

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIRLI OPERATÖR KATSAYILI  
BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN İKİNCİ DÜZENLİ İZİ**

**AYLAN CEYHAN**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
DOÇ. DR. ERDAL GÜL**

**İSTANBUL, 2017**

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIRLI OPERATÖR KATSAYILI  
BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN İKİNCİ DÜZENLİ İZİ**

Aylan CEYHAN tarafından hazırlanan tez çalışması 19/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Doç. Dr. Erdal GÜL  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Erdal GÜL  
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Muhammed ULUDAĞ  
Galatasaray Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN  
İstanbul Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK  
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN  
Yıldız Teknik Üniversitesi

## ÖNSÖZ

---

Dördüncü mertebeden sınırlı operatör katsayılı bir diferansiyel ifade ile oluşturulan operatörün ikinci düzenli izinin hesaplandığı bu tez çalışmasının konuya ilgi duyanlar için iyi bir kaynak olmasını temenni eder çalışmam sırasında bana yol gösteren, sabır ve hoşgörüsünü esirgemeyen çok değerli danışmanım Doç. Dr. Erdal Gül'e ve her türlü desteği ile hep yanımda olan çok kıymetli anneme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2017

Aylan CEYHAN

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                                                     | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ .....                                                                                                                                 | v     |
| ÖZET .....                                                                                                                                          | vi    |
| ABSTRACT .....                                                                                                                                      | viii  |
| BÖLÜM 1                                                                                                                                             |       |
| GİRİŞ .....                                                                                                                                         | 1     |
| 1.1    Literatür Özeti .....                                                                                                                        | 1     |
| 1.2    Tezin Amacı .....                                                                                                                            | 1     |
| 1.3    Bulgular .....                                                                                                                               | 2     |
| BÖLÜM 2                                                                                                                                             |       |
| ÖN BİLGİLER .....                                                                                                                                   | 5     |
| BÖLÜM 3                                                                                                                                             |       |
| DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIRLI OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL<br>OPERATÖRÜN SPEKTRUMUN İNCELENMESİ VE İKİNCİ DÜZENLİ İZİNİN<br>HESAPLANMASI ..... |       |
| 3.1    Dördüncü Mertebeden Sınırlı Operatör Katsayılı Bir Diferansiyel İfade ile<br>Oluşturulan Operatörün Spektrumu Hakkında .....                 | 13    |
| 3.2    Özdeğerler ve Rezolvent ile İlgili Bazı Bağıntılar .....                                                                                     | 16    |
| 3.3    İkinci Düzenli İzin Hesaplanması .....                                                                                                       | 40    |
| 3.4    Örnekler.....                                                                                                                                | 73    |
| BÖLÜM 4                                                                                                                                             |       |
| SONUÇ VE ÖNERİLER .....                                                                                                                             | 76    |
| KAYNAKLAR .....                                                                                                                                     | 77    |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                                                                      | 79    |

## SİMGE LİSTESİ

---

|                    |                                                                                               |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\ \cdot\ $        | Norm                                                                                          |
| $(\cdot, \cdot)$   | İç Çarpım                                                                                     |
| $L^*$              | $L$ operatörünün eşleniği                                                                     |
| $L^{-1}$           | $L$ operatörünün tersi                                                                        |
| $\bar{L}$          | $L$ operatörünün kapanışı                                                                     |
| $D(L)$             | $L$ operatörünün tanım kümesi                                                                 |
| $R(L)$             | $L$ operatörünün değer kümesi                                                                 |
| $\rho(L)$          | $L$ operatörünün rezolvent kümesi                                                             |
| $\sigma(L)$        | $L$ operatörünün spektrumu                                                                    |
| $B(X, Y)$          | Tüm sınırlı lineer $L: X \rightarrow Y$ operatörlerinin kümesi                                |
| $\sigma_\infty(H)$ | Tüm tam sürekli $L: H \rightarrow H$ operatörlerinin kümesi                                   |
| $s_j(A)$           | $A \in \sigma_\infty$ operatörünün $s$ -sayıları ( $j = 1, 2, \dots$ )                        |
| $r(A)$             | $A$ operatörünün boyutu                                                                       |
| $\nu(A)$           | $A \in \sigma_\infty$ operatörünün sıfırdan farklı tüm özdeğerlerinin katlılıklarının toplamı |

**DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIRLI OPERATÖR KATSAYILI  
BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN İKİNCİ DÜZENLİ İZİ**

Aylan CEYHAN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erdal GÜL

$H$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere  $H_1 = L_2(0, \pi; H)$  uzayında sırasıyla

$$l_0(y) = y''''(x)$$

$$l_0(y) = y''''(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

$$y'''(0) = y'''(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan  $L_0$  ve  $L$  operatörlerini ele alalım. Burada  $Q(x)$  operatör fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

- 1)  $Q(x)$ ,  $[0, \pi]$  aralığında dördüncü mertebeden zayıf türeve sahiptir ve her  $x \in [0, \pi]$  için  $Q^{(i)}(x)$  ( $i = \overline{0,4}$ )  $H$  den  $H$  ye kendine eş çekirdek operatörlerdir.
- 2)  $\|Q\| < \frac{1}{2}$
- 3)  $H$  uzayının  $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\| < \infty$  olacak şekilde bir  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  ortonormal bazı vardır.
- 4)  $\|Q^{(i)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$  ( $i = \overline{0,4}$ ) fonksiyonları  $[0, \pi]$  aralığında sınırlı ve ölçülebilirdir.

Bu çalışmada  $L$  operatörünün spektrumu incelenmiş ve ikinci düzenli izi için  $C$  ,  $Q(x)$  operatör fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) + 2C \right]$$

$$= C + \frac{1}{32} [\text{tr} Q^{iv}(0) + \text{tr} Q^{iv}(\pi)] + \frac{1}{4} [\text{tr} Q^2(0) + \text{tr} Q^2(\pi)]$$

şeklinde bir formül bulunmuştur.

**Anahtar kelimeler:** Hilbert uzayı, çekirdek operatör, özdeğer, spektrum, düzenli iz.

**THE SECOND REGULARIZED TRACE OF A DIFFERENTIAL OPERATOR OF  
FOURTH ORDER WITH BOUNDED OPERATOR COEFFICIENT**

Aylan CEYHAN

Department of Mathematics

Phd. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Erdal GÜL

Let  $L_0$  and  $L$  be operators which are formed by the differential expressions

$$l_0(y) = y^{(4)}(x)$$

$$l(y) = y^{(4)}(x) + Q(x)y(x)$$

respectively, in the space  $H_1 = L_2(0, \pi; H)$ , with the same boundary condition

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

$$y'''(0) = y'''(\pi) = 0$$

where  $H$  is a separable Hilbert space. Here we assume that  $Q(x)$  is a operator function which satisfying the following conditions:

- 1)  $Q(x)$ , has weak fourth-order derivatives in the interval  $[0, \pi]$  and for every  $x \in [0, \pi]$ ,  $Q^{(i)}(x)$  ( $i = \overline{0,4}$ ) are self adjoint kernel operators from  $H$  to  $H$ .
- 2)  $\|Q\| < \frac{1}{2}$
- 3)  $H$  has a orthonormal base  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , such that  $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\| < \infty$ .
- 4) Functions  $\|Q^{(i)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$  ( $i = \overline{0,4}$ ) are bounded and measurable in interval  $[0, \pi]$ .

In this study the spectrum of  $L$  has been examined and the following formula for the second regularized trace of  $L$  has been founded

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) + 2C \right]$$

$$= C + \frac{1}{32} [\text{tr} Q^{iv}(0) + \text{tr} Q^{iv}(\pi)] + \frac{1}{4} [\text{tr} Q^2(0) + \text{tr} Q^2(\pi)]$$

Here  $C$  is a constant, depend on operator function  $Q(x)$ .

**Keywords:** Hilbert space, kernel operator, eigenvalue, resolvent, regularized trace.

#### 1.1 Literatür Özeti

Skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi ile ilgili araştırmalar ilk olarak Gelfand ve Levitan'ın [1] çalışması ile başlamıştır. Bu çalışmadan sonra Dikiy [2], Halberg ve Kramer [3], Levitan [4], Guseynov ve Levitan [5] ve daha birçok çalışmalarda çeşitli skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi incelenmiştir. Bu konudaki çalışmaların bir listesi Levitan ve Sargsyan [6] ve Fulton ve Pruess [7] çalışmalarında verilmiştir.

Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin düzenli izi Halilova [8], Adıgüzelov [9], Maksudov, Bayramoğlu ve Adıgüzelov [10], Bayramoğlu ve Adıgüzelov [11], Albayrak, Bayramoğlu ve Adıgüzelov [12], Adıgüzelov, Avcı ve Gül [13], Adıgüzelov, Baykal ve Bayramov [14], Gül [15], Adıgüzelov, Bakşi ve Baykal [16], Adıgüzelov ve Bakşi [17], Adıgüzelov ve Kanar [18], Adıgüzelov ve Sezer [19], Karayel ve Sezer [20] çalışmalarında incelenmiştir.

#### 1.2 Tezin Amacı

$H$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.  $[0, \pi]$  aralığında tanımlı, değerleri  $H$  uzayına ait olan ve

1. Her  $g \in H$  için  $(f(x), g)_H$  skaler fonksiyonu  $[0, \pi]$  aralığında Lebesgue ölçülebilir,

$$2. \int_0^{\pi} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty$$

koşullarını sağlayan tüm  $f$  fonksiyonlarının kümesini  $H_1 = L_2(0, \pi; H)$  ile gösterelim.  $H_1$  kümesi bir lineer uzaydır. Bu lineer uzayın herhangi iki  $f$  ve  $g$  elemanının iç çarpımı

$$(f, g) = \int_0^{\pi} (f(x), g(x))_H dx \quad (f, g \in H_1)$$

şeklinde tanımlanırsa,  $H_1$  uzayı ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur ( Kirillov [21] ).

Bu çalışmanın amacı  $H_1 = L_2(0, \pi; H)$  uzayında

$$l(y) = y''(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

$$y'''(0) = y'''(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan  $L = L_0 + Q$  operatörünün spektrumu incelemek, özdeğer ve rezolventle ilgili verilen bazı bağıntılardan faydalananarak  $L$  operatörünün ikinci düzenli izi için formül elde etmektir.

### 1.3 Bulgular

Yürütülen tez çalışmasının temel ayrıntıları aşağıda verilmiştir:

$l(y)$  ifadesinde yer alan  $Q(x)$  operatör fonksiyonunun  $[0, \pi]$  aralığında ikinci mertebeden zayıf türeve sahip olduğu, her  $x \in [0, \pi]$  için  $Q^{(i)}(x): H \rightarrow H$  ( $i = \overline{0,4}$ ) operatörlerinin kendine eş çekirdek operatörler olduğu ve  $\|Q\| < \frac{1}{2}$  koşulunun sağladığı varsayılmıştır.  $H$  uzayının

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\| < \infty$$

olacak şekilde bir  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  ortonormal bazı mevcut olduğu takdirde  $L$  operatörünün spektrumu ikişerli ayırık  $[m^4 - \|Q\|, m^4 + \|Q\|]$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) aralıklarının birleşiminin bir alt kümesidir ve spektrumun  $\{m^4\}_{m=0}^{\infty}$  kümesine ait olmayan her noktası katlılığı sonlu olan ayırık bir özdeğerdir. Ayrıca  $m^4$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ),  $L$

operatörünün katlılığı sonlu veya sonsuz olan bir özdeğeri olabilir ve  $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$  ler  $L$  operatörünün  $[m^4 - \|Q\|, m^4 + \|Q\|]$  aralığına ait olan özdeğerler olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{mn} = m^4$  tür.

$R_{\lambda}^0$  ve  $R_{\lambda}$  sırasıyla,  $L_0$  ve  $L$  operatörlerinin rezolventleri olarak alındığında

$$D_{pj} = \frac{(-1)^j}{\pi i j} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} \left[ (QR_{\lambda}^0)^j \right] d\lambda \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$D_p^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \operatorname{tr} \left[ R_{\lambda} (QR_{\lambda}^0)^{N+1} \right] d\lambda$$

olmak üzere söz konusu operatörlerin özdeğerleri ile ilgili

$$\sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) = \sum_{j=1}^N D_{pj} + D_p^{(N)}$$

formülü elde edilir. Buradan varsayılan koşullar altında  $\|Q(x)\|_{\sigma_1(H)}$  fonksiyonu  $[0, \pi]$  aralığında integrallenebilir ve  $Q'(0), Q'(\pi), Q'''(0), Q'''(\pi) \in \sigma_p(H)$  ise

$$D_{p1} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p m^4 \int_0^{\pi} \operatorname{tr} Q(x) dx + \frac{1}{12\pi} p(p+1)(2p+1) (\operatorname{tr} Q'(\pi) - \operatorname{tr} Q'(0))$$

$$+ \frac{1}{8\pi} p (\operatorname{tr} Q'''(0) - \operatorname{tr} Q'''(\pi)) + \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} \operatorname{tr} Q^{iv}(x) \cos 2mx dx$$

$$D_{p2} = \frac{6p+7}{8\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{tr} Q^2(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} \operatorname{tr} Q^2(x) \cos 2mx dx$$

$$+ \frac{2p+1}{8\pi^2} \operatorname{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 + O(p^{-1})$$

olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra  $D_{p3}$  ifadesi özel olarak hesaplanarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_{p3} = 0$$

olduğu gösterilmiş ve  $|\lambda| = b_p = (p^2 + p + 1)^2 - \frac{1}{2}$  için

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_{pj} = 0 ; \quad (j \geq 4)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_p^{(N)} = 0 \quad (N \geq 4)$$

elde edilmiştir. Bu eşitliklerden yararlanarak  $C$  ,  $Q(x)$  operatör fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) + 2C \right]$$

serisinin toplamı için formül bulunmuştur. Bu serinin toplamına  $L$  operatörünün ikinci düzenli izi denir.

Son olarak varsayılan koşulları sağlayan  $Q(x)$  operatör fonksiyonu için örnekler verilmiştir.

## BÖLÜM 2

### ÖN BİLGİLER

$H$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda iç çarpımı  $(\cdot, \cdot)_H$ , normu da  $\|\cdot\|_H$  ile göstereceğiz.  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  olmak üzere bir  $(a, b)$  aralığında tanımlı, değerleri  $H$  uzayına ait olan

1. Her  $g \in H$  için  $(f(x), g)_H$  skaler fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir,

2. 
$$\int_a^b \|f(x)\|_H^2 dx < \infty \quad (2.1)$$

koşullarını sağlayan  $f$  fonksiyonlarının kümesini  $H_1 = L_2(a, b; H)$  ile gösterelim.  $H_1$  in herhangi  $f$  ve  $g$  elemanlarının iç çarpımı

$$(f, g) = \int_a^b (f(x), g(x))_H dx \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanırsa,  $H_1$  kümesi bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur (Kirillov [21]).  $H_1$  uzayındaki iç çarpımı  $(\cdot, \cdot)$ , normu da  $\|\cdot\|$  ile göstereceğiz.

$\overline{D(A)} = H$  olmak üzere  $A, D(A)$  dan  $H$  ye kendine eş bir operatör olsun. Her  $x \in D(A)$ ,  $x \neq 0$  için  $(Ax, x) > 0$  ( $(Ax, x) < 0$ ) ise  $A$  ya pozitif (negatif) operatör denir ve bu  $A > 0$  ( $A < 0$ ) şeklinde yazılır. Her  $x \in D(A)$  için  $(Ax, x) \geq 0$  ( $(Ax, x) \leq 0$ ) ise  $A$  ya negatif olmayan (pozitif olmayan) bir operatör denir ve bu  $A \geq 0$  ( $A \leq 0$ ) şeklinde gösterilir.

$A$  ve  $B$  kendine eş herhangi iki operatör olsun.  $D(A) \subset D(B)$  ve  $D(A)$  dan  $H$  ye  $A - B$  operatörü pozitif (negatif olmayan) bir operatör ise  $A$  ya  $B$  den büyüktür (küçük değildir) denir ve  $A > B$  ( $A \geq B$ ) olarak yazılır.  $H$  den  $H$  ye tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini  $B(H)$  ile ve  $H$  den  $H$  ye tüm tam sürekli operatör kümesini de  $\sigma_\infty(H)$  ile göstereceğiz.

