T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRLERİ VE *f*-MODÜLLERİNİN SIRALI VE İKİNCİ SIRALI DUALİ ÜZERİNDEKİ LİNEER OPERATÖRLER VE ORTOMORFİZMALAR

SERAP ÖZCAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMER GÖK

İSTANBUL, 2015

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

f-CEBİRLERİ VE *f*-MODÜLLERİNİN SIRALI VE İKİNCİ SIRALI DUALİ ÜZERİNDEKİ LİNEER OPERATÖRLER VE ORTOMORFİZMALAR

Serap ÖZCAN tarafından hazırlanan tez çalışması 17.08.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

İstanbul Ticaret Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN

İstanbul Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Erdal GÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün 2014-01-03-DOP02 numaralı projesi ve TÜBİTAK'ın 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca beni yönlendiren, bilgi ve tecrübesiyle bana her konuda yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ömer GÖK'e teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, maddi manevi her konuda desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve doktora yapıyorken hayatımı birleştirdiğim, bu zorlu süreçte her zaman yanımda olan sevgili eşime sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

2014-01-03-DOP02 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne, ayrıca bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ağustos, 2015

Serap ÖZCAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
B_x	x tarafından üretilen band
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$C(X)$	X üzerindeki tüm gerçel değerli sürekli fonksiyonlar
$C_b(X)$	X üzerindeki tüm gerçel değerli sürekli, sınırlı fonksiyonlar
E^+	E uzayının pozitif kısmı
$E^\sim$	E uzayının sıralı duali
$E_n^\sim$	E uzayının sıralı sürekli duali
E'	E uzayının topolojik duali
E''	E uzayının ikinci topolojik duali
I_x	x tarafından üretilen ideal
$inf\{x, y\}$	x ve y 'nin infimumu
$\mathcal{L}_b(E, F)$	Sıralı sınırlı operatörler
$\mathcal{L}_c(E, F)$	Dizisel sıralı sürekli operatörler
$\mathcal{L}_n(E, F)$	Sıralı sürekli operatörler
$l_\infty(X)$	X üzerindeki tüm gerçel değerli sınırlı fonksiyonlar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
N_T	T 'nin sıfır ideali
$Orth(E)$	E 'nin ortomorfizmaları
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_X$	X üzerindeki tüm gerçel değerli fonksiyonlar
$sup\{x, y\}$	x ve y 'nin supremumu
x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı

$\lvert x \rvert$	x ’in modülü
$\lVert x \rVert$	x ’in normu
$x_\alpha \uparrow x$	x ’e artan ve supremumu x olan net
$x_\alpha \downarrow x$	x ’e azalan ve infimumu x olan net
$x_\alpha \xrightarrow{0} x$	Sıralı yakınsama
$x \vee y$	x ve y ’nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y ’nin infimumu
$x \perp y$	Birbirine dik elemanlar
$Z(E)$	E ’nin ideal merkezi

ÖZET

f-CEBİRLERİ VE *f*-MODÜLLERİNİN SIRALI VE İKİNCİ SIRALI DUALİ ÜZERİNDEKİ LİNEER OPERATÖRLER VE ORTOMORFİZMALAR

Serap ÖZCAN

Matematik Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK

Altı bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde giriş kısmı verilmiştir.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılacak tanım ve gösterimler verilerek, Riesz uzayları, *f*-cebirleri, ortomorfizmalar ve Banach latislerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir Archimedean *f*-cebirinin ikinci sıralı dualinde tanımlı Arens çarpımları verilmiştir. Bu çarpımlardan faydalanarak bir dönüşüm tanımlanmış ve bu dönüşümün latis homomorfizması olduğu gösterilerek, bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca *f*-ortomorfizmalar ve *f*-cebirlerinin sıralı dualindeki ortomorfizmalar arasındaki ilişki ortaya konulmuştur.

Dördüncü bölümde, bir *f*-cebiri üzerinde tanımlı bir *f*-modülünün sıralı duali ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, bir *f*-cebiri üzerinde tanımlı bir *f*-modülünün ikinci sıralı dualinin de sıralı dualine benzer özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde ise, X bir vektör latisi ve X in sıralı duali X’ olduğunda, Orth(X’) nin ne zaman X’ nde ideal merkezi olduğu araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *f*-cebiri, *f*-modülü, ortomorfizma, lineer operatör, sıralı dual, Riesz uzayı, vektör latisi, ideal merkezi

ABSTRACT

LINEAR OPERATORS AND ORTHOMORPHISMS ON THE ORDER DUAL AND SECOND ORDER DUAL OF *f*-ALGEBRAS AND *f*-MODULES

Serap ÖZCAN

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Ömer GÖK

In the first chapter of this thesis, which consists of six chapters, we establish an introduction.

