

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

GÜLŞEN ORUCOVA BÜYÜKÖZ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA BAYRAM**

İSTANBUL, 2018

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

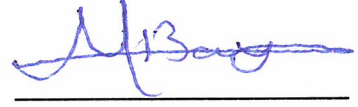
Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ tarafından hazırlanan tez çalışması 28.12.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

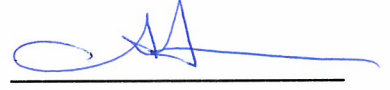
Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Jüri Üyeleri

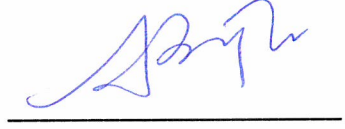
Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
İstanbul Gelişim Üniversitesi



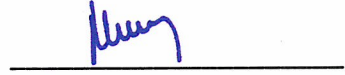
Doç. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi



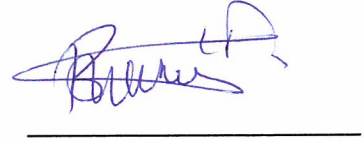
Dr. Öğretim Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi



Prof. Dr. Nuran GÜZEL
Yıldız Teknik Üniversitesi



Doç. Dr. Bülent YILMAZ
Marmara Üniversitesi





Bu alışma, TÜBİTAK'ın "2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı" ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince değerli bilgileri,engin tecrübeleri ile bana yol gösteren, güler yüzü ve samimiyeti ile çalışmalarım da yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Mustafa BAYRAM’a teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran, tez çalışmam boyunca öneri ve yorumları ile tezimin şekillenmesinde yardımcı olan Doç. Dr. Aydın SEÇER ve Dr. Öğr. Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU hocalarıma teşekkür ederim.

Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Prof. Dr. Nuran GÜZEL ve Doç. Dr. Bülent YILMAZ hocalarıma teşekkür ederim.

“2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı” kapsamında doktora eğitimim süresince sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığına teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca her konuda yanımda olan aileme, tez çalışmam boyunca beni motive eden babam Prof. Dr. Eşref ORUCOV’a, varlığıyla bana güç veren, zor zamanlarımda destekçim olan sevgili eşim Tolgahan BÜYÜKÖZ’e, birlikte çalışma yapmaktan keyif aldığım canım arkadaşım Tuğçem PARTAL’a sonsuz teşekkürler...

Aralık, 2018

Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	3
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Olasılık Teorisi	5
2.1.1 Olasılık Aksiyomları.....	6
2.1.2 Bir Rassal Değişkenin Beklenen Değeri	8
2.1.3 Beklenen Değerin Özellikleri	9
2.1.4 Bir Rassal Değişkenin Varyansı	9
2.1.5 Varyansın Özellikleri	9
2.2 Stokastik Analiz	10
2.2.1 Stokastik İntegraller.....	13
2.2.2 Ito Stokastik İntegralleri	14
2.2.3 Ito Stokastik İntegrallerinin Bazı Özellikleri	14
2.2.4 Stratonovich İntegrali	15

BÖLÜM 3

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER	16
3.1 Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Varlık-Teklik Teoremi	17
3.2 Ito Formülü	18
3.3 Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler	18
3.4 Stokastik Diferansiyel Denklemler Sistemleri	21
3.4.1 Stokastik Diferansiyel Denklemler Sistemleri İçin Ito Formülü	23
3.4.2 Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler Sistemleri	23
3.5 İndirgenabilir Stokastik Diferansiyel Denklemler	24
3.6 Stratonovich Stokastik Diferansiyel Denklemler	26

BÖLÜM 4

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....	27
4.1 Ito Taylor Açılımı	27
4.2 Euler Maruyama Metodu.....	30
4.3 Milstein Metodu	31
4.4 Birinci Mertebeden Kuvvetli Açık Şema.....	32
4.5 İkinci Mertebeden Basitleştirilmiş Taylor Şeması.....	32
4.6 Çözümlerin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklığı	33
4.7 Stokastik Kararlılık.....	34

BÖLÜM 5

GECİKMELİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	37
5.1 Gecikmeli Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Genel Formu	38
5.2 Gecikmeli Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Varlık Teklik Teoremi..	39
5.3 Gecikmeli Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler	41
5.4 Gecikmeli Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri	42
5.4.1 Euler Maruyama Metodu	42
5.4.2 Heun Metodu	43

BÖLÜM 6

UYGULAMALAR	44
-------------------	----

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER	67
KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ.....	72

SİMGE LİSTESİ

Ω	Örnek uzay
$\mathfrak{F}$	Sigma cebiri
$(\Omega, \mathfrak{F})$	Ölçülebilir uzay
$P(X)$	Olasılık ölçüsü
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$	Olasılık uzayı
$X(t)$	Stokastik süreç
$X^{(q)}(t)$	$X(t)$ stokastik sürecinin q . bileşeni
$X(t_i)$	X sürecinin t_i anındaki değeri
$\hat{X}(t_i)$	$\hat{X}$ yaklaşık sürecinin t_i anındaki değeri
$X(t-\tau)$	τ gecikmeli stokastik süreç
$W(t)$	Wiener süreci
H_{SP}	Stokastik süreçlerin Hilbert uzayı
H_{RV}	Rassal (rasgele) değişkenlerin Hilbert uzayı
Δt	Adım uzunluğu
ϕ_{t,t_0}	Temel çözüm
$E(X)$	X rassal değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	X rassal değişkeninin varyansı

KISALTMA LİSTESİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklemler
DDD	Deterministik Diferansiyel Denklemler
EM	Euler Maruyama
GSDD	Gecikmeli Stokastik Diferansiyel Denklemler
GLSDD	Gecikmeli Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler
LSDD	Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler
LSDDS	Lineer Stokastik Diferansiyel Denklem Sistemleri
SDD	Stokastik Diferansiyel Denklemler
SDDS	Stokastik Diferansiyel Denklem Sistemleri
SiD	Stokastik İntegral Denklemi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 6. 1	$N = 2^{10}$ için 10000 örneklem yol üzerinden bulunan analitik çözümün ortalaması ve 50 örneklem yol için analitik çözümler	47
Şekil 6. 2	$N = 2^{10}$ için 10000 örneklem yol üzerinden bulunan EM yaklaşık çözümün ortalaması ve 50 örneklem yol için EM yaklaşık çözümleri	48
Şekil 6. 3	$N = 2^{10}$ için 10000 örneklem yol üzerinden bulunan Milstein yaklaşık çözümün ortalaması ve 50 örneklem yol için Milstein yaklaşık çözümleri..	48
Şekil 6. 4	$N = 2^9$ için tek bir yol üzerinden X 'in analitik çözümü ile EM ve Milstein yaklaşık çözümleri.	49
Şekil 6. 5	$N = 2^{13}$ için tek bir yol üzerinden X 'in analitik çözümü ile EM ve Milstein yaklaşık çözümleri	49
Şekil 6. 6	$N = 2^9$ için tek yol üzerinden EM yaklaşımı ve Milstein yaklaşımının hata fonksiyonu.....	50
Şekil 6. 7	$N = 2^{13}$ için tek yol üzerinden EM yaklaşımı ve Milstein yaklaşımının hata fonksiyonu	50
Şekil 6. 8	$N = 2^9$ için tek bir yol üzerinden EM, Milstein ve birinci mertebeden kuvvetli açık metodlarıyla elde edilen nümerik çözümler, analitik çözüm.	53
Şekil 6. 9	$N = 10000$ için tek yol üzerinde X 'in analitik, EM ve Milstein yaklaşık çözümleri.....	56
Şekil 6. 10	$N = 10000$ için tek yol üzerinde X 'in analitik, Milstein ve 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor çözümleri	62
Şekil 6. 11	$N = 2^{10}$ için analitik çözüm ve EM ile Heun nümerik çözümleri	65

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 6. 1	EM ve Milstein metodları için yaklaşık değerler 46
Çizelge 6. 2	EM ve Milstein metodları için ortalama karesel hata 46
Çizelge 6. 3	EM ve Milstein ve birinci mertebeden kuvvetli açık çözümlerinin N 'in farklı değerleri için ortalama mutlak hatası 54
Çizelge 6. 4	EM ve Milstein yaklaşık çözümlerinin N 'in farklı değerleri için ortalama mutlak hatası..... 56
Çizelge 6. 5	Milstein ve 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor yaklaşık çözümlerinin N 'in farklı değerleri için ortalama mutlak hatası..... 62
Çizelge 6. 6	EM ve Heun yaklaşık çözümlerinin 100 örneklem yol üzerinden N 'in farklı değerleri için ortalama karesel hatası..... 66

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Bu tez çalışmasında stokastik diferansiyel denklemlerin (SDD) türleri tanımlanarak analitik (kesin) ve nümerik çözüm yöntemlerine çalışılmıştır. Tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde SDD ile ilgili literatür özeti, tezin amacı ve hipotez verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak olan temel kavramlardan, tanımlardan bahsedilmiş ve deterministik diferansiyel denklemlerden SDD'e geçiş anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde SDD'in genel hali tanıtılarak çözümleri için varlık teklik şartları verilmiştir. Lineer, lineere indirgenebilir SDD ve stokastik diferansiyel denklem sistemleri (SDDS), bu denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde Ito Taylor açılımı ve bu açılmadan EM, Milstein şemalarının elde edilmesi verilmiştir. Yaklaşık çözümler bulmamıza yardımcı olacak diğer nümerik metodların şemaları üzerinde durulmuştur.

Beşinci bölümde ise gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler (GSDD) tanıtılmış ve gecikmeli lineer stokastik diferansiyel denklemlerden (GLSDD) bahsedilmiştir. Bu denklemlerin analitik çözümünün elde edilmesi verilmiştir.

Altıncı bölüm uygulamalardan oluşmaktadır. Bölümün ilk uygulamasında 10000 yol üzerinden lineer olmayan SDD'in analitik ve nümerik çözümü elde edilerek ortalaması alınmıştır. Bu ortalama çözüm, 50 örneklem yol üzerinden bulunan çözümlerle aynı

grafikte çizilmiştir. Farklı adım uzunlukları için modelin analitik ve nümerik çözümleri MATLAB programlama dilinde yazmış olduğumuz kodlar yardımıyla hesaplanmıştır. Çözümlerin ortalama karesel hata tablosu, hata grafikleri verilmiştir. Bunun dışında lineer SDD'e indirgenebilir, SDDS, Stratonovich SDD'i ile ilgili birer problem analitik ve nümerik olarak çözülmüştür. Son olarak gecikmeli lineer stokastik diferansiyel denklem modeli analitik ve nümerik olarak hesaplanmıştır. Bütün çözümler grafiklerle ve hata tablolarıyla desteklenmiş ve yorumlanmıştır.

Yedinci bölümde ise bu çalışmadan çıkan sonuçlar özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Stokastik diferansiyel denklemler, lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemler, gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler, sayısal çözümler, örneklem yol.



NUMERICAL SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ

Department of Mathematics

PhD Thesis

Adviser: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

In this thesis, the types of stochastic differential equations are defined and analytical (exact) and numerical solution methods are studied. The thesis consists of seven chapters.

In the first chapter, the literature summary, the purpose and the hypothesis of the thesis are given.

In the second chapter, the basic concepts, definitions and the transition from deterministic differential equations to stochastic differential equations are explained.

In the third chapter, the general form of stochastic differential equations is introduced and the existence, uniqueness conditions for their solutions are given. Linear, reducible stochastic differential equations, systems of stochastic differential equations and their analytical solutions are mentioned.

In the fourth chapter, Ito Taylor expansion is given and EM, Milstein schemes are obtained from this expansion. Schemes of other numerical methods are given.

In the fifth chapter, delayed stochastic differential equations are introduced and delayed linear stochastic differential equations are mentioned. The analytical solutions of these equations are given.

The sixth chapter consists of applications. In the first application of the chapter, analytical and numerical solutions of non-linear stochastic differential equations are obtained over 10000 sample paths and averaged. This average solution is plotted in

the same graph as the solutions found over 50 sample paths. The analytical and numerical solutions of the model for different step size are calculated by using the codes written in MATLAB programming language. Mean square error table and error graphs of the solutions are given. In addition, reducible stochastic differential equations, problems related to Stratonovich system of stochastic differential equations are solved analytically and numerically. Finally, the model of the delayed linear stochastic differential equation is calculated analytically and numerically. All solutions are supported and interpreted with graphs and error tables.

In the seventh chapter, the results of this study are summarized.

Keywords: Stochastic differential equations, non-linear stochastic differential equations, delayed stochastic differential equations, numerical solutions, sample path.



1.1 Literatür Özeti

Birçok bilim alanında sistemleri modellerken adi diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmuştur. Ancak bu modellerde dış etkenlerin rassallığı veya parametrelerin değişkenliği çoğu zaman göz ardı edilmiştir. Eğer adi diferansiyel denklemlere rassallığı gösteren terim eklenirse SDD'in elde edildiği bulunmuştur. Bu rassallığı ilk olarak 1827 yılında Robert Brown gözlemlemiştir. Bu sebeple bu terime Brown hareketi denilmiştir. Brown hareketi tanımı gereği diferansiyellenemez olduğundan SDD'in integral hali çalışılmıştır. SDD'in analitik çözümü normal analiz yöntemleriyle bulunamamıştır. Japon matematikçi Kyoshi Ito 1951 yılında "Ito lemmasını" tanımlayarak stokastik analize büyük bir katkı sağlamıştır. Bu lemma ile birçok SDD'in analitik çözümü bulunabilmektedir. 1966'da Rus fizikçi Ruslan Stratonovich Ito stokastik integralini modifiye ederek Stratonovich integralini tanımlamıştır. Bu iki integral arasındaki ilişki sayesinde Ito SDD'i ve Stratonovich SDD'i birbirine dönüştürülerek analitik çözüm bulunabilmektedir. SDD hisse senedi, popülasyon büyümesi gibi modellerde karşımıza çıkarken Stratonovich stokastik analizi dinamik sistemlerde ve parçacık hareketini modellerken fizik, mühendislik alanlarında karşımıza çıkar. 1978'de Boyce rassal adi diferansiyel denklemler için nümerik metod geliştirmiştir [1]. Ancak bu metodun SDD'e uygulanışı denklemin katsayılarına bağlı olarak değiştiğinden kullanışlı olmamıştır. [2]'de Kushner zaman ve değişkenleri diskretleyerek yaklaşık çözüm bulmayı amaçlamıştır. Kullandığı dönüşüm matrisleri çok boyutlu olduğundan hesaplamalar uğraştırıcı olmuştur. Daha sonra SDD'i çözerken kullanılan örneklem yolların simülasyonu bilgisayarda hesaplanmıştır. Simülasyonlarla ilgili ilk çalışmalar [3], [4],

[5]'de araştırılmıştır. Böylece SDD birçok alanda etkili ve geniş uygulamalara sahip olmuştur. [6] çalışmasında lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemlerin analitik çözümü üzerine uygulamalar yapılmıştır. [7]'de Yoshihiro Saito ve Taketomo Mitsui analitik çözümün yerine reelleştirilmiş analitik çözüm adı verdikleri seri toplamı kullanmışlardır.

Adi diferansiyel denklemlerde analitik çözümün bulunması zor olduğunda veya analitik çözüm bulunamadığında nümerik metodlara başvurulmuştur. Bu nümerik metodların çoğu Taylor seri açılımından elde edilmiştir. Benzer olarak SDD için kullanılan nümerik metodlar da Ito Taylor açılımına dayanmaktadır. [8]'de Ito Taylor açılımı ve nümerik metodların elde edilişinden ayrıntılı olarak bahsedilmiştir. [9]'da Euler Maruyama veya EM metodu olarak bilinen metodun Ito Taylor açılımından elde edilişi verilmiştir. Grigori N. Milstein ise Ito Taylor açılımını ikinci basamaktan keserek Milstein metodunu elde etmiştir [10]. Ito Taylor açılımını yine farklı basamaklardan keserek 3/2. mertebeden Taylor şeması, 2. mertebeden Taylor şeması gibi nümerik metodlar elde edilmiştir [8]. SDD için Runge Kutta metodu 1987'de Chang, C. C. tarafından çalışılmıştır [11]. Daha sonrasında Burrage, P. M. 1999'da tez çalışmasında SDD için 4. mertebeden Runge-Kutta metodunu elde etmiştir [12]. [13]'de lineer SDD için Monte Carlo metodundan bahsedilmiştir. Higham [14] çalışmasında EM ve Milstein metodlarının yakınsaklığını incelemiştir. [15]'de ise Higham ve Mao yerel Lipschitz şartları altında SDD'in EM ve Milstein yaklaşık çözümlerinin kuvvetli yakınsaklığını araştırmışlardır. [16]'da Mao [15]'deki çalışmayı geliştirerek kesik EM metodunu elde etmiştir. [17]'de EM ve Milstein metodları düzenlenerek parçalı adım metodları elde edilmiştir. Rüemelin [18]'de SDD için Heun metodunu vermiştir. SDD'in çözümünün varlığı tekliği ile ilgili şartlar ve teoremler [19], [20], [21], [22], [23]'de ayrıntılı olarak verilmiştir. [24]'de SDD için tahmin yöntemleri verilmiştir.

Stokastik osilatörler beyaz gürültüde ekstra düzensizlik olduğu durumları modellemek için kullanılır. [21], [25]'de stokastik osilatörlerin analitik çözümü, [26], [27], [28]'de ise yaklaşık çözümü incelenmiştir. Stratonovich SDD sistemi olan Kubo osilatörü nükleer manyetik rezonans, moleküler spektroskopi alanlarında karşımıza çıkmaktadır. [29], [30]'da Kubo osilatörü test denklemi olarak kullanılmış, EM ve orta nokta metodu ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Günlük hayatımızda gecikme her zaman karşımıza çıkmaktadır. Fiziksel bir sisteme dışardan etkide bulunulduğunda tepkinin oluşması için kısa da olsa bir süreye ihtiyaç vardır. Benzer şekilde biyolojik sistemlerde canlının dışardan yapılan etkilere verdiği tepki için bir süre gerekmektedir. İlaç tedavisi gören bir hastanın ilacı alır almaz iyileşmediği tedaviye bir süre sonra cevap vermesi de gecikmeye örnektir. Bir elektrik devresini çalıştırmak için düğmeye bastığımızdan çok kısa bir süre sonra devrenin çalışması da yine gecikme örneğidir. Gerçekçi bir model kurmak için sistemtemdeki gecikmelerin modele yansıtılması gerekmektedir. Bu durumda gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlere (GSDD) ihtiyaç doğmaktadır. GSDD'in biyoloji ve genetik uygulamalarına [31], [32], [33], [34], finans uygulamalarına [35], [36] ve sinir ağlarıyla ilgili uygulamalarına [21], [37]'dan ulaşılabilir. Gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerinin çözümü için varlık teklik şartları X. Mao'nun [21] kitabında etraflı olarak verilmektedir. Ayrıca GSDD'in Milstein metodu için nümerik uygulamaları [38], [39]'de incelenmiştir. [40]'da GSDD'in çok adım EM yaklaşımı verilmiştir. [41]'da GSDD için Taylor metodları anlatılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada stokastik diferansiyel denklem çeşitleri tanıtılarak, bu denklemler için analitik ve nümerik çözüm yöntemleri verilecektir. Lineer, lineer olmayan stokastik diferansiyel denklem modelinin analitik ve nümerik çözümleri elde edilerek, hata tabloları ve grafiklerle çözümler yorumlanacaktır. Ayrıca Stratonovich SDD'inden bahsedilerek uygulama olarak Kubo osilatörünün analitik ve nümerik çözümleri grafik ve hata tablosu yardımıyla incelenecektir. Son olarak gecikmeli lineer stokastik diferansiyel nümerik olarak çözülecektir.

Tezin amacı analitik ve nümerik çözümler arasında hataları incelemek, yorumlamak, çoklu yol üzerinden lineer olmayan SDD çözmektir.

1.3 Hipotez

Stokastik diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri genelde tek bir örneklem yol üzerinden hesaplanmaktadır. Oysa olasılık uzayında birçok örneklem yol olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada lineer olmayan stokastik diferansiyel denklem modeli

10000 yol üzerinden EM ve Milstein metodları ve MATLAB programı yardımıyla çözülecektir. Ayrıca Ito analizi kullanılarak analitik çözüm bulunacaktır. Daha sonra farklı adım uzunlukları için bu çözümlerin karesel ortalama hatası hesaplanacaktır. Elde edilen çizelgeler ve grafiklerle çözümler yorumlanacaktır. Lineer indirgenebilir SDD analitik ve nümerik olarak çözülecektir. Bu çözümlerden ortalama mutlak hata çizelgesi elde edilecektir. Bunun dışında stokastik diferansiyel denklem sisteminin çözümleri analitik ve nümerik olarak hesaplanacaktır. Ayrıca literatürde sık olarak kullanılan Kubo osilatörü Milstein ve ikinci mertebeden basitleştirilmiş Taylor şeması ile nümerik olarak çözülecektir. Son olarak gecikmeli lineer stokastik diferansiyel denklem ile ilgili bir uygulama verilecek, grafik ve hata tablosu ile çözüm yorumlanacaktır.



BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Çözümleri stokastik süreç olan stokastik diferansiyel denklemler olasılık uzayı üzerinde tanımlandığından bu bölümde olasılıkla ilgili kavramlar, stokastik süreçlerle ilgili önemli tanım ve özelliklerden bahsedilecektir.

2.1 Olasılık Teorisi

Olasılık, bir olayın olmasının veya olmamasının matematiksel değeridir. Olasılığın geçmişi 17. yüzyıla kadar gitmektedir. Olasılık tarihi Pascal ile Fermat arasında 1654'de yapılan mektuplaşmanın içeriğine dayanmaktadır. Olasılık,

$$P : \{\text{olaylar kümesi}\} \rightarrow [0,1]$$

biçiminde bir küme fonksiyonudur. Bu fonksiyonun tanım kümesi, deneyin bütün olaylarından oluşan küme, değer kümesi ise $[0,1]$ aralığıdır [42]. Fonksiyonun yapısı 1933 yılında Rus matematikçi A. N. Kolmogorov tarafından ortaya atılan aksiyomlarla şekillenmiştir. Bu aksiyomlardan bahsetmeden önce bazı notasyonları verelim.

Tanım 2.1 Ω verilen örnek uzay, $\mathfrak{T}$ ise Ω 'nın alt kümelerinin ailesi olmak üzere

1. $\emptyset \in \mathfrak{T}$

2. $A \in \mathfrak{T}$ iken $A^c \in \mathfrak{T}$

3. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{T}$ iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{T}$

koşulları sağlanıyorsa, $\mathfrak{T}$ kümeler ailesine Ω üzerinde σ -cebiri denir [20].

Tanım 2.2 Ω verilen örnek uzay, $\mathfrak{F}$ ise Ω üzerinde σ -cebiri olsun. O halde $(\Omega, \mathfrak{F})$ ikilisine *ölçülebilir uzay*, $\mathfrak{F}$ kümeler ailesindeki her bir kümeye *ölçülebilir küme* denir [20].

Tanım 2.3 $(\Omega, \mathfrak{F})$ ölçülebilir uzayı olsun. Bu uzayda verilen $P: \mathfrak{F} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$1. P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$$

$$2. A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F} \text{ ve } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ kümeleri kendi aralarında ayrık iken } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

şartlarını sağlıyorsa P fonksiyonuna *olasılık ölçüsü* denir. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ üçlüsüne *olasılık uzayı* denir [22].

Tanım 2.4 Ω örnek uzayının alt kümelerinin ailesi U olsun.

$$H_U = \bigcap \{H : H, \Omega' \text{nin } \sigma\text{-cebiri, } U \subset H\}$$

kümesine U ailesini kapsayan en küçük σ -cebiri denir. H_U kümesine U ailesi tarafından üretilen σ -cebiri de denir [20].

Tanım 2.5 U ailesi, Ω topolojik uzayının (örneğin $\Omega = \mathbb{R}^n$) tüm açık alt kümeleri ailesi ise

$$B = H_U = \bigcap \{H : H, \Omega' \text{nin } \sigma\text{-cebiri, } U \subset H\}$$

kümesine *Borel σ -cebiri* denir ve $B \in B$ elamanlarına *Borel kümesi* denir [42].

2.1.1 Olasılık Aksiyomları

Verilen bir deneyin örnek uzayı Ω olsun. O halde Ω uzayındaki bir A olayının $P(A)$ olasılığıyla ilgili aşağıdaki aksiyomlar vardır:

$$A1. P(A) \geq 0$$

$$A2. P(\Omega) = 1$$

A3. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ ve $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ kümeleri kendi aralarında ayrık iken $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Tanım 2.6 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için $\forall U \subset \mathbb{R}^n$ açık olmak üzere $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\} \in \mathfrak{F}$ ise X fonksiyonu $\mathfrak{F}$ -ölçülebilirdir denir. Burada $U \subset \mathbb{R}^n$ Borel kümeleri de alınabilir.

Tanım 2.7 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tam olasılık uzayında, $\mathfrak{F}$ -ölçülebilir $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna *rassal değişken* denir [20].

Tanım 2.8 X rassal bir değişken olmak üzere, X 'in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir ise X 'e *kesikli (diskret) rassal değişken* denir.

Örneğin bir araba satış yerinde aylık veya haftalık araba satışlarının sayısı, bir futbol takımının maçlarda oyundan oyuna kaydedilen gol sayısı kesikli rassal değişkendir.

Tanım 2.9 X rassal bir değişken olmak üzere, X bir ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X 'e *sürekli rassal değişken* denir.

Belli bir bileşiğin içindeki alkol yüzdesi gibi.

Tanım 2.10 X sayılabilir sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ olasılıkları ile alan kesikli rassal değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f(x)$ 'e X rassal değişkeninin *olasılık fonksiyonu* denir.

1. $f(x) \geq 0$ tüm x değerleri için

$$2. \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$$

Tanım 2.11 X rassal değişkeninin x 'den küçük ya da eşit olma olasılığı

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

ile bulunur ve $F(x)$ 'e X rassal değişkeninin *dağılım fonksiyonu* denir.

Tanım 2.12 $X, (-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rassal değişken olsun.

$F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < +\infty$ şeklinde tanımlı $F(x)$ 'e X rassal değişkeninin *dağılım fonksiyonu* denir.

$F(x)$ fonksiyonu monoton aratan, sağdan sürekli ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyondur.

Tanım 2.13 $X, F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip sürekli rassal değişken olsun.

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds, -\infty < x < +\infty$ şartını sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna

X rassal değişkeninin *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir.

$f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. hemen hemen her noktada $f(x) = F'(x)$ dir.

2. $f(x) \geq 0, -\infty < x < +\infty$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$

2.1.2 Bir Rassal Değişkenin Beklenen Değeri

X kesikli rassal değişken ve $f(x)$ X 'in olasılık fonksiyonu olsun. X 'in beklenen değeri

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

şeklinde tanımlanır. $E(X)$ sayısına X rassal değişkeninin ortalaması da denir.

$\mu = E(X)$ ile gösterilir. X bir boyutlu sürekli rassal değişken, $f(x)$ X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, X 'in beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.3 Beklenen Değerin Özellikleri

1. $X = c$ bir sabit olmak üzere $E(X) = E(c) = c$
2. a ve b sabit olmak üzere $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
3. Bağımsız X, Y rassal değişkenleri için $E(XY) = E(X)E(Y)$ dir.

2.1.4 Bir Rassal Değişkenin Varyansı

X rassal değişken, ortalaması (beklenen değeri) ise $E(X) = \mu$ olsun. X 'in varyansı

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E[(X - \mu)^2]$$

şeklinde tanımlanır. X kesikli rassal değişkeninin varyansı

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

ile hesaplanır. X sürekli rassal değişken ise varyansı

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

şeklinde bulunur.

X rassal değişkeninin standart sapması

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$$

ile tanımlanır.

2.1.5 Varyansın Özellikleri

1. $X = c$ bir sabit olmak üzere $Var(X) = Var(c) = 0$
2. a ve b sabit olmak üzere $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

3. Bağımsız X, Y rassal değişkenleri için $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ dir.

2.2 Stokastik Analiz

Olasılıkla ilgili bazı temel kavramların tanımını verdikten sonra bir model üzerinden deterministik diferansiyel denklemlerden stokastik diferansiyel denklemlere geçişi ele alalım.

Diferansiyel denklemlerin katsayılarındaki rassallık göz önüne alınırsa, birçok problemin matematiksel modellemesi gerçeğe daha yakın olacaktır. [20], [21] çalışmalarında verilen popülasyon büyüme modeli olan

$$\frac{dS}{dt} = f(t)S(t), \quad S(0) = S_0$$

diferansiyel denklemi dikkate alınmıştır. Burada t anındaki popülasyon boyutu $S(t)$, t anındaki bağıl büyüme oranı $f(t)$ 'dir. $f(t)$ fonksiyonunun açık olarak bilinmediği ancak bazı rassal dış etkenlere bağlı olduğu düşünüldüğünde;

$$f(t) = r(t) + \text{"gürültü"}$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada "gürültü" teriminin davranışı tam olarak bilinmemekte sadece olasılık dağılımı bilinmektedir. $r(t)$ fonksiyonunun rassal olmadığı varsayılır ve $f(t)$ popülasyon büyüme modelinde yerine yazılırsa

$$\frac{dS}{dt} = r(t)S(t) + \text{"gürültü"}S(t)$$

elde edilir. İntegral formunda yazıldığında;

$$S(t) = S_0 + \int_0^t r(u)S(u)du + \int_0^t S(u)\text{"gürültü"}du$$

olur. Buradaki "gürültü" terimi ve $\int_0^t S(u)\text{"gürültü"}du$ integrali nasıl yorumlanmaktadır?

Literatürde "*gürültü*" teriminin matematiksel yorumu Brownian hareketinin (Wiener Süreci) türevi olarak yapılmaktadır ve $\frac{dW(t)}{dt}$ ile gösterilmektedir. O halde "*gürültü*" $dt = dW(t)$ ve $\int_0^t S(u) "gürültü" du = \int_0^t S(u) dW(u)$ olmaktadır.

Tanım 2.14 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı olsun.

$$X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümüne *stokastik süreç* denir. $t \in T, \omega \in \Omega$ olmak üzere $X(t, \omega)$ stokastik süreci iki değişkenli reel değerli bir fonksiyondur [22]. T genelde zaman olarak yorumlanan parametre kümesidir. Eğer T bir aralık ise stokastik sürece *sürekli zamanlı stokastik süreç*, sayılabilir bir küme ise *ayrık (kesikli) zamanlı stokastik süreç* denir.

Stokastik sürece iki bakış açısı vardır:

1. Sabitlenmiş bir $t \in T$ için $X_t(\omega)$ rassal değişkendir. Dolayısıyla $\{X_t(\omega)\}_{t \in T}$ kümesine t parametresine bağlı rassal değişkenlerin ailesi olarak bakılabilir.
2. Diğer bir yorum ω 'nın tespit edilmesi ile ortaya çıkar. Bu durumda $X_t(\omega)$, t değişkenli bir fonksiyon olur. Bu fonksiyona sabit bir ω için *stokastik sürecin yörüngesi* (trajectory path) denir.

Tanım 2.15 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan $t \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli sürece $W(t)$ Wiener süreci denir [19].

1. $W(0) = 0$
2. $0 \leq s < t$ için verilen $W(t) - W(s)$ artımı, 0 beklenen değerli $t - s$ varyanslı normal dağılıma $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s) = \sqrt{t - s} N(0, 1)$ gibi denktir.
3. $0 \leq s < t < u < v \leq T$ için $W(t) - W(s)$ ve $W(v) - W(u)$ artımları bağımsızdır.

Wiener süreci veya diğer bir adıyla Brownian hareketi, sıvıda yüzen parçacıkların rassal hareketi olarak açıklanmaktadır. Bu rassal hareketleri inceleyen ilk bilim insanı biyolog, fizyolog ve kimyager Jan Ingenhousz'dur. Ancak Brownian hareketinin botanikçi Robert Brown tarafından bulunduğu kabul edilmektedir. Brown, suda yüzen polen parçacıklarını mikroskop altında incelerken bu parçacıkların rassal olarak hareket ettiğini fark etmiştir. Hareketin sebebinin polenlerin canlı olmasından kaynaklandığını varsaymıştır. Brown, aynı incelemeyi toz parçacıkları üzerinde gerçekleştirmiş ve aynı rassal hareketin toz parçacıklarında da meydana geldiğini farkedince, polenlerin canlı olmadığı kanaatine varmıştır. Ancak hareketin kaynağını belirleyememiştir. Albert Einstein rassal hareketin sebebinin mikroskop ile göremediğimiz çok küçük parçacıkların bombardımanı olduğunu kanıtlamıştır ve bu hareketi Robert Brown anısına Brown Hareketi olarak tanımlamıştır. Bu hareketin matematiksel modelinin temelleri Albert Einstein ve Norbert Wiener tarafından atıldığından Wiener süreci olarak literatüre geçmiştir. Bu model ısı transferi, borsa değişimleri gibi alanlarda da kullanılmaktadır.

Wiener sürecinin önemli bir özelliği diferansiyelenemez olmasıdır. Stokastik diferansiyel denklemlerde sadece sembolik olarak $dW(t)$ kullanılır. Bu sebeple

$\int_0^t S(u) dW(u)$ integrali analizden bildiğimiz belirli integraller gibi

hesaplanamamaktadır. Bu integral ilk olarak 1949 yılında Kiyoshi Ito tarafından tanımlanmıştır ve *Ito integrali* olarak bilinmektedir.

Tanım 2.16 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı olsun. $\mathfrak{F}$ σ -cebriinin artan alt σ -sigma cebirlerinin $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ ailesine *filtrasyon* denir $(\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}, \forall t, s: 0 \leq t \leq s < \infty)$. Eğer $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathfrak{F}_s, \forall t \geq 0$ oluyorsa *filtrasyon sağdan süreklidir* denir. Olasılık uzayı tam iken filtrasyon sağdan sürekli ve $\mathfrak{F}_0$ tüm $P(A)=0$ olan $A \in \mathfrak{F}$ kümelerini içeriyor ise *filtrasyon uygun koşulları sağlıyor* denir.

Aksi belirtilmedikçe $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tam olasılık uzayında uygun koşulları sağlayan $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonu ile çalışılacaktır.

2.2.1 Stokastik İntegraller

$a \leq t \leq b$ olmak üzere stokastik süreçlerin Hibert uzayı H_{SP} , rassal değişkenlerin Hilbert uzayı H_{RV} ile gösterilirse

$$J(\Lambda) = J(\Lambda)(\omega) = \int_a^b \Lambda(s, \omega) ds$$

$$J(\Lambda)(t) = J(\Lambda)(t, \omega) = \int_a^t \Lambda(s, \omega) ds$$

stokastik integralleri sırasıyla $H_{SP} \rightarrow H_{RV}$ ve $H_{SP} \rightarrow H_{SP}$ şeklinde dönüşümlerdir.

Çünkü ilk integralin değeri rassal değişken iken ikinci integralin değeri stokastik süreçtir. H_{SP} 'da $[0, T]$ aralığında verilen Λ fonksiyonunun normu

$$\|\Lambda\|_{SP} = \left(\int_a^b E |\Lambda(t)|^2 dt \right)^{1/2} \text{ şeklinde verilmiştir. Stokastik integrallerin tanımı gereği } \Lambda$$

stokastik süreci aşağıdaki üç koşulu sağlar [22]:

K1. $\Lambda(a) \in H_{RV}$ dir. Bu yüzden k_1 pozitif sabiti için $\|\Lambda(a)\|_{RV}^2 = E |\Lambda(a)|^2 \leq k_1$

K2. $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ için $\|\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)\|_{RV}^2 = E |\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)|^2 \leq k_2 |t_2 - t_1|$ olacak şekilde k_2 pozitif sabiti vardır.

K3. $[a, b]$ aralığında Λ tahmin edilemeyendir (nonanticipating).

Riemann integralinin yaklaşık değerinin Riemann toplamı olması gibi stokastik integralin yaklaşık değeri

$\Lambda \in H_{SP}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ parçalanması, $\Delta t = (b - a) / N$ adım uzunluğu, $i = 0, 1, \dots, N$ için $t_i = a + i\Delta t$ olmak üzere

$$J(\Lambda) \approx J_N(\Lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \Lambda(t_i) \Delta t$$

şeklindedir.

2.2.2 Ito Stokastik İntegralleri

$a \leq t \leq b$ için

$$I(\Lambda) = I(\Lambda)(\omega) = \int_a^b \Lambda(s, \omega) dW(s, \omega)$$

$$I(\Lambda)(t) = I(\Lambda)(t, \omega) = \int_a^t \Lambda(s, \omega) dW(s, \omega)$$

integralleri Ito stokastik integrallerdir. Bu integraller sırasıyla $H_{SP} \rightarrow H_{RV}$ ve $H_{SP} \rightarrow H_{SP}$ şeklinde dönüşümlerdir ve Λ stokastik süreci K1, K2, K3 koşullarını sağlamaktadır.

$\Lambda \in H_{SP}$ ve Λ yukarıdaki üç şartı sağladığı varsayılırsa $\int_a^b \Lambda(s) dW(s)$ Ito stokastik integrali $s_i^{(m)} = a + i \left(\frac{b-a}{m} \right)$ olmak üzere

$$I(\Lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \Lambda_m(s) dW(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \Lambda(s_i^{(m)}) (W(s_{i+1}^{(m)}) - W(s_i^{(m)})) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır ve H_{RV} 'de yakınsaktır [22].

2.2.3 Ito Stokastik İntegrallerinin Bazı Özellikleri

$\Lambda, \delta \in H_{SP}$ ve c sabit olmak üzere Ito stokastik integrallerinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [21]:

i) $I(\Lambda + \delta) = I(\Lambda) + I(\delta)$

ii) $I(c\Lambda) = cI(\Lambda)$

iii) $E(I(\Lambda)) = 0$

iv) $E|I(\Lambda)|^2 = \int_a^b E|I(\Lambda)|^2 ds.$

Bu özellikler kullanılırsa $\Lambda \in H_{SP}$ ve Λ yukarıdaki K1, K2, K3 şartlarını sağlamak şartıyla

$s_i^{(m)} = a + i \left(\frac{t-a}{m} \right)$ olmak üzere $\int_a^t \Lambda(s) dW(s)$ Ito stokastik integrali

$$I(\Lambda)(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^t \Lambda_m(s) dW(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \Lambda(s_i^{(m)}) (W(s_{i+1}^{(m)}) - W(s_i^{(m)}))$$

şeklinde tanımlanır ve H_{SP} 'de yakınsaktır [22].

2.2.4 Stratonovich İntegrali

1966 da Rus fizikçi Ruslan Stratonovich Ito stokastik integralini düzenleyerek Stratonovich integralini tanımlamıştır. Ito stokastik integralinin tanımında verilen (2.1)

eşitliğine dikkat edilirse $s_i^{(m)} = a + i \left(\frac{b-a}{m} \right)$ alt aralıkların sol uç noktasıdır. Eğer (2.1)'de

alt aralıkların orta noktasına göre $\Lambda \left(\frac{s_i^{(m)} + s_{i+1}^{(m)}}{2} \right)$ alınırsa Stratonovich integrali

karşımıza çıkar [44] ve $a \leq t \leq b$ olmak üzere

$$\int_a^t \Lambda(s) \circ dW(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \Lambda \left(\frac{s_i^{(m)} + s_{i+1}^{(m)}}{2} \right) (W(s_{i+1}^{(m)}) - W(s_i^{(m)})) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

BÖLÜM 3

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Stokastik diferansiyel denklemler rassallığın kaynağına bağlı olarak sınıflandırılır. Rassallığın başlangıç değerinden kaynaklandığı stokastik diferansiyel denklemler Ito analizi gerektirmeyen denklemlerdir. $X(t)$ stokastik süreç, $Y(\omega)$ rassal değişken olmak üzere

$$dX(t) = f(t, X(t))dt$$

$$X_0 = Y(\omega)$$

diferansiyel denklemi rassal diferansiyel denklemdir. Bu denklem bildiğimiz analiz yöntemleriyle çözülür. Bu tür denklemler radyoaktif madde bozunması, popülasyon nüfusu gibi başlangıç değerleri kesin bilinmeyen durumlarda kullanılır.

Rassallık sadece başlangıç şartından değil, ölçümlerdeki belirsizliklerden ve hatalardan da kaynaklanabilir. Bu rassallık “beyaz gürültü” (white noise) ile ifade edilirse $t_0 \geq 0$ olmak üzere

$$dX(t, \omega) = f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t, \omega), \quad t \in [t_0, T] \quad (3.1)$$

Ito stokastik diferansiyel denklemi ile karşılaşılır. Burada f fonksiyonuna denklemin *yığılma (drift) katsayısı*, g fonksiyonuna ise *difüzyon katsayısı* denir. (3.1) denkleminin Ito integrali ile gösterimi;

$$X(t, \omega) = X(t_0, \omega) + \int_{t_0}^t f(s, X(s, \omega)) ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s, \omega)) dW(s, \omega) \quad (3.2)$$

şeklindedir.

[45], [46] çalışmalarında göstermiştir ki

$$X(t, \omega) = X(t_0, \omega) + \int_{t_0}^t f(s, X(s, \omega)) ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s, \omega)) \circ dW(s, \omega)$$

Stratonovich integral denkleminin çözümü olan $X(t)$ stokastik süreci

$$X(t, \omega) = X(t_0, \omega) + \int_{t_0}^t f(s, X(s, \omega)) ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t g(s, X(s, \omega)) \frac{\partial g(s, x)}{\partial x} ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s, \omega)) dW(s, \omega)$$

Ito stokastik integral denkleminin de çözümüdür.

