırlık olarak bahsedilen homojen koordinattır.

İndirgenemez koniklerin üç tipi; yani, hiperbol, parabol ve elips olduğu bilinir. Paraboller, polinom fonksiyonlarla parametrelendirilir. Oysa, hiperbol ve elipsler rasyonel fonksiyonlarla parametrelendirilir. Böylece, polinom parametrelendirilmesine sahip olan kuadratik Bézier eğrileri, hiperbol ve elipsleri kapsamaz. Bu tip eğrileri temsil etmek için, rasyonel Bézier eğrileri tanıtmak gerekir, [13].

Tanım 2.1 n . dereceden $b_0, \dots, b_n$ kontrol noktalarına sahip ve ω_i skaler ağırlıklarına karşılık gelen rasyonel Bézier eğrisi,

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.74)$$

veya

$$P(t) = \sum_{i=0}^n b_i \frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)} \quad (2.75)$$

ile tanımlanır.

$\omega_i = 0$ ise, $\omega_i b_i$ ile b_i yer değiştirir. Bu, tüm ağırlıkların sıfır olmadığını varsayar. $b_i \in E^2$ ($i = 0, \dots, n$) olduğunda eğri düzlemsel ve $b_i \in E^3$ olduğunda eğri uzaysaldır.

İntegral Bézier eğrisi kavramının rasyonel olmayan Bézier eğrisini tanımlamak için kullanıldığına dikkat ederek aşağıdaki tanımları verebiliriz, [13].

Tanım 2.2 $b_i = (x_i, y_i, z_i)$ olsun ve $\hat{b}_i$ homojen kontrol noktaları

$$\hat{b}_i = \begin{cases} (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i), & \omega_i \neq 0 \\ (x_i, y_i, z_i), & \omega_i = 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

ile tanımlansın. Homojen koordinatlarda rasyonel Bézier eğrisi

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \hat{b}_i B_{i,n}(t) \quad (2.77)$$

ile verilir. Bu son denklem, integral Bézier eğrisinin homojen kontrol noktalarına sahip formunu verir. $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ olduğundan, integral Bézier eğrileri, $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_n$ olduğunda elde edilir, [13].

Tanım 2.3 Bir rasyonel Bézier eğri,

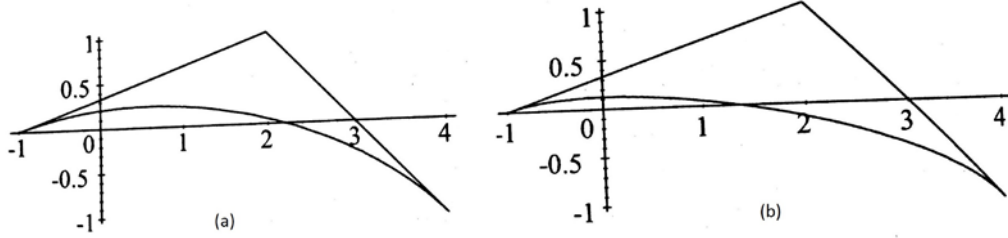
$$P(t) = \sum_{i=0}^n b_i R_{i,n}(t) \quad (2.78)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$R_{i,n}(t) = \begin{cases} \frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)}, & \omega_i \neq 0 \\ \frac{B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n b_j B_{j,n}(t)}, & \omega_i = 0 \end{cases} \quad (2.79)$$

şeklinde verilir, [13].

Örnek 2.7 $b_0 = (-1, 0)$, $b_1 = (2, 1)$ ve $b_2 = (4, -1) \in E^2$ kontrol noktalarına ve bu kontrol noktalarına karşılık gelen $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$ ağırlıklarına sahip rasyonel kuadratik Bézier eğrisi Şekil 2.29 (a)'da ve $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 2$ ağırlıklarına sahip rasyonel kuadratik Bézier eğrisi Şekil 2.29 (b)'de gösterilir, [13].

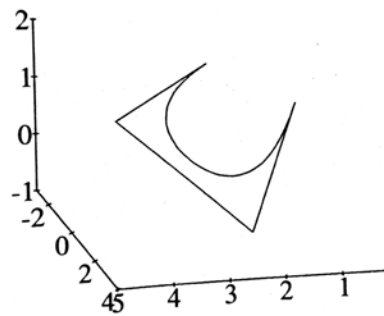


Şekil 2.29 Farklı ağırlıklara sahip düzlemsel rasyonel Bézier eğri

Örnek 2.8 $b_0 = (1, 0, 1)$, $b_1 = (2, 1, -1)$, $b_2 = (5, 4, 2)$, $b_3 = (2, -3, 1) \in E^3$ kontrol noktalarına ve $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 2$ ağırlıklarına sahip uzaysal rasyonel Bézier eğrisi, Şekil 2.30'da gösterilmektedir, [13].

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 \omega_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^3 \omega_i B_{i,n}(t)} = \frac{\omega_0 b_0 B_{0,3}(t) + \omega_1 b_1 B_{1,3}(t) + \omega_2 b_2 B_{2,3}(t) + \omega_3 b_3 B_{3,3}(t)}{\omega_0 B_{0,3}(t) + \omega_1 B_{1,3}(t) + \omega_2 B_{2,3}(t) + \omega_3 B_{3,3}(t)}$$

$$= \frac{1 \cdot (1, 0, 1) \cdot (1-t)^3 + 2 \cdot (2, 1, -1) \cdot 3(1-t)^2 t + 2 \cdot (5, 4, 2) \cdot 3(1-t)t^2 + 1 \cdot (2, -3, 1)t^3}{1 \cdot (1-t)^3 + 2 \cdot 3(1-t)^2 t + 1 \cdot t^3}$$



Şekil 2.30 Uzaysal rasyonel Bézier eğrisi

2.5.1 Rasyonel Bézier Eğrilerinin Özellikleri

- **Konveks tekne özelliği:** Her $i = 0, \dots, n$ için $\omega_i > 0$ olduğunu varsayalım. Öyleyse, eğri üzerindeki her nokta, kontrol çokgeni ya da konveks tekne içinde uzanır.

- **Afin dönüşümler altında invaryantlık:** T , bir afin dönüşüm ise

$$T \left(\frac{\sum_{i=0}^n \omega_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i T(b_i) B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)}$$

yazılır.

- **Uç nokta interpolasyonu:** $P(0) = b_0$ ve $P(1) = b_n$ vardır. Yani, eğri başlangıç ve bitiş noktasından geçer.
- **Uç nokta teğeti:** $P'(0) = n \frac{\omega_1}{\omega_0} (b_1 - b_0)$ ve $P'(1) = n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (b_n - b_{n-1})$ yazılır.
- **Projektif dönüşüm altında invaryantlık:** $T \left(\sum_{i=0}^n \hat{b}_i B_{i,n}(t) \right) = \sum_{i=0}^n T(\hat{b}_i) B_{i,n}(t)$, [13].

2.6 Diğer Tasarım Eğrileri

2.6.1 B-Spline Eğrileri

2.6.1.1 Spline Kavramı

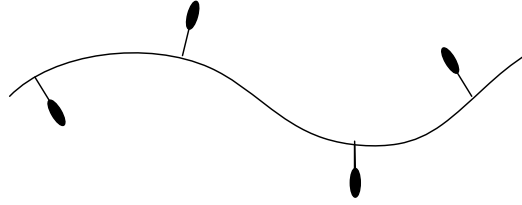
1960'ların sonunda Amerika Otomobil Sanayi'nde popülerleşmiştir. 1972 yılında Richard F. Riesenfeld ve William J. Gordon (1972) tarafından kullanılmıştır. Fiziksel olarak, inşaat ve gemi yapımında kullanılan ince tahta ya da metal şeritlerdir.

Kullanım amacı ise bir eğriyi, birbirine bağlanmış parçalı basit polinom fonksiyonların kümesi olarak tanımlamaktır.



Şekil 2.31 Spline örnekleri

Şerit boyunca dağıtılmış birçok küçük ağırlık, çizim masasında sabit konumda duran bir eğri oluşmasını sağlarlar. Spline eğrileri de temelde bu yolla oluşturulur.



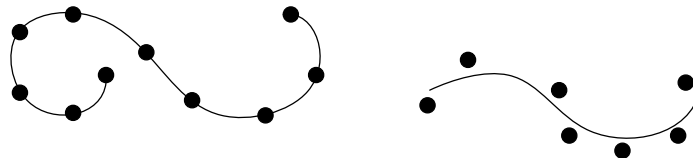
Şekil 2.32 Ağırlıklarla Spline gösterimi

Spline'lar matematiksel olarak C^2 sürekliliğine sahip kübik polinom fonksiyonu ile tanımlanır.

Bilgisayar grafiklerinde Spline eğriler, parçaların sınırlarında süreklilik şartlarını sağlayan polinom kısımları tarafından biçimlendirilen bileşik eğrilerdir.

Spline eğrileri, kontrol noktası adı verilen koordinat konum kümeleri verilerek tanımlanıp değiştirilebilirler. Yeni kontrol noktaları eklenebilir veya varolan kontrol noktaları silinebilir.

Kontrol noktaları, eğrinin genel şeklini belirler ve sürekli parametrik polinom fonksiyon parçalarında kullanılır. Bunun iki yolu vardır: Birincisi, eğrinin tüm kontrol noktalarından geçtiği aradeğerleme Spline'larıdır. İkincisi, eğrinin tüm kontrol noktalarından geçme şartının olmadığı yaklaşım Spline'larıdır, [12].



Şekil 2.33 Aradeğerleme ve yaklaşım Spline'ları

2.6.1.2 Bases-Spline (B-Spline) Eğri

Bézier karma fonksiyonları, kontrol noktaları sayısına bağlı olan Bernstein polinomlarını kullanır. Bu eğriler, global kontrole sahiptirler. Yani, bir tek kontrol noktasının hareketi tüm eğriyi etkiler. Yüksek dereceli polinomlardan kaçınmak ve global etkiyi azaltmak

Özetlersek; Bézier temsilinin iki dezavantajından dolayı, B-Spline temsili verilmiş ve karşılaşılan problemler çözülmüştür:

- Kontrol noktalarının sayısının eğrinin derecesiyle doğrudan ilişkili olması.

Böylece, kontrol noktasının eklenmesiyle eğrinin şeklinde oluşan karışıklığı azaltmak için eğrinin derecesini azaltma ya da bileşik eğrinin ardışık parçaları arasındaki süreklilik şartını sağlama ihtiyacı doğar.

- Bir kontrol noktasının değişiminin tüm eğriyi etkilemesi. Bu, özel bölgelerin tasarımının yapılmasını zorlaştırır.

B-Spline eğri kullanımının avantajlarını da iki maddeyle özetleyebiliriz:

- Kullanıcı, kontrol noktalarının sayısından bağımsız olan **derece**'yi tanır.
- Özel dereceli tek parçalı eğri üretir. Böylece, bağlantı noktalarından ayrılmış eğrileri biraraya getirmeye gerek kalmaz.
- Süreklilik serbest hale getir.

B-Spline eğriler, Bézier eğrilerinde olduğu gibi kontrol noktalarının lineer birleşimi olarak tanımlanır. Karma fonksiyonlar, B-Spline baz fonksiyonları ile tanımlanır, [12].

Tanım 2.4 $b_0, \dots, b_n$ 'ler kontrol noktası ve $N_{i,k}(t)$, $(k-1)$. dereceden karma fonksiyonlar olmak üzere B-Spline eğrisi,

$$P(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,k}(t), \quad t_i \leq t \leq t_{i+k} \quad (2.80)$$

ile tanımlanır, [1].

2.6.1.3 B-Spline Karma Fonksiyonlar

1972 yılında Cox-de Boor rekürsif algoritması yardımıyla üçüncü derece ile sınırlı olmayan Spline eğriler için karma fonksiyonlar tanımlanır.

$N_{i,k}(t)$, karma fonksiyonu $[t_i, \dots, t_{i+k}]$ düğüm vektörü ile tanımlanır.

$N_{i,k}(t)$, k dereceli B-Spline için i . karma fonksiyon olmak üzere özyineleme

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.81)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

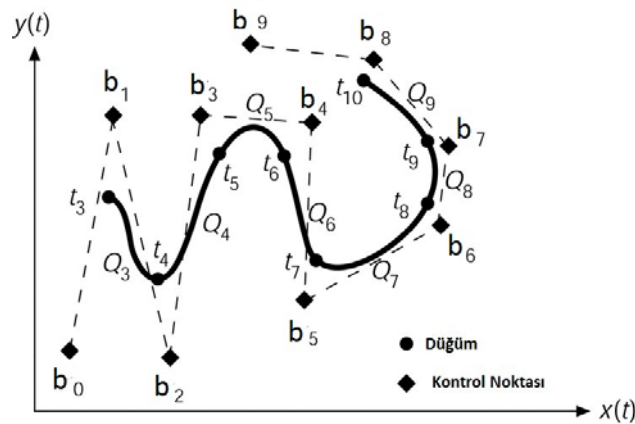
ile tanımlanır, [12].

$N_{i,k}(t)$, karma fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- Pozitiflik: $N_{i,k}(t) > 0$; $t_i < t < t_{i+k}$
- Normalleştirme: $\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = 1$; $t \in [t_0, t_{n+k+1}]$
- Süreklilik: $N_{i,k}(t)$, her düğüm noktasında C^{k-2} sürekliliğine sahiptir.

$N_{i,k}(t)$ karma fonksiyonlarının tanımlandığı düğüm vektörlerinin seçimi ise aşağıdaki şekildedir:

- $0 \leq t \leq 1$ parametre aralığı yerine $t_{\min} \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_{\max}$ aralığı kullanılır.
- Düğüm noktaları, eğri parçaları arasındaki bağlantı noktalarıdır. Her biri düğüm değerine sahiptir. $n+1$ nokta için $n-1$ düğüm vardır, [12].



Şekil 2.35 B-Spline eğri için düğüm noktaları

k mertebeli veya $(k-1)$ dereceli B-Spline eğriyi $n+1$ kontrol noktası ile tanımlamak için gerekli düğüm sayısı hesabı,

$$\text{Düğüm sayısı} = \underbrace{(n+1)}_{\text{kontrol nokta sayısı}} + \underbrace{(k-1)}_{\text{derece}} = n+k \quad (2.82)$$

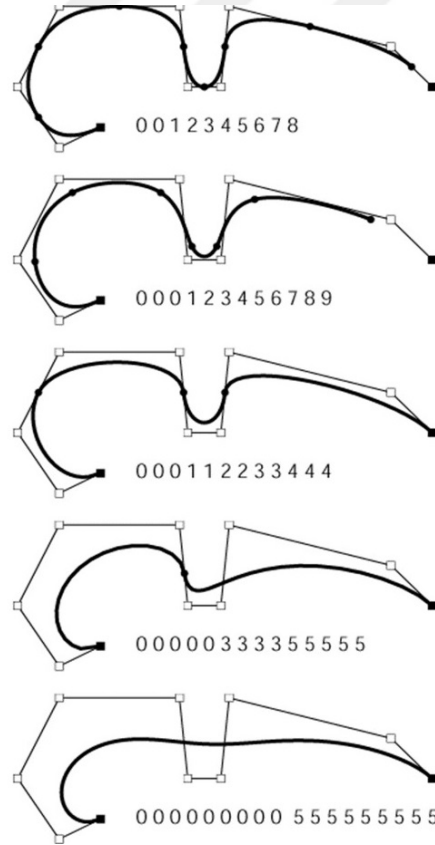
şeklindedir, [1].

- Düğüm vektörlerinin sınıflandırılması, düğüm vektörlerinin dağılımına göre
 - Eşit/Periyodik dağılımlı
 - Periyodik olmayan dağılımlı
 - Eşit olmayan dağılımlı

şeklinde oluşur, [1].

Düğüm vektörleri, B-Spline eğrisinin şeklini etkilediğinden, eğri bu sınıflandırmaya göre isimlendirilir. Bu konu ile ilgili daha geniş bilgi [4,12] çalışmalarında yer almaktadır.

Düğüm seçimiyle birlikte eğri üzerinde oluşan etkiler, Şekil 2.36’da verilmiştir, [12].



Şekil 2.36 Parametrik olarak dağılım gösteren düğümlerin eğri üzerindeki etkisi

2.6.2 NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) Eğriler

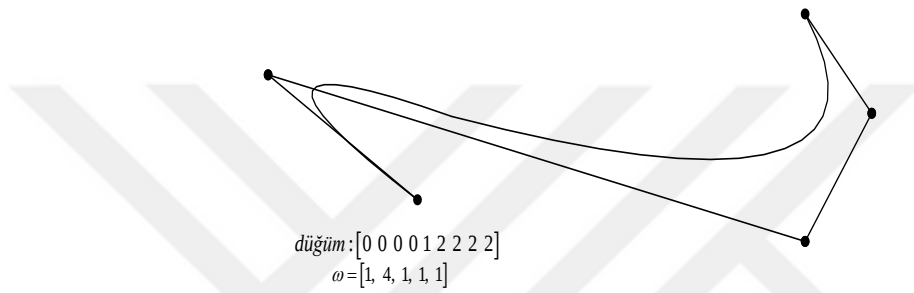
Tanım 2.5 Bir rasyonel B-Spline eğrisi $b_0, \dots, b_n$ kontrol noktaları, $N_{i,k}(t)$, k dereceli i . karma fonksiyon ve $\omega_0, \dots, \omega_n$ ağırlıklar olmak üzere,

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i \omega_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+k} \quad (2.83)$$

ile tanımlanır, [1].

Rasyonel eğriler, BDT alanında popülerlik kazanmış ve bugün çoğu ticari sistem, Bézier ve özellikle tüm B-Spline tiplerini (eşit dağılımlı/periodyk, periodyk olmayan ve eşit dağılımlı olmayan) içeren gösterimleri kullanmaktadır, [1].

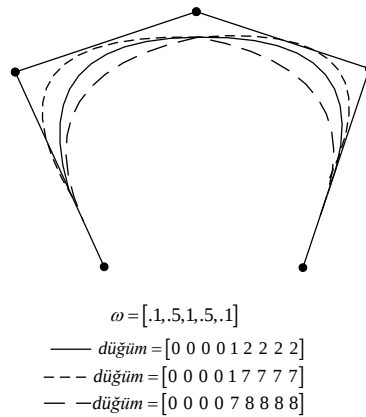
Şekil 2.37, periodyk olmayan kübik rasyonel B-Spline örneği göstermektedir.



Şekil 2.37 Periodyk olmayan kübik rasyonel B-Spline

Bununla birlikte, en yaygın şekilde kullanılanı NURBS olarak bilinen eşit dağılımlı olmayan (non-uniform) rasyonel B-Spline'dır. Popüler olmasının sebebi, bu gösterimin B-Spline ve Bézier eğrilerini kapsamasıdır. Ayrıca, NURBS eğriler konikleri kapsayan ve kanonik formları kullanan şekillerin geniş bir aralığını temsil etme kapasitesine sahiptir.

Tanımda verilen rasyonel B-Spline denkleminde düğüm vektörünü eşit dağılımlı olmayan (non-uniform) olarak seçme sınırlaması ile NURBS eğrilerin denklemi ifade edilmiş olur.



Şekil 2.38 Kübik NURBS örnekleri

Konik kesitlerinin temsilinde, rasyonel B-Spline eğrilerin serbest form eğrilerle konikleri birleştiren tek bir gösterimi sağladığını ifade etmiştik. Bununla birlikte, hesaplamada verimliliği sağlaması için bu gösterime uygunluğu açısından rasyonel kuadratik B-Spline'lar ($n = 2, k = 3$) seçilir. Çünkü, en düşük mertebeli olma durumunu sağlarlar, [1].

