

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR MİNİMAL GERÇEKLEME



SULTAN SÜTLÜ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. AYŞE KARA HANSEN**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR MİNİMAL GERÇEKLEME

Sultan SÜTLÜ tarafından hazırlanan tez çalışması 09.11.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL
Haliç Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi



Bu alışma, TÜBİTAK tarafından 2211-A Yurtiçi Doktora Bursu ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca, bilgi ve deneyimlerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, güler yüzü ve sabrı ile bana her koşulda yardım etmeye çalışan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN'e,

Tez dönemim boyunca görüş ve önerilerini aldığım, bana vakit ayıran, tez izleme komitesinde yer alan sayın hocalarım Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL ve Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL'e,

Hem öğrenciliğimde, hem de çalışma hayatımda üzerimde büyük emekleri olan sayın hocalarım Prof. Dr. Oya OĞUZ ve Prof. Dr. Ömer OĞUZ'a,

Lisansüstü eğitimim süresinde tanıdığım, birlikte çok şey öğrendiğim doktora arkadaşım ve meslektaşım Mahmut KUDEYT'e,

Bilim insanı destekleme programı ile yurtiçi doktora bursu aldığım, beni doktora eğitimim boyunca finansal olarak destekleyen TÜBİTAK'a,

Bu günlere gelmemdeki en önemli rolü oynayan, dualarıyla desteklerini hep yanımda hissettiğim canım annem Emine SELÇUK'a, tercihlerimde hep yanımda olan, hedeflerimin peşinde giderken beni sabırla destekleyen, yüreklendiren sevgili eşim Tolga SÜTLÜ'ye, doktora sürecimde dünyaya gelen, enerji ve motivasyon kaynağım canım oğlum Ali Kerem SÜTLÜ'ye ve tüm aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Kasım, 2017

Sultan SÜTLÜ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Orijinal Katkı.....	2
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER	3
2.1 Diferansiyellenebilir Manifoldlar	3
2.1.1 Tanjant Uzay	5
2.1.2 Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri.....	6
2.1.3 Akış (Flow) ve 1-parametrelî Grup.....	7
2.2 Lie Grupları ve Lie Cebirleri	10
2.2.1 Lie Grubu	10
2.2.2 Lie Altgrupları ve Kapalı Altgrup Teoremi.....	11
2.2.3 Lie Cebiri	12
2.2.3.1 Sol İnvaryant Vektör Alanları.....	13
2.2.4 Bağlantılı ve Basit Bağlantılı Lie Grupları	15
2.2.5 Ekspansiyel Tasvir.....	16
2.2.6 Adjoint Gösterim.....	18
2.2.7 Lie Türevi.....	19
2.3 Kontrol Sistemleri ve Minimal Gerçekleme	20
2.3.1 Kontrol Sistemleri	21
2.3.1.1 Kontrol Sisteminin Bazı Özellikleri.....	23
2.3.2 Ayırdedilemezlik ve Gözlenebilirlik.....	24

2.3.3	Minimal Gerçeklemenin Oluşturulması.....	25
2.4	Lie Grupları Üzerinde Afin Kontrol Sistemleri	28
2.4.1	Afin Grup.....	29
2.4.2	Afin Kontrol Sistemleri.....	30
BÖLÜM 3		
BAĞLANTILI LIE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR MİNİMAL GERÇEKLEME.....		31
	Tanım 3.1 Afin Kontrol Sistemleri İçin Ayırdedilemezlik.....	32
	Tanım 3.2 Afin Kontrol Sistemleri İçin Gözlenebilirlik.....	33
BÖLÜM 4		
BAĞLANTILI LIE GRUPLARI ÜZERİNDE LİNEER KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR GÖZLENEBİLİRLİK KARAKTERİZASYONU		40
4.1	Bağlantılı Lie Grupları Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemlerinin Hemen Hemen Gözlenebilirliği.....	40
4.2	Hemen Hemen Minimal Gerçekleme	46
BÖLÜM 5		
SONUÇ VE ÖNERİLER.....		48
KAYNAKLAR.....		50
ÖZGEÇMİŞ.....		52

SİMGE LİSTESİ

C^∞	sonsuz mertebeden diferansiyeli mevcut ve sürekli fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$GL(n, \mathbb{R})$	reel değerli genel lineer grup
$T_p M$	M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
TM	M manifoldunun teğet demeti
X_p	p noktasındaki tanjant vektör
$H(3)$	3-boyutlu Heisenberg grubu
$SL(n, \mathbb{R})$	özel lineer grup
$O(n)$	ortogonal grup
L_a	sol öteleme
R_a	sağ öteleme
$\dim G$	G 'nin boyutu
$h(3)$	3-boyutlu Heisenberg Lie cebiri
$Aut(G)$	G 'nin otomorfizmalarının kümesi
Ad	adjoint gösterilim
ad	adjoint gösterilimin diferansiyeli
$End(G)$	G 'nin endomorfizmalarının kümesi
Σ	kontrol sistemi
$Af(G)$	G 'nin afin grubu
$Der(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$ 'nin türev cebiri
$aut(G)$	$Aut(G)$ 'nin Lie cebiri
$af(G)$	$Af(G)$ 'nin Lie cebiri
G_Σ	sözde (pseudo) grup
S_Σ	sözde-yarı (pseudo-semi) grup

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferansiyellenebilir fonksiyonun grafiği	4
Şekil 2.2 Vektör alanı ve teğet vektör gösterimi.....	7
Şekil 2.3 γ_p eğrisinin oluşumu	9
Şekil 2.4 Lie grubu ile teğet demeti arasındaki ilişkiyi gösteren diyagram.....	14
Şekil 2.5 Lie grubu ve Lie cebiri homomorfizmaları diyagramı.....	17
Şekil 2.6 Lie grubu ve Lie cebiri arasındaki ilişkileri gösteren diyagramlar	18
Şekil 2.7 Lie türevi geometrik anlamı	20
Şekil 2.8 Çıkış tasviri meydana getiren bileşke diyagramı	26
Şekil 2.9 Çıkış fonksiyonu ile görüntülerin oluşumu.....	27
Şekil 3.1 Çıkış tasvirinin oluşumu gösteren diyagram	35

KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR MİNİMAL GERÇEKLEME

Sultan SÜTLÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN

Bu tez çalışması, bağlantılı Lie grupları üzerindeki kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği konusu temel alınarak, afin kontrol sistemlerinin minimal gerçekleştirilmesi ve lineer kontrol sistemleri için hemen hemen gözlenebilirlik kavramları üzerine bir çalışmadır. Minimal gerçekleştirme, mühendislik, fizik ve kimya gibi bir çok alanda uygulabilen bir problemdir. Matematiksel bakış açısıyla ve diferansiyel geometrik metodlar kullanılarak bu konunun işlenmesi literatürde çok fazla görülmeyen çalışmalardır. Hemen hemen gözlenebilirlikte ise, zaman parametresinde sonlu zaman ihmal edilerek, kontrol teorisinde gözlenebilirliğe yeni bir yaklaşım getirilmiştir.

Tezin giriş kısmından sonra ikinci bölümde, minimal gerçekleştirme ve hemen hemen gözlenebilirlik kavramlarını oluşturmak için kullanılan sistemler ve bu sistemleri oluşturan temel öğeler tanıtılmıştır. Bu bölümden sonra tezin ilk özgün kısmı olan üçüncü bölümde, bağlantılı bir Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemi için minimal gerçekleştirme meydana getirmek amacıyla, ayırdedilemez noktaların kümesinin topolojik ve cebirsel özellikleri incelenmiş, elde edilen Lie grup yapısı ile kanonik izdüşüm tasviri kullanılarak bu sistem için bir minimal gerçekleştirme kurulmuştur. Dördüncü bölümdeki özgün kısımda ise, bağlantılı Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemleri için yeni bir gözlenebilirlik tipi olan, hemen hemen gözlenebilirlik kavramı tanıtılmıştır. Bunun için, hemen hemen ayırdedilemezlik tanımı verilmiş ve bunun bir denklik bağıntısı olduğu gösterilmiştir. Özel olarak, sistemin çıkış fonksiyonu olarak Lie grup homomorfizması alınmış, birim elemandan hemen hemen ayırdedilemez noktaların çıkış uzayında

oluşturduğu görüntü kümesinin topolojik ve cebirsel yapısı incelenmiş ve yerel gözlenebilirlik ile yerel hemen hemen gözlenebilirlik arasındaki ilişki ortaya konmuştur. Son olarak, minimal gerçekleme tanımında gözlenebilirlik yerine hemen hemen gözlenebilirlik kavramı kullanılarak, hemen hemen minimal gerçekleme tanımı oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Lie grubu, Lie cebiri, ayırdedilemezlik, gözlenebilirlik, minimal gerçekleme, afin kontrol sistemi, lineer kontrol sistemi



A MINIMAL REALIZATION FOR CONTROL SYSTEMS

Sultan SÜTLÜ

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN

This thesis study is based on the observability of the control systems on connected Lie groups, the minimal realization of affine control systems and almost observability concepts for linear control systems. Minimal realization is an applicable problem to the areas of engineering, physics and chemistry. Working on these terms by using mathematical point of view and differential geometric methods are very rare works in the literature. In the almost observability topic, a new approach to observability in control theory has been introduced by omitting the finite time in the time parameter.

After the introduction of the thesis in the second part, the systems used to create minimal realization and almost observability concepts and the basic elements that form these systems are introduced. In third section, which is the first original part of the thesis, in order to create minimal realization of affine control systems on connected Lie groups, topological and algebraic properties of the set of indistinguishable points from the neutral element are investigated and a minimal realization for this system is established using the obtained Lie group structure and canonical projection. In the original part of the fourth chapter, for linear control systems on connected Lie groups, a new type of observability, the concept of almost observability, is introduced. For this, definition of almost indistinguishability has been given and it has been shown to be an equivalence relation. In particular, by taking a Lie group homomorphism of the output function of the system, we investigated the topological and algebraic structure of the image of almost indistinguishable points from the neutral element, and revealed the

relation between local observability and local almost observability. Finally, almost minimal realization definition has been established by using the concept of almost observability rather than observability in definition of minimal realization.

Keywords: Lie group, Lie algebra, indistinguishability, observability, minimal realization, affine control system, linear control system.



1.1 Literatür Özeti

Gerçekleme (realization) ve minimal gerçekleme (minimal realization) kavramları, kontrol teoristler ve mühendisler için uzun yıllar ilgi çeken bir konu olsa da, matematiksel bakış açısıyla ve diferansiyel geometrik metodlar kullanılarak kontrol teorisine uygulanışı 1970'lerin başlarına rastlamaktadır. 1973'de Hector J. Sussmann tarafından sunulan ilk çalışma [1], lineer olmayan kontrol sistemlerinin minimal gerçeklemesi konusunda temel oluşturmuştur. Daha sonra, Sussmann'ın 1977 yılında yayınlanan makalesinde [2] ise, lineer olmayan sistemlerin minimal gerçeklemesinin varlığı ve tekliği ispatlanarak bu konudaki temel teoremler de ayrıntılarıyla verilmiştir.

Lie grupları üzerinde afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği ilk defa 1984 yılında Jurdjevic ve Sallet tarafından incelenmiştir [3]. Daha sonra Kara ve San Martin [4]'de ve Kule [5] yayınlarında bu alanda çalışmalara devam etmişlerdir. Lie grupları üzerinde afin kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği ise 2006'da Kara tarafından incelenmiştir [6]. Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin minimal gerçeklemesi ise henüz literatürde bulunmamaktadır. Bu tez çalışmasındaki ilk özgün katkı bu gerçekleme üzerinedir.

Tez çalışmasının ikinci orijinal kısmının temel konusu olan lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği, ilk kez 1960'larda Rudolf E. Kálmán tarafından [7]'de ortaya konulmuştur. [8], [9] ve [10] çalışmalarında ise, Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği üzerinde gelişmeler sağlanmıştır. Bu tez çalışmasında, var olan literatüre ek olarak, lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği üzerinde yeni bir karakterizasyon getirilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışması temel olarak, bağlantılı Lie grupları üzerindeki kontrol sistemlerinin gözlenebilirliğini konu almıştır.

Tezin ilk orijinal kısmı olan afin kontrol sistemleri için minimal gerçekleştirme başlığında amacımız, genel olarak gözlenebilirliği hakkında bilgi sahibi olunmayan, geçişli bir sistemden yola çıkarak, sistemin birimden ayırdedilemez noktalarını karakterize edip, kanonik izdüşüm tasviri kullanarak ilk sistem ile denk, gözlenebilir bir sistem elde etmektir. Böylece minimal gerçekleştirme yoluyla gözlenebilir olmayan bir sistemden, gözlenebilir bir sistem elde edilir.

Tezin ikinci orijinal kısmında ise, sonlu sayıda zaman parametresinin çıkarılarak lineer kontrol sistemleri için gözlenebilirliğe farklı bir yaklaşım kazandırılması amaçlanmıştır. Bu yaklaşımın uygulamalarda yer bulacağı ve kullanışlı olacağı düşünülmektedir.

1.3 Orijinal Katkı

Bu tez çalışmasında, ilk olarak G bağlantılı Lie grubu üzerinde geçişli bir afin kontrol sistemi $\Sigma = (G, \mathcal{D}, \pi_K, G/K)$ ele alındı. Σ sistemi ile çok benzeyen geçişli ve gözlenebilir bir sistem elde etmek istendi. Bu geçişli ve gözlenebilir sistemi $\Sigma^* = (G^*, \mathcal{D}^*, \pi_K^*, G/K)$ şeklinde ifade edersek, G^* Lie grubu G Lie grubundan kanonik izdüşüm tasviri ile elde edilir. Burada ele alınan afin kontrol sisteminde sapan vektör alanı, türev cebirinden bir elemana sahiptir ve bu eleman iç türevden farklı bir eleman olabilir.

Tez çalışmasında daha sonra, G bağlantılı Lie grubu üzerinde bir lineer kontrol sistemi $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, H)$ üzerinde çalışıldı. Bu sistem üzerinde, zaman parametresinde sonlu bir kümeyi çıkararak yerel hemen hemen gözlenebilirlik ve hemen hemen gözlenebilirlik kavramları tanımlandı. Özel olarak çıkış fonksiyonu h bir Lie grup homomorfizması alınarak, birimden ayırdedilemez noktaların görüntülerinin oluşturduğu kümeye bir Lie grup yapısı kazandırılabilceği gösterildi. Son olarak, hemen hemen gözlenebilirlik kavramı minimal gerçekleştirme tanımında kullanılarak, hemen hemen minimal gerçekleştirme tanımı ortaya kondu.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde; tez boyunca üzerinde çalıştığımız kontrol sistemini oluşturan temel kavramları içeren ön bilgiler verilmektedir. Böylece, ilerleyen bölümlerde sözü geçen tüm materyallerin bir bütünlük oluşturması amaçlanmıştır. Bu amaçla, öncelikle manifold, Lie grubu ve Lie cebiri kavramları ve bununla ilgili temel tanım ve teoremler, daha sonra genel kontrol sistemleri ve minimal gerçekleştirme kavramları ile Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri konularına yer verilmiştir.

2.1 Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Manifoldların; topolojik manifoldlar, analitik manifoldlar, C^k -manifoldlar, kompleks manifoldlar gibi bir çok çeşidi vardır. Bu çalışmada, diferansiyellenebilir (C^∞ -sınıfından) manifoldlar kullanıldığı için bu tanım ile başlıyoruz.

Tanım 2.1 M bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. Eğer M 'nin her p noktasının, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü bir homeomorfizma olacak şekilde bir U komşuluğu var ise, yani M 'nin her noktasının $\mathbb{R}^n$ e veya bir açık alt kümesine homeomorf olan bir komşuluğu var ise, M uzayına n -boyutlu yerel Öklid uzayı denir. Burada, U kümesine koordinat komşuluğu, φ tasvirine koordinat tasviri ve (U, φ) ikilisine de koordinat sistemi denir [11].

Tanım 2.2 M bir yerel Öklid uzayı ve $i \in I$ olmak üzere, $F; (U_i, \varphi_i)$ koordinat sistemlerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer bu koleksiyon aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, M üzerinde C^∞ -sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı denir [11]:

$$i) \bigcup_{i \in I} U_i = M,$$

ii) Her $i, j \in I$ için, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ bileşkesi C^∞ -sınıfından,

iii) Bu kolleksiyon maksimaldir.

