

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM
TEOREMLERİ**

HAKAN ADIGÜZEL

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. AYDIN SEÇER**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM
TEOREMLERİ**

Hakan ADIGÜZEL tarafından hazırlanan tez çalışması 07.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTARA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Yusuf AVCI
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Samet Yücel KADIOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Burhaneddin İZGİ
İstanbul Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Akademik başarıları ve kişilikleriyle örnek alınacak çok değerli danışmanım Yıldız Teknik Üniversitesi öğretim üyesi sayın Doç.Dr. Aydın SEÇER ile eş danışmanım İstanbul Gelişim Üniversitesi öğretim üyesi sayın Prof.Dr. Mustafa BAYRAM 'a en derin saygılarımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca desteklerinden ötürü değerli arkadaşım Amasya Üniversitesi Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Süleyman ÖĞREKÇİ 'ye ve her zaman yanımda olan, her konuda maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme ve özellikle de sevgili eşim Ayşegül Çiğdem ADIGÜZEL 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2017

Hakan ADIGÜZEL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	3
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	4
BÖLÜM 3	
SALINIMLILIK KRİTERLERİ	11
3.1 Kesirli Mertebeden Fonksiyonel Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	11
3.2 Kesirli Mertebeden Doğrusal Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	21
3.3 Kesirli Mertebeden Söndürücü Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	36
3.4 Kesirli Mertebeden Fark Denklemlerin Salınımlılığı.....	49
3.5 Uygulamalar	57
BÖLÜM 4	
SONUÇ VE ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	71

SİMGE LİSTESİ

N	Doğal Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
$\in$	Elemanıdır
Γ	Gamma Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
D	Türev Operatörü
J	İntegral Operatörü
$\int_a^b$	Belirli İntegral
${}_a D_t^\alpha$	Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}_a^c D_t^\alpha$	Caputo Kesirli Türevi
D_t^α	Modifiye Riemann-Liouville Kesirli Türevi
D_-^α	Liouville Kesirli Türevi
Δ	Fark Operatörü
$\sum$	Toplam Operatörü
Δ^μ	Riemann-Liouville Kesirli Fark Operatörü
$\lim$	Limit
$\limsup$	Limit Supremum

**KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM
TEOREMLERİ**

Hakan ADIGÜZEL

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Aydın SEÇER

Eş Danışman: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, kesirli türev ve diferensiyel denklemlerin salınımlılığına yönelik tarihsel süreç kapsamlı bir şekilde anlatılmıştır. İkinci bölümde, amaca yönelik temel kavramlara değinilmiştir. Çalışmada kullanılacak olan Modifiye Riemann-Liouville, Liouville kesirli türev operatörü ve Riemann-Liouville kesirli fark operatörü tanımları bu bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş Riccati dönüşümleri, genelleştirilmiş Philos tipi çekirdekleri ve değişken dönüşümleri kullanılarak kesirli mertebeden denklem sınıflarının çözümleri için salınımlılık kriterleri kurulmuştur. Ayrıca elde edilen salınımlılık kriterlerini aydınlatıcı bazı örnekler sunulmuştur. Sonuncu bölümde ise sonuçlar ve bazı önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Salınımlılık, Salınımlılık Kriterleri, Kesirli Türev, Genelleştirilmiş Riccati Dönüşümü

**OSCILLATION THEOREMS FOR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

Hakan ADIGÜZEL

Department of Mathematical Engineering

Ph.D. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Aydın SEÇER

Co-Adviser: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introduction. In this section, we present the history of fractional derivatives and oscillation of differential equations, comprehensively. It is mentioned in the second chapter that the fundamental concepts related to the purpose of thesis. Definitions of Modified Riemann-Liouville, Liouville fractional derivative operator and Riemann-Liouville fractional difference operator to be used in the study are given in this section. In the third chapter, we establish oscillation criteria for the fractional differential equations by using generalized Riccati transformations, generalized Philos type kernels and variable transformations. Moreover, some illustrative examples are presented for the obtained oscillation criteria. In the last section, the conclusions and some suggestions are given.

Keywords: Oscillation, Oscillation Criteria, Fractional Derivative, Generalized Riccati Transformation.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Kesirli mertebeden türev, klasik türevin tamsayı olmayan mertebelere bir genelleştirilmesidir. Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü mertebeden türevlerinin nasıl alındığını biliyoruz, peki $1/2$ inci mertebeden türevini tanımlayabilir miyiz?

Bu soru ilk defa 1695'te L' Hopital tarafından bir mektupla Leibniz'e sorulmuştur ve bu konudaki çalışmaları da başlatmışlardır. Yaptıkları çalışmalardan Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville gibi diğer bilim insanları ilham alarak kesirli mertebeden türev üzerine çeşitli çalışmalar yapmışlardır ve bu konunun gelişimini önemli katkı sağlamışlardır [1-4]. Konunun önemi, geçen yüzyılda kendisine diğer bilim dallarında uygulamalar bulmasıyla giderek artmıştır. Örneğin, fizikte ve mühendislikte pek çok olayın kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerle modellenmesi, olayın daha iyi açıklanmasını sağlamıştır. Bu nedenle, kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümüne ve çözümünün davranışlarına yönelik güvenilir, etkin ve anlaşılır metot arayışları başlamıştır.

Kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin kalitatif özellikleri çok yoğun ilgi toplamıştır. Fakat bu denklemlerin bazı teorik kısıtlamaları ve zorlukları nedeniyle içinde bulunduğumuz elli yıla kadar çok geniş bir literatür oluşamamıştır. Kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin bazı kalitatif özellikleri üzerine son zamanlarda önemli çalışmalar yapılmaya başlanmıştır, bu çalışmalardan bazıları kaynaklarda verilmiştir [5-9]. Bu çalışmalara dikkat edildiğinde kesirli mertebeden denklemlerin çözümlerinin salınımlılık özelliklerinin gereken ilgiyi görmediği görülmektedir.

Diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ve salınımsızlığı kavramları ise ilk olarak J. Sturm [10] tarafından 1836 yılında verilmiştir. Sturm çalışmalarında ikinci mertebeden doğrusal diferensiyel denklemler için karşılaştırma ve ayrıştırma teoremlerini vererek ispatlamıştır. Daha sonraki süreçte, doğrusal ve doğrusal olmayan diferensiyel denklemler için Ksener, Fite, Wintner, Hartman, Kamanev, Philos, Atkinson ve Bolehorec, Wong... gibi matematikçiler salınımlılık kriterlerini her geçen gün biraz daha genellemiş ve yeni salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir [11-19].

Kesirli mertebeden denklemlerin salınımlılık özelliği için Grace ve arkadaşları [20], $0 < q \leq 1$ olmak üzere D_a^q Riemann-Liouville kesirli türevini, J_a^q Riemann-Liouville kesirli türevini göstermek üzere $i=1,2$, $x \neq 0$ ve $t \geq a$ için $xf_i(t, x) > 0$ kabulüyle

$$D_a^q x + f_1(t, x) = v(t) + f_2(t, x), \lim_{t \rightarrow a^+} J_a^{1-q} x(t) = b_1$$

şeklindeki diferensiyel denklemleri çalışmışlardır. Chen [21] ise D_-^α Liouville kesirli türevini göstermek üzere, $t > 0$ için

$$\left[r(t)(D_-^\alpha y)^\eta(t) \right] - q(t) f\left(\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha} y(v) dv \right) = 0$$

formundaki denklemleri göz önüne alarak bu teorideki çalışmaları başlatmışlardır ve araştırmacılarının dikkatini çekmişlerdir.

Bu çalışmada incelenecek olan denklem sınıfları için detaylı literatür taraması 3. Bölümde ayrıca verilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, araştırmacıların çoğu kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri, çözümün sınırlılığı, kararlılığı... vs gibi konuları incelemişlerdir [22-32]. Dikkat edildiğinde, az sayıda araştırmacının kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılık özelliklerini incelediği görülmektedir. Bu nedenle çalışmada kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin ve kesirli mertebeden fark denklemlerinin salınımlılık özellikleri üzerinde durulacaktır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, doğrusal olmayan diferensiyel denklem sınıflarının çözümlerinin salınımlılığıyla ilgilenilmiştir. Değişken dönüşümleri kullanarak kesirli mertebeden türevle tamsayı mertebeli türev arasında bir ilişki kurulmuştur. Bu ilişki ve genelleştirilmiş Riccati dönüşümü teknikleri kullanarak salınımlılık kriterleri elde edilmiştir.



BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Tanım [1]:

$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

Tanımdan kolayca $\Gamma(1) = 1$ eşitliği çıkar. Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biri

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.2)$$

eşitliğidir. Burada $n > 0$ doğal sayıları için,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

bulunur.

2.2. Lemma [4]:

$\Gamma(x)$ gamma fonksiyonu olmak üzere $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ dir.

2.3. Tanım [4]:

$p, q > 0$ reel sayıları için

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Beta Fonksiyonu denir. Beta Fonksiyonu ilk kez 1730 yılında L. Euler tarafından tanıtılmıştır.

2.4. Lemma [1]:

Γ gamma fonksiyonu, β beta fonksiyonunu göstermek üzere

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\beta(x, y) \quad (2.3)$$

eşitliği sağlanır.

S.F. Lacroix [33], $m \in N$ için $f(x) = x^m$ fonksiyonunun n 'inci mertebeden türevini gamma fonksiyonundan faydalanarak hesaplamasını göstermiştir. Türevi, kesirli türevlere genelleştirmek için aşağıdaki Lemma dan yararlanacağız.

2.5. Lemma [33]:

Bir $f(x)$ fonksiyonunun n 'inci türevi $D^n f$ olarak gösterilerek $n, m \in N$ ve $r \in R$ olmak üzere $n \leq m$ için,

$$D^n (rx^m) = r \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (2.4)$$

olur.

İspat:

$f(x) = rx^m$ fonksiyonunun x e göre n inci türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{D^n r x^m}{dx^n} &= r.m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n} \\
&= r \cdot \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} r x^{m-n}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada n in kesirli değerleri için gamma fonksiyonunun değerlerinin hesaplanabileceğinden dolayı bir fonksiyonun kesirli türevinden de söz edilebilir.

2.6. Tanım [1]:

$f, [a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ve $n \in N^+$ olsun. J_a^n integral operatörü

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. $m \in R, n \in N^+, m > n$ olsun. $f, [a, b]$ de sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve J integral operatörü olmak üzere

$$D^n f = D^m J^{m-n} f$$

sağlanır.

Özel olarak $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ seçilirse $D^{\frac{1}{2}} f = D' \left(J^{\frac{1}{2}} f \right)$ olur.

(2.4) eşitliğinde, n ve m doğal sayılarının yerine sırasıyla $\beta \leq \alpha$ reel sayıları alınırsa,

$$D^\beta (r x^\alpha) = r \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} x^{\alpha-\beta} \quad (2.5)$$

tanımı yapılabilir.

2.7. Örnek:

$f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ 'inci türevi için (2.2) eşitliğinde $r = \alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$D^{1/2}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} \quad (2.6)$$

bulunur.

Şimdi sırasıyla Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımını verelim.

2.8. Tanım [4]:

f , fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon ve

$n \in \mathbb{N}^+$, $n-1 < \alpha < n$ olsun. ${}_a D_t^\alpha$ türev operatörü

$${}_a D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır.

2.9. Tanım [4]:

f , n defa diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $n-1 < \alpha < n$ olsun. ${}_a^c D_t^\alpha$ Caputo türev operatörü,

$${}_a^c D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt$$

şeklinde tanımlanır.

2006 yılında Jumarie, Modifiye Riemann-Liouville türevi olarak bilinen kesirli türev tanımını vermiştir. Bu kesirli türev tanımının en önemli özelliklerinden biri, Leibniz kuralı ve bileşke fonksiyonunun türevinin tamsayı mertebeli türev tanımındakine benzer şekilde olmasıdır.

2.10. Tanım [34]:

α nci mertebeden modifiye Riemann-Liouville türevi

$$D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} (f(\xi) - f(0)) d\xi, & 0 < \alpha < 1, \\ (f^{(n)}(t))^{\alpha-n}, & 1 \leq n \leq \alpha < n+1 \end{cases}, \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır.

Modifiye Riemann-Liouville türevinin en önemli özelliği çarpım kuralı ve zincir kuralı özelliklerini sağlamasıdır. Bu özellikler sırasıyla

$$D_t^\alpha (f(t)g(t)) = g(t)D_t^\alpha f(t) + f(t)D_t^\alpha g(t) \quad (2.8)$$

$$D_t^\alpha f[g(t)] = f'_g[g(t)]D_t^\alpha g(t) \quad (2.9)$$

şeklindedir.

Çalışmalarımızda kullanacak olduğumuz bir diğer kesirli türev tanımı olan Liouville kesirli türev tanımı aşağıda verilmiştir.

2.11.Tanım [3]:

α nci mertebeden Liouville kesirli integral

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt$$

olarak tanımlanır.

2.12. Tanım [3]:

$\lceil \alpha \rceil = \min \{z \in \mathbb{Z} : z \geq \alpha\}$ tavan fonksiyonu olmak üzere, α nci mertebeden Liouville kesirli türev

$$(D_-^\alpha f)(x) = (-1)^{\lceil \alpha \rceil} \frac{d^{\lceil \alpha \rceil}}{dt^{\lceil \alpha \rceil}} (I_-^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} f)(x) = (-1)^{\lceil \alpha \rceil} \frac{1}{\Gamma(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} \frac{d^{\lceil \alpha \rceil}}{dt^{\lceil \alpha \rceil}} \int_x^\infty (t-x)^{\lceil \alpha \rceil - \alpha - 1} f(t) dt$$

olarak tanımlanır.

Liouville kesirli türev tanımına dikkat edilirse, $\alpha \in (0,1)$ için $G(t) = \int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} x(s) ds$ olarak alınırsa, $G'(t) = -\Gamma(1-\alpha)(D_-^\alpha x)(t)$ elde edilir.

Fiziksel olayların modellenmesinde, eğer çalışılan alan ayırık zaman aralıklarında gerçekleşiyorsa, bu durumda fark denklemleri kullanılır. Bu amaçla, aşağıda fark operatörü ve kesirli fark operatörünün tanımı verilmiştir.

2.13. Tanım [35]:

$a \in R$ için $N_a = N_0 + \{a\} = \{a, a+1, a+2, \dots\}$ ve $f : N_a \rightarrow R$ olmak üzere fark operatörü

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$

olarak tanımlanır.

Fark operatörü için çarpım ve bölüm kuralı aşağıda verilmiştir.

2.14. Teorem [36]:

$$a) \Delta(f(t)g(t)) = \Delta f(t)g(t) + f(t+1)\Delta g(t)$$

$$b) \Delta\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(t+1)}$$

eşitlikleri sağlanır.

2.15. Tanım [37]:

$a \in R$ için $N_a = N_0 + \{a\} = \{a, a+1, a+2, \dots\}$ ve $f : N_a \rightarrow R$ olmak üzere f fonksiyonunun $\nu > 0$ inci mertebeden kesirli toplamı

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t-s-1)^{\nu-1} f(s)$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilirse, $\Delta^{-\nu} f$, N_a dan $N_{a+\nu}$ ye tanımlıdır.

2.16. Tanım [37]:

m bir pozitif tamsayı, $m-1 < \mu < m$ ve $m = \lceil \mu \rceil$ olsun. $\nu = m - \mu$ alınır, f fonksiyonunun μ nci mertebeden kesirli fark operatörü

$$\Delta^{\mu} f(t) = \Delta^{m-\nu} f(t) = \Delta^m \Delta^{-\nu} f(t)$$

olarak tanımlanır

2.17. Tanım [38]:

Sıfırdan farklı bir $x(t)$ çözümü $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında keyfi sayıda, yeterince büyük sifıra sahipse bu aralıkta salınımlıdır, denir. Aksine, söz konusu çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfırlara sahipse bu aralıkta salınımsızdır denir.

2.18. Tanım [38]:

Göz önüne alınan diferensiyel denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise denkleme salınımlı denklem denir.

2.19. Örnek:

$x''(t) + x(t) = 0$ diferensiyel denkleminin $x_1(t) = \cos(t)$ ve $x_2(t) = \sin(t)$ şeklinde salınımlı çözümleri vardır.

2.20. Örnek:

$x''(t) - x(-t) = 0$ diferensiyel denkleminin $x_1(t) = \sinh(t)$ şeklinde salınımlı bir çözümü ve $x_2(t) = e^t + e^{-t}$ şeklinde salınımlı olmayan bir çözümü vardır.

Şimdi çalışmalarımızda çokca kullanılacak olan aşağıdaki iki lemma yı verelim.

2.21. Lemma [39]:

A ve B negatif olmayan reel sayılar ve $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{m}A + \frac{1}{n}B \geq A^{\frac{1}{m}} B^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.22. Lemma [39]:

A ve B negatif olmayan reel sayılar olsun. Bu durumda, $\lambda > 1$ için

$$\lambda AB^{\lambda-1} - A^{\lambda} \leq (\lambda-1)B^{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanır.

BÖLÜM 3

SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde bazı diferensiyel denklem sınıflarının çözümleri için salınımlılık kriterleri verilecektir.

3.1 Kesirli Mertebeden Fonksiyonel Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Bu kısımda, öncelikle literatürde bizi bu çalışmaya motive eden bazı çalışmalar verilecektir. Daha sonra incelenen denklem sınıfının salınımlılık özellikleri incelenecektir.

Q. Feng [40] ve arkadaşları $t \geq t_0 > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için,

$$D_t^\alpha (r(t)\psi(x(t))D_t^\alpha x(t)) + q(t)f(x(t)) = e(t)$$

şeklindeki kesirli mertebeden zorlayıcı terimli diferensiyel denklemleri çalışmışlardır. Burada D_t^α modifiye Riemann-Liouville kesirli türevini göstermektedir. Ayrıca $C^\alpha(X, Y)$ ile sürekli α mertebeden kesirli türevi bulunan $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonlarının kümesini göstermek üzere, $r \in C^\alpha([t_0, \infty), R^+)$, $q, e \in C([t_0, \infty), R)$ ve $\psi, f \in C(R, R)$ şeklindedir. Ayrıca her $x \neq 0$ ve bazı m pozitif sabit sayıları için $xf(x) > 0$ ve $0 < \psi(x) \leq m$ eşitsizlikleri sağlanmak üzere bazı salınımlılık kriterlerini elde etmişlerdir.

