

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LIE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ BAZI KONTROL SİSTEMLERİNİN
KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ**



MAHMUT KUDEYT

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. AYŞE KARA HANSEN**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ BAZI KONTROL SİSTEMLERİNİN
KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ**

Mahmut KUDEYT tarafından hazırlanan tez çalışması 09.11.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Doç. Dr. Eyüp KIZIL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL
Haliç Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi



Bu alışma, TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAşTIRMA KURUMU (TÜBİTAK)
tarafından 2211/A numaralı yurtiçi doktora burs programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın başından beri bana destek olan, engin bilgisiyle fikirlerime, çalışmalarına ışık tutan, yön veren değerli ve saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN, eş danışmanım Doç. Dr. Eyüp KIZIL, tez jüri üyelerim Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL ve Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bana yurtiçi doktora bursu veren TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU (TÜBİTAK)'a doktoram boyunca bana verdiği destek için teşekkür ederim.

Bu zorlu ve uzun yolda bana desteklerini esirgemeyen annem Selma KUDEYT, babam Mehmet KUDEYT, kardeşim Gökhan KUDEYT ve arkadaşlarım Sultan SÜTLÜ ve Halit TALİ'ye teşekkür ederim.

Bu uzun akademik maratonda desteğini benden esirgemeyen ve her durumda beni akademik çalışmalarında cesaretlendiren çok değerli arkadaşım Gebze Teknik Üniversitesi matematik araştırma görevlisi Çiğdem AY'a teşekkürlerimi sunarım.

Kasım, 2017

Mahmut KUDEYT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Lie Grupları	4
2.2 Lie Cebirleri	9
2.3 Üstel Tasvirler	15
2.4 Adjoint Gösterim	18
2.5 Lie Türevi	20
2.6 Üç-Boyutlu Reel Matris Lie Cebirleri	23
2.6.1 Heisenberg Lie Cebiri $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ ve Onun Lie Grubu $H_3(\mathbb{R})$	23
2.6.2 $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ nin Türev Cebiri $\text{Der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$	24
2.6.3 İki Boyutlu Üst Üçgensel Matrislerin Lie Cebiri $\mathfrak{ut}(2)$ ve Lie Grubu ..	25
2.6.4 Poincare Lie Cebiri $\mathfrak{p}(1,1)$ ve Onun Lie grubu $P(1,1)$	25
2.6.5 Lucky Guess Lie Cebiri $\mathfrak{lg}(3)$	26
2.6.6 Özel Öklidyen Lie Cebiri $\mathfrak{se}(2)$ ve Onun Lie Grubu $SE(2)$	26
2.6.7 Özel Lineer Lie Cebiri $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ve Onun Lie Grubu $SL(2)$	26
2.6.8 Özel Ortogonal Lie Cebiri $\mathfrak{so}(3)$ ve Onun Lie Grubu $SO(3)$	27

2.7	Serbest Nilpotent Lie Grupları	27
2.7.1	$f_{m,r}$ Serbest Nilpotent Lie Cebiri İçin Bir Model	29
BÖLÜM 3		
GENEL KONTROL SİSTEMLERİ		33
3.1	Giriş	33
3.2	Afin Kontrol Sistemleri	38
BÖLÜM 4		
3-BOYUTLU LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ		41
4.1	Heisenberg Lie Cebiri $h_3(R)$ 'in türev cebiri tablosu	41
4.2	$ut(2)$ 'nin Türev Cebiri $Der(ut(2))$	42
4.3	$p(1,1)$ 'in Türev Cebiri $Der(p(1,1))$	43
4.4	Lucky Guess Lie Grubu $LG(3)$	44
4.4.1	$LG(3)$ Lie Grubunun Özellikleri	45
4.4.2	$lg(3)$ 'ün Türev Cebiri $Der(lg(3))$	47
4.5	$se(2)$ 'nin Türev Cebiri $Der(se(2))$	49
4.6	$sl(2)$ 'nin Türev Cebiri $Der(sl(2))$	49
4.7	$so(3)$ 'ün Türev Cebiri $Der(so(3))$	50
4.8	3-Boyutlu Lie Grupları Üzerindeki Afin Kontrol Sistemin Kontrol Edilebilirlik Sınıflandırması	51
BÖLÜM 5		
SERBEST NİLPOTENT LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMİ.....		61
BÖLÜM 6		
SONUÇ VE ÖNERİLER		74
KAYNAKLAR.....		75
ÖZGEÇMİŞ.....		77

SİMGE LİSTESİ

$\mathfrak{ut}(2)$	İki boyutlu üst üçgensel reel matrislerin Lie cebiri
$UT(2)$	İki boyutlu üst üçgensel reel matrislerin Lie grubu
Σ	Kontrol Sistem
M	Kontrol sistemin durum uzayı, diferansiyellenebilir sonlu boyutlu manifold
S_Σ	Kontrol sistemin pozitif yörüngeler uzayı
$\mathcal{U}$	Kontrollerin uzayı
$\mathfrak{lg}(3)$	Lucky Guess Lie cebiri
$LG(3)$	Lucky Guess Lie grubu
$\mathfrak{sl}(2)$	Özel Lineer Lie cebiri
$SL(2)$	Özel Lineer Lie grubu
$\mathfrak{se}(2)$	Özel Öklidyen Lie cebiri
$SE(2)$	Özel Öklidyen Lie grubu
$\mathfrak{so}(3)$	Özel Ortogonal Lie cebiri
$SO(3)$	Özel Ortogonal Lie grubu
$\mathfrak{p}(1,1)$	Poincare Lie cebiri
$P(1,1)$	Poincare Lie grubu
G	Reel Lie grup
$\mathcal{D}$	Sistemin dinamiği
$\mathfrak{f}_{m,r}$	Serbest nilpotent Lie cebiri
$F_{m,r}$	Serbest nilpotent Lie grubu
$H_3(\mathbb{R})$	3-boyutlu Heisenberg Lie grup
$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$	3-boyutlu Heisenberg Lie cebiri

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Üstel tasvir diagramı	17
Şekil 2. 2 Adjoint gösterim diagramı	19
Şekil 2. 3 İç otomorfizma diagramı.....	20

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4. 1 $Der(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$ elemanlarının Lie parantezleri	42
Çizelge 4. 2 $Der(\mathfrak{ut}(2))$ elemanlarının Lie parantezleri	43
Çizelge 4. 3 $Der(\mathfrak{p}(1,1))$ elemanlarının Lie parantezleri	43
Çizelge 4. 4 $Der(\mathfrak{lg}(3))$ elemanlarının Lie parantezleri	48
Çizelge 4. 5 $Der(\mathfrak{se}(2))$ elemanlarının Lie parantezleri.....	49
Çizelge 4. 6 $Der(\mathfrak{sl}(2))$ elemanlarının Lie parantezleri	50
Çizelge 4. 7 $Der(\mathfrak{so}(3))$ elemanlarının Lie parantezleri	50
Çizelge 4. 8 Lie cebirlerinin cebirsel ve topolojik özellikleri	51
Çizelge 4. 9 1.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri	52
Çizelge 4. 10 2.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri.....	54
Çizelge 4. 11 3.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri.....	55
Çizelge 4. 12 4.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri.....	56
Çizelge 4. 13 5.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri.....	58
Çizelge 4. 14 6.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri.....	58
Çizelge 4. 15 7.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri.....	59
Çizelge 5. 1 $\mathfrak{f}_{3,3}$ cebirinin türev cebiri matrisi	69

**LIE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ BAZI KONTROL SİSTEMLERİNİN
KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ**

Mahmut KUDEYT

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN

Eş Danışman: Doç. Dr. Eyüp KIZIL

Bu tez çalışması ile belirli Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğine dair sonuçlar elde edilerek Matematiksel Kontrol Teoriye katkıda bulunulmuştur.

Çalışma 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezimizdeki problemlerin literatür özeti, bu tez çalışmasının hangi amaçla oluşturulduğu ve problemlerin hipotezlerinden kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, Lie teorisinin temelini oluşturan Lie cebiri, Lie grubu, üstel tasvir ve adjoint gösterim detaylı biçimde açıklanmış ve temel teoremler ile örnekler verilerek tezin temel kavramları ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, genel kontrol sistemlerinin temel bileşenleri detaylı bir biçimde verilmiştir. Lie grupları üzerinde tanımlı bilinen kontrol sistem çeşitleri kısaca belirtilmiştir. Çalışmamızın önemli bir parçası olan afin kontrol sistemleri detaylı bir biçimde ele alınmış ve çalışmamıza ışık tutan karakterizasyonun Öklid uzayı üzerindeki çalışması gösterilmiştir.

Dördüncü bölüm, tezin ilk özgün kısmını içermektedir. Tüm 3-boyutlu reel matris Lie gruplarının türev cebirleri ve bu Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin dinamiğinin elemanlarının Lie parantezleri hesaplanmıştır. Ayrıca 3-boyutlu Lucky

Guess Lie grubu elde edilmiş ve; bu grubun cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. Ek olarak, Lucky Guess Lie grubunun $3n$ boyutlu genel hali verilmiştir. Son olarak, 3-boyutlu reel matris Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirlik sınıflandırması lineer, invariant ve bilineer kontrol sistemlerinden yararlanılarak yapılmıştır.

Beşinci bölüm de tezin özgün kısmından oluşmaktadır. Serbest nilpotent Lie grubu üzerindeki afin kontrol sisteminin otomorfizm yörüngesi elde edilmiş ve sisteme ilişik bilineer kısmına bağlı olarak kontrol edilebilirlik karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Afin kontrol sistemi, kontrol edilebilirlik, 3-boyutlu reel matris Lie grupları, serbest nilpotent Lie grubu, serbest nilpotent Lie cebiri.



**CONTROLLABILITY OF SOME CONTROL SYSTEMS
ON LIE GROUPS**

Mahmut KUDEYT

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN

Co-Advisor: Assoc. Prof. Dr. Eyüp KIZIL

Via this thesis, by obtaining controllability results of affine control systems on some Lie groups, a contribution to Mathematical Control Systems has been done.

This work consists of 5 chapters.

In the first chapter, literature summary of problem of our thesis, the purpose of which this thesis is created and hypothesis of the problem are mentioned.

In the second chapter; Lie algebra, Lie group, exponential map and adjoint representation which are base of Lie theory, are elaborately explained; and as fundamental theorems and some examples are given, basic notations of our thesis are expressed.

In the third chapter, basic notations of general control systems are described in details. Variety of common control systems on Lie groups are briefly given. Then affine control system which is very significant piece for our work is approached and a characterization, which is illuminating our study, on Euclidean space is referred.

Fourth chapter contains the first original part of this thesis. Derivation algebras of all 3 dimensional real matrix Lie algebras and Lie brackets of the elements from the

dynamics of affine control systems on these Lie groups have been calculated. Besides, 3-dimensional Lucky Guess Lie group has been obtained and; topological and algebraic properties of this group has been examined. In addition, $3n$ dimensional general form of Lucky Guess Lie group has been given. Finally, classification of characterization of controllability of affine control systems has been given by using linear, invariant and bilinear control systems.

Fifth chapter also contains original part of this thesis. Affine control system on free nilpotent Lie group has been examined. Automorphism orbit of the affine control system on free nilpotent Lie group has been found and the controllability has been characterized related to its associated bilinear part.

Keywords: Affine control system, controllability, 3-dimensional real matrix Lie groups, free nilpotent Lie algebra, free nilpotent Lie group.



1.1 Literatür Özeti

Kontrol sistem Σ , sonlu boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu ve sistemin kontrol parametrelili vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{D}$ den oluşur, yani; $\Sigma = (M, \mathfrak{D})$ şeklindedir. Kontrol sistemlerinin en temel klasik problemlerinden biri olan kontrol edilebilirlik problemi, sistemin negatif olmayan zamandaki çözümleri ile $\forall x \in M$ için oluşan $S_\Sigma(x)$ kümesinin $S_\Sigma(x) = M$ olup olmamasıdır. Eğer bu eşitlik varsa sistem kontrol edilebilirdir, denir. Bu problem oldukça uzun bir geçmişe dayanmakla birlikte, Lie parantezleri ve Lie grupları ile ilgisi 1970'lere dayanmaktadır.

Çalışmamızın Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri üzerine kurulu olması nedeniyle literatür açısından bu sistemleri kısaca tanımlayalım. G sonlu boyutlu bir Lie grubu olmak üzere, $\Sigma = (G, \mathfrak{D})$ afin kontrol sistemi

$$\dot{g}(t) = (D + X)_g + \sum_{i=1}^d (D^i + Y^i)_g$$

diferansiyel denklemlerin ailesi ile belirlidir. Burada, X ve Y^i , g Lie cebirinin elemanları ve D ve D^i , $Der(g)$ türev cebirinin elemanlarıdır. Bu sistem, Lie grupları üzerindeki lineer, invariant ve bilineer kontrol sistemlerini içerir.

Afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği, ilk olarak Jurdjevic ve Sallet tarafından Öklid uzayı üzerinde incelemişlerdir [1]. Bu çalışmadaki yaklaşım, Öklid uzayı üzerindeki afin kontrol sistemlerine ait vektör alanlarının bilineer kısımlarına, bir homoteti fonksiyonu ile ulaşarak, bilineer sistemin kontrol edilebilirliği yardımıyla, afin sistemin

kontrol edilebilirliğini elde etmektir. Daha sonra, Kara ve San Martin bu tekniği Genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğini elde etmek için kullanmış ve homoteti yerine sistemlerinin Lie cebiri seviyesindeki özel bir otomorfizmayı kullanarak, daha genel bir sonuç elde etmişlerdir [2]. Daha sonra, Kara ve Kule, benzer teknik ile, Carnot grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri için kontrollenebilirlik karakterizasyonunu elde etmişlerdir [3]. Kara ve Demirtaş, özel bir Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemleri üzerine kontrol edilebilirlik karakterizasyonu benzer teknik ile elde etmişlerdir [4].

Tez çalışmamızda, önceki tüm durumları genelleyen bir sistem üzerinde, benzer bir teknik kullanarak, son bölümde karakterizasyonumuzu sunuyoruz.

Ayrıca, 4. Bölümde, 3-boyutlu reel Lie grupları üzerindeki sistemlerin Lie parantezlerini hesaplayarak kontrol edilebilirlik sınıflandırmasını mevcut kriterler üzerinden yaparak, tablolar yoluyla kontrol edilebilen veya kontrol edilemeyen sistemlerin belirlenmesini sağlıyoruz.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı, Matematiksel Kontrol Teoriye diferansiyel geometrik açıdan ve Lie Teorisi yardımıyla katkıda bulunmaktır. 3-boyutlu reel matris Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğinin karakterize edilmesi için sınıflandırılma yapılmış ve serbest nilpotent Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği, sistemin bilineer kısmının kontrol edilebilirliği yardımıyla karakterize elde edilmiştir.

1.3 Hipotez

Tezin ilk özgün kısmının yer aldığı dördüncü bölümde, 3-boyutlu reel matris Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri için kontrol edilebilirlik sınıflandırması verilmek üzere, tüm 3-boyutlu reel Lie grupları, onların cebirleri ve bu cebirlere ait türev cebirleri hesaplanmış ve sistemlerin vektör alanlarının Lie parantezleri de hesaplanarak, uygulanan kontrol edilebilirlik karakterizasyonları için listelenmiştir. Bu tablolar, ilgili kontrol edilebilirlik yardımıyla invaryant, bilineer ve lineer kontrol

sistemlerinin kontrol edilebilirliğini yorumlanmaktadır.

Beşinci bölümde, serbest nilpotent Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri oluşturularak, cebir seviyesindeki bir otomorfizma yardımıyla bilineer parçasına ulaşılmaktadır. Böylece, bu tip sistemlerin sadece otomorfizm yörüngeleri üzerindeki kontrol edilebilirliklerinin yeterli olduğu ve bilineer kısımlarına otomorfizma ile ulaşılması yoluyla afin sistemlerin kontrol edilebilirlikleri karakterize edilmektedir.



TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, önce [5-9] kaynaklarından yararlanılarak Lie grupları ve Lie cebirleri hakkındaki bazı temel bilgiler, daha sonra ise bu tez çalışmasının iki problemi için temel kavram ve tanımlar verilmektedir.

2.1 Lie Grupları

Bir G Lie grubu cebirsel, topolojik ve geometrik yapıları bir arada bulunduran bir kümedir.

Tanım 2.1 G boştan farklı bir küme olmak üzere, “.” ikili işlemine göre bir grup ve diferansiyellenebilir manifold yapısına sahip olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad (2.1)$$

$$(x, y) \rightarrow \mu(x, y) = x \cdot y^{-1}$$

şeklinde tanımlanan tasvir C^∞ -sınıfından ise, G kümesine Lie grubu adı verilir [5].

Tanımdaki μ tasviri aşağıdaki iki tasvir şeklinde de ifade edilebilir. G 'nin birim elemanı e olmak üzere, $\forall x, y \in G$ için,

$$\tau: G \times G \rightarrow G, \tau(x, y) = x \cdot y \quad (2.2)$$

$$\lambda: G \rightarrow G, \lambda(y) = y^{-1} \quad (2.3)$$

C^∞ -sınıfından tasvirleri μ tasvirine denktirler.

Yani; $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned} \mu: G \times G \rightarrow G \\ (x, y) \rightarrow \mu(x, y) = x \cdot y^{-1} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \tau: G \times G \rightarrow G, \tau(x, y) = x \cdot y \\ \text{ve} \\ \lambda: G \rightarrow G, \lambda(y) = y^{-1} \end{aligned}$$

dir.

İlk olarak, (2.1) tasvirini kullanarak (2.2) ve (2.3) tasvirlerini elde edelim. G 'nin birim elemanı e olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mu: \{e\} \times G \rightarrow G \\ (e, y) \rightarrow \mu(e, y) = e \cdot y^{-1} = y^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani;

$$\lambda = \mu_e: G \rightarrow G, \quad (2.4)$$

$$\lambda(y) = \mu_e(y) = \mu(e, y) = y^{-1}$$

dir.

(2.4) ile tanımlanan tasvir μ 'nün ikinci bileşenine göre izdüşümü olduğundan λ tasviri diferansiyellenebilirdir. Ayrıca, $Id: G \rightarrow G$ birim tasvir olmak üzere,

$$\begin{aligned} (Id \times \mu_e): G \times G \rightarrow G \times G \\ (x, y) \rightarrow (x, y^{-1}) \end{aligned}$$

tasviri tanımlansın ve

$$\tau = \mu \circ (Id \times \mu_e): G \times G \rightarrow G,$$

$$(x, y) \xrightarrow{Id \times \mu_e} (x, y^{-1}) \xrightarrow{\mu} x \cdot y$$

bileşke tasviri gözönüne alınsın. Bu durumda, $\tau = \mu \circ (Id \times \mu_e)$ tasviri de, diferansiyellenebilir tasvirlerinin bileşkesi olarak diferansiyellenebilirdir.

Yeter koşul için, $Id: G \rightarrow G$ birim tasviri ile,

$$(Id \times \lambda): G \times G \rightarrow G \times G$$

$$(x, y) \rightarrow (x, y^{-1})$$

tasviri gözönüne alındığında, $\mu = \tau \circ (Id \times \lambda)$ elde edilir ve μ iki diferansiyellenebilir tasvirin bileşkesi olarak diferansiyellenebilirdir.