In the second chapter, the definitions and notations, which are going to be used throughout the thesis, are given and Riesz spaces, *f*-algebras, orthomorphisms and Banach lattices are mentioned, shortly.

In the third chapter, Aren's products are given, which are defined on the order bidual of an Archimedean *f*-algebra. By means of these products, a mapping is defined and by the way of showing this mapping is a lattice homomorphism, some results are obtained. Also, the relationship between *f*-orthomorphisms and the orthomorphisms on the order dual of *f*-algebras, is revealed.

In the fourth chapter, some results are given, which are about order dual of an *f*-module over an *f*-algebra.

In the fifth chapter, it is shown that, order bidual of an *f*-module over an *f*-algebra has similar properties with the order dual of it.

In the last chapter, if X is a vector lattice and order dual of X is X', it is investigated when Orth(X') is in the ideal center of X'.

Keywords: *f*-algebra, *f*-module, orthomorphism, linear operator, order dual, Riesz space, vector lattice, ideal center

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Pozitif operatörlerin başlangıcı 19. yüzyılın başlarına dayanır. Başlangıçta pozitif operatörler, fonksiyonel analizi başlatan integral operatörlerle bağlantı kurularak çalışılmıştır. Ancak çok sonraları sistematik bir biçimde araştırılmıştır. Pozitif operatörlerin gelişimi özellikle de Riesz uzaylarının gelişimiyle hız kazanmıştır.

f-halka teori ve f-cebir teori, birçok yazar tarafından çalışılmıştır [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]. G. Birkhoff ve R. S. Pierce [4]'te bir f-halkayı,

$$u \wedge v = 0, w \geq 0 \text{ ise } (uw) \wedge v = (wu) \wedge v = 0$$

özelliğiyle birlikte bir latis sıralı halkası olarak tanımlarken, A. Bigard, K. Keimel, S. Wolfenstein [3]'de ve L. Fuchs [5]'te bir f-halkayı tamamıyla sıralı halkaların bir alt direkt izomorfik bir latis sıralı halkası olarak tanımlamışlardır. Bu iki tanım eşdeğer olarak da görülebilir. Ancak, herhangi bilinen eşdeğer kanıt Zorn Önermesi'ndeki iddialara dayanır. Eğer ikinci tanım kullanılırsa, "Her tam sıralı halkada sağlanan özdeşlik, her f-halkada sağlanır." matematiksel yorumu aracılığıyla f-halkalar üzerindeki bazı standart teoremleri kanıtlamak mümkündür.

1928 yılında F. Riesz [11]'deki "Lineer Fonksiyonların Ayrışması Üzerine" konulu çalışmasını, Riesz uzayları ve pozitif operatörlerin başlangıcını, Bologna'da Uluslararası Matematikçiler Konferansı'nda sunmuştur. 1930'ların ortalarında, Riesz uzaylarının teorisi H. Freudenthal ve L. V. Kantorovich tarafından aksiyomatik olarak geliştirilmiştir. Ayrıca, pozitif operatörler 1930'ların ortalarında yine L. Kantorovich tarafından sunulmuş ve çalışılmıştır. Yaptıkları çalışmayı ilk olarak G. Birkhoff'un "Latis Teorisi" [12] kitabının baskısıyla ders kitabı olarak sunmuşlardır.

Şüphesiz ki, pozitif operatörlerin en kapsamlı çalışması 1930'larda F. Riesz, L. V. Kantorovich ve G. Birkhoff tarafından yapılmıştır.

1940'larda ve 1950'lerin başlarında pozitif operatörler üzerine çok az çalışma yapılmıştır. Bu periyotta önemli katkılar Sovyet (l. V. Kantorovich, M. G. Krein, A. G. Pinsker, M. A. Rutman, B. Z. Vulik) ve Japon (H. Nakano, K. Yosida, T. Ogasuwara ve öğrencileri) okullarından gelmiştir. 1954 yılında, "Kısmi Sıralı Uzaylarda Fonksiyonel Analiz" [13] kitabı, L. V. Kantorovich, B. Z. Vulikh ve A. G. Pinsker tarafından Sovyet literatürüne girmiştir. Bu kitap, pozitif operatörleri ve onların birçok uygulamasını içerir.