Üç kontrol noktası ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $[t] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ düğüm vektörü ile kuadratik rasyonel B-Spline,

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 b_i \omega_i N_{i,3}(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i N_{i,3}(t)} = \frac{b_0 \omega_0 N_{0,3}(t) + b_1 \omega_1 N_{1,3}(t) + b_2 \omega_2 N_{2,3}(t)}{\omega_0 N_{0,3}(t) + \omega_1 N_{1,3}(t) + \omega_2 N_{2,3}(t)} \quad (2.84)$$

şeklinde ifade edilir, [1].

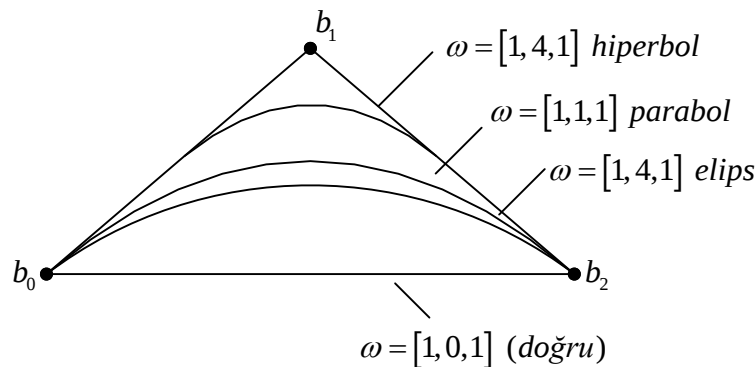
Bu ifade, Şekil 2.39'da gösterildiği gibi $[b_0 b_1]$ ve $[b_1 b_2]$ kirişlerine teğet ve b_0 ile b_2 noktasından geçen her konikle, bir parametrelili konik ailesini; elipsler, parabol ve hiperboller temsil eder.

$\omega_0 = \omega_2 = 1$ ise (2.84) denklemi

$$P(t) = \frac{b_0 N_{0,3}(t) + b_1 \omega_1 N_{1,3}(t) + b_2 N_{2,3}(t)}{N_{0,3}(t) + \omega_1 N_{1,3}(t) + N_{2,3}(t)} \quad (2.85)$$

şekline indirgenir.

ω_1 ağırlığının değeri, ne türden bir konik elde edileceğini belirler (Şekil 2.39), [1].

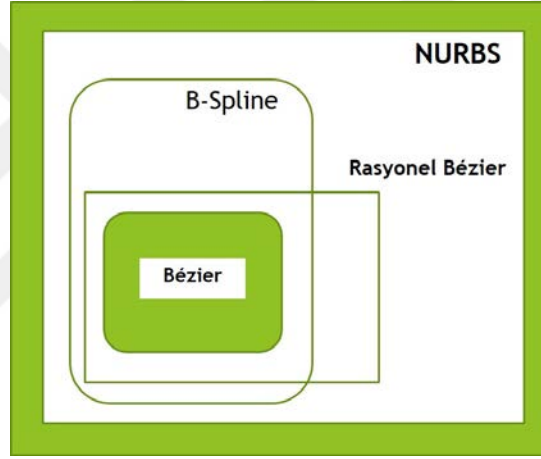


Şekil 2.39 Koniklerin kuadratik NURBS temsili

2.7 Tasarım Eğrileri Arasındaki İlişki

Bézier eğrileri, B-Spline eğrilerinin özel halidir. Bu iki eğri, parametrik polinom eğrileridir ve parametrik polinom formlar, basit eğrileri temsil edemezler. Sonuç olarak, Bézier eğrileri ve B-Spline eğrileri, sadece parametrik polinom eğrileri temsil ederler. Parametrik polinom formlar, rasyonel hale getirilerek homojen koordinatların da tanıtılmasıyla, Bézier ve B-Spline eğrileri, Rasyonel Bézier eğrilere ve eşit dağılımlı olmayan (**Non-Uniform**) Rasyonel **B-Spline** eğrilere ya da kısaca NURBS eğrilere genelleştirilebilir.

Rasyonel Bézier eğrileri, Bézier eğrilerinden daha güçlüdür. Benzer şekilde, NURBS eğriler, B-Spline eğrilerinden daha güçlüdür, [12].



Şekil 2.40 Tasarım eğrileri şeması

E^2 ÖKLİD DÜZLEMİNDE BEZIER EĞRİLERİ

Bu bölümde, daha önce de tanıtılan $P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i$ denkleminde sahip Bézier eğrisi düzlemsel olarak yani kontrol noktaları, $b_i \in E^2$ ile ele alınacaktır. Öncelikle $\forall t \in [0,1]$ için sonrasında $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{T, N\}$ ortonormal Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği verilecektir.

Ortonormal çatı olmasından,

$$\langle T, T \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = 1, \quad \langle B, B \rangle = 1$$

$$\langle T, N \rangle = 0, \quad \langle T, B \rangle = 0, \quad \langle N, B \rangle = 0$$

şartları sağlanır.

$P(t)$ Bézier eğrisinin hız vektörü,

$$v = \|P'(t)\|$$

ile yay parametresinin uzunluğu,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|P'(t)\| dt$$

ile verilir.

Tanım 3.1 $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü verilsin.

$$(p_1, p_2) \rightarrow (-p_2, p_1)$$

Bu dönüşüm geometrik olarak, orijin etrafında saat yönünün tersine $\pi/2$ açılı dönmedir. J dönüşümüne $\mathbb{R}^2$ 'nin kompleks yapısı denir. $J^2 = -1$ ($1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ birim dönüşüm olarak düşünülmüştür.) J dönüşümü, $p, q \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{cases} \langle Jp, Jq \rangle = \langle p, q \rangle \\ \langle Jp, p \rangle = 0 \\ \langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle \end{cases} \quad (3.1)$$

özelliklerine sahiptir, [16].

Burada, ilk özellik kullanılarak, $\|Jp\| = \sqrt{\langle Jp, Jp \rangle} = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \|p\|$ olduğu verilebilir.

Ayrıca, J dönüşümünün lineer olduğu, $\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2$ ve $q = (q_1, q_2)$ ve $r = (r_1, r_2)$ olmak üzere, $p = aq + br$ için

$$p = aq + br = (aq_1 + br_1, aq_2 + br_2)$$

$$Jp = J(aq + br) = J(aq_1 + br_1, aq_2 + br_2)$$

$$= (-aq_2 - br_2, aq_1 + br_1)$$

$$= a(-q_2, q_1) + b(-r_2, r_1)$$

$$= aJq + bJr$$

şeklinde gösterilir. Buradan,

$$\|J(p + q)\| = \|Jp + Jq\| = \|p + q\|$$

yazılır, [16].

Tanım 3.2 p ve q , $\mathbb{R}^2$ 'de sıfırdan farklı vektörler olsun.

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \cdot \|q\|} \\ \sin \theta = \frac{\langle p, Jq \rangle}{\|p\| \cdot \|q\|} \end{cases} \quad (3.2)$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ olacak şekilde bir tek θ sayısı vardır. Buradan θ , q 'dan p 'ye yönlendirilmiş açıdır, [16].

Tanım 3.3 $\alpha : I \rightarrow E^2$ birim hızlı olmayan düzlemsel bir eğri olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için α eğrisinin $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği,

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (3.3)$$

$$N(t) = \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (3.4)$$

$$\kappa(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad (3.5)$$

ile tanımlanır, [16].

3.1 E^2 Öklid Düzleminde Kuadratik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları

Tanım 3.4 b_0, b_1, b_2 , E^2 Öklid düzleminde doğrudan olmayan üç nokta olsun. b_0, b_1, b_2 kontrol noktalarına ve

$$\begin{aligned} P_2(t) &= \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t)b_i = B_{0,2}(t)b_0 + B_{1,2}(t)b_1 + B_{2,2}(t)b_2 \\ &= (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)t b_1 + t^2 b_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

parametrik denkleminde sahip eğriye E^2 Öklid düzlemindeki birim hızlı olmayan *kuadratik Bézier eğrisi* denir.

Teorem 3.1 Öklid düzleminde (3.6) denkleminde sahip birim hızlı olmayan kuadratik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ_{p_2} eğriliği

$$T(t) = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \quad (3.7)$$

$$N(t) = \frac{(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \quad (3.8)$$

$$\kappa_{p_2}(t) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} \quad (3.9)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Öncelikle (3.6) ile verilen $P_2(t)$ eğrisinin türevleri, ileri fark operatörü cinsinden

$$\begin{aligned} P_2'(t) &= 2(1-t)(-1)b_0 + (-2tb_1 + 2(1-t)b_1) + 2tb_2 \\ &= 2(1-t)(b_1 - b_0) + 2t(b_2 - b_1) \\ &= 2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1 \end{aligned}$$

$$P_2''(t) = -2\Delta^1 b_0 + 2\Delta^1 b_1 = 2(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) = 2\Delta^2 b_0$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, $P_2(t)$ eğrisinin $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur:

Teğet vektör alanı,

$$T(t) = \frac{P_2'(t)}{\|P_2'(t)\|} = \frac{2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1}{\|2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\|} = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, bu sonuç

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\left(\langle (1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1, (1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1 \rangle\right)^{1/2}} \\ &= \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\left((1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 2(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Asal normal vektör alanı,

$$N(t) = \frac{JP2'(t)}{\|P2'(t)\|} = \frac{J(2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1)}{\|2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\|}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, bu sonuç

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1}{\left(\langle (1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1, (1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1 \rangle\right)^{1/2}} \\ &= \frac{(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1}{\left((1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 2(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

şeklinde de elde edilebilir.

Eğrilik ise

$$\begin{aligned} \kappa_{P_2}(t) &= \frac{\langle P2''(t), JP2'(t) \rangle}{\left(\langle P2'(t), P2'(t) \rangle\right)^{3/2}} = \frac{\langle 2\Delta^2 b_0, J(2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1) \rangle}{\left(\langle 2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1, 2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1 \rangle\right)^{3/2}} \\ &= \frac{4(1-t)\langle \Delta^2 b_0, J\Delta^1 b_0 \rangle + 4t\langle \Delta^2 b_0, J\Delta^1 b_1 \rangle}{\left(4(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 8(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + 4t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

ya da $\Delta^2 b_0 = \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0$, $\forall p, q \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ ve $\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \kappa_{P_2}(t) &= \frac{4(1-t)\langle \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_0 \rangle + 4t\langle \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_1 \rangle}{\left(4(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 8(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + 4t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{3/2}} \\ &= \frac{4(1-t)\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle - 4(1-t)\langle \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_0 \rangle + 4t\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_1 \rangle - 4t\langle \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_1 \rangle}{\left(4(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 8(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + 4t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}\kappa_{P_2}(t) &= \frac{4(1-t)\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle - 4t\langle \Delta^1 b_0, J \Delta^1 b_1 \rangle}{\left(4(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 8(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + 4t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{3/2}} \\ &= \frac{4\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle - 4t\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle - 4t(-\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle)}{\left(4(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 8(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + 4t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$\kappa_{P_2}(t) = \frac{4\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\left(4(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 8(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + 4t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{3/2}}$$

ya da

$$\kappa_{P_2}(t) = \frac{4\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\left\|2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\right\|^3} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\left\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\right\|^3}$$

şeklinde bulunur. □

Özel Durum 3.1 Öklid düzleminde (3.6) denkleminde sahip birim hızlı olmayan kuadratik Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktası için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ_{P_2} eğriliği

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.10)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.11)$$

$$\kappa_{P_2}(t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \quad (3.12)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $t=0$ başlangıç noktasındaki Serret-Frenet çatısı ve eğrilik için Teorem 3.1’de verilen eşitlikler için $t=0$ değeri yazılarak, teğet vektör

$$T(t)|_{t=0} = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \Big|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|},$$

asal normal vektör

$$N(t)|_{t=0} = \frac{(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \Big|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

ve eğrilik

$$\kappa_{P_2}(t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Ayrıca, (3.2) eşitlikleri kullanılarak, α , $\Delta^1 b_0$ ve $\Delta^1 b_1$ arasındaki açı olmak üzere, eğrilik

$$\kappa_{P_2}(t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3} = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \sin \alpha}{\|\Delta^1 b_0\|^3} = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^2} \sin \alpha \quad (3.12a)$$

şeklinde de yazılabilir.

Özel Durum 3.2 Öklid düzleminde (3.6) denkleminde sahip birim hızlı olmayan kuadratik

Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktası için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği

$$T(t)|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \quad (3.13)$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{J\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \quad (3.14)$$

$$\kappa_{P_2}(t)|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_1\|^3} \quad (3.15)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $t=1$ bitiş noktasındaki Serret-Frenet çatısı ve eğrilik için Teorem 3.1’de verilen eşitliklerinde $t=1$ değeri yazılarak, teğet vektör

$$T(t)|_{t=1} = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \Big|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|}$$

asal normal vektör

$$N(t)|_{t=1} = \frac{(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \Big|_{t=1} = \frac{J\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|}$$

ve eğrilik

$$\kappa_{p_2}(t)|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_1\|^3}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Ayrıca, (3.2) eşitlikleri kullanılarak, α , $\Delta^1 b_0$ ve $\Delta^1 b_1$ arasındaki açı olmak üzere, eğrilik

$$\kappa_{p_2}(t)|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_1\|^3} = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \sin \alpha}{\|\Delta^1 b_1\|^3} = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_1\|^2} \sin \alpha \quad (3.15a)$$

şeklinde de yazılabilir.

Örnek 3.1 $b_0 = (-1, 4)$, $b_1 = (2, 0)$ ve $b_2 = (4, 3) \in E^2$ kontrol noktaları ile tanımlanan kuadratik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0, 1]$, $t=0$ başlangıç ve $t=1$ bitiş noktası için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ile κ_{p_2} eğriliğini bulunuz.

Çözüm Öncelikle, $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! i!}$ olmak üzere

$P(t) = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) t^i (1-t)^{2-i} b_i$ ile verilen Bézier eğrisi denklemi açıkça ifade edilirse,

$$P(t) = B_{0,2}(t)b_0 + B_{1,2}(t)b_1 + B_{2,2}(t)b_2$$

$$= \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} b_0 + \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} b_1 + \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} b_2$$

$$= (1-t)^2 (-1, 4) + 2t(1-t)(2, 0) + t^2 (4, 3)$$

yazılır ve böylece,

$$P(t) = (-(1-t)^2 + 4t(1-t) + 4t^2, 4(1-t)^2 + 3t^2)$$

elde edilir. Şimdi de ihtiyaç duyulacak olan aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$\Delta^1 b_0 = b_1 - b_0 = (3, -4), \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle = 25, \|\Delta^1 b_0\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle} = 5$$

$$\Delta^1 b_1 = b_2 - b_1 = (2, 3), \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle = 13, \|\Delta^1 b_1\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle} = \sqrt{13}$$

$$J\Delta^1 b_0 = (4, 3) \text{ ve } J\Delta^1 b_1 = (-3, 2)$$

$$\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle = \langle (2, 3), (4, 3) \rangle = 17$$

$$\langle \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_1 \rangle = \langle (3, -4), (-3, 2) \rangle = -17$$

ve

$$\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle = \|\Delta^1 b_0\| \|\Delta^1 b_1\| \sin \alpha \Rightarrow 17 = 5 \cdot \sqrt{13} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{17}{5\sqrt{13}}$$

$$\langle \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_1 \rangle = \|\Delta^1 b_0\| \|\Delta^1 b_1\| \sin \beta \Rightarrow -17 = 5 \cdot \sqrt{13} \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = -\frac{17}{5\sqrt{13}}$$

elde edilir.

- $\forall t \in [0, 1]$ için Frenet çatısı ve eğrilik

$$T(t) = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} = \frac{(1-t)(3, -4) + t(2, 3)}{\|(1-t)(3, -4) + t(2, 3)\|} = \frac{(3-t, -4+7t)}{\|(3-t, -4+7t)\|}$$

$$N(t) = \frac{(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1}{\|(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1\|} = \frac{(1-t)(4, 3) + t(-3, 2)}{\|(1-t)(4, 3) + t(-3, 2)\|} = \frac{(4-7t, 3-t)}{\|(4-7t, 3-t)\|}$$

$$\kappa_{P_2}(t) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} = \frac{17}{2\|(3-t, -4+7t)\|}$$

- $t = 0$ için Frenet çatısı ve eğrilik

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \frac{(3, -4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \frac{(4, 3)}{5} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\kappa_{P_2}(t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{5^3} = \frac{17}{250}$$

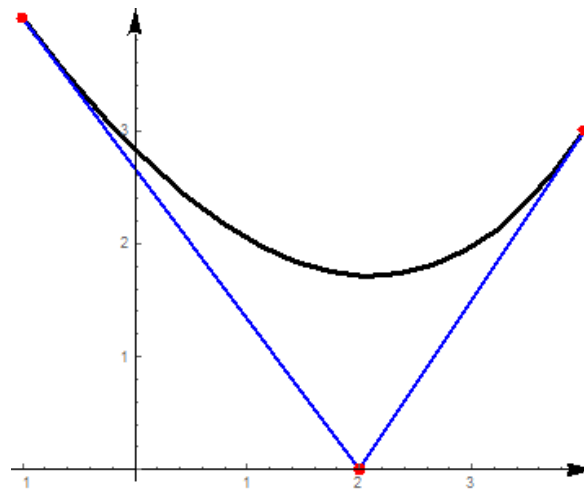
- $t = 1$ için Frenet çatısı ve eğrilik

$$T(t)|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{J\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\kappa_{P_2}(t)|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_1\|^3} = \frac{17}{2(\sqrt{13})^3}$$

şeklindedir. Verilen kuadratik Bézier eğrisinin grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 3.1 Kuadratik Bézier eğrisi

3.2 E^2 Öklid Düzleminde Kübik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları

Tanım 3.5 b_0, b_1, b_2 ve b_3 , E^2 Öklid düzleminde doğrudan olmayan dört nokta olsun.

b_0, b_1, b_2, b_3 kontrol noktalarına ve

$$\begin{aligned} P3(t) &= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t)b_i = B_{0,3}(t)b_0 + B_{1,3}(t)b_1 + B_{2,3}(t)b_2 + B_{3,3}(t)b_3 \\ &= (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

parametrik denkleminde sahip eğriye E^2 Öklid düzlemindeki birim hızlı olmayan *kübik Bézier eğrisi* denir.

Teorem 3.2 Öklid düzleminde (3.16) denkleminde sahip birim hızlı olmayan kübik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ_{p_3} eğriliği

$$T(t) = \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} \quad (3.17)$$

$$N(t) = \frac{(1-t)^2 J \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t J \Delta^1 b_1 + t^2 J \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} \quad (3.18)$$

$$\kappa_{p_3}(t) = \frac{2}{3} \frac{(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3} \quad (3.19)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Öncelikle $P3(t)$ eğrisinin türevleri, ileri fark operatörü cinsinden

$$\begin{aligned} P3'(t) &= 3(1-t)^2 (-1)b_0 + 6(1-t)(-1)t b_1 + 3(1-t)^2 b_1 - 3t^2 b_2 + 6(1-t)t b_2 + 3t^2 b_3 \\ &= 3(1-t)^2 (b_1 - b_0) + 6(1-t)t(b_2 - b_1) + 3t^2 (b_3 - b_2) \\ &= 3(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 6(1-t)t \Delta^1 b_1 + 3t^2 \Delta^1 b_2 \end{aligned}$$

$$P3'(t) = (3 - 6t + 3t^2) \Delta^1 b_0 + (6t - 6t^2) \Delta^1 b_1 + 3t^2 \Delta^1 b_2 \quad (3.20)$$

ya da

$$P3'(t) = 3\Delta^1 b_0 + 6t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 3t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2) \quad (3.21)$$

ve ikinci türevi,

$$P3''(t) = 6(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 6t(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, $P3(t)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısı ve eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur:

Teğet vektör alanı,

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{P3'(t)}{\|P3'(t)\|} = \frac{(3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2}{\|(3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2\|} \\ &= \frac{(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2\|} \end{aligned}$$

ya da

$$T(t) = \frac{(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2}{\left(\langle (1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2, (1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{1/2}}$$

şeklinde bulunur.