Örnek 2.2 Tersi olan tüm reel $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi

$Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ genel lineer grup, bir Lie grubudur. Matris çarpımı altında bir grup yapısına sahiptir. Diferansiyellenebilir manifold olduğunu göstermek için, $\mathbb{R}^{n^2}$ diferansiyellenebilir manifoldunun açık bir alt kümesi olduğunu göstermek yeterlidir [6]. Bunun için, öncelikle $n \times n$ matrislerinin $\mathbb{R}^{n^2}$ 'nin elemanlarına izomorf olduğunu gösterelim.

Tüm $n \times n$ reel matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{R})$ 'nin elemanları ile $\mathbb{R}^{n^2}$ 'nin elemanları arasında

$$f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$f(e_{ij}) = e_{j+n(i-1)}$$

tasvirini gözönüne alalım. Bu fonksiyon bir lineer izomorfizmadır ve f tasvirinin yardımıyla bir $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi, $\mathbb{R}^{n^2}$ 'nin bir elemanına dönüşür. Yani;

$$f(A) = f([a_{ij}]) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

dir. Determinant fonksiyonu

$$\det: M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn} \sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

bir polinomsal fonksiyon olduğundan sürekli türetilebilirdir. Genel lineer grubun elemanlarının determinanti sıfırdan farklı olduğundan,

$$\det(Gl(n, \mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

dır.

$\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisine göre tek nokta kümeleri kapalıdır. Yani; $\{0\}$ tek nokta kümesi kapalıdır. Tümleyen kümesi kapalı olan bir küme de açık olduğundan, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ açık bir kümedir. Açık bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki ters görüntüsü de açıktır, dolayısıyla, $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = Gl(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ 'nin açık bir alt kümesidir.

Diferansiyellenebilir bir manifoldun açık bir altkümesi de diferansiyellenebilir manifold olduğundan $Gl(n, \mathbb{R})$ kümesi de diferansiyellenebilir manifold yapısı kazanır.

Son olarak, matrisin tersi

$$\lambda: Gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow Gl(n, \mathbb{R})$$

$$\lambda(B) = B^{-1}$$

ve polinomsal fonksiyon olan matris çarpımı

$$\tau: Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow Gl(n, \mathbb{R})$$

$$\tau(A, B) = AB$$

diferansiyellenebilirlerdir.

Örnek 2.3 $Gl(n, \mathbb{R})$ Lie grubunun kapalı her altgrubu G 'nin bir Lie altgrubudur [5].

Bir matris grubunun Lie grup olduğunu göstermek için $Gl(n, \mathbb{R})$ bir altgrubunun kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu, her Cauchy dizisinin yakınsak olması ve yakınsadığı noktanın küme tarafından içerilmesi ile gösterilebilir.

Tanım 2.4 G bir Lie grubu ve herhangi bir $g \in G$ olsun.

$$l_g: G \rightarrow G$$

$$l_g(x) = gx$$

şeklinde tanımlanan tasvire, g 'nin sol ötelemesi adı verilir. Ayrıca,

$$dl_g: T_x G \rightarrow T_{gx} G$$

tasviri de l_g tasvirinin türevidir [5].

Benzer şekilde sağ öteleme ile sağ öteleme türev tasviri de tanımlanabilir.

Tanım 2.5 G Lie grubunun herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, $\forall g \in G$ için

$$dl_g(X(e)) = X(g) \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu vektör alanına sol-invariant vektör alanı denir [5].

Önerme 2.6 Bir G Lie grubu üzerindeki tüm sol-invaryant vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{g}$, G 'nin birimdeki tanjant vektör uzayı $T_e G$ 'ye izomorfik olan bir vektör uzayıdır [5].

İspat G , üzerindeki tüm vektör alanlarının vektör uzayı, $\chi^\infty(G)$ ile gösterilsin. $\mathfrak{g}$ 'nin $\chi^\infty(G)$ vektör uzayının alt vektör uzayı olduğunu gösterelim:

$\forall g \in G$ için,

$$i) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow X + Y \in \mathfrak{g}$$

(2.5) deki eşitliği kullanırsak,

$$dl_g((X + Y)(e)) = dl_g(X(e)) + Y(e) = dl_g(X(e)) + dl_g(Y(e))$$

yazılabilir ve her bir vektör alanı sol-invaryant olduğundan

$$dl_g(X(e)) + dl_g(Y(e)) = X(g) + Y(g)$$

dir. Böylece, $X + Y \in \mathfrak{g}$ elde edilir.

$$ii) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda X \in \mathfrak{g}$$

$$dl_g((\lambda X)(e)) = dl_g(\lambda(X)(e)) = \lambda dl_g(X(e)) = \lambda X(g)$$

dir ve buradan $\lambda X \in \mathfrak{g}$ dir. Böylece, $\mathfrak{g}$ 'nin $\chi^\infty(G)$ vektör uzayının bir alt vektör uzayı olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi ise, $\mathfrak{g}$ ile $T_e G$ vektör uzaylarının birbirlerine izomorf olduklarını gösterelim.

$$f: \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$$

$$f(X) = X(e)$$

tasviri sırasıyla, lineer, birebir ve örtendir. Önce lineerliği gösterelim.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ olmak üzere,

$$f(aX + bY) = (aX + bY)(e) = aX(e) + bY(e) = af(X) + bf(Y)$$

olduğundan, f tasviri lineerdir.

Bu tasvirin birebir olduğunu göstermek için eşit görüntüye sahip farklı herhangi iki sol invaryant vektör alanının birbirine eşit olduğunu gösterelim.

$\forall g \in G$ için,

$$f(X) = f(Y) \Rightarrow X(e) = Y(e)$$

eşitliğinden ve iki vektör alanı da sol-invaryant olduğundan,

$$dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e)) \Rightarrow X(g) = Y(g)$$

gerçeklenir. Her bir eleman için bu eşitlik sağlandığından $X = Y$ dir, yani; tasvir birebirdir.

Son olarak, f tasvirinin örten olduğunu gösterelim.

$\forall g, h \in G, X \in \chi^\infty(G)$ ve $v \in T_e G$ olmak üzere,

$$X(g) = dl_g(v)$$

eşitliğinden

$$X(hg) = dl_{hg}(v) = dl_h(dl_g(v)) = dl_h$$

elde edilir. $\forall g \in G$ için bu eşitlik sağlandığına göre $g = e$ olarak düşünüldüğünde istenilen elde edilmiş olur. Yani; f tasviri örtendir. Böylece, $\mathfrak{g} \cong T_e G$ izomorfluğu ispatlanmış olur.

Tanım 2.7 G ile H iki Lie grup olmak üzere, $\varphi: G \rightarrow H$ tasviri eğer diferansiyellenebilir bir grup homomorfizması ise, bu tasvire Lie grubu homomorfizması denir [5].

Tanım 2.8 G bir Lie grubu, $H \subseteq G$ 'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $\varphi: H \rightarrow G$ bir tasvir olsun. Eğer H kümesi, G 'nin bir alt manifoldu ve φ tasviri de bir grup homomorfizması ise H 'ye bir Lie altgrubu denir ve (H, φ) ile gösterilir [5]. (H, φ) , G 'nin kapalı altgrubu ve $\varphi(H)$ de G 'nin kapalı altkümesidir.

2.2 Lie Cebirleri

Tanım 2.9 $\mathfrak{g}$ bir $K(= \mathbb{C}, \mathbb{R})$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer $\mathfrak{g}$ üzerinde tanımlı

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

bilineer tasviri, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ olmak üzere, aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa, $\mathfrak{g}$ vektör uzayına bir Lie cebiri adı verilir:

- i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (ters simetri özelliği) ve
- ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi özdeşliği).

Bu özellikleri sağlayan $[\cdot, \cdot]$ ikili işlemine de Lie parantezi denir [8].

Bir G Lie grubunun birimdeki teğet uzayı $T_e G$, bu grubun Lie cebirine denktir. Yani; $T_e G \cong \mathfrak{g}$ dir. Önerme 2.6'dan dolayı, G üzerindeki sol-invaryant vektör alanlarının kümesi ile Lie cebiri denktir.

Lie cebir kavramı, üzerinde taşıdığı cebirsel özellikleri Lie grubuna da yansıttığından büyük bir öneme sahiptir.

Örnek 2.10 M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki tüm vektör alanlarının vektör uzayı $\chi^\infty(M)$

$$[\cdot, \cdot]: \chi^\infty(M) \times \chi^\infty(M) \rightarrow \chi^\infty(M)$$

$$[X, Y] = XY - YX$$

Lie parantezi ile birlikte bir Lie cebiridir [5].

Bu Lie parantezi ile birlikte $\chi^\infty(M)$ 'nin bir Lie cebiri olduğunu gösterelim:

$$\forall f, g, h \in C^\infty(M) \text{ ve } \forall X, Y, Z \in \chi^\infty(M) \text{ için,}$$

- i) $[gX + hY, Z](f) = (gX + hY)(Z(f)) - Z((gX + hY)(f))$
- ii) $= g(X(Z(f)) - Z(X(f))) + h(Y(Z(f)) - Z(Y(f))) = g[X, Z] + h[Y, Z]$

ikinci değişkene göre de lineerlik benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla, tasvir bilineerdir.

$$\begin{aligned} \text{iii) } [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) = -\{Y(X(f)) - X(Y(f))\} = -[Y, X](f) \\ &\Rightarrow [X, Y] = -[Y, X]. \end{aligned}$$

Tasvir ters simetriktir.

$$\text{iv) } \{[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]\}(f) = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \{[X, Y], Z\} + [Y, Z], X + [Z, X], Y\}(f) \\
&= [X, Y], Z(f) + [Y, Z], X(f) + [Z, X], Y(f) \\
&= ([X, Y])(Z(f)) - Z([X, Y](f)) + ([Y, Z])(X(f)) - X([Y, Z](f)) \\
&\quad + ([Z, X])(Y(f)) - Y([Z, X](f)) \\
&= (XY - YX)(Z(f)) + Z(X(Y(f)) - Y(X(f))) + (YZ - ZY)(X(f)) \\
&\quad + X(Y(Z(f)) - Z(Y(f))) + (ZX - XZ)(Y(f)) \\
&\quad + Y(Z(X(f)) - X(Z(f))) = 0
\end{aligned}$$

Yani; tasvir Jacobi özdeşliğini sağlar. Böylece, $\chi^\infty(M)$ vektör uzayı yukarıda tanımlanan Lie parantezi ile bir Lie cebiridir.

Örnek 2.11 Herhangi bir cisim üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V üzerinde,

$$[.,.]: V \times V \rightarrow V$$

$$[X, Y] = 0$$

olacak şekilde bir tasvir tanımlanırsa, bu tasvir Lie cebiri tanımındaki tüm özellikleri sağlar. Böylece, V vektör uzayı da bir Lie cebiridir. Bu cebire, Abel (değişmeli) Lie cebiri denir [8].

Örnek 2.12 Tüm $n \times n$ lik reel kare matrislerin vektör uzayı $M_n(\mathbb{R})$,

$$[.,.]: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$[A, B] = AB - BA$$

Lie parantez işlemi ile birlikte bir Lie cebiridir [7].

Bir Lie grubunun Lie cebirinin nasıl elde edilebileceğini aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 2.13 Üç boyutlu Heisenberg Lie grubu,

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ kümesi ile tanımlanır.}$$

$\alpha: [0,1] \rightarrow H_3(\mathbb{R})$ tanımlı, $\alpha(0) = I$ ve $x, y, z: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ olacak şekilde sürekli tasvirler olmak üzere,

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan sürekli bir tasvir olsun. $\alpha(t)$ 'nin birimdeki türevini (t 'ye göre) alalım.

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{x}(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_1 H_3(\mathbb{R}).$$

$H_3(\mathbb{R})$ Lie grubunun birimdeki teğet uzayı $T_1 H_3(\mathbb{R})$ 'ü, $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ ile gösterelim.

Böylece, $X \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ olur. Benzer işlemler yapıldığında,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$$

bulunur.

Böylece, $H_3(\mathbb{R})$ Heisenberg Lie grubunun Lie cebiri,

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) = \text{geren}\{X, Y, Z \mid [X, Y] = Z\}$$

dir ve $[X, Y] = Z$ Lie parantezi dışındaki tüm Lie parantezleri sıfırdır.

Tanım 2.14 $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ birer Lie cebiri ve $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ bir tasvir olsun. Eğer ψ bir lineer tasvir ve

$$\psi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\psi(X), \psi(Y)]_{\mathfrak{h}}$$

şeklinde Lie parantezi işlemini koruyorsa, ψ tasvirine bir Lie cebiri homomorfizması denir [5].

Teorem 2.15 G ile H birer Lie grubu, $\mathfrak{g}$ ile $\mathfrak{h}$ sırasıyla bu grupların Lie cebirleri ve

$\varphi: G \rightarrow H$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda,

a) $\forall X \in \mathfrak{g}$ için, X ve $d\varphi(X)$ φ –(ilişkilidir).

b) $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ bir Lie cebiri homomorfizmasıdır [5].

İspat Öncelikle, teoremin ilk kısmını ispatlayalım. φ bir homomorfizma olduğundan, $\forall x, y \in G$ için,

$$\varphi(xy) = \varphi(l_x(y)) = \varphi \circ l_x(y)$$

ve

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \circ \varphi(y) = l_{\varphi(x)} \circ \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \varphi \circ l_x = l_{\varphi(x)} \circ \varphi$$

dir. Buradan,

$\tilde{X} = d\varphi(X)$ ve $\tilde{X}$ bir sol-invaryant vektör alanı olduğundan,

$$\tilde{X}(\varphi(x)) = dl_{\varphi(x)}(\tilde{X}(e_H)) = dl_{\varphi(x)}d\varphi(X(e_G))$$

$$= d(l_{\varphi(x)} \circ \varphi)X(e_G) = d(l_{\varphi(x)} \circ \varphi)X(e_G) = d\varphi(X(x))$$

elde edilir. Böylece, istenilen sonucu, yani;

$$\Rightarrow \tilde{X} \circ \varphi = d\varphi \circ X$$

yi elde etmiş olduk.

(b)'yi ispatlamak için, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için,

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. İlk olarak, $[X, Y]$ ile $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ nin φ –ilişkili olduğunu gösterelim. $\forall g \in G, \forall f \in C^\infty(H)$ için,

$$d\varphi([X, Y]_g)(f) = [X, Y]_g(f \circ \varphi)$$

$$= X_g(Y((f \circ \varphi))) - Y_g(X(f \circ \varphi))$$

$$= X_g(d\varphi \circ Y)(f) - Y_g(d\varphi \circ X)(f)$$

$$\begin{aligned}
&= X_g(\tilde{Y}(f) \circ \varphi) - Y_g(\tilde{X}(f) \circ \varphi) \\
&= d\varphi(X_g)(\tilde{Y}(f)) - d\varphi(Y_g)(\tilde{X}(f)) \\
&= \tilde{X}_{\varphi(g)}(\tilde{Y}(f)) - \tilde{Y}_{\varphi(g)}(\tilde{X}(f)) \\
&= [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\varphi(g)}(f)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca, $[\tilde{X}, \tilde{Y}](e) = d\varphi([X, Y])(e)$ olup, tek olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.16 $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri ve $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 'nin bir altuzayı olsun. Eğer, $\forall X, Y \in \mathfrak{h}$ için, bu iki elemanın Lie parantezi $\mathfrak{h}$ 'nin bir elemanı ise, $\mathfrak{h}$ 'ye $\mathfrak{g}$ 'nin bir Lie alt cebiri denir [7].

Şimdi de, çalışmamız için büyük öneme sahip bağlantılı Lie gruplarından ve herhangi bir Lie grubunun bağlantılı Lie altgrupları ile onun Lie cebirinin alt cebirleri arasındaki birebir ilişkiyi ifade edelim.

Hatırlatma 2.17 Topolojik bir özellik olan bağlantılılığın tanımını ifade edelim.

X boştan farklı bir topolojik uzay ve $C, D \subseteq X$ 'in alt kümeleri olsun. Eğer $X = C \cup D$ iken $C \cap D = \emptyset$ ve C, D boştan farklı iki açık alt küme ise, X bir ayrışma sahiptir denir. Eğer X uzayı hiç bir ayrışma sahip değilse, bağlantılıdır denir [9].

Teorem 2.18 G bir Lie grubu; $\mathfrak{g}$, G 'nin Lie cebiri ve $\tilde{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ bir Lie alt cebiri olsun. G 'nin öyle bir tek (H, φ) bağlantılı Lie alt grubu vardır ki

$$d\varphi(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$$

eşitliği sağlanır [5].

Sonuç 2.19 Bir Lie grubunun bağlantılı Lie alt grupları ile grubun Lie cebirinin alt cebirleri arasında birebir bir eşleme vardır [5].

Hatırlatma 2.20 Basit bağlantılılığın ayrıntılı tanımına [9] dan ulaşılabilir. Kısaca hatırlatmak istersek, her noktadaki temel grubu sadece birim elemandan oluşan uzaya basit bağlantılı topolojik uzay denir.

Teorem 2.21 G ve H , Lie cebirleri sırasıyla $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ olan iki Lie grubu, G basit bağlantılı ve $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ bir homomorfizma olsun. $d\varphi = \psi$ olacak şekilde bir tek $\varphi: G \rightarrow H$ grup homomorfizması vardır [5].

Sonuç 2.22 Eğer basit bağlantılı G ve H Lie grupları, izomorfik Lie cebirlerine sahiplerse, izomorfiktirler.

Teorem 2.23 Lie cebirlerin izomorfizm denklik sınıfları ile basit bağlantılı Lie gruplarının izomorfizm denklik sınıfları arasında birebir bir eşleme vardır [5].

Tanım 2.24 Bir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin ideallerinden oluşan türetilmiş (derived) serisi,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}] \supseteq \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} = [\mathfrak{g}^{(j-1)}, \mathfrak{g}^{(j-1)}] \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer, bir $j \in \mathbb{N}$ için, $\mathfrak{g}^{(j)} = \{0\}$, ise $\mathfrak{g}$ 'ye j . dereceden çözülebilir Lie cebiri denir. Lie cebiri çözülebilir olan Lie grubuna, çözülebilir Lie grubu denir [10].

Tanım 2.25 Bir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin ideallerinden oluşan alt merkezil serisi,

$$\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}_{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(0)}] \supseteq \mathfrak{g}_{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(1)}] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_{(j)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(j-1)}] \quad (2.7)$$

ile tanımlanır. Eğer, bir $j \in \mathbb{N}$ için, $\mathfrak{g}_{(j)} = \{0\}$ ise, $\mathfrak{g}$ ye j . dereceden nilpotent Lie cebiri denir. Lie cebiri nilpotent olan Lie grubuna, nilpotent Lie grubu denir [10].

2.3 Üstel Tasvir

Basit bağlantılı Lie grubunun önemi önceki bölümde belirtilmişti. Şimdi de verilen Lie cebirinin basit bağlantılı Lie grubunu bulabilmek için üstel tasvir ve bir parametrelili altgruplardan bahsedelim.

Tanım 2.26 G bir Lie grubu olmak üzere, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ homomorfizmasına, G 'nin bir parametrelili alt grubu denir [5].