**Tanım 2.1**  $A$  negatif olmayan kendine eş bir operatör ve  $B$  de  $B^2 = A$  olacak şekilde kendine eş bir operatör ise  $B$  ye  $A$  nın karekökü denir.

**Teorem 2.1** Negatif olmayan kendine eş bir  $A: H \rightarrow H$  operatörünün bir tek negatif olmayan kendine eş  $B$  karekökü vardır. Eğer  $C: H \rightarrow H$ ,

$$AC = CA \quad (2.3)$$

olacak şekilde herhangi bir lineer operatör ise

$$BC = CB \quad (2.4)$$

dir (Lysternik ve Sobolev [22]).

**Tanım 2.2** Bir  $A$  lineer operatörünün bir  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörlerin ve sıfır elemanının oluşturduğu  $N_\lambda$  lineer manifolduna  $A$  nın  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen özuzayı denir.

**Tanım 2.3** Bir  $A$  lineer operatörünün bir  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen  $N_\lambda$  özuzayının boyutuna  $\lambda$  özdeğerinin katlılığı denir.

$A$  operatörünün pozitif karekökü  $A^{\frac{1}{2}}$  şeklinde gösterilir.  $A \in \sigma_\infty(H)$  sıfırdan farklı bir operatör olsun. Bu durumda  $A^*A$  kendine eş negatif olmayan bir operatördür ve  $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \sigma_\infty(H)$  dir (Cohberg ve Krein [23]).  $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$  operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleri  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.  $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$  negatif olmayan bir operatör olduğundan  $s_1, s_2, \dots, s_k$  pozitif sayılardır. Bu sayılara  $A$  operatörünün  $s$  sayıları denir. Eğer  $k < \infty$  ise  $s_j = 0$  ;

$j = k + 1, k + 2, \dots$  kabul edilir.  $A$  nın  $s$  sayıları bazen  $s_j(A)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) şeklinde de yazılabilir.  $s_1(A) = \|A\|$  olduğunu belirtelim. Eğer  $A$  normal operatör yani  $A^*A = AA^*$  ise o takdirde

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)| \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2.5)$$

dir (Cohberg ve Krein [23]). Burada  $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_k(A)$ ,  $A$  operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir.  $A$  operatörünün  $s$  sayılarının sayısını  $\nu(A)$  ile göstereceğiz.  $\nu(A)$  sonlu ya da sonsuz olabilir.  $s$  sayıları

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} s_j^p(A) < \infty \quad (p \geq 1) \quad (2.6)$$

koşulunu sağlayan tüm  $A \in \sigma_\infty(H)$  kümesinin,  $O$  operatörle birleşimini  $\sigma_p$  veya  $\sigma_p(H)$  simgesiyle göstereceğiz. Burada  $\sigma_p$  ( $p \geq 1$ ) bir ayrılabilir Banach uzayıdır (Cohberg ve Krein [23]).

Bu uzayın her  $A \neq O$  operatörünün normu

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = \left[ \sum_{j=1}^{\nu(A)} s_j^p(A) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır ve  $\|O\|_{\sigma_p(H)} = 0$  kabul edilir.

**Tanım 2.4**  $\sigma_1$  uzayına ait olan, başka bir deyişle  $s$  sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty \quad (2.8)$$

özellğine sahip olan  $A \in \sigma_1(H)$  operatörüne çekirdek operatörü denir.

$A \in \sigma_p(H)$  ve  $B: H \rightarrow H$  sınırlı lineer bir operatör ise  $AB, BA \in \sigma_p(H)$  ve

$$\|AB\|_{\sigma_p(H)} = \|B\| \|A\|_{\sigma_p(H)} \quad (2.9)$$

$$\|BA\|_{\sigma_p(H)} = \|B\| \|A\|_{\sigma_p(H)} \quad (2.10)$$

dir. Ayrıca  $p_1 < p_2$  ise  $\sigma_{p_1} \subset \sigma_{p_2}$  dir (Cohberg ve Krein [23]).

**Tanım 2.5**  $A: H \rightarrow H$  bir sınırlı lineer operatör olsun. Eğer her  $\{e_j\}_1^\infty$  ortonormal tabanı için  $\sum_{j=1}^\infty (Ae_j, e_j)$  serisi yakınsak ise  $A$  operatörü sonlu matris izine sahiptir denir.

**Teorem 2.2**  $A$  bir çekirdek operatörü ise her  $\{e_j\}_1^\infty \subset H$  ortonormal tabanı için

$$\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$$

serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı  $\{e_j\}_1^\infty$  tabanının seçimine bağlı değildir (Cohberg ve Krein [23]). Bu  $\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$  toplamına  $A$  operatörünün matris izi denir ve  $\text{tr}A$  ile gösterilir.

$A$  ve  $B$  herhangi iki çekirdek operatörü ve  $\alpha, \beta$  herhangi iki sayı ise

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}A + \beta \text{tr}B \quad (2.11)$$

$$\text{tr}A^* = \overline{\text{tr}A} \quad (2.12)$$

dir.

**Teorem 2.3**  $A \in \sigma_\infty(H)$  ve  $B: H \rightarrow H$  sınırlı lineer bir operatör ve  $AB, BA \in \sigma_1(H)$  ise

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (2.13)$$

dır (Cohberg ve Krein [23]).

**Tanım 2.6**  $A: H \rightarrow H$  bir sınırlı lineer operatör olsun. Bir  $\varphi \in H, \varphi \neq 0$  vektörü ve  $\lambda$  sayısı için

$$(A - \lambda I)^n \varphi = 0 \quad (2.14)$$

olacak şekilde bir  $n$  doğal sayısı varsa  $\varphi$  ye  $A$  operatörünün  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen esas vektörü denir.

**Tanım 2.7** Sınırlı lineer bir  $A: H \rightarrow H$  operatörünün bir  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen tüm esas vektörlerin ve  $0 \in H$  elemanının oluşturduğu  $K_\lambda$  lineer manifolduna söz konusu operatörün  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen esas lineer manifoldu denir.

**Tanım 2.8** Sınırlı lineer bir  $A: H \rightarrow H$  operatörünün bir  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen  $K_\lambda$  esas lineer manifoldunun boyutuna  $\lambda$  özdeğerinin katlılığı denir.

**Teorem 2.4**  $A$  çekirdek operatörünün matris izi için

$$\text{tr}A = \sum_{j=1}^{\vartheta(A)} \lambda_j(A) \quad (2.15)$$

dır. Burada her  $\lambda_j$  özdeğeri kendi katlılık sayısı kadar toplanmıştır.  $\vartheta(A)$  sıfırdan farklı özdeğerlerin katlılıklarının toplamıdır. Eğer  $A \in \sigma_p(H)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) ve  $\{e_j\}_1^w$  ( $1 \leq w \leq \infty$ ),  $H$  de bir ortonormal elemanlar sistemi ise

$$\sum_{j=1}^w |(Ae_j, e_j)|^p \leq \left( \|A\|_{\sigma_p(H)} \right)^p \quad (2.16)$$

dır. Bu eşitsizlikten özel olarak  $A$  çekirdek operatörü için

$$|\text{tr}A| \leq \|A\|_{\sigma_1(H)} \quad (2.17)$$

elde edilir (Cohberg ve Krein [23]).

**Teorem 2.5**  $B(\lambda)$  kompleks düzlemin bir açık  $G$  bölgesinde tanımlı, değerleri  $\sigma_1(H)$  uzayına ait ve bu uzayın normuna göre analitik bir operatör fonksiyon ise her  $n$  doğal sayısı için

$$\text{tr} \left[ (B^n(\lambda))' \right] = \text{tr} \left[ \frac{dB^n(\lambda)}{d\lambda} \right] = n \cdot \text{tr} \left[ B'(\lambda) (B^{(n-1)}(\lambda)) \right]$$

dır.

**İspat:** Teoremi ispatlamak için önce tümevarımla

$$(B^n(\lambda))' = \sum_{i=0}^{n-1} B^i(\lambda) B'(\lambda) B^{n-1-i}(\lambda) \quad (2.18)$$

formülünün sağlandığını gösterelim. Bu formülün  $n = 1$  için sağlandığı açıktır.  $n = 2$  olduğunda

$$(B^2(\lambda))' = (B(\lambda)B(\lambda))' = B'(\lambda)B(\lambda) + B(\lambda)B'(\lambda)$$

veya

$$(B^2(\lambda))' = \sum_{i=0}^1 B^i(\lambda) B'(\lambda) B^{1-i}(\lambda)$$

dir. (2.18) formülünün  $n = m$  için sağlandığını yani

$$(B^m(\lambda))' = \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda) B'(\lambda) B^{m-1-i}(\lambda) \quad (2.19)$$

olduğunu varsayıp  $n = m + 1$  için sağlandığını göstermek gerekir.

$$(B^{m+1}(\lambda))' = (B^m(\lambda)B(\lambda))' = (B^m(\lambda))'B(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda)$$

dir.

$(B^m(\lambda))'$  nün (2.19) ifadesi burada yerine konursa

$$\begin{aligned} (B^{m+1}(\lambda))' &= \left[ \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda) B'(\lambda) B^{m-1-i}(\lambda) \right] B(\lambda) + B^m(\lambda) B'(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda) B'(\lambda) B^{m-i}(\lambda) + B^m(\lambda) B'(\lambda) \end{aligned}$$

veya

$$(B^{m+1}(\lambda))' = \sum_{i=0}^m B^i(\lambda) B'(\lambda) B^{m-i}(\lambda)$$

elde edilir ki bununla da (2.18) formülü ispatlanmış olur. Varsayım gereği her  $\lambda \in G$  için  $B(\lambda) \in \sigma_1(H)$  olduğundan (3.18) den

$$\text{tr}[(B^n(\lambda))'] = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}[B^i(\lambda) B'(\lambda) B^{n-1-i}(\lambda)]$$

elde edilir.  $B'(\lambda) \in \sigma_1(H)$  ve her  $i \geq 0$  tamsayısı için  $B^i(\lambda) \in \sigma_1(H)$  olduğundan bu son eşitlikten

$$\text{tr}[(B^n(\lambda))'] = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}[B'(\lambda) B^{n-1-i}(\lambda) B^i(\lambda)]$$

veya

$$\text{tr}[(B^n(\lambda))'] = n. \text{tr}[B'(\lambda) B^{n-1}(\lambda)]$$

bulunur (Cohberg ve Krein [23]). Böylece teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 2.6** Değerleri  $\sigma_1(H)$  uzayına ait olan bir  $B(\lambda)$  operatör fonksiyonu bir  $\lambda = \lambda_0$  noktasında  $\sigma_1(H)$  uzayındaki normuna göre analitik ise o zaman  $\text{tr}B(\lambda)$  skaler fonksiyonu da bu  $\lambda = \lambda_0$  noktasında analitiktir ve

$$\text{tr}B'(\lambda_0) = [\text{tr}B(\lambda)]'_{\lambda=\lambda_0}$$

dir.

**İspat:**  $B(\lambda)$ ,  $\lambda_0$  noktasında  $\sigma_1(H)$  uzayındaki normuna göre analitik olduğundan

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)} = 0 \quad (2.20)$$

dir. Öte yandan

$$\left| \text{tr} \left[ \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right] \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)}$$

veya

$$\left| \frac{\text{tr}B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \text{tr}B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \text{tr}B'(\lambda_0) \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)}$$

olduğundan (2.20) den

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left| \frac{\text{tr}B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \text{tr}B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \text{tr}B'(\lambda_0) \right| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\text{tr}B'(\lambda_0) = [\text{tr}B(\lambda)]'_{\lambda=\lambda_0}$  dir. ■

**Tanım 2.9** Kendine eş bir  $A$  operatörünün spektrumu sadece her birinin katlılığı sonlu olan

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (2.21)$$

özdeğerlerinden ibaret ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

ise  $A$  operatörü saf ayrık spektruma sahiptir denir. (2.21) de her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

Bir  $A$  lineer operatörünün rezolvent kümesini  $\rho(A)$  spektrumunu da  $\sigma(A)$  ile göstereceğiz.

**Teorem 2.7**  $H$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve  $A: H \rightarrow H$  kendine eş bir operatör olsun.  $A$  operatörünün,

1. Özvektörlerinden oluşan tam ortonormal bir küme var
2. Sıfırdan farklı her özdeğerinin katlılığı sonlu
3. Her  $\varepsilon > 0$  için  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  aralığına ait olmayan özdeğerlerinin sayısı sonlu

ise  $A$  operatörü tam süreklidir (Smirnov[24]).

---

**DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIRLI OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMU VE İKİNCİ DÜZENLİ İZİNİN HESAPLANMASI****3.1 Dördüncü Mertebeden Sınırlı Operatör Katsayılı Bir Diferansiyel İfade ile Oluşturulan Operatörün Spektrumu Hakkında**

$H$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere  $H_1 = L_2(0, \pi; H)$  uzayında sırasıyla

$$l_0(y) = y^{(4)}(x)$$

$$l(y) = y^{(4)}(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

$$y'''(0) = y'''(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan  $L_0$  ve  $L$  operatörlerini ele alalım.  $l(y)$  nin ifadesindeki  $Q(x)$  operatör fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

**1<sup>0</sup>)**  $Q(x)$ ,  $[0, \pi]$  aralığında dördüncü mertebeden zayıf türevelere sahiptir ve her

$x \in [0, \pi]$  için  $Q^{(i)}(x)$  ( $i = \overline{0,4}$ )  $H$  den  $H$  ye kendine eş çekirdek operatörlerdir.

**2<sup>0</sup>)**  $\|Q\| < \frac{1}{2}$

**3<sup>0</sup>)**  $H$  uzayının

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\| < \infty$$

olacak şekilde bir  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  ortonormal bazı vardır.

**4<sup>0</sup>)**  $\|Q^{(i)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$  ( $i = \overline{0,4}$ ) fonksiyonları  $[0, \pi]$  aralığında sınırlı ve ölçülebilirdir.

Burada  $\sigma_1(H)$  ile  $H$  den  $H$  ye çekirdek operatörlerin uzayı gösterilmiştir. Ayrıca  $(.,.)_H$  ve  $(.,.)$  ile sırasıyla  $H$  ve  $H_1$  uzaylarındaki iç çarpım,  $\|.\|_H$  ve  $\|.\|$  ile de sırasıyla  $H$  ve  $H_1$  uzaylarındaki norm gösterilmiş olup  $\text{tr}A$  ile bir  $A$  çekirdek operatörünün özdeğerlerinin toplamı belirtilmiştir.

$L_0$  operatörünün spektrumu  $\{m^4\}_{m=0}^{\infty}$  kümesidir. Bu kümenin her noktası  $L_0$  operatörünün katlılığı sonsuz olan özdeğeridir.  $m^4$  özdeğerine karşılık gelen ortonormal özvektörler

$$d_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & m = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

olmak üzere

$$\psi_{mn}(x) = d_m \cos mx \varphi_n \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

şeklindedir.

$L_0$  ve  $L$  operatörlerinin rezolventleri sırasıyla  $R_\lambda^0$  ve  $R_\lambda$  olsun.

$Q(x)$  operatör fonksiyonu 3<sup>0</sup>) koşulunu sağlıyor ve  $\lambda \notin \{m^4\}_{m=0}^{\infty}$  ise  $QR_\lambda^0: H_1 \rightarrow H_1$  bir çekirdek operatördür. Gerçekten  $L_0$  operatörünün (3.1) özvektörler sistemi  $H_1$  uzayının ortonormal bir tabanı olduğundan bu durumda [23] ten bilindiği gibi  $QR_\lambda^0$  ın çekirdek operatörü olduğunu göstermek için

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_\lambda^0 \psi_{mn}\|$$

serisinin yakınsaklığını göstermek yeterlidir. (3.1) den

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_{\lambda}^0 \psi_{mn}\| &= |m^4 - \lambda|^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|Q\psi_{mn}\| \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |m^4 - \lambda|^{-1} \left[ \int_0^{\pi} (Q(x)d_m \cos mx\varphi_n, Q(x)d_m \cos mx\varphi_n)_H dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |m^4 - \lambda|^{-1} \left[ \int_0^{\pi} d_m^2 \cos^2 mx \|Q(x)\varphi_n\|_H^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |m^4 - \lambda|^{-1} \left[ \int_0^{\pi} \|Q(x)\varphi_n\|_H^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} |m^4 - \lambda|^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|
\end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. 3<sup>0</sup>) koşulu ve (3.2) den

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|QR_{\lambda}^0 \psi_{mn}\| < \infty$$

bulunarak  $QR_{\lambda}^0 \in \sigma_1(H_1)$  olduğu ispatlanmış olur.