Asal normal vektör alanı

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{JP3'(t)}{\|P3'(t)\|} = \frac{J\left((3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2\right)}{\|3\Delta^1 b_0 + 6t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 3t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2)\|} \\ &= \frac{(3-6t+3t^2)J\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)J\Delta^1 b_1 + 3t^2J\Delta^1 b_2}{\|(3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2\|} \\ &= \frac{(1-t)^2J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2J\Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2J\Delta^1 b_2\|} \end{aligned}$$

ya da

$$N(t) = \frac{(1-t)^2J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2J\Delta^1 b_2}{\left(\langle (1-t)^2J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2J\Delta^1 b_2, (1-t)^2J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2J\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{1/2}}$$

ya da (3.21) ile

$$N(t) = \frac{3J\Delta^1 b_0 + 6tJ(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 3t^2 J(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2)}{\left(\langle 3\Delta^1 b_0 + 6t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 3t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2), 3\Delta^1 b_0 + 6t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 3t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2) \rangle\right)^{1/2}}$$

$$N(t) = \frac{J\Delta^1 b_0 + 2tJ(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + t^2 J(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2)}{\left(\langle \Delta^1 b_0 + 2t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2), \Delta^1 b_0 + 2t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2) \rangle\right)^{1/2}}$$

şeklinde de yazılır.

Eğrilik

$$\begin{aligned} \kappa_{P3}(t) &= \frac{\langle P3''(t), JP3'(t) \rangle}{\left(\langle P3'(t), P3'(t) \rangle\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\langle 6(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 6t(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2), J(3\Delta^1 b_0 + 6t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 3t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2)) \rangle}{\left(\langle (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2, (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\{18\langle \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_0 \rangle + 18t\langle \Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle + 36t\langle \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0, J(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) \rangle \\ &\quad + 18t^2\langle \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0, J(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2) \rangle + 36t^2\langle \Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2, J(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) \rangle \\ &\quad + 18t^3\langle \Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2, J(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2) \rangle\}}{\left(\langle (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2, (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

ya da $\Delta^2 b_0 = \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0$, $\forall p, q \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ ve $\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \kappa_{P3}(t) &= \frac{\{18\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle - 36t\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + 18t\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle + 18t^2\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + 18t^2\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_2 \rangle \\ &\quad - 36t^2\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + 18t^2\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle + 36t^2\langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \rangle - 36t^2\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_2 \rangle - 36t^2\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle\}}{\left(\langle (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2, (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, eğrilik

$$\kappa_{P3}(t) = \frac{(18-36t+18t^2)\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + (18t-18t^2)\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle + 18t^2\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle}{\left(\langle (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2, (3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{3/2}}$$

$$\kappa_{P3}(t) = \frac{18}{27} \frac{(1-2t+t^2)\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + (t-t^2)\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle + t^2\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle}{\left(\langle (1-2t+t^2)\Delta^1 b_0 + 2(t-t^2)\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2, (1-2t+t^2)\Delta^1 b_0 + 2(t-t^2)\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{3/2}}$$

$$\kappa_{p_3}(t) = \frac{2}{3} \frac{(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{\left(\langle (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2, (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \rangle \right)^{3/2}}$$

ya da

$$\kappa_{p_3}(t) = \frac{2}{3} \frac{(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{\left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|^3}$$

şeklinde bulunur. □

Özel Durum 3.3 Öklid düzleminde (3.16) denkleminde sahip birim hızlı olmayan kübik Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ_{p_3} eğriliği

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.22)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.23)$$

$$\kappa_{p_3}(t)|_{t=0} = \frac{2}{3} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \quad (3.24)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $t=0$ başlangıç noktasındaki Serret-Frenet çatısı ve eğrilik için Teorem 3.2’de verilen (3.17), (3.18) ve (3.19) eşitliklerinde $t=0$ değeri yazılarak, teğet vektör

$$T(t)|_{t=0} = \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|} \Big|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|},$$

asal normal vektör,

$$N(t)|_{t=0} = \frac{(1-t)^2 J \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t J \Delta^1 b_1 + t^2 J \Delta^1 b_2}{\left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|} \Big|_{t=0} = \frac{J \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

ve eğrilik,

$$\kappa_{p_3}(t)|_{t=0} = \frac{2(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{3 \|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3} \Big|_{t=0} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{3 \|\Delta^1 b_0\|^3}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Ayrıca, (3.2) eşitlikleri kullanılarak, α , $\Delta^1 b_0$ ve $\Delta^1 b_1$ arasındaki açı olmak üzere, eğrilik

$$\kappa_{p_3}(t)|_{t=0} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{3 \|\Delta^1 b_0\|^3} = \frac{2 \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \sin \alpha}{3 \|\Delta^1 b_0\|^3} = \frac{2 \|\Delta^1 b_1\|}{3 \|\Delta^1 b_0\|^2} \sin \alpha \quad (3.24a)$$

şeklinde de yazılır.

Özel Durum 3.4 Öklid düzleminde (3.16) denkleminde sahip birim hızlı olmayan kübik Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ_{p_3} eğriliği

$$T(t)|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|} \quad (3.25)$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{J \Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|} \quad (3.26)$$

$$\kappa_{p_3}(t)|_{t=1} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{3 \|\Delta^1 b_2\|^3} \quad (3.27)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $t=1$ bitiş noktasındaki Serret-Frenet çatısı ve eğrilik için Teorem 3.2’de verilen (3.17), (3.18) ve (3.19) eşitliklerinde $t=1$ değeri yazılarak, teğet vektör

$$T(t)|_{t=1} = \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} \Big|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|},$$

asal normal vektör

$$N(t)|_{t=1} = \frac{(1-t)^2 J \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t J \Delta^1 b_1 + t^2 J \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} \Big|_{t=1} = \frac{J \Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|}$$

ve eğrilik

$$\kappa_{P3}(t)\big|_{t=1} = \frac{2(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{3 \left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|^3} \big|_{t=1} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{3 \left\| \Delta^1 b_2 \right\|^3}$$

şeklinde elde edilir. □

Ayrıca, (3.2) eşitlikleri kullanılarak, β , $\Delta^1 b_1$ ve $\Delta^1 b_2$ arasındaki açı olmak üzere, eğrilik

$$\kappa_{P3}(t)\big|_{t=1} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_2, J \Delta^1 b_1 \rangle}{3 \left\| \Delta^1 b_2 \right\|^3} = \frac{2 \left\| \Delta^1 b_1 \right\| \left\| \Delta^1 b_2 \right\| \sin \beta}{3 \left\| \Delta^1 b_2 \right\|^3} = \frac{2 \left\| \Delta^1 b_1 \right\|}{3 \left\| \Delta^1 b_2 \right\|^2} \sin \beta \quad (3.27a)$$

şeklinde de yazılır.

Örnek 3.2 $b_0 = (1, 0)$, $b_1 = (2, 3)$, $b_2 = (5, 4)$ ve $b_3 = (2, 1) \in E^2$ kontrol noktaları ile verilen kübik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0, 1]$, $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktası için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliğini bulunuz.

Çözüm Öncelikle, $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! i!}$ olmak üzere

$P3(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) t^i (1-t)^{3-i} b_i$ ile verilen Bézier eğrisi denklemini açıkça ifade edilirse,

$$\begin{aligned} P3(t) &= B_{0,3}(t) t^0 (1-t)^{3-0} b_0 + B_{1,3}(t) t^1 (1-t)^{3-1} b_1 + B_{2,3}(t) t^2 (1-t)^{3-2} b_2 + B_{3,3}(t) t^3 (1-t)^{3-3} b_3 \\ &= \binom{3}{0} (1-t)^3 b_0 + \binom{3}{1} t (1-t)^2 b_1 + \binom{3}{2} t^2 (1-t) b_2 + \binom{3}{3} t^3 b_3 \\ &= (1-t)^3 (1, 0) + 3t(1-t)^2 (2, 3) + 3t^2(1-t)(5, 4) + t^3(2, 1) \end{aligned}$$

yazılır ve böylece kübik Bézier eğrisi denklemini

$$P3(t) = ((1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 15t^2(1-t) + 2t^3, 9t(1-t)^2 + 12t^2(1-t) + t^3)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de ihtiyaç duyulacak olan aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$\Delta^1 b_0 = b_1 - b_0 = (1, 3), \quad \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle = 10, \quad \left\| \Delta^1 b_0 \right\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle} = \sqrt{10}$$

$$\Delta^1 b_1 = b_2 - b_1 = (3, 1), \quad \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle = 10, \quad \left\| \Delta^1 b_1 \right\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle} = \sqrt{10}$$

$$\Delta^1 b_2 = b_3 - b_2 = (-3, -3), \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_2 \rangle = 18, \|\Delta^1 b_2\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_2 \rangle} = 3\sqrt{2}$$

$$J\Delta^1 b_0 = (-3, 1), J\Delta^1 b_1 = (-1, 3) \text{ ve } J\Delta^1 b_2 = (3, -3) \text{ olmak üzere}$$

$$\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle = \langle (3, 1), (-3, 1) \rangle = -8$$

$$\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_2 \rangle = \langle (3, 1), (3, -3) \rangle = 6 \text{ veya } \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle = -6$$

$$\langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle = \langle (-3, -3), (-3, 1) \rangle = 6$$

elde edilir.

- $\forall t \in [0, 1]$ için Frenet çatısı ve eğrilik

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} = \frac{(1-t)^2 (1, 3) + 2(1-t)t (3, 1) + t^2 (-3, -3)}{\|(1-t)^2 (1, 3) + 2(1-t)t (3, 1) + t^2 (-3, -3)\|} \\ &= \frac{(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3)}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3)\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{(1-t)^2 J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t J\Delta^1 b_1 + t^2 J\Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} = \frac{(1-t)^2 J(1, 3) + 2(1-t)t J(3, 1) + t^2 J(-3, -3)}{\|(1-t)^2 (1, 3) + 2(1-t)t (3, 1) + t^2 (-3, -3)\|} \\ &= \frac{(2t^2 + 4t - 3, -8t^2 + 4t + 1)}{\|(2t^2 + 4t - 3, -8t^2 + 4t + 1)\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{P3}(t) &= \frac{2}{3} \frac{(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3} \\ &= \frac{2}{3} \frac{(1-t)^2 \cdot (-8) + (1-t)t \cdot 6 + t^2 \cdot (-6)}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3} = \frac{2}{3} \frac{(-8 + 22t - 20t^2)}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3)\|^3} \end{aligned}$$

şeklindedir.

- $t = 0$ başlangıç noktası için Frenet çatısı ve eğrilik

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\kappa_{p3}(t)|_{t=0} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{3 \|\Delta^1 b_0\|^3} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{3 (\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle)^{3/2}} = -\frac{16}{3 \cdot (10)^{3/2}}$$

şeklindedir.

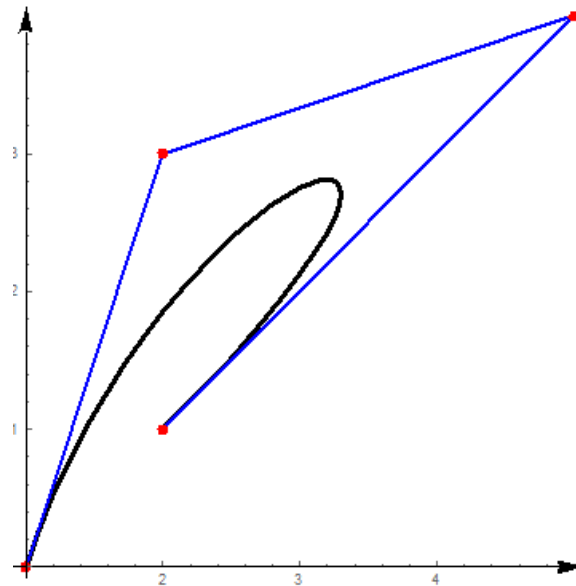
- $t=1$ bitiş noktası için Serret-Frenet çatısı ve eğrilik

$$T(t)|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{J\Delta^1 b_2}{\|\Delta^1 b_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\kappa_{p3}(t)|_{t=1} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle}{3 \|\Delta^1 b_2\|^3} = \frac{2 \cdot -6}{3 (3\sqrt{2})^3} = -\frac{4}{27\sqrt{2}}$$

şeklindedir. Verilen kübik Bézier eğrisinin grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 3.2 Kübik Bézier Eğrisi

3.3 E^2 Öklid Düzleminde n . dereceden Bézier Eğrileri için Serret-Frenet

Elemanları

Tanım 3.6 $b_0, b_1, \dots, b_n$ E^2 Öklid düzleminde doğrudan olmayan $(n+1)$ nokta olsun.

$b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol noktalarına ve

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i = B_{0,n}(t)b_0 + B_{1,n}(t)b_1 + \dots + B_{n,n}(t)b_n \quad (3.28)$$

parametrik denkleminde sahip eğriye E^2 Öklid düzlemindeki birim hızlı olmayan n . dereceden Bézier eğrisi denir.

Teorem 3.3 Öklid düzleminde (3.28) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n . dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\Delta^1 b_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)B_{j,n-1}(t)\langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{1/2}} \quad (3.29)$$

$$N(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)J\Delta^1 b_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)B_{j,n-1}(t)\langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{1/2}} \quad (3.30)$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(t) \langle \Delta^2 b_i, J\Delta^1 b_j \rangle}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)B_{j,n-1}(t)\langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{3/2}} \quad (3.31)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin birinci ve ikinci türevlerinin, sırasıyla (2.58) ve (2.59) eşitliklerinden

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i$$

$$P''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) \Delta^2 b_i$$

olduğu kullanılarak, teğet vektör alanı

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} = \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i}{\left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \right\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \right\|} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i}{\left(\left\langle \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i, \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \right\rangle \right)^{1/2}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-1}(t) \langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{1/2}} \end{aligned}$$

asal normal vektör alanı,

$$N(t) = \frac{JP'(t)}{\|P'(t)\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) J \Delta^1 b_i}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \right\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) J \Delta^1 b_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-1}(t) \langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{1/2}}$$

ve eğrilik

$$\kappa(t) = \frac{\langle P''(t), JP'(t) \rangle}{(\langle P'(t), P'(t) \rangle)^{3/2}} = \frac{\left\langle n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) \Delta^2 b_i, n \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(t) \Delta^1 b_j \right\rangle}{\left(\left\langle n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i, n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \right\rangle \right)^{3/2}}$$

ya da

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(t) \langle \Delta^2 b_i, J \Delta^1 b_j \rangle}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-1}(t) \langle \Delta b_i, \Delta b_j \rangle \right)^{3/2}}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Özel Durum 3.5 Öklid düzleminde (3.28) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n . dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği,

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.32)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.33)$$

$$\kappa(t)|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \quad (3.34)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı ve $\kappa(t)|_{t=0}$ eğriliğini bulmak için, Teorem 3.3’de verilen eşitliklerde $t=0$ yazılarak ve (2.63) eşitlikleri kullanılarak, teğet vektör

$$T(t)|_{t=0} = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}|_{t=0} = \frac{n\Delta^1 b_0}{\|n\Delta^1 b_0\|} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir. Asal normal vektör

$$N(t)|_{t=0} = \frac{JP'(t)}{\|P'(t)\|}|_{t=0} = \frac{J(n\Delta^1 b_0)}{\|n\Delta^1 b_0\|} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir. Eğrilik ise

$$\begin{aligned} \kappa(t)|_{t=0} &= \frac{\langle P''(t), JP'(t) \rangle}{(\langle P'(t), P'(t) \rangle)^{3/2}}|_{t=0} = \frac{\langle n(n-1)\Delta^2 b_0, J(n\Delta b_0) \rangle}{(\langle n\Delta b_0, n\Delta b_0 \rangle)^{3/2}} = \frac{\langle n(n-1)\Delta^2 b_0, nJ\Delta b_0 \rangle}{(\langle n\Delta b_0, n\Delta b_0 \rangle)^{3/2}} \\ &= \frac{n^2(n-1)\langle \Delta^2 b_0, J\Delta^1 b_0 \rangle}{n^3(\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle)^{3/2}} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^2 b_0, J\Delta^1 b_0 \rangle}{(\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle)^{3/2}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, $\Delta^2 b_0 = \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0$ ve $\forall p \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \kappa(t) \Big|_{t=0} &= \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\left(\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle \right)^{3/2}} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle - \langle \Delta^1 b_0, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\left(\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle \right)^{3/2}} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\left(\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle \right)^{3/2}} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\| \Delta^1 b_0 \|^3} \end{aligned}$$

şeklinde de elde edilir. $\square$

Ayrıca, (3.2) eşitlikleri kullanılarak, α , $\Delta^1 b_0$ ve $\Delta^1 b_1$ arasındaki açı olmak üzere, eğrilik

$$\kappa(t) \Big|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\| \Delta^1 b_0 \|^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\| \Delta^1 b_1 \| \| \Delta^1 b_0 \| \sin \alpha}{\| \Delta^1 b_0 \|^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\| \Delta^1 b_1 \|}{\| \Delta^1 b_0 \|^2} \sin \alpha \quad (3.34a)$$

şeklinde de yazılır.

Özel Durum 3.6 Öklid düzleminde (3.28) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n . dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği

$$T(t) \Big|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\| \Delta^1 b_{n-1} \|} \quad (3.35)$$

$$N(t) \Big|_{t=1} = \frac{J \Delta^1 b_{n-1}}{\| \Delta^1 b_{n-1} \|} \quad (3.36)$$

$$\kappa(t) \Big|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, J \Delta^1 b_{n-2} \rangle}{\| \Delta^1 b_{n-1} \|^3} \quad (3.37)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı ve $\kappa(t)|_{t=1}$ eğriliğini bulmak için, Teorem 3.3’de verilen eşitliklerde $t=1$ yazılarak ve (2.64) eşitlikleri kullanılarak, teğet vektör

$$T(t)|_{t=1} = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}|_{t=1} = \frac{n\Delta^1 b_{n-1}}{\|n\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir. Asal normal vektör

$$N(t)|_{t=1} = \frac{JP'(t)}{\|P'(t)\|}|_{t=1} = \frac{J(n\Delta^1 b_{n-1})}{\|n\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{J\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir. Eğrilik ise,

$$\begin{aligned} \kappa(t)|_{t=1} &= \frac{\langle P''(t), JP'(t) \rangle}{(\langle P'(t), P'(t) \rangle)^{3/2}}|_{t=1} = \frac{\langle n(n-1)\Delta^2 b_{n-2}, J(n\Delta^1 b_{n-1}) \rangle}{(\langle n\Delta^1 b_{n-1}, n\Delta^1 b_{n-1} \rangle)^{3/2}} \\ &= \frac{n^2(n-1)\langle \Delta^2 b_{n-2}, J\Delta^1 b_{n-1} \rangle}{n^3(\langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle)^{3/2}} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\langle \Delta^2 b_{n-2}, J\Delta^1 b_{n-1} \rangle}{(\langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle)^{3/2}} \end{aligned}$$

ya da $\Delta^2 b_{n-2} = \Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}$ ve $\forall p \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \kappa(t)|_{t=1} &= \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}, J\Delta^1 b_{n-1} \rangle}{(\langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle)^{3/2}} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, J\Delta^1 b_{n-1} \rangle - \langle \Delta^1 b_{n-2}, J\Delta^1 b_{n-1} \rangle}{(\langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle)^{3/2}} \\ &= -\frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-2}, J\Delta^1 b_{n-1} \rangle}{(\langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle)^{3/2}} \end{aligned}$$

şeklinde de elde edilir. $\square$

Ayrıca, (3.2) eşitlikleri kullanılarak, β , $\Delta^1 b_n$ ve $\Delta^1 b_{n-1}$ arasındaki açı olmak üzere, eğrilik

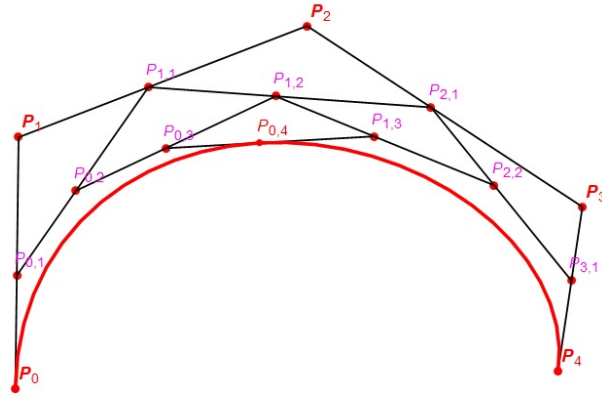
$$\kappa(t)|_{t=1} = -\frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, J\Delta^1 b_{n-2} \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} = -\frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1}\| \|\Delta^1 b_{n-2}\| \sin \beta}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} = -\frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2} \sin \beta \quad (3.37a)$$

şeklinde de yazılır.