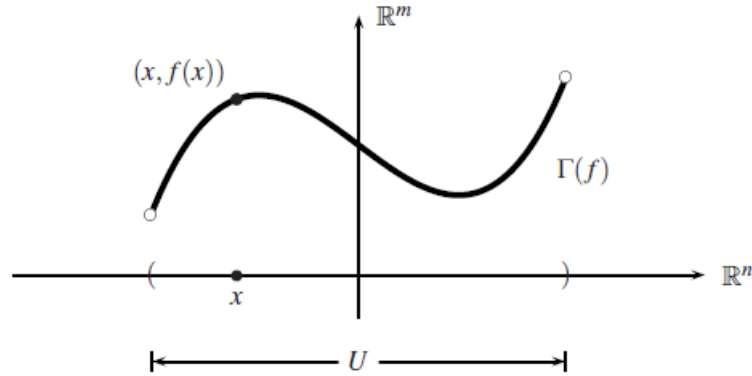
Tanım 2.3 M n -boyutlu yerel Öklid uzayı ve ikinci sayılabilir bir Hausdorff uzayı olmak üzere, bunlara ek olarak bir diferansiyellenebilir yapıya sahip ise, bir diferansiyellenebilir (C^∞) manifold oluşturur. 1-boyutlu manifold bir eğri ve 2-boyutlu manifold bir yüzey meydana getirir [12].

Bu tez çalışmasında, sistemlerin durum uzayı olarak Lie grubu, dolayısıyla diferansiyellenebilir manifold yapısı kullanılacaktır ve diferansiyellenebilir manifold yerine kısaca manifold olarak adlandırılacaktır.

Örnek 2.4 (Bir diferansiyellenebilir fonksiyonun grafiği [12]): Herhangi bir $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ için f fonksiyonun grafiği (Bknz Şekil 2.1),

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}^m\}$$

şeklinde tanımlıdır.



Şekil 2.1 $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferansiyellenebilir fonksiyonun grafiği [12]

U kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir açık altkümesi ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞ ise, bu durumda

$$\varphi: \Gamma(f) \rightarrow U,$$

$$(x, f(x)) \rightarrow x \text{ tasviri ile}$$

$$(1, f): U \rightarrow \Gamma(f),$$

$$x \rightarrow (x, f(x))$$

tasviri sürekli olup birbirlerinin tersidirler ve böylece homeomorfizma olurlar.

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklinde bir C^∞ fonksiyonun grafiği $\Gamma(f)$ 'in $(\Gamma(f), \varphi)$ şeklinde tek bir koordinat sistemi vardır, dolayısıyla bir C^∞ -manifolddur. Buradan, eliptik paraboloid veya hiperbolik paraboloid gibi bilinen birçok yüzeyin manifold olduğu söylenebilir.

Örnek 2.5 (Genel Lineer Grup) m ve n herhangi iki pozitif tam sayılar olmak üzere, $\mathbb{R}^{m \times n}$ tüm $m \times n$ matrislerin vektör uzayı olsun. $\mathbb{R}^{m \times n}$ uzayı, $\mathbb{R}^{mn}$ uzayı ile izomorf olduğundan, $\mathbb{R}^{mn}$ üzerindeki topoloji kullanılabilir. Genel lineer grup $GL(n, \mathbb{R})$, aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}).$$

Determinant fonksiyonu, $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $GL(n, \mathbb{R})$ uzayı $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ nin açık bir alt kümesidir. Bir manifoldun açık bir alt kümesi olarak $GL(n, \mathbb{R})$ bir manifolddur.

2.1.1 Tanjant Uzay

Tanım 2.6 Bir M diferansiyellebilir manifoldun, herhangi bir p noktasının açık komşuluklarında tanımlı tüm diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı $F(p)$ olsun. $F(p)$, fonksiyonların toplama işlemi ile bir vektör uzayıdır. $L: F(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tasviri, her $f, g \in F(p)$ için,

$$L(fg) = f(p)L(g) + g(p)L(f)$$

eşitliğini sağlayan lineer bir dönüşüm ise, L 'ye bir türev denir [13].

Genel olarak, bir manifoldun herhangi bir noktasındaki tanjant uzayı veya teğet uzayı, o noktadaki türevlerinin vektör uzayı olarak tanımlanır. Tanjant uzayı, benzer şekilde tanjant vektörler yoluyla da tanımlanabilir.

Tanım 2.7 Bir M manifoldunun herhangi bir p noktasındaki tanjant (teğet) vektörü, p noktasındaki bir türevdir. p noktasındaki tanjant vektörler o noktada bir vektör uzayı oluşturur ve bu uzaya tanjant uzayı denir. M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M$ ile gösterilir. Bir manifoldun tüm tanjant uzaylarının birleşimi ise teğet demetini (tanjant demetini) meydana getirir. M manifoldunun teğet demeti TM ile gösterilir ve

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

şeklinde dir. Ayrıca, M n -boyutlu bir manifold olmak üzere, teğet demeti TM $2n$ -boyutlu bir manifolddur [11], [13].

$F: N \rightarrow M$ tasviri iki manifold arasında bir C^∞ -sınıfından bir tasvir olsun. F tasvirinin her $p \in N$ noktasındaki türevi, tanjant uzayların bir lineer tasvirini meydana getirir. Bu tasvire F 'in p noktasındaki diferansiyeli denir ve

$$dF: T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

şeklinde tanımlanır [12].

2.1.2 Vektör Alanları ve İntegral Eğrileri

Genel olarak bir vektör alanı, bir manifoldun her noktasına bir tanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyondur. Bununla birlikte, bir vektör alanını eğriler yoluyla anlatmak tez çalışmamız açısından daha doğru olacaktır. Bunun için diferansiyellenebilir eğri ve eğrinin teğet vektörü gibi kavramlara ihtiyaç vardır.

Tanım 2.8 $(a, b) \in \mathbb{R}$ aralığından M manifoldunun bir açık aralığına $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ şeklindeki diferansiyellenebilir tasvire bir düzgün (smooth) veya diferansiyellenebilir eğri denir. Genellikle, $0 \in (a, b)$ olduğu varsayılır ve $\gamma(0) = p$ ise c eğrisinin başlangıç noktası p olur.

Ayrıca, bir $t_0 \in (a, b)$ anında, γ eğrisinin teğet vektörü $\dot{\gamma}(t_0)$ ile gösterilir ve

$$\dot{\gamma}(t_0) = d\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)} M$$

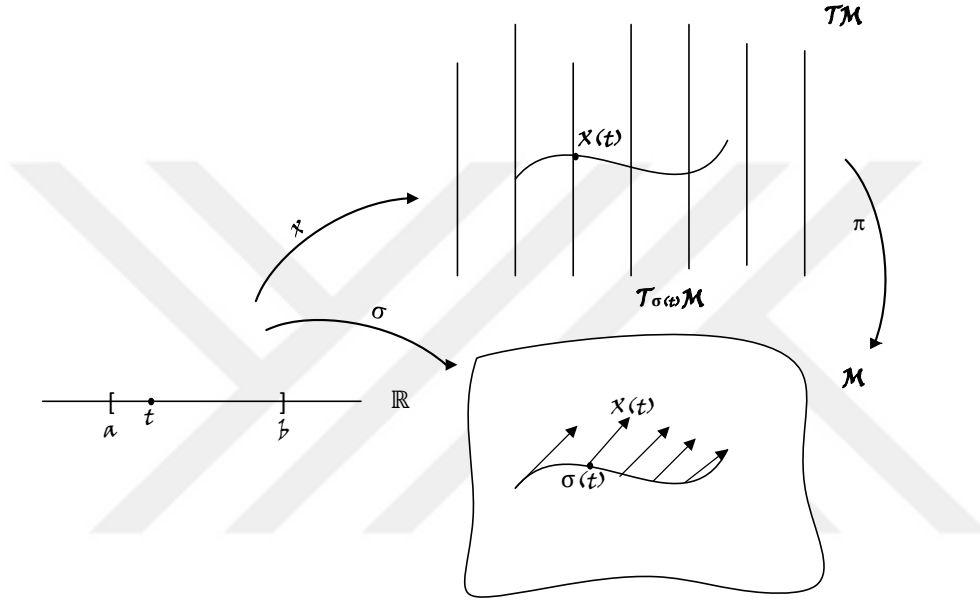
şeklinde tanımlıdır. Burada $\frac{d}{dt} \Big|_{t_0}$ gösterimi $T_{t_0} \mathbb{R}$ için standart koordinat tasviridir. Bir eğriyi kullanarak diferansiyel hesaplanması ise, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

N ve M manifoldları arasındaki $F: N \rightarrow M$ tasvirini göz önüne alalım. $p \in N$ ve $X_p \in T_p N$ olsun. Eğer γ eğrisi başlangıç noktası p ve p noktasındaki teğet vektörü X_p olan bir diferansiyellenebilir eğri ise,

$$dF_p(X_p) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (F^\circ \gamma)(t_0)$$

olur. Diğer bir deyişle, $dF_p(X_p)$ ifadesi $(F^\circ \gamma)$ eğrisinin $F(p)$ değerindeki teğet vektörüdür.

Tanım 2.9 π tasviri teğet demetinden manifolda $\pi: TM \rightarrow M$ şeklinde izdüşüm tasviri olmak üzere, bir $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ eğrisi boyunca X vektör alanı, $\pi^\circ X = \sigma$ olacak şekilde $X: [a, b] \rightarrow TM$ şeklinde tanımlı sürekli bir fonksiyondur [11] (Bknz Şekil 2.2)



Şekil 2.2 Vektör alanı ve teğet vektör gösterimi [11]

Eğer $X: [a, b] \rightarrow TM$ fonksiyonu C^∞ -sınıfından ise, X vektör alanına C^∞ -sınıfından (düzgün veya diferansiyellenebilir) bir vektör alanı denir [11].

Tanım 2.10 X vektör alanı M manifoldu üzerinde C^∞ bir vektör alanı olsun. X vektör alanının bir integral eğrisi, her $t \in [a, b]$ için,

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

olacak şekilde, $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ şeklinde tanımlı bir diferansiyellenebilir eğridir [12].

2.1.3 Akış (Flow) ve 1-parametrelili Grup

Kontrol sistemlerinde vektör alanları ve integral eğrileriyle birlikte bunların akışları ve oluşturdukları 1-parametrelili alt gruplar da önemli bir yer tutar. Bu nedenle, bunların tanımlarına da yer veriyoruz.

Tanım 2.11 Bir X vektör alanı için, M manifoldunun her p noktasındaki integral eğrileri reel sayıların tüm t değerlerinde tanımlı ise, bu X vektör alanına tamdır, denir. Bu durumda, X vektör alanı M üzerinde bir ϕ akışı tanımlar. X 'in p noktasındaki integral eğrisi $\gamma(t)$ olmak üzere, ϕ akışı,

$$\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

$$(t, p) \rightarrow \phi(t, p) = \gamma(t)$$

şeklinde tanımlıdır [14]. Bu akışın aşağıdaki özellikleri sıklıkla kullanılır:

1. Her $p \in M$ için, $\phi(0, p) = p$.
2. Her $p \in M$ ve her $s, t \in \mathbb{R}$ için, $\phi(t + s, p) = \phi(t, \phi(s, p))$.
3. Her $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$ için,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, p) = X^\circ \phi(t, p).$$
4. X vektör alanı diferansiyellenebilir ise, ϕ tasviri de diferansiyellenebilirdir.

$\phi(t, p)$ akışı, kısaca $\phi_t(p)$ ile gösterilir. Yukarıdaki özelliklerden bu tasvirin bir difeomorfizma olduğu görülür. Ayrıca, $\{\phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ koleksiyonu tasvirlerin bileşke işlemi altında bir grup meydana getirir. Bu gruba X vektör alanı tarafından oluşturulan, difeomorfizmaların 1-parametrelili grubu denir. Bir ϕ_t tasvirini göstermek için aynı zamanda, $\exp tX$ ifadesi de kullanılır [14].

M manifoldu üzerinde bir diferansiyellenebilir akış ile bir X vektör alanı arasında

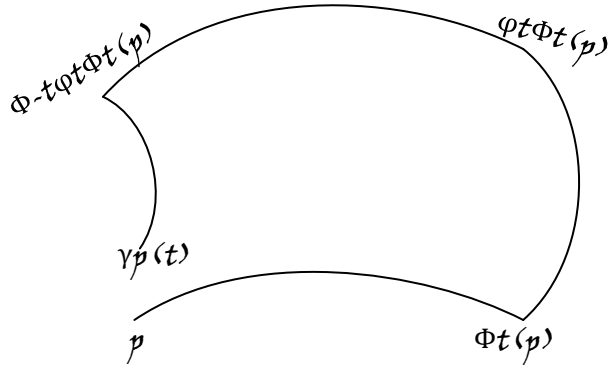
$$X(p) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, p)|_{t=0}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Buradan tam vektör alanları ile akışlar arasında birebir bir eşleşme olduğu söylenebilir.

Geometrik olarak gösterilmek istenirse, bir X vektör alanının akışı ϕ ve bir Y vektör alanının akışı φ olsun. Bunlar t anında ϕ_t ve φ_t olsun. Sabit bir $p \in M$ için, bir γ_p eğrisi,

$$\gamma_p(t) = \varphi_{-t} \circ \phi_{-t} \circ \varphi_t \circ \phi_t$$

şeklinde tanımlanırsa, bu eğri aşağıdaki gibi gösterilebilir [15]:



Şekil 2.3 γ_p eğrisinin oluşumu [15]

Örnek 2.12 $M = \mathbb{R}^n$ ve X bir sabit vektör alanı olsun. Yani; her $x \in \mathbb{R}^n$ için $X(x) = a$ olsun. a 'nın koordinatları $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olmak üzere, X vektör alanı türev notasyonu ile yazılırsa,

$$X(x) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olur. Bu durumda, X 'in akışı $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in \mathbb{R}$ için,

$$X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x)|_{t=0}$$

bağıntısından, $\phi(t, x) = x + at$ olur. X 'in integral eğrileri, a 'nın doğrultusundaki tüm paralel doğrulardır. Her t için, $x \rightarrow \phi(t, x)$ tasvirleri x 'in at ile ötelenmesi olarak verilir. Böylece $\{\phi_t: t \in \mathbb{R}\}$ koleksiyonu $\mathbb{R}^n$ 'in ötelemelerinin bir 1-parametrelili grubu olur.

Örnek 2.13 $M = \mathbb{R}^n$, A bir $n \times n$ matris ve X , koordinatları $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ olan bir vektör alanı olsun. X 'in koordinatları, $i = 1, 2, \dots, n$ için,

$$X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$$

şeklinde tanımlansın. Burada,

$$\exp tA = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

şeklinde tanımlanmak üzere, her integral eğrisi $(\exp tA)(x)$ şeklindedir. Buradan $\phi(t, x) = (\exp tA)(x)$ olur ve böylece $\{\phi_t: t \in \mathbb{R}\}$ koleksiyonu tüm lineer transformasyonların bir 1-parametrelili alt grubu olur.

$n = 2$ ve $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ için aşağıdaki bilinen durum elde edilir;

$$\exp tA = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Burada, $\{\phi_t: t \in \mathbb{R}\}$ düzlemdeki rotasyonların grubuna karşılık gelir ve integral eğrileri orijin merkezli çemberlerdir.

2.2 Lie Grupları ve Lie Cebirleri

Lie grubu ve Lie cebiri kavramları 1974-1984 yılları arasında Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından ortaya atılmıştır [13]. Lie Teorisi, içerdiği Grup Teori, Topoloji, Diferansiyel Geometri, Lineer Cebir gibi çeşitli matematik dallarıyla birlikte zengin bir konu başlığı olmuştur. Bu çalışmada ise, Lie grubu, kontrol sistemlerinin üzerine kurulduğu durum uzayı olarak manifold yapısıyla ve Lie cebiri ise, kontrol sistemlerinin dinamiği olarak tanjant uzayına denk yapısıyla karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple, bu bölümde bu kavramlar ayrıntılarıyla irdelenmiştir.

2.2.1 Lie Grubu

Tanım 2.14 G diferansiyellenebilir (C^∞) bir manifold ve soyut bir grup olmak üzere, aşağıdaki C^∞ -sınıfından

$$\mu: G \times G \rightarrow G, \quad \mu(a, b) = ab$$

$$i: G \rightarrow G, \quad i(a) = a^{-1}$$

tasvirleri var ise, G' 'ye bir Lie grubu denir [16].