Tanım 2.27 G bir Lie grubu, grubun Lie cebiri $\mathfrak{g}$ ve $\mathbb{R}$ 'nin Lie cebiri $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ olsun.

$$\varphi: \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$\varphi\left(\lambda \frac{d}{dr}\right) = \lambda X$$

bir Lie cebir homomorfizmasıdır. $\mathbb{R}$ basit bağlantılı olduğundan,

$$\exp_X: \mathbb{R} \rightarrow G$$

tasviri $d\exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X$ olacak şekilde tek bir parametrelili alt gruptur.

Başka bir şekilde ifade edersek, $t \rightarrow \exp_X(t)$ tasviri G 'nin tek bir parametrelili alt grubudur.

Eğer $t = 1$ olarak düşünülürse,

$$\exp(X) = \exp_X(1), \exp: \mathfrak{g} \rightarrow G \quad (2.8)$$

üstel tasvir olarak adlandırılır [5].

Teorem 2.28 G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ onun Lie cebiri olsun. $X \in \mathfrak{g}$ ve $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için,

- a) $\exp(tX) = \exp_X(t)$
- b) $\exp((t+s)X) = \exp(tX) \exp(sX)$
 $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$

dir [5].

İspat $s \in \mathbb{R}$ için, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow G$, $\psi(t) = \exp_{sX}(t)$ ile $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$, $\varphi(t) = \exp_X(st)$ tasvirlerini tanımlayalım. Teoremin a) kısmını ispatlamak için $\psi = \varphi$ eşitliğini elde etmemiz yeterlidir.

Bir vektör alanının integral eğrisi tanımından; ψ , sX in integral eğrisidir ve $\psi(0) = e$.

φ tasvirinin türevi alınır,

$$d\varphi \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = d\exp_X \left(s \frac{d}{dr} \Big|_{st} \right) = s d\exp_X \left(\frac{d}{dr} \Big|_{st} \right) = sX|_{\exp_X(st)}$$

elde edilir. Eşitlikten de görüldüğü gibi φ de sX 'in integral eğrisidir ve $\varphi(0) = e$ dir. Fakat bir vektör alanının integral eğrisi varsa tektir. Bu yüzden, $\psi = \varphi$ dir. s ve t parametreleri yer değiştirilip $t = 1$ alındığından a) ispatlanmış olur. a)'daki eşitlikten ve $\exp_X(t)$ tasvirinin bir homomorfizma oluşundan b) ve c), homomorfizmanın özellikleri yardımıyla bulunur. Yani;

$$\exp((t+s)X) = \exp_X(t+s) = \exp_X(t) \exp_X(s) = \exp(tX) \exp(sX),$$

$$\exp(-tX) = \exp_X(-t) = -\exp_X(t) = (\exp_X(t))^{-1} = (\exp(tX))^{-1}$$

dir.

Teorem 2.29 G ile H birer Lie grubu ve $\varphi: H \rightarrow G$ bir Lie grup homomorfizması olsun. Aşağıdaki

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Şekil 2.1 Üstel tasvir diyagramı [5]

diagramı değişmelidir [5].

İspat $\forall X \in \mathfrak{h}, t \in \mathbb{R}$ için $\exp(tX)$, H Lie grubunun bir elemanıdır.

$$\varphi \circ \exp(tX) = \varphi \circ \exp_X(t)$$

tasviri $t \rightarrow \varphi \circ \exp_X(t)$, $t = 0$ daki tanjantı $d\varphi(X(e))$ olan diferansiyellenebilir bir eğridir. Ayrıca, $\varphi \circ \exp_X(t)$ homomorfizma olduğundan $t \rightarrow \varphi(\exp(tX)) = \varphi(\exp_X(t)) = \varphi \circ \exp_X(t)$ G 'nin bir parametrelili alt grubudur.

Fakat, $X \in \mathfrak{h}$ için, $d\varphi(X) \in \mathfrak{g}$ ve $\exp(t(d\varphi(X))) \in G$ olacak şekilde, $t \rightarrow \exp_{d\varphi(X)}(t)$ tasviri $t = 0$ daki tanjantı $d\varphi(X(e))$ olan G 'nin tek bir parametrelili alt grubudur, ($\exp_X(t)$ 'in tanımından).

Böylece, bir parametrelili alt grubun tekliğinden, $\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X)))$ eşitliği yazılabilir. X vektör alanı sol invaryant olduğundan tamdır. Yani; $\forall t \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır. Eğer son eşitlikte $t = 1$ alırsak, istenilen $\varphi \circ \exp(X) = \exp(d\varphi(X))$ sonucu elde edilmiş olur.

Örnek 2.30 $GL(n, \mathbb{R})$ $n \times n$ tersinir matrislerin kümesinin Lie grubu olduğunu daha önce göstermiştik.

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

$$\varphi(t) = \exp(tA)$$

tasviri $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin tek bir parametrelili alt grubudur. $t = 1$ alındığında ise,

$$\exp(A) = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

üstel tasviri matris grubu için tanımlanmış olur [6].

Örnek 2.31 $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$, $H_3(\mathbb{R})$ Heisenberg Lie grubunun Lie cebiri olmak üzere,

$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) = \{X, Y, Z \mid [X, Y] = Z\}$ ve $\exp: \mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) \rightarrow H_3(\mathbb{R})$ tasviri verilsin.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) \text{ olmak üzere,}$$

$\exp(tX) = I + tX + \frac{tX^2}{2!} + \dots + \frac{tX^n}{n!} + \dots$ dir. $X^2 = 0$ olduğundan,

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$$

elde edilir. Benzer şekilde, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ için, $\exp(sY) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$ ve

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ için, } \exp(kZ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}) \text{ şeklindedir.}$$

2.4 Adjoint Gösterilimi

Tanım 2.32 M bir diferansiyellenebilir manifold ve G de bir Lie grubu olmak üzere,

$\forall \sigma, \tau \in G$ ve $\forall m \in M$ için,

$$\mu: G \times M \rightarrow M$$

$$(\sigma\tau, m) \rightarrow \mu(\sigma, \mu(\tau m)),$$

$$\mu(e, m) = m$$

şeklinde tanımlanan diferansiyellenebilir tasvire G 'nin M üzerindeki sol etkisi denir [5].

Benzer şekilde,

$$\mu: M \times G \rightarrow M$$

$$(m, \sigma\tau) \rightarrow \mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau)$$

$$\mu(m, e) = m$$

ile tanımlanan tasvir de G 'nin M üzerindeki sağ etkisi olarak adlandırılır [5].

Eğer $\mu: G \times M \rightarrow M$ tasviri G 'nin M üzerindeki sol etkisi ise, sabit bir $\sigma \in G$ elemanı için $m \rightarrow \mu(\sigma, m)$ tasviri M 'nin difeomorfizmasıdır ve μ_σ ile gösterilir.

Tanım 2.33 Eğer bir G Lie grubunun kendisi üzerinde

$$i: G \times G \rightarrow G$$

$$(\sigma, \tau) \rightarrow i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$$

tasviri ile tanımlanan sol etkisi alınırsa, buna iç otomorfizma denir.

Bu iç otomorfizmanın sabit noktası ise, $\forall \sigma \in G$ için $i_\sigma(e) = e$ ile tanımlıdır. Bu sabit e noktası kullanılırsa,

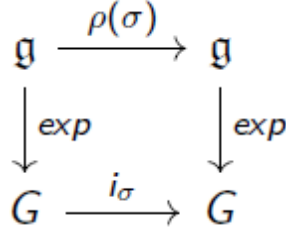
$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

$$\sigma \rightarrow di_\sigma|_e T_e G \cong \mathfrak{g}$$

şeklinde tanımlanan tasvir, G 'nin $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ içine gösterimidir ve bu gösterim Adjoint (eşlenik) gösterim olarak adlandırılır [5]. Ayrıca, Şekil 2.1'de verilen değişmeli diyagram kullanılarak, aşağıdaki diyagramlar elde edilir ve bu diyagramlar da değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d(\rho)} & \text{End}(\mathfrak{g}) \\ \downarrow \exp & & \exp \uparrow \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Şekil 2.2 Adjoint gösterim diyagramı [5]



Şekil 2.3 İç otomorfizma diyagramı [5]

$$\exp(t\rho(\sigma))(X) = \sigma(\exp(tX))\sigma^{-1}$$

$$\exp \circ \rho(\sigma) = i_\sigma \circ \exp$$

eşitlikleri geçerlidir.

2.5 Lie Türevi

Tanım 2.34 Bir X vektör alanının $\gamma_m: (a(m), b(m)) \rightarrow M, \gamma_m(0) = m$ şeklinde tanımlanan integral eğrisi verilmiş olsun. $D_t = \{m \in M | t \in (a(m), b(m))\}$ tanım kümesine sahip olan ve $\forall t \in \mathbb{R}$ sayısı için $X_t(m) = \gamma'_m(t)$ eşitliğini sağlayan bir X_t tasvirini alalım.

Eğer, $\forall t$ elemanı için, $D_t = M$ eşitliği gerçekleşiyorsa, yani; $\forall m \in M$ için, γ_m integral eğrisinin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ise, X 'e tam vektör alanı ve X_t tasvirine de 1-parametrelili reel sayılar ile parametrelenen M 'nin dönüşümlerinin grubu denir.

Eğer X tam vektör alanı değilse, X_t tasviri de grup oluşturmaz ve X 'in yerel bir parametrelili grubu olarak X_t tasvirlerinin koleksiyonu göz önüne alınabilir.

Bu ifadelerden sonra Lie türevi tanımını verebiliriz:

Bir M manifoldu üzerinde X ve Y diferansiyellenebilir vektör alanlarını alalım. X_t , X vektör alanının 1-parametrelili grubu olmak üzere, Y 'nin X 'e göre Lie türevini şu şekilde tanımlayabiliriz.

X vektör alanının m 'den $X_t(m)$ 'ye tanımlı integral eğrisini alalım ve Y vektör alanı için $Y_{X_t(m)}$ 'yi bulalım. Daha sonra X_{-t} difeomorfizmasının dX_{-t} diferansiyeli kullanılarak, m noktasındaki tanjant uzayı $T_m M$ 'de $dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ ve $Y(m)$ vektörlerinin farkını t 'ye

bölerek, $t \rightarrow 0$ iken limiti alınırsa, Y vektör alanının X 'e göre m noktasındaki Lie türevi bulunmuş olur. Bu Lie türevini $(L_X Y)_m$ sembolü ile gösterilerek, türevin ifadesi aşağıdaki şekilde verilir [5]:

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(m)}) - Y(m)}{t} = \frac{d}{dx} \Big|_{t=0} (dX_{-t}(Y_{X_t(m)}))$$

Böylece, M manifoldu üzerinde X ve Y diferansiyellenebilir vektör alanlarından Y 'nin X 'e göre Lie türevi $L_X Y = [X, Y]$ ile de verilebilir.

Önerme 2.35 $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olmak üzere, $X, Y \in \mathfrak{g}$ için,

$$d\rho(X)(Y) = [X, Y]$$

eşitliği gerçekleşir [5].

Şimdi de bu önerme ile ilgili bir örnek verelim:

Örnek 2.36 Heisenberg'in 3 boyutlu Lie grubu ile bu grubun Lie cebirini düşünelim.

$H_3(\mathbb{R})$ grubunun iç otomorfizmasının

$$i: H_3(\mathbb{R}) \times H_3(\mathbb{R}) \rightarrow H_3(\mathbb{R})$$

$$(\sigma, \tau) \rightarrow i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$$

olduğunu bildiğimizden, $H_3(\mathbb{R})$ 'nin iki elemanını $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R}) \text{ alırsak,}$$

$$\begin{aligned} i_\sigma(\tau) &= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & z+ay-bx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\rho: H_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho \left(\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = di_\sigma(\tau)$$

dir. $di_\sigma(\tau)$ türevini elde etmek için $i_\sigma(\tau)$ 'nin τ 'ya göre, yani; x, y ve z değişkenlerine göre türevini alarak,

$$Jac(i_\sigma)_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} = di_\sigma(\tau) \in \text{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$$

elde edilir.

$$di_\sigma: \mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow di_\sigma \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -bx + ay + z \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & x & -bx + ay + z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. $X, Y \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ için, $d\rho(X)(Y) = [X, Y]$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için, Şekil 2.2'deki diagramdan yararlanarak,

$$d\rho(X)(Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(tX))(Y)$$

$$\text{elde edilir. } X, Y \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{R}), \exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (t, 0, 0) \text{ ve}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ olduğunu, Örnek 2.31'de göstermiştik.}$$

$$\rho(\exp(tX))(Y) = \rho \left(\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

fonksiyonunun değerini, (2.9)'daki ifadede $a = t, b = 0, c = 0, x = 0, y = 1$ ve

$z = 1$ yazarak elde ettik. Böylece,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(tX))(Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Z = [X, Y]$$

istenilen sonucu elde etmiş oluruz.

2.6 Üç-Boyutlu Reel Matris Lie Cebirleri

Bu kısımda tezin 4. Bölümündeki kontrol edilebilirlik sınıflandırması için kullanılan durum uzaylarının cebirlerini veriyoruz. Bu amaçla, Bowers'ın [11] deki çalışmasında sınıflandırdığı 3-boyutlu matris Lie cebirlerini inceliyoruz. [11] de verilen sınıflandırma aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

$\mathfrak{g}$ Lie cebiri bir boyutlu reel matris Lie cebiri olsun. Bu durumda, $\mathfrak{g}$ Lie cebiri tek bir e_1 elemanından üretilmiştir. $[e_1, e_1] = 0$ olduğundan, bu Lie cebiri $L(1,0)$ ile gösterilsin.

Benzer şekilde, iki boyutlu reel matris Lie gruplarını inceleyelim. $\mathfrak{g}$ Lie cebiri iki boyutlu bir matris Lie cebiri olmak üzere, $\mathfrak{g} = \text{geren}\{e_1, e_2\}_{Lie}$ verilsin. Genel durumda, iki boyutlu Lie cebirlerinin Lie parantez işlemi $[e_1, e_2] = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ olmalıdır. Bu nedenle, $[e_1, e_2] = 0$ olması durumunda tek değişmeli Lie cebiri $L(2,0)$ ile ifade edilir. λ_1 yada λ_2 den en az biri sıfırdan farklı ise, örneğin; $\lambda_1 \neq 0$ olsun. $[e_1, e_2] = \lambda_1 e_1$ eşitliğinden $L(2,1)$ Lie cebirini elde etmiş olduk. $\lambda_2 \neq 0$ durumu ilk duruma izomorfik olduğundan tek bir $L(2,1)$ cebiri vardır. Üç boyutlu reel matris Lie cebirleri için $\mathfrak{g} = \text{geren}\{e_1, e_2, e_3\}_{Lie}$ üç boyutlu matris Lie cebirinin türev cebiri sıfır, bir, iki ya da üç boyutlu olabilir.

Buradan, $[e_1, e_2] = e_3$ şartını sağlayan, $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$, $L(3,1)$ ile temsil edilmiştir.

İlk olarak, iyi bilinen Heisenberg grubununun türev cebir elemanlarını vererek başlıyoruz.

2.6.1 Heisenberg Lie Cebiri $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ ($L(3,1)$) ve Onun Lie Grubu $H_3(\mathbb{R})$

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Heisenberg Lie grubu ve

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) = \text{span}_{LA} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Heisenberg Lie cebiri verilsin. $[e_1, e_2] = e_3$ olmak üzere, $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ 'nin türev cebiri olan $Der(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$ 'nin elemanları aşağıda yer almaktadır.

2.6.2 $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ 'nin Türev Cebiri $Der(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$

Bu kısımda, $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ türev cebir elemanlarından [12] de olduğu gibi yararlanacağız.

İşlemleri kısaca ifade edelim.

$D \in Der(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$ elemanının tanımı gereği,

$$D: \mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$$

$$D([A, B]) = [D(A), B] + [A, D(B)]$$

ile verilir. D aynı zamandan bir endomorfizma olduğundan bir 3×3 matris temsiline sahiptir. Bu matrisi

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}^T \quad (2.10)$$

ile gösterirsek, $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ 'nin Lie parantez işlemleri ve D tanımı kullanarak, bu matrisi elde edebiliriz. Burada,

$$D \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow D(e_1) = d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + d_{13}e_3 \quad (2.11)$$

$$D(e_2) = d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + d_{23}e_3$$

$$D(e_3) = d_{31}e_1 + d_{32}e_2 + d_{33}e_3$$

dir. Bu bağıntılar yardımıyla $d_{31} = d_{13} = 0, d_{33} = d_{22} + d_{11}$ elde edilir.

Böylece, D 'nin (2.10)'daki matris temsili

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{22} + d_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 0 & d_{23} & d_{22} + d_{11} \end{pmatrix}$$

haline dönüşür. Her bir d_{ij} sayısına göre ifadeyi düzenlediğimizde

$$Der(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})) = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

türev cebirinin baz elemanlarını elde etmiş oluruz.

2.6.3 İki Boyutlu Üst Üçgensel Matrislerin Lie Cebiri $\mathfrak{ut}(2)(L(3, -1))$ ve Onun Lie Grubu $UT(2)$

İki boyutlu üst üçgensel matrislerin Lie grubu

$$UT(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

dir ve onun Lie cebiri

$$\mathfrak{ut}(2) = \text{span} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

şeklinde. Lie parantez işlemleri; $[e_1, e_2] = e_1$ olmak üzere, diğer cebir elemanlarının Lie parantezleri sıfırdır.

2.6.4 Poincare Lie Cebiri $\mathfrak{p}(1, 1)(L(3, 2, x = -1))$ ve Onun Lie Grubu $P(1, 1)$

Üç boyutlu Poincare Lie grubu,

$$P(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in O(1,1), x \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

ve onun Lie cebiri

$$\mathfrak{p}(1,1) = \text{span} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

verilsin. Ayrıca, bu Lie cebirine ait Lie parantez işlemleri

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1 \text{ ve } [e_2, e_3] = -e_2$$

ile verilir.

2.6.5 Lucky Guess Lie Cebiri $\mathfrak{lg}(3)(L(3, 3))$

Lucky Guess Lie cebiri

$$\mathfrak{lg}(3) = \text{span} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

verilsin. Ayrıca, bu cebire ait Lie parantez işlemleri

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1 \text{ ve } [e_2, e_3] = e_1 + e_2$$

ile verilir.

2.6.6 Özel Öklidyen Lie Cebiri $\mathfrak{se}(2)(L(3, 4, x = 0))$ ve Onun Lie Grubu $SE(2)$

Özel Öklidyen matrislerin 3 boyutlu Lie grubu

$$SE(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^2, R \in SO(2) \right\}$$

verilsin. Bu Lie grubun, Lie cebiri

$$\mathfrak{se}(2) = \text{span} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ile verilsin. Ayrıca, bu cebirin Lie parantezleri

$$[e_1, e_2] = 0, [e_2, e_3] = e_1 \text{ ve } [e_3, e_1] = e_2$$

şeklindedir.

2.6.7 Özel Lineer Lie Cebiri $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})(L(3, 5))$ ve Onun Lie Grubu $SL(2)$

Sıralamamızda altıncı sırada olan özel lineer Lie grubu

$$SL(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det A = 1 \right\}$$

kümesi ile verilir. Bu grubun Lie cebiri,

$$\mathfrak{sl}(2) = \text{span} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ve Lie parantez işlemleri

$$[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = -2e_2 \text{ ve } [e_2, e_3] = e_3$$

şeklindedir.

