

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DUAL KUATERNİYON KATSAYILI MATRİSLER



KEMAL GÖKHAN NALBANT

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2018

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL KUATERNİYON KATSAYILI MATRİSLER

Kemal Gökhan NALBANT tarafından hazırlanan tez çalışması 27.04.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi



Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi



Dr. Öğr. Üyesi Nurten GÜRSES

Yıldız Teknik Üniversitesi



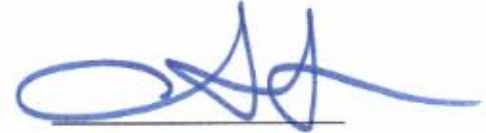
Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

İstanbul Gelişim Üniversitesi



Doç. Dr. Aydın SEÇER

Yıldız Teknik Üniversitesi



ÖNSÖZ

“Dual Kuaterniyon Katsayılı Matrisler” adlı doktora tezinde Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Ana Bilim Dalına Doktora Tezi olarak hazırlanmış olup konusu, dual kuaterniyon katsayılı matrisler üzerinedir. Doktora tezinin tamamı dört bölümden oluşup, ilk bölümde doktora tezinin amacından ve bulgulardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde dual kuaterniyonlar konusu incelenmiştir. Üçüncü ve tezin orijinal kısmı olan bu bölümde dual kuaterniyon katsayılı matrisler hakkında temel cebirsel işlemler ve temel kavramlar oluşturmak amaçlanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçların uygulamalarının pratik elde edilebileceğini göstermek için Matlab uygulamaları yapılmıştır. Dördüncü bölüm ise sonuç bölümüdür.

Bu çalışmayı hazırlarken benden desteklerini esirgemeyen kıymetli Hocam Prof. Dr. Salim YÜCE’ye; saygıdeğer Geometri seminer grubu çalışma arkadaşlarıma ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Nisan, 2018

Kemal Gökhan NALBANT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	5
1.3 Orjinal Katkı.....	5
BÖLÜM 2	
DUAL KUATERNİYONLAR.....	6
2.1 Dual Kuaterniyonlar	6
2.1.1 Dual Kuaterniyonlar Üzerine Temel İşlemler	9
2.1.2 Dual Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi.....	16
2.1.3 Dual Kuaterniyonlar için Euler Formülü	16
2.1.4 Dual Kuaterniyonlar için De-Moivre Formülü	19
2.1.5 Dual Kuaterniyona Karşılık Gelen Matris.....	21
BÖLÜM 3	
DUAL KUATERNİYON MATRİSLER	24
3.1 Dual Kuaterniyon Matrisler Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	27
3.1.1 $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ Modül Yapısı ve Bazı.....	27

3.1.2	$\mathbb{R}$ Vektör Uzayı Yapısı ve Bazı	37
3.1.3	$M_n(\mathbb{R})$ Modül Yapısı ve Bazı.....	40
3.2	Dual Kuaterniyon Matrislerin Temel Özellikleri: Çarpma, Eşlenik, Transpoz, Eşlenik Transpoz, Ters ve Kuvvet	49
3.2.1	Dual Kuaterniyon Matrislerin Çarpımı.....	49
3.2.2	Dual Kuaterniyon Matrislerin Eşleniği	60
3.2.3	Dual Kuaterniyon Matrislerin Transpozu	64
3.2.4	Dual Kuaterniyon Matrislerin Eşlenik Transpozu	67
3.2.5	Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersine	73
3.2.6	Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersinin Özellikleri	81
3.2.7	Dual Kuaterniyon Matrislerin Kuvveti	86
3.3	Dual Kuaterniyon Matrislerin Reel Matris Temsili.....	91
3.3.1	$M_{4n}(\mathbb{R}) \cong M_4(M_n(\mathbb{R}))$ Uzayının Özellikleri.....	95
3.3.2	Reel Temsil Matrisin Özellikleri	100
3.4	Dual Kuaterniyon Matrisin İzi	125
3.5	Dual Kuaterniyon Matrislerin Determinantı	129
3.5.1	Dual Kuaterniyon Matrisler için Determinant Hesaplamaları	132
3.5.2	Dual Kuaterniyon Matrisler için Determinant Açılımları	134
3.5.3	Dual Kuaterniyon Matrislerin Klasik Determinantın Diğer Hesaplamaları.....	141
3.5.4	$M_{4n}(\mathbb{R}) \cong M_4(M_n(\mathbb{R}))$ Uzayının Elemanlarının Determinantı	164
3.6	Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersinin Hesaplanması	168
3.6.1	Dual Kuaterniyon Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Matrisin Tersi.....	168
3.6.2	Dual Kuaterniyon Matrisin Tersini Reel Matris Temsili ile Bulma....	182
3.7	Dual Kuaterniyon Matrislerinde Matlab Uygulamaları	188
3.7.1	Dual Kuaterniyon Matrislerde Temel İşlemler	188
3.7.2	Dual Kuaterniyon Matrisin Tersini Bulma.....	191
3.7.3	Dual Kuaterniyon Matrisin Tersini Reel Matris Temsili ile Bulma....	195
3.7.4	Dual Kuaterniyon Matrisin Kuvveti.....	203
3.7.5	Dual Kuaterniyon Matrisin Eşleniğinin Kuvveti	210
3.7.6	Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersinin Kuvveti	211
3.7.7	Dual Kuaterniyon Matrislerin Reel Matris Temsilleri	213
3.7.8	Dual Kuaterniyon Matrisin Determinantı.....	216

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER	225
-------------------------	-----

KAYNAKLAR.....	237
----------------	-----

EK-A

DUAL SAYILAR	241
--------------------	-----

ÖZGEÇMİŞ.....	244
---------------	-----

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{D}$	Dual sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\wedge$	Vektörel çarpım
$\langle , \rangle$	Nokta çarpım - skaler çarpım, iç çarpım
$\ \cdot\ $	Norm Fonksiyonu (Boyu)
$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$	Reel Kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}(\mathbb{D})$	Dual Katsayılı Kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$	Dual Kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$	Pure Reel Kuaterniyonlar kümesi
$\mathcal{S}^3$	Birim Reel Kuaterniyonlar kümesi
$\mathcal{S}^2$	Birim Pure Reel Kuaterniyonlar kümesi
$M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$	Dual Kuaterniyon Matrisleri kümesi
$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$	Dual Kuaterniyon Kare Matrisleri kümesi
$M_n(\mathbb{R})$	$n \times n$ tipindeki Reel Matrisler kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 TOMB RAIDER Oyunları.....	3



ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4. 1 Reel ve Dual Kuaterniyon Matrislerin Karşılaştırılması.....	232



DUAL KUATERNİYON KATSAYILI MATRİSLER

Kemal Gökhan NALBANT

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu çalışmada, ilk olarak, $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi olmak üzere, $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrislerin kümesinin, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyon halkası üzerinde n^2 boyutlu bir modül olduğu ve ikinci olarak, $M_n(\mathbb{R})$ reel matris halkası üzerinde 4 boyutlu bir modül olduğu gösterilmiştir. Ayrıca dual kuaterniyon matrisleri kümesi üzerinde, toplama, çarpma, eşlenik, transpoz, eşlenik transpoz, ters, kuvvet ve iz gibi özellikler incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, dual kuaterniyonların sahip olduğu özelliklerle karşılaştırılmıştır. İlaveten, dual kuaterniyon matrislerin reel matris temsilleri ve bu temsillerin özellikleri incelenmiştir. Bu temsiller dual kuaterniyon matrislerin determinantını ve tersini bulmada uygulanmıştır. Ayrıca, bu matrislerin determinantını ve tersini bulmada farklı tipte yöntemler tanımlanmıştır. Son olarak, elde edilen sonuçlarla ilgili örnekler Matlab kullanılarak da çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Dual kuaterniyonlar, dual kuaterniyon matrisler, reel matris temsilleri



THE DUAL QUATERNION MATRICES

Kemal Gökhan NALBANT

Department of Mathematical Engineering

Phd. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

In this study, firstly, it was shown that the set of dual quaternion matrices $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ is a n^2 -dimensional module and 4-dimensional module over the dual quaternion ring $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ and the real matrix ring $M_n(\mathbb{R})$, respectively, where $\mathbb{D}$ is the set of dual numbers. Besides, properties such as addition, multiplication, conjugate, transpose, conjugate transpose, inverse, power and trace were examined on the set of the dual quaternion matrices. The obtained results were compared with properties of the dual quaternions. Moreover, real matrix representations of the dual quaternion matrices were introduced and their properties were described. These were applied to find determinant and inverse of the dual quaternion matrices. Also, different types of determinant and inverse of the dual quaternion matrices were defined. Finally, examples of obtained results were also solved by Matlab.

Keywords: Dual quaternions, dual quaternion matrices, real matrix representation



1.1 Literatür Özeti

1843 yılında İrlandalı matematikçi Hamilton, [1] kuaterniyonları kompleks sayıların bir tür genelleştirmesi olan yeni bir sayı sistemi olarak tanımlamıştır. Hamilton kuaterniyonları tanımlamakla iki vektör için, bölümün de mümkün olabileceği, yeni bir çarpma işlemini vektör cebirine dahil etmiş oldu. Böylece üç boyutlu uzaydaki hareketlerin incelenmesini kolaylaştırmıştır. Yani kuaterniyonlar, bir bölüm cebiridir^{1,2} [2]. Bölüm cebiri olan diğer yapılar ise reel sayılar, karmaşık sayılar ve oktanyonlardır.

1985 yılında Nagaraj ve Bharathi, [3] tarafından kuaterniyonik çarpımın geometrisi incelenmiştir. Kuaterniyonlar kullanılarak eğriler teorisi ile ilgili alanda yapılan ilk çalışma Bharathi ve Nagaraj, [4] tarafından reel tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar (kuaterniyonik eğriler) başlığı ile verilmiştir. Ayrıca kuaterniyonik eğriler ile ilgili yapılan bir diğer çalışma da [5]'dir.

¹ F bir cisim ve V bir vektör uzayı olmak üzere V üzerinde bir çarpma ikili işlem ile birlikte $\forall a \in F$ ve $\forall u, v, w \in V$ için aşağıdaki şartlar

i) $(a u) v = a (u v) = u (a v)$ ii) $u (v + w) = (u v) + (u w)$, iii) $(u + v) w = (u w) + (v w)$

sağlanıyorsa V vektör uzayına F cismi üzerinde bir cebir denir [6].

² V, F cismi üzerinde bir cebir olmak üzere V çarpmaya göre bir birime sahip ve sıfırdan farklı her elemanın bir çarpımsal tersi varsa V cebirine F üzerinde bir bölüm cebiri denir [6].

Kuaterniyonlar kullanılarak fonksiyonlar teorisi ile ilgili alanda da çalışmalar yapılmıştır. Hamilton [7] ile birlikte Tait [8] ve Joly [9] tarafından kuaterniyon değişkenli fonksiyonlar teorisinde sadece birkaç reel değişkenli fonksiyon teorisinin genel metodları verilmiştir. 1935 yılında R. Fueter [10] Cauchy-Riemann denklemlerinin bir benzeri olacak şekilde kuaterniyon fonksiyonları için düzenli (regüler) tanımını vermiştir. 12 yıl boyunca Fueter ve çalışma arkadaşları kuaterniyon analizi teorisini geliştirmişlerdir. Ayrıca Fueter çalışmasında kompleks değişkenli bir analitik fonksiyondan, kuaterniyon değişkenli bir regüler fonksiyon inşa etmiştir. Kuaterniyon analizi alanında kuaterniyon değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar üzerine çalışma yapanlar Cullen [11] ve Sudbery [12]'dir. Ayrıca dual kuaterniyonlar üzerine fonksiyonel analiz konusunda Ay, [13] tarafından yüksek lisans tez çalışması yapılmıştır.

Son yıllarda kuaterniyonlar sadece modern matematiğin (cebir, analiz, geometri ve hesaplama) [14-16] bir dalında değil aynı zamanda bilgisayar grafiklerinde, kontrol teorisinde, sinyal işlemede, yükseklik kontrolünde, fizikte, mekanikte, kinematikte, animasyonda, sanal gerçeklikte bilgisayar uygulaması geliştirmede, 3-boyutlu uzayda objelerin dönme ve yönelmesinin temsilinde yaygın bir biçimde kullanılır. Örneğin, uzay aracı yükseklik kontrol sistemleri kuaterniyonlar yardımıyla komuta edilmiştir [17, 18]. Ayrıca kuaterniyonların uygulama alanları gelişmekte olup kimya dalında molekül yapılarının incelenmesinde [19-21], tıbbi bilimlerde göz hareketinin tanımlanmasında [22-24], hidrodinamikte [25], elastisite teorisinde [26] ve optikte [27] kullanılmaya başlanmıştır.

Çeşitli TOMB RAIDER oyunlarını da kapsayan üçüncü şahıs oyunları tüm kamera hareketlerini canlandırmak (oynatmak) için kuaterniyon rotasyonlarını kullanmıştır.

Kuaterniyonlar için yaygın bir kullanım alanı askeriye ve ticari uçuş simülatörleridir. Sırasıyla x, y ve z eksenlerindeki dönmeleri temsil eden üç açığı (yatış/yalpa, yükselme, rotadan sapma) kullanarak uçağın yönünü değiştirmek yerine tek bir kuaterniyon kullanmak daha basittir [28].

Kuaterniyonlar yardımı ile nesneleri döndürmek için Unity 3d oyun programlama dili kullanılır [29].



Şekil 1.1 TOMB RAIDER Oyunları

Hamilton'dan sonra kuaterniyonlar üzerine çalışan bilim adamlarından biri Tait'tir [8]. Daha sonra Maxwell elektromanyetizma ile ilgili çalışmasında kuaterniyonları kullanmıştır [30]. Gibbs ve Heaviside ise Hamilton tarafından bulunan kuaterniyon sisteminden kendi vektör sistemlerini tanımlamışlardır ve günümüz vektör cebirini geliştirmişlerdir [31-32].

Kuaterniyonlar çarpmaya göre değişmeli olmadığından, kompleks ve reel sayılardan farklı sonuçlara sahiptir. Bu yüzden kuaterniyon matrisleri üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Wolf [33]'de elemanları reel kuaterniyon olan matrisler için benzerlik kavramını incelemiştir. Lee [34]'de kuaterniyon matrislerinin özdeğeri ve köşegenleştirilmesi üzerine çalışmıştır. Brenner [35]'de her kare kuaterniyon matrisinin bir karakteristik kökü olduğunu ve benzer matrislerin aynı karakteristik köke sahip olduğunu ispat etmiştir.

Son zamanlarda, kuaterniyon matrisleri üzerine literatüre en büyük katkıyı sağlayan çalışmalardan biri Zhang'ın [36]'da yapmış olduğu bir kuaterniyon matrisini kompleks matrisler çiftlerine dönüştürerek incelediği çalışmadır. Ayrıca bu çalışmada kuaterniyon matrisleri için yeni ispatlar verilmiştir. Baker [37]'de her kare kuaterniyon matrisinin en az bir tane sağ özdeğerinin olduğunu ispat etmiştir. Huang ve So tarafından [38]'de kuaterniyon matrislerinin sol özdeğerleri detaylı bir biçimde ele alınmış ve sol özdeğerlerin özellikleri ve nicelikleri incelenmiştir. Zhang tarafından [39]'da kuaterniyon matrislerin sağ ve sol özdeğerleri arasındaki fark ile kuaterniyon

matrislerle kompleks matrisler arasındaki farklar örneklerle gösterilip özetlenmiştir. Farid vd. tarafından [40]'da kompleks ve kuaterniyon matrislerin öz değer problemlerindeki temel farklar incelenmiştir.

Ayrıca James Cockle Co-kuaterniyonlar kümesini tanıtmıştır [41]. Co-kuaterniyonlar kümesi, birim elemanların pozitif ve negatif birimler olarak ikiye bölünüyor olması nedeniyle belli bir zaman sonra bölünmüş (split) kuaterniyonlar olarak adlandırılmıştır. Split kuaterniyonlar da kuaterniyonlar gibi değişmeli olmayan bir cebirdir. Split kuaterniyon matrisleri de yeni gelişen çalışmalardan olduğu için, bu alana ait ilk çalışmalardan biri Alagöz vd. tarafından [42]'de yapılmıştır. Alagöz vd. tarafından [42]'de kuaterniyonlar ve split kuaterniyon matrislerin temel özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca split kuaterniyon matrisleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır [43, 44, 45, 46].

Cho tarafından [47]'de, De-Moivre formülü kuaterniyonlar için uygulanmıştır. Erdoğan vd. tarafından [48]'de split kuaterniyonların 4×4 reel matris temsilleri elde edilmiştir ve split kuaterniyonların reel matris temsilleri için De-Moivre formülü ve Euler teoremi verilmiştir.

Majernik [49]'da kuaterniyonların yeni bir tipi olarak tanımlanan dual kuaterniyonlar üzerinde çalışmıştır ve bu çalışmada reel, ikili (binary) ve dual kuaterniyonlar incelenmiştir. Dual kuaterniyonlar sayesinde matematiksel fizikteki pek çok problem çözülebilir [17].

Dual kuaterniyonlar yeni gelişen bir çalışma olup, bu alana ait ilk çalışmalardan biri Yüce [50] tarafından yapılmıştır. Yüce tarafından [50]'de dual kuaterniyonların matris temsilleri verilmiştir. Ayrıca dual kuaterniyonlar için Euler ve De Moivre formülleri elde edilmiştir.

Dual kuaterniyonlar kümesi literatürde iki farklı şekilde bulunmaktadır:

1) $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olmak üzere, burada q_0, q_1, q_2, q_3 birer dual sayı ve $i^2 = j^2 = k^2 = i j k = -1$, $i j = -j i = k$, $j k = -k j = i$, $k i = -i k = j$ şeklinde olup, bu kuaterniyon dual katsayılı kuaterniyon olarak adlandırılır. $\mathbb{H}(\mathbb{D})$ ile gösterilir ve
$$\mathbb{H}(\mathbb{D}) = \left\{ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{D}, i^2 = j^2 = k^2 = i j k = -1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2) $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olmak üzere, burada q_0, q_1, q_2, q_3 birer reel sayı ve $i^2 = j^2 = k^2 = i j k = 0$, $i j = j i = j k = k j = k i = i k = 0$ şeklinde olup, bu kuaterniyon dual kuaterniyon olarak adlandırılır. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ile gösterilir ve $\mathbb{H}_{\mathbb{D}} = \{ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = i j k = 0 \}$

şeklinde tanımlanır.

Tezimiz boyunca dual kuaterniyonlar kümesi üzerinde çalışılacaktır. Bu çalışmada dual kuaterniyon matrisleri incelenmiştir. Bölüm 2’de dual kuaterniyonlar ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiş ve cebirsel özellikleri verilmiştir. Bölüm 3’de tezin orijinal kısmı olan dual kuaterniyon katsayılı matrisler hakkında temel cebirsel işlemler ve temel kavramlar oluşturulmuştur. Ayrıca örnekler için Matlab uygulamaları yapılmıştır. Dördüncü bölüm ise sonuç bölümüdür.

1.2 Tezin Amacı

Tezin temel amacı, dual kuaterniyon katsayılı matrisler hakkında temel cebirsel işlemleri ve temel kavramları oluşturmaktır. Dual kuaterniyon matrisleri ve özellikleri verildikten sonra dual kuaterniyon matrislerin 4×4 tipinde reel matris temsilleri ve bu temsillerin özellikleri elde edilecektir. Ayrıca dual kuaterniyon matrislerin izi, determinantı ve tersi incelenecektir. Elde edilen teoremlerin ve sonuçların Matlab uygulamaları yapılacaktır.

1.3 Orjinal Katkı

Tezin amacı, literatüre dual kuaterniyon katsayılı matrisler ve bu matrisler üzerindeki işlemleri tanımlayarak ve matris temsilleri oluşturarak matlab üzerinde yapılan uygulamalar ile katkıda bulunmaktır.

DUAL KUATERNİYONLAR

Bu bölümde dual kuaterniyonlar ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

2.1 Dual Kuaterniyonlar

Bu kısımda, dual kuaterniyonlar üzerine temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1

$$i^2 = j^2 = k^2 = i j k = 0, \quad i j = j i = k \quad i k = i k = j \quad k j = k j = 0$$

ve q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayı olmak üzere

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

ifadesine dual kuaterniyon adı verilir. Dual kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{H}_{\mathbb{D}} = \left\{ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde tanımlanır, [49].

Tanım 2.2

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonu için reel kısmı q_0 ve vektörel (pure) kısmı $\mathbf{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olarak tanımlanır. Buna göre bir dual kuaterniyon

$$q = q_0 + \mathbf{q}$$

şeklinde ifade edilebilir, [50].

Tanım 2.3

$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ kümesi üzerinde toplama işlemi

$$\oplus: \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$\begin{aligned} (q, r) \rightarrow \oplus(q, r) &= q \oplus r = (q_0 + \mathbf{q}) \oplus (r_0 + \mathbf{r}) \\ &= (q_0 + r_0) + (\mathbf{q} + \mathbf{r}) \end{aligned}$$

veya

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonları için

$$q + r = (q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)i + (q_2 + r_2)j + (q_3 + r_3)k$$

şeklinde tanımlanır, [13].

Bu işlemle birlikte $(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ kümesinin $\oplus$ işlemine göre birim elemanı $q = 0 + 0i + 0j + 0k$ dır, [13].

Tanım 2.4

$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ kümesi üzerinde skalerle çarpma işlemi

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$\begin{aligned} (\lambda, q) \rightarrow \odot(\lambda, q) &= \lambda \odot q = \lambda \odot (q_0 + \mathbf{q}) \\ &= \lambda q_0 + \lambda \mathbf{q} \end{aligned}$$

veya

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\lambda \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$\begin{aligned} \lambda \odot q &= \lambda \odot (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= (\lambda q_0) + (\lambda q_1)i + (\lambda q_2)j + (\lambda q_3)k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır, [50].

Böylece $\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\text{i)} \quad \lambda \odot (q \oplus r) = (\lambda \odot q) \oplus (\lambda \odot r)$$

$$\text{ii)} \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$$

$$\text{iii)} \quad (\lambda_1 \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$$

$$\text{iv)} \quad 1 \odot q = q$$

O halde $\{\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}} = Sp\{1, i, j, k\}$ olduğundan

$\text{boy}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = 4$ dür, [50].

Tanım 2.5

$$\cdot : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$(q, r) \rightarrow \cdot(q, r) = qr$$

olmak üzere

$\forall q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonları için iki

dual kuaterniyonun çarpımı

$$qr = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$

$$qr = q_0 r_0 + q_0 (r_1 i + r_2 j + r_3 k) + r_0 (q_1 i + q_2 j + q_3 k) + 0$$

$$= q_0 r_0 + q_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{q}$$

şeklinde tanımlanır, [13, 50].

$\forall q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonları için iki

dual kuaterniyonun çarpımı

$$qr = (q)(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$

$$= qr_0 + qr_1 i + qr_2 j + qr_3 k \tag{2.1}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada

$$i^2 = j^2 = k^2 = i j k = 0, \quad i j = j i = k i = i k = j k = k j = 0$$

dır.

Not 2.1

Burada reel kuaterniyon çarpımı değişmeli olmamasına rağmen dual kuaterniyon çarpımı değişmelidir.

2.1.1 Dual Kuaterniyonlar Üzerine Temel İşlemler

Tanım 2.6

Dual kuaterniyonlar için eşitlik $q = q_0 + \mathbf{q}$ ve $r = r_0 + \mathbf{r} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$q = r \Leftrightarrow q_0 = r_0 \text{ ve } \mathbf{q} = \mathbf{r}$$

şeklinde tanımlanır, [49].

Tanım 2.7

Toplama ve skaler ile çarpma işlemlerinden $q = q_0 + \mathbf{q}$, $r = r_0 + \mathbf{r} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ kuaterniyonlarının farkı

$$q - r = (q_0 - r_0) + (\mathbf{q} - \mathbf{r})$$

şeklinde tanımlanır, [49].

Tanım 2.8

Eşlenik işlemi

$$\bar{\cdot} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$q \rightarrow \bar{q} = q_0 - \mathbf{q}$$

şeklinde tanımlanır ve $\bar{q}$ dual kuaterniyonuna q dual kuaterniyonun **eşleniği** denir, [50].

Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\forall q, r \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı için

i) $\overline{(q + r)} = \bar{q} + \bar{r}$,

ii) $\overline{qr} = \bar{r} \bar{q} = \bar{q} \bar{r} = \bar{r} \bar{q}$,

$$\text{iii)} \quad \bar{\bar{q}} = q,$$

$$\text{iv)} \quad \overline{\lambda q} = \lambda \bar{q},$$

$$\text{v)} \quad q = q_0 \in \mathbb{R} \text{ ise } \bar{q} = q,$$

$$\text{vi)} \quad q \in \mathbb{R}^3 \text{ ise } \bar{q} = -q,$$

$$\text{vii)} \quad q_0 = \frac{q + \bar{q}}{2},$$

$$\text{viii)} \quad \mathbf{q} = \frac{q - \bar{q}}{2},$$

[13].

Tanım 2.9

$q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonun **normu**

$$\| \cdot \| : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q \rightarrow \| q \| = \sqrt{q \bar{q}} = \sqrt{q_0^2} = |q_0|$$

olarak tanımlanır, [50].

Tanım 2.10

Bir $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonu için $\| q \| = 1$ ise q ya birim dual kuaterniyon denir, [50].

Norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\forall q, r \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonları için

$$\text{i)} \quad \| qr \|^2 = (qr)(\overline{qr}) = (qr)(\bar{q}\bar{r}) = (qr)(\bar{r}\bar{q}),$$

$$\text{ii)} \quad \| qr \| = \| q \| \| r \| = \| r \| \| q \|,$$

$$\text{iii)} \quad \| q + r \| = \| q \| + \| r \|,$$

$$\text{iv)} \quad \| q \| = \| \bar{q} \|,$$

$$\text{v)} \quad \| q \| = 0 \Leftrightarrow q_0 = 0,$$

[13].

Tanım 2.11

$(\|\cdot\|)^{-1} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} - \{0\} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} - \{0\}$ işlemi

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada q^{-1} dual kuaterniyonuna q dual kuaterniyonunun tersi denir, [13].

Ters işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir [13]:

i) $\|q^{-1}\| = \|q\|^{-1},$

ii) $qq^{-1} = q^{-1}q,$

iii) $qq^{-1} = 1$

Sonuç 2.1

Cebirsel olarak ise, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonlar kümesi (2.2)'deki eşitlikten de görüleceği gibi pure elemanların tersi bulunmadığından birimli ve değişmeli bir halka oluşturmaktadır, [13].

Teorem 2.1

$\{\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ dual kuaterniyonların vektör uzayı, $\{G^4, [+], \mathbb{R}, +, \cdot, [\cdot]\}$ Galile vektör uzayına izomorftur. Burada $[+]$ işlemi G^4 uzayında iki vektörün toplamı işlemi, $[\cdot]$ işlemi ise bir skalerle G^4 uzayında bir vektörün çarpımı olan dış işlemidir, [49, 50].
 $(\mathbb{H}_{\mathbb{D}} \cong G^4)$

İspat : $\phi : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow G^4$

$$q \rightarrow \phi(q) = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

dönüşümünü tanımlayalım.

✓ ϕ dönüşümü lineerdir:

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda \odot q \oplus \mu \odot r) &= \phi(\lambda \odot (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \oplus \mu \odot (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)) \\
&= \phi((\lambda q_0 + \mu r_0) + (\lambda q_1 + \mu r_1) i + (\lambda q_2 + \mu r_2) j + (\lambda q_3 + \mu r_3) k) \\
&= (\lambda q_0 + \mu r_0, \lambda q_1 + \mu r_1, \lambda q_2 + \mu r_2, \lambda q_3 + \mu r_3) \\
&= (\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3) [+](\mu r_0, \mu r_1, \mu r_2, \mu r_3) \\
&= \lambda[\cdot](q_0, q_1, q_2, q_3) [+]\mu[\cdot](r_0, r_1, r_2, r_3) \\
&= \lambda \odot \phi(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \oplus \mu \odot \phi(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) \\
&= \lambda \odot \phi(q) \oplus \mu \odot \phi(r)
\end{aligned}$$

elde edilir.

✓ ϕ dönüşümü birebirdir:

$\phi(q) = \phi(r)$ olsun. Bu durumda

$$\phi(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \phi(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$

eşitliği yazılır. ϕ nin tanımını göz önüne alınırsa,

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) = (r_0, r_1, r_2, r_3)$$

elde edilir. Böylece $q = r$ olur. Yani ϕ birebirdir.

✓ ϕ dönüşümü örtendir:

$\text{boy}\mathbb{H}_{\mathbb{D}} = 4$, $\text{boy}G^4 = 4$ ve ϕ birebir olduğundan ϕ örtendir.

Sonuç olarak, ϕ bir izomorfizmdir. Böylece $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonlar kümesi G^4 Galile uzayına (Galile uzayları için [51] referansına bakınız) izomorftur.

Tanım 2.12

Reel kısmı sıfır olan dual kuaterniyona pure dual kuaterniyon (vektör kuaterniyon) adı verilir, [50].

$q = q_0 + \mathbf{q}$ dual kuaterniyonu için $\mathbf{q} \in G^3$.

Sonuç 2.2

$q \neq 0, \forall q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ kuaterniyonu $\|q\|^{-2} \bar{q} = q^{-1}$ tersine sahip olduğundan $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ cebiri bölüm cebiridir.

Böylece $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ bölüm cebirinde bölme işlemi tanımlanabilir.

Teorem 2.2

$q, r, s \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır, [49]:

(i) Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ dual kuaterniyonu

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 e^{(q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k)}$$

formunda yazılabilir.

(ii) Dual kuaterniyonlarda çarpım işlemi birleşme ve değişme özelliğine sahiptir.

(iii) $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ iki dual kuaterniyon olmak üzere bunların bölümleri yine bir s dual kuaterniyonudur.

İspat : (i) Burada $q_0 \neq 0$ olmak üzere

$$q_1^* = \frac{q_1}{q_0}, \quad q_2^* = \frac{q_2}{q_0} \quad \text{ve} \quad q_3^* = \frac{q_3}{q_0} \quad (2.3)$$

tanımlansın.

(2.3) ifadelerini içeren $e^{(q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k)}$ ifadesini seriye açtığımızda

$$\begin{aligned} e^{(q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k)} &= 1 + (q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k) + \frac{(q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k)^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + (q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k) + 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $n > 1$ için $i^n = j^n = k^n = 0$ olduğundan $(q_1 i + q_2 j + q_3 k)^n$ formunun ifadeleri sıfıra eşit olur. Bu son açılım sayesinde

$$q = q_0 e^{(q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k)} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

elde edilir, [49].

(ii) Dual kuaterniyonların üstel formunu kullanarak değişme ve birleşme özelliğini sağladığını gösterebiliriz. Birleşme özelliği ve değişme özelliği direk hesaplama ile doğrulanabilir.

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ ve $s = s_0 + s_1 i + s_2 j + s_3 k$ üç dual kuaterniyon olsun. O zaman

$$\begin{aligned} (qr)s &= (q_0 r_0 + (q_0 r_1 + q_1 r_0)i + (q_0 r_2 + q_2 r_0)j + (q_0 r_3 + q_3 r_0)k) \\ &\quad (s_0 + s_1 i + s_2 j + s_3 k) \\ &= q_0 r_0 s_0 + (q_0 r_1 s_0 + q_1 r_0 s_0 + q_0 r_0 s_1)i + (q_0 r_2 s_0 + q_2 r_0 s_0 + q_0 r_0 s_2)j \\ &\quad + (q_0 r_3 s_0 + q_3 r_0 s_0 + q_0 r_0 s_3)k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q(rs) &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &\quad (r_0 s_0 + (r_0 s_1 + r_1 s_0)i + (r_2 s_0 + r_0 s_2)j + (r_3 s_0 + r_0 s_3)k) \\ &= q_0 r_0 s_0 + (q_1 r_0 s_0 + q_0 r_0 s_1 + q_0 r_1 s_0)i + (q_0 r_2 s_0 + q_0 r_0 s_2 + q_2 r_0 s_0)j \\ &\quad + (q_0 r_3 s_0 + q_0 r_0 s_3 + q_3 r_0 s_0)k \end{aligned}$$

olup

$$(qr)s = q(rs)$$

elde edilir. Böylece birleşme özelliği sağlanır, [49]. Ayrıca

$$\begin{aligned} qr &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) \\ &= q_0 r_0 + (q_0 r_1 + q_1 r_0)i + (q_0 r_2 + q_2 r_0)j + (q_0 r_3 + q_3 r_0)k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} rq &= (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= r_0 q_0 + (r_0 q_1 + r_1 q_0)i + (r_0 q_2 + r_2 q_0)j + (r_0 q_3 + r_3 q_0)k \end{aligned}$$

olup

$$q r = r q$$

elde edilir. Böylece değişme özelliği sağlanır.

(iii) $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ iki dual kuaterniyon olmak üzere bunların bölümleri Teorem 2.2'nin i. özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} s = \frac{q}{r} &= \frac{q_0 e^{(q_1^* i + q_2^* j + q_3^* k)}}{r_0 e^{(r_1^* i + r_2^* j + r_3^* k)}} \\ &= \frac{q_0}{r_0} e^{((q_1^* - r_1^*)i + (q_2^* - r_2^*)j + (q_3^* - r_3^*)k)} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$r_0 \neq 0 \text{ ve } q_1^* = \frac{q_1}{q_0}, \quad q_2^* = \frac{q_2}{q_0}, \quad q_3^* = \frac{q_3}{q_0} \text{ ve}$$

$$r_1^* = \frac{r_1}{r_0}, \quad r_2^* = \frac{r_2}{r_0}, \quad r_3^* = \frac{r_3}{r_0}$$

dır, [49].

Sonuç 2.3

İki dual q ve r kuaterniyonunun çarpımı ve bölümü bir s dual kuaterniyonu olduğundan, dual kuaterniyonlar kümesi toplama ve çarpma altında bir bölüm cebiri oluşturur, [49].

Sonuç 2.4

$q \neq 0$ olmak üzere $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonu $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonuna bölmek için

q yu r^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat dual kuaterniyon çarpımı değişimli olduğundan $\frac{q}{r}$

notasyonu kullanılabilir.

2.1.2 Dual Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

Reel eksen ile $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ dual kuaterniyonu arasındaki açı θ olsun.

$$\cos g\theta = \frac{q_0}{\|q\|} = \frac{q_0}{q_0} = 1^1 \text{ ve } \sin g\theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\|q\|}, q \neq 0 \text{ olmak üzere}$$

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = \|q\| \frac{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\|q\|}$$

veya

$$q = \|q\| \left[\frac{q_0}{\|q\|} + \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\|q\|} \left(\frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right) \right]$$

yazılabilir. Burada,

$$w = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

alınırsa dual kuaterniyonun kutupsal gösterimi

$$q = \|q\| (\cos g\theta + w \sin g\theta)$$

şeklinde elde edilir, [50].

2.1.3 Dual Kuaterniyonlar için Euler Formülü

$q = q_0 + \mathbf{q}$ bir birim dual kuaterniyon olsun. Her birim dual kuaterniyon

$$q = \cos g\theta + \mathbf{w} \sin g\theta$$

olarak ifade edilebilir. Burada

¹ Galile anlamda cosinüs ve sinüs fonksiyonları, sırasıyla, $\cos g$, $\sin g$ olmak üzere

$$\cos g\theta = 1$$

$$\sin g\theta = \theta$$

olarak tanımlanır, [50].

$$\mathbf{w} = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

ve

$$\sin g\theta = \theta = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

olarak gösterilebilir. Bu gösterim aynı $z = \cos \theta + i \sin \theta$ kompleks sayısının kutupsal koordinatlı gösterimine benzerdir, [50].

Her $\mathbf{w}$ pure dual kuaterniyonu için

$$\mathbf{w}^2 = 0 \text{ ve } \mathbf{w}\theta = q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

olduğuna göre q dual kuaterniyonun Euler formülünü herhangi bir θ için:

$$e^{\mathbf{w}\theta} = 1 + \mathbf{w}\theta + \frac{(\mathbf{w}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{w}\theta)^3}{3!} + \dots$$

yazılabilir. Her $\mathbf{w}$ pure dual kuaterniyonu için

$$\mathbf{w}^2 = \mathbf{w}^3 = \dots = \mathbf{w}^n = \dots = 0$$

olduğundan

$$e^{\mathbf{w}\theta} = 1 + \mathbf{w}\theta = \cos g\theta + \mathbf{w} \sin g\theta$$

olarak elde edilir, [50].

Teorem 2.3

Her pure dual $\mathbf{w}$ kuaterniyonu için;

$$1. \quad e^{\mathbf{w}\theta_1} e^{\mathbf{w}\theta_2} = e^{\mathbf{w}(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$2. \quad \frac{1}{e^{\mathbf{w}\theta}} = e^{\mathbf{w}(-\theta)}$$

$$3. \quad \frac{e^{\mathbf{w}\theta_1}}{e^{\mathbf{w}\theta_2}} = e^{\mathbf{w}(\theta_1 - \theta_2)}$$

dir, [50].

İspat : w_1, w_2 iki pure dual kuaterniyon olsun.

$$1. \quad e^{w\theta_1} e^{w\theta_2} = (1 + w\theta_1)(1 + w\theta_2)$$

$$= 1 + w\theta_1 + w\theta_2 + w^2\theta_1\theta_2$$

$w^2 = 0$ olduğundan

$$= 1 + w\theta_1 + w\theta_2$$

$$= 1 + w(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= e^{w(\theta_1 + \theta_2)}$$

elde edilir.

$$2. \quad \frac{1}{e^{w\theta}} = \frac{1}{1 + w\theta} = \frac{1}{1 + w\theta} = \frac{1 - w\theta}{1 + w\theta - w\theta - w^2\theta^2}$$

$w^2 = 0$ olduğundan

$$= \frac{1 - w\theta}{1} = 1 - w\theta$$

bulunur.

$e^{w(-\theta)}$ 'in Maclaurin açılımından

$$e^{w(-\theta)} = 1 + w(-\theta) + \frac{(w(-\theta))^2}{2!} + \frac{(w(-\theta))^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 - w\theta$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{e^{w\theta}} = e^{w(-\theta)}$$

elde edilir.

$$3. \quad e^{w(\theta_1 - \theta_2)}, \text{in Maclaurin açılımından}$$

$$e^{w(\theta_1 - \theta_2)} = 1 + w(\theta_1 - \theta_2) + \frac{(w(\theta_1 - \theta_2))^2}{2!} + \frac{(w(\theta_1 - \theta_2))^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + w(\theta_1 - \theta_2)$$

bulunur.

$$\frac{e^{w\theta_1}}{e^{w\theta_2}} = \frac{1 + w\theta_1}{1 + w\theta_2} = \frac{1 + w\theta_1}{1 + w\theta_2} = \frac{1 + w\theta_1 - w\theta_2 - w^2\theta_1\theta_2}{1 + w\theta_2 - w\theta_2 - w^2\theta_2^2} = 1 + w\theta_1 - w\theta_2 = 1 + w(\theta_1 - \theta_2)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{e^{w\theta_1}}{e^{w\theta_2}} = e^{w(\theta_1 - \theta_2)}$$

elde edilir.

2.1.4 Dual Kuaterniyonlar için De-Moivre Formülü

Bu kısımda dual kuaterniyonlar için De Moivre formülünü elde edeceğiz:

Yardımcı Teorem 2.1

$$w = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \text{ için,}$$

$$(\cos g \theta_1 + w \sin g \theta_1)(\cos g \theta_2 + w \sin g \theta_2) = \cos g(\theta_1 + \theta_2) + w \sin g(\theta_1 + \theta_2)$$

dir.

$$\text{İspat : } w = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \text{ için } w^2 = ww = 0 \text{ 'dır. Bu eşitlikler kullanılarak,}$$

$$(\cos g \theta_1 + w \sin g \theta_1)(\cos g \theta_2 + w \sin g \theta_2) = \cos g \theta_1 \cos g \theta_2 + w \sin g \theta_1 \cos g \theta_2$$

$$+ w \cos g \theta_1 \sin g \theta_2 + w^2 \sin g \theta_1 \sin g \theta_2$$

$$= \cos g \theta_1 \cos g \theta_2 + w(\sin g \theta_1 \cos g \theta_2 + \cos g \theta_1 \sin g \theta_2)$$

$$= \cos g(\theta_1 + \theta_2) + w \sin g(\theta_1 + \theta_2)$$

elde edilir. Bu eşitliği elde ederken,

$$\cos g (\theta_1 + \theta_2) = \cos g \theta_1 \cos g \theta_2$$

ve

$$\sin g (\theta_1 + \theta_2) = \cos g \theta_1 \sin g \theta_2 + \sin g \theta_1 \cos g \theta_2$$

eşitlikleri kullanılmıştır, [50].

Teorem 2.4

$q = e^{w\theta} = \cos g \theta + w \sin g \theta$ bir birim dual kuaterniyon olmak üzere

$$q^k = (e^{w\theta})^k = (\cos g \theta + w \sin g \theta)^k = \cos g (k \theta) + w \sin g (k \theta)$$

dir, [50].

İspat : İspatı tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. k negatif olmayan bir tamsayı olsun.

✓ $k = 2$ için teoremin doğruluğu Yardımcı Teorem 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} q^2 &= (\cos g \theta_1 + w \sin g \theta_1)^2 \\ &= (\cos g \theta_1 + w \sin g \theta_1) (\cos g \theta_2 + w \sin g \theta_2) \\ &= \cos g (2\theta) + w \sin g (2\theta) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

✓ $q^k = (\cos g \theta + w \sin g \theta)^k = \cos g (k \theta) + w \sin g (k \theta)$ olduğunu kabul edelim.