S. Ogrekci [41] bir çalışmasında $t \geq t_0 > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için,

$$D_t^\alpha (r(t)\psi(x(t))D_t^\alpha x(t)) + F(t, x(t), x(\tau(t))) = e(t)$$

denkleminin salınımlılık özelliklerini çalışmıştır. Burada $r \in C^\alpha([t_0, \infty), R^+)$, $e \in C([t_0, \infty), R)$, $\psi \in C(R, R)$, $F \in C([t_0, \infty) \times R^2, R)$ ve $\tau \in C([t_0, \infty), R^+)$ şeklindedir. Ayrıca her $x \in R$ ve bazı M pozitif sabit sayıları için $0 < \psi(x) \leq M$ eşitsizliği sağlanmak üzere salınımlılık kriterleri elde etmiştir.

Q. Feng [42] $t \geq t_0 > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için,

$$D_t^\alpha (r(t)k_1(x(t), D_t^\alpha x(t))) + p(t)k_2(x(t), D_t^\alpha x(t))D_t^\alpha x(t) + q(t)f(x(t)) = 0$$

şeklindeki denklemlerin salınımlılık özelliklerini araştırmıştır.

Bu çalışmada ise $t \geq t_0 > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için,

$$\left. \begin{aligned} D_t^\alpha (r(t)k_1(x(t), D_t^\alpha x(t))) + p(t)k_2(x(t), D_t^\alpha x(t))D_t^\alpha x(t) \\ + F(t, x(t), x(\tau(t))) = e(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

biçimindeki kesirli mertebeden diferensiyel denklemler incelenmiştir. Burada $r \in C^\alpha([t_0, \infty), R^+)$, $k_1 \in C^\alpha(R^2, R^2)$, $k_2 \in C(R^2, R^2)$, $F \in C([t_0, \infty) \times R^2, R)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ olmak üzere $\tau \in C([t_0, \infty), R^+)$ şeklindedir. Ayrıca her $u \in R$ ve $v \in R \setminus \{0\}$ ve bazı K pozitif sabit sayıları, $k_1^2(u, v) \leq Kvk_1(u, v)$ ve $uvk_2(u, v) > 0$ eşitsizliklerini sağlamak üzere salınımlılık kriterleri elde edilecektir.

(3.1.1) denkleminin salınımlılık davranışını incelemek için aşağıdaki koşullar ve fonksiyon sınıfları kullanılacaktır.

Koşullar,

K1) $T \geq t_0$ için,

$$t \in [s_1, t_1] \text{ için } e(t) \leq 0$$

$$t \in [s_2, t_2] \text{ için } e(t) \geq 0$$

olacak şekilde $T \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ vardır.

K2) $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ ve $x \neq 0, u \in R$ için $F(t, x, u)/x \geq q(t)|x|^{\gamma-1}$ olacak şekilde $q(t) > 0$ fonksiyonu ve $\gamma \geq 1$ sabiti vardır.

şeklindedir. Ayrıca $i = 1, 2$ için,

$$B(s_i, t_i) = \{u \in C^1[s_i, t_i] : u(t) \neq 0 \text{ for } t \in (s_i, t_i), u(s_i) = u(t_i) = 0\}$$

tanımlansın. $G \in B(s_i, t_i)$ ve $g \in C([t_0, \infty), R)$ olmak üzere bir $A(\cdot; s_i, t_i)$ fonksiyoneli

$$A(g; s_i, t_i) = \int_{s_i}^{t_i} G^2(t) g(t) dt, \quad s_i \leq t \leq t_i, i = 1, 2,$$

şeklinde tanımlansın. Dikkat edilirse $A(\cdot; s_i, t_i)$ lineerdir ve

$$A(g'; s_i, t_i) = -A\left(2 \frac{G'}{G} g; s_i, t_i\right) \geq -A\left(2 \left|\frac{G'}{G}\right| |g|; s_i, t_i\right)$$

sağlanır.

$D = \{(t, s) : t_0 \leq s \leq t < \infty\}$ olmak üzere,

a) $H(t, t) = 0$ ve $t > s$ için $H(t, s) > 0$,

b) H, D üzerinde $h_1, h_2 \in L_{loc}(D, \mathbb{R}^+)$ için, $\frac{\partial H}{\partial t} = h_1(t, s) \sqrt{H(t, s)}$,

$\frac{\partial H}{\partial s} = -h_2(t, s) \sqrt{H(t, s)}$ olacak şekilde $\partial H / \partial t$ ve $\partial H / \partial s$ kısmi türevlerine sahiptir.

Koşullarını sağlayan $H \in C(D, R)$ fonksiyonları göz önüne alınacaktır.

(3.1.1) denkleminin salınımlılığını incelemek için bir başka fonksiyon sınıfı olan Y yi tanımlayalım.

$E = \{(t, s, l) : t_0 \leq l \leq s \leq t < \infty\}$ olmak üzere $\Phi \in C(E, R)$ fonksiyonu,

T1) $\Phi(t, t, l) = 0$; $\Phi(t, l, l) = 0$ ve $l < s < t$ için $\Phi(t, s, l) \neq 0$.

T2) Φ fonksiyonunun E üzerinde $\partial \Phi / \partial s$ kısmi türevi vardır.

koşullarını sağlıyorsa $\Phi(t, s, l)$ fonksiyonu Y sınıfındandır denir ve $\Phi \in Y$ ile gösterilir.

$\Phi \in Y$ fonksiyonu için $g \in C([t_0, \infty), R)$ ve $t_0 \leq l \leq s \leq t$ olmak üzere,

$$T[g; l, t] = \int_l^t \Phi^2(t, s, l) g(s) ds$$

tanımlansın. Ayrıca ϕ fonksiyonu,

$$\frac{\partial \Phi(t, s, l)}{\partial s} = \phi(t, s, l) \Phi(t, s, l)$$

şeklinde tanımlanırsa, $T[\cdot; l, t]$ lineer operatörü $g \in C^1([t_0, \infty), R)$ için

$$T[g'; l, t] = -2T[\phi g; l, t]$$

eşitliğini sağlar.

3.1.1 Teorem:

(K1) ve (K2) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Eğer

$$H_i(t, s) := h_i(t, s) - \frac{\tilde{\rho}'(t)}{\tilde{\rho}(t)} \sqrt{H(t, s)} \quad \text{ve} \quad Q(t) = \gamma(\gamma - 1)^{(1-\gamma)/\gamma} [q(t)]^{1/\gamma} |e(t)|^{(\gamma-1)\gamma} \quad (0^0 = 1$$

kabulüyle) olmak üzere $i = 1, 2$ için,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{H(\delta_i, \xi_{s_i})} \int_{\xi_{s_i}}^{\delta_i} \tilde{\rho}(s) \left[H(s, \xi_{s_i}) \tilde{Q}(s) - \frac{K\tilde{r}(s)}{4} H_1(s, \xi_{s_i}) \right] ds \\ & + \frac{1}{H(\xi_{t_i}, \delta_i)} \int_{\delta_i}^{\xi_{t_i}} \tilde{\rho}(s) \left[H(\xi_{t_i}, s) \tilde{Q}(s) - \frac{K\tilde{r}(s)}{4} H_2(s, \xi_{t_i}) \right] ds > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\delta_i \in (s_i, t_i)$ sayıları, yukarıdaki (a) ve (b) koşullarını

sağlayan $H \in (D, R)$ fonksiyonu ve $\rho \in C^1([t_0, \infty), R^+)$ fonksiyonu varsa (3.1.1)

denklemleri salınımlıdır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda $x(t)$

eninde sonunda tek işaretli kalacaktır. Yani yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ için $[T_0, \infty)$

üzerinde $x(t) \neq 0$ dır. $t \geq T_0$ için

$$w(t) := \rho(t) \frac{r(t) k_1(x(t), D_t^\alpha x(t))}{x(t)} \quad (3.1.3)$$

tanımlansın. Böylece,

$$D_t^\alpha w(t) = \rho(t) \frac{e(t)}{x(t)} - \rho(t) \frac{F(t, x(t), x(\tau(t)))}{x(t)} - \rho(t) p(t) \frac{k_2(x(t), D_t^\alpha x(t)) D_t^\alpha x(t)}{x(t)} \\ + \frac{D_t^\alpha \rho(t)}{\rho(t)} w(t) - \rho(t) r(t) \frac{k_1(x(t), D_t^\alpha x(t)) D_t^\alpha x(t)}{x^2(t)}$$

yazılır. (K_2) ve k_2 nin kabulünden

$$D_t^\alpha w(t) \leq \rho(t) \left(\frac{e(t)}{x(t)} - q(t) |x(t)|^{\gamma-1} \right) + \frac{D_t^\alpha \rho(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{1}{K\rho(t)r(t)} w^2(t) \quad (3.1.4)$$

elde edilir. (K_1) den, eğer $x(t) > 0$ ise bu durumda $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$ olacak şekilde $s_1, t_1 \geq T_0$ seçilebilir. Benzer şekilde eğer $x(t) < 0$ ise bu durumda $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $s_2, t_2 \geq T_0$ seçilebilir. Bu yüzden $i = 1, 2$ ve $t \in [s_i, t_i]$ için

$$\frac{e(t)}{x(t)} \leq 0 \text{ yazılabilir. Yani } -\frac{e(t)}{x(t)} = \left| \frac{e(t)}{x(t)} \right| \text{ olur. Böylece (3.1.4) den}$$

$$D_t^\alpha w(t) \leq \rho(t) \left(-\left| \frac{e(t)}{x(t)} \right| - q(t) |x(t)|^{\gamma-1} \right) + \frac{D_t^\alpha \rho(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{1}{K\rho(t)r(t)} w^2(t) \quad (3.1.5)$$

elde edilir. $\gamma > 1$ için, $m = \gamma$, $n = \frac{\gamma}{\gamma-1}$, $A = \gamma q(t) |x(t)|^{\gamma-1}$, $B = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left| \frac{e(t)}{x(t)} \right|$ seçilirse,

Lemma 2.21 den

$$q(t) |x(t)|^{\gamma-1} + \left| \frac{e(t)}{x(t)} \right| \geq Q(t) \quad (3.1.6)$$

bulunur. (3.1.6) eşitsizliği $\gamma = 1$ için sağlandığı açıktır. Bu yüzden (3.1.5) ve (3.1.6) dan $\gamma \geq 1$, $i = 1, 2$ ve $t \in [s_i, t_i]$ için,

$$D_t^\alpha w(t) \leq \rho(t) Q(t) + \frac{D_t^\alpha \rho(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{1}{K\rho(t)r(t)} w^2(t) \quad (3.1.7)$$

elde edilir. Burada $w(t) = w(\xi)$ olarak alınırsa $D_t^\alpha w(t) = w'(\xi)$ ve $D_t^\alpha \rho(t) = \rho'(\xi)$ olacağından, (3.1.7) eşitsizliği $i = 1, 2$ ve $\xi \in [\xi_{s_i}, \xi_{t_i}]$ için

$$w'(\xi) \leq \rho(\xi)Q(\xi) + \frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)}w(\xi) - \frac{1}{K\rho(\xi)\widehat{r}(\xi)}w^2(\xi) \quad (3.1.8)$$

olacaktır. $\delta_i, (\xi_{s_i}, \xi_{t_i})$ aralığında herhangi bir sayı olmak üzere (3.1.8) eşitsizliğinde ξ yerine s yazılır, $H(\xi, s)$ ile çarpılır ve $\xi \in [\delta_i, \xi_{t_i})$ için $[\delta_i, \xi]$ üzerinde integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{\delta_i}^{\xi} H(\xi, s) \rho(s) Q(s) ds \\ & \leq - \int_{\delta_i}^{\xi} H(\xi, s) w'(s) ds + \int_{\delta_i}^{\xi} H(\xi, s) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} w(s) - \frac{1}{K\rho(s)\widehat{r}(s)} w^2(s) \right] ds \\ & = H(\xi, \delta_i) w(\delta_i) - \int_{\delta_i}^{\xi} w'(s) h_2(\xi, s) \sqrt{H(\xi, s)} ds \\ & \quad + \int_{\delta_i}^{\xi} H(\xi, s) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} w(s) - \frac{1}{K\rho(s)\widehat{r}(s)} w^2(s) \right] ds \\ & = H(\xi, \delta_i) w(\delta_i) - \int_{\delta_i}^{\xi} \left[\left(\frac{H(\xi, s)}{K\rho(s)\widehat{r}(s)} \right)^{1/2} w(s) - \frac{1}{2} (K\rho(s)\widehat{r}(s))^{1/2} H_2(\xi, s) \right]^2 ds \\ & \quad + \int_{\delta_i}^{\xi} \frac{K\rho(s)\widehat{r}(s)}{4} H_2^2(\xi, s) ds \\ & \leq H(\xi, \delta_i) w(\delta_i) + \int_{\delta_i}^{\xi} \frac{K\rho(s)\widehat{r}(s)}{4} H_2^2(\xi, s) ds. \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $H(\xi_{t_i}, \delta_i)$ ile bölünürse ve $\xi \rightarrow \xi_{t_i}^-$ için,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{H(\xi_{t_i}, \delta_i)} \int_{\delta_i}^{\xi_{t_i}} H(\xi_{t_i}, s) \rho(s) Q(s) ds \\ & \leq w(\delta_i) + \frac{1}{H(\xi_{t_i}, \delta_i)} \int_{\delta_i}^{\xi_{t_i}} \frac{K\rho(s)\widehat{r}(s)}{4} H_2^2(\xi_{t_i}, s) ds \end{aligned} \right) \quad (3.1.9)$$

bulunur.

Diğer taraftan (3.1.8) eşitsizliğinde ξ yerine s yazılarak, $H(s, \xi)$ ile çarpılır ve $\xi \in [\xi_{s_i}, \delta_i)$ için (ξ, δ_i) üzerinde benzer şekilde integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi}^{\delta_i} H(s, \xi) \rho(s) Q(s) ds \\
& \leq - \int_{\xi}^{\delta_i} H(s, \xi) w'(s) ds + \int_{\xi}^{\delta_i} H(s, \xi) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} w(s) - \frac{1}{K \rho(s) \widehat{r}(s)} w^2(s) \right] ds \\
& = -H(\delta_i, \xi) w(\delta_i) - \int_{\xi}^{\delta_i} w(s) h_1(s, \xi) \sqrt{H(s, \xi)} ds \\
& \quad + \int_{\xi}^{\delta_i} H(s, \xi) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} w(s) - \frac{1}{K \rho(s) \widehat{r}(s)} w^2(s) \right] ds \\
& \leq -H(\delta_i, \xi) w(\delta_i) + \int_{\xi}^{\delta_i} \frac{K \rho(s) \widehat{r}(s)}{4} H_1^2(s, \xi) ds.
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafı $H(\delta_i, \xi_{s_i})$ bölünürse ve $\xi \rightarrow \xi_{s_i}^+$ için

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{1}{H(\delta_i, \xi_{s_i})} \int_{\xi_{s_i}}^{\delta_i} H(s, \xi_{s_i}) \rho(s) Q(s) ds \\
& \leq -w(\delta_i) + \frac{1}{H(\delta_i, \xi_{s_i})} \int_{\xi_{s_i}}^{\delta_i} \frac{K \rho(s) \widehat{r}(s)}{4} H_1^2(s, \xi_{s_i}) ds
\end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

(3.1.9) ve (3.1.10) eşitsizliklerinin taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(\delta_i, \xi_{s_i})} \int_{\xi_{s_i}}^{\delta_i} H(s, \xi_{s_i}) \rho(s) Q(s) ds + \frac{1}{H(\xi_{t_i}, \delta_i)} \int_{\delta_i}^{\xi_{t_i}} H(\xi_{t_i}, s) \rho(s) Q(s) ds \\
& \leq \frac{1}{H(\delta_i, \xi_{s_i})} \int_{\xi_{s_i}}^{\delta_i} \frac{K \rho(s) \widehat{r}(s)}{4} H_1^2(s, \xi_{s_i}) ds + \frac{1}{H(\xi_{t_i}, \delta_i)} \int_{\delta_i}^{\xi_{t_i}} \frac{K \rho(s) \widehat{r}(s)}{4} H_2^2(\xi_{t_i}, s) ds
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte (3.1.2) ile çelişeceğinden ispat tamamlanır.