3.4 E^2 Öklid Düzleminde Bézier Eğrileri için Algoritma Metodu ve Bu Metod Yardımıyla Bézier Eğrilerinin Serret-Frenet Elemanları

$b_0, b_1, \dots, b_n \in E^2$ kontrol noktaları yardımıyla elde edilen $P_{i,k}(t)$ ara noktalar için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Şekil 3.3):

$$P_{i,k}(t) = \sum_{j=0}^k B_{j,k}(t) b_{i+j}, \quad t \in [0,1] \quad (3.38)$$



Şekil 3.3 $i = 0$ ve $n = 4$ için ara noktalar

Bu eşitlik yardımıyla, $P_{i,0}(t) = b_i$ ve

$$P_{0,n}(t) = P(t) \quad (3.39)$$

olduğu açıktır.

Böylece, (3.39) eşitliği

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) b_i$$

ile verilen $n+1$ kontrol noktasına sahip n . dereceden Bézier eğrisinin algoritmik formülü olarak ifade edilir.

$P_{i,k}(t)$ ara noktaları için

$$P_{i,k}(t) = (1-t)P_{i,k-1}(t) + tP_{i+1,k-1}(t) \quad (3.40)$$

ile verilen özyinelemeli formül elde edilir.

Lemma 3.1 (3.39) eşitliği ile verilen $n+1$ kontrol noktasına sahip n .dereceden algoritmik Bézier eğrisinin birinci türevi

$$P'_{0,n}(t) = P'(t) = n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \quad (3.41)$$

ile verilir.

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin birinci türevinin (2.58) eşitliğinden

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i$$

olduğu biliniyor. Bu eşitlik kullanılarak

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) (b_{i+1} - b_i)$$

elde edilir. Böylece gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$P'(t) = n \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) b_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) b_i \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.38) eşitliği kullanılarak

$$P'_{0,n}(t) = P'(t) = n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1 $P_{i,k}(t)$ 'nin $b_i, \dots, b_{i+k}$ kontrol noktalarına sahip Bézier eğrisi olduğunun gözlemlenmesiyle herhangi $k \in \{1, \dots, n\}$ ve $i \in \{0, \dots, n-k\}$ değerleriyle verilen bir başka $P'_{i,k}(t)$ formülü

$$P'_{i,k}(t) = k(P_{i+1,k-1}(t) - P_{i,k-1}(t)) \quad (3.42)$$

olarak elde edilir.

Lemma 3.1 (3.39) eşitliği ile verilen $n+1$ kontrol noktasına sahip n . dereceden algoritmik Bézier eğrisinin ikinci türevi

$$P''_{0,n}(t) = n(n-1)[(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))] \quad (3.43)$$

ile verilir.

İspat $(P'_{0,n}(t))' = P''_{0,n}(t) = P''(t)$ olmasından ve (3.41), (3.42) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} (P'_{0,n}(t))' &= (n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)))' \\ &= n(P'_{1,n-1}(t) - P'_{0,n-1}(t)) \\ &= n((n-1)(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (n-1)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))) \\ &= n(n-1)[(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))] \end{aligned}$$

ikinci türevi elde edilir. $\square$

Teorem 3.4 Öklid düzleminde (3.39) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n . dereceden düzlemsel $P_{0,n}(t)$ algoritmik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği, sırasıyla

$$T(t) = \frac{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|} \quad (3.44)$$

$$N(t) = \frac{J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|} \quad (3.45)$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{(\langle P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle - \langle P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|^3} \quad (3.46)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Öklid düzleminde Serret-Frenet çatısı ve eğriliği için bilinen formüller kullanılarak, (3.41) eşitliği ile, teğet vektör alanı

$$T(t) = \frac{P'_{0,n}(t)}{\|P'_{0,n}(t)\|} = \frac{n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))}{\|n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))\|} = \frac{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|}$$

şeklinde bulunur.

Asal normal vektör alanı, (3.41) eşitliği ile

$$N(t) = \frac{JP'_{0,n}(t)}{\|JP'_{0,n}(t)\|} = \frac{nJ(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))}{\|n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))\|} = \frac{J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|}$$

şeklinde bulunur.

Eğrilik ise (3.41) ve (3.43) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\langle P''_{0,n}(t), JP'_{0,n}(t) \rangle}{(\langle P'_{0,n}(t), P'_{0,n}(t) \rangle)^{3/2}} = \frac{\langle P''_{0,n}(t), JP'_{0,n}(t) \rangle}{\|P'_{0,n}(t)\|^3} \\ &= \frac{\langle n(n-1)((P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))), J(n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))) \rangle}{\|n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))\|^3} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\langle (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|^3} \\ \kappa(t) &= \frac{n-1}{n} \frac{\langle (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle - \langle (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|^3} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Sonuç 3.2 Teorem 3.3 ile Teorem 3.4'ün sonuçları aynıdır. Çünkü (3.44) eşitliğinde (3.38) eşitliği kullanılarak,

$$T(t) = \frac{P_{1,n-1} - P_{0,n-1}}{\|P_{1,n-1} - P_{0,n-1}\|} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_j}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_j \right\|}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)(b_{j+1} - b_j)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)(b_{j+1} - b_j) \right\|} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)\Delta^1 b_j}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)\Delta^1 b_j \right\|} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} B_{j,k-1}(t)\Delta^1 b_j}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,k-1}(t)B_{j,k-1}(t)\langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{1/2}}$$

ya da k yerine n yazılarak, Teorem 3.3'deki (3.29) eşitliği

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\Delta^1 b_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)B_{j,n-1}(t)\langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{1/2}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (3.45) eşitliği için de (3.38) eşitliği kullanılarak

$$N(t) = \frac{J(P_{1,n-1} - P_{0,n-1})}{\|P_{1,n-1} - P_{0,n-1}\|} = \frac{J\left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_j\right)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)b_j \right\|}$$

$$= \frac{J\left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)(b_{j+1} - b_j)\right)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)(b_{j+1} - b_j) \right\|} = \frac{J\left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)\Delta^1 b_j\right)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,k-1}(t)\Delta^1 b_j \right\|} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} B_{j,k-1}(t)J\Delta^1 b_j}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_{i,k-1}(t)B_{j,k-1}(t)\langle \Delta^1 b_i, \Delta^1 b_j \rangle \right)^{1/2}}$$

ya da k indisi yerine n yazılarak, Teorem 3.3'deki (3.30) eşitliğinin elde edilir.

Ayrıca, (3.46) eşitliği için de (3.38) eşitliği kullanılarak

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\left(\langle P_{2,n-2} - P_{1,n-2}, J(P_{1,n-1} - P_{0,n-1}) \rangle - \langle P_{1,n-2} - P_{0,n-2}, J(P_{1,n-1} - P_{0,n-1}) \rangle \right)}{\|P_{1,n-1} - P_{0,n-1}\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\left(\left\langle \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} b_{j+2} - \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} b_{j+1}, J \left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} b_j \right) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} b_j, J \left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} b_j \right) \right\rangle \right)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} b_j \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\left(\left\langle \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} (b_{j+2} - b_{j+1}), J \left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} (b_{j+1} - b_j) \right) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} (b_{j+1} - b_j), J \left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} (b_{j+1} - b_j) \right) \right\rangle \right)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} (b_{j+1} - b_j) \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\left(\left\langle \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} \Delta^1 b_{j+1}, J \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} \Delta^1 b_j, J \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\rangle \right)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\left(\left\langle \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2} (\Delta^1 b_{j+1} - \Delta^1 b_j), J \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\rangle \right)}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\left\langle \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2} \Delta^2 b_i, J \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\rangle}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\|^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\left\langle \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2} \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \langle \Delta^2 b_i, J \Delta^1 b_j \rangle \right\rangle}{\left\| \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1} \Delta^1 b_j \right\|^3}$$

Teorem 3.3'deki (3.31) eşitliğinin elde edildiği görülür.

Özel Durum 3.7 Öklid düzleminde (3.39) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n . dereceden düzlemsel $P_{0,n}(t)$ algoritmik Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.47)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.48)$$

$$\kappa(t)|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \quad (3.49)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat (3.38) eşitliği ile verilen $P_{0,n}(t)$ algoritmik Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki Serret-Frenet $\{T, N\}|_{t=0}$ çatısı ve $\kappa(t)|_{t=0}$ eğriliğini bulmak için (3.41) eşitliği ve Teorem 3.4'de $t=0$ yazılması ile, teğet vektör

$$T(t)|_{t=0} = \frac{P'_{0,n}(t)}{\|P'_{0,n}(t)\|}|_{t=0} = \frac{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|}|_{t=0}$$

şeklinde elde edilir. Buradan, (3.38) eşitliği kullanılarak,

$$P_{1,n-1}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(0)b_{j+1} = B_{0,n-1}(0)b_1 + \dots + B_{n-1,n-1}(0)b_n = b_1$$

ve benzer hesaplama ile $P_{0,n-1}(0) = b_0$ olduğundan,

$$T(t)|_{t=0} = \frac{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|}|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

bulunur.

Asal normal vektör, (3.41) eşitliği ve teğet vektör için yapılan yukarıdaki hesaplamalar ile

$$N(t)|_{t=0} = \frac{JP'_{i,k}(t)}{\|P'_{i,k}(t)\|}|_{t=0} = \frac{J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|}|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir.

Eğrilik, (3.41) ve (3.43) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned}\kappa(t)\big|_{t=0} &= \frac{\langle P'_{0,n}(t), JP'_{0,n}(t) \rangle}{(\langle P'_{0,n}(t), P'_{0,n}(t) \rangle)^{3/2}} \bigg|_{t=0} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\left(\langle P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle - \langle P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle \right)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|^3} \bigg|_{t=0}\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buradan, (3.38) eşitliği kullanılarak,

$$P_{2,n-2}(0) = \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(0)b_{j+2} = B_{0,n-1}(0)b_2 + \dots + B_{n-1,n-1}(0)b_n = b_2$$

bulunur. Benzer hesaplama ile $P_{1,n-2}(0) = b_1$, $P_{0,n-2}(0) = b_0$, $P_{0,n-1}(0) = b_0$ ve $P_{1,n-1}(0) = b_1$ olduğu kullanılarak,

$$\kappa(t)\big|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\left(\langle b_2 - b_1, J(b_1 - b_0) \rangle - \langle b_1 - b_0, J(b_1 - b_0) \rangle \right)}{\|b_1 - b_0\|^3}$$

bulunur. Ayrıca, $\forall p \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ olduğu kullanılarak,

$$\kappa(t)\big|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J \Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Sonuç 3.3 Özel Durum 3.5 ile Özel Durum 3.7 eşitlikleri aynıdır.

Özel Durum 3.8 Öklid düzleminde (3.39) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n . dereceden düzlemsel $P_{0,n}(t)$ algoritmik Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki

$\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği

$$T(t)\big|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \tag{3.50}$$

$$N(t)\big|_{t=1} = \frac{J \Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \tag{3.51}$$

$$\kappa(t)|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, J \Delta^1 b_{n-2} \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \quad (3.52)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat (3.39) eşitliği ile verilen $P_{0,n}(t)$ algoritmik Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı ve $\kappa(t)|_{t=1}$ eğriliğini bulmak için (3.41) eşitliğinde veya Teorem 3.4'de $t=1$ yazılması ile teğet vektör,

$$T(t)|_{t=1} = \frac{P'_{0,n}(t)}{\|P'_{0,n}(t)\|}|_{t=1} = \frac{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|}|_{t=1}$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$P_{1,n-1}(1) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(1)b_{j+1} = B_{0,n-1}(1)b_1 + \dots + B_{n-1,n-1}(1)b_n = b_n$$

ve benzer hesaplama ile $P_{0,n-1}(1) = b_{n-1}$ olduğundan,

$$T(t)|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

bulunur.

Asal normal vektör, (3.41) eşitliği ve teğet vektör için yapılan yukarıdaki hesaplamalar ile

$$N(t)|_{t=1} = \frac{JP'_{0,n}(t)}{\|P'_{0,n}(t)\|}|_{t=1} = \frac{J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|}|_{t=1} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir. Eğrilik, (3.41) ve (3.43) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned} \kappa(t)|_{t=1} &= \frac{\langle P''_{0,n}(t), JP'_{0,n}(t) \rangle}{(\langle P'_{0,n}(t), P'_{0,n}(t) \rangle)^{3/2}}|_{t=1} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{\left(\langle P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle - \langle P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t), J(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \rangle \right)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|^3}|_{t=1} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$P_{2,n-2}(1) = \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(1)b_{j+2} = B_{0,n-1}(1)b_2 + \dots + B_{n-1,n-1}(1)b_n = b_n$$

ve benzer hesaplama ile $P_{1,n-2}(1) = b_{n-1}$, $P_{0,n-2}(1) = b_{n-2}$, $P_{0,n-1}(1) = b_{n-1}$ ve $P_{1,n-1}(0) = b_n$ olduğu kullanılarak,

$$\kappa(t)\big|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{(\langle b_n - b_{n-1}, J(b_n - b_{n-1}) \rangle - \langle b_{n-1} - b_{n-2}, J(b_n - b_{n-1}) \rangle)}{\|b_n - b_{n-1}\|^3}$$

bulunur. Ayrıca, $\forall p, q \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ ve $\langle p, Jq \rangle = -\langle q, Jp \rangle$ olduğu kullanılarak,

$$\kappa(t)\big|_{t=1} = -\frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-2}, J\Delta^1 b_{n-1} \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, J\Delta^1 b_{n-2} \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Sonuç 3.4 Özel Durum 3.6 ile Özel Durum 3.8 eşitlikleri aynıdır.

3.4.1 E^2 Öklid Düzleminde Kuadratik Bézier Eğrileri için Algoritma ile Serret-Frenet Elemanları

Bölüm 3.4'de verilen her bir teoremden $n = 2$ değeri yazılarak yani üç kontrol noktası seçilerek kuadratik Bézier eğrisi için benzer teoremler elde edilebilir.

Bu bölümde Bézier eğrisinin denklemi, (3.38) eşitliği ile

$$P_{0,2}(t) = \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)b_j, t \in [0,1] \quad (3.53)$$

şeklinde alınacaktır.

Teorem 3.5 Öklid düzleminde (3.53) denkleminde sahip birim hızlı olmayan $P_{0,2}(t)$ algoritmik kuadratik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği

$$T(t) = \frac{P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)}{\|P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)\|} \quad (3.54)$$

$$N(t) = \frac{J(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t))}{\|P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)\|} \quad (3.55)$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{2} \frac{(\langle P_{2,0}(t) - P_{1,0}(t), J(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \rangle - \langle P_{1,0}(t) - P_{0,0}(t), J(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \rangle)}{\|P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)\|^3} \quad (3.56)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Teorem 3.4’de $n = 2$ alınarak eşitlikler gösterilir. $\square$

Sonuç 3.5 Teorem 3.5’de yer alan (3.54) eşitliğinin, (3.38) eşitliği kullanılarak,

$$T(t) = \frac{P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)}{\|P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)\|} = \frac{\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_j}{\left\| \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_j \right\|} = \frac{\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j)}{\left\| \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j) \right\|}$$

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)\Delta^1 b_j}{\left\| \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)\Delta^1 b_j \right\|} = \frac{B_{0,1}(t)\Delta^1 b_0 + B_{1,1}(t)\Delta^1 b_1}{\|B_{0,1}(t)\Delta^1 b_0 + B_{1,1}(t)\Delta^1 b_1\|} = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|}$$

bulunur ve Teorem 3.1’deki (3.7) eşitliği ile aynı sonucu verdiği görülür.

Ayrıca, (3.55) eşitliğinin, yine (3.38) eşitliği kullanılarak,

$$N(t) = \frac{J(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t))}{\|P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)\|} = \frac{J\left(\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_j\right)}{\left\| \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)b_j \right\|} = \frac{J\left(\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j)\right)}{\left\| \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j) \right\|}$$

$$N(t) = \frac{\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)J\Delta^1 b_j}{\left\| \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)\Delta^1 b_j \right\|} = \frac{B_{0,1}(t)J\Delta^1 b_0 + B_{1,1}(t)J\Delta^1 b_1}{\|B_{0,1}(t)\Delta^1 b_0 + B_{1,1}(t)\Delta^1 b_1\|} = \frac{(1-t)J\Delta^1 b_0 + tJ\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|}$$

bulunur ve Teorem 3.1'deki (3.8) eşitliği ile aynı sonucu verdiği görülür.

Benzer şekilde, (3.56) eşitliğinin, yine (3.38) eşitliği ve $P_{2,0}(t) = b_2$, $P_{1,0}(t) = b_1$, $P_{0,0}(t) = b_0$ olduğu kullanılarak,

$$\kappa(t) = \frac{1}{2} \frac{\left(\left\langle P_{2,0}(t) - P_{1,0}(t), J(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \right\rangle - \left\langle P_{1,0}(t) - P_{0,0}(t), J(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \right\rangle \right)}{\|P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{2} \frac{\left(\left\langle b_2 - b_1, J\left(\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j)\right) \right\rangle - \left\langle b_1 - b_0, J\left(\sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j)\right) \right\rangle \right)}{\left\| \sum_{i=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j) \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{2} \frac{\left(\left\langle \Delta^1 b_1, J((1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1) \right\rangle - \left\langle \Delta^1 b_0, J((1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1) \right\rangle \right)}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3}$$

bulunur. Son eşitlikte, $\forall p, q \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ ve $\langle p, Jq \rangle = -\langle q, Jp \rangle$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{1}{2} \frac{\left((1-t) \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle - t \langle \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_1 \rangle \right)}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle - t \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + t \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} \\ \kappa(t) &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Teorem 3.1'deki (3.9) eşitliği ile aynı sonucun elde edildiği görülür.

Özel Durum 3.9 Öklid düzleminde (3.53) denkleminde sahip birim hızlı olmayan $P_{0,2}(t)$ algoritmik kuadratik Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı ve $\kappa(t)|_{t=0}$ eğriliği

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \tag{3.57}$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.58)$$

$$\kappa(t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \quad (3.59)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Özel Durum 3.7’de sırasıyla (3.47), (3.48) eşitliklerinin (3.57), (3.58) ile aynı olduğu ve (3.49) eşitliğinde $n = 2$ alınarak (3.59) eşitliğinin elde edildiği görülür. $\square$

Sonuç 3.6 Özel Durum 3.1 ile Özel Durum 3.9’da yer alan eşitlikler aynıdır.

Özel Durum 3.10 Öklid düzleminde (3.53) denkleminde sahip birim hızlı olmayan $P_{0,2}(t)$ algoritmik kuadratik Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı ve $\kappa(t)|_{t=1}$ eğriliği

$$T(t)|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \quad (3.60)$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{J\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \quad (3.61)$$

$$\kappa(t)|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_1 \rangle}{\|\Delta^1 b_1\|^3} \quad (3.62)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Özel Durum 3.8’de $n = 2$ alınarak eşitlikler gösterilir. $\square$

Sonuç 3.7 Özel Durum 3.2 ile Özel Durum 3.10’da yer alan eşitlikler aynıdır.