2.6.8 Özel Ortogonal Lie Cebiri $\mathfrak{so}(3)$ ($L(3, 6)$) ve Lie Grubu $SO(3)$

Üç boyutlu özel ortogonal Lie grubu

$$SO(3) = \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

ve onun Lie cebiri

$$\mathfrak{so}(3) = \text{span} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

en iyi bilinen örneklerdendir. Burada, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$ ve $[e_2, e_3] = e_1$ dir.

2.7 Serbest Nilpotent Lie Grupları

Bu kısımda, tezin 5. Bölümünde durum uzayı olarak kullanacağımız serbest nilpotent Lie grubunu ve cebirini tanıtıyoruz.

Tanım 2.37 $m \geq 2$ ve $r \geq 1$ belirli birer tamsayı olmak üzere; $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ vektör alanlarının kümesi ile üretilen ve nilpotentlik derecesi r olan Lie cebirine serbest Lie cebiri denir. Bu Lie cebir $\mathfrak{f}_{m,r}$ ile gösterilir.

Yani, $\mathfrak{f}_{m,r}$ serbest Lie cebiri

- $\mathfrak{f}_{m,r} = \text{Lie}\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$,
- r . dereceden nilpotent bir Lie cebiri,

- r . dereceden nilpotent her $\mathfrak{n}$ Lie cebiri ve her $\varphi: \{X_1, X_2, \dots, X_m\} \rightarrow \mathfrak{n}$ tasviri için, öyle bir tek $\tilde{\varphi}: \mathfrak{f}_{m,r} \rightarrow \mathfrak{n}$ Lie cebir homomorfizması vardır ki φ tasvirinin genişlemesidir.

Hatırlatma 2.38 Sabit m ve r için; $\mathfrak{f}_{m,r}$ Lie cebiri, izomorfizmaya göre tektir.

Tanım 2.39 $\mathfrak{f}_{m,r}$, $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ m üreteçli ve r . dereceden serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $\mathfrak{f}_{m,r}$ için bir Hall tabanının elemanlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım [13] :

- $X_1, X_2, \dots, X_m$ elemanları bir Hall tabanının ilk m elemanlarıdır ve bu elemanlar ağırlığı (height) 1 olan standart monomiallar olarak gösterilecektir;
- $n \leq 2 \leq r$ olmak üzere, ağırlığı (height) n olan standart monomialleri tanımlayalım:

Kabul edelim ki ağırlığı $1, 2, \dots, n-1$ olan monomialleri tanımlamış olsun ve monomiallerin ağırlıklarına göre sıraladığımızı kabul edelim. Yani, eğer u monomialinin ağırlığı v monomialinin ağırlığından daha yüksek ise $u > v$ şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca, eğer $u > v$ ve bu iki monomialin ağırlıkları toplamı n ve eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa, u ve v nin Lie parantezi $[u, v]$ 'nin ağırlığı da n dir:

1. u ve v , $u > v$ olacak şekilde iki standart monomiallerdir.
2. Eğer u standart monomiali $u = [x, y]$ formuna sahip ise $v \geq y$ dir.

Ağırlığı $1, 2, \dots, r$ olan tüm standart monomiallerin koleksiyonu $\mathfrak{f}_{m,r}$ için bir Hall tabanıdır [13].

Teorem 2.40 $\mathfrak{f}_{m,r}$ için bir Hall tabanı, bir tabandır (vektör alanlarının bir tabanı anlamında) [13].

Örnek 2.41 $\mathfrak{f}_{3,4}$, üreteçleri $\{X_1, X_2, X_3\}$ olan 4.dereceden nilpotent bir serbest Lie cebiri olsun. Bu Lie cebirin üreteçler ve nilpotent derecesi yardımıyla Hall tabanı elemanlarını elde edelim.

Burada ağırlıkları indislerle göre sıralayabiliriz; yani $X_3 > X_2 > X_1$ olsun.

1 Ağırlıklı: $X_1, X_2, X_3,$

2 Ağırlıklı: $[X_2, X_1], [X_3, X_1], [X_3, X_2]$

3 Ağırlıklı:

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_2, X_1, X_1], [X_3, X_1, X_1] \\ [X_2, X_1, X_2], [X_3, X_1, X_2], [X_3, X_2, X_2] \\ [X_2, X_1, X_3], [X_3, X_1, X_3], [X_3, X_2, X_3] \end{array} \right.$$

4 Ağırlıklı:

$$\left\{ \begin{array}{l} [[X_2, X_1, X_1], X_1], [[X_3, X_1, X_1], X_1] \\ [[X_2, X_1, X_1], X_2], [[X_3, X_1, X_1], X_2] \\ [[X_2, X_1, X_2], X_2], [[X_3, X_1, X_2], X_2], [[X_3, X_2, X_2], X_2] \\ [[X_2, X_1, X_1], X_3], [[X_3, X_1, X_1], X_3] \\ [[X_2, X_1, X_2], X_3], [[X_3, X_1, X_2], X_3], [[X_3, X_2, X_2], X_3] \\ [[X_3, X_1, X_3], X_3], [[X_3, X_1, X_3], X_3], [[X_3, X_2, X_3], X_3] \\ [X_3, X_1], [X_2, X_1], [X_3, X_2], [X_2, X_1] \\ [X_3, X_2], [X_3, X_1]. \end{array} \right.$$

$\mathfrak{f}_{m,2}$ için bir Hall tabanı verilsin:

1 Ağırlıklı: $X_1, X_2, \dots, X_m,$

2 Ağırlıklı: $[X_2, X_1], [X_3, X_1], \dots, [X_m, X_1],$

$[X_3, X_2], \dots, [X_m, X_2],$

$\ddots \quad \vdots$

$[X_m, X_{m-1}].$

Hatırlatma 2.42 $H(m, r) := \dim(\mathfrak{f}_{m,r})$ olmak üzere,

$$H(m, 2) := \dim(\mathfrak{f}_{m,2}) = \sum_{j=1}^m j = \frac{m \cdot (m + 1)}{2}.$$

2.7.1 $\mathfrak{f}_{m,r}$ Serbest Nilpotent Lie Cebiri İçin Bir Model

Bu kısımda, çalışmamızda kullanacağımız $\mathfrak{f}_{m,r}$ serbest nilpotent Lie cebirleri için

[14] de yer alan modeli kısaca ifade edelim.

Öncelikle $\mathfrak{f}_{m,r}$ Lie cebirinin boyutunu, hatırlatma 2.42’de olduğu gibi $H(m,r)$ ile gösterelim. $\mathfrak{f}_{m,r}$ cebirinin üreteçleri $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ olmak üzere cebirin üreteçlerinin sıralamasını, Örnek 2.41’de olduğu gibi indislere göre olduğunu, yani $E_m > E_{\{m-1\}} > \dots > E_2 > E_1$ olsun. Bu sıralama yardımıyla diğer $E_{\{m+1\}}, E_{\{m+2\}}, \dots, E_H$ elemanlarını üretebilmek için aşağıdaki yöntem izlenir:

$i > m$ olmak üzere,

$$E_i = [E_{j_1}, E_{k_1}], \quad (j_1 > k_1)$$

bu cebirin herhangi bir elemanı verilsin. Eğer E_{k_1} ’i sabit tutup $j_2 > k_2$ olacak şekilde E_{j_1} yerine $[E_{j_2}, E_{k_2}]$ yazdığımızda,

$$E_i = [[E_{j_2}, E_{k_2}]; E_{k_1}]$$

elde etmiş oluruz. Benzer şekilde bu işlemi devam ettirdiğimizde

$$\begin{aligned} E_i &= [E_{j_1}, E_{k_1}] \\ &= [[E_{j_2}, E_{k_2}]; E_{k_1}] \\ &= [[[E_{j_3}, E_{k_3}]; E_{k_2}]; E_{k_1}] \\ &= \dots \\ &= \left[\left[\dots \left[[E_{j_n}, E_{k_n}], E_{k_{n-1}} \right], \dots, E_{k_2} \right]; E_{k_1} \right], \end{aligned}$$

$1 \leq l \leq n-1$ için $1 \leq k_n < j_n \leq m$ ve $k_{l+1} \leq k_l$ dir.

Bu açılımda görüldüğü üzere, E_i elemanı n tane Lie parantez işlemi sonucu oluşmuştur. E_i ’yi ait Lie parantez işlemini sayısını, kısaca $d(i) = n$ ile gösterecek olursak, $\mathfrak{f}_{m,r}$ cebirinin üreteçleri olan $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ için

$$d(1) = d(2) = \dots = d(m) = 0$$

olur. Çünkü bu elemanlar üreteç olduklarından, herhangi bir Lie parantezi ile üretilmemişlerdir. Yani, herbir üreteç için Lie parantez işlemi sayısı sıfırdır. Ayrıca,

herbir E_i vektör alanı için, bu vektör alanının üretilmesini sağlayan $E_1, E_2, \dots, E_H$ elemanlarının sayısını bir indeks yardımıyla ifade edelim. Herbir λ_j elemanı, üretilmiş olan E_i içinde yeralan $E_{k_n}, E_{k_n-1}, \dots, E_2, E_1$ elemanlarından kaç tanesinin E_j olduğunu gösteren sayısıdır. Böylece,

$$I(i) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_H)$$

E_i için bir indeks oluşturmuştur. I tanımı gereği, serbest Lie cebirinin üreteçleri olan $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ 'ler için indeks

$$I(1) = I(2) = \dots = I(m) := (0, \dots, 0)$$

gibidir.

E_i vektör alanı üretilirken $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_{n-1}}, E_{j_n}$ elemanlarının azalan bir sıralaması kullanıldığını gözönüne alırsak, $\forall j_l \in \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ indisi için $j_l < i$ olarak yazabiliriz. Bu sıralama, kısmi sıralamadır. Bu kısmi sıralama ile eğer $a < b$ ise $I(a)$ nın her bir girdisi, $I(b)$ 'nin karşılıklı gelen girdisinden büyük ya da eşittir. Bu tanımlamalardan sonra [14] da verilen model için tanımlanan monomiali ifade edelim:

$$a < b \Rightarrow P_{a,b} := \frac{(-1)^{d(b)-d(a)}}{(I(b)-I(a))!} x^{I(b)-I(a)}.$$

Örnek 2.43 $E_i = \left[\left[\left[\left[\left[[E_3, E_2], E_2 \right], E_2 \right], E_4 \right], E_5 \right], E_6 \right]; E_6$ ve $E_k = \left[[E_3, E_2], E_4 \right]; E_6$

vektör alanları verilsin. E_i 'nin 7 tane Lie parantezinden oluştuğu ve E_k 'nin da 2 tane Lie parantezinden oluştuğu görülmektedir. Bu durumda, $d(i) = 7$ ve $d(k) = 2$ dir. Ayrıca

$$I(i) = (0, 3, 0, 1, 1, 2, 0, 0, \dots, 0), \quad I(k) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Böylece

$$P_{2,i} = -\frac{x_2^3 x_4 x_5 x_6^2}{3! 2!}, \quad P_{k,i} = \frac{x_2^2 x_5 x_6}{2!}$$

bulunur.

Teorem 2.44 $\mathfrak{f}_{m,r}$, m üreteçli ve r .dereceden nilpotent olan bir serbest nilpotent Lie cebiri olsun; $\dim(\mathfrak{f}_{m,r}) = H$ verilsin. $\mathbb{R}^H$ üzerindeki polinom katsayılarına sahip

$$E_1 := \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$E_2 := \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j>2} P_{2,j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

⋮

$$E_m := \frac{\partial}{\partial x_m} + \sum_{j>m} P_{m,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

vektör alanları aşağıdaki özelliklere sahiptir [14] :

- i) $\mathbb{R}^H \equiv \mathfrak{f}_{m,r} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Burada her bir V_i vektör uzayı i ağırlıklı Hall tabanının standart monomilları ile gerilmiştir.
- ii) $E_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, \dots, H$.
- iii) $E_1, \dots, E_m$ vektör alanlarının ürettiği Lie cebiri $\mathfrak{f}_{m,r}$ izomorfiktir.

Hatırlatma 2.45 $\mathfrak{f}_{m,r}$ bir nilpotent Lie cebiri olduğundan, $\forall X, Y \in \mathfrak{f}_{m,r}$ için aşağıda tanımlanan Cambell-Hausdorff formülü bu cebir üzerinde bir ikili işlemdir, [15]:

$$\begin{aligned} X \diamond Y = & X + Y + \frac{1}{2} [X, Y] + \frac{1}{12} ([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) \\ & - \frac{1}{48} ([Y, [X, [X, Y]] - [X, [Y, [X, Y]]]) + \dots + \{\text{nilpotenlik derecesine bağlı}\}. \end{aligned}$$

GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

Bu bölümde genel kontrol sistemleri ve özel olarak da tezin özgün kısımlarının yer aldığı son iki bölümde kullanılacak olan afin kontrol sistemleri incelenmektedir.

3.1 Giriş

Bir genel kontrol sistemini kendisini oluşturan parçaları tanımlayarak ifade edelim. Bir kontrol sistemi aşağıdaki nesneleri içerir:

- **Durum (State) Uzayı:** Sonlu boyutlu bir M diferansiyellenebilir manifolduna kontrol sisteminin durum uzayı denir.
- **Kontrol:** $u: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ kabul edilebilir fonksiyonların her birine sistemin kontrolleri (stratejileri) denir. Burada, U kümesi kontrollerin değer kümesi ve $\mathcal{U} = \{u \mid u: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U, u \text{ kabul edilebilir fonksiyonlar}\}$ kümesine de kontrollerin kümesi denir. Çalışmamızın ilk kısmında u kontrollerini parçalı sabit tasvirler olarak kabul edeceğiz.
- **Dinamik:** Her bir $u \in \mathcal{U}$ için,

$$X_u: M \rightarrow TM$$

$$x \rightarrow X(x, u)$$

nun M üzerinde bir düzgün vektör alanı olduğunu kabul edelim. $\forall x \in M$ ve $\forall u \in \mathcal{U}$ için,

$$\dot{x} = X(x, u(t)) \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemler ailesi, $\mathfrak{D} = \{X_u | u \in \mathcal{U}\}$ vektör alanlarının ailesi ile belirlidir.

Bu $\mathfrak{D}$ kümesine kontrol sistemin dinamiği denir. (3.1) diferansiyel denklemler ailesi sadece $\phi(t, x, u)$ yerel çözümlerine sahiptir. $t = 0$ ise $\phi(0, x, u) = x$ dir.

Kısaca, $\Sigma = (M, \mathfrak{D})$ ikilisine bir kontrol sistemi denir. Şimdi de Σ kontrol sistemi ile ilişkili iki objenin tanımını verelim.

Tanım 3.1 $\Sigma = (M, \mathfrak{D})$ bir kontrol sistemi olsun. $\mathfrak{D}$ 'deki vektör alanının oluşturduğu yerel diffeomorfizmalar ile verilen

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k | X^i \in \mathfrak{D} \text{ ve } t_i \in \mathbb{R}\}$$

pseudo-grubu ekleme (concatenation) işlemine göre bir gruptur. Fakat, her bir elemanın birden fazla tersi olduğu için, bu gruba pseudo-grup denir.

G_Σ 'nin $x \in M$ üzerine etkisi

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi_t(x) | \varphi_t \in G_\Sigma\}$$

ile verilir ve $G_\Sigma(x)$ kümesine M 'nin x 'deki yörüngesi (orbiti) denir. Bu etki, M üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur. Bu bağıntıyı $x \sim y \Leftrightarrow y \in G_\Sigma(x)$ ile gösterelim. Şimdi de bu bağıntının, denklik bağıntısı özelliklerini sağladığını gösterelim.

Bir bağıntının denklik bağıntısı olabilmesi için aşağıdaki üç şartı sağlaması gerekir:

i) **Yansıma özelliği:** $\forall x \in M$ için $x \sim x \Leftrightarrow x \in G_\Sigma(x)$ olması gerekir. $\forall \varphi_t \in G_\Sigma$ için, $\varphi_0(x) = x$ olduğundan yansıma özelliği sağlanır.

ii) **Simetri özelliği:** $\forall x, y \in M$ için $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ olması gerekir. $x \sim y \Rightarrow y \in G_\Sigma(x)$ dir.

Yani, $\exists \varphi_t \in G_\Sigma$ için $\varphi_t(x) = y$ dir. G_Σ bir grup olduğundan $\varphi_t^{-1} \in G_\Sigma$ dir.

$x = \varphi_t^{-1}(y)$ olarak düşünülürse $x \in G_\Sigma(y)$, $y \sim x$ dir.

iii) **Geçişme özelliği:** $\forall x, y, z \in M$ için $x \sim y$ ve $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ olması gerekir.

$x \sim y \Rightarrow y \in G_\Sigma(x)$ ve $y \sim z \Rightarrow z \in G_\Sigma(y)$ olduğundan $\exists \varphi_t^1, \varphi_s^2 \in G_\Sigma$ olmak üzere,

$$\varphi_t^1(x) = y, \tag{3.2}$$

$$\varphi_s^2(y) = z. \tag{3.3}$$

(3.2)'deki eşitlikten $\varphi_t^1(x) = y$ ve (3.3)'den $(\varphi_s^2)^{-1}(z) = y$ olur. Buradan

$$\varphi_t^1(x) = (\varphi_s^2)^{-1}(z) \Rightarrow \varphi_s^2 \circ \varphi_t^1(x) = z \Rightarrow x \sim z \text{ dir.}$$

Tanım 3.2 $\Sigma = (M, \mathcal{D})$ bir kontrol sistemi olsun. $\mathcal{D}$ deki vektör alanının oluşturduğu yerel diffeomorfizmaların pozitif zamana kısıtlanması ile oluşan

$$S_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k | X^i \in \mathcal{D} \text{ ve } t_i \in \mathbb{R}^+ \}$$

pseudo-semigrubu, ekleme (concatenation) işlemine göre kapalıdır. Fakat, $\varphi_t \in S_\Sigma$ iken, $\varphi_t^{-1} \notin S_\Sigma$ dir. Ayrıca, $S_\Sigma \subset G_\Sigma$ dir. $S_\Sigma(x)$ kümesine M 'nin x 'deki pozitif yörüngesi (orbiti) denir.

Tanım 3.3 $\Sigma = (M, \mathcal{D})$ bir kontrol sistemi olsun.

$$\mathcal{A}_\Sigma(x) = \{y \in M | y \in \varphi_t(x), t > 0\}$$

kümesine kontrol sistemin x 'den ulaşılabilirlerin kümesi denir.

Tanım 3.4 $\Sigma = (M, \mathcal{D})$ bir kontrol sistemi olsun. $S_\Sigma(x) = M$ ise, Σ kontrol sistemi M manifoldu üzerinde kontrol edilebilirdir, denir.

Teorem 3.5 (Yörünge Teoremi, Sussman) $\Sigma = (M, \mathcal{D})$ bir kontrol sistemi olsun. $G_\Sigma(x)$ yörüngesi M manifoldunun bir immersed alt manifoldudur [16].

$S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x) \subset M$ olduğu bilindiğinden, kontrol edilebilirlik problemini karakterize edebilmemiz için öncelikle $G_\Sigma(x) = M$ olması gerekir. Bu özellik kontrol sistemin geçişli olması ile adlandırılır. Eğer sistem geçişli ise, kontrol edilebilirlik problemi $S_\Sigma(x) = G_\Sigma(x)$ eşitliğinin hangi durumlarda gerçekleştiğine dönüşür. Yörünge Teoremi, kontrol sistemin dinamiğindeki tüm bilgileri koruyarak, kontrol edilebilirlik problemini sistemin yörüngesine indirgeyerek çalışmamıza olanak veren önemli bir teoremdir.

