

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ARALARINDA ASAL YAPILANDIRILMIŞ MODÜLLER, ALT MODÜLLERİN
RADİKALLERİ, BAER SPEKTRUMU ÜZERİNDE DEMETLER**

ZEHRA BİLGİN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. AHMET GÖKSEL AĞARGÜN**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ARALARINDA ASAL YAPILANDIRILMIŞ MODÜLLER, ALT MODÜLLERİN
RADİKALLERİ, BAER SPEKTRUMU ÜZERİNDE DEMETLER**

Zehra BİLGİN tarafından hazırlanan tez çalışması 15.06.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

Jüri Üyeleri

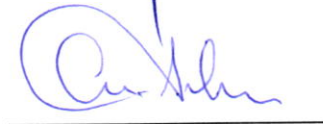
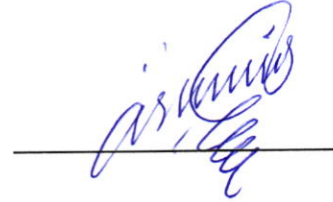
Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ahmet Şükrü ÖZDEMİR
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Esra ŞENGELİN SEVİM
İstanbul Bilgi Üniversitesi





Bu alışma, TÜBİTAK 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Danışman hocam Prof. Dr. Ahmet Göksel Ağargün'e çalışmalarımındaki desteği ve yardımı için teşekkürlerimi sunarım. 2016 yılına kadar bu çalışmayı yürüten önceki danışmanım Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral'a bana verdiği destek, gösterdiği ilgi ve kattığı değerler için teşekkür ederim. İkinci danışmanım Prof. Dr. Ünsal Tekir'e yol gösterici önerileri, samimiyeti ve yardımları için müteşekkirim.

Jüri üyelerine tezimi değerlendirmeleri sebebiyle teşekkür ederim.

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı vasıtasıyla desteklenmiştir. Eğitim hayatım boyunca kesintisiz olarak beni desteklediği için TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca tüm varlığıyla her zaman yanımda olan arkadaşım Neslihan Ayşen Özkirişçi özel bir teşekkürü hak ediyor. Sevgili Ayşen, Fatmanur ve Segah'a, stresli ve zor zamanlarımda yanımda oldukları, arkadaşça, sevgi ve neşe dolu bir ortam oluşturdıkları için teşekkür ederim.

Sevgili ailem bana daima destek oldu. Onların her zaman yanımda olduğunu bilmek zor zamanları atlatmamı, umudumu tamamen yitirmeyip, pes etmeden devam etmemi sağladı. Varlıkları hayatımı anlamlı kılıyor.

Resmi eğitimimi bitirmek üzere olduğum, benim için mühim bu anda, geriye dönüp 10 yılı aşan matematik serüvenime baktığımda yılların hiç kolay geçmediğini görüyorum. Ömrümün üçte birinden fazlasını oluşturan bu vakitten hatırladıklarım; yoğun emek, fedakarlık, ihmal edilen sosyal hayat, uzun çalışma saatleri, yorgunluk, bitmeyen stres halidir. Sonunda elde ettiğim başarı ve konum elbette gurur verici, yine de doktoramı tamamladığım için mutlu ve huzurluyum.

Mayıs, 2017

Zehra BİLGİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Orijinal Katkı	4
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER	5
2.1 Modüller	5
2.2 Modüllerin Dış Kuvvetleri	8
2.3 Topolojik Uzaylar	10
2.4 Bazı Kategorik Yapılar	11
2.5 Demetler	15
BÖLÜM 3	
ARALARINDA ASAL YAPILANDIRILMIŞ MODÜLLER	17
3.1 Aralarında Asal Yapılandırılmış Modüller	17
3.2 Sonlu Üretilmiş Modüller ve Aralarında Asal Yapılandırılmış Modüller ...	23
3.3 Aralarında Asal Yapılandırılmış Modüller	26
3.4 (*) Özelliği	32
BÖLÜM 4	
MODÜLLERİN DIŞ KUVVETLERİ VE SERBEST MODÜLLERİN ALT MODÜLLERİNİN RADİKALLERİ	37
4.1 Serbest Modüllerin Alt Modüllerinin Radikalleri	37
4.2 Temel İdeal Bölgeleri Üzerinde Serbest Modüllerin Asal Alt Modülleri ...	44
BÖLÜM 5	
BİR HALKANIN BAER SPEKTRUMU ÜZERİNDE HALKA VE MODÜL DEMETLERİ	48

5.1	Baer İdealler ve Kuvvetli Baer İdealler	48
5.2	Bir Halkanın Baer Spektrumu.....	50
5.3	Baer Spektrumu Üzerinde Bir Halka Demeti	54
5.4	$\mathcal{R}$ – Modül Demetleri	59
BÖLÜM 6		
SONUÇ VE ÖNERİLER		63
KAYNAKLAR.....		65
ÖZGEÇMİŞ.....		68



SİMGE LİSTESİ

$Ann(J)$	J nin sıfırlayıcısı
$Ann(x)$	x in sıfırlayıcısı
$C(n, k)$	n nin k -li kombinasyonlarının sayısı
$C(X)$	X uzayı üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonlar halkası
$f^{\rightarrow}(V)$	V nin f altındaki geri görüntüsü
$gcd(a, b)$	a ile b nin en büyük ortak böleni
$Hom(A, B)$	A dan B ye morfizmalar kümesi
$\sqrt{I}$	I nin radikali
$\ker f$	f homomorfizmasının çekirdeği
$(K : J)$	J ile çarpımları K tarafından kapsanan elemanların kümesi
$(K : m)$	m ile çarpımları K tarafından kapsanan elemanların kümesi
$\varinjlim M_i$	M_i lerin direkt limiti
$\varprojlim M_i$	M_i lerin ters limiti
$M \otimes N$	M ve N nin tensör çarpımı
$m_1 \otimes m_2$	m_1 ve m_2 elemanlarının tensör çarpımı
$m_1 \wedge m_2$	m_1 ve m_2 elemanlarının dış çarpımı
$\bigotimes_k M$	M nin k . tensör çarpımı
$\bigwedge^k M$	M nin k . dış çarpımı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$obj(C)$	C kategorisinin objeleri sınıfı

$rad_M(N)$	N alt modülünün radikali
Rm	m tarafından üretilen alt modül
(S)	S tarafından üretilen ideal ya da alt modül
$Spec(R)$	R nin asal spektrumu
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar halkası
$\gamma(R)$	R nin Baer spektrumu



**ARALARINDA ASAL YAPILANDIRILMIŞ MODÜLLER, ALT MODÜLLERİN
RADİKALLERİ, BAER SPEKTRUMU ÜZERİNDE DEMETLER**

Zehra BİLGİN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN

Eş Danışman: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

R birimli ve değişmeli bir halka ve M bir R - modül olsun. P , M nin bir asal alt modülü olmak üzere, M nin herhangi alt modüller ailesinin her elemanı ile P aralarında asal iken, bu ailenin kesişimi P tarafından kapsanmıyorsa P ye aralarında asal yapılandırılmış alt modül denir. M nin her asal alt modülü aralarında asal yapılandırılmış ise M ye aralarında asal yapılandırılmış modül denir. Bu çalışmanın ilk bölümünde aralarında asal yapılandırılmış modül tanımı yapılarak, bu modüllerin bazı özellikleri incelenmiştir. Özel olarak, sonlu üretilmiş modüller ve çarpımsal modüller için aralarında asal yapılandırılmış olma özelliğine dair çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca temel ideal halkaları üzerinde sonlu üretilmiş sadık çarpımsal modüllerin sıfır boyutlu olmasına denk koşullar bulunmuştur.

Çalışmanın ikinci bölümünde, değişmeli halkalar üzerinde modül teorisinde güncel konulardan biri olan alt modüllerin radikalini belirleme konusuna eğilinmiş, modüllerin dış kuvvetleri kullanılarak, sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikalleri için bir karakterizasyon verilmiştir. Ayrıca, temel ideal bölgeleri üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş asal alt modülleri belirlenmiştir.

Çalışmanın son bölümünde yarıasal bir R halkasının asal kuvvetli Baer idealleri kümesi üzerinde tanımlı topolojinin bazı özellikleri incelenmiş, Baer spektrumu olarak adlandırılan bu uzay üzerinde bir halkalar öndemeti tanımlanmıştır. R sıfırlayıcı şartını sağladığında bu öndemetin bir demet olduğu ispatlanmıştır. Ek olarak, bu demetin kökleri bulunmuştur. Ayrıca bu halkalar demeti kullanılarak, Baer spektrumu üzerinde bir modüller demeti tanımlanmıştır. her R -modül M ye bir modüller demeti $\mathcal{M}$ eşlenerek, bu eşlemenin bir tam sadık izleç olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Aralarında asal yapılandırılmış modül, alt modüllerin radikali, kuvvetli Baer ideal, Baer spektrumu, halka demeti, modül demeti.



**COPRIMELY STRUCTURED MODULES, RADICALS OF SUBMODULES,
SHEAVES OVER THE BAER SPECTRUM**

Zehra BİLGİN

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN

Co-Adviser: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Let R be a commutative ring with identity and M an R -module. A prime submodule P of M is called coprimely structured if, whenever P is coprime to each element of an arbitrary family of submodules of M , the intersection of the family is not contained in P . An R -module M is called coprimely structured provided each prime submodule of M is coprimely structured. In the first part of this work, the concept of coprimely structured module is defined and some general properties are given. In particular, various results are obtained on coprimely structured property for finitely generated modules and multiplication modules. Besides, some equivalent conditions for a finitely generated faithful multiplication module over a principal ideal ring to be zero-dimensional are given.

In the second part, one of the appealing problems of module theory over commutative rings, determining radicals of submodules, is studied, and using exterior powers of modules, radicals of finitely generated submodules of free modules of finite rank are characterized. In addition, finitely generated prime submodules of free modules of finite rank over principal ideal domains are determined.

In the last part, some properties of a topology on the set of strongly prime Baer ideals, namely the Baer spectrum, of a semiprime ring R is studied and a presheaf of rings is defined on the Baer spectrum. It is proved that if R satisfies the annihilator condition, then that presheaf is actually a sheaf of rings. In addition to that, the stalks of this sheaf are found. Using this sheaf of rings, a sheaf of modules is defined on the Baer spectrum. Assigning a sheaf of module to each R -module M , it is shown that this correspondence gives a fully faithful functor.

Keywords: Coprimely structured module, radical of submodule, strongly Baer ideal, Baer spectrum, sheaf of rings, sheaf of modules.



1.1 Literatür Özeti

Asal idealler değişmeli halkaların yapısını incelerken kullanılan en kullanışlı araçlardan biridir. Benzer şekilde asal alt modüllerin de değişmeli halkalar üzerindeki modüller teorisinde önemi büyüktür. Literatürde asal ideallerle ilgili birçok özelliğin asal alt modüllere genelleştirilmesine çalışılmıştır.

Asal ideallerle ilgili iyi bilinen sonuçlardan biri şöyledir: R bir değişmeli halka ve P , R nin bir ideali olmak üzere, eğer P sonlu tane idealin kesişimini kapsıyorsa, bu ideallerden en az birini kapsar. Gilmer, 1997 yılında yayınlanan “An Intersection Condition for Prime Ideals” adlı makalesinde bu ifadenin sonsuz kesişim için ne zaman doğru olabileceği sorusunu ortaya atmıştır, [1]. Jayaram, Oral ve Tekir, 2013 yılında yayınladıkları “Strongly 0-dimensional Rings” adlı makalede bu özelliği her asal ideal için sağlayan halkalara kuvvetli 0-boyutlu halka adını vererek bu halkaların bazı özelliklerini incelemişlerdir, [2]. Daha sonra, Oral, Özkirişçi ve Tekir, 2014 yılında “Strongly 0-dimensional Modules” adlı makalede bu yapıyı çarpımsal modüllere genelleştirmişlerdir, [3].

Özkirişçi, Oral ve Tekir, 2015 yılında yayınlanan “On Coprimely Structured Rings” adlı makalede kuvvetli 0-boyutlu halkaların bir genelleştirmesi olarak aralarında asal yapılandırılmış halkaları tanımlamış ve incelemişlerdir, [4].

Bir idealin radikali o ideali kapsayan asal ideallerin kesişimi olarak tanımlanır. Bundan başka, bir idealin radikalini o idealin elemanları cinsinden belirlemek de mümkündür. İdealin radikali tanımının modüller teorisindeki karşılığı alt modülün radikali olarak

karşımıza çıkar. Öyle ki, bir alt modülün radikali o alt modülü içeren asal alt modüllerin radikali olarak tanımlanır. Son 40 yılda değişmeli cebir alanındaki gelişmelerde alt modüllerin radikallerinin karakterizasyonu ilgi çekici problemlerden biri olmuştur. Dikkate değer sayıda yazar bu problem ile uğraşmış ve farklı metotlarla kısmi sonuçlar elde etmişlerdir.

McCasland ve Moore, 1991 yılında yayınlanan “On Radicals of Submodules” ve 1992 yılında yayınlanan “Prime Submodules” adlı makalelerinde alt modüllerin radikallerini belirlemek için alt modülün bürümü (envelope) kavramından yararlanmışlardır. Bu yöntemle temel ideal bölgeleri üzerindeki sonlu üretilmiş modüllerin alt modüllerinin radikallerini, idealin radikaline benzer şekilde elemanları cinsinden belirlemişlerdir, [5], [6]. 1992 yılında Jenkins ve Smith “On the Prime Radical of a Module over a Commutative Ring” adlı makalede McCasland ve Moore’un sonuçlarını Dedekind bölgeleri üzerindeki herhangi modüllere genişletmişlerdir, [7].

Pusat-Yılmaz ve Smith, 1999 yılında yayınlanan “Radicals of Submodules of Free Modules” adlı makalede sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikalleri için bir karakterizasyon elde etmişlerdir, [8].

Alt modülün radikali hakkında bahsettiğimiz bu çalışmalarda bu konuyla ilgili bir problem olarak asal alt modülleri belirleme çabası ortaya çıkmaktadır. Yukarıda saydığımız çalışmalara ek olarak, Pusat-Yılmaz, 2003 yılında yayınlanan “On Prime Submodules of Finitely Generated Free Modules” adlı makalesinde, sonlu ranklı serbest modüllerin asal alt modüllerini belirlemekle ilgilenmiş, tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgeler üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin devirli ve iki üreteçli alt modülleri için bazı sonuçlar elde etmiştir, [9]. Hedayat ve Nekooei 2005 yılında yayınlanan “Characterization of Prime Submodules of a Finitely Generated Free Module over a PID” adlı makalelerinde tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgeler ve temel ideal bölgeleri üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin bazı asal ideallerini belirlemişlerdir. Buna ek olarak tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgeler üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin devirli alt modüllerinin radikallerini tespit etmişlerdir, [10].

Değişmeli Baer halkalarında Baer idealleri 1972 yılında Speed tarafından “A Note on Commutative Baer Rings” adlı makalede tanımlanmıştır, [11]. Jayaram tarafından 1984

yılında yayınlanan “Baer Ideals in Commutative Semiprime Rings” adlı makalede yarıasal halkalarda farklı bir tanımla Baer idealleri tanımlamıştır, [12]. Değişmeli Baer halkalarında bu iki tanım birbirine denktir. Jayaram makalesinde kuvvetli Baer idealleri de tanımlamış ve bu iki tip idealin özelliklerini bu makalede ve 1990 yılında yayınlanan “Quasiregular Rings” adlı makalesinde incelemiştir, [12]. Ayrıca bu makalede asal kuvvetli Baer idealleri kümesi üzerinde bir topolojinin varlığını göstermiştir.

Topoloji ve cebirsel geometride, bir topolojik uzay üzerinde tanımlı birçok yapı yerelleştirilebilir, diğer bir deyişle, açık kümeler üzerine kısıtlanarak incelenebilir. Buna örnek olarak, sürekli reel ya da kompleks değerli fonksiyonlar, yerel halkalar ve diferansiyellenebilir formlar sayılabilir. Öndemetler (presheaves) ve demetler (sheaves) bu yerelleştirmeyi formalize eden kavramlardır. Literatürde öndemet ve demet kavramının detaylı olarak işlendiği ilk kaynaklardan biri Grothendieck’in düzenlediği cebirsel geometri konulu seminer notlarından oluşan ve 1960 yılında yayınlanan “Eléments de géométrie algébrique, I: Le Langage des Schémas” adlı eserdir, [14]. Literatürde en sık rastlanan örneklerden biri olan yapı demeti (structure sheaf) halkaların asal spektrumu olarak adlandırılan asal idealler kümesi üzerinde, Zariski topolojisine sahip uzay için tanımlanmış bir demettir. Halkanın bir elemanı için o elemanı içermeyen asal ideallerin kümesi bir açık kümedir. Her eleman için oluşturulan bu açık kümeler asal spektrum için bir baz tanımlar. Yapı demetinde bu açık kümelerin her birine halkanın söz konusu elemanın kuvvetlerinin oluşturduğu çarpımsal kapalı kümeye göre alınmış yerelleştirme halkası atanır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin üç amacı bulunmaktadır. İlki; aralarında asal yapılandırılmış halka tanımını modül yapısına genelleştirerek aralarında asal yapılandırılmış modüllerin özelliklerini incelemektir. İkincisi; modüllerin dış kuvvetlerinden yararlanarak, literatürde halen tamamen çözülememiş olan modüllerin alt modüllerinin radikallerinin karakterize edilmesi ve asal alt modüllerin belirlenmesi problemlerine serbest modüller sınıfında katkı sağlamaktır. Dış kuvvet yapısının problemi formalize etmeye, gösterim ve işlem kolaylığı sağlayarak çözümü basitleştirmeye yarayacağı öngörülmektedir. Son olarak; asal kuvvetli Baer idealleri kümesi üzerinde [12]’de tanımlanan topolojinin özellikleri

incelenerek bu topolojik uzay üzerinde bir halka demetin varlığının gösterilmesi hedeflenmektedir. Ayrıca bu bahsedilen uzay üzerinde bir modül demetinin varlığı gösterilecektir. Bu demet yapısının asal spektrum üzerindeki yapı demetiyle ilişkisinin değerlendirilmesi amaçlanmaktadır.

1.3 Orijinal Katkı

İlk bölümde, aralarında asal yapılandırılmış halka kavramı modül yapısına genelleştirilerek aralarında asal yapılandırılmış modül tanımı yapılacak ve bu yapının bazı genel özellikleri tespit edilecektir. Aralarında asal yapılandırılmış modüllerin kuvvetli modüllerle olan ilişkileri gözlemlenecektir. Sonlu üretilmiş aralarında asal yapılandırılmış modüller ve çarpımsal aralarında asal yapılandırılmış modüllerin çeşitli özellikleri elde edilecektir. Ek olarak, temel ideal halkaları üzerinde sonlu üretilmiş, sadık, çarpımsal modüllerin sıfır boyutlu olmasına denk koşullar verilecektir.

İkinci bölümde, modüllerin dış kuvvetleri kullanılarak, sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikallerinin bir karakterizasyonu verilecektir. Ayrıca, temel ideal bölgeleri üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş asal alt modülleri belirlenecektir.

Üçüncü bölümde, Baer spektrumu olarak adlandırılan yarıasal halkaların asal kuvvetli Baer idealleri kümesi üzerindeki topolojinin bazı özellikleri incelenerek, Baer spektrumu üzerinde bir halkalar öndemeti tanımlanacak ve halka sıfırlayıcı şartını sağlarsa bu öndemetin bir demet olduğu ispatlanacaktır. Ayrıca bu demetin kökleri bulunacaktır. Bu halkalar demeti $\mathcal{R}$ kullanılarak, bir R - modül M ye bir $\mathcal{R}$ - modüller demeti $\mathcal{M}$ atanacak, böylece Baer spektrumu üzerinde bir modüller demetinin varlığı gösterilecektir. Dahası $M \rightarrow \mathcal{M}$ eşlemesinin bir tam sadık izleç olduğu ispat edilecektir.

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez için ihtiyaç duyacağımız genel bilgileri vereceğiz. Sırasıyla, modüller, topolojik uzaylar, limtiller, izleçler gibi bazı kategorik yapılar ile demetlerden bahsedeceğiz.

2.1 Modüller

Bu kısımda modüller ile ilgili ihtiyacımız olan bazı genel bilgileri vereceğiz. Bu tezin tamamında tüm halkalar birimli ve değişmeli kabul edilecektir. Kavramlar hakkında kapsamlı bilgi için [15] ve [16]'ya bakılabilir.