3.4.2 E^2 Öklid Düzleminde Kübik Bézier Eğrileri için Algoritma ile Serret-Frenet Elemanları

Bölüm 3.4’de verilen her bir teoremden $n = 3$ değeri yazılarak yani dört kontrol noktası seçilerek kübik Bézier eğrisi için benzer teoremler elde edilebilir.

Bu bölümde Bézier eğrisinin denklemi, (3.38) ile

$$P_{0,3}(t) = \sum_{j=0}^3 B_{j,3}(t)b_j, t \in [0,1] \quad (3.63)$$

şeklinde alınacaktır.

Teorem 3.6 Öklid düzleminde (3.63) denkleminde sahip birim hızlı olmayan $P_{0,3}(t)$ algoritmik kübik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği

$$T(t) = \frac{P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)}{\|P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\|} \quad (3.64)$$

$$N(t) = \frac{J(P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t))}{\|P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\|} \quad (3.65)$$

$$\kappa(t) = \frac{2 \left(\langle P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t), J(P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)) \rangle - \langle P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t), J(P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)) \rangle \right)}{3 \|P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\|^3} \quad (3.66)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Teorem 3.4'de $n = 3$ alınarak eşitlikler gösterilir. $\square$

Sonuç 3.8 Teorem 3.6'da yer alan (3.64) eşitliğinin, (3.38) denklemi kullanılarak,

$$T(t) = \frac{P_{1,2} - P_{0,2}}{\|P_{1,2} - P_{0,2}\|} = \frac{\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_j}{\left\| \sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_j \right\|} = \frac{\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)(b_{j+1} - b_j)}{\left\| \sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)(b_{j+1} - b_j) \right\|}$$

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta b_j}{\left\| \sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta b_j \right\|} = \frac{B_{0,2}(t)\Delta^1 b_0 + B_{1,2}(t)\Delta^1 b_1 + B_{2,2}(t)\Delta^1 b_2}{\|B_{0,2}(t)\Delta^1 b_0 + B_{1,2}(t)\Delta^1 b_1 + B_{2,2}(t)\Delta^1 b_2\|}$$

$$= \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|}$$

yazılır. Bu sonucun gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapıldığında Teorem 3.2'deki (3.17) eşitliği ile aynı olduğu görülür.

Ayrıca, (3.65) eşitliğinin, yine (3.38) denklemi kullanılarak,

$$N(t) = \frac{J(P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t))}{\|P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\|} = \frac{J\left(\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_j\right)}{\left\|\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_{j+1} - \sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)b_j\right\|} = \frac{J\left(\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)(b_{j+1} - b_j)\right)}{\left\|\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)(b_{j+1} - b_j)\right\|}$$

$$N(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)J\Delta^1 b_j}{\left\|\sum_{i=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta^1 b_j\right\|} = \frac{B_{0,2}(t)J\Delta^1 b_0 + B_{1,2}(t)J\Delta^1 b_1 + B_{2,2}(t)J\Delta^1 b_2}{\|B_{0,2}(t)\Delta^1 b_0 + B_{1,2}(t)\Delta^1 b_1 + B_{2,2}(t)\Delta^1 b_2\|}$$

$$= \frac{(1-t)^2 J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2 J\Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|}$$

elde edilir ve Teorem 3.2'deki (3.18) eşitliği ile aynı sonucu verdiği görülür.

Benzer şekilde, (3.66) eşitliği, yine (3.38) denklemi kullanılarak,

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left(\left\langle P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t), J(P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)) \right\rangle - \left\langle P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t), J(P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)) \right\rangle\right)}{\|P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\|^3}$$

yazılır. Böylece,

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left(\left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)b_{j+2} - \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)b_{j+1}, J\left(\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)b_j\right) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)b_j, J\left(\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)b_j\right) \right\rangle\right)}{\left\|\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)b_{j+1} - \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)b_j\right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left(\left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+2} - b_{j+1}), J(\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)(b_{j+1} - b_j)) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)(b_{j+1} - b_j), J(\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)(b_{j+1} - b_j)) \right\rangle \right)}{\left\| \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)(b_{j+1} - b_j) \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left(\left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)\Delta^1 b_{j+1}, J(\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta^1 b_j) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)\Delta^1 b_j, J(\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta^1 b_j) \right\rangle \right)}{\left\| \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta^1 b_j \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)(\Delta^1 b_{j+1} - \Delta^1 b_j), J(\sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta^1 b_j) \right\rangle}{\left\| \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta^1 b_j \right\|^3} = \frac{2}{3} \frac{\left\langle \sum_{j=0}^1 B_{j,1}(t)\Delta^2 b_j, \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)J\Delta^1 b_j \right\rangle}{\left\| \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t)\Delta^1 b_j \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left\langle B_{0,1}(t)\Delta^2 b_0 + B_{1,1}(t)\Delta^2 b_1, B_{0,2}(t)J\Delta^1 b_0 + B_{1,2}(t)J\Delta^1 b_1 + B_{2,2}(t)J\Delta^1 b_2 \right\rangle}{\left\| B_{0,2}(t)\Delta^1 b_0 + B_{1,2}(t)\Delta^1 b_1 + B_{2,2}(t)\Delta^1 b_2 \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left\langle (1-t)\Delta^2 b_0 + t\Delta^2 b_1, (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2 J\Delta^1 b_2 \right\rangle}{\left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|^3}$$

elde edilir. Böylece,

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left\langle (1-t)\Delta^2 b_0, (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2 J\Delta^1 b_2 \right\rangle + \left\langle t\Delta^2 b_1, (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2 J\Delta^1 b_2 \right\rangle}{\left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|^3}$$

ve $\Delta^2 b_0 = \Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0$ ve $\Delta^2 b_1 = \Delta^1 b_2 - \Delta^1 b_1$ ve $\forall p \in \mathbb{R}^2$ için $\langle Jp, p \rangle = 0$ olduğu kullanılarak,

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left\langle (1-t)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0), (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2 J\Delta^1 b_2 \right\rangle + \left\langle t(\Delta^1 b_2 - \Delta^1 b_1), (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 + 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 + t^2 J\Delta^1 b_2 \right\rangle}{\left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{\langle (1-t)\Delta^1 b_1, (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 \rangle + \langle (1-t)\Delta^1 b_1, t^2 J\Delta^1 b_2 \rangle - \langle (1-t)\Delta^1 b_0, 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 \rangle - \langle (1-t)\Delta^1 b_0, t^2 J\Delta^1 b_2 \rangle}{3} \\ \frac{2 + \langle t\Delta^1 b_2, (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 \rangle + \langle t\Delta^1 b_2, 2(1-t)tJ\Delta^1 b_1 \rangle - \langle t\Delta^1 b_1, (1-t)^2 J\Delta^1 b_0 \rangle - \langle t\Delta^1 b_1, t^2 J\Delta^1 b_2 \rangle}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{(1-t)^3 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + (1-t)t^2 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_2 \rangle - 2(1-t)^2 t \langle \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_1 \rangle - (1-t)t^2 \langle \Delta^1 b_0, J\Delta^1 b_2 \rangle}{3} \\ \frac{2 + (1-t)^2 t \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle + 2(1-t)t^2 \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle - (1-t)^2 t \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle - t^3 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_2 \rangle}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{((1-t)^3 + 2(1-t)^2 t - (1-t)^2 t) \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + (-(1-t)t^2 + 2(1-t)t^2 + t^3) \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle}{3} \\ \frac{2((1-t)t^2 + (1-t)^2 t) \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{2(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle}{3} \\ \frac{2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

$$\kappa(t) = \frac{2(1-2t+t^2) \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle + (1-t)t \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_0 \rangle}{3} \\ \frac{2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

şeklinde yazılır. Bu sonucun gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapıldığında Teorem 3.2'deki (3.19) eşitliği ile aynı olduğu görülür.

Özel Durum 3.11 Öklid düzleminde (3.63) denkleminde sahip birim hızlı olmayan $P_{0,3}(t)$ algoritmik kübik Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı ve $\kappa|_{t=0}$ eğriliği,

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.67)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{J\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (3.68)$$

$$\kappa(t)|_{t=0} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_1, J\Delta^1 b_0 \rangle}{3 \|\Delta^1 b_0\|^3} \quad (3.69)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Özel Durum 3.7’de sırasıyla (3.47), (3.48) eşitliklerinin (3.67), (3.68) ile aynı olduğu ve (3.49) eşitliğinde $n = 3$ alınarak (3.69) eşitliğinin elde edildiği görülür. $\square$

Sonuç 3.9 Özel Durum 3.3 ile Özel Durum 3.11 eşitlikleri aynıdır.

Özel Durum 3.12 Öklid düzleminde (3.63) denkleminde sahip birim hızlı olmayan $P_{0,3}(t)$ algoritmik kübik Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki $\{T, N\}|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı ve $\kappa|_{t=1}$ eğriliği,

$$T(t)|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \quad (3.70)$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{J\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \quad (3.71)$$

$$\kappa(t)|_{t=1} = \frac{2 \langle \Delta^1 b_2, J\Delta^1 b_1 \rangle}{3 \|\Delta^1 b_2\|^3} \quad (3.72)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Özel Durum 3.8’de $n = 3$ alınarak eşitlikler gösterilir. $\square$

Sonuç 3.10 Özel Durum 3.4 ile Özel Durum 3.12 eşitlikleri aynıdır.

E^3 ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ

Bu bölümde, daha önce de tanıtılan $P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i$ denkleminde sahip uzaysal Bézier eğrisi yani kontrol noktaları, $b_i \in E^3$ ile ele alınacaktır. Öncelikle, literatürde yer almayan $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N, B\}$ ortonormal Serret-Frenet çatısı, κ eğriliği ve τ burulması verilecektir. Sonrasında bu elemanların Bölüm 2.4.3'te verilen $t=0$ başlangıç ve $t=1$ bitiş noktalarındaki eşitlikleri hatırlatılarak ifade edilecektir.

$\{T, N, B\}$ nin ortonormal çatı olmasından,

$$\langle T, T \rangle = 1, \langle N, N \rangle = 1, \langle B, B \rangle = 1$$

$$\langle T, N \rangle = 0, \langle T, B \rangle = 0, \langle N, B \rangle = 0$$

şartları sağlanır.

$P(t)$ Bézier eğrisinin hız vektörü,

$$v = \|P'(t)\|$$

ile yay parametresinin uzunluğu,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|P'(t)\| dt$$

ile verilir.

Tanım 4.1 $\alpha : I \rightarrow E^3$, eğriliği sıfırdan farklı ($\kappa \neq 0$) ve birim hızlı olmayan uzay eğrisi olsun. α eğrisinin $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısı, κ eğriliği ve τ burulması aşağıdaki şekilde verilir, [16]:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (4.1)$$

$$N(t) = B(t) \times T(t), \quad (4.2)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \quad (4.3)$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad (4.4)$$

$$\tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \quad (4.5)$$

4.1 E^3 Öklid Uzayında Kuadratik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları

Tanım 4.2 b_0, b_1 ve b_2 , E^3 Öklid uzayında doğrudan olmayan üç nokta olsun. b_0, b_1, b_2 kontrol noktalarına ve

$$\begin{aligned} P2(t) &= \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t)b_i = B_{0,2}(t)b_0 + B_{1,2}(t)b_1 + B_{2,2}(t)b_2 \\ &= (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)t b_1 + t^2 b_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

parametrik denklemine sahip eğriye, E^3 Öklid uzayındaki birim hızlı olmayan *kuadratik Bézier eğrisi* denir.

Teorem 4.1 Öklid uzayında (4.6) denklemine sahip birim hızlı olmayan kuadratik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısı, κ_{p_2} eğriliği ve τ_{p_2} burulması

$$T(t) = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|}, \quad (4.7)$$

$$N(t) = \frac{(1-t)\{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0\} + t\{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1\}}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|}, \quad (4.8)$$

$$B(t) = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}, \quad (4.9)$$

$$\kappa_{P_2}(t) = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3}, \quad (4.10)$$

$$\tau_{P_2}(t) = 0 \quad (4.11)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Öncelikle (4.6) eşitliği ile verilen $P_2(t)$ kuadratik Bézier eğrisinin türevleri, ileri fark operatörü cinsinden

$$P_2'(t) = 2(1-t)(-1)b_0 + (-2tb_1 + 2(1-t)b_1) + 2tb_2$$

$$= 2(1-t)(b_1 - b_0) + 2t(b_2 - b_1)$$

$$= 2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1$$

$$P_2''(t) = -2\Delta^1 b_0 + 2\Delta^1 b_1 = 2(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) = 2\Delta^2 b_0$$

$$P_2'''(t) = (2(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0))' = 0$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, $P_2(t)$ kuadratik Bézier eğrisinin $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısı, κ_{P_2} eğriliği ve τ_{P_2} burulması (4.1)-(4.5) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki şekilde bulunur:

Teğet vektör alanı,

$$T(t) = \frac{P2'(t)}{\|P2'(t)\|} = \frac{2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1}{\|2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\|} = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, bu sonuç

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\left(\langle (1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1, (1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1 \rangle\right)^{1/2}} \\ &= \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\left((1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle + 2(1-t)t \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

şeklinde de elde edilebilir.

Binormal vektör alanı,

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{P2'(t) \times P2''(t)}{\|P2'(t) \times P2''(t)\|} = \frac{\{2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\} \times \{2(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\}}{\|\{2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\} \times \{2(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\}\|} \\ &= \frac{\{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\} \times \{\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0\}}{\|\{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\} \times \{\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0\}\|} \\ &= \frac{(1-t)(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1)}{\|(1-t)(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1)\|} \\ &= \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Asal normal vektör alanı

$$\begin{aligned} N(t) &= B(t) \times T(t) = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \times \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \\ &= \frac{(1-t)\{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0\} + t\{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1\}}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Eğrilik

$$\begin{aligned}\kappa_{P_2}(t) &= \frac{\|P_2'(t) \times P_2''(t)\|}{\|P_2'(t)\|^3} = \frac{\| \{2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\} \times \{2(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\} \|}{\|2(1-t)\Delta^1 b_0 + 2t\Delta^1 b_1\|^3} \\ &= \frac{4}{2^3} \frac{\|(1-t)(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1)\|}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Burulma ise

$$\tau_{P_2}(t) = \frac{\det(P_2'(t), P_2''(t), P_2'''(t))}{\|P_2'(t) \times P_2''(t)\|^2}$$

ile hesaplandığından ve $P_2'''(t) = (2(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0))' = 0$ olduğundan $\tau_{P_2}(t) = 0$ bulunur. $\square$

Örnek 4.1 $b_0 = (-1, 3, 2)$, $b_1 = (1, 0, 4)$ ve $b_2 = (5, 3, 2) \in E^3$ kontrol noktaları ile tanımlanan kuadratik Bézier eğrisi için $\forall t \in [0, 1]$, $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktası için $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısını, κ_{P_2} eğriliğini ve τ_{P_2} burulmasını bulunuz.

Çözüm Öncelikle, (4.6) eşitliği ile verilen kuadratik Bezier eğrisi b_0 , b_1 ve b_2 kontrol noktaları ile

$$\begin{aligned}P_2(t) &= (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)t b_1 + t^2 b_2 \\ &= (1-t)^2 (-1, 3, 2) + 2(1-t)t (1, 0, 4) + t^2 (5, 3, 2)\end{aligned}$$

yazılır ve böylece,

$$P_2(t) = (- (1-t)^2 + 2t(1-t) + 5t^2, 3(1-t)^2 + 3t^2, 2(1-t)^2 + 8(1-t)t + 2t^2)$$

elde edilir. Şimdi de ihtiyaç duyulacak olan aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$\Delta^1 b_0 = b_1 - b_0 = (2, -3, 2), \quad \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle = 17, \quad \|\Delta^1 b_0\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle} = \sqrt{17}$$

$$\Delta^1 b_1 = b_2 - b_1 = (4, 3, -2), \quad \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle = 29, \quad \|\Delta^1 b_1\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle} = \sqrt{29}$$

$$\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle = -5$$

$$\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 = (0, 12, 18), \quad \|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| = 6\sqrt{13}$$

$$(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0 = (78, 36, -24)$$

$$(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1 = (-78, 72, -48)$$

ve

$$\langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \rangle = \|\Delta^1 b_0\| \|\Delta^1 b_1\| \sin \alpha \Rightarrow -5 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{29} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{493}}$$

elde edilir.

- $\forall t \in [0, 1]$ için $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ_{P_2} eğriliği ve τ_{P_2} burulması

$$T(t) = \frac{(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|} = \frac{(1-t)(2, -3, 2) + t(4, 3, -2)}{\|(1-t)(2, -3, 2) + t(4, 3, -2)\|} = \frac{(2+2t, -3+6t, 2-4t)}{\|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|};$$

$$N(t) = \frac{(1-t)\{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0\} + t\{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1\}}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|};$$

$$N(t) = \frac{(1-t)(78, 36, -24) + t(-78, 72, -48)}{6\sqrt{13} \cdot \|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|} = \frac{(78-156t, 36+36t, -24-24t)}{6\sqrt{13} \cdot \|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|}$$

$$B(t) = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} = \frac{(0, 12, 18)}{6\sqrt{13}} = \frac{(0, 2, 3)}{\sqrt{13}};$$

$$\kappa_{P_2}(t) = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|(1-t)\Delta^1 b_0 + t\Delta^1 b_1\|^3} = \frac{3\sqrt{13}}{\|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|^3};$$

şeklinde elde edilir.

Burulma için

$$P_2(t) = (-(1-t)^2 + 2t(1-t) + 5t^2, 3(1-t)^2 + 3t^2, 2(1-t)^2 + 8(1-t)t + 2t^2)$$

$$P2'(t) = (2(1-t) + 2(1-t) - 2t + 10t, -6(1-t) + 6t, -4(1-t) + 8(1-t) - 8t + 4t)$$

$$P2''(t) = (-6 + 10, 12, 4 - 8 - 8 + 4) = (4, 12, -8)$$

$$P2'''(t) = (0, 0, 0)$$

olduğundan $\tau_{p_2}(t) = 0$ dir.

- $t = 0$ başlangıç noktası için $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ_{p_2} eğriliği ve τ_{p_2} burulması

$$T(t)|_{t=0} = \frac{(2+2t, -3+6t, 2-4t)}{\|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|} \Big|_{t=0} = \frac{(2, -3, 2)}{\|(2, -3, 2)\|};$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{(78-156t, 36+36t, -24-24t)}{6\sqrt{13} \cdot \|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|} \Big|_{t=0} = \frac{(78, 36, -24)}{6\sqrt{13} \cdot \|(2, -3, 2)\|};$$

$$B(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} = \frac{(0, 12, 18)}{6\sqrt{13}} = \frac{(0, 2, 3)}{\sqrt{13}};$$

$$\kappa_{p_2}(t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{6\sqrt{13}}{\|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|^3} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{6\sqrt{13}}{\|(2, -3, 2)\|^3}$$

ve $\tau_{p_2}(t)$ değeri t parametresine bağlı olmadığından $\tau_{p_2}(t) = 0$ elde edilir.