Öklid uzayı üzerindeki kontrol sistemleri, Lie grupları üzerindeki kontrol sistemlerine genelleştirilmiş ve Kontrol Teorinin temel en önemli iki klasik problemlerinden biri olan kontrol edilebilirlik problemi bu sistemler üzerinde çalışılmaya devam edilmiştir.

Lie grupları üzerindeki kontrol sistemlerini temelde aşağıdaki gibi listeleyebiliriz:

G , sonlu boyutlu bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ 'de onun Lie cebiri olsun.

1) Invariant Kontrol Sistemleri

$g \in G, X, Y^i \in \mathfrak{g}$, $u_i: \mathbb{R} \rightarrow U$ kontrol fonksiyonları olsun. Lie grupları üzerinde tanımlı invariant kontrol sistemi

$$\dot{g}(t) = X(g) + \sum_{i=1}^d u_i Y^i(g)$$

diferansiyel denklemler ailesi ile belirlidir.

2) Lineer Kontrol Sistemleri

$g \in G$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), Y^i \in \mathfrak{g}$, $u_i: \mathbb{R} \rightarrow U$ kontrol fonksiyonları olsun. Bu durumda, Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemi

$$\dot{g}(t) = D(g) + \sum_{i=1}^d u_i Y^i(g)$$

diferansiyel denklemler ailesi ile belirlidir.

3) Bilineer Kontrol Sistemleri

$g \in G$, $D, D^i \in \text{Der}(\mathfrak{g})$, $u_i: \mathbb{R} \rightarrow U$ kontrol fonksiyonları olsun. Bu durumda, Lie grupları üzerindeki bilineer kontrol sistemi

$$\dot{g}(t) = D(g) + \sum_{i=1}^d u_i D^i(g)$$

diferansiyel denklemler ailesi ile belirlidir.

4) Afin Kontrol Sistemleri

$g \in G, D, D^i \in \text{Der}(\mathfrak{g}); X, Y^i \in \mathfrak{g}$, $g \in G, D, D^i \in \text{Der}(\mathfrak{g})$, $u_i: \mathbb{R} \rightarrow U$ kontrol fonksiyonları olsun. Bu durumda, Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemi

$$\dot{g}(t) = (D + X)(g) + \sum_{i=1}^d u_i (D^i + Y^i)(g)$$

diferansiyel denklemler ailesi ile belirlidir.

Örnek 3.6 $H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ matris Lie grubu verilsin. Bu Lie grubu

üzerinde bir invariant kontrol sistem, $g \in H_3(\mathbb{R}); u_1, u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\dot{g}(t) = \left(Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)_g + u_1 \left(X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)_g + u_2 \left(Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)_g$$

şeklinde verilebilir.

Örnek 3.7 $H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ matris Lie grubu verilsin.

$D \in \text{Der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$ olmak üzere $D(X) = Y, D(Y) = X$ ve $D(Z) = 0$ olacak şekilde ifade edilsin. $D = -ad(X)$ olarak bir X otomorfizması verilsin. Bu durumda, $g \in H_3(\mathbb{R})$ ve $u_1, u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\dot{g}(t) = X_g + u_1 Y_g + u_2 Z_g$$

$H_3(\mathbb{R})$ grubu üzerinde bir lineer kontrol sistemidir.

Örnek 3.8 $H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ matris Lie grubu verilsin. (Örnek 3.7)

deki gibi X otomorfizması ve $D_1(X) = 0, D_1(Y) = 0$ ve $D_1(Z) = Y$ olacak şekilde bir $D_1 = -ad(X_1)$ olacak şekilde X_1 otomorfizması daha verilsin. Böylece,

$g \in H_3(\mathbb{R}), u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde,

$$\dot{g}(t) = X_g + u(X_1)_g$$

$H_3(\mathbb{R})$ grubu üzerinde bir bilineer kontrol sistemidir.

Örnek 3.9 $H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ matris Lie grubu verilsin.

Otomorfizmaları Örnek 3.8'deki gibi X ve X_1 olarak düşünersek, $g \in H_3(\mathbb{R})$ ve $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\dot{g}(t) = (X + X)_g + u(X_1 + Y)_g$$

ile $H_3(\mathbb{R})$ grubu üzerinde bir afin kontrol sistemidir.

Aşağıda; invariant, lineer ve bilineer kontrol sistemlerinden daha genel olan afin kontrol sistemleri verilmektedir.

3.2 Afin Kontrol Sistemleri

Afin kontrol sistemleri ilk olarak $\mathbb{R}^n$ üzerinde 1984 yılında Jurdjevic ve Sallet [1] tarafından sunulmuştur. Daha sonra Lie grupları üzerine genişletilmiştir [2].

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki afin kontrol sistemlerini tanımlamak için bu uzay üzerindeki afin grubu, bu grubun Lie cebirini ve son olarak afin vektör alanını inceleyoruz [1].

Tanım 3.10 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı endomorfizmaların uzayı $End(\mathbb{R}^n)$ ile ve otomorfizmaların uzayı da $Aut(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. $Aut(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'nin semi-direkt çarpımı $Aut(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki afin grubu tanımlar. Bu grup $Af(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.11 $Af(\mathbb{R}^n)$ grubunun Lie cebiri, $End(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathbb{R}^n$ 'nin semi-direkt çarpımı $End(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^n$ ile tanımlanır ve $af(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.12 $af(\mathbb{R}^n)$ Lie cebirine ait vektör alanları afin vektör alanı diye adlandırılır. Bu cebirin tanımı gereği, $A \in End(\mathbb{R}^n)$ ve b , $\mathbb{R}^n$ 'de bir sütun vektörü olmak üzere, bir afin vektör alanı

$$X(x) = Ax + b \quad (3.4)$$

şeklindedir.

Tanım 3.13 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı afin kontrol sistemi, $x \in \mathbb{R}^n$;

$A, A_1, A_2, \dots, A_k \in End(\mathbb{R}^n)$; $b, b_1, b_2, \dots, b_k$ $\mathbb{R}^n$ 'deki sütun vektörleri ve $u_1, u_2, \dots, u_k: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ kontrolleri de parçalı sabit tasvirler olmak üzere,

$$\dot{x} = (Ax + b) + \sum_{j=1}^k u_j(t)(A_j x + b_j) \quad (3.5)$$

şeklindeki diferansiyel denklemler ile verilir. Diferansiyel denklemde $(Ax + b)$ ve $(A_j x + b_j)$ nin her biri (3.4) 'daki gibi bir afin vektör alanı olarak yazıldığında, yani $X(x) = (Ax + b)$ ve her j için $X_j(x) = (A_j x + b_j)$ yazıldığında, (3.5) 'daki diferansiyel denklem

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^k u_j(t)X_j(x)$$

şekline dönüşür.

Bu sistemin kontrol edilebilirliği Jurdjevic ve Sallet tarafından [1] de incelenmiştir. Bu karakterizasyonu ifade edebilmek için bazı tanımlar verip [7] deki teoremden yararlanalım.

Tanım 3.14 $\mathcal{D}$, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki afin kontrol sistemin dinamiği olsun. $\forall X \in \mathcal{D}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $X(x) \neq 0$ ise, bu dinamiğin tekil noktası yoktur, denir.

Tanım 3.15 $X(x) = Ax + b$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir afin vektör alanı olsun. Bu vektör alanının Ax kısmına vektör alanının bilineer kısmı denir ve $\vec{X}(x) = Ax$ ile gösterilir.

Teorem 3.16 $\mathcal{D}$, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir afin kontrol sistemin dinamiği ve $\vec{\mathcal{D}}$ bu dinamiğin bilineer kısmı olsun. Eğer $\mathcal{D}$ tekil noktaya sahip değil ve $\vec{\mathcal{D}}$, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ üzerinde kontrol edilebilirse, $\mathcal{D}$ de kontrol edilebilirdir [7].

Şimdi de bağlantılı bir G Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemini tanımayalım. Bu sistemler üzerinde kontrol edilebilirlik problemi için genel bir sonuç bulunmamaktadır. Sonraki iki bölümde ise, bu problem ile ilgili tezin özgün kısımları yer almaktadır.

G bağlantılı bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$, bu grubun Lie cebiri olsun. $Af(G)$, G nin afin grubu, $Aut(G)$ ile G nin semi-direkt çarpımıdır. Yani;

$$Af(G) = Aut(G) \otimes G$$

dir. $Af(G)$ grup üzerinde

$$(\varphi, g_1) \cdot (\psi, g_2) = (\varphi \circ \psi, g_1 \varphi(g_2))$$

bir ikili işlemdir. Bu grubun birim elemanını bulmak için bu grubu oluşturan her bir grubun birim elemanını belirtmemiz gerekir. $Aut(G)$ nin birim elemanı 1 ve e , G 'nin birim elemanı olmak üzere, $Af(G)$ grubun birim elemanı $(1, e)$ ve $(\varphi, g) \in Af(G)$ elemanın tersi $(\varphi^{-1}, \varphi^{-1}(g^{-1}))$ dir.

Böylece, $Af(G)$ Lie grubunun grup yapısını ifade etmiş olduk. Şimdi de Lie cebir yapısını inceleyelim.

$Af(G)$ 'nin Lie cebiri ; $af(G) = aut(G) \otimes \mathfrak{g}$ şeklindedir. Burada, $aut(G)$, $Aut(G)$ nin Lie cebiridir.

G Lie grubu basit bağlantılı ise $Aut(G)$, $Aut(\mathfrak{g})$ ye izomorftur. $Aut(\mathfrak{g})$ Lie cebiri ise,

$$Der(\mathfrak{g}) = \{D \in End(\mathfrak{g}) | \forall X, Y \in \mathfrak{g}, D([X, Y]) = [D(X), Y] + [Y, D(Y)]\}$$

ile tanımlı cebirdir. G bağlantılı ve basit bağlantılı bir Lie grubu olduğunda

$af(G) = Der(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ şeklinde yazılabilir. Bu cebirin Lie parantezi işlemi

$$[(D_1, X_1), (D_2, X_2)] = ([D_1, D_2], D_1X_2 - D_2X_1 + [X_1, X_2])$$

şeklindedir.

Bir $Af(G)$ grubu üzerinde tanımlı afin kontrol sistemi $\Sigma = (G, \mathfrak{D})$

$$\dot{g} = (D + X)_g + \sum_{j=1}^k u_j(t)(D_j + X_j)_g$$

diferansiyel denklemi ile verilir. Burada, $g \in G$; $D, D_1, \dots, D_k \in Der(\mathfrak{g})$;

$X, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ ve u_j 'ler ise kontrol fonksiyonlarıdır.

Afin sistem, oldukça geniş bir sistemdir. Sistemde türev cebirinden gelen elemanlar yok edilirse, sistem invariant sisteme; Lie cebirinden gelen elemanlar yok edilirse, sistem bilineer sisteme dönüşür. Eğer afin kontrol sistemi Abelyan grup üzerinde ise, lineer sisteme dönüşür.

3-BOYUTLU LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ

AFİN KONTROL SİSTEMLERİNİN KONTROL EDİLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde, tez çalışmasının ilk özgün kısmı yer almaktadır ve üç boyutlu Lie grupları üzerinde afin kontrol sistemleri incelenerek kontrol edilebilirlik karakterizasyonu sınıflandırması yapılmıştır.

Bu amaçla, önce Bowers'ın [11] deki çalışmasında sınıflandırdığı 3-boyutlu matris Lie cebirlerinin türev cebirlerini elde ediyoruz. Bu işlemler [12] de verilen algoritma ile yapılmaktadır. Böylece, afin sistemler için gerekli elemanlar elde edilmiş olur. Daha sonra elimizdeki vektör alanlarının Lie parantezlerini hesaplayarak bu 3-boyutlu reel matris Lie cebirlerinin karşılık gelen Lie grupları üzerindeki kontrol sistemlerinin sınıflandırmasını yapacağız.

4.1 Heisenberg Lie Cebiri $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ ($L(3, 1)$)'in türev cebiri tablosu

Üç boyutlu ilk matris grubu, Fizikte ve Matematikte üzerine birçok çalışma yapılmış olan üç boyutlu Heisenberg Lie grubu 2. Bölümde detaylı olarak verildi. Sınıflandırmada kullanılmak üzere, vektör alanlarının bilinen Lie parantezi yardımıyla türev elemanlarının Lie parantezlerini hesapladığımızda,

Çizelge 4.1 $Der(\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}))$ elemanlarının Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
D_1	0	0	$-D_1$	0	$-D_2$	0
D_2	0	0	0	$-D_1$	0	D_2
D_3	D_1	0	0	D_4	$-D_5$	0
D_4	0	D_1	$-D_4$	0	$D_3 - D_6$	D_4
D_5	D_2	0	D_5	$D_6 - D_3$	0	$-D_5$
D_6	0	$-D_2$	0	$-D_4$	D_5	0

çizelgesi elde edilir.

$\mathfrak{ut}(2)$ Lie cebirinin üreteçleri $[e_1, e_2] = e_1$ sağladığından $L(3, -1) = L(2, 1) \oplus L(1, 0)$ ile adlandırılmıştır.

4.2 $\mathfrak{ut}(2)$ 'nin Türev Cebiri $Der(\mathfrak{ut}(2))$

Bu kısımda, $\mathfrak{ut}(2)$ Lie cebirinin türev cebirini bulmak için Bölüm 2.6.2'deki (2.7) ve (2.8) ile benzer işlemler yapıldığında, (2.7)'deki benzer matris

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}^T$$

kullanılarak, $d_{22} = d_{12} = d_{13} = d_{31} = d_{32} = 0$ bağıntıları elde edilir. Böylece, türev cebiri

$$Der(\mathfrak{ut}(2)) = span \left\{ \begin{aligned} D_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Bu baz vektör alanlarının Lie parantez işlem sonuçlarını aşağıdaki tabloda listeliyoruz:

Çizelge 4.2 $Der(\mathfrak{ut}(2))$ elemanlarının Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	0	D_1	0	0
D_2	$-D_1$	0	0	0
D_3	0	0	0	$-D_3$
D_4	0	0	D_3	0

4.3 $\mathfrak{p}(1,1)$ 'in Türev Cebiri $Der(\mathfrak{p}(1,1))$

Bu kısımda, $\mathfrak{p}(1,1)$ 'in türev cebirinin baz vektör alanları bulunacaktır. Bölüm 2.6.2'deki benzer işlemler yapıp, (2.7)'deki matris kullanılarak $d_{12} = d_{21} = 0$ ve $d_{23} = d_{13} = d_{33} = 0$ bağıntıları bulunur. Böylece,

$$Der(\mathfrak{p}(1,1)) = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

elde edilir. Bu türev cebirine ait vektör alanlarının Lie parantezlerini aşağıdaki tabloda listeliyoruz:

Çizelge 4.3 $Der(\mathfrak{p}(1,1))$ elemanlarının Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
D_1	0	0	D_1	$-D_1$	0

Çizelge 4.3 $Der(\mathfrak{p}(1,1))$ elemanlarının Lie parantezleri (devamı)

D_2	0	0	$-D_2$	0	$-D_2$
D_3	$-D_1$	D_2	0	0	0
D_4	D_1	0	0	0	0
D_5	0	D_2	0	0	0

4.4 Lucky Guess Lie Grubu $LG(3)$

Bu kısımda, Bowers'ın [11] deki üç boyutlu Lie cebirlerinin sınıflandırması sırasında sunduğu üç boyutlu Lucky Guess Lie cebiri $\mathfrak{lg}(3)$ 'ün daha önce hesaplanmamış olan Lie grubunu hesaplıyoruz. Ayrıca, bu grubun cebirsel ve topolojik özelliklerini inceliyoruz.

Öncelikle Lucky Guess Lie cebirini geren baz vektör alanlarını ve bu vektör alanlarının Lie parantez işlemlerini ifade edelim.

Lucky Guess Lie cebiri

$$\mathfrak{lg}(3) = \text{span} \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.1)$$

ve bu cebire ait Lie parantez işlemleri

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1 \text{ ve } [e_2, e_3] = e_1 + e_2 \quad (4.2)$$

ile verilir.

Buradan, bu Lie cebirin basit bağlantılı Lie grubunu (2.8)'de tanımlanan

$\exp: \mathfrak{lg}(3) \rightarrow LG(3)$ tasvir yardımıyla elde edelim:

$$\exp: \mathfrak{lg}(3) \rightarrow LG(3)$$

$$\exp: A \rightarrow \exp(A)$$

tasviri verilsin. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{lg}(3)$ olmak üzere,

$$\exp(xe_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(ye_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(ze_3) = \begin{pmatrix} 1 & z & -1 - z + e^z \\ 0 & 1 & -1 + e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix}$$

elde edilir . Böylece,

$$LG(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z & x + y - 1 - z + e^z \\ 0 & 1 & -y - 1 + e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Lie grubu yapısını elde ettik.

4.4.1 $LG(3)$ Lie Grubunun Özellikleri

Bu kısımda, elde ettiğimiz $LG(3)$ Lucky Guess Lie grubunun cebirsel ve topolojik özelliklerini inceleyeceğiz.

Lemma 4.1 Lucky Guess Lie grubu bir matris Lie grubudur.

İspat. r pozitif bir tam sayı ve (A_r) , $LG(3)$ 'ün elemanlarından olsun. x_r, y_r ve z_r $\mathbb{R}$ 'de birer Cauchy dizi olacak şekilde

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & z_r & x_r + y_r - 1 - z_r + e^{z_r} \\ 0 & 1 & -y_r - 1 + e^{z_r} \\ 0 & 0 & e^{z_r} \end{pmatrix}$$

Cauchy dizisinin, $LG(3)$ 'ün $A = \begin{pmatrix} 1 & z & x + y - 1 - z + e^z \\ 0 & 1 & -y - 1 + e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix}$ elemanına yakınsadığını gösterebilirsek ispat tamamlanmış olur.

$\mathbb{R}$ tam olduğundan, her Cauchy dizisi $\mathbb{R}$ 'de bir noktaya yakınsar. x_r, y_r ve z_r dizileri sırasıyla x, y ve z reel sayılarına yakınsasın. Bu durumda, e^{z_r} dizisi de e^z 'ye yakınsar. Böylece, $r \rightarrow \infty$ iken, $A_r \rightarrow A$ elde edilir. n boyutlu bir matris grubu, $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin bir

kapalı alt grubu ise, matris Lie grubudur [17]. Böylece, $LG(3)$, $GL(3, \mathbb{R})$ 'nin kapalı bir alt grubudur. Dolayısıyla, bu grup, bir matris Lie grubudur.

Şimdi de bu Lie grubunun cebirsel özelliklerini bulalım.

Lemma 4.2 $LG(3)$ Lucky Guess Lie grubu, çözülebilir bir Lie grubudur.

İspat Tanım 2.24'de, (2.6) ile verilen türetilmiş seriyi $LG(3)$ için elde edelim. Bunun için, (4.1)'deki Lie cebiri ve (4.2)'deki Lie parantez sonuçlarını gözönüne alalım.

$$lg(3)^{(0)} = lg(3) = span\{e_1, e_2, e_3\},$$

$$lg(3)^{(1)} = [lg(3)^{(0)}, lg(3)^{(0)}] = span\{e_1, e_2\} \quad \text{ve}$$

$$lg(3)^{(2)} = [lg(3)^{(1)}, lg(3)^{(1)}] = \{0\}$$

türetilmiş serisinin ikinci basamaktaki ideali sıfır vektörüne eşit olduğundan $LG(3)$ çözülebilirdir.