M bir R - modül ve $S \subseteq M$ olsun. M nin S yi içeren tüm alt modüllerinin kesişimine S tarafından üretilen alt modül denir ve (S) ile gösterilir. Bu alt modül S yi içeren en küçük alt modüldür. $S \neq \emptyset$ ise

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i s_i : n \in \mathbb{N}, r_1, \dots, r_n \in R, s_1, \dots, s_n \in S \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $S \neq \emptyset$ ve $S = \{s_1, \dots, s_t\}$ sonlu bir küme ise

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^t r_i s_i : r_1, \dots, r_t \in R \right\}$$

olur. M nin bir alt modülü N , M nin sonlu bir alt kümesi tarafından üretilmişse N ye sonlu üretilmiş alt modül denir. Eğer N tek elemanlı bir $S = \{m\}$ kümesi

tarafından üretilmişse $N = \{rm : r \in R\}$ yazılır ve N , Rm ile gösterilir. Eğer M tek bir eleman tarafından üretilmişse M ye devirli modül denir.

K , M nin bir alt modülü ve $J \subseteq M$ boştan farklı bir alt kümesi olsun. R nin

$$\{r \in R : \text{her } j \in J \text{ için } rj \in K\}$$

ideali $(K : J)$ yada $(K :_R J)$ ile gösterilir. Eğer $J = \{m\}$ ise $(K : m)$ yazılır. Özel olarak $K = 0$ ise

$$(0 : J) = \{r \in R : \text{her } j \in J \text{ için } rj = 0\}$$

idealine J nin sıfırlayıcısı denir ve $\text{Ann}(J)$ ya da $\text{Ann}_R(J)$ ile gösterilir. Eğer $J = \{x\}$ ise J nin sıfırlayıcısı $\text{Ann}(x)$ olarak yazılır.

M nin sıfırlayıcısı sıfır modül ise, yani $(0 : M) = \text{Ann}(M) = 0$ ise, M ye sadık modül denir.

M nin bir elemanlar ailesi $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, M yi üretiyor ve her $m \in M$ elemanı, her $\lambda \in \Lambda$ için $r_\lambda \in R$ olmak üzere, $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda e_\lambda$ şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa, $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesine M nin bir bazı denir ve M ye bir serbest R - modül denir. M nin bazının eleman sayısına M nin rankı denir.

M nin serbest R - modül olması için gerek ve yeter koşul M nin, R nin kopyalarının bir direk toplamına izomorf olmasıdır. Gerçekte, eğer $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, M nin bir bazı ise, her $\lambda \in \Lambda$ için $R_\lambda = R$ olmak üzere $M \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ yazılabilir.

P , R nin bir öz ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye asal ideal denir. R nin tüm asal ideallerinin kümesi R nin asal spektrumu olarak adlandırılır ve $\text{Spec}(R)$ ile gösterilir.

R nin bir ideali Q , R nin tüm idealleri kümesinin kapsamaya göre bir maksimal elemanı ise Q ya maksimal ideal denir. R sıfırdan farklı ise en az bir maksimal ideali vardır. Ayrıca R nin her öz ideali en az bir maksimal ideal tarafından kapsanır. Her maksimal ideal aynı zamanda asal idealdir.

Tek maksimal ideali olan halkaya yerel halka denir.

R nin bir ideali I için, I yı kapsayan tüm asal ideallerin kesişimine I nin radikali denir ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir. Bu ideal şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\}$$

M bir R - modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. $m \in M$ ve $r \in R$ için $rm \in N$ iken $m \in N$ veya $r \in (N:M)$ oluyorsa N ye asal alt modül denir.

M nin bir alt modülü K , M nin tüm alt modüller kümesinin kapsamaya göre bir maksimal elemanı ise K ya maksimal alt modül denir. Her maksimal alt modül aynı zamanda asal alt modüldür. Bir modülün her asal alt modülü maksimal ise modüle sıfır boyutlu modül adı verilir.

M bir R - modül ve L , M nin bir öz alt modülü olsun. $m \in M$ ve $r \in R$ için $rm \in N$ iken $m \in N$ veya $r \in \sqrt{(N:M)}$ oluyorsa N ye asalımsı alt modül denir.

M ve N iki R - modül olsun. $M \times N$ kartezyen çarpımı üzerindeki serbest R - modül F ile gösterilsin. $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $r \in R$ olmak üzere K , F nin

$$\begin{aligned} & (m+m', n) - (m, n) - (m', n) \\ & (m, n+n') - (m, n) - (m, n') \\ & (rm, n) - r(m, n) \\ & (m, rn) - r(m, n) \end{aligned}$$

elemanları tarafından üretilen alt modülü olsun. R - modül F/K , M ve N nin tensör çarpımı olarak adlandırılır ve $M \otimes N$ ile gösterilir. F nin baz elemanı (m, n) nin $M \otimes N$ deki görüntüsü $m \otimes n$ ile gösterilir ve bir basit tensör olarak adlandırılır. $M \otimes N$ tüm basit tensörler tarafından üretilir.

M, N, P üç R - modül olsun. $f : M \times N \rightarrow P$ tasviri her iki bileşende lineerse, yani, her $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned} f(m+m', n) &= f(m, n) + f(m', n) \\ f(m, n+n') &= f(m, n) + f(m, n') \\ f(rm, n) &= r \cdot f(m, n) \\ f(m, rn) &= r \cdot f(m, n) \end{aligned}$$

sağlanıyorsa f ye bilineer tasvir denir.

$$\begin{aligned} i: M \times N &\rightarrow M \otimes N \\ (m, n) &\mapsto m \otimes n \end{aligned}$$

tasviri bilineer tasvirdir ve kanonik bilineer tasvir olarak adlandırılır.

$M \otimes N$, bilineer tasvirler için evrensel özelliği sağlar. Öyle ki, L bir R -modül ve $g: M \times N \rightarrow L$ bir bilineer tasvir ise, i kanonik bilineer tasvir olmak üzere, $\bar{g}i = g$ olacak şekilde tek bir $\bar{g}: M \otimes N \rightarrow L$, R -modül homomorfizması vardır.

2.2 Modüllerin Dış Kuvvetleri

Bu kısımda modüllerin dış (exterior) kuvvetleri konusunda bazı genel bilgiler vereceğiz. Kavramlar hakkında detaylı bilgi için [17]'den faydalanılabilir.

M bir R -modül ve $k \geq 2$ olsun. M nin k . tensör çarpımını $\bigotimes_k M$ ile gösteriyoruz.

J_k , $\bigotimes_k M$ nin bir $i \neq j$ için $m_i = m_j$ eşitliğini sağlayan $m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_k$ elemanları

tarafından üretilen alt modülü olsun. R -modül $(\bigotimes_k M) / J_k$ ye M nin k . dış kuvveti

denir ve $\Lambda^k M$ ile gösterilir. 0. dış kuvvet $\Lambda^0 M = R$ ve 1. dış kuvvet $\Lambda^1 M = M$ olarak kabul edilir. Her $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$ için $m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_k$ elemanının $\Lambda^k M$ deki denklik sınıfı $m_1 \wedge m_2 \wedge \dots \wedge m_k$ ile gösterilir.

k . tensör çarpım $\bigotimes_k M$ basit tensörler $m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_k$ tarafından üretildiğinden k .

dış çarpım da $m_1 \wedge m_2 \wedge \dots \wedge m_k$ elemanları tarafından üretilir.

Her $r \in R$ ve her $1 \leq i \leq k$ için

$$m_1 \wedge \dots \wedge r m_i \wedge \dots \wedge m_k = r(m_1 \wedge \dots \wedge m_i \wedge \dots \wedge m_k)$$

ve

$$m_1 \wedge \dots \wedge 0 \wedge \dots \wedge m_k = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, bir dış çarpımdaki herhangi iki bileşen eşit ise dış çarpım sıfıra eşittir, yani, bir $i \neq j$ için $m_i = m_j$ sağlanıyorsa, $m_1 \wedge \dots \wedge m_k = 0$ olur. Tüm bu

özelliklerden aynı bileşenlerin farklı sıralanmasıyla elde edilen iki dış çarpımın işaret farkı ile eşit olduğu gözlemini yapabiliriz.

R bir halka, M ve N iki R -modül olsun. $f : M \times \cdots \times M \rightarrow N$ tasviri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa f ye çoklu lineer tasvir denir:

(i) Her $i \in \{1, \dots, k\}$ için

$$f(m_1, \dots, m_i' + m_i'', \dots, m_k) = f(m_1, \dots, m_i', \dots, m_k) + f(m_1, \dots, m_i'', \dots, m_k) ,$$

(ii) Her $i \in \{1, \dots, k\}$ ve her $r \in R$ için

$$f(m_1, \dots, rm_i, \dots, m_k) = rf(m_1, \dots, m_i, \dots, m_k) .$$

R bir halka, M ve N iki R -modül olsun. $f : M \times \cdots \times M \rightarrow N$ bir çoklu lineer tasvir olmak üzere bir $i \neq j$ için $m_i = m_j$ iken $f(m_1, \dots, m_k) = 0$ sağlanıyorsa f ye alterne çoklu lineer tasvir denir.

Dış kuvvetler alterne çoklu lineer tasvirler için evrensel özelliği sağlar, [17, 1.4]:

M bir R -modül ve $k \geq 1$ olsun. M nin k . direkt çarpımı M^k ile gösterilsin. $\nu : M^k \rightarrow \wedge^k M$, $\nu(m_1, \dots, m_k) = m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$ ile tanımlı kanonik alterne çoklu lineer tasvir olsun. Bu durumda, her R -modül N ve her alterne çoklu lineer tasvir $f : M^k \rightarrow N$ için $\tilde{f} \circ \nu = f$ olacak şekilde tek bir R -lineer tasvir $\tilde{f} : \wedge^k M \rightarrow N$ vardır.

Sonlu ranklı serbest modüllerin dış çarpımları da serbest modüllerdir, [17, 1.6] :

F , n ranklı bir serbest R -modül olsun. $k \leq n$ için, $C(n, k)$, n nin k -li kombinasyonlarının sayısı olmak üzere, k . dış kuvvet $\wedge^k F$ rankı $C(n, k)$ olan bir serbest R -modüldür. $\{e_1, \dots, e_n\}$, F nin bir bazı ise

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

kümesi $\wedge^k F$ nin bir bazıdır.

2.3 Topolojik Uzaylar

Bu kısımda topoloji konusunda ihtiyaç duyacağımız bazı genel bilgileri vereceğiz. Kavramlar hakkında genel bilgi için [18]'e bakılabilir.

Bir X kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{T}$ alt kümeler ailesine X üzerinde bir topoloji denir:

- (i) $\emptyset$ ve X , $\mathcal{T}$ 'nin elemanıdır;
- (ii) $\mathcal{T}$ 'nin herhangi bir alt ailesinin elemanlarının birleşimi $\mathcal{T}$ 'nin elemanıdır;
- (iii) $\mathcal{T}$ 'nin herhangi bir sonlu alt ailesinin elemanlarının kesişimi $\mathcal{T}$ 'nin elemanıdır.

X kümesi $\mathcal{T}$ topolojisi ile bir topolojik uzay olsun. X in bir alt kümesi U , $\mathcal{T}$ 'nin elemanı ise U ya X in bir açık kümesi denir.

X bir küme ve $\mathcal{B}$, X in bir alt kümeler ailesi olsun. Eğer

- (i) her $x \in X$ elemanı $\mathcal{B}$ 'nin en az bir elemanı tarafından kapsanır;
- (ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ ise $x \in B_3$ ve $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır.

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{B}$ ye X üzerinde bir topolojinin bazı denir. Bu durumda, $\mathcal{B}$ tarafından üretilen topoloji $\mathcal{T}$ şöyle tanımlanır: U , X in bir alt kümesi olmak üzere, eğer her $x \in U$ için $x \in B$ ve $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa, U , X te açık kümedir denir, (yani $\mathcal{T}$ 'nin elemanıdır).

X bir küme ve $\mathcal{B}$, X üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisinin bazı olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ deki elemanların tüm birleşimlerinden oluşur.

X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. X in x i kapsayan her açık kümesine x in bir komşuluğu denir.

X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Y nin her açık kümesi V için $f^{-1}(V)$, X in bir açık kümesi ise f ye sürekli fonksiyon denir. $f : X \rightarrow Y$ bire bir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer hem f hem de ters fonksiyon $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sürekli ise f ye homeomorfizma denir.

Bir X uzayının bir alt kümeler ailesi $\mathcal{A}$ nın elemanlarının birleşimi X e eşit ise $\mathcal{A}$ ya X in bir örtüsü denir. Eğer $\mathcal{A}$ nın elemanları açık kümeler ise $\mathcal{A}$ açık örtü olarak adlandırılır. X uzayının her açık örtüsü sonlu bir açık örtüyü kapsıyorsa X e kompakt uzay denir.

Bir X uzayının her iki elemanından en az biri diğerini kapsamayan bir komşuluğa sahipse X e T_0 - uzayı denir.

2.4 Bazı Kategorik Yapılar

Bu kısımda ihtiyacımız olan bazı kategorik yapılardan bahsedeceğiz. Kavramlar hakkında genel bilgi için [19]'a bakılabilir.

Bir C kategorisi üç unsurdan oluşur: Bir objeler sınıfı $obj(C)$, her (A, B) obje ikilisi için bir morfizmalar kümesi $Hom(A, B)$, ve her (A, B, C) obje üçlüsü için

$$\begin{aligned} Hom(A, B) \times Hom(B, C) &\rightarrow Hom(A, C) \\ (f, g) &\mapsto gf \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir bileşke işlemi. $f \in Hom(A, B)$ morfizmasını $f : A \rightarrow B$ ya da $A \xrightarrow{f} B$ şeklinde göstereceğiz. Bu unsurlar aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

(i) Hom kümeleri ikiye ayrılır.

(ii) Her A objesi için, $f : A \rightarrow B$ olmak üzere,

$$f1_A = f \quad \text{ve} \quad 1_B f = f$$

olacak şekilde tek bir birim morfizma $1_A \in Hom(A, A)$ vardır.

(ii) Bileşke işlemi birleşmelidir: $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ morfizmalar olmak üzere, $h(gf) = (hg)f$ sağlanır.

C ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $T : C \rightarrow \mathcal{D}$ fonksiyonu

(i) Her $A \in obj(C)$ için $T(A) \in obj(\mathcal{D})$;

(ii) $f : A \rightarrow A'$, C de ise, $T(A) \rightarrow T(A')$, $\mathcal{D}$ dedir;

(iii) $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$, C de ise,

$$T(A) \xrightarrow{T(f)} T(A') \xrightarrow{T(g)} T(A'')$$

$\mathcal{D}$ dedir ve

$$T(gf) = T(g)T(f)$$

sağlanır.

(iv) Her $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$ için $T(1_A) = 1_{T(A)}$

özelliklerini sağlıyorsa, T ye $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir izleç denir.

$T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir izleç olsun. Her $A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$ için

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(T(A), T(B))$$

$$f \mapsto T(f)$$

tasviri bire bir ise, T ye sadık (faithful) izleç denir. Bu tasvir örten ise T ye tam (full) izleç denir.

I kısmi sıralı bir küme ve $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $(M_i)_{i \in I}$, $\mathcal{C}$ de bir objeler ailesi ve $(\psi_i^j: M_j \rightarrow M_i)_{j \succ i}$, bir morfizmalar ailesi olmak üzere, $((M_i)_{i \in I}, (\psi_i^j)_{j \succ i})$ sıralı ikilisi $\{M_i, \psi_i^j\}$ ile gösterilsin. Her $i \in I$ için $\psi_i^i = 1_{M_i}$ eşitliği sağlanıyorsa, ve her $k \succ j \succ i$

$$\begin{array}{ccc} M_k & \xrightarrow{\psi_i^k} & M_i \\ & \searrow \psi_j^k & \nearrow \psi_i^j \\ & M_j & \end{array}$$

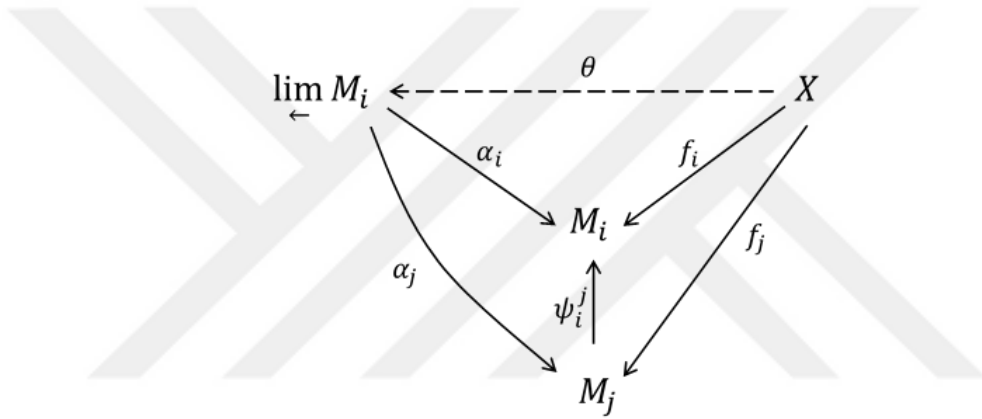
için

diagramı değişmeli ise $\{M_i, \psi_i^j\}$ ye ters sistem denir.

I kısmi sıralı bir küme, C bir kategori ve $\{M_i, \psi_i^j\}$, C de, I üzerinde bir ters sistem olsun. Ters limit (projektif limit ya da limit) bir $\varprojlim M_i$ objesinden ve bir $(\alpha_i : \varprojlim M_i \rightarrow M_i)_{i \in I}$ projeksiyonlar ailesinden oluşur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

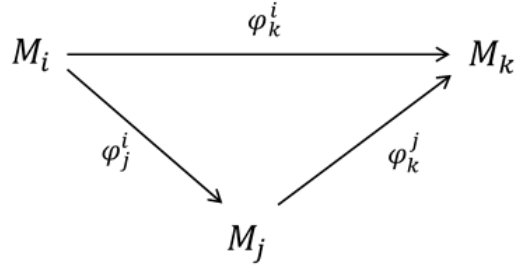
(i) $i < j$ ise $\psi_i^j \alpha_j = \alpha_i$ eşitliği sağlanır.

(ii) Her $X \in \text{obj}(C)$ ve $i < j$ olduğunda $\psi_i^j f_j = f_i$ eşitliğini sağlayan $f : X \rightarrow M_i$ morfizmaları için, aşağıdaki diagramı değişmeli yapan tek bir $\theta : X \rightarrow \varprojlim M_i$ morfizması vardır.



R bir halka olmak üzere, R - modüllerin herhangi kısmi sıralı küme I üzerindeki her ters sistemi $\{M_i, \psi_i^j\}$ nin ters limiti mevcuttur.

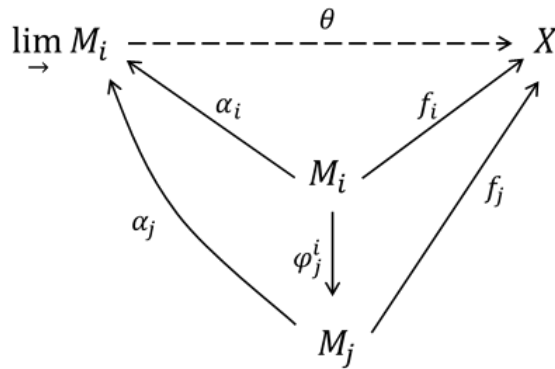
I kısmi sıralı bir küme ve C bir kategori olsun. $(M_i)_{i \in I}$, C de bir objeler ailesi ve $(\phi_j^i : M_i \rightarrow M_j)_{i < j}$, bir morfizmalar ailesi olmak üzere, $((M_i)_{i \in I}, (\phi_j^i)_{i < j})$ sıralı ikilisi $\{M_i, \phi_j^i\}$ ile gösterilsin. Her $i \in I$ için $\phi_i^i = 1_{M_i}$ eşitliği sağlanıyorsa, ve her $i < j < k$ için



diagramı değişmeli ise $\{M_i, \varphi_j^i\}$ ye direkt sistem denir.