3.1 Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Varlık-Teklik Teoremi

$T > t_0 \geq 0$ olmak üzere $t \in [t_0, T]$ için (3.1) stokastik diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Burada $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ölçülebilir fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlarsa (3.1) stokastik diferansiyel denkleminin t -sürekli çözümü var ve tektir [21], [22], [23] denir.

i. (Lipschitz Şartı): $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, T]$ için

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M |x - y|$$

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq M |x - y|$$

olacak şekilde $M > 0$ sabiti vardır.

ii. (Lineer Büyüme Şartı): $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, T]$ için

$$|f(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

$$|g(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır.

Burada $|\cdot|$ Öklid normudur.

3.2 Ito Formülü

$[t_0, T]$ aralığında (3.1) stokastik diferansiyel denklemi verilsin ve $F(t, x)$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip (pürüzsüz veya reguler) olsun. $Y(t, x) = F(t, X(t))$ olmak üzere Ito formülü aşağıdaki gibidir (Kyoshi Ito 1951):

$$dY(t, x) = \left[\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \Big|_{x=X(t)} + f(t, x) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=X(t)} + \frac{1}{2} g^2(t, x) \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=X(t)} \right] dt + \left[g(t, x) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=X(t)} \right] dW(t)$$

3.3 Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler

Lineer stokastik diferansiyel denklemlerin genel formu $t \in [t_0, T]$ olmak üzere

$$dX(t) = (a_1(t)X(t) + a_2(t))dt + (b_1(t)X(t) + b_2(t))dW_t \quad (3.3)$$

şeklindedir [8]. Burada a_1, a_2, b_1, b_2 , t değişkeninin belirli fonksiyonları veya sabitlerdir.

(3.3) denkleminde a_1, a_2, b_1, b_2 sabit ise stokastik diferansiyel denklem *otonomdur*

denir. $a_2(t) \equiv 0$ ve $b_2(t) \equiv 0$ olursa verilen denklem

$$dX(t) = a_1(t)X(t)dt + b_1(t)X(t)dW(t) \quad (3.4)$$

homojen lineer stokastik diferansiyel denkleme dönüşür. (3.3) denkleminde $b_1(t) \equiv 0$

olduğunda denklem

$$dX(t) = (a_1(t)X(t) + a_2(t))dt + b_2(t)dW(t) \quad (3.5)$$

olur ve *kısıtlı linear (narrow-sense) stokastik diferansiyel denklem* denir. (3.3) denklemini analitik olarak çözmek için (3.4) homojen denkleminin $\phi_{t_0, t_0} = 1$ koşulunu sağlayan ϕ_{t, t_0} temel (fundamental) çözümünün bulunması gerekmektedir. Çünkü analitik çözüm temel çözüm cinsinden ifade edilebilir. (3.5) SDD'i ele alınırsa bu denklemden elde edilen homojen denklem ($a_2(t) \equiv 0$ ve $b_2(t) \equiv 0$ durumu)

$$dX(t) = a_1(t)X(t)dt$$

olur. Bu denklem adi diferansiyel denklem gibi çözülürse;

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = a_1(t)dt$$

$$\ln X(t) = \int_{t_0}^t a_1(s)ds$$

$$\phi_{t, t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right)$$

temel çözümü bulunur [6], [8]. Ito formülünde $F(t, x) = \phi_{t, t_0}^{-1}x$ alınırsa;

$$dF(t, x) = d(\phi_{t, t_0}^{-1}x) = \left[\frac{d(\phi_{t, t_0}^{-1})}{dt} x \Big|_{x=X(t)} + [a_1(t)x + a_2(t)] \phi_{t, t_0}^{-1} \Big|_{x=X(t)} + 0 \right] dt + b_2(t) \phi_{t, t_0}^{-1} dW(t)$$

elde edilir.

$$\frac{d(\phi_{t, t_0}^{-1})}{dt} = \frac{d\left(\exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right)\right)}{dt} = -a_1(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right) = -a_1(t) \phi_{t, t_0}^{-1}$$

olduğundan

$$d(\phi_{t, t_0}^{-1}X(t)) = [-a_1(t) \phi_{t, t_0}^{-1}X(t) + [a_1(t)X(t) + a_2(t)] \phi_{t, t_0}^{-1}] dt + b_2(t) \phi_{t, t_0}^{-1} dW(t) = a_2(t) \phi_{t, t_0}^{-1} dt + b_2(t) \phi_{t, t_0}^{-1} dW(t)$$

denklemini elde edilir. Verilen denklemin integrali alınır

$$\begin{aligned}\phi_{t,t_0}^{-1} X(t) &= \phi_{t_0,t_0}^{-1} X(t_0) + \int_{t_0}^t a_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1} dW(s) \\ X(t) &= \phi_{t,t_0} \left\{ \phi_{t_0,t_0}^{-1} X(t_0) + \int_{t_0}^t a_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1} dW(s) \right\}\end{aligned}$$

bulunur. $\phi_{t_0,t_0} = 1$ başlangıç koşulu göz önünde bulundurulursa (3.5) denkleminin çözümü

$$X(t) = \phi_{t,t_0} \left\{ X(t_0) + \int_{t_0}^t a_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1} dW(s) \right\} \quad (3.6)$$

şeklinde olup stokastik diferansiyel denklemini çözmek daha zordur. Çünkü (3.3) denkleminde elde edilen homojen denklemin

$$dX(t) = a_1(t) X(t) dt + b_1(t) X(t) dW(t)$$

şeklinde olup stokastik diferansiyel denklemdir. (3.5) denkleminin temel çözümünün $d(\ln \phi_{t,t_0}) = a_1(t) dt$ denklemini sağladığı ipucu kullanılırsa (3.3) denkleminin temel çözümü ϕ_{t,t_0} ve Ito formülünde geçiş fonksiyonu $\ln(\phi_{t,t_0})$ alınır

$$d(\ln \phi_{t,t_0}) = \left(a_1(t) \phi_{t,t_0} \phi_{t,t_0}^{-1} - \frac{1}{2} b_1^2(t) \phi_{t,t_0}^2 \phi_{t,t_0}^{-2} \right) dt + b_1(t) \phi_{t,t_0} \phi_{t,t_0}^{-1} dW(t)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$d(\ln \phi_{t,t_0}) = \left(a_1(t) - \frac{1}{2} b_1^2(t) \right) dt + b_1(t) dW(t)$$

$\phi_{t_0,t_0} = 1$ olduğundan

$$\ln \phi_{t,t_0} = \int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW(s)$$

$$\phi_{t,t_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW(s) \right) \quad (3.7)$$

(3.3) denkleminin temel çözümü olur. Yine Ito formülünden;

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1}) = (-a_1(t) + b_1^2(t))\phi_{t,t_0}^{-1}dt - b_1(t)\phi_{t,t_0}^{-1}dW(t) \quad (3.8)$$

elde edilir [8]. (3.8) eşitliğindeki $d(\phi_{t,t_0}^{-1})$ ve (3.3) denklemindeki $dX(t)$ aynı $W(t)$ 'ye bağlıdır. Bu iki denklemi sistem gibi düşünür yani $X^{(1)}(t) = \phi_{t,t_0}^{-1}$, $X^{(2)}(t) = X(t)$ alınır ve Ito formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} d(\phi_{t,t_0}^{-1}X(t)) &= [(-a_1(t) + b_1^2(t))X(t) + a_1(t)X(t) + a_2(t)]\phi_{t,t_0}^{-1}dt \\ &\quad - b_1(t)[b_1(t)X(t) + b_2(t)]\phi_{t,t_0}^{-1}dt \\ &\quad + [-b_1(t)\phi_{t,t_0}^{-1}X(t) + (b_1(t)X(t) + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1})]dW(t) \\ &= (a_2(t) - b_1(t)b_2(t))\phi_{t,t_0}^{-1}dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}dW(t) \end{aligned}$$

elde edilir [8]. $\phi_{t_0,t_0} = 1$ olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \phi_{t,t_0}^{-1}X(t) &= X(t_0) + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\phi_{s,t_0}^{-1}ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1}dW(s) \\ X(t) &= \phi_{t,t_0} \left\{ X(t_0) + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\phi_{s,t_0}^{-1}ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1}dW(s) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

çözümü bulunur.

3.4 Stokastik Diferansiyel Denklem Sistemleri

Stokastik diferansiyel denklem sistemlerinin genel hali aşağıdaki gibidir [8],[22],[23]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), t \in [t_0, T] \quad (3.10)$$

Burada m ve d pozitif tam sayı olmak Wiener süreci m -boyutlu bir $W = \{W(t) : t \geq 0\}$ süreçtir ve bileşenleri $W^{(1)}(t), W^{(2)}(t), \dots, W^{(m)}(t)$ birbirinden bağımsız skaler Wiener süreçleridir. f fonksiyonu d -boyutlu $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vektör fonksiyonudur. g fonksiyonu ise $g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ şeklinde $d \times m$ -matris fonksiyonudur. (3.10) denklemini stokastik integral olarak

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(\xi, X(\xi)) d\xi + \int_{t_0}^t g(\xi, X(\xi)) dW(\xi) \quad (3.11)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda (3.11) denkleminin q 'ncu bileşeni $q=1,2,\dots,d$ olmak üzere aşağıdaki gibi olur:

$$X^{(q)}(t) = X^{(q)}(t_0) + \int_{t_0}^t f^{(q)}(\xi, X(\xi)) d\xi + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t g^{(q,k)}(\xi, X(\xi)) dW^{(k)}(\xi) \quad (3.12)$$

Stokastik diferansiyel denklem sistemleri, vektör değerli durumları tanımlarken ortaya çıkar. Ayrıca bazı skaler stokastik denklemler (3.10) formunda olmadığından bu forma getirmek için yeniden düzenlenir ve sistem halinde yazılır. Örneğin,

$$dY(t) = f(t, Y(t), W(t)) dt + g(t, Y(t), W(t)) dW(t)$$

şeklinde verilen denklemi (3.10) formunda yazmaya çalışalım.

$X^{(1)}(t) = Y(t)$ ve $X^{(2)}(t) = W(t)$ dönüşümü yapılırsa verilen denklem

$$dX(t) = \begin{pmatrix} f(t, X(t)) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} g(t, X(t)) \\ 1 \end{pmatrix} dW(t)$$

gibi 2-boyutlu SDDS'ne dönüşmüş olur. Benzer şekilde $\xi(t)$ beyaz gürültülü 2. mertebeden

$$Y''(t) = f(t, Y(t), Y'(t)) + g(t, Y(t), Y'(t)) \xi(t)$$

diferansiyel denklemi $X^{(1)}(t) = Y(t)$, $X^{(2)}(t) = Y'(t)$ dönüşümü yapılırsa 2-boyutlu SDDS'i olarak

$$dX(t) = \begin{pmatrix} X^{(2)}(t) \\ f(t, X(t)) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, X(t)) \end{pmatrix} dW(t)$$

şeklinde yazılır.

3.4.1 Stokastik Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Ito Formülü

$\Psi: [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ düzgün (regüler) fonksiyon ve $X(t)$, (3.10) denkleminin çözümü olmak üzere $Y(t) = \Psi(t, X(t))$ k -boyutlu stokastik süreçtir. Bu sürecin her bir q bileşeni için Ito formülü $q = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere aşağıdaki gibidir [21]:

$$dY^{(q)}(t) = \left[\frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f^{(i)} \frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial X^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{l=1}^m g^{(i,l)} g^{(j,l)} \frac{\partial^2 \Psi^{(q)}}{\partial X^{(i)} \partial X^{(j)}} \right] dt + \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d g^{(i,l)} \frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial X^{(i)}} dW^{(l)}(t) \quad (3.13)$$

3.4.2 Lineer Stokastik Diferansiyel Denklem Sistemleri

d -boyutlu lineer stokastik diferansiyel denklem sistemlerinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$dX(t) = [F(t)X(t) + f(t)]dt + \sum_{l=1}^m [G^{(l)}(t)X(t) + g^{(l)}(t)]dW^{(l)}(t) \quad (3.14)$$

Burada $F(t), G^{(1)}(t), G^{(2)}(t), \dots, G^{(m)}(t)$ $d \times d$ -boyutlu matris fonksiyon, $f(t), g^{(1)}(t), g^{(2)}(t), \dots, g^{(m)}(t)$ ise d -boyutlu vektör fonksiyonlardır. $G^{(l)}(t)$ 'lerin tümü sıfır ise (3.14) denkleminde *kısıtlı lineer (narrow)* durumundadır denir. Eğer $f(t)$ ve $g^{(l)}(t)$ 'lerin tümü sıfır ise (3.14) denkleminde *homojendir* denir. LSDD'in çözümünü bulurken kullanılan yöntemi LSDDS'ne uyarlırsak (3.14) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur: [8]

$$X(t) = \phi_{t,t_0} \left\{ X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_{s,t_0}^{-1} \left(f(s) - \sum_{l=1}^m G^{(l)}(s) g^{(l)}(s) \right) ds + \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t \phi_{s,t_0}^{-1} g^{(l)}(s) dW^{(l)}(s) \right\} \quad (3.15)$$

Burada ϕ_{t,t_0} $d \times d$ -boyutlu temel matrisi, $\phi_{t_0,t_0} = I$ olacak şekilde

$$d\phi_{t,t_0} = F(t)\phi_{t,t_0}dt + \sum_{l=1}^m G^{(l)}(t)\phi_{t,t_0}dW^{(l)}(t) \quad (3.16)$$

denkleminin çözümüdür.

Skaler homojen durumun aksine (3.16) denklemi, bütün matrisler sabit olsa bile çözülememektedir. Eğer $F, G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(m)}$ sabit değerli ve değişmeli ise yani $\forall k, l = 1, 2, \dots, m$ için $FG^{(l)} = G^{(l)}F$ ve $G^{(k)}G^{(l)} = G^{(l)}G^{(k)}$ ise temel matrisin açık şekli

$$\phi_{t,t_0} = \exp \left(\left(F - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \left(G^{(l)} \right)^2 \right) (t - t_0) + \sum_{l=1}^m G^{(l)} \left(W^{(l)}(t) - W^{(l)}(t_0) \right) \right) \quad (3.17)$$

dir. Özel olarak (3.14) denklemi kısıtlı lineer durumda ise temel matris

$$\phi_{t,t_0} = \exp \left(F(t - t_0) \right)$$

halini alır.

3.5 İndirgenebilir Stokastik Diferansiyel Denklemler

Bazı lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemler gerekli dönüşüm ile lineer stokastik diferansiyel denklemlere indirgenir. Uygun bir $X(t) = U(t, Y(t))$ dönüşümü ile [8], [23]

$$dY(t) = a(t, Y(t))dt + b(t, Y(t))dW(t) \quad (3.18)$$

lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemi

$$dX(t) = (a_1(t)X(t) + a_2(t))dt + (b_1(t)X(t) + b_2(t))dW(t) \quad (3.19)$$

formunda $X(t)$ değişkenine göre lineer stokastik diferansiyel denkleme dönüşür.

$\frac{\partial U(t, y)}{\partial y} \neq 0$ eşitsizliği varsa ters fonksiyon teoreminden $x = U(t, y)$ 'nin tersi olan $y = V(t, x)$ fonksiyonu vardır. O halde $x = U(t, V(t, x))$ ve $y = V(t, U(t, y))$ şeklinde olur. Dolayısıyla (3.18) lineer olmayan stokastik diferansiyel denkleminin çözümü $Y(t) = V(t, X(t))$ formunda olur. Buradaki $X(t)$ süreci (3.19) denkleminin çözümüdür. (3.18) denklemi için Ito formülü kullanılırsa

$$dU(t, Y(t)) = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \bigg|_{y=Y(t)} dt + \left(b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y} \right) \bigg|_{y=Y(t)} dW(t)$$

elde edilir. $X(t) = U(t, Y(t))$ olduğu ve (3.19) denklemi dikkate alınırsa katsayıların eşitliğinden,

$$\frac{\partial U(t, y)}{\partial t} + a(t, y) \frac{\partial U(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} = a_1(t) U(t, y) + a_2(t) \quad (3.20)$$

$$b(t, y) \frac{\partial U(t, y)}{\partial y} = b_1(t) U(t, y) + b_2(t) \quad (3.21)$$

eşitlikleri elde edilir. $a_1(t) \equiv b_1(t) \equiv 0$ durumu dikkate alınır ve $a_2(t) = \alpha(t)$, $b_2(t) = \beta(t)$ olmak üzere (3.20) denkleminin y 'ye göre kısmi türevi;

$$\frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial t \partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left[a(t, y) \frac{\partial U(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} \right] \quad (3.22)$$

şeklinde bulunur. (3.21) denkleminde y 'ye ve t 'ye göre kısmi türev alınır ve sırasıyla

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.23)$$

$$b(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y} + \frac{\partial b(t, y)}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial y} = \beta'(t) \quad (3.24)$$

elde edilir.

$b(t, y) \neq 0$ olduğu varsayılarak (3.24) denkleminde U türevleri yok edilirse

$$\beta'(t) = \beta(t) b(t, y) \left(\frac{1}{b^2(t, y)} \frac{\partial b(t, y)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(t, y)}{\partial y^2} \right) \quad (3.25)$$

elde edilir [8]. Bulduğumuz denklemin sol tarafı y değişkenine bağlı olmadığından

$$\gamma(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \frac{\partial b(t, y)}{\partial t} - b(t, y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} - \frac{1}{2} \frac{\partial b(t, y)}{\partial y} \right) \quad (3.26)$$

olmak üzere $\frac{\partial \gamma(t, y)}{\partial y} = 0$ dir. Bu eşitlik (3.18) lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemini

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dW(t) \quad (3.27)$$

denklemine indirgemek için yeterli şarttır. (3.20) ve (3.21) eşitliğinden

$$\frac{\partial U(t, y)}{\partial t} + a(t, y)\frac{\partial U(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2}b^2(t, y)\frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} = \alpha(t) \quad (3.28)$$

$$b(t, y)\frac{\partial U}{\partial y} = \beta(t) \quad (3.29)$$

yazılabilir. Buradan

$$\beta'(t) = \beta(t)\gamma(t, y) \quad (3.30)$$

$$\beta(t) = C \exp\left(\int_0^t \gamma(s, y) ds\right) \quad (3.31)$$

$$U(t, y) = C \exp\left(\int_0^t \gamma(s, y) ds\right) \int_0^y \frac{1}{b(t, \xi)} d\xi \quad (3.32)$$

olarak bulunur. Burada C keyfi sabittir.

3.6 Stratonovich Stokastik Diferansiyel Denklemler

(3.10) ile verilen SDDS'nin çözümü olan $X(t)$

$$dX(t) = \bar{f}(t, X(t))dt + g(t, X(t)) \circ dW(t), t \in [t_0, T]$$

Stratonovich stokastik denklem sisteminin de çözümüdür [8]. Burada $\bar{f}$ 'nin q . bileşeni

$$\bar{f}^{(q)}(t, X(t)) = f^{(q)}(t, X(t)) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^m g^{(j,k)}(t, X(t)) \frac{\partial g^{(q,k)}}{\partial x^{(j)}}(t, X(t)) \quad (3.33)$$

şeklindedir.

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Deterministik diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan nümerik metodların Taylor seri açılımından elde edildiği bilinmektedir. Stokastik diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulurken kullanılan bazı nümerik metodlar da benzer şekilde Ito Taylor açılımına dayanmaktadır.

4.1 Ito Taylor Açılımı

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), t \in [t_0, T] \quad (4.1)$$

otonom stokastik diferansiyel denklemi verilsin. Burada f ve g yeterince türevlenebilen fonksiyonlardır. F ikinci mertebeden sürekli kısmi türevelere sahip fonksiyon olmak üzere $[t_0, T]$ aralığında (4.1) stokastik diferansiyel denkleminde Ito formülü uygulanırsa

$$dF(X(t)) = \left[f(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \right] \Bigg|_{x=X(t)} dt + \left[g(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right] \Bigg|_{x=X(t)} dW(t) \quad (4.2)$$

elde edildiğinden üçüncü bölümde bahsedildi.

