

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DUAL KUATERNİYONLAR VE DUAL KUATERNİYONİK EĞRİLER



ALİ DAĞDEVİREN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2018

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL KUATERNİYONLAR VE DUAL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Ali DAĞDEVİREN tarafından hazırlanan tez çalışması 28.12.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof.Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr.Öğr. Üyesi. Yasemin ALAGÖZ
Yıldız Teknik Üniversitesi



Bu alışma, TÜBİTAK BİDEB 2211 Yurt İçi Doktora Burs Programı ve Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nn FDK-2018-3321 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tezde ilk olarak, 3 ve 4-boyutlu Galile uzayları ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Ayrıca dual kuaterniyonlar hakkında genel tanımlamalar yapılmış ve Galile uzayı ile izomorfluğu kurulmuştur. Tezin orijinal kısmında ise dual kuaterniyonlar için tanımlanan özel bir çarpım yardımıyla dual kuaterniyonlar için Serret-Frenet formülleri ve Frenet elemanları elde edilmiştir. Böylece literatüre dual kuaterniyonik eğri kavramı kazandırılmıştır.

Bu çalışmayı hazırlarken benden desteklerini hiç esirgemeyen, çalışmalarımda bakış açımı her zaman geliştiren ve her koşulda destek verip sabırla yanımda olan kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

Her daim yanımda olarak manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme ve sevgili eşim R. Betül DAĞDEVİREN'e teşekkür ederim.

Aralık, 2018

Ali DAĞDEVİREN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT	xiii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Galile Düzlemi (G^2)	3
2.1.1 Galile Düzleminde İç Çarpım	4
2.1.2 Galile Düzleminde Özel İç Çarpım	4
2.1.3 Galile Düzleminde İki Vektörün Dikliği.....	4
2.1.4 Galile Düzleminde Merkezil Çember	4
2.1.5 Galile Düzleminde Galile Trigonometrisi	5
2.2 3-Boyutlu Galile Uzayı (G^3)	5
2.2.1 3-Boyutlu Galile Uzayında İç Çarpım.....	6
2.2.2 3-Boyutlu Galile Uzayında Özel İç Çarpım.....	6
2.2.3 3-Boyutlu Galile Uzayında Norm.....	6
2.2.4 3-Boyutlu Galile Uzayında Özel Norm	6
2.2.5 3-Boyutlu Galile Uzayında Diklik	7
2.2.6 3-Boyutlu Galile Uzayında Eğriler Teorisi.....	7
2.3 4-Boyutlu Galile Uzayı (G^4)	8

2.3.1	4-Boyutlu Galile Uzayında İç Çarpım.....	9
2.3.2	4-Boyutlu Galile Uzayında Özel İç Çarpım.....	9
2.3.3	4-Boyutlu Galile Uzayında Norm.....	9
2.3.4	4-Boyutlu Galile Uzayında Özel Norm	9
2.3.5	4-Boyutlu Galile Uzayında Diklik	10
2.3.6	4-Boyutlu Galile Uzayında Eğriler Teorisi.....	10
BÖLÜM 3		
DUAL KUATERNİYONLAR.....		16
3.1	Giriş	16
3.2	Dual Kuaterniyonlar	18
3.3	Dual Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler.....	22
3.4	Dual Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi	29
3.5	Dual Kuaterniyonlar için Euler Formülü.....	30
3.6	Dual Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü	31
3.7	Dual Kuaterniyonlarda İç Çarpım	35
3.8	Dual Kuaterniyonlarda Türev	36
BÖLÜM 4		
REEL KUATERNİYONİK EĞRİLER.....		38
4.1	H^p Uzayında Pure Reel Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri.....	38
4.2	H Uzayında Reel Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri....	50
BÖLÜM 5		
DUAL KUATERNİYONİK EĞRİLER		62
5.1	İzotropik Dual Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri.....	62
5.2	İzotropik Dual Kuaterniyonik Darboux Vektörü ve Özellikleri	72
5.3	Non-İzotropik Dual Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri..	73
BÖLÜM 6		
SONUÇ VE ÖNERİLER		84
KAYNAKLAR.....		87
EK-A		
ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR		90
A-1	Afin Uzay	90
A-2	Vektörel Çarpım.....	93
A.2.1	$\mathbb{R}^3$ Uzayında Vektörel Çarpım	93
A.2.2	$\mathbb{R}^3$ Uzayında Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu	94
A.2.3	$\mathbb{R}^4$ Uzayında Vektörel Çarpım.....	95
A-3	Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar	95

A-4	Vektör Alanları ve Vektör Alanları Uzayı.....	96
A-5	Yöne Göre Türev ve Kovaryant Türev.....	97
A-6	Bir Vektör Alanının Bir Diğer Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi.....	98
A-7	Kotanjant Vektörler ve Kotanjant Uzaylar	99
A-8	Eğriler Teorisi	100
A-9	E^n de Serret-Frenet Formülleri ve Eğrilikler	103
A-10	E^3 ve E^4 de Serret-Frenet Formülleri	104
ÖZGEÇMİŞ.....		109



SİMGE LİSTESİ

E^n	n – boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n – boyutlu reel uzay
$\mathbb{R}_1^4$	4 – boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	3 – boyutlu Minkowski uzayı
H	Reel kuaterniyonlar kümesi
H^P	Pure reel kuaterniyonlar kümesi
H_D	Dual kuaterniyonlar kümesi
H_D^P	İzotropik dual kuaterniyonlar kümesi
G^2	Galile düzlemi
G^3	3 – boyutlu Galile uzayı
G^4	4 – boyutlu Galile uzayı
$\chi(E^n)$	E^n deki vektör alanları kümesi
$T_A(P)$	$P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerin kümesi
$T_{E^n}^*(P)$	Kotanjant uzay
d	Uzaklık fonksiyonu
S_q	q kuaterniyonunun skaler kısmı
V_q	q kuaterniyonunun vektörel kısmı
D	E^n de kovaryant türev operatörü
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid iç çarpımı
$\langle \cdot, \cdot \rangle_G$	Galile iç çarpımı
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$	Galile uzayında özel iç çarpımı
$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	Reel kuaterniyonların iç çarpımı
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_D}$	Non-izotropik dual kuaterniyonların iç çarpımı
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_D^\delta}$	İzotropik dual kuaterniyonların iç çarpımı
$\ \cdot \ $	Reel uzayda norm
$\ \cdot \ _H$	Reel Kuaterniyonların normu

$\ \cdot\ _{H_D}$	Non-izotropik dual Kuaterniyonların normu
$\ \cdot\ _{H_D^\delta}$	İzotropik dual kuaterniyonların normu
$\ \cdot\ _G$	Galile uzayında norm
$\ \cdot\ _\delta$	Galile uzayında özel norm
$\times$	Kuaterniyon çarpımı
$\wedge_{\mathbb{R}^3}$	$\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpım
$\wedge_{\mathbb{R}^4}$	$\mathbb{R}^4$ deki vektörel çarpım
$\wedge_G$	Galile uzayında vektörel çarpım
$\otimes$	Non-izotropik dual kuaterniyonların çarpımı
$\otimes_\delta$	İzotropik dual kuaterniyonların çarpımı



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 Galile düzleminde aç..... 5



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4. 1	Reel kuaterniyonların çarpım tablosu.....	41
Çizelge 5. 1	İzotropik dual kuaterniyon çarpım tablosu.....	65

DUAL KUATERNİYONLAR VE DUAL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Ali DAĞDEVİREN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

İlk olarak 3 ve 4-boyutlu Galile uzayları ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Dual kuaterniyonlar ile ilgili temel bazı tanımlamalarla beraber, dual kuaterniyonlar için kuaterniyon çarpımı pure dual kuaterniyonların çarpımını da içerecek şekilde yeniden düzenlenmiş ve Galile uzayı ile izomorf yapı kurulmuştur. Ayrıca bu izomorfluğa bağlı olarak dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri ve Frenet elemanları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dual kuaterniyonlar, izotropik dual kuaterniyonlar, non-izotropik dual kuaterniyonlar, Serret-Frenet formülü, Frenet elemanları

DUAL QUATERNIONS AND DUAL QUATERNIONIC CURVES

Ali DAĞDEVİREN

Department of Mathematics

PhD Thesis

Adviser: Prof. Dr. Salim YÜCE

First of all, basic concept about 3 and 4-dimensional Galilean space is given. Besides some basic definitions about dual quaternions, multiplication of dual quaternions reviewed including multiplication of pure dual quaternions. Hence, an isomorphic structure with Galilean space has been established. Thus, as a result of the isomorphic structure, Serret-Frenet formulae for dual quaternionic curves and Frenet elements are obtained.

Keywords: Dual quaternions, isotropic dual quaternions, non-isotropic dual quaternions, Serret-Frenet formulae, Frenet elements

1.1 Literatür Özeti

Kuaterniyonlar ilk olarak 1843 yılında İrlandalı Matematikçi William R. Hamilton, [1] tarafından karmaşık sayıları genelleştirerek geometrik optikte kullanmak amacıyla bulunmuştur. Günümüzde kuaterniyonlar, grafik tasarımlarında ve fiziksel problemler gibi birçok bilim dalında kullanılmaktadır. 1983 yılında Hacısalihoğlu, [2] kuaterniyonlar ile ilgili temel özellikleri incelemiştir. 1985 yılında ise Nagaraj ve Bharathi, [3] kuaterniyonik çarpımın geometrisini incelemiştir.

Kuaterniyonlar kullanılarak eğriler teorisi ile ilgili yapılan ilk çalışma 1987 yılında Bharathi ve Nagaraj, [4] tarafından reel tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar (kuaterniyonik eğriler) başlığı ile verilmiştir. Bu çalışmada, pure kuaterniyonik bir eğrinin Serret-Frenet formülleri elde edilmiş ve elde edilen bu formüller yardımıyla kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir.

Literatür incelendiğinde, kuaterniyonik eğriler ile ilgili değer çalışmaları şu şekilde sıralayabiliriz: Karadağ ve Sivridağ, [5] 1997 yılında kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri yardımıyla kuaterniyonik eğilim çizgileri ve harmonik eğrilikleri inceleyip, harmonik eğrilikleri eğrinin eğrilikleri cinsinden elde etmişlerdir. Yine aynı çalışma içerisinde kuaterniyonik eğrilerin bir eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi olması için eğrinin harmonik eğrilikleri cinsinden karakterizasyonları da aynı yazarlar tarafından incelenmiştir, [6]. Güngör ve Tosun, [7] Öklid uzayında kuaterniyonik rektifiyan eğrilerini, Soyfidan ve Güngör, [8] ise yarı Öklid uzayında kuaterniyonik rektifiyan

eğrilerini incelemişlerdir. Yine aynı yazarlar, [9,10] çalışmalarında kuaterniyonik involüt evolüt eğri çiftlerini Öklid ve yarı Öklid uzayında incelemiş ve özellikleri hakkında bilgiler elde etmişlerdir. Ayrıca Öklid ve yarı Öklid uzaylarında kuaterniyonik B_2 slant helisler ve ilgili özellikleri incelenmiştir, [11,12].

Kuaterniyonlar için De-Moivre's formülü, kuaterniyonlara ait matrisler ve Euler formülleri [13,14] nolu kaynaklarda incelenmiştir. Kuaterniyonlar ile ilgili diğer temel tanım, teorem ve sonuçlar muhtelif kaynaklarda verilmiştir, [15-19].

Dual kuaterniyonlar literatürde ilk olarak 1994 yılında Majernik tarafından [20] nolu çalışmada dört bileşenli sayılar olarak tanımlanmıştır. Majernik [21] nolu çalışmada ise Galile uzay-zaman dönüşümlerini dual kuaterniyonları kullanarak ifade etmiştir. Daha sonra 2009 yılında Yaylı ve Tütüncü [22] nolu çalışma ile genelleştirilmiş Galile dönüşümlerini ve dual kuaterniyonları incelemişlerdir. 2011 yılında ise, Ercan ve Yüce tarafından, [23] nolu çalışmada dual kuaterniyonlar için Euler formülü, De-Moivre's formülü ve dual kuaterniyonların matris gösterimleri verilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Tezde, öncelikle, dual kuaterniyon çarpımı ve özellikleri incelenecek olup bu özellikler yardımıyla izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet vektörleri ve Frenet elemanları elde edilecektir. Bulunan bu formüller yardımıyla, non-izotropik dual kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri ve Frenet elemanları verilecektir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada dual kuaterniyonlar hakkında tanımlamalar yapılarak, izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri incelenecektir. Elde edilen bu formüller kullanılarak non-izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri bulunarak literatüre dual kuaterniyonik eğri kavramı kazandırılacaktır.

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin orijinal kısmında kullanacağımız bazı temel bilgiler verilecektir. Bu bilgiler Galile düzlemi ile 3 ve 4-boyutlu Galile uzayları hakkında olacaktır.

2.1 Galile Düzlemi (G^2)

Tanım 2.1 Galile düzleminde Galile dönüşümleri;

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (2.1)$$

veya matris ifadesiyle,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad X' = AX + C \quad (2.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada A matrisi *shear matrisi* ve C matrisi de *öteleme matrisi* olarak tanımlanır. Bu dönüşümler altında değişmeyenlerin teorisine *Galile'nin Görecelik Prensibinin Geometrisi* veya 2-boyutlu *Galile düzlemi* adı verilir ve G^2 ile gösterilir. Galile düzleminde vektörler iki sınıfta incelenir. Bunlardan biri vektörün ilk bileşenin sıfır olduğu, bir diğeri de sıfır olmadığı durumdur. Alınan bir vektörün ilk bileşeni sıfır ise bu vektöre *izotropik veya özel vektör* adı verilir. Aksi halde bu vektöre *non-izotropik vektör* denir. Örneğin $\vec{x} = (x_1, y_1) \in G^2$ vektörü için, eğer $x_1 = 0$ ise bu vektöre *izotropik vektör* denir. Vektörlerin izotropik veya non-izotropik olmasına göre tanımlanan iç çarpım değişmektedir, [24-26].

2.1.1 Galile Düzleminde İç Çarpım

Tanım 2.2 Galile düzleminde $\vec{x} = (x_1, y_1)$, $\vec{y} = (x_2, y_2) \in G^2$ non-izotropik vektörlerinin Galile iç çarpımı $\langle , \rangle_G$ notasyonu ile gösterilir ve $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_G = x_1 x_2$ olarak tanımlanır, [24-26].

2.1.2 Galile Düzleminde Özel İç Çarpım

Tanım 2.3 Galile düzleminde $\vec{x} = (0, y_1)$, $\vec{y} = (0, y_2) \in G^2$ izotropik vektörlerinin Galile özel iç çarpımı $\langle , \rangle_\delta$ notasyonu ile gösterilir ve $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\delta = y_1 y_2$ şeklinde tanımlanır, [24-26].

2.1.3 Galile Düzleminde İki Vektörün Dikliği

Tanım 2.4 Galile düzleminde $\vec{x}, \vec{y} \in G^2$ vektörleri için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_G = 0$ eşitliği ancak $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_G \neq 0$ için $\vec{y} = (0, y_2)$ olması durumunda sağlanır ve bu $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerine *ortogonal vektörler* denir. Böylece herhangi bir izotropik vektörün düzlemdeki tüm non-izotropik vektörlere diktir ve $\vec{x} \perp \vec{y}$ ile gösterilir, [24-26].

2.1.4 Galile Düzleminde Merkezli Çember

Tanım 2.5 Sabit bir $Q(a, b)$ noktasına uzaklıkları mutlak değerce sabit ve r olan $M(x, y)$ noktalarının kümesine *çember* denir ve S ile gösterilir. Burada $Q(a, b)$ noktasına S çemberinin merkezi ve negatif olmayan r sayısına *çemberin yarıçapı* denir. Ayrıca S çemberi $S = \{ Q = (x, y) \mid d(Q, M) = r \}$ ile gösterilebilir. Burada $\overrightarrow{QM} = (x - a, y - b)$ ve $d(Q, M) = \|QM\| = r$ dir. Böylece S çemberi $|x - a| = r$ olarak tanımlanabilir, [24-26].

2.1.5 Galile Düzleminde Galile Trigonometrisi

Galile anlamında cosinüs ve sinüs fonksiyonları, sırasıyla, cosg ve sing olmak üzere

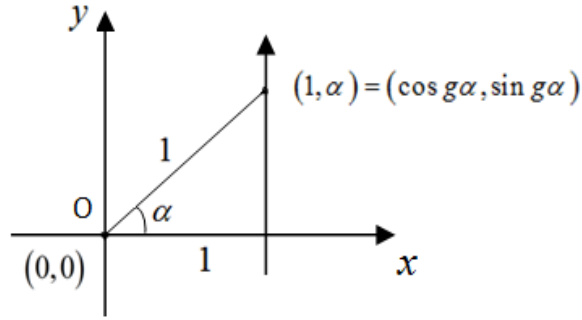
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\text{cosg } \alpha = 1$$

$$\text{sing } \alpha = \alpha$$

(2.3)

olarak tanımlanır, [24-26].



Şekil 2. 1 Galile düzleminde açı

2.2 3-Boyutlu Galile Uzayı (G^3)

Tanım 2.6 G^3 Galile uzayında Galile dönüşümleri;

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = (v \cos \beta) x + \cos \varphi y + \sin \varphi z + b \\ z' = (v \sin \beta) x - \sin \varphi y + \cos \varphi z + d \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşümler altında değişmeyenlerin teorisine *Galile'nin Görecelik Prensibinin Geometrisi* veya *3-boyutlu Galile Uzayı* denir ve G^3 ile gösterilir, [24-26].

Tanım 2.7 G^3 Galile uzayında $\vec{u} = (0, y, z)$ şeklindeki vektörlere *özel (izotropik) vektörler* denir. Diğer vektörlere, yani $\vec{v} = (x, y, z)$, $x \neq 0$ şeklindeki vektörlere *sıradan (izotropik olmayan veya non-izotropik) vektörler* adı verilir, [24-26].

2.2.1 3-Boyutlu Galile Uzayında İç Çarpım

Tanım 2.8 Galile uzayında $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1), \vec{y} = (x_2, y_2, z_2) \in G^3$ olmak üzere Galile iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ şeklinde gösterilir ve

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_G = x_1 x_2$$

şeklinde tanımlanır, [24-26].

2.2.2 3-Boyutlu Galile Uzayında Özel İç Çarpım

Tanım 2.9 Galile uzayında $\vec{x} = (0, y_1, z_1), \vec{y} = (0, y_2, z_2) \in G^3$ özel vektörlerinin Galile özel iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ ile gösterilir ve

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\delta = y_1 y_2 + z_1 z_2$$

olarak tanımlanır, [24-26].

2.2.3 3-Boyutlu Galile Uzayında Norm

Tanım 2.10 Galile uzayında $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1) \in G^3$ vektörünün normu $\|\vec{x}\|_G$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{x}\|_G = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_G} = |x_1|$$

şeklinde tanımlanır. $\|\vec{x}\|_G = 1$ ise $\vec{x}$ vektörüne *birim vektör* denir, [24-26].

2.2.4 3-Boyutlu Galile Uzayında Özel Norm

Tanım 2.11 Galile uzayında $\vec{x} = (0, y_1, z_1) \in G^3$ özel vektörünün normu $\|\vec{x}\|_\delta$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{x}\|_\delta = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_\delta} = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$$

şeklinde tanımlanır, [24-26].

2.2.5 3-Boyutlu Galile Uzayında Diklik

Tanım 2.12 Galile uzayında $\vec{x}, \vec{y} \in G^3$ vektörleri için, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_G = 0$ eşitliği, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_G \neq 0$ için $\vec{y} = (0, y_2, z_2)$ olması durumunda sağlanır ve bu $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerine *ortogonal vektörler* denir ve $\vec{y} \perp \vec{x}$ ile gösterilir. Böylece herhangi bir izotropik vektörün uzayda tüm vektörlere dik olduğu söylenebilir, [24-26].

Tanım 2.13 Galile uzayında $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1), \vec{y} = (x_2, y_2, z_2) \in G^3$ olmak üzere ve bu iki vektörden en az biri özel vektör olmamak üzere Galile vektörel çarpımı,

$$\vec{x} \wedge_G \vec{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (0, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2) \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektörleri standart baz vektörlerdir, [24-26].

2.2.6 3-Boyutlu Galile Uzayında Eğriler Teorisi

G^3 Galile uzayında bir α uzay eğrisi $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I \rightarrow G^3$, şeklindedir.

$\alpha: I \rightarrow G^3$, eğrisi için $(y''(x))^2 + (z''(x))^2 \neq 0$ olmak üzere $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ ve x yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin eğriliği $\kappa(x) = \sqrt{(y''(x))^2 + (z''(x))^2}$ olmak üzere bu eğrinin Frenet üç ayaklısı

$$\begin{cases} t(x) = (1, y'(x), z'(x)) \\ n(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, y''(x), z''(x)) \\ b(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x)) \end{cases} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Ayrıca α eğrisinin Serret-Frenet elemanları t, n, b, κ, τ olmak üzere; bu eğrinin Frenet formülleri

$$\begin{cases} t' = \kappa n \\ n' = \tau b \\ b' = -\tau b \end{cases}$$

şeklinde dir. Ayrıca bu formülleri matris formatında

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

şeklinde gösterilebilir.

Burada τ burulma fonksiyonu

$$\tau(x) = \frac{\det(\alpha'(x), \alpha''(x), \alpha'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

olarak hesaplanır, [27].

2.3 4-Boyutlu Galile Uzayı (G^4)

Tanım 2.14 4-boyutlu Galile uzayında Galile dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{cases} x' = (\cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha) x - (\sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha) y + (\sin \gamma \sin \alpha) z \\ \quad + (v \cos \delta_1) t + a \\ y' = (\cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha) x + (-\sin \beta \sin \alpha - \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha) y + (\sin \gamma \cos \alpha) z \\ \quad + (v \cos \delta_2) t + b \\ z' = (\sin \gamma \sin \beta) x - (\sin \gamma \cos \beta) y + (\cos \gamma) z + (v \cos \delta_3) t + c \\ t' = t + d. \end{cases}$$

Burada $\cos^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_2 + \cos^2 \delta_3 + \cos^2 \delta_4 = 1$. Bu dönüşümler altında değişmeyenlerin teorisine *Galile'nin Görecelik Prensibinin Geometrisi* veya *4-boyutlu Galile Uzayı* denir ve G^4 ile gösterilir, [24-26].

Tanım 2.15 Galile uzayında $\vec{u} = (0, y, z, t)$ şeklindeki vektörlere *özel (izotropik) vektörler* denir. Diğer vektörlere, yani $\vec{v} = (x, y, z, t)$, $x \neq 0$ şeklindeki vektörlere *sıradan (izotropik olmayan veya non-izotropik) vektörler* adı verilir, [24-26].

2.3.1 4-Boyutlu Galile Uzayında İç Çarpım

Tanım 2.16 4-boyutlu Galile uzayında $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in G^4$ olmak üzere Galile iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ şeklinde gösterilir ve

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_G = x_1 x_2$$

şeklinde tanımlanır, [24-26].

2.3.2 4-Boyutlu Galile Uzayında Özel İç Çarpım

Tanım 2.17 Galile uzayında $\vec{x} = (0, y_1, z_1, t_1)$, $\vec{y} = (0, y_2, z_2, t_2) \in G^4$ özel vektörlerinin Galile özel iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ ile gösterilir ve

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\delta = y_1 y_2 + z_1 z_2 + t_1 t_2$$

olarak tanımlanır, [24-26].

2.3.3 4-Boyutlu Galile Uzayında Norm

Tanım 2.18 Galile uzayında her $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in G^4$ vektörünün normu $\|\vec{x}\|_G$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{x}\|_G = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_G} = |x_1|$$

şeklinde tanımlanır. $\|\vec{x}\|_G = 1$ ise $\vec{x}$ vektörüne *birim vektör* denir, [24-26].