I kısmi sıralı bir küme, C bir kategori ve $\{M_i, \varphi_j^i\}$, C de, I üzerinde bir direkt sistem olsun. Direkt limit (indüktif limit ya da kolimit) bir $\varinjlim M_i$ objesinden ve bir $(\alpha_i : M_i \rightarrow \varinjlim M_i)_{i \in I}$ insertion morfizmaları ailesinden oluşur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $i < j$ ise $\alpha_j \varphi_j^i = \alpha_i$ eşitliği sağlanır.
- (ii) Her $X \in \text{obj}(C)$ ve $i < j$ olduğunda $f_j \varphi_j^i = f_i$ eşitliğini sağlayan $f : M_i \rightarrow X$ morfizmaları için, aşağıdaki diagramı değişmeli yapan tek bir $\theta : \varinjlim M_i \rightarrow X$ morfizması vardır.



R bir halka olmak üzere, R - modüllerin herhangi kısmi sıralı küme I üzerindeki her direkt sistemi $\{M_i, \psi_i^j\}$ nin direkt limiti mevcuttur.

2.5 Demetler

Bu kısımda demetler hakkında bazı temel bilgileri vereceğiz. Kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için [20], [21], [22]'ye bakılabilir.

X bir topolojik uzay olsun. X in her açık kümesi $U \subseteq X$ için bir $F(U)$ kümesi belirlensin. Her $U \subseteq V$ açık kümeleri için bir

$$\rho_U^V : F(V) \rightarrow F(U)$$

tasviri belirlensin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, bu kümeler ve tasvirler sistemine X üzerinde bir öndemet (presheaf) denir:

- (i) U boş küme ise $F(U)$ bir elemandan oluşur;
- (ii) Her U açık kümesi için ρ_U^U tasviri birim tasviridir;
- (iii) Her $U \subset V \subset W$ açık kümeleri için

$$\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$$

sağlanır.

$U \subseteq V$ açık kümeleri için ρ_U^V tasvirlerine kısıtlama tasvirleri denir.

$F(U)$ kümelerinin tamamı gruplar, bir R halkası üzerinde modüller ya da halkalar ve ρ_U^V tasvirleri bu yapıların homomorfizmaları ise F ye, sırasıyla, gruplar, R - modüller ya da halkalar öndemeti denir.

U , X in bir açık kümesi olmak üzere, $F(U)$, F nin U üzerindeki kesiti olarak adlandırılır. X üzerindeki kesite global kesit denir.

F , bir X uzayı üzerinde bir öndemet olsun. Eğer her $U \subseteq X$ açık kümesi ve her $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ açık örtüsü için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, F ye X üzerinde bir demet denir:

(i) $s_1, s_2 \in F(U)$ ve her U_α için $\rho_{U_\alpha}^U(s_1) = \rho_{U_\alpha}^U(s_2)$ ise $s_1 = s_2$ dir;

(ii) $s_\alpha \in F(U_\alpha)$ olmak üzere, her U_α ve U_β için $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta)$ iken, her

U_α için $s_\alpha = \rho_{U_\alpha}^U(s)$ olacak şekilde bir $s \in F(U)$ vardır.



ARALARINDA ASAL YAPILANDIRILMIŞ MODÜLLER

R bir halka, $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, R halkasının bir idealler ailesi ve P , R nin bir asal ideali olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $I_\lambda + P = R$ iken $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \not\subseteq P$ sağlanıyorsa, P ye aralarında asal yapılandırılmış ideal denir. R halkasının her asal ideali aralarında asal yapılandırılmış ideal ise R ye aralarında asal yapılandırılmış halka denir.

Özkirişçi, Oral ve Tekir, “On Coprimely Structured Rings” makalesinde aralarında asal yapılandırılmış halkaları tanımlamış, bu halkaların bazı özelliklerini ve çeşitli halkalarla ilişkilerini incelemişlerdir, [4].

Bu bölümde aralarında asal yapılandırılmış halka kavramının modüller teorisindeki genelleştirmesi olarak aralarında asal yapılandırılmış modülleri tanımlayıp özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1 Aralarında Asal Yapılandırılmış Modüller

Tanım 3.1 R bir halka, M bir R - modül, $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin bir alt modüller ailesi ve P , M nin bir asal alt modülü olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $N_\lambda + P = M$ iken $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \not\subseteq P$ sağlanıyorsa, P ye aralarında asal yapılandırılmış alt modül denir. M modülünün her asal alt modülü aralarında asal yapılandırılmış alt modül ise M ye aralarında asal yapılandırılmış modül denir.

Her modül aralarında asal yapılandırılmış modül değildir. Aşağıdaki modül bu duruma bir örnektir.

Örnek 3.2 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olsun. Her tek doğal sayı n için $N_n = n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ kümesi M nin bir alt modülüdür. Bu durumda $\bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ tek}}} N_n = (0)$ olur. Ayrıca $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ kümesi M nin bir asal alt modülüdür ve $\bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ tek}}} N_n \subset 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ dir. Fakat, her tek n doğal sayısı için $N_n + 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} = M$ olur. Dolayısıyla M aralarında asal yapılandırılmış modül değildir.

Teorem 3.3 Bir aralarında asal yapılandırılmış modülün her homomorf görüntüsü de aralarında asal yapılandırılmıştır.

İspat : M bir aralarında asal yapılandırılmış R - modül ve M' bir R - modül olsun. $f : M \rightarrow M'$ bir R - modül homomorfizması olmak üzere $f(M)$ nin $\{N_i'\}_{i \in I}$ alt modüller ailesi ve P' asal alt modülü için $\bigcap_{i \in I} N_i' \subseteq P'$ kapsamı sağlansın. Her $i \in I$ için $f(N_i) = N_i'$ ve $f(P) = P'$ olacak şekilde M nin $\ker f$ i kapsayan bir alt modüller ailesi $\{N_i\}_{i \in I}$ ve bir asal alt modülü P vardır. Bu durumda,

$$f\left(\bigcap_{i \in I} N_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(N_i) = \bigcap_{i \in I} N_i' \subseteq P' = f(P)$$

ve dolayısıyla $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq P$ elde edilir. M aralarında asal yapılandırılmış bir modül olduğundan, bir $j \in I$ için $N_j + P \neq M$ sağlanır. N_j ve P modüllerinin her ikisi de $\ker f$ alt modülünü içerdiğinden, $N_j' + P' = f(N_j + P) \neq f(M)$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $f(M)$ aralarında asal yapılandırılmıştır.

Sonuç 3.4 M bir R - modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. M aralarında asal yapılandırılmış ise, bölüm modülü M/N de aralarında asal yapılandırılmıştır.

Kuvvetli 0-boyutlu modüller, çarpımsal modüller için Oral, Özkirişçi ve Tekir tarafından [3]'de tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Biz burada çarpımsal modül şartını kaldırarak tanımı genelleştiriyoruz.

Tanım 3.5 R bir halka, M bir R - modül, $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M modülünün bir alt modüller ailesi ve P , M nin bir asal alt modülü olsun. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \subseteq P$ iken en az bir $\gamma \in \Lambda$ için

$N_\gamma \subseteq P$ sağlanıyorsa, P ye kuvvetli asal alt modül denir. M modülünün her asal alt modülü kuvvetli asal alt modül ise M ye kuvvetli 0-boyutlu modül denir.

Sıradaki teorem aralarında asal yapılandırılmış modüller ile kuvvetli 0-boyutlu modüller arasındaki bağlantıyı vermektedir.

Teorem 3.6 Her kuvvetli 0-boyutlu R - modül aralarında asal yapılandırılmıştır.

İspat: M bir kuvvetli 0-boyutlu R - modül, $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin bir alt modüller ailesi ve P , M nin bir asal alt modülü olsun. $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq P$ kapsamasının sağlandığı kabul edilsin. M kuvvetli 0-boyutlu olduğundan, bir $j \in I$ için $N_j \subseteq P$ bulunur. Bu durumda $N_j + P = P \neq M$ elde edilir. Bu sonuç aralarında asal yapılandırılmış modül tanımının karşıt tersidir. Dolayısıyla M aralarında asal yapılandırılmış modüldür.

Teorem 3.3 ün bir sonucu olarak bir direkt toplam aralarında asal yapılandırılmış modül ise, her bir direkt toplam terimi de aralarında asal yapılandırılmıştır. Bu ifadenin tersi bazı şartlar altında doğrudur. Bu sonucu vermek için bir yardımcı teoremden yararlanacağız. Erdoğan, [23]'de iki R - modülün direkt toplamının alt modül yapısını karakterize etmektedir.

Yardımcı Teorem 3.7 [23, Lemma 2.1] R bir halka ve $M \oplus N$ iki R - modülün direkt toplamı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $M \oplus N$ nin tüm alt modülleri, A , M nin bir alt modülü ve B , N nin bir alt modülü olmak üzere, $A \oplus B$ formundadır.
- (ii) Her $x \in M$ ve $y \in N$ için $Ann(x) + Ann(y) = R$ eşitliği sağlanır.

Burada, bu sonucu herhangi bir direkt toplama genelliyoruz.

Yardımcı Teorem 3.8 M_i , $i \in I$, R - modüller olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) Her $m_i \in M_i$, $i \neq j$ için, $Ann(m_i) + Ann(m_j) = R$.
- (ii) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ nin her alt modülü, her $i \in I$ için, N_i , M_i nin bir alt modülü olmak üzere, $\bigoplus_{i \in I} N_i$ formundadır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Her $m_i \in M_i$ ve $i \neq j$ için $Ann(m_i) + Ann(m_j) = R$ olduğu kabul edilsin.

Önce her $n \in \mathbb{N}$, $m_{i_j} \in M_{i_j}$ ve $1 \leq j \leq n$ için $Ann((m_{i_1}, \dots, m_{i_{n-1}})) + Ann(m_{i_n}) = R$ eşitliğini göstereceğiz. $n \in \mathbb{N}$ olsun. İfadeyi n üzerinde tümevarım ile ispatlayacağız. $m_i \in M_i$ olsun. $n=2$ için sonuç kabulden elde edilir. $n=3$ için, kabulden, $a \in Ann(m_1)$, $c \in Ann(m_2)$ ve $b, d \in Ann(m_3)$ olmak üzere $1 = a + b = c + d$ yazılabilir. Bu durumda

$$1 = (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

yazılır. $ac \in Ann((m_1, m_2))$ ve $ad + bc + bd \in Ann(m_3)$ olduğundan

$$Ann((m_1, m_2)) + Ann(m_3) = R$$

elde edilir.

$n = k$ olsun. $2 \leq l \leq k-1$, $i_j \in \{1, \dots, k\}$ için $Ann((m_{i_1}, \dots, m_{i_{l-1}})) + Ann(m_{i_l}) = R$ sağlanır.

Kabulden, $Ann((m_{i_1}, \dots, m_{i_{k-2}})) + Ann(m_{i_{k-1}}) = R$ ve $Ann(m_{i_{k-1}}) + Ann(m_{i_k}) = R$ olduğundan

$$\begin{aligned} & Ann((m_{i_1}, \dots, m_{i_{k-2}}, m_{i_{k-1}})) + Ann(m_{i_k}) \\ &= Ann(((m_{i_1}, \dots, m_{i_{k-2}}), m_{i_{k-1}})) + Ann(m_{i_k}) \\ &= R \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ modülünün bir alt modülü N yi ele alalım. $n \in N$ olsun. Bu

durumda, $m_{i_1}, \dots, m_{i_k}$ sıfırdan farklı ve her $i \neq i_1, \dots, i_k$ için $m_i = 0$ olmak üzere $n = \sum_{i \in I} m_i$

yazılabilir. Her $l \in \{1, \dots, k\}$ için,

$$1 = a_l + b_l$$

olacak şekilde $a_l \in Ann(((m_{i_1}, \dots, m_{i_{l-1}}, m_{i_{l+1}}, \dots, m_{i_k})))$ ve $b_l \in Ann(m_{i_l})$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{l=1}^k (a_l + b_l) = (a_1 b_2 \dots b_k + a_2 b_1 b_3 \dots b_k + \dots + a_k b_1 \dots b_{k-1}) \\ &\quad + b_1 \dots b_k + \left(\sum_{2 \leq r} a_{i_1} \dots a_{i_r} b_{i_1} \dots b_{i_p} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki terimlerden ikinci satırdakiler her $l \in \{1, \dots, k\}$ için $Ann(m_{i_l})$ kümesinde içerilir. Öte yandan, $\iota_i : M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ doğal içermeye tasviri olmak üzere

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 \dots b_k) n &= (a_1 b_2 \dots b_k) \iota_{i_1}(m_{i_1}) \in N \cap \iota_{i_1}(M_{i_1}) \\ (a_2 b_1 b_3 \dots b_k) n &= (a_2 b_1 b_3 \dots b_k) \iota_{i_2}(m_{i_2}) \in N \cap \iota_{i_2}(M_{i_2}) \\ &\vdots \\ (a_k b_1 \dots b_{k-1}) n &= (a_k b_1 \dots b_{k-1}) \iota_{i_k}(m_{i_k}) \in N \cap \iota_{i_k}(M_{i_k}) \end{aligned}$$

ifadeleri sağlanır. Dolayısıyla

$$c_{i_1} = (a_1 b_2 \dots b_k) m_{i_1}, c_{i_2} = (a_2 b_1 b_3 \dots b_k) m_{i_2}, \dots, c_{i_k} = (a_k b_1 \dots b_{k-1}) m_{i_k}$$

ve her $i \in I - \{i_1, \dots, i_k\}$ için $c_i = 0$ olmak üzere

$$n = 1.n = \left[\prod_{l=1}^k (a_l + b_l) \right] n = \sum_{i \in I} c_i$$

elde edilir.

Bu durumda $n \in \bigoplus_{i \in I} (N \cap \iota_i(M_i)) \subseteq N$ olur. Dolayısıyla $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap \iota_i(M_i))$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) N , $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ nin bir alt modülü olsun. Bu durumda, kabulden, her $i \in I$

için N_i , M_i nin bir alt modülü olmak üzere $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ dir. Ayrıca

$$N \cap \iota_i(M_i) = \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cap \iota_i(M_i) = \iota_i(N_i)$$

yazılabilir. Dolayısıyla $N = \bigoplus_{i \in I} N_i = \bigoplus_{i \in I} (N \cap \iota_i(M_i))$ dir. $i, j \in I$ ve $m_i \in M_i$, $m_j \in M_j$

olsun. $a_i = m_i$, $a_j = m_j$ ve $k \neq i, j$ için $a_k = 0$ olmak üzere $a = \sum_{k \in I} a_k \in M$ alalım. Ra ,

M nin bir alt modülü olduğundan yukarıdaki argüman kullanılarak

$Ra = \bigoplus_{i \in I} (Ra \cap \iota_i(M_i))$ yazılabilir. Bu durumda $n_k \in Ra \cap \iota_k(M_k)$ olmak üzere $a = \sum_{k \in I} a_k$ formundadır. $b_i = m_i$, $b_j = n_j$ ve $k \neq i, j$ için $b_k = 0$ olmak üzere $b = \sum_{k \in I} b_k \in M$ alalım. Bu durumda $a - b = \sum_{k \in I} a_k - \sum_{k \in I} b_k = \sum_{k \in I} n_k - \sum_{k \in I} b_k$ yazılır. İndisleri karşılaştırdığımızda $n_i - m_i = 0$ ve $m_j - n_j = 0$ elde ederiz. Öyleyse $m_i = n_i$ ve $m_j = n_j$ dir. Her $k \in I$ için, $\iota_k(n_k) \in Ra \cap \iota_k(M_k)$ olduğundan $r_k a = \iota_k(n_k) \in \iota_k(M_k)$ eşitliğini sağlayacak bir $r_k \in R$ vardır. Özel olarak, $\iota_j(n_j) = r_j a$ dir. $n_i = m_i$ ve $n_j = m_j$ eşitlikleri kullanılarak, $r_j m_i = 0$ ve $m_j = r_j m_j$ elde edilir. Bu durumda $r_j \in \text{Ann}(m_i)$ ve $1 - r_j \in \text{Ann}(m_j)$ dir. Dolayısıyla

$$1 = r_j + (1 - r_j) \in \text{Ann}(m_i) + \text{Ann}(m_j)$$

ve böylece $\text{Ann}(m_i) + \text{Ann}(m_j) = R$ bulunur.

Teorem 3.9 M_i , $i \in I$, aralarında asal yapılandırılmış R - modüller olsun ve her $m_i \in M_i$, $i, j \in I$, $i \neq j$ için $\text{Ann}(m_i) + \text{Ann}(m_j) = R$ kabul edilsin. Bu durumda, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ aralarında asal yapılandırılmıştır.

İspat: N_λ , $\lambda \in \Lambda$, M nin bir alt modüller ailesi ve P , M nin bir asal alt modülü olmak üzere $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \subseteq P$ kapsamı sağlansın. Yardımcı Teorem 3.8 kullanılarak, her $i \in I$ için N_i , M_i nin alt modülü olmak üzere, M nin her alt modülü $\bigoplus_{i \in I} N_i$ şeklinde yazılabilir. Öyleyse her $\lambda \in \Lambda$ için $N_\lambda = \bigoplus_{i \in I} N_{i,\lambda}$ olacak şekilde M_i nin alt modülü $N_{i,\lambda}$ vardır. Ayrıca $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ olacak şekilde her $i \in I$ için M_i nin alt modülü P_i bulunabilir.

Bu durumda

$$\bigoplus_{i \in I} \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_{i,\lambda} \right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigoplus_{i \in I} N_{i,\lambda} \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \subseteq P = \bigoplus_{i \in I} P_i \quad (3.1)$$

kapsamaları yazılır.

P asal olduğundan, $P_k \neq M_k$ olacak şekilde tek bir $k \in I$ vardır. $r \in R$ ve $m \in M_k$ için $rm \in P_k$ ve $m \notin P_k$ kabul edilsin. $a_k = m$ ve $i \neq k$ için $a_i = 0$ olmak üzere $a = \sum_{i \in I} a_i$ alalım. Bu durumda $ra \in P$ ve $a \notin P$ dir. Öyleyse, P asal olduğundan, $r \in (P : M)$ olur. Böylece $rM_k \subseteq P_k$ ve $r \in (P_k : M_k)$ sonucuna varılır. Dolayısıyla P_k, M_k nın bir asal alt modülüdür. (3.1) ifadesinden $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_{k,\lambda} \subseteq P_k$ yazılır. M_k aralarında asal yapılandırılmış modül olduğundan bir $\gamma \in \Lambda$ için $N_{k,\gamma} + P_k \neq M_k$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} N_\gamma + P &= \left(\bigoplus_{i \in I} N_{i,\gamma} \right) + P = (N_{k,\gamma} + P_k) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} N_{i,\gamma} \right) + \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} P_i \right) \\ &\neq M_k + \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} M_i \right) = M. \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse M aralarında asal yapılandırılmış modüldür.

Her sonlu modülün aralarında asal yapılandırılmış olduğu açıktır. Sıradaki örnek sonsuz bir aralarında asal yapılandırılmış modülün varlığını göstermektedir.

Örnek 3.10 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \bigoplus_{p \text{ asal}} \mathbb{Z}_p$ olsun. M bir R -modüldür. Her p asal sayısı için,

$\mathbb{Z}_p$ sonlu olduğundan aralarında asal yapılandırılmıştır. p ve q iki farklı asal sayı olsun. p ve q aralarında asal olduğundan, $px + qy = 1$ olacak şekilde x ve y tamsayıları vardır. Her $m_p \in \mathbb{Z}_p$ ve $m_q \in \mathbb{Z}_q$ için, $px \in \text{Ann}(m_p)$ ve $qy \in \text{Ann}(m_q)$ olduğundan $1 \in \text{Ann}(m_p) + \text{Ann}(m_q)$ dir. Dolayısıyla, Teorem 3.9 dan, M aralarında asal yapılandırılmıştır.

3.2 Sonlu Üretilmiş Modüller ve Aralarında Asal Yapılandırılmış Modüller

Sonlu üretilmiş modüller söz konusu olduğunda aralarında asal yapılandırılmış modüllerin birçok dikkat çekici özelliği ortaya çıkar. Bu kısımda aralarında asal yapılandırılmış sonlu üretilmiş modülleri inceleyeceğiz. Öncelikle sonlu üretilmiş modüllerin bilinen bir özelliğini not edelim.

Teorem 3.11 [29, Theorem 2.8] M sıfırdan farklı bir sonlu üretilmiş R - modül olsun. Bu durumda M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından içerilir.