- $t = 1$ bitiş noktası için $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ_{p_2} eğriliği ve τ_{p_2} burulması

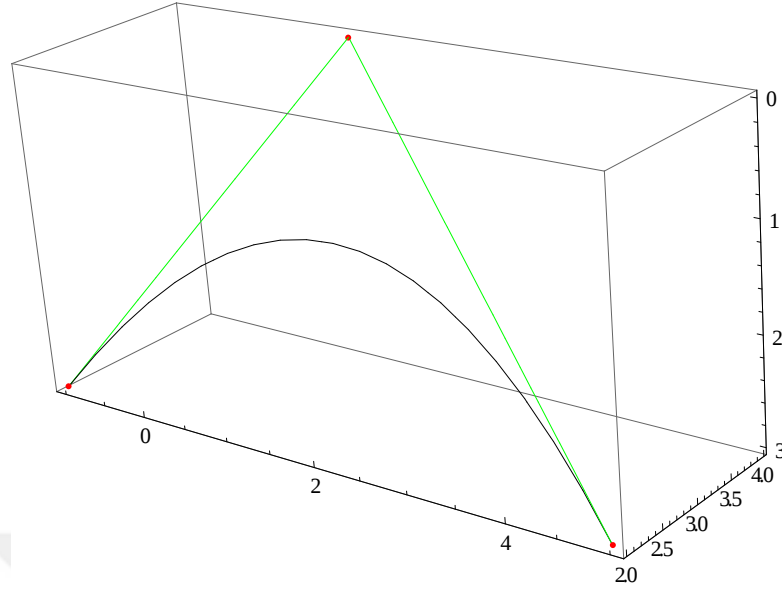
$$T(t)|_{t=1} = \frac{(2+2t, -3+6t, 2-4t)}{\|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|} \Big|_{t=1} = \frac{(4, 3, -2)}{\|(4, 3, -2)\|};$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{(78-156t, 36+36t, -24-24t)}{6\sqrt{13} \cdot \|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|} \Big|_{t=1} = \frac{(-78, 72, -48)}{6\sqrt{13} \cdot \|(4, 3, -2)\|};$$

$$\kappa_{p_2}(t)|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{6\sqrt{13}}{\|(2+2t, -3+6t, 2-4t)\|^3} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2} \frac{6\sqrt{13}}{\|(4, 3, -2)\|^3}$$

ve $\tau_{p_2}(t)$ değeri t 'ye bağlı olmadığından $\tau_{p_2}(t) = 0$ elde edilir.

Verilen kuadratik Bézier eğrisinin grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 4.1 Kuadratik Bézier eğrisi

4.2 E^3 Öklid Uzayında Kübik Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları

Tanım 4.3 b_0, b_1, b_2 ve b_3 , E^3 Öklid uzayında doğrudan olmayan dört nokta olsun.

b_0, b_1, b_2 ve b_3 kontrol noktalarına ve

$$\begin{aligned} P_3(t) &= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t)b_i = B_{0,3}(t)b_0 + B_{1,3}(t)b_1 + B_{2,3}(t)b_2 + B_{3,3}(t)b_3 \\ &= (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

parametrik denklemine sahip eğriye, E^3 Öklid uzayındaki birim hızlı olmayan *kübik Bézier eğrisi* denir.

Teorem 4.2 Öklid uzayında (4.12) denklemine sahip birim hızlı olmayan kübik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısı, κ_{p_3} eğriliği ve τ_{p_3} burulması

$$T(t) = \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\left\| (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \right\|}, \quad (4.13)$$

$$N(t) = \frac{(1-t)^4((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)^3 t((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1) + (1-t)^2 t^2((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_2) + (1-t)^3 t((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)^2 t^2((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1) + (1-t)^3 t^3((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2) + (1-t)^2 t^2((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)t^3((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1) + t^4((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2)}{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\| \|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|}, \quad (4.14)$$

$$B(t) = \frac{(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)}{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|}, \quad (4.15)$$

$$\kappa_{P3}(t) = \frac{2}{3} \frac{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}, \quad (4.16)$$

$$\tau_{P3}(t) = \frac{1}{3} \frac{(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 \rangle - 2(1-t)t \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 \rangle}{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|^2} \quad (4.17)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat Öncelikle $P3(t)$ eğrisinin türevleri, ileri fark operatörü cinsinden

$$\begin{aligned} P3'(t) &= 3(1-t)^2(-1)b_0 + 6(1-t)(-1)tb_1 + 3(1-t)^2b_1 - 3t^2b_2 + 6(1-t)tb_2 + 3t^2b_3 \\ &= 3(1-t)^2(b_1 - b_0) + 6(1-t)t(b_2 - b_1) + 3t^2(b_3 - b_2) \\ &= 3(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 6(1-t)t \Delta^1 b_1 + 3t^2 \Delta^1 b_2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$P3'(t) = (3 - 6t + 3t^2) \Delta^1 b_0 + (6t - 6t^2) \Delta^1 b_1 + 3t^2 \Delta^1 b_2$$

ya da

$$P3'(t) = 3\Delta^1 b_0 + 6t(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 3t^2(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2)$$

ve ikinci türevi,

$$P3''(t) = 6(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) + 6t(\Delta^1 b_0 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_2)$$

ya da

$$P3''(t) = -6(1-t)\Delta^1 b_0 + 6(1-2t)\Delta^1 b_1 + 6t\Delta^1 b_2 \quad (4.19)$$

ve

$$P3'''(t) = 6\Delta^1 b_0 - 12\Delta^1 b_1 + 6\Delta^1 b_2 \quad (4.20)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, $P3(t)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısı, κ_{P3} eğriliği ve τ_{P3} burulması (4.1)-(4.5) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki şekilde bulunur:

Teğet vektör alanı

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{P3'(t)}{\|P3'(t)\|} = \frac{(3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2}{\|(3-6t+3t^2)\Delta^1 b_0 + (6t-6t^2)\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2\|} \\ &= \frac{(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2\|} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca, bu sonuç

$$T(t) = \frac{(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2}{\left(\langle (1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2, (1-t)^2\Delta^1 b_0 + 2(1-t)t\Delta^1 b_1 + t^2\Delta^1 b_2 \rangle\right)^{1/2}}$$

şeklinde de yazılır.

Binormal vektör alanı, (4.18) ve (4.19) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{P3'(t) \times P3''(t)}{\|P3'(t) \times P3''(t)\|} \\ &= \frac{\{3(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 6(1-t)t\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2\} \times \{(-6(1-t))\Delta^1 b_0 + 6(1-2t)\Delta^1 b_1 + 6t\Delta^1 b_2\}}{\|\{3(1-t)^2\Delta^1 b_0 + 6(1-t)t\Delta^1 b_1 + 3t^2\Delta^1 b_2\} \times \{(-6(1-t))\Delta^1 b_0 + 6(1-2t)\Delta^1 b_1 + 6t\Delta^1 b_2\}\|} \\ &= \frac{18(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + 18(1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + 18t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)}{\|18(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + 18(1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + 18t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|} \\ &= \frac{(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)}{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Asal normal vektör alanı,

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$= \frac{(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)}{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|} \times \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|}$$

$$\begin{aligned} & (1-t)^4((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)^3 t((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1) + (1-t)^2 t^2((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_2) \\ & + (1-t)^3 t((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)^2 t^2((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t^3((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2) \\ & + (1-t)^2 t^2((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)t^3((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1) + t^4((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\| \|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|}{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\| \|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|}$$

şeklinde bulunur.

Eğrilik,

$$\kappa_{P_3}(t) = \frac{\|P_3'(t) \times P_3''(t)\|}{\|P_3'(t)\|^3}$$

$$= \frac{\|18(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + 18(1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + 18t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|}{\|3(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 6(1-t)t \Delta^1 b_1 + 3t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

$$= \frac{18}{3^3} \frac{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\|(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|^3}$$

şeklinde bulunur.

Burulma, (4.18), (4.19) ve (4.20) kullanılarak

$$\tau_{P_3}(t) = \frac{\det(P_3'(t), P_3''(t), P_3'''(t))}{\|P_3'(t) \times P_3''(t)\|^2} = \frac{\langle P_3'(t), P_3''(t) \times P_3'''(t) \rangle}{\|P_3'(t) \times P_3''(t)\|^2}$$

$$= \frac{\langle 3(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 6(1-t)t \Delta^1 b_1 + 3t^2 \Delta^1 b_2, (-6(1-t)\Delta^1 b_0 + 6(1-2t)\Delta^1 b_1 + 6t\Delta^1 b_2) \times (6\Delta^1 b_0 - 12\Delta^1 b_1 + 6\Delta^1 b_2) \rangle}{\|18(1-t)^2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + 18(1-t)t(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + 18t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle 3(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 6(1-t)t \Delta^1 b_1 + 3t^2 \Delta^1 b_2, 36(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) - 36(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + 36(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \rangle}{18^2 \|(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|^2} \\
&= \frac{(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 \rangle - (1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2 \rangle + (1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 \rangle}{18^2} \\
&\quad + \frac{2(1-t)t \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 \rangle - 2(1-t)t \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2 \rangle + 2(1-t)t \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 \rangle}{18^2} \\
&= \frac{108 + t^2 \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 \rangle - t^2 \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 \rangle}{18^2} \\
&\quad \frac{\|(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|^2}{18^2} \\
&= \frac{1}{3} \frac{(1-t)^2 \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 \rangle - 2(1-t)t \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2 \rangle + t^2 \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 \rangle}{\|(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|^2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. □

Örnek 4.2 $b_0 = (0, 2, 1)$, $b_1 = (1, 3, 3)$, $b_2 = (4, 7, 3)$ ve $b_3 = (5, 9, 5) \in E^2$ kontrol noktaları ile tanımlanan kübik Bézier eğrisi için $\forall t \in [0, 1]$, $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktası için $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısını, κ_{P_3} eğriliğini ve τ_{P_3} burulmasını bulunuz.

Çözüm Öncelikle, (4.12) eşitliği ile verilen kuadratik Bezier eğrisi b_0 , b_1 , b_2 ve b_3 kontrol noktaları ile

$$\begin{aligned}
P_3(t) &= (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t)t^2 b_2 + t^3 b_3 \\
&= (1-t)^3 (0, 2, 1) + 3(1-t)^2 t (1, 3, 3) + 3(1-t)t^2 (4, 7, 3) + t^3 (5, 9, 5)
\end{aligned}$$

yazılır ve böylece,

$$P_3(t) = (3(1-t)^2 t + 12(1-t)t^2 + 5t^3, 2(1-t)^3 + 9(1-t)^2 t + 21(1-t)t^2 + 9t^3, (1-t)^3 + 9(1-t)^2 t + 9(1-t)t^2 + 5t^3)$$

elde edilir. Şimdi de ihtiyaç duyulacak olan aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$\Delta^1 b_0 = b_1 - b_0 = (1, 1, 2), \quad \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle = 6, \quad \|\Delta^1 b_0\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle} = \sqrt{6},$$

$$\Delta^1 b_1 = b_2 - b_1 = (3, 4, 0), \quad \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle = 25, \quad \|\Delta^1 b_1\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_1 \rangle} = 5,$$

$$\Delta^1 b_2 = b_3 - b_2 = (1, 2, 2), \quad \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_2 \rangle = 9, \quad \|\Delta^1 b_2\| = \sqrt{\langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_2 \rangle} = 3,$$

$$\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \rangle = 7, \quad \langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_2 \rangle = 7, \quad \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle = 11,$$

$$\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 = (-8, 6, 1), \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2 = (-2, 0, 1), \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 = (8, -6, 2),$$

$$\begin{aligned} (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0 &= (11, 17, -14), (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0 = (-1, 5, -2), (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0 = (-14, -14, 14), \\ (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_2 &= (10, 17, -22), (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2 = (-2, 5, -4), (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1 = (-8, 6, 50), \\ (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1 &= (4, 3, -50), (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1 = (-4, 3, -8), (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2 = (-16, -14, 22), \end{aligned}$$

$$\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2 \rangle = 6, \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2 \rangle = -6, \langle \Delta^1 b_2, \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1 \rangle = 6$$

elde edilir.

- $\forall t \in [0, 1]$ için Frenet çatısı, κ_{p_3} eğriliği ve τ_{p_3} burulması

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} = \frac{(1-t)^2 (1, 1, 2) + 2(1-t)t (3, 4, 0) + t^2 (1, 2, 2)}{\|(1-t)^2 (1, 1, 2) + 2(1-t)t (3, 4, 0) + t^2 (1, 2, 2)\|} \\ &= \frac{((1-t)^2 + 6(1-t)t + t^2, (1-t)^2 + 8(1-t)t + 2t^2, 2(1-t)^2 + 2t^2)}{\|((1-t)^2 + 6(1-t)t + t^2, (1-t)^2 + 8(1-t)t + 2t^2, 2(1-t)^2 + 2t^2)\|}; \\ N(t) &= \frac{(1-t)^4 ((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)^3 t ((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_1) + (1-t)^2 t^2 ((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_2) \\ &\quad + (1-t)^3 t ((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)^2 t^2 ((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t^3 ((\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2) \\ &\quad + (1-t)^2 t^2 ((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_0) + 2(1-t)t^2 ((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_1) + t^4 ((\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \times \Delta^1 b_2)}{\|(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\| \|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2(1-t)t \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} \\ &= \frac{(1-t)^4 (11, 17, -14) + 2(1-t)^3 t (4, 3, -50) + (1-t)^2 t^2 (10, 17, -22) \\ &\quad + (1-t)^3 t (-1, 5, -2) + 2(1-t)^2 t^2 (-4, 3, -8) + (1-t)t^3 (-2, 5, -4) \\ &\quad + (1-t)^2 t^2 (-14, -14, 14) + 2(1-t)t^2 (-8, 6, 50) + t^4 (-16, -14, 22)}{\|(1-t)^2 (-8, 6, 1) + (1-t)t (-2, 0, 1) + t^2 (8, -6, 2)\| \|(1-t)^2 (1, 1, 2) + 2(1-t)t (3, 4, 0) + t^2 (1, 2, 2)\|}; \\ B(t) &= \frac{(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)}{\|(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (1-t)t (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|} \\ &= \frac{(1-t)^2 (-8, 6, 1) + (1-t)t (-2, 0, 1) + t^2 (8, -6, 2)}{\|(1-t)^2 (-8, 6, 1) + (1-t)t (-2, 0, 1) + t^2 (8, -6, 2)\|}; \\ \kappa_{p_3}(t) &= \frac{2}{3} \frac{\|(1-t)^2 (-8, 6, 1) + (1-t)t (-2, 0, 1) + t^2 (8, -6, 2)\|}{\|(1-t)^2 (1, 1, 2) + 2(1-t)t (3, 4, 0) + t^2 (1, 2, 2)\|^3}; \end{aligned}$$

$$\tau_{p_3}(t) = \frac{1}{3} \frac{6(1-t)^2 - 2(1-t)t(-6) + 6t^2}{\|(1-t)^2(-8, 6, 1) + (1-t)t(-2, 0, 1) + t^2(8, -6, 2)\|^2}$$

şeklinde elde edilir.

- $t = 0$ başlangıç noktası için $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ_{p_3} eğriliği ve τ_{p_3} burulması

$$T(t)|_{t=0} = \frac{(1-t)^2(1, 1, 2) + 2(1-t)t(3, 4, 0) + t^2(1, 2, 2)}{\|(1-t)^2(1, 1, 2) + 2(1-t)t(3, 4, 0) + t^2(1, 2, 2)\|}|_{t=0} = \frac{(1, 1, 2)}{\|(1, 1, 2)\|} = \frac{(1, 1, 2)}{\sqrt{6}},$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{(1-t)^4(11, 17, -14) + 2(1-t)^3t(4, 3, -50) + (1-t)^2t^2(10, 17, -22) + (1-t)^3t(-1, 5, -2) + 2(1-t)^2t^2(-4, 3, -8) + (1-t)t^3(-2, 5, -4) + (1-t)^2t^2(-14, -14, 14) + 2(1-t)t^2(-8, 6, 50) + t^4(-16, -14, 22)}{\|(1-t)^2(-8, 6, 1) + (1-t)t(-2, 0, 1) + t^2(8, -6, 2)\| \|(1-t)^2(1, 1, 2) + 2(1-t)t(3, 4, 0) + t^2(1, 2, 2)\|}|_{t=0}$$

veya

$$N(t)|_{t=0} = \frac{(11, 17, -14)}{\|(-8, 6, 1)\| \|(1, 1, 2)\|} = \frac{(11, 17, -14)}{\sqrt{606}},$$

$$B(t)|_{t=0} = \frac{(1-t)^2(-8, 6, 1) + (1-t)t(-2, 0, 1) + t^2(8, -6, 2)}{\|(1-t)^2(-8, 6, 1) + (1-t)t(-2, 0, 1) + t^2(8, -6, 2)\|}|_{t=0} = \frac{(-8, 6, 1)}{\|(-8, 6, 1)\|} = \frac{(-8, 6, 1)}{\sqrt{101}},$$

$$\begin{aligned} \kappa_{p_3}(t)|_{t=0} &= \frac{2 \|(1-t)^2(-8, 6, 1) + (1-t)t(-2, 0, 1) + t^2(8, -6, 2)\|}{3 \|(1-t)^2(1, 1, 2) + 2(1-t)t(3, 4, 0) + t^2(1, 2, 2)\|^3}|_{t=0} \\ &= \frac{2 \|(-8, 6, 1)\|}{3 \|(1, 1, 2)\|^3} = \frac{2\sqrt{101}}{3\sqrt[3]{36}} \end{aligned}$$

$$\tau_{p_3}(t)|_{t=0} = \frac{1}{3} \frac{6}{\|(-8, 6, 1)\|^2} = \frac{2}{101}$$

şeklinde elde edilir.