✓ $(\cos g \theta + w \sin g \theta)^{k+1} = \cos g ((k+1) \theta) + w \sin g ((k+1) \theta)$ olduğu

gösterilmelidir:

$$\begin{aligned} (\cos g \theta + w \sin g \theta)^{k+1} &= (\cos g \theta + w \sin g \theta)^k (\cos g \theta + w \sin g \theta) \\ &= (\cos g (k \theta) + w \sin g (k \theta)) (\cos g \theta + w \sin g \theta) \\ &= \cos g (k \theta + \theta) + w \sin g (k \theta + \theta) \\ &= \cos g ((k+1) \theta) + w \sin g ((k+1) \theta) \end{aligned}$$

olur. Böylece $n = k + 1$ için ifadenin doğru olduğu görülür.

k negatif bir tam sayı olsun. Teorem 2.3'ün 2. özelliğini kullanarak

$$q^{-1} = \frac{1}{e^{\mathbf{w}\theta}} = e^{\mathbf{w}(-\theta)} = \cos g(-\theta) + \mathbf{w} \sin g(-\theta) = \cos g\theta - \mathbf{w} \sin g\theta$$

$$\begin{aligned} q^{-k} &= (q^{-1})^k = \frac{1}{e^{\mathbf{w}k\theta}} = e^{\mathbf{w}(-k\theta)} = \cos g(k\theta) - \mathbf{w} \sin g(k\theta) \\ &= \cos g(-k\theta) + \mathbf{w} \sin g(-k\theta) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

2.1.5 Dual Kuaterniyona Karşılık Gelen Matris

q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar olmak üzere $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ dual kuaterniyon olsun. Her $r \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için sol lineer dönüşüm

$$L_q : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$r \rightarrow L_q(r) = r q$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm birebir ve örtendir. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonlar kümesinin $\{1, i, j, k\}$ baz vektörleri kullanılarak;

$$L_q(1) = 1(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k.$$

$$L_q(i) = i(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = q_0 i.$$

$$L_q(j) = j(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = q_0 j.$$

$$L_q(k) = k(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = q_0 k$$

elde edilir. Böylece tanımlanan L_q dönüşümünün matris temsili,

$$L_q = \begin{bmatrix} q_0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & q_0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & q_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$\det(L_q) = \|q\|^4 = q_0^4$$

dır, [50]. Dual kuaterniyonlar değişmeli olduğu için sol (sağ) matris temsilleri aynıdır.

Örnek 2.1

$q = 1 + i + j + k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\|q\|^4 = 1$$

elde edilir. Ayrıca q ya karşılık gelen matris

$$L_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$\det(L_q) = \|q\|^4 = 1$$

elde edilir.

Örnek 2.2

$q = 1 + i + j + k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$q^2 = (1 + i + j + k)(1 + i + j + k) = 1 + 2i + 2j + 2k$$

elde edilir. Ayrıca q ya karşılık gelen matris

$$L_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$L_q L_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L_{q^2}$$

ve

$$L_q L_{\bar{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L_{q\bar{q}}$$

elde edilir.

DUAL KUATERNİYON MATRİSLER

Tezin orijinal kısmı olan bu bölümde, dual kuaterniyon matrisler ve özellikleri verildikten sonra dual kuaterniyon matrislerin 4×4 tipinde reel matris temsilleri ve bu temsillerin özellikleri elde edilecektir. Ayrıca dual kuaterniyon matrislerin izi, determinantı ve tersi incelenecektir. Elde edilen teoremler ve sonuçlar için Matlab uygulamaları yapılacaktır.

Tanım 3.1

Elemanları birer dual kuaterniyon olan matrislere “*Dual Kuaterniyon Matris*” adı verilir. Yani $\hat{a}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}$ matrisine dual kuaterniyon matris denir. Burada $1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq s \leq n, \quad a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, d_{rs} \in \mathbb{R}$ ve $\hat{a}_{rs} = a_{rs} + b_{rs}i + c_{rs}j + d_{rs}k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = [a_{rs}] + [b_{rs}]i + [c_{rs}]j + [d_{rs}]k$$

yazılabilir. Buradan dual kuaterniyon matris

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0, \quad ij = ji = jk = kj = ki = ik = 0$$

ve

$$A_1 = [a_{rs}], B_1 = [b_{rs}], C_1 = [c_{rs}], D_1 = [d_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

dır.

$m \times n$ tipindeki “dual kuaterniyon matrislerin kümesi” $M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ile gösterilir ve

$$M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = \left\{ \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k : \hat{a}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathbb{R}_n^m, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 3.1

Ayrıca dual kuaterniyon matrisler, dual kuaterniyonlarda olduğu gibi, reel ve vektörel kısım olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k = A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\}$$

Tanım 3.2

$$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \quad \text{ve} \quad \hat{B} = [\hat{b}_{rs}]_{m \times n} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{birer}$$

$m \times n$ tipinde dual kuaterniyon matris olsun. $\forall r, s \quad 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n, \hat{a}_{rs} = \hat{b}_{rs}$ ise bu iki matrise eşittir denir ve $\hat{A} = \hat{B}$ ile gösterilir. Buna göre

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{a}_{rs} = \hat{b}_{rs}, \forall r, s \quad 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n, \hat{a}_{rs}, \hat{b}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \quad \text{olmasıdır.}$$

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow [\hat{a}_{rs}] = [\hat{b}_{rs}]$$

$$\Leftrightarrow \hat{a}_{rs} = \hat{b}_{rs}$$

$$\Leftrightarrow a_{rs} + b_{rs} i + c_{rs} j + d_{rs} k = x_{rs} + y_{rs} i + z_{rs} j + t_{rs} k$$

$$\Leftrightarrow a_{rs} = x_{rs}, \quad b_{rs} = y_{rs}, \quad c_{rs} = z_{rs}, \quad d_{rs} = t_{rs}$$

$$\Leftrightarrow A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2.$$

Örnek 3.1

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a & 3+5j+2k \\ 1+i-6j+k & b \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 2-3i+5k & c \\ d & -4i-j+k \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } \hat{A} = \hat{B} \text{ ise}$$

a, b, c, d katsayılarını bulalım.

$$\text{Çözüm : } \begin{bmatrix} a & 3+5j+2k \\ 1+i-6j+k & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3i+5k & c \\ d & -4i-j+k \end{bmatrix} \text{ için}$$

$$a = 2-3i+5k, b = -4i-j+k, c = 3+5j+2k \text{ ve } d = 1+i-6j+k$$

bulunur.

Tanım 3.3

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}$ matrisi verilsin. $\forall \hat{a}_{rs} = \hat{0}_{m \times n} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ise $\hat{A}$ matrisine dual kuaterniyon sıfır matrisi denir ve $\hat{A} = \hat{0}_{m \times n}$ ile gösterilir. $m = n$ ise $\hat{0}_{n \times n} = \hat{0}_n$ ile gösterilir.

Örnek 3.2

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0+0i+0j+0k & 0+0i+0j+0k \\ 0+0i+0j+0k & 0+0i+0j+0k \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \hat{0}_2 \text{ matrisi dual kuaterniyon sıfır}$$

matrisidir.

3.1 Dual Kuaterniyon Matrisler Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar

3.1.1 $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ Modül Yapısı ve Bazı

Tanım 3.4

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}$ ve $\hat{B} = [\hat{b}_{rs}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrislerinin toplamı

$$\hat{A} \oplus \hat{B} = [\hat{a}_{rs}] + [\hat{b}_{rs}] = [\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

ile tanımlanır. Böylece,

$$\oplus : M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \times M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

$$(\hat{A}, \hat{B}) \rightarrow \hat{A} \oplus \hat{B} = [\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs}]_{m \times n}$$

bir iç işlemdir. O halde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \cdots & \hat{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{b}_{m1} & \cdots & \hat{b}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

için

$$\hat{A} + \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} + \hat{b}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} + \hat{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{m1} + \hat{b}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mn} + \hat{b}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ile tanımlanır.

Not 3.2

İki dual kuaterniyon matrisinin toplamı şu şekilde de tanımlanabilir:

$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$ ve $\hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$$\hat{A} + \hat{B} = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k$$

yazılabilir.

Örnek 3.3

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 3+j & i+k \\ 5+2i+3j & 1+2k & i+3j \\ i+4j+k & 4+k & 10 \end{bmatrix} \text{ ve } \hat{B} = \begin{bmatrix} i+j+3k & j+3k & 4j \\ 5+4j & 3i+2j & 1+2k \\ 6+i+2j+3k & 3k & j+5k \end{bmatrix} \text{ matrislerinin}$$

toplamını bulalım.

$$\mathbf{1. \text{Çözüm} : } \hat{A} + \hat{B} = \begin{bmatrix} 1+2i+j+3k & 3+2j+3k & i+4j+k \\ 10+2i+7j & 1+3i+2j+2k & 1+i+3j+2k \\ 6+i+6j+4k & 4+4k & 10+j+5k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

2. Çözüm : $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrisleri

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} k$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} k$$

formunda yazılarak

$$\hat{A} + \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} k$$

$$\hat{A} + \hat{B} = \begin{bmatrix} 1+2i+j+3k & 3+2j+3k & i+4j+k \\ 10+2i+7j & 1+3i+2j+2k & 1+i+3j+2k \\ 6+i+6j+4k & 4+4k & 10+j+5k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 3.5

Bir dual kuaterniyon ile bir dual kuaterniyon matrisinin çarpımı, $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$, $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$q \odot \hat{A} = q \odot [\hat{a}_{rs}] = [q \hat{a}_{rs}]_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır. $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{a}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olduğundan $q \hat{a}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dir. O halde

$q \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olup

$$\odot : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \times M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

$$(q, \hat{A}) \rightarrow q \odot \hat{A} = [q \hat{a}_{rs}]_{m \times n}$$

işlemi bir dış işlemdir. Yani

$$q \hat{A} = q \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} q \hat{a}_{11} & \cdots & q \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q \hat{a}_{m1} & \cdots & q \hat{a}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ile tanımlanır. Buradan $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} q \hat{A} &= [q \hat{a}_{rs}] = [(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k)(a_{rs} + b_{rs} i + c_{rs} j + d_{rs} k)] \\ &= [q_1(a_{rs} + b_{rs} i + c_{rs} j + d_{rs} k) + a_{rs}(q_2 i + q_3 j + q_4 k)] \\ &= q_1(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) + \text{Vek}\{q\} A_1 \\ &= q_1 \hat{A} + \text{Vek}\{q\} A_1 \end{aligned}$$

olup

$$q \hat{A} = q_1 \hat{A} + \text{Vek}\{q\} A_1$$

(3.1)

elde edilir. Ayrıca bu eşitlikten farklı olmasına ve bu eşitlikten fazla terim içermesine rağmen (bu fazlalıklar 0'a eşittir) daha pratik olması açısından

$$q\hat{A} = qA_1 + qB_1i + qC_1j + qD_1k$$

olarak da yazılabilir.

Toplama İşleminin Özellikleri

1) $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}),$$

2) $\forall \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \hat{0} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\hat{A} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{A} = \hat{A},$$

3) $\forall \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\hat{A} + \hat{A}' = \hat{A}' + \hat{A} = \hat{0} \text{ olacak şekilde } \hat{A}' = -\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ vardır.}$$

4) $\forall \hat{A}, \hat{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$$

dir.

İspat : 1) $\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}, \hat{B} = [\hat{b}_{rs}]_{m \times n}, \hat{C} = [\hat{c}_{rs}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = ([\hat{a}_{rs}] + [\hat{b}_{rs}]) + [\hat{c}_{rs}]$$

$$= [(\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs}) + \hat{c}_{rs}] \text{ (Dual kuaterniyonlarda toplama işleminin birleşme$$

özell.)

$$= [\hat{a}_{rs} + (\hat{b}_{rs} + \hat{c}_{rs})]$$

$$= [\hat{a}_{rs}] + ([\hat{b}_{rs}] + [\hat{c}_{rs}])$$

$$= \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C})$$

elde edilir.

2) $\hat{A} + \hat{0} = \hat{A}$ olsun. O halde $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}$, $\hat{0} = [\hat{0}_{rs}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak

üzere $[\hat{a}_{rs}]_{m \times n} + [\hat{0}_{rs}]_{m \times n} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}$ 'dir. Bu durumda

$$[\hat{a}_{rs} + \hat{0}_{rs}]_{m \times n} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n} \text{ olup, } \hat{a}_{rs} + \hat{0}_{rs} = \hat{a}_{rs} \text{ } (\hat{a}_{rs}, \hat{0} = e \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ dir.}$$

$(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +)$ Abel grubu olduğundan $\hat{0} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$, $\hat{a}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için $\hat{a}_{rs} + \hat{0}_{rs} = \hat{0}_{rs} + \hat{a}_{rs}$ yazılabilir. O halde

$$\hat{A} + \hat{0} = [\hat{a}_{rs} + \hat{0}_{rs}]_{m \times n} = [\hat{0}_{rs} + \hat{a}_{rs}]_{m \times n} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n} = \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

elde edilir.

3) $\hat{A} + \hat{A}' = \hat{0}$ olsun. O halde $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}$, $\hat{A}' = [\hat{b}_{rs}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak

üzere

$$[\hat{a}_{rs}]_{m \times n} + [\hat{b}_{rs}]_{m \times n} = [\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs}]_{m \times n} = \hat{0} = [\hat{0}_{rs}]_{m \times n} \text{ olup, } \hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs} = \hat{0}$$

$$(\hat{a}_{rs}, \hat{b}_{rs}, \hat{0} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ dir.}$$

$(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +)$ Abel grubu olduğundan $\hat{b}_{rs} = -\hat{a}_{rs}$ elde edilir. Burada $(-1) \in \mathbb{R}$, $\hat{a}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$

için $(-1)\hat{a}_{rs} = -\hat{a}_{rs}$ olduğundan $\hat{A}' = [-\hat{a}_{rs}] = [(-1)\hat{a}_{rs}] = -\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$

elde edilir.

4) $\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n}$, $\hat{B} = [\hat{b}_{rs}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\hat{A} + \hat{B} = [\hat{a}_{rs}] + [\hat{b}_{rs}]$$

$$= [\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs}]$$

yazılabilir.

$(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +)$ Abel grubu olduğundan $\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs} = \hat{b}_{rs} + \hat{a}_{rs}$ olup

$$\hat{A} + \hat{B} = [\hat{b}_{rs} + \hat{a}_{rs}]$$

$$\begin{aligned}
&= [\hat{b}_{rs}] + [\hat{a}_{rs}] \\
&= \hat{B} + \hat{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. özelliğin 2. ispatı :

$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$ ve $\hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{A} + \hat{B} &= (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) + (A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k) \\
&= (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k \\
&= (A_2 + A_1) + (B_2 + B_1)i + (C_2 + C_1)j + (D_2 + D_1)k \quad (\text{Reel matrislerde toplama} \\
&\hspace{15em} \text{işleminin değişme özelliğinden}) \\
&= (A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k) + (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) \\
&= \hat{B} + \hat{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $(M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), +)$ Abel grubudur.

Dış İşlemin Özellikleri

1) $\forall p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \forall \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(p + q)\hat{A} = p\hat{A} + q\hat{A} \quad (3.2)$$

2) $\forall q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \forall \hat{A}, \hat{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$q(\hat{A} + \hat{B}) = q\hat{A} + q\hat{B} \quad (3.3)$$

3) $\forall p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \forall \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(pq)\hat{A} = p(q\hat{A}) \quad (3.4)$$

4) $(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +, \cdot)$ birimli değişmeli halka 2. işleminin birim elemanı 1 olmak üzere

$$1\hat{A} = \hat{A}$$

5) $\forall q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \forall \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$q\hat{A} = \hat{A}q \quad (3.5)$$

dır.

İspat : 1) $\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\forall p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$(p + q)\hat{A} = (p + q)[\hat{a}_{rs}] = [(p + q)\hat{a}_{rs}] \quad (\text{Dual kuaterniyonlarda çarpma işleminin}$$

toplama üzerine dağılma öz.)

$$= [p\hat{a}_{rs} + q\hat{a}_{rs}] = p[\hat{a}_{rs}] + q[\hat{a}_{rs}]$$

$$= p\hat{A} + q\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

elde edilir.

2) $\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}], \hat{B} = [\hat{b}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\forall q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$q(\hat{A} + \hat{B}) = q([\hat{a}_{rs}] + [\hat{b}_{st}])$$

$$= q([\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{st}])$$

$$= [q(\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{st})]$$

$$= [q\hat{a}_{rs} + q\hat{b}_{st}]$$

$$= q[\hat{a}_{rs}] + q[\hat{b}_{st}]$$

$$= q\hat{A} + q\hat{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

elde edilir.

3) $\forall p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \forall \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 (pq)\hat{A} &= (pq)(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) \\
 &= ((pq)A_1 + (pq)B_1 i + (pq)C_1 j + (pq)D_1 k) \\
 &= (p(qA_1)) + (p(qB_1))i + (p(qC_1))j + (p(qD_1))k \\
 &= p((qA_1) + (qB_1)i + (qC_1)j + (qD_1)k) \\
 &= p(q(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)) \\
 &= p(q\hat{A})
 \end{aligned}$$

elde edilir.

5) $\forall q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \forall \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 q\hat{A} &= (q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k)(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) \\
 &= q_1 A_1 + (q_1 B_1 + q_2 A_1)i + (q_1 C_1 + q_3 A_1)j + (q_1 D_1 + q_4 A_1)k \\
 &= A_1 q_1 + (B_1 q_1 + A_1 q_2)i + (C_1 q_1 + A_1 q_3)j + (D_1 q_1 + A_1 q_4)k
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \hat{A}q &= (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k) \\
 &= A_1 q_1 + (B_1 q_1 + A_1 q_2)i + (C_1 q_1 + A_1 q_3)j + (D_1 q_1 + A_1 q_4)k
 \end{aligned}$$

olduğundan

$$q\hat{A} = \hat{A}q$$

elde edilir.

Sonuç 3.1

$$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +, \cdot, \odot\} \text{ altılısı bir modüldür.}$$

Şimdi $\{M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +, \cdot, \odot\}$ modülünün bir bazını araştıralım:

$\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} = \hat{a}_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \hat{a}_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \hat{a}_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \hat{a}_{n1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \hat{a}_{n2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \hat{a}_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

yazılabildiğinden dolayı

$$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = Sp\{S_1\} = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.6)$$

elde edilir.

$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ halkası üzerinde bir modül olmak üzere S_1 sisteminin lineer bağımsızlığını araştıralım:

$\hat{q}_{11}, \hat{q}_{12}, \dots, \hat{q}_{mn} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$\hat{q}_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \hat{q}_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \hat{q}_{mn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \hat{0}_n$$

olsun.

Buradan

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & \hat{q}_{12} & \cdots & \hat{q}_{1n} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{q}_{n1} & \hat{q}_{n2} & \cdots & \hat{q}_{nn} \end{bmatrix} = \hat{0}_n$$

yazılabilir. O halde

$$\hat{q}_{11} = \hat{q}_{12} = \cdots = \hat{q}_{nn} = 0$$

elde edilir.

O halde S_1 sistemi lineer bağımsızdır.

Sonuç 3.2

$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ bir modül üzerindeki S_1 sistemi için

1) S_1 lineer bağımsız

2) $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = Sp\{S_1\}$

olduğundan S_1 matris sistemi $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ modülünün bir standart bazı(tabanı)dır.

Böylece $boy(M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})) = n^2$ dir.

Sonuç olarak, $\{M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +, \cdot, \odot\}$ modülünün standart bazı

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bulunur. Ayrıca $\forall \hat{a}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için $\hat{a}_{rs} = \hat{p}_{rs} \hat{q}_{rs}$ olacak şekilde $\hat{p}_{rs}, \hat{q}_{rs} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ var

olduğundan

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{11} \hat{q}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{p}_{nn} \hat{q}_{nn} \end{bmatrix} = \hat{p}_{11} \begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \hat{p}_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{q}_{nn} \end{bmatrix}$$

yazılabildiğinden (3.6) ile verilen standart bazın dışında da baz bulunabilir.

3.1.2 $\mathbb{R}$ Vektör Uzayı Yapısı ve Bazı

Sonuç 3.3

$q \in \mathbb{R}$ için vektör uzayı aksiyomları sağlandığından $\{M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \Delta\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

Şimdi $\{M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \Delta\}$ modülünün bir bazını araştıralım:

$\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{a}_{rs} = a_{rs} + b_{rs}i + c_{rs}j + d_{rs}k$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} &= a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + b_{11} \begin{bmatrix} i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + c_{11} \begin{bmatrix} j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + d_{11} \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\
 \cdots + a_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + b_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & i \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + c_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & j \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + d_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\
 \cdots + a_{n1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + b_{n1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + c_{n1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + d_{n1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\
 \cdots + a_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + b_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & i \end{bmatrix} + c_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j \end{bmatrix} + d_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

yazılabildiğinden dolayı

elde edilir.

$q_{11}, q_{12}, \dots, q_{nn}, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{nn}, s_{11}, s_{12}, \dots, s_{nn}, t_{11}, t_{12}, \dots, t_{nn} \in \mathbb{R}$ için

38

$$\dots + q_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + r_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i \end{bmatrix} + s_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + t_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} = \hat{0}_{n \times n}$$

olsun.

Buradan

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & \hat{q}_{12} & \dots & \hat{q}_{1n} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{q}_{n1} & \hat{q}_{n2} & \dots & \hat{q}_{nn} \end{bmatrix} = \hat{0}_n$$

yazılabilir. O halde

$$q_{11} = q_{12} = \dots = q_{nn} = r_{11} = r_{12} = \dots = r_{nn} = s_{11} = s_{12} = \dots = s_{nn} = t_{11} = t_{12} = \dots = t_{nn} = 0$$

elde edilir.

O halde S_2 sistemi lineer bağımsızdır.

Sonuç 3.4

$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ bir modül üzerindeki S_2 sistemi için

1) S_2 lineer bağımsız

2) $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = Sp\{S_2\}$

olduğundan S_2 matris sistemi $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ modülünün bir standart bazı(tabanı)dır.

Böylece $boy(M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})) = 4n^2$ dir.

3.1.3 $M_n(\mathbb{R})$ Modül Yapısı ve Bazı

Tanım 3.6

Bir $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin satır ve sütun sayıları eşit ise yani $n \times n$ tipinde bir matris ise $\hat{A}$ matrisine n . mertebeden bir **dual kuaterniyon kare matris** denir ve dual kuaterniyon matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ile gösterilir.

n . mertebeden $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{n \times n}$ dual kuaterniyon kare matrisi

$$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Burada $\hat{a}_{11}, \hat{a}_{22}, \dots, \hat{a}_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegene de $\hat{A}$ 'nın **esas köşegeni** denir.

Tanım 3.7

Bir reel matris ile bir dual kuaterniyon matrisinin çarpımı, $Q = [q_{rs}] \in M_n(\mathbb{R})$, $\hat{A} = [\hat{a}_{st}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$Q \hat{A} = Q \Theta \hat{A} = [q_{rs}]_{n \times n} [\hat{a}_{st}]_{n \times n} = \left[\sum_{s=1}^n q_{rs} \hat{a}_{st} \right] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır. $q_{rs} \in \mathbb{R}$ ve $\hat{a}_{st} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olduğundan $q_{rs} \hat{a}_{st} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dir. O halde

$Q \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olduğundan

$$\Theta: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \rightarrow M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

$$(Q, \hat{A}) \rightarrow Q \Theta \hat{A} = Q \hat{A} = \left[\sum_{s=1}^n q_{rs} \hat{a}_{st} \right]_n$$

işlemi bir dış işlemdir. Ayrıca, $\hat{a}_{st} = a_{st} + b_{st}i + c_{st}j + d_{st}k$ için

$$Q \hat{A} = [q_{rs}] [\hat{a}_{st}]$$

$$= \left[\sum_{s=1}^n q_{rs} \hat{a}_{st} \right]$$

$$= \left[\sum_{s=1}^n q_{rs} (a_{st} + b_{st} i + c_{st} j + d_{st} k) \right]$$

yazılabilir. (2.1) eşitliğinden

$$Q \hat{A} = \left[\sum_{s=1}^n \{ (q_{rs} a_{st}) + (q_{rs} b_{st}) i + (q_{rs} c_{st}) j + (q_{rs} d_{st}) k \} \right]$$

yazılabilir. Buradan

$$Q \hat{A} = \left[\sum_{s=1}^n (q_{rs} a_{st}) \right] + \left[\sum_{s=1}^n (q_{rs} b_{st}) \right] i + \left[\sum_{s=1}^n (q_{rs} c_{st}) \right] j + \left[\sum_{s=1}^n (q_{rs} d_{st}) \right] k$$

elde edilir. İki reel matrisin çarpımı tanım gereğince

$Q = [q_{rs}]$, $A_1 = [a_{st}]$, $B_1 = [b_{st}]$, $C_1 = [c_{st}]$ ve $D_1 = [d_{st}] \in M_n(\mathbb{R})$ matrisleri için

$$Q \hat{A} = Q A_1 + Q B_1 i + Q C_1 j + Q D_1 k \quad (3.9)$$

yazılabilir.

Dış İşlemin Özellikleri

1) $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(Q_1 + Q_2) \Theta \hat{A} = Q_1 \Theta \hat{A} \oplus Q_2 \Theta \hat{A}$$

2) $\forall Q_1 \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$Q_1 \Theta (\hat{A} \oplus \hat{B}) = (Q_1 \Theta \hat{A}) \oplus (Q_1 \Theta \hat{B})$$

3) $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(Q_1 Q_2) \Theta \hat{A} = Q_1 \Theta (Q_2 \Theta \hat{A})$$

4) $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ reel matrislerin halkası 2. işleminin birim elemanı I_n olmak üzere

$$I_n \Theta \hat{A} = \hat{A}$$

5) $\forall Q \in M_n(\mathbb{R}), \forall \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$Q\hat{A} \neq \hat{A}Q$$

dir.

6) $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall \hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(Q_1 \hat{A})(\hat{B} Q_2) = Q_1 (\hat{A} \hat{B}) Q_2$$

(3.10)

dir.

7) $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall \hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$(Q_1 \hat{A})(Q_2 \hat{B}) \neq (Q_1 Q_2)(\hat{A} \hat{B})$$

dir.

İspat : 1) $\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} (Q_1 + Q_2) \hat{A} &= (Q_1 + Q_2) [\hat{a}_{rs}] = [(Q_1 + Q_2) \hat{a}_{rs}] = [Q_1 \hat{a}_{rs} + Q_2 \hat{a}_{rs}] = Q_1 [\hat{a}_{rs}] + Q_2 [\hat{a}_{rs}] \\ &= Q_1 \hat{A} + Q_2 \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $\forall \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k, \hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\forall Q \in M_n(\mathbb{R})$ için

$$Q(\hat{A} + \hat{B}) = Q((A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k)$$

(3.9) özelliğinden

$$\begin{aligned} &= Q(A_1 + A_2) + Q(B_1 + B_2)i + Q(C_1 + C_2)j + Q(D_1 + D_2)k \\ &= (QA_1 + QA_2) + (QB_1 + QB_2)i + (QC_1 + QC_2)j + (QD_1 + QD_2)k \\ &= (QA_1 + QB_1i + QC_1j + QD_1k) + (QA_2 + QB_2i + QC_2j + QD_2k) \\ &= Q\hat{A} + Q\hat{B} \end{aligned}$$

olduğundan

$$Q(\hat{A} + \hat{B}) = Q\hat{A} + Q\hat{B}$$

elde edilir.

3) $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(Q_1 Q_2) \hat{A} &= (Q_1 Q_2)(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) \\ &= ((Q_1 Q_2)A_1 + (Q_1 Q_2)B_1 i + (Q_1 Q_2)C_1 j + (Q_1 Q_2)D_1 k) \quad (\text{reel matrislerde} \\ &\quad \text{çarpma işleminin birleşme özelliğinden})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (Q_1(Q_2 A_1)) + (Q_1(Q_2 B_1))i + (Q_1(Q_2 C_1))j + (Q_1(Q_2 D_1))k \\ &= Q_1((Q_2 A_1) + (Q_2 B_1)i + (Q_2 C_1)j + (Q_2 D_1)k) \\ &= Q_1(Q_2(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)) \\ &= Q_1(Q_2 \hat{A})\end{aligned}$$

olduğundan

$$(Q_1 Q_2) \hat{A} = Q_1(Q_2 \hat{A})$$

elde edilir.

5) $\forall Q \in M_n(\mathbb{R}), \forall \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}Q \hat{A} &= Q(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) \\ &= Q A_1 + Q B_1 i + Q C_1 j + Q D_1 k\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\hat{A} Q &= (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)Q \\ &= A_1 Q + B_1 Q i + C_1 Q j + D_1 Q k\end{aligned}$$

olup reel matrislerde çarpma işlemi değişmeli olmadığı için

$$Q\hat{A} \neq \hat{A}Q$$

dir.

$$6) \forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k, \hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} (Q_1 \hat{A})(\hat{B} Q_2) &= (Q_1 A_1 + Q_1 B_1 i + Q_1 C_1 j + Q_1 D_1 k)(A_2 Q_2 + B_2 Q_2 i + C_2 Q_2 j + D_2 Q_2 k) \\ &= Q_1 A_1 A_2 Q_2 + (Q_1 A_1 B_2 Q_2 + Q_1 B_1 A_2 Q_2) i \\ &\quad + (Q_1 A_1 C_2 Q_2 + Q_1 C_1 A_2 Q_2) j + (Q_1 A_1 D_2 Q_2 + Q_1 D_1 A_2 Q_2) k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Q_1 (\hat{A} \hat{B}) Q_2 &= Q_1 (A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2) i + (A_1 C_2 + C_1 A_2) j + (A_1 D_2 + D_1 A_2) k) Q_2 \\ &= Q_1 A_1 A_2 Q_2 + (Q_1 A_1 B_2 Q_2 + Q_1 B_1 A_2 Q_2) i \\ &\quad + (Q_1 A_1 C_2 Q_2 + Q_1 C_1 A_2 Q_2) j + (Q_1 A_1 D_2 Q_2 + Q_1 D_1 A_2 Q_2) k \end{aligned}$$

olduğundan

$$(Q_1 \hat{A})(\hat{B} Q_2) = Q_1 (\hat{A} \hat{B}) Q_2$$

elde edilir.

$$7) \forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}),$$

$$\forall \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k, \hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} (Q_1 \hat{A})(Q_2 \hat{B}) &= (Q_1 A_1 + Q_1 B_1 i + Q_1 C_1 j + Q_1 D_1 k)(Q_2 A_2 + Q_2 B_2 i + Q_2 C_2 j + Q_2 D_2 k) \\ &= Q_1 A_1 Q_2 A_2 + (Q_1 A_1 Q_2 B_2 + Q_1 B_1 Q_2 A_2) i \\ &\quad + (Q_1 A_1 Q_2 C_2 + Q_1 C_1 Q_2 A_2) j + (Q_1 A_1 Q_2 D_2 + Q_1 D_1 Q_2 A_2) k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (Q_1 Q_2)(\hat{A} \hat{B}) &= (Q_1 Q_2)(A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2) i + (A_1 C_2 + C_1 A_2) j + (A_1 D_2 + D_1 A_2) k) \\ &= Q_1 Q_2 A_1 A_2 + (Q_1 Q_2 A_1 B_2 + Q_1 Q_2 B_1 A_2) i \end{aligned}$$

$$+(Q_1 Q_2 A_1 C_2 + Q_1 Q_2 C_1 A_2)j + (Q_1 Q_2 A_1 D_2 + Q_1 Q_2 D_1 A_2)k$$

olup reel matrislerde değişme özelliği olmadığından

$$(Q_1 \hat{A})(Q_2 \hat{B}) = (Q_1 Q_2)(\hat{A}\hat{B})$$

özelliği sağlanmaz.

Sonuç 3.5

$$\{M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\} \text{ altılısı bir modüldür.}$$

Şimdi $\{M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ modülünün bir bazını araştıralım:

$\forall \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\begin{aligned} \hat{A} &= [\hat{a}_{rs}]_{n \times n} = [a_{rs} + b_{rs}i + c_{rs}j + d_{rs}k] \\ &= [a_{rs}] + [b_{rs}]i + [c_{rs}]j + [d_{rs}]k \\ &= A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. A_1, B_1, C_1, D_1 reel matrisleri için

$$A_1 I_n = A_1, B_1 I_n = B_1, C_1 I_n = C_1 \text{ ve } D_1 I_n = D_1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \hat{A} &= [a_{rs}]I_n + [b_{rs}]iI_n + [c_{rs}]jI_n + [d_{rs}]kI_n \\ &= [a_{rs}]\hat{I} + [b_{rs}]\hat{I} + [c_{rs}]\hat{J} + [d_{rs}]\hat{K} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\hat{A} = A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}$$

yazılabilir. Burada

$$A_1, B_1, C_1, D_1 \in M_n(\mathbb{R}) \text{ ve } \hat{I}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olup}$$

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} = \hat{I}_n, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i \end{bmatrix}_{n \times n} = i \hat{I}_n,$$

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & j \end{bmatrix}_{n \times n} = j \hat{I}_n, \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}_{n \times n} = k \hat{I}_n$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\hat{1}^2 = \hat{I}_n, \quad \hat{I}^2 = \hat{J}^2 = \hat{K}^2 = \hat{O}_n, \quad \hat{I}\hat{J} = \hat{J}\hat{I} = \hat{J}\hat{K} = \hat{K}\hat{J} = \hat{K}\hat{I} = \hat{I}\hat{K} = \hat{O}_n$$

özellikleri sağlanır. Böylece

$\forall \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\hat{A} = A_1 \hat{1} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}$ yazılabildiğinden

$$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = sp\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$$

elde edilir.

$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $M_n(\mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modül ve

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \hat{J} = \begin{bmatrix} j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & j \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}_{n \times n} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olmak üzere } \{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\} \text{ sisteminin lineer}$$

bağımsızlığını araştıralım:

$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in M_n(\mathbb{R})$ için $Q_1 \hat{1} + Q_2 \hat{I} + Q_3 \hat{J} + Q_4 \hat{K} = \hat{O}_n$ olsun. Buradan

$[a_{rs}] \hat{1} + [b_{rs}] \hat{I} + [c_{rs}] \hat{J} + [d_{rs}] \hat{K} = \hat{O}_n$ olmak üzere

$$[a_{rs} + b_{rs}i + c_{rs}j + d_{rs}k] = [0_n]$$

yazılabilir. O halde

$$a_{rs} = b_{rs} = c_{rs} = d_{rs} = 0 \text{ olup } Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0_n$$

elde edilir.

O halde $\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

Sonuç 3.6

$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ bir modül üzerindeki $\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ sistemi için

1) $\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ lineer bağımsız

2) $Sp\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\} = M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$

olduğundan $\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ matris sistemi $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ modülünün bir standart bazı(tabanı)dır. Böylece $boy(M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})) = 4$ dür.

Örnek 3.4

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisinin $\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ bazına göre

bileşenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix} &= Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Q_2 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + Q_3 \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} + Q_4 \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\hat{A}$ nın $\{\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ bazına göre bileşenleri

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

dır.

Örnek 3.5

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i+2j & 1+3j-5k & 2+4i+2k \\ -2+5i+k & 4i+5j & 3-4i \\ 1-k & i+j+k & 1+2i-3j+6k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ matrisinin } \{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\} \text{ bazına göre}$$

bileşenlerini bulalım.

$$\begin{bmatrix} 1+i+2j & 1+3j-5k & 2+4i+2k \\ -2+5i+k & 4i+5j & 3-4i \\ 1-k & i+j+k & 1+2i-3j+6k \end{bmatrix} = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Q_2 \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} + Q_3 \begin{bmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix} + Q_4 \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde $\hat{A}$ nın $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ bazına göre bileşenleri

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \right\}$$

dır.

3.2 Dual Kuaterniyon Matrislerin Temel Özellikleri: Çarpma, Eşlenik, Transpoz, Eşlenik Transpoz, Ters ve Kuvvet

3.2.1 Dual Kuaterniyon Matrislerin Çarpımı

Tanım 3.8

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{B} = [\hat{b}_{st}]_{n \times o} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisleri verilsin. Bu durumda iki matrisin çarpımı

$$\hat{A}\hat{B} = \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} \right]_{m \times o} \quad (3.11)$$

ile tanımlanır. O halde çarpım işlemi

$$\cdot: M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \times M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \rightarrow M_{m \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

$$(\hat{A}, \hat{B}) \rightarrow \hat{A}\hat{B} = \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} \right]_{m \times o}$$

şeklinde bir iç işlemdir. Eğer

$$\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} = \hat{c}_{rt}, \quad 1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq t \leq o$$

denilirse

$$\hat{c}_{11} = \sum_{s=1}^n \hat{a}_{1s} \hat{b}_{s1} = \hat{a}_{11} \hat{b}_{11} + \hat{a}_{12} \hat{b}_{21} + \dots + \hat{a}_{1n} \hat{b}_{n1}$$

$$\hat{c}_{12} = \sum_{s=1}^n \hat{a}_{1s} \hat{b}_{s2} = \hat{a}_{11} \hat{b}_{12} + \hat{a}_{12} \hat{b}_{22} + \dots + \hat{a}_{1n} \hat{b}_{n2}$$

$\vdots$

$$\hat{c}_{1o} = \sum_{s=1}^n \hat{a}_{1s} \hat{b}_{so} = \hat{a}_{11} \hat{b}_{1o} + \hat{a}_{12} \hat{b}_{2o} + \dots + \hat{a}_{1n} \hat{b}_{no}$$

yazılabilir. O halde

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & & & \\ \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \dots & \hat{a}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} & \dots & \hat{b}_{1o} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} & \dots & \hat{b}_{2o} \\ \vdots & & & \\ \hat{b}_{n1} & \hat{b}_{n2} & \dots & \hat{b}_{no} \end{bmatrix} = [\hat{c}_{rt}] = \hat{C} \quad (3.12)$$

olarak hesaplanır.

Not 3.3

$\hat{a}_{rs} = a_{rs} + b_{rs}i + c_{rs}j + d_{rs}k$ ve $\hat{b}_{st} = a_{st} + b_{st}i + c_{st}j + d_{st}k$ olmak üzere

$$\hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} = (a_{rs} a_{st}) + (a_{rs} b_{st} + b_{rs} a_{st})i + (a_{rs} c_{st} + c_{rs} a_{st})j + (a_{rs} d_{st} + c_{rs} d_{st})k$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n ((a_{rs} a_{st}) + (a_{rs} b_{st} + b_{rs} a_{st})i + (a_{rs} c_{st} + c_{rs} a_{st})j + (a_{rs} d_{st} + c_{rs} d_{st})k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n (a_{rs} a_{st}) + \sum_{s=1}^n (a_{rs} b_{st} + b_{rs} a_{st})i + \sum_{s=1}^n (a_{rs} c_{st} + c_{rs} a_{st})j + \sum_{s=1}^n (a_{rs} d_{st} + c_{rs} d_{st})k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n (a_{rs} a_{st}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n (a_{rs} b_{st} + b_{rs} a_{st}) \end{bmatrix} i \\ &\quad + \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n (a_{rs} b_{st} + b_{rs} a_{st}) \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^n (a_{rs} b_{st} + b_{rs} a_{st}) \end{bmatrix} k \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.11) ve (3.12) eşitlikleriyle verilen iki dual kuaterniyon matrisinin çarpımı şu şekilde tanımlanabilir:

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{ve} \quad \hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

matrisleri için

$$\boxed{\hat{A}\hat{B} = A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

Not 3.4

(3.11), (3.12) ve (3.13) eşitlikleriyle verilen iki dual kuaterniyon matrisinin çarpımı şu şekilde tanımlanabilir:

$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$$\hat{A}\hat{B} = A_1 A_2 + A_1 (B_2 i + C_2 j + D_2 k) + (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_2 \quad (3.14)$$

şeklindedir.

Not 3.5

Burada $A_1 \in \mathbb{R}_n^m$, $A_2 \in \mathbb{R}_o^n$ olduğundan $A_1 A_2$ çarpılabilir matrislerdir.

Örnek 3.6

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2+3i+2k & 1+j & 1+2i+3k \\ 5+5j & 1+i+2k & 3j \\ i+k & 4+2k & 4+2i+3k \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{ve} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} i+j & i+2k \\ 2+j+2k & 3i+2j \\ 4+i & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{matrislerinin}$$

çarpımını bulalım.

$$1. \text{ Çözüm : } \hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} 2+3i+2k & 1+j & 1+2i+3k \\ 5+5j & 1+i+2k & 3j \\ i+k & 4+2k & 4+2i+3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i+j & i+2k \\ 2+j+2k & 3i+2j \\ 4+i & 5 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} 6+11i+5j+14k & 5+15i+2j+19k \\ 2+7i+18j+6k & 8i+17j+10k \\ 24+12i+4j+24k & 20+22i+8j+15k \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

elde edilir.