L^0, L^1 operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa [8],[48];

$$L^0 \equiv f[X(t)] \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} g^2[X(t)] \frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

$$L^1 \equiv g[X(t)] \frac{\partial}{\partial X}$$

(4.2) denklemi

$$dF[X(t)] = L^0 F[X(t)]dt + L^1 F[X(t)]dW(t) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. (4.3) denkleminin integral formu

$$F[X(t)] = F[X(t_0)] + \int_{t_0}^t L^0 F[X(\xi)]d\xi + \int_{t_0}^t L^1 F[X(\xi)]dW(\xi) \quad (4.4)$$

biçimindedir. (4.4) eşitliğinde $F(x) = x$, $F(x) = f(x)$, $F(x) = g(x)$ alınırsa;

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f[X(\xi)]d\xi + \int_{t_0}^t g[X(\xi)]dW(\xi) \quad (4.5)$$

$$f[X(t)] = f[X(t_0)] + \int_{t_0}^t L^0 f[X(\xi)]d\xi + \int_{t_0}^t L^1 f[X(\xi)]dW(\xi) \quad (4.6)$$

$$g[X(t)] = g[X(t_0)] + \int_{t_0}^t L^0 g[X(\xi)]d\xi + \int_{t_0}^t L^1 g[X(\xi)]dW(\xi) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) eşitlikleri (4.5) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t \left(f[X(t_0)] + \int_{t_0}^{\xi_1} L^0 f[X(\xi_2)]d\xi_2 + \int_{t_0}^{\xi_1} L^1 f[X(\xi_2)]dW(\xi_2) \right) d\xi_1 \\ + \int_{t_0}^t \left(g[X(t_0)] + \int_{t_0}^{\xi_1} L^0 g[X(\xi_2)]d\xi_2 + \int_{t_0}^{\xi_1} L^1 g[X(\xi_2)]dW(\xi_2) \right) dW(\xi_1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. (4.8) eşitliğindeki çift katlı integraller ayrı yazılırsa

$$X(t) = X(t_0) + f[X(t_0)] \int_{t_0}^t d\xi_1 + g[X(t_0)] \int_{t_0}^t dW(\xi_1) + R \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} R \equiv \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^0 f[X(\xi_2)]d\xi_2 d\xi_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^1 f[X(\xi_2)]dW(\xi_2) d\xi_1 \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^0 g[X(\xi_2)]d\xi_2 dW(\xi_1) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^1 g[X(\xi_2)]dW(\xi_2) dW(\xi_1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde dir. (4.10) denklemindeki son integrali hesaplamak için (4.7) eşitliği kullanılırsa;

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^1 g[X(\xi_2)] dW(\xi_2) dW(\xi_1) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^1 \left\{ g[X(t_0)] + \int_{t_0}^{\xi_2} L^0 g[X(\xi_3)] d\xi_3 \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{\xi_2} L^1 g[X(\xi_3)] dW(\xi_3) \right\} dW(\xi_2) dW(\xi_1)$$

elde edilir. $L^1 g = gg'$ olduğu kullanılırsa

$$X(t) = X(t_0) + f[X(t_0)] \int_{t_0}^t d\xi_1 + g[X(t_0)] \int_{t_0}^t dW(\xi_1) \\ + g[X(t_0)] g'[X(t_0)] \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} dW(\xi_2) dW(\xi_1) + R^* \quad (4.11)$$

elde edilir. Buradaki yeni kalan terim R^*

$$R^* \equiv \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^0 f[X(\xi_2)] d\xi_2 d\xi_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^1 f[X(\xi_2)] dW(\xi_2) d\xi_1 \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} L^0 g[X(\xi_2)] d\xi_2 dW(\xi_1) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} \int_{t_0}^{\xi_2} L^1 L^0 g[X(\xi_3)] d\xi_3 dW(\xi_2) dW(\xi_1) \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} \int_{t_0}^{\xi_2} L^1 L^1 g[X(\xi_3)] dW(\xi_3) dW(\xi_2) dW(\xi_1) \quad (4.12)$$

biçimindedir. Ito lemması kullanılarak

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} dW(\xi_2) dW(\xi_1) = \frac{1}{2} [W(t) - W(t_0)]^2 - \frac{1}{2} (t - t_0)$$

olduğu [8], [21]'de gösterilmiştir. Bulunan bu ifade (4.11) de yerine yazılırsa Ito Taylor açılımı aşağıdaki gibi bulunur;

$$X(t) = X(t_0) + f[X(t_0)] \int_{t_0}^t d\xi_1 + g[X(t_0)] \int_{t_0}^t dW(\xi_1) \\ + g[X(t_0)] g'[X(t_0)] \left\{ \frac{1}{2} [W(t) - W(t_0)]^2 - \frac{1}{2} (t - t_0) \right\} + R^* \quad (4.13)$$

(4.13) denkleminin $[0, T]$ aralığında $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ parçalanışına göre nümerik integrasyon şeması

$$\begin{aligned}\hat{X}(t_{i+1}) = & \hat{X}(t_i) + f[\hat{X}(t_i)]\Delta t + g[\hat{X}(t_i)]\Delta W_i \\ & + \frac{1}{2}g[\hat{X}(t_i)]g'[\hat{X}(t_i)][(\Delta W_i)^2 - \Delta t] + R^*\end{aligned}\quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\hat{X}(t_i)$, $\hat{X}$ yaklaşık çözümünün t_i anındaki değeri, $\hat{X}(t_0) = X_0$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ dir. ΔW_i artımı $N(0, \Delta t)$ bağımsız normal dağılıma sahiptir.

4.2 Euler Maruyama Metodu

$[0, T]$ 'da eşit adım aralığına sahip $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ parçalanışı için Euler Maruyama (EM) nümerik metodunun şeması (4.14) ile verilen integrasyon şemasını birinci basamaktan keserek $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ve $\hat{X}(t_0) = X_0$ için

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + f[\hat{X}(t_i)]\Delta t + g[\hat{X}(t_i)]\Delta W_i \quad (4.15)$$

denklemleriyle bulunur. Burada $\Delta t = T / N$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, $\hat{X}(t_i)$ $\hat{X}$ yaklaşık çözümünün t_i anındaki değeridir.

(3.10) ile verilen SDDS'i için EM metodunun şemasının q . bileşeni aşağıdaki gibidir [9]:

$$\hat{X}^{(q)}(t_{i+1}) = \hat{X}^{(q)}(t_i) + f^{(q)}[\hat{X}(t_i)]\Delta t + \sum_{j=1}^m g^{(q,j)}[\hat{X}(t_i)]\Delta W_i^{(j)} \quad (4.16)$$

burada $q = 1, 2, \dots, d$, yığılma ve difüzyon katsayıları sırasıyla $f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(d)})$,

$g = (g^{(q,j)})_{d \times m}$ şeklindedir ve $\Delta W_i^{(j)} = W^{(j)}(t_{i+1}) - W^{(j)}(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$,

$\Delta t = T / N$, $t_i = i\Delta t$ dir.

4.3 Milstein Metodu

$[0, T]$ 'da eşit adım aralığına sahip $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ parçalanışı için Milstein nümerik metodunun şeması (4.14) ile verilen integrasyon şemasını ikinci basamaktan keserek $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ve $\hat{X}(t_0) = X_0$ için

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + f[\hat{X}(t_i)]\Delta t + g[\hat{X}(t_i)]\Delta W_i + \frac{1}{2}g[\hat{X}(t_i)]g'[\hat{X}(t_i)][(\Delta W_i)^2 - \Delta t] \quad (4.17)$$

denklemleriyle bulunur. Burada $\Delta t = T/N$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, $\hat{X}(t_i)$ $\hat{X}$ yaklaşık çözümünün t_i anındaki değeridir. (3.10) ile verilen stokastik diferansiyel denklem sistemleri için $m=1$ olduğunda Milstein şemasının q . bileşeni aşağıdaki gibidir [10]:

$$\begin{aligned} \hat{X}^{(q)}(t_{i+1}) = & \hat{X}^{(q)}(t_i) + f^{(q)}[\hat{X}(t_i)]\Delta t + g^{(q)}[\hat{X}(t_i)]\Delta W_i \\ & + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^d g^{(l)} \frac{\partial g^{(q)}}{\partial x^{(l)}} [\hat{X}(t_i)] \right) ((\Delta W_i)^2 - \Delta t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Daha genel halde d ve $m=1, 2, \dots$ iken Milstein şemasının q . bileşeni ise

$$\hat{X}^{(q)}(t_{i+1}) = \hat{X}^{(q)}(t_i) + f^{(q)}[\hat{X}(t_i)]\Delta t + \sum_{j=1}^m g^{(q,j)}[\hat{X}(t_i)]\Delta W_i^{(j)} + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{(j_1)} g^{(q,j_2)} I_{(j_1, j_2)} \quad (4.19)$$

dır [8]. Burada

$$L^{(j_1)} = \sum_{i=1}^d g^{(i, j_1)} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}}$$

$$j_1 \neq j_2 \text{ için } I_{(j_1, j_2)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dW^{(j_1)}(s_1) dW^{(j_2)}(s_2)$$

$$I_{(j_1, j_1)} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta W^{(j_1)})^2 - \Delta t \right\}$$

$q=1,2,...,d$, yığılma ve difüzyon katsayıları sırasıyla $f = (f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(d)})$, $g = (g^{(q,j)})_{d \times m}$ şeklindedir ve $\Delta W_i^{(j)} = W^{(j)}(t_{i+1}) - W^{(j)}(t_i)$, $i = 0,1,...,N-1$, $\Delta t = T / N$, $t_i = i\Delta t$ dir.

4.4 Birinci Mertebeden Kuvvetli Açık Şema

Eckhard Platen, Milstein metodundaki türevde değişiklik yaparak birinci mertebeden kuvvetli açık şemayı (explicit order 1 strong scheme) vermiştir. Bu şema $i = 0,1,2,...,N-1$ için;

$$\bar{X}(t_i) = \hat{X}(t_i) + f(\hat{X}(t_i))\Delta t + g(\hat{X}(t_i))\sqrt{\Delta t}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \hat{X}(t_{i+1}) = & \hat{X}(t_i) + f[\hat{X}(t_i)]\Delta t + g[\hat{X}(t_i)]\Delta W_i \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} \left[g(\bar{X}(t_i)) - g(\hat{X}(t_i)) \right] [(\Delta W_i)^2 - \Delta t] \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklindedir [8]. Burada $\Delta t = T / N$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $t_i = i\Delta t$ dir.

4.5 İkinci Mertebeden Basitleştirilmiş Taylor Şeması

(3.10) ile verilen SDDS'i için ikinci mertebeden basitleştirilmiş Taylor şemasının (simplified order 2 Taylor scheme) q . bileşeni aşağıdaki gibidir [47]:

$$\begin{aligned} \hat{X}^{(q)}(t_{i+1}) = & \hat{X}^{(q)}(t_i) + \sum_{l=1}^m g^{(q,l)}(t_i) \Delta W_i^{(l)} + f^{(q)}(t_i) \Delta t \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p,l=1}^m \left(\sum_{k=1}^d g^{(k,p)}(t_i) \frac{\partial g^{(q,l)}}{\partial x^{(k)}}(t_i) \right) (\Delta W_i^{(p)} \Delta W_i^{(l)} + U_{pl,i}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=1}^d g^{(j,l)}(t_i) \frac{\partial f^{(q)}}{\partial x^{(j)}}(t_i) + \frac{\partial g^{(q,l)}}{\partial t}(t_i) + \sum_{j=1}^d f^{(j)}(t_i) \frac{\partial g^{(q,l)}}{\partial x^{(j)}}(t_i) \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^d h^{(k,j)}(t_i) \frac{\partial^2 g^{(q,l)}}{\partial x^{(k)} \partial x^{(j)}}(t_i) \right) \Delta t \Delta W_i^{(l)} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f^{(q)}}{\partial t}(t_i) + \sum_{k=1}^d f^{(k)}(t_i) \frac{\partial f^{(q)}}{\partial x^{(k)}}(t_i) + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^d h^{(k,j)}(t_i) \frac{\partial^2 f^{(q)}}{\partial x^{(k)} \partial x^{(j)}}(t_i) \right) (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Burada $U_{pl,i}$, $p, l = 1, 2, \dots, m$ bağımsız rassal değişkenlerdir ve

$$l < p \text{ ise } P(U_{pl,i} = \Delta t) = \frac{1}{2} = P(U_{pl,i} = -\Delta t)$$

$$U_{pp,i} = -\Delta t$$

$$l > p \text{ ise } U_{pl,i} = -U_{lp,i}$$

$$h^{(k,j)} = \sum_{i=1}^m g^{(k,i)} g^{(j,i)}$$

$$\Delta W^{(l)} = W^{(l)}(t_{i+1}) - W^{(l)}(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \Delta t = T/N, \quad t_i = i\Delta t \text{ dir.}$$

4.6 Çözümlerin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklığı

Tanım 4.1 Verilen bir SDD'in $[0, T]$ aralığında analitik çözümü $X(t)$, $[0, T]$ aralığının eşit adım uzunluğuna sahip $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ parçalanışı için bulunan yaklaşık (nümerik) çözümü $\hat{X}$ ve bu çözümün T anındaki değeri $\hat{X}_N = \hat{X}(t_N)$ olsun. Maximum adım aralığı $\delta \in (0, \delta_0)$ olmak üzere tüm zaman parçalanışları ve bir $\gamma > 0$ için

$$E\left(\left|X(T) - \hat{X}_N\right|\right) \leq K\delta^\gamma$$

sağlanacak şekilde sonlu K sabiti ve pozitif δ_0 sayısı varsa T anında $\hat{X}$ yaklaşık çözümü $X(t)$ analitik çözümüne γ mertebeden kuvvetli yakınsaktır denir [8], [22].

Tanım 4.2 Verilen bir SDD'in $[0, T]$ aralığında analitik çözümü $X(t)$, $[0, T]$ aralığının eşit adım uzunluğuna sahip $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ parçalanışı için bulunan yaklaşık (nümerik) çözümü $\hat{X}$ ve bu çözümün T anındaki değeri $\hat{X}_N = \hat{X}(t_N)$ olsun. Maximum adım aralığı $\delta \in (0, \delta_0)$ olmak üzere tüm zaman parçalanışları, her bir Q polinomu ve bir $\beta > 0$ için

$$\left|E(Q(X(T))) - E(Q(\hat{X}_N))\right| \leq K\delta^\beta$$

olacak şekilde sonlu K sabiti ve pozitif δ_0 sayısı varsa T anında $\hat{X}$ yaklaşık çözümü $X(t)$ analitik çözümüne β mertebeden zayıf yakınsaktır denir [8], [22].

[20], [49], [50]'da gösterilmiştir ki (4.15) ile verilen EM şeması ile bulunan yaklaşık çözümler analitik çözüme $\gamma = 0.5$ mertebeden kuvvetli yakınsaktır.

[14], [22]'de gösterilmiştir ki (4.17) Milstein şeması ile bulunan yaklaşık çözümler analitik çözüme $\gamma = 1.0$ mertebeden kuvvetli yakınsaktır.

4.7 Stokastik Kararlılık

Deterministik veya stokastik birçok denklem açık olarak çözülemez. Yine de denklemin katsayı fonksiyonlarından yola çıkarak çözümün davranışı hakkında sonuca varılabilir. Denklemin başlangıç değerindeki ufak değişimlerin çözümü nasıl etkilediği merak edilir. Genellikle denklemlerin denge noktasının kararlılığına bakılır.

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), t \geq t_0 \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

skaler SDD için denge noktası $X(t) \equiv 0$ dir. Bu durumda $X_0 = 0$ ve tüm t 'ler için $f = 0$ ve $g = 0$ olur. (4.22) denkleminin $t \geq t_0$ için $X(t) = X(t, t_0, X_0)$ çözümü var olsun. Khasminski [52] kitabında stokastik kararlılığı olasılıksal olarak aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

Tanım 4.3 (4.22) denklemini için $\forall \varepsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ iken

$$\lim_{X_0 \rightarrow 0} P\left(\sup_{t \geq t_0} |X(t, t_0, X_0)| \geq \varepsilon\right) = 0$$

oluyorsa $X(t) \equiv 0$ denge noktası *stokastik olarak kararlıdır* denir.

Tanım 4.4 SDD'nin $X(t) \equiv 0$ denge noktası stokastik olarak kararlı aynı zamanda

$$\lim_{X_0 \rightarrow 0} P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t, t_0, X_0)| \rightarrow 0\right) = 1$$

ise $X(t) \equiv 0$ kararlı çözümü *stokastik ve asimtotik kararlıdır* denir. Eğer $\forall X_0 \in \mathbb{R}$ için

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t, t_0, X_0)| \rightarrow 0\right) = 1$$

ise $X(t) \equiv 0$ kararlı çözümü *geniş anlamda stokastik ve asimtotik olarak kararlıdır* denir.

Lyapunov kararlılık kavramının temelini atmıştır. Lyapunov adı verilen fonksiyonlar ile kararlılığı test etmeği tanıtmıştır. (4.22) denkleminin denge noktası $X(t) \equiv 0$ olmak üzere $V(t, x)$ yeterince türevlenebilen fonksiyon olsun. (4.22)'ye Ito formülünü uygularsak

$$dV(t, X(t)) = LV(t, X(t))dt + g(t, X(t)) \frac{\partial V}{\partial x}(t, X(t))dW(t)$$

elde edilir. integral şeklinde yazarsak

$$V(t, X(t)) - V(t_0, X(t_0)) = \int_{t_0}^t LV(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s)) \frac{\partial V}{\partial x}(s, X(s))dW(s)$$

olur. Burada L operatörü

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + f \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

formundadır.

Tanım 4.5 $t \geq t_0$ ve tüm x 'ler için $LV(t, x) \leq 0$ olacak şekilde V fonksiyonunu bulursak (4.22) fonksiyonunun açık çözümünü bulmaya gerek kalmadan $X(t) \equiv 0$ *stokastik olarak kararlıdır* denir [8].

Tanım 4.6 $t \geq t_0$ ve tüm x 'ler için $LV(t, x) \leq -c(|x|)$ olacak şekilde pozitif sürekli $c = c(r)$, $r > 0$ ve $c(0) = 0$ fonksiyonu varsa $X(t) \equiv 0$ geniş anlamda *düzgün olarak stokastik kararlıdır* denir [8].

Örnek 4.1

Uygun Lyapunov fonksiyonunu kullanarak

$$dX(t) = aX(t)(1 + X^2(t))dt + bX^2(t)dt$$

denkleminin $a + \frac{1}{2}b^2 < 0$ iken $X(t) \equiv 0$ kararlı çözümünün stokastik olarak kararlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$V(x) = x^2$ Lyapunov fonksiyonu olsun. $X(t) \equiv 0$ in stokastik olarak kararlı olması için $LV \leq 0$ olmalıdır.

$$LV = 2ax^2(1 + x^2) + b^2x^4 = 2ax^2 + (2a + b^2)x^4$$

olduğundan. $LV \leq 0$ olması için $2a < 0$, $2a + b^2 < 0$ olmalıdır. Buradan $a + \frac{1}{2}b^2 < 0$ şartı elde edilir.

GECİKMELİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Önceki bölümlerde stokastik diferansiyel denklemler üzerinde duruldu. Bu denklemlerin lineer ve lineer olmayan halleri incelendi. Analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinden bahsedildi.

Bazı durumlarda modeli kurarken stokastik diferansiyel denklemler yetersiz kalabilir. Örneğin, finans sektörü ele alınırsa; piyasadaki parametreler rasgele davrandığı için tüccarlar piyasa hareketlerini öngörmek ve yatırımlarını yapmadan önce riskleri tahmin etmek ister. Bu sebeple, mevcut geçmiş pazar bilgilerini kullanırlar ve bazı istatistiksel çıkarımlar yaparlar. Bu geçmiş veriler, gelecekteki piyasa hareketlerini anlamak için kullanılan stokastik diferansiyel denklem modellerine eklenerek gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler elde edilir. Diğer bir örnek olarak hücre popülasyonunun büyümesi verilebilir. Büyüme hızı mevcut hücre popülasyonuna ve dış etkenlere bağlı olarak gecikmiş hücre büyümesine bağlıdır. Bu gecikme genellikle τ pozitif sonlu sayısı ile belirtilir. Hücre büyümesi modelini dikkate alalım.

t anında hücrelerin sayısı $S(t)$, $\rho_0 > 0$ anlık değişme oranı ve ρ_1 gecikme oranı ile orantılı olarak değişmektedir. Anlık hücre büyüme oranı şimdiki popülasyonuna bağlı iken, gecikme oranı önceki hücrelerin sayısına bağlıdır. $\tau > 0$ ortalama hücre bölünme zamanı olmak üzere hücre popülasyon modelinin deterministik hali aşağıdaki gibi olur [30]:

$$S'(t) = \rho_0 S(t) + \rho_1 S(t - \tau), t \geq 0$$

$$S(t) = \omega(t), t \in [-\tau, 0]$$

Eğer bu biyolojik sistemin dış etkenlerden etkilendiğini dikkate alır ve bu gürültülerin hepsini beyaz gürültü olarak gösterirsek $X(t)$ popülasyonu rassal süreç olacaktır. Hücre popülasyonu büyümesinin stokastik modeli;

$$dX(t) = (\rho_0 X(t) + \rho_1 X(t - \tau))dt + \alpha dW(t), t > 0$$

$$X(t) = \omega(t), t \in [-\tau, 0]$$

şeklinde olacaktır [30].