Sonlu üretilmiş modüller için, bir modülün aralarında asal yapılandırılmış olduğu maksimal alt modüllerinin aralarında asal yapılandırılmış olup olmadığına bakılarak anlaşılabilir. Sıradaki teoremden bu sonuç verilmektedir.

Teorem 3.12 M sıfırdan farklı bir sonlu üretilmiş R - modül olsun. M nin her maksimal alt modülü aralarında asal yapılandırılmış ise, M aralarında asal yapılandırılmış modüldür.

İspat: M nin her maksimal alt modülü aralarında asal yapılandırılmış alt modül olsun. $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin bir alt modüller ailesi ve P , M nin bir asal alt modülü olmak üzere $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq P$ sağlansın. M sonlu üretilmiş olduğundan, P alt modülü M nin bir maksimal alt modülü K da içerilir. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq K$ olur. K aralarında asal yapılandırılmış olduğundan, $N_j + K \neq M$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır. Böylece $N_j + P \neq M$ elde edilir. Dolayısıyla M aralarında asal yapılandırılmış modüldür.

Yardımcı Teorem 3.13 M sıfırdan farklı bir sonlu üretilmiş R - modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M aralarında asal yapılandırılmıştır.
- (ii) M nin her maksimal alt modülü K kuvvetli asalıdır.
- (iii) M nin her maksimal alt modülü K ve her alt modüller ailesi $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ için

$$K + N_\lambda = M \text{ eşitliği her } \lambda \in \Lambda \text{ için sağlanıyorsa } K + \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = M \text{ dir.}$$

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin bir alt modüller ailesi ve K , M nin bir maksimal alt modülü olsun. $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq K$ kapsamının sağlandığı kabul edilsin. M aralarında asal yapılandırılmış olduğundan, bir $j \in I$ için $N_j + K \neq M$ dir. Bu durumda $N_j \subseteq K$ ve böylece K kuvvetli asal alt modüldür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin bir alt modüller ailesi ve K , M nin bir maksimal alt modülü olsun. Her $i \in I$ için $K + N_i = M$ eşitliğinin sağlandığı kabul edilsin. K maksimal

olduğundan, her $i \in I$ için $N_i \not\subseteq K$ olur. Ayrıca K kuvvetli asal olduğundan, $\bigcap_{i \in I} N_i \not\subseteq K$ elde edilir. Böylece $K + \bigcap_{i \in I} N_i = M$ bulunur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin bir alt modüller ailesi ve P , M nin bir asal alt modülü olsun. $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq P$ kapsamasının sağlandığı kabul edilsin. M sonlu üretilmiş olduğundan, P , M nin bir maksimal alt modülü K da içerilir. Böylece $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq K$ ve dolayısıyla $K + \bigcap_{i \in I} N_i \neq M$ elde edilir. Öyleyse her $j \in I$ için $P + N_j \subseteq K + N_j \neq M$ dir. Dolayısıyla M aralarında asal yapılandırılmış modüldür.

[3, Proposition 2.5]'de kuvvetli 0 - boyutlu bir çarpımsal modülün sıfır-boyutlu olduğu sonucu verilmiştir. Haddizatında bu sonuç çarpımsal modül kabulü olmadan da geçerlidir.

Teorem 3.14 M sıfırdan farklı, sonlu üretilmiş, sıfır boyutlu bir R - modül olsun. M nin aralarında asal yapılandırılmış olması için gerek ve yeter koşul M nin kuvvetli 0 - boyutlu olmasıdır.

İspat: Teorem 3.6 ve Yardımcı Teorem 3.13 sayesinde sonuç elde edilir.

Tanım 3.15 Bir R - modül M nin alt modüller latisi distributive ise M ye distributive modül denir. Diğer bir deyişle, M nin her alt modülü A, B, C için $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.16 [25, Proposition 2.3] R bir yerel halka ve M bir distributive R - modül ise M nin alt modülleri tam sıralıdır.

Distributive modüller hakkında daha fazla bilgi için Stephenson'ın makalesi [25]'e bakılabilir.

Bir lokal halka üzerinde sonlu üretilmiş, distributive, aralarında asal yapılandırılmış bir modülün lokalizasyonu da aralarında asal yapılandırılmıştır.

Teorem 3.17 R bir yerel halka ve M sıfırdan farklı, sonlu üretilmiş, distributive bir R - modül olsun. S , R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. M aralarında asal yapılandırılmış ise $S^{-1}M$ de aralarında asal yapılandırılmış $S^{-1}R$ - modüldür.

İspat: $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin bir alt modüller ailesi ve P , $S^{-1}M$ nin bir asal alt modülü olsun. Bu durumda, M nin bir alt modüller ailesi $\{K_i\}_{i \in I}$ ve bir asal alt modülü Q için $N_i = S^{-1}K_i$ ve $P = S^{-1}Q$ yazılır. $\bigcap_{i \in I} N_i \subseteq P$ kapsamasının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda

$$S^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} S^{-1}K_i = \bigcap_{i \in I} N_i \subseteq P = S^{-1}Q$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\bigcap_{i \in I} K_i \subseteq Q$ dir. M aralarında asal yapılandırılmış modül olduğundan, $K_j + Q \neq M$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır. M sonlu üretilmiş olduğundan, $K_j + Q \subseteq K$ olacak şekilde M nin bir maksimal alt modülü K vardır. $K_j \subseteq K$ olduğundan, $K_j \subseteq Q_j \subseteq K$ olacak şekilde M nin bir minimal asal alt modülü vardır. Bu durumda $Q_j + Q \subseteq K$ olur. R yerel halka ve M distributive olduğundan, ya $Q_j \subseteq Q$ veya $Q \subseteq Q_j$ sağlanır. Böylece $S^{-1}Q_j \subseteq S^{-1}Q$ veya $S^{-1}Q \subseteq S^{-1}Q_j$ elde edilir. Buradan $N_j + P \neq S^{-1}M$ bulunur. Dolayısıyla $S^{-1}M$ aralarında asal yapılandırılmıştır.

3.3 Aralarında Asal Yapılandırılmış Çarpımsal Modüller

Çarpımsal modüller söz konusu olduğunda aralarında asal yapılandırılmış modüllerin birçok özelliği belirlenebilmektedir. Bu kısımda aralarında asal yapılandırılmış çarpımsal modüllerin özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 3.18 Bir R - modül M nin her alt modülü N için $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali bulunabiliyorsa M ye çarpımsal modül denir.

Çarpımsal modüller literatürde çok geniş kapsamda incelenmiştir. Barnard'ın "Multiplication Modules" adlı makalesi [26] ve Abd el-Bast ve Smith'in "Multiplication Modules" makalesi [27] konuyla ilgili en önemli iki referans olarak sayılabilir. Şimdi çarpımsal modüllerin kullanacağımız bazı özelliklerini ifade edelim.

Çarpımsal modüller de sonlu üretilmiş modüller gibi maksimal alt modüle sahiptirler.

Teorem 3.19 [27, Theorem 2.5] R bir halka ve M sıfırdan farklı bir çarpımsal R -modül olmak üzere M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır.

Çarpımsal modüllerin asal alt modülleri aşağıdaki gibi karakterize edilir.

Teorem 3.20 [27, Corollary 2.11] R bir halka, M bir çarpımsal R -modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) N asaldır.
- (ii) $\text{Ann}(M/N)$ bir asal idealdir.
- (iii) R nin $\text{Ann}(M) \subseteq P$ kapsamasını sağlayan bir asal ideali P için $N = PM$ dir.

Teorem 3.21 [27, Theorem 1.6] R bir halka ve M bir çarpımsal sadık R -modül ise R nin her idealler ailesi $\{I_j\}_{j \in J}$ için $\bigcap_{j \in J} (I_j M) = (\bigcap_{j \in J} I_j) M$ eşitliği sağlanır.

Abd El-Bast ve Smith, ayrıca sonlu üretilmiş sadık çarpımsal modüllerin alt modülleri için bir karakterizasyon vermişlerdir:

Teorem 3.22 [27, Theorem 3.1] M bir sadık çarpımsal R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M sonlu üretilmiştir.
- (ii) A ve B , R nin idealleri olmak üzere $AM \subseteq BM$ ise $A \subseteq B$ dir.
- (iii) M nin her alt modülü N için $N = IM$ olacak şekilde R nin tek bir I ideali vardır.
- (iv) R nin her öz ideali A için $M \neq AM$ dir.
- (v) R nin her maksimal ideali P için $M \neq PM$ dir.

Sonlu üretilmiş modüller ve çarpımsal modüllerin her ikisinde de öz alt modüller bir maksimal alt modül tarafından kapsandığından, sonlu üretilmiş modüller için daha önce verilmiş bazı teoremler çarpımsal modüller için de geçerlidir. İspatlar tamamen aynı olduğundan sadece sonuçların ifadelerini vereceğiz.

Teorem 3.23 M çarpımsal bir R -modül olsun. M nin her maksimal alt modülü aralarında asal yapılandırılmış ise, M aralarında asal yapılandırılmış modüldür.

Yardımcı Teorem 3.24 M çarpımsal bir R - modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M aralarında asal yapılandırılmıştır.
- (ii) M nin her maksimal alt modülü K kuvvetli asaldır.
- (iii) M nin her maksimal alt modülü K ve her alt modüller ailesi $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ için

$$K + N_\lambda = M \text{ eşitliği her } \lambda \in \Lambda \text{ için sağlanıyorsa } K + \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = M \text{ dir.}$$

Teorem 3.25 M çarpımsal bir R - modül olsun. M nin aralarında asal yapılandırılmış olması için gerek ve yeter koşul M nin kuvvetli 0 - boyutlu olmasıdır.

Şimdi, asal alt modül aileleri ve maksimal alt modülleri kullanarak aralarında asal yapılandırılmış çarpımsal modüllerin bir karakterizasyonunu vereceğiz. Bunun için önce bazı kavramların tanımlarını tekrar edelim.

Tanım 3.26 R bir halka, M bir R - modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. M nin N yi içeren tüm alt modüllerinin kesişimine N nin radikali denir ve $rad_M(N)$ ya da $rad(N)$ ile gösterilir.

R halkası bir R - modül olarak düşünüldüğünde her I alt modülü için $rad_R(I) = \sqrt{I}$ sağlanır.

Bir I idealinin radikali $\sqrt{I}$ nın elemanları cinsinden karakterizasyonu bilinen bir sonuçtur. Şöyle ki;

$$\sqrt{I} = \{x \in R : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } x^n \in I\} .$$

Genel olarak, bir alt modülün radikalinin benzer şekilde elementer olarak karakterizasyonu elde edilememiştir. Yine de, çarpımsal modüller için benzer bir sonuç mümkündür. Çarpımsal modüllerin alt modüllerinin elementer bazda karakterizasyonu Ameri tarafından [28]'de verilmiştir. Bu makalede M çarpımsal modülünün $N = IM$ ve $K = JM$ alt modüllerinin çarpımı $NK = (IJ)M$ olarak tanımlanmış, bu tanım kullanılarak M nin iki elemanı m ve m' nün çarpımı Rm ve Rm' alt modüllerinin çarpımı olarak belirlenmiştir. Ameri bu tanım vasıtasıyla bir çarpımsal modül M nin alt modülü N için

$$rad_M(N) = \{m \in M : \text{bir } k \geq 0 \text{ için } m^k \subseteq N\}$$

olduğunu göstermiştir, [28, Theorem 3.13].

R bir halka, M bir çarpımsal R -modül ve $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin bir alt modüller ailesi olsun. Her $x \in M$ için, $x \in rad_M(N_\lambda)$ iken $x^n \subseteq N_\lambda$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ailesi (*) özelliğini sağlar denir. R halkası kendi üzerinde bir modül olarak düşünüldüğünde, bu koşul [29, Teorem 7]'deki (2) şartına denktir. Dolayısıyla, sıradaki yardımcı teorem [30, Teorem 2]'nin bir genelleştirmesidir.

Yardımcı Teorem 3.27 Bir çarpımsal R -modül M nin bir alt modüller ailesi $\{N_i\}_{i \in I}$ nin (*) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul her $J \subseteq I$ alt kümesi için, $rad(\bigcap_{i \in J} N_i) = \bigcap_{i \in J} rad(N_i)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin bir alt modüller ailesi olsun. $\{N_i\}_{i \in I}$ nin (*) özelliğini sağladığı kabul edilsin. J , I nin bir alt kümesi olsun. $rad(\bigcap_{i \in J} N_i) \subseteq \bigcap_{i \in J} rad(N_i)$ kapsaması her zaman sağlanır. Diğer kapsama için, $x \in \bigcap_{i \in J} rad(N_i)$ olsun. Bu durumda her $i \in J$ için $x \in rad(N_i)$ dir. $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesi (*) özelliğini sağladığından, bir n doğal sayısı ve her $i \in J$ için $x^n \subseteq N_i$ olur. Dolayısıyla $x^n \subseteq \bigcap_{i \in J} N_i$ elde edilir. Böylece $x \in rad(\bigcap_{i \in J} N_i)$ bulunur. Tersine, I nin her J alt kümesi için, $rad(\bigcap_{i \in J} N_i) = \bigcap_{i \in J} rad(N_i)$ eşitliği sağlansın. $x \in M$ ve $J = \{i \in I : x \in rad(N_i)\}$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in J} rad(N_i) = rad(\bigcap_{i \in J} N_i)$ olur. Dolayısıyla $x^n \in \bigcap_{i \in J} N_i$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Her $i \in J$ için $\bigcap_{i \in J} N_i \subseteq N_i$ olduğundan her $x^n \subseteq N_i$ elde edilir. Dolayısıyla $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesi (*) özelliğini sağlar.

Teorem 3.28 M bir çarpımsal R -modül olsun. M aralarında asal yapılandırılmış ise M nin her $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ asal alt modüller ailesi ve her K maksimal alt modülü için $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \subseteq K$ iken bir $\gamma \in \Lambda$ için $P_\gamma \subseteq K$ sağlanır.

Eğer M nin her alt modüller ailesi (*) özelliğini sağlıyorsa yukarıdaki teoremin tersi de doğrudur.

İspat: M aralarında asal yapılandırılmış bir çarpımsal modül olsun. $\{P_i\}_{i \in I}$, M nin bir asal alt modüller ailesi ve K , M nin bir maksimal alt modülü olmak üzere $\bigcap_{i \in I} P_i \subseteq K$ kapsamı sağlansın. M aralarında asal yapılandırılmış olduğundan, bir $j \in I$ için $P_j + K \neq M$ dir. K maksimal olduğundan, $P_j \subseteq K$ kapsamı elde edilir. Tersine, (*) özelliğinin M nin her alt modüller ailesi için sağlandığı kabul edilsin. Ayrıca, M nin her asal alt modüller ailesi $\{P_i\}_{i \in I}$ ve her maksimal alt modülü K için, $\bigcap_{i \in I} P_i \subseteq K$ kapsamı bir $j \in I$ için $P_j \subseteq K$ kapsamını gerektirsin. $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$, M nin bir alt modüller ailesi ve P , M nin bir asal alt modülü olmak üzere $\bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha \subseteq P$ olsun. Bu durumda $rad(\bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha) \subseteq rad(P) = P$ bulunur. M bir çarpımsal modül olduğundan, P , M nin bir maksimal alt modülü L tarafından kapsanır. $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$, (*) özelliğini sağladığından, Yardımcı Teorem 3.27 kullanılarak,

$$\bigcap_{\alpha \in A} rad(N_\alpha) = rad(\bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha) \subseteq P \subseteq L$$

elde edilir. Ayrıca, her $\alpha \in A$ için, $\{P_{\beta, \alpha}\}_{\beta \in B}$, M nin bir asal alt modüller ailesi olmak üzere

$$rad(N_\alpha) = \bigcap_{\substack{\beta \in B \\ N_\alpha \subseteq P_{\beta, \alpha}}} P_{\beta, \alpha}$$

sağlanır. Dolayısıyla,

$$\bigcap_{\substack{(\alpha, \beta) \in A \times B \\ N_\alpha \subseteq P_{\beta, \alpha}}} P_{\beta, \alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcap_{\substack{\beta \in B \\ N_\alpha \subseteq P_{\beta, \alpha}}} P_{\beta, \alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} rad(N_\alpha) \subseteq L$$

yazılabilir.

Bu durumda, kabulden, bir $(\lambda, \kappa) \in A \times B$ için $P_{\lambda, \kappa} \subseteq L$ dir. Böylece bir $(\lambda, \kappa) \in A \times B$ için $P_{\lambda, \kappa} + L \neq M$ olur. Öyleyse, bir $\lambda \in A$ için,

$$N_\lambda + P \subseteq P_{\lambda, \kappa} + P \subseteq P_{\lambda, \kappa} + L \neq M$$

dir. Dolayısıyla M aralarında asal yapılandırılmıştır.

Teorem 3.29 M bir çarpımsal R -modül olsun. M nin her alt modüller ailesi için (*) özelliği sağlansın. N , M nin $rad(0)$ da içerilen bir alt modülü olsun. Bu durumda, M/N nin aralarında asal yapılandırılmış olması için gerek ve yeter koşul M nin aralarında asal yapılandırılmış olmasıdır.

İspat: M/N aralarında asal yapılandırılmış bir modül olsun. $\{P_i\}_{i \in I}$, M nin bir asal alt modüller ailesi ve K , M nin maksimal alt modülü olmak üzere, $\bigcap_{i \in I} P_i \subseteq K$ kapsaması sağlansın. Bu durumda, $N \subseteq rad(0)$ olduğundan,

$$\bigcap_{i \in I} (P_i / N) = (\bigcap_{i \in I} P_i) / N \subseteq K / N$$

yazılabilir. K maksimal olduğundan, K/N , M/N nin bir maksimal alt modülüdür. Öyleyse, bir $j \in I$ için, $P_j / N + K / N \neq M / N$ sağlanır. Böylece $P_j / N \subseteq K / N$ bulunur. Dolayısıyla, bir $j \in I$ için $P_j \subseteq K$ kapsaması sağlanır. Teorem 3.28 kullanılarak M nin aralarında asal yapılandırılmış modül olduğu sonucuna varılır. Yeterlilik kısmı Sonuç 3.4'ün bir sonucudur.

Teorem 3.30 M bir sonlu üretilmiş, sadık, çarpımsal R -modül olsun. M nin aralarında asal yapılandırılmış modül olması için gerek ve yeter koşul R nin aralarında asal yapılandırılmış halka olmasıdır.

İspat: M nin aralarında asal yapılandırılmış modül olduğu kabul edilsin. $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$, R nin bir idealler ailesi ve P , R nin bir asal ideali olmak üzere $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \subseteq P$ sağlansın. Bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in A} (I_\alpha M) = \left(\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \right) M \subseteq PM$$

yazılabilir.

M aralarında asal yapılandırılmış olduğundan, $(I_\beta + P)M = I_\beta M + PM \neq M$ olacak şekilde bir $\beta \in A$ vardır. Dolayısıyla $I_\beta + P \neq R$ elde edilir ve böylece R nin aralarında asal yapılandırılmış halka olduğu bulunur. Tersine, R nin aralarında asal yapılandırılmış halka olduğu kabul edilsin. $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin bir alt modüller ailesi ve Q' , M nin bir asal

alt modülü olsun. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \subseteq Q'$ kabul edilsin. M çarpımsal modül olduğundan, her $\lambda \in \Lambda$ için $N_\lambda = I_\lambda M$ olacak şekilde R nin bir idealler ailesi $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ve $Q' = QM$ olacak şekilde R nin bir asal ideali Q vardır. Bu durumda,

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)M = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda M) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \subseteq Q' = QM$$

elde edilir ve Teorem 3.22 kullanılarak, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \subseteq Q$ bulunur. R aralarında asal yapılandırılmış olduğundan, $I_\kappa + Q \neq R$ olacak şekilde bir $\kappa \in \Lambda$ vardır. Böylece, Teorem 3.22 kullanılarak, $N_\kappa + Q' = (I_\kappa M + P)M \neq M$ bulunur. Dolayısıyla M aralarında asal yapılandırılmıştır.

Teorem 3.31 Her Artinian çarpımsal modül aralarında asal yapılandırılmıştır.

İspat: Her Artinian çarpımsal modülün kuvvetli 0 - boyutlu olduğu [3, Theorem 2.6]'da gösterilmiştir. Teorem 3.6 kullanılarak sonuç elde edilir.