2. Çözüm : $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrisleri

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} k$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k$$

olmak üzere

$$\hat{A}\hat{B} = A_1A_2 + (A_1B_2 + B_1A_2)i + (A_1C_2 + C_1A_2)j + (A_1D_2 + D_1A_2)k$$

yazılabilir. O halde

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \\ 24 & 20 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 0 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \right) i + \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) j + \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 10 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 4 & 0 \\ 16 & 15 \end{bmatrix} \right) k$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \\ 24 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 7 & 8 \\ 12 & 22 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 18 & 17 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 6 & 10 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} k$$

$$= \begin{bmatrix} 6+11i+5j+14k & 5+15i+2j+19k \\ 2+7i+18j+6k & 8i+17j+10k \\ 24+12i+4j+24k & 20+22i+8j+15k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. Çözüm : $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrisleri

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} k$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k$$

olmak üzere

$$\hat{A}\hat{B} = A_1 A_2 + A_1 (B_2 i + C_2 j + D_2 k) + (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_2$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \\ 24 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k \right) + \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} k \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \\ 24 & 20 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 10 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} k \right) + \left(\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 0 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 4 & 0 \\ 16 & 15 \end{bmatrix} k \right) \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \\ 24 & 20 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 7 & 8 \\ 12 & 22 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 18 & 17 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 6 & 10 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} k \right) \\ &= \begin{bmatrix} 6+11i+5j+14k & 5+15i+2j+19k \\ 2+7i+18j+6k & 8i+17j+10k \\ 24+12i+4j+24k & 20+22i+8j+15k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Çarpma İşleminin Özellikleri

1) Birleşme Özelliği: $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{C} \in M_{o \times p}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$$

2) Soldan Dağılım Özelliği: $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{B}, \hat{C} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$$

3) Sağdan Dağılım Özelliği: $\hat{A} \in M_{o \times p}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{B}, \hat{C} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$$(\hat{B} + \hat{C})\hat{A} = \hat{B}\hat{A} + \hat{C}\hat{A}$$

4) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$q(\hat{A}\hat{B}) = (q\hat{A})\hat{B} = \hat{A}(q\hat{B})$$

5) Değişme Özelliği: $\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon kare matrisleri için

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

dir.

6) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$(q\hat{A})(p\hat{B}) = (qp)(\hat{A}\hat{B}) \quad (3.15)$$

dir.

İspat : 1) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{C} \in M_{o \times p}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]$, $\hat{B} = [\hat{b}_{st}]$ ve $\hat{C} = [\hat{c}_{tu}]$ olsun. O halde

$$\hat{A}\hat{B} = [\hat{a}_{rs}][\hat{b}_{st}] = [\hat{d}_{rt}], \quad \hat{d}_{rt} = \hat{a}_{r1}\hat{b}_{1t} + \hat{a}_{r2}\hat{b}_{2t} + \cdots + \hat{a}_{rm}\hat{b}_{mt} = \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{b}_{st}$$

ve

$$\hat{B}\hat{C} = [\hat{b}_{st}][\hat{c}_{tu}] = [\hat{f}_{su}], \quad \hat{f}_{su} = \hat{b}_{s1}\hat{c}_{1u} + \hat{b}_{s2}\hat{c}_{2u} + \cdots + \hat{b}_{sn}\hat{c}_{nu} = \sum_{t=1}^o \hat{b}_{st}\hat{c}_{tu}$$

yazılabilir.

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = [\hat{d}_{rt}][\hat{c}_{tu}] = \left[\sum_{t=1}^o \hat{d}_{rt}\hat{c}_{tu} \right]$$

yazılabilir. Buradan

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \left[\sum_{t=1}^o \hat{d}_{rt}\hat{c}_{tu} \right] = \left[\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^o (\hat{a}_{rs}\hat{b}_{st})\hat{c}_{tu} \right] \quad (3.16)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = [\hat{a}_{rs}][\hat{f}_{su}] = \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{f}_{su} \right]$$

olup

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{f}_{su} \right] = \left[\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^o \hat{a}_{rs} (\hat{b}_{st} \hat{c}_{tu}) \right] \quad (3.17)$$

elde edilir.

$$\hat{a}_{rs}, \hat{b}_{st}, \hat{c}_{tu} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \text{ olduğundan}$$

$$\hat{a}_{rs} (\hat{b}_{st} \hat{c}_{tu}) = (\hat{a}_{rs} \hat{b}_{st}) \hat{c}_{tu}$$

yazılabilir. O halde (3.16) ve (3.17) denklemlerinden

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$$

elde edilir.

2) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{C} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}], \hat{B} = [\hat{b}_{st}] \text{ ve } \hat{C} = [\hat{c}_{st}] \text{ olsun. O halde}$$

$$\hat{A}\hat{B} = [\hat{a}_{rs}] [\hat{b}_{st}] = \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} \right]$$

ve

$$\hat{A}\hat{C} = [\hat{a}_{rs}] [\hat{c}_{st}] = \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{c}_{st} \right]$$

yazılabilir.

$$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = [\hat{a}_{rs}]([\hat{b}_{st}] + [\hat{c}_{st}]) = [\hat{a}_{rs}](\hat{b}_{st} + \hat{c}_{st})$$

bulunur. Buradan

$$= \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} (\hat{b}_{st} + \hat{c}_{st}) \right] \text{ (Dual kuaterniyonlarda çarpma işleminin}$$

toplama üzerine dağılma öz.)

$$= \left[\sum_{s=1}^n (\hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} + \hat{a}_{rs} \hat{c}_{st}) \right]$$

$$= \left[\sum_{s=1}^n (\hat{a}_{rs} \hat{b}_{st}) + \sum_{s=1}^n (\hat{a}_{rs} \hat{c}_{st}) \right]$$

elde edilir. $\hat{A}\hat{B}$ ve $\hat{A}\hat{C}$ matris çarpımları yardımıyla

$$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$$

elde edilir.

3) $\hat{A} \in M_{o \times p}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{B}, \hat{C} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için

$$\hat{A} = [\hat{a}_{st}], \hat{B} = [\hat{b}_{rs}] \text{ ve } \hat{C} = [\hat{c}_{rs}] \text{ olsun.}$$

$$\hat{B}\hat{A} = [\hat{b}_{rs}][\hat{a}_{st}] = \left[\sum_{s=1}^o \hat{b}_{rs} \hat{a}_{st} \right]$$

ve

$$\hat{C}\hat{A} = [\hat{c}_{rs}][\hat{a}_{st}] = \left[\sum_{s=1}^o \hat{c}_{rs} \hat{a}_{st} \right]$$

yazılabilir.

$$(\hat{B} + \hat{C})\hat{A} = ([\hat{b}_{rs}] + [\hat{c}_{rs}])[\hat{a}_{st}] = ([\hat{b}_{rs} + \hat{c}_{rs}])[\hat{a}_{st}]$$

bulunur. Buradan

$$= \left[\sum_{s=1}^n (\hat{b}_{rs} + \hat{c}_{rs})(\hat{a}_{st}) \right] \text{ (Dual kuaterniyonlarda çarpma işleminin}$$

toplama üzerine dağılma öz.)

$$= \left[\sum_{s=1}^n (\hat{b}_{rs} \hat{a}_{st} + \hat{c}_{rs} \hat{a}_{st}) \right]$$

$$= \left[\sum_{s=1}^n (\hat{b}_{rs} \hat{a}_{st}) + \sum_{s=1}^n (\hat{c}_{rs} \hat{a}_{st}) \right]$$

elde edilir. $\hat{B}\hat{A}$ ve $\hat{C}\hat{A}$ matris çarpımları yardımıyla

$$(\hat{B} + \hat{C})\hat{A} = \hat{B}\hat{A} + \hat{C}\hat{A}$$

elde edilir.

4) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisleri için $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]$, $\hat{B} = [\hat{b}_{st}]$ olsun. O halde

$$\hat{A}\hat{B} = [\hat{a}_{rs}][\hat{b}_{st}] = \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st} = [\hat{c}_{rt}]_{m \times o}$$

olduğundan $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$q(\hat{A}\hat{B}) = q[\hat{c}_{rt}]_{m \times o}$$

$$= [q \hat{c}_{rt}]$$

$$= [q \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st}]$$

$$= [\sum_{s=1}^n (q \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st})]$$

$$= [q \hat{a}_{rs}][\hat{b}_{st}]$$

$$= (q \hat{A}) \hat{B}$$

$$q(\hat{A}\hat{B}) = q[\hat{c}_{rt}]_{m \times o}$$

$$= [q \hat{c}_{rt}]$$

$$= [q \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st}]$$

$$= [\sum_{s=1}^n (q \hat{a}_{rs} \hat{b}_{st})]$$

$$= [\sum_{s=1}^n (\hat{a}_{rs} q \hat{b}_{st})]$$

$$= [\hat{a}_{rs}][q \hat{b}_{st}]$$

$$= \hat{A}(q \hat{B})$$

elde edilir.

5) Değişme özelliğinin sağlanmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim :

Örnek 3.7

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i+j-2k & i+j+5k \\ 2+3i+4j & 1+2i+k \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} i+2j+k & 1-i-k \\ 2i-3j & 5+2i \end{bmatrix} \quad \text{matrislerinin çarpımını}$$

bulalım.

$$\textbf{Çözüm : } \hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} 1+i+j-2k & i+j+5k \\ 2+3i+4j & 1+2i+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i+2j+k & 1-i-k \\ 2i-3j & 5+2i \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} i+2j+k & 1+5i+6j+22k \\ 4i+j+2k & 7+13i+4j+3k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\hat{B}\hat{A} = \begin{bmatrix} 2+2i+6j-k & 1+i \\ 10+21i+17j & 5+12i+5k \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A} \text{ olduğu görülür.}$$

Sonuç 3.7

Dual kuaterniyon matrislerinin çarpımı genellikle değişmeli değildir.

$$\textbf{6) } \hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), q, p \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \text{ için}$$

$$(q\hat{A})(p\hat{B}) = q(\hat{A}p)\hat{B}$$

$$= q(p\hat{A})\hat{B} \quad ((3.4) \text{ denkleminde})$$

$$= (qp)(\hat{A}\hat{B})$$

olup

$$(q\hat{A})(p\hat{B}) = (qp)(\hat{A}\hat{B})$$

elde edilir.

Örnek 3.8

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+j \\ 5 & j+k \end{bmatrix}$, $\hat{B} = \begin{bmatrix} 3+i & i \\ 4 & i+k \end{bmatrix}$ ve $\hat{C} = \begin{bmatrix} i & j+k \\ 1+i & 3-j \end{bmatrix}$ matrislerinin çarpımını bulalım.

Çözüm : $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B})\hat{C} &= \left(\begin{bmatrix} 1+i & 2+j \\ 5 & j+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+i & i \\ 4 & i+k \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i & j+k \\ 1+i & 3-j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11+4i+4j & 3i+2k \\ 15+5i+4j+4k & 5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j+k \\ 1+i & 3-j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14i+2k & 9i+11j+17k \\ 20i & 15i+15j+15k \end{bmatrix} \\ \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) &= \begin{bmatrix} 1+i & 2+j \\ 5 & j+k \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3+i & i \\ 4 & i+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j+k \\ 1+i & 3-j \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1+i & 2+j \\ 5 & j+k \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4i & 3i+3j+3k \\ 5i+k & 3i+4j+7k \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 14i+2k & 9i+11j+17k \\ 20i & 15i+15j+15k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.2 Dual Kuaterniyon Matrislerin Eşleniği

Tanım 3.9

$\forall \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\hat{A}$ matrisinin eşleniği

$$\overline{\hat{A}} = [\overline{\hat{a}_{rs}}] = [a_{rs} - b_{rs}i - c_{rs}j - d_{rs}k] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere eşleniği

$$\overline{\hat{A}} = A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde yazılabilir.

Dual kuaterniyon matrislerin eşlenik ile ilgili bazı özellikleri :

$\hat{A}, \hat{B}$ dual kuaterniyon matrislerinin eşlenikleri, sırası ile, $\overline{\hat{A}}, \overline{\hat{B}}$ ve $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\overline{\overline{\hat{A}}} = \hat{A}$,
- (ii) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $(\overline{q \hat{A}}) = \overline{q} \overline{\hat{A}} = \overline{\hat{A}} \overline{q}$,
- (iii) $\hat{A}, \hat{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $(\overline{\hat{A} + \hat{B}}) = \overline{\hat{A}} + \overline{\hat{B}}$,
- (iv) $\hat{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \hat{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\overline{\hat{A} \hat{B}} = \overline{\hat{A}} \overline{\hat{B}}$,
- (v) $Q \in M_n(\mathbb{R}), \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $(\overline{Q \hat{A}}) = Q \overline{\hat{A}}$,
- (vi) $\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\hat{A} \overline{\hat{A}} = (\overline{\overline{\hat{A}} \hat{A}})$

dir.

İspat: (i) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\overline{\hat{A}} = A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k \text{ olup}$$

$$\overline{\hat{A}} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k = \hat{A}$$

elde edilir.

$$(ii) \quad \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{ve} \quad q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

olmak üzere (3.1) denkleminde

$$\begin{aligned} \overline{q \hat{A}} &= (q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k)(A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k) \\ &= q_1 A_1 - (q_1 B_1 + q_2 A_1)i - (q_1 C_1 + q_3 A_1)j - (q_1 D_1 + q_4 A_1)k \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \overline{q \hat{A}} &= \overline{(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k)(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)} \\ &= \overline{(q_1 A_1 + (q_1 B_1 + q_2 A_1)i + (q_1 C_1 + q_3 A_1)j + (q_1 D_1 + q_4 A_1)k)} \\ &= q_1 A_1 - (q_1 B_1 + q_2 A_1)i - (q_1 C_1 + q_3 A_1)j - (q_1 D_1 + q_4 A_1)k \end{aligned}$$

olduğundan

$$\overline{(q \hat{A})} = \overline{q} \overline{\hat{A}}$$

elde edilir.

$$(iii) \quad \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \quad \text{ve}$$

$$\hat{B} = [\hat{a}_{rs}] = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\hat{A} + \hat{B})} &= \overline{(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k} \\ &= (A_1 + A_2) - (B_1 + B_2)i - (C_1 + C_2)j - (D_1 + D_2)k \\ &= (A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k) + (A_2 - B_2 i - C_2 j - D_2 k) \\ &= \overline{\hat{A}} + \overline{\hat{B}} \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve

$$\hat{B} = [\hat{a}_{rs}] = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{B} &= (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)(A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k) \\ &= A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k \\ \overline{\hat{A}\hat{B}} &= A_1 A_2 - (A_1 B_2 + B_1 A_2)i - (A_1 C_2 + C_1 A_2)j - (A_1 D_2 + D_1 A_2)k\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\overline{\hat{A}} = [\overline{\hat{a}_{rs}}] = A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ ve}$$

$$\overline{\hat{B}} = [\overline{\hat{a}_{st}}] = A_2 - B_2 i - C_2 j - D_2 k \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\overline{\hat{A}}\overline{\hat{B}} &= (A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k)(A_2 - B_2 i - C_2 j - D_2 k) \\ &= A_1 A_2 - (A_1 B_2 + B_1 A_2)i - (A_1 C_2 + C_1 A_2)j - (A_1 D_2 + D_1 A_2)k\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu nedenle;

$$\overline{\hat{A}\hat{B}} = \overline{\hat{A}}\overline{\hat{B}}$$

elde edilir.

(v) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $Q \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$Q\hat{A} = QA_1 + QB_1 i + QC_1 j + QD_1 k$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{(Q\hat{A})} &= QA_1 - QB_1 i - QC_1 j - QD_1 k \\ &= Q\overline{\hat{A}}\end{aligned}$$

bulunur.

(vi) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\hat{A}\bar{\hat{A}} &= (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)(A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k) \\ &= A_1^2 + (-A_1 B_1 + B_1 A_1)i + (-A_1 C_1 + C_1 A_1)j + (-A_1 D_1 + D_1 A_1)k\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\hat{A}}\hat{A} &= (A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k)(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) \\ &= A_1^2 + (A_1 B_1 - B_1 A_1)i + (A_1 C_1 - C_1 A_1)j + (A_1 D_1 - D_1 A_1)k\end{aligned}$$

olup reel matrislerde çarpım değişmeli olmadığından

$$\hat{A}\bar{\hat{A}} = \left(\overline{\bar{\hat{A}}\hat{A}} \right)$$

elde edilir.

3.2.3 Dual Kuaterniyon Matrislerin Transpozu

Tanım 3.10

$\forall \hat{A} = (\hat{a}_{rs}) \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\hat{A}$ matrisinin transpozu (devriği)

$$\hat{A}^T = [\hat{a}_{rs}]^T = [\hat{a}_{sr}] \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere transpozu

$$\hat{A}^T = (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)^T = A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde yazılabilir.

Dual kuaterniyon matrislerin transpoz ile ilgili bazı özellikleri :

$\forall \hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \forall Q \in M_n(\mathbb{R})$ ve $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ (skaler) olmak üzere

$$(i) (\hat{A} + \hat{B})^T = \hat{A}^T + \hat{B}^T,$$

$$(ii) (\hat{A}^T)^T = \hat{A},$$

$$(iii) (q \hat{A})^T = q \hat{A}^T,$$

$$(iv) (\hat{A} \hat{B})^T = \hat{B}^T \hat{A}^T,$$

$$(v) (Q \hat{A})^T = \hat{A}^T Q^T$$

dir.

İspat : (i) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$ ve

$\hat{B} = [\hat{a}_{rs}] = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\hat{A} + \hat{B})^T &= ((A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k)^T \\ &= (A_1 + A_2)^T + (B_1 + B_2)^T i + (C_1 + C_2)^T j + (D_1 + D_2)^T k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A_1^T + A_2^T) + (B_1^T + B_2^T)i + (C_1^T + C_2^T)j + (D_1^T + D_2^T)k \\
&= (A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k) + (A_2^T + B_2^T i + C_2^T j + D_2^T k) \\
&= \hat{A}^T + \hat{B}^T
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\hat{A}^T)^T &= (A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k)^T \\
&= (A_1^T)^T + (B_1^T)^T i + (C_1^T)^T j + (D_1^T)^T k \\
&= A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \\
&= \hat{A}
\end{aligned}$$

bulunur.

(iii) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(q\hat{A})^T &= (qA_1 + qB_1 i + qC_1 j + qD_1 k)^T \\
&= qA_1^T + qB_1^T i + qC_1^T j + qD_1^T k \\
&= q(A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k) \\
&= q\hat{A}^T
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$ ve $\hat{B} = [\hat{b}_{rs}] = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\hat{A}\hat{B})^T &= (A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k)^T \\
&= A_2^T A_1^T + (B_2^T A_1^T + A_2^T B_1^T)i + (C_2^T A_1^T + A_2^T C_1^T)j + (D_2^T A_1^T + A_2^T D_1^T)k
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Diğer yandan;

$$(\hat{A})^T = [\hat{a}_{rs}]^T = A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{ve}$$

$$(\hat{B})^T = [\hat{b}_{rs}]^T = A_2^T + B_2^T i + C_2^T j + D_2^T k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \hat{B}^T \hat{A}^T &= (A_2^T + B_2^T i + C_2^T j + D_2^T k)(A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k) \\ &= A_2^T A_1^T + (A_2^T B_1^T + B_2^T A_1^T)i + (A_2^T C_1^T + C_2^T A_1^T)j + (A_2^T D_1^T + D_2^T A_1^T)k \\ &= A_2^T A_1^T + (B_2^T A_1^T + A_2^T B_1^T)i + (C_2^T A_1^T + A_2^T C_1^T)j + (D_2^T A_1^T + A_2^T D_1^T)k \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Bu nedenle;

$$(\hat{A}\hat{B})^T = \hat{B}^T \hat{A}^T$$

elde edilir.

(v) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $Q \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (Q\hat{A})^T &= (QA_1 + QB_1 i + QC_1 j + QD_1 k)^T \\ &= (QA_1)^T + (QB_1)^T i + (QC_1)^T j + (QD_1)^T k \\ &= A_1^T Q^T + B_1^T Q^T i + C_1^T Q^T j + D_1^T Q^T k \\ &= (A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k)Q^T \\ &= \hat{A}^T Q^T \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.4 Dual Kuaterniyon Matrislerin Eşlenik Transpozu

Tanım 3.11

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\hat{A}$ matrisinin eşlenik transpozu

$$\hat{A}^* = [\hat{a}_{rs}]^* = [\overline{\hat{a}_{sr}}] \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\hat{A}^* = (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)^* = A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde yazılabilir.

Dual kuaterniyon matrislerin eşlenik transpoz ile ilgili bazı özellikleri :

$\forall \hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), Q \in M_n(\mathbb{R})$ ve $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ (skaler) olmak üzere

$$(i) (q \hat{A})^* = \bar{q} \hat{A}^*,$$

$$(ii) (\hat{A})^T = (\hat{A}^*)^T,$$

$$(iii) (\hat{A} + \hat{B})^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$$

$$(iv) (\hat{A} \hat{B})^* = \hat{B}^* \hat{A}^*,$$

$$(v) (Q \hat{A})^* = \hat{A}^* Q^T$$

dir.

İspat : (i) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (q \hat{A})^* &= \left(\overline{q(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)} \right)^T \\ &= \left(\bar{q}(A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k) \right)^T \\ &= \left(\bar{q}(A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k) \right) \end{aligned}$$

$$= \bar{q} \hat{A}^*$$

elde edilir.

(ii) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $A_1, B_1, C_1, D_1 \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. O halde

$$\left(\bar{\hat{A}}\right)^T = [\bar{\hat{a}_{rs}}]^T = \overline{(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)}^T = A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k$$

yazılır. Burada

$$\left(\bar{\hat{A}}^T\right) = [\bar{\hat{a}_{sr}}] = [\overline{(a_{sr} + b_{sr} i + c_{sr} j + d_{sr} k)}]$$

$$= [a_{sr}] - [b_{sr}] i - [c_{sr}] j - [d_{sr}] k$$

$$= A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k$$

elde edilir.

(iii) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$ ve $\hat{B} = [\hat{b}_{st}] = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$

olmak üzere

$$(\hat{A} + \hat{B})^* = ((A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k)^*$$

$$= ((A_1 + A_2) - (B_1 + B_2)i - (C_1 + C_2)j - (D_1 + D_2)k)^T$$

$$= (A_1^T + A_2^T) - (B_1^T + B_2^T)i - (C_1^T + C_2^T)j - (D_1^T + D_2^T)k$$

$$= (A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k) + (A_2^T - B_2^T i - C_2^T j - D_2^T k)$$

$$= \hat{A}^* + \hat{B}^*$$

elde edilir.

(iv) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$ ve $\hat{B} = [\hat{b}_{st}] = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$

olmak üzere

$$\hat{A}\hat{B} = (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)(A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k)$$

$$\begin{aligned}
&= A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k \\
(\hat{A}\hat{B})^* &= (A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k)^* \\
&= (\overline{A_1 A_2} - (A_1 B_2 + B_1 A_2)i - (A_1 C_2 + C_1 A_2)j - (A_1 D_2 + D_1 A_2)k)^T \\
&= A_2^T A_1^T - (B_2^T A_1^T + A_2^T B_1^T)i - (C_2^T A_1^T + A_2^T C_1^T)j - (D_2^T A_1^T + A_2^T D_1^T)k
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan;

$$\begin{aligned}
\hat{A}^* &= (\bar{\hat{A}})^T = [\hat{a}_{rs}]^* = A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{ve} \\
\hat{B}^* &= (\bar{\hat{B}})^T = [\hat{b}_{rs}]^* = A_2^T - B_2^T i - C_2^T j - D_2^T k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{B}^* \hat{A}^* &= (A_2^T - B_2^T i - C_2^T j - D_2^T k)(A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k) \\
&= A_2^T A_1^T - (A_2^T B_1^T + B_2^T A_1^T)i - (A_2^T C_1^T + C_2^T A_1^T)j - (A_2^T D_1^T + D_2^T A_1^T)k \\
&= A_2^T A_1^T - (B_2^T A_1^T + A_2^T B_1^T)i - (C_2^T A_1^T + A_2^T C_1^T)j - (D_2^T A_1^T + A_2^T D_1^T)k
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Buradan

$$(\hat{A}\hat{B})^* = \hat{B}^* \hat{A}^*$$

bulunur.

(v) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $Q \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(Q\hat{A})^* &= (QA_1 + QB_1 i + QC_1 j + QD_1 k)^* \\
&= (QA_1 - QB_1 i - QC_1 j - QD_1 k)^T \\
&= (QA_1)^T - (QB_1)^T i - (QC_1)^T j - (QD_1)^T k \\
&= A_1^T Q^T - B_1^T Q^T i - C_1^T Q^T j - D_1^T Q^T k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k) Q^T \\
&= \hat{A}^* Q^T
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.9

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} i+j & 1+i+j+k \\ -1+j-k & 1-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A}, \hat{B} \text{ dual}$$

kuaterniyon matrislerini inceleyelim.

$$\text{Çözüm : (i) } \overline{\hat{A}} = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+k \\ 1+i-k & -i-j+k \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{\hat{A}}\right)^T = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+k \\ 1+i-k & -i-j+k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+i-k \\ 1+k & -i-j+k \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{\hat{A}^T}\right) = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+i-k \\ 1+k & -i-j+k \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{\hat{A}}\right)^T = \left(\overline{\hat{A}^T}\right)$$

$$\text{(ii) } \left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \begin{bmatrix} -1-j & -k \\ 1-i+2k & 1-i-2j-k \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^* \hat{A}^* = \begin{bmatrix} -1-j & -k \\ 1-i+2k & 1-i-2j-k \end{bmatrix}$$

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^* \hat{A}^*$$

$$\text{(iii) } \left(\hat{A}\hat{B}\right)^T = \begin{bmatrix} -1+j & k \\ 1+i-2k & 1+i+2j+k \end{bmatrix} = \hat{B}^T \hat{A}^T$$

$$\text{(iv) } \overline{\hat{A}\hat{B}} = \begin{bmatrix} -1-j & 1-i+2k \\ -k & 1-i-2j-k \end{bmatrix} = \overline{\hat{A}} \overline{\hat{B}}$$

Tanım 3.12

Esas köşegen üzerindeki elemanları 1, diğerleri 0 olan n . dereceden dual kuaterniyon kare matrise **dual kuaterniyon birim matris** denir ve

$$\hat{I}_n = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.

Teorem 3.1

$\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. Eğer $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}_n$ ise $\hat{B}\hat{A} = \hat{I}_n$ dır.

ispat : $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k$, $\hat{B} = [\hat{b}_{st}] = A_2 + B_2i + C_2j + D_2k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve

$A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= (A_1 + B_1i + C_1j + D_1k)(A_2 + B_2i + C_2j + D_2k) \\ &= A_1A_2 + (A_1B_2 + B_1A_2)i + (A_1C_2 + C_1A_2)j + (A_1D_2 + D_1A_2)k = \hat{I}_n = I_n + 0i + 0j + 0k \end{aligned}$$

olduğundan

$$A_1A_2 = I_n$$

$$A_1B_2 + B_1A_2 = 0_n$$

$$A_1C_2 + C_1A_2 = 0_n$$

$$A_1D_2 + D_1A_2 = 0_n$$

eşitlikleri elde edilir. Burada I_n , $n \times n$ tipinde birim matrisi ve 0_n ise $n \times n$ tipinde sıfır matrisi temsil etmektedir.

$$A_1A_2 = I_n \text{ için } A_2 = A_1^{-1} \text{ olup } A_2A_1 = I_n$$

ve $A_2 = A_1^{-1}$ olmak üzere

$$A_1B_2 + B_1A_2 = 0_n \text{ için } B_1 = -A_1B_2A_1 \quad (3.18)$$

ve

$$A_1C_2 + C_1A_2 = 0_n \text{ için } C_1 = -A_1C_2A_1$$

ve

$$A_1 D_2 + D_1 A_2 = 0_n \text{ için } D_1 = -A_1 D_2 A_1$$

bulunur.

(3.18) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} B_2 A_1 + A_2 B_1 &= B_2 A_1 + A_2 (-A_1 B_2 A_1) \\ &= B_2 A_1 + (-A_2 A_1) B_2 A_1 \\ &= B_2 A_1 - B_2 A_1 \\ &= 0_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} C_2 A_1 + A_2 C_1 &= C_2 A_1 + A_2 (-A_1 C_2 A_1) \\ &= C_2 A_1 + (-A_2 A_1) C_2 A_1 \\ &= C_2 A_1 - C_2 A_1 \\ &= 0_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_2 A_1 + A_2 D_1 &= D_2 A_1 + A_2 (-A_1 D_2 A_1) \\ &= D_2 A_1 + (-A_2 A_1) D_2 A_1 \\ &= D_2 A_1 - D_2 A_1 \\ &= 0_n \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$A_2 A_1 = I_n$$

$$B_2 A_1 + A_2 B_1 = 0_n$$

$$C_2 A_1 + A_2 C_1 = 0_n$$

$$D_2 A_1 + A_2 D_1 = 0_n$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & A_2 A_1 + (B_2 A_1 + A_2 B_1)i + (C_2 A_1 + A_2 C_1)j + (D_2 A_1 + A_2 D_1)k \\ &= (A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k)(A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) = \hat{B} \hat{A} = I_n + 0i + 0j + 0k = \hat{I}_n \end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

3.2.5 Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersi

Tanım 3.13

$\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için, eğer

$$\hat{A} \hat{B} = \hat{B} \hat{A} = \hat{I}_n$$

ise $\hat{A}$ matrisinin tersi vardır denir ve $\hat{B}$ matrisine $\hat{A}$ matrisinin tersi denir ve $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $A_1, B_1, C_1, D_1 \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. Eğer A_1 reel matrisi terslenebilirse ($|A_1| \neq 0$) $\hat{A}$ da terslenebilirdir ve tersi

$$\hat{A}^{-1} = A_1^{-1} - (A_1^{-1} B_1 A_1^{-1})i - (A_1^{-1} C_1 A_1^{-1})j - (A_1^{-1} D_1 A_1^{-1})k$$

veya

$$\hat{A}^{-1} = A_1^{-1} \bar{\hat{A}} A_1^{-1}$$

şeklinde bulunur.

İspat : $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$, $\hat{B} = [\hat{b}_{rs}] = (A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k) \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$

için

$$\hat{A} \hat{B} = (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)(A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k)$$

$$= A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k = \hat{I}_n = I_n + 0i + 0j + 0k$$

olsun. O halde

$$A_1 A_2 = I_n$$

$$A_1 B_2 + B_1 A_2 = 0_n$$

$$A_1 C_2 + C_1 A_2 = 0_n$$

$$A_1 D_2 + D_1 A_2 = 0_n$$

eşitlikleri elde edilir. $\hat{A}$ matrisinin tersi olan $\hat{B}$ matrisini bulalım:

A_1^{-1} mevcut olduğundan

$$A_1 A_2 = I_n \text{ için } A_2 = A_1^{-1}$$

ve

$$A_1 B_2 + B_1 A_2 = 0_n \text{ için } B_2 = -A_1^{-1} B_1 A_1^{-1}$$

ve

$$A_1 C_2 + C_1 A_2 = 0_n \text{ için } C_2 = -A_1^{-1} C_1 A_1^{-1}$$

ve

$$A_1 D_2 + D_1 A_2 = 0_n \text{ için } D_2 = -A_1^{-1} D_1 A_1^{-1}$$

elde edilir. O halde,

$$\hat{B} = \hat{A}^{-1} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k$$

$$= A_1^{-1} - A_1^{-1} B_1 A_1^{-1} i - A_1^{-1} C_1 A_1^{-1} j - A_1^{-1} D_1 A_1^{-1} k$$

$$= A_1^{-1} (A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k) A_1^{-1}$$

$$= A_1^{-1} \bar{\hat{A}} A_1^{-1}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\hat{B}\hat{A} = (A_2 + B_2i + C_2j + D_2k)(A_1 + B_1i + C_1j + D_1k)$$

$$= A_2A_1 + (B_2A_1 + A_2B_1)i + (C_2A_1 + A_2C_1)j + (D_2A_1 + A_2D_1)k = I_n + 0i + 0j + 0k = \hat{I}_n$$

için

$$A_2A_1 = I_n$$

$$B_2A_1 + A_2B_1 = 0_n$$

$$C_2A_1 + A_2C_1 = 0_n$$

$$D_2A_1 + A_2D_1 = 0_n$$

eşitlikleri elde edilir. A matrisinin tersi olan B matrisini bulalım. A_1^{-1} mevcut olduğundan

$$A_2A_1 = I_n \text{ için } A_2 = A_1^{-1}$$

ve

$$B_2A_1 + A_2B_1 = 0_n \text{ için } B_2 = -A_1^{-1}B_1A_1^{-1}$$

ve

$$C_2A_1 + A_2C_1 = 0_n \text{ için } C_2 = -A_1^{-1}C_1A_1^{-1}$$

ve

$$D_2A_1 + A_2D_1 = 0_n \text{ için } D_2 = -A_1^{-1}D_1A_1^{-1}$$

bulunur. Buradan

$$\hat{B} = \hat{A}^{-1} = A_2 + B_2i + C_2j + D_2k$$

$$= A_1^{-1} - A_1^{-1}B_1A_1^{-1}i - A_1^{-1}C_1A_1^{-1}j - A_1^{-1}D_1A_1^{-1}k$$

$$= A_1^{-1}(A_1 - B_1i - C_1j - D_1k)A_1^{-1}$$

$$= A_1^{-1}\bar{\hat{A}}A_1^{-1}$$

elde edilir. O halde

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = I_n \text{ olmak üzere } \hat{A} \text{ matrisinin tersi olan } \hat{B} \text{ matrisi}$$

$$\hat{B} = \hat{A}^{-1} = A_1^{-1} \bar{\hat{A}} A_1^{-1}$$

şeklinde elde edilir.

Uyarı 3.1 : Dual kuaterniyonların tersinin olması ile uyumlu olduğuna dikkat edelim.

Sonuç 3.8

$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisinin tersinin olabilmesi için gerek ve yeter şart A_1 matrisinin terslenebilir olmasıdır. Yani $|A_1| \neq 0$.

Teorem 3.3

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ kare matrisinin tersi varsa tektir.

İspat : $\hat{A}$ kare dual kuaterniyon matrisinin tersinin tek olmadığını kabul edelim. $\hat{B}$ ve $\hat{C}$ matrisleri, $\hat{A}$ matrisinin tersi olsun. Bu durumda,

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I}_n$$

ve

$$\hat{A}\hat{C} = \hat{C}\hat{A} = \hat{I}_n$$

yazılabilir. Burada

$$\hat{C} = \hat{C}\hat{I}_n = \hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = (\hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{I}_n \hat{B} = \hat{B}$$

olmak üzere

$$\hat{C} = \hat{B}$$

elde edilir.

Teorem 3.4

$\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ bir $n \times n$ tipinde bir dual kuaterniyon kare matris olsun.

i) Eğer $\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}_n$ özelliğini sağlayan $n \times n$ tipinde kare matris ise $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ dir.

ii) Eğer $\hat{B}$, $\hat{B}\hat{A} = \hat{I}_n$ özelliğini sağlayan $n \times n$ tipinde kare matris ise $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ dir.

İspat : i) Eğer $\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}_n$ özelliğini sağlıyorsa, Teorem 3.1'den $\hat{B}\hat{A} = \hat{I}_n$ dir.

$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = I_n$ olduğundan Tanım 3.13 gereğince $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ elde edilir.

ii) Eğer $\hat{B}$, $\hat{B}\hat{A} = \hat{I}_n$ özelliğini sağlıyorsa, Teorem 3.1'den $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}_n$ dir. $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = I_n$

olduğundan Tanım 3.13 gereğince $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ elde edilir.

Tanım 3.14

Tersi mevcut olan bir dual kuaterniyon matrise **dual kuaterniyon regüler matris** denir.

Aksi taktirde **dual kuaterniyon singüler matris** denir.

Örnek 3.10

$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin tersini bulalım.

Çözüm : $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1} &= A_1^{-1} \bar{\hat{A}} A_1^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+k \\ 1+i-k & -i-j+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+i-k & -i-j+k \\ -i-j+k & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+i-k \\ 1+k & -i-j+k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Örnek 3.11

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4+j-k & 2+i-k & i+k \\ 2+i & i+j-k & 3-j+k \\ 1-i+k & 4-j & 2-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin}$$

tersini bulalım.

Çözüm : $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.08 & -0.12 \\ 0.02 & -0.16 & 0.24 \\ -0.16 & 0.28 & 0.08 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A_1^{-1} \bar{\hat{A}} A_1^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0.24 & 0.08 & -0.12 \\ 0.02 & -0.16 & 0.24 \\ -0.16 & 0.28 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-j+k & 2-i+k & -i-k \\ 2-i & -i-j+k & 3+j-k \\ 1+i-k & 4+j & 2+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.24 & 0.08 & -0.12 \\ 0.02 & -0.16 & 0.24 \\ -0.16 & 0.28 & 0.08 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-0.2i-0.24j+0.36k & -0.32i-0.2j+0.32k & -0.24i+0.08j-0.44k \\ 0.4i-0.02j-0.22k & 1+0.14i+0.4j-0.14k & -0.02i-0.16j+0.38k \\ -0.2i+0.16j-0.24k & -0.12i-0.2j+0.12k & 1+0.16i+0.28j-0.04k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.24 & 0.08 & -0.12 \\ 0.02 & -0.16 & 0.24 \\ -0.16 & 0.28 & 0.08 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.24-0.016i-0.0744j+0.1632k & 0.08-0.032i+0.0352j-0.1456k & -0.12-0.072i-0.0128j-0.0016k \\ 0.02+0.102i+0.0288j-0.1164k & -0.16+0.004i-0.1104j+0.1112k & 0.24-0.016i+0.0856j+0.0232k \\ -0.16-0.076i-0.0104j-0.0488k & 0.28+0.048i+0.1232j-0.0496k & 0.08+0.008i-0.0448j+0.0544k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sağlama : $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{I}_n.$

Örnek 3.12

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin}$$

tersini bulalım.

Çözüm : $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ olduğundan

$$A^{-1} = A_1^{-1} \hat{A} A_1^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-3i+6j & i+4j-6k & -i+11j+3k \\ 5i-9j & 1-2i-6j+9k & 2i-16j-4k \\ -2i+4j & i+3j-4k & 1-i+7j+2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sağlama : $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisi için

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{I}_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1}\hat{A} &= \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{I}_n. \end{aligned}$$

Örnek 3.13

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ dual kuaterniyon matrisinin tersini reel}$$

matrisler yardımı ile bulalım.

Çözüm : $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ve $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

olup Teorem 3.2'den

$$\begin{aligned}\hat{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} -0,16 & -0,03 \\ -0,24 & 0,08 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0,06 & -0,17 \\ 0,04 & 0,22 \end{bmatrix} k \\ &= \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 20+10i-16j+6k & 10-10i-3j-17k \\ -20-24j+4k & 40-10i+8j+22k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.14

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ dual kuaterniyon matrisinin tersini reel}$$

matrisler yardımı ile bulalım.

Çözüm : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olup Teorem 3.2'den

$$\begin{aligned}\hat{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 & 31 & 6 \\ 38 & -56 & -11 \\ -17 & 25 & 5 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 33 & -44 & -9 \\ -48 & 64 & 13 \\ 19 & -25 & -5 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 45 & -66 & -15 \\ -66 & 97 & 22 \\ 30 & -44 & -10 \end{bmatrix} k \\ &= \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.6 Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersinin Özellikleri

Teorem 3.5

$\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $Q \in M_n(\mathbb{R})$ ve $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ (pure olmayan dual kuaterniyon) olsun.

Aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) q pure olmayan dual kuaterniyon ve $\hat{A}$ da terslenebilir dual kuaterniyon matris

$$\text{olmak üzere } (q \hat{A})^{-1} = q^{-1} \hat{A}^{-1},$$

(ii) Eğer $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrislerinin tersi var ise $(\hat{A} \hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1} \hat{A}^{-1}$,

(iii) Eğer $\hat{A}$ matrisinin tersi var ise $(\hat{A}^*)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^*$,

(iv) $(\bar{\hat{A}})^{-1} = \overline{(\hat{A}^{-1})}$,

(v) $(\hat{A}^T)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^T$,

(vi) Eğer Q ve $\hat{A}$ matrislerinin tersi var ise $(Q \hat{A})^{-1} = \hat{A}^{-1} Q^{-1}$.

İspat : (i) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

eğer q kuaterniyonun tersi ve $\hat{A}$ matrisinin ters matrisi varsa

$$\hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I}_n$$

yazılır. q pure olmayan dual kuaterniyon olduğundan

$$qq^{-1} = 1 \text{ olup (3.15) özelliğinden}$$

$$(q^{-1}q)(\hat{A}^{-1}\hat{A}) = (q\hat{A})(q^{-1}\hat{A}^{-1}) = I_n$$

eşitliği değişmez. Böylece

$$(q \hat{A})^{-1} = q^{-1} \hat{A}^{-1}$$

elde edilir.

Yani $q\hat{A}$ matrisinin tersi vardır ve $(q\hat{A})^{-1} = q^{-1}\hat{A}^{-1}$ olarak bulunur.

(ii) $\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere eğer $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrislerinin ters matrisleri varsa

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}_n \text{ ve } \hat{B}\hat{B}^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{I}_n$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}\hat{I}_n\hat{A}^{-1} = \hat{A}(\hat{B}\hat{B}^{-1})\hat{A}^{-1} = (\hat{A}\hat{B})(\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}) = \hat{I}_n \text{ olmak üzere}$$

$$(\hat{A}\hat{B})(\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}) = \hat{I}_n$$

$$\hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{B}^{-1}\hat{I}_n\hat{B} = \hat{B}^{-1}(\hat{A}^{-1}\hat{A})\hat{B} = (\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1})(\hat{A}\hat{B}) = \hat{I}_n \text{ olmak üzere}$$

$$(\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1})(\hat{A}\hat{B}) = \hat{I}_n$$

elde edilir.

Yani $\hat{A}\hat{B}$ matrisinin de tersi vardır ve $(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$ olarak bulunur.

(iii) $\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere eğer $\hat{A}$ matrisinin tersi var ise

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = I_n$$

eşitliği yazılabilir. Buradan $\hat{A}\hat{A}^{-1} = I_n$ ifadesinin her iki yanının $*$ (eşlenik transpozu) alınır;

$$(\hat{A}^{-1})^* \hat{A}^* = \hat{I}_n^* = \hat{I}_n$$

elde edilir. Aynı şekilde $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}_n$ ifadesinin her iki tarafının $*$ (eşlenik transpozu) alınır;

$$\hat{A}^*(\hat{A}^{-1})^* = \hat{I}_n^* = \hat{I}_n$$

şeklinde benzer bir ifade bulunur. Dolayısıyla $\hat{A}^*$ matrisinin tersi vardır ve

$$\hat{A}^* (\hat{A}^{-1})^* = (\hat{A}^{-1})^* \hat{A}^* = I_n \text{ olduğundan}$$

$$(\hat{A}^*)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^*$$

elde edilir.