5.1 Gecikmeli Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Genel Formu

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonlu tam olasılık uzayı olsun. Burada $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ 'nin sağladığı uygun koşullar; $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ ailesinin artan, sağdan sürekli olması ve $\mathfrak{F}_0$ 'ın $\mathfrak{F}$ içindeki tüm sıfır ölçülü kümeleri içermesidir. Gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin genel formu [37];

$$\begin{aligned} dX(t) &= F(t, X(t), X(t - \tau))dt + G(t, X(t), X(t - \tau))dW(t), t \in [0, T] \\ X(t) &= \omega(t), t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (5.1)$$

şeklinde dir. Burada $F: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $G: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$, $W(t) = (W^{(1)}(t), W^{(2)}(t), \dots, W^{(m)}(t))$ ve $\omega(t): [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ dir. Dikkat edilirse (5.1) denklemi $\tau = 0$ için adi stokastik diferansiyel denklem olur. F ve G fonksiyonları açık olarak t 'ye bağlı değilse (5.1) denkleminde *otonom gecikmeli stokastik diferansiyel denklem* denir. Eğer G fonksiyonu X rassal değişkenine bağlı değilse (5.1) denklemi *toplanır gürültüye (additive noise) sahiptir* denir. Aksi takdirde (5.1) denklemi *çarpımsal gürültüye (multiplicative noise) sahiptir* denir. Çalışmada $d = m = 1$ durumunu incelenecektir. (5.1) denkleminin integral formu aşağıdaki gibidir;

$$X(t) = X(0) + \int_0^t F(s, X(s), X(s - \tau))ds + \int_0^t G(s, X(s), X(s - \tau))dW(s). \quad (5.2)$$

5.2 Gecikmeli Stokastik Diferansiyel Denklemler İçin Varlık Teklik Teoremi

$\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ filtrasyonlu $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tam olasılık uzayında (5.1) denklemi verilsin. F ve G fonksiyonları yerel Lipschitz şartını ve lineer büyüme şartını sağlıyorsa (5.1) denkleminin $t \geq -\tau$ için bir tek t - sürekli çözümü vardır [21].

i. Yerel Lipschitz Şartı

Verilen (5.1) denklemindeki F ve G fonksiyonları $\forall \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için

$$|F(t, \xi_1, \eta_1) - F(t, \xi_2, \eta_2)| \vee |G(t, \xi_1, \eta_1) - G(t, \xi_2, \eta_2)| \leq \mu (|\xi_1 - \xi_2| + |\eta_1 - \eta_2|) \quad (5.3)$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde bir μ pozitif sabiti varsa (5.1) denklemi *yerel (lokal) Lipschitz şartını sağlıyor* denir. Burada $|\xi| \vee |\eta| = \max\{|\xi|, |\eta|\}$ dir. μ sayısına Lipschitz sabiti denir [21].

ii. Lineer Büyüme Şartı

Verilen (5.1) denklemindeki F ve G fonksiyonları $\forall (t, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$|F(t, \xi, \eta)|^2 \vee |G(t, \xi, \eta)|^2 \leq \psi (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2) \quad (5.4)$$

eşitsizliğini sağlayacak bir pozitif ψ sayısı varsa (5.1) denklemi *lineer büyüme şartını sağlıyor* denir [21].

Gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulurken yine Ito analizinden faydalanılır. Ancak SDD farklı olarak çözüm, başlangıç noktasından itibaren adım adım τ boyutlu aralıklar üzerinden bulunur. Örneğin;

$$\begin{aligned} dX(t) &= [\beta(t)X(t-\tau) + \gamma(t)]dt + [\eta(t)X(t-\tau) + \psi(t)]dW(t), \quad t \in [0, T] \\ X(t) &= \omega(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (5.5)$$

denkleminin analitik çözümünü bulalım. $\omega(t) = \theta_1(t)$ alalım.

$t \in [0, \tau]$ için $t - \tau \in [-\tau, 0]$ olur. O halde $t \in [0, \tau]$ için $X(t - \tau) = \theta_1(t - \tau)$ elde edilir.

Bu eşitlik (5.5)'de yerine yazılırsa

$$dX(t) = [\beta(t)\theta_1(t-\tau) + \gamma(t)]dt + [\eta(t)\theta_1(t-\tau) + \psi(t)]dW(t)$$

bulunur. Ito integrali alınırsa $t \in [0, \tau]$ için

$$\begin{aligned} X(t) &= \theta_1(0) + \int_0^t [\beta(s_1)\theta_1(s_1-\tau) + \gamma(s_1)]ds_1 + \int_0^t [\eta(s_1)\theta_1(s_1-\tau) + \psi(s_1)]dW(s_1) \\ &:= \theta_2(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

$t \in [\tau, 2\tau]$ için $t - \tau \in [0, \tau]$ olur. O halde $t \in [\tau, 2\tau]$ için $X(t - \tau) = \theta_2(t - \tau)$ elde edilir. (5.5)'de yerine yazılırsa

$$dX(t) = [\beta(t)\theta_2(t-\tau) + \gamma(t)]dt + [\eta(t)\theta_2(t-\tau) + \psi(t)]dW(t)$$

bulunur. Ito integrali alınırsa $t \in [\tau, 2\tau]$ için

$$X(t) = \theta_2(\tau) + \int_{\tau}^t [\beta(s_2)\theta_2(s_2-\tau) + \gamma(s_2)]ds_2 + \int_{\tau}^t [\eta(s_2)\theta_2(s_2-\tau) + \psi(s_2)]dW(s_2)$$

elde edilir. Düzenlersek

$$\begin{aligned} X(t) &= \theta_2(\tau) + \int_{\tau}^t \left[\beta(s_2) \left\{ \theta_1(0) + \int_0^{s_2-\tau} [\beta(s_1)\theta_1(s_1-\tau) + \gamma(s_1)]ds_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{s_2-\tau} [\eta(s_1)\theta_1(s_1-\tau) + \psi(s_1)]dW(s_1) \right\} + \gamma(s_2) \right] ds_2 \\ &\quad + \int_{\tau}^t \left[\eta(s_2) \left\{ \theta_1(0) + \int_0^{s_2-\tau} [\beta(s_1)\theta_1(s_1-\tau) + \gamma(s_1)]ds_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{s_2-\tau} [\eta(s_1)\theta_1(s_1-\tau) + \psi(s_1)]dW(s_1) \right\} + \psi(s_2) \right] dW(s_2) := \theta_3(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde devam ederek $X(t)$ parçalı fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$X(t) = \begin{cases} \theta_1(t), & t \in [-\tau, 0] \\ \theta_1(0) + \int_0^t [\beta(s_1)\theta_1(s_1 - \tau) + \gamma(s_1)] ds_1 + \int_0^t [\eta(s_1)\theta_1(s_1 - \tau) + \psi(s_1)] dW(s_1), & t \in [0, \tau] \\ \theta_2(\tau) + \int_\tau^t [\beta(s_2)\theta_2(s_2 - \tau) + \gamma(s_2)] ds_2 \\ \quad + \int_\tau^t [\eta(s_2)\theta_2(s_2 - \tau) + \psi(s_2)] dW(s_2), & t \in [\tau, 2\tau] \\ \dots \end{cases}$$

5.3 Gecikmeli Lineer Stokastik Diferansiyel Denklemler

Gecikmeli lineer SDD'in genel hali $t \in [t_0, T]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dX(t) &= [\alpha(t)X(t) + \beta(t)X(t - \tau) + \gamma(t)]dt + [\xi(t)X(t) + \eta(t)X(t - \tau) + \psi(t)]dW(t) \\ X(t) &= \omega(t), \quad t \in [-\tau, t_0] \end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklindedir. (5.6) denklemi analitik olarak çözümlerse $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ için $t - \tau \in [t_0 - \tau, t_0]$ olduğundan $X(t - \tau) = \omega(t - \tau)$ elde edilir. Buradan $\beta(t)X(t - \tau) + \gamma(t) = \varphi_1(t)$ ve $\eta(t)X(t - \tau) + \psi(t) = \mu_1(t)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} dX(t) &= (\alpha(t)X(t) + \varphi_1(t))dt + (\xi(t)X(t) + \mu_1(t))dW(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau] \\ X(t_0) &= \omega(t_0) \end{aligned}$$

lineer stokastik diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin açık çözümü üçüncü bölümde gösterildiği gibi

$$X(t) = \phi_{t,t_0} \left\{ \omega(t_0) + \int_{t_0}^t [\varphi_1(s) - \xi(s)\mu_1(s)] \Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t \mu_1(s) \Phi_{s,t_0}^{-1} dW(s) \right\} \quad (5.7)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\phi_{t,t_0} = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2} \xi^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t \xi(s) dW(s) \right\} \quad (5.8)$$

dır. Benzer şekilde $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ için $\beta(t)X(t - \tau) + \gamma(t) = \varphi_2(t)$ ve $\eta(t)X(t - \tau) + \psi(t) = \mu_2(t)$ olmak üzere (5.6) denklemi $X(t_0 + \tau)$ başlangıç değeri $dX(t) = (\alpha(t)X(t) + \varphi_2(t))dt + (\xi(t)X(t) + \mu_2(t))dW(t), t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$

lineer stokastik diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin açık çözümü ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$X(t) = \phi_{t, t_0 + \tau} \left\{ X(t_0 + \tau) + \int_{t_0 + \tau}^t [\varphi_2(s) - \xi(s)\mu_2(s)] \Phi_{s, t_0}^{-1} ds + \int_{t_0 + \tau}^t \mu_2(s) \Phi_{s, t_0}^{-1} dW(s) \right\} \quad (5.9)$$

Burada

$$\phi_{t, t_0 + \tau} = \exp \left\{ \int_{t_0 + \tau}^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2} \xi^2(s) \right) ds + \int_{t_0 + \tau}^t \xi(s) dW(s) \right\} \quad (5.10)$$

dir. Bu işlemler tekrarlanarak her $[t_0 + n\tau, t_0 + (n+1)\tau], n \geq 2$ aralığında (5.6) denkleminin açık çözümü elde edilir.

Lineer gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmak, Ito integrallerini bulmaya dayandığından çoğu zaman zordur. Bu gibi durumlarda sayısal çözümlere başvurulur.

5.4 Gecikmeli Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri

5.4.1 Euler Maruyama Metodu

$[0, T]$ 'da eşit adım aralığına sahip $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ parçalanışı için $\Delta t = T / N$, $t_i = i\Delta t, i = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere gecikme değeri $\tau = N_\tau \Delta t$ olacak şekilde N_τ tam sayısının olduğu kabul edilirse (5.1) denkleminin Euler Maruyama şeması aşağıdaki gibidir [31]:

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + F(\hat{X}(t_i), \hat{X}(t_{i-N_\tau}))\Delta t + G(\hat{X}(t_i), \hat{X}(t_{i-N_\tau}))\Delta W_i \quad (5.11)$$

Burada $\hat{X}(t_i)$, $\hat{X}$ yaklaşık çözümünün t_i anındaki değeridir ve $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $\hat{X}(t_{i-N_\tau}) = \omega(t_i - \tau)$ dir.

5.4.2 Heun Metodu

$[0, T]$ 'da eşit adım aralığına sahip $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ parçalanışı için $\Delta t = T / N$, $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere, gecikme değeri $\tau = N_\tau \Delta t$ olacak şekilde N_τ tam sayısının olduğu kabul edilirse (5.1) denklemi için Heun şeması aşağıdaki gibidir [23]:

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) &= \hat{X}(t_i) + F(\hat{X}(t_i), \hat{X}(t_{i-N_\tau}))\Delta t + G(\hat{X}(t_i), \hat{X}(t_{i-N_\tau}))\Delta W_i \\ \hat{X}(t_{i+1}) &= \hat{X}(t_i) + \frac{1}{2} \left\{ F(\hat{X}(t_i), \hat{X}(t_{i-N_\tau})) + F(X(t_{i+1}), X(t_{i+1-N_\tau})) \right\} \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ G(\hat{X}(t_i), \hat{X}(t_{i-N_\tau})) + G(X(t_{i+1}), X(t_{i+1-N_\tau})) \right\} \Delta W_i \end{aligned} \quad (5.12)$$

Burada $\hat{X}(t_i)$, $\hat{X}$ yaklaşık çözümünün t_i anındaki değeridir ve $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $\hat{X}(t_{i-N_\tau}) = \omega(t_i - \tau)$ dir.

BÖLÜM 6

UYGULAMALAR

Bu bölümde stokastik diferansiyel denklem türleriyle ilgili modeller analitik ve nümerik olarak çözülmüştür. Uygulama 6.1'in basılmış haline , [51]'den ulaşılabilir.

Uygulama 6.1

Bölüm 3'de verilen (3.1) denkleminde $f(X(t)) = \frac{2}{5}X^{\frac{3}{5}}(t) + 5X^{\frac{4}{5}}(t)$,

$g(X(t)) = X^{\frac{4}{5}}(t)$ olmak üzere $X(0) = 1$ başlangıç koşulu için

$$dX(t) = \left(\frac{2}{5}X^{\frac{3}{5}}(t) + 5X^{\frac{4}{5}}(t) \right) dt + X^{\frac{4}{5}}(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6.1)$$
$$X(0) = 1$$

lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemini ele alalım [51]. Dikkat edilirse denklemin difüzyon katsayısı $X(t)$ 'ye bağlı olduğundan (6.1) denklemi çarpımsal gürültüye sahiptir. Öncelikle denklemin analitik çözümünü bulalım. Ito formülünde

$F(t, X(t)) = [X(t)]^{\frac{1}{5}}$ olursa

$$dF(t, X(t)) = \left(\frac{2}{25}X^{-\frac{1}{5}}(t) + 1 - \frac{2}{25}X^{\frac{4}{5}}(t) \right) dt + \frac{1}{5}dW(t) \quad (6.2)$$

$$d\left(X^{\frac{1}{5}}(t)\right) = dt + \frac{1}{5}dW(t)$$

elde edilir. Buradan

$$X(t) = \left[1 + t + \frac{1}{5} W(t) \right]^5 \quad (6.3)$$

analitik çözümü bulunmuş olur. Euler Maruyama ve Milstein metodu (6.1) lineer olmayan stokastik diferansiyel denkleminin uygulanırsa EM metodu için şema

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \left(\frac{2}{5} \hat{X}^{\frac{3}{5}}(t_i) + 5 \hat{X}^{\frac{4}{5}}(t_i) \right) \Delta t + \hat{X}^{\frac{4}{5}}(t_i) \Delta W_i \quad (6.4)$$

ve Milstein metodu için şema

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \left(\frac{2}{5} \hat{X}^{\frac{3}{5}}(t_i) + 5 \hat{X}^{\frac{4}{5}}(t_i) \right) \Delta t + \hat{X}^{\frac{4}{5}}(t_i) \Delta W_i + \frac{2}{5} \hat{X}^{\frac{3}{5}}(t_i) \left((\Delta W_i)^2 - \Delta t \right) \quad (6.5)$$

şeklinde elde edilir. Burada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $X(0) = 1$ ve adım uzunluğu $\Delta t = \frac{1}{N}$ dir. Bu şemalar kullanılarak (6.1) denkleminin MATLAB'da çözülmüştür.

Çizelge 6.1'de (6.1) denkleminin $[0,1]$ aralığında $N = 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}$ parçalanması için 10000 örneklem yol üzerinden EM ve Milstein yaklaşık çözümlerinin $E[\hat{X}(1)] \approx \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} \hat{X}_N^j$ ortalama değeri verilmiştir. Burada $\hat{X}_N^j$, N alt aralık kullanılarak $\hat{X}$ 'in $T = 1$ anında j . örneklem yol üzerindeki yaklaşık değeridir.

Çizelge 6.2' de farklı N değerleri için 10000 örneklem yol üzerinden EM ve Milstein metodları ile bulunan yaklaşık çözümlerin $E|X(1) - \hat{X}_N|^2 \approx \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} |X^j(1) - \hat{X}_N^j|^2$ ortalama karesel hatası verilmiştir. Burada $\hat{X}_N^j$, N alt aralık kullanılarak $\hat{X}$ 'in $T = 1$ anında j . örneklem yol üzerindeki yaklaşık değeridir.

Çizelge 6.1 EM ve Milstein metodları için yaklaşık değerler

N	EM Tahmini	Milstein Tahmini
2^9	35,0213	35,0531
2^{10}	35,1408	35,0277
2^{11}	35,2520	35,2222
2^{12}	35,3850	35,4594
2^{13}	35,3261	35,5083

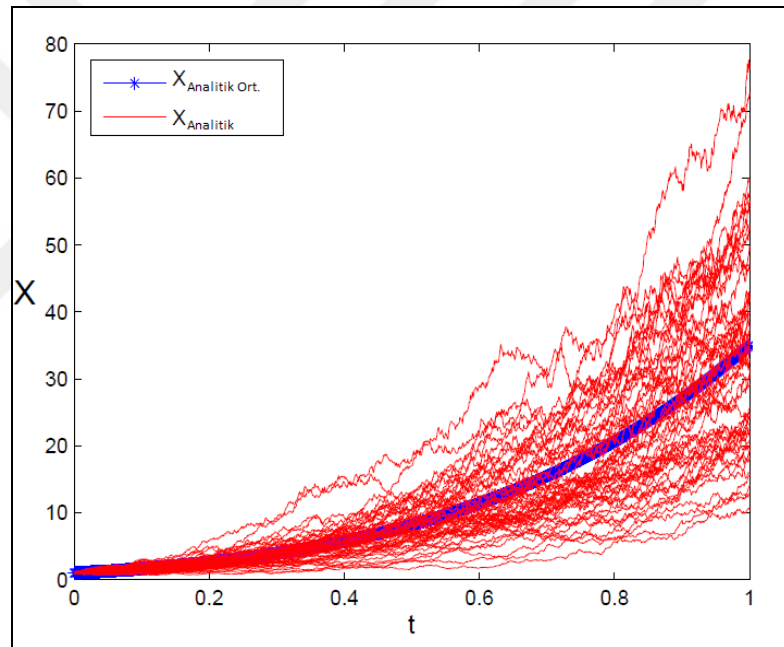
Çizelge 6.2 EM ve Milstein metodları için ortalama karesel hata

N	EM Tahmini	Milstein Tahmini
2^9	0.1800	0.0826
2^{10}	0.0701	0.0204
2^{11}	0.0298	0.0053
2^{12}	0.0140	0.0013
2^{13}	0.0068	0.000334

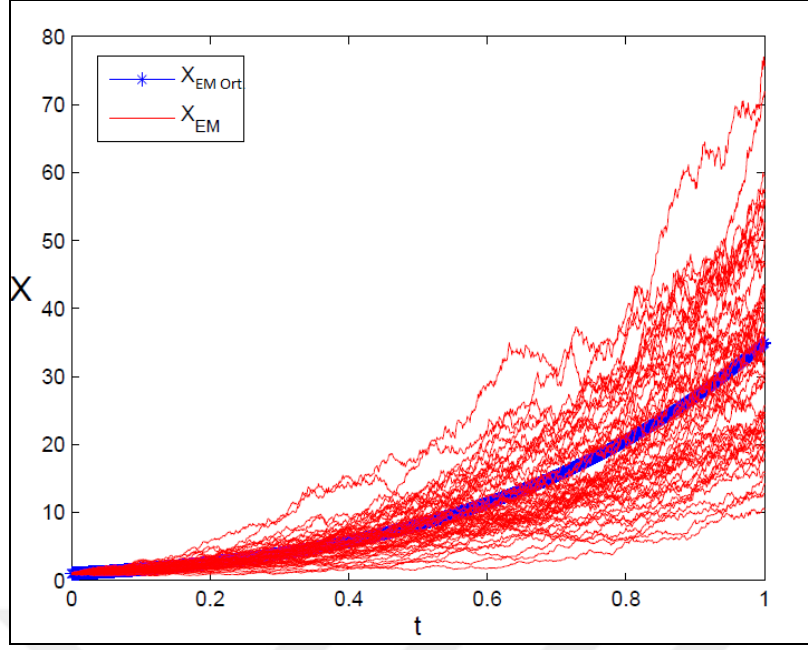
Şekil 6.1 de (6.1) denkleminin $[0,1]$ aralığında $N = 2^{10}$ parçalanışı için analitik çözümünün grafiği verilmiştir. Burada kırmızı eğrilerle 10000 örneklem yolun 50 tanesi boyunca X 'in analitik çözümleri, yıldızlı mavi eğrisi ile 10000 örneklem yol üzerinden elde edilen analitik çözümlerin ortalaması gösterilmiştir.

Şekil 6.2 de (6.1) denkleminin $[0,1]$ aralığında $N = 2^{10}$ parçalanışı için Euler Maruyama metodu ile bulunan yaklaşık çözümünün grafiği verilmiştir. Burada kırmızı eğrilerle 10000 örneklem yolun 50 tanesi boyunca X 'in EM yaklaşık çözümleri, yıldızlı mavi eğrisi ile 10000 örneklem yol üzerinden elde edilen EM yaklaşık çözümlerin ortalaması gösterilmiştir.