3.4 (*) Özelliği

Brewer ve Richman, [30]'da sıfır-boyutlu halkaların bazı karakterizasyonlarını vermişlerdir. Biz de bu sonuçları bazı şartlar altında modüllere genelleyeceğiz. Özel olarak, R temel ideal halkası ve M sonlu üretilmiş, sadık, çarpımsal R - modül iken 3.3'te tanımladığımız (*) özelliği M nin sıfır-boyutlu olup olmadığını belirlemede kullanılabilir. Öncelikle bazı gerekli yardımcı teoremleri vereceğiz. Bu kısımda R nin temel ideal halkası olduğunu kabul edeceğiz.

Yardımcı Teorem 3.31 M bir sonlu üretilmiş çarpımsal R - modül olsun. m , M nin bir elemanı olmak üzere, m ile üretilen alt modül $Rm = IM$ şeklinde yazılsın. Aşağıdaki koşullar denktir:

(i) Bir $n \in \mathbb{N}$ için $I^n M = I^{n+1} M$ eşitliği sağlanır.

(ii) $IM + \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n) = M$.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Bir $n \in \mathbb{Z}$ için $I^n M = I^{n+1} M$ olduğu kabul edilsin. R temel ideal halkası olduğundan $I = (r)$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Bu durumda $r^n M = r^{n+1} M$ olur.

Öyleyse, her $m \in M$ için, $r^n m = r^{n+1} m'$ olacak şekilde bir $m' \in M$ vardır. Böylece $m - r m' \in (0 :_M r^n) = (0 :_M I^n)$ elde edilir. Dolayısıyla $M \subseteq IM + \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n)$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $IM + \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n) = M$ eşitliğinin sağlandığı kabul edilsin. I temel ideal olduğundan, bir $x \in R$ için $I = (x)$ olur. Bu durumda $xM + \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n) = M$ yazılabilir. M nin bir üreteç kümesi $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olsun. Böylece, kabulden, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$a_i \in xM + \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M x^n)$$

elde edilir. O halde, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için, $a_i = x m_i + n_i$ olacak şekilde $m_i \in M$ ve $n_i \in (0 : x^{k_i})$, $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ olsun. Bu durumda

$$x^k a_i = x^{k+1} m_i + x^k n_i = x^{k+1} m_i \in x^{k+1} M$$

olur.

Böylece $x^k M \subseteq x^{k+1} M$ bulunur. Diğer kapsama her zaman geçerlidir. Dolayısıyla $x^k M = x^{k+1} M$, yani $I^k M = I^{k+1} M$ elde edilir.

Teorem 3.32 Sonlu üretilmiş sadık bir çarpımsal R - modül M nin sıfır boyutlu olması için gerek ve yeter koşul Yardımcı Teorem 3.31'deki koşulların her $m \in M$ için sağlanmasıdır.

İspat: Bir $m \in M$ için Yardımcı Teorem 3.31'in (ii) koşulunun sağlanmadığı farz edilsin. Bu durumda $IM + \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n)$, M nin bir öz alt modülüdür ve bu sebeple M nin bir maksimal alt modülü Q' tarafından kapsanır. Öyleyse $Q = (Q' : M)$, R nin bir asal idealidir. R temel ideal halkası olduğundan, bir $a \in R$ için $I = (a)$ dir. $S := \{a^n r : n \in \mathbb{N}, r \in R \setminus Q\}$ olarak tanımlansın. $0 \in S$ kabul edilsin. Bu durumda $a^n r = 0$ olacak şekilde bir $r \in R \setminus Q$ vardır. $x \in M$ olsun. Öyleyse $r x \in (0 :_M a^n) = (0 :_M I^n) \subseteq Q'$ olur. $r \notin Q = (Q' : M)$ ve Q' asal olduğundan, $x \in Q'$ bulunur ve böylece $M \subseteq Q'$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $0 \notin S$ olmalıdır. Öyleyse $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin bir asal ideali P vardır. $R \setminus Q \subseteq S$ olduğundan $P \subseteq Q$

elde edilir. Ayrıca $aM \subseteq Q'$ ve böylece $a \in Q$ bulunur. Fakat $a \in S$ olduğundan $a \notin P$ dir. Dolayısıyla P , Q nun bir öz idealidir. Bu durumda, Teorem 3.22 kullanılarak, PM nin QM nin bir öz alt modülü olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla M sıfır-boyutlu değildir.

Tersine M sıfır-boyutlu olmasın. Bu durumda $P \subset Q$ olacak şekilde M nin asal alt modülleri P ve Q vardır. $m \in Q \setminus P$ olsun. Bu durumda R nin bir ideali I için $Rm = IM$ dir. $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n) \not\subseteq P$ farz edilsin. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $I^n x = 0$ ve fakat $x \notin P$ olacak şekilde bir $x \in M$ vardır. Bir $b \in R$ için $I = (b)$ olduğundan $b^n x = 0 \in P$ bulunur. P asal alt modül olduğundan, $b^n \in (P : M)$ dir. Böylece $b \in (P : M)$ bulunur. Dolayısıyla $m \in Rm = bM \subseteq P$ çelişkisi elde edilir. O halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n) \subseteq P \subset Q$ olmalıdır. Ayrıca $IM = Rm \subseteq Q$ sağlanır. Böylece

$$IM + \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n) \subseteq Q \neq M$$

bulunur. Bu ifade Yardımcı Teorem 3.31'in (ii) şartının karşıt tersidir.

Teorem 3.33 M bir sonlu üretilmiş, sadık, çarpımsal R - modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

- (i) M sıfır-boyutludur.
- (ii) M nin her alt modüller ailesi için (*) özelliği sağlanır.
- (iii) M nin her asalımsı alt modüller ailesi için (*) özelliği sağlanır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) M nin sıfır-boyutlu olduğu kabul edilsin. Bu durumda Teorem 3.32 sayesinde, her $m \in M$ için, $Rm = IM$ olmak üzere, $I^n M = I^{n+1} M$ eşitliğini sağlayacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $I^{n+t} M = I^n M$ eşitliği her $t \in \mathbb{N}$ için sağlanır. N , M nin bir alt modülü olsun. $x \in \text{rad}(N)$ ise, $Rx = JM$ olmak üzere, $J^k M \subseteq N$ kapsamasını sağlayan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n > k$ ise, $J^n M = J^{n-k} (J^k M) \subseteq J^{n-k} N \subseteq N$ elde edilir. Eğer $n \leq k$ ise, $J^n M = J^k M \subseteq N$ bulunur. Her iki durumda da $x^n = J^n M \subseteq N$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (*) özelliği M nin tüm alt modül aileleri için sağlanır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) İfade açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) (*) özelliğinin M nin tüm asalımsı alt modüller aileleri tarafından sağlandığı kabul edilsin. M sıfır-boyutlu olmasın. P , M nin maksimal olmayan bir asal ideali olsun. $x \in M$ alalım. M çarpımsal modül olduğundan, $Rx = IM$ olacak şekilde R nin bir ideali I vardır. P , IM nin bir minimal asal alt modülü olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$Q_n = \{m \in M \mid \text{bir } s \in R \setminus (P : M) \text{ için } sm \in I^n M\}$$

tanımlansın. $Q = (P : M)$ olsun. Bu durumda, [31, Theorem 6] kullanılarak, M_Q nun yerel modül olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla P_Q , M_Q nun tek maksimal alt modülüdür. P , $I^n M$ nin de minimal asal alt modülü olduğundan $\text{rad}((I^n M)_Q) = P_Q$ elde edilir. Böylece

$$\text{rad}(Q_n) = \text{rad}((I^n M)_Q \cap R) = (\text{rad}(I^n M)_Q) \cap R = P_Q \cap R = P,$$

ve dolayısıyla

$$(P : M)M = P = \text{rad}(Q_n) = \text{rad}((Q_n : M)M) = \sqrt{(Q_n : M)}M$$

yazılabilir.

M sonlu üretilmiş, sadık, çarpımsal modül olduğundan, Teorem 3.22 kullanılarak, $\sqrt{(Q_n : M)} = (P : M)$ sonucuna varılır. Şimdi, $rm \in Q_n$ olacak şekilde $r \in R$ ve $m \in M$ alalım. Bu durumda $sr m \in I^n M$ ifadesini sağlayan bir $s \in R \setminus (P : M)$ vardır. Eğer $r \notin \sqrt{(Q_n : M)}$ ise $sr \in R \setminus (P : M)$ bulunur. Bu durumda, $sr m \in I^n M$ olduğundan $m \in Q_n$ elde edilir. Dolayısıyla Q_n , $(P : M)$ -asalımsıdır.

O halde $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, M nin bir asalımsı alt modüller ailesidir. $x \in P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{rad}(Q_n)$ sağlanır. Şimdi $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{rad}(Q_n)$ olduğunu göstereceğiz. Aksine $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{rad}(Q_n)$ olduğu farz edilsin. Bu durumda bir $k \in \mathbb{N}$ için $x^k \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ kapsamı sağlanır. Özel olarak, $x^k \subseteq Q_{k+1}$ dir. I bir temel ideal olduğundan, $I = (a)$ olacak şekilde bir $a \in R$ bulunabilir. $P \neq M$ olduğundan, bir $m' \in M$ için $sa^k m = a^{k+1} m'$ eşitliğini sağlayacak $s m \in M \setminus P$ ve $s \in R \setminus (P : M)$ vardır. M burulmasız modül olduğundan, $sm = am' \in IM \subseteq P$ sonucuna varılır. Fakat bu sonuç $m \in M \setminus P$ seçimimizle çelişir.

Öyleyse $x \notin \text{rad}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n)$ olmalıdır. Böylece M nin (*) özelliğini sağlamayan bir asal alt modüller ailesi Q_n , $n \in M$, elde edilmiş olur.



MODÜLLERİN DIŞ KUVVETLERİ VE SERBEST MODÜLLERİN ALT MODÜLLERİNİN RADİKALLERİ

Bu bölümde modüllerin dış kuvvetlerinden faydalananarak sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikallerini karakterize edeceğiz. Ayrıca, temel ideal bölgeleri üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş asal alt modüllerini belirleyeceğiz.

4.1 Serbest Modüllerin Alt Modüllerinin Radikalleri

Bu kısımda dış kuvvetlerden yararlanarak sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikallerini karakterize edeceğiz.

R bir halka ve F , rankı n olan bir serbest R -modül olsun. $k \leq n$ olmak üzere, $\{f_{k1}, \dots, f_{kC(n,k)}\}$, $\wedge^k F$ nin bir bazı olsun. $z_1, \dots, z_k \in F$ için, $z_1 \wedge \dots \wedge z_k$ elemanı, $a_j^{1, \dots, k} \in R$ olmak üzere,

$$z_1 \wedge \dots \wedge z_k = \sum_{j=1}^{C(n,k)} a_j^{1, \dots, k} f_{kj}$$

şeklinde yazılabilir.

Sıradaki yardımcı teorem modüllerin dış kuvvetlerinin faydalı bir özelliğini ifade etmektedir:

Yardımcı Teorem 4.1 [17, Lemma 5.1] M bir R -modül ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ bir üreteç kümesi

olsun. k bir pozitif tamsayı ve $1 \leq i \leq k$ olmak üzere, $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} e_j \in M$ ve

$$K = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda, $K^{i_1, \dots, i_k}$, K nin $i_1, \dots, i_k$. sütunları seçilerek oluşturulan matrisin determinantı olmak üzere,

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} K^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

yazılabilir. Özel olarak, eğer $k > n$ ise, $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k = 0$ sağlanır.

Sıradaki yardımcı teoremden bir modülün alt modülünün radikalının bir karakterizasyonu verilmektedir.

Yardımcı Teorem 4.2 [8, Corollary 1.2] M bir R -modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. P , R nin bir asal ideali olsun.

$$K(N, P) = \{m \in M : \text{bir } c \in R \setminus P \text{ için } cm \in PM + N\}$$

kümesi M nin bir alt modülüdür ve

$$rad_M(N) = \bigcap_{P \in Spec(R)} K(N, P)$$

sağlanır.

Şimdi bu çalışmanın ana sonucu olan teoremi ifade edip ispatlayacağız. Önce ihtiyacımız olan bazı gösterimleri verelim.

R bir halka, F , rankı n olan bir serbest R -modül ve $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$, F nin bir bazı olsun. $m \leq n$ olmak üzere, $N = (x_1, \dots, x_m)$, F nin bir alt modülü olsun. Her $i = 1, \dots, m$ için $x_i = \sum x_{ij} e_j$ yazılabilir. F nin bir $r = \sum r_j e_j$ elemanını alalım. [17, Theorem 1.6] sayesinde, her $1 \leq t \leq m$ için, $\Lambda^t F$ nin rankı $C(n, t)$ olan bir serbest modül olduğunu biliyoruz. $\Lambda^t F$ nin bazını $\{f_{ij} : 1 \leq j \leq C(n, t)\}$ ile gösterelim. Bu durumda, her $i_1 < \cdots < i_t$ için $\Lambda^{t+1} F$ nin $r \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_t}$ elemanı, $a_j^{i_1, \dots, i_t} \in R$ olmak üzere,

$$r \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_t} = \sum a_j^{i_1, \dots, i_t} f_{(t+1)j}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde, $b_j^{i_1, \dots, i_t} \in R$ olmak üzere

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_t} = \sum b_j^{i_1, \dots, i_t} f_j$$

yazılır.

Teorem 4.3 R bir halka, F , rankı n olan bir serbest R -modül ve $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$, F nin bir bazı olsun. $m \leq n$ olmak üzere, $N = (x_1, \dots, x_m)$, F nin bir alt modülü olsun. Yukarıdaki gösterim kabul edilsin. Bu durumda, $r \in \text{rad}_F(N)$ olması için gerek ve yeter koşul her $1 \leq k \leq n$ için

$$r_k \in \sqrt{(x_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)}$$

ve her $1 \leq t \leq m$ için

$$a_j^{i_1, \dots, i_t} \in \sqrt{(b_1^{i_1, \dots, i_t}, \dots, b_{C(n,t)}^{i_1, \dots, i_t})}$$

olmasıdır.

İspat: $r \in \text{rad}_F(N)$ kabul edilsin. P , R nin $(x_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ idealini içeren bir alt modülü olsun. Yardımcı Teorem 4.2 dolayısıyla $r \in K(N, P)$ sağlandığından, $c_i \in R$

ve $p = \sum_{i=1}^n p_i e_i \in PF$ olmak üzere, $cr = \sum_{i=1}^n c_i x_i + p$ eşitliğini sağlayacak bir $c \in R \setminus P$

bulunabilir. Dolayısıyla, her $1 \leq k \leq n$ için $cr_k = \sum_{i=1}^n c_i x_{ik} + p_k \in P$ yazılır. Böylece

$r_k \in \sqrt{(x_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)}$ elde edilir.

$m = n$ ve $t = m$ ise, Yardımcı Teorem 4.1 dolayısıyla, $r \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n = 0$ olduğundan

şartı açık olarak sağlanır. Öyleyse, $m \leq n$ ve $1 \leq t < m$ kabul edilsin. $i_1 < \dots < i_t$ olmak üzere, her $1 \leq i \leq n$ için $i_1 < \dots < i_{l-1} < i < i_{l+1} < \dots < i_t$ olacak şekilde bir $1 < l < t$ vardır.

Bu l sayısı $\text{sgn}(i, i_1, \dots, i_t)$ ile gösterilsin. Q , R nin $(b_1^{i_1, \dots, i_t}, \dots, b_{C(n,t)}^{i_1, \dots, i_t})$ idealini içeren bir asal ideali olsun. $r \in \text{rad}_F(N)$ olduğundan $r \in K(N, Q)$ sağlanır. O halde, $d_i \in R$ ve

$q = \sum_{i=1}^n q_i e_i \in QF$ olmak üzere, $dr = \sum_{i=1}^n d_i x_i + q$ eşitliğini sağlayan bir $d \in R \setminus P$

bulunabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \sum da_j^{i_1, \dots, i_t} f_{(t+1)j} &= d \left(\sum a_j^{i_1, \dots, i_t} f_{(t+1)j} \right) \\
 &= d(r \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_t}) \\
 &= (dr) \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_t} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n d_i x_i + q \right) \wedge \dots \wedge x_{i_t} \\
 &= \left(\sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_t\}} d_i (x_i \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_t}) \right) + (q \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_t}) \\
 &= \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_t\}} (-1)^{\text{sgn}(i, i_1, \dots, i_t)} d_i \sum_{j=1}^{C(n, t+1)} A_j f_{(t+1)j} + \sum_{j=1}^{C(n, t+1)} B_j f_{(t+1)j}
 \end{aligned}$$

yazılır. Burada A_j , Yardımcı Teorem 4.1 gereğince,

$$\begin{bmatrix} x_{i_1 1} & \dots & x_{i_1 n} \\ x_{i_2 1} & \dots & x_{i_2 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_t 1} & \dots & x_{i_t n} \end{bmatrix}$$

matrisinin belirli $t+1$ sütunu seçilerek elde edilen matrisin determinanı ve B_j ,

$$\begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \\ x_{i_1 1} & \dots & x_{i_1 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_t 1} & \dots & x_{i_t n} \end{bmatrix}$$

matrisinin belirli $t+1$ sütunu seçilerek elde edilen matrisin determinantıdır. Her j için, A_j ilk satır üzerinde açıldığında, bu determinantın $(b_1^{i_1, \dots, i_t}, \dots, b_{C(n, t)}^{i_1, \dots, i_t})$ idealinin bir elemanı olduğu görülür. Öte yandan, B_j in matrisinin ilk satırı Q nun elemanlarından oluştuğundan, B_j , Q nun elemanıdır. Dolayısıyla $da_j^{i_1, \dots, i_t}$ katsayısı Q nun elemanıdır. Böylece

$$a_j^{i_1, \dots, i_t} \in \sqrt{(b_1^{i_1, \dots, i_t}, \dots, b_{C(n, t)}^{i_1, \dots, i_t})}$$

elde edilir.

Tersine, gereklilik kısmının varlığı kabul edilsin. P, R nin bir asal ideali olsun. $r \in K(N, P)$ olduğunu göstereceğiz.

Her $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $x_{ij} \in P$ ise, bu durumda her $1 \leq k \leq n$ için

$$r_k \in \sqrt{(x_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)} \subseteq P$$

elde edilir.

Şimdi bir $1 \leq u \leq m$ ve bir $1 \leq v \leq n$ için $x_{uv} \notin P$ olduğu kabul edilsin. $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{m+1}} = 0$ olduğu açıktır. Böylece, $(b_1^{i_1, \dots, i_{m+1}}, \dots, b_{C(n, m+1)}^{i_1, \dots, i_{m+1}}) = 0 \subseteq P$ olduğu görülür. Öyleyse her $i_1 < \dots < i_{t+1}$ için $(b_1^{i_1, \dots, i_{t+1}}, \dots, b_{C(n, t+1)}^{i_1, \dots, i_{t+1}}) \subseteq P$ ve bir $j_1 < \dots < j_t$ için $(b_1^{j_1, \dots, j_t}, \dots, b_{C(n, t)}^{j_1, \dots, j_t}) \not\subseteq P$ olacak şekilde bir $1 \leq t \leq m$ vardır. O halde, bir $1 \leq s \leq C(n, t)$ için $b_s^{j_1, \dots, j_t} \notin P$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \sum a_j^{j_1, \dots, j_t} f_{(t+1)j} &= r \wedge x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_t} \\ &= r \wedge (x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_t}) \\ &= r \wedge \sum b_j^{j_1, \dots, j_t} f_{ij} \\ &= \sum b_j^{j_1, \dots, j_t} (r \wedge f_{ij}) \\ &= \sum b_j^{j_1, \dots, j_t} \left(\sum_{i=1}^n r_i e_i \wedge f_{ij} \right) \\ &= \sum b_j^{j_1, \dots, j_t} \sum_{i=1}^n r_i (e_i \wedge f_{ij}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

yazılabilir.

$1 \leq k \leq n$ olsun. Baz elemanı $e_k \wedge f_{ts}$ yi göz önüne alalım. f_{ts} elemanı bir $k_1 < \dots < k_t$ için $e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_t}$ formundadır. $k \in \{k_1, \dots, k_t\}$ ise $e_k \wedge f_{ts} = 0$ olur. $k \notin \{k_1, \dots, k_t\}$ olsun.