3.1.2. Teorem:

(K1) ve (K2) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $i = 1, 2$ için,

$$A(Q; \xi_{s_i}, \xi_{t_i}) > A(K \frac{(G')^2}{G^2} \widehat{r}; \xi_{s_i}, \xi_{t_i}) \quad (3.1.11)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $G \in B(s_i, t_i)$ fonksiyonu varsa (3.1.1) denklemini salınımlıdır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda $x(t)$ eninde sonunda tek işaretli kalacaktır. Yani yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ için $[T_0, \infty)$ üzerinde $x(t) \neq 0$ dır. $t \geq T_0$ için

$$w(t) := \frac{r(t)k_1(x(t), D_t^\alpha x(t))}{x(t)} \quad (3.1.12)$$

tanımlansın. Böylece,

$$D_t^\alpha w(t) = \frac{e(t)}{x(t)} - \frac{F(t, x(t), x(\tau(t)))}{x(t)} - p(t) \frac{k_2(x(t), D_t^\alpha x(t)) D_t^\alpha x(t)}{x(t)} - r(t) \frac{k_1(x(t), D_t^\alpha x(t)) D_t^\alpha x(t)}{x^2(t)}$$

olduğu görülür. (K_2) koşulu ve k_2 fonksiyonu üzerindeki koşul göz önüne alınırsa,

$$D_t^\alpha w(t) \leq \frac{e(t)}{x(t)} - q(t)|x(t)|^{\gamma-1} - \frac{1}{Kr(t)} w^2(t) \quad (3.1.13)$$

elde edilir. (K_1) den, eğer $x(t) > 0$ ise bu durumda $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$ olacak şekilde $s_1, t_1 \geq T_0$ seçilebilir. Benzer şekilde eğer $x(t) < 0$ ise bu durumda $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $s_2, t_2 \geq T_0$ seçilebilir. Böylece hem $[s_1, t_1]$ hem de $[s_2, t_2]$ için $\frac{e(t)}{x(t)} \leq 0$ yazılabilir. Yani $-\frac{e(t)}{x(t)} = \left| \frac{e(t)}{x(t)} \right|$ olur. Böylece (3.1.13) den

$$D_t^\alpha w(t) \leq -\left| \frac{e(t)}{x(t)} \right| - q(t)|x(t)|^{\gamma-1} + \frac{1}{Kr(t)} w^2(t)$$

bulunur. Teorem 3.1.1 in ispatına benzer şekilde Lemma 2.21 den, $[s_1, t_1]$ ve $[s_2, t_2]$ aralıklarında,

$$D_t^\alpha w(t) \leq -Q(t) - \frac{1}{Kr(t)} w^2(t) \quad (3.1.14)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Burada $w(t) = w(\xi)$ dönüşümü yapılırsa

$D_t^\alpha w(t) = w'(\xi)$ olacağından, (3.1.14) eşitsizliği $\xi \in [\xi_{s_i}, \xi_{t_i}]$, $i = 1, 2$ için,

$$w'(\xi) \leq -Q(\xi) - \frac{1}{K\hat{r}(\xi)} w^2(\xi) \quad (3.1.15)$$

haline dönüşür. (3.1.15) eşitsizliğinin her iki tarafı $G^2(\xi)$ ile çarpılır ve $i = 1$ ve 2 için ξ_{s_i} den ξ_{t_i} ye integral alınırsa,

$$A(Q; \xi_{s_i}, \xi_{t_i}) \leq A\left(2 \frac{|G'|}{|G|} |w| - \frac{1}{K\hat{r}(\xi)} w^2; \xi_{s_i}, \xi_{t_i}\right) \quad (3.1.16)$$

elde edilir. Burada $v > 0$ için,

$$m(v) = 2 \frac{|G'|}{|G|} v - \frac{1}{K\hat{r}} v^2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun maksimum değeri $m'(v^*) = 0$ ve

$m''(v^*) < 0$ için $v^* = K \frac{|G'|}{|G|} \hat{r}$ olarak bulunur. Böylece,

$$m(v) \leq m(v^*) = K \frac{(G')^2}{G^2} \hat{r}$$

olacağından

$$A(Q; \xi_{s_i}, \xi_{t_i}) \leq A\left(K \frac{(G')^2}{G^2} \hat{r}; \xi_{s_i}, \xi_{t_i}\right)$$

elde edilir. Bu da kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla (3.1.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

3.1.3. Teorem:

(K1) ve (K2) koşullarının $\gamma = 1$ için sağlandığını kabul edelim. Eğer $i = 1, 2$ için,

$$T\left[\hat{q}(s) - K\varphi^2 \hat{r}(s); \xi_{s_i}, \xi_{t_i}\right] > 0 \quad (3.1.17)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\Phi \in Y$ fonksiyonu varsa (3.1.1) denklemini salınımlıdır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda $x(t)$ eninde sonunda tek işaretli kalacaktır. Yani yeterince büyük bir $T_0 \geq t_0$ için $[T_0, \infty)$ üzerinde $x(t) \neq 0$ dır. Teorem 3.1.2 nin ispatındaki gibi (3.1.12) tanımlanırsa ve benzer işlemlerle $i=1$ ve 2 için $\xi \in [\xi_{s_i}, \xi_{t_i}]$ olmak üzere,

$$w'(\xi) \leq -\widehat{q}(\xi) - \frac{1}{K\widehat{r}(\xi)} w^2(\xi) \quad (3.1.18)$$

elde edilir. (3.1.18) eşitsizliğine $T[\cdot; \xi_{s_i}, \xi_{t_i}]$ operatörü uygulanırsa $\xi \geq \xi_*$ için,

$$T[\widehat{q}(s); \xi_{s_i}, \xi_{t_i}] \leq T\left[2|\varphi|w(s) - \frac{1}{K\widehat{r}(s)} w^2(s); \xi_{s_i}, \xi_{t_i}\right] \quad (3.1.19)$$

elde edilir. Burada $v > 0$ için,

$$F(v) = 2|\varphi|v - \frac{1}{K\widehat{r}} v^2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun maksimum değeri $F'(v^*) = 0$ ve

$F''(v^*) < 0$ için $v^* = K|\varphi|\widehat{r}$ olarak bulunur. Böylece,

$$F(v) \leq F(v^*) = K\varphi^2 \widehat{r}$$

olacağından

$$T[\widehat{q}(s); \xi_{s_i}, \xi_{t_i}] \leq T[K\varphi^2 \widehat{r}(s); \xi_{s_i}, \xi_{t_i}]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuç kabulümüzle çelişeceğinden (3.1.1) denklemi salınımlıdır.

3.2 Kesirli Mertebeden Doğrusal Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Bu kısımda, D_t^α Modifiye Riemann-Liouville kesirli türevini göstermek üzere, $0 < \alpha < 1$, $t \in [t_0, \infty)$, γ_1 ve γ_2 iki tek pozitif sayının oranı, $a \in C^\alpha([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $r \in C^{2\alpha}([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ şeklinde pozitif fonksiyonlar ve $x \neq 0$ için $k \in \mathbb{R}^+$ değerleri için $f(x)/x \geq k$ eşitsizliğini sağlayan $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonları için,

$$D_t^\alpha \left(a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) \left[D_t^\alpha x(t) \right]^{\gamma_1} \right)^{\gamma_2} \right) + q(t) f(x(t)) \right) = 0 \quad (3.2.1)$$

şeklindeki kesirli mertebeden diferensiyel denklemler göz önüne alınacaktır.

Literatürde yapılan çalışmalar dikkate alındığında çalışmamız için en dikkat çeken çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Feng [43],

$$D_t^\alpha \left(r(t) \left(D_t^\alpha x(t) \right)^\gamma \right) + p(t) \left(D_t^\alpha x(t) \right)^\gamma + q(t) f(x(t)) = 0$$

$$D_t^\alpha \left[D_t^\alpha \left(r(t) D_t^\alpha x(t) \right) \right] + q(t) x(t) = 0$$

$t \in [t_0, \infty)$, $0 < \alpha < 1$ için doğrusal olmayan söndürücü terimli kesirli mertebeden diferensiyel denklemini ve kesirli mertebeden doğrusal diferensiyel denklemini incelemiş, ve genelleştirilmiş Riccati dönüşümü tekniği ile bazı salınımlılık kriterleri elde etmiştir.

Liu ve arkadaşları [44],

$$D_t^\alpha \left(a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) D_t^\alpha x(t) \right) \right)^\gamma \right) + q(t) f(x(t)) = 0$$

kesirli mertebeden doğrusal olmayan diferensiyel denklemi için bazı salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir.

Bu kısımda, (3.2.1) denkleminin salınımlılık özelliklerini incelemek için $\xi = t^\alpha / \Gamma(1 + \alpha)$ olmak üzere $a(t) = \tilde{a}(\xi)$; $r(t) = \tilde{r}(\xi)$; $q(t) = \tilde{q}(\xi)$; $\tilde{\delta}_1(\xi, \xi_i) = \int_{\xi_i}^{\xi} (1/\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)) ds$ dönüşümleri göz önüne alınacaktır. Burada $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için $\xi_i = t_i^\alpha / \Gamma(1 + \alpha)$ ve $\delta_1(t, t_i) = \tilde{\delta}_1(\xi, \xi_i)$ şeklindedir. Ayrıca $D = \{(t, s) : t_0 \leq s \leq t < \infty\}$ olmak üzere,

H1) $H(t,t)=0$ ve $t > s$ için $H(t,s) > 0$,

H2) H, D üzerinde $h_1, h_2 \in L_{loc}(D, \mathbb{R}^+)$ için, $\frac{\partial H}{\partial t} = -h_1(t,s)\sqrt{H(t,s)}$,

$\frac{\partial H}{\partial s} = -h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}$ olacak şekilde $\partial H / \partial t$ ve $\partial H / \partial s$ kısmi türevlerine sahiptir.

(H1) ve (H2) koşullarını sağlayan $H \in C(D, \mathbb{R})$ fonksiyonları göz önüne alınacaktır.

3.2.1. Lemma:

$x(t)$ 'nin (3.2.1) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü olduğunu ve

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)} ds = \infty \quad (3.2.2)$$

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} ds = \infty \quad (3.2.3)$$

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{r}(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta = \infty \quad (3.2.4)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[T, \infty)$ üzerinde $D_t^\alpha(r(t)[D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1}) > 0$ ve ayrıca $D_t^\alpha x(t) > 0$ ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olacak şekilde yeterince büyük bir T sayısı vardır.

İspat:

$x(t)$ 'nin (3.2.1) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü ve (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) denklemlerinin sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $\xi = t^\alpha / \Gamma(1+\alpha)$ için $a(t) = \tilde{a}(\xi)$, $r(t) = \tilde{r}(\xi)$, $x(t) = \tilde{x}(\xi)$, $q(t) = \tilde{q}(\xi)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda,

$$D_t^\alpha a(t) = D_t^\alpha \tilde{a}(\xi) = \tilde{a}'(\xi) D_t^\alpha \xi(t) = \tilde{a}'(\xi)$$

olacağından $D_t^\alpha r(t) = \tilde{r}'(\xi)$, $D_t^\alpha x(t) = \tilde{x}'(\xi)$ ve $D_t^\alpha q(t) = \tilde{q}'(\xi)$ elde edilir. Böylece (3.2.1) denklemini $\xi \geq \xi_0 > 0$ için,

$$\left[\tilde{a}(\xi) \left(\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2} \right]' + \tilde{q}(\xi) f(\tilde{x}(\xi)) = 0 \quad (3.2.5)$$

formuna dönüşür. Bu durumda $\tilde{x}(\xi)$, (3.2.5) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü olur. f fonksiyonunun tanımından $f(\tilde{x}(\xi)) > 0$ olacaktır. Böylece $\xi \geq \xi_1$ için,

$$\left[\tilde{a}(\xi) \left(\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2} \right]' = -\tilde{q}(\xi) f(\tilde{x}(\xi)) < 0 \quad (3.2.6)$$

yazılır. Bu durumda $[\xi_1, \infty)$ üzerinde $\tilde{a}(\xi) \left(\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2}$ kesin azalandır. Buradan $\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)'$ ifadesi eninde sonunda tek işaretlidir. Biz, $[\xi_2, \infty)$ üzerinde yeterince büyük bir $\xi_2 > \xi_1$ için $\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' > 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksine $[\xi_3, \infty)$ üzerinde yeterince büyük bir $\xi_3 > \xi_2$ için $\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' < 0$ olsun. Bu durumda $[\xi_3, \infty)$ üzerinde $\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1}$ kesin azalandır. Böylece,

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} - \tilde{r}(\xi_3) [\tilde{x}'(\xi_3)]^{\gamma_1} &= \int_{\xi_3}^{\xi} \frac{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s) \left(\tilde{r}(s) [\tilde{x}'(s)]^{\gamma_1} \right)'}{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)} ds \\ &\leq \tilde{a}^{1/\gamma_2}(\xi_3) \left(\tilde{r}(\xi_3) [\tilde{x}'(\xi_3)]^{\gamma_1} \right)' \int_{\xi_3}^{\xi} \frac{1}{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)} ds \end{aligned}$$

yani

$$\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \leq \tilde{r}(\xi_3) [\tilde{x}'(\xi_3)]^{\gamma_1} + \tilde{a}^{1/\gamma_2}(\xi_3) \left(\tilde{r}(\xi_3) [\tilde{x}'(\xi_3)]^{\gamma_1} \right)' \int_{\xi_3}^{\xi} \frac{1}{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)} ds$$

elde edilir. Burada (3.2.2) den, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} = -\infty$ olduğu görülür. Böylece yeterince büyük bir $\xi_4 > \xi_3$ için $[\xi_4, \infty)$ üzerinde $\tilde{x}'(\xi) < 0$ bulunur. Bu durumda,

$$\tilde{x}(\xi) - \tilde{x}(\xi_4) = \int_{\xi_4}^{\xi} \tilde{x}'(s) ds = \int_{\xi_4}^{\xi} \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{x}'(s) ds \leq \tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi_4) \tilde{x}'(\xi_4) \int_{\xi_4}^{\xi} \frac{1}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} ds$$

ve dolayısıyla,

$$\tilde{x}(\xi) \leq \tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi_4) \tilde{x}'(\xi_4) \int_{\xi_4}^{\xi} \frac{1}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} ds$$

olur. Burada (3.2.3) den, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}(\xi) = -\infty$ elde edilir. Ancak bu $\tilde{x}(\xi)$ 'nin (3.2.5) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $[\xi_2, \infty)$ üzerinde $\left(\tilde{r}(\xi)[\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1}\right)' > 0$ olacaktır. Yani $[t_2, \infty)$ üzerinde $D_t^\alpha \left(r(t)[D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1}\right) > 0$ bulunur. Böylece, $D_t^\alpha x(t) = \tilde{x}'(\xi)$ eninde sonunda tek işaretli olacaktır. Şimdi yeterince büyük bir $\xi_5 > \xi_4$ için $[\xi_5, \infty)$ üzerinde $\tilde{x}'(\xi) < 0$ olduğunu kabul edelim. $\tilde{x}(\xi) > 0$ olduğu için $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}(\xi) = \beta \geq 0$ yazılabilir. Biz $\beta = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksine $\beta > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[\xi_5, \infty)$ üzerinde $\tilde{x}(\xi) \geq \beta$ olacaktır. Dolayısıyla, $M \in \mathbb{R}^+$ için $f(x(\xi)) \geq k.x(\xi) > k\beta \geq M$ yazılabilir. Böylece (3.2.6) eşitliğinden

$$\left[\tilde{a}(\xi) \left(\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2} \right]' = -\tilde{q}(\xi) f(\tilde{x}(\xi)) \leq -\tilde{q}(\xi) M \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Burada (3.2.7) eşitsizliğinde, ξ yerine s yazılarak, s 'ye göre ξ den ∞ 'a integral alınır,

$$\int_{\xi}^{\infty} \left[\tilde{a}(s) \left(\left(\tilde{r}(s) [\tilde{x}'(s)]^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2} \right]' ds \leq -M \int_{\xi}^{\infty} \tilde{q}(s) ds,$$

$$-\tilde{a}(\xi) \left(\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2} < -M \int_{\xi}^{\infty} \tilde{q}(s) ds$$

yani

$$\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' > \left[M \frac{1}{\tilde{a}(\xi)} \int_{\xi}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} \quad (3.2.8)$$

bulunur. Burada (3.2.8) eşitsizliğinde, ξ yerine τ yazılarak, τ 'ye göre ξ den ∞ 'a integral alınır,

$$\int_{\xi}^{\infty} \left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right)' ds > M^{1/\gamma_2} \int_{\xi}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau,$$

$$-\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} > M^{1/\gamma_2} \int_{\xi}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau$$

olacağından,

$$\tilde{x}'(\xi) < \left[-M^{1/\gamma_2} \frac{1}{\tilde{r}(\xi)} \int_{\xi}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} \quad (3.2.9)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.2.9) eşitsizliğinde, ξ yerine ζ yazılarak, ζ 'ya göre ξ_5 den ξ 'ye integral alınırsa,

$$\int_{\xi_5}^{\xi} \tilde{x}'(s) ds < -M^{1/\gamma_1\gamma_2} \int_{\xi_5}^{\xi} \left[\frac{1}{\tilde{r}(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta ,$$

$$\tilde{x}(\xi) < \tilde{x}(\xi_5) - M^{1/\gamma_1\gamma_2} \int_{\xi_5}^{\xi} \left[\frac{1}{\tilde{r}(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta$$

elde edilir. Böylece (3.2.4) eşitliğinden, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(\xi) = -\infty$ bulunur. Bu da $\tilde{x}(\xi)$ 'nin pozitif çözüm olmasıyla çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.2.2. Lemma:

$x(t)$, yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ için $[t_1, \infty)$ üzerinde

$$D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) > 0, \quad D_t^\alpha x(t) > 0 \quad (3.2.10)$$

eşitsizliklerini sağlayan (3.2.1) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü olsun.

Bu durumda $t \geq t_1$ için

$$D_t^\alpha x(t) \geq \frac{a^{1/\gamma_1\gamma_2}(t) \left[D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right]^{1/\gamma_1} \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_1)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \quad (3.2.11)$$

sağlanır.

İspat:

$x(t)$, (3.2.1) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda (3.2.6)

eşitliğinden $[\xi_1, \infty)$ üzerinde $\tilde{a}(\xi) \left(\left(\tilde{r}(\xi) [\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2}$ nin kesin azalan olduğu elde

edilmişti. Böylece,

$$\begin{aligned}
\tilde{r}(\xi)[\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} &\geq \tilde{r}(\xi)[\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1} - \tilde{r}(\xi_1)[\tilde{x}'(\xi_1)]^{\gamma_1} \\
&= \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)(\tilde{r}(s)[\tilde{x}'(s)]^{\gamma_1})}{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)} ds \\
&\geq \tilde{a}^{1/\gamma_2}(\xi)(\tilde{r}(\xi)[\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1}) \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{1}{\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s)} ds \\
&= \tilde{a}^{1/\gamma_2}(\xi)(\tilde{r}(\xi)[\tilde{x}'(\xi)]^{\gamma_1}) \tilde{\delta}_1(\xi, \xi_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Başka bir ifadeyle,

$$r(t)[D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \geq a^{1/\gamma_2}(t)D_t^\alpha(r(t)[D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1})\delta_1(t, t_1) \quad (3.2.12)$$

şeklinde yazılır ve (3.2.12) eşitsizliğinin her iki tarafı $1/r(t)$ ile çarpılırsa,

$$D_t^\alpha x(t) \geq \frac{a^{1/\gamma_1\gamma_2}(t)[D_t^\alpha(r(t)[D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1})]^{1/\gamma_1}}{r^{1/\gamma_1}(t)} \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_1)$$

elde edilir.