1950'lerin ortalarından beri pozitif operatörlerin araştırılması kaydadeğer bir ivme kazanmıştır. 1955'ten 1970 yılına kadar önemli katkılar T. Ando, C. Goffman, S. Kaplan, S. Karlin, P. P. Korovlin, M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko, E. I. Pustylnik, P. E. Sobolevskii, U. Krengel, G. Y. Lozanorskii, W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, H. Nakano, L. Namiska, A. Pressini, H. H. Shaefer ve B. Z. Vulikh'ten gelmiştir. Böylece 1960'ların sonuna kadar pozitif operatörlerin alt yapısı kurulmuştur.

1970'li yıllar, pozitif operatörler teorisi için olgunluk periyodu olarak ifade edilebilir.

1971 yılında W. A. J. Luxemburg ve A. C. Zaanen'in yazmış olduğu "Riesz Spaces I" [14] kitabı, Riesz uzayları ve pozitif operatörler hakkında geniş bilgi vermektedir. 1974 yılında, ilk monografi tamamen literatürde çıkan konuya adanmıştır. Bu, pozitif operatörlerin gelişmesinde büyük etkisi olan H. H. Schaefer'in "Banach Lattices and Positive Operators" [15] kitabıdır. Bu zamanlarda, bu alanda çalışan matematikçi sayısı artmıştır ve araştırmalar daha sistematik şekilde yürütülmüştür. Konunun gelişimi çok hızlanmıştır ve ayrıca diğer disiplinlerdeki uygulamaları gelişmeye başlamıştır. 1970'lerin kilometre taşı, P. G. Dodds ve D. H. Fremlin'in pozitif kompakt operatörlerle ilgili makalesidir [16]. 1970'lerde pozitif operatör teorisi üzerine çalışanlar Ju. A. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, S. J. Bernau, A. V. Buhvalov, O. Burkinshaw, D. I. Cartwright, P. G. Dodds, M. Dohoux, P. Van Elik, J. J. Grobler, D. H. Fremlin, H. P. Lotz, W. A. J. Luxemburg, M. Meyer, P. Meyer-Nieberg, R. J. Nagel, U. Schlotterback, H. H.

Schaefer, A. R. Schep, C. T. Tucker, A. I. Veksler, A. W. Wickstead, M. Wolff ve A. C. Zaanen'dir.

1980'ler pozitif operatörler teorisi için çok iyi başlamıştır. Pozitif kompakt operatörler üzerine önemli makalelerin bir serisi C. D. Aliprantis ve O. Burkinshaw tarafından yazılmıştır [17,18,19,20]. Pozitif operatörler üzerine bir diğer seçkin kitap, A. C. Zaanen'in "Riesz Uzayları II" [21] kitabıdır. Banach uzayları teorisini çalışan pek çok matematikçi pozitif operatörleri çalışmaktadır ve bu durum konuya ekstra bir destek vermiştir. Buna ek olarak, pozitif operatörler teorisi, matematiksel fizikten ekonomiye kadar birçok disiplinde önemli uygulama alanları bulmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, Archimedean f-cebirlerinin ve f-modüllerinin sıralı ve ikinci sıralı dualinde tanımlı Arens çarpımlarından yararlanarak yeni özellikler elde etmek, f-ortomorfizmalar ile f-cebirlerinin ve f-modüllerinin sıralı ve ikinci sıralı dualindeki ortomorfizmalar arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır. Ayrıca, bir dual vektör latisinin ideal merkezi ile ortomorfizmalar arasındaki ilişkiyi incelemektir.