2.3.4 4-Boyutlu Galile Uzayında Özel Norm

Tanım 2.19 Galile uzayında $\vec{x} = (0, y_1, z_1, t_1) \in G^4$ özel vektörünün normu $\|\vec{x}\|_\delta$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{x}\|_\delta = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_\delta} = \sqrt{y_1^2 + z_1^2 + t_1^2}$$

şeklinde tanımlanır, [24-26].

2.3.5 4-Boyutlu Galile Uzayında Diklik

Tanım 2.20 4-boyutlu Galile uzayında $\vec{x}, \vec{y} \in G^4$ vektörleri için

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_G = 0$$

olması $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_G \neq 0$ için $\vec{y} = (0, y_2, z_2, t_2)$ olması durumunda sağlanır ve bu $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerine *ortogonal vektörler* denir. Böylece herhangi bir izotropik vektörün G^4 uzayında tüm vektörlere dik olduğu söylenebilir ve $\vec{y} \perp \vec{x}$ ile gösterilir, [24-26].

Tanım 2.21 Galile uzayında $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, t_1), \vec{y} = (x_2, y_2, z_2, t_2), \vec{z} = (x_3, y_3, z_3, t_3) \in G^4$ olmak üzere bu vektörlerin Galile vektörel çarpımı

$$\vec{x} \wedge_G \vec{y} \wedge_G \vec{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ vektörleri standart baz vektörlerdir, [27].

2.3.6 4-Boyutlu Galile Uzayında Eğriler Teorisi

4-boyutlu Galile uzayında bir α uzay eğrisi $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow G^4$

$$s \rightarrow (s, y(s), z(s), w(s))$$

şeklinde. $\alpha : I \rightarrow G^4$, s parametresi ile verilmiş eğrisi için

$(y''(s))^2 + (z''(s))^2 + (w''(s))^2 \neq 0$ olmak üzere $\alpha(s) = (s, y(s), z(s), w(s))$ şeklinde bir eğri olsun. Bu $\alpha(s)$ eğrisinin Serret-Frenet çatısının ilk vektörü teğet vektörüdür ve

$$T = \alpha'(s) = (1, y'(s), z'(s), w'(s))$$

şeklinde. T' vektör fonksiyonu α eğrisinin dönme ölçüsünü vermektedir. Reel değerli

$$k_1(s) = \|T'(s)\|_\delta = \sqrt{(y''(s))^2 + (z''(s))^2 + (w''(s))^2}$$

ifadesi α eğrisinin birinci eğriliğini belirtmektedir. İkinci ve üçüncü eğriliği ise sırasıyla

$$k_2(s) = \|N'(s)\|_\delta$$

$$k_3(s) = \langle B_1'(s), B_2(s) \rangle_\delta$$

olarak tanımlanır. Bu çalışmada her $s \in I$ için $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ kabul edilecektir. Bu koşul altında α eğrisinin Frenet çatısı

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = (1, y'(s), z'(s), w'(s)) \\ N(s) = \frac{1}{k_1(s)} (0, y''(s), z''(s), w''(s)) \\ B_1(s) = \frac{1}{k_2(s)} \left(0, \left(\frac{1}{k_1(s)} y''(s) \right)', \left(\frac{1}{k_1(s)} z''(s) \right)', \left(\frac{1}{k_1(s)} w''(s) \right)' \right) \\ B_2(s) = \mu T \wedge_G N \wedge_G B_1 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır. Burada $\mu = \pm 1$ olup T, N, B_1 ve B_2 sırasıyla tanjant, normal, binormal ve trinormal olarak isimlendirilir.

α eğrisinin Serret-Frenet elemanları $T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3$ olmak üzere; bu eğrinin Frenet formülleri

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = k_1 N \\ N' = k_2 B_1 \\ B_1' = -k_2 N + k_3 B_2 \\ B_2' = -k_3 B_1 \end{array} \right.$$

şeklinde dir. Ayrıca bu formülleri matris formatında

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

olarak gösterilebilir, [27].

Örnek 2.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G^4$ eğrisi $\alpha(s) = (s, s^2, \sin s, \cos s)$ olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet elemanlarını ve Frenet formüllerini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle α eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\alpha'(s) = (1, 2s, \cos s, \sin s)$$

eşitliğinden

$$\|\alpha'(s)\|_G = \sqrt{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_G} = 1$$

olup α birim hızlıdır. Bu durumda

$$T(s) = \alpha'(s) = (1, 2s, \cos s, \sin s)$$

olarak yazılır. Ayrıca buradan,

$$T'(s) = \alpha''(s) = (0, 2, -\sin s, -\cos s)$$

ve

$$\begin{aligned} \|T'(s)\|_\delta &= \sqrt{\langle T'(s), T'(s) \rangle_\delta} \\ &= \sqrt{4 + \sin^2 s + \cos^2 s} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. α eğrisinin birinci eğriliğinin tanımı

$$k_1(s) = \|T'(s)\|_\delta$$

olduğundan dolayı $k_1 = \sqrt{5}$ dir. Ayrıca $N(s) = \frac{1}{k_1(s)}(0, y''(s), z''(s), w''(s))$ tanımı

gereği,

$$N = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -\sin s, -\cos s)$$

eşitliğinden

$$N = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-\sin s}{\sqrt{5}}, \frac{-\cos s}{\sqrt{5}} \right)$$

elde edilir. Bu eşitlikten N vektörünün türevi

$$N' = \left(0, 0, \frac{-\cos s}{\sqrt{5}}, \frac{\sin s}{\sqrt{5}} \right)$$

olarak bulunur. Bu ifade kullanılarak N' vektörünün normu ise

$$\|N'\|_s = \sqrt{\frac{\cos^2 s}{5} + \frac{\sin^2 s}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur. α eğrisinin ikinci eğriliğinin tanımından

$$k_2(s) = \|N'(s)\|_s = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Şimdi de $B_1(s)$ vektörünü tanımını kullanarak bulalım. Bunun için

$k_1(s)$, $k_2(s)$ ifadelerini yerine yazılırsa,

$$B_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{5}} 2 \right)', \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (-\sin s) \right)', \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (-\cos s) \right)' \right)$$

eşitliğinden

$$B_1(s) = (0, 0, -\cos s, \sin s)$$

bulunur. Bu son eşitlikten $B_1(s)$ vektörünün türevi

$$B_1'(s) = (0, 0, \sin s, \cos s)$$

olarak elde edilir.

Şimde de $B_2(s)$ vektörünü bulalım. $B_2(s) = \mu T \wedge_G N \wedge_G B_1$ olduğunu biliyoruz.

Tanım 2.21 kullanılırsa,

$$B_2(s) = \mu T \wedge_G N \wedge_G B_1$$

$$= \mu \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2s & \cos s & -\sin s \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-\sin s}{\sqrt{5}} & \frac{-\cos s}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\cos s & \sin s \end{vmatrix}$$

ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa, $B_2(s)$ vektörü

$$B_2(s) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s \right)$$

olarak bulunur. Burada $\mu = 1$ dir. Buradan $B_2(s)$ vektörünün türevi

$$B_2'(s) = \left(0, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{-2}{\sqrt{5}} \sin s \right)$$

kolaylıkla elde edilir. Şimdi de son olarak α eğrisinin üçüncü eğriliğinin tanımı olan

$$k_3(s) = \left\langle B_1'(s), B_2(s) \right\rangle_\delta$$

eşitliği kullanılırsa,

$$k_3(s) = \left\langle (0, 0, \sin s, \cos s), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s \right) \right\rangle_\delta$$

ifadesinden

$$k_3(s) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\alpha(s) = (s, s^2, \sin s, \cos s)$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri sırasıyla,

$$k_1 = \sqrt{5}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad k_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ve Frenet vektörleri ise

$$T(s) = (1, 2s, \cos s, \sin s)$$

$$N(s) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-\sin s}{\sqrt{5}}, \frac{-\cos s}{\sqrt{5}}\right)$$

$$B_1(s) = (0, 0, -\cos s, \sin s)$$

$$B_2(s) = \mu \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s\right)$$

olarak elde edilir. Bununla beraber $\alpha(s) = (s, s^2, \sin s, \cos s)$ eğrisinin Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

şeklinde bulunur.

DUAL KUATERNİYONLAR

3.1 Giriş

Öncelikle $\mathbb{R}^4$, G^4 ve $\mathbb{R}_1^4$ uzaylarını ele alalım. Bu uzaylar incelendiğinde, aslında G^4 ve $\mathbb{R}_1^4$ uzaylarının $\mathbb{R}^4$ ile aynı uzaylar olduğu görülür. Bu uzaylarda iki sıralı dördlünün toplamı ve bir skaler ile bir sıralı dördlünün çarpımı işlemlerine göre bunlar aynı nokta kümeleridir. Yani aynı vektör uzaylarıdır. Ancak $\mathbb{R}^4$ vektör uzayında,

$\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için;

- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^4} = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^4$ uzayına E^4 Öklid uzayı,
- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa bu iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^4$ uzayına $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayı,
- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_G = \begin{cases} x_0 y_0 & , x_0 \neq 0 \text{ veya } y_0 \neq 0 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & , x_0 = 0 \text{ ve } y_0 = 0 \end{cases}$

Galile iç çarpımı tanımlanırsa bu uzaya bu iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^4$ uzayına G^4 Galile uzayı adı verilir. G^4 uzayında vektörler ilk bileşenlerinin sıfır olup olmadığına göre iki grupta incelenir. Vektörün ilk bileşeni $x_0 = 0$ ise bu vektöre *izotropik vektör*, $x_0 \neq 0$ ise bu vektörlere *non-izotropik vektör* adı verilir. İzotropik vektörler geometrik olarak G^4 uzayının vektör uzayı olarak alt uzayı olan $\mathbb{R}^3$ uzayında bir vektördür ve buradaki metrik öklid metriğidir. Vektörlerden biri non-izotropik diğeri de izotropik ise birinci iç

çarpım kullanılmaktadır. Fakat iki vektör de aynı anda izotropik vektörler ise bu iki vektör G^4 uzayının alt vektör uzayı olan $\mathbb{R}^3$ uzayına düştüğünden dolayı Öklid metriğini kullanmak gerekmektedir.

Literatür incelendiğinde, $\mathbb{R}^4$ uzayına izomorf olan kuaterniyonların reel kuaterniyonlar olduğu görülür. $a_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir reel kuaterniyon $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ formunda olup aşağıdaki bağıntılar ile tanımlanır:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 . \quad (3.1)$$

Ayrıca pure reel kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorf olduğundan iki pure kuaterniyonun çarpımında da (3.1) eşitlikleri geçerlidir.

$\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayını ele alalım. Bu uzaya izomorf olan kuaterniyon uzayı ise split kuaterniyonlar uzayıdır. Split kuaterniyonların birimleri aşağıdaki bağıntılar ile tanımlanır:

$$i^2 = j^2 = -1, k^2 = 1, ijk = 1 . \quad (3.2)$$

Bu uzaydaki pure split kuaterniyonların kümesi $\mathbb{R}_1^3$ uzayına izomorftur ve pure split kuaterniyonlar ile işlem yaptığımızda da (3.2) eşitlikleri geçerlidir.

Ancak G^4 Galile uzayına izomorf olan kuaterniyonları araştırdığımızda ise [20], [21] [22] ve [23] nolu kaynaklarında karşımıza çıkan kuaterniyonlar dual kuaterniyonlardır. Dual kuaterniyonlar kümesi H_D ile gösterilmiş olup dual kuaterniyonların birimleri aşağıdaki bağıntılar ile tanımlanır:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0 . \quad (3.3)$$

Ancak bu bağıntılar ile verilen Dual kuaterniyonlar kümesinin G^4 uzayına tam anlamıyla izomorf olduğu çıkarılamaz. Çünkü bu uzayda (3.3) tanımında pure dual kuaterniyonların karşılığı yoktur. G^4 uzayına izomorf olabilmesi için pure dual kuaterniyonlar için de bir çarpma işlemi tanımlanması gerekirdi. Tezde ayrıca literatürdeki bu eksiklik giderildi.

Tezimizde dual kuaterniyonları incelerken $1, i, j, k$ sembolleri yerine $1, e_1, e_2, e_3$ sembollerini kullanacağız. Ayrıca, pure dual kuaterniyonlar incelendiğinde, G^4 uzayının içinde yer alan $\mathbb{R}^3$ alt vektör uzayına düştüğü görülmektedir. Dolayısıyla, sadece pure dual kuaterniyonlarda işlem yapılırken $\mathbb{R}^3$ uzayındaki metrik kullanılmalıdır. Böylece e_1, e_2, e_3 birim elemanları

$$\left. \begin{aligned} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_1 \\ e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2, \quad e_3 e_1 = e_2 = -e_1 e_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

eşitliklerini sağlamalıdır.

Bundan dolayı, literatürde (3.3) denklemi ile verilmiş olan dual kuaterniyonlar kavramını genişleterek dual kuaterniyonları, ilk bileşenlerinin sıfır olup olmamasına göre izotropik ve non-izotropik dual kuaterniyonlar olarak iki kısımda inceleyeceğiz.

Yani, $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ bir dual kuaterniyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} q \text{ non-izotropik ise} \quad & \begin{cases} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0 \\ e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = e_1 e_2 e_3 = 0 \end{cases} \\ \text{yani } a_0 \neq 0 & \\ q \text{ izotropik ise} \quad & \begin{cases} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_1 \\ e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2, \quad e_3 e_1 = e_2 = -e_1 e_3 \end{cases} \\ \text{yani } a_0 = 0 & \end{aligned} \quad (3.5)$$

bağıntıları sağlanır. Böylece H_D dual kuaterniyonlar kümesi G^4 Galile uzayına izomorf olduğu görülür.

Böylece reel kuaterniyonik eğrilerin Frenet elemanları araştırılırken pure reel kuaterniyonik eğrilerin Frenet elemanlarının kullanımına benzer olarak; pure dual kuaterniyonik eğrilerin Frenet elemanları yardımıyla dual kuaterniyonik eğrilerin Frenet elemanları elde edilebilecektir.

3.2 Dual Kuaterniyonlar

Bir dual kuaterniyon $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ formunda olup $a_i \in \mathbb{R}$ ve e_1, e_2, e_3 birimleri (3.5) eşitliklerini sağlasın. O halde, dual kuaterniyonlar kümesi H_D ile gösterilir ve

$$H_D = \left\{ q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \left| \begin{array}{l} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0, \\ e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = e_1 e_2 e_3 = 0 \end{array} \right. \right. \left. \begin{array}{l} q \text{ non-izotropik ise} \\ \text{yani } a_0 \neq 0 \end{array} \right\}, a_i \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_1 \\ e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2, e_3 e_1 = e_2 = -e_1 e_3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} q \text{ izotropik ise} \\ \text{yani } a_0 = 0 \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece dual kuaterniyonlar, pure olmayan dual kuaterniyonlar ve pure dual kuaterniyonlar olarak iki kısımda incelenir. Pure olmayan dual kuaterniyonlara *non-izotropik dual kuaterniyonlar* ve pure olan dual kuaterniyonlara da *izotropik dual kuaterniyonlar* denir.

Non-izotropik dual kuaterniyonların kümesi için $H_D = sp\{1, e_1, e_2, e_3\}$ olduğu açıktır ve non-izotropik dual kuaterniyonlar için

$$\left. \begin{array}{l} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0, \\ e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = e_1 e_2 e_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

bağıntıları geçerlidir.

İzotropik dual kuaterniyonlar kümesi, H_D non-izotropik dual kuaterniyonlar uzayının bir alt uzayı olup $H_D^\delta = sp\{e_1, e_2, e_3\}$ olarak ifade edilebilir. H_D^δ uzayının $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorf olduğu gösterilebilir. İzotropik dual kuaterniyonlar için

$$\left. \begin{array}{l} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_1 \\ e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2, e_3 e_1 = e_2 = -e_1 e_3 \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

bağıntıları geçerlidir. O halde, tezimiz boyunca H_D^δ uzayında çalıştığımız sürece (3.7) bağıntıları kullanılacaktır. Ancak biri H_D ve biri H_D^δ uzayında alınan sayılarla işlem yapılacağı zaman (3.6) bağıntıları geçerlidir. Ayrıca H_D^δ uzayına *izotropik dual kuaterniyon uzayı* ve H_D uzayına da *non-izotropik dual kuaterniyon uzayı* adı verilir.

Bir $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ dual kuaterniyonunda $a_0 \in \mathbb{R}$ değerine q kuaterniyonunun *reel kısmı* denir ve S_q ile gösterilir. $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ ifadesine de q kuaterniyonunun *vektörel kısmı* denir ve

$$V_q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

ile gösterilir. Böylece her q dual kuaterniyonu

$$q = S_q + V_q$$

şeklinde skaler kısım ve vektör kısmın toplamı olarak gösterilebilir. Ayrıca $a_0 = 0$ ise

$V_q = q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in H_D^\delta$ dual kuaterniyonuna *izotropik dual kuaterniyon (pure dual kuaterniyon)* ve $a_0 \neq 0$ ise $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ dual kuaterniyonuna da *non-izotropik dual kuaterniyon* adı verilir.

Tanım 3.1 H_D kümesi üzerinde toplama işlemi, $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = S_q + V_q$,

$p = b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = S_p + V_p \in H_D$ dual kuaterniyonları için

$$q + p = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3$$

şeklinde tanımlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} \oplus : H_D \times H_D &\rightarrow H_D \\ (q, p) &\rightarrow q + p = (S_q + V_q) \oplus (S_p + V_p) \\ &= (S_q + S_p) + (V_q + V_p) \\ &= S_{q+p} + V_{q+p} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu işlemle birlikte $(H_D, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. H_D nin $\oplus$ işlemine göre birim elemanı $q = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ dır, [23].

Tanım 3.2 H_D kümesi üzerinde skalerle çarpma işlemi $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in H_D$ dual kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \lambda \odot q &= \lambda \odot (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \\ &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)e_1 + (\lambda a_2)e_2 + (\lambda a_3)e_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times H_D &\rightarrow H_D \\ (\lambda, p) &\rightarrow \lambda \odot p = \lambda \odot (S_q + V_q) \\ &= \lambda S_q + \lambda V_q \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, $\odot: \mathbb{R} \times H_D \rightarrow H_D$ dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\text{i) } \lambda \odot (q \oplus p) = (\lambda \odot q) \oplus (\lambda \odot p)$$

$$\text{ii) } (\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$$

$$\text{iii) } (\lambda_1 \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$$

$$\text{iv) } 1 \odot q = q$$

O halde $\{H_D, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. $H_D = Sp\{1, e_1, e_2, e_3\}$ olduğundan $\text{boy } H_D = 4$ dür, [23].

Tanım 3.3 $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $p = b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \in H_D$ dual kuaterniyonlarının çarpımı (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla tanımlanabilir:

i) Eğer $a_0 \neq 0$ veya $b_0 \neq 0$ ise yani q veya p kuaterniyonları non-izotropik dual kuaterniyon ($p \in H_D$ veya $p \in H_D$) ise; (3.6) bağıntıları yardımıyla;

$$\begin{aligned} q \otimes p &= a_0 b_0 + a_0 b_1 e_1 + a_0 b_2 e_2 + a_0 b_3 e_3 + b_0 a_1 e_1 + b_0 a_2 e_2 + b_0 a_3 e_3 \\ &= a_0 b_0 + a_0 (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) + b_0 (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \\ &= S_q S_p + S_q V_p + S_p V_q \end{aligned}$$

tanımlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} \otimes: H_D \times H_D &\rightarrow H_D \\ (q, p) &\rightarrow q \otimes p = (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \otimes (b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 e_1 + a_0 b_2 e_2 + a_0 b_3 e_3 \\ &\quad + a_1 b_0 e_1 + a_1 b_1 e_1^2 + a_1 b_2 e_1 \otimes e_2 + a_1 b_3 e_1 \otimes e_3 \\ &\quad + a_2 b_0 e_2 + a_2 b_1 e_2 \otimes e_1 + a_2 b_2 e_2^2 + a_2 b_3 e_2 \otimes e_3 \\ &\quad + a_3 b_0 e_3 + a_3 b_1 e_3 \otimes e_1 + a_3 b_2 e_3 \otimes e_2 + a_3 b_3 e_3^2 \end{aligned}$$

işlemi tanımlanır. Ayrıca dual kuaterniyonlar için “ $\otimes$ ” işlemine *dual kuaterniyon çarpım işlemi* denir.

ii) Eğer $a_0 = 0$ ve $b_0 = 0$ ise yani q ve p kuaterniyonları izotropik dual kuaterniyon ise; (3.7) bağıntıları yardımıyla,

$$\begin{aligned}
q \otimes_{\delta} p &= -a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \\
&= -\langle V_q, V_p \rangle_{\mathbb{R}^3} + V_q \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p
\end{aligned}$$

tanımlanır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\otimes_{\delta}: H_D^{\delta} \times H_D^{\delta} &\rightarrow H_D^{\delta} \\
(q, p) &\rightarrow q \otimes_{\delta} p = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \otimes_{\delta} (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\
&= a_1 b_1 e_1^2 + a_1 b_2 e_1 \otimes_{\delta} e_2 + a_1 b_3 e_1 \otimes_{\delta} e_3 \\
&\quad + a_2 b_1 e_2 \otimes_{\delta} e_1 + a_2 b_2 e_2^2 + a_2 b_3 e_2 \otimes_{\delta} e_3 \\
&\quad + a_3 b_1 e_3 \otimes_{\delta} e_1 + a_3 b_2 e_3 \otimes_{\delta} e_2 + a_3 b_3 e_3^2
\end{aligned}$$

işlemi tanımlanır. Burada $\langle, \rangle_{\mathbb{R}^3}$ ve $\wedge_{\mathbb{R}^3}$; sırasıyla, $\mathbb{R}^3$ deki iç çarpım ve vektörel çarpımdır. Ayrıca izotropik dual kuaterniyonlar için “ $\otimes_{\delta}$ ” işlemine *özel dual kuaterniyon çarpım işlemi* denir.

Not 3.1 q ve p iki izotropik dual kuaterniyon için $q \otimes p = 0$ dir.

Not 3.2 q ve p non-izotropik dual kuaterniyon ise $q \otimes p = p \otimes q$ eşitliği sağlanmaktadır. Fakat q ve p izotropik ise $q \otimes_{\delta} p \neq q \otimes_{\delta} p$ dir.

3.3 Dual Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

Tanım 3.4 Dual Kuaterniyonlar için eşitlik $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p \in H_D$ olmak üzere $q = p \Leftrightarrow S_q = S_p$ ve $V_q = V_p$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.5 H_D kümesinde iki dual kuaterniyon $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ olsun. Bu iki dual kuaterniyonunun farkı $q - p = (S_q - S_p) + (V_q - V_p)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.6 Verilen bir q non-izotropik dual kuaterniyonun eşleniği,

$$\begin{aligned}
\bar{\cdot}: H_D &\rightarrow H_D \\
q &\rightarrow \bar{q} = a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 \\
\bar{q} &= S_q - V_q
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve $\bar{q}$ ile gösterilir. q dual kuaterniyonunun eşleniği yine bir dual kuaterniyondur.

$\forall q, p \in H_D, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$1) \overline{(q + p)} = \bar{q} + \bar{p}$$

$$2) \overline{q \otimes p} = \bar{q} \otimes \bar{p}$$

$$3) \overline{(\bar{q})} = q$$

$$4) \overline{\lambda q} = \lambda \bar{q}.$$

Ayrıca, $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = S_q + V_q$ non-izotropik dual kuaterniyonu için

$q \otimes \bar{q} = \bar{q} \otimes q$ çarpımı hesaplanırsa,

$$q \otimes \bar{q} = (S_q + V_q) \otimes (S_q - V_q)$$

$$= S_q^2 - S_q V_q + S_q V_q$$

$$= S_q^2$$

$$= a_0^2$$

elde edilir. Buradan $q \otimes \bar{q} = \bar{q} \otimes q \geq 0$ dır. O halde $q \otimes \bar{q} = \bar{q} \otimes q = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$ olmalıdır.