Bu durumda baz elemanı $e_k \wedge f_{ts} = e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_k \wedge \dots \wedge e_{k_t}$

$$\begin{array}{llll}
e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_t} & \text{yi} & e_k & \text{ile} \\
e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_k \wedge \cdots \wedge e_{k_t} & \text{yi} & e_{k_1} & \text{ile} \\
e_{k_1} \wedge e_{k_3} \wedge \cdots \wedge e_k \wedge \cdots \wedge e_{k_t} & \text{yi} & e_{k_2} & \text{ile} \\
\vdots & & & \\
e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_k \wedge \cdots \wedge e_{k_{t-1}} & \text{i} & e_{k_t} & \text{ile}
\end{array}$$

çarparak elde edilebilir. Dolayısıyla, D_{k_i} ,

$$\begin{bmatrix}
x_{j_1 k_1} & x_{j_1 k_2} & \cdots & x_{j_1 k} & \cdots & x_{j_1 k_t} \\
x_{j_2 k_1} & x_{j_2 k_2} & \cdots & x_{j_2 k} & \cdots & x_{j_2 k_t} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{j_t k_1} & x_{j_t k_2} & \cdots & x_{j_t k} & \cdots & x_{j_t k_t}
\end{bmatrix}$$

matrisinin k_i . sütunu silinerek oluşturulan matrisin determinanı olmak üzere, $e_k \wedge f_{ts}$ nin Denklem (4.1) in sağ tarafındaki katsayısı

$$r_k b_s^{j_1, \dots, j_t} + r_{k_1} D_{k_1} + r_{k_2} D_{k_2} + \cdots + r_{k_t} D_{k_t} \quad (4.2)$$

olur. D_{k_i} determinatlarını k . sütun üzerinde açarak, $g_{j k_i} \in R$ olmak üzere,

$$D_{k_i} = g_{1 k_i} x_{j_1 k} + g_{2 k_i} x_{j_2 k} + \cdots + g_{t k_i} x_{j_t k}$$

elde edilir. Bu durumda, $h_i = \sum_{j=1}^t r_{k_j} g_{i k_j} \in R$ olmak üzere, Denklem (4.2) de belirtilen ifade,

$$r_k b_s^{j_1, \dots, j_t} + h_1 x_{j_1 k} + h_2 x_{j_2 k} + \cdots + h_t x_{j_t k}$$

şeklinde yazılabilir. Her $1 \leq j \leq C(n, t+1)$ için $a_j^{j_1, \dots, j_t}$ katsayısı P nin elemanı olduğundan, $e_k \wedge f_{ts}$ nin Denklem (4.1) deki katsayısı

$$r_k b_s^{j_1, \dots, j_t} + h_1 x_{j_1 k} + h_2 x_{j_2 k} + \cdots + h_t x_{j_t k}$$

da P nin elemanıdır. h_i elemanlarının k dan bağımsız olduğu görülebilir. Dolayısıyla

$$r b_s^{j_1, \dots, j_t} + h_1 x_{j_1} + h_2 x_{j_2} + \cdots + h_t x_{j_t} \in PF$$

elde edilir. Böylece $rb_s^{j_1, \dots, j_t} \in PF + N$ bulunur. $b_s^{j_1, \dots, j_t} \in R \setminus P$ olduğundan $r \in K(N, P)$ olmalıdır.

Sonuç 4.4 R bir temel ideal bölgesi ve F bazı $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ olan bir serbest R - modül olsun. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in F$ için, $d = \gcd(x_i : 1 \leq i \leq n)$ olsun. d nin ilgili olmayan asal çarpanları $p_1, \dots, p_k$ olmak üzere

$$\text{rad}(Rx) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i e_i \in F : \text{her } 1 \leq i \leq n \text{ için } r_i \in (p_1) \cap \dots \cap (p_k) \right\}.$$

Sıradaki örnek serbest $\mathbb{Z}$ - modüllerin alt modüllerinin radikallerinin hesaplanmasında Teorem 4.3 ün nasıl kullanılabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.5 F , rankı 3 olan serbest $\mathbb{Z}$ - modül ve $\{e_1, e_2, e_3\}$, F nin standart bazı olsun. $N = \mathbb{Z}(2, 2, 0) + \mathbb{Z}(2, 5, 8) + \mathbb{Z}(0, 0, 9)$, F nin bir alt modülüdür. $\wedge^2 F$ de

$$\begin{aligned} (2, 2, 0) \wedge (2, 5, 8) &= 6(e_1 \wedge e_2) + 16(e_1 \wedge e_3) + 16(e_2 \wedge e_3) \\ (2, 2, 0) \wedge (0, 0, 9) &= 18(e_1 \wedge e_3) + 18(e_2 \wedge e_3) \\ (2, 5, 8) \wedge (0, 0, 9) &= 18(e_1 \wedge e_3) + 45(e_2 \wedge e_3) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, $\sqrt{(6, 16, 16)} = 2\mathbb{Z}$, $\sqrt{(18, 18)} = 6\mathbb{Z}$ ve $\sqrt{(18, 45)} = 3\mathbb{Z}$ dir.

$r = (r_1, r_2, r_3) \in F$ olsun. Bu durumda, Teorem 4.3'den, $r \in \text{rad}_F(N)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} &= 16r_1 - 16r_2 + 6r_3 \in 2\mathbb{Z} \\ \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} &= 18r_1 - 18r_2 \in 6\mathbb{Z} \\ \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} &= 45r_1 - 18r_2 \in 3\mathbb{Z} \end{aligned}$$

olmasıdır. Yani, $r \in \text{rad}_F(N)$ olması için gerek ve yeter koşul, $k, l, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 8r_1 - 8r_2 + 3r_3 &= k \\ 3r_1 - 3r_2 &= l \\ 15r_1 - 6r_2 &= m \end{aligned}$$

denklem sisteminin r_1, r_2, r_3 tarafından sağlanmasıdır. Bu sistem çözüldüğünde ise $rad_F(N)$ şöyle ifade edilir:

$$rad_F(N) = \left\{ (r_1, r_2, r_3) \in F : r_1 = \frac{1}{9}(m - 2l), r_2 = \frac{1}{9}(m - 5l), r_3 = \frac{1}{9}(3k - 8l), k, l, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

4.2 Temel İdeal Bölgeleri Üzerinde Serbest Modüllerin Asal Alt Modülleri

Bu kısımda dış kuvvetleri kullanarak temel ideal bölgeleri üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş asal alt modüllerinin bir karakterizasyonunu vereceğiz. Önce ihtiyacımız olan bazı sonuçları verelim.

Teorem 4.6 [9, Theorem 2.6] R bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $a_i \in R$ en az biri sıfırdan farklı elemanlar olsun. Bu durumda $N = R(a_1, \dots, a_n)$ nin n ranklı serbest R -modül F nin asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul a_i lerin her ortak böleninin R de birimsel olmasıdır.

Teorem 4.7 [9, Corollary 2.2] R bir tamlık bölgesi ve F , rankı m olan bir serbest R -modül olsun. $m < n$ olmak üzere, N, F nin m -üreteçli bir alt modülü olsun. Bu durumda, N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul R -modül F/N nin burulmasız modül olmasıdır.

Teorem 4.8 R bir temel ideal bölgesi ve F , rankı n olan bir serbest R -modül olsun. $x_i \in F$ ve $k < n$ olmak üzere, $N = (x_1, \dots, x_k)$, F nin bir alt modülü olsun. Bu durumda, N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $R(x_1 \wedge \dots \wedge x_k)$ nin $\wedge^k F$ nin bir asal alt modülü olmasıdır.

İspat: $\{f_j : 1 \leq j \leq C(n, k)\}$, $\wedge^k F$ nin bir bazı olmak üzere,

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \sum_{j=1}^{C(n,k)} a_j f_j$$

ve $\gcd(a_j : 1 \leq j \leq C(n, k)) = d$ olsun. $R(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)$ nin, $\wedge^k F$ nin bir asal alt modülü olduğu kabul edilsin. Bu durumda, Teorem 4.6'dan, d , R de birimseldir. $m \in F$ ve $r \neq 0$ için $rm \in N$ olsun. Teorem 4.7 sayesinde, $m \in N$ olduğunu göstermek yeterlidir. $rm \in N$ olduğundan, $rm \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = 0$ elde edilir. Bu eşitlikten, $i_s \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere, her $i_1 < \cdots < i_k$ ve $j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\begin{bmatrix} m_j & m_{i_1} & \cdots & m_{i_k} \\ x_{1j} & x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{kj} & x_{ki_1} & \cdots & x_{ki_k} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantının sıfır olduğu sonucuna varılır.

$$\begin{bmatrix} x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{ki_1} & \cdots & x_{ki_k} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinanı $A_{i_1 \dots i_k}$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} m_{i_1} & \cdots & m_{i_k} \\ x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(i-1)i_1} & \cdots & x_{(i-1)i_k} \\ x_{(i+1)i_1} & \cdots & x_{(i+1)i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{ki_1} & \cdots & x_{ki_k} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinanı $c_{i(i_1 \dots i_k)}$ ile gösterildiğinde

$$m_j A_{i_1 \dots i_k} + x_{1j} c_{1(i_1 \dots i_k)} + \cdots + x_{kj} c_{k(i_1 \dots i_k)} = 0 \quad (4.3)$$

eşitliği yazılır. Bir $1 \leq j \leq C(n, k)$ için $A_{i_1 \dots i_k} = a_j$ dir. $\gcd(a_j : 1 \leq j \leq C(n, k)) = d$ olduğundan

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k} = d$$

olacak şekilde bir $f_{i_1 \dots i_k} \in R$ vardır. (4.3) eşitliği $f_{i_1 \dots i_k}$ ile çarpıldığında

$$m_j f_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k} + x_{1j} f_{i_1 \dots i_k} c_{1(i_1 \dots i_k)} + \dots + x_{kj} f_{i_1 \dots i_k} c_{k(i_1 \dots i_k)} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik tüm $i_1 < \dots < i_k$ üzerinden toplandığında

$$m_j \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k} + x_{1j} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} c_{1(i_1 \dots i_k)} + \dots + x_{kj} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} c_{k(i_1 \dots i_k)} = 0$$

eşitliği bulunur. $d_i := -d^{-1} x_{ij} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} c_{i(i_1 \dots i_k)}$ olsun. Böylece

$$m_j = x_{1j} d_1 + \dots + x_{kj} d_k$$

yazılır. d_i ler j den bağımsızdır. O halde

$$m = x_1 d_1 + \dots + x_k d_k \in N$$

elde edilir. Dolayısıyla N asal alt modüldür.

Tersine, N, F nin bir asal alt modülü olsun. $u_i \in F$ ve $u_1 \wedge \dots \wedge u_k = \sum_{j=1}^{C(n,k)} b_j f_j$ olmak üzere

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = d(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)$$

yazılabilir. $\gcd(b_j : 1 \leq j \leq C(n,k))$ nin R de birimsel olduğu görülür. K, F nin $\{u_1, \dots, u_k\}$ ile üretilen alt modülü olsun. İlk olarak $N = K$ olduğunu göstereceğiz. $m \in N$ olsun. Bu durumda, $m \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = 0$ olur. R bir tamlık bölgesi ve $d \neq 0$ olduğundan $m \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_k = 0$ bulunur. Yeterlilik kısmında kullanılabilecek benzer bir argüman ile $m \in K$ elde edilir. $m \in K$ olsun. Bu durumda,

$$m \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = d(m \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = 0$$

elde edilir. Yine, benzer bir argümanla, $dm \in N$ bulunur. N asal olduğundan, $m \in N$ bulunur. Böylece $N = K$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla her u_i, x_j lerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. O halde bir $s \in R$ için

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_k = s(x_1 \wedge \dots \wedge x_k)$$

olur. Böylece

$$R(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = Rd(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = Rds(x_1 \wedge \dots \wedge x_k)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $ds=1$ dir. Teorem 4.6 kullanılarak $R(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)$ alt modülünün asal olduğu sonucuna varılır.



**BİR HALKANIN BAER SPEKTRUMU ÜZERİNDE HALKA VE MODÜL
DEMETLERİ**

Bu bölümde yarıasal bir halkanın Baer spektrumu olarak adalandırdığımız, asal kuvvetli Baer ideallerden oluşan topolojik uzay üzerinde bir halka demetinin varlığını göstereceğiz. Ayrıca bu uzayın üzerinde bir modül demetinin varlığından bahsedeceğiz.

5.1 Baer İdealler ve Kuvvetli Baer İdealler

Bu kısımda Baer idealler ve kuvvetli Baer ideallerin bazı özelliklerini vereceğiz. R bir halka ve I , R nin bir öz ideali olsun. Eğer her $x \in I$ için $\text{Ann}(\text{Ann}(x)) \subseteq I$ sağlanıyorsa, I ya Baer ideal denir. Eğer her $x, y, z \in R$ için, $\text{Ann}(x) \cap \text{Ann}(y) = \text{Ann}(z)$ ve $x, y \in I$ iken $z \in I$ oluyorsa I ya kuvvetli Baer ideal denir. Kuvvetli Baer idealin tanımında y nin x e eşit olması konusunda herhangi bir kısıtlama olmadığını not edelim. Böylece, $x, y \in R$ ve $\text{Ann}(x) = \text{Ann}(y)$ olmak üzere, bir kuvvetli Baer ideal I için, $x \in I$ ise $y \in I$ olur. Ayrıca $x \in R$ için, $\text{Ann}(\text{Ann}(x))$ öz ideal ise aynı zamanda kuvvetli Baer idealdir: $a, b \in \text{Ann}(\text{Ann}(x))$ ve $\text{Ann}(a) \cap \text{Ann}(b) = \text{Ann}(c)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a \cdot \text{Ann}(x) = 0$ ve $b \cdot \text{Ann}(x) = 0$ olur. O halde $\text{Ann}(x) \subseteq \text{Ann}(a)$ ve $\text{Ann}(x) \subseteq \text{Ann}(b)$ dir. Böylece $\text{Ann}(x) \subseteq \text{Ann}(c)$ elde edilir. Dolayısıyla $c \in \text{Ann}(\text{Ann}(x))$ olur.

Baer idealler ve kuvvetli Baer idealler C. Jayaram tarafından “Baer Ideals in Commutative Semiprime Rings” [12], adlı makalede yarıasal halkalar için tanımlanmış ve özellikleri bu makalede ve yine Jayaram’ın “Quasiregular Rings” [13] adlı

makalesinde incelenmiştir. Sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan halkaya yarıasal halka denir. Tezin bundan sonraki kısmında halkaları yarıasal kabul edeceğiz.

[12] de, I bir kuvvetli Baer ideal olmak üzere, $x \in I$ olması için gerek ve yeter koşulun $Ann(Ann(x)) \subseteq I$ kapsamasının sağlanması olduğu gösterilmiştir. Böylece her kuvvetli Baer idealin Baer ideal olduğu sonucuna varılır. Ayrıca, sıfırlayıcı idealler ve minimal asal idealler kuvvetli Baer ideallere örnektir, [12].

R birimli olduğundan sıfır ideali kuvvetli Baer idealdir: Eğer bir $x \in R$ için $Ann(0) = Ann(x)$ ise $1x = 0$ dir. Dolayısıyla $x = 0$ olmalıdır. Tamlık bölgelerinde sıfır idealinden başka kuvvetli Baer ideal yoktur. Sıfır boyutlu halkalarda ise, her asal ideal minimal olduğundan her asal ideal kuvvetli Baer idealdir.

Şimdi ileride kullanacağımız bazı yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 5.1 [12, Lemma 3] R bir halka ve I , R nin bir kuvvetli Baer ideali olsun. Bu durumda I nin her minimal asal ideali kuvvetli Baer idealdir.

Yardımcı Teorem 5.2 [12, Lemma 4] Bir R bir halkasının her kuvvetli Baer ideali bu ideali içeren tüm asal kuvvetli Baer ideallerin kesişimidir.

M. Henriksen ve M. Jerison “The Space of Minimal Prime Ideals of a Commutative Ring” [32] adlı makalelerinde bir değişmeli yarıasal halka R için sıfırlayıcı şartını şöyle tanımlamışlardır: Her $a, b \in R$ için $Ann(a) \cap Ann(b) = Ann(c)$ olacak şekilde bir $c \in R$ varsa R ye sıfırlayıcı şartını sağlar denir. Henriksen ve Jerison makalelerinde bu şartı minimal asal idealler uzayının hull-kernel topolojiye göre kompakt olmasına denk koşullar vermek için kullanmışlardır. Ayrıca sıfırlayıcı şartını sağlayan bazı halka örnekleri de vermişlerdir: Tam sıralı tamlık bölgelerinin altdirekt toplamları, her sonlu üretilmiş ideali temel ideal olan yarıasal halkalar, sıfırlayıcı şartını sağlayan halkaların tam ya da zayıf direkt toplamları sıfırlayıcı şartını sağlar.

Yardımcı Teorem 5.3 [12, Lemma 8] R sıfırlayıcı şartını sağlayan bir halka ve $\{I_\alpha\}$, R nin bir kuvvetli Baer idealler ailesi olsun. Bu durumda

$$\bigvee_{\alpha} I_{\alpha} = \{x \in R : \text{bir } i_j \in I_{\alpha_j}, j = 1, \dots, n \text{ için } Ann(i_1) \cap \dots \cap Ann(i_n) \subseteq Ann(x)\}$$

kümesi her I_α yı kapsayan en küçük kuvvetli Baer idealdir.

Bir değişmeli R halkasında her $r \in R$ için $r^2x=r$ olacak şekilde bir $x \in R$ bulunuyorsa R ye von Neumann regüler halka denir. [33, Theorem 1.16] dan, değişmeli bir halkanın von Neumann regüler olması için gerek ve yeter koşul halkanın yarıasal ve 0 - boyutlu olmasıdır.

Önerme 5.4 R bir yarıasal halka ve P , R nin bir asal ideali olmak üzere, P nin minimal asal ideal olması için gerek ve yeter koşul her $x \in P$ için $xy=0$ olacak şekilde bir $y \notin P$ olmasıdır.

İspat: [32, Lemma 1] e bakılabilir.

Sonuç 5.5 R bir von Neumann regüler halka olsun. R nin bir ideali P nin asal olması için gerek ve yeter koşul P nin kuvvetli Baer ideal olmasıdır.

5.2 Bir Halkanın Baer Spektrumu

Bu kısımda asal kuvvetli Baer idealler spektrumunu inceleyeceğiz. R bir halka olsun.

$$\gamma(R) = \{P \in \text{Spec}(R) : P \text{ kuvvetli Baer ideal}\}$$

kümesini ele alalım. Her $x \in R$ ve R nin her kuvvetli Baer ideali I için

$$U_x = \{P \in \gamma(R) : x \notin P\}$$

ve

$$U_I = \{P \in \gamma(R) : I \not\subseteq P\}$$

olarak tanımlayalım. I kuvvetli Baer ideal olmak üzere, $x \in I$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{Ann}(\text{Ann}(x)) \subseteq I$ olduğundan $U_x = U_{\text{Ann}(\text{Ann}(x))}$ olduğu açıktır. C. Jayaram “Quasiregular Rings” adlı makalesinde $\gamma(R)$ kümesinin, bazı $\mu_R = \{U_x : x \in R\}$ kümesi olan bir kopmakt, T_0 - uzay olduğunu göstermiştir, [13, Theorem 1]. Bu uzayı Baer spektrumu olarak adlandıracğız. Gelecek kısımda $\gamma(R)$ uzayı üzerinde bir halka demeti tanımlayacağız. Bunun için aşağıdaki yardımcı teoremleri veriyoruz.

Yardımcı Teorem 5.6 Her $x, y \in R$ için, eğer $U_x \subseteq U_y$ ise $\text{Ann}(y) \subseteq \text{Ann}(x)$ dir.

İspat: $x, y \in R$ için $U_x \subseteq U_y$ kabul edilsin. $U_x = U_{Ann(Ann(x))}$ olduğundan $U_{Ann(Ann(x))} \subseteq U_{Ann(Ann(y))}$ yazılabilir. Öyleyse, her $P \in \gamma(R)$ için, eğer $Ann(Ann(y)) \subseteq P$ ise $Ann(Ann(x)) \subseteq P$ olur. $Ann(Ann(x))$ kuvvetli Baer ideal olduğundan Yardımcı Teorem 5.2 kullanılarak, her $x \in R$ için

$$Ann(Ann(x)) \subseteq \bigcap_{\substack{P \in \gamma(R) \\ Ann(Ann(x)) \subseteq P}} P \subseteq \bigcap_{\substack{P \in \gamma(R) \\ Ann(Ann(y)) \subseteq P}} P = Ann(Ann(y))$$

elde edilir. Dolayısıyla $Ann(y) \subseteq Ann(x)$ olur.