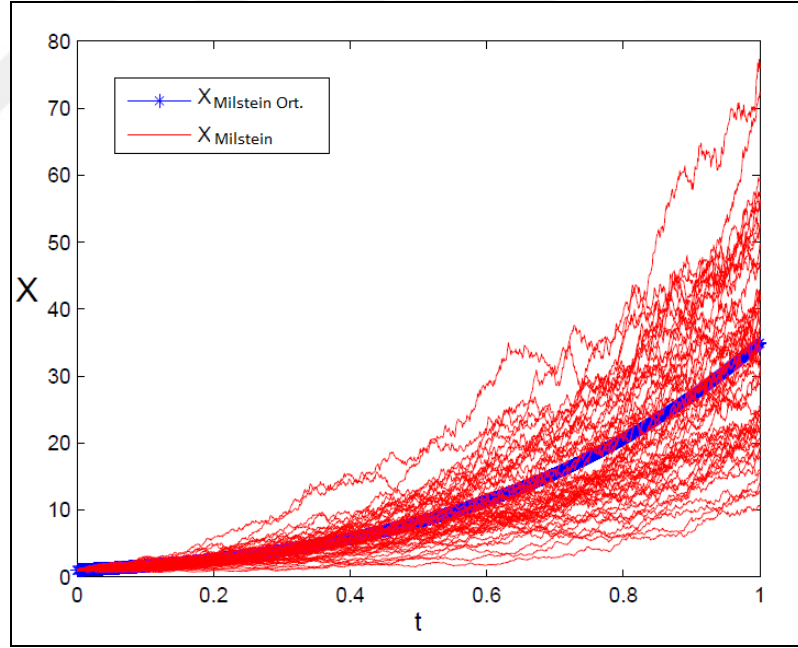
Şekil 6.3 de (6.1) denkleminin $[0,1]$ aralığında $N = 2^{10}$ parçalanışı için Milstein metodu ile bulunan yaklaşık çözümünün grafiği verilmiştir. Burada kırmızı eğrilerle 10000 örneklem yolun 50 tanesi boyunca X 'in Milstein yaklaşık çözümleri, yıldızlı mavi eğrisi ile 10000 örneklem yol üzerinden elde edilen Milstein yaklaşık çözümlerin ortalaması gösterilmiştir.



Şekil 6.1 $N = 2^{10}$ için 10000 örneklem yol üzerinden bulunan analitik çözümün ortalaması ve 50 örneklem yol için analitik çözümler



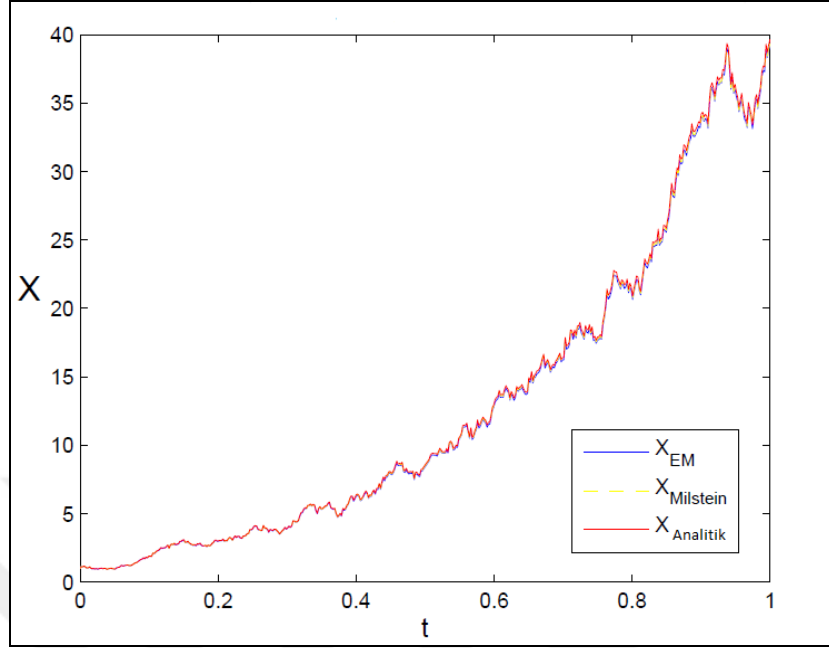
Şekil 6.2 $N = 2^{10}$ için 10000 örneklem yol üzerinden bulunan EM yaklaşık çözümünün ortalaması ve 50 örneklem yol için EM yaklaşık çözümleri



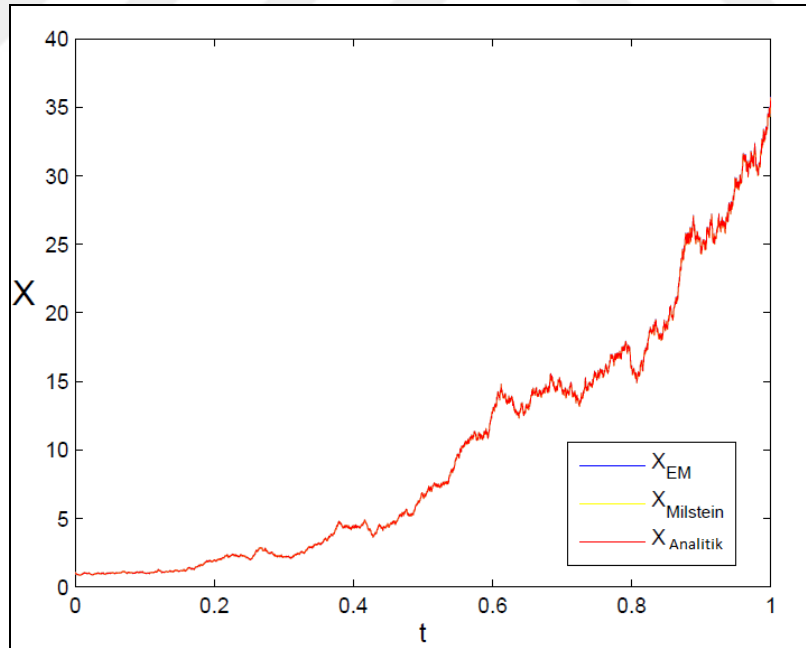
Şekil 6.3 $N = 2^{10}$ için 10000 örneklem yol üzerinden bulunan Milstein yaklaşık çözümünün ortalaması ve 50 örneklem yol için Milstein yaklaşık çözümleri

Şekil 6.4 ve Şekil 6.5 de sırasıyla $N = 2^9$ ve $N = 2^{13}$ için tek bir yol üzerinden (6.1) denkleminin analitik, EM yaklaşık çözümü ve Milstein yaklaşık çözümü verilmiştir.

Grafiklerde analitik çözüm kırmızı, EM yaklaşık çözümü mavi, Milstein yaklaşık çözümü ise sarı renk ile gösterilmiştir.



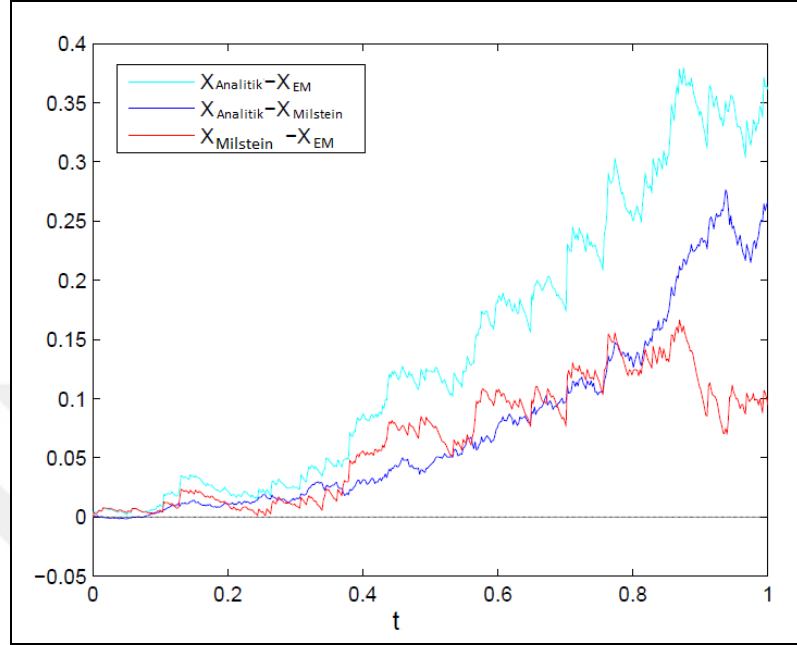
Şekil 6.4 $N = 2^9$ için tek bir yol üzerinden X 'in analitik çözümü ile EM ve Milstein yaklaşık çözümleri



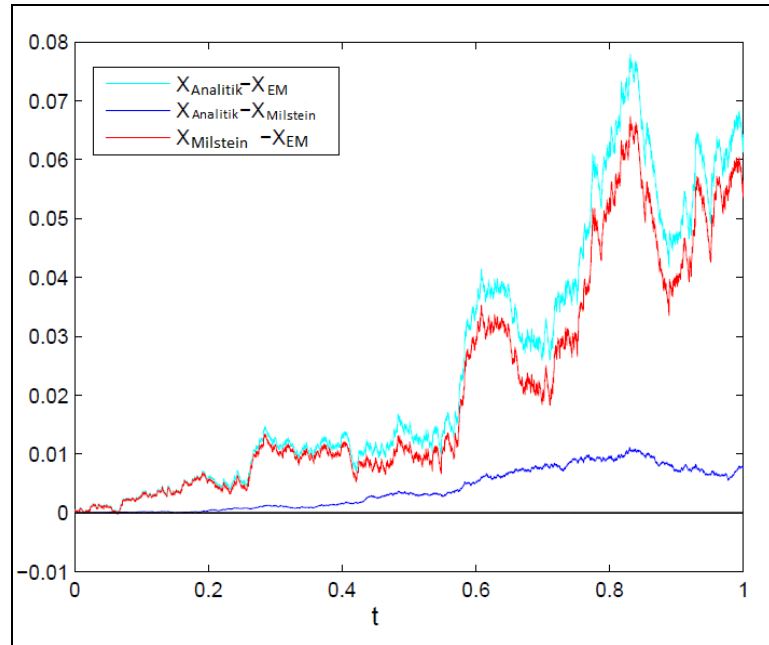
Şekil 6.5 $N = 2^{13}$ için tek bir yol üzerinden X 'in analitik çözümü ile EM ve Milstein yaklaşık çözümleri

Şekil 6.6 ve Şekil 6.7 de sırasıyla $N = 2^9$ ve $N = 2^{13}$ için tek bir yol üzerinden EM yaklaşımı ile Milstein yaklaşımının hata grafiği verilmiştir. Burada açık mavi eğrisi ile her

bir adım aralığı için $X_{\text{Analitik}} - X_{\text{EM}}$ olan EM yaklaşımının hatası, koyu mavi eğrisi ile $X_{\text{Analitik}} - X_{\text{Milstein}}$ olan Milstein yaklaşımının hatası, kırmızı eğrisi ile $X_{\text{Milstein}} - X_{\text{EM}}$ arasındaki fark gösterilmiştir.



Şekil 6.6 $N = 2^9$ için tek yol üzerinden EM yaklaşımı ve Milstein yaklaşımının hata fonksiyonu



Şekil 6.7 $N = 2^{13}$ için tek yol üzerinden EM yaklaşımı ve Milstein yaklaşımının hata fonksiyonu

Sonuç ve Bulgular

Bu çalışmada Ito Taylor açılımından elde edilen Euler ve Milstein şemalarının lineer olmayan stokastik diferansiyel denkleme uygulanışı verildi. Analitik çözümle yaklaşık çözümlerin yakınlığını analiz etmek için EM ve Milstein metodları ile yaklaşık çözümler elde edildi. Her bir metod için $[0,1]$ aralığında 10000 örneklem yol üzerinden $2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}$ parçalanış için yaklaşık çözümler hesaplandı. Elde edilen sonuçlara göre analitik çözüm ve nümerik çözümler için 10000 örneklem yol üzerinden elde edilen ortalama çözümün örneklem yollar üzerinden hesaplanan çözümlerin yoğun olarak bulunduğu bölgede bulunduğu görülür. Şekil 6.4 ve Şekil 6.5'den N parçalanış sayısı arttıkça EM ve Milstein yaklaşık çözümlerinin analitik çözüme yaklaştığı görülmektedir. Hata çizelgesinden Milstein yaklaşımın analitik çözüme EM yaklaşımdan daha yakın olduğu söylenebilir. Hata grafiklerine dayanılarak N parçalanış sayısı arttığında yaklaşık çözümlerle analitik çözüm arasındaki hatanın azaldığı ve her N parçalanışı için EM yaklaşık çözümündeki hatanın Milstein yaklaşım çözümündeki hatadan daha fazla olduğu görülür.

Uygulama 6. 2

$$dY(t) = Y(t)(1 + Y^2(t))dt + (1 + Y^2(t))dW(t), \quad Y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 0.5 \quad (6.6)$$

Lineer olmayan stokastik diferansiyel denkleminin analitik çözümünü ve yaklaşık çözümlerini hesaplayalım.

(6.6) ile verilen SDD (3.18) genel formuna göre ele alınırsa denklemin yığılma ve difüzyon katsayıları

$$a(y) = y(1 + y^2)$$

$b(y) = 1 + y^2$ dir. Uygun bir $x = U(t, y)$ dönüşümü ile (6.6) denklemini

$$dX(t) = (a_1(t)X(t) + a_2(t))dt + (b_1(t)X(t) + b_2(t))dW(t)$$

lineer stokastik diferansiyel denkleme indirgemeye çalışalım.

(3.20) ve (3.21) de $a_1(t) \equiv b_1(t) \equiv 0$, $a_2(t) = \alpha(t)$, $b_2(t) = \beta(t)$ alırsak (3.26) dan $\gamma(t, y) = 0$ bulunur. (3.30)' da $\beta'(t) = \beta(t)\gamma(t, y)$ olduğundan $\beta(t) = c$ elde edilir (c sabit $c = 1$ alalım). (3.32) den $U(t, y)$ fonksiyonu

$$U(t, y) = \int_0^y \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi = \arctan y$$

olarak bulunur. $c = 1$ olduğundan $b_2(t) = \beta(t) = 1$ dir. (3.28) eşitliği kullanılırsa

$$a_2(t) = y(1 + y^2) \frac{1}{1 + y^2} + \frac{1}{2}(1 + y^2)^2 \frac{(-2y)}{(1 + y^2)^2} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla (6.6) denkleminin indirgenmiş hali $dX(t) = dW(t)$ şeklinde lineer stokastik diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin çözümü ise

$$X(t) = X_0 + W(t) \text{ dir.}$$

$X(t) = U(Y(t))$ dönüşümü ve $U(y) = \arctan y$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\arctan(Y(t)) = \arctan(Y(0)) + W(t)$$

elde edilir. Buradan (6.6) denkleminin analitik çözümü ise

$$Y(t) = \tan[\arctan 1 + W(t)]$$

olarak bulunur. (6.6) denkleminin nümerik çözümü için EM, Milstein metodlarının şeması ve birinci mertebeden kuvvetli açık şema sırasıyla aşağıdaki gibi olur:

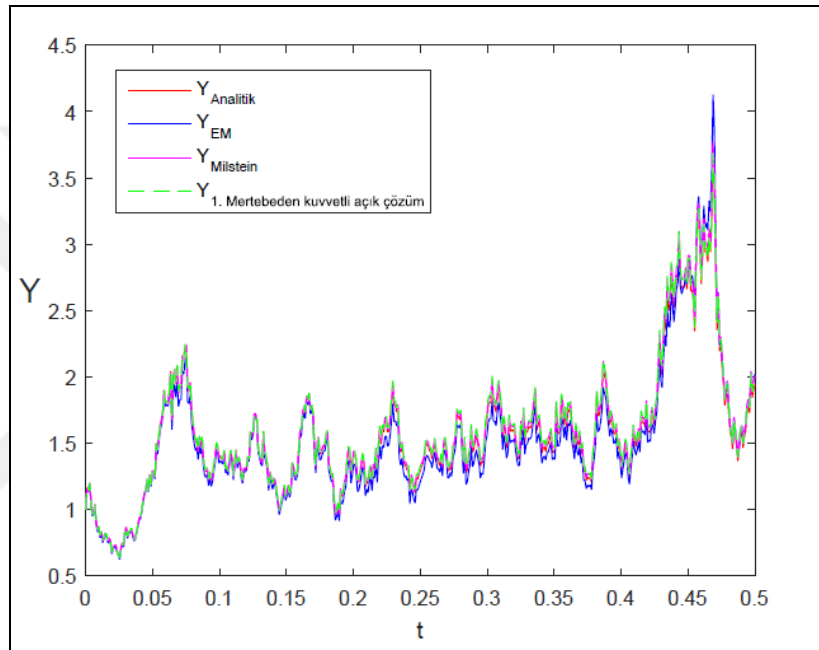
$$\hat{Y}(t_{i+1}) = \hat{Y}(t_i) + \hat{Y}(t_i)(1 + \hat{Y}(t_i)^2)\Delta t + (1 + \hat{Y}(t_i))^2 \Delta W_i \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t_{i+1}) = \hat{Y}(t_i) + \hat{Y}(t_i)(1 + \hat{Y}(t_i)^2)\Delta t + (1 + \hat{Y}(t_i))^2 \Delta W_i \\ + \hat{Y}(t_i)(1 + \hat{Y}(t_i)^2)(\Delta W_i^2 - \Delta t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t_{i+1}) = \hat{Y}(t_i) + \hat{Y}(t_i)(1 + \hat{Y}(t_i)^2)\Delta t + (1 + \hat{Y}(t_i))^2 \Delta W_i \\ + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} \left(\bar{Y}(t_i)^2 - \hat{Y}(t_i)^2 \right) (\Delta W_i^2 - \Delta t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Burada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $\hat{Y}(0) = 1$ ve adım aralığı $\Delta t = \frac{0.5}{N}$ dir.

Şekil 6.8 de (6.6) denkleminin $[0, 0.5]$ aralığında $N = 2^9$ parçalanış için tek bir yol üzerinden EM, Milstein ve birinci mertebeden kuvvetli açık metod ile elde edilen nümerik çözümlerin ve analitik çözümün grafiği verilmiştir. Burada analitik çözüm kırmızı, EM yaklaşımı mavi, Milstein yaklaşımı pembe, birinci mertebeden kuvvetli açık çözüm yeşil ile gösterilmiştir.



Şekil 6.8 $N = 2^9$ için tek bir yol üzerinden EM, Milstein ve birinci mertebeden kuvvetli açık metodlarıyla elde edilen nümerik çözümler, analitik çözüm

Çizelge 6.3 de (6.6) denkleminin $[0, 0.5]$ aralığında $N = 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}$ parçalanması için EM, Milstein ve birinci mertebeden kuvvetli açık metod ile bulunan yaklaşık

çözümlerinin ortalama mutlak hatası $OMH = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |\hat{Y}(t_i) - Y_{Analitik}(t_i)|$ formülüyle

hesaplanmıştır. Burada $\hat{Y}(t_i)$ her bir metod için t_i anındaki yaklaşık değerdir.

Çizelge 6.3 EM, Milstein ve birinci mertebeden kuvvetli açık çözümlerinin N 'in farklı değerleri için ortalama mutlak hatası

N	EM Tahmini	Milstein Tahmini	1.Mertebeden Kuvvetli Açık Tahmini
2^{10}	$4,2632 \times 10^{-5}$	$6,8006 \times 10^{-6}$	$8,8464 \times 10^{-6}$
2^{11}	$8,0774 \times 10^{-6}$	$2,2585 \times 10^{-6}$	$2,5064 \times 10^{-6}$
2^{12}	$5,5914 \times 10^{-6}$	$1,4235 \times 10^{-6}$	$1,6125 \times 10^{-6}$
2^{13}	$1,3073 \times 10^{-6}$	$1,8546 \times 10^{-7}$	$2,1151 \times 10^{-7}$

Sonuç ve Bulgular

Bu uygulamada lineer olmayan SDD, lineer SDD'e dönüştürüldükten sonra analitik çözümü ve EM, Milstein, birinci mertebeden kuvvetli açık metodlar ile nümerik çözümleri elde edildi. Bu çözümlerin $N = 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}$ parçalanışları için ortalama mutlak hatası hesaplandı. Hata tablosundan (6.6) denklemi için Milstein nümerik metodu ile bulunan yaklaşık çözümlerin analitik çözüme daha yakın olduğu görüldü. Diğer iki metod kıyaslandığında 1. mertebeden kuvvetli açık şema ile bulunan yaklaşık çözümlerin EM yaklaşık çözümlerine göre gerçek değere daha yakın olduğu farkedildi.

Uygulama 6.3

$$dX(t) = -2X(t)dt + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X(t)dW(t), t \in [0,1] \quad (6.10)$$

$X^{(1)}(t_0)=1, X^{(2)}(t_0)=1$ başlangıç koşulu olan stokastik diferansiyel denklem sisteminin analitik ve nümerik çözümlerini inceleyelim.

(6.10) denklemi (3.14) denklemiyle karşılaştırılırsa $d = 2, m = 1$, $F(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olduğu görülür. F, G sabit değerli ve değişmeli matrisler olduğundan

denklemin temel matrisi (3.17) den

$$\begin{aligned} \phi_{t,t_0} &= \exp \left(\left(F - \frac{1}{2} G^2 \right) (t - t_0) + G(W(t) - W(t_0)) \right) \\ &= \exp \left\{ \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right) t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W(t) \right\} \\ &= \exp \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W(t) \right\} \end{aligned}$$

ve analitik çözüm ise

$$X(t) = \left[\exp \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W(t) \right\} \right] X_0, \quad X^{(1)}(0) = 1, X^{(2)}(0) = 1$$

şeklinde elde edilir.