Tanım 3.7 Verilen bir q izotropik dual kuaterniyonun eşleniği,

$$\bar{\cdot} : H_D^\delta \rightarrow H_D^\delta$$

$$q \rightarrow \bar{q} = -a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3$$

$$\bar{q} = -V_q$$

ile tanımlanır. $\forall q, p \in H_D^\delta, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$1) \overline{(q + p)} = \bar{q} + \bar{p}$$

$$2) \overline{q \otimes_{\delta} p} = \overline{p} \otimes_{\delta} \overline{q}$$

$$3) \overline{(\overline{q})} = q$$

$$4) \overline{\lambda q} = \lambda \overline{q}$$

Ayrıca, $q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = V_q$ izotropik dual kuaterniyonu için $q \otimes_{\delta} \overline{q} = \overline{q} \otimes_{\delta} q$ çarpımı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} q \otimes_{\delta} \overline{q} &= \overline{q} \otimes_{\delta} q = -V_q \otimes_{\delta} V_q \\ &= -(V_q \otimes_{\delta} V_q) \\ &= -\left(-\langle V_q, V_q \rangle_{\mathbb{R}^3} + V_q \wedge_{\mathbb{R}^3} V_q\right) \\ &= \langle V_q, V_q \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $q \otimes_{\delta} \overline{q} = \overline{q} \otimes_{\delta} q \geq 0$ dir. O halde $q \otimes_{\delta} \overline{q} = \overline{q} \otimes_{\delta} q = 0 \Leftrightarrow q = 0$ olmalıdır.

Tanım 3.8 $q \in H_D$ dual kuaterniyonunun normu,

i) Eğer $q \in H_D$ non-izotropik dual kuaterniyon ise; $\|q\|_{H_D} = \sqrt{q \otimes_{\delta} \overline{q}}$ ile tanımlanır ve

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H_D} : H_D &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\rightarrow \|q\|_{H_D} = \sqrt{q \otimes_{\delta} \overline{q}} = \sqrt{\overline{q} \otimes_{\delta} q} \\ &= \sqrt{S_q^2} = \sqrt{a_0^2} = |a_0| \end{aligned} \tag{3.8}$$

işlemi yazılabilir.

ii) Eğer $q \in H_D^{\delta}$ izotropik dual kuaterniyon ise; $\|q\|_{H_D^{\delta}} = \sqrt{q \otimes_{\delta} \overline{q}}$ ile tanımlanır ve

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H_D^{\delta}} : H_D^{\delta} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\rightarrow \|q\|_{H_D^{\delta}} = \sqrt{q \otimes_{\delta} \overline{q}} = \sqrt{\overline{q} \otimes_{\delta} q} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

işlemi yazılabilir.

Tanım 3.9 $q \in H_D$ için $\|q\| = 1$ ise q' ya *birim dual kuaterniyon* denir.

Norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\forall q, p \in H_D$ ve $\forall r, s \in H_D^\delta$ dual kuaterniyonları için

$$\text{i)} \quad \|q \otimes p\|_{H_D} = \|q\|_{H_D} \|p\|_{H_D} = \|p \otimes q\|_{H_D}$$

$$\text{i')} \quad \|r \otimes_\delta s\|_{H_D^\delta} = \|r\|_{H_D^\delta} \cdot \|s\|_{H_D^\delta} = \|r \otimes_\delta s\|_{H_D^\delta}$$

$$\text{ii)} \quad \|q + p\|_{H_D} = \|q\|_{H_D} + \|p\|_{H_D}$$

$$\text{ii')} \quad \|r + s\|_{H_D^\delta} = \|r\|_{H_D^\delta} + \|s\|_{H_D^\delta}$$

$$\text{iii)} \quad \|q\|_{H_D}^2 + \|p\|_{H_D}^2 = \frac{1}{2} (\|q + p\|_{H_D}^2 + \|q - p\|_{H_D}^2)$$

$$\text{iii')} \quad \|r\|_{H_D^\delta}^2 + \|s\|_{H_D^\delta}^2 = \frac{1}{2} (\|r + s\|_{H_D^\delta}^2 + \|r - s\|_{H_D^\delta}^2)$$

$$\text{iv)} \quad \|q\|_{H_D} = \|\bar{q}\|_{H_D}$$

$$\text{iv')} \quad \|r\|_{H_D^\delta} = \|\bar{r}\|_{H_D^\delta}$$

$$\text{v)} \quad q \text{ non-izotropik dual kuaterniyonu için } \|q\|_{H_D} = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ 'dır.}$$

$$\text{v')} \quad r \text{ izotropik dual kuaterniyonu için } \|r\|_{H_D^\delta} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

$$\text{vi)} \quad q \text{ birim non-izotropik dual kuaterniyon ise } q \otimes \bar{q} = 1 \text{ dir.}$$

$$\text{vii)} \quad r \text{ birim izotropik dual kuaterniyon ise } r \otimes_\delta \bar{r} = 1 \text{ dir.}$$

Teorem 3.1 $\{H_D, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayı $\{G^4, [+], \mathbb{R}, +, \cdot, [\cdot]\}$ vektör uzayına izomorftur. Burada $[+]$ işlemi G^4 de iki vektörün toplamı işlemi, $[\cdot]$ işlemi ise bir skalerle G^4 de bir vektörün çarpım işlemi yani dış çarpımı işlemidir, [20-23].

İspat

- $\varphi: H_D \rightarrow G^4$
 $q \rightarrow \varphi(q) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir.

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda \odot q \oplus \mu \odot p) &= \varphi(\lambda \odot (a_0 1 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \oplus \mu \odot (b_0 1 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)) \\
 &= \varphi((\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1) e_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2) e_2 + (\lambda a_3 + \mu b_3) e_3) \\
 &= (\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3) \\
 &= (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) [+] (\mu b_0, \mu b_1, \mu b_2, \mu b_3) \\
 &= \lambda [\cdot] (a_0, a_1, a_2, a_3) [+] \mu [\cdot] (b_0, b_1, b_2, b_3) \\
 &= \lambda \odot \varphi(a_0 1 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + \mu \odot \varphi(b_0 1 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\
 &= \lambda \odot \varphi(q) \oplus \mu \odot \varphi(p)
 \end{aligned}$$

• φ dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. $\varphi(q) = \varphi(p)$ olsun. Bu durumda $\varphi(a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = \varphi(b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$ eşitliğini yazabiliriz. φ nin tanımı göz önüne alınırsa, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ elde edilir. Böylece $q = p$ olur.

• $\text{boy } H_D = 4$, $\text{boy } G^4 = 4$ ve φ birebir olduğundan φ örtendir. Ayrıca, $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in H_D$ için $\|q\|_{H_D} = \sqrt{q \otimes q} = |a_0|$ ve $\vec{x} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in G^4$ için $\|\vec{x}\|_G = |a_0|$ elde edilir.

Bununla beraber $q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in H_D^p$ için $\|V_q\|_{H_D^\delta} = \sqrt{V_q \otimes_\delta \overline{V_q}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ve $\vec{x} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ için $\|\vec{x}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ elde edilir. Sonuç olarak H_D ile G^4 uzayları ve H_D^δ ile $\mathbb{R}^3$ uzayları birbirlerine izomorf olup $H_D \cong G^4$ ve $H_D^\delta \cong \mathbb{R}^3$ ile gösterilir.

Tanım 3.10

Terslenebilir non-izotropik ve izotropik dual kuaterniyonların tersi sırasıyla

$$\begin{aligned} ()^{-1} : H_D - \{0\} &\rightarrow H_D - \{0\} \\ q \rightarrow q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{\|q\|_{H_D}^2} = \frac{a_0 e_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3}{a_0^2}, \quad q \text{ non-izotropik dual kuaterniyon} \\ &\quad (3.1) \text{ denklemi ile} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} ()^{-1} : H_D^\delta - \{0\} &\rightarrow H_D^\delta - \{0\} \\ q \rightarrow q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{\|q\|_{H_D^\delta}^2} = \frac{-a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad q \text{ izotropik dual kuaterniyon} \\ &\quad (3.2) \text{ denklemi ile} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada q^{-1} dual kuaterniyonuna q dual kuaterniyonunun tersi denir.

q bir non-izotropik dual kuaterniyon ve r ise izotropik dual kuaterniyon olsun. q ve r terslenebilir olmak üzere, ters işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\text{i) } \|q^{-1}\|_{H_D} = \|q\|_{H_D}^{-1}$$

$$\text{i') } \|r^{-1}\|_{H_D^\delta} = \|r\|_{H_D^\delta}^{-1}$$

$$\text{ii) } q \otimes q^{-1} = q \otimes (\|q\|_{H_D}^{-2} \bar{q}) = \|q\|_{H_D}^{-2} (q \otimes \bar{q}) = \|q\|_{H_D}^{-2} \|q\|_{H_D}^2 = 1 = q^{-1} \otimes q$$

$$\text{ii') } r \otimes_\delta r^{-1} = r \otimes_\delta (\|r\|_{H_D^\delta}^{-2} \bar{r}) = \|r\|_{H_D^\delta}^{-2} (r \otimes_\delta \bar{r}) = \|r\|_{H_D^\delta}^{-2} \|r\|_{H_D^\delta}^2 = 1 = r^{-1} \otimes_\delta r$$

Tanım 3.11 H_D üzerinde bölme işlemini inceleyelim.

i) $q \neq 0, \forall q \in H_D$ kuaterniyonu non-izotropik olsun. $p \in H_D$ non-izotropik dual kuaterniyonu q non-izotropik dual kuaterniyona bölmek için p 'yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Non-izotropik dual kuaterniyonlarda kuaterniyonik çarpma işlemi değişmeli olduğundan p non-izotropik dual kuaterniyonunun q non-izotropik dual kuaterniyonuna bölümü tek türlü olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{p}{q} = p \otimes q^{-1} = q^{-1} \otimes p$$

ii) $q \neq 0, \forall q \in H_D^\delta$ izotropik dual kuaterniyonunu göz önüne alalım. $p \in H_D^\delta$ izotropik dual kuaterniyonunu q izotropik dual kuaterniyona bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. İzotropik dual kuaterniyonlarda kuaterniyonik çarpma işlemi değişmeli olmadığından çarpma işlemi iki farklı şekilde yapılır. Bundan dolayı bölme işlemi de iki türlüdür. p izotropik dual kuaterniyonunun q izotropik dual kuaterniyonuna bölümü:

$$r_1 = p \otimes_\delta q^{-1}$$

veya

$$r_2 = q^{-1} \otimes_\delta p.$$

Burada r_1 kuaterniyonuna p 'nin q ile *sağdan* bölümü ve r_2 kuaterniyonuna da p 'nin q ile *soldan* bölümü denir.

Genellikle, $r_1 \neq r_2$ olduğundan $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılamaz.

Sonuç 3.1 H_D cebiri *bölüm cebiri* değildir. Çünkü H_D kümesi bölüm halkası olmadığından dolayı bir bölüm cebiri değildir. Gerçekten de, H_D kümesinin baz elemanları e_1, e_2, e_3 nilpotent olup bu elemanların çarpımsal tersleri mevcut değildir. Örneğin;

i) e_1 elemanının tersi $q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in H_D$ olduğu kabul edilirse

$$1 = e_1 \otimes q = e_1 \otimes (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = e_1 a_0$$

yazılabilir. Böylece, $1 = e_1 a_0$ eşitliğinden

$$e_1 = a_0^{-1}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten e_1 elemanının tersinin a_0^{-1} reel sayısına eşit olduğu görülür ki bu bir çelişkidir. Zira $e_1 \notin \mathbb{R}$ dir.

ii) Bazı $q \in H_D$ için $1 = e_1 q$ eşitliği sağlanır. Buradan, eşitliğin her iki yanını e_1 ile çarpılırsa $e_1 = e_1^2 q = 0$ elde edilir ve $e_1 = 0$ olduğu görülür. Halbuki $e_1 \neq 0$ olmalıdır. Bu durum e_2 ve e_3 için de geçerlidir.

3.4 Dual Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

Reel eksen ile $q = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ dual kuaterniyonu arasındaki açı θ olsun.

i) q non-izotropik dual kuaterniyon ise;

$$\begin{aligned} q &= a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ &= \|q\|_{H_D} \frac{a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}{\|q\|_{H_D}} \\ &= \|q\|_{H_D} \left[\frac{a_0}{\|q\|_{H_D}} + \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\|q\|_{H_D}} \left(\frac{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{n} = \frac{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos g\theta = \frac{a_0}{\|q\|_{H_D}} = \frac{a_0}{a_0} = 1, \quad \sin g\theta = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\|q\|_{H_D}}$$

alınırsa bir non-izotropik dual kuaterniyonun kutupsal gösterimi,

$$q = \|q\|_{H_D} (\cos g\theta + \mathbf{n} \sin g\theta) \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir, [23].

ii) $q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ izotropik dual kuaterniyon ise;

q izotropik olduğundan $a_0 = 0$ ve $\|q\|_{H_D^\delta} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ olduğu biliyoruz.

O halde,

$$\begin{aligned} q &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ &= \|q\|_{H_D^\delta} \frac{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}{\|q\|_{H_D^\delta}} \\ &= \|q\|_{H_D^\delta} \left[0 + \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\|q\|_{H_D^\delta}} \left(\frac{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right) \right] e_1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\|q\|_{H_D^\delta}} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = 1, \quad \cos \theta = \frac{0}{\|q\|_{H_D^\delta}} = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

eşitlikleri kullanılırsa, bir izotropik dual kuaterniyonun kutupsal gösterimi,

$$q = \|q\|_{H_D^\delta} \mathbf{n} \quad (3.11)$$

elde edilir.

3.5 Dual Kuaterniyonlar için Euler Formülü

$q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in H_D$ dual kuaterniyonunun Euler formülünü ifade edelim:

I) q non-izotropik birim dual kuaterniyon olsun. Bu dual kuaterniyonun kutupsal gösterimi

$$q = \cos g\theta + \mathbf{n} \sin g\theta$$

şeklinde dir. Burada $\mathbf{n} = \frac{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ olup, $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{0}$ olduğundan q non-

izotropik dual kuaterniyonunun Euler formülü herhangi bir θ için $e^{n\theta}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} e^{n\theta} &= 1 + \mathbf{n}\theta + \frac{(\mathbf{n}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{n}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{n}\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \mathbf{n}\theta \\ &= \cos g\theta + \mathbf{n} \sin g\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir, [23].

Teorem 3.2 Non-izotropik dual kuaterniyonlar için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$1) e^{n\theta_1} \otimes e^{n\theta_2} = e^{n(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$2) \frac{1}{e^{n\theta}} = e^{-n\theta}$$

$$3) \frac{e^{n\theta_1}}{e^{n\theta_2}} = e^{n(\theta_1 - \theta_2)}$$

II) q izotropik birim dual kuaterniyon olsun. $\mathbf{n} \wedge_{\mathbb{R}^3} \mathbf{n} = \vec{0}$, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1$ olduğundan $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n} \otimes_{\delta} \mathbf{n} = -1$ dir. Bu bilgilerden $\mathbf{n}^3 = -\mathbf{n}$ ve $\mathbf{n}^4 = 1 \dots$ elde edilir. Herhangi bir θ için

$$\begin{aligned} e_{\delta}^{n\theta} &= 1 + \mathbf{n}\theta + \frac{(\mathbf{n}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{n}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{n}\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \mathbf{n}\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \mathbf{n} \frac{\theta^3}{3!} + \mathbf{n} \frac{\theta^4}{4!} + \mathbf{n} \frac{\theta^5}{5!} \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + \mathbf{n} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada $\sin \theta$ ve $\cos \theta$ fonksiyonlarının Maclaurin açılımları göz önüne alınırsa

$$e_{\delta}^{n\theta} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta \quad (3.13)$$

eşitliği elde edilir.

3.6 Dual Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü

Bu kısımda non-izotropik ve izotropik dual kuaterniyonlar için De Moivre formüllerini elde edeceğiz:

Yardımcı Teorem 3.1 $\mathbf{n} = \frac{a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ olsun. $q = \cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha$ ve

$p = \cos \beta + \mathbf{n} \sin \beta$ non-izotropik dual kuaterniyonları için,

$(\cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha) \otimes (\cos \beta + \mathbf{n} \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \mathbf{n} \sin(\alpha + \beta)$ 'dir.

İspat

$\mathbf{n} = \frac{a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ için $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = 0$ dir. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned} q \otimes p &= (\cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha) \otimes (\cos \beta + \mathbf{n} \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{n} (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{n} (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned}$$

$$= \text{cosg}(\alpha + \beta) + \mathbf{n} \text{sing}(\alpha + \beta)$$

elde edilir. Bu eşitliği elde ederken,

$$\text{cosg}(\alpha + \beta) = \text{cosg} \alpha \text{cosg} \beta$$

ve

$$\text{sing}(\alpha + \beta) = \text{cosg} \alpha \text{sing} \beta + \text{sing} \alpha \text{cosg} \beta$$

eşitlikleri kullanılmıştır, [23].

Teorem 3.3 $q \in H_D$ non-izotropik birim dual kuaterniyon olsun. Bu dual kuaterniyonun Euler formülü ile ifadesi $q = \text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta$ şeklinde olup $q^k = \text{cosg}(k\theta) + \mathbf{n} \text{sing}(k\theta)$ dir, [23].

İspat

Bu teoremin ispatı tümevarım yoluyla yapılacaktır. k bir tamsayı olsun.

$k = 2$ için Yardımcı Teorem 3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} q^2 &= (\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta)^2 \\ &= (\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta) \otimes (\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta) \\ &= \text{cosg}(2\theta) + \mathbf{n} \text{sing}(2\theta) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$(\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta)^k = \text{cosg}(k\theta) + \mathbf{n} \text{sing}(k\theta)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda gösterilmesi gereken

$$(\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta)^{k+1} = \text{cosg}((k+1)\theta) + \mathbf{n} \text{sing}((k+1)\theta)$$

eşitliğinin gösterilmesidir.

$$\begin{aligned} (\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta)^{k+1} &= (\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta)^k \otimes (\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta) \\ &= (\text{cosg}(k\theta) + \mathbf{n} \text{sing}(k\theta)) \otimes (\text{cosg} \theta + \mathbf{n} \text{sing} \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{cosg}(k\theta + \theta) + \mathbf{n} \text{sing}(k\theta + \theta) \\
&= \text{cosg}((k+1)\theta) + \mathbf{n} \text{sing}((k+1)\theta)
\end{aligned}$$

böylece $k+1$ için ifadenin doğru olduğu görülür. Ayrıca

$$q^{-1} = \text{cosg} \theta - \mathbf{n} \text{sing} \theta$$

$$\begin{aligned}
q^{-k} &= \text{cosg}(k\theta) - \mathbf{n} \text{sing}(k\theta) \\
&= \text{cosg}(-k\theta) + \mathbf{n} \text{sing}(-k\theta)
\end{aligned}$$

eşitlikleri de sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.2 $\mathbf{n} = \frac{a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ olmak üzere, $q = \cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha$,

$p = \cos \beta + \mathbf{n} \sin \beta$ izotropik(pure) dual kuaterniyonları için,

$$(\cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha) \otimes_{\delta} (\cos \beta + \mathbf{n} \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \mathbf{n} \sin(\alpha + \beta) \text{ dir.}$$

İspat

$$\mathbf{n} = \frac{a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \text{ için } \mathbf{n} \wedge_{\mathbb{R}^3} \mathbf{n} = 0, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \text{ olduğundan } \mathbf{n}^2 = \mathbf{n} \otimes_{\delta} \mathbf{n} = -1 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
q \otimes_{\delta} p &= (\cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha) \otimes_{\delta} (\cos \beta + \mathbf{n} \sin \beta) \\
&= \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{n}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) + (\mathbf{n} \otimes_{\delta} \mathbf{n}) \sin \alpha \sin \beta \\
&= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \mathbf{n}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\
&= \cos(\alpha + \beta) + \mathbf{n} \sin(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \text{ ve } \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

Teorem 3.4 $q = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta$ izotropik birim dual kuaterniyon olsun. Bu durumda k tamsayı olmak üzere $q^k = \cos(k\theta) + \mathbf{n} \sin(k\theta)$ bağıntısı geçerlidir.

İspat

İspat tümevarım yoluyla yapılacaktır. k bir tamsayı olsun.

$k = 2$ için Yardımcı Teorem 3.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} q^2 &= (\cos \theta + n \sin \theta)^2 \\ &= (\cos \theta + n \sin \theta) \otimes_{\delta} (\cos \theta + n \sin \theta) \\ &= \cos(2\theta) + n \sin(2\theta) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\cos \theta + n \sin \theta)^k = \cos(k\theta) + n \sin(k\theta)$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda gösterilmesi gereken

$$(\cos \theta + n \sin \theta)^{k+1} = \cos((k+1)\theta) + n \sin((k+1)\theta)$$

olduğudur.

$$\begin{aligned} (\cos \theta + n \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + n \sin \theta)^k \otimes_{\delta} (\cos \theta + n \sin \theta) \\ &= (\cos(k\theta) + n \sin(k\theta)) \otimes_{\delta} (\cos \theta + n \sin \theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + n \sin(k\theta + \theta) \\ &= \cos((k+1)\theta) + n \sin((k+1)\theta) \end{aligned}$$

böylece $k+1$ için ifadenin doğru olduğu görülür. Ayrıca

$$q^{-1} = \cos \theta - n \sin \theta$$

$$\begin{aligned} q^{-k} &= \cos(k\theta) - n \sin(k\theta) \\ &= \cos(-k\theta) + n \sin(-k\theta) \end{aligned}$$

eşitlikleri de sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

3.7 Dual Kuaterniyonlarda İç Çarpım

H_D kümesinin, üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemi ile birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

i) $q = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = S_q + V_q$, $p = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = S_p + V_p \in H_D$ non-izotropik dual kauaterniyonları için

$$\langle, \rangle_{H_D} : H_D \times H_D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(q, p) \rightarrow \langle q, p \rangle_{H_D} = \frac{1}{2} (q \otimes \bar{p} + p \otimes \bar{q})$$

$$= S_q S_p$$

$$= a_0 b_0$$

şeklinde tanımlı dönüşüm simetri, bilineerlik ve pozitif tanımlılık özelliklerini sağladığından bir iç çarpım fonksiyonudur.

ii) $q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = V_q$, $p = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = V_p \in H_D^\delta$ izotropik dual kauaterniyonları için

$$\langle, \rangle_{H_D^\delta} : H_D^\delta \times H_D^\delta \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(q, p) \rightarrow \langle q, p \rangle_{H_D^\delta} = \frac{1}{2} (q \otimes_\delta \bar{p} + p \otimes_\delta \bar{q})$$

$$= \langle V_q, V_p \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

şeklinde tanımlı dönüşüm simetri, bilineerlik ve pozitif tanımlılık özelliklerini sağladığından bir iç çarpım fonksiyonudur.

O halde dual kauaterniyonlar uzayı bir iç çarpım uzayıdır.

3.8 Dual Kuaterniyonlarda Türev

Reel kuaterniyonlarda türev ile ilgili temel tanımlamalar ve özellikler [28], [29] ve [30] nolu kaynaklarda detaylı incelenmiştir. Bu başlık altında dual kuaterniyonlar için türev ile ilgili tanımlar yapılacak ve özellikleri incelenecektir.

Herhangi bir t parametresine bağlı olarak verilen dual kuaterniyon

$$f : I \rightarrow H_D$$

$$t \rightarrow f(t) = q(t) = q_0(t) + q_1(t)e_1 + q_2(t)e_2 + q_3(t)e_3 \quad (3.14)$$

fonksiyonu ile verilsin. Reel kuaterniyonlar için verilen türev tanımına benzer olarak dual kuaterniyonlar için türev

$$(\cdot)': H_D \rightarrow H_D$$

$$q(t) \rightarrow (q(t))' = q'(t) = q_0'(t) + q_1'(t)e_1 + q_2'(t)e_2 + q_3'(t)e_3 \quad (3.15)$$

veya bir diğer gösterim ile

$$\frac{d}{dt}: H_D \rightarrow H_D$$

$$q(t) \rightarrow \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} q_0(t) + \frac{d}{dt} q_1(t)e_1 + \frac{d}{dt} q_2(t)e_2 + \frac{d}{dt} q_3(t)e_3 \quad (3.16)$$

ile tanımlanır. Bu tanım hem izotropik dual kuaterniyonlar için hem de non-izotropik dual kuaterniyonlar için geçerlidir.