3.2.3. Teorem:

Lemma 3.2.1 deki (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) şartlarının ve $\gamma_1\gamma_2=1$ in sağlandığını kabul edelim. $k \in \mathbb{R}^+$ için

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_2}^{\xi} \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \frac{1}{4} \frac{(2\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}'(s))^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right. \\
\left. + \tilde{\phi}(s)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)}\tilde{\rho}^2(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) \right\} ds = \infty \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $\phi \in C^\alpha([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ varsa, bu durumda (3.2.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.2.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda genelliği kaybetmeksizin, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz (Benzer şekilde $x(t) < 0$ durumu da incelenir). Lemma 3.2.1 'den

yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $D_t^\alpha(r(t)D_t^\alpha x(t)) > 0$ ve ayrıca $D_t^\alpha x(t) > 0$ ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $[t_2, \infty)$ üzerinde $D_t^\alpha x(t) > 0$ alınırsa ve aşağıdaki genelleştirilmiş Riccati fonksiyonu tanımlanırsa,

$$\omega(t) = \phi(t) \left\{ \frac{a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2}}{x(t)} + \rho(t) \right\}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \omega(t) &= D_t^\alpha \phi(t) \frac{a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2}}{x(t)} + D_t^\alpha \phi(t) \rho(t) \\ &\quad + \phi(t) D_t^\alpha \rho(t) + \phi(t) D_t^\alpha \left\{ \frac{a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2}}{x(t)} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \omega(t) &= D_t^\alpha \phi(t) \frac{\omega(t)}{\phi(t)} + \frac{\phi(t) x(t) D_t^\alpha \left(a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2} \right)}{x^2(t)} \\ &\quad + \phi(t) D_t^\alpha \rho(t) - \phi(t) \frac{a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2} D_t^\alpha x(t)}{x^2(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \omega(t) &= D_t^\alpha \phi(t) \frac{\omega(t)}{\phi(t)} \\ &\quad - \phi(t) \frac{q(t) f(x(t))}{x(t)} + \phi(t) D_t^\alpha \rho(t) \\ &\quad - \phi(t) \frac{a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2} D_t^\alpha x(t)}{x^2(t)} \end{aligned}$$

olur. (3.2.11) ve $f(x)/x \geq k$ nın kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \omega(t) &\leq D_t^\alpha \phi(t) \frac{\omega(t)}{\phi(t)} \\ &\quad - k \phi(t) q(t) + \phi(t) D_t^\alpha \rho(t) \\ &\quad - \phi(t) \frac{a(t) \left(D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right)^{\gamma_2} a^{1/\gamma_1 \gamma_2}(t) \left[D_t^\alpha \left(r(t) [D_t^\alpha x(t)]^{\gamma_1} \right) \right]^{1/\gamma_1} \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_1)}{x^2(t) r^{1/\gamma_1}(t)} \end{aligned}$$

yani

$$D_t^\alpha \omega(t) \leq D_t^\alpha \varphi(t) \frac{\omega(t)}{\varphi(t)} - k\varphi(t)q(t) + \varphi(t)D_t^\alpha \rho(t) - \varphi(t) \frac{\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \left\{ \frac{\omega(t)}{\varphi(t)} - \rho(t) \right\}^2,$$

$$D_t^\alpha \omega(t) \leq D_t^\alpha \varphi(t) \frac{\omega(t)}{\varphi(t)} - k\varphi(t)q(t) + \varphi(t)D_t^\alpha \rho(t) - \varphi(t) \frac{\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \left\{ \frac{\omega^2(t)}{\varphi^2(t)} + \rho^2(t) - 2 \frac{\omega(t)}{\varphi(t)} \rho(t) \right\},$$

$$D_t^\alpha \omega(t) \leq \omega(t) \left\{ \frac{D_t^\alpha \varphi(t)}{\varphi(t)} + \frac{2\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)\rho(t)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \right\} - k\varphi(t)q(t) + \varphi(t)D_t^\alpha \rho(t) - \frac{\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)\varphi(t)} \omega^2(t) - \varphi(t) \frac{\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \rho^2(t) \quad (3.2.14)$$

elde edilir. Burada $\lambda = 2$, $A = \left(\frac{\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{\phi(t)r^{1/\gamma_1}(t)} \right)^{1/2} \omega(t)$ ve

$$B = \frac{2\phi(t)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)\rho(t) + r^{1/\gamma_1}(t)D_t^\alpha \phi(t)}{2(r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2))^{1/2}} \text{ olarak seçilirse, Lemma 2.22 den}$$

$$D_t^\alpha \omega(t) \leq -kq(t)\phi(t) + \phi(t)D_t^\alpha \rho(t) - \phi(t) \frac{\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \rho^2(t) + \frac{1}{4} \frac{(2\phi(t)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)\rho(t) + r^{1/\gamma_1}(t)D_t^\alpha \phi(t))^2}{r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)} \quad (3.2.15)$$

yazılır. (3.2.15) eşitsizliğinde $\omega(t) = \tilde{\omega}(\xi)$ dönüşümü yapılırsa, bu durumda $D_t^\alpha \omega(t) = \tilde{\omega}'(\xi)$ ve $D_t^\alpha \phi(t) = \tilde{\phi}'(\xi)$ olacağından,

$$\tilde{\omega}'(\xi) \leq -k\tilde{q}(\xi)\tilde{\phi}(\xi) + \tilde{\phi}(\xi)\tilde{\rho}'(\xi) - \tilde{\phi}(\xi) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)} \tilde{\rho}^2(\xi) + \frac{1}{4} \frac{(2\tilde{\phi}(\xi)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)\tilde{\rho}(\xi) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)\tilde{\phi}'(\xi))^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)\tilde{\phi}(\xi)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)} \quad (3.2.16)$$

bulunur. Burada ξ yerine s yazılırsa ve (3.2.16) eşitsizliğinin her iki tarafının ξ_2 'den ξ 'ye integrali alınırsa,

$$\int_{\xi_2}^{\xi} \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \frac{1}{4} \frac{\left(2\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}'(s) \right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right. \\ \left. + \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) - \tilde{\varphi}(s)\tilde{\rho}'(s) \right\} ds \\ \leq \tilde{\omega}(\xi_2) - \tilde{\omega}(\xi) \leq \tilde{\omega}(\xi_2) < \infty$$

bulunur. Bu eşitsizlik, (3.2.13) eşitsizliğiyle çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.2.4. Teorem:

Lemma 3.2.1 deki (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) şartlarının ve $\gamma_1\gamma_2=1$ denkleminin sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $\tilde{\phi}$, Teorem 3.2.3 deki gibi tanımlansın. Eğer yeterince büyük bir $T \geq \xi_0$ için $T \leq a < c < b$ olacak şekilde,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{H(c,a)} \int_a^c H(s,a) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\ & \frac{1}{H(b,c)} \int_c^b H(b,s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\ & > \frac{1}{H(c,a)} \int_a^c \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_1(s,a) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(s,a)} \right)^2 ds \\ & + \frac{1}{H(b,c)} \int_c^b \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_2(b,s) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(b,s)} \right)^2 ds \end{aligned} \right\} \quad (3.2.17)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varphi \in C^\alpha([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu varsa (3.2.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.2.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda genelliği kaybetmeksizin, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz (Benzer şekilde $x(t) < 0$ durumu da incelenir). Lemma 3.2.1 'den yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $D_t^\alpha(r(t)D_t^\alpha x(t)) > 0$ ve ayrıca

$D_t^\alpha x(t) > 0$ ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır. Bu durumda (3.2.14) sağlanır. $\omega(t)$, $\tilde{\omega}(\xi)$

Teorem 3.2.3 deki gibi tanımlansın. Böylece $D_t^\alpha \omega(t) = \tilde{\omega}'(\xi)$ ve $D_t^\alpha \phi(t) = \tilde{\phi}'(\xi)$ olur.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'(\xi) \leq \tilde{\omega}(\xi) \left\{ \frac{\tilde{\phi}'(\xi)}{\tilde{\phi}(\xi)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)\tilde{\rho}(\xi)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)} \right\} - k\tilde{\phi}(\xi)\tilde{q}(\xi) + \tilde{\phi}(\xi)\tilde{\rho}'(\xi) \\ - \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)\tilde{\phi}(\xi)}\tilde{\omega}^2(\xi) - \tilde{\phi}(\xi)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)}\tilde{\rho}^2(\xi) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$[\xi_2, \infty)$ üzerinde $a > b > c$ olacak şekilde a , b , c sayılarını seçelim. Ayrıca ξ yerine s yazılsın ve (3.2.18) eşitsizliğinin her iki tarafı $H(\xi, s)$ ile çarpılarak c den ξ ye integral alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_c^\xi H(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)}\tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\ \leq - \int_c^\xi H(\xi, s)\tilde{\omega}'(s)ds \\ + \int_c^\xi H(\xi, s) \left[\tilde{\omega}(s) \left\{ \frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right\} - \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}\tilde{\omega}^2(s) \right] ds \end{aligned}$$

yazılır. Kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_c^\xi H(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)}\tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\ \leq H(\xi, c)\tilde{\omega}(c) - \int_c^\xi h_2(\xi, s)\sqrt{H(\xi, s)}\tilde{\omega}(s)ds \\ + \int_c^\xi H(\xi, s) \left[\tilde{\omega}(s) \left\{ \frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right\} - \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}\tilde{\omega}^2(s) \right] ds \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
& \int_c^\xi H(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\
& \leq H(\xi, c)\tilde{\omega}(c) \\
& - \int_c^\xi \left\{ \left(\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)H(\xi, s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)} \right)^{1/2} \tilde{\omega}(s) - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right)^{1/2} \right\}^2 ds \\
& \times \left(h_2(\xi, s) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(\xi, s)} \right) \\
& + \int_c^\xi \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_2(\xi, s) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(\xi, s)} \right)^2 ds \\
& \leq H(\xi, c)\tilde{\omega}(c) + \int_c^\xi \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_2(\xi, s) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(\xi, s)} \right)^2 ds
\end{aligned}$$

olacağından $\xi \rightarrow b^-$ için ve eşitsizliğin her iki tarafı $H(b, c)$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(b, c)} \int_c^b H(b, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\
& \leq \tilde{\omega}(c) + \frac{1}{H(b, c)} \int_c^b \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_2(b, s) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(b, s)} \right)^2 ds
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan, benzer hesaplarla ξ yerine s yazılarak (3.2.18) eşitsizliğinin her iki tarafı $H(s, \xi)$ çapılarak ξ den c ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_\xi^c H(s, \xi) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\
& \leq -H(c, \xi)\tilde{\omega}(c) \\
& + \int_\xi^c \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_1(s, \xi) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(s, \xi)} \right)^2 ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\xi \rightarrow a^+$ için ve eşitsizliğinin her iki tarafı $H(c, a)$ ile bölünürse

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(c, a)} \int_a^c H(s, a) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\
& \leq -\tilde{\omega}(c) + \frac{1}{H(c, a)} \int_a^c \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_1(s, a) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(s, a)} \right)^2 ds
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

bulunur. Böylece (3.2.19) ve (3.2.20) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{1}{H(c,a)} \int_a^c H(s,a) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\
& \frac{1}{H(b,c)} \int_c^b H(b,s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) + \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right\} ds \\
& \leq \frac{1}{H(c,a)} \int_a^c \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_1(s,a) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(s,a)} \right)^2 ds \\
& + \frac{1}{H(b,c)} \int_c^b \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)}{4\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \left(h_2(b,s) - \left(\frac{\tilde{\phi}'(s)}{\tilde{\phi}(s)} + \frac{2\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \right) \sqrt{H(b,s)} \right)^2 ds
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.2.17) eşitsizliğiyle çelişir. Dolayısıyla, (3.2.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

3.2.5. Teorem:

Lemma 3.2.1 deki (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) şartlarının sağlandığını ve $\gamma_1\gamma_2 = 1$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\tilde{\phi}$ Teorem 3.2.3 deki gibi tanımlansın. Eğer $\xi \geq \xi_0$ için $G(\xi, \xi) = 0$ ve $\xi > s \geq \xi_0$ için $G(\xi, s) \geq 0$ şartlarını sağlayan ve pozitif olmayan sürekli $G'_s(\xi, s)$ kısmi türevine sahip fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{G(\xi, \xi_0)} \int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\
\left. - \frac{1}{4} \frac{(2\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}'(s))^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds = \infty
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $G \in C([\xi_0, \infty), \mathbb{R})$ varsa, (3.2.1) denkleminin salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda genelliği kaybetmeksizin, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz (Benzer şekilde $x(t) < 0$ durumu da incelenir). Lemma 3.2.1 'den yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $D_t^\alpha(r(t)D_t^\alpha x(t)) > 0$ ve ayrıca

$D_t^\alpha x(t) > 0$ ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır. Bu durumda (3.2.15) sağlanır. $\omega(t) = \tilde{\omega}(\xi)$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'(\xi) \leq & -k\tilde{q}(\xi)\tilde{\phi}(\xi) + \tilde{\phi}(\xi)\tilde{\rho}'(\xi) - \tilde{\phi}(\xi)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)}\tilde{\rho}^2(\xi) \\ & + \frac{1}{4}\frac{\left(2\tilde{\phi}(\xi)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)\tilde{\rho}(\xi) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)\tilde{\phi}'(\xi)\right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(\xi)\tilde{\phi}(\xi)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(\xi, \xi_2)} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

yazılır. (3.2.22) eşitsizliğinde ξ yerine s yazılır, her iki yanı $G(\xi, s)$ ile çarpılır ve her iki tarafının ξ_2 den ξ ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_2}^{\xi} G(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\phi}(s)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)}\tilde{\rho}^2(s) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4}\frac{\left(2\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}'(s)\right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds \\ & \leq -\int_{\xi_2}^{\xi} G(\xi, s)\tilde{\omega}'(s)ds, \\ & \int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\phi}(s)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)}\tilde{\rho}^2(s) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4}\frac{\left(2\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}'(s)\right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds \\ & \leq G(\xi, \xi_2)\tilde{\omega}(\xi_2) + \int_{\xi_2}^{\xi} G'_s(\xi, s)\tilde{\omega}(s)ds \\ & \leq G(\xi, \xi_2)\tilde{\omega}(\xi_2) \\ & \leq G(\xi, \xi_0)\tilde{\omega}(\xi_2) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} I = \int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\phi}(s)\frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)}\tilde{\rho}^2(s) \right. \\ \left. - \frac{1}{4}\frac{\left(2\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}'(s)\right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I = & \int_{\xi_0}^{\xi_2} G(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \frac{\left(2\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}'(s) \right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds \\
& + \int_{\xi_2}^{\xi} G(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \frac{\left(2\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}'(s) \right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I \leq & G(\xi, \xi_0) \tilde{\omega}(\xi_2) \\
& + G(\xi, \xi_0) \int_{\xi_2}^{\xi} \left| k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \frac{\left(2\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}'(s) \right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right| ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{G(\xi, \xi_0)} \int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi, s) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \frac{\left(2\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}'(s) \right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds \\
& \leq \tilde{\omega}(\xi_2) \\
& + \int_{\xi_2}^{\xi} \left| k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \frac{\left(2\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}'(s) \right)^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\varphi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right| ds \\
& \leq \tilde{\omega}(\xi_2) < \infty
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

bulunur. (3.2.23) eşitsizliği (3.2.21) ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Elde edilen teoremlerden çok sayıda salınımlılık kriteri türetilabilir. Örneğin Teorem 3.2.5 de $G(\xi, s) = (\xi - s)^\lambda$ ya da $G(\xi, s) = \ln\left(\frac{\xi}{s}\right)$ seçilirse, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.2.6. Sonuç:

Teorem 3.2.5 in şartları altında,

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi - \xi_0)^\lambda} \int_{\xi_0}^{\xi} (\xi - s)^\lambda \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{(2\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}'(s))^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds = \infty \quad (3.2.24)$$

sağlanıyorsa, (3.2.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır.

3.2.7. Sonuç:

Teorem 3.2.5 in şartları altında,

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(\xi) - \ln(\xi_0)} \int_{\xi_0}^{\xi} (\ln(\xi) - \ln(s)) \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s)\tilde{\rho}'(s) - \tilde{\phi}(s) \frac{\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} \tilde{\rho}^2(s) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{(2\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)\tilde{\rho}(s) + \tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}'(s))^2}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)\tilde{\phi}(s)\tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds = \infty \quad (3.2.25)$$

sağlanıyorsa, (3.2.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır.

3.3 Kesirli Mertebeden Söndürücü Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Bu kısımda, öncelikle kesirli Liouville türevi ile literatürde yapılan çalışmalar verilmiş ve söndürü terime sahip bir kesirli diferensiyel denklemin salınımlılığı çalışılmıştır.

D_-^α Liouville kesirli türevini göstermek üzere, Chen [21] bir çalışmasında,

$$\left[r(t)(D_-^\alpha y)^\eta(t) \right] - q(t) f\left(\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha} y(v) dv \right) = 0$$

$t > 0$, $0 < \alpha < 1$, η pozitif iki tek sayının oranı, $r \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ şeklinde pozitif fonksiyonlar ve $x \neq 0$ ve $K \in \mathbb{R}^+$ değerleri için $f(x)/x^\eta > K$ eşitsizliğini sağlayan $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonları için genelleştirilmiş Riccati dönüşüm tekniği ve bir eşitsizlik kullanarak bazı salınımlılık kriterleri elde etmiştir.

Zheng [45],

$$\left[a(t)(D_-^\alpha x(t))^\eta \right] + p(t)(D_-^\alpha x(t))^\eta - q(t) f\left(\int_t^\infty (\xi-t)^{-\alpha} y(\xi) d\xi \right) = 0$$

$t \in [t_0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$ için diferensiyel denklemin salınımlılığı çalışmıştır. Genelleştirilmiş Riccati fonksiyonu ve eşitsizlik tekniğine dayanarak, diferensiyel denklem için bazı salınımlılık kriterleri kurmuşlardır.