1.3 Hipotez

A, sıralı duali A', ikinci sıralı duali A'' olan ayıran duale sahip f-cebiri olsun. Her $f \in A'$ ve $F \in A''$ için $T_f(F) = F.f$ şeklinde tanımlanan $T_f : A'' \to A'$ dönüşümünü göz önüne alalım. $0 \leq f \in A'$ için T_f aralık koruyan latis homomorfizmasıdır. Her $f \in A'$ için $V_F(f) = F.f$ olmak üzere, her $F \in A''$ için $V(F) = V_F$ ile tanımlı $V : A'' \to Orth(A')$ dönüşümü lineer, pozitif, cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. A'' nin T_f altındaki görüntüsü $R(f) = \{F.f : F \in A''\}$ şeklinde tanımlandığında $R(f)$, A' sıralı dualinde bir sıralı idealdir. A' nin tüm f-ortomorfizmalarının koleksiyonu $Orth\ (A', A'; A'')$ ile, A' üzerindeki tüm f-lineer operatörlerin kümesi $L_b(A', A'; A'')$ ile gösterilsin. Bu durumda, $Orth\ (A', A'; A'')$ ve $L_b(A', A'; A'')$, $L_b(A')$ nde banddır. Çarpanlara ayrılma özelliğine sahip her f-cebiri için

$$Orth(A') = L_b(A', A'; A'') = Orth(A', A'; A'')$$

eşitliği gerçeklenir.

L Riesz uzayı olsun. Eğer L, A üzerinde f-modülü ve L nin sıralı duali L', ikinci sıralı duali L'' ise olsun. Her $f \in L'$ ve $F \in A''$ için $T_f(F) = F.f$ şeklinde tanımlı $T_f : A'' \to L'$ dönüşümü aralık koruyan latis homomorfizması olup,

$$Orth(L') \subseteq L_b(L', L'; A'')$$

kapsaması vardır. Benzer özellikler A'' den L'' ye tanımlı dönüşüm için de gerçeklenir.

X bir relatif düzgün tam vektör latisi olsun. Aşağıdaki sonuçlar denktir:

i. $Orth(X') = Z(X')$
ii. Relatif düzgün topolojiye göre $M\big(Orth(X')\big) = m\big(Orth(X')\big)$dır.
iii. Her düzgün sonlu üretilmiş halka ideali $Orth(X')$ nin bir düzgün kapalı maksimal halka ideali içinde bulunur ve hk-topolojisinde $m\big(Orth(X')\big)$ kompakttır.

X bir Banach latisi ise, $Orth(X') = Z(X')$ dır.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1 Vektör Uzaylarının Sıralı Yapısı

Bu kısımda, bu tezin temelini oluşturan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 Boştan farklı bir E kümesi üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısı verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\leq$ bağıntısına sıralama bağıntısı; $(E, \leq)$ ikilisine de sıralı küme denir.

i. Her $x \in E$ için $x \leq x$ (yansıma)

ii. Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (ters simetri)

iii. Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (geçişme)

Tanım 2.1.2 A, bir E sıralı kümesinin alt kümesi olsun.

i. Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in E$ varsa A kümesine üstten sınırlı küme, y ye de A için bir üst sınır denir.

ii. Her $x \in A$ için $y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in E$ varsa A kümesine alttan sınırlı küme, y ye de A için bir alt sınır denir.

iii. Alttan ve üstten sınırlı bir kümeye, sınırlı küme denir.

iv. A kümesinin üst sınırları kümesinin bir en küçük elemanı varsa, buna A kümesinin en küçük üst sınırı denir ve $supA$ ile gösterilir.

v. A kümesinin alt sınırları kümesinin bir en büyük elemanı varsa, buna A kümesinin en büyük alt sınırı denir ve $infA$ ile gösterilir.

$A = \{x, y\}$ alınırsa, $supA = x \vee y$ ve $infA = x \wedge y$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.3 $(E, \leq)$ sıralı küme olsun. Her $x, y \in E$ için $x \vee y$ ve $x \wedge y$ E kümesine ait ise E ye latis (örgü) denir.

Tanım 2.1.4 $(E, \leq)$ latis olsun. E nin en küçük elemanı varsa, buna sıfır eleman denir ve 0 ile gösterilir. E nin en büyük elemanı varsa, buna birim eleman denir ve e veya I ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 E bir reel vektör uzayı ve "$\leq$", E de bir sıralama bağıntısı olsun.

i. $\forall x, y, z \in E$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

ii. $\forall x, y \in E$, $x \leq y$, $0 \leq \alpha \in R \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

koşulları sağlanıyorsa "$E, \leq$" sıralı vektör uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.6 E, sıralı vektör uzayı ve 0, E nin sıfır vektörü olsun. E nin, $x \geq 0$ şartını sağlayan x elemanına pozitif eleman denir. E nin tüm pozitif elemanlarının kümesine E nin pozitif konisi denir ve E^+ ile gösterilir ve $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.7 E, sıralı vektör uzayı ve $V \subseteq E$ vektör altuzayı olmak üzere, E deki sıralama ile V ye sıralı vektör altuzayı denir.