(iv) $\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere eğer $\hat{A}$ matrisinin tersi var ise

$$\hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I}_n$$

eşitliği yazılabilir. Buradan $\hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{I}_n$ ifadesinin her iki yanının eşleniği alınır;

$$\overline{\hat{A} (\hat{A}^{-1})} = \overline{(\hat{I}_n)} = \hat{I}_n$$

elde edilir. Aynı şekilde $\hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I}_n$ ifadesinin her iki tarafının eşleniği alınır;

$$\overline{(\hat{A}^{-1})} \overline{\hat{A}} = \overline{\hat{I}_n} = \hat{I}_n$$

şeklinde benzer bir ifade bulunur. Dolayısıyla $\overline{\hat{A}}$ matrisinin tersi vardır ve bu iki denklemden;

$$(\overline{\hat{A}})^{-1} = \overline{(\hat{A}^{-1})}$$

elde edilir.

(v) $\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere eğer $\hat{A}$ matrisinin tersi var ise

$$\hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I}_n$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan $\hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{I}_n$ ifadesinin her iki yanının transpozu alınır;

$$(\hat{A}^{-1})^T \hat{A}^T = (\hat{I}_n)^T = \hat{I}_n$$

elde edilir. Aynı şekilde $\hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I}_n$ ifadesinin her iki tarafının transpozu alınır;

$$\hat{A}^T (\hat{A}^{-1})^T = (\hat{I}_n)^T = \hat{I}_n$$

şeklinde benzer bir ifade bulunur. Dolayısıyla $\hat{A}^T$ matrisinin tersi vardır ve bu iki denklemden;

$$(\hat{A}^T)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^T$$

elde edilir.

(vi) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $Q \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere eğer Q ve $\hat{A}$ matrislerinin ters matrisleri varsa

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = I_n \text{ ve } \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}_n$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden ve (3.8) eşitliği yardımıyla

$$QQ^{-1} = Q\hat{I}_n Q^{-1} = Q(\hat{A}\hat{A}^{-1})Q^{-1} = (Q\hat{A})(\hat{A}^{-1}Q^{-1}) = I_n$$

ve

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}^{-1}I_n \hat{A} = \hat{A}^{-1}(Q^{-1}Q)\hat{A} = (\hat{A}^{-1}Q^{-1})(Q\hat{A}) = \hat{I}_n$$

elde edilir.

Yani $Q\hat{A}$ matrisinin de tersi vardır ve $(Q\hat{A})^{-1} = \hat{A}^{-1}Q^{-1}$ olarak bulunur.

Örnek 3.15

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} i+j & 1+i+j+k \\ -1+j-k & 1-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A}, \hat{B} \text{ dual}$$

kuaterniyon matrislerini inceleyelim.

$$\textbf{Çözüm : (i)} \quad \hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+i-k \\ 1+k & -i-j+k \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1-2i-2j-2k & -1+i+k \\ 1-2i-2j-k & i+j \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1-j+k & 1-j-4k \\ k & 1-i-2j-2k \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \begin{bmatrix} -1-j+k & 1-j-4k \\ k & 1-i-2j-2k \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$$

$$(ii) (\hat{A}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^{-1})^* = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^*)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^*$$

$$(iii) (\bar{\hat{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-i+k \\ 1-k & i+j-k \end{bmatrix}$$

$$(\overline{\hat{A}^{-1}}) = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-i+k \\ 1-k & i+j-k \end{bmatrix}$$

$$(\bar{\hat{A}})^{-1} = (\overline{\hat{A}^{-1}})$$

$$(iv) (\hat{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+k \\ 1+i-k & -i-j+k \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^{-1})^T = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+k \\ 1+i-k & -i-j+k \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A}^T)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^T.$$

Örneklerinden de Teorem 3.5 deki eşitliklerin sağlandığı görülmüş olur.

3.2.7 Dual Kuaterniyon Matrislerin Kuvveti

$\hat{A}$ $n \times n$ tipinde kare matris olmak üzere $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisi kendisi ile çarpılabilir. Bu durumda $\hat{A}^m = \underbrace{\hat{A} \cdot \hat{A} \dots \hat{A}}_{m\text{-tane}}$, $m \in \mathbb{Z}$ matrisine $\hat{A}$ matrisinin m inci kuvveti denir.

Yardımcı Teorem 3.1

$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\hat{A} = A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\}$ olmak üzere

$$\hat{A}^2 = A_1^2 + A_1 \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}\} A_1$$

dir.

İspat : $i^2 = j^2 = k^2 = i j k = 0$, $i j = j i = j k = k j = k i = i k = 0$ olduğundan

$$\hat{A}^2 = (A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\})(A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\})$$

$$= A_1^2 + A_1 \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}\} A_1$$

elde edilir.

Teorem 3.6

$\forall \hat{A} = A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere ($m \geq 1$)

$$\hat{A}^m = A_1^m + A_1^{m-1} \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}^{m-1}\} A_1$$

dir.

İspat : İspatı tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. m negatif olmayan bir tam sayı olsun.

$m = 2$ için teoremin doğruluğu Yardımcı Teorem 3.1 kullanılarak

$$\hat{A}^2 = A_1^2 + A_1 \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}\} A_1$$

şeklinde görülür.

✓ $\hat{A}^k = A_1^k + A_1^{k-1} \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}^{k-1}\} A_1$ olduğunu kabul edelim.

✓ $\hat{A}^{k+1} = A_1^{k+1} + A_1^k \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}^k\} A_1$ olduğu gösterilmelidir:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^{k+1} &= (A_1^k + A_1^{k-1} \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}^{k-1}\} A_1) (A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\}) \\
&= (A_1^k + \text{Vek}\{\hat{A}^k\}) (A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\}) \\
&= A_1^{k+1} + A_1^k \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}^k\} A_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.9

$$\bar{\hat{A}} = A_1 - \text{Vek}\{\hat{A}\} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ için,}$$

$$\bar{\hat{A}}^2 = A_1^2 - A_1 \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\} A_1 = A_1^2 + A_1 \text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\} - \text{Vek}\{\hat{A}\} A_1$$

dir.

İspat : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0$, $ij = ji = jk = kj = ki = ik = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{\hat{A}}^2 &= (A_1 - \text{Vek}\{\hat{A}\})(A_1 - \text{Vek}\{\hat{A}\}) \\
&= A_1^2 - A_1 \text{Vek}\{\hat{A}\} - \text{Vek}\{\hat{A}\} A_1 \\
&= A_1^2 - A_1 \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\} A_1
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$= A_1^2 + A_1 \text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\} - \text{Vek}\{\hat{A}\} A_1 \tag{3.20}$$

olur.

Teorem 3.6 ile elde edilen sonucu farklı bir şekilde aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.7

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olmak üzere } (m > 0)$$

$$\hat{A}^m = A_1^m + \sum_{r=0}^{m-1} A_1^{m-r-1} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r$$

dir.

İspat : İspatı tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. m negatif olan bir tam sayı olsun.

$m=2$ için teoremin doğruluğu

$$\hat{A}^2 = A_1^2 + (A_1 B_1 + B_1 A_1)i + (A_1 C_1 + C_1 A_1)j + (A_1 D_1 + D_1 A_1)k$$

şeklinde görülür.

$$\checkmark \hat{A}^k = A_1^k + \sum_{r=0}^{k-1} A_1^{k-r-1} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r \text{ olduğunu kabul edelim.}$$

$$\checkmark \hat{A}^{k+1} = A_1^{k+1} + \sum_{r=0}^k A_1^{k-r} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r \text{ olduğu gösterilmelidir:}$$

$$\hat{A}^{k+1} = \hat{A} \hat{A}^k$$

$$\begin{aligned} &= (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k) \left(A_1^k + \sum_{r=0}^{k-1} A_1^{k-r-1} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r \right) \\ &= A_1^{k+1} + (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^k + A_1 \left(\sum_{r=0}^{k-1} A_1^{k-r-1} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r \right) \\ &= A_1^{k+1} + (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^k + \left(\sum_{r=0}^{k-1} A_1^{k-r} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r \right) \\ &= A_1^{k+1} + \sum_{r=0}^k A_1^{k-r} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.10

$$\bar{\hat{A}} = A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olmak üzere } (m > 0)$$

$$\bar{\hat{A}}^m = A_1^m - \sum_{r=0}^{m-1} A_1^{m-r-1} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r$$

Sonuç 3.11

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olmak üzere } (m > 0)$$

$$\hat{A}^{-m} = A_1^{-m} - \sum_{r=0}^{m-1} A_1^{-(m-r)} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^{-(r+1)}$$

Sonuç 3.12

$\forall \bar{A} = A_1 - \text{Vek}\{\hat{A}\} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere ($m > 0$)

$$\bar{A}^m = A_1^m - \text{Vek}\{\hat{A}\}A_1^{m-1} + A_1\text{Vek}\{\bar{A}^{m-1}\}$$

dir.

Sonuç 3.13

$\hat{A} = A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için,

$$\hat{A}^{-2} = A_1^{-2} - A_1^{-1}\text{Vek}\{\hat{A}\}A_1^{-2} + A_1^{-2}\text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\}A_1^{-1}$$

dir.

İspat : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0, i j = j i = j k = k j = k i = i k = 0$ olduğundan

$$(\hat{A}^{-1})^2 = (A_1^{-1}\bar{\hat{A}}A_1^{-1})^2 = A_1^{-2}\bar{\hat{A}}^2A_1^{-2} = A_1^{-2}\bar{\hat{A}}^2A_1^{-2}$$

Sonuç 3.9'dan

$$\begin{aligned} &= A_1^{-2}(A_1^2 - A_1\text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\}A_1)A_1^{-2} \\ &= A_1^{-2} - A_1^{-1}\text{Vek}\{\hat{A}\}A_1^{-2} + A_1^{-2}\text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\}A_1^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.14

$\forall \hat{A} = A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere $m > 0$

$$\hat{A}^{-m} = A_1^{-m} - A_1^{-1}\text{Vek}\{\hat{A}\}A_1^{-m} + A_1^{-m}\text{Vek}\{\bar{\hat{A}}^{m-1}\}A_1^{-m+1} \text{ dir.}$$

İspat : İspatı tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. m negatif olan bir tam sayı olsun.

$m = 2$ için teoremin doğruluğu Sonuç 3.13 kullanılarak

$$\hat{A}^{-2} = A_1^{-2} - A_1^{-1}\text{Vek}\{\hat{A}\}A_1^{-2} + A_1^{-2}\text{Vek}\{\bar{\hat{A}}\}A_1^{-1}$$

bulunur.

✓ $\hat{A}^{-k} = A_1^{-k} - A_1^{-1}\text{Vek}\{\hat{A}\}A_1^{-k} + A_1^{-k}\text{Vek}\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\}A_1^{-k+1}$ olduğunu kabul edelim.

✓ $\hat{A}^{-k-1} = A_1^{-k-1} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k-1} + A_1^{-k-1}Vek\{\bar{\hat{A}}^k\}A_1^{-k}$ olduğu gösterilmelidir:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^{-k-1} &= \hat{A}^{-k} \hat{A}^{-1} \\
&= (A_1^{-k} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k} + A_1^{-k}Vek\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\}A_1^{-k+1})(A_1^{-1}\bar{\hat{A}}A_1^{-1}) \\
&= (A_1^{-k} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k} + A_1^{-k}Vek\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\}A_1^{-k+1})(A_1^{-1}(A_1 - Vek\{\hat{A}\})A_1^{-1}) \\
&= (A_1^{-k} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k} + A_1^{-k}Vek\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\}A_1^{-k+1})(A_1^{-1} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-1}) \\
&= A_1^{-k-1} - A_1^{-k-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-1} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k-1} + A_1^{-k}Vek\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\}A_1^{-k} \\
&= A_1^{-k-1} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k-1} - A_1^{-k-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-1} + A_1^{-k}Vek\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\}A_1^{-k} \\
&= A_1^{-k-1} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k-1} + A_1^{-k-1}(-Vek\{\hat{A}\}A_1^{k-1} + A_1Vek\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\})A_1^{-k}
\end{aligned}$$

Sonuç 3.12'den

$$Vek\{\bar{\hat{A}}^k\} = -Vek\{\hat{A}\}A_1^{k-1} + A_1Vek\{\bar{\hat{A}}^{k-1}\}$$

olduğundan

$$= A_1^{-k-1} - A_1^{-1}Vek\{\hat{A}\}A_1^{-k-1} + A_1^{-k-1}Vek\{\bar{\hat{A}}^k\}A_1^{-k}$$

elde edilir.

Not 3.6

$\hat{A} = A_1 + Vek\{\hat{A}\}$ olmak üzere $\hat{A}\hat{A}^2 = \hat{A}^2\hat{A}$ dir.

$$\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A} = A_1^2 + A_1Vek\{\hat{A}\} + Vek\{\hat{A}\}A_1$$

$$\hat{A}^3 = \hat{A}^2\hat{A} = A_1^3 + A_1^2Vek\{\hat{A}\} + Vek\{\hat{A}\}A_1^2 + A_1Vek\{\hat{A}\}A_1$$

$$\hat{A}^3 = \hat{A}\hat{A}^2 = A_1^3 + A_1^2Vek\{\hat{A}\} + A_1Vek\{\hat{A}\}A_1 + Vek\{\hat{A}\}A_1^2$$

$$\hat{A}^3 = \hat{A}\hat{A}^2 = \hat{A}^2\hat{A}$$

elde edilir.

3.3 Dual Kuaterniyon Matrislerin Reel Matris Temsili

Bu alt bölümde $\forall \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisi için karşılık gelen reel matrisi bulmak istiyoruz. Bunun için öncelikle

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} : M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \rightarrow M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

$$\hat{B} \rightarrow \mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{B}) = \hat{B} \hat{A}$$

dönüşümünü tanımlayalım ve ilk olarak $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ dönüşümünün lineerliğini inceleyelim.

$$\hat{A} = A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}, \hat{B} = A_2 \hat{I} + B_2 \hat{I} + C_2 \hat{J} + D_2 \hat{K} \text{ ve}$$

$$\hat{C} = A_3 \hat{I} + B_3 \hat{I} + C_3 \hat{J} + D_3 \hat{K} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olmak üzere}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{B} + \hat{C}) = \mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{B}) + \mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{C})$$

ve

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(Q \hat{B}) = Q \mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{B}), \quad Q \in M_n(\mathbb{R})$$

özelliklerinin sağlandığını gösterelim:

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}(\hat{B} + \hat{C})$$

$$= \hat{A} \hat{B} + \hat{A} \hat{C}$$

$$= \mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{B}) + \mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{C})$$

ve

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(Q \hat{B}) = (Q \hat{B}) \hat{A}$$

$$= Q(\hat{B} \hat{A})$$

$$= Q \mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{B})$$

olduğundan $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ lineerdir.

Şimdi $M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ kümesinin $\{\hat{I}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ bazına göre $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım:

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{I}) = \hat{I} \hat{A} = \hat{I} (A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}) = A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{I}) = \hat{I} \hat{A} = \hat{I} (A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}) = 0 \hat{I} + A_1 \hat{I} + 0 \hat{J} + 0 \hat{K}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{J}) = \hat{J} \hat{A} = \hat{J} (A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}) = 0 \hat{I} + 0 \hat{I} + A_1 \hat{J} + 0 \hat{K}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}}(\hat{K}) = \hat{K} \hat{A} = \hat{K} (A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}) = 0 \hat{I} + 0 \hat{I} + 0 \hat{J} + A_1 \hat{K}$$

elde edilir. O halde $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen reel $4n \times 4n$ matris

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

dir. Bu matrise $\hat{A}$ **dual kuaterniyon matrisin reel matris temsili** denir ve $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ ile gösterilir. $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ şeklindeki matrisler kümesi $S_{4n}(\mathbb{R})$ ile gösterilirse

$$S_4(M_n(\mathbb{R})) \cong S_{4n}(\mathbb{R}) = \left\{ \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \mid \hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \right\}$$

yazılabilir.

Örnek 3.16

2×2 tipindeki $\hat{A} = \begin{bmatrix} i+2j & 1+k \\ 2-i & j-k \end{bmatrix}$ dual kuaterniyon matrisini düşünelim.

Çözüm : $\hat{A}$ matrisini şu formda yazalım:

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} k \text{ olmak üzere}$$

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca

$$(\Re_{\hat{A}})^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$\hat{A}^* = \begin{bmatrix} -i-2j & 2+i \\ 1-k & -j+k \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$\hat{A}^*$ matrisini şu formda yazalım:

$$\hat{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} k \text{ olmak üzere}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

3.3.1 $M_{4n}(\mathbb{R}) \cong M_4(M_n(\mathbb{R}))$ Uzayının Özellikleri

1. $S_{4n}(\mathbb{R}) \subset M_{4n}(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.

2. $M_{4n}(\mathbb{R})$ kümesi $M_4(M_n(\mathbb{R})) = M_4(\mathbb{R}_n^n)$ ile de gösterilebilir.

Tanım 3.15

$\forall A_{rs} \in M_n(\mathbb{R}), 1 \leq r, s \leq 4$ için

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \in M_{4n}(\mathbb{R})$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11})_{11} & (a_{12})_{11} & \cdots & (a_{1n})_{11} & \cdots & (a_{11})_{14} & (a_{12})_{14} & \cdots & (a_{1n})_{14} \\ (a_{21})_{11} & (a_{22})_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & (a_{21})_{14} & (a_{22})_{14} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_{11} & (a_{n2})_{11} & \cdots & (a_{nn})_{11} & \cdots & (a_{n1})_{14} & (a_{n2})_{14} & \cdots & (a_{nn})_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{11})_{41} & (a_{12})_{41} & \cdots & (a_{1n})_{41} & \cdots & (a_{11})_{44} & (a_{12})_{44} & \cdots & (a_{1n})_{44} \\ (a_{21})_{41} & (a_{22})_{41} & \cdots & (a_{11})_{41} & \cdots & (a_{21})_{44} & (a_{22})_{44} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_{41} & (a_{n2})_{41} & \cdots & (a_{nn})_{41} & \cdots & (a_{n1})_{44} & (a_{n2})_{44} & \cdots & (a_{nn})_{44} \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11})_{11} & (b_{12})_{11} & \cdots & (b_{1n})_{11} & \cdots & (b_{11})_{14} & (b_{12})_{14} & \cdots & (b_{1n})_{14} \\ (b_{21})_{11} & (b_{22})_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & (b_{21})_{14} & (b_{22})_{14} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{n1})_{11} & (b_{n2})_{11} & \cdots & (b_{nn})_{11} & \cdots & (b_{n1})_{14} & (b_{n2})_{14} & \cdots & (b_{nn})_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (b_{11})_{41} & (b_{12})_{41} & \cdots & (b_{1n})_{41} & \cdots & (b_{11})_{44} & (b_{12})_{44} & \cdots & (b_{1n})_{44} \\ (b_{21})_{41} & (b_{22})_{41} & \cdots & (b_{11})_{41} & \cdots & (b_{21})_{44} & (b_{22})_{44} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{n1})_{41} & (b_{n2})_{41} & \cdots & (b_{nn})_{41} & \cdots & (b_{n1})_{44} & (b_{n2})_{44} & \cdots & (b_{nn})_{44} \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

olmak üzere

A ve **B** matrislerinin toplamı

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} + B_{13} & A_{14} + B_{14} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} + B_{23} & A_{24} + B_{24} \\ A_{31} + B_{31} & A_{32} + B_{32} & A_{33} + B_{33} & A_{34} + B_{34} \\ A_{41} + B_{41} & A_{42} + B_{42} & A_{43} + B_{43} & A_{44} + B_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ve

A ve **B** matrislerinin çarpımı

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} = [A_{ij}] [B_{jk}] \\ &= \left[\sum_{j=1}^4 A_{ij} B_{jk} \right], \quad 1 \leq i, k \leq 4 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} + A_{14}B_{41} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} + A_{14}B_{42} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} + A_{14}B_{43} & A_{11}B_{14} + A_{12}B_{24} + A_{13}B_{34} + A_{14}B_{44} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} + A_{24}B_{41} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} + A_{24}B_{42} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} + A_{24}B_{43} & A_{21}B_{14} + A_{22}B_{24} + A_{23}B_{34} + A_{24}B_{44} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31} + A_{34}B_{41} & A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32} + A_{34}B_{42} & A_{31}B_{13} + A_{32}B_{23} + A_{33}B_{33} + A_{34}B_{43} & A_{31}B_{14} + A_{32}B_{24} + A_{33}B_{34} + A_{34}B_{44} \\ A_{41}B_{11} + A_{42}B_{21} + A_{43}B_{31} + A_{44}B_{41} & A_{41}B_{12} + A_{42}B_{22} + A_{43}B_{32} + A_{44}B_{42} & A_{41}B_{13} + A_{42}B_{23} + A_{43}B_{33} + A_{44}B_{43} & A_{41}B_{14} + A_{42}B_{24} + A_{43}B_{34} + A_{44}B_{44} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi $M_{4n}(\mathbb{R})$ kümesinin alt kümesi olan $S_{4n}(\mathbb{R})$ kümesini inceleyelim.

Tanım 3.16

$r=1,2$ için $A_r, B_r, C_r, D_r \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \in S_{4n}(\mathbb{R})$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11})_{11} & (a_{12})_{11} & \cdots & (a_{1n})_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{21})_{11} & (a_{22})_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_{11} & (a_{n2})_{11} & \cdots & (a_{nn})_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{11})_{41} & (a_{12})_{41} & \cdots & (a_{1n})_{41} & \cdots & (a_{11})_{11} & (a_{12})_{11} & \cdots & (a_{1n})_{11} \\ (a_{21})_{41} & (a_{22})_{41} & \cdots & (a_{11})_{41} & \cdots & (a_{21})_{11} & (a_{22})_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_{41} & (a_{n2})_{41} & \cdots & (a_{nn})_{41} & \cdots & (a_{n1})_{11} & (a_{n2})_{11} & \cdots & (a_{nn})_{11} \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

ve

$$\mathfrak{R}_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11})_{11} & (b_{12})_{11} & \cdots & (b_{1n})_{11} & \cdots & (b_{11})_{14} & (b_{12})_{14} & \cdots & (b_{1n})_{14} \\ (b_{21})_{11} & (b_{22})_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & (b_{21})_{14} & (b_{22})_{14} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{n1})_{11} & (b_{n2})_{11} & \cdots & (b_{nn})_{11} & \cdots & (b_{n1})_{14} & (b_{n2})_{14} & \cdots & (b_{nn})_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (b_{11})_{41} & (b_{12})_{41} & \cdots & (b_{1n})_{41} & \cdots & (b_{11})_{11} & (b_{12})_{11} & \cdots & (b_{1n})_{11} \\ (b_{21})_{41} & (b_{22})_{41} & \cdots & (b_{11})_{41} & \cdots & (b_{21})_{11} & (b_{22})_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{n1})_{41} & (b_{n2})_{41} & \cdots & (b_{nn})_{41} & \cdots & (b_{n1})_{11} & (b_{n2})_{11} & \cdots & (b_{nn})_{11} \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

olmak üzere

$\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ ve $\mathfrak{R}_{\hat{B}}$ matrislerinin toplamı

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\hat{A}} + \mathfrak{R}_{\hat{B}} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 + B_2 & A_1 + A_2 & 0_n & 0_n \\ C_1 + C_2 & 0_n & A_1 + A_2 & 0_n \\ D_1 + D_2 & 0_n & 0_n & A_1 + A_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ve

$\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ ve $\mathfrak{R}_{\hat{B}}$ matrislerinin çarpımı

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\hat{A}} \mathfrak{R}_{\hat{B}} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix} = [A_{ij}] [B_{jk}] \\ &= \left[\sum_{j=1}^4 A_{ij} B_{jk} \right], \quad 1 \leq i, k \leq 4 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 A_2 + A_1 B_2 & A_1 A_2 & 0_n & 0_n \\ C_1 A_2 + A_1 C_2 & 0_n & A_1 A_2 & 0_n \\ D_1 A_2 + A_1 D_2 & 0_n & 0_n & A_1 A_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.



3.3.2 Reel Temsil Matrisin Özellikleri

Özel Durumlar

$\hat{1} = I_n, \hat{I} = i I_n, \hat{J} = j I_n, \hat{K} = k I_n$ matrislerinin, sırasıyla, reel matris temsilleri olan $S_{4n}(\mathbb{R}) \cong S_4(M_n(\mathbb{R}))$ uzayının $\mathfrak{R}_{\hat{1}}, \mathfrak{R}_{\hat{I}}, \mathfrak{R}_{\hat{J}}, \mathfrak{R}_{\hat{K}}$ matrisleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\mathfrak{R}_{\hat{1}}^2 = I_{4n}, \quad \mathfrak{R}_{\hat{I}}^2 = \mathfrak{R}_{\hat{J}}^2 = \mathfrak{R}_{\hat{K}}^2 = 0_{4n}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{I}}\mathfrak{R}_{\hat{J}} = \mathfrak{R}_{\hat{J}}\mathfrak{R}_{\hat{I}} = \mathfrak{R}_{\hat{J}}\mathfrak{R}_{\hat{K}} = \mathfrak{R}_{\hat{K}}\mathfrak{R}_{\hat{J}} = \mathfrak{R}_{\hat{K}}\mathfrak{R}_{\hat{I}} = \mathfrak{R}_{\hat{I}}\mathfrak{R}_{\hat{K}} = 0_{4n}$$

ispat: $\mathfrak{R}_{\hat{1}} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n}, \quad \mathfrak{R}_{\hat{I}} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n},$

$$\mathfrak{R}_{\hat{J}} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n}, \quad \mathfrak{R}_{\hat{K}} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{R}_{\hat{1}}^2 = I_{4n}, \quad \mathfrak{R}_{\hat{I}}^2 = \mathfrak{R}_{\hat{J}}^2 = \mathfrak{R}_{\hat{K}}^2 = 0_{4n}$$

ve

$$\mathfrak{R}_{\hat{I}}\mathfrak{R}_{\hat{J}} = \mathfrak{R}_{\hat{J}}\mathfrak{R}_{\hat{I}} = \mathfrak{R}_{\hat{J}}\mathfrak{R}_{\hat{K}} = \mathfrak{R}_{\hat{K}}\mathfrak{R}_{\hat{J}} = \mathfrak{R}_{\hat{K}}\mathfrak{R}_{\hat{I}} = \mathfrak{R}_{\hat{I}}\mathfrak{R}_{\hat{K}} = 0_{4n}$$

elde edilir.

Teorem 3.8

$\forall \hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\Re_{\hat{A}+\hat{B}} = \Re_{\hat{A}} + \Re_{\hat{B}},$

(ii) $\Re_{\hat{A}\hat{B}} = \Re_{\hat{A}}\Re_{\hat{B}},$

(iii) $\Re_{\mu\hat{A}} = \mu\Re_{\hat{A}},$

(iv) $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\Re_{q\hat{A}} = q_1 \Re_{\hat{A}} + \Re_{\text{vek}\{q\}A_1},$$

(v) $\Re_{\hat{I}_n} = I_{4n},$

(vi) Eğer $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin tersi var ve $\Re_{\hat{A}}$ matrisi de terslenebilir ise

$$\left(\Re_{\hat{A}}\right)^{-1} = \Re_{\hat{A}^{-1}},$$

(vii) $B \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere $\Re_{\hat{A}B} = \Re_{\hat{A}}\Re_B$ veya $\Re_{B\hat{A}} = \Re_B\Re_{\hat{A}},$

(viii) $\left(\Re_{\hat{A}}\right)^T \neq \Re_{\hat{A}^T},$

(ix) $\left(\overline{\Re_{\hat{A}}}\right) \neq \Re_{\hat{A}^-},$

(x) $\Re_{\hat{A}^-} = 2\Re_A - \Re_{\hat{A}},$

(xi) $\Re_{\hat{A}}\Re_{\hat{A}^-} = \Re_{\left(\hat{A}\hat{A}^-\right)} + \Re_{\hat{A}A} - \Re_{A^2}$

özellikleri sağlanır.

İspat : $r = 1, 2$ için $A_r, B_r, C_r, D_r \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{B} = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun.

(i) $\hat{A} + \hat{B} = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k$ olup

$$\Re_{\hat{A}+\hat{B}} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 + B_2 & A_1 + A_2 & 0_n & 0_n \\ C_1 + C_2 & 0_n & A_1 + A_2 & 0_n \\ D_1 + D_2 & 0_n & 0_n & A_1 + A_2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \Re_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$\Re_{\hat{A}+\hat{B}} = \Re_{\hat{A}} + \Re_{\hat{B}}$$

elde edilir.

$$(ii) \Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \Re_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$\Re_{\hat{A}} \Re_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ A_1 B_2 + B_1 A_2 & A_1 A_2 & 0_n & 0_n \\ A_1 C_2 + C_1 A_2 & 0_n & A_1 A_2 & 0_n \\ A_1 D_2 + D_1 A_2 & 0_n & 0_n & A_1 A_2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$\hat{A}\hat{B} = A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k \text{ olmak üzere}$$

$$\Re_{\hat{A}\hat{B}} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ A_1 B_2 + B_1 A_2 & A_1 A_2 & 0_n & 0_n \\ A_1 C_2 + C_1 A_2 & 0_n & A_1 A_2 & 0_n \\ A_1 D_2 + D_1 A_2 & 0_n & 0_n & A_1 A_2 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. O halde

$$\Re_{\hat{A}} \Re_{\hat{B}} = \Re_{\hat{A}\hat{B}}$$

elde edilir.

$$(iii) \mu \in \mathbb{R}, \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } \mu \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \mu A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ \mu B_1 & \mu A_1 & 0_n & 0_n \\ \mu C_1 & 0_n & \mu A_1 & 0_n \\ \mu D_1 & 0_n & 0_n & \mu A_1 \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

$\mu \hat{A} = \mu A_1 + \mu B_1 i + \mu C_1 j + \mu D_1 k$ için reel matris temsili

$$\mathfrak{R}_{\mu \hat{A}} = \begin{bmatrix} \mu A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ \mu B_1 & \mu A_1 & 0_n & 0_n \\ \mu C_1 & 0_n & \mu A_1 & 0_n \\ \mu D_1 & 0_n & 0_n & \mu A_1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Buradan $\mathfrak{R}_{\mu \hat{A}} = \mu \mathfrak{R}_{\hat{A}}$ elde edilir.

(iv) $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$q \hat{A} = q_1 A_1 + (q_1 B_1 + q_2 A_1)i + (q_1 C_1 + q_3 A_1)j + (q_1 D_1 + q_4 A_1)k$$

olup

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{q \hat{A}} &= \begin{bmatrix} q_1 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ q_1 B_1 + q_2 A_1 & q_1 A_1 & 0_n & 0_n \\ q_1 C_1 + q_3 A_1 & 0_n & q_1 A_1 & 0_n \\ q_1 D_1 + q_4 A_1 & 0_n & 0_n & q_1 A_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_1 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ q_1 B_1 & q_1 A_1 & 0_n & 0_n \\ q_1 C_1 & 0_n & q_1 A_1 & 0_n \\ q_1 D_1 & 0_n & 0_n & q_1 A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ q_2 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ q_3 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ q_4 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabileceğinden (3.1) den

$$= q_1 \mathfrak{R}_{\hat{A}} + \mathfrak{R}_{Vek\{q\}A_1}$$

elde edilir.

(v) $\hat{I}_n$ matrisi $I_n + 0_n i + 0_n j + 0_n k$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$\hat{I}_n$ matrisinin reel matris temsili için

$$\Re_{\hat{I}_n} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

elde edilir. I_n , $n \times n$ reel birim matris olmak üzere

Yani $\Re_{\hat{I}_n} = I_{4n}$ olarak elde edilir.

(vi) Eğer $\hat{A}$ matrisinin tersi var ise $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}_n$ yazılabilir. O halde (ii) ve (v) özelliklerinden

$$\Re_{\hat{A}\hat{A}^{-1}} = \Re_{\hat{A}} \Re_{\hat{A}^{-1}} = \Re_{\hat{I}_n} = I_{4n}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $(\Re_{\hat{A}})^{-1} = \Re_{\hat{A}^{-1}}$ elde edilir.

(vii) $B = A_2 \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \quad \text{ve} \quad \Re_B = \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & A_2 & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & A_2 & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \quad \text{olduğundan}$$

$$\Re_{\hat{A}} \Re_B = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 A_2 & A_1 A_2 & 0_n & 0_n \\ C_1 A_2 & 0_n & A_1 A_2 & 0_n \\ D_1 A_2 & 0_n & 0_n & A_1 A_2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$\hat{A}B = A_1 A_2 + B_1 A_2 i + C_1 A_2 j + D_1 A_2 k$ olmak üzere

$$\Re_{\hat{A}B} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 A_2 & A_1 A_2 & 0_n & 0_n \\ C_1 A_2 & 0_n & A_1 A_2 & 0_n \\ D_1 A_2 & 0_n & 0_n & A_1 A_2 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. O halde

$$\Re_{\hat{A}} \Re_B = \Re_{\hat{A}B}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Re_B \Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_2 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ A_2 B_1 & A_2 A_1 & 0_n & 0_n \\ A_2 C_1 & 0_n & A_2 A_1 & 0_n \\ A_2 D_1 & 0_n & 0_n & A_2 A_1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$B\hat{A} = A_2 A_1 + A_2 B_1 i + A_2 C_1 j + A_2 D_1 k$ olmak üzere

$$\Re_{B\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_2 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ A_2 B_1 & A_2 A_1 & 0_n & 0_n \\ A_2 C_1 & 0_n & A_2 A_1 & 0_n \\ A_2 D_1 & 0_n & 0_n & A_2 A_1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\Re_B \Re_{\hat{A}} = \Re_{B\hat{A}}$$

elde edilir.

(viii) $\hat{A} = \begin{bmatrix} i+2j & 1+k \\ 2-i & j-k \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\left(\Re_{\hat{A}}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$\hat{A}^T = \begin{bmatrix} i+2j & 2-i \\ 1+k & j-k \end{bmatrix} \text{ için reel temsil matrisi}$$

$$\Re_{\hat{A}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$\left(\Re_{\hat{A}}\right)^T \neq \Re_{\hat{A}^T}$$

bulunur. O halde genellikle $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisi için

$$\left(\Re_{\hat{A}}\right)^T = \Re_{\hat{A}^T}$$

özellili sağlanmaz.

$$(ix) \hat{A} = \begin{bmatrix} i+2j & 1+k \\ 2-i & j-k \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$\left(\overline{\mathfrak{R}_{\hat{A}}}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$\bar{\hat{A}}=\begin{bmatrix} -i-2j & 1-k \\ 2+i & -j+k \end{bmatrix} \text{ matrisinin reel temsili için}$$

$$\mathfrak{R}_{\bar{\hat{A}}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$\left(\overline{\mathfrak{R}_{\hat{A}}}\right) \neq \mathfrak{R}_{\bar{\hat{A}}}$$

bulunur. Görüldüğü gibi, $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisi için $\left(\overline{\mathfrak{R}_{\hat{A}}}\right)=\mathfrak{R}_{\bar{\hat{A}}}$ özelliği sağlanmaz.

$$(\mathbf{x}) \mathfrak{R}_{\hat{A}}=\begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}, \mathfrak{R}_{\bar{\hat{A}}}=\begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ -B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ -C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ -D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

ve

$$\mathfrak{R}_A=\begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & A_1 & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & A_1 & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

olup

$$2\Re_A - \Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 2A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 2A_1 & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 2A_1 & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 2A_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ -B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ -C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ -D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\Re_{\hat{A}} = 2\Re_A - \Re_{\hat{A}}$$

elde edilir.

$$(xi) \hat{A}\hat{A} = A_1^2 + (A_1B_1 - B_1A_1)i + (A_1C_1 - C_1A_1)j + (A_1D_1 - D_1A_1)k$$

olup

$$\begin{aligned} \Re_{\hat{A}} \Re_{\hat{A}} &= \Re_{\hat{A}\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1A_1 - A_1B_1 & A_1A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1A_1 - A_1C_1 & 0_n & A_1A_1 & 0_n \\ D_1A_1 - A_1D_1 & 0_n & 0_n & A_1A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \\ &= \begin{bmatrix} A_1A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ -A_1B_1 & A_1A_1 & 0_n & 0_n \\ -A_1C_1 & 0_n & A_1A_1 & 0_n \\ -A_1D_1 & 0_n & 0_n & A_1A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ C_1A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ D_1A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\left(A_1 \hat{A} \right) = A_1A_1 - A_1B_1i - A_1C_1j - A_1D_1k, \quad \hat{A}A_1 = A_1A_1 + B_1A_1i + C_1A_1j + D_1A_1k \quad \text{olmak üzere}$$

$$\Re_{\left(A_1 \hat{A} \right)} = \begin{bmatrix} A_1A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ -A_1B_1 & A_1A_1 & 0_n & 0_n \\ -A_1C_1 & 0_n & A_1A_1 & 0_n \\ -A_1D_1 & 0_n & 0_n & A_1A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \quad \text{ve}$$

$$\Re_{\hat{A}A_1} = \begin{bmatrix} A_1A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1A_1 & A_1A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1A_1 & 0_n & A_1A_1 & 0_n \\ D_1A_1 & 0_n & 0_n & A_1A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

bulunur. Ayrıca

$$\Re_{A_1^2} = \Re_{A_1 A_1} = \begin{bmatrix} A_1 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & A_1 A_1 & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & A_1 A_1 & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & A_1 A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \quad \text{olduğundan}$$

$$\Re_{\hat{A}} \Re_{\hat{A}}^{-1} = \Re_{\left(A_1 \bar{\hat{A}} \right)} + \Re_{\hat{A} A_1} - \Re_{A_1^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.9

$\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\Re_{\hat{A}}$ matrisi de $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel temsili olsun.

$\hat{A}$ matrisinin terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\Re_{\hat{A}}$ matrisinin terslenebilir olmasıdır.

İspat : $\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ herhangi bir $n \times n$ dual kuaterniyon matrisler ve $\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun.

($\Rightarrow$): $\hat{A}$ terslenebilir bir matris olsun. O zaman $\hat{A} \hat{B} = \hat{B} \hat{A} = \hat{I}_n$ olacak şekilde $\hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ vardır.

$$\hat{A} \hat{B} = \hat{B} \hat{A} = \hat{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\Re_{\hat{A} \hat{B}} = \Re_{\hat{A}} \Re_{\hat{B}} = \Re_{\hat{I}_n} = I_{4n}$$

elde edilir. Bu eşitlikten dolayı $\Re_{\hat{B}} = (\Re_{\hat{A}})^{-1}$ olup

$$\left| (\Re_{\hat{A}})^{-1} \right| = \frac{1}{|\Re_{\hat{A}}|} \neq 0$$

dır. Yani $\Re_{\hat{A}}$ da terslenebilirdir. ($|\Re_{\hat{A}}| \neq 0$)

($\Leftarrow$): $\Re_{\hat{A}}$ terslenebilir olsun. $\hat{A}$ matrisinin terslenebilir olduğunu gösterelim.

$R_{\hat{A}}$ terslenebilir olduğundan

$$\Re_{\hat{A}} \Re_{\hat{B}} = I_{4n}$$

olmak üzere

$$\Re_{\hat{A}\hat{B}} = I_{4n} = \Re_{\hat{I}_n}$$

olup

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{I}_n$$

elde edilir.

$\hat{B}$, $\hat{A}$ matrisinin tersi olup

$$\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \quad \text{ve} \quad \hat{B} = A_2 + B_2i + C_2j + D_2k$$

olmak üzere

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersi de}$$

$$\Re_{\hat{B}} = (\Re_{\hat{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Not 3.7

Bir $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin tersinin reel matris temsili yardımıyla bulunmasını 3.6.2 alt bölümünde (syf. 182) sonuç olarak elde edeceğiz.

Tanım 3.17

$Q \in M_n(\mathbb{R})$, $\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\mathfrak{R}_{\hat{A}} \in S_{4n}(\mathbb{R})$ Kronecker çarpımı

$$Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = Q \otimes \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QA_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ QB_1 & QA_1 & 0_n & 0_n \\ QC_1 & 0_n & QA_1 & 0_n \\ QD_1 & 0_n & 0_n & QA_1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\mathfrak{R}_Q \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \mathfrak{R}_{Q \otimes \hat{A}}$$

eşitliğini göz önüne alarak

$$Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \mathfrak{R}_Q \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \mathfrak{R}_{Q \otimes \hat{A}}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.15

$\{M_{4n}(\mathbb{R}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \otimes\}$ altılısı modüldür ve

$$\forall A = [A_{ij}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \in M_{4n}(\mathbb{R}) \text{ için}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} = A_{11} \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} + A_{12} \otimes \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + A_{43} \otimes \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \end{bmatrix} + A_{44} \otimes \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

yazılabildiğinden dolayı

$$M_{4n}(\mathbb{R}) = Sp \left\{ \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix} \right\}$$

elde edilir.

Böylece $\text{boy}(M_{4n}(\mathbb{R})) = 16$ dir.