Örnek 2.15 Genel Lineer Grup $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur. Örnek 2.5 de bahsi geçen genel lineer grup,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det A \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\mathbb{R}^{n \times n}$ in bir açık alt kümesi olarak bir manifold olduğu gösterildi. Bir Lie grubu olduğunu göstermek için çarpma ve ters alma işlemlerine bakmak gerekir. Herhangi $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ için bu matrislerin çarpımının (ij) -bileşeni

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

şeklinde, A ve B 'nin koordinatlarından bir polinom olduğundan,

$$\mu: GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

çarpımı C^∞ bir tasvirdir. Ters alma işlemi ise; bir A matrisinin (ij) -minörü, A 'nın i . satırı ve j . sütunu silinerek elde edilen altmatrisin determinantı olup $\min(A_{ij})$ ile gösterilmek üzere, A^{-1} matrisinin (ij) -bileşeni, Cramer kuralından

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \min(A_{ij})$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan, $\det A \neq 0$ olup $i: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ters işlemi C^∞ bir tasvirdir. Böylece, $GL(n, \mathbb{R})$ kümesi bir Lie grubudur.

2.2.2 Lie Altgrupları ve Kapalı Altgrup Teoremi

Kapalı alt grup teoremi, birçok ispatta çözüm kolaylığı sağladığından sıklıkla kullanılan önemli bir teoremdir. Bu çalışmada da kullanılacağı için bu bölümde ispatsız olarak bu teoreme ve bu teoremle ilgili bazı ön bilgilere yer verilmektedir.

Tanım 2.16 G ve H iki Lie grubu olsunlar. $\varphi: G \rightarrow H$ tasviri bir grup homomorfizması olmak üzere, C^∞ -sınıfından ise, φ tasvirine bir Lie grup homomorfizması denir [17].

Tanım 2.17 G bir Lie grubu ve H onun bir altgrubu olsun. Eğer $i: H \rightarrow G$ daldırma (immersion) tasviri bir Lie grup homomorfizması olacak şekilde, H grubu da Lie grup yapısına sahip ise, H bir Lie alt grubudur. Ayrıca, H altgrubu G 'nin topolojine göre kapalı ise, kapalı bir alt grup olur [13], [17].

Teorem 2.18 (Kapalı Altgrup Teoremi) G bir Lie grubu ve H da onun kapalı bir altgrubu olsun. O takdirde, H kapalı soyut altgrubu, kendisini G 'nin bir Lie altgrubu yapan tek bir manifold yapısına sahiptir ve böylece H bir gömülü (embedded) Lie altgrubu olur. [11].

Örnek 2.19 $H(3)$ 3-boyutlu Heisenberg grubu bir Lie grubudur.

$$H(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde tanımlı olup, $GL(3, \mathbb{R})$ 'nin bir altkümesidir. $H(3)$ kümesinin herhangi iki elemanın çarpımı, yine bu tipte bir eleman ortaya çıkartır. Yani; $A, B \in H(3)$ için,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a' + a & c' + ab + c \\ 0 & 1 & b' + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H(3)$$

dir. Ayrıca birim matrisin de bu kümeye ait olduğu açıktır. Bir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H(3) \text{ için}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H(3)$$

olduğundan $H(3)$ kümesinin $GL(3, \mathbb{R})$ 'nin bir altgrubu olduğu söylenir. Son olarak bu formdaki matrislerin limiti de bu formda bir matris olup, yine, $H(3)$ içinde olacağından $H(3)$ grubunun kapalı olduğu da söylenir. Böylece, kapalı altgrup teoremi kullanılarak, $H(3)$ grubunun bir Lie grubu olduğu elde edilir.

Örnek 2.19 a benzer şekilde özel lineer grup $SL(n, \mathbb{R})$ ve ortogonal grup $O(n)$, kapalı alt grup teoreminden dolayı, $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin Lie altgrupları oldukları söylenebilir.

2.2.3 Lie Cebiri

Tanım 2.20 $L(G)$ bir K cismi (reel veya kompleks) üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan,

$$[\cdot, \cdot]: L(G) \times L(G) \rightarrow L(G),$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

tasviri ile bu vektör uzayına K cismi üzerinde bir Lie cebiri denir:

- (i) $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ bilineerdir, yani her $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in L(G)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için, $[\alpha X_1 + \beta X_2, Y_1] = \alpha[X_1, Y_1] + \beta[X_2, Y_1]$,
 $[X_1, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X_1, Y_1] + \beta[X_1, Y_2]$.
- (ii) $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ ters simetriktir, yani; her $X, Y \in L(G)$ için,
 $[X, Y] = -[Y, X]$ dir.

(iii) Jakobi özdeşliğini sağlar, yani; her $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

dır. Burada, $[X, Y]$ gösterimine Lie parantezi denir [11].

Tanım 2.21 G ve H Lie gruplarının Lie cebirleri sırasıyla $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ olsun. $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tasviri lineer ve her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\tau([X, Y]) = [\tau(X), \tau(Y)]$$

eşitliği sağlanıyor ise τ tasvirine bir Lie cebir homomorfizması denir.

2.2.3.1 Sol İnvaryant Vektör Alanları

G Lie grubu olmak üzere $a, g \in G$ için,

$$L_a: G \rightarrow G,$$

$$g \rightarrow L_a(g) = ag \text{ işlemine } a \text{ elemanı ile sol öteleme ve}$$

$$R_a: G \rightarrow G,$$

$$g \rightarrow R_a(g) = ga \text{ işlemine } a \text{ elemanı ile sağ öteleme denir.}$$

Bu ötelemeler, tersleri $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ ve $(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$ olan difeomorfizmalardır. Bu tez çalışmasında, sadece sol öteleme ile ilgili tanım ve kavramlar kullanıldığı için, bundan sonraki tanımlar ve kavramlar sadece sol öteleme ile ilgili olarak verilmiştir. Aynı tanım ve kavramlar sağ öteleme için de yapılabilir.

G Lie grubu üzerinde bir X vektör alanı göz önüne alınsın. Sol öteleme tasvirinin diferansiyeli,

$$dL_a: T_g G \rightarrow T_{ag} G,$$

$$X_g \rightarrow dL_a(X_g)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, bir X vektör alanı için,

$$dL_a(X_g) = X(L_a(g)) = X(ag) = X_{ag}$$

oluyorsa, bu vektör alanına sol invaryanttır, denir [17]. X bir sol invaryat vektör alanı ise, X_e deki değeri ile tamamen belirlenebilir, çünkü $g = e$ alınırsa, $dL_a(X_e) = X_a$ olur.

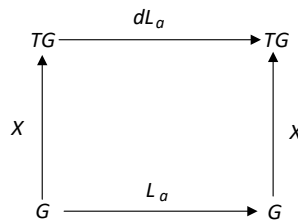
G Lie grubunun tüm sol invariant vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{g}$ ile gösterilsin. Sıklıkla kullanılan bazı özellikler aşağıda verilmektedir; [11]

- (i) $\mathfrak{g}$ bir reel vektör uzayıdır ve $T_e G$ vektör uzayı G 'nin birimdeki teğet uzayı olmak üzere, $\omega: \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$, $\omega(X) = X(e) = X_e$ şeklinde tanımlı ω tasviri bir izomorfizmadır. Sonuç olarak, $\dim \mathfrak{g} = \dim G = \dim T_e G$.
- (ii) Sol invariant vektör alanları diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.
- (iii) Sol invariant iki vektör alanının Lie parantezi yine bir sol invariant vektör alanıdır.
- (iv) $\mathfrak{g}$, vektör alanları üzerindeki Lie parantezi işlemiyle bir Lie cebiri oluşturur.

Bu özelliklerle birlikte bir Lie grubunun Lie cebiri, tüm sol invariant vektör alanlarının kümesi olarak tanımlanabilir. Alternatif şekilde, yukarıdaki birinci özellik göz önüne alınarak, $\mathfrak{g}$ ile $T_e G$ 'nin izomorfluğundan bir Lie grubunun Lie cebiri birimdeki teğet uzay olarak da tanımlanabilir.

Önerme 2.22: G bir Lie grubu olsun. G üzerindeki tüm sol invariant vektör alanlarının kümesi, bir vektör uzayı olarak $T_e G$ ile izomorfiktir [17].

İspat: Bir X sol invariant vektör alanı için aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğu söylenebilir.



Şekil 2.4 Lie grubu ile teğet demeti arasındaki ilişkiyi gösteren diyagram [17]

Buradan, her $a \in G$ için

$$dL_a(X(e)) = X(L_a(e)) = X(a)$$

dir. $\mathbb{T}(G)$ ile G üzerindeki tüm sol invariant vektör alanlarının kümesi gösterilsin.

$$\omega: \mathbb{T}(G) \rightarrow T_e G,$$

$$X \rightarrow \omega(X) = X(e)$$

tasviri tanımlansın. ω lineerdir, öyle ki;

$$\omega(X + Y) = (X + Y)(e) = X(e) + Y(e).$$

ω birebirdir, öyle ki her $g \in G$ için $X, Y \in \mathfrak{T}(G)$ ve $\omega(X) = \omega(Y)$ ise

$$X(g) = dL_g(X(e)) = dL_g(Y(e)) = Y(g)$$

olup, $X = Y$ bulunur. Ayrıca ω örtendir. $V \in T_e G$ olsun ve $g \in G$ için,

$$X_V: G \rightarrow TG,$$

$$g \rightarrow X_V(g) = dL_g(V),$$

şeklinde tanımlansın. X_V 'nin sol invaryant olduğu gösterilirse ω 'nın bir izomorfizma olduğu ispatlanmış olur ve ispat biter.

X_V 'nin sol invaryant olduğu göstermek için, $a, g \in G$ alınsın.

$$\begin{aligned} (dL_a)(X_V(g)) &= (dL_a)(dL_g(V)) \\ &= d(L_a \circ L_g)(V) \\ &= d(L_{ag})(V) \\ &= X_V(ag) = X_V(L_a(g)) \text{ olup sol invaryanttır.} \end{aligned}$$

Örnek 2.23 Genel lineer grup $GL(n, \mathbb{R})$ Lie grubunu göz önüne alınırsa, I birim matris olmak üzere, birimdeki teğet uzayı, $T_I GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ olur. Yani; Lie cebiri $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ dir. Buradaki Lie parantezi ise her $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için,

$$[A, B] = AB - BA$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2.4 Bağlantılı ve Basit Bağlantılı Lie Grupları

Genel olarak $\varphi: G \rightarrow H$ tasviri bir Lie grubu homomorfizması ise, $d\varphi: T_e G \rightarrow T_e H$ tasviri de bir Lie cebiri homomorfizmasıdır. Fakat, bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani; G ile H Lie grupları, sırasıyla, $\mathfrak{g}$ ile $\mathfrak{h}$ Lie cebirlerine sahip olmak üzere, $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tasviri bir Lie cebir homomorfizması ise, o takdirde, $\tau = d\varphi$ olacak şekilde bir $\varphi: G \rightarrow H$ Lie grup homomorfizması sadece G 'nin basit bağlantılı olduğu durumda vardır [17].

Tanım 2.24 Bir Lie grubu yol bağlantılı ve herhangi bir noktasında başlayıp biten sürekli fonksiyonların hepsi bir noktaya büzülebiliyor ise, basit bağlantılıdır denir.

2.2.5 Ekspansiyel Tasvir

Bir G Lie grubu ve onun Lie cebiri $\mathfrak{g}$ verildiğinde, ekspansiyel tasvir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin yapısı hakkında bilgi verir.

Önerme 2.25 Her $X \in \mathfrak{g}$ için, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\varphi_X: \mathbb{R} \rightarrow G$ tasviri vardır:

- i) $\varphi_X(0) = e$
- ii) $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_X(t) = X$
- iii) $\varphi_X(s+t) = \varphi_X(s)\varphi_X(t)$

İspat: Her $X \in \mathfrak{g}$ için,

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R} &\rightarrow \mathfrak{g}, \\ t &\rightarrow tX \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı Lie cebiri homomorfizması göz önüne alınsın. $\mathbb{R}$ bağlantılı ve basit bağlantılı olduğundan $(d\varphi_X)_0 = \tau$ olacak şekilde tek bir $\varphi_X: \mathbb{R} \rightarrow G$ Lie grup homomorfizması vardır. Bu ise

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_X(t) = X$$

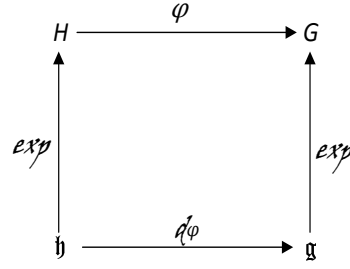
anlamındadır. Buradan ekspansiyel tasvir tanımına varılabilir.

Tanım 2.26 G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ Lie cebiri olmak üzere, ekspansiyel tasvir

$$\begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\rightarrow G, \\ X &\rightarrow \exp X = \varphi_X(e) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [11].

Teorem 2.27 G ve H Lie grupları ve sırasıyla $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ Lie cebirleri olsun. Eğer $\varphi: H \rightarrow G$ bir Lie grubu homomorfizması ise, aşağıdaki diyagram değişmelidir [11]:



Şekil 2.5 Lie grubu ve Lie cebiri homomorfizmaları diyagramı

Matris Lie gruplarında exponensiyel tasvirin önemli bir yeri vardır. G bir matris Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ onun Lie cebiri olmak üzere; $\mathfrak{g}$, tüm t reel sayıları için, $e^{tX} \in G$ olacak şekilde tüm X matrislerinin kümesi olarak tanımlanır.

Örnek 2.28 Heisenberg Lie grubunun Lie cebirini oluşturan kümeyi bulalım.

$H(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ Heisenberg Lie grubunun elemanlarını e^{tX} olacak şekilde düşünelim. Yani; her $t \in \mathbb{R}$ için, $a(t), b(t), c(t)$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere,

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & a(t) & c(t) \\ 0 & 1 & b(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. Şimdi $t = 0$ için e^{tX} türevini alalım. Yani; eşitliğin sağ tarafının her bir bileşeninin türevini alalım. Bu ise;

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX} = X = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} 1 & a'(t) & c'(t) \\ 0 & \frac{d}{dt} 1 & b'(t) \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a'(0) & c'(0) \\ 0 & 0 & b'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $a'(0), b'(0), c'(0)$ birer reel sayı olduğundan, Heisenberg Lie grubunun Lie cebiri

$$h(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.6 Adjoint Gösterilim

Bir G Lie grubu üzerinde iç (inner) otomorfizma

$$i: G \times G \rightarrow G,$$

$$(g, a) \rightarrow i(a, g) = g a g^{-1} = i_g(a)$$

şeklinde tanımlansın. $\mathfrak{g}$ üzerindeki tüm otomorfizmaların kümesi $Aut(\mathfrak{g})$ olmak üzere adjoint gösterilim; iç otomorfizmanın diferansiyeli olarak;

$$Ad: G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$$

$$g \rightarrow Ad(g) = di_g$$

şeklinde tanımlanır. Adjoint gösterilim $Ad(g) = Ad_g$ ile ifade edilir. Diferansiyeli ise, G üzerindeki tüm endomorfizmaların kümesi $End(\mathfrak{g})$ olmak üzere;

$$ad: \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g})$$

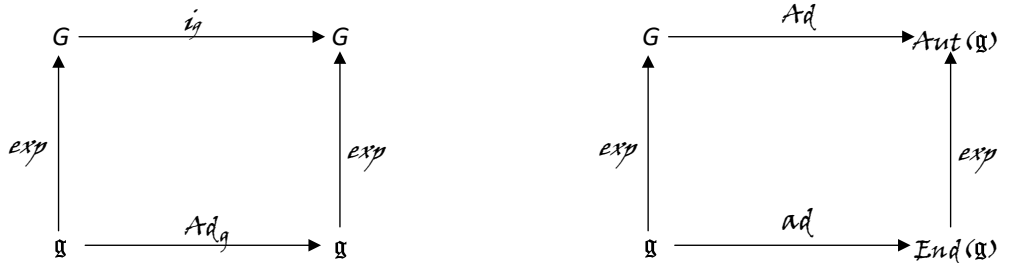
$$X \rightarrow ad(X) = d(Ad)(X)$$

şeklinde tanımlıdır ve $ad(X) = ad_X$ ile gösterilir.