Han ve arkadaşları [46] çalışmalarında $0 < \alpha < 1$, $t_0 > 0$ için

$$\left[r(t)g((D_-^\alpha y)(t)) \right] - p(t) f\left(\int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} y(s) ds \right) = 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemi göz önüne almışlardır. Burada r ve p , $[t_0, \infty)$ üzerinde sürekli ve pozitif fonksiyonlar, $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$, $xg(x) > 0$ sürekli fonksiyonlar, k_1 , k_2 pozitif sabit sayıları ve $x \neq 0$ için $f(x)/x > k_1$, $x/g(x) > k_2$ eşitsizlikleri sağlansın, ve $uv \neq 0$ için $g^{-1}(uv) > \gamma_1 g^{-1}(u)g^{-1}(v)$ eşitsizliği sağlayan γ_1 pozitif sabit sayısı vardır ve $u \neq 0$, $ug^{-1}(u) > 0$ için $g^{-1} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ şeklindedir. Yazarlar, genelleştirilmiş Riccati dönüşüm tekniğiyle, denklem için salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir.

Qi ve Cheng [47] $t \in [t_0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$, ve $t_0 > 0$ için

$$\left[a(t) \left[r(t) D_-^\alpha x(t) \right] \right] + p(t) \left[r(t) D_-^\alpha x(t) \right] - q(t) \int_t^\infty (\xi - t)^{-\alpha} x(\xi) d\xi = 0$$

denkleminin salınımlılığını incelemişlerdir. Burada $r \in C^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $a \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, ve $p, q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ pozitif fonksiyonlar olmak üzere, yazarlar, belirli bir Riccati dönüşüm ve eşitsizlik tekniği ile bazı salınımlılık için aralık kriterleri kurmuşlardır.

Xiang ve arkadaşları [48] $t \geq t_0 > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için

$$\left[a(t) \left(p(t) + q(t) \left(D_-^\alpha x(t) \right)^\eta \right) \right] - b(t) f \left(\int_t^\infty (s - t)^{-\alpha} x(s) ds \right) = 0$$

kesirli diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. Burada η iki pozitif sayının oranı, $t_0 > 0$ için a, b ve $q, [t_0, \infty)$ üzerinde sürekli pozitif fonksiyonlar, $p, [t_0, \infty)$ üzerinde sürekli negatif olmayan bir fonksiyon ve $x \neq 0$ ve $K \in \mathbb{R}^+$ değerleri için $f(x)/x^\eta > K$ eşitsizliğini sağlayan $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonları için genelleştirilmiş Riccati dönüşüm tekniği ve bir eşitsizlik kullanılarak, yazarlar tarafından bazı salınımlılık teoremleri kurulmuştur.

Xu [49] çalışmasında $t \in [t_0, \infty)$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için

$$\left[a(t) \left[\left(r(t) D_-^\alpha x(t) \right)^\eta \right] \right] - F \left(t, \int_t^\infty (v - t)^{-\alpha} x(v) dv \right) = 0$$

denklemini göz önüne almıştır. Burada η iki pozitif sayının oranı, ve $r \in C^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $a \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ pozitif fonksiyonlar ve $F(t, \int_t^\infty (v - t)^{-\alpha} x(v) dv) \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ olsun. $\int_t^\infty (v - t)^{-\alpha} x(v) dv \neq 0$ için $F(t, \int_t^\infty (v - t)^{-\alpha} x(v) dv) / \left(\int_t^\infty (v - t)^{-\alpha} x(v) dv \right)^\eta \geq q(t)$ eşitsizliğini sağlayan bir $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu olmak üzere, yazar denklemin salınımlılık problemi ile ilgilenmişlerdir.

Bu kısımda ise $\alpha \in (0, 1)$, $t \in [t_0, \infty)$, $a \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $r \in C^2([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sürekli fonksiyonu k pozitif sabit sayısı ve $x \neq 0$ için $f(x)/x \geq k$ eşitsizliğini sağlansın ve γ_1 ve γ_2 iki tek sayının oranı olmak üzere,

$$\left[a(t) \left[\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)^{\gamma_2} \right]' + p(t) \left[\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)^{\gamma_2} \right] - q(t) f \left(\int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} x(s) ds \right) \right] = 0 \quad (3.3.1)$$

şeklindeki kesirli mertebeden diferansiyel denklemin salınımlılık özellikleri incelenecektir.

Bu kısımdaki yapılan işlemlerde kolaylık olması bakımında $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için $\delta_1(t, t_i) = \int_{t_i}^t (1/a^{1/\gamma_2}(s)) ds$, $A(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t (p(s)/a(s)) ds \right)$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için $G(t) = \int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} x(s) ds$ kullanılacaktır.

3.3.1. Lemma:

$x(t)$ 'nin (1) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü ve

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{[A(s)a(s)]^{1/\gamma_2}} ds = \infty \quad (3.3.2)$$

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{r^{1/\gamma_1}(s)} ds = \infty \quad (3.3.3)$$

$$\int_{t_0}^\infty \left[\frac{1}{r(\zeta)} \int_\zeta^\infty \left[\frac{1}{A(\tau)a(\tau)} \int_\tau^\infty A(s)q(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta = \infty \quad (3.3.4)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[T, \infty)$ üzerinde $(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1}) < 0$ ve ayrıca $D_-^\alpha x(t) < 0$ ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ olacak şekilde yeterince büyük bir T sayısı vardır.

İspat:

Hipotezden, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olacağından $G(t) > 0$ dir. Bu durumda $t > t_1$ için,

$$\begin{aligned} \left[A(t)a(t) \left[\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)^{\gamma_2} \right]' \right] &= A(t)q(t) f \left(\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha} x(v) dv \right) \\ &\geq kA(t)q(t)G(t) > 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

yazılır. Yani $A(t)a(t)\left[\left(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1}\right)^{\gamma_2}\right]$, $[t_1, \infty)$ üzerinde kesin artandır. Böylece, $\left(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1}\right)$ eninde sonunda tek işaretli olacaktır. Yeterince büyük $t_2 > t_1$ için, $[t_2, \infty)$ üzerinde $\left(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1}\right) < 0$ olacağını iddia ediyoruz. Aksine, yeterince büyük bir $t_3 > t_2$ için $[t_3, \infty)$ üzerinde $\left(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1}\right) > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} - r(t_3)(D_-^\alpha x(t_3))^{\gamma_1} &= \int_{t_3}^t \frac{\left(A(s)a(s)\left[\left(r(s)(D_-^\alpha x(s))^{\gamma_1}\right)^{\gamma_2}\right]\right)^{1/\gamma_2}}{[A(s)a(s)]^{1/\gamma_2}} ds \\ &\geq A^{1/\gamma_2}(t_3)a^{1/\gamma_2}(t_3)\left(r(t_3)(D_-^\alpha x(t_3))^{\gamma_1}\right) \\ &\quad \times \int_{t_3}^t \frac{1}{[A(s)a(s)]^{1/\gamma_2}} ds \end{aligned}$$

yazılır. Böylece (3.3.2) eşitliğinden, $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} = +\infty$ elde edilir. Yani $t_4 > t_3$ için $[t_4, \infty)$ üzerinde $D_-^\alpha x(t) > 0$ dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} G(t) - G(t_4) &= \int_{t_4}^t G'(s) ds \\ &= -\Gamma(1-\alpha) \int_{t_4}^t \frac{\left(r(s)(D_-^\alpha x(s))^{\gamma_1}\right)^{1/\gamma_1}}{r^{1/\gamma_1}(s)} ds \\ &\leq -\Gamma(1-\alpha) r^{1/\gamma_1}(t_4) D_-^\alpha x(t_4) \\ &\quad \times \int_{t_4}^t \frac{1}{r^{1/\gamma_1}(s)} ds \end{aligned}$$

olacağından (3.3.3) eşitliğinden $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = -\infty$ elde edilir. Bu da, $[t_1, \infty)$ üzerinde $G(t) > 0$ ile çelişir. Böylece $[t_2, \infty)$ üzerinde $\left(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1}\right) < 0$ elde edilir ve $D_-^\alpha x(t)$ eninde sonunda tek işaretli olacaktır. Şimdi de yeterince büyük bir $t_5 > t_4$ için $[t_5, \infty)$ üzerinde $D_-^\alpha x(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $[t_5, \infty)$ üzerinde $G'(t) < 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \beta \geq 0$ olacaktır. Burada $\beta = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksine, $\beta > 0$ olsun. Bu durumda, $[t_5, \infty)$ üzerinde $G(t) \geq \beta$ olacaktır ve $M \in \mathbb{R}^+$ için $f(G(t)) > k\beta \geq M$ olacağı göz önüne alınırsa, (3.3.5) eşitsizliğinden, $t > t_5$ için

$$\left[A(t)a(t) \left[\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right]^{\gamma_2} \right]' = q(t) f \left(\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha} x(v) dv \right) \geq kA(t)q(t)G(t) > MA(t)q(t) \quad (3.3.6)$$

yazılır. (3.3.6) eşitsizliğinde t yerine s yazılarak, s ye göre t den ∞ a integral alınırsa,

$$-A(t)a(t) \left[\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right]^{\gamma_2} \geq M \int_t^\infty A(s)q(s)ds - \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)a(t) \left[\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right]^{\gamma_2}$$

yazılır. Yani,

$$-A(t)a(t) \left[\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right]^{\gamma_2} \geq M \int_t^\infty A(s)q(s)ds$$

olacağından

$$\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \leq -M^{1/\gamma_2} \left[\frac{1}{A(t)a(t)} \int_t^\infty A(s)q(s)ds \right]^{1/\gamma_2} \quad (3.3.7)$$

elde edilir. (3.3.7) eşitsizlinde, t yerine τ yazılarak, τ ya göre t den ∞ a integral alınırsa,

$$-r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \leq -M^{1/\gamma_2} \int_t^\infty \left[\frac{1}{A(\tau)a(\tau)} \int_\tau^\infty A(s)q(s)ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau$$

yazılır. Yani,

$$G'(t) \leq -M^{1/\gamma_1\gamma_2} \Gamma(1-\alpha) \left[\frac{1}{r(t)} \int_t^\infty \left[\frac{1}{A(\tau)a(\tau)} \int_\tau^\infty A(s)q(s)ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} \quad (3.3.8)$$

olur. (3.3.8) eşitsizliğinde t yerine ζ yazılarak, ζ ya göre t_5 den t a integral alınırsa,

$$G(t) - G(t_5) \leq -M^{1/\gamma_1\gamma_2} \Gamma(1-\alpha) \times \int_{t_5}^t \left[\frac{1}{r(\zeta)} \int_\zeta^\infty \left[\frac{1}{A(\tau)a(\tau)} \int_\tau^\infty A(s)q(s)ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta$$

bulunur. (3.3.4) eşitliğinden $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = -\infty$ olduğu görülür. Bu da $G(t) > 0$ ile çelişir.

Dolayısıyla $\beta = 0$ dır. Yani $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ bulunur.

3.3.2. Lemma:

$x(t)$ 'nin yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ için $[t_1, \infty)$ üzerinde $(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' < 0$, $D_-^\alpha x(t) < 0$ şartlarını sağlayan (3.3.1) denkleminin eninde sonunda bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $t \geq t_1$ için

$$G'(t) \geq \frac{-\Gamma(1-\alpha) \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_1) A^{1/\gamma_1 \gamma_2}(t) a^{1/\gamma_1 \gamma_2}(t) \left[(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' \right]^{1/\gamma_1}}{r^{1/\gamma_1}(t)} \quad (3.3.9)$$

sağlanır.

İspat:

$x(t)$ 'nin (3.3.1) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü olduğunu kabul edelim. Böylece (3.3.5) eşitsizliğinden $a(t) \left[(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' \right]^{\gamma_2}$ 'nin $[t_1, \infty)$ üzerinde kesin artan olduğunu elde edilmişti. Böylece,

$$\begin{aligned} & r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \\ & \leq r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} - r(t_1)(D_-^\alpha x(t_1))^{\gamma_1} \\ & = \int_{t_1}^t \frac{\left(A(s)a(s) \left[(r(s)(D_-^\alpha x(s))^{\gamma_1})' \right]^{\gamma_2} \right)^{1/\gamma_2}}{[A(s)a(s)]^{1/\gamma_2}} ds \\ & \leq A^{1/\gamma_2}(t) a^{1/\gamma_2}(t) (r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' \int_{t_1}^t \frac{1}{[A(s)a(s)]^{1/\gamma_2}} ds \\ & = A^{1/\gamma_2}(t) a^{1/\gamma_2}(t) (r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' \delta_1(t, t_1). \end{aligned}$$

yani,

$$D_-^\alpha x(t) \leq \left[\frac{A^{1/\gamma_2}(t) a^{1/\gamma_2}(t) (r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' \delta_1(t, t_1)}{r(t)} \right]^{1/\gamma_1}$$

elde edilir.

3.3.3. Teorem:

Lemma 3.3.1 deki (3.3.2), (3.3.3) ve (3.3.4) şartlarının ve $\gamma_1\gamma_2=1$ sağlandığını kabul edelim. Eğer yeterince büyük T sayısı için,

$$\begin{aligned} & \int_{t_2}^t \left\{ kA(s)q(s)\phi(s) \right. \\ & \left. - \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)\rho(t) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} \right. \\ & \left. + \phi(s)\frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)}\rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s) \right\} ds = \infty \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

denklemini sağlayacak şekilde $\phi \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ ve $\rho \in C^1([t_0, \infty), [0, \infty))$ varsa, bu durumda (3.3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ sağlanır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda genelliği kaybetmeksizin, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz (Benzer şekilde $x(t) < 0$ durumu da incelenir). Lemma 3.3.1 'den yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' < 0$ ve ayrıca $D_-^\alpha x(t) < 0$ ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ dır. Şimdi $[t_2, \infty)$ üzerinde $D_-^\alpha x(t) < 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $[t_2, \infty)$ üzerinde aşağıdaki genelleştirilmiş Riccati fonksiyonu tanımlanırsa:

$$\omega(t) = \phi(t) \left\{ - \frac{A(t)a(t) \left((r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' \right)^{\gamma_2}}{G(t)} + \rho(t) \right\}.$$

yazılır. Bu durumda,

$$\omega'(t) = -\varphi'(t) \frac{A(t)a(t) \left(\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2}}{G(t)} - \varphi(t) \left\{ \frac{A(t)a(t) \left(\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2}}{G(t)} \right\}'$$

$$+ \varphi'(t) \rho(t) + \varphi(t) \rho'(t)$$

olacağından,

$$\omega'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \omega(t) - \varphi(t) \frac{G(t) \left(A(t)a(t) \left(\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2} \right)'}{G^2(t)}$$

$$+ \varphi(t) \frac{G'(t) A(t)a(t) \left(\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2}}{G^2(t)} + \varphi(t) \rho'(t)$$

$$= \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \omega(t) - \varphi(t) \frac{A(t)q(t) f(G(t))}{G(t)}$$

$$+ \varphi(t) \frac{G'(t) A(t)a(t) \left(\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right)^{\gamma_2}}{G^2(t)} + \varphi(t) \rho'(t)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.9) kullanılırsa,

$$\omega'(t) \leq \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \omega(t) - \varphi(t) \frac{A(t)q(t) f(G(t))}{G(t)}$$

$$- \varphi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha) \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_1) a^2(t) \left(\left(r(t) (D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)' \right)^{2\gamma_2}}{r^{1/\gamma_1}(t) G^2(t)} + \varphi(t) \rho'(t)$$

elde edilir. Böylece,

$$\omega'(t) \leq \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \omega(t) - kA(t)q(t)\varphi(t) - \varphi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha) \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \left(\frac{\omega(t)}{\varphi(t)} - \rho(t) \right)^2 + \varphi(t) \rho'(t)$$

Yani

$$\begin{aligned}
\omega'(t) &\leq \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \omega(t) - kA(t)q(t)\phi(t) - \phi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \frac{\omega^2(t)}{\phi^2(t)} \\
&\quad + \phi(t) \frac{2\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)\rho(t)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \frac{\omega(t)}{\phi(t)} - \phi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \rho^2(t) + \phi(t)\rho'(t), \\
\omega'(t) &\leq -kA(t)q(t)\phi(t) - \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)} \omega^2(t) \\
&\quad + \frac{2\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)\rho(t) + r^{1/\gamma_1}(t)\phi'(t)}{r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)} \omega(t) \\
&\quad - \phi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \rho^2(t) + \phi(t)\rho'(t)
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

bulunur. (3.3.11) eşitsizliğinde $\lambda = 2$, $A = \left(\frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)} \right)^{1/2} \omega(t)$ ve

$$B = \frac{2\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)\rho(t) + r^{1/\gamma_1}(t)\phi'(t)}{2(r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2))^{1/2}}$$
 seçilerek Lemma 2.22 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\omega'(t) &\leq -kA(t)q(t)\phi(t) \\
&\quad + \frac{[2\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)\rho(t) + r^{1/\gamma_1}(t)\phi'(t)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)} \\
&\quad - \phi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \rho^2(t) \\
&\quad + \phi(t)\rho'(t)
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

elde edilir. (3.3.12) eşitsizliğinde t yerine s yazılarak, s ye göre t_2 den t ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_{t_2}^t \left\{ kA(s)q(s)\phi(s) \right. \\
&\quad - \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \\
&\quad \left. + \phi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s) \right\} ds \\
&\leq \omega(t_2) \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

bulunur. (3.3.13) eşitsizliği (3.3.10) eşitsizliğiyle çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.3.4. Teorem:

Lemma 3.3.1 deki (3.3.2), (3.3.3) ve (3.3.4) şartlarının ve $\gamma_1\gamma_2 = 1$ sağlandığını kabul edelim. Ayrıca ϕ ve ρ Teorem 3.3.3 deki gibi tanımlansın. $D := \{(t,s) | t \geq s \geq t_0\}$ olmak üzere, $t \geq t_0$ için $H(t,t)=0$, $t > s \geq t_0$ için $H(t,s) > 0$ ve pozitif olmayan sürekli $H_s'(t,s)$ kısmi türevine sahip bir fonksiyon olsun. Eğer yeterince büyük T için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \left\{ \int_{t_0}^t H(t,s) \left\{ kA(s)q(s)\phi(s) - \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} + \phi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s) \right\} ds \right\} = \infty \quad (3.3.14)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $H \in C(D, \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa, bu durumda (3.3.1) denklemleri salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ sağlanır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda genelliği kaybetmeksizin, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz (Benzer şekilde $x(t) < 0$ durumu da incelenir). Lemma 3.3.1 'den yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $(r(t)(D_-^\alpha x(t))^{\gamma_1})' < 0$ ve ayrıca $D_-^\alpha x(t) < 0$ ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ şeklindedir. Bu durumda $\omega(t)$, Teorem 3.3.2 deki gibi tanımlansın. Böylece (3.3.12) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & kA(t)q(t)\phi(t) - \frac{[2\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t,t_2)\rho(t) + r^{1/\gamma_1}(t)\phi'(t)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(t)\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t,t_2)} \\ & + \phi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \rho^2(t) + \phi(t)\rho'(t) \\ & \leq -\omega'(t) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

yazılır. (3.3.15) eşitsizliğinde t nin yerine s yazılır ve eşitsizliğin her iki tarafı $H(t,s)$ ile çarpılır ve s ye göre t_2 den t ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_2}^t H(t,s) \left\{ kA(s)q(s)\varphi(s) - \frac{\left[2\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\varphi'(s) \right]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} \right. \\
& \left. + \varphi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \varphi(s)\rho'(s) \right\} ds \\
& \leq - \int_{t_2}^t H(t,s) \omega'(s) ds \\
& = -H(t,t)\omega(t) + H(t,t_2)\omega(t_2) + \int_{t_2}^t H'_s(t,s)\omega(s) \Delta s \\
& \leq H(t,t_2)\omega(t_2) \\
& \leq H(t,t_0)\omega(t_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{t_0}^t H(t,s) \left\{ kA(s)q(s)\varphi(s) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left[2\varphi(s)\Gamma^{1/\gamma_1}(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\varphi'(s) \right]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\varphi(s)\Gamma^{1/\gamma_1}(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} \right. \\
& \quad \left. + \varphi(s) \frac{\Gamma^{1/\gamma_1}(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \varphi(s)\rho'(s) \right\} ds \\
&= \int_{t_0}^{t_2} H(t,s) \left\{ kA(s)q(s)\varphi(s) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left[2\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\varphi'(s) \right]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} \right. \\
& \quad \left. + \varphi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \varphi(s)\rho'(s) \right\} ds \\
& \quad + \int_{t_2}^t H(t,s) \left\{ kA(s)q(s)\varphi(s) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left[2\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\varphi'(s) \right]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} \right. \\
& \quad \left. + \varphi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \varphi(s)\rho'(s) \right\} ds
\end{aligned}$$

$$I_1 \leq H(t, t_0) \omega(t_2) + H(t, t_0) \int_{t_0}^{t_2} |kA(s)q(s)\phi(s)| \\ \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \\ + \phi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s) \Big| ds$$

yazılacağından,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \left\{ \int_{t_0}^t H(t, s) \{ kA(s)q(s)\phi(s) \right. \\ \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \\ \left. + \phi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s) \} ds \right\} \\ \leq \omega(t_2) + \int_{t_0}^{t_2} |kA(s)q(s)\phi(s)| \\ \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \\ + \phi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s) \Big| ds < \infty \quad (3.3.16)$$

bulunur. (3.3.16) eşitsizliği (3.3.14) eşitsizliğiyle çelişir. Dolayısıyla ispat tamalanır.

Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.4 ün kullanımıyla, H , ϕ ve ρ nun seçimine bağlı olarak çok sayıda salınımlılık kriteri elde edilebilir. Örneğin, $H(t, s) = (t-s)^\lambda$ ya da $H(t, s) = \ln\left(\frac{t}{s}\right)$ olarak seçilirse, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.3.5. Sonuç:

Teorem 3.3.4 ün şartları altında ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-t_0)^\lambda} \left\{ \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda \{ kA(s)q(s)\phi(s) \right. \\ \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \\ \left. + \phi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s) \} ds \right\} = \infty \quad (3.3.17)$$

sağlanıyorsa, bu durumda (3.3.1) salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ sağlanır.

3.3.6. Sonuç:

Teorem 3.3.4 ün şartları altında ve

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(t) - \ln(t_0)} \left\{ \int_{t_0}^t (\ln(t) - \ln(s)) \{kA(s)q(s)\phi(s) \right. \\ & \quad - \frac{[2\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\phi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \\ & \quad \left. + \phi(s)\frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)}\rho^2(s) + \phi(s)\rho'(s)\} ds \right\} = \infty \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

sağlanıyorsa, bu durumda (3.3.1) salınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ sağlanır.

3.4 Kesirli Mertebeden Fark Denklemlerin Salınımlılığı

Bu kısımda, aşağıda verilen kesirli mertebeden fark denkleminin salınımlılık özellikleri araştırılmıştır.

$$\Delta \left(a(t) \left[\Delta \left(r(t) (\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right)^{\gamma_2} \right] + q(t) f \left(\sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) \right) \right) = 0 \quad (3.4.1)$$

burada $t \in N_{t_0+1-\alpha}$, γ_1 ve γ_2 iki tek pozitif sayının oranını göstermektedir ve Δ^α da, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α 'ıncı mertebeden Riemann-Liouville fark operatörünü göstermektedir.

Kesirli fark denklemlerinin salınımlılığı üzerine yapılan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir. Δ^α kesirli mertebeden fark operatörünü göstermek üzere, Sagayaraj ve arkadaşları [50],

$$\Delta \left(p(t) (\Delta^\alpha x(t))^\gamma \right) + q(t) f \left(\sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) \right) = 0$$

$t \in N_{t_0+1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, ve $\gamma > 0$ pozitif tek tamsayıların bir oranı olmak üzere, denklem için salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir.

Selvam ve arkadaşları [51] $t \in N_{t_0+1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, ve $\gamma > 0$ pozitif tek tamsayıların bir oranı olmak üzere,

$$\Delta \left(c(t) (\Delta^\alpha x(t))^\gamma \right) + p(t) (\Delta^\alpha x(t))^\gamma + q(t) \left(\sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) \right)^\gamma = 0$$

şeklindeki kesirli fark denklemini için bazı salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir.

Li [52] bir çalışmasında

$$(1 + p(t)) \Delta (\Delta^\alpha x(t)) + p(t) \Delta^\alpha x(t) + f(t, x(t)) = g(t), t \in N_0$$

$\Delta^{\alpha-1} x(t)|_{t=0} = x_0$, başlangıç koşuluyla, $\alpha \in (0,1)$ için söndürücü terimli zorlayıcı kesirli mertebeden fark denkleminin salınımlılık özelliklerini incelemiştir.

Sagayaraj ve arkadaşları [53] $t \in N_{t_0+1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, ve $\eta > 0$ pozitif tek tamsayıların bir oranı olmak üzere

$$\Delta\left(p(t)\Delta\left([r(t)(\Delta^\alpha x(t))]^\eta\right)\right)+F\left(t,\sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha}(t-s-1)^{(-\alpha)}x(s)\right)=0$$

denkleminin salınımlılık davranışlarını incelemiştir.

Bu kısımdaki yapacak olduğumuz işlemlerde kolaylık olması bakımından $i = 0, 1, 2, 3$ için

$\delta_1(t, t_i) = \sum_{s=t_i}^{t-1} (1/a^{1/\gamma_2}(s))$ ve $\Delta\phi_+(s) = \max\{\Delta\phi(s), 0\}$ olarak alınacaktır. Ayrıca çalışmamız sıkça kullanılacak olan aşağıdaki şartı da göz önüne alalım.

C1. $a(t)$, $r(t)$ ve $q(t)$ pozitif diziler, $\sum_{s=t_0}^{\infty} (1/a^{1/\gamma_2}(s)) = \infty$ ve $f \in C(R, R)$ olsun. Ayrıca her

$x \neq 0$ ve k pozitif sabit sayısı için $f(x)/x \geq k$ eşitsizliği sağlanır.

3.4.1. Lemma:

$x(t)$, (3.4.1) denkleminin bir çözümü ve

$$G(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s)$$

olsun. Bu durumda

$$\Delta(G(t)) = \Gamma(1-\alpha)\Delta^\alpha x(t)$$

sağlanır.

İspat:

Tanım 2.15 kullanılarak,

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) = \sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(1-\alpha)-1} x(s) \\ &= \Gamma(1-\alpha)\Delta^{-(1-\alpha)} x(t) \end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$$\Delta(G(t)) = \Gamma(1-\alpha)\Delta\Delta^{-(1-\alpha)} x(t) = \Gamma(1-\alpha)\Delta^\alpha x(t)$$

elde edilir.

3.4.2. Lemma:

$x(t)$, (3.4.1) denkleminin eninde sonunda bir pozitif çözümü olsun ve (C1) in sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $\Delta^\alpha x(t) > 0$ ise $t \geq t_0$ için $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) > 0$ sağlanır.

İspat:

Hipotezden, $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olacak şekilde bir t_1 sayısı vardır. Bu yüzden, $[t_1, \infty)$ üzerinde $G(t) > 0$ dır. Ayrıca (1) denkleminde,

$$\Delta \left(a(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2} \right) = -q(t) f \left(\sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) \right) < 0 \quad (3.4.2)$$

yazılır. Yani $a(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2}$ eninde sonunda artmayan bir dizidir. Böylece $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1})$, eninde sonunda tek işaretli olacaktır. Yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) > 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksine, yeterince büyük bir $t_3 > t_2$ için $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) < 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $[t_3, \infty)$ üzerinde,

$$a(t) [\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1})]^{\gamma_2} \leq a(t_3) [\Delta(r(t_3)(\Delta^\alpha x(t_3))^{\gamma_1})]^{\gamma_2} = l < 0$$

yazılabilir. Yani,

$$\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \leq \frac{l^{1/\gamma_2}}{a^{1/\gamma_2}(t)}$$

şeklindedir. Böylece,

$$r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1} - r(t_3)(\Delta^\alpha x(t_3))^{\gamma_1} \leq \sum_{t_3}^{t-1} \frac{l^{1/\gamma_2}}{a^{1/\gamma_2}(s)}$$

elde edilir. Böylece $t \rightarrow \infty$ için, $\Delta^\alpha x(t)$ nin pozitif olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

3.4.3. Lemma:

$x(t)$, yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ için $[t_1, \infty)$ üzerinde $\Delta^\alpha x(t) > 0$ ve $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) > 0$ koşullarını sağlayan (3.4.1) denkleminin eninde sonunda pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\Delta G(t) \geq \frac{\Gamma(1-\alpha) \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_1) a^{1/\gamma_1 \gamma_2}(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{1/\gamma_1}}{r^{1/\gamma_1}(t)} \quad (3.4.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$x(t)$, (3.4.1) denkleminin eninde sonunda bir pozitif çözümü olsun. Bu durumda (3.4.2) eşitsizliğinden $a(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2}$, $[t_1, \infty)$ üzerinde artmayandır ve $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) > 0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1} &\geq r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1} - r(t_1)(\Delta^\alpha x(t_1))^{\gamma_1} \\ &= \sum_{t_1}^{t-1} \frac{\left(a(s) \left[\Delta(r(s)(\Delta^\alpha x(s))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2} \right)^{1/\gamma_2}}{a^{1/\gamma_2}(s)} \\ &\geq a^{1/\gamma_2}(t) \Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \sum_{t_1}^{t-1} \frac{1}{a^{1/\gamma_2}(s)} \end{aligned}$$

olacağından

$$\Delta^\alpha x(t) \geq \frac{a^{1/\gamma_1 \gamma_2}(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{1/\gamma_1}}{r^{1/\gamma_1}(t)} \left(\sum_{t_1}^{t-1} \frac{1}{a^{1/\gamma_2}(s)} \right)^{1/\gamma_1}$$

yazılır. Yani,

$$\Delta G(t) \geq \frac{\Gamma(1-\alpha) a^{1/\gamma_1 \gamma_2}(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{1/\gamma_1} \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_1)}{r^{1/\gamma_1}(t)}$$

elde edilir.

3.4.4. Teorem:

(C1) ve $\gamma_1 \gamma_2 = 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_2}^{t-1} \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_1)} \right) = \infty \quad (3.4.4)$$

olacak şekilde pozitif bir ϕ dizisi varsa, bu durumda (3.4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda genelliği kaybetmeksizin, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz (Benzer şekilde $x(t) < 0$ durumu da incelenir). Lemma 3.4.2 'den yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $\Delta^\alpha x(t) > 0$ ve $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) > 0$ şeklindeydi. Böylece $t \in [t_2, \infty)$ için, aşağıdaki genelleştirilmiş Riccati fonksiyonu tanımlanırsa

$$\omega(t) = \phi(t) \frac{a(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2}}{G(t)}$$

yazılır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \Delta\omega(t) &= \Delta\phi(t) \frac{a(t+1) \left[\Delta(r(t+1)(\Delta^\alpha x(t+1))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2}}{G(t+1)} \\ &\quad + \phi(t) \frac{\Delta \left(a(t) \left[\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2} \right) G(t+1) - a(t+1) \left[\Delta(r(t+1)(\Delta^\alpha x(t+1))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2} \Delta G(t)}{G(t)G(t+1)} \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} \Delta\omega(t) &= \Delta\phi(t) \frac{\omega(t+1)}{\phi(t+1)} - \phi(t) \frac{q(t) f(G(t))}{G(t)} \\ &\quad - \phi(t) \frac{a(t+1) \left[\Delta(r(t+1)(\Delta^\alpha x(t+1))^{\gamma_1}) \right]^{\gamma_2} \Delta G(t)}{G^2(t+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. $f(x)/x > k$ ve (3.4.3) kullanırsa,

$$\begin{aligned}\Delta\omega(t) &\leq \Delta\phi_+(t) \frac{\omega(t+1)}{\phi(t+1)} - k\phi(t)q(t) \\ &\quad - \phi(t)a(t+1) \left[\Delta \left(r(t+1) (\Delta^\alpha x(t+1))^{\gamma_1} \right) \right]^{\gamma_2} \Gamma(1-\alpha) a(t) \left[\Delta \left(r(t) (\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right) \right]^{\gamma_2} \\ &\quad \times \frac{\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{G^2(t+1)r^{1/\gamma_1}(t)}\end{aligned}$$

yazılır. (3.4.2) eşitsizliğinden,

$$a(t) \left[\Delta \left(r(t) (\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1} \right) \right]^{\gamma_2} \geq a(t+1) \left[\Delta \left(r(t+1) (\Delta^\alpha x(t+1))^{\gamma_1} \right) \right]^{\gamma_2}$$

olacağı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\Delta\omega(t) &\leq \Delta\phi_+(t) \frac{\omega(t+1)}{\phi(t+1)} - k\phi(t)q(t) \\ &\quad - \phi(t) \frac{\Gamma(1-\alpha) \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \frac{\omega^2(t+1)}{\phi^2(t+1)}\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $\lambda = 2$, $A = \left(\frac{\phi(t) \Gamma(1-\alpha) \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(t)} \right)^{1/2} \frac{\omega(t+1)}{\phi(t+1)}$ ve

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{r^{1/\gamma_1}(t)}{\phi(t) \Gamma(1-\alpha) \delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)} \right)^{1/2} \Delta\phi_+(t) \text{ olarak seçilirse ve Lemma 2.22 den,}$$

$$\Delta\omega(t) \leq -k\phi(t)q(t) + \frac{r^{1/\gamma_1}(t)(\Delta\phi_+(t))^2}{4\phi(t)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(t, t_2)} \quad (3.4.5)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\sum_{s=t_2}^{t-1} \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) &\leq \omega(t_1) - \omega(t) \\ &\leq \omega(t_1) \\ &< \infty\end{aligned} \quad (3.4.6)$$

(3.4.6) eşitsizliğinde $t \rightarrow \infty$ için,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_2}^{t-1} \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) \leq \omega(t_1) < \infty \quad (3.4.7)$$

bulunur. (3.4.7) eşitsizliği (3.4.4) ile çelişir. Dolayısıyla (3.4.1) denklemi salınımlıdır.

3.4.5. Teorem:

(C1) ve $\gamma_1\gamma_2 = 1$ sağlansın ve φ pozitif bir dizi olsun. Ayrıca,

$$t \geq 0 \text{ için } H(t, t) = 0,$$

$$t > s \geq 0 \text{ için } H(t, s) > 0,$$

$$t > s \geq 0 \text{ için } \Delta_2 H(t, s) = H(t, s+1) - H(t, s) \leq 0$$

şartlarını sağlayan bir H fonksiyonu,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \sum_{t_0}^{t-1} H(t, s) \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) = \infty \quad (3.4.8)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa, (3.4.1) denklemi salınımlıdır.

İspat:

Aksine $x(t)$, (3.4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda genelliği kaybetmeksizin, yeterince büyük bir t_1 için $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz (Benzer şekilde $x(t) < 0$ durumu da incelenir). Lemma 3.4.2 'den yeterince büyük bir $t_2 > t_1$ için $[t_2, \infty)$ üzerinde $\Delta^\alpha x(t) > 0$ ve $\Delta(r(t)(\Delta^\alpha x(t))^{\gamma_1}) > 0$ şeklindedir. $\omega(t)$, Teorem 3.4.4 de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda, (3.4.5) gerçekleşir. Bu durumda (3.4.5) eşitsizliğinin her iki tarafı $H(t, s)$ ile çarpılır ve t_2 den $t-1$ e toplamı alınırsa,

$$\sum_{t_2}^{t-1} H(t, s) k\phi(s)q(s) \leq - \sum_{t_2}^{t-1} H(t, s) \Delta\omega(s) + \sum_{t_2}^{t-1} H(t, s) \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)},$$

$$\sum_{t_2}^{t-1} H(t, s) \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) \leq - \sum_{t_2}^{t-1} H(t, s) \Delta\omega(s)$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} \sum_{t_2}^{t-1} H(t, s) \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) &\leq H(t, t_2)\omega(t_2) + \sum_{t_2}^{t-1} \omega(s+1)\Delta_2 H(t, s) \\ &\leq H(t, t_2)\omega(t_2) \\ &\leq H(t, t_0)\omega(t_2) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
& \sum_{t_0}^{t-1} H(t, s) \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) \\
&= \sum_{t_0}^{t_2-1} H(t, s) \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) \\
&+ \sum_{t_2}^{t-1} H(t, s) \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) \\
&\leq H(t, t_0)\omega(t_2) + H(t, t_0) \sum_{t_0}^{t_2-1} \left| k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right|
\end{aligned}$$

olur, ve

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \sum_{t_0}^{t-1} H(t, s) \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) \\
&\leq \omega(t_2) + \sum_{t_0}^{t_2-1} \left| k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right| \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (3.4.8) ile çelişir. Böylece (3.4.1) denklemi salınımlıdır.