$Q(x)$  operatör fonksiyonunun 2<sup>0</sup>) ve 3<sup>0</sup>) koşullarını sağlamasından yararlanarak  $L$  operatörünün spektrumunun, ikişerli ayırık  $[m^4 - \|Q\|, m^4 + \|Q\|]$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) aralıklarının birleşiminin bir alt kümesi olduğu ve spektrumunun aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir [15].

- 1)  $L$  operatörünün spektrumunun  $[m^4 - \|Q\|, m^4 + \|Q\|]$  aralığına ait  $m^4$  ten farklı her bir noktası, katlılığı sonlu olan ayırık bir özdeğerdir.
- 2)  $m^4$ ,  $L$  operatörünün katlılığı sonlu veya sonsuz olan bir özdeğeri olabilir.
- 3)  $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $L$  operatörünün  $[m^4 - \|Q\|, m^4 + \|Q\|]$  aralığına ait olan özdeğerleri olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{mn} = m^4$  tür.

### 3.2 Özdeğer ve Rezolvent ile İlgili Bazı Bağlılıklar

$\rho(L)$ ,  $L$  operatörünün rezolvent kümesi olsun. Her  $\lambda \in \rho(L)$  için  $QR_\lambda^0 \in \sigma_1(H_1)$  olduğundan

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = -R_\lambda QR_\lambda^0 \quad (3.3)$$

formülünden  $R_\lambda - R_\lambda^0 \in \sigma_1(H_1)$  elde edilir. Diğer yandan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn} - m^4) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

serileri mutlak yakınsaktır. Bu durumda

$$\text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{m^4 - \lambda} \right)$$

formülünün sağlandığı bilinmektedir [15]. Bu eşitliğin her iki tarafını  $\frac{\lambda^2}{2\pi i}$  ile çarpıp

$$|\lambda| = b_p = (p^2 + p + 1)^2 - \frac{1}{2} \quad (p \in \mathbb{N}, p \geq 1)$$

çemberi üzerinde integre edersek

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{m^4 - \lambda} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{m^4 - \lambda} \right) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{m^4 - \lambda} \right) d\lambda \quad (3.4) \end{aligned}$$

elde edilir.

$m \leq p$  ve  $p \geq 1$  için

$$\lambda_{mn} < m^4 + \frac{1}{2} \leq p^4 + \frac{1}{2} < (p^2 + p + 1)^2 - \frac{1}{2} = b_p \quad (3.5)$$

dir. Dolayısıyla

$$|\lambda_{mn}| < b_p \quad m \leq p ; p \geq 1 ; (n = 1, 2, \dots)$$

dir.

$m > p$  ve  $p \geq 1$  için

$$\lambda_{mn} \geq m^4 - \frac{1}{2} \geq (p+1)^4 - \frac{1}{2} > (p^2 + p + 1)^2 - \frac{1}{2} = b_p \quad (3.6)$$

veya

$$\lambda_{mn} > b_p \quad m > p ; p \geq 1 ; (n = 1, 2, \dots)$$

olur. (3.4), (3.5), (3.6) ve Cauchy integral formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda^2}{\lambda - \lambda_{mn}} d\lambda = \begin{cases} \lambda_{mn}^2 & , m \leq p \quad \text{ise} \\ 0 & , m > p \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda^2}{\lambda - m^4} d\lambda = \begin{cases} m^8 & , m \leq p \quad \text{ise} \\ 0 & , m > p \quad \text{ise} \end{cases}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} (m^8 - \lambda_{mn}^2) \quad (3.7)$$

bulunur. (3.3) formülünden herhangi bir  $N$  doğal sayısı için

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^N (-1)^j R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j + (-1)^{N+1} R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{N+1}$$

formülü elde edilir. Bu ifade (3.7) de yerine yazılırsa

$$\sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} (m^8 - \lambda_{mn}^2) = \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \text{tr} [R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j] d\lambda$$

$$+ \frac{(-1)^{N+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \text{tr} [R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}] d\lambda \quad (3.8)$$

olur. Bu formülü kısaca

$$\sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) = \sum_{j=1}^N D_{pj} + D_p^{(N)} \quad (3.9)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$D_{pj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \text{tr} [R_\lambda^0 (QR_\lambda^0)^j] d\lambda \quad (3.10)$$

$$D_p^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \text{tr} [R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}] d\lambda \quad (3.11)$$

dır.

**Yardımcı Teorem 3.1**  $QR_\lambda^0$  operatör fonksiyonu her  $\lambda \neq m^4$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) noktasında  $\sigma_1(H_1)$  uzayındaki norma göre analitiktir ve

$$(QR_\lambda^0)' = Q(R_\lambda^0)^2$$

dir.

**İspat:** Her  $\lambda \in \rho(L_0)$  için  $R_\lambda^0$  çekirdek operatör olduğundan ve

$$R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0 = \Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 R_\lambda^0$$

formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} \left\| \frac{QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - QR_\lambda^0}{\Delta\lambda} - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} &= \left\| QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 R_\lambda^0 - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} \\ &= \left\| QR_\lambda^0 R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} \\ &= \left\| QR_\lambda^0 (R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0) \right\|_{\sigma_1(H_1)} \\ &\leq \|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \|R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \|R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0\| = 0$  olduğundan buradan

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - QR_\lambda^0}{\Delta\lambda} - Q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H_1)} = 0$$

bulunur ki bu da  $\sigma_1(H_1)$  uzayındaki norma göre

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{QR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - QR_\lambda^0}{\Delta\lambda} = Q(R_\lambda^0)^2$$

veya

$$(QR_\lambda^0)' = Q(R_\lambda^0)^2$$

olması demektir. Böylece Yardımcı Teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 3.1**  $Q(x)$  operatör fonksiyonu  $2^0$  ve  $3^0$  koşullarını sağlıyor ise

$$D_{pj} = \frac{(-1)^j}{\pi i j} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} [(QR_\lambda^0)^j] d\lambda \quad (3.12)$$

formülü sağlanır.

**İspat:** Yardımcı Teorem 3.1 e göre her  $j$  doğal sayısı için  $(QR_\lambda^0)^j$  operatör fonksiyonu  $\rho(L_0)$  bölgesinde  $\sigma_1(H_1)$  uzayındaki norma göre analitiktir. O taktirde Teorem 2.5 e göre

$$\operatorname{tr} \left\{ [(QR_\lambda^0)^j]' \right\} = j \cdot \operatorname{tr} [(QR_\lambda^0)' (QR_\lambda^0)^{j-1}]$$

dir. Yardımcı Teorem 3.1 den  $(QR_\lambda^0)' = Q(R_\lambda^0)^2$  dir. Bu son iki eşitlikten

$$\operatorname{tr} \left\{ [(QR_\lambda^0)^j]' \right\} = j \cdot \operatorname{tr} [(QR_\lambda^0)^{j-1} Q(R_\lambda^0)^2] = j \cdot \operatorname{tr} [(QR_\lambda^0)^j R_\lambda^0] = j \cdot \operatorname{tr} [R_\lambda^0 (QR_\lambda^0)^j]$$

bulunur. Bu bağıntı  $D_{pj}$  nin (3.10) ifadesinde göz önüne alınırsa

$$D_{pj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \operatorname{tr} \left\{ [(QR_\lambda^0)^j]' \right\} d\lambda$$

elde edilir. Bu formül

$$\begin{aligned}
D_{pj} &= \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_p} \operatorname{tr} \left\{ \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right]' - 2\lambda (QR_\lambda^0)^j \right\} d\lambda \\
&= \frac{(-1)^j}{\pi ij} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} \left\{ (QR_\lambda^0)^j \right\} d\lambda + \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi ij} \int_{|\lambda|=b_p} \operatorname{tr} \left\{ \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right]' \right\} d\lambda \quad (3.13)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.6 ya göre

$$\operatorname{tr} \left\{ \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right]' \right\} = \left\{ \operatorname{tr} \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}'$$

dır. Dolayısıyla

$$\int_{|\lambda|=b_p} \operatorname{tr} \left\{ \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right]' \right\} d\lambda = \int_{|\lambda|=b_p} \left\{ \operatorname{tr} \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrali aşağıdaki gibi iki eğri üzerindeki integralin toplamı şeklinde gösterelim:

$$\begin{aligned}
&\int_{|\lambda|=b_p} \left\{ \operatorname{tr} \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda \\
&= \int_{\substack{|\lambda|=b_p \\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0}} \left\{ \operatorname{tr} \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda + \int_{\substack{|\lambda|=b_p \\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0}} \left\{ \operatorname{tr} \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$\varepsilon_0$ ,  $0 < \varepsilon_0 < b_p - (p+1)^4$  olacak şekilde bir pozitif sayı olmak üzere  $\operatorname{tr} \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right]$  fonksiyonunun

$$G_1 = \{ \lambda : b_p - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_p + \varepsilon_0, \operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon_0 \}$$

$$G_2 = \{ \lambda : b_p - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_p + \varepsilon_0, \operatorname{Im} \lambda < \varepsilon_0 \}$$

basit bağlantılı bölgelerin analitik ve

$$\{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = b_p, \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \} \subset G_1$$

$$\{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = b_p, \operatorname{Im} \lambda \leq 0 \} \subset G_2$$

olduğu dikkate alınırsa Leibnitz formülünü kullanarak (3.14) ten

$$\int_{|\lambda|=b_p} \left\{ \text{tr} \left[ \lambda^2 (QR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda = 2 \left[ \text{tr} \left[ b_p^2 (QR_\lambda^0)^j \right] - \text{tr} \left[ b_p^2 (QR_\lambda^0)^j \right] \right] = 0$$

elde edilir. (3.13) ve bu son eşitlikten

$$D_{pj} = \frac{(-1)^j}{\pi i j} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \text{tr} \left\{ (QR_\lambda^0)^j \right\} d\lambda$$

bulunur. ■

**Teorem 3.2** 3<sup>o</sup>) koşulu sağlanır,  $\|Q(x)\|_{\sigma_1(H)}$  fonksiyonu  $[0, \pi]$  aralığında integrallenebilir ve  $Q'(0), Q'(\pi), Q'''(0), Q'''(\pi) \in \sigma_p(H)$  ise

$$\begin{aligned} D_{p1} = & \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p m^4 \int_0^\pi \text{tr} Q(x) dx + \frac{1}{12\pi} p(p+1)(2p+1) (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) \\ & + \frac{1}{8\pi} p (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) + \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^\pi \text{tr} Q^{iv}(x) \cos 2mx dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

dir. Burada

$$\text{tr} Q^{iv}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (Q^{iv}(x) \varphi_n, \varphi_n)_H$$

dir.

**İspat:** Teorem 3.1 den

$$D_{p1} = -\frac{1}{\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \text{tr} (QR_\lambda^0) d\lambda \quad (3.16)$$

dir. Diğer taraftan  $L_0$  operatörünün (3.1) özvektörler sistemi  $H_1$  uzayının ortonormal bir tabanıdır. Ayrıca  $QR_\lambda^0$  her  $\lambda \in \rho(L_0)$  için çekirdek operatörü olduğundan tanım gereği

$$\text{tr}(QR_\lambda^0) = \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \psi_{mn}, \psi_{mn})$$

dir. Bu ifade (3.16) da yerine yazılırsa

$$D_{p1} = -\frac{1}{\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \psi_{mn}, \psi_{mn}) d\lambda \quad (3.17)$$

olur.  $|(QR_\lambda^0 \psi_{mn}, \psi_{mn})|$  ifadesini sınırlandıralım. (3.1) den yararlanarak

$$R_\lambda^0 \psi_{mn} = (L_0 - \lambda I)^{-1} \psi_{mn} = (m^4 - \lambda)^{-1} \psi_{mn}$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\begin{aligned} |(QR_\lambda^0 \psi_{mn}, \psi_{mn})| &= \left| \int_0^\pi (QR_\lambda^0 \psi_{mn}(x), \psi_{mn}(x))_H dx \right| \\ &= |m^4 - \lambda|^{-1} \left| \int_0^\pi (Q \psi_{mn}(x), \psi_{mn}(x))_H dx \right| \\ &= |m^4 - \lambda|^{-1} \left| \int_0^\pi (Q(x) d_m \cos mx \varphi_n, d_m \cos mx \varphi_n)_H dx \right| \\ &\leq |m^4 - \lambda|^{-1} \int_0^\pi |(Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H| dx \\ &\leq |m^4 - \lambda|^{-1} \int_0^\pi \|Q(x) \varphi_n\|_H dx \\ &\leq \sqrt{\pi} |m^4 - \lambda|^{-1} \left( \int_0^\pi \|Q(x) \varphi_n\|_H^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\pi} |m^4 - \lambda|^{-1} \|Q(x) \varphi_n\| \end{aligned}$$

dir.  $Q(x)$  operatör fonksiyonu 3<sup>o</sup>) koşulunu sağladığından bu son bağıntıdan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (QR_{\lambda}^0 \psi_{mn}, \psi_{mn}) \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (QR_{\lambda}^0 \psi_{mn}, \psi_{mn})$$

serilerinin  $|\lambda| = b_p$  çemberi üzerinde  $\lambda$  ya göre mutlak ve düzgün yakınsaklığı elde edilir. Dolayısıyla (3.17) den

$$\begin{aligned} D_{p1} &= -\frac{1}{\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda (m^4 - \lambda)^{-1} (Q\psi_{mn}, \psi_{mn}) d\lambda \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (Q\psi_{mn}, \psi_{mn}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)} d\lambda \\ &= 2 \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} m^4 (Q\psi_{mn}, \psi_{mn}) \\ &= 2 \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} m^4 \int_0^{\pi} (Q(x) d_m \cos mx \varphi_n, d_m \cos mx \varphi_n)_H dx \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} m^4 \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H \cos^2 mx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} m^4 \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H dx \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} m^4 \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H \cos 2mx dx \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left| \sum_{n=1}^q (Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H| \leq \|Q(x)\|_{\sigma_1(H)} \quad (q = 1, 2, \dots)$$

$$\left| \sum_{n=1}^q (Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H \cos 2mx \right| \leq \|Q(x)\|_{\sigma_1(H)}$$

olup varsayım gereği

$$\int_0^{\pi} \|Q(x)\|_{\sigma_1(H)} dx < \infty$$

olduğundan Lebesgue teoremine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H dx = \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (Q(x) \varphi_n, \varphi_n)_H \right] dx = \int_0^{\pi} \text{tr } Q(x) dx$$

dir. Dolayısıyla

$$D_{p1} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p m^4 \int_0^{\pi} \text{tr } Q(x) dx + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p m^4 \int_0^{\pi} \text{tr } Q(x) \cos 2mx dx \quad (3.18)$$

olur. Arka arkaya dört kez kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \text{tr } Q(x) \cos 2mx dx &= \frac{1}{2m} \sin 2mx \text{tr } Q(x) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2m} \int_0^{\pi} \text{tr } Q'(x) \sin 2mx dx \\ &= \frac{1}{4m^2} \cos 2mx \text{tr } Q'(x) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4m^2} \int_0^{\pi} \text{tr } Q''(x) \cos 2mx dx \\ &= \frac{\text{tr } Q'(\pi) - \text{tr } Q'(0)}{4m^2} - \frac{1}{4m^2} \int_0^{\pi} \text{tr } Q''(x) \cos 2mx dx \\ &= \frac{\text{tr } Q'(\pi) - \text{tr } Q'(0)}{4m^2} - \frac{1}{8m^3} \sin 2mx \text{tr } Q''(x) \Big|_0^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{8m^3} \int_0^{\pi} \text{tr } Q'''(x) \sin 2mx dx \\ &= \frac{\text{tr } Q'(\pi) - \text{tr } Q'(0)}{4m^2} + \frac{1}{8m^3} \int_0^{\pi} \text{tr } Q'''(x) \sin 2mx dx \\ &= \frac{\text{tr } Q'(\pi) - \text{tr } Q'(0)}{4m^2} - \frac{1}{16m^4} \cos 2mx \text{tr } Q'''(x) \Big|_0^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{16m^4} \int_0^{\pi} \text{tr } Q^{iv}(x) \cos 2mx dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{tr}Q'(\pi) - \text{tr}Q'(0)}{4m^2} - \frac{\text{tr}Q'''(\pi) - \text{tr}Q'''(0)}{16m^4} \\ + \frac{1}{16m^4} \int_0^\pi \text{tr} Q^{iv}(x) \cos 2mx \, dx$$

bulunur. Bu ifade (3.18) de yerine konulursa

$$D_{p1} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p m^4 \int_0^\pi \text{tr}Q(x) \, dx + \\ \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p m^4 \left[ \frac{\text{tr}Q'(\pi) - \text{tr}Q'(0)}{4m^2} - \frac{\text{tr}Q'''(\pi) - \text{tr}Q'''(0)}{16m^4} + \frac{\int_0^\pi \text{tr} Q^{iv}(x) \cos 2mx \, dx}{16m^4} \right]$$

veya

$$D_{p1} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p m^4 \int_0^\pi \text{tr}Q(x) \, dx + \frac{1}{12\pi} p(p+1)(2p+1)(\text{tr}Q'(\pi) - \text{tr}Q'(0)) \\ + \frac{1}{8\pi} p(\text{tr}Q'''(0) - \text{tr}Q'''(\pi)) + \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^\pi \text{tr} Q^{iv}(x) \cos 2mx \, dx$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Bu kez de  $j = 2$  için aşağıdaki teoremle hesaplanması daha karmaşık ve kapsamlı olan  $D_{p2}$  yi hesaplayalım.