Teorem 3.10

Bir $n \times n$ $Q \in M_n(\mathbb{R})$ reel matrisi ile $n \times n$ $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel temsili olan $4n \times 4n$ $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ matrisinin Kronecker çarpım “ $\otimes$ ” işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$1) Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \mathfrak{R}_{Q\hat{A}} = \mathfrak{R}_Q \mathfrak{R}_{\hat{A}}$$

$$\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall \mathfrak{R}_{\hat{A}} \in S_{4n}(\mathbb{R}) \text{ için}$$

$$2) (Q_1 + Q_2) \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = Q_1 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} + Q_2 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}}$$

$$3) Q \otimes (\mathfrak{R}_{\hat{A}} + \mathfrak{R}_{\hat{B}}) = Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} + Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{B}}$$

$$4) (Q_1 Q_2) \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = Q_1 \otimes (Q_2 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}})$$

5) $(\mathbb{R}_n^n, +, \cdot)$ reel matrislerin halkasının 2. işleminin birim elemanı I_n olmak üzere

$$I_n \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \mathfrak{R}_{\hat{A}}.$$

$$\text{İspat : 1) Tanım 3.17'den } Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} QA_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ QB_1 & QA_1 & 0_n & 0_n \\ QC_1 & 0_n & QA_1 & 0_n \\ QD_1 & 0_n & 0_n & QA_1 \end{bmatrix} \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

Ayrıca (3.9) eşitliğinden

$$Q\hat{A} = QA_1 + QB_1i + QC_1j + QD_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{bmatrix} QA_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ QB_1 & QA_1 & 0_n & 0_n \\ QC_1 & 0_n & QA_1 & 0_n \\ QD_1 & 0_n & 0_n & QA_1 \end{bmatrix} \text{ matrisi } Q\hat{A} = QA_1 + QB_1i + QC_1j + QD_1k \text{ matrisinin reel}$$

temsili olduğu açıktır. Böylece

$$Q \otimes \Re_{\hat{A}} = \Re_{Q\hat{A}}$$

bulunur.

Ayrıca $Q \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\Re_Q = \begin{bmatrix} Q & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & Q & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & Q & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & Q \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$\Re_Q \Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} QA_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ QB_1 & QA_1 & 0_n & 0_n \\ QC_1 & 0_n & QA_1 & 0_n \\ QD_1 & 0_n & 0_n & QA_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$Q \otimes \Re_{\hat{A}} = \Re_{Q\hat{A}} = \Re_Q \Re_{\hat{A}}$$

bulunur.

2) $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall \Re_{\hat{A}} \in S_{4n}(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$(Q_1 + Q_2) \otimes \Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} (Q_1 + Q_2)A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ (Q_1 + Q_2)B_1 & (Q_1 + Q_2)A_1 & 0_n & 0_n \\ (Q_1 + Q_2)C_1 & 0_n & (Q_1 + Q_2)A_1 & 0_n \\ (Q_1 + Q_2)D_1 & 0_n & 0_n & (Q_1 + Q_2)A_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}
Q_1 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} + Q_2 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} &= \begin{bmatrix} Q_1 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ Q_1 B_1 & Q_1 A_1 & 0_n & 0_n \\ Q_1 C_1 & 0_n & Q_1 A_1 & 0_n \\ Q_1 D_1 & 0_n & 0_n & Q_1 A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_2 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ Q_2 B_1 & Q_2 A_1 & 0_n & 0_n \\ Q_2 C_1 & 0_n & Q_2 A_1 & 0_n \\ Q_2 D_1 & 0_n & 0_n & Q_2 A_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (Q_1 + Q_2) A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ (Q_1 + Q_2) B_1 & (Q_1 + Q_2) A_1 & 0_n & 0_n \\ (Q_1 + Q_2) C_1 & 0_n & (Q_1 + Q_2) A_1 & 0_n \\ (Q_1 + Q_2) D_1 & 0_n & 0_n & (Q_1 + Q_2) A_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$(Q_1 + Q_2) \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = Q_1 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} + Q_2 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}}$$

elde edilir.

3) $\forall Q \in M_n(\mathbb{R}), \forall \mathfrak{R}_{\hat{A}}, \mathfrak{R}_{\hat{B}} \in S_{4n}(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathfrak{R}_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix} \text{ olup}$$

$$\begin{aligned}
Q \otimes (\mathfrak{R}_{\hat{A}} + \mathfrak{R}_{\hat{B}}) &= Q \otimes \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 + B_2 & A_1 + A_2 & 0_n & 0_n \\ C_1 + C_2 & 0_n & A_1 + A_2 & 0_n \\ D_1 + D_2 & 0_n & 0_n & A_1 + A_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Q(A_1 + A_2) & 0_n & 0_n & 0_n \\ Q(B_1 + B_2) & Q(A_1 + A_2) & 0_n & 0_n \\ Q(C_1 + C_2) & 0_n & Q(A_1 + A_2) & 0_n \\ Q(D_1 + D_2) & 0_n & 0_n & Q(A_1 + A_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} + Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} QA_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ QB_1 & QA_1 & 0_n & 0_n \\ QC_1 & 0_n & QA_1 & 0_n \\ QD_1 & 0_n & 0_n & QA_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} QA_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ QB_2 & QA_2 & 0_n & 0_n \\ QC_2 & 0_n & QA_2 & 0_n \\ QD_2 & 0_n & 0_n & QA_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q(A_1 + A_2) & 0_n & 0_n & 0_n \\ Q(B_1 + B_2) & Q(A_1 + A_2) & 0_n & 0_n \\ Q(C_1 + C_2) & 0_n & Q(A_1 + A_2) & 0_n \\ Q(D_1 + D_2) & 0_n & 0_n & Q(A_1 + A_2) \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$Q \otimes (\mathfrak{R}_{\hat{A}} + \mathfrak{R}_{\hat{B}}) = Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} + Q \otimes \mathfrak{R}_{\hat{B}}$$

elde edilir.

4) $\forall Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R}), \forall \mathfrak{R}_{\hat{A}} \in S_{4n}(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$(Q_1 Q_2) \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} (Q_1 Q_2) A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ (Q_1 Q_2) B_1 & (Q_1 Q_2) A_1 & 0_n & 0_n \\ (Q_1 Q_2) C_1 & 0_n & (Q_1 Q_2) A_1 & 0_n \\ (Q_1 Q_2) D_1 & 0_n & 0_n & (Q_1 Q_2) A_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$Q_1 \otimes (Q_2 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}}) = Q_1 \otimes \begin{bmatrix} Q_2 A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ Q_2 B_1 & Q_2 A_1 & 0_n & 0_n \\ Q_2 C_1 & 0_n & Q_2 A_1 & 0_n \\ Q_2 D_1 & 0_n & 0_n & Q_2 A_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_1(Q_2 A_1) & 0_n & 0_n & 0_n \\ Q_1(Q_2 B_1) & Q_1(Q_2 A_1) & 0_n & 0_n \\ Q_1(Q_2 C_1) & 0_n & Q_1(Q_2 A_1) & 0_n \\ Q_1(Q_2 D_1) & 0_n & 0_n & Q_1(Q_2 A_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (Q_1 Q_2) A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ (Q_1 Q_2) B_1 & (Q_1 Q_2) A_1 & 0_n & 0_n \\ (Q_1 Q_2) C_1 & 0_n & (Q_1 Q_2) A_1 & 0_n \\ (Q_1 Q_2) D_1 & 0_n & 0_n & (Q_1 Q_2) A_1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$(Q_1 Q_2) \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}} = Q_1 \otimes (Q_2 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{A}})$$

elde edilir.

Sonuç 3.16

$$\{S_{4n}(\mathbb{R}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \otimes\} \text{ altılısı bir modüldür:}$$

İspat: i) Toplama: $4n \times 4n$ reel matrisleri toplama işlemi olarak tanımlanır.

ii) Dış işlem: $Q \in M_n(\mathbb{R})$ ve $\mathfrak{R}_{\hat{A}} \in S_{4n}(\mathbb{R})$ olmak üzere (3.21) eşitliği ile verilen işlemi tanımlayalım. Teorem 3.10 gereğince $\{S_{4n}(\mathbb{R}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \otimes\}$ altılısı bir modüldür.

Ayrıca $S_{4n}(\mathbb{R})$ nin bir bazı:

$$\forall \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \in S_{4n}(\mathbb{R}) \text{ için}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{1}} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n}, \mathfrak{R}_{\hat{I}} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n},$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{J}} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n}, \mathfrak{R}_{\hat{K}} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} = A_1 \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix} + B_1 \otimes \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \\ + C_1 \otimes \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} + D_1 \otimes \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}$$

veya

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = A_1 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{1}} + B_1 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{I}} + C_1 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{J}} + D_1 \otimes \mathfrak{R}_{\hat{K}}$$

yazılabildiğinden dolayı

$$S_{4n}(\mathbb{R}) = Sp \left\{ \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right\}$$

veya

$$S_{4n}(\mathbb{R}) = Sp \{ \mathfrak{R}_{\hat{1}}, \mathfrak{R}_{\hat{I}}, \mathfrak{R}_{\hat{J}}, \mathfrak{R}_{\hat{K}} \}$$

elde edilir.

Böylece $\text{boy}(S_{4n}(\mathbb{R})) = 4$ dür.

Örnek 3.17

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için Teorem 3.9 un 1. özelliğini inceleyelim.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm : } \hat{A} &= \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix} \\ &= A_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} + D_1 \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

bulunur. Ayrıca

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$Q\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 4+9i-7j+8k & 7+2i+j+3k \\ 5+14i+16j-23k & 6+19i-18j+k \end{bmatrix}$$

olup reel matris temsili için

$$R_{Q\hat{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 19 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 16 & -18 & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ -23 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca

$$R_Q R_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 19 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 16 & -18 & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ -23 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

bulunduğundan $R_{Q\hat{A}} = R_Q R_{\hat{A}}$ olduğu açıktır.

Diğer taraftan,

$$Q \otimes R_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 19 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 16 & -18 & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ -23 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$Q \otimes R_{\hat{A}} = R_{Q\hat{A}} = R_Q R_{\hat{A}}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Örnek 3.18

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in S_8(\mathbb{R})$$

matrisinin $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_{\hat{I}}, \mathfrak{R}_{\hat{J}}, \mathfrak{R}_{\hat{K}}\}$ bazına göre bileşenlerini bulalım.

Çözüm:

[illegible]

bulunur. O halde $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ matrisinin $\{\mathfrak{R}_{\hat{1}}, \mathfrak{R}_{\hat{I}}, \mathfrak{R}_{\hat{J}}, \mathfrak{R}_{\hat{K}}\}$ bazına göre bileşenleri

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

dır.

Teorem 3.11

$$\phi: M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \rightarrow S_{4n}(\mathbb{R})$$

$$\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \rightarrow \phi(\hat{A}) = \Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & A_1 & 0 \\ D_1 & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

İspat : ϕ dönüşümünün izomorfizm olduğunu göstermek için 1-1, örten ve homomorfizma olduğunu göstermemiz gerekir. Öncelikle bu dönüşümün homomorfizma olduğunu yani aşağıdaki eşitlikleri sağladığını gösterelim.

$$\checkmark \quad \phi(\hat{A} + \hat{B}) = \phi(\hat{A}) + \phi(\hat{B}) \quad (3.22)$$

$$\checkmark \quad \phi(Q\hat{A}) = Q \otimes \phi(\hat{A}), \quad Q \in M_n(\mathbb{R}) \quad (3.23)$$

$\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k$, $\hat{B} = A_2 + B_2i + C_2j + D_2k$ olsun.

$$\phi(\hat{A} + \hat{B}) = \phi((A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k)$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 + B_1 & A_1 + A_2 & 0 & 0 \\ A_2 + B_2 & 0 & A_1 + A_2 & 0 \\ A_3 + B_3 & 0 & 0 & A_1 + A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & A_1 & 0 \\ D_1 & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & A_2 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & A_2 & 0 \\ D_2 & 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \phi(\hat{A}) + \phi(\hat{B})$$

bulunur. Ayrıca

$$Q\hat{A} = Q(A_1 + B_1i + C_1j + D_1k) = QA_1 + QB_1i + QC_1j + QD_1k \text{ olmak üzere}$$

$$\phi(Q\hat{A}) = \begin{bmatrix} QA_1 & 0 & 0 & 0 \\ QB_1 & QA_1 & 0 & 0 \\ QC_1 & 0 & QA_1 & 0 \\ QD_1 & 0 & 0 & QA_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$Q \otimes \phi(\hat{A}) = Q \otimes \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & A_1 & 0 \\ D_1 & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QA_1 & 0 & 0 & 0 \\ QB_1 & QA_1 & 0 & 0 \\ QC_1 & 0 & QA_1 & 0 \\ QD_1 & 0 & 0 & QA_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde

$$\phi(Q\hat{A}) = Q \otimes \phi(\hat{A})$$

bulunur.

✓ Şimdi ϕ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim:

$\forall \mathfrak{R}_{\hat{A}} \in S_{4n}(\mathbb{R})$ için $\phi(\hat{A}) = \mathfrak{R}_{\hat{A}}$ olacak şekilde bir tek $\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olduğundan ϕ örtendir.

✓ ϕ dönüşümü 1-1 dir.

$\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k$ ve $\hat{B} = A_2 + B_2i + C_2j + D_2k$ için $\phi(\hat{A}) = \phi(\hat{B})$ olsun. O halde

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = \mathfrak{R}_{\hat{B}} \text{ olup}$$

$$A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2 \text{ ve } D_1 = D_2$$

elde edilir. Böylece $\hat{A} = \hat{B}$ bulunur. Yani ϕ dönüşümü 1-1 dir.

Böylelikle ispat tamamlanmış oldu.

Sonuç 3.17

$$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \cong S_{4n}(\mathbb{R}) \subset M_{4n}(\mathbb{R}).$$

Örnek 3.19

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ve $\hat{B} = \begin{bmatrix} 3-4i+2j-k & 4+i-3j+2k \\ -1+3i-j+3k & 1-4i+2j-5k \end{bmatrix}$ için (3.22) ve (3.23) eşitliklerini inceleyelim.

Çözüm : $\hat{A} + \hat{B} = \begin{bmatrix} 4-2i-2j+4k & 6-j+3k \\ 1+8i+k & 4-j-4k \end{bmatrix}$ için

$$\phi(\hat{A} + \hat{B}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\phi(\hat{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \phi(\hat{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olup

$$\phi(\hat{A}) + \phi(\hat{B}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi(\hat{A} + \hat{B}) = \phi(\hat{A}) + \phi(\hat{B})$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$Q\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12i-2j+k & 8+7i-4j+3k \\ 11+26i-8j+7k & 18+13i-6j+7k \end{bmatrix}$$

için

$$\phi(Q\hat{A}) = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 26 & 13 & 11 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 0 & 0 & 11 & 18 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

olup

$$Q \otimes \phi(\hat{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 26 & 13 & 11 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 0 & 0 & 11 & 18 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi(Q\hat{A}) = Q \otimes \phi(\hat{A})$$

olduğu kolaylıkla görülür.

3.4 Dual Kuaterniyon Matrisin İzi

Tanım 3.18

$\hat{A}=[\hat{a}_{rs}]=A_1+B_1i+C_1j+D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere $\hat{A}$ dual kuaterniyon kare matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanlarının toplamına $\hat{A}$ matrisinin *izi* denir ve $iz(\hat{A})$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$iz(\hat{A}) = \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rr} = \sum_{r=1}^n a_{rr} + \sum_{r=1}^n b_{rr}i + \sum_{r=1}^n c_{rr}j + \sum_{r=1}^n d_{rr}k$$

veya

$$iz(\hat{A}) = iz(A_1) + iz(B_1)i + iz(C_1)j + iz(D_1)k$$

elde edilir.

Bir Dual Kuaterniyon Matrisinin İzinin Özellikleri

$\hat{A}=[\hat{a}_{rs}]=A_1+B_1i+C_1j+D_1k$, $\hat{B}=[\hat{b}_{rs}]=A_2+B_2i+C_2j+D_2k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ iki dual kuaterniyon kare matris, $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $Q \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere,

- 1) $iz(\hat{A}+\hat{B}) = iz(\hat{A}) + iz(\hat{B})$
- 2) $iz(\hat{A}\hat{B}) \neq iz(\hat{A})iz(\hat{B})$
- 3) $iz(\hat{A}\hat{B}) = iz(\hat{B}\hat{A})$
- 4) $iz(\hat{A}q) = iz(\hat{A})q$ veya $iz(q\hat{A}) = qiz(\hat{A})$
- 5) $iz(Q\hat{A}) = iz(\hat{A}Q)$

dır.

İspat : 1) $\hat{A}=[\hat{a}_{rs}]=A_1+B_1i+C_1j+D_1k$, $\hat{B}=[\hat{b}_{rs}]=A_2+B_2i+C_2j+D_2k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$iz(\hat{A}) = \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rr} = \sum_{r=1}^n a_{rr} + \sum_{r=1}^n b_{rr}i + \sum_{r=1}^n c_{rr}j + \sum_{r=1}^n d_{rr}k$$

$$=iz(A_1) + iz(B_1)i + iz(C_1)j + iz(D_1)k$$

ve

$$\begin{aligned} iz(\hat{B}) &= \sum_{r=1}^n \hat{b}_{rr} = \sum_{r=1}^n e_{rr} + \sum_{r=1}^n f_{rr}i + \sum_{r=1}^n g_{rr}j + \sum_{r=1}^n h_{rr}k \\ &= iz(A_2) + iz(B_2)i + iz(C_2)j + iz(D_2)k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} iz(\hat{A} + \hat{B}) &= \sum_{r=1}^n (\hat{a}_{rr} + \hat{b}_{rr}) = \sum_{r=1}^n (a_{rr} + e_{rr}) + \sum_{r=1}^n (b_{rr} + f_{rr})i + \sum_{r=1}^n (c_{rr} + g_{rr})j + \sum_{r=1}^n (d_{rr} + h_{rr})k \\ &= \sum_{r=1}^n a_{rr} + \sum_{r=1}^n b_{rr}i + \sum_{r=1}^n c_{rr}j + \sum_{r=1}^n d_{rr}k + \sum_{r=1}^n e_{rr} + \sum_{r=1}^n f_{rr}i + \sum_{r=1}^n g_{rr}j + \sum_{r=1}^n h_{rr}k \\ &= iz(\hat{A}) + iz(\hat{B}) \end{aligned}$$

elde edilir.

2) Eşitliğin sağlanmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim:

Örnek 3.20

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+k & i \\ j & 2-j \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 3+i & j \\ k & i-k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} \text{Çözüm : } \hat{A}\hat{B} &= \begin{bmatrix} 1+k & i \\ j & 2-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+i & j \\ k & i-k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+i+3k & j \\ 3j+2k & 2i-2k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$iz(\hat{A}\hat{B}) = 3+3i+k$$

bulunur.

$$iz(\hat{A}) = 3-j+k \text{ ve } iz(\hat{B}) = 3+2i-k \text{ olduğundan}$$

$$iz(\hat{A}) iz(\hat{B}) = (3-j+k)(3+2i-k)$$

$$= 9 + 6i - 3j$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$iz(\hat{A}\hat{B}) \neq iz(\hat{A})iz(\hat{B})$$

dir.

3) $\hat{A} = [\hat{a}_{rs}], \hat{B} = [\hat{b}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için

$$\hat{A}\hat{B} = [\hat{a}_{rs}][\hat{b}_{st}] = \left[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{b}_{st} \right] = [\hat{c}_{rt}] = \hat{C} \text{ ve}$$

$$\hat{B}\hat{A} = [\hat{b}_{st}][\hat{a}_{tr}] = \left[\sum_{t=1}^n \hat{b}_{st}\hat{a}_{tr} \right] = [\hat{d}_{sr}] = \hat{D} \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$iz(\hat{A}\hat{B}) = \sum_{r=1}^n \hat{c}_{rr} = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{b}_{sr}$$

ve

$$iz(\hat{B}\hat{A}) = \sum_{r=1}^n \hat{d}_{rr} = \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n \hat{a}_{rt}\hat{b}_{tr}$$

bulunur. Buradan her iki eşitlikteki toplamlar açılırsa

$$iz(\hat{A}\hat{B}) = iz(\hat{B}\hat{A})$$

elde edilir.

4) $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $q\hat{A} = [q\hat{a}_{rs}]$ olmak üzere

$$iz(q\hat{A}) = \sum_{r=1}^n q\hat{a}_{rr} = \sum_{r=1}^n q a_{rr} + \left(\sum_{r=1}^n q b_{rr} \right) i + \left(\sum_{r=1}^n q c_{rr} \right) j + \left(\sum_{r=1}^n q d_{rr} \right) k$$

$$= q \left(\sum_{r=1}^n a_{rr} \right) + q \left(\sum_{r=1}^n b_{rr} \right) i + q \left(\sum_{r=1}^n c_{rr} \right) j + q \left(\sum_{r=1}^n d_{rr} \right) k$$

$$= q iz(A_1) + q iz(B_1)i + q iz(C_1)j + q iz(D_1)k$$

$$= q (iz(A_1) + iz(B_1)i + iz(C_1)j + iz(D_1)k)$$

$$= qiz(\hat{A})$$

elde edilir.

5) $\hat{A}=[\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $Q=[q_{st}] \in M_n(\mathbb{R})$ için

$$iz(Q\hat{A})=iz(\hat{A}Q)$$

$$\hat{A}Q=[\hat{a}_{rs}][q_{st}]=[\sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} q_{st}]=[\hat{c}_{rt}]=\hat{C} \text{ ve}$$

$$Q\hat{A}=[q_{st}][\hat{a}_{tr}]=[\sum_{t=1}^n q_{st} \hat{a}_{tr}]=[\hat{d}_{sr}]=\hat{D} \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$iz(\hat{A}Q)=\sum_{r=1}^n \hat{c}_{rr}=\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs} q_{sr}$$

ve

$$iz(Q\hat{A})=\sum_{r=1}^n \hat{d}_{rr}=\sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n q_{rt} \hat{a}_{tr}$$

bulunur. Buradan bir reel sayı ile bir dual kuaterniyonun çarpma işleminin değişme özelliği olduğundan

$$iz(\hat{A}Q)=iz(Q\hat{A})$$

elde edilir.

3.5 Dual Kuaterniyon Matrislerin Determinantı

Dual kuaterniyonlar değişmeli olduğundan determinant tanımı dual kuaterniyon matrisleri için genelleştirilebilir. Bu sebepten dual kuaterniyon matrisleri için bir determinant fonksiyonu tanımlayabiliriz. Bu determinant fonksiyonu, reel matrislerin determinantına benzer şekilde aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Burada $\mathbb{R}$ cismi üzerinde veya daha genel olarak birimi 1 olan bir $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ değişmeli halkası üzerinde $n \times n$ dual kuaterniyon matrisler için determinant fonksiyonu tanımlayacağız.

Tanım 3.19

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisini ele alalım. $\hat{A}$ matrisinin j . sütun vektörleri

$$\hat{\alpha}_j = \begin{bmatrix} \hat{a}_{1j} \\ \vdots \\ \hat{a}_{nj} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^n, \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{olmak üzere} \quad \hat{A} \text{ matrisinin determinantı } \det(\hat{A}) \text{ ile}$$

gösterilir ve

$$\det : \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^n \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^n \times \dots \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^n \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n) \rightarrow \det(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} S(\sigma) \hat{a}_{\sigma(1)1} \hat{a}_{\sigma(2)2} \dots \hat{a}_{\sigma(n)n}$$

ile tanımlanır. Burada S_n , $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bütün permütasyonlarının kümesi ve $S(\sigma)$ da σ permütasyonlarının işaretidir. Burada dual kuaterniyonlar için tanımladığımız determinant fonksiyonu reel matrisler için tanımlı determinant fonksiyonunun sağladığı benzer özelliklere sahiptir. Ayrıca $\forall \hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için $\det(\hat{A}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olduğuna dikkat edelim.

Not 3.8

Bu determinant tanımı, reel matrislerin determinantındaki özelliklere sahiptir.

Örnek 3.21

$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisinin determinantını hesaplayalım.

Çözüm : $\hat{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{21} \end{bmatrix}$, $\hat{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{22} \end{bmatrix}$ ve $S_2 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \det \hat{A} &= \sum_{\sigma \in S_2} S(\sigma) \hat{a}_{\sigma(1)1} \hat{a}_{\sigma(2)2} \\ &= S(\sigma_1) \hat{a}_{\sigma_1(1)1} \hat{a}_{\sigma_1(2)2} + S(\sigma_2) \hat{a}_{\sigma_2(1)1} \hat{a}_{\sigma_2(2)2} \\ &= \hat{a}_{11} \hat{a}_{22} - \hat{a}_{21} \hat{a}_{12} \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir.

Örnek 3.22

$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisinin determinantını hesaplayalım.

Çözüm : $S_3 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right.$

$$\left. \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \det \hat{A} &= \sum_{\sigma \in S_3} S(\sigma) \hat{a}_{\sigma(1)1} \hat{a}_{\sigma(2)2} \hat{a}_{\sigma(3)3} \\ &= S(\sigma_1) \hat{a}_{\sigma_1(1)1} \hat{a}_{\sigma_1(2)2} \hat{a}_{\sigma_1(3)3} + S(\sigma_2) \hat{a}_{\sigma_2(1)1} \hat{a}_{\sigma_2(2)2} \hat{a}_{\sigma_2(3)3} + S(\sigma_3) \hat{a}_{\sigma_3(1)1} \hat{a}_{\sigma_3(2)2} \hat{a}_{\sigma_3(3)3} \\ &= S(\sigma_4) \hat{a}_{\sigma_4(1)1} \hat{a}_{\sigma_4(2)2} \hat{a}_{\sigma_4(3)3} + S(\sigma_5) \hat{a}_{\sigma_5(1)1} \hat{a}_{\sigma_5(2)2} \hat{a}_{\sigma_5(3)3} + S(\sigma_6) \hat{a}_{\sigma_6(1)1} \hat{a}_{\sigma_6(2)2} \hat{a}_{\sigma_6(3)3} \\ &= \hat{a}_{11} \hat{a}_{22} \hat{a}_{33} - \hat{a}_{11} \hat{a}_{32} \hat{a}_{23} - \hat{a}_{31} \hat{a}_{22} \hat{a}_{13} - \hat{a}_{21} \hat{a}_{12} \hat{a}_{33} + \hat{a}_{21} \hat{a}_{32} \hat{a}_{13} + \hat{a}_{31} \hat{a}_{12} \hat{a}_{23} \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir.

Sonuç 3.18

$\det(\hat{I}_n) = 1$ dir.

İspat : $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n$; $\hat{I}_n$ birim dual kuaterniyon matrisinin sütun vektörleri olmak üzere, $\hat{\alpha}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\hat{\alpha}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$, $\hat{\alpha}_n = (0, 0, \dots, 1)$ olup $\hat{\alpha}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in})$ yazılabilir.

$$\det(\hat{I}_n) = \det(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} S(\sigma) \delta_{\sigma(1)1} \delta_{\sigma(2)2} \cdots \delta_{\sigma(n)n}$$

yazılabilir. Burada

i) σ birim ise $\delta_{11} = \delta_{22} = \cdots = \delta_{nn} = 1$ dir.

ii) σ birim değilse, $\delta_{\sigma(1)1} = \delta_{\sigma(2)2} = \cdots = \delta_{\sigma(n)n} = 0$ dir.

Bu durumda $\det(\hat{I}_n) = 1$ dir.

3.5.1 Dual Kuaterniyon Matrisler için Determinant Hesaplamaları

Şimdi pratik olarak dual kuaterniyon matrisinin determinant hesaplamalarını inceleyelim:

i) 1×1 tipindeki $\hat{A} = [\hat{a}_{11}]$ matrisin determinanı $\det(\hat{A}) = \hat{a}_{11}$ dır.

ii) 2×2 tipindeki $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix}$ matrisin determinanı

$$\det(\hat{A}) = \begin{vmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{vmatrix} = \hat{a}_{11}\hat{a}_{22} - \hat{a}_{21}\hat{a}_{12} \text{ dır.}$$

Örnek 3.23

$1, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\det(\hat{1}) = 1^2 = 1, \det(\hat{I}) = i^2 - 0 = 0, \det(\hat{J}) = j^2 - 0 = 0 \text{ ve } \det(\hat{K}) = k^2 - 0 = 0.$$

Örnek 3.24

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisinin determinantını hesaplayalım.

$$\textbf{Çözüm : } \det(\hat{A}) = (4-i+2j+k)(2+i-j) - (-1+i+2k)(2+3j-k)$$

$$= 8+2i+2k - (-2+2i-3j+5k) = 10+3j-3k \quad (3.26)$$

Örnek 3.25

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 3-j & 2+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantını bulalım.

$$\textbf{Çözüm : } \det(\hat{A}) = (2+i) - (2+i)(3-j) = -4-2i+2j.$$

iii) **Dual Kuaterniyon Matrisleri için Sarrus Kuralı:** Reel matrislerde kullanılan bu metod, sadece 3×3 tipindeki dual kuaterniyon matrisinin determinantının hesaplanmasında kullanılır:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \text{ matrisin determinanı}$$

$$\det(\hat{A}) = \begin{vmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\hat{a}_{33} - \hat{a}_{11}\hat{a}_{32}\hat{a}_{23} - \hat{a}_{31}\hat{a}_{22}\hat{a}_{13} - \hat{a}_{21}\hat{a}_{12}\hat{a}_{33} + \hat{a}_{21}\hat{a}_{32}\hat{a}_{13} + \hat{a}_{31}\hat{a}_{12}\hat{a}_{23} \quad (3.27)$$

elde edilir.

(3.27)'nin (3.25) ile aynı olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 3.26

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin}$$

determinantını bulalım.

$$\text{Çözüm : } \det(\hat{A}) = (1-i)(1-k)(-i-j-k) + (-i+j)(2+i)(3-k) + (3-i)(2-j)(2+2j)$$

$$-((3-k)(1-k)(3-i) + (2+2j)(2+i)(1-i) + (-i-j-k)(2-j)(-i+j))$$

$$= (-i-j-k) + (-6i+6j) + (12-4i+6j) - ((9-3i-12k) + (4-2i+4j) + 0)$$

$$= 12-11i+11j-k - (13-5i+4j-12k)$$

$$= -1-6i+7j+11k \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}.$$

Not 3.9

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}]_{n \times n}$, $n \geq 2$ olmak üzere $\hat{a}_{rs}$ pure dual kuaterniyon ise $\det(\hat{A}) = 0$ dir.

3.5.2 Dual Kuaterniyon Matrisler için Determinant Açılımları

Tanım 3.20

$\hat{A}=[\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{M}_{rs}$, $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin r . satır s . sütun elemanlarının silinmesiyle elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir matris olmak üzere $\det(\hat{M}_{rs})$ ifadesine $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin $\hat{a}_{rs}$ elemanının minörü ve $\hat{A}_{rs} = (-1)^{r+s} \det(\hat{M}_{rs})$ ifadesinede $\hat{a}_{rs}$ elemanının kofaktörü (işaretli minörü-eş çarpanı) denir.

Teorem 3.12

$\hat{A}=[\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ birimi 1 olan değişmeli halka üzerinde kare matris olsun. $\hat{A}$ matrisinin herhangi bir r . satıra göre determinant açılımı

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{r1}\hat{A}_{r1} + \hat{a}_{r2}\hat{A}_{r2} + \dots + \hat{a}_{rn}\hat{A}_{rn} = \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{A}_{rs}$$

veya s . sütuna göre determinant açılımı

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{1s}\hat{A}_{1s} + \hat{a}_{2s}\hat{A}_{2s} + \dots + \hat{a}_{ns}\hat{A}_{ns} = \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{A}_{rs}$$

şeklinde dir.

İspat : $\hat{A}=[\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisinin sütun vektörleri $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n \in M_{n \times 1}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere $\hat{A}=[\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_n]$ yazılabilir. $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\} \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^n$ nin standart bazı olmak üzere

$$\hat{\alpha}_s = \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{e}_r$$

yazılabilir. O halde $s=1$ için

$$\det(\hat{A}) = \det \left[\sum_{r=1}^n \hat{a}_{r1} \hat{e}_r \quad \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_n \right]$$

olmak üzere $\det$ fonksiyonu n - lineer olduğundan

$$\det(\hat{A}) = \sum_{r=1}^n \hat{a}_{r1} \det[\hat{e}_r \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_n]$$

elde edilir. Burada

$$\det[\hat{e}_r \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_n] = \begin{vmatrix} 0 & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \hat{a}_{r2} & \dots & \hat{a}_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

olmak üzere “iki satır yer değiştirdiğinde determinanın işareti değişir” özelliğinden

$$\det[\hat{e}_r \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_n] = (-1)^{r-1} \begin{vmatrix} 1 & \hat{a}_{r2} & \dots & \hat{a}_{rn} \\ 0 & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{a}_{(r-1)2} & \dots & \hat{a}_{(r-1)n} \\ 0 & \hat{a}_{(r+1)2} & \dots & \hat{a}_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

bulunur. Ayrıca $(-1)^{r-1} = (-1)^{r+1}$ ve determinanın özelliği gereğince

$$\det[\hat{e}_r \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_n] = (-1)^{r+1} \begin{vmatrix} \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{(r-1)2} & \dots & \hat{a}_{(r-1)n} \\ \hat{a}_{(r+1)2} & \dots & \hat{a}_{(r+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{vmatrix} = \hat{A}_{r1}$$

elde edilir. O halde $\det(\hat{A}) = \sum_{r=1}^n \hat{a}_{r1} \hat{A}_{r1}$ bulunur. Benzer şekilde herhangi bir s için

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= \det \left[\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{r-1} \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{e}_r \hat{\alpha}_{r+1} \dots \hat{\alpha}_n \right] \\ &= \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rs} \det[\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{r-1} \hat{e}_r \hat{\alpha}_{r+1} \dots \hat{\alpha}_n] \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rs} \hat{A}_{rs}$$

elde edilir.

Not 3.10

$n \times n$ lik bir dual kuaterniyon matrisi için 1. satıra göre determinant açılımı yapılırsa;

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{vmatrix} = \hat{a}_{11} \begin{vmatrix} \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{1+n} \hat{a}_{1n} \begin{vmatrix} \hat{a}_{21} & \dots & \hat{a}_{2n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \dots & \hat{a}_{nn-1} \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.27

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin

determinantını bulalım.

Çözüm : 1. satıra göre determinant açılımı yapılırsa

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{11} \hat{A}_{11} + \hat{a}_{12} \hat{A}_{12}$$

elde edilir. Burada

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \det(\hat{M}_{11}) = 2+i-j$$

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det(\hat{M}_{12}) = -2-3j+k$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= (4-i+2j+k)(2+i-j) + (-1+i+2k)(-2-3j+k) \\ &= (8+2i+2k) + (2-2i+3j-5k) \\ &= 10+3j-3k \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.28

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin}$$

determinantını bulalım.

Çözüm : 1.satıra göre determinant açılımı yapılırsa

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{11}\hat{A}_{11} + \hat{a}_{12}\hat{A}_{12} + \hat{a}_{13}\hat{A}_{13}$$

elde edilir. Burada

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \det(\hat{M}_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1-k & 2+2j \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix}$$

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det(\hat{M}_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -i+j & 2+2j \\ 3-i & -i-j-k \end{vmatrix}$$

$$\hat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \det(\hat{M}_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} -i+j & 1-k \\ 3-i & 2+i \end{vmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= (1-i)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1-k & 2+2j \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix} + (2-j)(-1)^3 \begin{vmatrix} -i+j & 2+2j \\ 3-i & -i-j-k \end{vmatrix} + (3-k)(-1)^4 \begin{vmatrix} -i+j & 1-k \\ 3-i & 2+i \end{vmatrix} \\ &= (1-i)(-4-3i-5j-k) - (2-j)(-6+2i-6j) + (3-k)(-3-i+2j+3k) \\ &= (-4+i-5j-k) + (12-4i+6j) + (-9-3i+6j+12k) \\ &= -1-6i+7j+11k \end{aligned}$$

bulunur.

1. sütuna göre determinant açılımı yapılırsa

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{11}\hat{A}_{11} + \hat{a}_{21}\hat{A}_{21} + \hat{a}_{31}\hat{A}_{31}$$

elde edilir. Burada

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \det(\hat{M}_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1-k & 2+2j \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix}$$

$$\hat{A}_{21} = (-1)^{2+1} \det(\hat{M}_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2-j & 3-k \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix}$$

$$\hat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det(\hat{M}_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2-j & 3-k \\ 1-k & 2+2j \end{vmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= (1-i)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1-k & 2+2j \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix} + (-i+j)(-1)^3 \begin{vmatrix} 2-j & 3-k \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix} + (3-i)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2-j & 3-k \\ 1-k & 2+2j \end{vmatrix} \\ &= (1-i)(-4-3i-5j-k) - (-i+j)(-6-5i-2j) + (3-i)(1+2j+4k) \\ &= -4+i-5j-k-6i+6j+3-i+6j+12k \\ &= -1-6i+7j+11k \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.29

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 3-j & 2+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantını

bulalım.

Çözüm : 1. satıra göre determinant açılımı yapılırsa

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{11}\hat{A}_{11} + \hat{a}_{12}\hat{A}_{12}$$

elde edilir. Burada

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \det(\hat{M}_{11}) = 2+i$$

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det(\hat{M}_{12}) = -3+j$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= (2+i) + (2+i)(-3+j) \\ &= -4-2i+2j \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.30

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} i & j & 0 \\ 0 & -j & k \\ i & j & k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{dual kuaterniyon matrisinin determinantını}$$

hesaplayalım.

Çözüm : 1. satıra göre determinant açılımı yapılırsa

$$\begin{vmatrix} i & j & 0 \\ 0 & -j & k \\ i & j & k \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -j & k \\ j & k \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & k \\ i & k \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & -j \\ i & j \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

Sonuç 3.19

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisinin s . sütun elemanları ile t . sütun elemanlarına ait kofaktörlerinin çarpımının toplamının değeri sıfırdır, yani

$$\hat{a}_{1r} \hat{A}_{1t} + \hat{a}_{2r} \hat{A}_{2t} + \cdots + \hat{a}_{nr} \hat{A}_{nt} = 0$$

elde edilir.

$$\text{ispat : } \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1t} & \cdots & \hat{a}_{1s} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{2t} & \cdots & \hat{a}_{2s} & \cdots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nt} & \cdots & \hat{a}_{ns} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{dual kuaterniyon matrisinin } t.$$

sütununundaki elemanlarının yerine s . sütununundaki elemanları yazarsak

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1s} & \cdots & \hat{a}_{1s} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{2s} & \cdots & \hat{a}_{2s} & \cdots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \cdots & \hat{a}_{ns} & \cdots & \hat{a}_{ns} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{dual kuaterniyon matrisi elde edilir.}$$

Burada $\det(\hat{B}) = 0$ olduğu açıktır. Teorem 3.12 kullanılarak $\hat{B}$ nin t . sütununa göre determinant açık yazılırsa

$$0 = \det \hat{B} = \hat{a}_{1s} \hat{B}_{1t} + \hat{a}_{2s} \hat{B}_{2t} + \cdots + \hat{a}_{ns} \hat{B}_{nt}$$

bulunur. Ayrıca

$$\hat{B}_{1t} = \hat{A}_{1t}, \hat{B}_{2t} = \hat{A}_{2t}, \dots, \hat{B}_{nt} = \hat{A}_{nt}$$

olduğundan

$$\hat{a}_{1s}\hat{A}_{1t} + \hat{a}_{2s}\hat{A}_{2t} + \dots + \hat{a}_{ns}\hat{A}_{nt} = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir.

3.5.3 Dual Kuaterniyon Matrislerin Klasik Determinantın Diğer Hesaplamaları

I

Teorem 3.13

$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisi verilsin. $\hat{A}$ dual kuaterniyon

matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} [A_1 | B_1]_1 &= \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, [A_1 | B_1]_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, [A_1 | C_1]_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \\ [A_1 | C_1]_2 &= \begin{bmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, [A_1 | D_1]_1 = \begin{bmatrix} d_{11} & a_{12} \\ d_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, [A_1 | D_1]_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & d_{12} \\ a_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere (3.24) eşitliği ile hesaplanan determinant

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= \det(A_1) + (\det([A_1 | B_1]_1) + \det([A_1 | B_1]_2))i + (\det([A_1 | C_1]_1) + \det([A_1 | C_1]_2))j \\ &\quad + (\det([A_1 | D_1]_1) + \det([A_1 | D_1]_2))k \end{aligned}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Not 3.11

$[A_1 | B_1]_s$ A_1 matrisinin s . sütunu yerine B_1 nin s . sütununun yazılması ile elde edilen matris olsun.

İspat : $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} k$$

şeklinde yazılabilir.