- $t = 1$ bitiş noktası için $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ_{p_3} eğriliği ve τ_{p_3} burulması

$$T(t)|_{t=1} = \frac{(1-t)^2(1, 1, 2) + 2(1-t)t(3, 4, 0) + t^2(1, 2, 2)}{\|(1-t)^2(1, 1, 2) + 2(1-t)t(3, 4, 0) + t^2(1, 2, 2)\|}|_{t=1} = \frac{(1, 2, 2)}{\|(1, 2, 2)\|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$N(t)|_{t=1} = \frac{(1-t)^4(11,17,-14) + 2(1-t)^3t(4,3,-50) + (1-t)^2t^2(10,17,-22) + (1-t)^3t(-1,5,-2) + 2(1-t)^2t^2(-4,3,-8) + (1-t)t^3(-2,5,-4) + (1-t)^2t^2(-14,-14,14) + 2(1-t)t^2(-8,6,50) + t^4(-16,-14,22)}{\|(1-t)^2(-8,6,1) + (1-t)t(-2,0,1) + t^2(8,-6,2)\| \|(1-t)^2(1,1,2) + 2(1-t)t(3,4,0) + t^2(1,2,2)\|} \Big|_{t=1}$$

veya

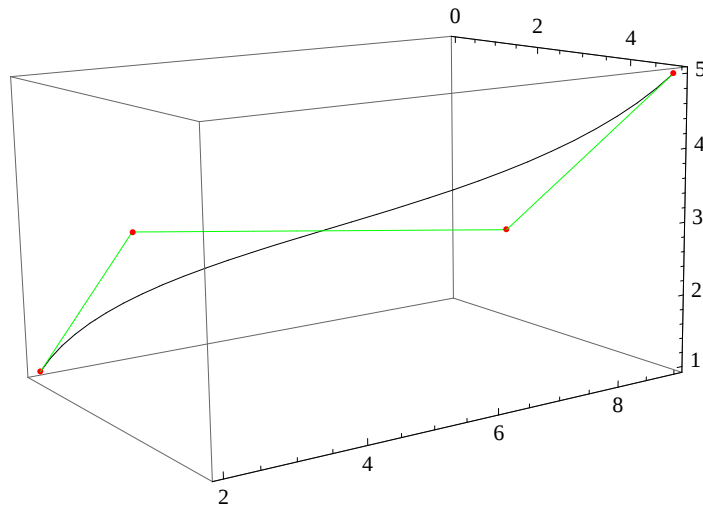
$$N(t)|_{t=1} = \frac{(-16,-14,22)}{\|(8,-6,2)\| \|(1,2,2)\|} = \frac{(-16,-14,22)}{3\sqrt{101}},$$

$$B(t)|_{t=1} = \frac{(1-t)^2(-8,6,1) + (1-t)t(-2,0,1) + t^2(8,-6,2)}{\|(1-t)^2(-8,6,1) + (1-t)t(-2,0,1) + t^2(8,-6,2)\|} \Big|_{t=1} = \frac{(8,-6,2)}{\|(8,-6,2)\|} = \frac{(8,-6,2)}{\sqrt{104}},$$

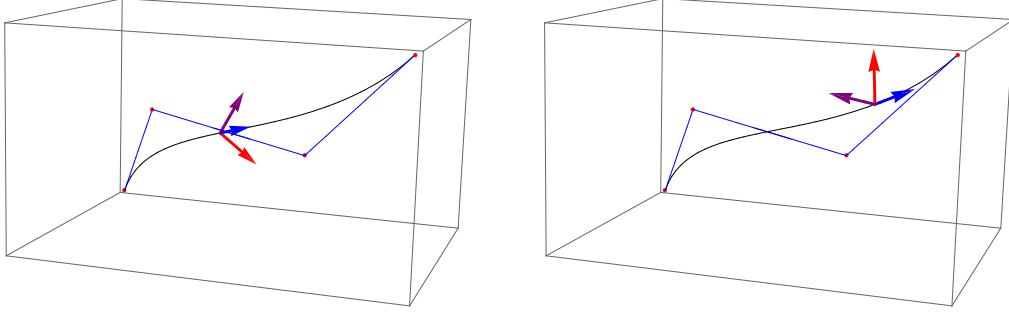
$$\begin{aligned} \kappa_{P3}(t)|_{t=1} &= \frac{2 \|(1-t)^2(-8,6,1) + (1-t)t(-2,0,1) + t^2(8,-6,2)\|}{3 \|(1-t)^2(1,1,2) + 2(1-t)t(3,4,0) + t^2(1,2,2)\|^3} \Big|_{t=1} \\ &= \frac{2 \|(8,-6,2)\|}{3 \|(1,2,2)\|^3} = \frac{2\sqrt{101}}{3^3\sqrt{9}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{P3}(t)|_{t=1} &= \frac{1}{3} \frac{6(1-t)^2 - 2(1-t)t(-6) + 6t^2}{\|(1-t)^2(-8,6,1) + (1-t)t(-2,0,1) + t^2(8,-6,2)\|^2} \Big|_{t=1} \\ &= \frac{1}{3} \frac{6}{\|(8,-6,2)\|^2} = \frac{2}{104} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 4.2 Kübik Bézier eğrisi



Şekil 4.3 Serret-Frenet çatısı ile kübik Bézier eğrisi

4.3 E^3 Öklid Uzayında n . dereceden Bézier Eğrileri için Serret-Frenet Elemanları

Tanım 4.4 $b_0, b_1, \dots, b_n$, E^3 Öklid uzayında doğrudan olmayan $(n+1)$ nokta olsun. $b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol noktalarına ve

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i = B_{0,n}(t)b_0 + B_{1,n}(t)b_1 + \dots + B_{n,n}(t)b_n \quad (4.21)$$

parametrik denklemine sahip eğriye E^3 Öklid uzayındaki birim hızlı olmayan n . dereceden Bézier eğrisi denir.

Teorem 4.3 Öklid uzayında (4.21) denklemine sahip birim hızlı olmayan n . dereceden uzaysal $P(t)$ Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısı, κ eğriliği ve τ burulması,

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\Delta^1 b_i}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\Delta^1 b_i \right\|}, \quad (4.22)$$

$$N(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)B_{j,n-2}(t)B_{k,n-1}(t)(\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta^1 b_k}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)B_{j,n-2}(t)B_{k,n-1}(t)(\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta^1 b_k \right\|}, \quad (4.23)$$

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j)}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}, \quad (4.24)$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \right\|^3}, \quad (4.25)$$

$$\tau(t) = \frac{n-2}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) B_{k,n-3}(t) \langle \Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j, \Delta^3 b_k \rangle}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2} \quad (4.26)$$

eşitlikleriyle verilir.

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin birinci ve ikinci türevlerinin, sırasıyla (2.58) ve (2.59) eşitliklerinden

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i$$

$$P''(t) = n \cdot (n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) \Delta^2 b_i$$

ve (2.60) eşitliğinden $r = 3$ yazılarak üçüncü türevin

$$P'''(t) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \sum_{i=0}^{n-3} B_{i,n-3}(t) \Delta^3 b_i$$

olduğu kullanılarak, teğet vektör alanı

$$T(t) = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} = \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i}{\left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i \right\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i \right\|}$$

şeklinde bulunur.

Binormal vektör alanı,

$$B(t) = \frac{P'(t) \times P''(t)}{\|P'(t) \times P''(t)\|} = \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \times n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(t) \Delta^2 b_j}{\left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \times n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(t) \Delta^2 b_j \right\|}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j)}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}$$

şeklinde bulunur.

Asal normal vektör alanı,

$$N(t) = B(t) \times T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \times \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(t) \Delta^2 b_j}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \times \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(t) \Delta^2 b_j \right\|} \times \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i \right\|}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) B_{k,n-1}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta b_k}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) B_{k,n-1}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta b_k \right\|}$$

şeklinde bulunur.

Eğrilik,

$$\kappa(t) = \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3} = \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \times \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(t) \Delta^2 b_j \right\|}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i \right\|^3}$$

$$= \frac{n-1}{n} \frac{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \right\|^3};$$

ve burulma,

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{\langle P'(t) \times P''(t), P'''(t) \rangle}{\|P'(t) \times P''(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \times n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(t) \Delta^2 b_j, n(n-1)(n-2) \sum_{j=0}^{n-3} B_{j,n-3}(t) \Delta^3 b_j \rangle}{\left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i \times n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} B_{j,n-2}(t) \Delta^2 b_j \right\|^2} \\ &= \frac{n-2}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) B_{k,n-3}(t) \langle \Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j, \Delta^3 b_k \rangle}{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B_{i,n-1}(t) B_{j,n-2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

$t=0$ başlangıç ve $t=1$ bitiş noktaları için Serret-Frenet elemanları [4,13,15] çalışmalarında verilmiştir:

Özel Durum 4.1 $b_0, \dots, b_n \in E^3$ kontrol noktaları olmak üzere, birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bezier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı,

$$T(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \quad (4.27)$$

$$N(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \phi - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \phi \quad (4.28)$$

$$B(t)|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \quad (4.29)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, ϕ açısı Δb_0 ve Δb_1 arasındaki açıdır.

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin $t=0$ başlangıç noktasındaki $\{T, N, B\}|_{t=0}$ Serret-Frenet çatısı hesaplandığında teğet vektör, (2.63) eşitliklerinden (Bézier eğrisinin türev ifadeleri)

$$T(t)|_{t=0} = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}|_{t=0} = \frac{n\Delta^1 b_0}{\|n\Delta^1 b_0\|} = \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir.

Binormal vektör, (2.63) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} B(t)|_{t=0} &= \frac{P'(t) \times P''(t)}{\|P'(t) \times P''(t)\|}|_{t=0} \\ &= \frac{[n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)\Delta^2 b_0]}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)\Delta^2 b_0\|} \\ &= \frac{[n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)]}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|} \\ &= \frac{\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)}{\|\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|} \\ &= \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Asal normal vektör,

$$N(t)|_{t=0} = B \times T|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|} \times \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} = \frac{(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \times \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|\Delta^1 b_0\|}$$

şeklinde elde edilir.

Son satırda E^3 uzayında verilen Lagrange özdeşliği kullanılarak

$$N(t)|_{t=0} = \frac{\langle \Delta^1 b_0, \Delta^1 b_0 \rangle \Delta^1 b_1 - \langle \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_0 \rangle \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|\Delta^1 b_0\|} = \frac{\|\Delta^1 b_0\|^2 \Delta^1 b_1 - \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \cos \phi \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| \cdot \|\Delta^1 b_0\|}$$

yazılır. Burada, ϕ açısı $\Delta^1 b_0$ ve $\Delta^1 b_1$ arasındaki açıdır. Ayrıca,
 $\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\| = \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \sin \phi$ yerleştirilerek düzenlenirse

$$\begin{aligned} N(t) \big|_{t=0} &= \frac{\|\Delta b_0\|^2 \Delta^1 b_1 - \|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\| \cos \phi \Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|^2 \sin \phi} \\ &= \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \frac{1}{\sin \phi} - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \phi \end{aligned}$$

ve böylece

$$N(t) \big|_{t=0} = \frac{\Delta^1 b_1}{\|\Delta^1 b_1\|} \csc \phi - \frac{\Delta^1 b_0}{\|\Delta^1 b_0\|} \cot \phi$$

elde edilir. $\square$

Özel Durum 4.2 $b_0, \dots, b_n$ kontrol noktaları olmak üzere, birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bezier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasında $\{T, N, B\} \big|_{t=1}$ Serret-Frenet çatısı

$$T(t) \big|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \quad (4.30)$$

$$N(t) \big|_{t=1} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \psi - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \psi \quad (4.31)$$

$$B(t) \big|_{t=1} = -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \quad (4.32)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, ψ , $\Delta^1 b_{n-2}$ ve $\Delta^1 b_{n-1}$ arasındaki açıdır.

İspat $P(t)$, Bézier eğrisinin $t=1$ bitiş noktasındaki Serret-Frenet çatısı $\{T, N, B\} \big|_{t=1}$ hesaplandığında teğet vektör, (2.64) eşitliklerinden

$$T(t) \big|_{t=1} = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \big|_{t=1} = \frac{n \Delta^1 b_{n-1}}{\|n \Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir.

Binormal vektör, (2.64) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 B(t)|_{t=1} &= \frac{P'(t) \times P''(t)}{\|P'(t) \times P''(t)\|} \Big|_{t=1} \\
 &= \frac{\left[n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)\Delta^2 b_{n-2} \right]}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)\Delta^2 b_{n-2}\|} \\
 &= \frac{\left[n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}) \right]}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|} \\
 &= \frac{\Delta^1 b_{n-1} \times (\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times (\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|} \\
 &= -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}
 \end{aligned}$$

Asal normal vektör,

$$N(t)|_{t=1} = B(t) \times T(t)|_{t=1} = -\frac{\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|} \times \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} = \frac{(\Delta^1 b_{n-2} \times \Delta^1 b_{n-1}) \times \Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \cdot \|\Delta^1 b_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir.

Son satırda E^3 uzayında verilen Lagrange özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
 N(t)|_{t=1} &= \frac{\langle \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle \Delta^1 b_{n-1} - \langle \Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-1} \rangle \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \cdot \|\Delta^1 b_{n-1}\|} \\
 &= \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\| \Delta^1 b_{n-1} \cos \psi - \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| \cdot \|\Delta^1 b_{n-1}\|}
 \end{aligned}$$

yazılır. Burada, ψ , $\Delta^1 b_{n-2}$ ve $\Delta^1 b_{n-1}$ arasındaki açıdır. Ayrıca,

$\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\| = \|\Delta^1 b_{n-1}\| \|\Delta^1 b_{n-2}\| \sin \phi$ yerleştirilerek düzenlenirse

$$N(t)|_{t=1} = \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\| \|\Delta^1 b_{n-1}\| \Delta^1 b_{n-1} \cos \psi - \|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2 \|\Delta^1 b_{n-2}\| \sin \psi} = \frac{\Delta^1 b_{n-1}}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|} \cot \psi - \frac{\Delta^1 b_{n-2}}{\|\Delta^1 b_{n-2}\|} \csc \psi$$

şeklinde de elde edilir. $\square$

Özel Durum 4.3 $b_0, \dots, b_n$ kontrol noktalarına sahip n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki eğrilik ve burulması,

$$\kappa(t)|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^2} \sin \phi \quad (4.33)$$

$$\tau(t)|_{t=0} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2} \quad (4.34)$$

şeklindedir. Burada, ϕ , Δb_0 ile Δb_1 arasındaki açıdır.

İspat $t = 0$ başlangıç noktasında birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin eğriliği,

$$\begin{aligned} \kappa(t)|_{t=0} &= \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|}{\|n\Delta^1 b_0\|^3} \\ &= \frac{n^2(n-1)}{n^3} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \end{aligned}$$

şeklinde olduğundan buradan,

$$\kappa(t)|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \quad (4.33a)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\kappa(t)|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_1\| \|\Delta^1 b_0\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3} \sin \phi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^2} \sin \phi$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$t = 0$ başlangıç noktasında birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin burulması,

$$\begin{aligned}
 \tau(t) \big|_{t=0} &= \frac{\det(P'(t), P''(t), P'''(t))}{\|P'(t) \times P''(t)\|^2} \big|_{t=0} \\
 &= \frac{\det(n\Delta^1 b_0, n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0), n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_2 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0))}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|^2} \\
 &= \frac{\langle n\Delta^1 b_0, n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) \times n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_2 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0) \rangle}{\|n\Delta^1 b_0 \times n(n-1)(\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|^2} \\
 &= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_0, (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0) \times (\Delta^1 b_2 - 2\Delta^1 b_1 + \Delta^1 b_0) \rangle}{\|\Delta^1 b_0 \times (\Delta^1 b_1 - \Delta^1 b_0)\|^2} \\
 &= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_0, (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) + (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_0) - (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + 2(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) \rangle}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2} \\
 &= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_0, (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \rangle}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\tau(t) \big|_{t=0} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2} \quad (4.34a)$$

şeklinde de ifade edilir. $\square$

Sonuç 4.1 (4.33a) ve (4.34a) ile verilen

$$\kappa(t) \big|_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|}{\|\Delta^1 b_0\|^3}$$

ve

$$\tau(t)|_{t=0} = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_0, \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2)}{\|\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1\|^2}$$

eşitliklerinin

$$\kappa(t)|_{t=0} = 2 \frac{n-1}{n} \frac{Alan(b_0, b_1, b_2)}{\|b_1 - b_0\|^3}$$

ve

$$\tau(t)|_{t=0} = \frac{3}{2} \frac{n-2}{n} \frac{Hacim(b_0, b_1, b_2, b_3)}{[Alan(b_0, b_1, b_2)]^2}$$

şeklinde yazılmasıyla da geometrik bir yorum kazandırılmış olur, [14] (Sayfa 86-87).

Özel Durum 4.4 $b_0, \dots, b_n$ kontrol noktalarına sahip n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 1$ bitiş noktasındaki eğrilik ve burulması

$$\kappa(t)|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2} \sin \psi \quad (4.35)$$

$$\tau(t)|_{t=1} = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} \quad (4.36)$$

şeklindedir. Burada, ψ , Δb_{n-1} ile Δb_{n-2} arasındaki açıdır.

İspat Birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 1$ bitiş noktasındaki eğriliği,

$$\begin{aligned} \kappa(t)|_{t=1} &= \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P(t)\|^3} \\ &= \frac{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|}{\|n\Delta b_{n-1}\|^3} \\ &= \frac{n^2(n-1)}{n^3} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \end{aligned}$$

ve

$$\kappa(t)|_{t=1} = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \quad (4.35a)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\kappa(t)|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1}\| \|\Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3} \sin \psi = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^2} \sin \psi$$

şeklinde de ifade edilir.

Birim hızlı olmayan n . dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 1$ bitiş noktasında burulması,

$$\begin{aligned} \tau(t)|_{t=1} &= \frac{\det(P'(t), P''(t), P'''(t))}{\|P'(t) \times P''(t)\|^2} \\ &= \frac{\det(n\Delta^1 b_{n-1}, n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2}), n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_{n-1} - 2\Delta^1 b_{n-2} + \Delta^1 b_{n-3}))}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|^2} \\ &= \frac{\langle n\Delta^1 b_{n-1}, (n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})) \times n(n-1)(n-2)(\Delta^1 b_{n-1} - 2\Delta^1 b_{n-2} + \Delta^1 b_{n-3}) \rangle}{\|n\Delta^1 b_{n-1} \times n(n-1)(\Delta^1 b_{n-1} - \Delta^1 b_{n-2})\|^2} \\ &= \frac{n-2}{n} \frac{\langle \Delta^1 b_{n-1}, -(\Delta^1 b_{n-2} \times \Delta^1 b_{n-3}) \rangle}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\tau|_{t=1} = -\frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2} \quad (4.36a)$$

şeklinde de ifade edilir. $\square$

Sonuç 4.2 (4.35a) ve (4.36a) ile verilen

$$\kappa(t)|_{t=1} = \frac{(n-1)}{n} \frac{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|}{\|\Delta^1 b_{n-1}\|^3}$$

ve

$$\tau(t)|_{t=1} = -\frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta^1 b_{n-1}, \Delta^1 b_{n-2}, \Delta^1 b_{n-3})}{\|\Delta^1 b_{n-1} \times \Delta^1 b_{n-2}\|^2}$$

eşitliklerinin

$$\kappa(t)|_{t=1} = 2 \frac{n-1}{n} \frac{\text{Alan}(b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|^3}$$

ve

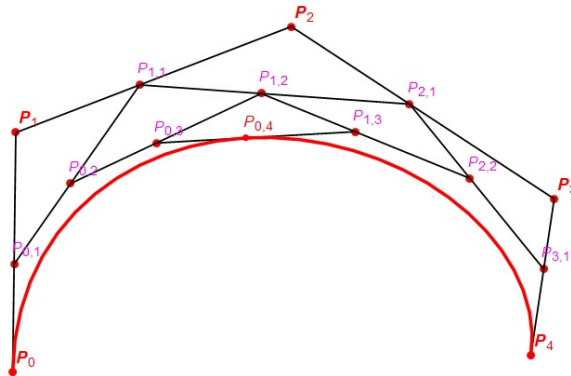
$$\tau(t)|_{t=1} = -\frac{3}{2} \frac{n-2}{n} \frac{\text{Hacim}(b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)}{[\text{Alan}(b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)]^2}$$

şeklinde yazılmasıyla da geometrik bir yorum kazandırılmış olur, [14].

4.5 E^3 Öklid Uzayında Bézier Eğrileri için Algoritma Metodu ve Bu Metod Yardımıyla Bézier Eğrisinin Serret-Frenet Elemanları

$b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol noktaları yardımıyla elde edilen $P_{i,k}(t)$ ara noktalar için aşağıdaki denklemi yazabiliriz (Şekil 4.4):

$$P_{i,k}(t) = \sum_{j=0}^k B_{j,k}(t) b_{i+j} \quad (4.37)$$



Şekil 4.4 $i = 0$ ve $n = 4$ için ara noktalar

Bu denklem yardımıyla, $P_{i,0}(t) = b_i$ ve

$$P_{0,n}(t) = P(t) \quad (4.38)$$

olduğu açıktır.

Böylece, (4.38) denklemi

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i$$

denklemleriyle verilen $n+1$ kontrol noktasına sahip n .dereceden Bézier eğrisinin algoritmik formülü olarak ifade edilir.

$P_{i,k}(t)$ ara noktaları için,

$$P_{i,k}(t) = (1-t)P_{i,k-1}(t) + tP_{i+1,k-1}(t) \quad (4.39)$$

ile verilen özyinelemeli formül elde edilir.

Sonuç 4.3 $P_{i+1,k}(t)$ ve $P_{i,k-1}(t)$ ara noktaları farkı için (4.39) formülü yardımıyla

$$P_{i+1,k}(t) - P_{i,k}(t) = (1-t)(P_{i+1,k-1}(t) - P_{i,k-1}(t)) + t(P_{i+2,k-1}(t) - P_{i+1,k-1}(t)) \quad (4.40)$$

denklemini elde edilir.