Yardımcı Teorem 5.7 Her $x \in R$ için, bölüm halkası $R / Ann(x)$ yarıasaldır.

İspat: [32, Lemma 2.6] ya bakılabilir.

$f : R \rightarrow R'$ bir halka homomorfizması olsun. Her zaman $\gamma(R')$ den $\gamma(R)$ ye bir tasvir yazılamayabilir. Fakat, S , R nin bir alt kümesi olmak üzere, $I = Ann(S)$ ise $f : R \rightarrow R / I$ halka homomorfizması

$$\begin{aligned} \bar{f} : \gamma(R / I) &\rightarrow \gamma(R) \\ P / I &\mapsto P \end{aligned}$$

sürekli tasvirini doğurur.

Yardımcı Teorem 5.8 Her $x \in R$ için, U_x ve $\gamma(R / Ann(x))$ kümeleri, her $P \in U_x$ için, $P \leftrightarrow P / Ann(x)$ eşlemesi ile homeomorfturlar.

İspat: $U_0 = \emptyset$ olduğundan $x=0$ için sonuç açıktır. Bu yüzden, $x \neq 0$ kabul edelim. Yardımcı Teorem 5.7'den, $R / Ann(x)$ yarıasal halkadır. Şimdi $P \in U_x$ olması için gerek ve yeter koşulun $P / Ann(x) \in \gamma(R / Ann(x))$ olduğunu göstereceğiz. $P \in U_x$ kabul edelim. Öyleyse P , x i içermeyen bir asal kuvvetli Baer idealdir. Her $r \in Ann(x)$ için $rx=0 \in P$ olduğundan $r \in P$ olur. Dolayısıyla $Ann(x) \subseteq P$ dir. Böylece $P / Ann(x)$ in $R / Ann(x)$ in bir asal ideali olduğu sonucuna varılır. $a + Ann(x)$, $b + Ann(x) \in P / Ann(x)$ ve bir $c \in R$ için

$$(a + Ann(x)) \cap (b + Ann(x)) = (c + Ann(x))$$

olsun. Bu durumda $Ann(a) \cap Ann(b) = Ann(cx)$ elde edilir. $a, b \in P$ ve P kuvvetli Baer ideal olduğundan $cx \in P$ bulunur. $x \notin P$ olduğundan $c \in P$ olmalıdır. O halde $c + Ann(x) \in P / Ann(x)$ dir. Dolayısıyla $P / Ann(x) \in \gamma(R / Ann(x))$ bulunur.

Tersine $P / Ann(x) \in \gamma(R / Ann(x))$ kabul edelim. Bu durumda P, R nin bir asal idealidir. $a, b \in P$ olsun ve bir $c \in R$ için $Ann(a) \cap Ann(b) = Ann(c)$ sağlansın. $a + Ann(x), b + Ann(x) \in P / Ann(x)$ ve

$$Ann(a + Ann(x)) \cap Ann(b + Ann(x)) = Ann(c + Ann(x))$$

oldüğundan $c + Ann(x) \in P / Ann(x)$ bulunur. Dolayısıyla $c \in P$ ve böylece P bir kuvvetli Baer idealdir. $Ann(x + Ann(x)) = Ann(1 + Ann(x))$ eşitliği kolayca görülebilir. $1 + Ann(x) \notin P / Ann(x)$ ve $P / Ann(x)$ kuvvetli Baer ideal olduğundan $Ann(Ann(1 + Ann(x))) \not\subset P / Ann(x)$ olur. Böylece $Ann(Ann(x + Ann(x))) \not\subset P / Ann(x)$ elde edilir. O halde $x \notin P$ dir. Dolayısıyla $P \in U_x$ bulunur.

Böylece

$$\begin{aligned} f : U_x &\rightarrow \gamma(R / Ann(x)) \\ P &\mapsto P / Ann(x) \end{aligned}$$

tasviri tanımlanabilir. Yukarıda bahettiğimiz argümanlar sebebiyle f bire-bir örten bir tasvirdir ve

$$\begin{aligned} g : \gamma(R / Ann(x)) &\rightarrow U_x \\ P / Ann(x) &\mapsto P \end{aligned}$$

tasviri f nin tersidir.

Şimdi f ile g nin sürekli olduklarını göstereceğiz. Bunun için U_x ve $\gamma(R / Ann(x))$ uzaylarının baz elemanlarının sırasıyla f ve g nin ters görüntüleri altında açık olduklarını göstermek yeterlidir. $a + Ann(x) \in P / Ann(x)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U_{a+Ann(x)}) &= \{P \in U_x : f(P) \in U_{a+Ann(x)}\} \\
&= \{P \in U_x : P / Ann(x) \in U_{a+Ann(x)}\} \\
&= \{P \in U_x : a + Ann(x) \notin P / Ann(x)\} \\
&= \{P \in U_x : a \notin P\} \\
&= U_a \cap U_x
\end{aligned}$$

yazılır. $U_a \cap U_x$ kümesi U_x ile $\gamma(R)$ de bir açık kümenin kesişimi olduğundan U_x de açıktır. Böylece f nin sürekli olduğu sonucuna varılır.

$\{U_a \cap U_x\}_{a \in R}$ ailesi U_x uzayı için bir bazdır. $a \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
g^{-1}(U_a \cap U_x) &= \{P / Ann(x) \in \gamma(R / Ann(x)) : g^{-1}(P / Ann(x)) \in U_a \cap U_x\} \\
&= \{P / Ann(x) \in \gamma(R / Ann(x)) : P \in U_a \cap U_x\} \\
&= \{P / Ann(x) \in \gamma(R / Ann(x)) : a \notin P \text{ ve } x \notin P\} \\
&= \{P / Ann(x) \in \gamma(R / Ann(x)) : a + Ann(x) \notin P / Ann(x)\} \\
&= U_{a+Ann(x)}
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla g sürekli tasvirdir. Böylece f nin homeorfizma olduğu sonucuna varılır.

Yardımcı Teorem 5.9 R sıfırlayıcı şartını sağlıyorsa, her $x \in R$ için, $R / Ann(x)$ de sağlar.

İspat: $a + Ann(x), b + Ann(x) \in R / Ann(x)$ olsun. Bu durumda $a, b \in R$ ve R sıfırlayıcı şartını sağladığından $Ann(a) \cap Ann(b) = Ann(c)$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır.

$$Ann(a + Ann(x)) \cap Ann(b + Ann(x)) = Ann(c + Ann(x))$$

olduğunu göstereceğiz. $r \in Ann(a + Ann(x)) \cap Ann(b + Ann(x))$ olması için gerek ve yeter koşul $ra \in Ann(x)$ ve $rb \in Ann(x)$ olmasıdır. Bu koşul ise $rax=0$ ve $rbx=0$ olmasına denktir. Bu ise $rx \in Ann(a) \cap Ann(b) = Ann(c)$ demektir. Bu içermenin sağlanması için gerek ve yeter koşul $rcx=0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitlik $rc \in Ann(x)$ ifadesine, ve böylece $r \in Ann(c + Ann(x))$ ifadesine denktir.

5.3 Baer Spektrumu Üzerinde Bir Halka Demeti

Bu bölümde $\gamma(R)$ uzayı üzerinde bir halka demeti tanımlayacağız. Bunun için öncelikle her $x \in R$ elemanına karşılık gelen U_x açık kümesine bir halka atayacağız. Sonra bu bilgiyi kullanarak herhangi açık kümeye karşılık gelen halkayı tespit edeceğiz.

U_x açık kümesine karşılık gelen halka adayımız $\mathcal{R}(U_x) = R / \text{Ann}(x)$ dir. $U_x \subseteq U_y$ olduğunda karşılık gelen

$$\rho_{U_x}^{U_y} : \mathcal{R}(U_y) \rightarrow \mathcal{R}(U_x)$$

kısıtlama tasvirini tanımlamalıyız. Her $r \in R$ için

$$\rho_{U_x}^{U_y}(r + \text{Ann}(y)) = r + \text{Ann}(x)$$

tanımlayalım. Yardımcı Teorem 5.6 sayesinde bu tasvir iyi tanımlıdır ve ayrıca bir halka homomorfizmasıdır.

Şimdi $\gamma(R)$ nin herhangi bir açık kümesi U ya karşılık gelen halkayı belirleyelim.

$\mathcal{R}(U)$ yu, ters limit, $U_x \subseteq U_y$ için $\rho_{U_x}^{U_y}$ homomorfizma sistemine göre tüm $U_x \subseteq U$ kümeleri üzerinde alınmak üzere

$$\mathcal{R}(U) = \varprojlim \mathcal{R}(U_x)$$

olarak tanımlayalım. Yani

$$\mathcal{R}(U) = \left\{ \{u_i\} \in \prod_{i \in I} R / \text{Ann}(x_i) : U_{x_i} \subseteq U \text{ ve eğer } U_{x_i} \subseteq U_{x_j} \text{ ise } u_i = \rho_{U_{x_i}}^{U_{x_j}}(u_j) \right\}.$$

$U \subseteq V$ olsun. $U_{x_i} \subseteq V$ için $v_i \in R / \text{Ann}(x_i)$ lerden oluşan her $\{v_i\} \in \mathcal{R}(V)$ ailesinde, $U_{x_j} \subseteq U$ kapsamasını sağlayan j indekslerine karşılık gelen x_j ler seçilerek $\{v_j\}$ alt ailesi oluşturulabilir. $\{v_j\} \in \mathcal{R}(U)$ olduğundan

$$\rho_U^V : \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathcal{R}(U)$$

$$\{v_i\} \mapsto \{v_j\}$$

tasvirini tanımlarız.

$\gamma(R)$ nin her açık kümesi U için $\rho_U^U, \mathcal{R}(U)$ nun birim homomorfizmasıdır. Ayrıca açık kümeler $U \subseteq V \subseteq W$ için $\rho_U^V \rho_V^W = \rho_U^W$ sağlanır. Dolayısıyla $\mathcal{R}(U)$ ve $\rho_U^V, \gamma(R)$ üzerinde bir halka öndemeti tanımlar.

Teorem 5.10 R sıfırlayıcı şartını sağlarsa, $\mathcal{R}$ öndemeti $\gamma(R)$ üzerinde, global kesiti R olan bir demet tanımlar.

İspat: X bir topolojik uzay ve $\{V_i\}_{i \in I}$, X in bir bazı olsun. F, X üzerinde, aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir ön demet olsun:

(1) X in her açık kümesi U için, ters limit $\rho_{V_j}^{V_i}$ homomorfizma sistemine göre tüm

$V_i \subseteq U$ üzerinde alınmak üzere

$$F(U) = \varprojlim F(V_i)$$

olsun.

(2) $\rho_{V_j}^{V_i}$ homomorfizmaları ters limitin doğal homomorfizmaları ile örtüşsün.

Buna ek olarak, F in bir demet olması için gereken iki şart $\{V_i\}_{i \in I}$ ailesi için sağlanıyorsa, F, X üzerinde bir demettir, [20, Theorem 5.1]. Dolayısıyla, $\mathcal{R}$ nin $\gamma(R)$ üzerinde bir demet olduğunu göstermek için demet aksiyomlarının, $x, x_i \in R$ olmak üzere, $U = U_x$ ve $U_i = U_{x_i}$ durumunda sağlandığını göstermek yeterlidir. Ayrıca, Yardımcı Teorem 5.8 ve Yardımcı Teorem 5.9 sayesinde, problem $U = \gamma(R)$ ve $x_i \in R$ olmak üzere, $U_i = U_{x_i}$ durumuna indirgenir.

$\gamma(R) = \bigcup_{i \in I} U_{x_i}$ kabul edilsin.

$\mathcal{R}(\gamma(R)) = R / \text{Ann}(1) = R$ olduğu açıktır. $u \in \mathcal{R}(\gamma(R))$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ için $u = r + \text{Ann}(1)$ olur. Her $i \in I$ için $\rho_{U_{x_i}}^{\gamma(R)}(u) = 0$ kabul edilsin. Öyleyse her $i \in I$ için $r \in \text{Ann}(x_i)$ dir. Her $P \in \gamma(R)$ için $x_j \notin P$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır. O halde, her $P \in \gamma(R)$ için $x_j \notin P$ ve $rx_j = 0 \in P$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır. Böylece her $P \in \gamma(R)$ için $r \in P$ elde edilir. Dolayısıyla

$$r \in \bigcap_{P \in \gamma(R)} P = \text{Ann}(\text{Ann}(0)) = (0)$$

ve böylece $u = 0$ bulunur.

[13, Theorem 1]'de $\gamma(R)$ nin kompakt olduğu gösterilmiştir. O halde $\gamma(R) = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ yazılabilir. Her $i = 1, \dots, n$ için $u_i \in \mathcal{R}(U_{x_i})$ olsun. Bu durumda her $i = 1, \dots, n$ için, $r_i \in R$ olmak üzere, $u_i = r_i + \text{Ann}(x_i)$ dir. Her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\rho_{U_{x_i} \cap U_{x_j}}^{U_{x_i}}(u_i) = \rho_{U_{x_i} \cap U_{x_j}}^{U_{x_j}}(u_j)$$

kabul edilsin. $U_{x_i} \cap U_{x_j} = U_{x_i x_j}$ olduğundan, her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$r_i - r_j \in \text{Ann}(x_i x_j),$$

yani, $(r_i - r_j)x_i x_j = 0$ olur.

Şimdi her $i = 1, \dots, n$ için $\text{Ann}(x_i) \neq 0$ kabul edilsin. Bu durumda her $i = 1, \dots, n$ için $\text{Ann}(\text{Ann}(x_i)) \neq R$ olur. Öyleyse her $i = 1, \dots, n$ için $\text{Ann}(\text{Ann}(x_i))$ kuvvetli Baer idealdir. $x_i \in \text{Ann}(\text{Ann}(x_i))$ olduğundan, Yardımcı Teorem 5.3'ten, $\bigvee_{i=1}^n \text{Ann}(\text{Ann}(x_i))$ her x_i yi içeren bi kuvvetli Baer idealdir. Bu durumda, Yardımcı Teorem 5.1'den,

$$(x_1, \dots, x_n) \subseteq \bigvee_{i=1}^n \text{Ann}(\text{Ann}(x_i)) \subseteq P$$

olacak şekilde bir asal kuvvetli Baer ideal vardır. Halbuki $\gamma(R) = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ olduğundan $(x_1, \dots, x_n)$ ideali hiçbir asal kuvvetli Baer ideal tarafından kapsanmaz. O halde bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $\text{Ann}(x_k) = 0$ olmalıdır. $u = r_k + \text{Ann}(1)$ olsun. Bu durumda, her $i = 1, \dots, n$ için $(r_k - r_i)x_k x_i = 0$ olduğundan,

$$(r_k - r_i)x_i \in \text{Ann}(x_k) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her $i = 1, \dots, n$ için

$$r_k - r_i \in \text{Ann}(x_i)$$

olur. Böylece, her $i = 1, \dots, n$ için

$$\rho_{U_{x_i}}^{\gamma(R)}(u) = u_i$$

bulunur.

Örnek 5.11 R bir von Neumann regüler halka olsun. Bu durumda, Sonuç 5.5'ten, R nin tüm asal idealleri kuvvetli Baer ideal olacağından, Teorem 5.10'da anlatılan demet Zariski topolojiye sahip $\text{Spec}(R)$ uzayında bir demet olur.

F , bir X topolojik uzayında bir öndemet olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası için, F nin x teki kökü F_x , x in X teki tüm U komşulukları üzerinde $F(U)$ halkalarının direkt limiti olarak tanımlanır. Gelecek önermede $\mathcal{R}$ öndemetinin köklerini belirleyeceğiz.

$P \in \gamma(R)$ için,

$$P_* = \{r \in R : \text{bir } s \notin P \text{ için } rs = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. P_* kümesi bir kuvvetli Baer idealdir. Bu ideal her zaman asal değildir, fakat R von Neumann regüler halka ise, $P_* = P$ olur.

Önerme 5.12 Her $P \in \gamma(R)$ için, $\mathcal{R}$ nin P deki kökü

$$\mathcal{R}_P = R / P_* .$$

İspat: $P \in \gamma(R)$ olsun. $J = \{x \in R : x \notin P\}$ kümesini tanımlayalım. J kümesi

$$x \prec y \Leftrightarrow U_y \subseteq U_x$$

bağıntısı ile kısmi sıralıdır, ve $\{(R / \text{Ann}(x))_{x \in J}, (\rho_{U_y}^{U_x})_{x \prec y}\}$, J indeks kümesi üzerinde halkaların bir direkt sistemidir. $\mathcal{R}$ nin P deki kökü

$$\mathcal{R}_P = \varinjlim_{P \in U} \mathcal{R}(U) = \varinjlim_{P \in U_x} \mathcal{R}(U_x) = \varinjlim_{P \in U_x} (R / \text{Ann}(x)) = \varinjlim_{x \in J} (R / \text{Ann}(x))$$

olur.

Her $x, y \in J$ için xy , J nin $x \prec xy$ ve $y \prec xy$ bağıntılarını sağlayan bir elemanı olduğundan J bir yönlendirilmiş sistem (directed system) dir. Dolayısıyla, [19, Lemma 5.30] kullanılarak,

$$S = (\iota_y \rho_{U_y}^{U_x}(r + \text{Ann}(x)) - \iota_x(r + \text{Ann}(x)) : r + \text{Ann}(x) \in R / \text{Ann}(x) \text{ ve } x \prec y)$$

olmak üzere, $\mathcal{R}$ nin P deki kökü

$$\mathcal{R}_P = \left(\sum_{x \in J} R / \text{Ann}(x) \right) / S$$

bulunur. Burada $\iota_x, R / \text{Ann}(x)$ den $\left(\sum_{x \in J} R / \text{Ann}(x) \right) / S$ e içirme tasviridir, $\mathcal{R}_P$ nin

her elemanı $\iota_x(r + \text{Ann}(x)) + S$ formunda yazılabilir ve $\iota_x(r + \text{Ann}(x)) + S = 0$ olması için gerek ve yeter koşul bir $x \prec t$ için $\iota_x(r + \text{Ann}(x)) = \rho_{U_t}^{U_x}(r + \text{Ann}(x))$ olmasıdır.

$x \in J$ alalım. $x \notin P$ olduğundan $\text{Ann}(x) \subseteq P_*$ dir. O halde

$$\begin{aligned} f_* : R / \text{Ann}(x) &\rightarrow R / P_* \\ r + \text{Ann}(x) &\mapsto r + P_* \end{aligned}$$

homomorfizması tanımlanabilir. $x \prec y$ olduğunda $f_y \rho_{U_y}^{U_x} = f_x$ eşitliği sağlanır.

Dolayısıyla, direkt limitin evrensel özelliğinden

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{R}_P &\rightarrow R / P_* \\ \iota_x(r + \text{Ann}(x)) + S &\mapsto r + P_* \end{aligned}$$

homomorfizması elde edilir. Her $r + P_* \in R / P_*$ için, $\iota_x(r + \text{Ann}(1)) + S \in \mathcal{R}_P$ olduğundan

$$\theta(\iota_1(r + \text{Ann}(1)) + S) = r + P_*$$

yazılabilir. Dolayısıyla θ örtendir.

$\theta(\iota_x(r + \text{Ann}(x)) + S) = 0$ olsun. Bu durumda $r + P_* = P_*$, yani $r \in P_*$ dir. Öyleyse bir $a \in \text{Ann}(r) \setminus P$ vardır. $r \in \text{Ann}(x)$ ise $\iota_x(r + \text{Ann}(x)) + S = \iota_x(0) + S = S$ olur. Şimdi $r \notin \text{Ann}(x)$ kabul edilsin. $a \notin P$ ve $x \notin P$ olduğundan $ax \notin P$ bulunur. Böylece $ax \in J$ olur. $U_{ax} \subseteq U_x$ olduğundan $x \prec ax$ elde edilir. $r \in \text{Ann}(ax)$ olduğundan

$$\rho_{U_{ax}}^{U_x}(r + \text{Ann}(x)) = r + \text{Ann}(ax) = 0$$

bulunur. Böylece [19, Lemma 5.30] kullanılarak, $\iota_x(r + \text{Ann}(x)) + S = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, θ bire birdir. Böylece $\mathcal{R}$ nin P deki kökü $\mathcal{R}_P$ nin R/P_* a izomorf olduğu sonucuna varılır.