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{11}\hat{a}_{22} - \hat{a}_{21}\hat{a}_{12}$$

$$= (a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k)(a_{22} + b_{22}i + c_{22}j + d_{22}k)$$

$$- (a_{21} + b_{21}i + c_{21}j + d_{21}k)(a_{12} + b_{12}i + c_{12}j + d_{12}k)$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{11}a_{22} + (a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22})i + (a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22})j + (a_{11}d_{22} + d_{11}a_{22})k) \\
&\quad - (a_{21}a_{12} + (a_{21}b_{12} + b_{21}a_{12})i + (a_{21}c_{12} + c_{21}a_{12})j + (a_{21}d_{12} + d_{21}a_{12})k) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + (a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12})i \\
&\quad + (a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} - a_{21}c_{12} - c_{21}a_{12})j \\
&\quad + (a_{11}d_{22} + d_{11}a_{22} - a_{21}d_{12} - d_{21}a_{12})k
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\det([A_1 | B_1]_1) = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12},$$

$$\det([A_1 | B_1]_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12},$$

$$\det([A_1 | C_1]_1) = \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = c_{11}a_{22} - c_{21}a_{12},$$

$$\det([A_1 | C_1]_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = a_{11}c_{22} - a_{21}c_{12},$$

$$\det([A_1 | D_1]_1) = \begin{vmatrix} d_{11} & a_{12} \\ d_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = d_{11}a_{22} - d_{21}a_{12},$$

$$\det([A_1 | D_1]_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & d_{12} \\ a_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = a_{11}d_{22} - a_{21}d_{12} \text{ olmak üzere } \hat{A} \text{ nın klasik determinanı}$$

$$\begin{aligned}
\det(\hat{A}) &= \det(A_1) + (\det([A_1 | B_1]_1) + \det([A_1 | B_1]_2))i + (\det([A_1 | C_1]_1) + \det([A_1 | C_1]_2))j \\
&\quad + (\det([A_1 | D_1]_1) + \det([A_1 | D_1]_2))k
\end{aligned}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Teorem 3.14

$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisi verilsin. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin

determinantı

$$[A_1 | B_1]_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, [A_1 | B_1]_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, [A_1 | B_1]_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$[A_1 | C_1]_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, [A_1 | C_1]_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, [A_1 | C_1]_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$[A_1 | D_1]_1 = \begin{bmatrix} d_{11} & a_{12} & a_{13} \\ d_{21} & a_{22} & a_{23} \\ d_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, [A_1 | D_1]_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & d_{12} & a_{13} \\ a_{21} & d_{22} & a_{23} \\ a_{31} & d_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, [A_1 | D_1]_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & d_{13} \\ a_{21} & a_{22} & d_{23} \\ a_{31} & a_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere (3.25) denkleminde hesaplanan determinant

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) = & \det(A_1) + (\det([A_1 | B_1]_1) + \det([A_1 | B_1]_2) + \det([A_1 | B_1]_3))i \\ & + (\det([A_1 | C_1]_1) + \det([A_1 | C_1]_2) + \det([A_1 | C_1]_3))j \\ & + (\det([A_1 | D_1]_1) + \det([A_1 | D_1]_2) + \det([A_1 | D_1]_3))k \end{aligned}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

İspat : $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} k$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\det(\hat{A}) &= \hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\hat{a}_{33} - \hat{a}_{11}\hat{a}_{32}\hat{a}_{23} - \hat{a}_{31}\hat{a}_{22}\hat{a}_{13} - \hat{a}_{21}\hat{a}_{12}\hat{a}_{33} + \hat{a}_{21}\hat{a}_{32}\hat{a}_{13} + \hat{a}_{31}\hat{a}_{12}\hat{a}_{23} \\
\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\hat{a}_{33} &= (a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k)(a_{22} + b_{22}i + c_{22}j + d_{22}k)(a_{33} + b_{33}i + c_{33}j + d_{33}k) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + (b_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}b_{22}a_{33} + b_{11}a_{22}a_{33})i \\
&\quad + (c_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}c_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}c_{33})j + (d_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}d_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}d_{33})k \\
\hat{a}_{11}\hat{a}_{32}\hat{a}_{23} &= (a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k)(a_{32} + b_{32}i + c_{32}j + d_{32}k)(a_{23} + b_{23}i + c_{23}j + d_{23}k) \\
&= a_{11}a_{32}a_{23} + (b_{11}a_{32}a_{23} + a_{11}b_{32}a_{23} + a_{11}a_{32}b_{23})i \\
&\quad + (c_{11}a_{32}a_{23} + a_{11}c_{32}a_{23} + a_{11}a_{32}c_{23})j + (d_{11}a_{32}a_{23} + a_{11}d_{32}a_{23} + a_{11}a_{32}d_{23})k \\
\hat{a}_{31}\hat{a}_{22}\hat{a}_{13} &= (a_{31} + b_{31}i + c_{31}j + d_{31}k)(a_{22} + b_{22}i + c_{22}j + d_{22}k)(a_{13} + b_{13}i + c_{13}j + d_{13}k) \\
&= a_{31}a_{22}a_{13} + (b_{31}a_{22}a_{13} + a_{31}b_{22}a_{13} + a_{31}a_{22}b_{13})i \\
&\quad + (c_{31}a_{22}a_{13} + a_{31}c_{22}a_{13} + a_{31}a_{22}c_{13})j + (d_{31}a_{22}a_{13} + a_{31}d_{22}a_{13} + a_{31}a_{22}d_{13})k \\
\hat{a}_{21}\hat{a}_{12}\hat{a}_{33} &= (a_{21} + b_{21}i + c_{21}j + d_{21}k)(a_{12} + b_{12}i + c_{12}j + d_{12}k)(a_{33} + b_{33}i + c_{33}j + d_{33}k) \\
&= a_{21}a_{12}a_{33} + (b_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}b_{12}a_{33} + a_{21}a_{12}b_{33})i \\
&\quad + (c_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}c_{12}a_{33} + a_{21}a_{12}c_{33})j + (d_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}d_{12}a_{33} + a_{21}a_{12}d_{33})k \\
\hat{a}_{21}\hat{a}_{32}\hat{a}_{13} &= (a_{21} + b_{21}i + c_{21}j + d_{21}k)(a_{32} + b_{32}i + c_{32}j + d_{32}k)(a_{13} + b_{13}i + c_{13}j + d_{13}k) \\
&= a_{21}a_{32}a_{13} + (b_{21}a_{32}a_{13} + a_{21}b_{32}a_{13} + a_{21}a_{32}b_{13})i \\
&\quad + (c_{21}a_{32}a_{13} + a_{21}c_{32}a_{13} + a_{21}a_{32}c_{13})j + (d_{21}a_{32}a_{13} + a_{21}d_{32}a_{13} + a_{21}a_{32}d_{13})k \\
\hat{a}_{31}\hat{a}_{12}\hat{a}_{23} &= (a_{31} + b_{31}i + c_{31}j + d_{31}k)(a_{12} + b_{12}i + c_{12}j + d_{12}k)(a_{23} + b_{23}i + c_{23}j + d_{23}k) \\
&= a_{31}a_{12}a_{23} + (b_{31}a_{12}a_{23} + a_{31}b_{12}a_{23} + a_{31}a_{12}b_{23})i \\
&\quad + (c_{31}a_{12}a_{23} + a_{31}c_{12}a_{23} + a_{31}a_{12}c_{23})j + (d_{31}a_{12}a_{23} + a_{31}d_{12}a_{23} + a_{31}a_{12}d_{23})k
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler $\det(\hat{A})$ da yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\det(\hat{A}) = & a_{11}b_{22}a_{33} - a_{11}b_{32}a_{23} - a_{31}b_{22}a_{13} - a_{21}b_{12}a_{33} + a_{21}b_{32}a_{13} + a_{31}b_{12}a_{23} \\
& + (b_{11}a_{22}a_{33} - b_{11}a_{32}a_{23} - b_{31}a_{22}a_{13} - b_{21}a_{12}a_{33} + b_{21}a_{32}a_{13} + b_{31}a_{12}a_{23} \\
& + b_{11}a_{22}a_{33} - b_{11}a_{32}a_{23} - b_{31}a_{22}a_{13} - b_{21}a_{12}a_{33} + b_{21}a_{32}a_{13} + b_{31}a_{12}a_{23} \\
& + a_{11}b_{22}a_{33} - a_{11}b_{32}a_{23} - a_{31}b_{22}a_{13} - a_{21}b_{12}a_{33} + a_{21}b_{32}a_{13} + a_{31}b_{12}a_{23})i \\
& + (c_{11}a_{22}a_{33} - c_{11}a_{32}a_{23} - c_{31}a_{22}a_{13} - c_{21}a_{12}a_{33} + c_{21}a_{32}a_{13} + b_{31}a_{12}a_{23} \\
& + a_{11}c_{22}a_{33} - a_{11}c_{32}a_{23} - a_{31}c_{22}a_{13} - a_{21}c_{12}a_{33} + a_{21}c_{32}a_{13} + a_{31}c_{12}a_{23} \\
& + a_{11}a_{22}c_{33} - a_{11}a_{32}c_{23} - a_{31}a_{22}c_{13} - a_{21}a_{12}c_{33} + a_{21}a_{32}c_{13} + a_{31}a_{12}c_{23})j \\
& + (d_{11}a_{22}a_{33} - d_{11}a_{32}a_{23} - d_{31}a_{22}a_{13} - d_{21}a_{12}a_{33} + d_{21}a_{32}a_{13} + d_{31}a_{12}a_{23} \\
& + a_{11}d_{22}a_{33} - a_{11}d_{32}a_{23} - a_{31}d_{22}a_{13} - a_{21}d_{12}a_{33} + a_{21}d_{32}a_{13} + a_{31}d_{12}a_{23} \\
& + a_{11}a_{22}d_{33} - a_{11}a_{32}d_{23} - a_{31}a_{22}d_{13} - a_{21}a_{12}d_{33} + a_{21}a_{32}d_{13} + a_{31}a_{12}d_{23})k
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde

$$\begin{aligned}
\det(A_1) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\
\det([A_1 | B_1]_1) &= \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= b_{11}a_{22}a_{33} - b_{11}a_{32}a_{23} - b_{31}a_{22}a_{13} - b_{21}a_{12}a_{33} + b_{21}a_{32}a_{13} + b_{31}a_{12}a_{23}, \\
\det([A_1 | B_1]_2) &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}b_{22}a_{33} - a_{11}b_{32}a_{23} - a_{31}b_{22}a_{13} - a_{21}b_{12}a_{33} + a_{21}b_{32}a_{13} + a_{31}b_{12}a_{23}
\end{aligned}$$

$$\det([A_1 | B_1]_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}b_{33} - a_{11}a_{32}b_{23} - a_{31}a_{22}b_{13} - a_{21}a_{12}b_{33} + a_{21}a_{32}b_{13} + a_{31}a_{12}b_{23}$$

$$\det([A_1 | C_1]_1) = \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= c_{11}a_{22}a_{33} - c_{11}a_{32}a_{23} - c_{31}a_{22}a_{13} - c_{21}a_{12}a_{33} + c_{21}a_{32}a_{13} + b_{31}a_{12}a_{23},$$

$$\det([A_1 | C_1]_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}c_{22}a_{33} - a_{11}c_{32}a_{23} - a_{31}c_{22}a_{13} - a_{21}c_{12}a_{33} + a_{21}c_{32}a_{13} + a_{31}c_{12}a_{23}$$

$$\det([A_1 | C_1]_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}c_{33} - a_{11}a_{32}c_{23} - a_{31}a_{22}c_{13} - a_{21}a_{12}c_{33} + a_{21}a_{32}c_{13} + a_{31}a_{12}c_{23}$$

$$\det([A_1 | D_1]_1) = \begin{vmatrix} d_{11} & a_{12} & a_{13} \\ d_{21} & a_{22} & a_{23} \\ d_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= d_{11}a_{22}a_{33} - d_{11}a_{32}a_{23} - d_{31}a_{22}a_{13} - d_{21}a_{12}a_{33} + d_{21}a_{32}a_{13} + d_{31}a_{12}a_{23},$$

$$\det([A_1 | D_1]_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & d_{12} & a_{13} \\ a_{21} & d_{22} & a_{23} \\ a_{31} & d_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}d_{22}a_{33} - a_{11}d_{32}a_{23} - a_{31}d_{22}a_{13} - a_{21}d_{12}a_{33} + a_{21}d_{32}a_{13} + a_{31}d_{12}a_{23}$$

$$\det([A_1 | D_1]_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_{13} \\ a_{21} & a_{22} & d_{23} \\ a_{31} & a_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}d_{33} - a_{11}a_{32}d_{23} - a_{31}a_{22}d_{13} - a_{21}a_{12}d_{33} + a_{21}a_{32}d_{13} + a_{31}a_{12}d_{23}$$

olmak üzere $\hat{A}$ matrisinin klasik determinanı

$$\begin{aligned}\det(\hat{A}) = \det(A_1) &+ \left(\det([A_1 | B_1]_1) + \det([A_1 | B_1]_2) + \det([A_1 | B_1]_3) \right) i \\ &+ \left(\det([A_1 | C_1]_1) + \det([A_1 | C_1]_2) + \det([A_1 | C_1]_3) \right) j \\ &+ \left(\det([A_1 | D_1]_1) + \det([A_1 | D_1]_2) + \det([A_1 | D_1]_3) \right) k\end{aligned}$$

şeklinde de hesaplanabilir.



Teorem 3.15

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n-1} & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{2n-1} & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{n-11} & \hat{a}_{n-12} & \cdots & \hat{a}_{n-1n-1} & \hat{a}_{n-1n} \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn-1} & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad \text{olsun.} \quad \hat{A} \quad \text{dual} \quad \text{kuaterniyon}$$

matrisinin determinanti

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1) + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | B_1]_s) \right) i + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | C_1]_s) \right) j + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | D_1]_s) \right) k \quad (3.29)$$

şeklinde de hesaplanabilir.

İspat : $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n-1} & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{2n-1} & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{n-11} & \hat{a}_{n-12} & \cdots & \hat{a}_{n-1n-1} & \hat{a}_{n-1n} \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn-1} & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & \cdots & b_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn-1} & b_{nn} \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-11} & c_{n-12} & \cdots & c_{n-1n-1} & c_{n-1n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn-1} & c_{nn} \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n-1} & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n-11} & d_{n-12} & \cdots & d_{n-1n-1} & d_{n-1n} \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn-1} & d_{nn} \end{bmatrix} k$$

şeklinde yazılabilir.

$$S_n = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \right\},$$

$$\dots, \sigma_n = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{array} \right) \Bigg\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} S(\sigma) \hat{a}_{\sigma(1)1} \hat{a}_{\sigma(2)2} \hat{a}_{\sigma(3)3} \dots \hat{a}_{\sigma(n)n} \\ &= S(\sigma_1) \hat{a}_{\sigma_1(1)1} \hat{a}_{\sigma_1(2)2} \hat{a}_{\sigma_1(3)3} \dots \hat{a}_{\sigma_1(n)n} + S(\sigma_2) \hat{a}_{\sigma_2(1)1} \hat{a}_{\sigma_2(2)2} \hat{a}_{\sigma_2(3)3} \dots \hat{a}_{\sigma_2(n)n} + \dots \\ &\quad \dots + S(\sigma_n) \hat{a}_{\sigma_n(1)1} \hat{a}_{\sigma_n(2)2} \hat{a}_{\sigma_n(3)3} \dots \hat{a}_{\sigma_n(n)n} \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} S(\sigma_1) \hat{a}_{\sigma_1(1)1} \hat{a}_{\sigma_1(2)2} \hat{a}_{\sigma_1(3)3} \dots \hat{a}_{\sigma_1(n)n} &= \hat{a}_{11} \hat{a}_{22} \hat{a}_{33} \dots \hat{a}_{nn} \\ &= (a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k)(a_{22} + b_{22}i + c_{22}j + d_{22}k)(a_{33} + b_{33}i + c_{33}j + d_{33}k) \dots \\ &\quad \dots (a_{nn} + b_{nn}i + c_{nn}j + d_{nn}k) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} \\ &\quad + (b_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} + a_{11}b_{22}a_{33} \dots a_{nn} + a_{11}a_{22}b_{33} \dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{22}a_{33} \dots b_{nn})i \\ &\quad + (c_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} + a_{11}c_{22}a_{33} \dots a_{nn} + a_{11}a_{22}c_{33} \dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{22}a_{33} \dots c_{nn})j \\ &\quad + (d_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} + a_{11}d_{22}a_{33} \dots a_{nn} + a_{11}a_{22}d_{33} \dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{22}a_{33} \dots d_{nn})k \end{aligned} \quad (3.31)$$

ve

$$\begin{aligned} S(\sigma_2) \hat{a}_{\sigma_2(1)1} \hat{a}_{\sigma_2(2)2} \hat{a}_{\sigma_2(3)3} \dots \hat{a}_{\sigma_2(n)n} &= -\hat{a}_{11} \hat{a}_{32} \hat{a}_{23} \dots \hat{a}_{nn} \\ &= -(a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k)(a_{32} + b_{32}i + c_{32}j + d_{32}k)(a_{23} + b_{23}i + c_{23}j + d_{23}k) \dots \\ &\quad \dots (a_{nn} + b_{nn}i + c_{nn}j + d_{nn}k) \\ &= -a_{11}a_{32}a_{23} \dots a_{nn} \\ &\quad - (b_{11}a_{32}a_{23} \dots a_{nn} + a_{11}b_{32}a_{23} \dots a_{nn} + a_{11}a_{32}b_{23} \dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{32}a_{23} \dots b_{nn})i \\ &\quad - (c_{11}a_{32}a_{23} \dots a_{nn} + a_{11}c_{32}a_{23} \dots a_{nn} + a_{11}a_{32}c_{23} \dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{32}a_{23} \dots c_{nn})j \\ &\quad - (d_{11}a_{32}a_{23} \dots a_{nn} + a_{11}d_{32}a_{23} \dots a_{nn} + a_{11}a_{32}d_{23} \dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{32}a_{23} \dots d_{nn})k \end{aligned} \quad (3.32)$$

ve

$$n \text{ çift ise } S(\sigma_n) = +1 ,$$

$$n \text{ tek ise } S(\sigma_n) = -1$$

olup

$$\begin{aligned} S(\sigma_n) \hat{a}_{\sigma_n(1)1} \hat{a}_{\sigma_n(2)2} \hat{a}_{\sigma_n(3)3} \dots \hat{a}_{\sigma_n(n)n} &= S(\sigma_n) \hat{a}_{11} \hat{a}_{n2} \hat{a}_{23} \dots \hat{a}_{n-1n} \\ &= (a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k)(a_{n2} + b_{n2}i + c_{n2}j + d_{n2}k)(a_{23} + b_{23}i + c_{23}j + d_{23}k) \dots \\ &\quad \dots (a_{n-1n} + b_{n-1n}i + c_{n-1n}j + d_{n-1n}k) \\ &= a_{11}a_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} \\ &\quad + (b_{11}a_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{11}b_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{11}a_{n2}b_{23} \dots a_{n-1n} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23} \dots b_{n-1n})i \\ &\quad + (c_{11}a_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{11}c_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{11}a_{n2}c_{23} \dots a_{n-1n} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23} \dots c_{n-1n})j \\ &\quad + (d_{11}a_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{11}d_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{11}a_{n2}d_{23} \dots a_{n-1n} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23} \dots d_{n-1n})k \quad (3.33) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.31), (3.32) ve (3.33) eşitlikleri (3.30) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\det(\hat{A}) = & a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} - a_{11}a_{32}a_{23}\dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23}\dots a_{n-1n} \\
& + (b_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} + a_{11}b_{22}a_{33}\dots a_{nn} + a_{11}a_{22}b_{33}\dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{22}a_{33}\dots b_{nn} \\
& - b_{11}a_{32}a_{23}\dots a_{nn} - a_{11}b_{32}a_{23}\dots a_{nn} - a_{11}a_{32}b_{23}\dots a_{nn} - \dots - a_{11}a_{32}a_{23}\dots b_{nn} \\
& + \dots\dots\dots \\
& + b_{11}a_{n2}a_{23}\dots a_{n-1n} + a_{11}b_{n2}a_{23}\dots a_{n-1n} + a_{11}a_{n2}b_{23}\dots a_{n-1n} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23}\dots b_{n-1n})i \\
& + (c_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} + a_{11}c_{22}a_{33}\dots a_{nn} + a_{11}a_{22}c_{33}\dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{22}a_{33}\dots c_{nn} \\
& - c_{11}a_{32}a_{23}\dots a_{nn} - a_{11}c_{32}a_{23}\dots a_{nn} - a_{11}a_{32}c_{23}\dots a_{nn} - \dots - a_{11}a_{32}a_{23}\dots c_{nn} \\
& + \dots\dots\dots \\
& + c_{11}a_{n2}a_{23}\dots a_{n-1n} + a_{11}c_{n2}a_{23}\dots a_{n-1n} + a_{11}a_{n2}c_{23}\dots a_{n-1n} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23}\dots c_{n-1n})j \\
& + (d_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} + a_{11}d_{22}a_{33}\dots a_{nn} + a_{11}a_{22}d_{33}\dots a_{nn} + \dots + a_{11}a_{22}a_{33}\dots d_{nn} \\
& - d_{11}a_{32}a_{23}\dots a_{nn} - a_{11}d_{32}a_{23}\dots a_{nn} - a_{11}a_{32}d_{23}\dots a_{nn} - \dots - a_{11}a_{32}a_{23}\dots d_{nn} \\
& + \dots\dots\dots \\
& + d_{11}a_{n2}a_{23}\dots a_{n-1n} + a_{11}d_{n2}a_{23}\dots a_{n-1n} + a_{11}a_{n2}d_{23}\dots a_{n-1n} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23}\dots d_{n-1n})k \quad (3.34)
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} - a_{11}a_{32}a_{23}\cdots a_{nn} + \cdots + a_{11}a_{n2}a_{23}\cdots a_{n-1n} \quad (3.35)$$

bulunur.

$$\det([A_1 | B_1]_1) = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantı birinci sütuna göre açılırsa

$$\det([A_1 | B_1]_1) = b_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} - b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + b_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-22} & a_{n-23} & \cdots & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

elde edilir.

$$b_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ifadesinin determinant açılımı yapılırsa}$$

$$\begin{aligned}
&= b_{11} \left(a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots \right. \\
&\quad \left. + a_{n2} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-23} & a_{n-24} & \dots & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{vmatrix} \right) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde diğer açılımlar da yapıldıktan sonra elde edilen (3.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$\det([A_1 | B_1]_1) = b_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} - b_{11}a_{32}a_{23} \dots a_{nn} + \dots + b_{11}a_{n2}a_{23} \dots a_{n-1n} \quad (3.38)$$

elde edilir.

$$\det([A_1 | B_1]_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & b_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantı birinci sütuna göre açılırsa

$$\begin{aligned}
\det([A_1 | B_1]_2) &= a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ b_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ b_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} b_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ b_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ b_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\
&\quad \dots + a_{n1} \begin{vmatrix} b_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ b_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-22} & a_{n-23} & \dots & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \\ b_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{vmatrix} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ b_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ b_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ifadesinin determinant açılımı yapılırsa}$$

$$= a_{11} \left(\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} - b_{32} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots \right. \\ \left. + b_{n2} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-23} & a_{n-24} & \cdots & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{vmatrix} \right) \quad (3.40)$$

bulunur. Benzer şekilde diğer açılımlar da yapıldıktan sonra elde edilen ifadeler (3.40) da yerine yazılırsa

$$\det([A_1 | B_1]_2) = a_{11}b_{22}a_{33}\cdots a_{nn} - a_{11}b_{32}a_{23}\cdots a_{nn} + \dots + a_{11}b_{n2}a_{23}\cdots a_{n-1n} \quad (3.41)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\det([A_1 | B_1]_s)$, $s = 2, \dots, n-1$ için yapılır.

$$\det([A_1 | B_1]_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantı birinci sütuna göre açılırsa

$$\begin{aligned}
\det([A_1 | B_1]_n) = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & b_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & b_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\
& \dots + a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & b_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-22} & a_{n-23} & \dots & a_{n-2n-1} & b_{n-2n} \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \end{vmatrix}
\end{aligned} \quad (3.42)$$

elde edilir.

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & b_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ifadesinin determinant açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
= & a_{11} \left(a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n-1} & b_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n-1} & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \dots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n-1} & b_{2n} \\ a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n-1} & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \dots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix} + \dots \right. \\
& \left. + a_{n2} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n-1} & b_{2n} \\ a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n-1} & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-23} & a_{n-24} & \dots & a_{n-2n-1} & b_{n-2n} \\ a_{n-13} & a_{n-14} & \dots & a_{n-1n-1} & b_{n-1n} \end{vmatrix} \right)
\end{aligned} \quad (3.43)$$

bulunur. Benzer şekilde diğer açılımlar da yapıldıktan sonra elde edilen ifadeler (3.43) de yerine yazılırsa

$$\det([A_1 | B_1]_n) = a_{11}a_{22}a_{33}\dots b_{nn} - a_{11}a_{32}a_{23}\dots b_{nn} + \dots + a_{11}a_{n2}a_{23}\dots b_{n-1n} \quad (3.44)$$

elde edilir.

Buradan benzer şekilde $\det([A_1 | C_1]_s)$ ve $\det([A_1 | D_1]_s)$ $s = 1, 2, \dots, n$ için hesaplamalar yapılır.

Benzer şekilde elde edilen denklemler ve (3.35), (3.38), (3.41) ve (3.44) eşitlikleri

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1) + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | B_1]_s) \right) i + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | C_1]_s) \right) j + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | D_1]_s) \right) k$$

denkleminde yerine yazılırsa (3.34) denklemi elde edilir.

Yani $\hat{A}$ matrisinin klasik determinanı

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1) + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | B_1]_s) \right) i + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | C_1]_s) \right) j + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | D_1]_s) \right) k$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 3.31

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ dual kuaterniyon matrisinin determinantını}$$

hesaplayalım.

$$\text{Çözüm : } \hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} k$$

olmak üzere (3.29) denkleminde

$$\det(\hat{A}) = 10 + (-2+2)i + (7-4)j + (1-4)k = 10 + 3j - 3k$$

bulunur. (3.26) ile aynı olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 3.32

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin}$$

determinantını bulalım.

Çözüm : $\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} k$$

olmak üzere (3.29) denkleminde

$$\det(\hat{A}) = -1 + (-3 - 2 - 1)i + (6 - 6 + 7)j + (0 + 9 + 2)k$$

$$= -1 - 6i + 7j + 11k$$

Örnek 3.33

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 3-j & 2+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm : $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k$

olmak üzere (3.29) denkleminde

$$\det(\hat{A}) = -4 + (0 - 2)i + (2 + 0)j + (0 + 0)k = -4 - 2i + 2j$$

bulunur.

II

Şimdi $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantını farklı bir yol ile elde edelim:

Teorem 3.16

$\hat{A}=[\hat{a}_{rs}]=A_1+B_1i+C_1j+D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisinin determinantı, A regüler matris olmak üzere

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1)(1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k) \quad (3.45)$$

şeklindedir.

İspat : $\hat{A}=A_1+B_1i+C_1j+D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için A_1 regüler olduğundan

$$\hat{A}=A_1(I+A_1^{-1}B_1i+A_1^{-1}C_1j+A_1^{-1}D_1k)$$

olmak üzere

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1(I+A_1^{-1}B_1i+A_1^{-1}C_1j+A_1^{-1}D_1k))$$

veya

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1) \det(I+A_1^{-1}B_1i+A_1^{-1}C_1j+A_1^{-1}D_1k) \quad (3.46)$$

yazılabilir.

$$\hat{P}=A_1^{-1}(B_1i+C_1j+D_1k)=[\hat{p}_{rs}] \text{ olmak üzere}$$

$$\det(I+A_1^{-1}(B_1i+C_1j+D_1k)) = \det(I+\hat{P})$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{p}_{11} & \hat{p}_{12} & \dots & \hat{p}_{1n-1} & \hat{p}_{1n} \\ \hat{p}_{21} & \hat{p}_{22} & \dots & \hat{p}_{2n-1} & \hat{p}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{p}_{n-11} & \hat{p}_{n-12} & \dots & \hat{p}_{n-1n-1} & \hat{p}_{n-1n} \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n2} & \dots & \hat{p}_{nn-1} & \hat{p}_{nn} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\hat{p}_{11} & \hat{p}_{12} & \dots & \hat{p}_{1n-1} & \hat{p}_{1n} \\ \hat{p}_{21} & 1+\hat{p}_{22} & \dots & \hat{p}_{2n-1} & \hat{p}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{p}_{n-11} & \hat{p}_{n-12} & \dots & 1+\hat{p}_{n-1n-1} & \hat{p}_{n-1n} \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n2} & \dots & \hat{p}_{nn-1} & 1+\hat{p}_{nn} \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinant birinci satıra göre açılırsa,

$$= (1+\hat{p}_{11}) \begin{vmatrix} 1+\hat{p}_{22} & \hat{p}_{23} & \dots & \hat{p}_{2n} \\ \hat{p}_{32} & 1+\hat{p}_{33} & \dots & \hat{p}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n3} & \dots & 1+\hat{p}_{nn} \end{vmatrix} - \hat{p}_{12} \begin{vmatrix} \hat{p}_{21} & \hat{p}_{23} & \dots & \hat{p}_{2n} \\ \hat{p}_{31} & 1+\hat{p}_{33} & \dots & \hat{p}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n3} & \dots & 1+\hat{p}_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \hat{p}_{1n} \begin{vmatrix} \hat{p}_{21} & 1+\hat{p}_{22} & \dots & \hat{p}_{2n-1} \\ \hat{p}_{31} & \hat{p}_{32} & \dots & \hat{p}_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n2} & \dots & \hat{p}_{nn-1} \end{vmatrix}$$

olup

$$\begin{vmatrix} \hat{p}_{21} & \hat{p}_{23} & \dots & \hat{p}_{2n} \\ \hat{p}_{31} & 1+\hat{p}_{33} & \dots & \hat{p}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n3} & \dots & 1+\hat{p}_{nn} \end{vmatrix} \text{ determinantı birinci satıra göre açıldığında } \hat{p}_{12} \text{ ile}$$

çarpılacak olan ifadelerde pure dual kuaterniyon terimleri olduğundan

$$\hat{p}_{12} \begin{vmatrix} \hat{p}_{21} & \hat{p}_{23} & \dots & \hat{p}_{2n} \\ \hat{p}_{31} & 1+\hat{p}_{33} & \dots & \hat{p}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n3} & \dots & 1+\hat{p}_{nn} \end{vmatrix}$$

ifadesinin sonucu sıfır olur. Aynı şekilde yukarıdaki ifadenin sağında kalan ifadelerin de determinantı sıfır olur. Buradan

$$\det(I + \hat{P}) = (1 + \hat{p}_{11}) \begin{vmatrix} 1+\hat{p}_{22} & \hat{p}_{23} & \dots & \hat{p}_{2n} \\ \hat{p}_{32} & 1+\hat{p}_{33} & \dots & \hat{p}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{n1} & \hat{p}_{n3} & \dots & 1+\hat{p}_{nn} \end{vmatrix}_{n-1 \times n-1}$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin de aynı şekilde determinantı birinci satıra göre açıldığında aynı işlemler tekrar edeceğinden

$$\det(I + \hat{P}) = (1 + \hat{p}_{11})(1 + \hat{p}_{22}) \dots (1 + \hat{p}_{nn})$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \det(I + \hat{P}) &= 1 + \hat{p}_{11} + \hat{p}_{22} + \dots + \hat{p}_{nn} \\ &= 1 + iz(\hat{P}) = 1 + iz(A_1^{-1}(B_1i + C_1j + D_1k)) \\ &= 1 + iz(A_1^{-1}B_1i + A_1^{-1}C_1j + A_1^{-1}D_1k) \\ &= 1 + iz(A_1^{-1}B_1i) + iz(A_1^{-1}C_1j) + iz(A_1^{-1}D_1k) \\ &= 1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\det(I + A_1^{-1}B_1i + A_1^{-1}C_1j + A_1^{-1}D_1k) = 1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k \quad (3.47)$$

elde edilir.

(3.47), (3.46) denkleminde yerine yazılırsa

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1)(1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k)$$

elde edilir.

Sonuç 3.20

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olmak üzere (3.45) eşitliği geçerlidir.}$$

$$\text{İspat : } \det(\hat{A}) = \hat{a}_{11}\hat{a}_{22} - \hat{a}_{21}\hat{a}_{12}$$

$$\begin{aligned} &= (a_{11} + b_{11}i + c_{11}j + d_{11}k)(a_{22} + b_{22}i + c_{22}j + d_{22}k) \\ &\quad - (a_{21} + b_{21}i + c_{21}j + d_{21}k)(a_{12} + b_{12}i + c_{12}j + d_{12}k) \\ &= (a_{11}a_{22} + (a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22})i + (a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22})j + (a_{11}d_{22} + d_{11}a_{22})k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (a_{21}a_{12} + (a_{21}b_{12} + b_{21}a_{12})i + (a_{21}c_{12} + c_{21}a_{12})j + (a_{21}d_{12} + d_{21}a_{12})k) \\
& = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + (a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12})i \\
& \quad + (a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} - a_{21}c_{12} - c_{21}a_{12})j + (a_{11}d_{22} + d_{11}a_{22} - a_{21}d_{12} - d_{21}a_{12})k \\
& = \det(A) \left(1 + \frac{(a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12})}{\det(A)} i + \frac{(a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} - a_{21}c_{12} - c_{21}a_{12})}{\det(A)} j \right. \\
& \quad \left. + \frac{(a_{11}d_{22} + d_{11}a_{22} - a_{21}d_{12} - d_{21}a_{12})}{\det(A)} k \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ise } A_1^{-1} = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$A_1^{-1}B_1 = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})} \begin{bmatrix} a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} & a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22} \\ -a_{21}b_{11} + a_{11}b_{21} & -a_{21}b_{12} + a_{11}b_{22} \end{bmatrix}$$

veya

$$iz(A_1^{-1}B_1) = \frac{a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{11}b_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

elde edilir. Ayrıca

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } A_1^{-1} = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$A_1^{-1}C_1 = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})} \begin{bmatrix} a_{22}c_{11} - a_{12}c_{21} & a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22} \\ -a_{21}c_{11} + a_{11}c_{21} & -a_{21}c_{12} + a_{11}c_{22} \end{bmatrix}$$

veya

$$iz(A_1^{-1}C_1) = \frac{a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{11}b_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

elde edilir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } A_1^{-1} = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$A_1^{-1}D_1 = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})} \begin{bmatrix} a_{22}d_{11} - a_{12}d_{21} & a_{22}d_{12} - a_{12}d_{22} \\ -a_{21}d_{11} + a_{11}d_{21} & -a_{21}d_{12} + a_{11}d_{22} \end{bmatrix}$$

veya

$$iz(A_1^{-1}D_1) = \frac{a_{22}d_{11} - a_{12}d_{21} - a_{21}d_{12} + a_{11}d_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

elde edilir. O halde bu eşitlikler yardımıyla

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1) (1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Sonuç 3.21

$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için $\|q\| = |a|$ olduğu bulunur.

$\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisinin determinanı $\det(\hat{A}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olduğundan

$$\|\det(\hat{A})\| = |\det(A_1)| \quad (3.48)$$

elde edilir.

Örnek 3.34

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ dual kuaterniyon matrisinin determinantını}$$

(3.45) yardımı ile hesaplayalım.

$$\textbf{Çözüm : } A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$A_1^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, A_1^{-1}C_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 \\ 0.8 & -0.4 \end{bmatrix}, A_1^{-1}D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ -0.6 & -0.4 \end{bmatrix}, \det(A_1) = 10,$$

$$\det(\hat{A}) = 10(1 + 0i + 0.3j - 0.3k) = 10 + 3j - 3k$$

elde edilir.

Örnek 3.35

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin}$$

determinantını (3.45) yardımı ile hesaplayalım.

$$\text{Çözüm : } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^{-1}C_1 = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -11 \\ 9 & 6 & 16 \\ -4 & -3 & -7 \end{bmatrix}, \quad A_1^{-1}D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

olup

$$\det(\hat{A}) = -1(1+6i-7j-11k) = -1-6i+7j+11k$$

elde edilir.

Örnek 3.36

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 3-j & 2+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin determinantını}$$

(3.45) yardımı ile hesaplayalım.

$$\text{Çözüm : } A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -2/4 & 2/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}, \quad A_1^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} -2/4 & 2/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/4 \end{bmatrix},$$

$$A_1^{-1}C_1 = \begin{bmatrix} -2/4 & 2/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$\det(\hat{A}) = -4\left(1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + 0k\right)$$

$$= -4 - 2i + 2j$$

elde edilir.

3.5.4 $M_{4n}(\mathbb{R}) \cong M_4(M_n(\mathbb{R}))$ Uzayının Elemanlarının Determinantı

$$M_{4n}(\mathbb{R}) = Sp \left\{ \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix} \right\}$$

ve

$$S_{4n}(\mathbb{R}) = Sp \left\{ \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right\}$$

uzaylarının baz elemanlarının determinantını inceleyelim:

i) $M_{4n}(\mathbb{R})$ uzayının baz elemanlarının determinantı 0 dır.

ii) $S_{4n}(\mathbb{R})$ uzayının baz elemanlarının $\{\mathfrak{R}_{\hat{1}}, \mathfrak{R}_{\hat{I}}, \mathfrak{R}_{\hat{J}}, \mathfrak{R}_{\hat{K}}\}$ determinantını hesaplırsak

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{1}}) = \det(I_n) \det(I_n) \det(I_n) \det(I_n) = (\det(I_n))^4 = 1,$$

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{I}}) = 0, \det(\mathfrak{R}_{\hat{J}}) = 0 \text{ ve } \det(\mathfrak{R}_{\hat{K}}) = 0$$

elde edilir. Şimdi genel olarak $S_{4n}(\mathbb{R})$ uzayında her

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \in S_{4n}(\mathbb{R}) \text{ matrisinin determinantını hesaplayalım:}$$

$$A_1 \in M_n(\mathbb{R}) \text{ ve } \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \in S_{4n}(\mathbb{R}) \text{ olmak üzere } \mathfrak{R}_{\hat{A}} \text{ matrisinin}$$

determinantını öncelikle $n=1, n=2$ için hesaplayalım:

$n=1$ için $A_1 = a_{11} \in M_1(\mathbb{R})$ olmak üzere $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ matrisinin determinantı

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{11} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{11} \end{vmatrix}_{4 \times 4} = (a_{11})^4 = (\det(A_1))^4$$

elde edilir.

$n = 2$ için

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

olmak üzere $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ matrisinin

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{8 \times 8}$$

determinantı birinci satıra göre açılım yapılarak hesaplanırsa

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{8 \times 8}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{22} & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ c_{22} & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ d_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3.49}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})^3
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})^4 = (\det(A_1))^4$$

elde edilir.

Şimdi ise en genel halde verilen $S_{4n}(\mathbb{R})$ uzayının bir $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ elemanının determinantını hesaplayalım:

$$A_1 \in M_n(\mathbb{R}) \text{ ve } \mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix} \in S_{4n}(\mathbb{R}) \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) &= \begin{vmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{vmatrix} = \det(A_1) \begin{vmatrix} A_1 & 0_n & 0_n \\ 0_n & A_1 & 0_n \\ 0_n & 0_n & A_1 \end{vmatrix} = (\det(A_1))^2 \begin{vmatrix} A_1 & 0_n \\ 0_n & A_1 \end{vmatrix} \\ &= (\det(A_1))^4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.22

$\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = (\det(A_1))^4 \quad (3.50)$$

dir.

Sonuç 3.23

$\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere (3.48) ve (3.50) denklemlerinden

$$\|\det(\hat{A})\|^4 = \det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) \quad (3.51)$$

elde edilir.

3.6 Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersinin Hesaplanması

Bu bölümde $\hat{A}=[\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisinin tersi Ek Matris ve Reel Matris temsili yardımı ile hesaplanacaktır.

3.6.1 Dual Kuaterniyon Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Matrisin Tersi

Tanım 3.21

$\hat{A}=[\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\det(\hat{A})$ pure olmayan bir dual kuaterniyon olacak şekilde bir dual kuaterniyon matris olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin transpozunda elemanlarının yerine kofaktörlerinin yazılmasıyla elde edilen matrise $\hat{A}$ nın ek matrisi denir ve $ek(\hat{A})$ ile gösterilir. Kısaca bir matrisin eki için

$$ek(\hat{A}) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \dots & \hat{A}_{1n} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \dots & \hat{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{n1} & \hat{A}_{n2} & \dots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}^T$$

yazılabilir.

Teorem 3.17

$\hat{A}=[\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ (pure olmayan) dual kuaterniyon matrisi verilsin.

$$\hat{A} ek(\hat{A}) = ek(\hat{A}) \hat{A} = \det(\hat{A}) \hat{I}_n \quad (3.52)$$

dır.

$$\text{ispat : } \hat{A} ek(\hat{A}) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{a}_{i1} & \hat{a}_{i2} & \dots & \hat{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21} & \dots & \hat{A}_{j1} & \dots & \hat{A}_{n1} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{22} & \dots & \hat{A}_{j2} & \dots & \hat{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{A}_{1n} & \hat{A}_{2n} & \dots & \hat{A}_{jn} & \dots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

çarpımı yapılırsa $\hat{A} ek(\hat{A})$ matrisinin (r, s) bileşeni

$$c_{rs} = \hat{a}_{r1} \hat{A}_{s1} + \hat{a}_{r2} \hat{A}_{s2} + \dots + \hat{a}_{rn} \hat{A}_{sn}$$

olarak bulunur. Eğer

$$r = s \text{ ise } \hat{A}ek(\hat{A}) \text{ ifadesinin } (r, s) \text{ bileşeni için } \hat{a}_{r1}\hat{A}_{s1} + \hat{a}_{r2}\hat{A}_{s2} + \cdots + \hat{a}_{rn}\hat{A}_{sn} = |\hat{A}|$$

$r \neq s$ ise $\hat{A}ek(\hat{A})$ ifadesinin (r, s) bileşeni için (3.28) eşitliğine benzer olarak

$$\hat{a}_{r1}\hat{A}_{s1} + \hat{a}_{r2}\hat{A}_{s2} + \cdots + \hat{a}_{rn}\hat{A}_{sn} = 0$$

elde edilir. O halde

$$\hat{A}ek(\hat{A}) = \begin{bmatrix} \det(\hat{A}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(\hat{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(\hat{A}) \end{bmatrix} = \det(\hat{A}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \det(\hat{A}) \hat{I}_n$$

elde edilir. Benzer şekilde $ek(\hat{A})\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin (r, s) bileşeni için

$$\hat{A}_{1r}\hat{a}_{1s} + \hat{A}_{2r}\hat{a}_{2s} + \cdots + \hat{A}_{nr}\hat{a}_{ns} = \begin{cases} \det(\hat{A}), r = s \\ 0, r \neq s \end{cases}$$

yazılabilir. O halde $ek(\hat{A})\hat{A} = \det(\hat{A})\hat{I}_n$ bulunur.