Elde edilen salınımlılık kriterlerinde, H ve ϕ dizilerinin uygun seçimleriyle, (3.4.1) denklemi için çok sayıda salınımlılık kriteri türetilebilir. Örneğin, $\lambda \geq 1$, $t \geq s \geq 0$ için $H(t, s) = (t-s)^\lambda$ çift dizisi seçilirse, aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.6. Sonuç:

Teorem 3.4.5 in şartları ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-t_0)^\lambda} \sum_{t_0}^{t-1} (t-s)^\lambda \left(k\phi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\phi_+(s))^2}{4\phi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right) = \infty \quad (3.4.9)$$

sağlanıyorsa, bu durumda (3.4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

3.5 Uygulamalar

Bu bölümde elde edilen salınımlılık kriterlerine uygun örnekler verilmiştir.

3.5.1. Örnek:

Aşağıdaki kesirli mertebeden diferensiyel denklemi $t \geq 0$, $p(t) \geq 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için göz önüne alalım.

$$D_t^\alpha (D_t^\alpha x(t)) + p(t)x(t)D_t^\alpha x(t) + x(t)[1 + x^2(\tau(t))] = \sin(t^\alpha / \Gamma(1+\alpha)) \quad (3.5.1)$$

Dikkat edilirse, $r(t)=1$; $e(t)=\sin(t^\alpha / \Gamma(1+\alpha))$; $k_1(u,v)=v$; $k_2(u,v)=uv$ şeklindedir. Bu yüzden $K=\gamma=q=Q=1$ şeklindedir. $H(t,s)=(t-s)^2$ ve yeterince büyük k sayısı için, $\xi_{s_1}=2k\pi$; $\xi_{t_1}=\xi_{s_2}=(2k+2)\pi$; $\xi_{t_2}=(2k+4)\pi$; $\delta_1=(2k+1)\pi$; $\delta_2=(2k+3)\pi$ ve $\rho(t)=1$ seçilirse, $i=1,2$ için $H_i(t,s)=h_i(t,s)=2$ olur. Böylece,

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left[(s-2k\pi)^2 - \frac{1}{2} \right] ds + \int_{(2k+3)\pi}^{(2k+4)\pi} \left[((2k+3)\pi-s)^2 - \frac{1}{2} \right] ds = \frac{2}{3}\pi^3 - \pi > 0$$

bulunur. Yani (3.5.1) denklemi Teorem 3.1.1 den dolayı salınımlıdır.

3.5.2. Örnek:

Örnek 4.1 de verilen denklemin salınımlılığı için, $\Phi(t,s,l)=\sin(t-s)\sin(s-l)$; $\xi_{s_1}=2k\pi$; $\xi_{t_1}=\xi_{s_2}=(2k+1)\pi$ ve $\xi_{t_2}=(2k+2)\pi$ seçilirse $\varphi(t,s,l)=\sin(t-2s+l)$ elde edilir. Böylece,

$$\left. \begin{aligned} & T \left[\widehat{q}(s) - K\varphi^2 r(s); \xi_{s_1}, \xi_{t_1} \right] \\ & = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin^2((2k+1)\pi-s) \sin^2(s-2k\pi) \cos^2((2k+1)\pi-2s+2k\pi) > 0 \end{aligned} \right\}$$

bulunur. Böylece verilen denklem Teorem 3.1.3 den dolayı salınımlıdır.

3.5.3. Örnek:

$t \geq 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için aşağıdaki denklemi göz önüne alınsın.

$$D_t^\alpha \left(\sin^2(t^\alpha / \Gamma(1+\alpha)) D_t^\alpha x(t) \right) + x(t)[1 + x^2(\tau(t))] = \sin(t^\alpha / \Gamma(1+\alpha)) \quad (3.5.2)$$

Dikkat edilirse, $r(t) = \sin^2(t^\alpha / \Gamma(1+\alpha))$; $e(t) = \sin(t^\alpha / \Gamma(1+\alpha))$; $k_1(u, v) = v$ ve $k_2(u, v) = uv$ şeklindedir. Dolayısıyla $\hat{r}(\xi) = \sin^2(\xi)$ ve $K = \gamma = q = Q = 1$ olur. Eğer $G(t) = \sin^2 t$; $\xi_{s_1} = 2k\pi$; $\xi_{t_1} = \xi_{s_2} = (2k+1)\pi$ ve $\xi_{t_2} = (2k+2)\pi$ olarak seçilirse,

$$\frac{3}{8}\pi = A(Q; \xi_{s_1}, \xi_{t_1}) > A(K \frac{(G')^2}{G^2} \hat{r}; \xi_{s_1}, \xi_{t_1}) = \frac{\pi}{4}$$

elde edilir. Bu yüzden (3.5.2) denklemi Teorem 3.1.2 den dolayı salınımlıdır.

3.5.4. Örnek:

$t \geq 3$ için aşağıda verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemi göz önüne alalım.

$$D_t^{1/3} \left[t^{1/5} \left(D_t^{1/3} \left[D_t^{1/3} x(t) \right]^{5/3} \right)^{3/5} \right] + t^{-2/3} x(t) (1 + \sin^2(x(t))) = 0 \quad (3.5.3)$$

(3.2.1) denklemine karşılık olarak $t_0 = 3$; $\alpha = \frac{1}{3}$; $\gamma_1 = \frac{5}{3}$; $\gamma_2 = \frac{3}{5}$; $a(t) = t^{1/5}$; $r(t) = 1$;

$q(t) = t^{-2/3}$ ve $f(x) = x(1 + \sin^2 x)$ yazılır. Böylece, $f(x)/x = 1 + \sin^2 x \geq 1 = k$;

$\xi_0 = 3^{1/3} / \Gamma(4/3)$; $\tilde{a}(\xi) = (\xi \Gamma(4/3))^{3/5}$ ve $\tilde{q}(\xi) = (\xi \Gamma(4/3))^{-2}$ bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1(\xi, \xi_2) &= \int_{\xi_2}^{\xi} 1 / \tilde{a}^{1/\gamma_2}(s) ds \\ &= [\Gamma(4/3)]^{-1} \int_{\xi_2}^{\xi} \frac{1}{s} ds \\ &= [\Gamma(4/3)]^{-1} (\ln(\xi) - \ln(\xi_2)) \end{aligned}$$

yani $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_1(\xi, \xi_2) = \infty$ olur ve (3.2.2) sağlanır. Ayrıca yeterince büyük bir $T > \xi_2$ için

$[T, \infty)$ üzerinde $\tilde{\delta}_1(\xi, \xi_2) > 1$ sağlanır. (3.2.3) için,

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{1}{r^{1/\gamma_1}(s)} ds = \int_{\xi_0}^{\infty} ds = \infty$$

elde edilir. (3.2.4) ise,

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi_0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{r}(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta \\
&= [\Gamma(4/3)]^{-13/5} \int_{\xi_0}^{\xi} \left[\int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau^{3/5}} \int_{\tau}^{\infty} s^{-2} ds \right]^{5/3} d\tau \right]^{3/5} d\zeta \\
&= -[\Gamma(4/3)]^{-7/5} \int_{\xi_0}^{\xi} \left[\int_{\zeta}^{\infty} \tau^{-8/3} d\tau \right]^{3/5} d\zeta \\
&= (3/5)^{3/5} [\Gamma(4/3)]^{-7/5} \int_{\xi_0}^{\xi} \zeta^{-1} d\zeta \\
&= \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.2.13) de $\tilde{\varphi}(\xi) = \xi$ ve $\tilde{\rho}(\xi) = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_0}^{\infty} \left\{ k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \frac{1}{4} \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s) [\tilde{\varphi}'(s)]^2}{\tilde{\varphi}(s) \tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right\} ds &= \int_{\xi_0}^{\infty} \left\{ (s\Gamma(4/3))^{-2} s - \frac{1}{4} \frac{1}{s \tilde{\delta}_1^{3/5}(s, \xi_2)} \right\} ds \\
&= \int_{\xi_0}^T \left[(\Gamma(4/3))^{-2} - \frac{1}{4 \tilde{\delta}_1^{3/5}(s, \xi_2)} \right] \frac{1}{s} ds \\
&\quad + \int_T^{\infty} \left[(\Gamma(4/3))^{-2} - \frac{1}{4 \tilde{\delta}_1^{3/5}(s, \xi_2)} \right] \frac{1}{s} ds \\
&\geq \int_{\xi_0}^T \left[(\Gamma(4/3))^{-2} - \frac{1}{4 \tilde{\delta}_1^{3/5}(s, \xi_2)} \right] \frac{1}{s} ds \\
&\quad + \int_T^{\infty} \left[(\Gamma(4/3))^{-2} - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{s} ds \\
&= \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.5.3) denklemi Teorem 3.2.3 den dolayı salınımlıdır.

3.5.5. Örnek:

$t \geq 2$ için aşağıdaki kesirli mertebeden diferensiyel denklemi dikkate alalım.

$$D_t^{1/7} \left[t^{3/7} \left(D_t^{1/7} \left[t^{1/21} \left(D_t^{1/7} x(t) \right)^{1/3} \right]^3 \right) \right] + t^{-3/7} (\Gamma(8/7))^3 \exp(x^2(t)) x(t) = 0 \quad (3.5.4)$$

(3.2.1) denklemine karşılık olarak $t_0 = 2$; $\alpha = \frac{1}{7}$; $\gamma_1 = \frac{1}{3}$; $\gamma_2 = 3$; $a(t) = t^{3/7}$; $r(t) = t^{-1/21}$; $q(t) = t^{-3/7} (\Gamma(8/7))^3$ ve $f(x) = \exp(x^2(t))x$ yazılır. Dikkat edilirse, $f(x)/x \geq 1 = k$;

$\xi_0 = 2^{1/7} / \Gamma(8/7)$; $\tilde{a}(\xi) = (\xi \Gamma(8/7))^3$; $\tilde{r}(\xi) = (\xi \Gamma(8/7))^{-1/3}$ ve $\tilde{q}(\xi) = \xi^{-3}$ olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1(\xi, \xi_2) &= \int_{\xi_2}^{\xi} 1/\tilde{a}^{1/\gamma_2}(s) ds \\ &= [\Gamma(8/7)]^{-1} \int_{\xi_2}^{\xi} s^{-1} ds \\ &= [\Gamma(8/7)]^{-1} (\ln(\xi) - \ln(\xi_2))\end{aligned}$$

yani $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_1(\xi, \xi_2) = \infty$ olacağından (3.2.2) sağlanır. Ayrıca, yeterince büyük $T > \xi_2$ için $[T, \infty)$ üzerinde $\tilde{\delta}_1(\xi, \xi_2) > 1$ sağlanır. (3.2.3) için,

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s)} ds = [\Gamma(8/7)] \int_{\xi_0}^{\infty} s ds = \infty$$

bulunur. (3.2.4) ise,

$$\begin{aligned}& \int_{\xi_0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{r}(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{a}(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \tilde{q}(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta \\ &= [\Gamma(8/7)]^{-8/3} \int_{\xi_0}^{\infty} \left[\frac{1}{\zeta^{-1/3}} \int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau^3} \int_{\tau}^{\infty} s^{-3} ds \right]^{1/3} d\tau \right]^3 d\zeta \\ &= -\frac{[\Gamma(8/7)]^{-10/3}}{2} \int_{\xi_0}^{\infty} \left[\frac{1}{\zeta^{1/3}} \int_{\zeta}^{\infty} \tau^{-5/3} d\tau \right]^3 d\zeta \\ &= 3 \frac{[\Gamma(8/7)]^{-10/3}}{4} \int_{\xi_0}^{\infty} \zeta^{-1} d\zeta \\ &= \infty\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.2.24) de $\tilde{\varphi}(\xi) = s^2$, $\lambda = 1$ ve $\tilde{\rho}(\xi) = 0$ seçilirse,

$$\begin{aligned}I &= \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi - \xi_0)^{\lambda}} \int_{\xi_0}^{\xi} (\xi - s)^{\lambda} \left[k\tilde{q}(s)\tilde{\varphi}(s) - \frac{1}{4} \frac{\tilde{r}^{1/\gamma_1}(s) [\tilde{\varphi}'(s)]^2}{\tilde{\varphi}(s) \tilde{\delta}_1^{1/\gamma_1}(s, \xi_2)} \right] ds \\ &= \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi - \xi_0)} \int_{\xi_0}^{\xi} (\xi - s) \left[s^{-1} - \frac{(s\Gamma(8/7))^{-1}}{\tilde{\delta}_1^3(s, \xi_2)} \right] ds \\ &= \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi - \xi_0)} \int_{\xi_0}^{\xi} (\xi - s) \left[1 - \frac{1}{\Gamma(8/7)} \frac{1}{\tilde{\delta}_1^3(s, \xi_2)} \right] \frac{1}{s} ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi - \xi_0)} \\
&\times \left[\int_{\xi_0}^T (\xi - s) \left[1 - \frac{1}{\Gamma(8/7)} \frac{1}{\tilde{\delta}_1^3(s, \xi_2)} \right] \frac{1}{s} ds + \int_T^{\xi} (\xi - s) \left[1 - \frac{1}{\Gamma(8/7)} \frac{1}{\tilde{\delta}_1^3(s, \xi_2)} \right] \frac{1}{s} ds \right] \\
&\geq \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi - \xi_0)} \left[\int_{\xi_0}^T (\xi - s) \left[1 - \frac{1}{\Gamma(8/7)} \frac{1}{\tilde{\delta}_1^3(s, \xi_2)} \right] \frac{1}{s} ds + \int_T^{\xi} (\xi - s) \left[1 - \frac{1}{\Gamma(8/7)} \right] \frac{1}{s} ds \right] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.2.24) sağlanır. Yani (3.5.4) denklemi Sonuç 3.2.6 dan dolayı salınımlıdır.

3.5.6. Örnek:

$t \geq 1$ için aşağıdaki kesirli mertebeden diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$\left[t^2 \left(\left[\left(D_-^\alpha x(t) \right)^{1/2} \right]^2 \right)' \right] - t^{-2} \left(\int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} x(s) ds \right) \sin^2 \left(\int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} x(s) ds \right) = 0 \quad (3.5.5)$$

Burada (3.3.1) denklemine karşılık olarak, $t_0 = 1$; $\gamma_1 = \frac{1}{2}$; $\gamma_2 = 2$; $\alpha \in (0,1)$; $a(t) = t^2$; $r(t) = 1$; $p(t) = 0$; $q(t) = t^{-2}$ ve $f(x)/x = (1 + \sin^2 x) \geq 1 = k$ yazılır. Diğer taraftan,

$$\delta_1(t, t_2) = \int_1^t \frac{1}{s} ds = \ln t$$

yani $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t, t_2) = \infty$ olur. Böylece, (3.3.2) sağlanır. Ayrıca, yeterince büyük bir $T > t_2$ için $[T, \infty)$ üzerinde $\delta_1(t, t_2) > 1$ sağlanır. (3.3.3) için,

$$\int_1^\infty \frac{1}{r^{1/\gamma_1}(s)} ds = \int_1^\infty ds = \infty$$

ve (3.3.4) ise,

$$\int_{t_0}^\infty \left[\frac{1}{r(\zeta)} \int_\zeta^\infty \left[\frac{1}{A(\tau) a(\tau)} \int_\tau^\infty A(s) q(s) ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta = \int_1^\infty \left[\int_\zeta^\infty \left[\frac{1}{\tau^2} \int_\tau^\infty \frac{1}{s^2} ds \right]^{1/2} d\tau \right]^2 d\zeta = \infty$$

şeklinde sağlanır. (3.3.10) da $\varphi(t) = t$ ve $\rho(t) = 0$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_2}^t \left\{ kA(s)q(s)\varphi(s) \right. \\
& \quad \left. - \frac{[2\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)\rho(s)+r^{1/\gamma_1}(s)\varphi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} \right. \\
& \quad \left. + \varphi(s)\frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)}\rho^2(s)+\varphi(s)\rho'(s) \right\} ds \\
& \geq \int_1^t \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{4s\Gamma(1-\alpha)\delta_1^2(s,t_2)} \right\} ds \\
& \geq \int_1^t \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^2(s,t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds \\
& = \int_1^T \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^2(s,t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds + \int_T^t \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^2(s,t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds \\
& \geq \int_{t_2}^T \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^2(s,t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds + \int_T^t \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)} \right\} \frac{1}{s} ds \\
& = \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden (3.5.5) denklemi Teorem 3.3.3 den dolayı salınımlıdır.