Türev ile ilgili aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $q = S_q + V_q$ non izotropik dual kuaterniyonu için tanım gereği $q' = S_q' + V_q'$ olarak yazılabileceği açıktır. Burada ve sonraki kısımlarda, kısalığın hatırı için $(q(t))'$, $(S_q(t))'$ ifadeleri yerine sırasıyla q' ve S_q' kullanılmıştır.

ii) Alınan $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ non-izotropik dual kuaterniyonları için $(q \otimes p)' = q' \otimes p + q \otimes p'$ eşitliği sağlanır.

Bu eşitliğin sağlandığını göstermek için $q \otimes p = S_q S_p + S_q V_p + S_p V_q$ eşitliğini kullanalım.

O halde,

$$\begin{aligned}
 (q \otimes p)' &= (S_q S_p + S_q V_p + S_p V_q)' \\
 &= S_q' S_p + S_q S_p' + S_q' V_p + S_q V_p' + S_p' V_q + S_p V_q' \\
 &= (S_q' S_p + S_q' V_p + S_p V_q') + (S_q S_p' + S_q V_p' + S_p' V_q) \\
 &= (q' \otimes p) + (q \otimes p')
 \end{aligned}$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

iii) Alınan $q = V_q$ ve $p = V_p$ izotropik dual kuaterniyonları için

$(q \otimes_\delta p)' = q' \otimes_\delta p + q \otimes_\delta p'$ eşitliği sağlanır.

Bu eşitliğin sağlandığını göstermek için $q \otimes_\delta p = -\langle V_q, V_p \rangle_{\mathbb{R}^3} + V_q \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p$ eşitliğini kullanalım. O halde,

$$\begin{aligned}
 (q \otimes_\delta p)' &= (-\langle V_q, V_p \rangle_{\mathbb{R}^3} + V_q \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p)' \\
 &= -\langle V_q', V_p \rangle_{\mathbb{R}^3} - \langle V_q, V_p' \rangle_{\mathbb{R}^3} + V_q' \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p + V_q \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p' \\
 &= (-\langle V_q', V_p \rangle_{\mathbb{R}^3} + V_q' \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p) + (-\langle V_q, V_p' \rangle_{\mathbb{R}^3} + V_q \wedge_{\mathbb{R}^3} V_p') \\
 &= (q' \otimes_\delta p) + (q \otimes_\delta p')
 \end{aligned}$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

REEL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Tezin bu bölümünde, ilk olarak H^p pure reel kuaterniyonlar uzayında tanımlı pure reel kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilecektir. Daha sonra, H reel kuaterniyonlar uzayında tanımlı reel kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri incelenecektir [4].

4.1 H^p Uzayında Pure Reel Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri

Tanım 4.1 Pure reel kuaterniyonların uzayı $H^p = \{\gamma \in H \mid \gamma + \bar{\gamma} = 0\}$ olsun.

$I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ve bir $s \in I$ parametresi için

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r(s) e_r, \quad \gamma_r : I \rightarrow \mathbb{R}$$

C^∞ eğrisi verilsin. Bu diferansiyellenebilir γ eğrisine *pure reel kuaterniyonik eğri* adı verilir.

Tanım 4.2 H^p uzayında $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$ pure reel kuaterniyonik eğrisi verilsin. Eğri üzerindeki her noktada hız vektörü birim ise yani

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\|_H^2 &= \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\gamma'(s) \times \overline{\gamma'(s)} + \gamma'(s) \times \overline{\gamma'(s)}] = \gamma'(s) \times \overline{\gamma'(s)} = 1 \end{aligned}$$

ise bu eğriye $s \in I$ yay parametrelili *birim hızlı pure reel kuaterniyonik eğri* adı verilir.

Teorem 4.1 H^p uzayında $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$ birim hızlı pure reel kuaterniyonik eğrisini göz önünde bulunduralım. γ eğrisinin birim teğet vektörü

$$t(s) = \gamma'(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r \quad \text{olmak üzere}$$

- i) t ve t' reel kuaterniyonları ortogondur,
- ii) $t' \times \bar{t}$ bir pure reel kuaterniyondur.

İspat

Birim hızlı γ pure reel kuaterniyonik eğrisi, $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r(s) e_r$$

parametrik denklemleriyle verilsin. O halde $\forall s \in I$ için $t(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ olduğundan

$$\|t(s)\|_H^2 = \langle t(s), t(s) \rangle_H = \frac{1}{2} [t(s) \times \overline{t(s)} + t(s) \times \overline{t(s)}] = t(s) \times \overline{t(s)} = 1$$

elde edilir. Burada $t(s) \times \overline{t(s)} = 1$ ifadesinin türevi alınır,

$$t' \times \bar{t} + t \times (\bar{t})' = 0$$

bulunur. $t = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ bir pure reel kuaterniyon olduğuna göre eşlenik tanımı

gereğince $\bar{t} = -\sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ yazılır. Bu durumda $(\bar{t})' = -\sum_{r=1}^3 \gamma_r''(s) e_r$ dir. Ayrıca

$\bar{t}' = -\sum_{r=1}^3 \gamma_r''(s) e_r$ olup, $\bar{t}' = (\bar{t})'$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla,

$$t' \times \bar{t} + t \times \bar{t}' = 0 \tag{4.1}$$

yazılır. O halde,

i) (4.1) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{1}{2}$ ile çarpılarak düzenlenirse,

$$\langle t, t' \rangle_H = \frac{1}{2} [t' \times \bar{t} + t \times \bar{t}'] = 0$$

olup t ve t' nün ortogonal olduğu görülür.

ii) Şimdi de (4.1) ifadesi reel kuaterniyon eşlenik kuralları göz önüne alınarak düzenlenirse $t' \times \bar{t} + t \times \bar{t}' = 0$ ifadesinden $t' \times \bar{t} + \bar{\bar{t}} \times \bar{t}' = 0$ yazılabilir. Buradan da $t' \times \bar{t} + \overline{(t' \times \bar{t})} = 0$ elde edilir. Elde ettiğimiz bu son ifade $t' \times \bar{t}$ nin bir pure reel kuaterniyon olduğunu gösterir.

Tanım 4.3 $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$ birim hızlı pure reel

kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\frac{t'}{\|t'\|_H} = n_1$ olacak şekilde n_1 vektörünü tanımlayalım.

Burada $\langle n_1, t \rangle = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca n_2 reel kuaterniyonunu,

$$t \times n_1 = -\langle t, n_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} + t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_1 = n_2$$

veya

$$\langle t, n_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \text{ olduğundan } t \times n_1 = t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_1 = n_2$$

olacak şekilde tanımlayalım. n_2 kuaterniyonunun pure reel kuaterniyon olduğu açıktır.

t, n_1, n_2 vektörleri tanımları ile birlikte aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned} & \bullet n_1 \times t = n_1 \wedge_{\mathbb{R}^3} t = -n_2, \\ & \bullet t \times n_2 = t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_2 = -n_1, \\ & \bullet t \times n_2 = t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_2 = -n_1, \\ & \bullet n_2 \times t = n_2 \wedge_{\mathbb{R}^3} t = n_1, \\ & \bullet n_1 \times n_2 = n_1 \wedge_{\mathbb{R}^3} n_2 = t, \\ & \bullet n_2 \times n_1 = n_2 \wedge_{\mathbb{R}^3} n_1 = -t. \end{aligned} \tag{4.2}$$

O halde, aşağıdaki tablo oluşturulabilir:

Çizelge 4. 1 Reel kuaterniyonların çarpım tablosu

$\times$	t	n_1	n_2
t	-1	n_2	$-n_1$
n_1	$-n_2$	-1	t
n_2	n_1	$-t$	-1

Ayrıca, t, n_1, n_2 vektörleri arasında aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\langle t, n_1 \rangle_H = \frac{1}{2} [t \times \bar{n}_1 + n_1 \times \bar{t}] = \frac{1}{2} (n_2 + \bar{n}_2) = 0, \quad \langle t, t \rangle_H = 1$$

$$\langle t, n_2 \rangle_H = \frac{1}{2} [t \times \bar{n}_2 + n_2 \times \bar{t}] = \frac{1}{2} (n_1 + \bar{n}_1) = 0, \quad \langle n_1, n_1 \rangle_H = 1$$

$$\langle n_1, n_2 \rangle_H = \frac{1}{2} [n_1 \times \bar{n}_2 + n_2 \times \bar{n}_1] = \frac{1}{2} (\bar{t} + t) = 0, \quad \langle n_2, n_2 \rangle_H = 1.$$

Böylece $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$ noktasındaki $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ sistemi bir ortonormal birim sistemdir. Bu sisteme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki *Frenet 3-ayaklısı* denir. Ayrıca, t vektörüne γ eğrisinin *birim teğet vektörü*, n_1 vektörüne *birim asli normal* ve n_2 vektörüne ise *birim binormal vektör* denir.

Tanım 4.4 H_p uzayında bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$ birim hızlı pure reel kuaterniyonik eğrisi verilsin. Bu eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olsun. Böylece, γ pure reel kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birinci ve ikinci eğrilikleri

$$k_1(s) = \frac{1}{2} (t' \times \bar{n}_1 + n_1 \times \bar{t}')$$

$$k_2(s) = \frac{1}{2} (n_1' \times \bar{n}_2 + n_2 \times \bar{n}_1')$$

ile tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.1 Yukarıdaki tanımlamalara göre γ pure reel kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birinci ve ikinci eğriliklerini, sırasıyla, κ ve τ olarak

$$k_1 = \kappa = \|t'\|_H$$

$$k_2 = \tau = \langle n_1', n_2 \rangle = -\langle n_2', n_1 \rangle$$

şeklinde yazılabilir.

İspat γ pure reel kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birinci eğriliğinin tanımı

$$k_1(s) = \langle t', n_1 \rangle = \frac{1}{2} (t' \times \bar{n}_1 + n_1 \times \bar{t}') \quad (1)$$

olduğundan burada $n_1 = \frac{t'}{\|t'\|_H}$ eşitliği yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \left(t' \times \frac{\bar{t}'}{\|t'\|_H} + \frac{t'}{\|t'\|_H} \times \bar{t}' \right) \\ &= \frac{1}{2\|t'\|_H} (t' \times \bar{t}' + t' \times \bar{t}') \\ &= \frac{1}{\|t'\|_H} (t' \times \bar{t}') \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|t'\|_H^2 = t' \times \bar{t}'$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\kappa = \|t'\|_H$$

bulunur. Diğer yandan, γ pure reel kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki ikinci eğriliği $k_2(s) = \tau = \langle n_1', n_2 \rangle_H$ 'dir. n_1, n_2 vektörleri birbirine dik olduğundan, $\langle n_1, n_2 \rangle_H = 0$ eşitliğinin her iki yanının türevini alırsak

$$\langle n_1', n_2 \rangle_H + \langle n_2', n_1 \rangle_H = 0$$

$$\langle n_1', n_2 \rangle_H = -\langle n_2', n_1 \rangle_H$$

elde edilir. Buradan $\tau = \langle n_1', n_2 \rangle_H = -\langle n_2', n_1 \rangle_H$ olduğu görülür.

Teorem 4.2 Pure reel kuaterniyonların uzayı $H^p = \{\gamma \in H \mid \gamma + \bar{\gamma} = 0\}$ olsun.

$I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ve $s \in I$ yay parametresi için

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r(s) e_r, \quad \gamma_r : I \rightarrow \mathbb{R}$$

diferansiyellenebilir eğrisi verilsin. $t(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$

noktasındaki Frenet 3 – ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ ve eğrilikler de $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere γ eğrisi boyunca $t(s), n_1(s)$ ve $n_2(s)$ 'nin türevleri ile eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s) n_1(s) \\ n_1'(s) = -\kappa(s) t(s) + \tau(s) n_2(s) \\ n_2'(s) = -\tau(s) n_1(s) \end{cases}$$

biçimindedir. Bu bağıntılara pure reel kuaterniyonlar için *Serret-Frenet formülleri* adı verilir.

İspat

I. Öncelikle $t' = \kappa n_1$ olduğunu gösterelim: Daha önce tanımladığımız $n_1 = \frac{t'}{\|t'\|_H}$

vektöründen

$$t' = \|t'\|_H n_1$$

yazılır. Ayrıca γ eğrisinin birinci eğriliği olan $\kappa = \|t'\|_H$ eşitliği yerine yazılırsa;

$$t' = \kappa n_1 \tag{4.3}$$

olarak elde edilir.

II. Şimdi $n_1' = -\kappa t + \tau n_2$ olduğunu ispatlayalım. n_1' vektörü t, n_1 ve n_2 vektörlerinin lineer bileşimi şeklinde

$$n_1' = a_{11}t + a_{12}n_1 + a_{13}n_2$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı sırasıyla t, n_1 ve n_2 ile iç çarpılırsa:

i) t ile iç çarpılırsa

$$\langle n_1', t \rangle_H = a_{11} \underbrace{\langle t, t \rangle_H}_{=1} + a_{12} \underbrace{\langle n_1, t \rangle_H}_{=0} + a_{13} \underbrace{\langle n_2, t \rangle_H}_{=0}$$

$$\langle n_1', t \rangle_H = a_{11}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle n_1, t \rangle_H = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\langle n_1', t \rangle_H + \langle t', n_1 \rangle_H = 0$$

eşitliğinden $\langle n_1', t \rangle_H = -\langle t', n_1 \rangle_H$ yazılır. Yardımcı teorem 4.1 de verilen $\kappa = \langle t', n_1 \rangle_H$ eşitliği kullanılırsa $a_{11} = -\kappa$ elde edilir.

ii) n_1 ile iç çarpılırsa

$$\langle n_1', n_1 \rangle_H = a_{11} \underbrace{\langle t, n_1 \rangle_H}_{=0} + a_{12} \underbrace{\langle n_1, n_1 \rangle_H}_{=1} + a_{13} \underbrace{\langle n_2, n_1 \rangle_H}_{=0}$$

$$\langle n_1', n_1 \rangle_H = a_{12}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle n_1, n_1 \rangle_H = 1$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\langle n_1', n_1 \rangle_H + \langle n_1', n_1 \rangle_H = 0$$

eşitliğinden $\langle n_1', n_1 \rangle_H = 0$ bulunur. Buradan $a_{12} = 0$ elde edilir.

iii) n_2 ile iç çarpılırsa

$$\langle n_1', n_2 \rangle_H = a_{11} \underbrace{\langle t, n_2 \rangle_H}_{=0} + a_{12} \underbrace{\langle n_1, n_2 \rangle_H}_{=0} + a_{13} \underbrace{\langle n_2, n_2 \rangle_H}_{=1}$$

$$\langle n_1', n_2 \rangle_H = a_{13}$$

elde edilir. Yardımcı teorem 4.1 deki $\tau = \langle n_1', n_2 \rangle_H$ eşitliği kullanılırsa $a_{13} = \tau$ elde edilir.

Sonuç olarak bulunan $a_{11} = -\kappa$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = \tau$ değerleri $n_1' = a_{11}t + a_{12}n_1 + a_{13}n_2$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$n_1' = -\kappa t + \tau n_2 \quad (4.4)$$

elde edilir.

III. Şimdi ise $n_2' = \tau n_1$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için $n_2 = t \times n_1$ eşitliğinin her iki yanının türevi alınır ve $t' = \kappa n_1$ ile $n_1 \times n_1 = -1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} n_2' &= t' \times n_1 + t \times n_1' \\ &= \kappa n_1 \times n_1 + t \times n_1' \end{aligned}$$

ifadesinden,

$$n_2' = \kappa(-1) + t \times n_1'$$

elde edilir. Buradan $t \times t = -1$ eşitliği kullanılırsa

$$n_2' = \kappa(t \times t) + t \times n_1'$$

eşitliği ve bu eşitlikten de

$$n_2' = t \times (\kappa t + n_1')$$

bulunur. Bu elde ettiğimiz son ifadede (4.4) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} n_2' &= t \times (\kappa t - \kappa t + \tau n_2) \\ &= t \times \tau n_2 \\ &= \tau(t \times n_2) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan da $n_2' = -\tau n_1$ elde edilir. Böylece γ kuaterniyonik eğrisinin t, n_1 ve n_2 vektörlerinin kuaterniyonik eğri boyunca türevleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$t' = \kappa n_1$$

$$n_1' = -\kappa t + \tau n_2$$

$$n_2' = -\tau n_1.$$

Sonuç 4.1 H^p pure reel kuaterniyonların uzayında γ reel kuaterniyonik eğrisinin t, n_1 ve n_2 vektörlerinin kuaterniyonik eğri boyunca türevleri ile ilgili eşitlikler matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_1' \\ n_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

olarak yazılır. Yukarıdaki teoremden elde edilenler diferansiyel geometride iyi bilinen ifadelerdir. Buradaki amacımız H^p uzayındaki bulunan bu Serret-Frenet formüllerini kullanarak H deki reel kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısını ve Frenet formüllerini elde etmektir.

Örnek 4.1 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a > 0$ olmak üzere $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$ eğrisi $\gamma(s) = a \cos \frac{s}{c} e_1 + a \sin \frac{s}{c} e_2 + \frac{b}{c} s e_3$ olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörlerini ve Frenet formüllerini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle γ eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\gamma'(s) = \frac{-a}{c} \sin \frac{s}{c} e_1 + \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} e_2 + \frac{b}{c} e_3$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\|_H &= \sqrt{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_H} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{c^2} \sin^2 \frac{s}{c} + \frac{b^2}{c^2} \cos^2 \frac{s}{c}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = 1 \end{aligned}$$

olup γ birim hızlıdır. Bu durumda

$$t(s) = \gamma'(s) = \frac{-a}{c} \sin \frac{s}{c} e_1 + \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} e_2 + \frac{b}{c} e_3$$

olarak yazılır. Ayrıca buradan,

$$t'(s) = \gamma''(s) = \frac{-a}{c^2} \cos \frac{s}{c} e_1 + \frac{-a}{c^2} \sin \frac{s}{c} e_2 = \frac{a}{c^2} \left(-\cos \frac{s}{c} e_1 - \sin \frac{s}{c} e_2 \right)$$

ve

$$\begin{aligned} \|t'(s)\|_H &= \sqrt{\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle_H} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{c^4} \cos^2 \frac{s}{c} + \frac{a^2}{c^4} \sin^2 \frac{s}{c}} = \frac{a}{c^2} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $n_1 = \frac{t'}{\|t'\|_H}$ tanımı gereği,

$$n_1 = -\cos \frac{s}{c} e_1 - \sin \frac{s}{c} e_2$$

ve

$$n_1' = \sin \frac{s}{c} e_1 - \cos \frac{s}{c} e_2 = \frac{-a}{c^2} t + \frac{b}{c^2} n_2$$

elde edilir ve nihayet $n_2 = t \times n_1$ olduğundan

$$n_2 = \frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} e_1 + \frac{-b}{c} \cos \frac{s}{c} e_2 + \frac{a}{c} e_3$$

ve

$$n_2' = \frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} e_1 + \frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} e_2 = -\frac{b}{c^2} n_1$$

bulunur. Bu eğrinin eğriliği ve burulması olan $\kappa = \|t'\|_H$ ve $\tau = -\langle n_2', n_1 \rangle_H$ değerleri ise

$$\kappa = \frac{a}{c^2} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{b}{c^2}$$

olarak kolayca elde edilir. Bulunan bu eşitlikler neticesinde γ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_1' \\ n_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{c^2} & 0 \\ -\frac{a}{c^2} & 0 & \frac{b}{c^2} \\ 0 & -\frac{b}{c^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}.$$

Örnek 4.2 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p$ eğrisi $\gamma(s) = \left(\frac{s}{2} - \frac{\sin s}{2}\right) e_1 + \left(\frac{s}{2} + \frac{\sin s}{2}\right) e_2 + \left(-\frac{\cos s}{\sqrt{2}}\right) e_3$

olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörlerini ve Frenet formüllerini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle γ eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\gamma'(s) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos s}{2}\right) e_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos s}{2}\right) e_2 + \left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}}\right) e_3$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\|_H &= \sqrt{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_H} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos s}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos s}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup γ birim hızlıdır. Bu durumda

$$t(s) = \gamma'(s) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos s}{2}\right) e_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos s}{2}\right) e_2 + \left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}}\right) e_3$$

olarak yazılır. Ayrıca buradan,

$$t'(s) = \gamma''(s) = \frac{\sin s}{2} e_1 - \frac{\sin s}{2} e_2 + \frac{\cos s}{\sqrt{2}} e_3$$

ve

$$\begin{aligned}
\|t'(s)\|_H &= \sqrt{\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle} \\
&= \sqrt{\frac{\sin^2 s}{4} + \frac{\sin^2 s}{4} + \frac{\cos^2 s}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $n_1 = \frac{t'}{\|t'\|_H}$ tanımı gereği,

$$n_1 = \frac{\sin s}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{\sin s}{\sqrt{2}} e_2 + \cos s e_3$$

ve

$$n_1' = \frac{\cos s}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{\cos s}{\sqrt{2}} e_2 - \sin s e_3$$

elde edilir ve nihayet $n_2 = t \times n_1$ olduğundan

$$n_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos s}{2} \right) e_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos s}{2} \right) e_2 - \frac{\sin s}{\sqrt{2}} e_3$$

ve

$$n_2' = \frac{-\sin s}{2} e_1 + \frac{\sin s}{2} e_2 + \frac{-\cos s}{\sqrt{2}} e_3$$

bulunur. Bu eğrinin eğriliği ve burulması olan $\kappa = \|t'\|_H$ ve $\tau = -\langle n_2', n_1 \rangle_H$ değerleri ise

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak kolayca elde edilir. Bulunan bu eşitlikler neticesinde γ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_1' \\ n_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}.$$

4.2 H Uzayında Reel Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri

Tanım 4.5 $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{r=0}^3 \beta_r(s) e_r, \quad e_0 = +1$$

biçiminde verilen diferansiyellenebilir eğriye *reel kuaterniyonik eğri* veya H reel kuaterniyon uzayında bir reel kuaterniyonik eğri adı verilir.

Tanım 4.6 H kuaterniyon uzayında bir reel kuaterniyonik eğri $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$ ile verilsin. Eğrinin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\|_H &= \sqrt{\beta(s) \times \beta'(s)} \\ &= \sqrt{\sum_{r=0}^3 \beta_r'(s) \times \sum_{r=0}^3 \beta_r'(s)} \\ &= \sqrt{\sum_{r=0}^3 (\beta_r')^2(s)} = 1 \end{aligned}$$

ise bu eğriye *birim hızlı reel kuaterniyonik eğri* denir. Burada $s \in I$ ye eğrinin *yay parametresi* denir.

Teorem 4.3 H uzayında $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$ birim hızlı reel kuaterniyonik eğrisini göz önüne alalım. Bu β eğrisinin birim teğet vektörü $T(s) = \beta'(s) = \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r$ ve

$N_1(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|_H}$ vektörlerini tanımlayalım. Bu vektörler aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i) T ve T' reel kuaterniyonları ortogonaldır,
- ii) $N_1 \times \bar{T}$ bir pure reel kuaterniyondur.