Teorem 2.29: G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ Lie cebiri olmak üzere; her $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$ ve $X \in \mathfrak{g}$ için,

- i) $\exp t \left(Ad_g(X) \right) = g(\exp tX) g^{-1}$
- ii) $\exp t(ad X) = Ad(\exp tX)$

eşitlikleri ile aşağıdaki değişmeli diyagramlar yazılabilir:



Şekil 2.6 Lie grubu ve Lie cebiri arasındaki ilişkileri gösteren diyagramlar [11]

Örnek 2.30 $G = GL(n, \mathbb{R})$ için Ad ve ad gösterilimleri şöyledir;

Öncelikle iç otomorfizma lineer olup, Ad tanımı kullanılarak $g \in G$ ve $X \in \mathfrak{g}$ için,

$$\begin{aligned}
Ad(g)(X) &= (di_g)(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i_g(\exp tX) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \exp(tX) g^{-1} \\
&= g \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) \right) g^{-1} \\
&= gXg^{-1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer yandan ad tanımını kullanılarak, her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için,

$$\begin{aligned}
ad(X)(Y) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad(\exp tX)(Y) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) Y \exp(-tX) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) \right) Y \exp(-0X) + \exp(0X) Y \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-tX) \right) \\
&= XY + Y(-X) \\
&= XY - YX = [X, Y].
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $[X, Y]$, Y vektör alanının X vektör alanı doğrultusundaki Lie türevidir. Aşağıda Lie türevi tanımını veriyoruz.

2.2.7 Lie Türevi

Bir manifold üzerinde, herhangi bir vektör alanının diferansiyeli, başka bir vektör alanına göre alınabilir. Bu diferansiyel ile elde edilen türeve Lie türevi denir. Başka bir deyişle, M manifoldu üzerinde, bir Y vektör alanının bir X vektör alanı boyunca zamandaki değişim oranı Lie türevi yoluyla hesaplanır. Bu türev $[X, Y]$ ile gösterilir.

M manifoldu üzerinde bir $p \in M$ alınsın ve X vektör alanının akışı ϕ olsun. $[X, Y]_p$ ifadesi Y vektör alanının $t \rightarrow \phi_t(p)$ akış eğrileri boyunca değişimini ifade etsin. $[X, Y]$ bir vektör alanı olduğundan $[X, Y]_p$ nin $T_p M$ nin bir elemanı olması gerekir. Ayrıca,

$$\phi_t: M \rightarrow M,$$

$$p \rightarrow \phi_t(p),$$

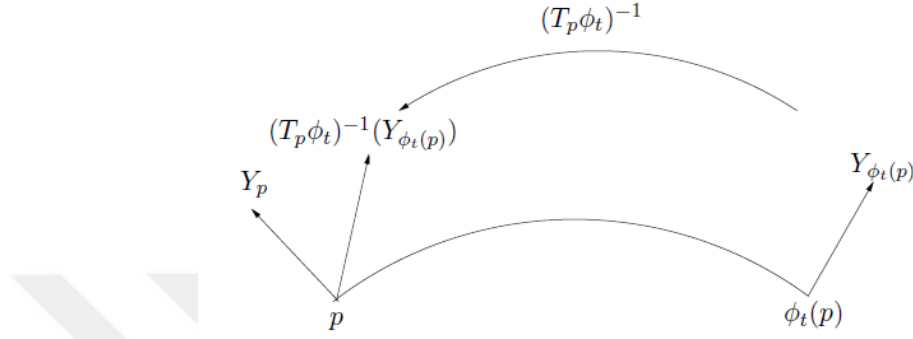
$$d\phi_t: T_p M \rightarrow T_{\phi_t(p)} M \text{ ve}$$

$$(d\phi_t)^{-1} = d\phi_{-t}$$

olduğu biliniyor. Y vektör alanının $\phi_t(p)$ noktasındaki değeri $Y_{\phi_t(p)}$ olmak üzere, $T_p M$ 'nin birer elemanı olarak Y_p ile $(d\phi_t)^{-1}(Y_{\phi_t(p)})$ vektörleri kıyaslanabilir ve

$$[X, Y]_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\phi_t)^{-1}(Y_{\phi_t(p)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\phi_t)^{-1}(Y_{\phi_t(p)}) - Y_p}{t}$$

elde edilir. Aşağıdaki Şekil 2.7 bu işlemi geometrik olarak açıklamaktadır [15].



Şekil 2.7 Lie türevi geometrik anlamı

Aşağıdaki kısımda, kontrol sistemleri tanıtılarak, minimal gerçekleştirme problemi genel hali ile sunulmaktadır. Daha sonra afin kontrol sistemleri verilerek, tezin bundan sonraki bölümündeki problemi çözmek için kullanılan çıkış fonksiyonu ile birlikte, bağlantılı bir Lie grubu üzerindeki afin kontrol sistemlerinin ayırdedilemezlik ve gözlenebilirlik kavramları verilmektedir.

2.3 Kontrol Sistemleri ve Minimal Gerçekleme

Minimal gerçekleştirme problemi kontrol teorisinin klasik temel en önemli problemlerinden biridir. Gerçekleme (realization) ve minimal gerçekleştirme kavramları kontrol teorisi, sistemler teorisi ve dinamik sistemler alanlarında ve bunların çeşitli uygulamalarında sıklıkla kullanılan kavramlardır. Ancak diferansiyel geometrik metodların sadece teorem ispatlarında kullanılan bir araç olmaktan çıkarak, lineer olmayan kontrol sistemlerinin minimal gerçekleştirme çalışmalarına uygulanışı Sussmann tarafından 1977 yılında yayınlanan makalesinde lineer olmayan sistemlerin minimal gerçekleştirilmesinin varlığı ve tekliğinin ispatlanmasıyla ayrı bir boyut kazanmıştır [2]. Bu tez çalışması, bu makaledeki tanım ve teoremleri temel alarak ortaya çıkmıştır.

A. Isidori, genel olarak gerçekleme problemini, verilen bir girdi-çıktı (input-output) tasviri ve uygun bir başlangıç durumu ile yeniden bir dinamik sistem oluşturulması olarak açıklamıştır [18]. Bu durumda sistem, seçilen bir başlangıç durumundan ve belirlenen girdi-çıktı tasvirinden uyarlanarak “gerçeklenmiş” olur. Eğer oluşturulan sistem kontrol edilebilir ve gözlenebilir ise, bu gerçeklemeye “minimal gerçekleme” denir.

Bu başlıkta, öncelikle genel kontrol sistemleri ve sistemi oluşturan öğeler tanıtıldı. Genel ayırdedilemezlik ve gözlenebilirlik tanımlarıyla birlikte minimal gerçeklemenin nasıl oluşturulduğu anlatıldı.

2.3.1 Kontrol Sistemleri

Diferansiyel geometrik bakış açısıyla Sussmann [2] de, kontrol sistemi ve minimal gerçekleme problemini aşağıdaki şekilde açıklamıştır.

En genel hali ile bir kontrol sistemi $\Sigma = (M, f, \mathcal{U}, h, N)$ şeklinde bir beşli ile gösterilsin. Kısaca bu beşlinin elemanları için varsayılan teknik özellikler aşağıdaki şekildedir:

M durum uzayı; sonlu boyutlu, sonsuz diferansiyellenebilir ve sınırları olmayan bir manifold,

$\mathcal{U}$ sınırlandırılmamış, uygun kontrollerin bir sınıfı (inputlar-girdiler),

f fonksiyonu; $M \times \mathcal{U}$ üzerinde tanımlı, $x \rightarrow f(x, u)$ ile M üzerinde bir C^∞ vektör alanı ifade eden, $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ şeklinde bir adi diferansiyel denklemi ile sistemin dinamiğini oluşturan fonksiyon,

N gözlem uzayı veya çıkış uzayı bir Hausdorff topolojik uzay ve h gözlem fonksiyonu veya çıkış fonksiyonu ise $h: M \rightarrow N$ şeklinde tanımlı bir düzgün (smooth) fonksiyondur.

Genel olarak, lineer olmayan bir kontrol sistemi; $x \in M$ ve $u \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (2.1)$$

$$y = h(x)$$

denklemleriyle ifade edilir. Klasik anlamda, (2.1) denkleminin anlamlı olması için $f(x, u)$ 'nin M 'nin x noktasındaki teğet uzayı $T_x M$ 'nin bir elemanı olması beklenir. Böylece, f dinamiği ile $\{X^u: u \in \mathcal{U}\}$ şeklindeki M zerinde C^∞ vektör alanlarının bir ailesi

elde edilir ve $f(x, u) = X^u(x)$ yazılır. M üzerindeki tüm C^∞ vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilmek üzere, herhangi bir $X \in \chi(M)$ için $t \rightarrow X_t(x)$ tasviri X 'in $t = 0$ 'da x noktasından geçen integral eğrisini ifade eder.

Tanım 2.31 Kontrol sisteminin çözüm eğrisini tanımlamak için, standart varlık ve teklik teoremlerinden [19], $\Sigma = (M, f, \mathcal{U}, h, N)$ sisteminin, uygun bir u kontrolü ve $x_0 \in M$ başlangıç değeri için, $\dot{x} = f(x, u)$ denkleminin $t \rightarrow x(t)$ şeklinde bir çözümü kabul edilsin. Bu x çözümü, u 'nun tanımlı olduğu aralığın bir I alt aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, her t için, $0 \in I$, $x(0) = x_0$ ve x eğrisinin t anındaki teğet vektörü $f(x(t), u(t))$ 'dir. Bunlara ek olarak, bu çözüm tektir. Öyle ki, bir I' alt aralığında tanımlı farklı bir x' çözümü var ise, x ve x' çözümleri $I \cap I'$ üzerinde çakışırlar. Buradan, eğer x' 'in tanım kümesi olarak I aralığı mümkün olan en büyük küme olarak alınırsa x çözümü tektir.

$x(t)$ çözümünün sadece t 'ye değil, aynı zamanda x_0 ve u değerlerine de bağlı olduğunu vurgulamak için, bu çözüm $p(x_0, u, t)$ ile gösterilsin. Burada, $t \rightarrow p(x_0, u, t)$ eğrisine x_0 başlangıç noktası ve u girdisine karşılık gelen integral eğrisi (trajektorisi) denir.

Kontrol sistemlerini oluşturan $u \in \mathcal{U}$ kontrollerini parçalı sabit fonksiyonlar olarak almak işlemleri kolaylaştırmak için faydalıdır. Bu sebeple, genel kontrollere sahip sistemlerin birçok özelliği, önce parçalı sabit kontroller ile düşünülerek sonra yaklaşım yardımcı teoremi (Approximation Lemma) ile herhangi bir kontrol için genelleştirilebilir.

Yardımcı Teorem 2.32 (Yaklaşım Yardımcı Teoremi [2]) $\Sigma = (M, f, \mathcal{U}, h, N)$ bir kontrol sistemi olsun. $\{u_k\}$ dizisi, $[0, T]$ aralığında tanımlı kontrollerin bir dizisi olsun. Her $t \in [0, T]$ için, $u_k(t) \rightarrow u(t)$ ve $p(x_0, u, t)$ eğrisinin $[0, T]$ aralığında tanımlı olduğunu varsayalım. O takdirde, yeteri kadar büyük k için, $p(x_0, u_k, t)$ tanımlıdır. Ayrıca,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(x_0, u_k, t) = p(x_0, u, t)$$

olur.

Tanım 2.33 $\Sigma = (M, f, \mathcal{U}, h, N)$ sisteminin uygun bir u kontrolü ve $x_0 \in M$ başlangıç noktası için, $p(x_0, u, t)$ çözümünün h çıkış fonksiyonu altındaki görüntüsü

$$h(p(x_0, u, t)) = \sigma(x_0, u, t)$$

olmak üzere, $t \rightarrow \sigma(x_0, u, t)$ eğrisine x_0 başlangıç noktası ve u girdisine karşılık gelen çıktı denir. $h(p(x_0, u, t))$ bileşkesine de girdi-çıkı tasviri denir.

2.3.1.1 Kontrol Sisteminin Bazı Özellikleri

Kontrol sistemi üzerinde uygun bir teoriyi kurabilmek için gerekli özellikler aşağıdaki gibi açıklanmıştır:

- Analitiklik: Bir $\Sigma = (M, f, \mathcal{U}, h, N)$ kontrol sistemi için eğer;
 - a) M durum uzayı reel analitik manifold,
 - b) Sistemin tüm vektör alanları reel analitik,
 - c) N çıkış uzayı reel analitik manifold,
 - d) $h: M \rightarrow N$ çıkış tasviri reel analitik
 şartları sağlanıyor ise, sisteme analiktir denir.
- Tamlık ve ileri tamlık: Bir kontrol sistemindeki tüm vektör alanları tam ise, sisteme tamdır, denir. Yani, vektör alanlarına ait integral eğrilerinin tüm negatif ve pozitif zamanlarda tanımlı olmasıdır. Eğer bir sistem tam ise, parçalı sabit kontrollere karşılık gelen integral eğrileri her yerde tanımlıdır. Bu durum, daha genel kontrollere karşılık gelen integral eğrileri için geçerli değildir.

Tamlıktan daha zayıf bir özellik olan ileri tamlık ise, vektör alanlarına ait integral eğrilerinin tüm negatif olmayan değerlerde tanımlı olmasıdır. Böyle vektör alanlarına sahip sistemlere ileri tamdır, denir.
- Simetriklik: Bir kontrol sistemine ait her X vektör alanı için $-X$ vektör alanı da sisteme ait ise sisteme simetrik, denir. Simetri özelliğinden daha güçlü bir ifade ise aynı yolla simetrik olma durumudur. Σ_1 ve Σ_2 iki farklı kontrol sistemi olmak üzere, her $u \in \mathcal{U}$ için sırasıyla bu sistemlere ait iki vektör alanı X^u ve Y^u olsun. Eğer, her $u \in \mathcal{U}$ için, $X^v = -X^u$ ve $Y^v = -Y^u$ olacak şekilde, $v \in \mathcal{U}$ kontrolü var ise, Σ_1 ve Σ_2 sistemlerine aynı yolla simetrikler, denir.

- Ulaşılabilirlik özelliği: Bir kontrol sisteminin her x_0 başlangıç durumu için x_0 'dan sistemin integral eğrileri ile ulaşılabilen noktaların kümesinin içi boştan farklı ise, sisteme ulaşılabilirlik özelliğine sahiptir denir [20].

2.3.2 Ayırdedilemezlik ve Gözlenebilirlik

Σ ve Σ' aynı $\mathcal{U}$ kontrol sınıfına ve aynı N çıkış uzayına sahip iki kontrol sistemi ve M ve M' de sırasıyla verilen sistemlerin durum uzayları olsunlar.

Tanım 2.34 $x \in M$ ve $x' \in M'$ iki durumu, eğer aynı girdi-çıkı tasvirini meydana getiriyor ise, yani; her $u \in \mathcal{U}$ ve her t için,

$$\sigma(x, u, t) = \sigma'(x', u, t)$$

$$h(p(x, u, t)) = h'(p'(x', u, t))$$

oluyorsa, bu iki duruma ayırdedilemezdir, denir. Özel olarak, x ve x' aynı Σ sistemine ait ise, bu tanım yine geçerlidir [2].

Tanım 2.35 Σ sisteminde ayırdedilemez olan iki farklı x ve x' durumu yoksa, sisteme gözlenebilirdir, denir. Yani; sistemde birbirinden ayırdedilemez hiçbir nokta bulunmaz ise; sistem gözlenebilirdir [2].

Aşağıdaki yardımcı teorem ayırdedilemezlik ile ilgili önemli özellikleri içerdiğinden, ilerideki teorem ispatlarında kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 2.36 [2] Σ sistemi analitik veya tam ve simetrik olsun. Bu durumda;

- Ayırdedilemezlik Σ 'nin durumları arasında bir denklik bağıntısı olur.
- M' 'nin ayırdedilemez nokta çiftlerinin oluşturduğu küme kapalı bir kümedir.
- X sistemin bir vektör alanı olmak üzere, eğer x ve y iki ayırdedilemez nokta ise, her t reel sayısı için $X_t(x)$ ve $X_t(y)$ noktaları da ayırdedilemezdir.

Minimal gerçeklemenin varlığı ile ilgili teoremlere geçmeden önce sistemlerin denkliği tanımını vermek gerekir.