İnceleyeceğimiz diğer bir cebirsel özellik, nilpotentlik özelliğidir.

Lemma 4.5 $LG(3)$ Lucky Guess Lie grubu, nilpotent bir Lie grubu değildir.

İspat Tanım 2.25'de, (2.7) ile verilen alt merkezil serisini $LG(3)$ için elde edelim.

(4.1)'deki Lie cebiri ve (4.2)'deki Lie parantez sonuçları gözönüne alınarak,

$$lg(3)_{(0)} = lg(3) = span\{e_1, e_2, e_3\},$$

$$lg(3)_{(1)} = [lg(3), lg(3)_{(0)}] = span\{e_1, e_2\}$$

$$lg(3)_{(2)} = [lg(3), lg(3)_{(1)}] = span\{e_1, e_2\}$$

⋮

$$lg(3)_{(j)} = [lg(3), lg(3)_{(j-1)}] = span\{e_1, e_2\} \neq \{0\}$$

elde edilir. Alt merkezil serisindeki hiç bir ideal sıfır vektörüne eşit olmadığından, $LG(3)$ nilpotent değildir.

Şimdi de $LG(3)$ 'ün topolojik özelliklerini inceleyelim.

Lemma 4.6 $LG(3)$ kompakt olmayan, bağlantılı ve basit bağlantılı bir Lie grubudur.

İspat Kompakt olmadığını göstermek için [17] de verilen yöntem kullanılacaktır. Bunun için, $LG(3)$ Lie grubunun herhangi bir elemanının aşağıdaki Frobenius normunu alalım:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} 1 & z & x+y-1-z+e^z \\ 0 & 1 & -y-1+e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix} \right\|_F \\ &= \sqrt{\text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & z & x+y-1-z+e^z \\ 0 & 1 & -y-1+e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z & x+y-1-z+e^z \\ 0 & 1 & -y-1+e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix}^T \right)} \\ &= \sqrt{2+z^2+(x+y-z-1+e^z)^2+(-y-1+e^z)^2} \end{aligned}$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için, $LG(3)$ norma sınırlı değildir. Dolayısıyla, bu grup kompakt değildir. Grubun bağlantılı ve basit bağlantılı olduğunu göstermek için,

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow LG(3)$$

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & z & x+y-1-z+e^z \\ 0 & 1 & -y-1+e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix}$$

homeomorfizmasından yararlanıyoruz. g tasviri bir homeomorfizma ve $\mathbb{R}^3$ 'de hem bağlantılı, hem de basit bağlantılı olduğundan dolayı, $LG(3)$ 'de aynı özelliklere sahiptir.

4.4.2 $lg(3)$ 'ün Türev Cebiri $Der(lg(3))$

2.6.2 kısmındaki benzer işlemler yapıldığında (2.10) matrisi yardımıyla,

$$d_{23} = d_{13} = 0, d_{12} = d_{33} = 0 \text{ ve } d_{11} = d_{22}$$

bağıntıları elde edilir. Buradan da,

$$Der(lg(3)) = \text{span} \left\{ \begin{aligned} & D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

elde ederiz. Aşağıdaki tablo ile türev cebirinin bazını oluşturan vektör alanlarının Lie parantezlerini verelim:

Çizelge 4.4 $Der(lg(3))$ elemanlarının Lie parantezleri

$[.,.]$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
D_1	0	0	$-D_1$	$-D_1$	0	0
D_2	0	0	$-D_1 - D_2$	$-D_2$	$-D_1$	0
D_3	D_1	$D_1 + D_2$	0	0	0	D_6
D_4	D_1	D_2	0	0	0	D_6
D_5	0	D_1	0	0	0	D_6
D_6	0	0	$-D_2$	$-D_6$	$-D_6$	0

Lucky Guess Lie grubunu $3n$ boyutlu formunun elde ettiğimiz halini, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

n –boyutlu birim matris, $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ için

$$X_n = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix}, Y_n = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix},$$

$$Z_n = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix}, e^{Z_n} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$LG(3n) = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & Z_n & X_n + Y_n - I_n - Z_n + e^{Z_n} \\ 0 & I_n & -Y_n - I_n + e^{Z_n} \\ 0 & 0 & e^{Z_n} \end{pmatrix} \mid I_n, X_n, Y_n, Z_n, e^{Z_n} \text{ diagonal} \right\}$$

dir [18].

4.5 $\mathfrak{se}(2)$ 'nin Türev Cebiri $Der(\mathfrak{se}(2))$

$\mathfrak{se}(2)$ Lie cebirinin türev cebirini bulurken yukarıda yaptığımız benzer işlemleri tekrarlırsak,

$$d_{23} = d_{13} = d_{33} = 0, d_{12} = -d_{21}, d_{22} = d_{11}$$

bağıntıları elde edilir ve

$$Der(\mathfrak{se}(2)) = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

dir. Bu elemanların Lie parantezlerini aşağıdaki tabloda listeleyelim:

Çizelge 4.5 $Der(\mathfrak{se}(2))$ elemanlarının Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	0	0	$-D_2$	$-D_1$
D_2	0	0	D_1	$-D_2$
D_3	D_2	$-D_1$	0	0
D_4	D_1	D_2	0	0

4.6 $\mathfrak{sl}(2)$ 'nin Türev Cebiri $Der(\mathfrak{sl}(2))$

Özel Linear Lie grubunun türev cebirini bulmak için benzer işlemleri tekrarladığımızda,

$$d_{22} = d_{13} = d_{31} = 0, d_{12} = -2d_{23}, d_{32} = -2d_{21}, d_{33} = -d_{11}$$

bağıntılarını elde ederiz. Buradan,

$$Der(\mathfrak{sl}(2)) = \text{span} \left\{ D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

elde edilir ve bu türev cebirine ait vektör alanlarının Lie parantez işlemleri aşağıdaki tabloda listelenmiştir:

Çizelge 4.6 $Der(\mathfrak{sl}(2))$ elemanlarının Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	D_1	D_2	D_3
D_1	0	D_2	$-D_3$
D_2	$-D_2$	0	$-2D_1$
D_3	D_3	$2D_1$	0

4.7 $\mathfrak{so}(3)$ 'ün Türev Cebiri $Der(\mathfrak{so}(3))$

$\mathfrak{so}(3)$ cebirinin türev cebirini hesaplariken karşımıza çıkan bağıntılar,

$$d_{33} = d_{11} = d_{22} = 0, d_{31} = -d_{13}, d_{32} = -d_{23}, d_{12} = -d_{21}$$

şeklindedir. Buradan,

$$Der(\mathfrak{so}(3)) = span \left\{ D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

türev cebiridir ve son olarak bu cebiri geren vektör alanlarının Lie parantezi aşağıdaki tabloda listelenmiştir:

Çizelge 4.7 $Der(\mathfrak{so}(3))$ elemanlarının Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	D_1	D_2	D_3
D_1	0	D_3	$-D_2$
D_2	$-D_3$	0	D_1
D_3	D_2	$-D_1$	0

İncelediğimiz 3-boyutlu Lie gruplarının cebirsel ve topolojik özelliklerinin matris gösterilimi aşağıda verilmektedir:

Çizelge 4.8 Lie cebirlerinin cebirsel ve topolojik özellikleri

	$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$	$\mathfrak{ut}(2)$	$\mathfrak{p}(1,1)$	$\mathfrak{lg}(3)$	$\mathfrak{se}(2)$	$\mathfrak{sl}(2)$	$\mathfrak{so}(3)$
Bağlantılık	+	+	-	+	+	+	+
Basit Bağlantılık	+	+	-	+	-	+	-
Kompaktlık	-	-	-	-	-	-	+
Çözülebilirlik	+	+	+	+	+	-	+
Nilpotentlik	+	-	-	-	-	-	-

4.8 3-Boyutlu Lie Grupları Üzerindeki Afin Kontrol Sistemin Kontrol Edilebilirlik

Bu bölümde; yukarıda ifade edilen yedi tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğini, [19], [2] ve [20] de verilen kontrol edilebilirlik karakterizasyonlarını kullanarak sınıflandıracacağız.

Bu Lie grupları üzerinde tanımlanan afin kontrol sistemlerine ait birinci dereceden Lie parantezleri elde edilip her biri için bu hesaplamalar yedi tabloda gösterilecektir.

$\Sigma = (G, \mathcal{D})$ afin kontrol sistemi

$$\dot{g} = (D + X)_g + \sum_{j=1}^k u_j(t)(D_j + X_j)_g$$

diferansiyel denkler ailesi ile tanımlıdır. Burada, X ve $X_j \in \mathfrak{g}$ olmak üzere, $D = 0$ ise, sistem invaryanttır. Eğer sistemdeki Lie cebirinin elemanları yoksa, afin kontrol sistemi lineer kontrol sistemine dönüşür. Ayrıca, Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemi için, $X = X_1 = \dots = X_n = 0$ olduğu düşünülürse, bilineer kontrol sistemi elde edilir. Genel

olarak, Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri, lineer , bilinear ve invariant sistemlerden daha genel bir sistemdir.

Aşağıda verilen tablolardan kontrol edilebilenleri bulabilmek için kullanılması öngörülen [19], [2] ve [20] deki karakterizasyonlardan ilki invaryant sistemler üzerinedir ve Lie parantezleri ile de invaryant sistemlere dönüşebilen afin sistemlere de hizmet eder. Bu karakterizasyondaki ana tema, kontrol vektör alanlarının tüm Lie parantezleri alınarak gerilen vektör uzayı ile durum uzayının Lie cebirine ulaşmaktır. Bu sağlandığı taktirde, sistem kontrol edilebilir. Bunları sağlayan durumlar, tüm üç-boyutlu reel Lie grupları için aşağıdaki tablolarda mevcuttur. Tüm Lie parantezleri hesaplanmıştır. İkinci kaynak, bilinear kontrol sisteminin kontrol edilebilirliğini cebir seviyesindeki özel bir fonksiyon ile afin sistemine taşımaktadır. Bu durum, tablolardaki sistemin vektör alanlarının afin ve bilinear vektör alanı olması durumlarında görülür. Üçüncü çalışma ise, çözülebilir vektör alanlarının meydana getirdiği sistem hakkındadır. Birinci tip olan üç boyutlu Heisenberg Lie grubu için aşağıdaki tablo verilmektedir.

Çizelge 4.9 1.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$	$(0, 3\mathbf{e}_3)$	$(0, -\mathbf{e}_3)$	$(0, \mathbf{e}_3)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, \mathbf{e}_3)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3)$	$(-\mathbf{D}_1, 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_1, 0)$	$(-\mathbf{D}_1, 0)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_4)$	$(0, 2\mathbf{e}_3)$	$(0, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, -\mathbf{e}_1)$	$(0, 0)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_5)$	$(-\mathbf{D}_2, 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, 0)$	$(-\mathbf{D}_2, 0)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_3)$

Çizelge 4.9 1.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri (devamı)

(D_1, D_6)	$(0, 2e_3)$	$(0, -e_2 - e_3)$	$(0, 0)$	$(0, -e_3)$	$(0, -e_2)$	$(0, 0)$
(D_2, D_3)	$(0, e_3 - e_1)$	$(0, -2e_3)$	$(0, -e_1)$	$(0, -2e_3)$	$(0, 0)$	$(0, -e_3)$
(D_2, D_4)	$(-D_1, e_3)$	$(-D_1, -2e_3 - e_1)$	$(-D_1, 0)$	$(-D_1, -e_3)$	$(-D_1, -e_1)$	$(-D_1, 0)$
(D_2, D_5)	$(0, e_3 - e_2)$	$(0, -2e_3)$	$(0, -e_2)$	$(0, -e_3)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(D_2, D_6)	(D_2, e_3)	$(D_2, -2e_3 - e_2)$	$(D_2, 0)$	$(D_2, -2e_3)$	$(D_2, -e_2)$	$(D_2, -e_3)$
(D_3, D_4)	(D_4, e_3)	$(D_4, -e_3)$	(D_4, e_3)	(D_4, e_1)	$(D_4, e_3 - e_1)$	$(D_4, 0)$
(D_3, D_5)	$(-D_5, e_3 - e_2)$	$(-D_5, e_1 - e_3)$	$(-D_5, e_3 - e_2)$	$(-D_5, e_1)$	$(-D_5, e_3)$	$(-D_5, 0)$
(D_3, D_6)	$(0, e_3)$	$(0, e_1 - e_2 - e_3)$	$(0, e_3)$	$(0, e_1 - e_3)$	$(0, e_3 - e_2)$	$(0, -e_3)$
(D_4, D_5)	$(D_3 - D_6, e_1 - e_2 + e_3)$	$(D_3 - D_6, -e_3)$	$(D_3 - D_6, -e_2)$	$(D_3 - D_6, 0)$	$(D_3 - D_6, 0)$	$(D_3 - D_6, e_1)$

Çizelge 4.9 1.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri (devamı)

$(\mathbf{D}_4, \mathbf{D}_6)$	$(D_4, e_1 + e_3)$	$(D_4, -e_2 - e_3)$	$(D_4, 0)$	$(D_4, -e_3)$	$(D_4, -e_3)$	$(D_4, e_1 - e_3)$
$(\mathbf{D}_5, \mathbf{D}_6)$	$(-D_5, e_3)$	$(-D_5, -e_3)$	$(-D_5, 0)$	$(-D_5, e_2 - e_3)$	$(-D_5, -e_2)$	$(-D_5, -e_3)$

Çizelge 4.10 2.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$	$(D_1, 3e_1)$	$(D_1, -e_1)$	(D_1, e_1)	$(D_1, 0)$	$(D_1, 0)$	(D_1, e_1)
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3)$	$(0, 2e_1)$	$(0, -e_1 - e_3)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, -e_3)$	$(0, e_1)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_4)$	$(0, 2e_1)$	$(0, -e_1)$	$(0, 0)$	$(0, -e_3)$	$(0, 0)$	$(0, e_1 - e_3)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3)$	$(0, e_1)$	$(0, -e_1 + e_3)$	$(0, 0)$	$(0, -e_1)$	$(0, -e_3)$	$(0, 0)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_4)$	$(0, e_1)$	$(0, -2e_1)$	$(0, 0)$	$(0, -e_1 - e_3)$	$(0, 0)$	$(0, -e_3)$
$(\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4)$	$(-D_3, e_1 + e_3)$	$(-D_3, -e_3)$	$(-D_3, 0)$	$(-D_3, -e_3)$	$(-D_3, 0)$	$(-D_3, 0)$

Çizelge 4.11 3.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,2\mathbf{e}_1)$	$(0, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(0, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(0,0)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_1, 3\mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_4)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_1, 0)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_5)$	$(0,0)$	$(0, -\mathbf{e}_2)$	$(0,2\mathbf{e}_1)$	$(0, -\mathbf{e}_1)$	$(0, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$	$(0, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_4)$	$(0, -\mathbf{e}_1)$	$(0,0)$	$(0, -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$	$(0, -\mathbf{e}_1)$	$(0,0)$	$(0, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_5)$	$(-\mathbf{D}_2, 0)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4)$	$(0, -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$	$(0, -\mathbf{e}_1)$	$(0,0)$	$(0, -2\mathbf{e}_1)$	$(0, -\mathbf{e}_2)$	$(0,2\mathbf{e}_2)$

Çizelge 4.11 3.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri (devamı)

$(\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_5)$	$(0, e_2)$	$(0, -e_1 - e_2)$	$(0, e_1)$	$(0, 0)$	$(0, -2e_2)$	$(0, 2e_2)$
$(\mathbf{D}_4, \mathbf{D}_5)$	$(0, 0)$	$(0, e_1 - e_2)$	$(0, e_1)$	$(0, 0)$	$(0, -2e_2)$	$(0, e_2)$

Çizelge 4.12 4.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	(e_1, e_2)	(e_2, e_1)	(e_1, e_3)	(e_3, e_1)	(e_2, e_3)	(e_3, e_2)
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, e_2)$	$(0, -2e_1 - e_2)$	$(0, e_1 + e_2 + e_3)$	$(0, -2e_1 - 2e_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3)$	$(-D_1, -e_1)$	$(-D_1, -e_1 - e_2)$	$(-D_1, e_1)$	$(-D_1, -e_1)$	$(-D_1, e_1)$	$(-D_1, -e_1 - e_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_4)$	$(-D_1, -e_1)$	$(-D_1, -e_2)$	$(-D_1, e_1)$	$(-D_1, -e_1)$	$(-D_1, 2e_2)$	$(-D_1, -e_1 - e_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_5)$	$(0, 0)$	$(0, -e_1)$	$(0, 2e_1)$	$(0, -e_1)$	$(0, e_1 + e_2)$	$(0, -e_1 - e_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_6)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 2e_1)$	$(0, -e_1 - e_2)$	$(0, 2e_1 + e_2)$	$(0, -e_1 - 2e_2)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3)$	$(-D_1 - D_2, -e_1)$	$(-D_1 - D_2, -e_1 - e_2)$	$(-D_1 - D_2, e_1 + e_2)$	$(-D_1 - D_2, -e_1)$	$(-D_1 - D_2, e_1 + e_2)$	$(-D_1 - D_2, -e_1 - e_2)$

Çizelge 4.12 4.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri (devamı)

$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_4)$	$(-D_2, -e_1)$	$(-D_2, -e_2)$	$(-D_2, e_1 + e_2)$	$(-D_2, -e_1)$	$(-D_2, 2e_1 + e_2)$	$(-D_2, -e_1 - e_2)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_5)$	$(-D_1, 0)$	$(-D_1, -e_1)$	$(-D_1, 2e_1 + e_2)$	$(-D_1, -e_1)$	$(-D_1, e_1 + 2e_2)$	$(-D_1, -e_1 - e_2)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_6)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 2e_1 + e_2)$	$(0, -e_1 - e_2)$	$(0, 2e_1 + 2e_2)$	$(0, -e_1 - 2e_2)$
$(\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4)$	$(0, e_2)$	$(0, e_1 - e_2)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, e_1)$	$(0, 0)$
$(\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_5)$	$(0, e_1 + e_2)$	$(0, 0)$	$(0, e_1)$	$(0, 0)$	$(0, e_2)$	$(0, 0)$
$(\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_6)$	$(D_2, e_1 + e_2)$	(D_2, e_1)	(D_2, e_1)	$(D_2, -e_2)$	$(D_2, e_1 + e_2)$	$(D_2, -e_2)$
$(\mathbf{D}_4, \mathbf{D}_5)$	$(0, e_2)$	$(0, 0)$	$(0, e_1)$	$(0, 0)$	$(0, e_2)$	$(0, -e_1)$
$(\mathbf{D}_4, \mathbf{D}_6)$	(D_6, e_2)	(D_6, e_1)	(D_6, e_1)	$(D_6, -e_2)$	$(D_6, e_1 + e_2)$	$(D_6, -e_1 - e_2)$
$(\mathbf{D}_5, \mathbf{D}_6)$	(D_1, e_1)	$(D_1, 0)$	(D_1, e_1)	$(D_1, e_1 - e_2)$	$(D_1, e_1 + e_2)$	$(D_1, -2e_2)$

Çizelge 4.13 5.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0, -2\mathbf{e}_2)$	$(0, -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$	$(0, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(0, -2\mathbf{e}_1)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_2, -3\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_4)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3)$	$(\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_1, 3\mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_4)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1)$
$(\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4)$	$(0, -2\mathbf{e}_1)$	$(0,0)$	$(0, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(0, 2\mathbf{e}_2)$	$(0, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(0, -2\mathbf{e}_1)$

Çizelge 4.14 6.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$	$(\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_2, -2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_2, 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

Çizelge 4.14 6.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri (devamı)

$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3)$	$(-\mathbf{D}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_3, -\mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_3, -\mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_3, -3\mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_3, -\mathbf{e}_3)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3)$	$(-2\mathbf{D}_1, 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$	$(-2\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$	$(-2\mathbf{D}_1, -2\mathbf{e}_2)$	$(-2\mathbf{D}_1, 2\mathbf{e}_2)$	$(-2\mathbf{D}_1, -2\mathbf{e}_2)$	$(-2\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$

Çizelge 4.15 7.Tip Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin Lie parantezleri

$[\cdot, \cdot]$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$	$(\mathbf{D}_3, -\mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{D}_3, -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{D}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_3, \mathbf{e}_1)$	$(\mathbf{D}_3, -\mathbf{e}_1)$
$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_2, -\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, 3\mathbf{e}_2)$	$(-\mathbf{D}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$	$(-\mathbf{D}_2, -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$
$(\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$	$(\mathbf{D}_1, 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{D}_1, -\mathbf{e}_3)$	$(\mathbf{D}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$

Yukarıda verilen tabloların yorumu için aşağıdaki iki örneği verelim.