[34, Appendix 1, Proposition 2] de R nin, P , tüm maksimal ideallerinde dolaşırken R/P_* ların altdirekt (subdirect) çarpımı olduğu gösterilmiştir. P , R nin bir asal ideali olmak üzere, P/P_* , R/P_* nin bir asal idealidir ve R/P_* in tüm sıfır-bölenlerini içerir. [34, Appendix 1, Proposition 5] te, yarıasal bir halkanın asal spektrumunun Zariski topolojiye göre Hausdorff olması için gerek ve yeter koşulun R nin her asal ideali P için R/P_* in tek asal ideale sahip bir halka olması olduğu gösterilmiştir.

Örnek 5.13 X bir topolojik uzay ve $R = C(X)$, X üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonlar halkası olsun. R nin yarıasal olduğu açıktır. Her $f, g \in R$ için $\text{Ann}(f) \cap \text{Ann}(g) = \text{Ann}(f^2 + g^2)$ olduğundan R sıfırlayıcı şartını sağlar. Her $f \in R$ için $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ ve $\text{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ olsun. $f \in R$ için $\mathcal{R}(U_f) = R / \text{Ann}(f)$ dir. $g + \text{Ann}(f) \in R / \text{Ann}(f)$ sıfırdan farklı bir eleman ise $g \notin \text{Ann}(f)$ olur. O halde, $x \notin Z(f) \cap Z(g)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Böylece $\text{supp}(g) \not\subset Z(f)$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{R}(U_f) = R / \text{Ann}(f)$ halkası $Z(f)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesinin tümleyeni olarak görülebilir.

5.4 $\mathcal{R}$ – Modül Demetleri

F , bir X topolojik uzayı üzerinde bir halka demeti ve α_U^V , açık kümeler $U \subseteq V \subseteq X$ için kısıtlama tasvirleri olsun. X in her U açık kümesi için bir değişmeli grup $G(U)$ atansın. Eğer $G(U)$ bir $F(U)$ - modül yapısına sahipse ve her $U \subseteq V$ açık kümeleri için, $G(U)$, α_U^V tasviri sayesinde bir $F(U)$ - modül olarak düşünüldüğünde, $G(V)$ den $G(U)$ ya bir $F(V)$ - homomorfizması varsa G öndemeti X üzerindeki F halka demeti üzerinde bir modül öndemeti adını alır.

M bir R - modül olsun. M ye bir $\mathcal{R}$ - modüller demeti $\mathcal{M}$ atayacağız.

R nin bir ideali I için $(0 :_M I) = \{m \in M : Im = 0\}$ kümesi m nin bir alt modülüdür. Her $x \in R$ için $x_M = (0 :_M \text{Ann}(\text{Ann}(x)))$ olarak tanımlayalım. Her $x, y \in R$ için, $U_x \subseteq U_y$ ise $y_M \subseteq x_M$ sağlanır. $U_x \subseteq \gamma(R)$ için

$$\mathcal{M}(U_x) = M / x_M$$

olarak tanımlayalım. $\text{Ann}(x) \subseteq \text{An}(M / x_M)$ olduğundan M / x_M değişmeli grubu bir $R / \text{Ann}(x)$ - modüldür.

$x, y \in R$ için $U_x \subseteq U_y$ olduğunda

$$\tau_{U_x}^{U_y} : \mathcal{M}(U_y) \rightarrow \mathcal{M}(U_x)$$

$$m + y_M \mapsto m + x_M$$

tasviri tanımlanabilir. $y_M \subseteq x_M$ olduğundan $\tau_{U_x}^{U_y}$ iyi tanımlıdır. $R / \text{Ann}(x)$ - modül M / x_M , $\rho_{U_x}^{U_y} : R / \text{Ann}(y) \rightarrow R / \text{Ann}(x)$ halka homomorfizması vasıtası ile bir $R / \text{Ann}(y)$ - modül yapısı ile donatılabilir. Dolayısıyla, aslında $\tau_{U_x}^{U_y}$ bir $R / \text{Ann}(y)$ - modül homomorfizmasıdır.

Herhangi bir açık küme $U \subseteq \gamma(R)$ için $\mathcal{M}(U)$ yu, ters limit, $U_x \subseteq U_y$ için $\tau_{U_x}^{U_y}$ homomorfizma sistemine göre tüm $U_x \subseteq U$ kümeleri üzerinde alınmak üzere,

$$\mathcal{M}(U) = \varprojlim \mathcal{M}(U_x)$$

olarak tanımlayalım. $\{r_i\} \in \mathcal{R}(U)$ ve $\{a_i\} \in \mathcal{M}(U)$ olmak üzere, $\{r_i\}\{a_i\} = \{r_i a_i\}$ işlemiyle $\mathcal{M}(U)$ bir $\mathcal{R}(U)$ - modüldür.

$U \subseteq V$ olsun. $U_{x_i} \subseteq V$ için $v_i \in M / x_M$ lerden oluşan her $\{v_i\} \in \mathcal{M}(V)$ ailesinde, $U_{x_j} \subseteq U$ kapsamasını sağlayan j indekslerine karşılık gelen x_j ler seçilerek $\{v_j\}$ alt ailesi oluşturulabilir. $\{v_j\} \in \mathcal{M}(U)$ olduğundan

$$\tau_U^V : \mathcal{M}(V) \rightarrow \mathcal{M}(U)$$

$$\{v_i\} \mapsto \{v_j\}$$

tasvirini tanımlarız. Ayrıca, τ_U^V bir $\mathcal{R}(U)$ -homomorfizmasıdır.

$\mathcal{M}(U)$ kümeleri ve τ_U^V tasvirleri $\gamma(R)$ üzerinde bir modül ön demeti tanımlar. Aslında, R sıfırlayıcı şartını sağladığında bu öndemet bir modül demetidir.

Teorem 5.14 R sıfırlayıcı şartını sağlarsa, $\mathcal{M}$ öndemeti $\gamma(R)$ üzerinde, global kesiti M olan bir demet tanımlar.

İspat: $\mathcal{M}(\gamma(R)) = M/1_M = M$ olduğu açıktır. Teorem 5.10'da olduğu gibi, demet aksiyomlarının $\gamma(R) = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ için geçerli olduğunu göstermek yeterlidir.

$u \in \mathcal{M}(\gamma(R))$ her $i=1, \dots, n$ için $\tau_{U_{x_i}}^{\gamma(R)}(u) = 0$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda bir $m \in M$ için $u = m + 1_M$ olmak üzere, her $i=1, \dots, n$ için $m \in x_{iM}$ olur. Yani, her $i=1, \dots, n$ için $\text{Ann}(\text{Ann}(x_i))m = 0$ dir. Teorem 5.10 un ispatında bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $\text{Ann}(x_k) = 0$ olduğu gösterilmişti. Böylece $0 = \text{Ann}(\text{Ann}(x_k))m = Rm$ bulunur. Dolayısıyla $m = 0$ ve $u = m + 1_M = 1_M$ dir.

Şimdi her $i=1, \dots, n$ için $u_i \in \mathcal{M}(U_{x_i})$ elemanlarının, her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\tau_{U_{x_i} \cap U_{x_j}}^{U_{x_i}}(u_i) = \tau_{U_{x_i} \cap U_{x_j}}^{U_{x_j}}(u_j)$$

eşitliğini sağladığını kabul edelim. Bu durumda her $i=1, \dots, n$ için, $m_i \in M$ olmak üzere $u_i = m_i + x_{iM}$ yazılabilir. Ayrıca, $U_{x_i} \cap U_{x_j} = U_{x_i x_j}$ olduğundan, her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\text{Ann}(\text{Ann}(x_i x_j))(m_i - m_j) = 0$$

eşitliği sağlanır. Bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $\text{Ann}(x_k) = 0$ olduğundan, her $i=1, \dots, n$ için

$$\text{Ann}(\text{Ann}(x_i)) = \text{Ann}(\text{Ann}(x_i x_k))$$

elde edilir. Böylece, her $i=1, \dots, n$ için

$$\text{Ann}(\text{Ann}(x_i))(m_i - m_k) = 0$$

bulunur. $u = m_k + 1_M$ olarak belirleyelim. Yukarıdaki gözlemler sayesinde her $i=1, \dots, n$ için

$$\tau_{x_i}^{\gamma(R)}(u) = m_k + x_{iM} = m_i + x_{iM} = u_i$$

elde edilir.

$P \in \gamma(R)$ olsun. $P_*^M = \{m \in M : \text{bir } s \notin P \text{ için } m \in s_M\}$ kümesi M nin bir alt modülüdür. Önerme 5.12'ye benzer bir inşaa ile $\mathcal{M}$ demetinin P noktasındaki kökü $\mathcal{M}_P$ nin R/P_* - modül M/P_*^M olduğu gösterilebilir.

Teorem 5.15 R sıfırlayıcı şartını sağlarsa, $M \rightarrow \mathcal{M}$ tasviri R - modüller kategorisinden $\mathcal{R}$ - modül demetleri kategorisine tam sadık (fully faithful) bir izleç tanımlar.

İspat: $f: M \rightarrow N$ bir R - modül homomorfizması olsun. Her $x \in R$ için $f(x_M) \subseteq f(x_N)$ olduğundan, f bir $R/Ann(x)$ - modül homomorfizması $\phi_x: M/x_M \rightarrow N/x_N$ doğurur. $\mathcal{M}$ demetine ait kısıtlama tasvirlerini $\tau_{U_x M}^{U_y}$ ve $\mathcal{N}$ demetine ait kısıtlama tasvirlerini $\tau_{U_x N}^{U_y}$ ile gösterelim. $U_x \subseteq U_y$ olacak şekilde $x, y \in R$ alalım. Her $m + y_M \in M/x_M$ için

$$\tau_{U_x}^{U_y} \phi_y(m + y_M) = \phi_x \tau_{U_x}^{U_y}(m + y_M)$$

sağlanır. Yani, $\tau_{U_x}^{U_y} \phi_y = \phi_x \tau_{U_x}^{U_y}$ olur. Dolayısıyla R - modüller kategorisinden $\mathcal{R}$ - modül demetleri kategorisine bir izleç vardır. Bu izleç aynı zamanda tam sadıktır:

$$Hom_R(M, N) \rightarrow Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

tasvirinin varlığı açıktır. Her R - modül M için $\mathcal{M}(X) = M$ olduğundan diğer yönde de bir tasvir mevcuttur. Bu tasvirler birbirlerinin tersidir. Dolayısıyla izleç tam sadıktır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde, [4]'de incelenen aralarında asal yapılandırılmış halka yapısının modül teoriye genelleştirmesi olarak aralarında asal yapılandırılmış modül kavramı tanımlanmış ve bu yapının bazı özellikleri incelenmiştir. Sonlu üretilmiş modüller ve çarpımsal modüller için aralarında asal yapılandırılmış olma özelliği detaylı olarak incelenmiştir.

İkinci bölümde, alt modüllerin radikalini tespit etme problemine çözüm üretmeye çalışarak, modüllerin dış kuvvetleri yardımıyla sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikali karakterize edilmiştir. Ayrıca, temel ideal bölgeleri üzerinde sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş asal alt modülleri belirlenmiştir. [5]'de envelope kavramı kullanılarak temel ideal bölgeleri üzerinde sonlu üretilmiş modüllerin alt modüllerinin radikalleri verilmiştir. Bu tez çalışmasında incelenen, herhangi bir halka üzerinde sonlu üretilmiş serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modülleri sınıfı [5]'de incelenen sınıfı kapsamasa da halkanın temel ideal bölgesi olma şartının kaldırılmış olması bu çalışmanın sonuçlarını daha genel kılmaktadır. [8] ve [10]'daki çalışmalarda bu çalışmada olduğu gibi sonlu ranklı serbest modüllerin sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikalleri ve sonlu üretilmiş asal alt modülleri ile ilgilenilmiştir. Bu çalışmada ana araç olarak kullanılan modüllerin dış kuvvetleri [8] ve [10]'da kullanılan karmaşık gösterimli matris işlemlerine nazaran gösterim kolaylığı ve işlem sayısı açısından tercih edilebilir. Ayrıca [8]'deki sonuçlarda serbest modülün sonlu üretilmiş alt modüllerinin radikalleri alt modülünün üreteç sayısının modülün rankından küçük ve ranka eşit olması olarak iki aşamada

incelenirken, bu çalışmada dış kuvvetler sayesinde söz konusu durumlar tek seferde incelenebilmiş, böylece daha toplu bir ispat elde edilmiştir. Öte yandan [10]'daki asal alt modüllerin karakterizasyonu probleminde halkalar tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgeler olarak alınabiliyorken, bu çalışmada asal alt modüllerin karakterizasyonundaki yöntemin uygulanabilmesi için halkaların temel ideal bölgesi olması zorunluluğu doğmuştur. Sonucun tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgelere genişletilmesi incelenebilir. Ayrıca kullanılan dış kuvvetlerle ilgili yöntemin sonlu üretilmeyen alt modülleri de tespit etmek için genelleştirilmesi üzerine çalışılabilir.

Üçüncü bölümde, yarıasal Baer spektrumu üzerinde bir halkalar demeti ve bu demetle ilişkili bir modüller demetinin varlığı gösterilmiştir. Halkaların Baer spektrumu asal spektrumun bir alt uzayıdır. Dolayısıyla, asal spektrumun üzerinde tanımlı yapı demeti Baer spektrumu üzerine kısıtlanabilir. Fakat bu çalışmada tanımlanan demet ile yapı demeti birbirine denk değildir. Benzer şekilde bu çalışmada Baer spektrumu üzerinde tanımlanan halka demetinin asal spektruma genişletilme ihtimali düşünülebilir. Fakat genel şartlar altında bu genişletme mümkün değildir. Halka von Neumann regüler olduğunda Baer spektrumu ile asal spektrum çakıştığından von Neumann regüler halkaların asal spektrumu üzerinde birbirinden farklı iki demet; yapı demeti ve bu çalışmada incelenen demet, elde edilmiş olur. Bu çalışmaların devamı olarak, bu çalışmanın konusu olan demetin hangi halkalar için asal spektruma genişletilebileceği araştırılabilir. Ayrıca, bahsedilen demetin hangi durumlarda bir şema olduğunun tespiti diğer bir açık problemidir.

KAYNAKLAR

- [1] Gilmer, R., (1997). "An Intersection Condition for Prime Ideals", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 327-332.
- [2] Jayaram, C., Oral, K. H. ve Tekir, Ü., (2013). "Strongly 0-dimensional Rings", Communications in Algebra, 41:2026-2032.
- [3] Oral, K. H., Özkirişçi, N. A. ve Tekir, Ü., (2013). "Strongly 0-dimensional Modules", Canadian Mathematical Bulletin, 57:159-165.
- [4] Özkirişçi, N. A., Oral, K. H. ve Tekir, Ü., (2015). "Coprimely Structured Rings", Turkish Journal of Mathematics, 40:719-727.
- [5] McCasland, R. L. ve Moore, M. E., (1991). "On Radicals of Submodules", Communications in Algebra, 19:1327-1341.
- [6] McCasland, R. L. ve Moore, M. E., (1992). "Prime Submodules", Communications in Algebra, 20:1803-1817.
- [7] Jenkins, J. ve Smith, P. F., (1992). "On the Prime Radical of a Module over a Commutative Ring", Communications in Algebra, 20:3593-3602.
- [8] Pusat-Yılmaz, D. ve Smith, P. F., (1999). "Radicals of Submodules of Free Modules", Communications in Algebra, 27:2253-2266.
- [9] Pusat-Yılmaz, D., (2003). "On Prime Submodules of Finitely Generated Free Modules", Turkish Journal of Mathematics, 27:329-342.
- [10] Hedayat, S. ve Nekooei, R., (2005). "Characterization of Prime Submodules of a Finitely Generated Free Module over a PID", Houston Journal of Mathematics, 31:75-86.
- [11] Speed, T. P., (1972). "A Note on Commutative Baer Rings", Journal of the Australian Mathematical Society, 14:257-263.
- [12] Jayaram, C., (1984). "Baer Ideals in Commutative Semiprime Rings", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 15:855-864.
- [13] Jayaram, C., (1990). "Quasiregular Rings", Colloquium Mathematicum, 59:203-211.

- [14] Grothendieck, A., (1960). "Eléments de géométrie algébrique, I: Le Langage des Schémas", Institut des Hautes Études Scientifiques Publications Mathématiques, 4:1-228.
- [15] Sharp, R. Y., (2000). Steps in Commutative Algebra, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- [16] Atiyah, M. F. ve MacDonald, I. G., (1969). Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London.
- [17] Northcott, D. G., (1984). Multilinear Algebra, Cambridge University Press, New York.
- [18] Munkres, J. R., (2000). Topology, Second Edition, Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- [19] Rotman, J. J., (2009). An Introduction to Homological Algebra, Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, New York.
- [20] Shafarevich, I. R., (2013). Basic Algebraic Geometry 2: Schemes and Complex Manifolds, Third Edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [21] Hartshorne, R., (2000). Algebraic Geometry, Springer Science+Business Media, LLC, New York.
- [22] Seebach, J. A., Seebach, L. A. ve Steen, L. A., (1970). "What is a Sheaf?", The American Mathematical Monthly, 77:681-703.
- [23] Erdoğdu, V., (1987). "Distributive Modules", Canadian mathematical Bulletin, 30:248-254.
- [24] Anderson, F. W. ve Fuller, K. R., (1992). Rings and Categories of Modules, Second Edition, Springer-Verlag New York, Inc., New York.
- [25] Stephenson, W., (1974). "Modules Whose Lattice of Submodules is Distributive", Proceedings of the London Mathematical Society, 28:291-310.
- [26] Barnard, A., (1981). "Multiplication Modules", Journal of Algebra, 71:174-178.
- [27] Abd El-Bast, Z. ve Smith, P. F., (1998). "Multiplication Modules", Communications in Algebra, 16:755-779.
- [28] Ameri, R., (2003). "On the Prime Submodules of Multiplication Modules", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27:1715-1724.
- [29] Arapovic, M., (1983). "On the Embedding of a Commutative Ring into a 0 – dimensional Ring", Glasnik Matematicki, 18:53-59.
- [30] Brewer, J. ve Richman, F., (2006). "Subrings of Zero-dimensional Rings", Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra, Editörler: Brewer, J. W., Glaz, S., Heinzer, W. ve Olberding, B., Springer US.
- [31] Lu, C. P., (1995). "Spectra of Modules", Communications in Algebra, 23:3741-3752.

- [32] Henriksen, M. ve Jerison, M., (1965). "The Space of Minimal Prime Ideals of a Commutative Ring", Transactions of the American Mathematical Society, 115:110-130.
- [33] Goodearl, K. R., (1979). Von Neumann Regular Rings, Pitman, London.
- [34] Lambek, J., (2009). Lectures on Rings and Modules, AMS Chelsea Publishing, Rhode Island.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zehra BİLGİN
Doğum Tarihi ve Yeri : 24.09.1986 – İstanbul
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : zehrabilgin.zb@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Boğaziçi Üniversitesi	2012
Lisans	Matematik	Boğaziçi Üniversitesi	2009
Lise	Fen	Açıköğretim Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014 -	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Bilgin, Z., Reyes, M. L. ve Tekir, Ü. (2017). "On Right S - Noetherian Rings and S - Noetherian Modules", Communications in Algebra, kabul edildi.
2. Bilgin, Z., Demir, E. ve Oral, K. H. (2017). "On 2-absorbing z - filters", Bulletin Mathematique, kabul edildi.
3. Bilgin, Z., Oral, K. H. ve Tekir, Ü. (2017). " gw - prime Submodules", Boletin de Matematicas, kabul edildi.

Bildiri

1. Bilgin, Z., Oral, K. H. ve Tekir, Ü. (2014, Ağustos). "Coprinely Structured Modules", International Conference on Algebra and Number Theory, Samsun, Türkiye.
2. Bilgin, Z., Demir, E. ve Oral, K. H. (2016, Mayıs). " z - süzgeçlerin Bir Karakterizasyonu", 11. Ankara Matematik Günleri, Ankara, Türkiye.
3. Bilgin, Z., Reyes, M. L. ve Tekir, Ü. (2017, Nisan). " S - Noetherian Property for Noncommutative Rings", International Conference on Algebra and Its Applications, Errachidia, Morocco.