Tanım 2.37 Aynı kontrol sınıfına ve aynı çıkış uzayına sahip Σ_1 ve Σ_2 sistemleri verilsin. Eğer Σ_1 'in her x_1 durumu için Σ_2 'de x_1 'den ayırdedilemez bir x_2 durumu var ise, Σ_1 ve Σ_2 sistemlerine güçlü bir şekilde denktirler, denir [2].

2.3.3 Minimal Gerçeklemenin Oluşturulması

Aşağıdaki teorem, bir sistemin minimal gerçeklemesinin oluşturulması için kullanılan temel teoremdir. Yani; gözlenebilirliği bilinmeyen bir sistemden yola çıkılarak, bu sisteme güçlü bir şekilde denk olan ve gözlenebilir bir sistem elde edilişi ve bunların hangi koşullar altında sağlandığı bu teorem yardımı ile ortaya konulmuştur.

Teorem 2.38 [2]: M durum uzayı bağlantılı olmak üzere, $\Sigma = (M, f, \mathcal{U}, h, N)$ sistemi göz önüne alınsın. Σ nın simetrik ve tam veya reel analitik olduğu varsayılınsın. Ayrıca, Σ ulaşılabilirlik özelliğine sahip olsun. Bu durumda, Σ sistemine güçlü bir şekilde denk olan, gözlenebilir bir $\Sigma' = (M', f', \mathcal{U}, h', N)$ sistemi vardır. Ayrıca, Σ sisteminden yola çıkılarak elde edilen yeni Σ' sistemi, ilk sistem ile aynı özellikleri taşır. Yani; durum uzayı bağlantılı ve ulaşılabilirlik özelliğine sahiptir. Eğer Σ simetrik ve tamsa veya reel analitik ise, Σ' de bu özellikleri ilk sistemden alır.

Böylece, bu teoremle gözlenebilirliğini bilmediğimiz Σ sistemine denk ve gözlenebilir bir Σ' sisteminin varlığı garanti edilir. Teoremin ispatının nasıl yapıldığı aşağıda özetlenmektedir.

İspat: Bu teoremin ispatında öncelikle ayırdedilemezlik bağıntısı ile denk noktaların kümesi R belirlenerek, bu kümenin M 'de kapalı ve düzenli (regüler) olduğu gösterilmiştir. [21] ve [22]'den bilindiği gibi bir M manifoldunun bir R alt kümesi verildiğinde, üzerindeki bölüm topolojisi ile M/R bölüm uzayı $\pi: M \rightarrow M/R$ kanonik izdüşüm tasviri bir batırma tasviri(submersion) olacak şekilde bir diferansiyellenebilir yapıya sahip ise, R kümesine regüler denir. Burada, batırma tasviri sürekli, C^∞ ve diferansiyeli $d\pi: T_x M \rightarrow T_{\pi(x)}(M/R)$ her $x \in M$ de örten bir tasvirdir. π 'nin bir batırma tasviri olduğu ve böyle bir diferansiyellenebilir yapının tek olduğu gösterilmiştir [21] ve [22].

R 'nin regülerliği M/R homojen uzayının oluşmasını sağlar. Bu homojen uzay, yeni gözlenebilir sistemin durum uzayı M' olarak alınır.

Σ' sisteminin dinamiği ise, Σ sistemin dinamiğinden diferansiyelle elde edilir. $x \in M$, $u \in \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda,

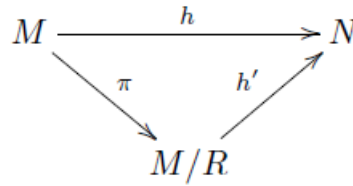
$$\pi: M \rightarrow M/R$$

$$d\pi: T_x M \rightarrow T_{\pi(x)}(M/R)$$

$$f(x, u) \rightarrow d\pi(f(x, u)) = f'(\pi(x), u)$$

dönüşümleri elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden, $f(x, u) \in T_x M$ ve $d\pi(f(x, u)) \in T_{\pi(x)}(M')$ olduğu aşıkardır ve M' manifoldunun teğet uzayının elemanı $f'(\pi(x), u)$ şeklindedir. Öyleki, bir $(x, x') \in R$ alındığında, $d\pi(f(x, u)) = d\pi(f(x', u))$ dir. Dolayısıyla, meydana gelen iki integral eğrisinin ve böylece $t = 0$ 'daki teğet vektörlerinin eşit olduğu anlamına gelir. Böylece, f' dinamiğinin iyi tanımlı olduğu söylenebilir. Dinamikteki vektör alanları ise, her $x \in M$, $u \in \mathcal{U}$ için, $f'(x, u)$ şeklinde C^∞ vektör alanları olarak tanımlanır. Ayrıca, Σ reel analitik ise bu vektör alanları da reel analitiktir.

Çıkış uzayı N aynı olduğundan $h': M' \rightarrow N$ çıkış tasvirinin oluşturulması incelenirse, π kanonik izdüşüm tasviri göz önüne alınarak, Şekil 2.8 deki diyagramdan $h' \circ \pi = h$ bileşkesi yazılabilir. $M' = M/R$ bölüm topolojisine sahip olduğundan h tasvirinin sürekliliği h' tasvirinin sürekliliğini de gerektirir. Ayrıca, π bir batırma tasviri olduğundan h' tasviri de h gibi düzgün(smooth) bir tasvirdir. Özel olarak, Σ reel analitik ise, h' de reel analitiktir.



Şekil 2.8 Çıkış tasviri meydana getiren bileşke diyagramı

Böylece, $\Sigma' = (M', f', \mathcal{U}, h', N)$ sistemi ortaya çıkmış olur. Ayrıca, Σ için varsayılan tüm teknik özelliklere de sahiptir. Bunlara ek olarak, $\pi: M \rightarrow M'$ tasviri sürekli ve örten olduğundan, M bağlantılı alındığı zaman, M' de bağlantılı olur.

Kanonik izdüşüm tasviri π , her $x \in M$ için $X: x \rightarrow f(x, u)$ vektör alanlarının integral eğrilerini, her $x' \in M'$ için, $X': x' \rightarrow f'(x', u)$ vektör alanlarının integral eğrilerine dönüştürür. Buradan da, eğer Σ tam ise, Σ' sisteminin de tam olduğu söylenebilir.

Ayrıca, her parçalı sabit u kontrolü için,

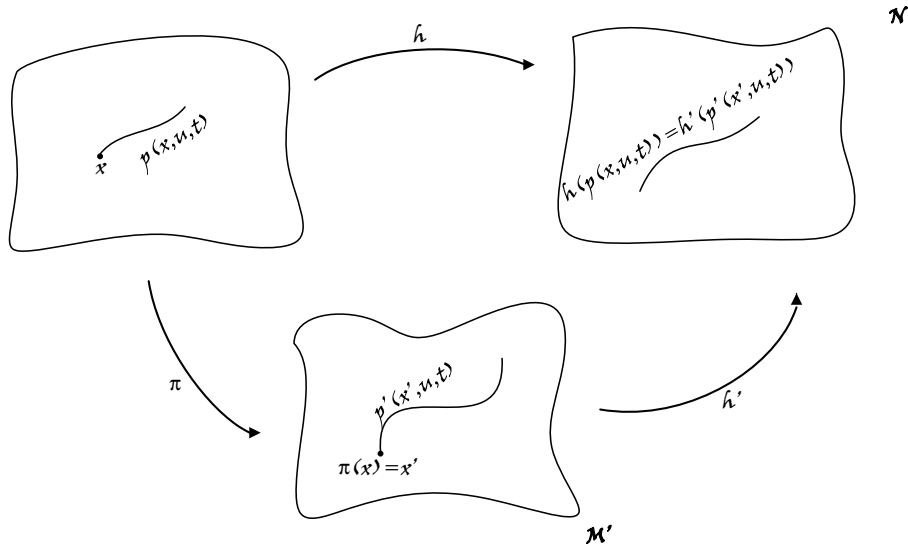
$$\pi(p(x, u, t)) = p'(\pi(x), u, t) \quad (2.2)$$

eşitliği yazılabilir. Çünkü, eşitliğin sol tarafının tanımlı olduğu durumda, sağ taraf da tanımlı olup bunlar birbirine eşittir. Bu sonuç, yaklaşım yardımcı teoremi ile herhangi bir kontrol için genelleştirilebilir.

Ulaşılabilirlik özelliği gözönüne alındığında, π açık kümeleri açık kümelere tasvir ettiğinden dolayı, bu özelliğin de Σ sisteminden taşındığı söylenebilir. Ayrıca, $h' \circ \pi = h$, $\pi(x) = x'$ olmak üzere ve (2.2) eşitliği kullanılarak, her $u \in \mathcal{U}$ için,

$$\begin{aligned}\sigma(x, u, t) &= h(p(x, u, t)) \\ &= h'\pi(p(x, u, t)) \\ &= h'p'(\pi(x), u, t) \\ &= h'(p'(x', u, t)) \\ &= \sigma'(x', u, t)\end{aligned}$$

elde edilir. (Bknz Şekil 2.9) Burada, ilk terim tanımlı olduğu zaman son terim de tanımlı olur. Böylece, her $x \in M$ için x ve $\pi(x)$ ayırdedilemezdirler. Sonuç olarak, Σ ve Σ' güçlü bir şekilde denk olurlar.



Şekil 2.9 Çıkış fonksiyonu ile görüntülerin oluşumu

Son olarak, yeni oluşturulan Σ' sisteminin gözlenebilir olduğunu göstermek gerekir. Öncelikle, $\pi: M \rightarrow M'$ olmak üzere, $x, x' \in M$ için, $\pi(x), \pi(x') \in M'$ elemanları ayırdedilemez, yani; $\pi(x) \sim \pi(x')$ olsunlar. Amaç; x ve x' elemanlarının da ayırdedilemez olduğunu göstererek, $\pi(x) = \pi(x')$ olduğuna ulaşmaktır. Yani; M' manifoldunda ayırdedilemez eleman olmadığını göstermektir.

Şimdi, $x \sim \pi(x)$ ve $\pi(x) \sim \pi(x')$ olduğundan, $x \sim \pi(x')$ olduğu söylenebilir. Diğer taraftan $x \sim \pi(x')$ ve $\pi(x') \sim x'$ olduğundan, $x \sim x'$ olduğu söylenebilir. Yani; istenilen $\pi(x) = \pi(x')$ eşitliği elde edilmiş olur. $\oplus$

Sussmann'ın [2]'deki çalışmasında bu teorem üzerindeki varsayımların ne kadarının kaldırılabilceği de incelenmiştir. Öncelikle M durum uzayının bağlantılılığı kaldırılabilir. Bu durumda, ayırdedilemezlik yine bir kapalı denklik bağıntısı olur. Kısaca, manifoldun bağlantılı bileşenlerinin farklı boyutlara sahip olduğu durumda, durum uzayının bağlantılı olması varsayımı olmadan da bu temel teorem geçerli olur. İkinci olarak, ulaşılabilirlik özelliği kaldırılmak istenirse, M durum uzayı altmanifoldların ayrık bir birleşimine ayrışır. Böylece, M durum uzayından altmanifoldları açık olan yeni bir diferansiyellenebilir yapı oluşturulabilir. Bu yolla bağlantılı bileşenleri tam olarak bu altmanifoldlar olan $\hat{M}$ manifoldu elde edilir. Buradan, durumu uzayı $\hat{M}$ manifoldu olan $\hat{\Sigma}$ sistemi oluşturulabilir. Bu sistemin dinamiği, Σ sisteminin dinamiği ile aynı olduğu düşünülebilir. Fakat, bu durumda minimal gerçekleştirme ile oluşturulacak Σ' sisteminin durum uzayı daha önce yapıldığı gibi bölüm uzayı ile elde edilemez. Bunun için farklı ara işlemlere ihtiyaç duyulabilir.

Tez çalışmasının ilk orijinal kısmını oluşturan minimal gerçekleştirme, afin kontrol sistemleri üzerinde incelendiğinden sıradaki başlıkta bu sistemler tanıtılmaktadır.

2.4 Lie Grupları Üzerinde Afin Kontrol Sistemleri

G bağlantılı bir Lie grubu, $\chi(G)$ kümesi G üzerindeki tüm düzgün vektör alanlarının kümesi ve $\mathfrak{g}$ ise G Lie grubunun Lie cebiri, yani; G üzerindeki tüm sol invaryant vektör alanlarının kümesi olsun.

2.4.1 Afin Grup

G üzerindeki tüm otomorfizmaların kümesi $Aut(G)$ olmak üzere, G 'nin afin grubu $Af(G)$ ile gösterilir ve $Aut(G)$ ile G 'nin yarı-direk çarpımına eşittir. Yani;

$$Af(G) = Aut(G) \times_s G$$

şeklindedir [23].

$(\phi, g) \in Af(G)$ olmak üzere, $Af(G)$ grubu üzerindeki çarpma işlemi

$$(\phi_1, g_1) \cdot (\phi_2, g_2) = (\phi_1 \circ \phi_2, g_1 \phi_1(g_2))$$

şeklindedir. Id elemanı $Aut(G)$ nin birim elemanı ve e elemanı da G nin birim elemanı olmak üzere, (Id, e) , $Af(G)$ grubunun birim elemanıdır.

Herhangi bir (ϕ, g) elemanının tersi ise $(\phi^{-1}, \phi^{-1}(g))$ şeklindedir. Burada, sırasıyla $g \rightarrow (Id, g)$ tasviri G grubunu ve $\phi \rightarrow (\phi, e)$ tasviri de $Aut(G)$ grubunu $Af(G)$ grubu içine gömerler. Yani; bu tasvirler birer gömme (embedding) tasviri olarak grup yapısını koruyan birebir tasvirlerdir. Böylece, G ve $Aut(G)$ grupları $Af(G)$ nin altgruplarıdır. Ayrıca, kapalı altgrup teoreminin bir sonucu olarak, G ve $Aut(G)$ 'nin $Af(G)$ 'nin birer kapalı altgrupları oldukları söylenebilir [4], [6], [24].

$\mathfrak{g}$ Lie cebirinin otomorfizm grubunu $Aut(\mathfrak{g})$ ile gösterelim. Eğer G basit bağlantılı bir Lie grubu ise, $Aut(\mathfrak{g})$ ile $Aut(G)$ grupları izomorfiktirler [25]. Ayrıca, $Aut(\mathfrak{g})$ bir Lie grubu olup, Lie cebiri ise $\mathfrak{g}$ 'nin türev cebirini temsil eden $Der(\mathfrak{g})$ dir. $Aut(G)$ 'nin Lie cebiri $aut(G)$ olmak üzere, bağlantılı bir G Lie grubu için $aut(G)$ Lie cebiri $Der(\mathfrak{g})$ 'nin bir altcebiridir. Eğer G basit bağlantılı ise, $aut(G)$ Lie cebiri $Der(\mathfrak{g})$ türev cebirine eşittir [12], [25]. Öyle ki, $Aut(G)$ 'nin herhangi bir elemanı olan ϕ otomorfizmasını, birimdeki diferansiyeli $d\phi|_e$ elemanına taşıyan bir φ izomorfizması vardır. $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin herhangi bir otomorfizması, G Lie grubunun bir otomorfizmasına denk olduğu için, $Aut(\mathfrak{g})$ ile $Aut(G)$ izomorfik olurlar. Dolayısıyla, $Aut(G)$ nin Lie cebiri $Der(\mathfrak{g})$ olur.