**Teorem 3.3** Teorem 3.2 nin koşulları altında

$$D_{p2} = \frac{6p+7}{8\pi} \int_0^\pi \text{tr}Q^2(x) \, dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^\pi \text{tr}Q^2(x) \cos 2mx \, dx \\ + \frac{2p+1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) \, dx \right]^2 + O(p^{-1}) \quad (3.19)$$

dir.

**İspat:** Teorem 3.1 e göre

$$\begin{aligned}
D_{p2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} \left[ (QR_\lambda^0)^2 \right] d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( (QR_\lambda^0)^2 \psi_{mn}, \psi_{mn} \right) d\lambda
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olacaktır. Ayrıca  $QR_\lambda^0 \psi_{mn} = (m^4 - \lambda)^{-1} Q\psi_{mn}$  olup buradan

$$\begin{aligned}
(QR_\lambda^0)^2 \psi_{mn} &= QR_\lambda^0 \left( \frac{Q\psi_{mn}}{m^4 - \lambda} \right) \\
&= (m^4 - \lambda)^{-1} QR_\lambda^0 (Q\psi_{mn}) \\
&= (m^4 - \lambda)^{-1} QR_\lambda^0 \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (Q\psi_{mn}, \psi_{rq}) \psi_{rq} \right] \\
&= (m^4 - \lambda)^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (r^4 - \lambda)^{-1} (Q\psi_{mn}, \psi_{rq}) Q\psi_{rq}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade (3.20) de yerine konursa

$$\begin{aligned}
D_{p2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})(Q\psi_{rq}, \psi_{mn})}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} \right] d\lambda \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^p \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda \\
&\quad + \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda \\
&\quad + \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^p \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda \\
&\quad + \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda
\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. Burada

$m = r \leq p$  ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)^2} d\lambda = 1 \quad (3.22)$$

$m \neq r \leq p$  ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda \\ &= \frac{1}{m^4 - r^4} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{\lambda - m^4} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{\lambda - r^4} d\lambda \right] = 1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

bağıntıları sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^p \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\Psi_{mn}, \Psi_{rq})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda \\ &= \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} |(Q\Psi_{rq}, \Psi_{mn})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - r^4)(\lambda - m^4)} d\lambda \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\Psi_{mn}, \Psi_{rq})|^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda \end{aligned} \quad (3.24)$$

$m \leq p, r > p$  ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda = \frac{m^4}{m^4 - r^4} \quad (3.25)$$

ve  $m > p, r > p$  ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)} d\lambda = 0 \quad (3.26)$$

olduğu görülür. (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) ve (3.26) dan

$$\begin{aligned}
D_{p2} &= \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^p \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 + 2 \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \frac{m^4}{m^4 - r^4} \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 - \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \\
&\quad - 2 \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \frac{m^4}{r^4 - m^4} \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 \\
&\quad - \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2m^4}{r^4 - m^4}\right) |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\alpha_p = \alpha_p(n, q) = \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} |(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2$$

olsun. O takdirde

$$D_{p2} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \|Q\psi_{mn}\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_p \quad (3.27)$$

olur. Diğer taraftan  $m = \overline{0, p}$  ve  $r = \overline{p+1, \infty}$  için

$$\begin{aligned}
|(Q\psi_{mn}, \psi_{rq})|^2 &= \left| \int_0^{\pi} (Q(x) d_m \cos mx \varphi_n, d_r \cos rx \varphi_q)_H dx \right|^2 \\
&= \left| \int_0^{\pi} (Q(x) d_m \cos mx \varphi_n, \sqrt{2\pi^{-1}} \cos rx \varphi_q)_H dx \right|^2 \\
&= \frac{2d_m^2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos mx \cdot \cos rx dx \right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2d_m^2}{\pi} \left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \frac{\cos(m+r)x + \cos(m-r)x}{2} dx \right|^2 \\
&= \frac{d_m^2}{2\pi} \left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H [\cos(m-r)x + \cos(m+r)x] dx \right|^2 \\
&= \frac{d_m^2}{2\pi} \left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \right|^2 \\
&\quad + \frac{d_m^2}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \cdot \right. \\
&\quad \left. \int_0^\pi \overline{(Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H} \cos(m+r)x dx \right] \\
&\quad + \frac{d_m^2}{2\pi} \left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m+r)x dx \right|^2
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\alpha_p &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^p d_m^2 \sum_{r=p+1}^\infty \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^p d_m^2 \sum_{r=p+1}^\infty \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \\
&\quad \operatorname{Re} \left[ \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \cdot \int_0^\pi \overline{(Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H} \cos(m+r)x dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^p d_m^2 \sum_{r=p+1}^\infty \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m+r)x dx \right|^2
\end{aligned}$$

$$\alpha_p = \alpha_{p1} + \alpha_{p2} + \alpha_{p3} \quad (3.28)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\alpha_{p1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^p d_m^2 \sum_{r=p+1}^\infty \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \right|^2$$

$$\alpha_{p2} = \frac{Re}{\pi} \sum_{m=0}^p d_m^2 \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \left[ \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \cdot \int_0^{\pi} \overline{(Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H} \cos(m+r)x dx \right] \quad (3.29)$$

$$\alpha_{p3} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^p d_m^2 \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m+r)x dx \right|^2 \quad (3.30)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_{p1} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos rx dx \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{r-m=i \\ m \leq p \\ r > p}} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos rx dx \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix dx \right|^2 \sum_{\substack{r-m=i \\ m \leq p \\ r > p}} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$i \leq p$  halinde ( $m \geq 1$ )

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r-m=i \\ m \leq p \\ r > p}} \frac{m^4}{r^4 - m^4} &= \frac{p^4}{(p+i)^4 - p^4} + \frac{(p-1)^4}{(p-1+i)^4 - (p-1)^4} \cdots \frac{(p-i+1)^4}{(p+1)^4 - (p-i+1)^4} \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(p-j)^4}{(p-j+i)^4 - (p-j)^4} \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \left[ \frac{p}{4i} - \frac{j}{4i} - \frac{3}{8} + \frac{i}{8[2(p-j)+i]} + \frac{i[2(p-j)+i]}{4[2(p-j)^2 + 2i(p-j) + i^2]} \right] \\ &= \frac{p}{4} + \frac{1-4i}{8} + \frac{i}{8} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2p-2j+i} + \frac{i}{4} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2(p-j)+i}{2(p-j)^2 + 2i(p-j) + i^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m,r \in E} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} &= \sum_{\substack{r-m=i \\ m \leq p \\ r > p}} \left( 1 + \frac{2m^4}{r^4 - m^4} \right) = i + 2 \sum_{m,r \in E} \frac{m^4}{r^4 - m^4} \\
&= i + \frac{p}{2} + \frac{1-4i}{4} + \frac{i}{4} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2p-2j+i} + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2(p-j)+i}{2(p-j)^2 + 2i(p-j) + i^2} \\
&= \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + \frac{i}{4} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2p-2j+i} + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2(p-j)+i}{2(p-j)^2 + 2i(p-j) + i^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{i}{4} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2p-2j+i} = \frac{i}{4} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{p + (p-j) + (i-j)} < \frac{i}{4} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{p} = \frac{i^2}{4p} < \frac{i^2}{p}$$

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2(p-j)+i}{2(p-j)^2 + 2i(p-j) + i^2} &< \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2(p-j)+2i}{(p-j)^2 + 2i(p-j) + i^2} \\
&= \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2[(p-j)+i]}{[(p-j)+i]^2} \\
&= i \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{p-j+i} \\
&< i \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{p} = \frac{i^2}{p}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\sum_{m,r \in E} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} = \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + i^2 O_1(p^{-1}) \quad (i \leq p) \quad (3.32)$$

dir. Burada  $O_1(p^{-1})$ ,  $p$  ve  $i$  ye bağlı

$$0 < O_1(p^{-1}) < \frac{2}{p} \quad (3.33)$$

eşitsizliğini sağlayan bir ifadedir.

$i > p$  halinde

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r-m=i \\ m \leq p \\ r > p}} \frac{m^4}{r^4 - m^4} &= \frac{1^4}{(i+1)^4 - 1^4} + \frac{2^4}{(i+2)^4 - 2^4} + \cdots + \frac{p^4}{(i+p)^4 - p^4} \\
&= \sum_{j=1}^p \frac{j^4}{(i+j)^4 - j^4} = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{j}{4i} - \frac{3}{8} + \frac{i}{8(i+2j)} + \frac{i(i+2j)}{4(2j^2 + 2ij + i^2)} \right] \\
&= \frac{p(p+1)}{8i} - \frac{3p}{8} + \frac{i}{8} \sum_{j=1}^p \frac{1}{i+2j} + \frac{i}{4} \sum_{j=1}^p \frac{i+2j}{2j^2 + 2ij + i^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m,r \in E} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} &= \sum_{\substack{r-m=i \\ m \leq p \\ r > p}} \left( 1 + \frac{2m^4}{r^4 - m^4} \right) = p + 2 \sum_{m,r \in E} \frac{m^4}{r^4 - m^4} \\
&= p + \frac{p(p+1)}{4i} - \frac{3p}{4} + \frac{i}{4} \sum_{j=1}^p \frac{1}{i+2j} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^p \frac{i+2j}{2j^2 + 2ij + i^2} \\
&= p + \frac{p(p+1)}{4i} - \frac{pi}{4i} - \frac{2p}{4} + \frac{i}{4} \sum_{j=1}^p \frac{1}{i+2j} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^p \frac{i+2j}{2j^2 + 2ij + i^2} \\
&= \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + \frac{(p+1)(p-i)}{4i} + \frac{i}{4} \sum_{j=1}^p \frac{1}{i+2j} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^p \frac{i+2j}{2j^2 + 2ij + i^2} \\
&< \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + \frac{i}{4} \sum_{j=1}^p \frac{1}{i} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^p \frac{2i+2j}{j^2 + 2ij + i^2} \\
&= \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + \frac{p}{4} + i \sum_{j=1}^p \frac{1}{i+j} \\
&< \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + \frac{p}{4} + i \sum_{j=1}^p \frac{1}{i} \\
&= \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + \frac{p}{4} + p \\
&= \frac{7p+1}{4} \leq 2p
\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\sum_{m,r \in E} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} = O_1(p) \quad (i > p) \quad (3.34)$$

dir. Burada  $O_1(p)$ ,  $p$  ve  $i$  ye bağlı

$$0 < O_1(p) \leq 2p \quad (3.35)$$

eşitsizliğini sağlayan bir ifadedir.

(3.31),(3.32) ve (3.34) ten

$$\begin{aligned} \alpha_{p1} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos rx \, dx \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{p}{2} + \frac{1}{4} \right) \sum_{i=1}^p \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^p i^2 O_1(p^{-1}) \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=p+1}^{\infty} O_1(p) \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{p}{2} + \frac{1}{4} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^p i^2 O_2(p^{-1}) \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\ &\quad + \sum_{i=p+1}^{\infty} O_2(p) \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\ &= \alpha_{p1}^{(1)} + \alpha_{p1}^{(2)} + \alpha_{p1}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\alpha_{p1}^{(1)} &= \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{p}{2} + \frac{1}{4} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ix \, dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ix \, dx \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{8\pi} (2p+1) \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sqrt{\frac{1}{\pi}} \, dx \right|^2 \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} (2p+1) \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sqrt{\frac{1}{\pi}} \, dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \sum_{i=0}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H d_i \cos ix \, dx \right|^2 \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} (2p+1) \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sqrt{\frac{1}{\pi}} \, dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \int_0^{\pi} |(Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H|^2 \, dx \\
&\quad - \frac{1}{8\pi^2} (2p+1) \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \, dx \right|^2
\end{aligned} \tag{3.37}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
0 < \alpha_{p1}^{(2)} &= \sum_{i=1}^p i^2 O_2(p^{-1}) \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^p O_2(p^{-1}) \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sin ix \, dx \right|^2 \\
&< \frac{2}{\pi^2 p} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sin ix \, dx \right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi p} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ix \, dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{\pi p} \int_0^{\pi} |(Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H|^2 \, dx \\
&< \frac{1}{p} \int_0^{\pi} |(Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H|^2 \, dx
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
|\alpha_{p1}^{(3)}| &= \left| \sum_{i=p+1}^{\infty} O_2(p) \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right|^2 \right| \\
&= \left| \sum_{i=p+1}^{\infty} O_2(p) \frac{1}{i^2} \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sin ix \, dx \right|^2 \right| \\
&< \frac{2p}{\pi^2(p+1)^2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sin ix \, dx \right|^2 \\
&< \frac{2p}{\pi^2 p^2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sin ix \, dx \right|^2 \\
&= \frac{2}{\pi^2 p} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sin ix \, dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{\pi p} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ix \, dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{\pi p} \int_0^{\pi} |(Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H|^2 \, dx \\
&< \frac{1}{p} \int_0^{\pi} |(Q'(x) \varphi_n, \varphi_q)_H|^2 \, dx
\end{aligned} \tag{3.39}$$

dir. (3.27) ve (3.28) den

$$D_{p2} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} \|Q \Psi_{mn}\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (\alpha_{p1} + \alpha_{p2} + \alpha_{p3}) \tag{3.40}$$

elde edilir. Ayrıca (3.36) dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{p1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (\alpha_{p1}^{(1)} + \alpha_{p1}^{(2)} + \alpha_{p1}^{(3)})$$

tür. (3.37),(3.38) ve (3.39) bağıntılarından

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{p1}^{(1)} &= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{8\pi^2} (2p+1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_H^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{8\pi^2} (2p+1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left| \left( \left( \int_0^{\pi} Q(x) dx \right) \varphi_n, \varphi_q \right)_H \right|^2 \\ &= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_H^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{8\pi^2} (2p+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \left( \int_0^{\pi} Q(x) dx \right) \varphi_n \right\|_H^2 \\ &= \frac{1}{8\pi} (2p+1) \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{8\pi^2} (2p+1) \text{tr} \left( \int_0^{\pi} Q(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{p1}^{(2)} < \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q'(x)\varphi_n, \varphi_q)_H|^2 dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|Q'(x)\varphi_n\|_H^2 dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\pi} \text{tr} [Q'(x)]^2 dx \\ &= O_3(p^{-1}) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |\alpha_{p1}^{(3)}| < \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q'(x)\varphi_n, \varphi_q)_H|^2 dx = O_3(p^{-1})$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{p1} = \frac{2p+1}{8\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{2p+1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 + O_4(p^{-1}) \quad (3.41)$$