İspat $P_{i+1,k}(t)$ ara noktası, (4.39) formülü yardımıyla

$$P_{i+1,k}(t) = (1-t)P_{i+1,k-1}(t) + tP_{i+2,k-1}(t)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik ve (4.39) formülünün farkı alınarak

$$\begin{aligned} P_{i+1,k}(t) - P_{i,k}(t) &= (1-t)P_{i+1,k-1}(t) + tP_{i+2,k-1}(t) - (1-t)P_{i,k-1}(t) + tP_{i+1,k-1}(t) \\ &= (1-t)(P_{i+1,k-1}(t) - P_{i,k-1}(t)) + t(P_{i+2,k-1}(t) - P_{i+1,k-1}(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 4.1 (4.38) denklemi ile verilen $n+1$ kontrol noktasına sahip n . dereceden algoritmik Bézier eğrisinin birinci türevi,

$$P'_{0,n}(t) = P'(t) = n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)) \quad (4.41)$$

ile verilir.

İspat $P(t)$ Bézier eğrisinin birinci türevinin (2.58) eşitliğinden

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 b_i$$

olduğu biliniyor. Bu eşitlik kullanılarak

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta b_i = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) (b_{i+1} - b_i)$$

elde edilir. Böylece, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P'(t) = n \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) b_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) b_i \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4.37) denklemi kullanılarak

$$P'_{0,n}(t) = P'(t) = n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t))$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 4.4 (4.40) ve (4.41) eşitlikleri kullanılarak

$$P'_{0,n}(t) = n \left\{ (1-t) (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) + t (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) \right\} \quad (4.42)$$

elde edilir.

Sonuç 4.5 (4.40) ve (4.41) eşitlikleri kullanılarak

$$P'_{0,n}(t) = n \left\{ (1-t)^2 (P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) + 2(1-t)t (P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) + t^2 (P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) \right\} \quad (4.43)$$

elde edilir.

Sonuç 4.6 $P_{i,k}(t)$ 'nin $b_i, \dots, b_{i+k}$ kontrol noktalarına sahip algoritmik Bézier eğrisi olduğunun gözlemlenmesiyle herhangi $k \in \{1, \dots, n\}$ ve $i \in \{0, \dots, n-k\}$ değerleriyle verilen bir başka $P'_{i,k}(t)$ formülü

$$P'_{i,k}(t) = k(P_{i+1,k-1}(t) - P_{i,k-1}(t)) \quad (4.44)$$

elde edilir.

Lemma 4.2 (4.38) denklemi ile verilen $n+1$ kontrol noktasına sahip n . dereceden algoritmik Bézier eğrisinin ikinci türevi

$$P''_{0,n}(t) = n(n-1)[(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))] \quad (4.45)$$

ile verilir.

İspat $(P'_{0,n}(t))' = P''_{0,n}(t) = P''(t)$ olmasından ve (4.41), (4.44) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} (P'_{0,n}(t))' &= (n(P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)))' \\ &= n(P'_{1,n-1}(t) - P'_{0,n-1}(t)) \\ &= n((n-1)(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (n-1)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))) \\ &= n(n-1)[(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))] \end{aligned}$$

ikinci türevi elde edilir. $\square$

Sonuç 4.7 (4.40) ve (4.45) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} P''_{0,n}(t) &= n(n-1)\{(1-t)[(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) - (P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t))] \\ &\quad + t[(P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) - (P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t))]\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir.

Lemma 4.3 (4.38) denklemi ile verilen $n+1$ kontrol noktasına sahip n . dereceden algoritmik Bézier eğrisinin üçüncü türevi

$$\begin{aligned}
P_{0,n}'''(t) &= P'''(t) \\
&= n(n-1)(n-2) \left[(P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) - 2(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) + (P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) \right] \quad (4.47)
\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat (4.44) ve (4.45) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
P_{0,n}'''(t) &= P'''(t) \\
&= \{n(n-1)[(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t))]\}' \\
&= n(n-1)[(P'_{2,n-2}(t) - P'_{1,n-2}(t)) - (P'_{1,n-2}(t) - P'_{0,n-2}(t))] \\
&= n(n-1)(n-2)[(P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) - 2(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) + (P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t))]
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 4.4 $P'_{0,n}(t)$ ve $P''_{0,n}(t)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$P'_{0,n}(t) \times P''_{0,n}(t) = n^2(n-1)\{(P_{1,n-2} - P_{0,n-2}) \times (P_{2,n-2} - P_{1,n-2})\} \quad (4.48)$$

ile verilir.

İspat (4.42) ve (4.45) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
P'_{0,n}(t) \times P''_{0,n}(t) &= n \left\{ (1-t)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) + t(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) \right\} \\
&\quad \times \left\{ n(n-1) \left[(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) - (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \right] \right\} \\
&= n^2(n-1) \left\{ (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 4.8 (4.48) ile verilen vektörel çarpım, (4.40) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
P'(t) \times P''(t) &= n^2(n-1) \left\{ (P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t)) \right\} \\
&= n^2(n-1) \left\{ (1-t)(P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) + t(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) \right. \\
&\quad \left. \times (1-t)(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) + t(P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) \right\} \\
&= n^2(n-1) \left\{ (1-t)^2 \left[(P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) \times (P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) \right] \right. \\
&\quad \left. + (1-t)t \left[(P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) \times (P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) \right] \right. \\
&\quad \left. + t^2 \left[(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) \times (P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) \right] \right\} \quad (4.49)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.9 (4.47) ve (4.49) eşitlikleri kullanılarak

$$\langle P'(t) \times P''(t), P'''(t) \rangle = N \langle (P_{1,n-3} - P_{0,n-3}) \times (P_{2,n-3} - P_{1,n-3}), (P_{3,n-3} - P_{2,n-3}) \rangle \quad (4.50)$$

elde edilir. Burada, $N = n^3(n-1)^2(n-2)$ dir.

4.5.1 E^3 Öklid Uzayında n . dereceden Bézier Eğrileri için Algoritma Metodu ve Bu Metod Yardımıyla Bézier Eğrisinin Serret-Frenet Elemanları

Bu bölümde, (4.37)-(4.50) eşitlikleri ve ara noktalar yardımıyla Bézier eğrisinin Serret-Frenet elemanları tekrar elde edilecektir.

Teorem 4.4 (4.37) ile verilen $P_{i,k}(t)$ ara noktaları kullanılarak, (4.38) denkleminde sahip $b_0, b_1, \dots, b_n$ kontrol noktasına sahip n . dereceden birim hızlı olmayan $P_{0,n}(t)$ algoritmik Bézier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için T birim teğet vektör alanı

$$T(t) = \frac{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)}{\|P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\|} \quad (4.51)$$

veya

$$T(t) = \frac{(1-t)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) + t(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))}{\|(1-t)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) + t(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\|} \quad (4.52)$$

geçerlidir. B birim binormal vektör alanı

$$B(t) = \frac{(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))}{\|(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\|} \quad (4.53)$$

geçerlidir. N birim asal normal vektör alanı

$$N(t) = \frac{\{(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\} \times \{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\}}{\| \{(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\} \times \{P_{1,n-1}(t) - P_{0,n-1}(t)\} \|} \quad (4.54)$$

veya

$$N(t) = \frac{\{(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\} \times \{(1-t)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) + t(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\}}{\|(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\} \times \{(1-t)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) + t(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\}} \quad (4.55)$$

geçerlidir. κ eğriliği

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\|(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\|}{\|P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)\|^3} \quad (4.56)$$

veya

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\|(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\|}{\|(1-t)(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) + t(P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\|^3} \quad (4.57)$$

geçerlidir. τ burulması

$$\tau(t) = \frac{n-2}{n} \frac{\langle (P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) \times (P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)), (P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) \rangle}{\|(P_{1,n-2}(t) - P_{0,n-2}(t)) \times (P_{2,n-2}(t) - P_{1,n-2}(t))\|^2} \quad (4.58)$$

veya

$$\tau(t) = \frac{n-2}{n} \frac{\langle (P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) \times (P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)), (P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t)) \rangle}{\left\| \{(1-t)(P_{1,n-3}(t) - P_{0,n-3}(t)) + t(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t))\} \times \{(1-t)(P_{2,n-3}(t) - P_{1,n-3}(t)) + t(P_{3,n-3}(t) - P_{2,n-3}(t))\} \right\|^2} \quad (4.59)$$

geçerlidir.

İspat Teorem 4.4'deki eşitlikler, birim hızlı olmayan eğriler için verilen Serret-Frenet çatısı, eğrilik, burulma formülleri ve (4.37)-(4.50) eşitlikleri kullanılarak elde edilir. $\square$

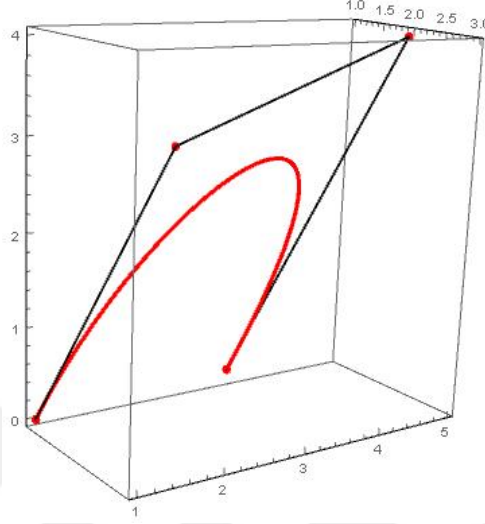
Sonuç 4.10 Teorem 4.3 ile Teorem 4.4'ün sonuçları aynıdır. Çünkü (4.37) ve (4.38) denklemleri arasındaki ilişkiden yararlanılarak her iki teoremden verilen denklemler arasında geçiş sağlanır.

Örnek 4.3 Kübik Bézier eğrisi için $b_0 = (1, 0, 1)$, $b_1 = (2, 3, 2)$, $b_2 = (5, 4, 2)$ ve $b_3 = (2, 1, 3) \in E^3$ kontrol noktaları verilsin. Bu kübik Bézier eğrisini kullanarak, Teorem 4.3 ile Teorem 4.4 sonuçlarının aynı olduğunu gerçekeyiniz.

Çözüm (4.37) , (4.38) denklemlerini ve Bernstein polinomu tanımı kullanılarak, verilen kübik Bézier eğrisi denklemi

$$P_{0,3}(t) = ((1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 15t^2(1-t) + 2t^3, 9t(1-t)^2 + 12t^2(1-t) + t^3, (1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 6t^2(1-t) + 3t^3)$$

şeklinde bulunur (Şekil 4.4).



Şekil 4.5 E^3 uzayında Kübik Bézier eğrisi

Teorem 4.4'de $n = 3$ yazılarak, algoritmik Bézier eğrisi için $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet elemanları, $\forall t \in [0,1]$ için

$$T(t) = \frac{P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)}{\|P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\|}$$

$$B(t) = \frac{(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \times (P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t))}{\|(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \times (P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t))\|}$$

$$N(t) = \frac{\{(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \times (P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t))\} \times \{P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\}}{\| \{(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \times (P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t))\} \times \{P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\} \|}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\|(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \times (P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t))\|}{\|P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{1}{3} \frac{\langle (P_{1,0}(t) - P_{0,0}(t)) \times (P_{2,0}(t) - P_{1,0}(t)), (P_{3,0}(t) - P_{2,0}(t)) \rangle}{\|(P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t)) \times (P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t))\|^2}$$

şeklinde elde edilir.

(4.37) denklemi kullanılarak

$$P_{1,2}(t) - P_{0,2}(t) = (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2t(1-t) \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2$$

$$P_{1,1}(t) - P_{0,1}(t) = (1-t) \Delta^1 b_0 + t \Delta^1 b_1$$

$$P_{2,1}(t) - P_{1,1}(t) = (1-t) \Delta^1 b_1 + t \Delta^1 b_2$$

$$P_{3,0}(t) - P_{2,0}(t) = b_3 - b_2 = \Delta^1 b_2$$

$$P_{2,0}(t) - P_{1,0}(t) = b_2 - b_1 = \Delta^1 b_1$$

$$P_{1,0}(t) - P_{0,0}(t) = b_1 - b_0 = \Delta^1 b_0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$T(t) = \frac{(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2t(1-t) \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2t(1-t) \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2\|} = \frac{(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)\|}$$

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + t(1-t) (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)}{\|(1-t)^2 (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + t(1-t) (\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2 (\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2)\|} \\ &= \frac{(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)}{\|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(t) &= B(t) \times T(t) \\ &= \frac{(32t^4 + 64t^3 - 142t^2 + 114t - 27, 172t^4 - 284t^3 + 156t^2 - 20t - 7, 20t^4 - 72t^3 + 36t^2 - 28t + 6)}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)\| \|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|} \end{aligned}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)\|^3}$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{1}{3} \frac{\langle \Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1, \Delta^1 b_2 \rangle}{\|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|^2} \\ &= \frac{1}{3} \frac{-14}{\|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|^2} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, Teorem 4.3’de $n = 3$ yazılarak, algoritmik Bézier eğrisi için $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Serret-

Frenet elemanları, $\forall t \in [0,1]$ için

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) \Delta^1 b_i}{\left\| \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) \Delta^1 b_i \right\|}$$

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j)}{\left\| \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}$$

$$N(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^2 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) B_{k,2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta b_k}{\left\| \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^2 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) B_{k,2}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \times \Delta b_k \right\|}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\left\| \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|}{\left\| \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) \Delta^1 b_i \right\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{1}{3} \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^0 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) B_{k,0}(t) \langle \Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j, \Delta^3 b_k \rangle}{\left\| \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) \right\|^2}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca, (4.21) denkleminde $n = 2$ yazılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) \Delta^1 b_i &= (1-t)^2 \Delta^1 b_0 + 2t(1-t) \Delta^1 b_1 + t^2 \Delta^1 b_2 \\ &= (-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 B_{i,2}(t) B_{j,1}(t) (\Delta^1 b_i \times \Delta^2 b_j) &= (1-2t+t^2)(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_1) + (t-t^2)(\Delta^1 b_0 \times \Delta^1 b_2) + t^2(\Delta^1 b_1 \times \Delta^1 b_2) \\ &= (-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$T(t) = \frac{(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)\|};$$

$$B(t) = \frac{(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)}{\|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|};$$

$$\begin{aligned} N(t) &= B(t) \times T(t) \\ &= \frac{(32t^4 + 64t^3 - 142t^2 + 114t - 27, 172t^4 - 284t^3 + 156t^2 - 20t - 7, 20t^4 - 72t^3 + 36t^2 - 28t + 6)}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)\| \|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|} \end{aligned}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{3} \frac{\|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|}{\|(-8t^2 + 4t + 1, -2t^2 - 4t + 3, 1 - 2t + 2t^2)\|^3};$$

$$\tau(t) = \frac{1}{3} \frac{-14}{\|(-6t^2 + 8t - 1, 4t^2 - 10t + 3, -20t^2 + 22t - 8)\|^2}$$

elde edilir.

Böylece, Örnek 4.3'de verilen kübik Bézier eğrisi için Teorem 4.3 ile Teorem 4.4'ün sonuçlarının aynı olduğu görülür.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bézier eğrileri, çoğunlukla BDT alanında kullanılır ve tasarım açısından avantajlıdır. Tezimizde, bu eğrileri diferansiyel geometri açısından ele aldık. Bir eğrinin temel elemanları olan Serret-Frenet elemanlarını, Bézier eğrisi için E^2 Öklid düzlemi ve E^3 Öklid uzayında ele aldık. Literatürde bu elemanlar, uzaysal Bézier eğrileri için sadece uç noktalar; başlangıç ve bitiş noktasında ele alınmıştır. Biz ise bu elemanları, bu eğriler için E^2 Öklid düzleminde her $t \in [0,1]$ parametresinde ve uç noktalarda hesapladık. Ek olarak, bu elemanları E^3 Öklid uzayında her $t \in [0,1]$ parametresi için hesapladık.

Dahası, ara noktaları ele alan algoritmik Bézier eğrisinin tanımı verilerek E^2 Öklid düzlemi ve E^3 Öklid uzayında, her $t \in [0,1]$ parametresi için bu elemanları tekrar ele aldık. Algoritma ile yapılan hesaplamalarda, türev hesabı daha az zaman kaybına sebep olur ve daha kararlı bir yapı oluşturur. Kararlılık ve zaman, eğri ve yüzey tasarımında önemlidir. Sonuç olarak, algoritma kullanılarak yapılan hesaplamalar daha avantajlıdır.

E^2 Öklid düzleminde ve E^3 Öklid uzayında ele alınan bu elemanları, yine birim hızlı olmayan Bézier eğrileri için E^4 Öklid uzayında bulma da açık bir problemidir. Devamında da, yine bu elemanları, algoritma tanımı verilen Bézier eğrisi için E^4 Öklid uzayında ele almak ikinci bir açık problem olarak düşünülebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Anand, Vera B., (1992). Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers, First Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [2] Iglesias, A., Gálvez, A., Loucera, C., (2016). "Two Simulated Annealing Optimization Schemas for Rational Bézier Curve Fitting in the Presence of Noise", Mathematical Problems in Engineering, 2016: 1-17.
- [3] Forrest, A.R., (1968). Curves and Surfaces for Computer-Aided Design, PhD Thesis, University of Cambridge, Cambridge.
- [4] Farin, G., (1996). Curves and Surfaces For Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide, Fourth Edition, Academic Press, San Diego.
- [5] Ghomanjani, F., Farahi, M. H., Kılıçman, A., Kamyad, A.V., Pariz, N., (2014). "Bézier Curves Based Numerical Solutions of Delay Systems with Inverse Time", Mathematical Problems in Engineering, 2014: 1-16.
- [6] Hu, G., Cao, H., Zhang, S., (2016). "Approximate Multidegree Reduction of λ – Bézier Curves", Mathematical Problems in Engineering, 2016: 1-12.
- [7] Hu, G., Ji, X., Qin, X., Zhang, S., (2015). "Shape Modification for λ – Bézier Curves Based on Constrained Optimization of Position and Tangent Vector", Mathematical Problems in Engineering, 2015: 1-12.
- [8] Misro, M. Y., Ramli, A., Ali, J. M., (2017). "Quintic Trigonometric Bézier Curve with Two Shape Parameters", Sains Malaysiana, 46: 825-831.
- [9] Farin, G., Sapidis, N., (1989). "Curvature and the fairness of Curves and Surfaces", IEEE Computer Graphics and Applications, 9: 52-57.
- [10] Frey, W. H., Field, D. A., (2000). "Designing Bézier Conic Segments with Monotone Curvature", 17: 457-483.
- [11] Goldman, R., (2005). "Curvature Formulas for Implicit Curves and Surfaces", Computer Aided Geometric Design, 22: 632-658.
- [12] Drexel Üniversitesi, Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Bilgisayar Grafikleri 1 Dersi Notları, <https://www.cs.12.edu/~david/Courses/CS430/>, 12 Kasım 2014.

- [13] Marsh, Duncan, (2004), Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Second Edition, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg.
- [14] Farin, G., Hoschek, J., Kim, M-S., (2002). Handbook of Computer Aided Geometric Design, Elsevier Science, North Holland.
- [15] Kuşak Samancı, H., Çelik S., İncesu, M., (2015) "The Bishop Frame of Bezier Curves", Life Science Journal, 12(6): 175-180.
- [16] Gray, A., Abbena, E., Salamon, S., (2016), Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/CRC: Boca Raton, FL, USA.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Esra ERKAN
Doğum Tarihi ve Yeri : 01.07.1985, Konak/İZMİR
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : esra.erkar@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Ege Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik (İ.Ö)	Ege Üniversitesi	2009
Lise	Sayısal	İzmir Kız Lisesi	2002

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014-Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013-2014	Harran Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. **Erkan E.** ve Yüce, S., (2018). "Serret-Frenet Frame and Curvatures of Bézier Curves", Mathematics, 6(12): 321-321.

Bildiri

1. **Erkan E.** ve Yüce, S., (2018). "The Theory of Bézier Curves in E^4 ", International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM), VAN, Turkey.
2. **Erkan E.** ve Tantay, B., (2012). "Duality in Designing of Ruled and Developable Surfaces", X. Geometri Sempozyumu, Balıkesir, Türkiye.

ÖDÜLLERİ

1. 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs Programı, TÜBİTAK, Eylül 2013.