Bu durumda afin grup $Af(G)$ 'nin Lie cebiri, $Der(\mathfrak{g})$ ile $\mathfrak{g}$ 'nin yarı-direk çarpımına eşittir. $af(G)$ Lie cebiri temsil etmek üzere,

$$af(G) = Der(\mathfrak{g}) \times_s \mathfrak{g}$$

yazılır. Lie cebirini oluşturan Lie parantezi ise, $D_1, D_2 \in Der(\mathfrak{g})$ ve $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$[(D_1, X_1), (D_2, X_2)] = ([D_1, D_2], D_1 X_2 - D_2 X_1 + [X_1, X_2]).$$

2.4.2 Afin Kontrol Sistemleri

Bir $G \subset Af(G)$ Lie grubu üzerinde bir afin kontrol sistemi $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, N)$ şeklinde bir dördlüdür. Burada, $\mathcal{D}$ sistemin dinamiğini temsil eder. Yani, $\Sigma = (M, f, \mathcal{U}, h, N)$ beşli kontrol sisteminde f ve $\mathcal{U}$ ile ifade edilen vektör alanları ve kontrol parametreleri bir başlık altında toplanmıştır. Afin kontrol sistemine ait $\mathcal{D}$ dinamiğini belirleyen diferansiyel denklemler ailesi,

$$\dot{g}(t) = (D + X)(g(t)) + \sum_{j=1}^k u_j(t) (D^j + Y^j)(g(t)) \quad (2.3)$$

şeklinde dir. Burada, $g \in G$ ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ input fonksiyonları $\mathcal{U}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ 'nin elemanları $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ şeklinde sınırlandırılmamış parçalı sabit fonksiyonlardır. $\mathcal{D}$ dinamiğindeki herhangi bir F afin vektör alanı; $D \in Der(\mathfrak{g})$ ve $X \in \mathfrak{g}$ olmak üzere $F = D + X$ şeklinde ifade edilebilir. Buradaki $Der(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin türev cebirini temsil etmek üzere;

$$Der(\mathfrak{g}) = \partial \mathfrak{g} = \{D \in End(\mathfrak{g}) | D[X, Y] = [D(X), Y] + [X, (D(Y))], \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece, (2.3) denkleminde $X, Y^1, \dots, Y^k \in \mathfrak{g}$ ve $D, D^1, \dots, D^k \in Der(\mathfrak{g})$ dir.

Afin kontrol sistemleri, kontrol sistemleri içinde en geniş bir sınıfı temsil eder. Öyleki, afin sistem bir Abelyen Lie grubu üzerinde düşünülürse, Lie cebiri elemanlarının Lie parantezleri sıfır olduğundan afin sistem lineer kontrol sistemine dönüşmüş olur. Benzer şekilde, bir Lie grubu üzerindeki afin kontrol sisteminde $X = 0$ ve $Y^1 = Y^2 = \dots = Y^k = 0$ alındığında bilineer kontrol sistemi elde edilir.

BAĞLANTILI LIE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR MİNİMAL GERÇEKLEME

Bu bölüm, tezin özgün kısımlarından ilkidir ve Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinde bir minimal gerçekleştirme verilmektedir [26].

G bağlantılı ve basit bağlantılı bir Lie grubu, $\chi(G)$ kümesi G üzerindeki tüm düzgün vektör alanlarının kümesi ve $\mathfrak{g}$ ise G Lie grubunun Lie cebiri, yani; G üzerindeki tüm sol invaryant vektör alanlarının kümesi olsun. K kümesi G 'nin kapalı bir alt kümesi olmak üzere, $\Sigma = (G, \mathcal{D}, \pi_K, G/K)$ afin kontrol sistemini ele alalım. Burada, $\mathcal{D}$ dinamiği vektör alanlarının bir kümesi olup, aşağıdaki diferansiyel denklem ailesi tarafından üretilir:

$$\dot{g}(t) = (D + X)(g(t)) + \sum_{j=1}^k u_j(t) (D^j + Y^j)(g(t))$$

$$y = \pi_K(g) \in G/K$$

Burada, $g \in G$ ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ kontrol fonksiyonları $\mathcal{U}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ 'nin elemanları $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ şeklinde sınırlandırılmamış parçalı sabit fonksiyonlardır.

$X, Y^1, \dots, Y^k \in \mathfrak{g}$ ve

$D, D^1, \dots, D^k \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ dir. Böylece, Σ sisteminin dinamiği;

$$\mathcal{D} = \{(D + X) + \sum_{j=1}^k u_j (D^j + Y^j) \mid u \in \mathbb{R}^k\}$$

şeklinde G üzerindeki tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının Lie cebirinin bir alt kümesidir.

K kümesi G' 'nin kapalı bir alt kümesi olarak aynı işlemle alt gruptur ve kapalı alt grup teoreminden dolayı da G' 'nin Lie alt grubudur [11]. Bu durumda, K ile birlikte G/K homojen uzayını oluşturabiliriz. Ayrıca, $\pi_K: G \rightarrow G/K$ kanonik izdüşüm tasviri çıkış tasvirimizdir.

Σ sistemi ile global difeomorfizmaların sözde(pseudo) grubu;

$$G_\Sigma = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k \mid Z^j \in \mathcal{D}, t_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}\}$$

ve sözde-yarı (pseudo-semi) grubu;

$$S_\Sigma = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_k}^k \mid Z^j \in \mathcal{D}, t_j \geq 0, j \in \mathbb{N}\}$$

meydana gelir. Ayrıca, G içinde g durumunun yörüngesi (orbiti);

$$G_\Sigma(g) = \{\varphi(g) \mid g \in G, \forall \varphi \in G_\Sigma\}$$

ve pozitif yörüngesi;

$$S_\Sigma(g) = \{\varphi(g) \mid g \in G, \forall \varphi \in S_\Sigma\}$$

elde edilir. Burada, $S_\Sigma \subset G_\Sigma$ olduğu açıktır. Eğer Σ sistemi geçişli ise, her $g \in G$ için $G_\Sigma(g) = G$ olur. Ayrıca, S_Σ kümesine de ulaşılabilirlik kümesi denir [27].

Tanım 3.1 Afin Kontrol Sistemleri İçin Ayırdedilemezlik

Minimal gerçekleştirme elde etmek üzere oluşturduğumuz afin kontrol sistemi için ayırdedilemezlik tanımını verelim.

G Lie grubunun herhangi iki elemanı g_1, g_2 ve her $t \geq 0$ için,

$$\pi_K((D + X)_t(g_1)) = \pi_K((D + X)_t(g_2)),$$

eşitliği sağlanıyor ise, bu elemanlar ayırdedilemezdir, denir. g_1 ve g_2 nin ayırdedilemezlik denklik bağıntısıyla denk olduğunu göstermek için kısaca $g_1 \sim g_2$ yazılır. Burada, $(D + X)_t$ eğrisi, G üzerindeki $(D + X)$ sapan (drift) vektör alanının integral eğrisidir. π_K kanonik izdüşüm tasviri bir difeomorfizma olduğundan cebirsel işlemleri korur. Dolayısıyla, gözlenebilirlik özelliği bu sistem için sapan vektör kısmına bağlıdır.

Tanım 3.2 Afin Kontrol Sistemleri İçin Gözlenebilirlik

Σ kontrol sisteminin herhangi bir g_1 noktası için, eğer içerdiği tüm noktalar g_1 den ayırdedilemez olmayacak şekilde bir komşuluğu varsa, sisteme g_1 de yerel gözlenebilirdir denir. Eğer $g_1 \neq g_2$ şeklindeki tüm $g_2 \in G$ için,

$$\pi_K((D + X)_t(g_1)) \neq \pi_K((D + X)_t(g_2))$$

olacak şekilde $t \geq 0$ varsa, sisteme g_1 de gözlenebilirdir, denir. Eğer, sistem her $g \in G$ de gözlenebilir (yerel gözlenebilir) ise, gözlenebilirdir (yerel gözlenebilirdir), denir.

$\mathcal{D}$ dinamiğindeki her vektör alanı tam olup, $\gamma(t)$ eğrisi g Lie cebirinde bir diferansiyellenebilir eğri olmak üzere, herhangi bir vektör alanının akışı (flow) şöyle verilir [8], [28];

$$(D + X)_t(g) = D_t(g) \exp \gamma(t).$$

Bu eşitlikten yararlanarak, her $t \geq 0$ için, g_1 ve g_2 ayırdedilemez ise, $g_1 \sim g_2$ yazılır ve

$$\pi_K((D + X)_t(g_1)) = \pi_K((D + X)_t(g_2))$$

$$D_t(g_1) \exp \gamma(t) K = D_t(g_2) \exp \gamma(t) K$$

$$D_t(g_1)^{-1} D_t(g_1) \exp \gamma(t) K = D_t(g_1)^{-1} D_t(g_2) \exp \gamma(t) K$$

$$\exp \gamma(t) K = D_t(g_1)^{-1} D_t(g_2) \exp \gamma(t) K$$

$$\exp^{-1} \gamma(t) \exp \gamma(t) K = \exp^{-1} \gamma(t) D_t(g_1)^{-1} D_t(g_2) \exp \gamma(t) K$$

$$\exp^{-1} \gamma(t) D_t(g_1)^{-1} D_t(g_2) \exp \gamma(t) \in K$$

olur. $i_g: G \rightarrow G$ tasviri genel iç otomorfizma olmak üzere her $t \geq 0$ için,

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow i_{\exp^{-1} \gamma(t)}(D_t(g_1^{-1} g_2)) \in K$$

elde ederiz. Buradan, $g_1 = e$ ve $g_2 = g$ alarak birimden ayırdedilemez elemanları

$$e \sim g \Leftrightarrow i_{\exp^{-1} \gamma(t)}(D_t(g)) \in K$$

şeklinde tanımlayabiliriz. İç otomorfizmaya benzer şekilde, her $t \geq 0$ da sabit bir t değeri için, $\delta_{\exp \gamma(t)}$ tasviri,

$$\delta_{\exp \gamma(t)}: G \rightarrow G$$

$$g \rightarrow \delta_{\exp \gamma(t)}(g) = \exp^{-1} \gamma(t) g \exp \gamma(t)$$

ile tanımlanmak üzere, $\phi_K: G \rightarrow G$ tasvirini,

$$\begin{aligned}\phi_K(g) &= \delta_{\exp \gamma(t)} \circ D_t(g) \\ &= \exp^{-1} \gamma(t) D_t(g) \exp \gamma(t)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, ϕ_K tasviri, herhangi bir $X \in \mathfrak{g}$ ve

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = tX$$

şeklinde tanımlı γ eğrisi için, $\exp \gamma(t) = \exp tX$ ve D_t akışı (flow) ile meydana gelen bir homomorfizmadır. Böylece birim eleman e 'den ayırdedilemez noktaların kümesini

$$I = \{g \in G \mid \phi_K(g) \in K, \forall t \geq 0\}$$

şeklinde elde etmiş olduk.

Yardımcı Teorem 3.3 ϕ_K tasviri t parametresine bağlı olmak üzere,

$I = \{g \in G \mid \phi_K(g) \in K, \forall t \geq 0\}$ kümesi, G 'nin bir normal Lie alt grubudur.

İspat: I kümesinin G Lie grubunun kapalı bir alt grubu olduğunu gösterirsek, kapalı alt grup teoreminden [11], I 'nin bir Lie alt grubu olduğunu söyleyebiliriz.

Öncelikle, I kümesinin G 'nin bir alt grubu olduğunu gösterelim.

Bunun için, herhangi $g_1, g_2 \in I$ alalım. I 'nin tanımından $\phi_K(g_1), \phi_K(g_2) \in K$ yazabiliriz. Ayrıca ϕ_K nin tanımından, $\phi_{-K}(g_2) \in K$ olur.

$$\phi_K(g_1)\phi_{-K}(g_2) = \phi_K(g_1)\phi_K^{-1}(g_2) = \phi_K(g_1g_2^{-1}) \quad (3.1)$$

Burada, (3.1) eşitliğinin sol tarafı K 'nin elemanı olup sağ tarafı da K 'nin elemanı olacağından $g_1g_2^{-1} \in I$ ve böylece I bir altgrup olur.

I 'nin kapalılığının ispatı için ise, I da her $t \in \mathbb{R}$ için, $g_n \rightarrow g$ şeklinde herhangi bir $\{g_n\}$ dizisi alalım. Dizi elemanları I da olduğu için, yani $g_n \in I$ olduğundan $\phi_K(g_n) \in K$ 'dir. ϕ_K 'nin sürekliliğinden, $n \rightarrow \infty$ iken $\phi_K(g_n) \rightarrow \phi_K(g)$ olup, $\phi_K(g) \in K$ bulunur. Buradan ise, $g \in I$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, I kapalıdır.

Kapalı altgrup teoreminden [11], bir Lie grubunun kapalı alt grubu Lie grubu olacağından, I 'nin bir Lie alt grubu olduğunu söyleyebiliriz.

I 'nın normal olduğunu göstermek için, herhangi bir $l \in I$ ve herhangi bir $g \in G$ alalım.

ϕ_K homomorfizma olduğundan,

$$\begin{aligned}\phi_K(glg^{-1}) &= \phi_K(g)\phi_K(l)\phi_{-K}(g) \\ &= \exp^{-1}\gamma(t)D_t(glg^{-1})\exp\gamma(t)\end{aligned}$$

yazabiliriz. I , birim elemandan ayırdedilemeyen noktaların kümesi olduğuna göre,

$$\pi_K((D + X)_t(l)) = \pi_K((D + X)_t(e))$$

dir ve

$$\begin{aligned}\pi_K(\phi_K(glg^{-1})) &= \pi_K(\phi_K(g))\pi_K(\phi_K(l))\pi_K(\phi_K(g^{-1})) \\ &= \pi_K(\phi_K(g))\pi_K(\phi_K(e))\pi_K(\phi_{-K}(g)) \\ &= \pi_K(\phi_K(g))e_{G/K}\pi_K(\phi_{-K}(g)) \\ &= e_{G/K}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\phi_K(glg^{-1}) \in K \text{ ve } glg^{-1} \in I$$

olup I alt grubu, G 'nin kapalı normal Lie alt grubudur.

I kümesinin G Lie grubunun normal bir Lie alt grubu olduğunu gösterdiğimiz için G/I 'nin bir Lie grubu olduğunu ve G 'den G/I 'ya π Lie grup homomorfizması olduğunu söyleyebiliriz [13]. Buradan ise aşağıdaki diyagramı oluşturabiliriz:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_K} & G/K \\ & \searrow \pi & \nearrow \pi_K^* \\ & G/I & \end{array}$$

Şekil 3.1 Çıkış tasvirinin oluşumunu gösteren diyagram

Önerme 3.4 $\Sigma = (G, \mathcal{D}, \pi_K, G/K)$ afin kontrol sistemi için bir minimal gerçekleştirme, $\Sigma^* = (G^*, \mathcal{D}^*, \pi_K^*, G/K)$ şeklinde geçişli ve gözlenebilir bir sistemdir. Öyle ki $\pi: G \rightarrow G^*$ tasviri, her $Z \in \mathcal{D}$ elemanı π tasvirinin diferansiyeli $d\pi$ ile belirlenecek şekilde bir batırma tasviridir. Ayrıca $d\pi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^*$ ve $\pi_K^* \circ \pi = \pi_K$ olur.

Teorem 3.5 $\Sigma = (G, \mathcal{D}, \pi_K, G/K)$ geçişli bir afin kontrol sistemi olsun. Bu durumda $u \in \mathcal{U}$ kontrolleri ve dinamiği

$$(\dot{g}I) = d\pi \left((D + X) + \sum_{j=1}^k u_j (D^j + Y^j) \right) (gI)$$

$$y^* = \pi_K^*(gI)$$

diferansiyel denklemleri tarafından belirlenen $\Sigma^* = (G/I, d\pi(\mathcal{D}), \pi_K^*, G/K)$ sistemi, Σ sistemi için bir minimal gereklemedir.

İspat: Σ sisteminin geçişli olduğu varsayımından, her $g \in G$ için $G_\Sigma(g) = G$ olup, birim eleman için de $G = G_\Sigma(e)$ yazılabilir. G/I grubunun birim elemanı I olduğundan, $G_{\Sigma^*}(I) = G/I$ olup, Σ^* sisteminin de geçişli olduğu söylenebilir.

Σ^* sisteminin birimden ayırdedilemez noktalarının kümesi I^* ile temsil edilmek üzere, $I^* = I$ dır, yani; bu küme birimden ibaret olduğundan Σ^* gözlenebilir.

$X \in \mathfrak{g}$ ve I kümesinin Lie cebiri $T_e I = L(I)$ olmak üzere,

$$d\pi(D + X) = d\pi(D) + (X + L(I))$$

vektör alanı, Σ^* sistemi için sapan vektör alanı olur. Böylece, Σ^* sistemi, Σ sistemi için bir minimal gereklemedir.

rnek 3.6 Basit bağlantılı 3-boyutlu Heisenberg Lie grubunu ve onun Lie cebirini göz önüne alalım.

$$H(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad h(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ ve}$$

$$h(3) = \text{span}_{L.A.} \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$[X, Y] = XY - YX = Z \quad \text{şeklinde tanımlı olsun.} \quad K = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesini $H(3)$ grubunun bir kapalı altgrubu olarak alalım.