dir. Burada

$$0 < O_4(p^{-1}) < \frac{c_1}{p}$$

dir. Şimdi de  $\alpha_{p2}$  ve  $\alpha_{p3}$  ü sınırlandırılalım.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \right| &= \left| \frac{1}{m-r} \int_0^{\pi} (Q'(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \sin(m-r)x dx \right| \\ &\leq \frac{\left| (Q'(0)\varphi_n, \varphi_q)_H \right| + \left| (Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_q)_H \right| + \left| \int_0^{\pi} (Q''(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \right|}{(m-r)^2} \\ &\leq \frac{1}{(m-r)^2} \left[ \left| (Q'(0)\varphi_n, \varphi_q)_H \right| + \left| (Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_q)_H \right| + \int_0^{\pi} |(Q''(x)\varphi_n, \varphi_q)_H| dx \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx \cdot \int_0^{\pi} \overline{(Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H} \cos(m+r)x dx \right| &\leq \\ &\frac{3 \left[ \left| (Q'(0)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \left| (Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \pi \int_0^{\pi} |(Q''(x)\varphi_n, \varphi_q)_H|^2 dx \right]}{(m-r)^2(m+r)^2} \end{aligned}$$

dir. (3.29) ve son bağıntıdan

$$\begin{aligned} |\alpha_{p2}| &\leq \frac{3}{\pi} \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{r^4 + m^4}{(r+m)^2(r-m)^2(r^4 - m^4)} \\ &\quad \left[ \left| (Q'(0)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \left| (Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \pi \int_0^{\pi} |(Q''(x)\varphi_n, \varphi_q)_H|^2 dx \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{r^4 + m^4}{(r+m)^2(r-m)^2(r^4 - m^4)} &\leq \frac{1}{p^2} \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \frac{1}{(r-m)^2} \\
&= \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m,r \in E} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \frac{1}{i^2} \\
&= \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{m,r \in E} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4}
\end{aligned}$$

dir. (3.32), (3.33), (3.34) ve (3.35) formüllerine göre

$$\sum_{m,r \in E} \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} < 3p$$

dir. Dolayısıyla

$$\sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{r^4 + m^4}{(r+m)^2(r-m)^2(r^4 - m^4)} < \frac{3p}{p^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{c_2}{p} \quad (3.44)$$

olur. (3.43) ve bu son eşitsizlikten

$$|\alpha_{p2}| < \frac{c_3}{p} \left[ \left| (Q'(0)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \left| (Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \int_0^{\pi} \left| (Q''(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 dx \right]$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{p2} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |\alpha_{p2}| \\
&< \frac{c_3}{p} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|Q'(0)\varphi_n\|_H^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|Q'(\pi)\varphi_n\|_H^2 + \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|Q''(x)\varphi_n\|_H^2 dx \right] \\
&= \frac{c_3}{p} \left[ \text{tr}[Q'(0)]^2 + \text{tr}[Q'(\pi)]^2 + \int_0^{\pi} \text{tr}[Q''(x)]^2 dx \right] \\
&< \frac{c_4}{p} \quad (3.45)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.42) bağıntısından faydalanarak

$$\left| \int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m+r)x \, dx \right|^2 \leq \frac{3}{(m+r)^4}$$

$$\left[ \left| (Q'(0)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \left| (Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 + \pi \int_0^\pi \left| (Q''(x)\varphi_n, \varphi_q)_H \right|^2 \, dx \right] \quad (3.46)$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^\infty \frac{r^4 + m^4}{r^4 - m^4} \frac{1}{(m+r)^4} < \sum_{m=1}^p \sum_{r=p+1}^\infty \frac{r^4 + m^4}{(r+m)^2(r-m)^2(r^4 - m^4)}$$

olduğu dikkate alınırsa (3.30), (3.44) ve (3.46) dan

$$0 \leq \sum_{n=1}^\infty \sum_{q=1}^\infty \alpha_{p3} \leq \frac{c_5}{p} \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.40), (3.41), (3.45) ve (3.47) den

$$D_{p2} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^\infty \|Q\psi_{mn}\|^2 - \frac{2p+1}{8\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) \, dx + \frac{2p+1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) \, dx \right]^2$$

$$+ O(p^{-1}) \quad (3.48)$$

bulunur. Burada  $O(p^{-1})$ ,  $p$  ye bağlı ve

$$|O(p^{-1})| < \frac{c_6}{p} \quad (c_6 > 0)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Diğer yandan

$$\sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^\infty \|Q\psi_{mn}\|^2 = \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi (Q(x)d_m \cos mx \varphi_n, Q(x)d_m \cos mx \varphi_n)_H \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi (Q^2(x)\varphi_n, \varphi_n)_H \, dx$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \cos^2 mx (Q^2(x)\varphi_n, \varphi_n)_H \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q^2(x) \varphi_n, \varphi_n)_H dx \\
&+ \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} (Q^2(x) \varphi_n, \varphi_n)_H dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q^2(x) \varphi_n, \varphi_n)_H dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q^2(x) \varphi_n, \varphi_n)_H dx \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q^2(x) \varphi_n, \varphi_n)_H \cos 2mx dx \\
&= \frac{p+1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q^2(x) \varphi_n, \varphi_n)_H dx \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (Q^2(x) \varphi_n, \varphi_n)_H \cos 2mx dx \\
&= \frac{p+1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) \cos 2mx dx
\end{aligned}$$

dir. Bu ifade (3.48) de yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
D_{p2} &= \frac{6p+7}{8\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) \cos 2mx dx \\
&+ \frac{2p+1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 + O(p^{-1})
\end{aligned}$$

olur.

### 3.3 İkinci Düzenli İzin Hesaplanması

Bu bölümde özel olarak  $D_{p3}$  hesaplanarak  $|\lambda| = b_p = (p^2 + p + 1)^2 - \frac{1}{2}$  için

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_{pj} = 0 ; \quad (j \geq 4)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_p^{(N)} = 0 \quad (N \geq 4)$$

olduğu gösterilecek ve bu eşitliklerden yararlanarak ikinci düzenli iz için bir formül elde edilecektir.

$$D_{pj} = \frac{(-1)^j}{\pi i j} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_j=0}^{\infty} \sum_{n_j=1}^{\infty} * \left[ \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \prod_{l=1}^j (m_l^4 - \lambda)^{-1} d\lambda \right] \prod_{l=1}^j (Q\psi_{m_l n_l}, \psi_{m_{g(l)} n_{g(l)}}) \quad (3.49)$$

olduğu gösterilebilir. Burada \* işareti  $m_1^4, m_2^4, \dots, m_j^4$  sayıları arasında  $b_p$  den küçük ve  $b_p$  den büyük olanların var olduklarını gösterir ve

$$g(l) = \begin{cases} l+1, & l < j \text{ ise} \\ l, & l = j \text{ ise} \end{cases}$$

dir. (3.49) formülüne göre

$$D_{p3} = -\frac{1}{3\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} * \left[ \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(m^4 - \lambda)(r^4 - \lambda)(R^4 - \lambda)} d\lambda \right] (Q\psi_{mn}, \psi_{rq})(Q\psi_{rq}, \psi_{RQ})(Q\psi_{RQ}, \psi_{mn})$$

dir. Buradaki seri mutlak yakınsak olduğundan

$$F(m, r, R) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} (Q\psi_{mn}, \psi_{rq})(Q\psi_{rq}, \psi_{RQ})(Q\psi_{RQ}, \psi_{mn})$$

ve

$$G(m, r, R) = \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)(\lambda - R^4)} d\lambda$$

olmak üzere  $D_{p3}$  ifadesi tekrar

$$D_{p3} = \frac{1}{3\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{R=0}^{\infty} * G(m, r, R) F(m, r, R) \quad (3.50)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
F(m, r, R) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) d_m \cos mx \varphi_n, d_r \cos rx \varphi_q)_H dx. \\
&\quad \int_0^{\pi} (Q(x) d_r \cos rx \varphi_q, d_R \cos Rx \varphi_Q)_H dx. \\
&\quad \int_0^{\pi} (Q(x) d_R \cos Rx \varphi_Q, d_m \cos mx \varphi_n)_H dx \\
&= d_m^2 d_r^2 d_R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos mx \cos rx dx. \\
&\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H \cos rx \cos Rx dx. \\
&\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H \cos Rx \cos mx dx \quad (3.51)
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$F(m, r, R) = F(m, R, r) = F(r, R, m) = F(r, m, R) = F(R, m, r) = F(R, r, m) \quad (3.52)$$

olduğu görülmektedir. Bu eşitliklerden yararlanarak ve

$m = r \leq p$  ,  $R > p$  için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)^2 (\lambda - R^4)} d\lambda = -\frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2}$$

$m \neq r \leq p$  ,  $R > p$  için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)(\lambda - R^4)} d\lambda \\
&= \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} + \frac{r^4}{(r^4 - m^4)(r^4 - R^4)}
\end{aligned}$$

$m \leq p$  ,  $r, R > p$  için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{\lambda}{(\lambda - m^4)(\lambda - r^4)(\lambda - R^4)} d\lambda = \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)}$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.50) den

$$\begin{aligned} D_{p3} &= \frac{1}{\pi i} \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} G(m, r, R) F(m, r, R) + \frac{1}{\pi i} \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} G(m, m, R) F(m, m, R) \\ &+ \frac{1}{\pi i} \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} G(m, r, R) F(m, r, R) \\ &= 2 \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \left[ \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} + \frac{r^4}{(r^4 - m^4)(r^4 - R^4)} \right] F(m, r, R) \\ &- 2 \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2} F(m, m, R) \\ &+ 2 \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F(m, r, R) \\ &= 4 \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F(m, r, R) \\ &- 2 \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2} F(m, m, R) \\ &+ 2 \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F(m, r, R) \end{aligned} \quad (3.53)$$

elde edilir. Burada

$$F_1(m, r, R) = \frac{d_m^2 d_r^2 d_R^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m - r)x \, dx.$$

$$\int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H \cos(r - R)x \, dx \cdot \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H \cos(R - m)x \, dx \quad (3.54)$$

$$F_2(m, r, R) = F(m, r, R) - F_1(m, r, R) \quad (3.55)$$

olmak üzere

$$A_i = \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_i(m, r, R) \quad (i = 1, 2) \quad (3.56)$$

$$B_i = \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_i(m, r, R) \quad (i = 1, 2) \quad (3.57)$$

$$C_i = \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2} F_i(m, m, R) \quad (i = 1, 2) \quad (3.58)$$

alınırsa

$$D_{p3} = 2A_1 + 4B_1 - 2C_1 + 2A_2 + 4B_2 - 2C_2 \quad (3.59)$$

olur.  $A_1$  in ifadesi

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\ &\quad \quad \quad r > R \\ &+ \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\ &\quad \quad \quad r < R \\ &+ \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)^2} F_1(m, r, r) \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\ &\quad \quad \quad r > R \\ &+ \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - R^4)(m^4 - r^4)} F_1(m, R, r) \\ &\quad \quad \quad r > R \\ &+ \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - R^4)^2} F_1(m, R, R) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$F_1(m, r, R) = F_1(m, R, r) = F_1(r, R, m) = F_1(r, m, R) = F_1(R, m, r) = F_1(R, r, m)$$

ve

$$\begin{aligned} F_1(m, m, R) &= \frac{d_m^2 d_m^2 d_R^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H dx \cdot \\ &\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H \cos(m-R)x dx \cdot \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H \cos(m-R)x dx \\ F_1(m, R, R) &= \frac{d_m^2 d_R^2 d_R^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-R)x dx \cdot \\ &\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H dx \cdot \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H \cos(m-R)x dx \\ &= \frac{d_m^2 d_R^2 d_R^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_q)_H \cos(m-R)x dx \cdot \\ &\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_n)_H dx \cdot \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_Q)_H \cos(m-R)x dx \\ &= \frac{d_R^2}{d_m^2} F_1(m, m, R) = F_1(m, m, R) \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

dir. Bu bağıntılar  $A_1$  de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\ &\quad + \sum_{m=1}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - R^4)^2} F_1(m, m, R) \end{aligned} \quad (3.60)$$

olur.

$$\begin{aligned}
B_i &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_i(m, r, R) \quad (i = 1, 2) \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_i(m, r, R) \\
&\quad \quad \quad m < r \\
&+ \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_i(m, r, R) \\
&\quad \quad \quad m > r \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_i(m, r, R) \\
&\quad \quad \quad m < r \\
&+ \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{r^4}{(r^4 - m^4)(r^4 - R^4)} F_i(r, m, R) \\
&\quad \quad \quad m < r \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{r^4 - m^4} \left[ \frac{m^4}{R^4 - m^4} - \frac{r^4}{R^4 - r^4} \right] F_i(m, r, R) \\
&\quad \quad \quad m < r \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{r^4 - m^4} \cdot \frac{R^4(m^4 - r^4)}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_i(m, r, R) \\
&\quad \quad \quad m < r \\
&= - \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_i(m, r, R) \quad (3.61) \\
&\quad \quad \quad m < r
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
D_{p3} &= 4 \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\
&\quad \quad \quad r > R \\
&+ 2 \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - R^4)^2} F_1(m, m, R) \\
&\quad \quad \quad r = R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_1(m, r, R) \\
& \quad m < r \\
& -2 \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2} F_1(m, m, R) \\
& + 2A_2 + 4B_2 - 2C_2 \\
D_{p3} = & 4 \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\
& \quad r > R \\
& -4 \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_1(m, r, R) \\
& \quad m < r \\
& -2 \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4 - m^4} F_1(m, m, R) + 2A_2 + 4B_2 - 2C_2
\end{aligned} \tag{3.62}$$

bulunur. Burada

$$A' = \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \tag{3.63}$$

$$B' = \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_1(m, r, R) \tag{3.64}$$

$$C' = \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4 - m^4} F_1(m, m, R) \tag{3.65}$$

alınırsa

$$D_{p3} = 4A' - 4B' - 2C' + 2A_2 + 4B_2 - 2C_2 \tag{3.66}$$

olur.

$p, i$  ve  $j, i > j$  ve  $p \geq j$  olacak şekilde herhangi doğal sabitler olmak üzere

$$E_1 = \{(m, r, R) : m, r, R \in \mathbb{N}; r - m = i; R - m = j; m \leq p; r, R > p\} \quad (3.67)$$

olsun. O taktirde

$$\sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} |F_1(m, r, R)| < \infty$$

$r > R$

olduğu dikkate alınırsa (3.63) ifadesi

$$\begin{aligned} A' &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\ &\quad r > R, \quad R - m \leq p \\ &+ \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \\ &\quad r > R, \quad R - m > p \\ &= \frac{1}{\pi^3} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^p \left( \sum_{m, r, R \in E_1} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} \right) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H \cos(i - j)x \, dx \cdot \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H \cos jx \, dx \right] \\ &+ \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$r > R, \quad R - m > p$

şeklinde yazılabilir. Burada  $m, r, R \geq 1$  olduğunu göz önüne aldık.