Teorem 3.18

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\det(\hat{A})$ pure olmayan bir dual kuaterniyon

olacak şekilde bir dual kuaterniyon matris olsun. Bu durumda $\det(\hat{A}) \neq 0$ olmak üzere

$$(\det(\hat{A}) = a + bi + cj + dk = \det(A_1)(1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k))$$

olduğundan $\det(A_1) \neq 0$ veya $a \neq 0$)

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\hat{A})}ek(\hat{A})$$

(3.53)

dir.

ispat : $\hat{A}ek(\hat{A}) = ek(\hat{A})\hat{A} = \det(\hat{A})\hat{I}_n$ olduğunu biliyoruz. $\det(\hat{A}) \neq 0$ olduğundan

$$\hat{A} \left(\frac{1}{\det(\hat{A})} ek(\hat{A}) \right) = \left(\frac{1}{\det(\hat{A})} ek(\hat{A}) \right) \hat{A} = \hat{I}_n \text{ elde edilir.}$$

Bir dual kare matrisin tersi tanımından

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\hat{A})} ek(\hat{A})$$

elde edilir.

Not 3.12

1) $\hat{A}$ dual kuaterniyon kare matrisinin tersi varsa $\hat{A}$ matrisine regüler matris denir.

Teorem 3.2 gereğince $\det(A_1) \neq 0$ olduğundan $\hat{A}$ ya regüler matris denir.

Not 3.13

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon kare matrisi verilsin. $\det(A_1) \neq 0$ olmak üzere

$$(\Re_{\hat{A}})^{-1} = \frac{ek(\Re_{\hat{A}})}{\det(\Re_{\hat{A}})} \quad (\det(\Re_{\hat{A}})I_{4n} = \Re_{\hat{A}} ek(\Re_{\hat{A}}))$$

olmak üzere reel matrisler için yazılabildiğini biliyoruz.

Teorem 3.19

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ pure olmayan dual kuaterniyon matrisi olsun. $\det(A_1) \neq 0$ olmak üzere

$$\det(ek(\hat{A})) = \det(\hat{A})^{n-1} \quad (3.54)$$

dır.

İspat : (3.52) ifadesinin her iki tarafının determinantı alınırsa,

$$\det(\hat{A} ek(\hat{A})) = \det(ek(\hat{A}) \hat{A}) = \det(\hat{A})^n$$

olup

$$\det(\hat{A}) \det(ek(\hat{A})) = \det(ek(\hat{A})) \det(\hat{A}) = \det(\hat{A})^n$$

elde edilir. Buradan

$$\det(ek(\hat{A})) = \det(\hat{A})^{n-1}$$

bulunur.

Sonuç 3.24

$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisi verilsin. $\det(A_1) \neq 0$ olmak üzere

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} ek(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = \sqrt[n-1]{\|\det(ek(\hat{A}))\|^4} I_{4n} = \det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) I_{4n} \quad (3.55)$$

dir.

ispat : $\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) I_{4n} = \mathfrak{R}_{\hat{A}} ek(\mathfrak{R}_{\hat{A}})$ olduğunu biliyoruz. $\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = \|\det(\hat{A})\|^4$ olduğundan

$$\|\det(\hat{A})\|^4 I_{4n} = \mathfrak{R}_{\hat{A}} ek(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.54) denkleminin her iki tarafının normunun dördüncü kuvveti alınırsa

$$\|\det(ek(\hat{A}))\|^4 = \|\det(\hat{A})^{n-1}\|^4$$

bulunur.

$\det(\hat{A}) = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ olmak üzere

$$\|\det(ek(\hat{A}))\|^4 = \|a_1^{n-1} + a_1^{n-2}(n-1)b_1 i + a_1^{n-2}(n-1)c_1 j + a_1^{n-2}(n-1)d_1 k\|^4$$

elde edilir. Buradan

$$\|\det(ek(\hat{A}))\|^4 = a_1^{4n-4}$$

elde edilir.

$$\|\det(\hat{A})\|^{4(n-1)} = a_1^{4n-4}$$

olup

$$\|\det(ek(\hat{A}))\|^4 = \left(\|\det(\hat{A})\|^4 \right)^{n-1}$$

bulunur. Buradan

$$\det(\Re_{\hat{A}}) = \|\det(\hat{A})\|^4 = {}^{n-1}\sqrt{\|\det(ek(\hat{A}))\|^4} \quad (3.57)$$

elde edilir. Buradan (3.57) ifadesi (3.56) de yerine yazılırsa

$$\Re_{\hat{A}} ek(\Re_{\hat{A}}) = {}^{n-1}\sqrt{\|\det(ek(\hat{A}))\|^4} I_{4n} = \det(\Re_{\hat{A}}) I_{4n}$$

elde edilir.

Örnek 3.37

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ tersini ek matris yardımı ile bulalım.}$$

$$\textbf{Çözüm : } \det(\hat{A}) = 10+3j-3k,$$

$$A_{11} = (-1)^2(2+i-j) = 2+i-j,$$

$$A_{11} = (-1)^3(2+3j-k) = -2-3j+k,$$

$$A_{21} = (-1)^3(-1+i+2k) = 1-i-2k,$$

$$A_{11} = (-1)^4(4-i+2j+k) = 4-i+2j+k$$

ve

$$ek(\hat{A}) = \begin{bmatrix} 2+i-j & -2-3j+k \\ 1-i-2k & 4-i+2j+k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2+i-j & 1-i-2k \\ -2-3j+k & 4-i+2j+k \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

olup (3.53) denkleminde

$$\frac{2+i-j}{10+3j-3k} = \frac{2+i-j}{(10-3j+3k)} = \frac{20+10i-16j+6k}{10^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i - \frac{16}{10^2}j + \frac{6}{10^2}k,$$

$$\frac{1-i-2k}{10+3j-3k} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i - \frac{3}{10^2}j - \frac{17}{10^2}k,$$

$$\frac{-2-3j+k}{10+3j-3k} = -\frac{1}{5} - \frac{24}{10^2}j + \frac{4}{10^2}k,$$

$$\frac{4-i+2j+k}{10+3j-3k} = \frac{4}{10} - \frac{1}{10}i + \frac{8}{10^2}j + \frac{22}{10^2}k$$

ve

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i - \frac{16}{10^2}j + \frac{6}{10^2}k & \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i - \frac{3}{10^2}j - \frac{17}{10^2}k \\ -\frac{1}{5} - \frac{24}{10^2}j + \frac{4}{10^2}k & \frac{4}{10} - \frac{1}{10}i + \frac{8}{10^2}j + \frac{22}{10^2}k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Sağlama : } \hat{A}\hat{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i - \frac{16}{10^2}j + \frac{6}{10^2}k & \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i - \frac{3}{10^2}j - \frac{17}{10^2}k \\ -\frac{1}{5} - \frac{24}{10^2}j + \frac{4}{10^2}k & \frac{4}{10} - \frac{1}{10}i + \frac{8}{10^2}j + \frac{22}{10^2}k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Örnek 3.38

2×2 tipindeki $\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix}$ dual kuaterniyon matrisini düşünelim.

Bu matrisin reel matrisin tersi yardımı ile bulalım.

Çözüm : $\hat{A}$ matrisini şu formda yazalım:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}i + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}j + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}k \end{aligned}$$

Sonuç olarak; $\hat{A}$ 'nın reel matris temsilleri şu şekilde bulunur:

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\det(\hat{A}) = 10 + 3j - 3k, \det(\bar{\hat{A}}) = 10 - 3j + 3k,$$

ve

$$\det(\hat{A})\det(\bar{\hat{A}}) = 100$$

olup

$$\det(\Re_{\hat{A}}) = (\det(\hat{A})\det(\bar{\hat{A}}))^2 = \|\det(\hat{A})\|^4 = \|\det(\bar{\hat{A}})\|^4 = 10000 \neq 0$$

elde edilir.

$$ek(\Re_{\hat{A}}) = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 & 1000 & 0 & -1600 & -2400 & 600 & 400 \\ 1000 & 4000 & -1000 & -1000 & -300 & 800 & -1700 & 2200 \\ 0 & 0 & 2000 & -2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 4000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 & -2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 & -2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 4000 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2000 & 4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1000 & 2000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & -2000 & 4000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1600 & -300 & 0 & 0 & 2000 & 1000 & 0 & 0 \\ -2400 & 800 & 0 & 0 & -2000 & 4000 & 0 & 0 \\ 600 & -1700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 & 1000 \\ 400 & 2200 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2000 & 4000 \end{bmatrix}$$

$$\Re_{\hat{A}}^{-1} = \frac{ek(\Re_{\hat{A}})}{\det(\Re_{\hat{A}})} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 4/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & -1/10 & 1/5 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & -1/5 & 4/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16/100 & -3/100 & 0 & 0 & 1/5 & 1/10 & 0 & 0 \\ -24/100 & 8/100 & 0 & 0 & -1/5 & 4/10 & 0 & 0 \\ 6/100 & -17/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/10 \\ 4/100 & 22/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 4/10 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i - \frac{16}{10^2}j + \frac{6}{10^2}k & \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i - \frac{3}{10^2}j - \frac{17}{10^2}k \\ -\frac{1}{5} - \frac{24}{10^2}j + \frac{4}{10^2}k & \frac{4}{10} - \frac{1}{10}i + \frac{8}{10^2}j + \frac{22}{10^2}k \end{bmatrix}$$

bulunur.

Örnek 3.39

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ için (3.74) eşitliğini inceleyelim.}$$

$$ek(\hat{A}) = \begin{bmatrix} 2+i-j & 1-i-2k \\ -2-3j+k & 4-i+2j+k \end{bmatrix},$$

$$\det(ek(\hat{A})) = 10 + 3j - 3k,$$

$$n = 2,$$

olup

$$n^{-1} \sqrt{\|\det(ek(\hat{A}))\|^4} I_{4n} = 10^4 I_{4n} = 10^4 I_{4n}$$

elde edilir.

Örnek 3.40

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ için (3.56) eşitliğini inceleyelim.}$$

$$\begin{aligned} \Re_{\hat{A}} ek(\Re_{\hat{A}}) &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2000 & 4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1000 & 2000 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & -2000 & 4000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1600 & -300 & 0 & 0 & 2000 & 1000 & 0 & 0 \\ -2400 & 800 & 0 & 0 & -2000 & 4000 & 0 & 0 \\ 600 & -1700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 & 1000 \\ 400 & 2200 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2000 & 4000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} = 10^4 I_{4n} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\Re_{\hat{A}} ek(\Re_{\hat{A}}) = 10^4 I_{4n}$$

olup (3.56) denkleminin sağlandığı görülür.

Örnek 3.41

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ dual kuaterniyon matrisinin tersini ek matris}$$

yardımları ile bulalım.

Çözüm : $\det(\hat{A}) = -1 - 6i + 7j + 11k$,

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1-k & 2+2j \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix} = -4 - 3i - 5j - k,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -i+j & 2+2j \\ 3-i & -i-j-k \end{vmatrix} = 6 - 2i + 6j,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -i+j & 1-k \\ 3-i & 2+i \end{vmatrix} = -3 - i + 2j + 3k,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2-j & 3-k \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix} = 6 + 5i + 2j,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2-j & 3-k \\ 2+i & -i-j-k \end{vmatrix} = 6 + 5i + 2j,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1-i & 3-k \\ 3-i & -i-j-k \end{vmatrix} = -9 + 2i - j + 2k,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1-i & 2-j \\ 3-i & 2+i \end{vmatrix} = 4 - i - 3j,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2-j & 3-k \\ 1-k & 2+2j \end{vmatrix} = 1 + 2j + 4k,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1-i & 3-k \\ -i+j & 2+2j \end{vmatrix} = -2 - i + j,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1-i & 2-j \\ -i+j & 1-k \end{vmatrix} = 1 + i - 2j - k$$

ve

$$ek(\hat{A}) = \begin{bmatrix} -4 - 3i - 5j - k & 6 - 2i + 6j & -3 - i + 2j + 3k \\ 6 + 5i + 2j & -9 + 2i - j + 2k & 4 - i - 3j \\ 1 + 2j + 4k & -2 - i + j & 1 + i - 2j - k \end{bmatrix}^T$$

$$ek(\hat{A}) = \begin{bmatrix} -4 - 3i - 5j - k & 6 + 5i + 2j & 1 + 2j + 4k \\ 6 - 2i + 6j & -9 + 2i - j + 2k & -2 - i + j \\ -3 - i + 2j + 3k & 4 - i - 3j & 1 + i - 2j - k \end{bmatrix}$$

olup (3.53) denkleminde

$$\frac{-4-3i-5j-k}{-1-6i+7j+11k} = \frac{-4-3i-5j-k}{(-1+6i-7j-11k)}$$

$$= 4 + (-24+4)i + (28+5)j + (44+1)k = 4 - 21i + 33j + 45k ,$$

$$\frac{6+5i+2j}{-1-6i+7j+11k} = -6+31i-44j-66k ,$$

$$\frac{1+2j+24k}{-1-6i+7j+11k} = -1+6i-9j-15k ,$$

$$\frac{6-2i+6j}{-1-6i+7j+11k} = -6+38i-48j-66k ,$$

$$\frac{6-2i+6j}{-1-6i+7j+11k} = -6+38i-48j-66k ,$$

$$\frac{-9+2i-j+2k}{-1-6i+7j+11k} = 9-56i+64j+97k ,$$

$$\frac{-2-i+j}{-1-6i+7j+11k} = 2-11i+13j+22k ,$$

$$\frac{-3-i+2j+3k}{-1-6i+7j+11k} = 3-17i+19j+30k ,$$

$$\frac{4-i-3j}{-1-6i+7j+11k} = -4+25i-25j-44k ,$$

$$\frac{1+i-2j-k}{-1-6i+7j+11k} = -1+5i-5j-10k$$

olup

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\text{Sağlama: } \hat{A}\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Örnek 3.42

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ için (3.56) eşitliğini inceleyelim.}$$

$$\mathfrak{R}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$ek(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = \det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) \mathfrak{R}_{\hat{A}}^{-1},$$

$$\det(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = 1,$$

$$ek(\mathfrak{R}_{\hat{A}}) = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 31 & 6 & 4 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38 & -56 & -11 & -6 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & 25 & 5 & 3 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & -44 & -9 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 64 & 13 & 0 & 0 & 0 & -6 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & -25 & -5 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & -66 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & -1 \\ -66 & 97 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 9 & 2 \\ 30 & -44 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

olup

$$\Re_{\hat{A}} ek(\Re_{\hat{A}}) = I_{12}$$

elde edilir.

$$\det(ek(\hat{A})) = 1 + 12i - 14j - 22k,$$

$$n = 3,$$

$$\sqrt[n-1]{\|\det(ek(\hat{A}))\|^4} I_{4n} = I_{12},$$

olduğundan

$$\Re_{\hat{A}} ek(\Re_{\hat{A}}) = \sqrt[n-1]{\|\det(ek(\hat{A}))\|^4} I_{4n}$$

doğruluğu görülmüş olur.

2×2 tipindeki bir dual kuaterniyon matrisin tersini bulma (PRATİK YOL)

$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ pure olmayan regüler matrisinin tersi pratik olarak,

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\hat{A})} \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & \hat{a}_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{a}_{11}\hat{a}_{22} - \hat{a}_{12}\hat{a}_{21}} \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & \hat{a}_{11} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.43

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix}, \quad \det(\hat{A}) = 10+3j-3k$$

Çözüm : $\hat{A}^{-1} = \frac{1}{10+3j-3k} \begin{bmatrix} 2+i-j & 1-i-2k \\ -2-3j+k & 4-i+2j+k \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i - \frac{16}{10^2}j + \frac{6}{10^2}k & \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i - \frac{3}{10^2}j - \frac{17}{10^2}k \\ -\frac{1}{5} - \frac{24}{10^2}j + \frac{4}{10^2}k & \frac{4}{10} - \frac{1}{10}i + \frac{8}{10^2}j + \frac{22}{10^2}k \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i - \frac{16}{10^2}j + \frac{6}{10^2}k & \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i - \frac{3}{10^2}j - \frac{17}{10^2}k \\ -\frac{1}{5} - \frac{24}{10^2}j + \frac{4}{10^2}k & \frac{4}{10} - \frac{1}{10}i + \frac{8}{10^2}j + \frac{22}{10^2}k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.6.2 Dual Kuaterniyon Matrisin Tersini Reel Matris Temsili ile Bulma

$\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için, eğer $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I}_n$ ise $\hat{B}$ matrisine $\hat{A}$ matrisinin tersi denir. Tersisi olan $\hat{A}$ matrisi terslenebilir (singüler olmayan) matris olarak adlandırılır.

Dual kuaterniyon matrislerin tersi reel matris temsiliinin tersi kullanılarak bulunacaktır.

Dual kuaterniyon matrislerin tersi şu şekilde bulunur:

Sonuç 3.25

$\hat{A} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ matrisinin tersi var ise, Teorem 3.9 gereği $\Re_{\hat{A}}$ matrisinin de tersi vardır ve Teorem 3.9 ile Teorem 3.8 in (vi). özelliğinin sonucu olarak

$$(\Re_{\hat{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} A_2 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_2 & A_2 & 0_n & 0_n \\ C_2 & 0_n & A_2 & 0_n \\ D_2 & 0_n & 0_n & A_2 \end{bmatrix} = \Re_{\hat{A}^{-1}} \quad (3.59)$$

olup ve $\hat{A}$ matrisinin tersi

$\hat{A}^{-1} = A_2 + B_2i + C_2j + D_2k$ olarak elde edilir.

Örnek 3.44

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ dual kuaterniyon matrisinin tersini reel matris temsiliinin tersi yardımı ile bulalım.

Çözüm : $\hat{A}$ matrisini şu formda yazalım:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}i + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}j + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}k \end{aligned}$$

Sonuç olarak; $\hat{A}$ 'nın reel matris temsilleri şu şekilde bulunur.

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

olup

$$\det(\Re_{\hat{A}}) = 10000 \neq 0$$

elde edilir.

Yani $\Re_{\hat{A}}$ terslenebilir. Bu nedenle $\hat{A}$ da terslenebilir.

$\Re_{\hat{A}}$ 'nin tersini kullanarak, $\hat{A}^{-1}$ 'i şu şekilde buluruz:

$$\Re_{\hat{A}}^{-1} = \Re_{\hat{A}^{-1}}$$

Öncelikle $\Re_{\hat{A}}^{-1}$ MATLAB ile hesaplanarak

$$(\Re_{\hat{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} 2/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/10 & 4/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & -1/10 & 2/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/10 & -2/10 & 4/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16/100 & -3/100 & 0 & 0 & 2/10 & 1/10 & 0 & 0 \\ -24/100 & 8/100 & 0 & 0 & -2/10 & 4/10 & 0 & 0 \\ 6/100 & -17/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/10 & 1/10 \\ 4/100 & 22/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/10 & 4/10 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. (3.59) denkleminde

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 20/100 & 10/100 \\ -20/100 & 40/100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/100 & -10/100 \\ 0 & -10/100 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} -16/100 & -3/100 \\ -24/100 & 8/100 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 6/100 & -17/100 \\ 4/100 & 22/100 \end{bmatrix} k \\ &= \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 20+10i-16j+6k & 10-10i-3j-17k \\ -20-24j+4k & 40-10i+8j+22k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Sağlama : $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 20+10i-16j+6k & 10-10i-3j-17k \\ -20-24j+4k & 40-10i+8j+22k \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Örnek 3.45

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix}$ dual kuaterniyon matrisinin tersini reel matris temsili yardımı

ile bulalım.

Çözüm : $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} k$ olmak üzere

$$\Re \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

$$(\Re \hat{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 31 & 6 & 4 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38 & -56 & -11 & -6 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & 25 & 5 & 3 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & -44 & -9 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 64 & 13 & 0 & 0 & 0 & -6 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & -25 & -5 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & -66 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & -1 \\ -66 & 97 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 9 & 2 \\ 30 & -44 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

olup (3.59) denkleminde

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\text{Sağlama: } \hat{A}\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Örnek 3.46

2×2 tipindeki $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i+3j-k & 1+j+2k \\ 1+2i & 3+2i-j \end{bmatrix}$ dual kuaterniyon matrisini düşünelim. Bu matrisin tersini bulalım.

Çözüm : $\hat{A}$ matrisini şu formda yazalım:

$$\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}i + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}j + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}k$$

Sonuç olarak; $\hat{A}$ 'nın reel matris temsilleri şu şekilde bulunur:

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olup

$$\det(\Re_{\hat{A}}) = 16 \neq 0$$

elde edilir. Yani $\Re_{\hat{A}}$ terslenebilirdir. Bu nedenle $\hat{A}$ da terslenebilirdir.

Öncelikle $\Re_{\hat{A}}^{-1}$ MATLAB ile hesaplanarak

$$(\Re_{\hat{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} 6/4 & -2/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/4 & 2/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5/4 & 3/4 & 6/4 & -2/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -2/4 & 2/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23/4 & 5/4 & 0 & 0 & 6/4 & -2/4 & 0 & 0 \\ 7/4 & -1/4 & 0 & 0 & -2/4 & 2/4 & 0 & 0 \\ 15/4 & -9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/4 & -2/4 \\ -5/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/4 & 2/4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. (3.59) denkleminde

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 6/4 & -2/4 \\ -2/4 & 2/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5/4 & 3/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} -23/4 & 5/4 \\ 7/4 & -1/4 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 15/4 & -9/4 \\ -5/4 & 3/4 \end{bmatrix} k \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6-5i-23j+15k & -2+3i+5j-9k \\ -2-i+7j-5k & 2-i-j+3k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\text{Sağlama: } \hat{A}\hat{A}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1+i+3j-k & 1+j+2k \\ 1+2i & 3+2i-j \end{bmatrix} \right) \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6-5i-23j+15k & -2+3i+5j-9k \\ -2-i+7j-5k & 2-i-j+3k \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



3.7 Dual Kuaterniyon Matrislerinde Matlab Uygulamaları

3.7.1 Dual Kuaterniyon Matrislerde Temel İşlemler

Örnek 3.47

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2+3i+2k & 1+j & 1+2i+3k \\ 5+5j & 1+i+2k & 3j \\ i+k & 4+2k & 4+2i+3k \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{ve} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} i+j & i+2k \\ 2+j+2k & 3i+2j \\ 4+i & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

matrislerinin (Örnek 3.6) çarpımını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

A1=[2 1 1; 5 1 0;0 4 4];

B1=[3 0 2;0 1 0;1 0 2];

C1=[0 1 0; 5 0 3;4 0 0];

D1=[2 0 3;0 2 0;1 2 3];

$\hat{B}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

A2=[0 0;2 0;4 5];

B2=[1 1;0 3;1 0];

C2=[1 0;1 2;0 0];

D2=[0 2;2 0;0 0];

İki dual kuaterniyon matrisinin çarpma işlemi yapılır ve dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri bulunur:

X1=A1*A2

X2= A1*B2+B1*A2

X3= A1*C2+C1*A2

X4= A1*D2+D1*A2

Çarpım sonucu elde edilen çıktı

X1 =

6 5

2 0

24 20

X2 =

11 15

7 8

12 22

X3 =

5 2

18 17

4 8

X4 =

14 19

6 10

24 15

şeklindedir. Sonuç olarak

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} 6+11i+5j+14k & 5+15i+2j+19k \\ 2+7i+18j+6k & 8i+17j+10k \\ 24+12i+4j+24k & 20+22i+8j+15k \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

elde edilir.

Örnek 3.48

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i+j-2k & i+j+5k \\ 2+3i+4j & 1+2i+k \end{bmatrix} \text{ ve } \hat{B} = \begin{bmatrix} i+2j+k & 1-i-k \\ 2i-3j & 5+2i \end{bmatrix} \text{ matrislerinin (Örnek 3.7)}$$

çarpımını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

A1=[1 0;2 1];

B1=[1 1;3 2];

$$C1=[1 \ 1;4 \ 0];$$

$$D1=[-2 \ 5;0 \ 1];$$

$\hat{B}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

$$A2=[0 \ 1;0 \ 5];$$

$$B2=[1 \ -1;2 \ 2];$$

$$C2=[2 \ 0;-3 \ 0];$$

$$D2=[1 \ -1; 0 \ 0];$$

İki dual kuaterniyon matrisinin çarpma işlemi yapılır ve dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri bulunur:

$$X1=A1*A2$$

$$X2= A1*B2+B1*A2$$

$$X3= A1*C2+C1*A2$$

$$X4= A1*D2+D1*A2$$

Çarpım sonucu elde edilen çıktı

$$X1 =$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{matrix}$$

$$$$

$$X2 =$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 4 & 13 \end{matrix}$$

$$$$

$$X3 =$$

$$\begin{matrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

$$$$

$$X4 =$$

$$\begin{matrix} 1 & 22 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} i+2j+k & 1+5i+6j+22k \\ 4i+j+2k & 7+13i+4j+3k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.7.2 Dual Kuaterniyon Matrisin Tersini Bulma

Örnek 3.49

$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ (Örnek 3.10) olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin

tersini Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

double

A1=[0 1;1 0];

B1=[1 0;-1 1];

C1=[1 0;0 1];

D1=[-1 -1;1 -1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin tersinin reel matris bileşenleri bulunur:

X1=round(inv(A1))

X2= round(-inv(A1)*B1*inv(A1))

X3= round(-inv(A1)*C1*inv(A1))

X4= round(-inv(A1)*D1*inv(A1))

Elde edilen çıktı

X1 =

0 1

1 0

X2 =

-1 1

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_4 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -i-j+k & 1+i-k \\ 1+k & -i-j+k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.50

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4+j-k & 2+i-k & i+k \\ 2+i & i+j-k & 3-j+k \\ 1-i+k & 4-j & 2-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ (Örnek 3.11) olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon}$$

matrisinin tersini Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

double

$$A1=[4 \ 2 \ 0; 2 \ 0 \ 3; 1 \ 4 \ 2];$$

$$B1=[0 \ 1 \ 1; 1 \ 1 \ 0; -1 \ 0 \ 0];$$

$$C1=[1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ -1; 0 \ -1 \ 0];$$

$$D1=[-1 \ -1 \ 1; 0 \ -1 \ 1; 1 \ 0 \ -1];$$

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin tersinin reel matris bileşenleri bulunur:

$$X1=\text{inv}(A1)$$

$$X2=-\text{inv}(A1)*B1*\text{inv}(A1)$$

$$X3 = -\text{inv}(A1) * C1 * \text{inv}(A1)$$

$$X4 = -\text{inv}(A1) * D1 * \text{inv}(A1)$$

Elde edilen çıktı

$$X1 =$$

$$0.2400 \quad 0.0800 \quad -0.1200$$

$$0.0200 \quad -0.1600 \quad 0.2400$$

$$-0.1600 \quad 0.2800 \quad 0.0800$$

$$X2 =$$

$$-0.0160 \quad -0.0320 \quad -0.0720$$

$$0.1020 \quad 0.0040 \quad -0.0160$$

$$-0.0760 \quad 0.0480 \quad 0.0080$$

$$X3 =$$

$$-0.0744 \quad 0.0352 \quad -0.0128$$

$$0.0288 \quad -0.1104 \quad 0.0856$$

$$-0.0104 \quad 0.1232 \quad -0.0448$$

$$X4 =$$

$$0.1632 \quad -0.1456 \quad -0.0016$$

$$-0.1164 \quad 0.1112 \quad 0.0232$$

$$-0.0488 \quad -0.0496 \quad 0.0544$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.24 - 0.016i - 0.0744j + 0.1632k & 0.08 - 0.032i + 0.0352j - 0.1456k & -0.12 - 0.072i - 0.0128j - 0.0016k \\ 0.02 + 0.102i + 0.0288j - 0.1164k & -0.16 + 0.004i - 0.1104j + 0.1112k & 0.24 - 0.016i + 0.0856j + 0.0232k \\ -0.16 - 0.076i - 0.0104j - 0.0488k & 0.28 + 0.048i + 0.1232j - 0.0496k & 0.08 + 0.008i - 0.0448j + 0.0544k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.51

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad (\text{Örnek 3.12}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon}$$

matrisinin tersini Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

A1=[1 2 3;0 1 2;3 2 0];

B1=[-1 0 0;-1 0 0;-1 1 -1];

C1=[0 -1 0;1 0 2;0 0 -1];

D1=[0 0 -1;0 -1 0;0 0 -1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin tersinin reel matris bileşenleri bulunur:

X1=round(inv(A1))

X2= round(-inv(A1)*B1*inv(A1))

X3= round(-inv(A1)*C1*inv(A1))

X4= round(-inv(A1)*D1*inv(A1))

Elde edilen çıktı

X1 =

4 -6 -1

-6 9 2

3 -4 -1

X2 =

-21 31 6

38 -56 -11

-17 25 5

X3 =

33 -44 -9

-48 64 13

19 -25 -5

X4 =

45 -66 -15

-66 97 22

30 -44 -10

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.7.3 Dual Kuaterniyon Matrisin Tersini Reel Matris Temsili ile Bulma

Örnek 3.52

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ (Örnek 3.14) olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon}$$

matrisinin tersini reel matris temsili kullanarak Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

m=3;

A=[1 2 3;0 1 2;3 2 0];

B=[-1 0 0;-1 0 0;-1 1 -1];

C=[0 -1 0;1 0 2; 0 0 -1];

D=[0 0 -1; 0 -1 0; 0 0 -1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

```

Zero=zeros(m);
Re1=vertcat(A, B, C, D);
Re2=vertcat(Zero, A, Zero, Zero);
Re3=vertcat(Zero, Zero, A, Zero);
Re4=vertcat(Zero, Zero, Zero, A);
Re=horzcat(Re1, Re2, Re3, Re4);
InvRe=inv(Re)
for r = 1 : (3*m)
    InvRe(:,m+1)=[];
end
InvReoriginal=InvRe
for r = 1 : (3*m)
    InvRe(m+1,:)=[];
end
X1= round(InvRe)
InvRe=InvReoriginal;
for r = 1 : (3*m)
    if(r<=m)
        InvRe(1,:)=[];
    else
        InvRe(m+1,:)=[];
    end
end
X2= round(InvRe)
InvRe=InvReoriginal;
for r = 1 : (3*m)
    if(r<=(2*m))
        InvRe(1,:)=[];
    else
        InvRe(m+1,:)=[];
    end
end
X3= round(InvRe)

```



```
InvRe=InvReoriginal;
```

```
for r = 1 : (3*m)
```

```
InvRe(1,:)=[];
```

```
end
```

```
X4= round(InvRe)
```

```
InvRe=InvReoriginal;
```

Elde edilen çıktı

X1 =

4 -6 -1

-6 9 2

3 -4 -1

X2 =

-21 31 6

38 -56 -11

-17 25 5

X3 =

33 -44 -9

-48 64 13

19 -25 -5

X4 =

45 -66 -15

-66 97 22

30 -44 -10

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4-21i+33j+45k & -6+31i-44j-66k & -1+6i-9j-15k \\ -6+38i-48j-66k & 9-56i+64j+97k & 2-11i+13j+22k \\ 3-17i+19j+30k & -4+25i-25j-44k & -1+5i-5j-10k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.53

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ (Örnek 3.13) olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon

matrisinin tersini reel matris temsilini kullanarak Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

m=2;

A=[4 -1; 2 2];

B=[-1 1;0 1];

C=[2 0; 3 -1];

D=[1 2; -1 0];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

Zero=zeros(m);

Re1=vertcat(A, B, C, D);

Re2=vertcat(Zero, A, Zero, Zero);

Re3=vertcat(Zero, Zero, A, Zero);

Re4=vertcat(Zero, Zero, Zero, A);

Re=horzcat(Re1, Re2, Re3, Re4);

InvRe=inv(Re)

for r = 1 : (3*m)

InvRe(:,m+1)=[];

end

InvReoriginal=InvRe

for r = 1 : (3*m)

InvRe(m+1,:)=[];

end

```

X1= InvRe
InvRe=InvReoriginal;
for r = 1 : (3*m)
    if(r<=m)
        InvRe(1,:)=[];
    else
        InvRe(m+1,:)=[];
    end
end

```

```

end
X2= InvRe
InvRe=InvReoriginal;
for r = 1 : (3*m)
    if(r<=(2*m))
        InvRe(1,:)=[];
    else
        InvRe(m+1,:)=[];
    end
end

```

```

end
X3= InvRe
InvRe=InvReoriginal;
for r = 1 : (3*m)
    InvRe(1,:)=[];
end

```

```

X4= InvRe
InvRe=InvReoriginal;
Elde edilen çıktı

```

```

X1 =

    0.2000    0.1000

   -0.2000    0.4000

```

```

X2 =

    0.1000   -0.1000

```

$$0.0000 \quad -0.1000$$

X3 =

$$-0.1600 \quad -0.0300$$

$$-0.2400 \quad 0.0800$$

X4 =

$$0.0600 \quad -0.1700$$

$$0.0400 \quad 0.2200$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\hat{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 20/100 & 10/100 \\ -20/100 & 40/100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/100 & -10/100 \\ 0 & -10/100 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} -16/100 & -3/100 \\ -24/100 & 8/100 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 6/100 & -17/100 \\ 4/100 & 22/100 \end{bmatrix} k \\ &= \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 20+10i-16j+6k & 10-10i-3j-17k \\ -20-24j+4k & 40-10i+8j+22k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.54

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+i+3j-k & 1+j+2k \\ 1+2i & 3+2i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin tersini}$$

reel matris temsilini kullanarak Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

m=2;

A=[1 1; 1 3];

B=[1 0; 2 2];

C=[3 1; 0 -1];

D=[-1 2; 0 0];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

Zero=zeros(m);

```

Re1=vertcat(A, B, C, D);
Re2=vertcat(Zero, A, Zero, Zero);
Re3=vertcat(Zero, Zero, A, Zero);
Re4=vertcat(Zero, Zero, Zero, A);
Re=horzcat(Re1, Re2, Re3, Re4);
InvRe=inv(Re)
for r = 1 : (3*m)
    InvRe(:,m+1)=[];
end
InvReoriginal=InvRe
for r = 1 : (3*m)
    InvRe(m+1,:)=[];
end
X1= InvRe
InvRe=InvReoriginal;
for r = 1 : (3*m)
    if(r<=m)
        InvRe(1,:)=[];
    else
        InvRe(m+1,:)=[];
    end
end
X2= InvRe
InvRe=InvReoriginal;
for r = 1 : (3*m)
    if(r<=(2*m))
        InvRe(1,:)=[];
    else
        InvRe(m+1,:)=[];
    end
end
X3= InvRe
InvRe=InvReoriginal;

```

```

for r = 1 : (3*m)
InvRe(1,:)=[];
end
X4= InvRe
InvRe=InvReoriginal;
Elde edilen çıktı

```

X1 =

```

1.5000 -0.5000
-0.5000 0.5000

```

X2 =

```

-1.2500 0.7500
-0.2500 -0.2500

```

X3 =

```

-5.7500 1.2500
1.7500 -0.2500

```

X4 =

```

3.7500 -2.2500
-1.2500 0.7500

```

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6-5i-23j+15k & -2+3i+5j-9k \\ -2-i+7j-5k & 2-i-j+3k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.7.4 Dual Kuaterniyon Matrisin Kuvveti

Örnek 3.55

$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetini

Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

n=2;

m=2;

A=[0 1;1 0];

B=[1 0;-1 1];

C=[1 0;0 1];

D=[-1 -1;1 -1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

X1=zeros(n,n);

X2=zeros(n,n);

X3=zeros(n,n);

X4=zeros(n,n);

X1=A^m;

for r = 0:m-1

 X2 = X2+(A^(m-r-1))*B*A^r;

 X3 = X3+(A^(m-r-1))*C*A^r;

 X4 = X4+(A^(m-r-1))*D*A^r;

end

X1

X2

X3

X4

Elde edilen çıktı

X1 =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_4 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^2 = \begin{bmatrix} 1-i & 2i+2j-2k \\ 2i+2j-2k & 1-i \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.56

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin 3.}$$

kuvvetini Matlab yardımı ile bulalım.

1. Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

$$n=2;$$

$$m=3;$$

$$A1=[4 -1;2 2];$$

$$B1=[-1 1;0 1];$$


```
C1=[2 0; 3 -1];
```

```
D1=[1 2;-1 0];
```

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

```
X1=zeros(n,n);
```

```
X2=zeros(n,n);
```

```
X3=zeros(n,n);
```

```
X4=zeros(n,n);
```

```
X1=A1^m;
```

```
for r = 0:m-1
```

```
    X2 = X2+(A1^(m-r-1))*B1*A1^r;
```

```
    X3 = X3+(A1^(m-r-1))*C1*A1^r;
```

```
    X4 = X4+(A1^(m-r-1))*D1*A1^r;
```

```
end
```

```
X1
```

```
X2
```

```
X3
```

```
X4
```

Elde edilen çıktı

X1 =

44 -26

52 -8

X2 =

-26 26

0 26

X3 =

60 -9

96 -36

X4 =

94 37

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^3 = \begin{bmatrix} 44 - 26i + 60j + 94k & -26 + 26i - 9j + 37k \\ 52 + 96j + 4k & -8 + 26i - 36j + 38k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

2. Çözüm : function kuvvetyeni(A,B,C,D,m,n)

```
X1=zeros(n,n);
X2=zeros(n,n);
X3=zeros(n,n);
X4=zeros(n,n);
X1=A1^m;
for r = 0:m-1
    X2 = X2+(A1^(m-r-1))*B1*A1^r;
    X3 = X3+(A1^(m-r-1))*C1*A1^r;
    X4 = X4+(A1^(m-r-1))*D1*A1^r;
end
disp( sprintf( 'X1=' ) )
disp(X1)
disp( sprintf( 'X2=' ) )
disp(X2)
disp( sprintf( 'X3=' ) )
disp(X3)
disp( sprintf( 'X4=' ) )
disp(X4)
```

Aşağıdaki komut matrisin 3. Kuvvetini hesaplamak için kullanılır:

```
n=2;
```

```
m=3;
```

```
A1=[4 -1;2 2];
```

```
B1=[-1 1;0 1];
```

$C1=[2\ 0;\ 3\ -1];$

$D1=[1\ 2;-1\ 0];$

kuvvetyeni(A1,B1,C1,D1,m,n)

elde edilen çıktı

X1=

44 -26

52 -8

X2=

-26 26

0 26

X3=

60 -9

96 -36

X4=

94 37

4 38

Aşağıdaki komut matrisin 10. Kuvvetini hesaplamak için kullanılır:

$n=2;$

$m=10;$

$A1=[4\ -1;2\ 2];$

$B1=[-1\ 1;0\ 1];$

$C1=[2\ 0;\ 3\ -1];$

$D1=[1\ 2;-1\ 0];$

$X1=zeros(n,n);$

$X2=zeros(n,n);$

```

X3=zeros(n,n);

X4=zeros(n,n);

X1=A1^m;

for r = 0:m-1

X2 = X2+(A1^(m-r-1))*B1*A1^r;

X3 = X3+(A1^(m-r-1))*C1*A1^r;

X4 = X4+(A1^(m-r-1))*D1*A1^r;

end

```

```

X1
X2
X3
X4
X1 =
-107296    7584
-15168    -92128

```

```

X2 =
7584    -7584
0    -7584

```

```

X3 =
-126256    -38480
54208    -180464

```

```

X4 =
1009616    -951056
1879360    -854576

```

Aşağıdaki komut matrisin 100. kuvvetini hesaplamak için kullanılır:

n=2;

m=100;

A1=[4 -1;2 2];

B1=[-1 1;0 1];

C1=[2 0; 3 -1];

D1=[1 2;-1 0];

kuvvetyeni(A1,B1,C1,D1,m,n)

elde edilen çıktı

X1=

1.0e+050 *

1.4137 -0.6883

1.3766 0.0371

X2=

1.0e+049 *

-6.8829 6.8829

-0.0000 6.8829

X3=

1.0e+051 *

2.2053 -0.6697

1.5459 0.6593

X4=

1.0e+052 *

-0.2233 0.7855

-1.5504 1.3134

3.7.5 Dual Kuaterniyon Matrisin Eşleniğinin Kuvveti

Örnek 3.57

$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin eşleniğinin

kuvvetini Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

n=2;

m=2;

A1=[0 1;1 0];

B1=[1 0;-1 1];

C1=[1 0;0 1];

D1=[-1 -1;1 -1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin eşleniğinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

X1=zeros(n,n);

X2=zeros(n,n);

X3=zeros(n,n);

X4=zeros(n,n);

X1=A1^m

for r = 0:m-1

X2 = X2+(A1^(m-r-1))*B1*A1^r;

X3 = X3+(A1^(m-r-1))*C1*A1^r;

X4 = X4+(A1^(m-r-1))*D1*A1^r;

end

X2=-X2

X3=-X3

X4=-X4

Elde edilen çıktı

X1 =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_4 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\bar{A}^2 = \begin{bmatrix} 1+i & -2i-2j+2k \\ -2i-2j+2k & 1+i \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.7.6 Dual Kuaterniyon Matrislerin Tersinin Kuvveti

Örnek 3.58

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+j-k & 1-k \\ 1-i+k & i+j-k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon matrisinin tersinin}$$

kuvvetini Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

$$n=2;$$

$$m=2;$$

$A1=[0 \ 1;1 \ 0];$

$B1=[1 \ 0;-1 \ 1];$

$C1=[1 \ 0;0 \ 1];$

$D1=[-1 \ -1;1 \ -1];$

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin eşleniğinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

$X1=zeros(n,n);$

$X2=zeros(n,n);$

$X3=zeros(n,n);$

$X4=zeros(n,n);$

$X1=inv(A1)^m$

for $r = 0:m-1$

$X2 = X2+(A1^{(-m+r)}) * B1 * A1^{(-r-1)};$

$X3 = X3+(A1^{(-m+r)}) * C1 * A1^{(-r-1)};$

$X4 = X4+(A1^{(-m+r)}) * D1 * A1^{(-r-1)};$

end

$X2=-X2$

$X3=-X3$

$X4=-X4$

Elde edilen çıktı

$X1 =$

1 0

0 1

$X2 =$

1 -2

-2 1

$X3 =$

0 -2

-2 0

$X4 =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\hat{A}^{-2} = \begin{bmatrix} 1+i & -2i-2j+2k \\ -2i-2j+2k & 1+i \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.7.7 Dual Kuaterniyon Matrislerin Reel Matris Temsilleri

Örnek 3.59

$\hat{A} = \begin{bmatrix} i+2j & 1+k \\ 2-i & j-k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ (Örnek 3.16) olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris temsilini Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

m=2;

A1=[0 1;2 0];

B1=[1 0;-1 0];

C1=[2 0;0 1];

D1=[0 1;0 -1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

Zero=zeros(m);

Re1=vertcat(A1, B1, C1, D1);

Re2=vertcat(Zero, A1, Zero, Zero);

Re3=vertcat(Zero, Zero, A1, Zero);

Re4=vertcat(Zero, Zero, Zero, A1);

Re=horzcat(Re1, Re2, Re3, Re4)

Elde edilen çıktı

Re =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3.60

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+2i-4j+5k & 2-i+2j+k \\ 2+5i+j-2k & 3+4i-3j+k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad (\text{Örnek 3.17}) \quad \text{olsun.} \quad \hat{A} \quad \text{dual}$$

kuaterniyon matrisinin reel matris temsilini Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve matrisin mertebesi girilir:

m=2;

A1=[1 2; 2 3];

B1=[2 -1; 5 4];

C1=[-4 2; 1 -3];

D1=[5 1; -2 1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin kuvvetinin reel matris bileşenleri bulunur:

Zero=zeros(m);

Re1=vertcat(A1, B1, C1, D1);

Re2=vertcat(Zero, A1, Zero, Zero);

Re3=vertcat(Zero, Zero, A1, Zero);

Re4=vertcat(Zero, Zero, Zero, A1);

Re=horzcat(Re1, Re2, Re3, Re4)

Elde edilen çıktı

Re =

1	2	0	0	0	0	0	0
2	3	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	2	0	0	0	0
5	4	2	3	0	0	0	0
-4	2	0	0	1	2	0	0
1	-3	0	0	2	3	0	0
5	1	0	0	0	0	1	2
-2	1	0	0	0	0	2	3

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\Re_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.7.8 Dual Kuaterniyon Matrisin Determinantı

Örnek 3.61

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ (Örnek 3.27) olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon

matrisinin determinantını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

A1=[4 -1;2 2];

B1=[-1 1;0 1];

C1=[2 0;3 -1];

D1=[1 2;-1 0];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantı bulunur:

X1=det(A1);

X2= det(A1)*trace(inv(A1)*B1);

X3= det(A1)*trace(inv(A1)*C1);

X4= det(A1)*trace(inv(A1)*D1);

disp(['Det= ' num2str(X1) ' + ' num2str(X2) 'i + ' num2str(X3) 'j ' num2str(X4) 'k'])

Elde edilen çıktı

Det= 10 + 0i + 3j -3k

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\det(\hat{A}) = 10 + 3j - 3k$$

elde edilir.