İspat

$I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{r=0}^3 \beta_r(s) e_r, \quad e_0 = +1$$

biçiminde verilen diferansiyellenebilir eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$T(s) = \beta'(s) = \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r \text{ olduğundan } \|T(s)\|_H = \|\beta'(s)\|_H = 1 \text{ dir. Buradan,}$$

$$\|T(s)\|_H^2 = \langle T(s), T(s) \rangle_H = \frac{1}{2} [T(s) \times \overline{T(s)} + T(s) \times \overline{T(s)}] = T(s) \times \overline{T(s)} = 1$$

yazılabilir. Buradan $T(s) \times \overline{T(s)} = 1$ ifadesinin türevi alınırsa,

$$T' \times \overline{T} + T \times (\overline{T})' = 0$$

elde edilir. $T = \sum_{r=0}^3 \beta_r'(s) e_r$ olduğuna göre $\overline{T} = \gamma_1' - \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r$ olacaktır. Bu

durumda $(\overline{T})' = \beta_1'' - \sum_{r=1}^3 \beta_r''(s) e_r$ dir. Ayrıca $\overline{T'} = \beta_1'' - \sum_{r=1}^3 \beta_r''(s) e_r$ olup,

$\overline{T'} = (\overline{T})'$ dir. Bu eşitlik yardımıyla,

$$T' \times \overline{T} + T \times \overline{T'} = 0$$

yazılır.

i) Bu son eşitliğin her iki yanı $\frac{1}{2}$ ile çarpılarak düzenlenirse,

$$\langle T, T' \rangle_H = \frac{1}{2} [T' \times \overline{T} + T \times \overline{T'}] = 0$$

bulunur. Bu ifadeden T ve T' nin ortogonal olduğu görülür. Böylece $\langle T, N_1 \rangle_H = 0$ elde edilir.

ii) Kuaterniyonik eşlenik kuralları dikkate alınır,

$$\begin{aligned}\langle T, N_1 \rangle_H &= \frac{1}{2} (T \times \overline{N_1} + N_1 \times \overline{T}) \\ &= \frac{1}{2} (N_1 \times \overline{T} + \overline{N_1 \times T}) = 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $N_1 \times \overline{T} + \overline{N_1 \times T} = 0$ eşitliği $N_1 \times \overline{T}$ nin pure reel kuaterniyon olduğunu göstermektedir.

Not 4.1 $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$ birim hızlı eğrisinde $N_1 \times \overline{T}$ pure reel kuaterniyon olduğundan $N_1 \times \overline{T}$ vektörünü, γ pure reel kuaterniyonik eğrinin birim teğet vektörü olan $t(s)$ olarak seçelim. Yani,

$$t = N_1 \times \overline{T} \tag{4.6}$$

olsun. Bu eşitlikte her iki taraf T ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}t \times T &= (N_1 \times \overline{T}) \times T \\ &= N_1 \times \underbrace{(\overline{T} \times T)}_{=1}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$t \times T = N_1 \tag{4.7}$$

olduğu görülür. Ayrıca bu son eşitlikten

$$\begin{aligned}t \times N_1 &= t \times (t \times T) \\ &= \underbrace{(t \times t)}_{=-1} \times T \\ &= -T\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir.

Tanım 4.7 $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$ birim hızlı reel kuaterniyonik eğrisi için $T = \beta'$ ve

$$N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_H} \text{ olmak üzere } N_2 \text{ ve } N_3 \text{ vektörlerini}$$

$$N_2 = n_1 \times T \quad (4.9)$$

ve

$$N_3 = n_2 \times T \quad (4.10)$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Teorem 4.4 $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ sistemi bir ortonormal vektör sistemidir.

İspat T ve N_1 vektörleri tanımları gereği birim vektörlerdir. O halde $\|N_2\|_H = 1$ ve $\|N_3\|_H = 1$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \langle N_2, N_2 \rangle_H &= N_2 \times \overline{N_2} \\ &= (n_1 \times T) \times \overline{(n_1 \times T)} \\ &= n_1 \times \underbrace{(T \times \overline{T})}_{=1} \times \overline{n_1} \\ &= n_1 \times \overline{n_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle N_3, N_3 \rangle_H &= N_3 \times \overline{N_3} \\ &= (n_2 \times T) \times \overline{(n_2 \times T)} \\ &= n_2 \times \underbrace{T \times \overline{T}}_{=1} \times \overline{n_2} \\ &= n_2 \times \overline{n_2} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Şimdi de, $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ sistemindeki vektörlerinin birbirlerine dik olduklarını gösterelim:

$$\begin{aligned}\langle T, N_1 \rangle_H &= \frac{1}{2} (T \times \overline{N_1} + N_1 \times \overline{T}) = \frac{1}{2} (T \times \overline{(t \times T)} + (t \times T) \times \overline{T}) \\ &= \frac{1}{2} ((T \times \overline{T}) \times \bar{t} + t \times (T \times \overline{T})) = \frac{1}{2} (\bar{t} + t) = 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle T, N_2 \rangle_H &= \frac{1}{2} (T \times \overline{N_2} + N_2 \times \overline{T}) = \frac{1}{2} (T \times \overline{(n_1 \times T)} + (n_1 \times T) \times \overline{T}) \\ &= \frac{1}{2} ((T \times \overline{T}) \times \bar{n}_1 + n_1 \times (T \times \overline{T})) = \frac{1}{2} (\bar{n}_1 + n_1) = 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle N_1, N_2 \rangle_H &= \frac{1}{2} (N_1 \times \overline{N_2} + N_2 \times \overline{N_1}) = \frac{1}{2} ((t \times T) \times \overline{(n_1 \times T)} + (n_1 \times T) \times \overline{(t \times T)}) \\ &= \frac{1}{2} (t \times (T \times \overline{T}) \times \bar{n}_1 + n_1 \times (T \times \overline{T}) \times \bar{t}) = \frac{1}{2} (t \times \bar{n}_1 + n_1 \times \bar{t}) = \langle t, n_1 \rangle = 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle T, N_3 \rangle_H &= \frac{1}{2} (T \times \overline{N_3} + N_3 \times \overline{T}) = \frac{1}{2} (T \times \overline{(n_2 \times T)} + (n_2 \times T) \times \overline{T}) \\ &= \frac{1}{2} ((T \times \overline{T}) \times \bar{n}_2 + n_2 \times (T \times \overline{T})) = \frac{1}{2} (\bar{n}_2 + n_2) = 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle N_1, N_3 \rangle_H &= \frac{1}{2} (N_1 \times \overline{N_3} + N_3 \times \overline{N_1}) = \frac{1}{2} ((t \times T) \times \overline{(n_2 \times T)} + (n_2 \times T) \times \overline{(t \times T)}) \\ &= \frac{1}{2} (t \times (T \times \overline{T}) \times \bar{n}_2 + n_2 \times (T \times \overline{T}) \times \bar{t}) = \frac{1}{2} (t \times \bar{n}_2 + n_2 \times \bar{t}) = \langle t, n_2 \rangle = 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle N_2, N_3 \rangle_H &= \frac{1}{2} (N_2 \times \overline{N_3} + N_3 \times \overline{N_2}) = \frac{1}{2} ((n_1 \times T) \times \overline{(n_2 \times T)} + (n_2 \times T) \times \overline{(n_1 \times T)}) \\ &= \frac{1}{2} (n_1 \times (T \times \overline{T}) \times \bar{n}_2 + n_2 \times (T \times \overline{T}) \times \bar{n}_1) = \frac{1}{2} (n_1 \times \bar{n}_2 + n_2 \times \bar{n}_1) = \langle n_1, n_2 \rangle = 0 .\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $\forall s \in I$ için $\beta(s)$ noktasında $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ sistemi bir ortonormal sistem olup bu sisteme *reel kuaterniyonik eğrinin Frenet 4 – ayaklısı* adı verilir.

Tanım 4.8 H reel kuaterniyon uzayında bir $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$ birim hızlı reel kuaterniyonik eğrisi verilsin. Bu eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4–ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olsun. K_1 , K_2 ve K_3 fonksiyonlarına, sırasıyla, β kuaterniyonik eğrisinin *birinci*, *ikinci* ve *üçüncü eğrilik fonksiyonu* adı verilir ve bu fonksiyonlar

$$K_1(s) = \left\langle T'(s), N_1(s) \right\rangle_H = \frac{1}{2} \left(T'(s) \times \overline{N_1(s)} + N_1(s) \times \overline{T'(s)} \right)$$

$$K_2(s) = \left\langle N_1'(s), N_2(s) \right\rangle_H = \frac{1}{2} \left(N_1'(s) \times \overline{N_2(s)} + N_2(s) \times \overline{N_1'(s)} \right)$$

$$K_3(s) = \left\langle N_2'(s), N_3(s) \right\rangle_H = \frac{1}{2} \left(N_2'(s) \times \overline{N_3(s)} + N_3(s) \times \overline{N_2'(s)} \right)$$

şeklinde tanımlınırlar. $K_1(s)$, $K_2(s)$ ve $K_3(s)$ reel sayılarına da, sırasıyla, β pure reel kuaterniyonik eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki *birinci*, *ikinci* ve *üçüncü eğriliği* denir. Burada T', N_1', N_2' ifadeleri, sırasıyla, T, N_1, N_2 Frenet vektörlerinin s yay parametresine göre türevleridir.

Teorem 4.5 H kuaterniyon uzayında bir C^∞ eğrisi, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$$

$$s \rightarrow \beta(s) = \sum_{r=0}^3 \beta_r(s) e_r, \quad e_0 = +1$$

olarak verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\forall s \in I$ için $\beta(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri $T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)$ ve eğrilikler de $K_1(s), K_2(s)$ ve $K_3(s)$ olsun. O halde, β kuaterniyonik eğrisi boyunca T, N_1, N_2 ve N_3 vektörlerinin türevleri için

$$\begin{cases} T'(s) = K(s)N_1(s) \\ N_1'(s) = -K(s)T(s) + \kappa(s)N_2(s) \\ N_2'(s) = -\kappa(s)N_1(s) + (\tau - K)(s)N_3(s) \\ N_3'(s) = -(\tau - K)(s)N_2(s) \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılara, *reel kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri* denir. Burada $K_1(s) = K(s)$, $K_2(s) = \kappa(s)$, $K_3(s) = (\tau - K)(s)$ olduğuna dikkat edelim. Ayrıca $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$; $N_1 \times \bar{T} = t$ pure reel kuaterniyonunu teğet kabul eden γ pure reel kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleridir.

İspat

β birim hızlı eğrisinin T ve N_1 Frenet vektörleri için $N_1 \times \bar{T} = t$ pure vektörünü teğet kabul eden pure reel kuaterniyonik eğri γ olsun. Bu γ eğrisinin Frenet vektörleri t , n_1 ve n_2 olmak üzere β eğrisinin T, N_1, N_2 ve N_3 Frenet vektörlerinin $T = \beta'$,

$$N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_H}, \quad N_2 = n_1 \times T, \quad N_3 = n_2 \times T \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

i) Ayrıca $K_1(s) = K = \|T'\|_H$ olduğundan $N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_H}$ için $T' = KN_1$ elde edilir.

ii) Şimdi $N_1' = -KT + \kappa N_2$ olduğunu gösterelim:

$$N_1 \times \bar{T} = t \text{ için elde edilen } t \times T = N_1 \text{ eşitliğinin türevi alınırsa}$$

$$N_1' = t' \times T + t \times T'$$

elde edilir. Buradan $t' = \kappa n_1$ ile $T' = KN_1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$N_1' = \kappa n_1 \times T + t \times KN_1$$

$$= \kappa n_1 \times T + Kt \times N_1$$

bulunur. Burada (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden $t \times N_1 = -T$ ve $N_2 = n_1 \times T$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$N_1' = -KT + \kappa N_2$$

elde edilir.

iii) Şimdi de $N_2' = -\kappa N_1 + (\tau - K) N_3$ olduğunu gösterelim: (4.9) denklemi ile kabul edilen $N_2 = n_1 \times T$ eşitliğinin türevini alalım:

$$N_2' = n_1' \times T + n_1 \times T'$$

bulunur. Burada γ eğrisinin Frenet formüllerinden olan $n_1' = -\kappa t + \tau n_2$ eşitliği ile $T' = \kappa N_1$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$N_2' = (-\kappa t + \tau n_2) \times T + n_1 \times \kappa N_1$$

elde edilir. Gerekli düzenleme yapılırsa,

$$N_2' = -\kappa(t \times T) + \tau(n_2 \times T) + K(n_1 \times N_1)$$

bulunur. $t \times T = N_1$ ve $n_2 \times T = N_3$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$N_2' = -\kappa N_1 + \tau N_3 + K(n_1 \times t \times T)$$

elde edilir. $n_1 \times t = -n_2$ olduğundan bulduğumuz son ifade

$$N_2' = -\kappa N_1 + \tau N_3 - K(n_2 \times T)$$

olarak yazılır. Son olarak $n_2 \times T = N_3$ eşitliği tekrar yerine yazılıp düzenlenirse

$$N_2' = -\kappa N_1 + (\tau - K) N_3$$

bulunur.

iv) Son olarak $N_3' = -(\tau - K) N_2$ olduğunu gösterelim: Bunun için $N_3 = n_2 \times T$ eşitliğinin türevini alınırsa;

$$N_3' = n_2' \times T + n_2 \times T'$$

elde edilir. $n_2' = -\tau n_1$ ve $T' = KN_1$ eşitlikleri yerine yazılır ve gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} N_3' &= -\tau n_1 \times T + n_2 \times KN_1 \\ &= -\tau(n_1 \times T) + K(n_2 \times N_1) \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} n_2 \times N_1 &= n_2 \times t \times T \\ &= (n_2 \times t) \times T \\ &= n_1 \times T \end{aligned}$$

olduğundan

$$N_3' = -\tau(n_1 \times T) + K(n_1 \times T)$$

olup, buradan $n_1 \times T = N_2$ eşitliği yerine yazılırsa

$$N_3' = -(\tau - K)N_2$$

elde edilir. Böylece β reel kuaterniyonik eğrisi için Serret-Frenet formülleri açıkça elde edilmiş olur. Ayrıca bu formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & (\tau - K) \\ 0 & 0 & -(\tau - K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 4.3 $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$ eğrisi $\beta(s) = \frac{\cos s}{2} + \frac{\sin s}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{s}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{\cos s}{2}e_3$ olarak

verilsin. Bu eğrinin Frenet elemanlarını ve Frenet formüllerini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle β eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\beta'(s) = \frac{-\sin s}{2} + \frac{\cos s}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{-\sin s}{2}e_3$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|\beta'(s)\|_H &= \sqrt{\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_H} \\ &= \frac{\sin^2 s}{4} + \frac{\cos^2 s}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 s}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

olup β birim hızlıdır. Bu durumda

$$T(s) = \beta'(s) = \frac{-\sin s}{2} + \frac{\cos s}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{-\sin s}{2}e_3$$

olarak yazılır. Ayrıca buradan,

$$T'(s) = \frac{-\cos s}{2} + \frac{-\sin s}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{-\cos s}{2}e_3$$

ve

$$\begin{aligned}\|T'(s)\|_H &= \sqrt{\langle T'(s), T'(s) \rangle_H} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(T'(s) \times \overline{T'(s)} + \overline{T'(s)} \times T'(s) \right)} \\ &= \sqrt{T'(s) \times \overline{T'(s)}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 s}{4} + \frac{\sin^2 s}{2} + \frac{\cos^2 s}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. β eğrisinin birinci eğrilik tanımını

$$K = \|T'(s)\|_H$$

olduğundan dolayı $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dir. Ayrıca $N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_H}$ tanımı gereği,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{-\cos s}{2} + \frac{-\sin s}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{-\cos s}{2} e_3 \right) \\ &= \frac{-\cos s}{\sqrt{2}} - \sin s e_1 - \frac{\cos s}{\sqrt{2}} e_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $t = N_1 \times \bar{T}$ eşitliğini sağlayan t vektörünü teğet kabul eden

(Örnek 4.2) γ eğrisinin Frenet vektörleri n_1 ve n_2 olmak üzere, $N_2 = n_1 \times T$ ve $N_3 = n_2 \times T$ olduğundan;

$$\begin{aligned} N_2 &= n_1 \times T \\ &= \left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{\sin s}{\sqrt{2}} e_2 + \cos s e_3 \right) \times \left(\frac{-\sin s}{2} + \frac{\cos s}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{-\sin s}{2} e_3 \right) \end{aligned}$$

kuaterniyon çarpımı hesaplanırsa N_2

$$N_2 = \frac{\sin s}{2} - \frac{\cos s}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{\sin s}{2} e_3$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} N_3 &= n_2 \times T \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos s}{\sqrt{2}} \right) e_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos s}{\sqrt{2}} \right) e_2 - \frac{\sin s}{\sqrt{2}} e_3 \right) \times \left(-\frac{\sin s}{2} + \frac{\cos s}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 - \frac{\sin s}{2} e_3 \right) \end{aligned}$$

kuaterniyon çarpımı hesaplanırsa N_3 vektörü

$$N_3 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e_3$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 4.5 deki Frenet formülleri ve Örnek 4.2 deki γ eğrisinin eğrilikleri olan κ ve τ kullanılırsa β eğrisinin Frenet Formülleri matris formunda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}.$$

DUAL KUATERNİYONİK EĞRİLER

Tezin bu orijinal bölümünde ilk olarak izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilecektir. Burada izotropik dual kuaterniyon uzayının 3-boyutlu Öklid uzayı ile izomorf olduğu göz önünde bulundurulacaktır. Daha sonra, izotropik dual kuaterniyonlar için bulduğumuz eşitlikler kullanılarak non-izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri elde edilecektir.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar, [31] çalışmasında bildiri olarak sunulmuş ve [32] nolu çalışmada ise SCI-Expanded kapsamlı bir dergide makale olarak kabul edilmiştir.

5.1 İzotropik Dual Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

Tanım 5.1 İzotropik dual kuaterniyonların uzayı $H_D^\delta = \{\gamma \in H \mid \gamma + \bar{\gamma} = 0\}$ olsun.

$I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D^\delta$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r(s) e_r, \quad \gamma_r : I \rightarrow \mathbb{R}$$

C^∞ eğrisi verilsin. Bu diferansiyellenebilir γ eğrisine *izotropik dual kuaterniyonik eğri* adı verilir.

Tanım 5.2 H_D^δ uzayında $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ birim aralık olmak üzere bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D^\delta$ izotropik dual kuaterniyonik eğrisi alınsın. Eğri üzerindeki her noktada hız vektörü birim ise yani

$$\begin{aligned}\|\gamma'(s)\|_{H_D^\delta}^2 &= \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_{H_D^\delta} \\ &= \frac{1}{2} \left[\gamma'(s) \otimes_\delta \overline{\gamma'(s)} + \gamma'(s) \otimes_\delta \overline{\gamma'(s)} \right] = \gamma'(s) \otimes_\delta \overline{\gamma'(s)} = 1, \quad \forall s \in I\end{aligned}$$

ise bu eğriye $s \in I$ yay parametrelili *birim hızlı izotropik dual kuaterniyonik eğri* adı verilir.

Teorem 5.1 H_D^δ uzayında $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D^\delta$ birim hızlı izotropik dual kuaterniyonik eğrisini göz önüne alalım. Bu γ eğrisinin birim teğet

vektörü $t(s) = \gamma'(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ olmak üzere

- i) t ve t' izotropik dual kuaterniyonları ortogonaldır,
- ii) $t' \otimes_\delta \bar{t}$ bir izotropik dual kuaterniyondur.

İspat Birim hızlı γ izotropik dual kuaterniyonik eğrisi $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\gamma: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow H_D^\delta \\ s &\rightarrow \gamma(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r(s) e_r\end{aligned}$$

parametrik denklemiyle verilsin. O halde $\forall s \in I$ için $t(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ olduğundan

$$\begin{aligned}\|t(s)\|_{H_D^\delta}^2 &= \langle t(s), t(s) \rangle_{H_D^\delta} \\ &= \frac{1}{2} \left[t(s) \otimes_\delta \overline{t(s)} + t(s) \otimes_\delta \overline{t(s)} \right] \\ &= t(s) \otimes_\delta \overline{t(s)} = 1\end{aligned}$$

elde edilir. $t(s) \otimes_\delta \overline{t(s)} = 1$ ifadesinin türevi alınırsa

$$t' \otimes_\delta \bar{t} + t \otimes_\delta (\bar{t})' = 0$$

elde edilir. Bununla beraber $t = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ bir izotropik dual kuaterniyon olduğuna

göre eşlenik tanımı gereğince $\bar{t} = -\sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ yazılır. Bu durumda $(\bar{t})' = -\sum_{r=1}^3 \gamma_r''(s) e_r$

dir. Ayrıca $\bar{t}' = -\sum_{r=1}^3 \gamma_r''(s) e_r$ olup, $\bar{t}' = (\bar{t})'$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla,

$$t' \otimes_{\delta} \bar{t} + t \otimes_{\delta} \bar{t}' = 0 \quad (5.1)$$

yazılabilir.

Bu bilgiler kullanılarak,

i) (5.1) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{1}{2}$ ile çarpılarak düzenlenirse,

$$\langle t, t' \rangle_{H_D^{\delta}} = \frac{1}{2} [t' \otimes_{\delta} \bar{t} + t \otimes_{\delta} \bar{t}'] = 0$$

bulunur. Buradan t ve t' izotropik dual kuaterniyonlarının ortogonal olduğu görülür.

ii) Şimdi de (5.1) ifadesi izotropik dual kuaterniyon eşlenik kuralları göz önüne

alınarak düzenlenirse $t' \otimes_{\delta} \bar{t} + t \otimes_{\delta} \bar{t}' = 0$ ifadesinden $t' \otimes_{\delta} \bar{t} + \bar{\bar{t}} \otimes_{\delta} \bar{t}' = 0$ yazılabilir.

Buradan da $t' \otimes_{\delta} \bar{t} + \overline{(t' \otimes_{\delta} \bar{t})} = 0$ elde edilir. Elde ettiğimiz bu son ifade $t' \otimes_{\delta} \bar{t}$ nin bir izotropik dual kuaterniyon olduğunu gösterir.

Tanım 5.3 $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D^{\delta}$ birim hızlı izotropik dual

kuaterniyonik eğrisi verilsin. $\frac{t'}{\|t'\|_{H_D^{\delta}}} = n_1$ olacak şekilde n_1 vektörü tanımlayalım.

Burada $\langle n_1, t \rangle_{H_D^{\delta}} = 0$ olduğu açıktır. Şimdi ise n_2 pure izotropik dual kuaterniyonunu,

$$t \otimes_{\delta} n_1 = -\langle t, n_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} + t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_1 = n_2$$

veya diğer bir ifadeyle

$$\langle t, n_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \text{ olduğundan } t \otimes_{\delta} n_1 = t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_1 = n_2$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Böylece t, n_1, n_2 vektörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned}
 & \bullet n_1 \otimes_{\delta} t = n_1 \wedge_{\mathbb{R}^3} t = -n_2, \\
 & \bullet t \otimes_{\delta} n_2 = t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_2 = -n_1, \\
 & \bullet t \otimes_{\delta} n_1 = t \wedge_{\mathbb{R}^3} n_1 = -n_2, \\
 & \bullet n_2 \otimes_{\delta} t = n_2 \wedge_{\mathbb{R}^3} t = n_1, \\
 & \bullet n_1 \otimes_{\delta} n_2 = n_1 \wedge_{\mathbb{R}^3} n_2 = t, \\
 & \bullet n_2 \otimes_{\delta} n_1 = n_2 \wedge_{\mathbb{R}^3} n_1 = -t.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Bu eşitliklerden hareketle, aşağıdaki tablo elde edilir:

Çizelge 5. 1 İzotropik dual kuaterniyon çarpım tablosu

$\otimes_{\delta}$	t	n_1	n_2
t	-1	n_2	$-n_1$
n_1	$-n_2$	-1	t
n_2	n_1	$-t$	-1

Ayrıca, t, n_1, n_2 vektörleri arasında aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\langle t, n_1 \rangle_{H_D^{\delta}} = \frac{1}{2} [t \otimes_{\delta} \bar{n}_1 + n_1 \otimes_{\delta} \bar{t}] = \frac{1}{2} (n_2 + \bar{n}_2) = 0, \quad \langle t, t \rangle_{H_D^{\delta}} = 1,$$

$$\langle n_1, n_2 \rangle_{H_D^{\delta}} = \frac{1}{2} [n_1 \otimes_{\delta} \bar{n}_2 + n_2 \otimes_{\delta} \bar{n}_1] = \frac{1}{2} (\bar{t} + t) = 0, \quad \langle n_1, n_1 \rangle_{H_D^{\delta}} = 1,$$

$$\langle t, n_2 \rangle_{H_D^{\delta}} = \frac{1}{2} [t \otimes_{\delta} \bar{n}_2 + n_2 \otimes_{\delta} \bar{t}] = \frac{1}{2} (n_1 + \bar{n}_1) = 0, \quad \langle n_2, n_2 \rangle_{H_D^{\delta}} = 1.$$

Böylece $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$ noktasındaki $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ Frenet 3-ayaklısı bir ortonormal sistemdir. Ayrıca, t vektörüne γ eğrisinin *birim teğet vektörü*, n_1 e *birim asli normal* ve n_2 ye ise *birim binormal* vektör denir.