(3.67) den yararlanarak

$$\begin{aligned} \sum_{m, r, R \in E_1} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} &= \sum_{m, r, R \in E_1} \frac{m^4}{(m^2 - r^2)(m^2 - R^2)(m^2 + r^2)(m^2 + R^2)} \\ &< \sum_{m, r, R \in E_1} \frac{1}{(m - r)(m - R)(m + r)(m + R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{ij} \sum_{m=p+1-j}^p \frac{1}{(2m+i)(2m+j)} \\
&< \frac{1}{ij} \sum_{m=p+1-j}^p \frac{1}{2m(2m+j)} \\
&< \frac{1}{ij} \sum_{m=p+1-j}^p \frac{1}{2(p+1-j)(2p+2-j)} \\
&= \frac{1}{ij} \sum_{m=p+1-j}^p \frac{1}{2(1+p-j)(p+2+p-j)} \\
&< \frac{1}{ij} \sum_{m=p+1-j}^p \frac{1}{2(p+2)} \\
&< \frac{1}{ij} \sum_{m=p+1-j}^p \frac{1}{2p} \\
&< \frac{1}{ij} \sum_{m=p+1-j}^p \frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{ip}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{m,r,R \in E_1} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} = \frac{1}{ip} O(1) \quad (3.69)$$

olur. Burada  $O(1)$   $p, i$  ve  $j$  ye bağlı

$$|O(1)| < 1$$

koşulunu sağlayan bir ifadedir.

$$\begin{aligned}
\beta_{ij} &= \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx. \\
&\int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H \cos(i-j)x \, dx \cdot \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H \cos jx \, dx \quad (3.70)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A'^1 = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^p \left[ \left( \sum_{m,r,R \in E_1} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} \right) \beta_{ij} \right]$$

$$A'^2 = \sum_{m=0}^p \sum_{\substack{r=p+1 \\ r>R, R-m>p}}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_1(m, r, R) \quad (3.71)$$

alınırsa (3.68) formülü

$$A' = A'^1 + A'^2 \quad (3.72)$$

şekline gelir. (3.69) dan yararlanarak

$$A'^1 = \sum_{\substack{i=2 \\ i>j}}^{\infty} \sum_{j=1}^p \left( \frac{1}{ip} O(1) \right) \beta_{ij} \quad (3.73)$$

elde edilir.

$$B'^1 = \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{\substack{R=p+1 \\ m<r, R-m \leq p}}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_1(m, r, R) \quad (3.74)$$

$$B'^2 = \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{\substack{R=p+1 \\ m<r, R-m > p}}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_1(m, r, R) \quad (3.75)$$

alalım. O takdirde (3.68) ifadesi

$$B' = B'^1 + B'^2 \quad (3.76)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} |F_1(m, r, R)| < \infty$$

olduğu dikkate alınırsa (3.74) ifadesi

$$B'^1 = \sum_{j=2}^p \sum_{i=1}^{p-1} \left( \sum_{m,r,R \in E_2} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} \right) \beta_{ij} \quad (3.77)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $E_2$  ile  $p, i$  ve  $j$ ,  $i < j \leq p$  olacak şekilde herhangi doğal sayılar olmak üzere

$$E_2 = \{(m, r, R) : m, r, R \in N; r - m = i; R - m = j; m, r \leq p; R > p\}$$

şeklinde bir kümeyi göstermektedir.

$$\begin{aligned} \sum_{m,r,R \in E_2} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} &= \sum_{m,r,R \in E_2} \frac{R^4}{(R^2 - m^2)(R^2 + m^2)(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)} \\ &\leq \sum_{m,r,R \in E_2} \frac{1}{(R^2 - m^2)(R^2 - r^2)} \\ &= \sum_{m,r,R \in E_2} \frac{1}{(R - m)(R - r)(R + m)(R + r)} \\ &= \frac{1}{j(j - i)} \sum_{m,r,R \in E_2} \frac{1}{(R + m)(R + r)} \\ &= \frac{1}{j(j - i)} \sum_{m=p+1-j}^{p-i} \frac{1}{(2m + j)(2m + i + j)} \\ &= \frac{1}{ij(j - i)} \sum_{m=p+1-j}^{p-i} \left( \frac{1}{2m + j} - \frac{1}{2m + i + j} \right) \\ &= \frac{1}{ij} \left[ \frac{1}{j - i} \sum_{m=p+1-j}^{p-i} \frac{1}{2m + j} - \frac{1}{j - i} \sum_{m=p+1-j}^{p-i} \frac{1}{2m + i + j} \right] \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\frac{1}{j - i} \sum_{m=p+1-j}^{p-i} \frac{1}{2m + j} < \frac{1}{2(p + 1 - j) + j} = \frac{1}{2p + 2 - j} < \frac{1}{2p - j} = \frac{1}{p + p - j} < \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{j - i} \sum_{m=p+1-j}^{p-i} \frac{1}{2m + i + j} > \frac{1}{2(p - i) + i + j} = \frac{1}{2p - i + j} = \frac{1}{2p + j - i} > \frac{1}{3p}$$

$$\sum_{m,r,R \in E_2} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} < \frac{1}{ij} \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{3p} \right] = \frac{2}{ijp}$$

dir. Dolayısıyla

$$\sum_{m,r,R \in E_2} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} = \frac{1}{ijp} O(1) \quad (3.78)$$

olur. Burada  $O(1)$   $p, i$  ve  $j$  ye bağlı

$$|O(1)| < 2$$

olacak şekilde bir ifadedir.

(3.77) ve (3.78) den

$$B'^1 = \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^p \sum_{i=1}^{p-1} \left( \frac{1}{ijp} O(1) \right) \beta_{ij} \quad (3.79)$$

elde edilir.

**Yardımcı Teorem 3.2**  $Q(x)$  operatör fonksiyonu  $[0, \pi]$  aralığında  $\sigma_1(H)$  uzayındaki norma göre ikinci mertebeden sürekli türeve sahip ise

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{const}{i^2 j^2}$$

dir.

**İspat:** (3.42) eşitsizliğinden ve (3.70) ifadesinden

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{1}{i^2 j^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H \cos(i-j)x \, dx \right|.$$

$$\left[ |(Q'(0) \varphi_n, \varphi_q)_H| + |(Q'(\pi) \varphi_n, \varphi_q)_H| + \left| \int_0^{\pi} (Q''(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos ix \, dx \right| \right]$$

$$\left[ |(Q'(0) \varphi_n, \varphi_Q)_H| + |(Q'(\pi) \varphi_n, \varphi_Q)_H| + \left| \int_0^{\pi} (Q''(x) \varphi_n, \varphi_Q)_H \cos jx \, dx \right| \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{i^2 j^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q(x)\varphi_q, \varphi_Q)_H| dx \\
&\quad \left[ |(Q'(0)\varphi_n, \varphi_q)_H| + |(Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_q)_H| + \int_0^{\pi} |(Q''(x)\varphi_n, \varphi_q)_H| dx \right] \\
&\quad \left[ |(Q'(0)\varphi_n, \varphi_Q)_H| + |(Q'(\pi)\varphi_n, \varphi_Q)_H| + \int_0^{\pi} |(Q''(x)\varphi_n, \varphi_Q)_H| dx \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |(Q^{(i)}(x)\varphi_q, \varphi_n)_H (Q^{(j)}(t)\varphi_Q, \varphi_n)_H| \\
&\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |(Q^{(i)}(x)\varphi_q, \varphi_n)_H|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |(Q^{(j)}(t)\varphi_Q, \varphi_n)_H|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q^{(i)}(x)\varphi_q, \varphi_n)_H| dx \int_0^{\pi} |(Q^{(j)}(x)\varphi_Q, \varphi_n)_H| dx \\
&\leq \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\pi} |(Q^{(i)}(x)\varphi_q, \varphi_n)_H| dx \right)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\pi} |(Q^{(j)}(x)\varphi_Q, \varphi_n)_H| dx \right)^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q^{(i)}(x)\varphi_q, \varphi_n)_H|^2 dx \right]^{1/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q^{(j)}(x)\varphi_Q, \varphi_n)_H|^2 dx \right]^{1/2} \\
&= \pi \left[ \int_0^{\pi} \|Q^{(i)}(x)\varphi_q\|_H^2 dx \right]^{1/2} \left[ \int_0^{\pi} \|Q^{(j)}(x)\varphi_Q\|_H^2 dx \right]^{1/2} \\
&= \pi \|Q^{(i)}\varphi_q\| \|Q^{(j)}\varphi_Q\|
\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{1}{i^2 j^2} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} |(Q(x)\varphi_q, \varphi_Q)_H| dx$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \|Q'(0)\varphi_q\| \|Q'(0)\varphi_Q\| + \|Q'(0)\varphi_q\| \|Q'(\pi)\varphi_Q\| + \int_0^\pi \|Q'(0)\varphi_q\| \|Q''(x)\varphi_Q\| dx \right. \\
& + \|Q'(\pi)\varphi_q\| \|Q'(0)\varphi_Q\| + \|Q'(\pi)\varphi_q\| \|Q'(\pi)\varphi_Q\| + \int_0^\pi \|Q'(\pi)\varphi_q\| \|Q''(x)\varphi_Q\| dx \\
& + \int_0^\pi \|Q''(x)\varphi_q\| \|Q'(0)\varphi_Q\| dx + \int_0^\pi \|Q''(x)\varphi_q\| \|Q'(\pi)\varphi_Q\| dx \\
& \left. + \pi \|Q''(x)\varphi_q\| \|Q''(x)\varphi_Q\| \right] \tag{3.80}
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
& \sum_{Q=1}^{\infty} \|Q'(x)\varphi_q\|_H \|Q'(t)\varphi_Q\|_H |(Q(s)\varphi_q, \varphi_Q)_H| \\
& \leq \|Q'(x)\varphi_q\|_H \left( \sum_{Q=1}^{\infty} \|Q'(t)\varphi_Q\|_H^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{Q=1}^{\infty} |(Q(s)\varphi_q, \varphi_Q)_H|^2 \right)^{1/2} \\
& = \|Q^{(i)}(x)\varphi_q\|_H \left( \text{tr}(Q'(t))^2 \right)^{1/2} \|Q(s)\varphi_q\|_H
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{Q=1}^{\infty} \left[ \int_0^\pi \|Q'(t)\varphi_q\|_H \|Q''(x)\varphi_Q\|_H dx \cdot \int_0^\pi |(Q(x)\varphi_q, \varphi_Q)_H| dx \right] \\
& \leq \|Q'(t)\varphi_q\|_H \left[ \sum_{Q=1}^{\infty} \left( \int_0^\pi \|Q''(x)\varphi_Q\|_H^2 dx \right)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{Q=1}^{\infty} \left( \int_0^\pi |(Q(x)\varphi_q, \varphi_Q)_H|^2 dx \right)^2 \right]^{1/2} \\
& \leq \pi \|Q'(t)\varphi_q\|_H \left[ \int_0^\pi \left( \sum_{Q=1}^{\infty} \|Q''(x)\varphi_Q\|_H^2 \right) dx \right]^{1/2} \left[ \int_0^\pi \left( \sum_{Q=1}^{\infty} |(Q(x)\varphi_q, \varphi_Q)_H|^2 \right) dx \right]^{1/2} \\
& = \pi \|Q'(t)\varphi_q\|_H \left[ \int_0^\pi \text{tr}[(Q''(x))^2] dx \right]^{1/2} \left[ \int_0^\pi \|Q(x)\varphi_q\|_H^2 dx \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \|Q'(x)\varphi_q\|_H \|Q'(t)\varphi_Q\|_H |(Q(s)\varphi_q, \varphi_Q)_H| \\
& \leq \left( \text{tr}(Q'(t))^2 \right)^{1/2} \sum_{q=1}^{\infty} \|Q'(x)\varphi_q\|_H \|Q(s)\varphi_q\|_H \\
& \leq \left[ \text{tr}(Q'(t))^2 \right]^{1/2} \left( \sum_{q=1}^{\infty} \|Q'(x)\varphi_q\|_H^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{q=1}^{\infty} \|Q(s)\varphi_q\|_H^2 \right)^{1/2} \\
& = \left[ \text{tr}(Q'(t))^2 \right]^{1/2} \left[ \text{tr}(Q'(x))^2 \right]^{1/2} \left[ \text{tr}(Q(s))^2 \right]^{1/2} \\
& < \text{const}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} \|Q'(t)\varphi_q\|_H \|Q''(x)\varphi_Q\|_H dx \cdot \int_0^{\pi} |(Q(x)\varphi_q, \varphi_Q)_H| dx \right] \\
& \leq \sum_{q=1}^{\infty} \pi \|Q'(t)\varphi_q\|_H \left[ \int_0^{\pi} \text{tr}[(Q''(x))^2] dx \right]^{1/2} \left[ \int_0^{\pi} \|Q(x)\varphi_q\|_H^2 dx \right]^{1/2} \\
& = \pi \left[ \int_0^{\pi} \text{tr}[(Q''(x))^2] dx \right]^{1/2} \sum_{q=1}^{\infty} \|Q'(t)\varphi_q\|_H \left[ \int_0^{\pi} \|Q(x)\varphi_q\|_H^2 dx \right]^{1/2} \\
& = \text{const} \sum_{q=1}^{\infty} \|Q'(t)\varphi_q\|_H \left[ \int_0^{\pi} \|Q(x)\varphi_q\|_H^2 dx \right]^{1/2} \\
& \leq \text{const} \left[ \sum_{q=1}^{\infty} \|Q'(t)\varphi_q\|_H^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \|Q(x)\varphi_q\|_H^2 dx \right]^{1/2} \\
& = \text{const} \left[ \text{tr}(Q'(t))^2 \right]^{1/2} \left[ \int_0^{\pi} \text{tr}(Q(x))^2 dx \right]^{1/2} \\
& < \text{const}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

(3.80), (3.81) ve (3.82) den

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{\text{const}}{i^2 j^2}$$

bulunur. Böylece Yardımcı Teorem ispatlanmış olur.

$\beta_{ij} = \beta_{ji}$  olduğu göz önüne alınırsa (3.66), (3.72), (3.73), (3.76) ve (3.79) dan

$$D_{p3} = 4 \sum_{\substack{i=2 \\ i>j}}^{\infty} \sum_{j=1}^p \left( \frac{O(1)}{ip} \right) \beta_{ij} - 4 \sum_{\substack{i=2 \\ i>j}}^p \sum_{j=1}^{p-1} \left( \frac{O(1)}{jip} \right) \beta_{ij} \\ + 4A'^2 - 4B'^2 - 2C' + 2A_2 + 4B_2 - 2C_2 \quad (3.83)$$

bulunur. Ayrıca Yardımcı Teorem 3.2 den yararlanırsak

$$\left| \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^p \left( \frac{O(1)}{ip} \right) \beta_{ij} \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^p \left( \frac{1}{i} \right) |\beta_{ij}| \\ < \frac{1}{p} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^p \left( \frac{1}{i} \right) \frac{const}{i^2 j^2} \\ = const. p^{-1} \left( \sum_{i=2}^{\infty} i^{-3} \right) \left( \sum_{j=1}^p j^{-2} \right) \\ < c_7 p^{-1} = O(p^{-1})$$

$$\left| \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{p-1} \left( \frac{O(p^{-1})}{ij} \right) \beta_{ij} \right| \leq \frac{2}{p} \sum_{\substack{i=2 \\ i>j}}^p \sum_{j=1}^{p-1} \left( \frac{1}{ij} \right) |\beta_{ij}| \\ < \frac{2}{p} \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{p-1} \left( \frac{1}{ij} \right) \frac{const}{i^2 j^2} \\ = const. p^{-1} \left( \sum_{i=2}^p i^{-3} \right) \left( \sum_{j=1}^{p-1} j^{-3} \right) \\ < c_8 p^{-1} = O(p^{-1})$$

elde edilir. Bu son iki bağıntı ve (3.83) ten

$$D_{p3} = 4A'^2 - 4B'^2 - 2C' + 2A_2 + 4B_2 - 2C_2 + O(p^{-1}) \quad (3.84)$$

bulunur. Aşağıda

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A'^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} B'^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} C' = \lim_{p \rightarrow \infty} A_2 = \lim_{p \rightarrow \infty} B_2 = \lim_{p \rightarrow \infty} C_2 = \lim_{p \rightarrow \infty} C' = 0$$

olduğunu göstereceğiz. (3.51) ve (3.54) ten (3.55) eşitliği

$$F_2(m, r, R) = F(m, r, R) - F_1(m, r, R)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d_m^2 d_r^2 d_R^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \\ &\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H (\cos(m+r)x + \cos(m-r)x) dx \\ &\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H (\cos(r+R)x + \cos(r-R)x) dx. \\ &\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H (\cos(R+m)x + \cos(R-m)x) dx \\ &\quad - \frac{d_m^2 d_r^2 d_R^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{Q=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_n, \varphi_q)_H \cos(m-r)x dx. \\ &\quad \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_q, \varphi_Q)_H \cos(r-R)x dx. \int_0^{\pi} (Q(x) \varphi_Q, \varphi_n)_H \cos(R-m)x dx \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir . Kısmi integrasyon yönteminden yararlanarak Yardımcı Teorem 3.2

nin ispatına benzer bir şekilde

$m \neq r \neq R$  için

$$\begin{aligned} |F_2(m, r, R)| &\leq \text{const} \left[ \frac{1}{(m-r)^2(r+R)^2(R-m)^2} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{(m+r)^2(r-R)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(m+r)^2(r+R)^2(R-m)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(m-r)^2(r-R)^2(R+m)^2} + \frac{1}{(m-r)^2(r+R)^2(R+m)^2} \\ &\quad \left. + \frac{1}{(m+r)^2(r-R)^2(R+m)^2} + \frac{1}{(m-r)^2(r-R)^2(R+m)^2} \right] \\ &\leq \text{const} \left[ \frac{1}{(m-r)^2(r+R)^2(R-m)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(m+r)^2(r-R)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(m-r)^2(r-R)^2(R+m)^2} \right] \quad (3.85) \end{aligned}$$