3.5.7. Örnek:

$t \geq 2$ için aşağıdaki kesirli mertebeden diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
& \left[t^{1/5} \left(\left[(D_-^\alpha x(t))^5 \right] \right)^{1/5} \right]' + t^{-1} \left(\left[(D_-^\alpha x(t))^5 \right] \right)^{1/5} \\
& - t^{-2} \left(\int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} x(s) ds \right) \exp \left(\left(\int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} x(s) ds \right)^2 \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Burada (3.3.1) denkleminde karşılık olarak $t_0 = 2$; $\alpha \in (0,1)$; $\gamma_1 = 5$; $\gamma_2 = \frac{1}{5}$; $a(t) = t^{1/5}$; $r(t) = 1$; $p(t) = t^{-1}$; $q(t) = t^{-2}$ ve $f(x)/x = \exp(x^2) \geq 1 = k$ yazılır. Ayrıca, $1 \leq A(t) = \exp\left(\int_2^t s^{-6/5} ds\right) = \exp\left(-5\left(t^{-1/5} - 2^{-1/5}\right)\right) \leq \exp\left(5/\sqrt[5]{2}\right)$ olarak yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\delta_1(t, t_2) &= \int_{t_0}^t \frac{1}{[A(s)a(s)]^{1/\gamma_2}} ds \\
&\geq \exp\left(-25/\sqrt[5]{2}\right) \int_2^t \frac{1}{s} ds
\end{aligned}$$

yani $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t, t_2) = \infty$ olacaktır. Dolayısıyla (3.3.2) sağlanır. Ayrıca yeterince büyük bir $T > t_2$ için $[T, \infty)$ üzerinde $\delta_1(t, t_2) > 1$ sağlanır. (3.3.3) için,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{r^{1/\gamma_1}(s)} ds = \int_2^{\infty} ds = \infty$$

olur. (3.3.4) ise,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{1}{r(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \left[\frac{1}{A(\tau)a(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} A(s)q(s)ds \right]^{1/\gamma_2} d\tau \right]^{1/\gamma_1} d\zeta \\ & \geq \exp(-5/\sqrt[5]{2}) \int_2^{\infty} \left[\int_{\zeta}^{\infty} \left[\tau^{-1/5} \int_{\tau}^{\infty} s^{-2} ds \right]^5 d\tau \right]^{1/5} d\zeta \\ & = \infty \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.3.17) de $\varphi(t) = t$, $\rho(s) = 0$ ve $\lambda = 1$ seçilirse,

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-t_0)^{\lambda}} \left\{ \int_{t_0}^t (t-s)^{\lambda} \left\{ kA(s)q(s)\varphi(s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{[2\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)\rho(s) + r^{1/\gamma_1}(s)\varphi'(s)]^2}{4r^{1/\gamma_1}(s)\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varphi(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s, t_2)}{r^{1/\gamma_1}(s)} \rho^2(s) + \varphi(s)\rho'(s) \right\} ds \right\} \\ & \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-2} \left\{ \int_2^t (t-s) \left\{ s^{-1} - \frac{1}{4s\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/5}(s, t_2)} \right\} ds \right\} \\ & = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-2} \left\{ \int_2^t (t-s) \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/5}(s, t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds \right\} \\ & = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-2} \left\{ \int_2^T (t-s) \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/5}(s, t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds \right. \\ & \quad \left. + \int_T^t (t-s) \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/5}(s, t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds \right\} \\ & \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-2} \left\{ \int_2^T (t-s) \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/5}(s, t_2)} \right\} \frac{1}{s} ds \right. \\ & \quad \left. + \int_T^t (t-s) \left\{ 1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)} \right\} \frac{1}{s} ds \right\} \\ & = \infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.3.17) sağlanır. Bu durumda (3.5.6), Sonuç 3.3.5 den dolayı salınımlıdır.

3.5.8. Örnek:

$t \geq 2$ için aşağıdaki kesirli mertebeden fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta \left(t^{1/5} \left[\Delta \left((\Delta^\alpha x(t))^5 \right) \right]^{1/5} \right) + t^{-2} \left[\left(\sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) \right) + \left(\sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) \right)^2 \right] = 0 \quad (3.5.7)$$

Burada $t_0 = 2$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = 1/5$, $\alpha \in (0,1]$, $a(t) = t^{1/5}$, $r(t) = 1$, $q(t) = t^{-2}$ and $f(x)/x \geq 1 = k$ şeklindedir. Ayrıca,

$$\sum_{s=t_2}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\gamma_2}(s)} = \sum_{s=t_2}^{\infty} \frac{1}{s} = \infty$$

sağlanır. (3.4.4) de $\varphi(t) = t$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_2}^{t-1} \left(k\varphi(s)q(s) - \frac{r^{1/\gamma_1}(s)(\Delta\varphi_+(s))^2}{4\varphi(s)\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/\gamma_1}(s,t_2)} \right) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_2}^{t-1} \left(s^{-1} - \frac{1}{4s\Gamma(1-\alpha)\delta_1^{1/5}(s,t_2)} \right) \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_2}^{t-1} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{4\Gamma(1-\alpha)(\sum_{s=t_2}^{\infty} \frac{1}{s})^{1/5}} \right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.4.4) sağlanır. Dolayısıyla, Teorem 3.4.4 den (3.5.7) denklemi salınımlıdır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, öncelikle temel tanım ve teoremler verilerek kesirli türev tanıtılmıştır. Literatür dikkatlice incelendiğinde kesirli türevle ilgili ilk spekülasyonlar 1695 yılında ortaya atılmıştır. Ancak konunun bazı teorik kısıtlamaları ve zorlukları nedeniyle kesirli diferansiyel denklemler için son elli yıl içinde çok geniş bir literatür oluşturulamamıştır. Fakat kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bazı kalitatif davranışları üzerine son yıllarda önemli çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu çalışmaları incelediğimizde salınımlılık konusunda az sayıda çalışma olduğu göze çarpmaktadır. Bu boşluğu elimizden geldiği kadarıyla doldurmak için tezimizde kesirli mertebeden denklemlerin salınımlılıkları ayrıntılarıyla araştırılmıştır. Göz önüne alınan, diferansiyel denklem sınıfları için genelleştirilmiş Riccati dönüşümü teknikleri, genelleştirilmiş Philos tipi çekirdekleri ve kesirli mertebeden türevle tamsayı mertebeli türev arasında bir ilişki kurmamıza olanak sağlayan değişken dönüşümleri yardımıyla salınımlılık teoremleri elde edilmiştir. Bu teoremlerdeki H , G , φ ve ρ fonksiyonlarının seçimine bağlı olarak çok sayıda salınımlılık kriteri elde edilebilir. Bunun yanı sıra, H ve G fonksiyonların özel seçimleri ile üçüncü bölümde sunmuş olduğumuz sonuçlar elde edilmiştir (bakınız Sonuç 3.2.6-7, Sonuç 3.3.5-6). Daha sonra bazı uygulamalara yer verilmiştir. Dikkatli bir şekilde incelenecek olursa, verilen bu uygulamalara literatürdeki çalışmalarda elde edilen kriterlerin hiç biri doğrudan uygulanamamaktadır. Tezimizde elde ettiğimiz teorik sonuçlar yardımıyla literatürdeki bu boşluğun kısmende olsa doldurulmasına katkıda bulunmuş olduğumuzu düşünmekteyiz.

İncelenen bu denklem sınıflarından farklı olarak kesirli diferansiyel denklemlerin (adi veya kısmi) ve kesirli fark denklemlerin salınımlılık özellikleri okuyucular tarafından incelenebilir.

Konu gerek kesirli türevin farklı zaman skalalarında tanımlanması, gerek yeni salınımlılık kriterleri elde etme çabasıyla devamlı güncel kalmaktadır. Örneğin, Abdalla [54], $m = \lceil \alpha \rceil$, ${}_q \nabla_0^\alpha$ Riemann-Liouville q - diferansiyel operatörü ve ${}_q I_0^{m-\alpha}$ q - kesirli integralini göstermek üzere,

$$\left. \begin{aligned} &{}_q \nabla_0^\alpha x + f_1(t, x) = r(t) + f_2(t, x), \quad t > 0 \\ &\lim_{t \rightarrow 0^+} {}_q I_0^{j-\alpha} x(t) = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\}$$

formundaki doğrusal olmayan denklemler için salınımlılık kriterleri sunmuştur. Burada ayrıca Caputo q - kesirli fark operatörü için de bazı kriterler verilmiştir. Bu çalışma kesirli q - fark denklemlerine yönelik yapılacak çalışmalar için önemli bir referans olabilir.

- [1] Diethelm, K., (2010). The Analysis of Fractional Differential, Springer, Berlin.
- [2] Miller, K., Ross B., (1993). An Introduction to the Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York.
- [3] Kilbas, A., Srivastava H., Trujillo J., (2006). Theory and of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam.
- [4] Podlubny, I., (1999). Fractional Differential Equations, Press, San Diego.
- [5] Chen, D., X., (2013). "Oscillation behavior of a class of fractional differential equations with damping", UPB Scientific Bulletin, Series A, 75(1): 107-118.
- [6] Qin, H., Zheng, B., (2013). "Oscillation for a class of fractional differential equations with damping term", Hindawi Publishing Corporation The Scientific World Journal, 2013, Article ID 685621, 9 pp.
- [7] Matignon, D., (1996). "Stability result on fractional differential equations with applications to control processing", Proceedings of IMACS-SMC, 963–968.
- [8] Chen, Y., Moore, K.L.,(2002). "Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems", Nonlinear Dyn., (29): 191–200.
- [9] Deng, W.H., Li, C.P.,(2005). "Synchronization of chaotic fractional Chen system", J. Phys. Soc. Jpn., (74): 1645–1648.
- [10] Sturm, C., (1836). "Sur les equations differentielles lineaires du second ordre", J. Math. Pures Appl., 1, 106-186.
- [11] Kneser, A., "Untersuchungen uber die reelen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen", Math. Ann., 42, 409-435 (1893); J. Reine Angew. Math. 116, 178-212 (1896).
- [12] Fite, W., B., (1918). "Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations", Trans. Amer. Math. Soc. 19, 341-352.
- [13] Wintner, A., (1949). "A criteria of oscillatory stability", Quart. Appl. Math, 7, 115-117.
- [14] Hartman, P., (1952). "On nonoscillatory linear differentiel equations of second order", Amer. J. Math., 74, 389-400.

- [15] Kamanev, I. V., (1978). "An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order", *Mat. Zametki*, 23, 249-251.
- [16] Philos, C. G., (1989). "Oscillation theorems for linear differential equations of second order", *Arch. Math.*, 53, 482-492.
- [17] Atkinson, F. V., (1955). "On second order nonlinear oscillations", *Pacific J. Math.*, 5, 643-647.
- [18] Belohorec, S., (1961). "Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order", *Matematicky Casopis Slovenskej Akademie Vied*, 11, 250-255.
- [19] Wong, J. S. W., (2000). "Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations involving general means", *J. Math. Anal. Appl.*, 247, 489-505.
- [20] Grace, S., Agarwal, R., Wong, P., & Zafer, A. (2012). "On the oscillation of fractional differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*", 15(2): 222-231.
- [21] Chen, D.-X., (2012). "Oscillation criteria of fractional differential equations", *Advances in Difference Equations*, (2012), article 33, 18 pages.
- [22] Delbosco, D., Rodino, L., (1996). "Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation", *J. Math. Anal. Appl.*, 204, 609-625.
- [23] Bai, Z., Lü, H., (2005). "Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation", *J. Math. Anal. Appl.*, 311, 495-505.
- [24] Jafari, H., Daftardar-Gejji, V., (2006). "Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method", *Appl. Math. Comput.*, 180, 700-706.
- [25] Sun, S., Zhao, Y., Han, Z., Li, Y., (2012). "The existence of solutions for boundary value problem of fractional hybrid differential equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17, 4961-4967.
- [26] Muslim, M., (2009). "Existence and approximation of solutions to fractional differential equations", *Math. Comput. Model.*, 49, 1164-1172.
- [27] Saadatmandi, A., Dehghan, M., (2010). "A new operational matrix for solving fractional-order differential equations", *Comput. Math. Appl.*, 59, 1326-1336.
- [28] Ghoreishi, F., Yazdani, S., (2011). "An extension of the spectral Tau method for numerical solution of multi-order fractional differential equations with convergence analysis", *Comput. Math. Appl.*, 61, 30-43.
- [29] Edwards, J., Ford N., Simpson, A., (2002). "The numerical solution of linear multi-term fractional differential equations: systems of equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 148, 401-418.
- [30] Galeone, L., Garrappa, R., (2009). "Explicit methods for fractional differential equations and their stability properties", *J. Comput. Appl. Math.*, 228, 548-560.

- [31] Trigeassou, J., Maamri, N., Sabatier, J., Oustaloup, A., (2011). "A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations", *Signal Process.*, 91, 437-445.
- [32] Deng, W., (2010). "Smoothness and stability of the solutions for nonlinear fractional differential equations", *Nonlinear Anal.*, 72, 1768-1777.
- [33] Lacroix, S.F., (1819). *Traite du Calcul Differentiel et du Calcul Integral* Paris(Courcier), 3, second edition.
- [34] Jumarie, G., (2006). "Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results", *Comput. Math. Appl.* 51, 1367-1376.
- [35] Charoenphon, S., (2014). *Green's Functions of Discrete Fractional Calculus Boundary Value Problems and an Application of Discrete Fractional Calculus to a Pharmacokinetic Model*, Masters Theses & Specialists Projects, Western Kentucky University, Bowling Green, Kentucky.
- [36] Kelley, W.G., Peterson, A.C. (2004). *Difference Equations; An Introduction with Applications*, Academic Press.
- [37] Atici, F. M., Eloe, P. W., (2008). "Initial value problems in discrete fractional calculus", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137 (3): 981-989.
- [38] Agarwal, R. P., Bohner, M., Li, W, T., (2004). *Nonoscillation and oscillation theory for functional differential equations*, CRC Press.
- [39] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Polya, G., (1988). *Inequalities*, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge.
- [40] Feng, Q., Meng, F., (2013). "Oscillation of solutions to nonlinear forced fractional differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations*", 2013(169): 1-10.
- [41] Öğrekçi, S., (2015). "Interval oscillation criteria for functional differential equations of fractional order", *Advances in Difference Equations*, 2015(1), 3.
- [42] Feng, Q., (2013). "Interval oscillation criteria for a class of nonlinear fractional differential equations with nonlinear damping term", *IAENG Int. J. Appl. Math*, 43(3): 154-159.
- [43] Feng, Q., (2014). "Oscillatory Criteria For Two Fractional Differential Equations, *WSEAS Transactions on Mathematics*", (13): 800-810.
- [44] Liu, T., Zheng, B., Meng, F., (2013). "Oscillation on a class of differential equations of fractional order", *Mathematical Problems in Engineering*, (2013).
- [45] Zheng, B., (2013). "Oscillation for a class of nonlinear fractional differential equations with damping term", *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 6(1): 107--115.

- [46] Han, Z., Zhao, Y., Sun, Y., Zhang, C., (2013). "Oscillation for a class of fractional differential equation", Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013, Article ID 390282, 6 pages.
- [47] Qi, C., Cheng, J., (2013). "Interval oscillation criteria for a class of fractional differential equations with damping term", Mathematical Problems in Engineering, 2013, Article ID 301085, 8 pages.
- [48] Xiang, S., Han, Z., Zhao, P., Sun, Y., (2014). "Oscillation Behavior for a Class of Differential Equation with Fractional-Order Derivatives", Abstract and Applied Analysis, 2014, Article ID 419597, 9 pages. doi:10.1155/2014/419597
- [49] XU, R., (2013). "Oscillation Criteria for Nonlinear Fractional Differential Equations, Hindawi Publishing Corporation", Journal of Applied Mathematics, 2013, Article ID 971357, 7 pages.
- [50] Sagayaraj, M. R., Selvam, A. G. M., Loganathan, M. P., (2014). "On the oscillation of nonlinear fractional difference equations", Math. Aeterna, 4: 91-99.
- [51] Selvam, A. G. M., Sagayaraj, M. R., Loganathan, M. P., (2014). "Oscillatory behavior of a class of fractional difference equations with damping", International Journal of Applied Mathematical Research, 3 (3): 220-224.
- [52] Li, W. N., (2016). "Oscillation results for certain forced fractional difference equations with damping term", Advances in Difference Equations, 1 (2016) : 1-9.
- [53] Sagayaraj, M. R., Selvam, A. G. M., Loganathan, M. P., (2014). "Oscillation Criteria for a Class of Discrete Nonlinear Fractional Equations", Bulletin of Society for Mathematical Services and Standards, 3 (1): 27-35.
- [54] Abdalla, B., (2017). "On the oscillation of q -fractional difference equations", Advances in Difference Equations, 2017 (1), 254.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hakan ADIGÜZEL
Doğum Tarihi ve Yeri : 1987 / Antalya
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : adiguzelhkn@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Gazi	2012
Lisans	Matematik	Atatürk	2010
Lise	Fen Bilimleri	Antalya Atatürk	2005

YAYINLARI

Makale

1. Bayram, M., Secer, A., Adiguzel, H., (2017). "Oscillatory behavior of solutions of differential equations with fractional order", Applied Mathematics & Information Sciences, 11(3): 683-691.
2. Secer, A., Adiguzel, H., (2016). "Oscillation of solutions for a class of nonlinear fractional difference equations", The Journal of Nonlinear Science and Applications (JNSA), 9 (2016)(11): 5862-5869.
3. Bayram, M., Adiguzel, H., Secer, A., (2016). "Oscillation criteria for nonlinear fractional differential equation with damping term", Open Physics, 14(1): 119-128.
4. Bayram, M., Adiguzel, H., Ogrekci, S., (2015). "Oscillation of fractional order functional differential equations with nonlinear damping", Open Physics, 13(1).

Bildiri

1. Bayram, M., Secer, A., Adiguzel, H., (2017). "Oscillation Behavior of Solution of Nonlinear Fractional Neutral Differential Equations", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling., Temmuz 2017, Istanbul, Turkey.
2. Bayram, M., Secer, A., Adiguzel, H., (2017). "Oscillation Properties of Second-Order Neutral Functional Dynamic Equations on Time Scales", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling., Temmuz 2017, Istanbul, Turkey.
3. Bayram, M., Secer, A., Adiguzel, H., (2017). "Oscillation Result for Fractional Partial Differential Equations", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling., Temmuz 2017, Istanbul, Turkey.
4. Secer, A., Adiguzel, H., (2017). "Some Oscillation Criteria for a Kind of Nonlinear Fractional Differential Equations", 3rd International Conference on Pure & Applied Science., Şubat 2017, Dubai.
5. Adiguzel, H., Bayram, M., Ogrekci, S., (2016). "Oscillation of Fractional Order Functional Differential Equations With Nonlinear Damping Term", 2nd International Conference on Pure & Applied Science., Haziran 2016, Istanbul, Turkey.
6. Adiguzel, H., Bayram, M., Secer, A., (2016). "Oscillation of Solutions to Nonlinear Fractional Differential Equation with Damping", 2nd

International Conference on Pure & Applied Science., Haziran 2016, Istanbul, Turkey.

7. Secer, A., Adiguzel, H., (2016). "Oscillation Criteria for Fractional Differential Equation With Functional Term", International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Mayıs 2016, Elazığ, TURKEY.