Örnek 4.7 $H_3(\mathbb{R})$ Heisenberg Lie grubu üzerindeki herhangi bir afin kontrol sistemini

1.tip tablo yardımıyla, $g \in H_3(\mathbb{R})$ için,

$$\dot{g} = (D_4 + e_3)_g + [u_1(D_1 + e_1) + u_2(D_2 + e_2)]_g$$

Sistemi ile gözönüne alalım. Sistemin kontrol parametrelili vektör alanlarının Lie parantezini Çizelge 4.9'dan incelediğimizde $(0, 3e_3) = 3e_3$ vektör alanı elde edildiği görülür. Bu sistemin kontrol kısmı $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ 'yi ürettiğinden, durum uzayımız basit

bağlantılı ve nilpotent olduğundan [19] daki karakterizasyon ile bu sistem kontrol edilebilirdir.

Örnek 4.8 G 3-boyutlu Lucky Guess Lie grubu olmak üzere,

$\mathfrak{D} = \{X + uY | u \in \mathcal{U}; X, Y \in \mathfrak{af}(\mathfrak{g})\}$ dinamiği ile $\Sigma = (G, \mathfrak{D})$ kontrol sistemi verilsin. X , G üzerinde herhangi bir vektör alanı olmak üzere, Σ kontrol sistemi

$$\dot{g} = X_g + u_1(D_1 + e_1)_g + u_2(D_2 + e_3)_g$$

diferansiyel denklemler ailesi ile belirlensin. $[(D_1 + e_1), (D_2 + e_3)] = (0, e_1 + e_2 + e_3)$ olduğundan $\text{span}_{L.A.}\{D_{kontrol}\} = \mathfrak{g}$ olduğundan sistem [20] deki çözülebilir Lie grupları üzerindeki invaryant sistemin kontrol edilebilirlik karakterizasyonundan, kontrol edilebilirdir.

SERBEST NİLPOTENT LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEM

Bu bölümde, serbest Lie cebirleri ve Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğini inceliyoruz.

Afin kontrol sistemlerinin $\mathbb{R}^n$ üzerindeki kontrol edilebilirliği 1984 yılında Jurdjevic ve Sallet tarafından karakterize edilmiştir [1]. Daha sonra, benzer teknik kullanılarak, 2006 yılında Genelleştirilmiş Heisenberg Lie grupları üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirliği sağlanmıştır [2]. Benzer teknik kullanılarak, Kara ve Kule, Carnot Grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerin kontrol edilebilme karakterizasyonunu elde etmiştir [3].

Bu bölümde, daha genel ve farklı bir durum uzayı olarak serbest nilpotent Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerini inceliyoruz. Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri, Lie grupları üzerindeki invaryant, bilineer ve lineer kontrol sistemlerinden en genel olanıdır.

Σ , $F_{m,r}$ serbest nilpotent Lie grubu üzerinde bir affine kontrol sistemi olsun. Sistemin dinamiği

$$\dot{g}(t) = (D + X)(g) + \sum_{i=1}^d u_i (D^i + Y^i)(g)$$

ile belirlidir. Burada, $g \in F_{m,r}$, $D, D^i \in \text{Der}(f_{m,r})$; $X, Y^i \in f_{m,r} \in G$, $D, D^i \in \text{Der}(f_{m,r})$ ve $u_i: R \rightarrow U$ kısıtlanmayan kontrol fonksiyonları olsun.

$$S_{\Sigma} = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k | X^i \in \mathfrak{D} \text{ ve } t_i \in \mathbb{R}^+ \}$$

olmak üzere, sistemin pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma}(g) = \{\varphi(g) | \varphi \in S_{\Sigma} \text{ ve } g \in F_{m,r}\}$$

dir.

$F_{m,r}$ serbest nilpotent Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemin kontrol edilebilirliğini karakterize etmek için, afin kontrol sistem ile bu sistemin bilineer kısmı arasındaki cebir düzeyindeki bir otomorfizmadan yararlanacağız.

Aşağıdaki yardımcı teoremden cebir seviyesinde bir otomorfizma elde edilmektedir.

Lemma 5.1 $\mathfrak{f}_{m,r}$ boyutu H olan bir serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $\{E_i\}_{i=1}^H$, $\mathfrak{f}_{m,r}$ için bir taban, a_i 'ler her bir E_i 'nin ağırlığı ve $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\varphi_{\lambda}: \mathfrak{f}_{m,r} \rightarrow \mathfrak{f}_{m,r}$$

$$\varphi_{\lambda} \left(\sum_{i=1}^H x_i E_i \right) = \sum_{i=1}^H \sqrt[r]{\lambda^{a_i}} x_i E_i$$

tasviri verilsin. φ_{λ} , $\mathfrak{f}_{m,r}$ üzerinde bir otomorfizmadır.

İspat İlk olarak, φ_{λ} tasvirinin homomorfizma olduğunu gösterelim. $\forall X, Y \in \mathfrak{f}_{m,r}$ için

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}(X \diamond Y) &= \varphi_{\lambda} \left(\sum_{i=1}^H x_i E_i \diamond \sum_{i=1}^H y_i E_i \right) \\ &= \varphi_{\lambda} \left(\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) E_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ j>i}}^m (x_j y_i - x_i y_j) [E_i, E_j] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \sum_{\substack{i=1, j=1, k=1 \\ j>i \leq k}}^m (x_k - y_k) (x_j y_i - x_i y_j) [E_k, [E_i, E_j]] + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[r]{\lambda} \sum_{i=1}^m (x_i + y_i) E_i \\
&\quad + \sqrt[r]{\lambda^2} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ j>i}}^m (x_j y_i - x_i y_j) [E_i, E_j] \\
&\quad + \sqrt[r]{\lambda^3} \frac{1}{12} \sum_{\substack{i=1, j=1, k=1 \\ j>i \leq k}}^m (x_k - y_k) (x_j y_i - x_i y_j) [E_k, [E_i, E_j]] + \dots \\
&= \sum_{i=1}^m (x_i + y_i) \sqrt[r]{\lambda} E_i \\
&\quad + \sqrt[r]{\lambda^2} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ j>i}}^m (x_j y_i - x_i y_j) [\sqrt[r]{\lambda} E_i, \sqrt[r]{\lambda} E_j] \\
&\quad + \sqrt[r]{\lambda^3} \frac{1}{12} \sum_{\substack{i=1, j=1, k=1 \\ j>i \leq k}}^m (x_k - y_k) (x_j y_i - x_i y_j) [\sqrt[r]{\lambda} E_k, [\sqrt[r]{\lambda} E_i, \sqrt[r]{\lambda} E_j]] + \dots \\
&= \varphi_\lambda(X) \diamond \varphi_\lambda(Y).
\end{aligned}$$

Böylece, φ_λ bir homomorfizmadır.

Şimdi de φ_λ nin birebirliğini ispat edelim.

$$\varphi_\lambda(X) = \varphi_\lambda(Y) \Rightarrow$$

$$\varphi_\lambda \left(\sum_{i=1}^H x_i E_i \right) = \varphi_\lambda \left(\sum_{i=1}^H y_i E_i \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^H \sqrt[r]{\lambda^{a_i}} x_i E_i = \sum_{i=1}^H \sqrt[r]{\lambda^{a_i}} y_i E_i$$

$\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \in H$. Buradan, $X = Y$ elde edilir.

$$\sum_{i=1}^H \sqrt[r]{\lambda^{a_i}} x_i E_i$$

için en az bir

$$X = \sum_{i=1}^H x_i E_i$$

vardır ki

$$\varphi_\lambda(X) = \sum_{i=1}^H \sqrt[r]{\lambda^{a_i}} x_i E_i$$

dir, yani; φ_λ tasviri ü. Dolayısıyla, φ_λ bir otomorfizmadır.

Aşağıdaki yardımcı teoremden sistemin otomorfizma yörüngesinin topolojik özelliği verilmektedir.

Lemma 5.2 $F_{m,r}$ serbest nilpotent Lie grubu olsun. $F_{m,r}$ 'nin otomorfizm yörüngesi $Aut(F_{m,r})$ yoğundur.

İspat $\mathfrak{f}_{m,r}$ boyutu H ile gösterilsin. $F_{m,r}$ 'nin bir $Aut(F_{m,r})$ otomorfizma yörüngesi

$$\mathcal{O} = \exp \left(\left(\mathfrak{f}_{m,r} \right) - \underbrace{[\dots [\mathfrak{f}_{m,r}, \mathfrak{f}_{m,r}] \dots]}_{r-1} \right) = F_{m,r} - \underbrace{[\dots [F_{m,r}, F_{m,r}] \dots]}_{r-1}$$

olsun. Exp, üstel tasvir olmak üzere; exp tasvirinin, basit bağlantılı nilpotent Lie grupları için bir difeomorfizma olduğu bilinmektedir. Eğer $F_{m,r}$ üzerinde tanımlı $x \circ y$ işlemi y elemanının sol ötelemesi olarak görülürse, $\mathfrak{f}_{m,r}$ nin bir Jacobiye tabanı $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_H\}$, y 'nin sol ötelemesinin orjindeki Jacobiye matrisinin tabanından elde edilir.

$\mathfrak{f}_{m,r}$, r .dereceden nilpotent olduğundan, bu cebirin, üreteçlerinin r tane Lie parantezinden meydana gelen elemanların sıfır olması demektir. Üreteçlerinin $r - 1$ tane Lie parantezinden meydana gelen elemanları gözönüne alalım ve bu elemanların kümesini V ile gösterelim. V kümesine ait olan Z_i taban elemanları, [14] ün kullandığı modelin yardımıyla hesaplanırsa her birinin orjindeki değeri $\frac{\partial}{\partial x_j}$ gibi bir elemana karşılık gelir. $\mathfrak{f}_{m,r}$ 'den V kümesine ait elemanları çıkardığımızda, $F_{m,r}$ Lie grubundan sonlu sayıda doğru çıkarmış oluruz. Bu işlem, $F_{m,r}$ durum uzayımızın boyutunu değiştirmez. Ek olarak, $Aut(F_{m,r})$ otomorfizm yörüngesi, $F_{m,r}$ de açıktır.

Herhangi bir $x \in \underbrace{[\dots [F_{m,r}, F_{m,r}] \dots]}_{r-1}$ ve $B(x, \delta)$ yuvarı için

$$B(x, \delta) \cap F_{m,r} - \underbrace{[\dots [F_{m,r}, F_{m,r}] \dots]}_{r-1} \neq \emptyset$$

olduğundan $Aut(F_{m,r})$ yoğundur.

Teorem 5.3 $F_{m,r}$ basit bağlantılı serbest nilpotent Lie grubu üzerinde tanımlı

$\Sigma = (F_{m,r}, \mathfrak{D})$ afin kontrol sistemi olsun. Eğer Σ afin kontrol sistemi tekil noktasına sahip değil ve Σ' 'nin bilineer parçası $\Sigma_b = (F_{m,r}, \mathfrak{D}_b)$,

$$\mathfrak{D}_b = \left\{ D + \sum_{j=1}^n u_j D^j \mid D, D^j \in Der\{\mathfrak{f}_{m,r}\}, u \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$Aut(F_{m,r})$ üzerinde kontrol edilebilirse, Σ sistemi $F_{m,r}$ üzerinde kontrol edilebilirdir.

İspat Bir kontrol sistemdeki herhangi bir tekil noktası, bu noktadan ulaşılabilirlik sağlanmadığından, kontrol sistemin kontrol edilebilirliği için bir problemdir. Bu yüzden, sistemin kontrol edilebilmesi için gerek şart sistemin herhangi bir tekil noktasına sahip olmamasıdır.

$Der(\mathfrak{f}_{m,r})$, $\mathfrak{f}_{m,r}$ serbest Lie cebirinin türev cebiri ve φ_λ otomorfizması Lemma 5.1'deki gibi tanımlasın. Bu durumda,

$$\xi: Der(\mathfrak{f}_{m,r}) \times \mathfrak{f}_{m,r} \rightarrow Der(\mathfrak{f}_{m,r}) \times \mathfrak{f}_{m,r}$$

$$\xi(D + X) = D + \varphi_\lambda(X)$$

otomorfizmasını tanımlayalım. φ_λ tasvirinin tanımından, $\forall X \in \mathfrak{f}_{m,r}$ için

$$\varphi_\lambda = (\sqrt[r]{\lambda}Id, \sqrt[r]{\lambda}Id, \dots, \sqrt[r]{\lambda}Id, \sqrt[r-1]{\lambda}Id, \dots, \lambda Id, \dots, \lambda Id)$$

şeklinde düşünebiliriz. Böylece, $\lambda \rightarrow 0$ iken $\varphi_\lambda \rightarrow 0$ olur. Buradan, $\xi(D + X) = D + \varphi_\lambda(X)$ tasvirinin görüntüsü, $\lambda \rightarrow 0$ iken D türev elemanı olacağından, ξ tasviri $\Sigma \rightarrow \Sigma_b$ ye kısıtlanır.

Lemma 5.2'de, $Aut(F_{m,r})$ yoğun otomorfizma yörüngesinin varlığını gösterdik.

Ayrıca, $\lambda \rightarrow 0$ iken; afin sistem, bilineer sisteme sürekli olarak yakınsar. Böylece, Σ_b sistemi her noktada kontrol edilebilirdir.

$B(1,1)$ 1 merkezli birim yuvarı olmak üzere, $S(1,1)$, $B(1,1)$ 'in sınırı olsun. Yeterince küçük λ için, küçük karışıklıklar altında tamamen kontrol edilebilirlik sürdürüldüğünden [21], $\xi_\lambda(\Sigma) \subset S(1,1) - \underbrace{[\dots [\mathfrak{f}_{m,r}, \mathfrak{f}_{m,r}] \dots]}_{r-1}$ de kontrol edilebilirdir. Buradan; $\xi_\lambda(\Sigma)$,

$B(1,1) - \underbrace{[\dots [\mathfrak{f}_{m,r}, \mathfrak{f}_{m,r}] \dots]}_{r-1}$ üzerinde de kontrol edilebilirdir. Böylece,

$$1_{\varphi_{\lambda^{-1}}} = \left(1, \left(\frac{e}{r\sqrt{\lambda}}, \dots, \frac{e}{r\sqrt{\lambda}} \right), \dots, \left(\frac{e}{r^{-1}\sqrt{\lambda}}, \dots, \frac{e}{r^{-1}\sqrt{\lambda}} \right), \dots, \left(\frac{e}{\lambda}, \dots, \frac{e}{\lambda} \right) \right)$$

olmak üzere, Σ sistemi $B(1,1) - \underbrace{[\dots [\mathfrak{f}_{m,r}, \mathfrak{f}_{m,r}] \dots]}_{r-1}$ üzerinde kontrol edilebilirdir.

Afin kontrol sistemin birimden geçen pozitif orbiti açık ve içi boştan farklı olduğundan, Σ kontrol edilebilirdir.

Bu sonuç için aşağıdaki örnek hesaplanmıştır.

Örnek 5.4 $\mathfrak{f}_{3,3}$ üreteçleri $\{X_1, X_2, X_3\}$ vektör alanları olan 3.dereceden nilpotent bir serbest Lie cebiri olsun. Bu Lie cebirinin elemanlarını ağırlıklarına göre $X_1 < X_2 < X_3$ sıralamasını kabul ederek Hall tabanı yardımıyla elde edelim:

1 ağırlıklı X_1, X_2, X_3 ;

2 ağırlıklı $X_4 = [X_2, X_1], X_5 = [X_3, X_1], X_6 = [X_3, X_2]$;

3 ağırlıklı $X_7 = [X_4, X_1] = [[X_2, X_1], X_1], X_8 = [X_4, X_2] = [[X_2, X_1], X_2],$

$$X_9 = [X_4, X_3] = [[X_2, X_1], X_3], X_{10} = [X_5, X_1] = [[X_3, X_1], X_1],$$

$$X_{11} = [X_5, X_2] = [[X_3, X_1], X_2], X_{12} = [X_5, X_3] = [[X_3, X_1], X_3],$$

$$X_{13} = [X_6, X_2] = [[X_3, X_2], X_2], X_{14} = [X_6, X_3] = [[X_3, X_2], X_3].$$

Teorem 2.40'da belirtilen $\mathfrak{f}_{3,3}$ 'ün $\{X_1, X_2, X_3\}$ üreteçlerine izomorfik olan E_1, E_2, E_3 vektör alanlarını [14] de yer alan model yardımıyla elde edelim. Öncelikle,

$$E_1 := \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$E_2 := \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j>2}^{14} P_{2,j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$E_3 := \frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{j>3}^{14} P_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

verilsin. Yukarıda belirttiğimiz gibi X_k vektör alanı,

$X_k = \left[\left[\dots \left[[X_j, X_{i_n}], X_{i_{n-1}} \right], \dots, X_{i_2} \right]; X_{i_1} \right]$ formuna sahip ise $k > j$ dir. Buradan,

$$X_4 = [X_2, X_1] \Rightarrow 4 > 2 \Rightarrow P_{2,4}$$

$$X_7 = [[X_2, X_1], X_1] \Rightarrow 7 > 2 \Rightarrow P_{2,7}$$

$$X_8 = [[X_2, X_1], X_2] \Rightarrow 8 > 2 \Rightarrow P_{2,8}$$

$$X_9 = [[X_2, X_1], X_3] \Rightarrow 9 > 2 \Rightarrow P_{2,9}$$

$$X_5 = [X_3, X_1] \Rightarrow 5 > 3 \Rightarrow P_{3,5}$$

$$X_6 = [X_3, X_2] \Rightarrow 6 > 3 \Rightarrow P_{3,6}$$

$$X_{10} = [[X_3, X_1], X_1] \Rightarrow 10 > 3 \Rightarrow P_{3,10}$$

$$X_{11} = [[X_3, X_1], X_2] \Rightarrow 11 > 3 \Rightarrow P_{3,11}$$

$$X_{13} = [[X_3, X_2], X_2] \Rightarrow 13 > 3 \Rightarrow P_{3,13}$$

$$X_{14} = [[X_3, X_2], X_3] \Rightarrow 14 > 3 \Rightarrow P_{3,14}$$

edilir. Herbir X_i elemanı için

$$d(1) = d(2) = d(3) = 0,$$

$$d(4) = d(5) = d(6) = 1,$$

$$d(7) = d(8) = d(9) = \dots = d(14) = 2,$$

Lie parantez sayılarını ve

$$I(1) = I(2) = I(3) = 0,$$

$$I(4) = (1,0, \dots, 0), I(5) = (1,0, \dots, 0), I(6) = (0,1,0, \dots, 0),$$

$$I(7) = (2,0, \dots, 0), I(8) = (1,1,0, \dots, 0), I(9) = (1,0,1,0, \dots, 0), I(10) = (2,0, \dots, 0),$$

$$I(11) = (1,1,0, \dots, 0), I(12) = (1,0,1,0, \dots, 0), I(13) = (0,2,0, \dots, 0),$$

$$I(14) = (0,1,1,0, \dots, 0)$$

indekslerini elde edelim. Böylece,

$$P_{2,4} = \frac{(-1)^{(d(4)-d(2))}}{(I(4)-I(2))!} x^{I(4)-I(2)} = \frac{(-1)x^1}{1!} = -x_1 \text{ formülü sayesinde elde edildi. Benzer}$$

işlemler tekrar edilirse,

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + (-x_1) \frac{\partial}{\partial x_4} + \left(\frac{x_1^2}{2!} \right) \frac{\partial}{\partial x_7} + (x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_8} + (x_1 x_3) \frac{\partial}{\partial x_9},$$

$$E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + (-x_1) \frac{\partial}{\partial x_5} + (-x_2) \frac{\partial}{\partial x_6} + \left(\frac{x_1^2}{2!} \right) \frac{\partial}{\partial x_{10}} + (x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_{11}} + (x_1 x_3) \frac{\partial}{\partial x_{12}}$$

$$+ \left(\frac{x_2^2}{2!} \right) \frac{\partial}{\partial x_{13}} + (x_2 x_3) \frac{\partial}{\partial x_{14}}$$

vektör alanları bulunur. Elde edilen bu vektör alanlarının Lie cebiri, $\mathfrak{f}_{3,3}$ serbest nilpotent Lie cebirine Teorem 2.44'den izomorfiktir.