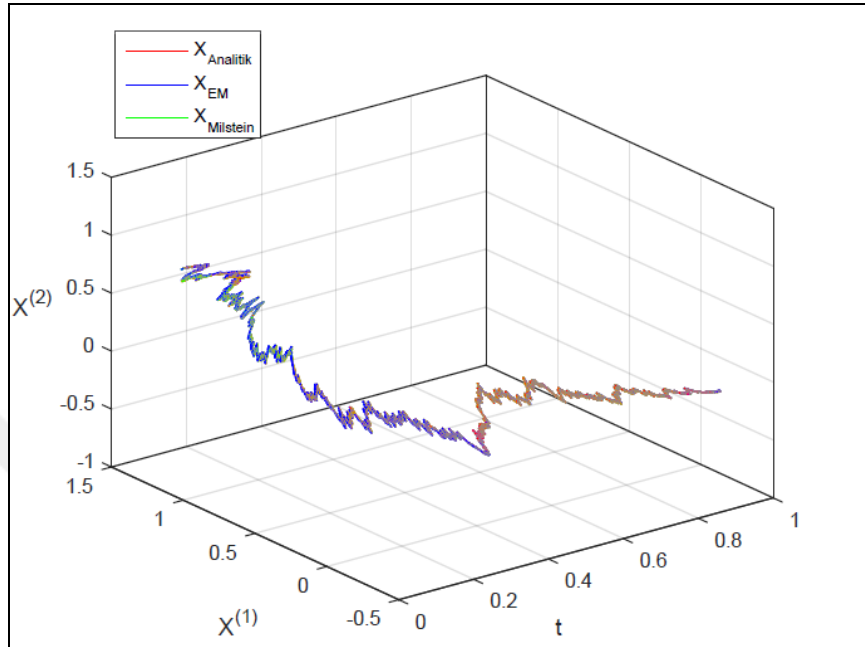
(6.10) denkleminin nümerik çözümü için EM ve Milstein şeması $d = 2, m = 1$ için sırasıyla aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{cases} \hat{X}^{(1)}(t_{i+1}) = \hat{X}^{(1)}(t_i) - 2\hat{X}^{(1)}(t_i)\Delta t - \hat{X}^{(2)}(t_i)\Delta W(t_i) \\ \hat{X}^{(2)}(t_{i+1}) = \hat{X}^{(2)}(t_i) - 2\hat{X}^{(2)}(t_i)\Delta t - \hat{X}^{(1)}(t_i)\Delta W(t_i) \end{cases} \quad (\text{EM})$$

$$\begin{cases} \hat{X}^{(1)}(t_{i+1}) = \hat{X}^{(1)}(t_i) - 2\hat{X}^{(1)}(t_i)\Delta t - \hat{X}^{(2)}(t_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}\hat{X}^{(1)}(t_i)((\Delta W_i)^2 - \Delta t) \\ \hat{X}^{(2)}(t_{i+1}) = \hat{X}^{(2)}(t_i) - 2\hat{X}^{(2)}(t_i)\Delta t - \hat{X}^{(1)}(t_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}\hat{X}^{(2)}(t_i)((\Delta W_i)^2 - \Delta t) \end{cases} \quad (\text{Milstein})$$

Burada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $\Delta t = T/N = 1/N$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $t_0 = 0$, $\hat{X}^{(1)}(t_0) = 1$, $\hat{X}^{(2)}(t_0) = 1$ dir.

(6.10) denkleminin $[0,1]$ aralığında $N = 10000$ parçalanış için analitik çözümü ile EM ve Milstein yaklaşık çözümleri MATLAB programında hesaplanıp grafiği çizilirse Şekil 6.9 elde edilir. Burada analitik çözüm kırmızı, EM yaklaşık çözümü mavi, Milstein yaklaşık çözümü ise yeşil eğri ile gösterilmiştir.



Şekil 6.9 $N = 10000$ için tek yol üzerinde X 'in analitik, EM ve Milstein yaklaşık çözümleri

Çizelge 6.4 EM ve Milstein yaklaşık çözümlerinin N 'in farklı değerleri için ortalama mutlak hatası

N	EM Tahmini		Milstein Tahmini	
	X_1	X_2	X_1	X_2
10^3	$8,6 \times 10^{-3}$	$1,04 \times 10^{-2}$	$3,0899 \times 10^{-4}$	$2,3296 \times 10^{-4}$
10^4	$1,6 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$9,6651 \times 10^{-5}$	$9,8567 \times 10^{-5}$
3×10^4	$4,9865 \times 10^{-4}$	$3,9651 \times 10^{-4}$	$3,5978 \times 10^{-5}$	$3,8793 \times 10^{-5}$
5×10^4	$4,2644 \times 10^{-4}$	$2,1340 \times 10^{-4}$	$1,0344 \times 10^{-5}$	$2,2476 \times 10^{-5}$

Çizelge 6.4’de (6.10) denkleminin $[0,1]$ aralığında $N=10^3, 10^4, 3\times 10^4, 5\times 10^4$ parçalanışı için tek bir yol üzerinden EM ve Milstein çözümlerinin ortalama mutlak hatası verilmiştir.

Sonuç ve Bulgular

Bu çalışmada 2 boyutlu lineer SDDS’i analitik ve EM, Milstein metodları yardımıyla nümerik olarak çözüldü. Bu çözümlerin $N=10^3, 10^4, 3\times 10^4, 5\times 10^4$ parçalanışları için ortalama mutlak hatası hesaplandı. Hata çizelgesinden N ’in farklı değerleri için Milstein metodundaki ortalama mutlak hatanın EM metodundakinden daha düşük olduğu dolayısıyla (6.10) denklem sistemi için Milstein yaklaşımının analitik çözüme EM yaklaşımından daha yakın olduğu görüldü.

Uygulama 6.4

$$\begin{pmatrix} dX^{(1)}(t) \\ dX^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{pmatrix} \circ dW(t) \quad (6.11)$$

$\alpha = 2, \gamma = 0.3$ katsayıları ve $t \in [0,10]$ olmak üzere $X^{(1)}(0)=1, X^{(2)}(0)=0$ başlangıç koşulu ile verilen Kubo osilatörünün analitik ve nümerik çözümlerini bulalım. (Bu katsayılar [30]’dan alınmıştır.)

Verilen problem Stratonovich SDD’nin $d=2, m=1$ halidir. (6.11) denklemini açık şekilde yazılırsa;

$$\begin{cases} dX^{(1)}(t) = -2X^{(2)}(t)dt - 0.3X^{(2)}(t) \circ dW(t) \\ dX^{(2)}(t) = 2X^{(1)}(t)dt + 0.3X^{(1)}(t) \circ dW(t) \end{cases} \quad (6.12)$$

olur. (3.33) eşitliği kullanarak (6.12) denklem sistemine eşdeğer olan Ito stokastik denklemini bulalım.

$$f^{(1)}(t, X(t)) = \bar{f}^{(1)}(t, X(t)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 g^{(j)}(t, X(t)) \frac{\partial g^{(1)}(t, X(t))}{\partial X^{(j)}} = -2X^{(2)}(t) - \frac{(0.3)^2}{2} X^{(1)}(t)$$

$$f^{(2)}(t, X(t)) = \bar{f}^{(2)}(t, X(t)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 g^{(j)}(t, X(t)) \frac{\partial g^{(2)}(t, X(t))}{\partial X^{(j)}} = 2X^{(1)}(t) - \frac{(0.3)^2}{2} X^{(2)}(t)$$

olduğundan (6.12)'nin Ito SDDS formu

$$\begin{cases} dX^{(1)}(t) = \left(-2X^{(2)}(t) - \frac{(0.3)^2}{2} X^{(1)}(t) \right) dt - 0.3X^{(2)}(t) dW(t) \\ dX^{(2)}(t) = \left(2X^{(1)}(t) - \frac{(0.3)^2}{2} X^{(2)}(t) \right) dt + 0.3X^{(1)}(t) dW(t) \end{cases} \quad (6.13)$$

olur. (6.13) denklem sisteminin katsayı matrisleri $F = \begin{pmatrix} -\frac{(0.3)^2}{2} & -2 \\ 2 & -\frac{(0.3)^2}{2} \end{pmatrix}$ ve

$G = \begin{pmatrix} 0 & -0.3 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$ dir. F ve G sabit değerli ve değişmeli matrisler olduğundan (3.17)

den temel matris

$$\begin{aligned} \phi_{t,t_0} &= \exp \left(\left(F - \frac{1}{2} G^2 \right) t + G W(t) \right) \\ &= \exp \left\{ \left(\begin{pmatrix} -\frac{(0.3)^2}{2} & -2 \\ 2 & -\frac{(0.3)^2}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -0.3 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}^2 \right) t + \begin{pmatrix} 0 & -0.3 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix} W(t) \right\} \\ &= \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & -0.3 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix} W(t) \right\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

şeklinde bulunur. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & -0.3 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$ gösterilirse

$$\phi_{t,t_0} = \exp(At + BW(t)) = \exp(At) \exp(BW(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(BW(t))^i}{i!}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^{2i}}{(2i)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i 2^{2i} It^{2i}}{(2i)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i 2^{2i} At^{2i+1}}{(2i+1)!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \begin{pmatrix} \frac{2^{2i} t^{2i}}{(2i)!} & 0 \\ 0 & \frac{2^{2i} t^{2i}}{(2i)!} \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2^{2i+1} t^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ \frac{2^{2i+1} t^{2i+1}}{(2i+1)!} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(BW(t))^i}{i!} = \begin{pmatrix} \cos(0.3W(t)) & -\sin(0.3W(t)) \\ \sin(0.3W(t)) & \cos(0.3W(t)) \end{pmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\phi_{t,t_0} = \exp(At + BW(t)) &= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(0.3W(t)) & -\sin(0.3W(t)) \\ \sin(0.3W(t)) & \cos(0.3W(t)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2t + 0.3W(t)) & \sin(2t + 0.3W(t)) \\ \sin(2t + 0.3W(t)) & \cos(2t + 0.3W(t)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

temel çözümü bulunmuş olur. Analitik çözüm (3.15) den

$$\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \phi_{t,t_0} X(t_0) = \begin{pmatrix} \cos(2t + 0.3W(t)) & \sin(2t + 0.3W(t)) \\ \sin(2t + 0.3W(t)) & \cos(2t + 0.3W(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2t + 0.3W(t)) \\ \sin(2t + 0.3W(t)) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

olarak bulunur.

(6.13) denkleminin Milstein metodu için nümerik şeması

$$\begin{aligned}
\hat{X}^{(1)}(t_{i+1}) &= \hat{X}^{(1)}(t_i) + \left(-2\hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(1)}(t_i) \right) \Delta t - 0.3\hat{X}^{(2)}(t_i) \Delta W_i \\
&\quad - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(1)}(t_i) ((\Delta W_i)^2 - \Delta t) \\
\hat{X}^{(2)}(t_{i+1}) &= \hat{X}^{(1)}(t_i) + \left(2\hat{X}^{(1)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(2)}(t_i) \right) \Delta t + 0.3\hat{X}^{(1)}(t_i) \Delta W_i \\
&\quad - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(2)}(t_i) ((\Delta W_i)^2 - \Delta t)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

şeklindedir. Burada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $\Delta t = T / N = 1 / N$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ dir.

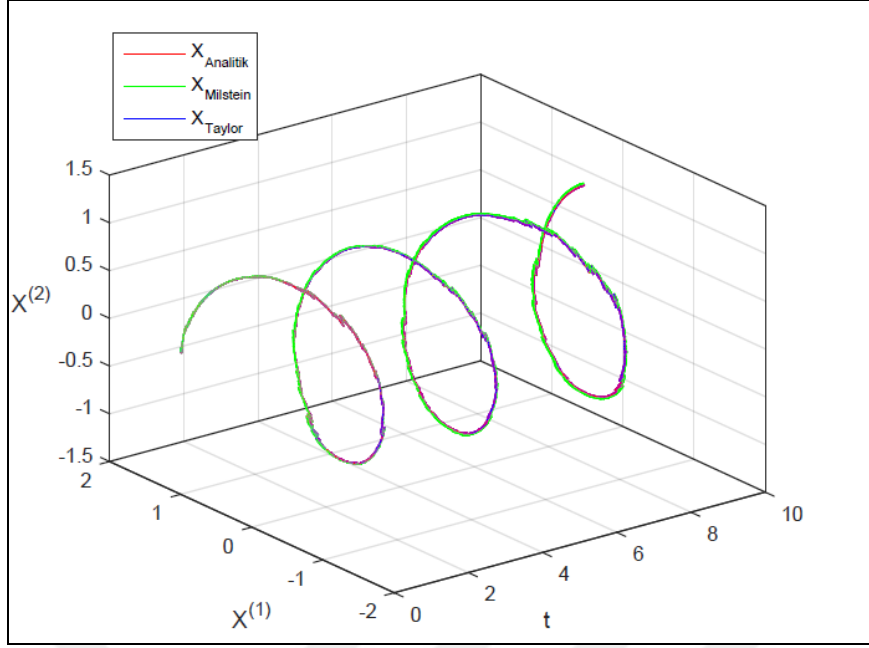
Benzer şekilde (6.13) denkleminin 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor şeması

$$h^{(k,j)} = \sum_{i=1}^m g^{(k,i)} g^{(j,i)} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}^{(1)}(t_{i+1}) &= \hat{X}^{(1)}(t_i) - 0.3\hat{X}^{(2)}(t_i) \Delta W_i + \left(-2\hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(1)}(t_i) \right) \Delta t \\
&\quad - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(1)}(t_i) ((\Delta W_i)^2 - \Delta t) + \frac{1}{2} \left\{ \hat{X}^{(2)}(t_i) \frac{(0.3)^3}{2} - (0.6) \hat{X}^{(1)}(t_i) \right. \\
&\quad \left. - \left(2\hat{X}^{(1)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(2)}(t_i) \right) (0.3) + \frac{1}{2} (h^{(1,1)} 0 + h^{(1,2)} 0 + h^{(2,1)} 0 + h^{(2,2)} 0) \right\} \Delta t \Delta W_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ - \left(-2\hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(1)}(t_i) \right) \frac{(0.3)^2}{2} - 2 \left(2\hat{X}^{(1)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(2)}(t_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (h^{(1,1)} 0 + h^{(1,2)} 0 + h^{(2,1)} 0 + h^{(2,2)} 0) \right\} (\Delta t)^2 \\
&= \hat{X}^{(1)}(t_i) - 0.3\hat{X}^{(2)}(t_i) \Delta W_i + \left(-2\hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2} \hat{X}^{(1)}(t_i) \right) \Delta t \\
&\quad - \frac{1}{2} (0.3)^2 \hat{X}^{(1)}(t_i) ((\Delta W_i)^2 - \Delta t) + \frac{1}{2} \left\{ (0.3)^3 \hat{X}^{(2)}(t_i) - (1.2) \hat{X}^{(1)}(t_i) \right\} \Delta t \Delta W_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ 2(0.3)^2 \hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^4}{4} \hat{X}^{(1)}(t_i) - 4\hat{X}^{(1)}(t_i) \right\} (\Delta t)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}^{(2)}(t_{i+1}) &= \hat{X}^{(2)}(t_i) + 0.3\hat{X}^{(1)}(t_i)\Delta W_i + \left(2\hat{X}^{(1)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2}\hat{X}^{(2)}(t_i)\right)\Delta t \\
&+ \frac{1}{2}\left(-(0.3)^2\hat{X}^{(2)}(t_i)\right)\left((\Delta W_i)^2 - \Delta t\right) + \frac{1}{2}\left\{-0.6\hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^3}{2}\hat{X}^{(2)}(t_i)\right. \\
&+ 0.3\left(-2\hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2}\hat{X}^{(1)}(t_i)\right) + \frac{1}{2}\left(h^{(1,1)}0 + h^{(1,2)}0 + h^{(2,1)}0 + h^{(2,2)}0\right)\left.\right\}\Delta t\Delta W_i \\
&+ \frac{1}{2}\left\{2\left(-2\hat{X}^{(2)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2}\hat{X}^{(1)}(t_i)\right) - \left(\frac{(0.3)^2}{2}\right)\left(2\hat{X}^{(1)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2}\hat{X}^{(2)}(t_i)\right)\right. \\
&+ \frac{1}{2}\left(h^{(1,1)}0 + h^{(1,2)}0 + h^{(2,1)}0 + h^{(2,2)}0\right)\left.\right\}(\Delta t)^2 \\
&= \hat{X}^{(2)}(t_i) + (0.3)\hat{X}^{(1)}(t_i)\Delta W_i + \left(2\hat{X}^{(1)}(t_i) - \frac{(0.3)^2}{2}\hat{X}^{(2)}(t_i)\right)\Delta t \\
&- \frac{(0.3)^2}{2}\hat{X}^{(2)}(t_i)\left((\Delta W_i)^2 - \Delta t\right) + \frac{1}{2}\left\{-1.2\hat{X}^{(2)}(t_i) - (0.3)^3\hat{X}^{(1)}(t_i)\right\}\Delta t\Delta W_i \\
&+ \frac{1}{2}\left\{-4\hat{X}^{(2)}(t_i) - 2(0.3)^2\hat{X}^{(1)}(t_i) + \frac{(0.3)^4}{4}\hat{X}^{(2)}(t_i)\right\}(\Delta t)^2
\end{aligned} \tag{6.17}$$

şeklinde elde edilir. Burada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $\Delta t = T / N = 1 / N$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ dir. (6.13) denkleminin dolayısıyla (6.11) denkleminin $[0, 10]$ aralığında $N = 10000$ parçalanış için analitik çözümü ile Milstein ve 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor yaklaşık çözümleri MATLAB programında hesaplanıp grafiği çizilirse Şekil 6.10 elde edilir. Burada analitik çözüm kırmızı, Milstein yaklaşık çözümü yeşil, 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor yaklaşık çözümü ise mavi eğri ile gösterilmiştir.



Şekil 6.10 $N = 10000$ için tek yol üzerinde X 'in analitik, Milstein ve 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor çözümleri

Çizelge 6.5'de (6.11) denkleminin $[0,10]$ aralığında $N = 10^3, 5 \times 10^3, 5 \times 10^4, 5 \times 10^5$ parçalanışı için Milstein ve 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor metodu ile bulunan yaklaşık çözümlerinin ortalama mutlak hata çizelgesi verilmiştir.

Çizelge 6.5 Milstein ve 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor yaklaşık çözümlerinin N 'in farklı değerleri için ortalama mutlak hatası

N	Milstein Tahmini		2. Mertebeden Taylor Tahmini	
	$\hat{X}^{(1)}$	$\hat{X}^{(2)}$	$\hat{X}^{(1)}$	$\hat{X}^{(2)}$
10^3	0,0721	0,0677	$5,8041 \times 10^{-4}$	$6,0604 \times 10^{-4}$
5×10^3	0,0129	0,0140	$1,4603 \times 10^{-5}$	$1,3543 \times 10^{-5}$
5×10^4	0,0014	0,0013	$1,9842 \times 10^{-6}$	$1,7696 \times 10^{-6}$
5×10^5	$1,1895 \times 10^{-4}$	$1,1293 \times 10^{-4}$	$1,1959 \times 10^{-7}$	$1,1902 \times 10^{-7}$

Sonuç ve Bulgular

Bu çalışmada Kubo osilatörü Stratonovich SDDS'den Ito SDDS'e dönüştürülmüştür. Daha sonra elde edilen SDDS analitik, Milstein ve 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor metodu yardımıyla nümerik olarak çözüldü. Bu çözümlerin $N = 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 5 \times 10^4$ parçalanışları için ortalama mutlak hatası hesaplandı. Hata çizelgesinden N 'in farklı değerleri için 2. mertebeden basitleştirilmiş Taylor metodundaki ortalama mutlak hatanın Milstein metodundakinden daha küçük olduğu görüldü.

Uygulama 6.5

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\frac{2}{t+2} X(t) + X(t-1) \right) dt + X(t-1) dW(t), t \in [0,1] \\ X(t) &= (t+3)^2, t \in [-1,0] \end{aligned} \quad (6.18)$$

gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin analitik ve nümerik çözümünü bulalım.

(6.18) denklemi (5.1) ile karşılaştırılırsa $\tau = 1$ olduğu görülür. Problemin varlık-tekliliğini araştıralım.