Tanım 5.4 H_D^δ uzayında bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D^\delta$ birim hızlı izotropik dual kuaterniyonik eğrisi verilsin. Bu eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olsun. Böylece, γ izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birinci ve ikinci eğrilikleri

$$k_1(s) = \langle t', n_1 \rangle_{H_D^\delta} = \frac{1}{2} (t' \otimes_\delta \bar{n}_1 + n_1 \otimes_\delta \bar{t}')$$

ve

$$k_2(s) = \langle n_1', n_2 \rangle_{H_D^\delta} = \frac{1}{2} (n_1' \otimes_\delta \bar{n}_2 + n_2 \otimes_\delta \bar{n}_1')$$

ile tanımlanır.

Yardımcı Teorem 5.1 Yukarıdaki tanımlamalara göre γ izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla κ ve τ olarak

$$k_1 = \kappa = \|t'\|_{H_D^\delta}$$

$$k_2 = \tau = \langle n_1', n_2 \rangle_{H_D^\delta} = -\langle n_2', n_1 \rangle_{H_D^\delta}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat γ izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birinci eğriliğinin tanımı

$$k_1(s) = \langle t', n_1 \rangle_{H_D^\delta} = \frac{1}{2} (t' \otimes_\delta \bar{n}_1 + n_1 \otimes_\delta \bar{t}')$$

olduğundan burada $n_1 = \frac{t'}{\|t'\|_{H_D^\delta}}$ eşitliği yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \left(t' \otimes_\delta \frac{\bar{t}'}{\|t'\|_{H_D^\delta}} + \frac{t'}{\|t'\|_{H_D^\delta}} \otimes_\delta \bar{t}' \right) \\ &= \frac{1}{2\|t'\|_{H_D^\delta}} (t' \otimes_\delta \bar{t}' + t' \otimes_\delta \bar{t}') \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|t'\|_{H_D^\delta}} (t' \otimes_\delta \bar{t}')$$

elde edilir. Buradan $\|t'\|_{H_D^\delta}^2 = t' \otimes_\delta \bar{t}'$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\kappa = \|t'\|_{H_D^\delta}$$

bulunur. Diğer yandan, γ izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki

ikinci eğriliği $k_2(s) = \tau = \langle n_1', n_2 \rangle_{H_D^\delta}$ dir. n_1, n_2 vektörleri birbirine dik olduğundan,

$\langle n_1, n_2 \rangle_{H_D^\delta} = 0$ eşitliğini kullanarak eşitliğin her iki yanının türevini alırsak

$$\langle n_1', n_2 \rangle_{H_D^\delta} + \langle n_2', n_1 \rangle_{H_D^\delta} = 0$$

$$\langle n_1', n_2 \rangle_{H_D^\delta} = -\langle n_2', n_1 \rangle_{H_D^\delta}$$

elde edilir. Buradan $\tau = \langle n_1', n_2 \rangle_{H_D^\delta} = -\langle n_2', n_1 \rangle_{H_D^\delta}$ olduğu görülür.

Teorem 5.2 izotropik dual kuaterniyonların uzayı $H_D^\delta = \{\gamma \in H_D \mid \gamma + \bar{\gamma} = 0\}$ olsun.

$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D^\delta$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r(s) e_r, \quad \gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

diferansiyellenebilir eğrisi verilsin. $t(s) = \sum_{r=1}^3 \gamma_r'(s) e_r$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$

noktasındaki Frenet 3 – ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ ve eğrilikler de $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$

olmak üzere γ eğrisi boyunca $t(s), n_1(s)$ ve $n_2(s)$ nin türevleri ile eğrilikleri arasındaki ilişki;

$$t'(s) = \kappa(s) n_1(s)$$

$$n_1'(s) = -\kappa(s) t(s) + \tau(s) n_2(s)$$

$$n_2'(s) = -\tau(s) n_1(s)$$

biçimindedir. Bu bağıntılara *izotropik dual kuaterniyonlar için Serret-Frenet formülleri* adı verilir.

İspat

I. Öncelikle $t' = \kappa n_1$ olduğunu gösterelim. Daha önce tanımladığımız $n_1 = \frac{t'}{\|t'\|_{H_D^\delta}}$ vektöründen $t' = \|t'\|_{H_D^\delta} n_1$ yazılır. Ayrıca γ eğrisinin birinci eğriliği olan $\kappa = \|t'\|_{H_D^\delta}$ eşitliği yenine yazılırsa;

$$t' = \kappa n_1 \quad (5.3)$$

olarak elde edilir.

II. Şimdi $n_1' = -\kappa t + \tau n_2$ olduğunu ispatlayalım. n_1' vektörü t , n_1 ve n_2 vektörlerinin lineer bileşimi şeklinde

$$n_1' = a_{11}t + a_{12}n_1 + a_{13}n_2$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı sırasıyla t , n_1 ve n_2 ile iç çarpılırsa:

i) t ile iç çarpılırsa

$$\langle n_1', t \rangle_{H_D^\delta} = a_{11} \underbrace{\langle t, t \rangle_{H_D^\delta}}_{=1} + a_{12} \underbrace{\langle n_1, t \rangle_{H_D^\delta}}_{=0} + a_{13} \underbrace{\langle n_2, t \rangle_{H_D^\delta}}_{=0}$$

veya

$$\langle n_1', t \rangle_{H_D^\delta} = a_{11}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle n_1, t \rangle_{H_D^\delta} = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\langle n_1', t \rangle_{H_D^\delta} + \langle t', n_1 \rangle_{H_D^\delta} = 0$$

eşitliğinden $\langle n_1', t \rangle_{H_D^\delta} = -\langle t', n_1 \rangle_{H_D^\delta}$ yazılır. Yardımcı teorem 4.1 de verilen $\kappa = \langle t', n_1 \rangle_{H_D^\delta}$ eşitliği kullanılırsa

$$a_{11} = -\kappa$$

elde edilir.

ii) n_1 ile iç çarpılırsa

$$\langle n'_1, n_1 \rangle_{H_D^\delta} = a_{11} \underbrace{\langle t, n_1 \rangle_{H_D^\delta}}_{=0} + a_{12} \underbrace{\langle n_1, n_1 \rangle_{H_D^\delta}}_{=1} + a_{13} \underbrace{\langle n_2, n_1 \rangle_{H_D^\delta}}_{=0}$$

veya

$$\langle n'_1, n_1 \rangle_{H_D^\delta} = a_{12}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle n_1, n_1 \rangle_{H_D^\delta} = 1$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\langle n'_1, n_1 \rangle_{H_D^\delta} + \langle n_1, n_1 \rangle_{H_D^\delta} = 0$$

eşitliğinden $\langle n'_1, n_1 \rangle_{H_D^\delta} = 0$ bulunur. Buradan $a_{12} = 0$ elde edilir.

iii) n_2 ile iç çarpılırsa

$$\langle n'_1, n_2 \rangle_{H_D^\delta} = a_{11} \underbrace{\langle t, n_2 \rangle_{H_D^\delta}}_{=0} + a_{12} \underbrace{\langle n_1, n_2 \rangle_{H_D^\delta}}_{=0} + a_{13} \underbrace{\langle n_2, n_2 \rangle_{H_D^\delta}}_{=1}$$

veya

$$\langle n'_1, n_2 \rangle_{H_D^\delta} = a_{13}$$

elde edilir. Yardımcı teorem 4.1 de verilen $\tau = \langle n'_1, n_2 \rangle_{H_D^\delta}$ eşitliği kullanılırsa

$$a_{13} = \tau$$

elde edilir.

Sonuç olarak bulunan $a_{11} = -\kappa$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = \tau$ değerleri $n'_1 = a_{11}t + a_{12}n_1 + a_{13}n_2$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$n'_1 = -\kappa t + \tau n_2 \tag{5.4}$$

elde edilir.

III. Şimdi ise $n'_2 = \tau n_1$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için $n_2 = t \otimes_\delta n_1$

eşitliğinin her iki yanının türevi alınır ve $t' = \kappa n_1$ ile $n_1 \otimes_\delta n_1 = -1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
n_2' &= t' \otimes_\delta n_1 + t \otimes_\delta n_1' \\
&= \kappa n_1 \otimes_\delta n_1 + t \otimes_\delta n_1'
\end{aligned}$$

ifadesinden,

$$n_2' = \kappa(-1) + t \otimes_\delta n_1'$$

elde edilir. Buradan $t \otimes_\delta t = -1$ eşitliği kullanılırsa

$$n_2' = \kappa(t \otimes_\delta t) + t \otimes_\delta n_1'$$

eşitliği ve bu eşitlikten de

$$n_2' = t \otimes_\delta (\kappa t + n_1')$$

bulunur. Bu elde ettiğimiz son ifadede 5.4 eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
n_2' &= t \otimes_\delta (\kappa t - \kappa t + \tau n_2) \\
&= t \otimes_\delta \tau n_2 \\
&= \tau(t \otimes_\delta n_2)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan da $n_2' = -\tau n_1$ elde edilir.

Sonuç 5.1 H_D^δ izotropik dual kuaterniyonların uzayında γ kuaterniyonik eğrisinin t, n_1 ve n_2 vektörlerinin izotropik dual kuaterniyonik eğri boyunca türevleri ile ilgili eşitlikler matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_1' \\ n_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Buradaki amacımız H_D^δ uzayındaki bulunan bu Serret-Frenet formüllerini kullanarak H_D deki non-izotropik dual kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısını ve Frenet formüllerini elde etmektir.

Örnek 5.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D^\delta$ eğrisi $\gamma(s) = \frac{2}{\sqrt{5}}s e_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(s)e_2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\sin(s)e_3$

olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet elemanlarını ve Formüllerini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle γ eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\gamma'(s) = \frac{2}{\sqrt{5}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(s)e_2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\cos(s)e_3$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\|_{H_D^\delta} &= \sqrt{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_{H_D^\delta}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{\sin^2(s)}{5} + \frac{\cos^2(s)}{5}} = 1 \end{aligned}$$

olup γ birim hızlıdır. Bu durumda

$$t(s) = \gamma'(s) = \frac{2}{\sqrt{5}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(s)e_2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\cos(s)e_3$$

elde edilir. Ayrıca $t'(s)$ vektörü

$$t'(s) = \gamma''(s) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(s)e_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(s)e_3$$

olarak bulunur. Bu eşitlikten $t'(s)$ vektörünün normu ise

$$\begin{aligned} \|t'(s)\|_{H_D^\delta} &= \sqrt{\frac{1}{5}\cos^2 s + \frac{1}{5}\sin^2 s} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $n_1(s)$ vektörü

$$n_1(s) = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|_{H_D^\delta}} = -\cos(s)e_2 + \sin(s)e_3$$

ve nihayet $n_2 = t \otimes_\delta n_1$ olduğundan

$$n_2(s) = \frac{-1}{\sqrt{5}}e_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin s e_2 + \frac{-2}{\sqrt{5}}\cos s e_3$$

bulunur. Burada teorem 5.2 ile verilen Frenet formülleri kullanılırsa, sabit κ ve τ değerleri $\kappa = \|t'\|_{H_D^\delta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $\tau = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ kolayca bulunur.

Böylece γ eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n_1'(s) \\ n_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

5.2 İzotropik Dual Kuaterniyonik Darboux Vektörü ve Özellikleri

Tanım 5.5 γ izotropik dual kuaterniyonik bir eğri ve bu eğrinin $\forall s \in I$ için $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ ve eğrilikler de $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olarak verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \text{ anti-simerik matrisi } D = (\tau, 0, \kappa) = \tau t + \kappa n_2 \text{ vektörünü tek türlü}$$

olarak belirler. Bu vektör *Darboux dönme eksenini* olarak adlandırılır.

Böylece, D darboux dönme eksenini yardımıyla, Frenet çatı alanının değişimini veren;

$$\begin{cases} t' = D \otimes_\delta t \\ n_1' = D \otimes_\delta n_1 \\ n_2' = D \otimes_\delta n_2 \end{cases}$$

Darboux denklemleri elde edilir. Bu denklemler Frenet formüllerinin bir diğer yazılımıdır.

5.3 Non-izotropik Dual Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

Tanım 5.5 $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$$

$$s \rightarrow \beta(s) = se_0 + \sum_{r=1}^3 \beta_r(s) e_r, \quad e_0 = +1$$

olarak verilen diferansiyellenebilir eğriye *non-izotropik dual kuaterniyonik eğri* adı verilir.

Tanım 5.6 Bir non-izotropik dual kuaterniyonik eğri $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$ ile verilsin.

Eğrinin her noktasındaki hız vektörü birim ise bu eğriye *birim hızlı non-izotropik dual kuaterniyonik eğri* denir. $s \in I$ yay parametresi için bu eğri aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\|_{H_D} &= \sqrt{\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [\beta'(s) \otimes \overline{\beta'(s)} + \beta'(s) \otimes \overline{\beta'(s)}]} \\ &= \sqrt{\beta'(s) \otimes \overline{\beta'(s)}} \\ &= \sqrt{\left[1 + \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r\right] \otimes \left[1 - \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r\right]} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Teorem 5.3 H non-izotropik dual kuaterniyonlar uzayında $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$, birim hızlı non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisini göz önünde alalım. Bu β eğrisinin birim teğet vektörünü $T(s) = \beta'(s) = 1 + \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r$ olarak tanımlayalım. Bu vektör aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i) T ve T' non-izometrik dual kuaterniyonları ortogonaldır,
- ii) $T' \otimes \overline{T}$ bir izotropik dual kuaterniyondur.

İspat

$I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H$$

$$s \rightarrow \beta(s) = se_0 + \sum_{r=1}^3 \beta_r(s) e_r, \quad e_0 = +1$$

biçiminde verilen diferansiyellenebilir eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$T(s) = \beta'(s) = 1 + \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r \quad \text{olduğundan (3.9) eşitliği ile verilen norm tanımı}$$

kullanılarak $\|T(s)\|_{H_D} = \|\beta'(s)\|_{H_D} = 1$ elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|T(s)\|_{H_D}^2 &= \langle T(s), T(s) \rangle_{H_D} \\ &= \frac{1}{2} [T(s) \otimes \overline{T(s)} + T(s) \otimes \overline{T(s)}] \\ &= T(s) \otimes \overline{T(s)} = 1 \end{aligned}$$

yazılır. Burada $T(s) \otimes \overline{T(s)} = 1$ ifadesinin türevi alınırsa,

$$T' \otimes \bar{T} + T \otimes (\bar{T})' = 0$$

yazılır. $T = 1 + \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r$ olduğuna göre $\bar{T} = 1 - \sum_{r=1}^3 \beta_r'(s) e_r$ olacaktır. Bu durumda

$$(\bar{T})' = 1 - \sum_{r=1}^3 \beta_r''(s) e_r \quad \text{dir. Ayrıca } \overline{T'} = 1 - \sum_{r=1}^3 \beta_r''(s) e_r \quad \text{olduğundan } \overline{T'} = (\bar{T})' \quad \text{eşitliği}$$

elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla,

$$T' \otimes \bar{T} + T \otimes \overline{T'} = 0$$

yazılabilir.

i) Bu son eşitliğin her iki yanını $\frac{1}{2}$ ile çarpılarak düzenlenirse,

$$\left\langle T, T' \right\rangle_{H_D} = \frac{1}{2} \left(T' \otimes \bar{T} + T \otimes \overline{T'} \right) = 0$$

bulunur. Bu ifadeden T ve T' nün ortogonal olduğu görülür. Böylece $\langle T, T' \rangle_{H_D} = 0$ yazılabilir.

ii) Kuaterniyonik eşlenik kuralları dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \langle T, T' \rangle_{H_D} &= \frac{1}{2} \left(T \otimes \overline{T'} + T' \otimes \overline{T} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(T' \otimes \overline{T} + \overline{T' \otimes T} \right) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $T' \otimes \overline{T} + \overline{T' \otimes T} = 0$ eşitliği $T' \otimes \overline{T}$ nin izotropik dual kuaterniyon olduğunu göstermektedir.

Tanım 5.7 T ve T' vektörleri ortogonal olduğundan $N_1(s)$ vektörünü

$$N_1(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|_{H_D}} \text{ olacak şekilde tanımlayalım.}$$

Not 5.1 $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$ birim hızlı eğrisinde $N_1 \otimes \overline{T}$ izotropik dual kuaterniyon olduğundan $N_1 \otimes \overline{T}$ vektörünü, γ izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin birim teğet vektörü olan t olarak seçelim. Yani,

$$t = N_1 \otimes \overline{T} \tag{5.5}$$

olsun. Bu eşitlikte her iki taraf T ile çarpılırsa, T ve $\overline{T}$ birim olduğundan $T \otimes \overline{T} = 1$ kullanılırsa

$$t \otimes T = (N_1 \otimes \overline{T}) \otimes T = N_1 \otimes (\overline{T} \otimes T)$$

elde edilir. Buradan

$$t \otimes T = N_1 \tag{5.6}$$

olduğu görülür. Ayrıca bu son eşitlikte

$$t \otimes N_1 = -T \tag{5.7}$$

olduğu açıktır.

Tanım 5.8 $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$ birim hızlı non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisi verilsin.

$T = \beta'$ ve $N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_{H_D}}$ olmak üzere N_2 ve N_3 vektörlerini

$$N_2 = n_1 \otimes T \quad (5.8)$$

ve

$$N_3 = n_2 \otimes T \quad (5.9)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu vektörlere $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$ birim hızlı non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin *Serret-Frenet vektörleri* adı verilir. Burada n_1 ve n_2 pure dual kuaterniyon olduğundan $N_2 = n_1 \otimes T$ ve $N_3 = n_2 \otimes T$ Frenet vektörlerinin pure dual kuaterniyon olduğuna dikkat edelim.

Teorem 5.4 $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$ birim hızlı non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin Serret-Frenet vektörleri T, N_1, N_2 ve N_3 olmak üzere $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ sistemi bir ortonormal vektör sistemidir.

İspat

T ve N_1 vektörleri tanımları gereği birim vektörlerdir. O halde $\|N_2\|_{H_D} = 1$ ve

$\|N_3\|_{H_D} = 1$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \langle N_2, N_2 \rangle_{H_D^\delta} &= N_2 \otimes_\delta \overline{N_2} \\ &= (n_1 \otimes T) \otimes_\delta \overline{(n_1 \otimes T)} \\ &= n_1 \otimes (T \otimes \overline{T}) \otimes_\delta \overline{n_1} \\ &= n_1 \otimes_\delta \overline{n_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle N_3, N_3 \rangle_{H_D^p} &= N_3 \otimes_\delta \overline{N_3} \\
&= (n_2 \otimes T) \otimes_\delta \overline{(n_2 \otimes T)} \\
&= n_2 \otimes (T \otimes \bar{T}) \otimes \overline{n_2} \\
&= n_2 \otimes_\delta \overline{n_2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Şimdi de $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ sistemindeki vektörlerinin birbirlerine dik olduklarını gösterelim:

$$\begin{aligned}
\langle T, N_1 \rangle_{H_D} &= \frac{1}{2} (T \otimes \overline{N_1} + N_1 \otimes \bar{T}) = \frac{1}{2} (T \otimes \overline{(t \otimes T)} + (t \otimes T) \otimes \bar{T}) \\
&= \frac{1}{2} ((T \otimes \bar{T}) \otimes \bar{t} + t \otimes (T \otimes \bar{T})) = \frac{1}{2} (\bar{t} + t) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T, N_2 \rangle_{H_D} &= \frac{1}{2} (T \otimes \overline{N_2} + N_2 \otimes \bar{T}) = \frac{1}{2} (T \otimes \overline{(n_1 \otimes T)} + (n_1 \otimes T) \otimes \bar{T}) \\
&= \frac{1}{2} ((T \otimes \bar{T}) \otimes \overline{n_1} + n_1 \otimes (T \otimes \bar{T})) = \frac{1}{2} (\overline{n_1} + n_1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_1, N_2 \rangle_{H_D} &= \frac{1}{2} (N_1 \otimes \overline{N_2} + N_2 \otimes \overline{N_1}) = \frac{1}{2} ((t \otimes T) \otimes \overline{(n_1 \otimes T)} + (n_1 \otimes T) \otimes \overline{(t \otimes T)}) \\
&= \frac{1}{2} (t \otimes (T \otimes \bar{T}) \otimes \overline{n_1} + n_1 \otimes (T \otimes \bar{T}) \otimes \bar{t}) = \frac{1}{2} (t \otimes_\delta \overline{n_1} + n_1 \otimes_\delta \bar{t}) = \langle t, n_1 \rangle_{H_D^p} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T, N_3 \rangle_{H_D} &= \frac{1}{2} (T \otimes \overline{N_3} + N_3 \otimes \bar{T}) = \frac{1}{2} (T \otimes \overline{(n_2 \otimes T)} + (n_2 \otimes T) \otimes \bar{T}) \\
&= \frac{1}{2} ((T \otimes \bar{T}) \otimes \overline{n_2} + n_2 \otimes (T \otimes \bar{T})) = \frac{1}{2} (\overline{n_2} + n_2) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_1, N_3 \rangle_{H_D} &= \frac{1}{2} (N_1 \otimes \overline{N_3} + N_3 \otimes \overline{N_1}) = \frac{1}{2} ((t \otimes T) \otimes \overline{(n_2 \otimes T)} + (n_2 \otimes T) \otimes \overline{(t \otimes T)}) \\
&= \frac{1}{2} (t \otimes (T \otimes \bar{T}) \otimes \overline{n_2} + n_2 \otimes (T \otimes \bar{T}) \otimes \bar{t}) = \frac{1}{2} (t \otimes_\delta \overline{n_2} + n_2 \otimes_\delta \bar{t}) = \langle t, n_2 \rangle_{H_D^p} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_2, N_3 \rangle_{H_D^\delta} &= \frac{1}{2} (N_2 \otimes_\delta \overline{N_3} + N_3 \otimes_\delta \overline{N_2}) = \frac{1}{2} ((n_1 \otimes T) \otimes_\delta \overline{(n_2 \otimes T)} + (n_2 \otimes T) \otimes_\delta \overline{(n_1 \otimes T)}) \\
&= \frac{1}{2} (n_1 \otimes (T \otimes \overline{T}) \otimes \overline{n_2} + n_2 \otimes (T \otimes \overline{T}) \otimes \overline{n_1}) = \frac{1}{2} (n_1 \otimes_\delta \overline{n_2} + n_2 \otimes_\delta \overline{n_1}) = \langle n_1, n_2 \rangle_{H_D^\delta} = 0.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $\forall s \in I$ için $\beta(s)$ noktasındaki $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ sistemine non-izotropik dual kuaterniyonik eğrinin Frenet 4 – ayaklısı adı verilir.