$H(3)$ Lie grubunun türev cebiri $Der(H(3))$ ile temsil edilmek üzere; cebir elemanları,

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\Sigma = (H(3), \mathcal{D}, \pi_K, H(3)/K)$ afin kontrol sisteminin dinamiğinin sapan vektör alanı $(D_6 + X)$ olsun. Sistemin birimden ayırdedilemez noktalarının kümesi I nın Lie cebiri $L(I)$ yı hesaplamak için, Isidori tarafından verilen algoritmayı kullanalım [18], [10].

- Algoritmanın ilk işlemi olan $Ker \pi_K$ yı bulalım.

$$\pi_K: H(3) \rightarrow H(3)/K$$

$$g \rightarrow \pi_K(g) = gK$$

$$Ker \pi_K = \{g \in G \mid \pi_K(g) = K\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

- $Ker \pi_K$ 'nın Lie cebiri $L(K)$ olmak üzere, $L(K)$ için bir baz seçelim. $\mathfrak{B} = \{Z\}$ olsun.
- Seçtiğimiz baz için dual baz bulalım. Bu durumda, dual baz

$$\mathfrak{B}^\perp = \{w_1 = X^*, w_2 = Y^*\} \text{ dir}$$

- $L(I)^\perp$ ve dolayısıyla $ad(X)(\beta^\perp)$ 'e ilişik tabanın bulunması için aşağıdaki işlemleri uygulayalım:

$$ad(X)(\beta^\perp) = \{ad^i(X)(w_j) : 0 \leq i \leq k^*, 1 \leq j \leq n - p\}$$

$$ad^0(X) = Id$$

$$ad(X)(w) = L_X(w)$$

$$ad^i(X)(w) = ad^{i-1}(ad(X)(w)), i \geq 1$$

$$L_X(w)(.) = \langle w, [X, .] \rangle$$

$$L(I) = geren(ad(X)(\beta^\perp))^\perp$$

Biz burada afin sistem için afin grup işlemini kullanacağız. Afin grup işlemi;

$$[(D_1, X_1), (D_2, X_2)] = ([D_1, D_2], D_1X_2 - D_2X_1 + [X_1, X_2])$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, bu tanımlı kullanmak için gerekli hesaplamaları yaparsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\begin{array}{lll}
[D_6, D_1] = -D_6 & [D_6, D_2] = 0 & [D_6, D_3] = D_5 \\
[D_6, D_4] = 0 & [D_6, D_5] = 0 & [D_6, D_6] = 0 \\
D_1X = X & D_1Y = 0 & D_1Z = Z \\
D_2X = 0 & D_2Y = X & D_2Z = 0 \\
D_3X = Y & D_3Y = 0 & D_3Z = 0 \\
D_4X = 0 & D_4Y = Y & D_4Z = Z \\
D_5X = Z & D_5Y = 0 & D_5Z = 0 \\
D_6X = 0 & D_6Y = Z & D_6Z = 0
\end{array}$$

Bu sonuçları kullanarak, sapan vektör alanı ile diğer tüm elemanların Lie parantezlerini aşağıdaki gibi buluruz:

$$\begin{array}{l}
[(D_6, X), (D_1, X)] = ([D_6, D_1], D_6X - D_1X + [X, X]) = (-D_6, -X) \\
[(D_6, X), (D_2, X)] = ([D_6, D_2], D_6X - D_2X + [X, X]) = 0 \\
[(D_6, X), (D_3, X)] = ([D_6, D_3], D_6X - D_3X + [X, X]) = (D_5, -Y) \\
[(D_6, X), (D_4, X)] = ([D_6, D_4], D_6X - D_4X + [X, X]) = 0 \\
[(D_6, X), (D_5, X)] = ([D_6, D_5], D_6X - D_5X + [X, X]) = -Z \\
[(D_6, X), (D_6, X)] = ([D_6, D_6], D_6X - D_6X + [X, X]) = 0 \\
[(D_6, X), (D_1, Y)] = ([D_6, D_1], D_6Y - D_1X + [X, Y]) = (-D_6, 2Z - X) \\
[(D_6, X), (D_2, Y)] = ([D_6, D_2], D_6Y - D_2X + [X, Y]) = 2Z \\
[(D_6, X), (D_3, Y)] = ([D_6, D_3], D_6Y - D_3X + [X, Y]) = (D_5, 2Z - Y) \\
[(D_6, X), (D_4, Y)] = ([D_6, D_4], D_6Y - D_4X + [X, Y]) = 2Z \\
[(D_6, X), (D_5, Y)] = ([D_6, D_5], D_6Y - D_5X + [X, Y]) = Z \\
[(D_6, X), (D_6, Y)] = ([D_6, D_6], D_6Y - D_6X + [X, Y]) = 0 \\
[(D_6, X), (D_1, Z)] = ([D_6, D_1], D_6Z - D_1X + [X, Z]) = (-D_6, -X) \\
[(D_6, X), (D_2, Z)] = ([D_6, D_2], D_6Z - D_2X + [X, Z]) = 0
\end{array}$$

$$[(D_6, X), (D_3, Z)] = ([D_6, D_3], D_6Z - D_3X + [X, Z]) = (D_5, -Y)$$

$$[(D_6, X), (D_4, Z)] = ([D_6, D_4], D_6Z - D_4X + [X, Z]) = 0$$

$$[(D_6, X), (D_5, Z)] = ([D_6, D_5], D_6Z - D_5X + [X, Z]) = -Z$$

$$[(D_6, X), (D_6, Z)] = ([D_6, D_6], D_6Z - D_6X + [X, Z]) = 0$$

Şimdi,

$$L_{(D_6, X)}(w)(.) = \langle w, [(D_6, X), .] \rangle$$

tanımını kullanarak, bulduğumuz sonuçlarda sıfırdan farklı olanları yerine koyarsak,

$$[(D_6, X), (-D_6, -X)] = 0$$

$$[(D_6, X), (D_5, -Y)] = -3Z$$

$$[(D_6, X), (0, -Z)] = 0$$

$$[(D_6, X), (-D_6, 2Z - X)] = 0$$

$$[(D_6, X), (D_5, 2Z - Y)] = Z$$

sonuçlarını elde ederiz. Böylece,

$$L_{(D_6, X)}(w)(.) = \langle w, Z \rangle,$$

$$L_{(D_6, X)}(w)(X^*) = \langle X^*, Z \rangle = 0,$$

$$L_{(D_6, X)}(w)(Y^*) = \langle Y^*, Z \rangle = 0 \text{ bulunur.}$$

I kümesinin Lie cebiri $L(I)$ ve $\text{Ker } \pi_K$ 'nin Lie cebiri $L(K)$ olmak üzere,

$$L(I) = \text{span}(L_{(D_6, X)}(\mathfrak{B}^*))^* = \text{span}(0)^* = L(K) \text{ elde edilir. Böylece, } I = \text{Ker } \pi_K = K$$

buluruz, yani bu sistem gözlenebilir değildir. Sonuç olarak, $\Sigma = (H(3), \mathcal{D}, \pi_K, H(3)/K)$ sistemi bir minimal gerçekleştirme meydana getirir.

BAĞLANTILI LIE GRUPLARI ÜZERİNDE LINEER KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR GÖZLENEBİLİRLİK KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, Matematiksel Kontrol Teoriye yapılan katkı ve tezin ikinci özgün kısmı olan, Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirlik problemine yeni bir yaklaşım olarak sonlu zaman bakış açısıyla yeni bir gözlenebilirlik karakterizasyonu yapıyoruz. Bu amaçla, öncelikle afin kontrol sistemleri ailesinin bir alt ailesi olan lineer kontrol sistemlerini kısaca tanıtıyoruz. Bölümün ikinci kısmında, lineer kontrol sistemleri için bir ayırdedilemezlik karakterizasyonu olarak, hemen hemen ayırdedilemezlik ve bununla birlikte hemen hemen gözlenebilirlik kavramlarını veriyoruz. Son kısımda ise, hemen hemen gözlenebilirlik karakterizasyonuna paralel olarak hemen hemen minimal gerçekleştirme tanımını veriyoruz.

4.1 Bağlantılı Lie Grupları Üzerindeki Lineer Kontrol Sistemlerinin Hemen Hemen Gözlenebilirliği

G bağlantılı bir Lie grubu, $\chi(G)$ kümesi G üzerindeki tüm düzgün vektör alanlarının kümesi ve $\mathfrak{g}$ ise G Lie grubunun Lie cebiri, yani; G üzerindeki tüm sol invaryant vektör alanlarının kümesi olsun. G bağlantılı Lie grubu üzerinde lineer kontrol sistemi $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, H)$ şeklinde bir dördü ile ifade edilir. Burada H çıkış uzayı bir Lie grubu olup, h çıkış fonksiyonu $h: G \rightarrow H$ şeklinde bir diferansiyellenebilir fonksiyondur.

$\mathcal{D}$ dinamiği ise aşağıdaki diferansiyel denklem ailesi tarafından üretilen vektör alanlarının kümesidir:

$$\dot{g}(t) = \mathcal{X}(g(t)) + \sum_{j=1}^k u_j(t) Y^j(g(t))$$

$$y = h(g) \in H$$

Burada ise, $\mathcal{X}$ sapan vektörü bir lineer vektör alanı olup, sisteme adını veren bu vektör alanıdır. $\mathcal{X}$ 'in lineer vektör alanı olmasının anlamı, G üzerinde 1-parametrelili $\mathcal{X}_t$ otomorfizmalarını üretmesidir. Y^j ler ise sol invariant vektör alanlarıdır. $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathcal{U}$ kontrolleri parçalı sabit reel değerli fonksiyonlardır. Bu sistemlerde dinamik;

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathcal{X} + \sum_{j=1}^k u_j(Y^j) \mid u \in \mathbb{R}^k \right\}$$

şeklinde G üzerindeki tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının Lie cebirinin bir alt kümesidir.

Lineer kontrol sistemleri kontrol teoride uygulamaları açısından önemli bir sistem çeşitidir. Lie teorisinde lineer vektör alanları genellikle sonsuz küçük otomorfizma (infinitesimal automorphism) olarak tanımlanır. G üzerinde bir sonsuz küçük otomorfizma ise, integral eğrisi $\mathcal{X}_t$, G 'nin otomorfizmalarının bir 1-parametrelili alt grubu olan bir $\mathcal{X}$ vektör alanıdır. Yani; $\mathcal{X}_t$ grup işlemini koruyan bir difeomorfizmadır. Öyleki, her $g_1, g_2 \in G$ için,

$$\mathcal{X}_t(g_1 \cdot g_2) = \mathcal{X}_t(g_1)\mathcal{X}_t(g_2)$$

dir. Σ kontrol sistemi ile global difeomorfizmaların sözde (pseudo) grubu

$$G_\Sigma = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_r}^r \mid Z^j \in \mathcal{D}, t_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}\}$$

ve sözde-yarı (pseudo-semi) grubu

$$S_\Sigma = \{Z_{t_1}^1 \circ Z_{t_2}^2 \circ \dots \circ Z_{t_r}^r \mid Z^j \in \mathcal{D}, t_j \geq 0, j \in \mathbb{N}\}$$

meydana gelir. Ayrıca, G' 'de g durumunun yörüngesi (orbiti)

$$G_\Sigma(g) = \{\varphi(g) \mid g \in G, \forall \varphi(g) \in G_\Sigma\}$$

ve pozitif yörüngesi

$$S_{\Sigma}(g) = \{\varphi(g) | g \in G, \forall \varphi(g) \in S_{\Sigma}\}$$

elde edilir.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı üzerinde lineer kontrol sistemi $\Sigma = (\mathbb{R}^n, \mathcal{D}, C, \mathbb{R}^s)$ dördlüsü olarak kontrol sisteminde sıklıkla karşımıza çıkar [14]. Burada, $\mathcal{D}$ dinamiği, A, B ve C uygun mertebeden matrisler olmak üzere, aşağıdaki eşitliklerle belirlenir:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$h(x) = Cx = y \in \mathbb{R}^s$$

Lie grupları üzerinde lineer kontrol sistemleri, Öklid uzayı üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin genelleştirilmesidir.

Uygulamaları açısından önemli olacağı düşünülen, sonlu zaman ihmal ile gözlenebilirlik için aşağıdaki tanım verilmektedir.

Tanım 4.1 G Lie grubunun birbirinden farklı iki elemanı $g_1, g_2 \in G$ ve $F \subset \mathbb{R}$ ölçümü sıfır olan bir küme olsun. Eğer her $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\} - F)$ için,

$$h^{\circ}S_{\Sigma}(g_1) = h^{\circ}S_{\Sigma}(g_2)$$

eşitliği sağlanıyor ise, bu iki elemana sistemin hemen hemen ayırdedilemez noktaları denir. İki hemen hemen ayırdedilemez noktayı $g_1 \sim_a g_2$ şeklinde ifade edelim.

Başka bir deyişle; G Lie grubunun herhangi bir (g_1, g_2) eleman çifti, eğer $F \subset \mathbb{R}$ olacak şekilde, F ölçümü sıfır olan bir küme olmak üzere, her $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\} - F)$ ve her $\varphi_t \in S_{\Sigma}$ için,

$$g_1 \sim_a g_2 \leftrightarrow h^{\circ}\varphi_t(g_1) = h^{\circ}\varphi_t(g_2)$$

denkliği sağlanıyor ise, bu noktalar hemen hemen ayırdedilemezdirler.

Tanım 4.2 Bir Σ lineer kontrol sisteminin durum uzayı olan G Lie grubunun, bir g elemanı göz önüne alınsın. $F \subset \mathbb{R}$ ise ölçümü sıfır olan bir küme olsun. Eğer her $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\} - F)$ ve her $u \in U$ için,

$$h^{\circ}S_{\Sigma}(u) \neq h^{\circ}S_{\Sigma}(g)$$

olacak şekilde, g' 'nin bir U komşuluğu var ise, sisteme g noktasında yerel hemen hemen gözlenebilirdir, denir. Eğer bu tanım, G' 'nin tüm elemanları için doğru oluyor ise, sisteme yerel hemen hemen gözlenebilirdir, denir.

Tanım 4.3 Σ lineer kontrol sisteminin durum uzayı olan G Lie grubunun, bir g elemanı göz önüne alınsın. $F \subset \mathbb{R}$ ise ölçümü sıfır olan bir küme olsun. Eğer her $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\} - F)$ ve her $x \in G$ için,

$$h^\circ S_\Sigma(x) \neq h^\circ S_\Sigma(g)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, sisteme g noktasında hemen hemen gözlenebilirdir, denir.

Eğer bu tanım, G' 'nin tüm elemanları için doğru oluyor ise, sisteme hemen hemen gözlenebilirdir, denir.

Yukarıdaki tanımlarda kullanılan “hemen hemen” teriminin yerine, zaman parametresinde sonlu sayıda eleman çıkarıldığı için, “sonlu zamansız” terimi de kullanılabilir.

Sonuç 4.4 Genel olarak, hemen hemen gözlenebilirlik için yerel hemen hemen gözlenebilirlik bir gerek koşuldur.

Yardımcı Teorem 4.5 G ve H Lie grupları olmak üzere, $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, H)$ lineer kontrol sistemi üzerinde göz önüne alınan $\sim_a$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Lineer kontrol sistemlerinde tüm vektör alanları tamdır ve böylece klasik ayırdedilemezlik bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu biliyoruz [2]. Şimdi, hemen hemen ayırdedilemezlik bağıntısının da bir denklik bağıntısı olduğunu göstermek istiyoruz. Denklik bağıntısı olmanın ilk iki koşulu olan yansıma ve simetri aşikardır.