$$|F_2(m, r, R)| \leq \text{const} \left[ \frac{1}{(m-r)^2(r+R)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(m+r)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(m-r)^2(R+m)^2} \right] \quad (3.86)$$

$$|F_2(m, r, R)| \leq \text{const} \left[ \frac{1}{(R+m)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(R-m)^4} \right] \quad (3.87)$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca (3.54), (3.70) ve Yardımcı Teorem 3.2 den  $m \neq r$  ve  $m \neq R$  için

$$|F_1(m, r, R)| \leq \text{const} \frac{1}{(r-m)^2(R-m)^2} \quad (3.88)$$

$m \neq R$  ve  $r \neq R$  için

$$|F_1(m, r, R)| \leq \text{const} \frac{1}{(R-m)^2(R-r)^2} \quad (3.89)$$

bulunur. (3.71) formülü ve (3.88) den

$$\begin{aligned} |A'^2| &\leq \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} |F_1(m, r, R)| \\ &\leq \text{const} \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(r^4 - m^4)(R^4 - m^4)(m-r)^2(m-R)^2} \\ &\leq \text{const} \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(r^4 - m^4)(R^4 - m^4)} \\ &< \text{const} \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R^4 - m^4)} \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{(r^4 - p^4)} \\ &< \text{const} \cdot p^{-5/2} \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R^4 - m^4)} \end{aligned}$$

$$< \text{const.} p^{-5/2} (p+1) \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R^4 - p^4)}$$

$$< \text{const.} p^{-5/2} p^{-5/2} (p+1)$$

$$= \text{const.} p^{-5} (p+1)$$

$$< \text{const.} p^{-4}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A'^2 = 0 \quad (3.90)$$

elde edilir. (3.75) formülü ve (3.89) dan

$$\begin{aligned} |B'^2| &\leq \sum_{m=0}^p \sum_{\substack{r=0 \\ m < r \\ R-m > p}}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} |F_1(m, r, R)| \\ &\leq \sum_{m=0}^p \sum_{\substack{r=0 \\ m < r \\ R-m > p}}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)(R - m)^2(R - r)^2} \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{\substack{r=0 \\ m < r \\ R-m > p}}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^2 - m^2)(R^2 - r^2)(R^2 + m^2)(R^2 + r^2)(R - m)^2(R - r)^2} \\ &\leq \sum_{m=0}^p \sum_{\substack{r=0 \\ m < r \\ R-m > p}}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R^2 - m^2)(R^2 - r^2)(R - m)^2(R - r)^2} \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{\substack{r=0 \\ m < r \\ R-m > p}}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R + m)(R + r)(R - m)^3(R - r)^3} \\ &< \frac{1}{p^2} \sum_{m=0}^p \sum_{\substack{r=0 \\ m < r \\ R-m > p}}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - m)^3(R - r)^3} \\ &< \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p^3} \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - p)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p^5} (p+1)^2 \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-p)^3} \\
&= \frac{1}{p^5} (p+1)^2 \sum_{R=1}^{\infty} \frac{1}{R^3} \\
&= \text{const} \frac{1}{p^5} \cdot (p+1)^2 \\
&= \text{const} \cdot p^{-3}
\end{aligned}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} B'^2 = 0 \quad (3.91)$$

bulunur. (3.56) formülü ve (3.86) dan yararlanarak  $A_2$  yi sınırlandırılalım.

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \left| \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} F_2(m, r, R) \right| \\
&\leq \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)} \\
&\quad \left[ \frac{1}{(R-m)^2(r-m)^2(R+r)^2} + \frac{1}{(m+r)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(r-m)^2(R+m)^2} \right] \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)(R-m)^2(r-m)^2(R+r)^2} \\
&\quad + 2 \sum_{m=0}^p \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{m^4}{(m^4 - r^4)(m^4 - R^4)(m+r)^2(R-m)^2} \\
&< \frac{1}{4p^3} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-p)^3(r-p)^3} + \frac{2}{p^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(r^2 - p^2)(R-p)^3} \\
&< \frac{\text{const}}{p^3} + \frac{2}{p^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{(r^2 - p^2)} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-p)^3} \\
&< \frac{\text{const}}{p^3} + \frac{2}{p^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{(r^2 - p^2)} \sum_{R=1}^{\infty} \frac{1}{R^3} \\
&< \frac{\text{const}}{p^3} + \frac{\text{const}}{p^2} 2p^{-1/2} \\
&< \frac{\text{const}}{p^3} + \frac{\text{const}}{p^{5/2}}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_2 = 0 \quad (3.92)$$

bulunur.

(3.61) formülü ve (3.85) ten yararlanarak  $B_2$  yi sınırlandıralım.

$$\begin{aligned} |B_2| &= \left| \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} F_2(m, r, R) \right| \\ &\leq \text{const} \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)} \left[ \frac{1}{(m-r)^2(r+R)^2(R-m)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(m+r)^2(r-R)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(m-r)^2(r-R)^2(R+m)^2} \right] \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} B_{21} &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)(m-r)^2(r+R)^2(R-m)^2} \\ B_{22} &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)(m+r)^2(r-R)^2(R-m)^2} \\ B_{23} &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)(m-r)^2(r-R)^2(R+m)^2} \end{aligned}$$

alınırsa

$$|B_2| \leq \text{const}(B_{21} + B_{22} + B_{23}) \quad (3.93)$$

olur. Sırasıyla  $B_{21}$ ,  $B_{22}$  ve  $B_{23}$  ü sınırlandırılalım.

$$\begin{aligned}
B_{21} &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)(m-r)^2(r+R)^2(R-m)^2} \\
&\quad m < r \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R-r)(R+m)(R^2+m^2)(R^2+r^2)(m-r)^2(r+R)^3(R-m)^3} \\
&\quad m < r \\
&\leq \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)(R+m)(m-r)^2(r+R)^3(R-m)^3} \\
&\quad m < r \\
&< \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)RR^3(R-m)^3} \\
&\quad m < r \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)(R-m)(R-m)^2R^4} \\
&\quad m < r \\
&< \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^2(R-m)^2R^4} \\
&\quad m < r \\
&< \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(p+1-r)^2(p+1-m)^2R^4} \\
&\quad m < r \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \frac{1}{(p+1-r)^2(p+1-m)^2} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \\
&\quad m < r \\
&= \left[ \sum_{m=0}^p \frac{1}{(p+1-m)^2} \right]^2 \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \\
&= \text{const} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \\
&< \frac{\text{const}}{p^3}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Yazılışın basit olması için  $p$  yerine  $2p$  olarak  $B_{22}$  yi sınırlandıralım.

$$\begin{aligned}
B_{22} &= \sum_{m=0}^{2p} \sum_{\substack{r=0 \\ m < r}}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)(m+r)^2(r-R)^2(R-m)^2} \\
&= \sum_{m=0}^{2p} \sum_{\substack{r=0 \\ m < r}}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R+m)(R+r)(R^2+m^2)(R^2+r^2)(m+r)^2(R-m)^3(R-r)^3} \\
&\leq \sum_{m=0}^{2p} \sum_{\substack{r=0 \\ m < r}}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3(R-r)^3(R+m)(R+r)(m+r)^2} \\
&< \frac{1}{4p^2} \sum_{m=0}^{2p} \sum_{\substack{r=0 \\ m < r}}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3(R-r)^3(m+r)^2} \\
&= \frac{1}{4p^2} \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3(R-r)^3(m+r)^2} \\
&\quad + \frac{1}{4p^2} \sum_{m=p+1}^{2p} \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3(R-r)^3(m+r)^2} \tag{3.95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3(R-r)^3(m+r)^2} &\leq \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3(R-r)^3} \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3} \sum_{r=0}^{2p} \frac{1}{(R-r)^3} \\
&\leq \sum_{R=2p+1}^{\infty} \sum_{m=0}^p \frac{1}{(R-p)^3} \sum_{r=0}^{2p} \frac{1}{(R-2p)^3} \\
&= \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{p+1}{(R-p)^3} \cdot \frac{2p+1}{(R-2p)^3} \\
&< \frac{2(p+1)^2}{p^3} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-2p)^3} \\
&< \frac{\text{const}}{p} \tag{3.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=p+1}^{2p} \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^3(R-r)^3(m+r)^2} \\
& \leq \sum_{m=p+1}^{2p} \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^3(R-r)^3(2m)^2} \\
& = \sum_{m=p+1}^{2p} \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^6 4m^2} \\
& = \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^6} \sum_{m=p+1}^{2p} \frac{1}{4m^2} \\
& \leq \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^6} \sum_{m=p+1}^{2p} \frac{1}{4p^2} \\
& = \frac{1}{4p} \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^6} \\
& = \frac{1}{4p} \left[ \sum_{r=0}^{2p} \left( \frac{1}{(2p+1-r)^6} + \sum_{R=2p+2}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^6} \right) \right] \\
& = \frac{1}{4p} \left[ \sum_{r=0}^{2p} \frac{1}{(2p+1-r)^6} + \sum_{r=0}^{2p} \sum_{R=2p+2}^{\infty} \frac{1}{(R-r)^6} \right] \\
& \leq \frac{1}{4p} \left[ \sum_{r=0}^{2p} \frac{1}{(2p+1-r)^6} + \sum_{r=0}^{2p} \int_{2p+1}^{\infty} \frac{1}{(x-r)^6} dx \right] \\
& = \frac{1}{4p} \left[ const + \sum_{r=0}^{2p} \frac{1}{-5(x-r)^5} \Big|_{2p+1}^{\infty} \right] \\
& = \frac{1}{4p} \left[ const + \sum_{r=0}^{2p} \frac{1}{5(2p+1-r)^5} \right] \\
& = \frac{1}{4p} \left[ const + \sum_{r=1}^{2p+1} \frac{1}{5r^5} \right] \\
& < \frac{const}{p}
\end{aligned} \tag{3.97}$$

(3.95), (3.96) ve (3.97) bağıntılarından

$$B_{22} < \frac{const}{p^3} \quad (3.98)$$

tür.

$$\begin{aligned}
B_{23} &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)(R^4 - r^4)(m - r)^2(r - R)^2(R + m)^2} \\
&\quad m < r \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R - m)(R + r)(R^2 + m^2)(R^2 + r^2)(m - r)^2(R - r)^3(R + m)^3} \\
&\quad m < r \\
&\leq \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - m)(R + r)(m - r)^2(R - r)^3(R + m)^3} \\
&\quad m < r \\
&\leq \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - m)(R - r)^3 R^4} \\
&\quad m < r \\
&< \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(p + 1 - m)(p + 1 - r)^3 R^4} \\
&= \sum_{m=0}^p \frac{1}{(p + 1 - m)} \sum_{r=0}^p \frac{1}{(p + 1 - r)^3} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \\
&= \sum_{m=1}^{p+1} \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{p+1} \frac{1}{r^3} \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \\
&< const \left( 1 + \int_1^{p+1} \frac{1}{x} dx \right) \left( \int_p^{\infty} \frac{1}{x^4} dx \right) \\
&= const (1 + \ln x |_1^{p+1}) \left( -\frac{1}{3x^3} |_p^{\infty} \right) \\
&= const (1 + \ln(p + 1)) \left( \frac{1}{3p^3} \right) \\
&= const (1 + \ln(p + 1)) \frac{1}{p^3} \quad (3.99)
\end{aligned}$$

(3.93), (3.94), (3.98) ve (3.99) dan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} B_2 = 0 \quad (3.100)$$

bulunur. (3.58) ve (3.87) den

$$|C_2| = \left| \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2} F_2(m, m, R) \right|$$

$$< \text{const} \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2} \left[ \frac{1}{(R+m)^2(R-m)^2} + \frac{1}{(R-m)^4} \right]$$

olup burada

$$C_{21} = \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2 (R+m)^2 (R-m)^2}$$

$$C_{22} = \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2 (R-m)^4}$$

alınırsa

$$|C_2| \leq \text{const}(C_{21} + C_{22}) \quad (3.101)$$

olur.  $C_{21}$  ve  $C_{22}$  yi sınırlandıralım.

$$\sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2 (R+m)^2 (R-m)^2}$$

$$= \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^2 - m^2)^2 (R^2 + m^2)^2 (R+m)^2 (R-m)^2}$$

$$= \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R-m)^2 (R+m)^2 (R^2 + m^2)^2 (R+m)^2 (R-m)^2}$$

$$= \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R-m)^4 (R+m)^4 (R^2 + m^2)^2}$$

$$\leq \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R-m)^4 (R+m)^4}$$

$$\begin{aligned}
&< \left( \sum_{m=0}^p \frac{1}{(p+1-m)^4} \right) \left( \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \right) \\
&= \left( \sum_{m=1}^{p+1} \frac{1}{m^4} \right) \left( \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \right) \\
&< \text{const.} \frac{1}{3p^3} \\
&< \frac{\text{const}}{p^3}
\end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^4 - m^4)^2 (R - m)^4} \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R^2 - m^2)^2 (R^2 + m^2)^2 (R - m)^4} \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R - m)^2 (R + m)^2 (R^2 + m^2)^2 (R - m)^4} \\
&= \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{R^4}{(R - m)^6 (R + m)^2 (R^2 + m^2)^2} \\
&\leq \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - m)^6 (R + m)^2} \\
&\leq \frac{1}{p^2} \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - m)^6} \\
&\leq \frac{1}{p^2} \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - p)^6} \\
&= \frac{1}{p^2} (p + 1) \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R - p)^6} \\
&< \frac{\text{const}}{p}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

(3.101), (3.102) ve (3.103) ten

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C_2 = 0 \tag{3.104}$$

bulunur. (3.65) ifadesi ve (3.89) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
|C'| &= \left| \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{R^4 - m^4} F_1(m, m, R) \right| \\
&\leq \text{const} \sum_{m=0}^p \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R^4 - m^4)(R - m)^4} \\
&< \text{const} \left( \sum_{m=0}^p \frac{1}{(p+1-m)^4} \right) \left( \sum_{R=p+1}^{\infty} \frac{1}{(R^4 - p^4)} \right) \\
&< \text{const} \left( \sum_{m=1}^{p+1} \frac{1}{m^4} \right) \frac{1}{p^{5/2}} \\
&< \frac{\text{const}}{p^{5/2}}
\end{aligned}$$

olup

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C' = 0 \quad (3.105)$$

bulunur. (3.84), (3.90), (3.91), (3.92), (3.100), (3.104) ve (3.105) ten

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_{p3} = 0$$

elde edilir.

Şimdi de  $j \geq 4$  için  $\lim_{p \rightarrow \infty} D_{pj} = 0$  olduğunu ispatlayalım.  $|\lambda| = b_p = (p^2 + p + 1)^2 - \frac{1}{2}$  için

[15] çalışmasındakine benzer şekilde

$$\|QR_{\lambda}^0\|_{\sigma_1(H_1)} < c \quad (3.106)$$

$$\|R_{\lambda}^0\| < p^{-3} \quad (3.107)$$

$$\|R_{\lambda}\| < cp^{-3} \quad (3.108)$$

olacak şekilde bir  $c > 0$  sabitlerinin var olduğu ispatlanabilir.

$$\begin{aligned}
D_{pj} &= \frac{1}{\pi j} \left| \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr} [(QR_\lambda^0)^j] d\lambda \right| \\
&\leq \frac{b_p}{\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} \|(QR_\lambda^0)^j\|_{\sigma_1(H_1)} d\lambda \\
&\leq \frac{b_p}{\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} \|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} \|(QR_\lambda^0)^{j-1}\| |d\lambda|
\end{aligned}$$

(3.106), (3.107) ve  $Q(x)$  in  $2^0$ ) koşulunu sağlamasından yararlanarak buradan

$$\begin{aligned}
D_{pj} &\leq \frac{cb_p}{\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} \|Q\|^{j-1} \|R_\lambda^0\|^{j-1} |d\lambda| \\
&< \frac{cb_p}{\pi j} \int_{|\lambda|=b_p} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} p^{3(1-j)} |d\lambda| \\
&< c_9 p^{11-3j}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu bağıntıdan  $\lim_{p \rightarrow \infty} D_{pj} = 0$ ; ( $j \geq 4$ ) elde edilir. Böylece

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_{pj} = 0 \quad (j \geq 3) \quad (3.109)$$

dır. (3.10), (3.106), (3.107) ve (3.108) den

$$\begin{aligned}
D_p^{(N)} &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \operatorname{tr} [R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}] d\lambda \right| \\
&\leq \frac{b_p^2}{2\pi} \int_{|\lambda|=b_p} \|R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \\
&\leq \frac{b_p^2}{2\pi} \int_{|\lambda|=b_p} \|R_\lambda\| \|(QR_\lambda^0)^{N+1}\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda| \\
&\leq \frac{cb_p^2}{2\pi p^3} \int_{|\lambda|=b_p} \|QR_\lambda^0\|^N \|QR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|
\end{aligned}$$

$$\leq c_{10}p^{9-3N}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_p^{(N)} = 0 \quad (N \geq 4) \quad (3.110)$$

elde edilir.