Serbest nilpotent Lie cebiri $\mathfrak{f}_{3,3}$ 'ün türev cebiri $Der(\mathfrak{f}_{3,3})$ için,

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{14,1} & \cdots & a_{14,14} \end{pmatrix}^T$$

matrisini elde etmemiz gerekir. Bu matrisin bileşenlerini hesaplamak için aşağıdaki denklemleri çözeceğiz:

Bunun için,

$$D(X_j) = \sum_{i=1}^{14} a_{j,i} X_i$$

olacak şekilde

1) $D([X_2, X_1]) = [D(X_2), X_1] + [X_2, D(X_1)]$ formülü ile

$$= [\sum_{i=1}^{14} a_{2,i} X_i, X_1] + [X_2, \sum_{i=1}^{14} a_{1,i} X_i]$$

$$D(X_4) = a_{2,2}X_4 + a_{2,3}X_5 + a_{2,4}X_7 + a_{2,5}X_{10} + a_{1,1}X_4 - a_{1,3}X_6 - a_{1,4}X_8 - a_{1,5}X_{11} \\ - a_{1,6}X_{13}$$

$$\sum_{i=1}^{14} a_{4,i} X_i = a_{2,2}X_4 + a_{2,3}X_5 + a_{2,4}X_7 + a_{2,5}X_{10} + a_{1,1}X_4 - a_{1,3}X_6 - a_{1,4}X_8 - a_{1,5}X_{11} \\ - a_{1,6}X_{13}$$

$$\Rightarrow a_{4,4} = a_{1,1} + a_{2,2}, a_{4,5} = a_{2,3}, a_{4,6} = -a_{1,3}, a_{4,7} = a_{2,4}, a_{4,8} = -a_{1,4}, a_{4,10} = a_{2,5},$$

$$a_{4,11} = -a_{1,5}, a_{4,13} = -a_{1,6}, \text{ diğ} \text{er } a_{4,j} \text{ katsayılar sıfır olarak elde edilir.}$$

Benzer şekildeki işlemler yapılırsa, aşağıdaki 14×14 'lük matris elde edilir. Bu matrisin devriği istenilen türev cebir elemanlarını elde etmemizi sağlar.

Çizelge 5.1 $\mathfrak{f}_{3,3}$ cebirinin türev cebiri matrisi

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$	$a_{1,8}$	$a_{1,9}$	$a_{1,10}$	$a_{1,11}$	$a_{1,12}$	$a_{1,13}$	$a_{1,14}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$	$a_{2,8}$	$a_{2,9}$	$a_{2,10}$	$a_{2,11}$	$a_{2,12}$	$a_{2,13}$	$a_{2,14}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$	$a_{3,7}$	$a_{3,8}$	$a_{3,9}$	$a_{3,10}$	$a_{3,11}$	$a_{3,12}$	$a_{3,13}$	$a_{3,14}$
0	0	0	$a_{1,1} + a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$-a_{1,3}$	$a_{2,4}$	$-a_{1,4}$	0	$a_{2,5}$	$-a_{1,5}$	0	$-a_{1,6}$	0
0	0	0	$a_{3,2}$	$a_{1,1} + a_{3,3}$	$a_{1,2}$	$a_{3,4}$	0	$-a_{1,4}$	$a_{3,5}$	0	$-a_{1,5}$	0	$-a_{1,6}$

Çizelge 5.1 $\mathfrak{f}_{3,3}$ cebirinin türev cebiri matrisi (devamı)

0	0	0	$-a_{3,1}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2} + a_{3,3}$	0	$a_{3,4}$	$-a_{2,4}$	0	$a_{3,5}$	$-a_{2,5}$	$a_{3,6}$	$-a_{2,6}$
0	0	0	0	0	0	$2a_{1,1} + a_{2,2}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{2,3}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$a_{2,1}$	$a_{1,1} + a_{3,3} + a_{2,2}$	$a_{2,3}$	0	$a_{2,3}$	0	$-a_{1,3}$	0
0	0	0	0	0	0	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$	0	0	$a_{2,3}$	0	$-a_{1,3}$
0	0	0	0	0	0	$a_{3,2}$	0	0	$2a_{1,1} + a_{3,3}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$a_{3,2}$	0	$a_{2,1}$	$a_{1,1} + a_{3,3} + a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{1,2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{3,2}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{1,1} + 2a_{3,3}$	0	$a_{1,2}$
0	0	0	0	0	0	0	$-a_{3,1}$	0	0	$a_{2,1}$	0	$2a_{2,2} + a_{3,3}$	$a_{2,3}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$-a_{3,1}$	0	0	$a_{2,1}$	$a_{3,2}$	$a_{2,2} + 2a_{3,3}$

Çizelge 5.1’de verilen matrisin devriği alınıp, $a_{i,j}$ katsayılarına göre ayırma yaptığımızda $\mathfrak{f}_{3,3}$ türev cebiri $Der(\mathfrak{f}_{3,3})$ ’ün D^i elemanları bulunur.

Bu E_1, E_2 ve E_3 vektör alanları yardımıyla $\mathfrak{f}_{3,3}$ merkezindeki elemanları yeniden ifade edelim. $\mathfrak{f}_{3,3}$ merkezinde $Z(\mathfrak{f}_{3,3})$ iki Lie parantezinden oluşan

$$Z(\mathfrak{f}_{3,3}) = \{X_7, X_8, \dots, X_{14}\}$$

şeklindedir. Vektör alanlarının bilinen Lie parantezi işleminden

$$X_7 = [[X_2, X_1], X_1] = [[E_2, E_1], E_1]$$

$$= \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_2} + (-x_1) \frac{\partial}{\partial x_4} + \left(\frac{x_1^2}{2!} \right) \frac{\partial}{\partial x_7} + (x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_8} + (x_1 x_3) \frac{\partial}{\partial x_9}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right], \frac{\partial}{\partial x_1} \right]$$

$$= \left[\left[0 - \left(-\frac{\partial}{\partial x_4} + (x_1) \frac{\partial}{\partial x_7} + (x_2) \frac{\partial}{\partial x_8} + (x_3) \frac{\partial}{\partial x_9} \right), \frac{\partial}{\partial x_1} \right], \frac{\partial}{\partial x_1} \right]$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - (x_1) \frac{\partial}{\partial x_7} - (x_2) \frac{\partial}{\partial x_8} - (x_3) \frac{\partial}{\partial x_9} \right), \frac{\partial}{\partial x_1} \right] = 0 - \left(-\frac{\partial}{\partial x_7} \right) = \frac{\partial}{\partial x_7}$$

elde edilir. Benzer şekilde Lie parantezlerini hesaplırsak,

$$X_8 = [[X_2, X_1], X_2] = \frac{\partial}{\partial x_8}, X_9 = [[X_2, X_1], X_3] = \frac{\partial}{\partial x_9}, X_{10} = [[X_3, X_1], X_1] = \frac{\partial}{\partial x_{10}},$$

$$X_{11} = [[X_3, X_1], X_2] = \frac{\partial}{\partial x_{11}}, X_{12} = [[X_3, X_1], X_3] = \frac{\partial}{\partial x_{12}}, X_{13} = [[X_3, X_2], X_2] = \frac{\partial}{\partial x_{13}}$$

$$X_{14} = [[X_3, X_2], X_3] = \frac{\partial}{\partial x_{14}}$$

elde edilir.

$\mathfrak{f}_{3,3}$ serbest Lie cebirinin, basit bağlantılı Lie grubu $F_{3,3}$ üzerinde tanımlı $\circ$ işlemi aşağıdaki gibidir:

$$x = (x_1, \dots, x_{14}), y = (y_1, \dots, y_{14}) \in F_{3,3} \text{ olmak üzere,}$$

$$x \circ y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 + \frac{1}{2}(x_2 y_1 - y_2 x_1) \\ x_5 + y_5 + \frac{1}{2}(x_3 y_1 - y_3 x_1) \\ x_6 + y_6 + \frac{1}{2}(x_3 y_2 - y_3 x_2) \\ x_7 + y_7 + \frac{1}{2}(x_4 y_1 - y_4 x_1) + \frac{1}{12}(x_2 y_1 - y_2 x_1)(x_1 - y_1) \\ x_8 + y_8 + \frac{1}{2}(x_4 y_2 - y_4 x_2) + \frac{1}{12}(x_2 y_1 - y_2 x_1)(x_2 - y_2) \\ x_9 + y_9 + \frac{1}{2}(x_4 y_3 - y_4 x_3) + \frac{1}{12}(x_2 y_1 - y_2 x_1)(x_3 - y_3) \\ x_{10} + y_{10} + \frac{1}{2}(x_5 y_1 - y_5 x_1) + \frac{1}{12}(x_3 y_1 - y_3 x_1)(x_1 - y_1) \\ x_{11} + y_{11} + \frac{1}{2}(x_5 y_2 - y_5 x_2) + \frac{1}{12}(x_3 y_1 - y_3 x_1)(x_2 - y_2) \\ x_{12} + y_{12} + \frac{1}{2}(x_5 y_3 - y_5 x_3) + \frac{1}{12}(x_3 y_1 - y_3 x_1)(x_3 - y_3) \\ x_{13} + y_{13} + \frac{1}{2}(x_6 y_2 - y_6 x_2) + \frac{1}{12}(x_3 y_2 - y_3 x_2)(x_2 - y_2) \\ x_{14} + y_{14} + \frac{1}{2}(x_6 y_3 - y_6 x_3) + \frac{1}{12}(x_3 y_2 - y_3 x_2)(x_3 - y_3) \end{pmatrix}$$

dir. $(F_{3,3}, \circ)$ Lie grubu üzerinde tanımlı afin kontrol sistem $\Sigma = (F_{3,3}, \mathfrak{D})$ için sistemin dinamiği $\mathfrak{D} = \{(D + X) + \sum_{i=1}^d u_i(D^i + X^i) | D, D^i \in \text{Der}(\mathfrak{f}_{3,3}); X, X^i \in \mathfrak{f}_{3,3}\}$ ile belirli olsun.

$F_{3,3}$ serbest Lie grubunun otomorfizm orbiti

$$\text{Aut}(F_{3,3}) = \exp(\mathfrak{f}_{3,3} - Z(\mathfrak{f}_{3,3})) = F_{3,3} - [F_{3,3}, F_{3,3}], F_{3,3}]$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere $Z(\mathfrak{f}_{3,3})$ elemanları sonlu sayıda doğru belirttiğinden, $\text{Aut}(F_{3,3})$ boyutu değişmez. Ayrıca, $\text{Aut}(F_{3,3})$ yoğunur. Teorem 5.3 uygulamasını göstermek için, Lemma 5.1'de tanımladığımız φ_λ otomorfizması yardımıyla,

$$\xi(D + X) = D + \varphi_\lambda(X)$$

$$\xi(D^i + X^i) = D^i + \varphi_\lambda(X^i)$$

elde edilir. $\lambda \rightarrow 0$ iken $\varphi_\lambda \rightarrow 0$ olduğundan sistem sadece türev cebirinin elemanlarından oluşur. Yani, afin sistemin bilineer kısmını elde etmiş oluruz. Böylece, $Aut(F_{3,3})$ yörünge üzerindeki bilineer sistemin kontrol edilebilirliği, afin sistemin kontrol edilebilirliğine genişletilebilir.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk olarak 3-boyutlu Lie cebirleri ve onların Lie gruplarına ait türev cebirleri hesaplanmıştır. Bu Lie cebirleri üzerindeki afin kontrol sistemlerine ait vektör alanlarının Lie parantezleri hesaplanarak tablolar halinde verilmiştir. Ayrıca bu Lie gruplarının cebirsel ve topolojik özellikleri de ifade edilmiştir. Daha sonra, eldeki tablolar yardımıyla afin ve invaryant kontrol sisteminlerinin mevcut kontrol edilebilirlik karakterizasyonundan yararlanarak, 3-boyutlu reel Lie grupları üzerindeki afin, invariant, lineer ve bilineer kontrol sistemlerin kontrol edilebilirlikleri sınıflandırılmış oldu.

Çalışmanın son kısmında ise serbest nilpotent Lie cebiri $\mathfrak{f}_{m,r}$ ve serbest nilpotent Lie grupları $F_{m,r}$ üzerindeki afin kontrol sisteminlerinin otomorfizm yörüngesi incelenmiş ve cebir seviyesindeki nilpotent Lie cebirinin otomorfizması yardımıyla ilişik bilineer kısmının kontrol edilebilirliği tüm sisteme genişletilmiştir.

Kontrol edilebilirlik problemi bir çok alana uygulanabilen Kontrol Teorinin en temel klasik iki probleminden biridir. Durum uzayının yapısı ve dinamiğini oluşturan vektör alanları, sistemin çözümleri açısından çok yönlü çalışılabilir. Serbest nilpotent Lie grupları üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirliğindeki teknik, farklı durum uzayları üzerinde ve cebir seviyesinde alt sistemlerine bağlı olarak çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Jurdjevic, V. ve Sallet, G., (1984). "Controllability Properties of Affine Systems", SIAM J. Control and Optimization, 22: 501-508.
- [2] Kara, A. ve San Martin, L., A., B., (2006). "Controllability of Affine Control System for the Generalized Heisenberg Lie groups", International Journal of Pure and Applied Mathematics, 29(1): 1-6.
- [3] Kara, A. ve Kule, M., (2010). "Controllability of Affine Control System on Carnot Groups", Int. Contemp. Math. Sci, 5(44): 2167-2172.
- [4] Akdenizci Demirtaş, İ. ve Kara Hansen, A., (2017). "A Controllability Result for Affine Control Systems on Some Non-compact Lie Groups", International Journal of Differential Equations and Applications, 16(1): 45-52.
- [5] Warner, F. W., (1983). Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, First Edition, Springer-Verlag ., New York, USA .
- [6] Kara Hacıbekiroğlu, A., (1994). "A Controllability Theorem for Invariant Systems on Lie Groups", Mathematics Diploma Course Project, International Centre for Theoretical Physics, ICTP, Trieste, Italy.
- [7] Jurdjevic, V., (1997). Geometric Control Theory, Cambridge University Press, UK.
- [8] Varadarajan, V. S., (1974). Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, Springer, New York.
- [9] Munkres, J., (2000). Topology, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle, NJ.
- [10] Jacobson, N., (1979). Lie Algebras, Dover Edition, USA.
- [11] Bowers, A., (2005). "Classification of Three Dimensional Real Lie Algebras" Survey.
- [12] Ayala, V., Kizil, E. ve Tribuzy, I.A., (2012). "On an Algorithm for Finding Derivations of the Algebras", Proyecciones (Antofagasta), 31(1) .
- [13] Hall, M., (1950). "A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups", Proc. Amer. Math. Soc., 1: 575-581.
- [14] Grayson, M. ve Grossman, R., (1990). "Models for free nilpotent Lie algebra", Journal Lie Algebra , 35: 177-191.

- [15] Bonfoglioli, A., Uguzzoni, F. ve Lanconelli, E., (2007). Stratified Lie Groups and Potential Theory for Their Sub-Laplacians, Springer Monographs in Mathematics.
- [16] Sussman, H., (1973). "Orbits of families of vector fields and integrability of distributions", Trans. Amer. Math. Soc., 180: 1-188
- [17] Adams, R., (2010). "The Euclidean Group", Mathematics Seminar Department of Mathematics of Rhodes University.
- [18] Kara Hansen, A. ve Kudeyt, M., (2015). "A Generalization of Lucky Guess Lie Group $LG(3n)$ and its Lie Algebra $lg(3n)$ ", Sigma, 33: 421-429.
- [19] Ayala, V., (1995). "Controllability of Nilpotent Systems", Geometry in Non-linear Control and Differential Inclusions Banach Center Publications,, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa, 32.
- [20] Sackhov, Y. L., (1997). "Controllability of Affine Right Invariant Systems on Solvable Lie Groups", Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1 .
- [21] Sussmann, R., (1976). "Some Properties of Vector Fields Systems That are not Altered by Small Perturbations ", Journal of Differential Equations, 20: 292-315.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mahmut KUDEYT
Doğum Tarihi ve Yeri : 25.11.1984 - İzmir
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : mahmut.kudeyt@isikun.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2008
Lise	Sayısal	Muğla Dalaman Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014 - ...	Işık Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Kara Hansen, A. ve Kudeyt, M., (2015). "A Generalization of Lucky Guess Lie Group $LG(3n)$ and its Lie Algebra $lg(3n)$ ", Sigma, 33: 421-429.

Bildiri

1. Kara Hansen, A. ve Kudeyt, M., (2014). "Controllability of affine systems and 3-dimensional Lie groups" ICM, Seul, South Korea.
2. Kara Hansen, A. ve Kudeyt, M., (2015). "A Generalization of Lucky Guess Lie Group $LG(3n)$ and its Lie Algebra $lg(3n)$ ", 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Antalya, Türkiye.