Örnek 3.62

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) \quad (\text{Örnek 3.28}) \text{ olsun. } \hat{A} \text{ dual kuaterniyon}$$

matrisinin determinantını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

$$A1 = [1 \ 2 \ 3; 0 \ 1 \ 2; 3 \ 2 \ 0];$$

$$B1 = [-1 \ 0 \ 0; -1 \ 0 \ 0; -1 \ 1 \ -1];$$

$$C1 = [0 \ -1 \ 0; 1 \ 0 \ 2; 0 \ 0 \ -1];$$

$$D1 = [0 \ 0 \ -1; 0 \ -1 \ 0; 0 \ 0 \ -1];$$

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantı bulunur:

$$X1 = \det(A1);$$

$$X2 = \det(A1) * \text{trace}(\text{inv}(A1) * B1);$$

$$X3 = \det(A1) * \text{trace}(\text{inv}(A1) * C1);$$

$$X4 = \det(A1) * \text{trace}(\text{inv}(A1) * D1);$$

$$\text{disp}(['Det= ' \text{num2str}(X1) ' ' \text{num2str}(X2) 'i + ' \text{num2str}(X3) 'j + ' \text{num2str}(X4) 'k'])$$

Elde edilen çıktı

$$\text{Det} = -1 - 6i + 7j + 11k$$

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\det(\hat{A}) = -1 - 6i + 7j + 11k$$

elde edilir.

Örnek 3.63

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1+3i+4j-2k & 3+5j & 3i & 1+2i+4j & 4+5k \\ 3-4i+3j-k & -1+4j & 2-4k & 3-6i+5j+2k & 3+3j \\ 10+2i-k & 2-2i+5j-6k & 3-i+2j+4k & 6+3i-j & 5 \\ j-3k & 4+3i-4j & 3-2i+k & 4+6k & i-k \\ i+4j-2k & i-2j & 3-i & i+3j & 4-7i+3j \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri girilir:

A1=[1 3 0 1 4; 3 -1 2 3 3;10 2 3 6 5;0 4 3 4 0; 0 0 3 0 4];

B1=[3 0 3 2 0; -4 0 0 -6 0; 2 -2 -1 3 0; 0 3 -2 0 1;1 1 -1 1 -7];

C1=[4 5 0 4 0;3 4 0 5 3; 0 5 2 -1 0; 1 -4 0 0 0;4 -2 0 3 3];

D1=[-2 0 0 0 5; -1 0 -4 2 0; -1 -6 4 0 0; -3 0 1 6 -1; -2 0 0 0 0];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinanı bulunur:

X1=det(A1);

X2= det(A1)*trace(inv(A1)*B1);

X3= det(A1)*trace(inv(A1)*C1);

X4= det(A1)*trace(inv(A1)*D1);

disp(['Det= ' num2str(X1) '+' num2str(X2) 'i ' num2str(X3) 'j ' num2str(X4) 'k'])

Elde edilen çıktı

Det= -1800+ 6480i -1920j -6710k

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\det(\hat{A}) = -1800 + 6480i - 1920j - 6710k$$

elde edilir.

Örnek 3.64

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4-i+2j+k & -1+i+2k \\ 2+3j-k & 2+i-j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ (Örnek 3.31) olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon

matrisinin determinantını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve mertebesi girilir:

m=2;

A1=[4 -1;2 2];

B1=[-1 1;0 1];

C1=[2 0;3 -1];

D1=[1 2;-1 0];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantı bulunur:

A1original=A1;

X1=det(A1);

X2=0;

X3=0;

X4=0;

for r = 1:m

 A1(:,r) = B1(:,r);

 X2 = X2+det(A1);

 A1=A1original;

end

for r = 1:m

 A1(:,r) = C1(:,r);

 X3 = X3+det(A1);

 A1=A1original;

end

for r = 1:m

 A1(:,r) = D1(:,r);

 X4 = X4+det(A1);

 A1=A1original;

end

disp(['Det= ' num2str(X1) ' + ' num2str(X2) 'i + ' num2str(X3) 'j ' num2str(X4) 'k'])

Elde edilen çıktı

Det= 10 + 0i + 3j -3k

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\det(\hat{A}) = 10 + 3j - 3k$$

elde edilir.

Örnek 3.65

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2-j & 3-k \\ -i+j & 1-k & 2+2j \\ 3-i & 2+i & -i-j-k \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ (Örnek 3.32) olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon

matrisinin determinantını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve mertebesi girilir:

m=3;

A1=[1 2 3; 0 1 2; 3 2 0];

B1=[-1 0 0; -1 0 0; -1 1 -1];

C1=[0 -1 0; 1 0 2; 0 0 -1];

D1=[0 0 -1; 0 -1 0; 0 0 -1];

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantı bulunur:

A1original=A1;

X1=det(A1);

X2=0;

X3=0;

X4=0;

for r = 1:m

 A1(:,r) = B1(:,r);

 X2 = X2+det(A1);


```

A1=A1original;
end
for r = 1:m
    A1(:,r) = C1(:,r);
    X3 = X3+det(A1);
    A1=A1original;
end
for r = 1:m
    A1(:,r) = D1(:,r);
    X4 = X4+det(A1);
    A1=A1original;
end
disp(['Det= ' num2str(X1) ' ' num2str(X2) 'i' + ' num2str(X3) 'j' + ' num2str(X4) 'k' ])
Elde edilen çıktı
Det= -1 -6i + 7j + 11k

```

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\det(\hat{A}) = -1 - 6i + 7j + 11k$$

elde edilir.

Örnek 3.66

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1+3i+4j-2k & 3+5j & 3i & 1+2i+4j & 4+5k \\ 3-4i+3j-k & -1+4j & 2-4k & 3-6i+5j+2k & 3+3j \\ 10+2i-k & 2-2i+5j-6k & 3-i+2j+4k & 6+3i-j & 5 \\ j-3k & 4+3i-4j & 3-2i+k & 4+6k & i-k \\ i+4j-2k & i-2j & 3-i & i+3j & 4-7i+3j \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

olsun. $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinantını Matlab yardımı ile bulalım.

Çözüm : Matlab kodları aşağıda verilmiştir:

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris bileşenleri ve mertebesi girilir:

m=5;

A1=[1 3 0 1 4; 3 -1 2 3 3;10 2 3 6 5;0 4 3 4 0; 0 0 3 0 4];

```

B1=[3 0 3 2 0; -4 0 0 -6 0; 2 -2 -1 3 0; 0 3 -2 0 1;1 1 -1 1 -7];
C1=[4 5 0 4 0;3 4 0 5 3; 0 5 2 -1 0; 1 -4 0 0 0;4 -2 0 3 3];
D1=[-2 0 0 0 5; -1 0 -4 2 0; -1 -6 4 0 0; -3 0 1 6 -1; -2 0 0 0 0];

```

$\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin determinanı bulunur:

```

A1original=A1;
X1=det(A1)
X2=0;
X3=0;
X4=0;
for r = 1:m
    A1(:,r) = B1(:,r);
    X2 = X2+det(A1);
    A1=A1original;
end
for r = 1:m
    A1(:,r) = C1(:,r);
    X3 = X3+det(A1);
    A1=A1original;
end
for r = 1:m
    A1(:,r) = D1(:,r);
    X4 = X4+det(A1);
    A1=A1original;
end
disp(['Det= ' num2str(X1) '+' num2str(X2) 'i ' num2str(X3) 'j ' num2str(X4) 'k' ])

```

Elde edilen çıktı

Det= -1800+6480i -1920j -6710k

şeklindedir.

Sonuç olarak

$$\det(\hat{A}) = -1800 + 6480i - 1920j - 6710k$$

elde edilir.

2. Çözüm : function determinantnew(A1,B1,C1,D1,m)

```
A1_original=A1;
X1=det(A1);
X2=0;
X3=0;
X4=0;
for r = 1:m
    A1(:,r) = B1(:,r);
    X2 = X2+det(A1);
    A1=A1_original;
end
for r = 1:m
    A1(:,r) = C1(:,r);
    X3 = X3+det(A1);
    A1=A1_original;
end
for r = 1:m
    A1(:,r) = D1(:,r);
    X4 = X4+det(A1);
    A1=A1_original;
end
if (X2>=0 && X3>=0 && X4>=0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' + ' num2str(X2) 'i + ' num2str(X3) 'j + ' num2str(X4) 'k' ])
elseif (X2>=0 && X3>=0 && X4<0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' + ' num2str(X2) 'i + ' num2str(X3) 'j ' num2str(X4) 'k' ])
elseif (X2>=0 && X3<0 && X4<0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' + ' num2str(X2) 'i ' num2str(X3) 'j ' num2str(X4) 'k' ])
elseif (X2>=0 && X3<0 && X4>=0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' + ' num2str(X2) 'i ' num2str(X3) 'j + ' num2str(X4) 'k' ])
elseif (X2<0 && X3>=0 && X4>=0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' ' num2str(X2) 'i + ' num2str(X3) 'j + ' num2str(X4) 'k' ])
elseif (X2<0 && X3<0 && X4>=0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' ' num2str(X2) 'i + ' num2str(X3) 'j + ' num2str(X4) 'k' ])
elseif (X2<0 && X3>=0 && X4<0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' ' num2str(X2) 'i + ' num2str(X3) 'j + ' num2str(X4) 'k' ])
else %(X2<0 && X3<0 && X4<0)
    disp(['Det= ' num2str(X1) ' ' num2str(X2) 'i ' num2str(X3) 'j ' num2str(X4) 'k' ])
end
m=5;

A1=[1 3 0 1 4; 3 -1 2 3 3;10 2 3 6 5;0 4 3 4 0; 0 0 3 0 4];
B1=[3 0 3 2 0; -4 0 0 -6 0; 2 -2 -1 3 0; 0 3 -2 0 1;1 1 -1 1 -7];
C1=[4 5 0 4 0;3 4 0 5 3; 0 5 2 -1 0; 1 -4 0 0 0;4 -2 0 3 3];
D1=[-2 0 0 0 5; -1 0 -4 2 0; -1 -6 4 0 0; -3 0 1 6 -1; -2 0 0 0 0];
```

$\text{determinantnew}(A1,B1,C1,D1,m)$

Sonuç olarak;

$\text{Det} = -1800 + 6480i - 1920j - 6710k$

elde edilir.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, dual kuaterniyon matrisleri üzerine elde edilen sonuçlar şunlardır:

- Dual Kuaterniyon Matris

$$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = [a_{rs}] + [b_{rs}]i + [c_{rs}]j + [d_{rs}]k$$

şeklinde yazılabilir. Buradan dual kuaterniyon matris

$$\hat{A} = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0, \quad ij = ji = jk = kj = ki = ik = 0$$

ve

$$A_1 = [a_{rs}], \quad B_1 = [b_{rs}], \quad C_1 = [c_{rs}], \quad D_1 = [d_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

dir. Ayrıca dual kuaterniyon matrisler şu şekilde de yazılabilir:

$$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k = A_1 + \text{Vek}\{\hat{A}\}$$

- Dual kuaterniyon matrislerinin toplamı

$$\hat{A} \oplus \hat{B} = [\hat{a}_{rs}] + [\hat{b}_{rs}] = [\hat{a}_{rs} + \hat{b}_{rs}] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$\hat{A} + \hat{B} = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i + (C_1 + C_2)j + (D_1 + D_2)k$$

yazılabilir.

- Bir dual kuaterniyon ile bir dual kuaterniyon matrisinin çarpımı

$$q \odot \hat{A} = q \odot [\hat{a}_{rs}] = [q \hat{a}_{rs}]_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$q \hat{A} = q_1 \hat{A} + \text{Vek}\{q\} A_1$$

dır. Bu çarpım

$$q \hat{A} = q A_1 + q B_1 i + q C_1 j + q D_1 k$$

olarak da yazılabilir.

Sonuç 4.1

$$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, \mathbb{H}_{\mathbb{D}}, +, \cdot, \odot\} \text{ altılısı bir modüldür.}$$

- Bir reel matris ile bir dual kuaterniyon matrisinin çarpımı

$$Q \hat{A} = Q \odot \hat{A} = [q_{rs}]_{n \times n} [\hat{a}_{st}]_{n \times n} = \left[\sum_{s=1}^n q_{rs} \hat{a}_{st} \right] \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpım aşağıdaki şekilde de

$$Q \hat{A} = Q A_1 + Q B_1 i + Q C_1 j + Q D_1 k$$

yazılabilir. Ayrıca

$$(Q_1 \hat{A})(\hat{B} Q_2) = Q_1 (\hat{A} \hat{B}) Q_2$$

dır.

Sonuç 4.2

$$\{M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\} \text{ altılısı bir modüldür.}$$

$\hat{A}$ matrisi

$$\hat{A} = A_1 \hat{I} + B_1 \hat{I} + C_1 \hat{J} + D_1 \hat{K}$$

Şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\hat{I}^2 = \hat{I}_n, \quad \hat{I}^2 = \hat{J}^2 = \hat{K}^2 = \hat{O}_n, \quad \hat{I}\hat{J} = \hat{J}\hat{I} = \hat{J}\hat{K} = \hat{K}\hat{J} = \hat{K}\hat{I} = \hat{I}\hat{K} = \hat{O}_n$$

özellikleri sağlanır ve

$$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = sp\{\hat{I}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$$

elde edilir. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrislerinin çarpımı

$$\hat{A}\hat{B} = A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2)i + (A_1 C_2 + C_1 A_2)j + (A_1 D_2 + D_1 A_2)k$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\hat{A}\hat{B} = A_1 A_2 + A_1 (B_2 i + C_2 j + D_2 k) + (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_2$$

yazılabilir. Çarpma işleminin özelliklerinden

$$(q \hat{A})(p \hat{B}) = (q p)(\hat{A}\hat{B})$$

dir.

- $\hat{A}$ matrisinin eşleniği

$$\overline{\hat{A}} = [\overline{\hat{a}_{rs}}] = [a_{rs} - b_{rs}i - c_{rs}j - d_{rs}k] \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\overline{\hat{A}} = A_1 - B_1 i - C_1 j - D_1 k \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde yazılabilir.

- $\hat{A}$ matrisinin transpoz (devriği)

$$\hat{A}^T = [\hat{a}_{rs}]^T = [\hat{a}_{sr}] \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\hat{A}^T = (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)^T = A_1^T + B_1^T i + C_1^T j + D_1^T k \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde yazılabilir.

- $\hat{A}$ matrisinin eşlenik transpoz

$$\hat{A}^* = [\hat{a}_{rs}]^* = [\overline{\hat{a}_{sr}}] \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\hat{A}^* = (A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k)^* = A_1^T - B_1^T i - C_1^T j - D_1^T k \in M_{n \times m}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde yazılabilir.

- $\hat{A}, \hat{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ için, eğer

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I}_n$$

ise $\hat{A}$ matrisinin tersi vardır denir. $\hat{A}$ matrisinin tersi

$$\hat{A}^{-1} = A_1^{-1} \bar{\hat{A}} A_1^{-1}$$

şeklinde bulunur.

- $\hat{A}$ matrisinin m inci kuvveti ($m \geq 1$)

$$\hat{A}^m = A_1^m + A_1^{m-1} \text{Vek}\{\hat{A}\} + \text{Vek}\{\hat{A}^{m-1}\} A_1$$

veya ($m > 0$)

$$\hat{A}^m = A_1^m + \sum_{r=0}^{m-1} A_1^{m-r-1} (B_1 i + C_1 j + D_1 k) A_1^r$$

şeklinde bulunur.

- $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisinin reel matris temsili

$$R_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n & 0_n & 0_n \\ B_1 & A_1 & 0_n & 0_n \\ C_1 & 0_n & A_1 & 0_n \\ D_1 & 0_n & 0_n & A_1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}$$

dir. Reel Temsil Matrisin Özellikleri

$$\mathfrak{R}_{\hat{1}}^2 = I_{4n}, \quad \mathfrak{R}_{\hat{I}}^2 = \mathfrak{R}_{\hat{J}}^2 = \mathfrak{R}_{\hat{K}}^2 = 0_{4n}$$

ve

$$\mathfrak{R}_{\hat{I}} \mathfrak{R}_{\hat{J}} = \mathfrak{R}_{\hat{J}} \mathfrak{R}_{\hat{I}} = \mathfrak{R}_{\hat{J}} \mathfrak{R}_{\hat{K}} = \mathfrak{R}_{\hat{K}} \mathfrak{R}_{\hat{J}} = \mathfrak{R}_{\hat{K}} \mathfrak{R}_{\hat{I}} = \mathfrak{R}_{\hat{I}} \mathfrak{R}_{\hat{K}} = 0_{4n}$$

şeklinde dir. $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ matrisi de terslenebilir ise

$$(\mathfrak{R}_{\hat{A}})^{-1} = \mathfrak{R}_{\hat{A}^{-1}},$$

dir.

Sonuç 4.3

$$\{S_{4n}(\mathbb{R}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \otimes\} \text{ altılısı bir modüldür.}$$

- Dual kuaterniyon matrisin izi

$$iz(\hat{A}) = iz(A_1) + iz(B_1)i + iz(C_1)j + iz(D_1)k$$

şeklinde dir.

- $\hat{A}$ matrisinin herhangi bir r . satıra göre determinant açılımı

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{r1}\hat{A}_{r1} + \hat{a}_{r2}\hat{A}_{r2} + \cdots + \hat{a}_{rn}\hat{A}_{rn} = \sum_{s=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{A}_{rs}$$

veya s. sütuna göre determinant açılımı

$$\det(\hat{A}) = \hat{a}_{1s}\hat{A}_{1s} + \hat{a}_{2s}\hat{A}_{2s} + \cdots + \hat{a}_{ns}\hat{A}_{ns} = \sum_{r=1}^n \hat{a}_{rs}\hat{A}_{rs}$$

şeklindedir.

- Dual Kuaterniyon Matrislerin klasik determinanı

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) = \det(A_1) &+ \left(\det([A_1 | B_1]_1) + \det([A_1 | B_1]_2) \right) i + \left(\det([A_1 | C_1]_1) + \det([A_1 | C_1]_2) \right) j \\ &+ \left(\det([A_1 | D_1]_1) + \det([A_1 | D_1]_2) \right) k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) = \det(A_1) &+ \left(\det([A_1 | B_1]_1) + \det([A_1 | B_1]_2) + \det([A_1 | B_1]_3) \right) i \\ &+ \left(\det([A_1 | C_1]_1) + \det([A_1 | C_1]_2) + \det([A_1 | C_1]_3) \right) j \\ &+ \left(\det([A_1 | D_1]_1) + \det([A_1 | D_1]_2) + \det([A_1 | D_1]_3) \right) k \end{aligned}$$

ve

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1) + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | B_1]_s) \right) i + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | C_1]_s) \right) j + \left(\sum_{s=1}^n \det([A_1 | D_1]_s) \right) k$$

şeklinde de hesaplanabilir.

- $\hat{A}$ matrisinin determinanı

$$\det(\hat{A}) = \det(A_1)(1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k)$$

ile de hesaplanabilir. Bundan başka

$$\det(\Re \hat{A}) = (\det(A_1))^4$$

ve

$$\|\det(\hat{A})\|^4 = \det(\Re \hat{A})$$

dir.

- $\hat{A}$ dual kuaterniyon matrisin Eki

$$\hat{A} ek(\hat{A}) = ek(\hat{A}) \hat{A} = \det(\hat{A}) \hat{I}_n$$

ve

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\hat{A})} ek(\hat{A})$$

ve

$$\det(ek(\hat{A})) = \det(\hat{A})^{n-1}$$

ve

$$\Re \hat{A} ek(\Re \hat{A}) = n^{-1} \sqrt{\|\det(ek(\hat{A}))\|^4} I_{4n} = \det(\Re \hat{A}) I_{4n}$$

eşitlikleri elde edilmiştir.

- 2×2 tipindeki bir dual kuaterniyon matrisin tersi pratik olarak,

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\hat{A})} \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & \hat{a}_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{a}_{11}\hat{a}_{22} - \hat{a}_{12}\hat{a}_{21}} \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & \hat{a}_{11} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

REEL KUATERNİYON MATRİSLER	DUAL KUATERNİYON MATRİSLER
$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}) = \{A = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k : A_1, B_1, C_1, D_1 \in M_n(\mathbb{R})\}$ $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$	$M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = \{\tilde{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k : A_1, B_1, C_1, D_1 \in M_n(\mathbb{R})\}$ $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0, \quad ij = ji = jk = kj = ki = ik = 0$
$A \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ ve $B \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır [36]: (i) $(\bar{A})^{-1} \neq \overline{(A^{-1})}$ (genel olarak) (ii) $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$ (genel olarak) (iii) $\overline{AB} \neq \bar{A} \bar{B}$ (genel olarak) (iv) $(AB)^T \neq B^T A^T$ (genel olarak).	$A \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $B \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır: (i) $(\bar{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$ (iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Çizelge 4. 1 Reel ve Dual Kuaterniyon Matrislerin Karşılaştırılması

REEL KUATERNİYON MATRİSLER	DUAL KUATERNİYON MATRİSLER
$A \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ ve $B \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır [36]: (i) $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$, (ii) $(AB)^* = B^* A^*$, (iii) Eğer A ve B matrislerinin tersi var ise $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, (iv) Eğer A matrisinin tersi var ise $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.	$A \in M_{m \times n}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ ve $B \in M_{n \times o}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır: (i) $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$, (ii) $(AB)^* = B^* A^*$, (iii) Eğer A ve B matrislerinin tersi var ise $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, (iv) Eğer A matrisinin tersi var ise $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Çizelge 4. 1 Reel ve Dual Kuaterniyon Matrislerin Karşılaştırılması (devamı)

REEL KUATERNİYON MATRİSLER	DUAL KUATERNİYON MATRİSLER
Kompleks Adjoint Matris $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ reel kuaterniyon katsayılı matrisine karşılık gelen $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matrisi $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanır. Bu matrise kompleks adjoint matris veya A reel kuaterniyon katsayılı matrisinin adjointi denir ve χ_A ile sembolize edilir [36].	

Çizelge 4. 1 Reel ve Dual Kuaterniyon Matrislerin Karşılaştırılması (devamı)

REEL KUATERNİYON MATRİSLER	DUAL KUATERNİYON MATRİSLER
Reel Kuaterniyon Katsayılı Matrislerin Reel Matris Temsilleri $A = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ olsun. $\begin{bmatrix} A_1 & -B_1 & -C_1 & -D_1 \\ B_1 & A_1 & -D_1 & C_1 \\ C_1 & D_1 & A_1 & -B_1 \\ D_1 & -C_1 & B_1 & A_1 \end{bmatrix}$ matrisi A reel kuaterniyon katsayılı $4n \times 4n$ matrisin reel matris temsili olarak adlandırılır ve $\mathfrak{R}_A$ ile gösterilir [52].	Dual Kuaterniyon Katsayılı Matrislerin Reel Matris Temsilleri $\hat{A} = A_1 + B_1i + C_1j + D_1k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ olsun. $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & A_1 & 0 \\ D_1 & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix}$ matrisi $\hat{A}$ dual kuaterniyon katsayılı $4n \times 4n$ matrisin reel matris temsili olarak adlandırılır ve $\mathfrak{R}_{\hat{A}}$ ile gösterilir.

Çizelge 4. 1 Reel ve Dual Kuaterniyon Matrislerin Karşılaştırılması (devamı)

REEL KUATERNİYON MATRİSLER	DUAL KUATERNİYON MATRİSLER
	$\hat{A} = [\hat{a}_{rs}] = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k \in M_n(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\det(\hat{A})$ pure olmayan bir dual kuaterniyon olacak şekilde bir dual kuaterniyon matris olsun. Bu durumda $\det(\hat{A}) \neq 0$ olmak üzere $(\det(\hat{A}) = a + bi + cj + dk = \det(A_1)(1 + iz(A_1^{-1}B_1)i + iz(A_1^{-1}C_1)j + iz(A_1^{-1}D_1)k)$ olduğundan $\det(A_1) \neq 0$ veya $a \neq 0$) $\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\hat{A})} ek(\hat{A})$ dir.

Çizelge 4. 1 Reel ve Dual Kuaterniyon Matrislerin Karşılaştırılması (devamı)

KAYNAKLAR

-
- [1] Hamilton, W. R., (1853). Lectures on Quaternions, Hodges Smith & Co., Dublin.
 - [2] Hacısalihoğlu, H. H., (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No.2.
 - [3] Nagaraj, M., Bharathi, K., (1985). "Geometry of Quaternionic and Pseudo Quaternionic Multiplications", Indian J. Pure Appl. Math., 16 (7), 741-756.
 - [4] Bharathi, K., Nagaraj, M., (1987). "Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae", Indian J. Pure Appl. Math., 18 (6), 507-511.
 - [5] Karadağ, M., Sivridağ, A. İ., (1997). "Tek değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri", Erc. Ün. Fen. Bil. Derg., 13, 1-2, 23-36.
 - [6] Taşcı, D., (2007). Soyut Cebir, Alp Yayınevi, Ankara.
 - [7] Hamilton, W. R., (1866). Elements of Quaternions, Longmans Green, London.
 - [8] Tait, P. G., (1867). An Elementary Treatise on Quaternions, C. U. P., Cambridge.
 - [9] Joly, C. J., (1905). A Manual of Quaternions, Macmillan, London.
 - [10] Fueter, R., (1935). "Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta \Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen", Comment. math. Helv. 7, 307-330.
 - [11] Cullen, C. G., (1965). "An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions", Duke Math. J. 32, 139-148.
 - [12] Sudbery, A., (1977). Quaternionic Analysis, University of York, Heslington.
 - [13] Ay, Ç., (2014). Dual Kuaterniyon Uzayında Fonksiyonel Analiz, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
 - [14] Conway, J. H. ve Smith, D. A, (2003). On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry, A. K. Peters, Natick, Mass.
 - [15] Gürlebeck, K. ve Sprössig, W., (1990). Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems, Birkhauser Verlag, Boston.

- [16] Kamberov, G., Norman, P., Pedit, F. ve Pinkall, U., (2002). Quaternions, Spinors, and Surfaces, Contemporary Mathematics, 299, Amer. Math. Soc., Province.
- [17] Adler, S. L., (1995). Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press, New York.
- [18] Kuipers, J. B., (2002). Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [19] Markey, B. R. ve Walmsley, S. H., (1982). "Quaternion Formulation of Lattice Dynamics of Molecular Crystals", Chemical Physics Letters, 92 (3): 257-261.
- [20] Saue, T. ve Jensen, H. J., (1999). "Quaternion Symmetry in Relativistic Molecular Calculations: The Dirac-Hartree-Fock Method", Journal of Chemical Physics, 111 (14): 6211-6222.
- [22] Fritzer, H. P., (2001). "Molecular Symmetry with Quaternions", Spectrochimica Acta Part A, 57 (10): 1919-1930.
- [22] Tweed, D., Cadera W. ve Vilis T., (1990). "Computing Three Dimensional Eye Position Quaternions and Eye Velocity From Search Coil Signals", Vision Res., 30 (1): 97-110.
- [23] Clement, R. A., (1991). "Natural Coordinates for Specification of Eye Movements", Vision Res., 31 (11): 2029-2032.
- [24] Haslwanter, T., (1995). "Mathematics of Three-Dimensional Eye Rotations", Vision Res., 35 (12): 1727-1739.
- [25] Gibbon, J. D., (2002). "A Quaternionic Structure in the Three-Dimensional Euler and Ideal Magneto-Hydrodynamics Equations", Physica D., 166: 17-28.
- [26] Kutrunov, V. N., (1992). "The Quaternionic Method of Regularizing Integral Equations of the Theory of Elasticity", J. Appl. Maths. Mechs., 56 (5): 765-770.
- [27] Ainola, L. ve Aben, H., (2001). "Transformation Equations in Polarization Optics of Inhomogeneous Birefringent Media", J. Opt. Soc. Am. A., 18 (9): 2164-2170.
- [28] Rotating Objects Using Quaternions,
http://www.gamasutra.com/view/feature/131686/rotating_objects_using_quaternions.php, 1 Ekim 2016
- [29] Unity, JavaScript Programming Tutorial
<http://www.francescomilanese.com/ENG/tutorials/unity-3d/14-tutorials/unity-3d/33-unity-javascript-programming-tutorial-quaternion-and-slerp-for-animated-rotations.html>, 1 Ekim 2016
- [30] Maxwell, J. C., (1893). A Treatise on Electricity and Magnetism, Dover Publications, New York, USA.
- [31] Wheeler, L. P. ve Gibbs, J. W., (1979). The History of a Great Mind, Ox Bow, Woodbridge.

- [32] Nahin, P. J. ve Heaviside, O., (1988). Sage in Solitude, IEEE Press, New York.
- [33] Wolf, L. A., (1936). "Similarity of matrices in which the elements are real quaternions", Bull. Amer. Math. Soc., 42: 737-743.
- [34] Lee, H. C., (1949). "Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients", Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A., 52: 253-260.
- [35] Brenner, J. L., (1951). "Matrices of Quaternions", Pasific Journal of Mathematics, 1: 329-335.
- [36] Zhang, F., (1997). "Quaternions and Matrices of Quaternions", Linear Algebra and its Applications, 251: 21-57.
- [37] Baker, A., (1999). "Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach", Linear Algebra and its Applications, 286: 303-309.
- [38] Huang, L. ve So, W., (2001). "On left eigenvalues of a quaternionic matrix", Linear Algebra and its Applications, 323: 105-116.
- [39] Zhang, F., (2007). "Gershgorin type theorems for quaternionic matrices", Linear Algebra and its Applications, 424: 139-153.
- [40] Farid, F. O., Wang, Q. W., Zhang, F., (2011). "On the eigenvalues of quaternion matrices", Linear and Multilinear Algebra, 59: 451-473.
- [41] Cockle, J., (1849). "On Systems of Algebra Involving More than One Imaginary", Philosophical Magazine, 35: 434-435.
- [42] Alagöz, Y., Oral, K.H. ve Yüce, S., (2012). "Split Quaternion Matrices", Miskolc Mathematical Notes, 13 (2): 223-232.
- [43] Erdoğan, M. ve Özdemir, M., (2013). "On Eigenvalues of Split Quaternion Matrices", Adv. Appl. Clifford Algebras, 23: 615-623.
- [44] Erdoğan, M. ve Özdemir, M., (2013). "On Complex Split Quaternion Matrices", Adv. Appl. Clifford Algebras, 23: 625-638.
- [45] Erdoğan, M. ve Özdemir, M., (2013). "Real Matrix Representation of Split Quaternion Matrices with Applications", DOI: 10.13140/RG.2.1.3105.9685.
- [46] Erdoğan, M. ve Özdemir, M., (2015). "Split Quaternion Matrix Representation of Dual Split Quaternions and Their Matrices", Adv. Appl. Clifford Algebras, 25: 787-798.
- [47] Cho, E., (1998). "De-Moivre's Formula for Quaternions", Appl. Math. Lett. 11 (6): 33-35.
- [48] Erdoğan, M. ve Özdemir M., (2015). "De-Moivre's and Euler Formulas for Matrices of Split Quaternions", Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications, 4: 3.
- [49] Majernik, V., (2006). "Quaternion formulation of the Galilean Space time Transformation", Acta Physica, 56 (1): 9-13.
- [50] Yüce, S. ve Ercan, Z., (2011). "On Properties of the Dual Quaternions", European Journal Of Pure and Applied Mathematics, 4 (2): 142-146.

- [51] Yaglom, I. M., (1979). A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. Springer-Verlag New York.
- [52] Jiang, T. S. ve Wei, M. S., (2005). "On a solution of the quaternion matrix equation $X - A\tilde{X}B = C$ and its application", Acta Mathematica Sinica, 21 (3):483-490.
- [53] Pennestri, E. ve Stefanelli, R., (2007). "Linear algebra and numerical algorithms using dual numbers", Multibody Syst. Dyn., 18 (3): 323-343.
- [54] Yüce, S. ve Akar, M., (2014). "Dual Plane and Kinematics", Chiang Mai J. Sci. 41 (2): 463-469.
- [55] Akar M., Yuce S. ve Kuruoğlu N., (2013). "One parameter planar motion on the Galilean plane", Int. Electronic J. Geometry, 6 (1): 79-88.
- [56] Helzer, G., (2000). "Special relativity with acceleration", Mathematical Association of America. The American Mathematical Monthly, 107 (3): 219-237.

DUAL SAYILAR

Bu kısımda dual sayılar ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım A.1

Bir dual z sayısı $+1$ reel birim ve ε dual birimden oluşan (x, y) sıralı reel sayı çiftidir.

Burada ε operatörü $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = 0$ şartını sağlar [50].

Bir dual sayı genellikle

$$z = x + \varepsilon y$$

formunda gösterilir. Böylece dual sayılar 1 ve ε ile üretilen 2 boyutlu

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}[\varepsilon] = \{ z = x + \varepsilon y : x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \}$$

reel cebirinin elemanlarıdır, [50].

Tanım A.2

Dual sayılarda toplama ve çarpma $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$, $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$(x_1 + \varepsilon y_1) + (x_2 + \varepsilon y_2) = (x_1 + x_2) + \varepsilon (y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + \varepsilon y_1)(x_2 + \varepsilon y_2) = (x_1 x_2) + \varepsilon (x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

şeklinde tanımlanır, [50].

Bu çarpım değişme, birleşme ve toplama üzerine dağılım özelliklerine sahiptir.

$z = x + \varepsilon y$ 'nin eşleniği

$$\bar{z} = x - \varepsilon y$$

ile tanımlanır ve

$$z \bar{z} = x^2$$

özelliğini sağlar, [50].

Dual sayılar; gauss temsili, kutup temsili ve üstel temsili olmak üzere üç farklı şekilde temsil edilebilir, [53]:

1. Gauss Temsili : $z = x + \varepsilon y$.

2. Kutupsal Temsili : $z = \rho (1 + \varepsilon \theta)$, ($\rho = x$ ve $\theta = \frac{y}{x}$).

3. Üstel Temsili : $z = \rho e^{\varepsilon \theta}$, ($\rho = x$ ($x \neq 0$)), $\theta = \frac{y}{x}$ ve $e^{\varepsilon \theta} = 1 + \varepsilon \theta$).

Kompleks sayıya benzer şekilde, z dual sayısının modülü $\|z\| = \|x\| = \rho$ olarak ve $\theta = y/x$ ise argümenti olarak adlandırılır ve $\arg(z)$ olarak gösterilir, [54].

$\|z\| = 1$ ise $z = x + \varepsilon y$ birim dual sayı olarak adlandırılır, [50].

$\|z\|_d = \|x + \varepsilon y\| = |x| = r > 0$ denklemini sağlayan dual düzlem¹ üzerindeki tüm noktaların kümesi, $x = \pm r$ doğrularıdır. Bu Galilean çemberi olarak adlandırılır, [54, 55].

$\|z\| = 1$ (veya $x = \pm 1$) eşitliğini sağlayan küme, dual düzlem üzerindeki Galilean birim çemberi olarak adlandırılır, [50, 55, 56].

¹ $\mathbb{D}$ dual düzlem;

$$\langle, \rangle_d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle_d = \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) = x_1 x_2$$

şeklinde tanımlanan nokta çarpımı ile bir $\mathbb{R}^2$ reel düzlemidir, [54]. Burada $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$, $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2 \in \mathbb{D}$.

Her reel θ için, θ açısının Galilean (dual) kosinüsü $\cos g \theta$ ve θ açısının Galilean (dual) sinüsü $\sin g \theta$ sırasıyla Galilean birim halkası üzerinde $P(x, y)$ noktasının x ve y koordinatları olarak tanımlanmıştır, [55, 56]:

$$\cos g \theta = x, \sin g \theta = y.$$

Ayrıca, her reel θ için şu denklemleri yazabiliriz, [50, 54, 55, 56]:

$$\cos g \theta = \frac{x}{\epsilon} = 1, \sin g \theta = \frac{y}{\epsilon} = \theta \text{ (her reel } \theta \text{ için).}$$

Aşağıdaki formüller $\cos g$ ve $\sin g$ tanımları ve üs kuralları kullanılarak elde edilmiştir, [55]:

- $\cos g (\theta_1 + \theta_2) = \cos g (\theta_1) \cos g (\theta_2) - \epsilon^2 \sin g (\theta_1) \sin g (\theta_2)$
- $\sin g (\theta_1 + \theta_2) = \sin g (\theta_1) \cos g (\theta_2) + \cos g (\theta_1) \sin g (\theta_2)$
- $\cos^2 g (\theta_1) + \epsilon^2 \sin^2 g (\theta_1) = 1.$

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Kemal Gökhan NALBANT
Doğum Tarihi ve Yeri : 12.12.1988 / FATİH
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : kgokhannalbant@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Endüstri Mühendisliği	YTÜ	2017
Y. Lisans	Matematik Mühendisliği	YTÜ	2012
Lisans	Endüstri Mühendisliği	YTÜ	2011
Lisans	Matematik Mühendisliği	YTÜ	2010
Lise	Fen-Matematik	Şehremini Lisesi	2006

YAYINLARI

Makale

1. Özdemir, Y., Başlıgil, H. ve Nalbant, K. G., (2012). "Optimization of Fleet Assignment: A Case Study in Turkey", An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 2(1):59-71.
2. Özdemir, Y., Nalbant, K. G. ve Başlıgil, H., (2017). "Evaluation of personnel selection criteria using Consistent Fuzzy Preference Relations", International Journal of Management Science, 4(6):76-81.
3. Nalbant, K. G. ve Yüce, S., (2018). "Dual Quaternion Matrices and Matlab Applications", (gönderildi).
4. Nalbant, K. G. ve Yüce, S., (2018). "Some New Properties of the Real Quaternion Matrices and Matlab Applications", (gönderildi).

Bildiri

1. Nalbant, K. G. ve Torunbalcı Aydın, F., (2013). "Von Neumann Stability Analysis of Explicit Nonstandard Scheme for Newell-Whitehead Equation with Finite Difference Method", International Conference On Applied Analysis and Mathematical Modeling, İstanbul, Türkiye, 2-5 Haziran, 693-694.
2. Nalbant, K. G. ve Yüce, S., (2018). "Dual Quaternion Matrices and Matlab Applications", International Congress On Mathematics and Analytical Methods, İstanbul, Türkiye, 2-3 Mart, 33-34.
3. Nalbant, K. G. ve Yüce, S., (2018). "Determinant of Dual Quaternion Matrices and Matlab Applications", 16-th International Geometry Symposium, Manisa, Türkiye, 4-7 Temmuz, (Sunum kabul edildi).
4. Nalbant, K. G. ve Yüce, S., (2018). "Inverse of Dual Quaternion Matrices and Matlab Applications", 16-th International Geometry Symposium, Manisa, Türkiye, 4-7 Temmuz, (Sunum kabul edildi).

ÖDÜLLERİ

1. YTÜ Matematik Mühendisliği Bölümü, Bölüm Birinciliği (2010)
2. YTÜ Kimya-Metalurji Fakültesi, Fakülte İkinciliği (2010)