Geçişliliğin ispatı için üç farklı $g_1, g_2, g_3 \in G$ elemanlarını ele alalım. $g_1 \sim_a g_2$ ve $g_2 \sim_a g_3$ olduğunu kabul edelim. Buradan, $g_1 \sim_a g_3$ olduğunu göstermeliyiz. $g_1 \sim_a g_2$ bağıntısından $F \subset \mathbb{R}$ olacak şekilde, F ölçümü sıfır olan bir küme olmak üzere, her $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\} - F)$ ve her $\varphi_t \in S_\Sigma$ için,

$$h^\circ \varphi_t(g_1) = h^\circ \varphi_t(g_2)$$

dir ve benzer şekilde, $g_2 \sim_a g_3$ bağıntısından, $F' \subset \mathbb{R}$ olacak şekilde, F' ölçümü sıfır olan bir küme olmak üzere, her $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) - F'$ ve her $\varphi_t \in S_\Sigma$ için,

$$h^\circ \varphi_t(g_2) = h^\circ \varphi_t(g_3)$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda;

- a) Eğer $F = F'$ ise $g_1 \sim_a g_3 \Leftrightarrow h^\circ \varphi_t(g_1) = h^\circ \varphi_t(g_3)$
- b) Eğer $F \neq F'$ ise;
 - i) $F \subset F'$ veya $F' \subset F$ olabilirler. Her iki durumda da sıfır ölçümlü bir kümenin herhangi bir alt kümesi de sıfır ölçümlü olacağından geçişlilik sağlanır.
 - ii) F ve F' ayrık veya kesişimleri boştan farklı olabilir. Bu durumda sıfır ölçümlü kümelerin sayılabilir birleşimleri yine sıfır ölçümlü olduğundan $F \cup F' \subset \mathbb{R}$ olacak şekilde, $F \cup F'$ ölçümü sıfır olan bir küme olmak üzere, her $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) - (F \cup F')$ ve her $\varphi_t \in S_\Sigma$ için, $g_1 \sim_a g_3 \Leftrightarrow h^\circ \varphi_t(g_1) = h^\circ \varphi_t(g_3)$ olur.

Bu aşamadan sonra, Σ sistemi için h çıkış fonksiyonunu özel olarak, $h \in \text{Hom}(G, H)$ şeklinde Lie grup homomorfizması olarak alacağız.

Yardımcı Teorem 4.6 Σ bir lineer kontrol sistemi ve $h \in \text{Hom}(G, H)$ olmak üzere, I kümesi bu sistemin birim elemanı $e \in G$ den hemen hemen ayırdedilemez noktaların görüntülerinin kümesi olsun. Bu durumda, I Hausdorff topolojisine sahiptir.

İspat: $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, H)$ bir lineer kontrol sistemi olsun. Bu sistemin birim elemanı $e \in G$ den hemen hemen ayırdedilemez noktalar,

$$g \sim_a e \Leftrightarrow h^\circ S_\Sigma(g) = h^\circ S_\Sigma(e)$$

şeklinde tanımlanmak üzere, bu noktaların görüntülerinin kümesi

$$I = \{ s \in H \mid h^\circ \varphi_t(g) = s, g \sim_a e \text{ ve } \forall \varphi_t \in S_\Sigma \text{ için} \}$$

şeklinde tanımlıdır. $F \subset \mathbb{R}$ ölçümü sıfır olan bir altküme olmak üzere, bütün $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) - F$ için, her $s \in I$ değerine karşılık

$$\forall \varphi_t \in S_\Sigma, h^\circ \varphi_t(g) = s$$

eşitliğini sağlayan en az bir $g \in G$ vardır. Bu durumda, bu özelliği sağlayan elemanların kümesine K dersek, $K \subset G$ 'nin sonsuz çoklukta elemanı olabilir. Fakat sonlu altkümeleri

kapalıdır. Dolayısıyla, $h^\circ \varphi_t$ sürekli tasviri altında bu kümenin elemanlarının görüntüleri olarak, I 'nin da sonlu alt kümeleri kapalıdır. Ayrıca, I kümesi K 'nın h altındaki görüntüsüdür. Dolayısıyla Hausdorff topolojisine sahiptir.

Yardımcı Teorem 4.7 Σ bir lineer kontrol sistemi ve $h \in \text{Hom}(G, H)$ olmak üzere, I kapalıdır.

İspat: Herhangi bir $s \in I$ için $\forall \varphi_t \in S_\Sigma, h^\circ \varphi_t(g) = s$ eşitliğini sağlayan en az bir $g \in G$ vardır. G içinde bu özelliği sağlayan elemanların kümesi K olsun. Bu durumda, I içinde alınan herhangi bir dizinin herhangi bir elemanının K içinde bir ters görüntüsü mevcut olduğu söylenebilir. Şimdi, K içinde bir g elemanına yakınsayan g_n dizisi alalım. $h^\circ \varphi_t$ bileşkesinin sürekliliğinden, sabit bir $t \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\} - F)$ için

$$h^\circ \varphi_t(g_n) \rightarrow h^\circ \varphi_t(g)$$

olur. Her n için g_n, K kümesinin bir elemanı olup, her n için

$$h^\circ \varphi_t(g_n) = s_n$$

olacak şekilde bir $s_n \in I$ vardır. Böylece

$$h^\circ \varphi_t(g_n) = s_n \rightarrow h^\circ \varphi_t(g) = s$$

olup, $s \in I$ dir.

Bir Lie grubunun herhangi bir kapalı alt grubu yine bir Lie grubu olduğundan [16], aşağıdaki sonuca varabiliriz.

Sonuç 4.8 Σ bir lineer kontrol sistemi ve $h \in \text{Hom}(G, H)$ olmak üzere, sistemin birim elemanı $e \in G$ den hemen hemen ayırdedilemez noktaların görüntülerinin kümesi I , H 'nin bir Lie alt grubudur.

Uyarı 4.9 G ve H Lie grupları ve $h \in \text{Hom}(G, H)$ olmak üzere, $\Sigma = (G, D, h, H)$ lineer kontrol sistemini göz önüne alalım. Bu durumda, klasik yerel gözlenebilirlik ile yerel hemen hemen gözlenebilirlik ilişkilendirilebilirler. G Lie grubunun tüm ayırdedilemez noktalarının kümesi I^* ve onun Lie cebiri $L(I^*)$ olsun. Bağlantılı bir Lie grubu üzerinde bir lineer kontrol sistemi için yerel gözlenebilirlik, $L(I^*) \equiv 0$ ile sağlanır [27]. Bu durumda, hemen hemen gözlenebilirliğe benzer şekilde, durum uzayı G üzerinde ayrık noktalar meydana gelir. Genel olarak $K \subset I^*$ olduğunu biliyoruz. Bu iki durumda gözlenemeyen noktalar aynı olmak zorunda değildir, ancak, iki durumda da kısmi gözlenebilirlik meydana gelir.

Yardımcı Teorem 4.10 $h \in \text{Hom}(G, H)$ olmak üzere $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, H)$ lineer kontrol sistemi için, $L(I^*) \equiv 0$ ise, o taktirde Σ yerel hemen hemen gözlenebilirdir.

İspat: $L(I^*) \equiv 0$ ise Σ yerel gözlenebilirdir. $K \subset I^*$ olduğundan, sistemin yerel hemen hemen gözlenebilir olduğu söylenebilir.

Örnek 4.11 3-boyutlu Heisenberg Lie grubunu ve onun Lie cebirini göz önüne alalım.

$$H(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{h}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ ve}$$

$$\mathfrak{h}(3) = \text{span}_{L.A.} \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$[X, Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \text{ şeklinde tanımlı olsun.}$$

Çıkış fonksiyonu kanonik izdüşüm tasviri olmak üzere,

$\Sigma = (H(3), \mathcal{D}, \pi, H(3)/\exp(\mathbb{R}X))$ sistemini gözönüne alalım. Sapan vektör alanını, bir sonsuz küçük otomorfizma olarak bZ alırsak sistem yerel gözlenebilir olur [10]. Dolayısıyla, yerel hemen hemen gözlenebilirdir.

4.2 Hemen Hemen Minimal Gerçekleme

Tez çalışmamızın 3. bölümünde minimal gerçekleme tanımını oluştururken, gözlenebilirliğini bilmediğimiz, geçişli bir sistemden, yine geçişli ve gözlenebilir bir sistem elde etmeye çalışmıştık. Literatürde var olan çalışmalarda, gözlenebilirliğin tanımına bağlı olarak farklı minimal gerçekleme tanımları uygulanabileceği görülmüştür. Örneğin; [29]'daki çalışmalarında Ayala ve San Martin, sözde (quasi) minimal gerçekleme ve zayıf(weak) minimal gerçekleme tanımlarını ortaya koymuşlardır. Biz de yeni tanımladığımız hemen hemen gözlenebilirlik tanımını kullanarak hemen hemen minimal gerçekleme tanımı verebiliriz.

Tanım 4.12 $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, H)$ gözlenebilirliği hakkına bilgi sahibi olunmayan herhangi bir geçişli kontrol sistemi olsun. Bu sisteme güçlü bir şekilde denk, geçişli ve hemen hemen gözlenebilir bir sistem $\Sigma' = (G', \mathcal{D}', h', H)$ olsun. Bu sisteme ilk sistem için bir hemen hemen minimal gerçekleme denir.

Bu tanımlama sonlu zaman ihmali problemlerinde direk görülmesi mümkün olmayan sistemlere benzeyen modellerin oluşturulmasına olanak verir.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, öncelikle gözlenebilirliği bilinmeyen bir kontrol sistemi için minimal gerçekleştirme yoluyla, bu sisteme güçlü bir şekilde denk olan gözlenebilir bir sistem elde edilmesini inceledik. Bu incelememizde, bağlantılı ve basit bağlantılı bir G Lie grubu üzerinde $\Sigma = (G, \mathcal{D}, \pi_K, G/K)$ afin kontrol sistemini ele aldık. Kontrol sisteminin birimden ayırdedilemez noktalarının kümesini oluşturarak, bu kümenin G 'nin kapalı normal bir Lie alt grubu olduğunu gösterdik. Bu Lie grubunu ve kanonik izdüşüm tasvirini kullanarak yeni sistemimizin durum uzayını meydana getirdik. İlk sistemin geçişliliği varsayımını da göz önünde tutarak, gözlenebilir bir minimal gerçekleştirme oluşturmuş olduk. Bu alanda yapılacak bir çalışma önerisi olarak, optimal bir sistem elde etmek için, sistemin çözümlerini ayırdedilebilir bir şekilde çıkış uzayına gönderen farklı bir çıkış fonksiyonu ile minimal gerçekleştirme elde edilmesi verilebilir.

Daha sonra, bağlantılı bir G Lie grubu üzerinde $\Sigma = (G, \mathcal{D}, h, H)$ lineer kontrol sistemini ele aldık. Bu sistem için, zaman parametresinde sıfır ölçümlü bir küme çıkarılarak tanımlanan hemen hemen ayırdedilemezlik, yerel ve genel hemen hemen gözlenebilirlik kavramlarını oluşturduk. Hemen hemen ayırdedilemez noktaların görüntülerinin oluşturduğu kümenin topolojik ve cebirsel yapısını inceleyerek Lie grubu yapısına sahip olduğunu gösterdik. Yerel gözlenebilirlik ve yerel hemen hemen gözlenebilirlik arasındaki ilişkiyi ortaya koyduk.

Son olarak, minimal gerçekleştirme probleminde gözlenebilirlik yerine hemen hemen gözlenebilirlik kullanarak hemen hemen minimal gerçekleştirme tanımını oluşturduk. Yine

Lie grupları üzerinde, farklı kontrol sistemleri kullanılarak minimal gerçeklemeler oluşturulabileceğini düşünmekteyiz.



KAYNAKLAR

- [1] Sussmann, H.J., (1973). "Minimal Realizations of Nonlinear Systems", Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, August 27-7September, England, 243-253; derleyen Mayne D. Q. ve Brockett R. W., (1973), D. Reidel Publishing Company, Boston.
- [2] Sussmann, H.J., (1977). "Existence and Uniqueness of Minimal Realizations of Nonlinear Systems", Math. Systems Theory, 10:263-284.
- [3] Jurdjevic, V. ve Sallet, G., (1984). "Controllability Properties of Affine Systems", Siam Journal of Control and Optimization, 22(3):501-508.
- [4] Kara, A. ve San Martin, L., (2006). "Controllability of Affine Control System for the Generalized Heisenberg Lie Groups", International Journal of Pure and Applied Mathematics 29:1-6.
- [5] Kule, M., (2015). "Controllability of Affine Control Systems on Lie Groups", Mediterr. J. of Math.,13(2):873-882.
- [6] Kara, A., (2007). "On Observability of Affine Control Systems on Lie Groups", International Journal of Contemp. Math. Sci. 2(17):825-829.
- [7] Kalman, R.E. (1959). "On the General Theory of Control Systems IRE Transactions on Automatic Control, 4(3):110-125
- [8] Ayala, V. , Hacıbekiroğlu, A. ve Kızıl, E., (2000). "Observability of General Linear Pairs", Computers and Mathematics with Applications, 39:35-43.
- [9] Cheng, D., Dayawansa, W.P. ve Martin, C.F. (1990). "Observability of Linear Control Systems on Lie Groups and Coset Spaces", Siam Journal of Control and Optimization, 28(3): 570-581.
- [10] Ayala, V. ve Hacıbekiroğlu, A.K., (1995). "Observability of Linear Control Systems on Lie Groups", International Atomic Energy Agency and United Nations Educational Scientific and Cultural Organization, United Centre for Theoretical Physics, January 1995, Trieste.
- [11] Warner, F.W., (1983). Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer Verlag, New York.

- [12] Tu, L.W., (2010). An Introduction to Manifolds, Second Edition, Springer, New York.
- [13] Lee, J.M., (2006). Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York.
- [14] Jurdjevic, V., (1997). Geometric Control Theory, Cambridge Uni Press, Newyork.
- [15] Simic, N.S., (2011), Three Faces of the Lie Bracket, <http://www.math.sjsu.edu/~simic/Spring11/Math213B/lie.bracket.pdf>, 15 Temmuz 2017.
- [16] Varadarajan, V. S., (1974). Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, Springer, New York.
- [17] Lerman, E. (2012), Notes on Lie Groups, <http://www.math.uiuc.edu/~lerman/519/s12/427notes.pdf>, 21 Temmuz 2017.
- [18] Isidori, A., (1989). Nonlinear Control Systems, Springer Verlag, Berlin.
- [19] Coddington, E.A. ve Levinson, N. (1955) Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw Hill, New York.
- [20] Sussmann, H. J. ve Jurdjevic V., (1972) "Controllability of Nonlinear Systems", J. Diff. Equations, 12:95-116.
- [21] Serre, J. P. , (1965) Lie Groups and Lie Algebras, Benjamin Press, New York.
- [22] Sussmann, H.J., (1970) "A generalization of the closed subgroup theorem to quotients of arbitrary manifolds", J. Diff. Geometry, 10:151-166.
- [23] Ayala, V. ve San Martin, L., (2000). "Controllability Properties of a Class of Control Systems on Lie Groups", Proceedings of Second Nonlinear Control Network (NCN) Workshop, 258:83-92.
- [24] Chevalley, C. (1946). Theory of Lie Groups. Princeton University Press, New Jersey.
- [25] Ziller, W. (2010). Lie Groups Representation Theory and Symmetric Spaces, Lecture Notes, University of Pennsylvania.
- [26] Hansen, A.K. ve Sütü, S.S., (2017), "A Minimal Realization for Affine Control Systems on Connected Lie Groups", International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(09):1-10
- [27] Hacıbekiroğlu, A.K. , (1995). Lie Grupları Üzerinde Lineer Kontrol Sistemleri, Doktora Tezi, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [28] Ayala, V. ve Tirao, J.,(1994). "Controllability of Linear Vector Fields on Lie Groups", International Centre for Theoretical Physics, November 1994, Trieste.
- [29] Ayala, V. ve San Martin, L. (1991). "Minimal Realization under Controllability", Systems and Control Letters , 16:289-293.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Sultan SÜTLÜ
Doğum Tarihi ve Yeri :16.10.1986, Eminönü
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :selcuksultan@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	YTÜ	2011
Lisans	Matematik	İstanbul Ticaret Üniversitesi	2009
Lise	Matematik-Fen	Bahçelievler Anadolu Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011-devam	Haliç Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2009-2011	İstanbul Şehir Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2007-2009	Kültür Dersaneleri	Etüt Öğretmeni

YAYINLARI

Makale

1. Hansen, A.K. ve Stl, S.S., (2017), "A Minimal Realization for Affine Control Systems on Connected Lie Groups", International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(09):1-10

Bildiri

1. Hansen, A.K. ve Stl, S.S., (2015), "A Minimal Realization for Affine Control Systems on Lie Groups", 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Antalya.

2. zkan, A., Seluk, S., (2011), "Discrete Fourier Transform Over Finite Fields and its Applications on Algebraic Coding Theory", International Conference on Applied Analysis and Algebra, İstanbul.

LLERİ

2211-A Yurterii Doktora Bursu