Tanım 5.9 H_D kuaterniyon uzayında bir $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$ birim hızlı non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisi verilsin. Bu eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4 – ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olsun. K_1 , K_2 ve K_3 fonksiyonlarına, sırasıyla, β non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin *birinci, ikinci ve üçüncü eğrilik fonksiyonu* adı verilir ve bu fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= \langle T'(s), N_1(s) \rangle_{H_D} = \frac{1}{2} (T'(s) \otimes \overline{N_1(s)} + N_1(s) \otimes \overline{T'(s)}) \\
K_2(s) &= \langle N_1'(s), N_2(s) \rangle_{H_D} = \frac{1}{2} (N_1'(s) \otimes \overline{N_2(s)} + N_2(s) \otimes \overline{N_1'(s)}) \\
K_3(s) &= \langle N_2'(s), N_3(s) \rangle_{H_D^\delta} = \frac{1}{2} (N_2'(s) \otimes_\delta \overline{N_3(s)} + N_3(s) \otimes_\delta \overline{N_2'(s)})
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $K_1(s)$, $K_2(s)$ ve $K_3(s)$ reel sayılarına da, sırasıyla, β non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki *birinci, ikinci ve üçüncü eğriliği* denir. Burada T' , N_1' , N_2' ifadeleri, sırasıyla, T , N_1 , N_2 Frenet vektörlerinin s yay parametresine göre türevleridir.

Teorem 5.5 H_D non-izotropik dual kuaterniyon uzayında bir C^∞ eğrisi, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\beta: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow H_D \\
s &\rightarrow \beta(s) = s e_0 + \sum_{r=1}^3 \beta_r(s) e_r, \quad e_0 = +1
\end{aligned}$$

olarak verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\forall s \in I$ için $\beta(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri $T(s)$, $N_1(s)$, $N_2(s)$, $N_3(s)$ ve eğrilikler $K_1(s) = K$, $K_2(s) = \kappa$ ve

$K_3(s) = \tau$ olsun. Burada $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$; $N_1 \otimes \bar{T} = t$ izotropik vektörünü teğet kabul eden γ pure kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleridir. O halde, β non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisi boyunca T , N_1 , N_2 ve N_3 vektörlerinin türevleri için

$$T'(s) = K(s)N_1(s)$$

$$N_1'(s) = \kappa(s)N_2(s)$$

$$N_2'(s) = -\kappa(s)N_1(s) + \tau N_3(s)$$

$$N_3'(s) = -\tau N_2(s)$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılara *non-izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri* denir.

İspat

β birim hızlı eğrisinin T ve N_1 Frenet vektörleri için $N_1 \otimes \bar{T} = t$ izotropik vektörünü teğet kabul eden herhangi bir pure dual kuaterniyonik eğri γ olsun. Bu γ eğrisinin Frenet vektörleri t , n_1 ve n_2 olmak üzere β eğrisinin T , N_1 , N_2 ve N_3 Frenet

vektörlerinin $T = \beta'$, $N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_{H_D}}$, $N_2 = n_1 \otimes T$, $N_3 = n_2 \otimes T$ olduğunu biliyoruz.

i) Ayrıca $K_1(s) = K = \|T'\|_{H_D}$ olduğundan $N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_{H_D}}$ için $T' = KN_1$ elde edilir.

ii) Şimdi $N_1' = \kappa N_2$ olduğunu gösterelim:

$N_1 \otimes \bar{T} = t$ için elde edilen $t \otimes T = N_1$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$N_1' = t' \otimes T + t \otimes T'$$

elde edilir. Buradan $t' = \kappa n_1$ eşitliği kullanılırsa

$$N_1' = \kappa n_1 \otimes T$$

bulunur. Burada (4.8) eşitliğindeki $N_2 = n_1 \otimes T$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$N_1' = \kappa N_2$$

elde edilir.

iii) Şimdi de $N_2' = -\kappa N_1 + \tau N_3$ olduğunu gösterelim: (5.8) denklemi ile kabul edilen $N_2 = n_1 \otimes T$ eşitliğinin türevini alalım:

$$N_2' = n_1' \otimes T + n_1 \otimes T'$$

bulunur. Burada γ eğrisinin Frenet formüllerinden olan $n_1' = -\kappa t + \tau n_2$ eşitliği yerine yazılır ve gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} N_2' &= (-\kappa t + \tau n_2) \otimes T \\ &= -\kappa(t \otimes T) + \tau(n_2 \otimes T) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $N_1 = t \otimes T$ ve $N_3 = n_2 \otimes T$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$N_2' = -\kappa N_1 + \tau N_3$$

bulunur.

iv) Son olarak $N_3' = -\tau N_2$ olduğunu gösterelim: Bunun için $N_3 = n_2 \otimes T$ eşitliğinin türevini alınırsa;

$$N_3' = n_2' \otimes T + n_2 \otimes T'$$

elde edilir. $n_2' = -\tau n_1$ eşitliği yerine yazılır ve gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} N_3' &= -\tau n_1 \otimes T \\ &= -\tau(n_1 \otimes T) \end{aligned}$$

olup, burada $N_2 = n_1 \otimes T$ yerine yazılırsa,

$$N_3' = -\tau N_2$$

elde edilir. Böylece β non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisi için Serret-Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 5.2 $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_D$ eğrisi $\beta(s) = s + s^2 e_1 + \sin s e_2 + \cos s e_3$ olarak verilsin.

Bu eğrinin Frenet elemanlarını ve Frenet formüllerini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle β eğrisinin birim hızlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\beta'(s) = 1 + 2s e_1 + \cos s e_2 - \sin s e_3$$

eşitliğinden

$$\|\beta'(s)\|_{H_D} = \sqrt{\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_{H_D}} = 1$$

olup β birim hızlıdır. Bu durumda

$$T(s) = \beta'(s) = 1 + 2s e_1 + \cos s e_2 - \sin s e_3$$

olarak yazılır. Ayrıca buradan,

$$T'(s) = \beta''(s) = 2e_1 - \sin s e_2 - \cos s e_3$$

ve

$$\begin{aligned} \|T'(s)\|_{H_D} &= \sqrt{\langle T'(s), T'(s) \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(T'(s) \otimes \overline{T'(s)} + \overline{T'(s)} \otimes T'(s) \right)} \\ &= \sqrt{T'(s) \otimes \overline{T'(s)}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{4 + \sin^2 s + \cos^2 s}$$

$$= \sqrt{5}$$

eşitlikleri elde edilir. β eğrisinin birinci eğriliğinin tanımı

$$K = \|T'(s)\|_{H_D}$$

olduğundan dolayı $K = \sqrt{5}$ dir. Ayrıca $N_1 = \frac{T'}{\|T'\|_{H_D}}$ tanımı gereği,

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 - \sin s e_2 - \cos s e_3)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\sin s e_2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\cos s e_3$$

elde edilir. Ayrıca, $t = N_1 \otimes \bar{T}$ eşitliğini sağlayan t vektörünü teğet kabul eden (örnek 4.1) γ eğrisinin Frenet vektörleri n_1 ve n_2 olmak üzere, $N_2 = n_1 \otimes T$ ve $N_3 = n_2 \otimes T$ olduğundan;

$$N_2 = n_1 \otimes T$$

$$= (-\cos s e_2 + \sin s e_3) \otimes (1 + 2s e_1 + \cos s e_2 - \sin s e_3)$$

kuaterniyon çarpımı hesaplanırsa N_2

$$N_2 = -\cos s e_2 + \sin s e_3$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$N_3 = n_2 \otimes T$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}e_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin s e_2 + \frac{-2}{\sqrt{5}}\cos s e_3 \right) \otimes (1 + 2s e_1 + \cos s e_2 - \sin s e_3)$$

kuaterniyon çarpımı hesaplanırsa N_3 vektörü

$$N_3 = \frac{-1}{\sqrt{5}}e_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin s e_2 + \frac{-2}{\sqrt{5}}\cos s e_3$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 5.5 deki Frenet formülleri kullanılırsa β eğrisinin Frenet Formülleri matris formunda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}.$$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, dual kuaterniyonlar kavramı yeni bir bakış açısı ile ele alınmış ve yeniden tanımlanmıştır. Bu tanım ile birlikte dual kuaterniyonlar uzayı, non-izotropik dual kuaterniyonlar ve izotropik dual kuaterniyonlar olarak iki kısım halinde incelenmiştir. Pure dual kuaterniyonlar (izotropik dual kuaterniyonlar) yaptığımız bu çalışma ile detaylı bir şekilde incelenmiş ve $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayına izomorf olduğu gösterilmiştir. Yine yaptığımız bu tanım yardımıyla, izotropik dual kuaterniyonik eğri kavramı tanıtılarak izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet vektörleri ve formülleri elde edilmiştir. Böylece, elde edilen Serret-Frenet formülleri kullanılarak non-izotropik dual kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet vektörleri ve formülleri bulunmuştur.

$\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında, Frenet elemanları $V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)$ ve birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri sırasıyla $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ olan bir α eğrisinin Serret-Frenet formülleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} V_1'(s) \\ V_2'(s) \\ V_3'(s) \\ V_4'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & k_3(s) \\ 0 & 0 & -k_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

ile verilmişken, [39], $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayına izomorf olan H reel kuaterniyonlar uzayında, H^p uzaysal reel kuaterniyon uzayında alınan bir uzaysal reel kuaterniyonik eğrinin Frenet elemanları yardımı ile [4] nolu çalışmada Bharathi ve Nagaraj tarafından elde

edilen T, N_1, N_2, N_3 Frenet vektörleri ve K, κ ve $\tau - K$ eğriliklerine sahip olan bir β birim hızlı eğrisinin Serret-Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & (\tau - K) \\ 0 & 0 & -(\tau - K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Diğer taraftan; G^4 uzayında, Frenet elemanları T, N, B_1, B_2 ve birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri sırasıyla $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ olan bir α eğrisinin Serret-Frenet formülleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

ile verilmişken, [27], G^4 Galile uzayına izomorf olduğunu belirttiğimiz H_D dual kuaterniyonlar uzayında, H_D^δ izotropik dual kuaterniyon uzayında alınan bir izotropik dual kuaterniyonik eğrinin Frenet elemanları yardımı ile elde ettiğimiz T, N_1, N_2, N_3 Frenet vektörleri ve K, κ ve τ eğriliklerine sahip olan bir β birim hızlı eğrisinin Serret-Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

şeklinde elde edilmiştir. Böylece, G^4 uzayında bir α eğrisi için elde edilen Serret-Frenet formüllerinde α eğrisinin $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ ile verilen birinci, ikinci ve üçüncü eğrilik fonksiyonları ile H_D non-izotropik dual kuaterniyonik β eğrisi için bulunan K eğriliği ve H_D^δ izotropik dual kuaterniyonik γ eğrisi için bulunan κ, τ eğrilikleri karşılaştırıldığında aşağıdaki ilişkinin olduğu görülmüştür:

$$k_1(s) = K ,$$

$$k_2(s) = \kappa ,$$

$$k_3(s) = \tau .$$

Ayrıca, bu eşitliklerin sağlandığı örnek 2.1 ile örnek 5.2 karşılaştırılarak teyid edilmiştir.

Sonuç olarak; tezimizde elde edilen bulgular, birim hızlı olarak aldığımız γ izotropik dual kuaterniyonik eğrisi ve β non-izotropik dual kuaterniyonik eğrisi kullanılarak bulunmuştur. Bir sonraki hedefimiz, bu çalışmayı genelleştirerek, birim hızlı olmayan eğrilerle konuyu tekrar ele almaktır. Bir diğer hedefimiz ise, β eğrisinin Frenet elemanlarını hesaplarken kullanmış olduğumuz, κ ve τ pure uzaydaki bir γ eğrisinin eğriliklerini kullanmak yerine, pure olmayan bir β eğrisi ile bu eğrinin izdüşümü olan bir $\beta^\perp$ eğrisinin Frenet elemanları arasındaki ilişkiyi bularak sonuçlarını incelemektir.

KAYNAKLAR

- [1] Hamilton, W. R., (1899). Elements of Quaternions, I, II and III, Chelsea, New York.
- [2] Hacısalihoğlu, H.H., (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara.
- [3] Nagaraj, M. ve Bharathi, K., (1985). "Geometry of Quaternionic and Pseudo Quaternionic Multiplications", Indian J. Pure Appl. Math., 16(7): 741-756,.
- [4] Bharathi, K. ve Nagaraj M., (1987). "Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae", Indian J. Pure. Appl. Math., 18(6): 507-511.
- [5] Karadağ, M. ve Sivridağ A. İ.,(1997). "Tek değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri", Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 13(1-2): 23-36.
- [6] Karadağ, M. ve Sivridağ A. İ., (1997). "Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri için Karakterizasyonlar", Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 13(1-2): 37-53.
- [7] Güngör, M. A. ve Tosun, M., (2010). "Some Characterizations of Quaternionic Rectifying Curves", The International Conference Differential Geometry and Dynamical Systems, University Politehnica of Bucharest, 24-28 August 2010, Bucharest.
- [8] Soyfidan, T. ve Güngör, M.A., (2012). "On the Quaternionic Rectifying Curves in Semi Euclidean Space E_2^4 ", 1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 3-7 September 2012, Prishtine.
- [9] Soyfidan, T. ve Güngör, M.A.,(2011). "Kuaterniyonik İnvolut Evolut Eğri Çiftleri Üzerine", IX. Ulusal Geometri Sempozyumu, 7-10 Haziran 2011, Samsun.
- [10] Soyfidan, T. ve Güngör, M.A.,(2012). "On the Quaternionic Involute Evolute Curves in Semi Euclidean Space", X. Ulusal Geometri Sempozyumu, 13-16 Haziran 2012, Balıkesir.
- [11] Gök, İ., Okuyucu, O.Z., Kahraman, F. ve Hacısalihoğlu, H.H., (2011) "On the Quaternionic B_2 slant helices in the Euclidean space E^4 ", Adv. Appl. Clifford Alg., 21:707–719.

- [12] Kahraman, F., Gök, İ. ve Hacısalihoğlu, H.H., (2012) "On the Quaternionic B_2 slant helices in the Semi Euclidean space E_2^4 ", Applied Mathematics and Computation, 218:6391–6400.
- [13] Cho, E., (1998). "De-Moivre's Formula for Quaternions", Appl. Math. Lett. 11(6):33-35.
- [14] Meral, M., (2009). "Kuaterniyonlara Ait Matrisler İçin De Moivre ve Euler Formülleri", Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [15] Ward, J.P., (1997). Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications, Academic Publishers, London.
- [16] Eberly, D., (2010). Quaternion Algebra and Calculus, Geometric Tools, LLC.
- [17] Girard, P. R., (2007). Quaternions, Clifford Algebras Relativistic Physics. Birkhäuser Verlag GmbH.
- [18] Lounesto, P., (1997). Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] Conway, H.C. ve Smith, A.S., (2003). On Quaternions and Octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry, A. K. Peters, Natick.
- [20] Majernik, V. (1994). "Basic Space-Time Transformations expressed by means of two-component Number Systems", Acta Phys. Pol. A., 86(1): 291-295.
- [21] Majernik, V. (2006) "Quaternion formulation of the Galilean space-time transformation", Acta Phy. Slovaca, 56(1): 9-14.
- [22] Yaylı, Y. ve Tutuncu, E.E., (2009). "Generalized Galilean transformations and Dual Quaternions", Scientia Magna, 56(1): 94-100.
- [23] Ercan, Z. ve Yüce, S. (2011). "On Properties of the Dual Quaternions", European Journal of Pure and Applied Mathematics, 4(2): 142-146.
- [24] Yaglom, I.M., (1979). A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag, New York.
- [25] Sipus, Z.M., (2008), Ruled Weingarten Surfaces in the Galilean Space, Periodica Mathematica, Hungarica, 56(2): 213-225.
- [26] Röschel, O., (1984). Die Geometrie des Galileischen Raumes, Habilitationsschrift, Leoben.
- [27] Yılmaz, S., (2010). "Construction of the Frenet-Serret Frame of a curve in 4D Galilean Space and some applications", International Journal of the Physical Sciences, 5:1284-1289.
- [28] Kou, K.L. ve Xia, Y.H., (2017). "Linear Quaternion Differential Equations: Basic Theory and Fundamental Results", arXiv:1510.02224v5 [math.CA].
- [29] Xu, D. ve Mandic, D.P, (2015). "The Theory of Quaternion Matrix Derivatives", IEEE Transaction on Signal Processing, 63(6): 1543-1556.

- [30] Chou, J.C.K, (1992). "Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 8(1): 53-64.
- [31] Dağdeviren A. ve Yüce, S., (2017). "Dual Quaternions and Dual Quaternionic Curves" 11th International Conference on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics (ICCAA-11), 7-11 August 2017, Ghent.
- [32] Dağdeviren, A. ve Yüce, S., (2018), "Dual Quaternions and Dual Quaternionic Curves". Filomat, (Accepted).
- [33] Hacısalihoğlu, H., H., (1998). Diferansiyel Geometri, 3. Baskı, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
- [34] Kühnel, W., (2006), Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, 2nd edition, American Mathematical Society.
- [35] Yüce, S., (2017). Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, Pegem Akademi, 1. Baskı, Ankara.
- [36] Williams, MZ. ve Stein F.,M., (1964). "A triple product of vectors in four-space". Math Mag; 37: 230-235.
- [37] Hollasch, S., R., (1991). Four-space visualization of 4D objects. MSc, Arizona State University, Phoenix, Arizona.
- [38] Alessio, O., (2009), "Diferential geometry of intersection curves in $\mathbb{R}^4$ of three implicit surfaces", Comput Aided Geom D., 26: 455-471.
- [39] Gluck, H., (1967), "Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space", American Mathematical Monthly, 73(7): 699-704.

ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklid uzayı ile ilgili temel kavramlar, tanım ve teoremler ile ilgili bilgiler verilecektir. Bu bölüm hazırlanırken [33-39] nolu kaynaklar kullanılmıştır.

A-1 Afin Uzay

Tanım A.1 $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu

$$A_1) \quad \forall P, Q, R \in A \quad \text{için} \quad f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R).$$

$$A_2) \quad \forall P \in A \quad \text{ve} \quad \forall \alpha \in V \quad \text{için} \quad f(P, Q) = \alpha \quad \text{olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

$$P, Q \in A \quad \text{için} \quad f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \quad \text{biçiminde gösterilir.}$$

önergelerini sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir *afin uzay* denir. Burada A_1 ve A_2 ye sırası ile 1. ve 2. *Afin aksiyomu* adı verilir.

Örnek A.1 $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = \mathbb{R}^n$ olsun, $\mathbb{R}^n$ sıralı n -lilerin kümesi $\mathbb{R}^n$ standart vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzaydır.

Tanım A.2 V , n -boyutlu bir vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in A \quad \text{noktaları için} \quad \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\} \quad \text{kümesi } V \text{ nin bir bazı ise}$$

$$\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad \text{nokta } (n+1)\text{-lisine, } A \text{ afin uzayının bir } \textit{afin çatısı} \text{ denir. Burada } P_0$$

noktasına *çatının başlangıç noktası* denir ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere P_i noktalarına da *çatının birim noktaları (uç)* denir. V vektör uzayının boyutu n ise A ya n -boyutlu *afin uzay* denir, [33-35].

Tanım A.3 A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu afin uzay ve $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ise A da bir afin çatı olsun. Bu durumda $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi V vektör uzayının bir bazı olup $\forall P \in A$ noktası için $\overrightarrow{P_0P} \in V$ olduğundan $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0P_i}$, $a_i \in F$ yazılabilir. Eğer x_i fonksiyonu

$$x_i : A \rightarrow F$$

$$P \rightarrow x_i(P) = a_i, 1 \leq i \leq n$$

şeklinde tanımlanırsa $\forall P \in A$ noktasına $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$ sıralı n -lisi karşılık gelir.

Diğer taraftan, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalarlerini ele alalım. $\forall i$ için $a_i \overrightarrow{P_0P_i} \in V$ olduğundan $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{\alpha} \in V$ vektörü elde edilir. İkinci afin aksiyomu A_2 gereğince $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0P_i}$ olacak şekilde bir tek $P \in A$ vardır.

Sonuç olarak, A afin uzayında her noktaya bir sıralı n -li ve her bir sıralı n -liye de bir nokta karşılık gelir. A afin uzayında bir P noktasına karşılık gelen sıralı n -liye $P \in A$ noktasının *afin koordinatları*, bu afin koordinatları tanımlamakta kullanılan x_i fonksiyonlarına *afin koordinat fonksiyonları* ve ayrıca $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ fonksiyonlarının sistemine bir *afin koordinat sistemi* denir.

Tanım A.4 A bir afin uzay ve V de A ile birleşen bir vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

reel değerli fonksiyonu $\forall x, y, z \in V$ için aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona *iç çarpım fonksiyonu* ve V uzayına da *iç çarpım uzayı* denir, [33-35].

i) Bilineerlik Aksiyomu:

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle$$

ii) Simetri Aksiyomu

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}.$$

Tanım A.5 A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına *Öklid uzayı* denir.

Örnek A.3 $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ sıralı n -lilerin kümesi $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzayı olduğu bilinmektedir.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpımı* denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına *n -boyutlu standart Öklid uzayı* denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım A.6 E^n uzayında alınan $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ noktaları için, $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ sistemi E^n uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine E^n de bir *Öklid çatı* veya *dik çatı* denir.

Tanım A.7 E^n bir afin uzay olduğundan $P_0 \in E^n$ için başlangıç noktası P_0 olan bir

$\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ afin çatısı vardır. $\forall P \in E^n$ noktası için $\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0 P_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$

yazılabilir. O halde,

$$x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow x_i(P) = a_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

olmak üzere $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat sistemi bulunabilir. Bu afin koordinat sistemine *Öklid (dik) koordinat sistemi* denir, [33-35].

Tanım A.8 d uzaklık fonksiyonu

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında *uzaklık fonksiyonu* ve $d(X, Y)$ reel sayısına da X ile Y noktaları arasındaki *uzaklık* denir.

A-2 Vektörel Çarpım

A.2.1 $\mathbb{R}^3$ Uzayında Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olmak üzere $\forall \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta}$ ile gösterilir ve $\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta} = \sum_{i=1}^3 \det(\vec{e}_i, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \vec{e}_i$ ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta} &= \det(\vec{e}_1, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \vec{e}_1 + \det(\vec{e}_2, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \vec{e}_2 + \det(\vec{e}_3, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \vec{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta} = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \vec{e}_1 + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \vec{e}_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \vec{e}_3$$

elde edilir. Böylece, $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

şeklindeki determinant ile hesaplanabilir, [33-35].

Not A.1

1. Burada tanımlanan determinant bir sanal determinanttir. Çünkü birinci satır $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörlerinden oluşmaktadır. Oysa determinant fonksiyonu kurallarına göre bütün elemanlar skaler olmak zorundadır.

2. İki vektörün vektörel çarpımı ile elde edilen vektör $\mathbb{R}^3$ de yeni bir vektördür.

Örnek A.4 $\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$ vektörleri için $\vec{e}_1 \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ ve $\vec{e}_3 \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ eşitlikleri sağlanır.

Vektörel Çarpımın Özellikleri:

1. $\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\alpha} = \sum_{i=1}^3 \det(\vec{e}_i, \vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \vec{e}_i = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$
2. $\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta} = \sum_{i=1}^3 \det(\vec{e}_i, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \vec{e}_i = -\sum_{i=1}^3 \det(\vec{e}_i, \vec{\beta}, \vec{\alpha}) \vec{e}_i = -\vec{\beta} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\alpha}$
3. $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ için $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\gamma}) + (\vec{\beta} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\gamma})$
4. $\vec{\gamma} \wedge_{\mathbb{R}^3} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (\vec{\gamma} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\alpha}) + (\vec{\gamma} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta})$
5. $\lambda \vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta} = \lambda (\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} (\lambda \vec{\beta}), \lambda \in \mathbb{R}$
6. $\vec{\alpha}$ ile $\vec{\beta}$ lineer bağımlı ise $\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^3} \vec{\beta} = \vec{0}$.