**Teorem 3.4**  $Q(x)$  operatör fonksiyonu  $1^0) - 4^0)$  koşullarını sağlıyorsa

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) + 2C \right] \\ &= C + \frac{1}{32} [\text{tr} Q^{iv}(0) + \text{tr} Q^{iv}(\pi)] + \frac{1}{4} [\text{tr} Q^2(0) + \text{tr} Q^2(\pi)] \end{aligned}$$

dir. Burada

$$C = \frac{1}{16\pi} (\text{tr} Q'''(\pi) - \text{tr} Q'''(0)) - \frac{3}{8\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2$$

dir.

**İspat:** (3.9), (3.15), (3.19), (3.109) ve (3.110) formüllerinden  $p \rightarrow \infty$  iken

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q(x) dx \sum_{m=1}^p m^4 \\ &+ \frac{1}{12\pi} p(p+1)(2p+1) (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) + \frac{1}{8\pi} p (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} \text{tr} Q^{iv}(x) \cos 2mx dx + \frac{6p+7}{8\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) \cos 2mx dx + \frac{1}{8\pi^2} (2p+1) \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 + O(1) \end{aligned}$$

veya  $g(x) = \text{tr} Q^{iv}(x) + 8\text{tr} Q^2(x)$  alınırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^p \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) \right. \\
& \left. - \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) - \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{4\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 \right] \\
& = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx + \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{\pi} g(x) \cos 2mx dx - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 \\
& - \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) + O(1)
\end{aligned}$$

Burada  $p \rightarrow \infty$  iken limite geersek

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) \right. \\
& \left. - \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) - \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{4\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 \right] \\
& = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \text{tr} Q^2(x) dx + \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} g(x) \cos 2mx dx - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^{\pi} Q(x) dx \right]^2 \\
& - \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) \tag{3.111}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} g(x) \cos 2mx dx \\
& = \frac{1}{16\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} g(x) \cos 2mx dx + (-1)^m \int_0^{\pi} g(x) \cos 2mx dx \right] \\
& = \frac{1}{32} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos mx dx \cos m0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx \cos 0 \right] \right\} \\
& + \frac{1}{32} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos mx dx \cos m\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx \cos 0\pi \right] \right\} - \frac{1}{16\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{32} [g(0) + g(\pi)] - \frac{1}{16\pi} \int_0^\pi g(x) dx \quad (3.112)$$

(3.111) ve (3.112) den

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{4\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) dx \right]^2 \right] \\ & = \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) dx \right]^2 - \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) \\ & + \frac{1}{32} [g(0) + g(\pi)] - \frac{1}{16\pi} \int_0^\pi g(x) dx \end{aligned}$$

veya

$$\int_0^\pi g(x) dx = \int_0^\pi (\text{tr} Q^{lv}(x) + 8\text{tr} Q^2(x)) dx = \text{tr} Q'''(\pi) - \text{tr} Q'''(0) + 8 \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(\pi) - \text{tr} Q'''(0)) - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{4\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) dx \right]^2 \right\} \\ & = \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) dx \right]^2 - \frac{1}{8\pi} (\text{tr} Q'''(0) - \text{tr} Q'''(\pi)) \\ & + \frac{1}{32} [\text{tr} Q^{lv}(0) + 8\text{tr} Q^2(0) + \text{tr} Q^{lv}(\pi) + 8\text{tr} Q^2(\pi)] \\ & - \frac{1}{16\pi} \left[ \text{tr} Q'''(\pi) - \text{tr} Q'''(0) + 8 \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16\pi} (\text{tr} Q'''(\pi) - \text{tr} Q'''(0)) - \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) dx \right]^2 \\ + \frac{1}{32} [\text{tr} Q^{lv}(0) + \text{tr} Q^{lv}(\pi)] + \frac{1}{4} [\text{tr} Q^2(0) + \text{tr} Q^2(\pi)]$$

bulunur. Bu son bağıntıda

$$C = \frac{1}{16\pi} (\text{tr} Q'''(\pi) - \text{tr} Q'''(0)) - \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q^2(x) dx - \frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left[ \int_0^\pi Q(x) dx \right]^2$$

alınırsa  $L$  operatörü için

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 - m^8) - \frac{2m^4}{\pi} \int_0^\pi \text{tr} Q(x) dx - \frac{m^2}{2\pi} (\text{tr} Q'(\pi) - \text{tr} Q'(0)) + 2C \right] \\ = C + \frac{1}{32} [\text{tr} Q^{lv}(0) + \text{tr} Q^{lv}(\pi)] + \frac{1}{4} [\text{tr} Q^2(0) + \text{tr} Q^2(\pi)]$$

şeklinde ikinci düzenli iz formülü elde edilir. ■

### 3.4 Örnekler

Burada  $1^0) - 4^0)$  koşullarını sağlayan  $Q(x)$  operatör fonksiyonuna iki örnek verilmiştir.

**Örnek 3.1**  $Q(x) = \frac{1}{2\pi} xB$  olsun.  $Q(x)$ ,  $1^0) - 4^0)$  koşullarını sağlar. Burada her  $x \in H$  için

$$Bx = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} (x, \varphi_i) \varphi_i$$

şeklinde olup  $\{\varphi_i\}$ ,  $H$  nin ortonormal bir tabanıdır.  $B: H \rightarrow H$  kendine eş bir çekirdek operatördür. Her  $x, y \in H$  için

$$(Bx, y) = (x, By)$$

olmalı.

$$(Bx, y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} (x, \varphi_i) \varphi_i, y \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i^{-2}(x, \varphi_i) \varphi_i, y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2}(x, \varphi_i)(\varphi_i, y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (x, i^{-2}(y, \varphi_i) \varphi_i) \\
&= (x, By)
\end{aligned}$$

$B$  nin özdeğerleri  $\lambda_i = s_i = i^{-2}$  olduğundan  $B$  bir çekirdek operatördür. Böylece her  $x \in [0, \pi]$  için  $Q(x)$  de kendine eş bir çekirdek operatördür.

$\sigma_1(H)$  deki norma göre  $Q'(x) = \frac{1}{2\pi}B$  ve  $Q^{(i)}(x) = 0$  ( $i \geq 2$ )

$$[Q^{(i)}(x)]^* = Q^{(i)}(x) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

dır. Şimdi de  $Q(x)$  in  $2^0$  ve  $3^0$  koşullarını sağladığını gösterelim. Gerçekten

$$\|Q(x)\|_H = \left\| \frac{1}{2\pi} xB \right\| = \frac{1}{2\pi} x \|B\|_H \leq \frac{1}{2} \|B\|_H = \frac{1}{2}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Q(x)\varphi_n\|^2 &= \int_0^\pi \|Q(x)\varphi_n\|_H^2 dx \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2\pi^2} x^2 \|B\varphi_n\|_H^2 dx \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2\pi^2} x^2 \|n^{-2}\varphi_n\|_H^2 dx \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2\pi^2} x^2 n^{-4} dx \\
&= \frac{1}{6} n^{-4} \pi \\
&\leq \pi n^{-4}
\end{aligned}$$

veya

$$\|Q(x)\varphi_n\| \leq \sqrt{\pi}n^{-2}$$

dir. Buradan da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\| \leq \sqrt{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$$

elde edilir.

**Örnek 3.2**  $H = L_2[0,1]$  ve

$$a = \frac{1}{4} \left( \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} \right)^{-1}$$

olmak üzere her  $x \in [0,1]$  için  $L_2[0,1]$  den  $L_2[0,1]$  e

$$Q(x)f(t) = a \cos \pi x \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} \sin m\pi t \int_0^1 f(s) \sin m\pi s ds \quad (f = f(t) \in H)$$

olsun. Kendine eş  $Q(x): H \rightarrow H$  operatörünün özdeğerleri

$$\left\{ \frac{a \cos \pi x}{2n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

şeklinde dir. Dolayısıyla her  $x \in [0, \pi]$  için  $Q(x)$ ,  $H$  den  $H$  ye kendine eş bir çekirdek operatördür.  $Q(x)$  operatör fonksiyonunun  $1^0) - 4^0)$  koşullarını sağladığı gösterilebilir.

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında  $H$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere  $H_1 = L_2(0, \pi; H)$  uzayında

$$l(y) = y''(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

$$y'''(0) = y'''(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan  $L$  operatörünün spektrumu incelenmiş ve ikinci düzenli izi hesaplanmıştır.  $l(y)$  nin ifadesinde yer alan  $Q(x)$  operatör fonksiyonunun belirli koşulları sağladığı varsayılmıştır.

Bu çalışmanın devamı olarak aynı sınır koşulları altında yüksek mertebeden sınırlı operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün spektrumu incelenebilir ve ikinci veya  $n$ . düzenli izi hesaplanabilir.

## KAYNAKLAR

- 
- [1] Gelfand, I.M. ve Levitan, B.M., (1953). "İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğerleri İçin Bir Formül Hakkında", Dokl. Akad. Nauk SSSR, T.88(4): 593-596.
  - [2] Dikiy, L.A., (1953). "Gelfand-Levitan'nın Bir Formülü Hakkında", Upseki Mat. Nauk, T.8(2): 119-123.
  - [3] Halberg, C.J. ve Kramer, V.A., (1960). "A Generalization of The Trace Concept", Duke. Math. Journal, 27(4): 607-618.
  - [4] Levitan, B.M., (1964). "Sturm-Liouville Operatörü İçin Düzenli İzin Hesaplanması", Upseki. Mat. Nauk, T.19(1): 161-164.
  - [5] Guseynov, G.S. ve Levitan, B.M., (1978). "Sturm-Liouville Operatörü İçin İz Formülleri Hakkında", Vestnik MGU. Ser. Mat.Mekan., (1): 40-49.
  - [6] Levitan, B.M. ve Sargsyan, I.S., (1991). "Bir Sınıfa Ait Olan Tam Fonksiyonların Köklerinin Düzenli Toplamı", Kluzer. Dordrechz.
  - [7] Fulton, T.C. ve Pruess, S.A., (1994). "Eigenvalue And Eigenfunction Asymptotiks For Regular Sturm-Liouville Problems", J. Math. Anal. Appl., 188, 297-340.
  - [8] Halilova, R.Z., (1976). "Sturm-Liouville Operatör Denkleminin İzinin Düzenlenmesi Hakkında", Funks. Analiz, Teoriya Funktsii I Ik Pril.Mahaçkala, 1. Bölüm, (3): 154-161.
  - [9] Adıgüzelov, E.E., (1976). "Operatör Katsayılı İki Sturm-Liouville Operatörün Farkının İzi Hakkında", İz.An Az SSR, Seriya Fiz-Tekn. I Mat.Nauk, (5): 20-24.
  - [10] Maksudov, F.G., Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E.E., (1984). "On A Regularized Trace Of The Sturm-Liouville Operator On A Finite Interval with The Unbounded Operator Coefficient", Dokl. Akad. Nauk SSSR, (Eng. Trans.) Soviet Math.Dokl., 30(1): 169-173.
  - [11] Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E.E., (1996). "Sınırlı Operatör Katsayılı Tekil Sturm-Liouville Operatörünün Düzenli İzi Hakkında", Differens. Uravneniya, T.32(12): 1587-1592.

- [12] Albayrak, İ., Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E.E., (1999). "Formula for The Second Regularized Trace Of The Sturm-Liouville Problem with a Spectral Parameter on Boundary Condition", *Methods of Functional Analysis and Topology*, 4(3).
- [13] Adıgüzelov, E.E., Avcı, H. ve Gül, E., (2001). "The Trace Formula for Sturm-Liouville Operator with Operator Coefficient ", *J. Math.Phys.*, 42(6): 1611-1624.
- [14] Adıgüzelov, E.E., Baykal, O. ve Bayramov, A., (2001). "On The Spektrum and Regularized Trace of Sturm-Liouville Problem with Spectral Parameter on The Boundary Condition and with The Operator Coefficient ", *International Journal of Differential Equations and Applications*, 2(3): 317-333.
- [15] Gül, E., (2004). "The Trace Formula for a Differential Operator of Fourth Order with Bounded Operator Coefficient and Two Terms ", *Turkish Journal of Mathematics.*, 28, 231-254.
- [16] Adıgüzelov, E.E., Bakşi, Ö. ve Baykal, O., (2004). "On a Regularized Trace of a Differential Operator with Bounded Operator Coefficient ", *International Math. Journal*, 5(3): 273-286.
- [17] Adıgüzelov, E.E., Bakşi, Ö., (2004). "On The Regularized Trace of Differential Operator Equation Given in a Finite Interval ", *Journal of Engineering and Natural Sciences Sigma*, 47-55,2004/1.
- [18] Adıgüzelov, E.E., Kanar, P., (2005). "The Second Regularized Trace of a Second Order Differential Operator with Unbounded Operator Coefficient", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 22(3): 349-365.
- [19] Adıgüzelov, E.E., Sezer, Y., (2011). "The Second Regularized Trace of a Self Adjoint Differential Operator Given in a Finite Interval with Bounded Operator Coefficient ", *Mathematical and Computer Modelling*, 53(5): 553-565
- [20] Karayel, S., Sezer, Y., (2015). " The Regularized Trace Formula for a Fourth Order Differential Operator Given in a Finite Interval", *Journal of Inequalities and Applications*, DOI 10.1186/s13660-015-0823-0
- [21] Kirillov, A.A., (1976). *Elementary Theory of Representations*, Springer Verlag, New York.
- [22] Lysternik, L.A. and Sobolev, V.I., (1955). "Elements of Functional Analysis", (English Translation), Frederic Ungar Publishing Co., New York.
- [23] Cohberg, I.C. and Krein, M.G., (1969). *Introduction to The Theory of Linear Non-selfadjoint Operators*", translation of *Mathematical Monographs*, 18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [24] Smirnov, V.I., (1964). "A Course of Higher Mathematics", 5, New York, Pergamon Press.
- [25] Gorbaçuk, V.I., (1975). "Vektör Fonksiyonu Uzayında Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemlerinin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı Hakkında ", *Ukr. Mat. Journal*, T.27(5): 657-664.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Aylan CEYHAN  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 02.04.1980 / Kırcaali  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-posta** : [aylanceyhan@yahoo.com](mailto:aylanceyhan@yahoo.com)

### ÖĞRENİM DURUMU

| Derece   | Alan      | Okul/Üniversite            | Mezuniyet Yılı |
|----------|-----------|----------------------------|----------------|
| Y.Lisans | Matematik | Yıldız Teknik Üniversitesi | 2006           |
| Lisans   | Matematik | Yıldız Teknik Üniversitesi | 2001           |
| Lise     | FM        | Sağmalcılar Lisesi         | 1997           |

### İŞ TECRÜBESİ

| Yıl       | Firma/Kurum                              | Görevi          |
|-----------|------------------------------------------|-----------------|
| 2007-2015 | K.Köy Kız Mesleki ve Tek. Anadolu Lisesi | Branş Öğretmeni |
| 2003-2007 | Bahçeşehir Üniversitesi                  | Öğretim Üyesi   |
| 2002-2003 | Plevne Lisesi                            | Branş Öğretmeni |
| 2001-2002 | Mareşal Fevzi Çakmak Lisesi              | Branş Öğretmeni |