(5.1) deki katsayılar sırasıyla $F(t, \xi, \eta) = \frac{2}{t+2} \xi + \eta$, $G(t, \xi, \eta) = \eta$ dir. $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için

$\frac{2}{t+2} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |F(t, \xi_1, \eta_1) - F(t, \xi_2, \eta_2)| &= \left| \frac{2}{t+2} \xi_1 + \eta_1 - \frac{2}{t+2} \xi_2 - \eta_2 \right| = \left| \frac{2}{t+2} (\xi_1 - \xi_2) + (\eta_1 - \eta_2) \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{t+2} \right| |\xi_1 - \xi_2| + |\eta_1 - \eta_2| \leq |\xi_1 - \xi_2| + |\eta_1 - \eta_2| \end{aligned}$$

$$|G(t, \xi_1, \eta_1) - G(t, \xi_2, \eta_2)| = |\eta_1 - \eta_2| \leq |\xi_1 - \xi_2| + |\eta_1 - \eta_2|$$

F ve G fonksiyonları Lipschitz şartını sağladığı gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned} |F(t, \xi, \eta)|^2 &= \left| \frac{2}{t+2} \xi + \eta \right|^2 = \left(\frac{2}{t+2} \right)^2 \xi^2 + \frac{4}{t+2} \xi \eta + \eta^2 \\ &\leq |\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2| \leq 2(|\xi|^2 + |\eta|^2) \leq 2(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2) \end{aligned}$$

$$|G(t, \xi, \eta)|^2 = |\eta|^2 \leq (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)$$

F ve G fonksiyonları lineer büyüme şartını sağladığı gösterilmiş olur. Dolayısıyla (6.18) denkleminin $[-1,1]$ aralığında bir tek çözümü vardır.

$t \in [0,1]$ ise $t - \tau = t - 1 \in [-1,0]$ olur. $X(t-1) = \omega(t-1) = (t+2)^2$ elde edilir ve (6.18)'de yerine yazılırsa;

$$dX(t) = \left(\frac{2}{t+2} X(t) + (t+2)^2 \right) dt + (t+2)^2 dW(t)$$

olur. Bu denklem lineer stokastik diferansiyel denklemdir. Üçüncü bölümde gösterildiği gibi temel çözüm

$$\phi_{t,0} = \exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{2}{s+2} + 0 \right) ds + \int_0^t 0 dW(s) \right\} = \exp \left\{ \ln \left(\frac{t+2}{2} \right)^2 \right\} = \left(\frac{t+2}{2} \right)^2$$

olmak üzere analitik çözüm

$$X(t) = \phi_{t,0} \left\{ X_0 + \int_0^t \left[(s+2)^2 - 0 \right] \left(\frac{2}{s+2} \right)^2 ds + \int_0^t (s+2)^2 \left(\frac{2}{s+2} \right)^2 dW(s) \right\}$$

$$X(t) = \left(\frac{t+2}{2} \right)^2 X_0 + (t+2)^2 (W(t) + t)$$

bulunur. (6.18) den $X_0 = 9$ dir. (6.18) denkleminin EM şeması

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \left[\frac{2}{t_i+2} \hat{X}(t_i) + \omega(t_i-1) \right] \Delta t + \omega(t_i-1) \Delta W_i$$

şeklindedir. Burada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $\Delta t = T / N$, $t_i = i \Delta t$, $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ dir.

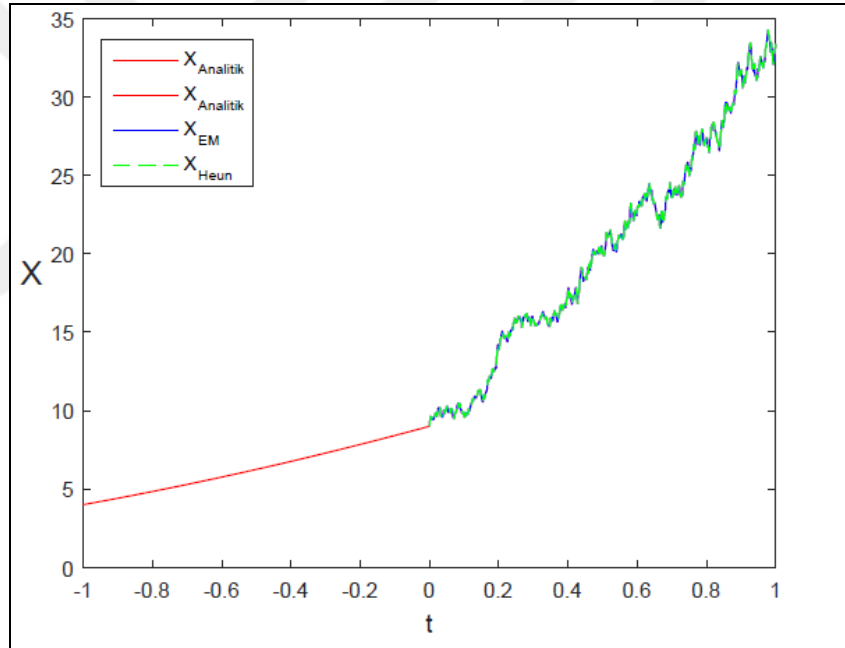
Benzer şekilde (6.18) denkleminin Heun Metodu için şeması aşağıdaki gibi olur;

$$\tilde{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \left[\frac{2}{t_i+2} \hat{X}(t_i) + \omega(t_i-1) \right] \Delta t + \omega(t_i-1) \Delta W_i$$

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \left[\frac{\frac{2}{t_i+2} \hat{X}(t_i) + (t_i+2)^2 + \frac{2}{t_{i+1}+2} \tilde{X}(t_{i+1}) + (t_{i+1}+2)^2}{2} \right] \Delta t$$

$$+ \frac{(t_i+2)^2 + (t_{i+1}+2)^2}{2} \Delta W_i$$

(6.18) denklemi $[0,1]$ aralığında $N = 2^{10}$ parçalanışı için EM ile Heun metodları ile MATLAB programında çözülüp grafiği çizilirse Şekil 6.11 elde edilir. Burada $t \in [-1,0]$ için $X(t) = (t+3)^2$ analitik çözümü kırmızı eğri ile $t \in [0,1]$ için analitik çözüm yine kırmızı eğri ile gösterilmiştir. EM yaklaşık çözümü mavi, Heun yaklaşık çözümü yeşil renk eğri ile çizilmiştir.



Şekil 6.11 $N = 2^{10}$ için analitik çözüm ve EM ile Heun nümerik çözümleri

Çizelge 6.6' da $[0,1]$ aralığında $N = 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}$ parçalanışı için 100 örneklem yol üzerinden EM ve Heun metodları ile bulunan yaklaşık çözümlerin

$$E \left| X(1) - \hat{X}_N \right|^2 \approx \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} \left| X^j(1) - \hat{X}_N^j \right|^2$$

ortalama karesel hatası verilmiştir. Burada $\hat{X}_N^j$,

N alt aralık kullanılarak $\hat{X}$ 'in $T=1$ anında j . örneklem yol üzerindeki yaklaşık değeridir.

Çizelge 6.6 EM ve Heun yaklaşık çözümlerinin 100 örneklem yol üzerinden N 'in farklı değerleri için ortalama karesel hatası

N	EM Tahmini	Heun Tahmini
2^9	$5,5770 \times 10^{-4}$	$1,1551 \times 10^{-4}$
2^{10}	$1,3756 \times 10^{-4}$	$3,0630 \times 10^{-5}$
2^{11}	$3,6657 \times 10^{-5}$	$8,2106 \times 10^{-6}$
2^{12}	$9,0545 \times 10^{-6}$	$1,6618 \times 10^{-6}$
2^{13}	$2,3992 \times 10^{-6}$	$3,5473 \times 10^{-7}$

Sonuç ve Bulgular

Bu çalışmada (6.18) GSDD, lineer SDD'e dönüştürülerek analitik çözümü bulundu. Ayrıca EM ve Heun metodları yardımıyla (6.18) denkleminin yaklaşık çözümleri elde edildi. Bu çözümlerin $N = 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}$ parçalanışları için ortalama karesel hatası hesaplandı. Çizelge 6.6'dan N 'in farklı değerleri için Heun şeması ile bulunan çözümlerin ortalama karesel hatasının, EM yaklaşımındaki ortalama karesel hatadan daha küçük olduğu görüldü.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada SDD'in tipleri tanıtılarak, analitik çözümleri ve farklı nümerik yöntemlerle nümerik çözümleri elde edildi. Ito Taylor açılımı verilerek bu şemadan EM ve Milstein şemalarının elde edilişi incelendi. Ayrıca birinci mertebeden kuvvetli açık şema, ikinci mertebeden basitleştirilmiş Taylor şemasından bahsedildi. Bu şemalar kullanılarak lineer olmayan SDD, lineere indirgenebilir SDD, stokastik diferansiyel denklem sistemleri, Kuba osilatörü nümerik olarak çözüldü. Ito analizi yardımıyla analitik çözümler elde edildi. Bu analitik çözümlerle nümerik çözümler arasındaki ilişki grafikler ve hata çizelgeleriyle incelendi. Lineer olmayan SDD çoklu örneklem yol üzerinden analitik ve nümerik olarak çözüldü. Karesel mutlak hata çizelgesi, hata grafiği verildi.

Gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler tanıtıldı. Gecikmeli lineer SDD EM, Heun nümerik metodlarıyla çözüldü.

Tezin özgün kısmı uygulama 6.1 de verilmiştir. Burada 10000 yol üzerinden bulunan EM, Milstein ve analitik çözümlerin ortalaması grafiklerle gösterilmiştir. Ortalama eğrinin gerçekten de örneklem eğrilerin yoğunlukla bulunduğu bölgede olduğu gözlemlenmiştir. Karesel mutlak hata grafiği ile hatanın kümülatif olarak arttığı görülmektedir. Bütün nümerik metodlar için adım aralığı küçüldükçe hataların küçüldüğü, gerçek değere yaklaşıldığı görülmektedir.

Lineer olmayan gecikmeli stokastik diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri incelenebilir.

- [1] Boyce, W. E., (1978). "Approximate Solution of Random Ordinary Differential Equations", *Advances in Applied Probability*, 10 (1): 172-184.
- [2] Kushner, H. J., (1977). *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*, Academic Press, New York.
- [3] Clements, D. J. ve Anderson, B. D. O.,(1980). "Well Behaved Ito Equations with Simulations that Always Misbehave", *IEEE Trans. Autom. Control* AC-18: 676-677.
- [4] Wright, D. J., (1974). "The Digital Simulation of Stochastic Differential Equations", *IEEE Trans. Autom. Control* AC-19: 75-76.
- [5] Clark, J. M. C. ve Cameron, R. J., (1980). "The Maximum Rate of Convergence of Discrete Approximations for Stochastic Differential Equations", *Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences* 25: 162-171.
- [6] Arató, M., (2003). "A Famous Nonlinear Stochastic Equation (Lotka-Volterra Model with Diffusion)", *Mathematical and Computer Modelling*, 38 (7-9): 709-726.
- [7] Saito, Y. ve Mitsui, T. (1993), "Simulation of Stochastic Differential Equations", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 45 (3): 419-432.
- [8] Kloeden P. E. ve Platen E., (1995). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, New York.
- [9] Maruyama, G., (1955). "Continuous Markov Processes and Stochastic Equations", *Rendiconti Circolo Matematico Palermo*, 4 (1):48-90.
- [10] Milshtein, G. N., (1974). "Approximate Integration of Stochastic Differential Equations", *Theor. Prob. Appl.* 19: 557-562.
- [11] Chang, C. C., (1987). "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Constant Diffusion Coefficients", *Mathematics of Computation*, 49 (180): 523-542.

- [12] Burrage, P. M., (1999). Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations, PhD Thesis, Department of Mathematics, The University of Queensland, Australia.
- [13] Török, C., (1994). "Numerical Solution of Linear Stochastic Differential Equations", Computers & Mathematics with Applications, 27 (4):1-10.
- [14] Higham, D. J., (2001). "An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations", SIAM Review, 43 (3): 525-546.
- [15] Higham, D. J., Mao, X. ve Stuart, A. M., (2002). "Strong Convergence of Euler-Type Methods for Nonlinear Stochastic Differential Equations", SIAM Journal on Numerical Analysis, 40 (3): 1041-1063.
- [16] Mao, X., (2015). "The Truncated Euler–Maruyama Method for Stochastic Differential Equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 290: 370-384.
- [17] Wang, P. ve Li, Y., (2010). "Split-Step Forward Methods for Stochastic Differential Equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 233 (10): 2641-2651.
- [18] Rümelin, W., (1982). "Numerical Treatment of Stochastic Differential Equations", SIAM Journal on Numerical Analysis, 19 (3): 604-613.
- [19] Friedman, A., (1975). Stochastic Differential Equations and Applications, (1), Academic Press. New York.
- [20] Oksendal, B., (2003). Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer- Verlag, New York.
- [21] Mao, X., (2007). Stochastic Differential Equations and Applications, Second Edition, Woodhead Publishing, UK.
- [22] Allen, E., (2007). Modeling with Itô stochastic Differential Equations, (22), Springer Science & Business Media, USA.
- [23] Gard, T. C., (1988). Introduction to Stochastic Differential Equations, M. Dekker, New York.
- [24] Bayram, M., Orucova Buyukoz, G., ve Partal, T. (2018). "Parameter Estimation in a Black-Scholes Model", Thermal Science, 22 (1): 117-122.
- [25] Markus, L. ve Weerasinghe, A. (1988). "Stochastic Oscillators", Journal of Differential Equations, 71(2): 288-314.
- [26] Strommen Melbo, A. H., ve Higham, D. J., (2004). "Numerical Simulation of A Linear Stochastic Oscillator with Additive Noise", Applied Numerical Mathematics, 51 (1): 89-99.
- [27] Hong, J., Scherer, R., ve Wang, L., (2007). "Predictor–Corrector Methods for A Linear Stochastic Oscillator with Additive Noise", Mathematical and Computer Modelling, 46(5-6): 738-764.

- [28] Senosiain, M. J., ve Tocino, A., (2015). "A review on Numerical Schemes for Solving A Linear Stochastic Oscillator", BIT Numerical Mathematics, 55 (2): 515-529.
- [29] Milstein, G. N., Repin, Y. M., ve Tretyakov, M. V., (2002). "Numerical Methods for Stochastic Systems Preserving Symplectic Structure", SIAM Journal on Numerical Analysis, 40 (4): 1583-1604.
- [30] Cohen, D., (2012). "On the Numerical Discretisation of Stochastic Oscillators", Mathematics and Computers in Simulation, 82 (8): 1478-1495.
- [31] Buckwar, E., (2000). "Introduction to the Numerical Analysis of Stochastic Delay Differential Equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 125(1-2): 297-307.
- [32] Bocharov, G. A., ve Rihan, F. A., (2000). "Numerical Modelling in Biosciences Using Delay Differential Equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 125 (1-2): 183-199.
- [33] Mao, X., Yuan, C., ve Zou, J., (2005). "Stochastic Differential Delay Equations of Population Dynamics", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 304(1), 296-320.
- [34] Tian, T., Burrage, K., Burrage, P. M., ve Carletti, M., (2007). "Stochastic Delay Differential Equations for Genetic Regulatory Networks", Journal of Computational and Applied Mathematics, 205 (2): 696-707.
- [35] Chang, M. H., ve Youree, R. K., (1999). "The European Option with Hereditary Price Structures: Basic Theory", Applied Mathematics and Computation, 102(2-3): 279-296.
- [36] Arriojas, M., Hu, Y., Mohammed, S. E., ve Pap, G., (2007). "A delayed Black and Scholes formula", Stochastic Analysis and Applications, 25(2): 471-492.
- [37] Mao, X., (2003), Stochastic Differential Delay Equations, Berlin.
- [38] Wang, Z., & Zhang, C., (2006). "An Analysis of Stability of Milstein method for Stochastic Differential Equations with Delay", Computers & Mathematics with Applications, 51(9-10): 1445-1452.
- [39] Kloeden, P. E., ve Shardlow, T., (2012). "The Milstein Scheme for Stochastic Delay Differential Equations without Using Anticipative Calculus", Stochastic Analysis and Applications, 30(2): 181-202.
- [40] Buckwar, E., ve Winkler, R., (2007). "Multi-Step Maruyama Methods for Stochastic Delay Differential Equations", Stochastic Analysis and Applications, 25(5): 933-959.
- [41] Norhayati, R., Arifah, B., Hoe, Y. S., ve Haliza, A. R., (2013). "Stochastic Taylor Methods for Stochastic Delay Differential Equations" MATEMATIKA, 29(1c): 241-251.
- [42] Çapar, U., (2013). Ölçü Kuramsal Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş, ODTÜ Geliştirme Vakfı, Ankara.

- [43] Önalın, Ö., (2010). Stokastik Süreçler, Avcıol Yayınları, İstanbul.
- [44] Protter, P., (1990). Stochastic Integration and Differential Equations, Springer-Verlag, New York.
- [45] Wong, E., ve Zakai, M., (1969). "Riemann-Stieltjes Approximations of Stochastic Integrals", Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 12(2): 87-97.
- [46] Sussmann, H. J., (1978). "On the Gap Between Deterministic and Stochastic Ordinary Differential Equations", The Annals of Probability, 19-41.
- [47] Tocino, A., ve Ardanuy, R., (2002). "Runge-Kutta Methods for Numerical Solution of Stochastic Differential Equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 138(2): 219-241.
- [48] Wagner, W ve Platen, E., (1978). "Approximation of Ito Integral Equations", Proc IFIP-WG 7/1 Working Conference, Berlin, 172-176.
- [49] Talay, D., (1984). "Efficient Numerical Schemes for the Approximation of Expectations of Functionals of the Solution of a SDE, and Applications", In Filtering and Control of Random Processes, Berlin, 294-313.
- [50] Gikhman, I. I., ve Skorokhod, A. V., (2007). "Stochastic Differential Equations", In The Theory of Stochastic Processes III, Berlin, 113-219.
- [51] Bayram, M., Partal, T., ve Buyukoz, G. O. (2018). "Numerical Methods for Simulation of Stochastic Differential Equations", Advances in Difference Equations, 2018(1): 17.
- [52] Khasminskii, R. (2011). Stochastic stability of differential equations, 66, Springer Science & Business Media, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gülşen ORUCOVA BÜYÜKÖZ
Doğum Tarihi ve Yeri : 20.10.1988 Bakü
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : gorucova@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik	Cumhuriyet Üniversitesi	2010
Lise		Sivas Fen Lisesi	2006

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2018	Necmettin Erbakan Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011	Necmettin Erbakan Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Bayram, M., Partal, T., ve Buyukoz, G. O. (2018). "Numerical Methods for Simulation of Stochastic Differential Equations", Advances in Difference Equations, 2018(1), 17.
2. Bayram, M., Orucova Buyukoz, G., ve Partal, T. (2018). "Parameter Estimation in a Black-Scholes Model", Thermal Science, 22 (1): 117-122.

Bildiri

1. Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "Numerical Approximations on Nonlinear Stochastic Differential Equations", 7.th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 20-24 Haziran 2018, İstanbul.
2. Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "Stochastic Delay Differential Equations with Numerical Solutions", 7.th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 20-24 Haziran 2018, İstanbul.
3. Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "Simulation of Stochastic Differential Equations", 3.rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 04-06 Mayıs 2018, Girne.
4. Partal T., Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "A Stochastic Model of Human Breast Cancer Growth ", International Conference on Mathematics and Computational Science and Engineering, 27-28 Temmuz 2017, Tokyo.
5. Orucova Büyüköz G., Partal T. ve Bayram M., "Numerical Simulation of Stochastic Oscillator", International Conference on Mathematics and Computational Science and Engineering, 27-28 Temmuz 2017, Tokyo.
6. Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "Numerical Solutions of Vector Stochastic Differential Equations", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 Temmuz 2017, İstanbul.
7. Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "Second Order Stochastic Differential Equations in Finance", International Conference on Mathematics and Engineering, 10-12 Mayıs 2017, İstanbul.
8. Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations ", 3rd International Conference on Pure and Applied Sciences, 2-6 Şubat 2017, Dubai.
9. Partal T., Orucova Büyüköz G. ve Bayram M., "Maximum Likelihood Estimation in Stochastic Differential Equations", 2nd International Conference on Pure and Applied Sciences, 1-5 Haziran 2016, İstanbul.
10. Orucova Büyüköz G., Partal T. ve Bayram M., "Numerical Solution of Second Order Stochastic Differential Equations", 2nd International Conference on Pure and Applied Sciences , 1-5 Haziran 2016, İstanbul.

11. Orucova Büy  k  z G. ve Bayram M., "Application on Nonparametric Estimation", 2nd International Conference on Pure and Applied Sciences, 1-5 Haziran 2016, İstanbul.
12. Partal T., Orucova Büy  k  z G. ve Bayram M., "Gompertzian Stochastic Model for Tumor", International Conference on Mathematics and Mathematics Education, 12-14 Mayıs 2016, Elazığ.
13. Orucova Büy  k  z G., Partal T. ve Bayram M., "Black Scholes Model with Numerical Solutions", International Conference on Mathematics and Mathematics Education, 12-14 Mayıs 2016, Elazığ.

  D  LLER  

1. Yurti  i Y  ksek Lisans Bursu, T  B  TAK, 2011.
2. Doğrudan Yurti  i Doktora Bursu, T  B  TAK, 2013.