A.2.2 $\mathbb{R}^3$ Uzayında Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu

1. İki vektörün vektörel çarpımı her iki vektöre de dik olan bir vektördür.
2. İki vektörün vektörel çarpımı her iki vektöre de dik olan ve boyu bu iki vektör üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşit yeni bir vektördür.

$$\|\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\| \sin \theta .$$

A.2.3 $\mathbb{R}^4$ Uzayında Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ olmak üzere $\forall \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in \mathbb{R}^4$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^4} \vec{\beta} \wedge_{\mathbb{R}^4} \vec{\gamma}$ ile gösterilir ve

$$\vec{\alpha} \wedge_{\mathbb{R}^4} \vec{\beta} \wedge_{\mathbb{R}^4} \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır. Bu çarpıma bazı kaynaklarda *ternary çarpım* adı da verilir, [36,37].

A-3 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar

A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. $P \in A$ noktası ve $\vec{v} \in V$ vektörü için $(P, \vec{v}) = \vec{v}_P$ ikilisine A afin uzayında bir *tanjant vektör* denir.

$P \in A$ noktasının tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir ve

$$T_A(P) = \left\{ \vec{v}_P = (P, \vec{v}) : P \in A, \vec{v} \in V \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım A.9 $T_A(P)$ kümesi üzerinde toplama işlemi, $\forall \vec{v}_P, \vec{u}_P \in T_A(P)$ için

$$\oplus : T_A(P) \times T_A(P) \rightarrow T_A(P)$$

$$(\vec{v}_P, \vec{u}_P) \rightarrow \vec{v}_P \oplus \vec{u}_P = (P, \vec{v}) \oplus (P, \vec{u})$$

$$= (P, \vec{v} + \vec{u})$$

$$= (\vec{v} + \vec{u})_P = \vec{v}_P + \vec{u}_P$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım A.10 $T_A(P)$ kümesi üzerinde skaler ile çarpma işlemi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{v}_P \in T_A(P)$ için

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{R} \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ (\lambda, \vec{v}_P) &\rightarrow \lambda \odot \vec{v}_P = \lambda \odot (P, \vec{v}) \\ &= (P, \lambda \vec{v})\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç A.1 $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya A afin uzayının P noktasındaki *tanjant vektörlerinin uzayı* veya kısaca *tanjant uzay* denir.

A afin uzayı E^n olarak alınırsa, yani $A = E^n$ alınırsa, $\{T_{E^n}(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayı olur. Bu uzayın standart bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_P \right\}$ dır.

A-4 Vektör Alanları ve Vektör Alanları Uzayı

$\forall P \in E^n$ noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$ ile gösterilsin.

$$\begin{aligned}\pi : \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) &\rightarrow E^n \\ \vec{v}_P &\rightarrow \pi(\vec{v}_P) = P\end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $\pi \circ X : E^n \rightarrow E^n$ özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$\begin{aligned}X : E^n &\rightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) \\ P &\rightarrow X(P) = X_P\end{aligned}$$

dönüşümüne E^n de bir *vektör alanı* denir. Diğer bir ifade ile, E^n üzerindeki bir X vektör alanı, $\forall P \in E^n$ noktasına $T_{E^n}(P)$ nin bir X_P tanjant vektörünü karşılık getiren bir fonksiyon olarak düşünülebilir.

Tanım A.11 E^n de bulunan bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(E^n)$ ile gösterilir ve

$$\chi(E^n) = \left\{ X \mid X : E^n \xrightarrow{\text{örten}} \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) \right\} \text{ ile tanımlanır.}$$

Tanım A.12 $\chi(E^n)$ kümesi üzerinde toplama işlemi, $\forall X, Y \in \chi(E^n)$ ve $\forall P \in E^n$ için

$$\oplus : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \rightarrow \chi(E^n)$$

$$(X, Y) \rightarrow (X \oplus Y)(P) = \vec{X}_P + \vec{Y}_P$$

olarak tanımlanır.

Tanım A.13 $\chi(E^n)$ kümesi üzerinde skaler ile çarpma işlemi, $\forall X \in \chi(E^n), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ve $\forall P \in E^n$ için

$$\odot : \mathbb{R} \times \chi(E^n) \rightarrow \chi(E^n)$$

$$(\lambda, X) \rightarrow (\lambda \odot X)(P) = \lambda \odot X_P$$

olarak tanımlıdır.

Sonuç A.2 $\{\chi(E^n), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya vektör

alanlarının uzayı denir. Bu uzayın standart bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ dır.

A-5 Yöne Göre Türev ve Kovaryant Türev

Tanım A.14 $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in E^n$ olsun. O halde,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

limiti mevcut ise f ye $a \in E^n$ noktasında türevlenebilirdir (diferansiyellenebilirdir) denir.

Tanım A.15 Belirli bir $a \in E^n$ noktasında türevlenebilen reel değerli fonksiyonların kümesi $C(a, \mathbb{R})$ ile gösterilir. $\forall a \in E^n$ için $f \in C(a, \mathbb{R})$ ise f ye E^n de diferensiyellenebilirdir denir. E^n de türevlenebilir fonksiyonların kümesi $C(E^n, \mathbb{R})$ ile gösterilir, [33,35].

Tanım A.16 $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun $\vec{v}_p$ tanjant vektörü yönündeki türevi $\vec{v}_p[f]$ ile gösterilir ve

$$\vec{v}_p[f] = \frac{d}{dt} \left[f(P + t\vec{v}) \right] \Big|_{t=0}$$

ile tanımlanır.

Tanım A.17 $X \in \mathcal{X}(E^n)$ ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun. $\forall P \in E^n$ noktası için $(X[f])(P) = \vec{X}_P[f]$ ile tanımlı $X[f] \in C(E^n, \mathbb{R})$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevi denir.

Tanım A.18 $\alpha'(t)[f] = D_{\alpha'(t)} f$ türevine $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\alpha(t)$ eğrisi yönündeki *yöne göre türevi* veya eğriye göre *kovaryant türevi* denir.

A-6 Bir Vektör Alanının Bir Diğer Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi

Tanım A.19 İki vektör alanı $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{X}(E^n)$ olarak verilsin. $P \in E^n$ noktası için $X_P, Y_P \in T_{E^n}(P)$ olmak üzere, eğer $x_i, y_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^∞ – sınıfından ise $X, Y \in \mathcal{X}(E^n)$ vektör alanları da C^∞ – sınıfındandır denir.

Tanım A.20 Y diferensiyellenebilir vektör alanının X_P tanjant vektörü yönündeki türevi

$$Y(P + t\vec{X})'(0) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(P + tX) - Y(P)}{t} \right)$$

şeklinde tanımlanır ve $D_X Y$, $D_X Y|_P$ veya $\nabla_X Y$ ile gösterilir.

Tanım A.21 Y diferensiyellenebilir vektör alanının X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi

$$\begin{aligned} D: \chi(E^n) \times \chi(E^n) &\rightarrow \chi(E^n) \\ (X, Y) &\rightarrow D_X Y: E^n \rightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) \\ P &\rightarrow D_X Y|_P \end{aligned}$$

şeklinde olup $D_X Y|_P = D_{X_P} Y_P = (X_P[y_1], X_P[y_2], \dots, X_P[y_n])$ ile tanımlanır.

Burada D operatörüne $\chi(E^n)$ de bir *konneksiyon* adı verilir, [33,35].

A-7 Kotanjant Vektörler ve Kotanjant Uzaylar

Tanım A.22 $T_{E^n}(P)$ uzayı $P \in E^n$ noktasındaki tanjant uzay olsun. $T_{E^n}(P)$ uzayının dual uzayı $T_{E^n}^*(P)$ olmak üzere, $T_{E^n}^*(P)$ dual uzayına *kotanjant uzay* denir ve bu uzayın her bir elemanına da bir *kotanjant vektör* adı verilir. Bu uzay,

$$\begin{aligned} T_{E^n}^*(P) &= \left\{ \overrightarrow{V_P}^* \mid \overrightarrow{V_P}^* = (P, \vec{v}^*), \vec{v}^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \overrightarrow{V_P}^* \mid \overrightarrow{V_P}^*: T_{E^n}(P) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $T_{E^n}^*(P) = \{P\} \times (\mathbb{R}^n)^*$ olarak yazılabilir.

Tanım A.23 $T_{E^n}^*(P)$ üzerinde toplama işlemi, $\forall \overrightarrow{v_p}^*, \overrightarrow{w_p}^* \in T_{E^n}^*(P)$ için

$$\begin{aligned} \oplus: T_{E^n}^*(P) \times T_{E^n}^*(P) &\rightarrow T_{E^n}^*(P) \\ (\overrightarrow{v_p}^*, \overrightarrow{w_p}^*) &\rightarrow \overrightarrow{v_p}^* \oplus \overrightarrow{w_p}^* = (P, \vec{v}^* + \vec{w}^*) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\alpha \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $(\vec{v}^* + \vec{w}^*)(\alpha) = \vec{v}^*(\alpha) + \vec{w}^*(\alpha)$ dir.

Tanım A.24 $T_{E^n}^*(P)$ üzerinde skaler ile çarpma işlemi, $\forall \overrightarrow{v_p}^* \in T_{E^n}^*(P)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \odot: \mathbb{R} \times T_{E^n}^*(P) &\rightarrow T_{E^n}^*(P) \\ (\lambda, \overrightarrow{v_p}^*) &\rightarrow \lambda \odot \overrightarrow{v_p}^* = \lambda \odot (P, \vec{v}^*) = (P, \lambda \vec{v}^*) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç A.3 $\{T_{E^n}^*(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya kotanjant uzay denir. Ayrıca, $\text{boy}T_{E^n}^*(P) = \text{boy}T_{E^n}(P) = n$ dir.

A-8 Eğriler Teorisi

Tanım A.25 $I \subseteq \mathbb{R}$ ve $I = [a, b]$ olsun.

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n de bir *eğri* denir. Burada I alt kümesine α *eğrisinin parametre aralığı* ve $t \in I$ reel sayısına da α *eğrisinin parametresi* denir. Ayrıca (I, α) ikilisine de *eğrinin koordinat komşuluğu* denir. Bir eğri $\alpha(I) \subset E^n$ şeklinde veya kısaca (α) ile gösterilir, [39].

Tanım A.26 Bir M eğrisi, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

ile tanımlı fonksiyona M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre *skalar hız fonksiyonu*, $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki *skalar hızı* ve $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \Big|_{\alpha(t)}$ vektörüne de M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki *hız vektörü* denir.

Tanım A.27 Bir M eğrisi, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine *birim hızlı eğri* denir. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğunda birim hızlı ise $s \in I$ parametresine *eğrinin yay parametresi* denir, [39].

Tanım A.28 Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir.

Serret-Frenet Vektörleri

Bir M eğrisi, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü $\alpha'(t)|_{\alpha(t)}$ ise E^n deki Öklid koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere

$$\alpha'(t)|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\alpha' : M \rightarrow \bigcup T_M(\alpha(t))$$

$$\alpha(t) \rightarrow \alpha'(t)|_{\alpha(t)}$$

1-1 ve örten olduğundan $\alpha'(t) \in \chi(M)$ dir.

Ayrıca D , E^n de kovaryant türev operatörü olmak üzere

$$D : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \rightarrow \chi(E^n)$$

dönüşümü $M \subset E^n$ alt kümesine kısıtlanırsa,

$$D|_{\chi(M)} : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

olmak üzere, $D_{\alpha'(t)} = \frac{d}{dt}$ ile gösterilsin. Buradan $D_{\alpha'} \alpha' = \frac{d\alpha'}{dt}$ eşitliği yazılır. Çünkü

$$D_{\alpha'} \alpha' = \left(\alpha' \left[\frac{d\alpha_1}{dt} \right], \dots, \alpha' \left[\frac{d\alpha_n}{dt} \right] \right)$$

$$= \left(\frac{d^2 \alpha_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} \right)$$

$$= (\alpha_1'', \dots, \alpha_n'')$$

$$= \alpha''(t) \in \chi(M)$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse,

$$D_{\alpha'}\alpha' = \alpha''$$

$$D_{\alpha''}\alpha'' = \alpha'''$$

$\vdots$

$$D_{\alpha^{(n-1)}}\alpha^{(n-1)} = \alpha^{(n)}$$

elde edilir. Buradan $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n)} \in \chi(M)$ olduğu açıktır.

Ayrıca $\alpha'(t)|_{\alpha(t)}, \alpha''(t)|_{\alpha(t)}, \dots, \alpha^{(n)}(t)|_{\alpha(t)} \in T_M(\alpha(t))$ bulunur. Bu türev vektör alanlarına *eğrinin yüksek mertebeden türevleri* denir. Bu vektörlerin her biri vektör alanı veya verilen bir $\alpha(t) \in M$ noktasında bir tanjant vektörüdür.

Bu vektör alanlarından r -tanisinin lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. Yani diğer bir ifade ile $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)} \in \chi(M)$ olmak üzere $S = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ lineer bağımsız olsun. O halde, $\{\alpha^{(r+1)}, \dots, \alpha^{(n)}\} \in S_p\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ yazılabilir. Ayrıca, $\text{boy} E^n = \text{boy} \chi(E^n) = \text{boy} \chi^*(E^n) = n$ ve $S = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ lineer bağımsız olduğundan bu S sistemine Gram-Schmidt metodu uygulanabilir.

$$E_1 = \alpha'$$

$$E_2 = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle_{\mathbb{R}^n}}{\langle E_1, E_1 \rangle_{\mathbb{R}^n}} E_1$$

$\vdots$

$$E_r = \alpha^{(r)} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\langle \alpha^{(r)}, E_k \rangle_{\mathbb{R}^n}}{\langle E_k, E_k \rangle_{\mathbb{R}^n}} E_k$$

olmak üzere $\{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ sistemi bir ortogonal sistemdir. Buradan

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|}, V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|}, \dots, V_r = \frac{E_r}{\|E_r\|}$$

olmak üzere $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemi elde edilir. Yani $\langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$ dir.

Tanım A.29 Bir M eğrisi, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$, $r < n$ kümesi lineer bağımsız iken $\{\alpha^{(r+1)}, \dots, \alpha^{(n)}\} \in S_p\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ olmak üzere S den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal vektör alanları sistemine M nin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki *Serret-Frenet r -ayaklısı* veya *Frenet çatısı* denir. Burada $\forall \alpha(t) \in M$ için V_i , $1 \leq i \leq r$, vektörlerinin her birine bir *Frenet vektörü* denir, [39].

A-9 E^n de Serret-Frenet Formülleri ve Eğrilikler

Tanım A.30 Bir M eğrisi, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun.

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r,$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

şeklinde tanımlı olan k_i fonksiyonuna M eğrisinin i yinci eğrilik fonksiyonu, $k_i(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i yinci eğriliği adı verilir. Burada $V_i'(s)$ ifadesi, $V_i(s)$ Frenet vektörlerinin s ye göre türevidir.

Teorem A.1 Bir M eğrisi, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu eğrinin yay parametresi $s \in I$ olmak üzere, Serret-Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ve eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s)$, $1 \leq i < r$ ise

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s),$$

$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$$

dir. Bu formüllere *Frenet formülleri* denir. Bu formüller matris formunda

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} & 0 & k_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir, [39].

A-10 E^3 ve E^4 de Serret-Frenet Formülleri

Teorem A.2 Bir M eğrisi, E^3 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olsun. Bu halde,

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = T = \alpha'$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} = B = T \wedge_{\mathbb{R}^3} N$$

dir. Burada T, N, B vektörleri V_1, V_2, V_3 Frenet vektörleri için alışılmış gösterimlerdir, [33-35].

İspat $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı olduğundan $\|\alpha(s)\| = 1$ dir. Böylece $T = V_1 = \alpha'$ dür.

Buradan $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1$ yazılabilir. Bu eşitliğin s yay parametresine göre iki tarafının türevi alınırsa

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$$

veya

$$\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$N = V_2 = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

bulunur. Ayrıca, $B = T \wedge_{\mathbb{R}^3} N$ tanımlanırsa $\{T, N, B\}$ ortonormal sistemi elde edilir.

Gerçekten de;

$$\langle B, T \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle T \times N, T \rangle_{\mathbb{R}^3} = \det(T, N, T) = 0$$

$$\langle B, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle T \times N, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \det(T, N, N) = 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\|B(s)\| = \|T(s)\| \|N(s)\| \sin 90^\circ = 1$$

dir. Böylece $\|B(s)\| = \pm V_3(s)$ dir. Buna göre $\{T, N, B\}$ sistemi M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasında Frenet 3 – ayaklısıdır.

Tanım A.31 $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ şeklinde tanımlı κ fonksiyonu α eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* ve $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ reel sayısına da α nın $\alpha(s)$ noktasındaki *eğriliği* denir.

Sonuç A.4 $\forall s \in I$ için $\kappa(s) \geq 0$, $k_1 = \kappa$ dır.

Şimdi de T, N, B Frenet 3 – ayaklısının T', N', B' türevlerini araştıralım:

$$T' = a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B$$

$$N' = a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B$$

$$B' = a_{31}T + a_{32}N + a_{33}B$$

yazılabilir. $\{T, N, B\}$ nin ortonormal sistem olduğu kullanılarak a_{ij} katsayıları bulunabilir.

İ) $\langle T, T \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1$ olduğundan $\langle T', T \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ olup $a_{11} = 0$ elde edilir. Ayrıca $a_{12} = \langle T', N \rangle_{\mathbb{R}^3}$

ve $a_{13} = \langle T', B \rangle_{\mathbb{R}^3}$ yazılabilir. $N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ olduğundan $T' = \kappa N$ yazılabilir. O halde,

$$a_{12} = \langle T', N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \kappa N, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \kappa$$

$$a_{13} = \langle T', B \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \kappa N, B \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$$

II) $\langle N, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1$ olduğundan $\langle N', N \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ olup $a_{22} = 0$ elde edilir.

III) $\langle B, B \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1$ olduğundan $\langle B', B \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ olup $a_{33} = 0$ elde edilir.

IV) $\langle T, B \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ olduğundan $\langle T', B \rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle T, B' \rangle_{\mathbb{R}^3} = a_{13} + a_{31} = 0$ yazılabilir. $a_{13} = 0$ olduğundan $a_{31} = 0$ bulunur. $a_{31} = 0$ ve $a_{33} = 0$ bulunduğuundan $B' = a_{32}N$ elde edilir.

Tanım A.32 $a_{32} = -\tau$ olmak üzere $\tau = \tau(s)$ fonksiyonuna α nın *burulması (torsiyon veya ikinci eğriliği)* adı verilir.

Sonuç A.5 $B' = a_{32}N$ eşitliğinde $a_{32} = -\tau$ yerine yazılırsa $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ yazılır.

i) $\langle T, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ olduğundan $\langle T', N \rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle T, N' \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ yazılabilir. Buradan $a_{21} = \langle N', T \rangle_{\mathbb{R}^3}$ olmak üzere $a_{21} = -\kappa$ elde edilir.

ii) $\langle N, B \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ olduğundan $\langle N', B \rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle N, B' \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ yazılabilir. Buradan $a_{23} = \langle N', B \rangle_{\mathbb{R}^3}$ ve $\tau = -\langle N', B \rangle_{\mathbb{R}^3}$ olmak üzere $a_{23} = \tau$ elde edilir.

Sonuç olarak $N' = -\kappa T + \tau B$ elde edilir.

Böylece Teorem A.1 in $r = 3$ için özel yazılımı olan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem A.3 Serret-Frenet 3 -ayaklısı $\{T, N, B\}$ olan $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi $\kappa > 0$ eğrilikli ve τ burulmalı birim hızlı eğri olsun. Bu durumda,

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

geçerlidir. Bu formüllere *Frenet formülleri (denklemleri)* adı verilir.

Ayrıca, bu formüller matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

Tanım A.32 α, E^3 de birim hızlı bir eğri olsun. T, N, B vektör alanları ile κ, τ fonksiyonlarının herbirine α eğrisinin *Frenet elemanları* adı verilir.

Teorem A.4 α, E^3 de birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olsun. O halde,

$$\kappa = \|\alpha''\|, \quad \tau = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \times \alpha''' \rangle_{\mathbb{R}^3}}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dir.

Teorem A.3 e benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir, [33-35].

Teorem A.5 Bir M eğrisi, E^4 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olsun. Bu halde,

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = T = \alpha'$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} = B_1 = B_2 \wedge_{\mathbb{R}^4} T \wedge_{\mathbb{R}^4} N$$

$$V_4 = \frac{E_4}{\|E_4\|} = B_2 = -\frac{\alpha' \wedge_{\mathbb{R}^4} \alpha'' \wedge_{\mathbb{R}^4} \alpha'''}{\|\alpha' \wedge_{\mathbb{R}^4} \alpha'' \wedge_{\mathbb{R}^4} \alpha'''\|}$$

dir. Burada T, N, B_1, B_2 vektörleri V_1, V_2, V_3, V_4 Frenet vektörleri için alışılmış gösterimlerdir. Ayrıca $\wedge_{\mathbb{R}^4}$ çarpımı $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörel çarpımda kullanılan çarpım işlemidir.

Birim hızlı olan α eğrisinin eğrilikleri

$$k_1 = \|\alpha''\|$$

$$k_2 = \frac{\langle B_1, \alpha''' \rangle_{\mathbb{R}^4}}{k_1}$$

$$k_3 = \frac{\langle B_2, \alpha^{(4)} \rangle_{\mathbb{R}^4}}{k_1 k_2}$$

dir.

Serret-Frenet 4 -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ve eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ ise, bu durumda

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V_2'(s) = -k_1(s)V_1(s) + k_2(s)V_3(s)$$

$$V_3'(s) = -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s)$$

$$V_4'(s) = -k_3(s)V_3(s)$$

geçerlidir. Ayrıca bu formüller matris formunda

$$\begin{bmatrix} V_1'(s) \\ V_2'(s) \\ V_3'(s) \\ V_4'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & k_3(s) \\ 0 & 0 & -k_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir, [38, 39].

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ali DAĞDEVİREN
Doğum Tarihi ve Yeri : 11.01.1987, Araban
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : m.a.dagdeviren@gmail.com , adagdeviren@thy.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2018
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Ön Lisans	Uçak Teknolojisi	İstanbul Arel Üniversitesi	2018
Lise	Fen Bilimleri	Araban Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2015-Devam Ediyor	Türk Hava Yolları	Eğitmen
2006-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi	Öğrenci Asistanı

YAYINLARI

Makale

1. Dağdeviren A., Yüce, S., (2018). "Dual Quaternions and Dual Quaternionic Curves", Filomat, (Accepted).

Bildiri

1. Dağdeviren A., Yüce, S., (2018). "On the Dual Quaternionic Inclined Curves", XX. Geometrical Seminar, 20-23 May 2018, Vrnjacka Banja.
2. Dağdeviren A., Yüce, S., (2017). "Dual Quaternions and Dual Quaternionic Curves" 11th International Conference on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics (ICCAA-11), 7-11 August 2017, Ghent.
3. Dağdeviren A., Yüce, S., (2015). " D_1^n Dual Lorentzian Space" Seventh International Conference on Dynamic Systems and Applications & Fifth International Conference on Neural, Parallel, and Scientific Computations, Morehouse College, Atlanta, Georgia.
4. Dağdeviren A., Yüce, S., (2014). "On Special Dual Matrices" 38th Annual SEAM Southeastern Atlantic Sectional Conference, Florida Institute of Technology Florida.
5. Dağdeviren A., Yüce, S., (2014). "Dual Matrices with Lorentzian Matrix Multiplication" AMS Meeting, University of Tennessee, Atlanta.
6. Dağdeviren A., Yüce, S., (2013). "Some Properties of Lorentzian Matrix Multiplication", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2013), Istanbul.

Bilimsel Organizasyonları

1. "International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2013)", (Local Committee Member), 2-5 Jun 2013, Istanbul.
2. "13. Geometri Sempozyumu", Düzenleme Kurulu Üyesi, 27-30 Temmuz 2015, İstanbul.