2.2 Riesz Uzayları

Tanım 2.2.1 E, sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E$ veya $x \wedge y \in E$ oluyorsa E ye Riesz uzayı (vektör latisi) denir. Aşağıdaki gösterimler kullanılır:

$$x \vee y \coloneqq sup\{x, y\}$$

$$x \wedge y \coloneqq inf\{x, y\}$$

Riesz uzaylarının tipik örnekleri fonksiyon uzayları arasında yer almaktadır. Bir X kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların vektör uzayı E olmak üzere her $f, g \in E$ için,

$$(f \vee g)(x) \coloneqq max\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) \coloneqq min\{f(x), g(x)\}$$

E ye ait fonksiyonlardır. Açıktır ki, her E noktasal sıralama ile Riesz uzayıdır.

Örnek 2.2.2

i. $\mathbb{R}_X$, X kümesi üzerindeki bütün gerçel değerli fonksiyonlar

ii. $C(X)$, X kümesi üzerindeki bütün gerçel değerli sürekli fonksiyonlar

iii. $C_b(X)$, X kümesi üzerindeki bütün gerçel değerli sürekli, sınırlı fonksiyonlar

Tanım 2.2.3 E, Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun.

i. $x \vee 0$ elemanına x in pozitif kısmı denir ve x^+ ile gösterilir.

ii. $-x \vee 0$ elemanına x in negatif kısmı denir ve x^- ile gösterilir.

iii. $-x \vee x$ elemanına x in modülü denir ve $|x|$ ile gösterilir.

iv. Eğer, $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y ayrıktır denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. Eğer A, E Riesz uzayının boştan farklı bir altkümesi ise;

$$A^d = \{x \in E: \forall y \in A \; için \; x \perp y\}$$

kümesine A nın ayrık tümleyeni denir. Buna göre, x^+ ve x^- ayrık olup, $x = x^+ - x^-$ ve $|x| = x^+ + x^-$ eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.2.4 $\emptyset \neq \Lambda$ bir küme ve "$\sim$", Λ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer,

i. Her $p \in \Lambda$ için $p \sim p$

ii. Her $p, q, r \in \Lambda$ için $p \sim q$ ve $q \sim r$ iken $p \sim r$

iii. Her $p, q \in \Lambda$ için $p \sim s$ ve $q \sim s$ olacak şekilde bir $s \in \Lambda$ vardır.

koşulları sağlanıyorsa "$\sim$" bağıntısına yönlendirme bağıntısı ve Λ kümesine de "$\sim$" bağıntısına göre (yukarı) yönlendirilmiş küme denir.

Tanım 2.2.5 $(\Lambda, \sim)$ yönlendirilmiş bir küme ve X herhangi bir küme olsun. $f: \Lambda \rightarrow X$ fonksiyonuna, terimleri X in elemanlarından oluşan bir ağ (net) denir.

Tanım 2.2.6 E Riesz uzayı içinde bir $\{x_\alpha\}$ ağı için, $\alpha \leq \beta$ iken $x_\beta \leq x_\alpha$ özelliği sağlanıyorsa $\{x_\alpha\}$ ağı azalandır denir ve $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. Eğer $\{x_\alpha\}$ azalan ve $inf\{x_\alpha\} = x$ ise $x_\alpha \downarrow x$ olarak gösterilir.

Benzer şekilde, E Riesz uzayı içinde bir $\{x_\alpha\}$ ağı için, $\alpha \leq \beta$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ özelliği sağlanıyorsa $\{x_\alpha\}$ ağı artandır denir ve $x_\alpha \uparrow$ ile gösterilir. Eğer $\{x_\alpha\}$ artan ve $sup\{x_\alpha\} = x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2.7 E Riesz uzayında her $x \in E^+$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ özelliği sağlanıyorsa E ye Archimedean Riesz uzayı denir.

Örnek 2.2.8 $\mathbb{R}^2$ kümesi her $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2$$

sıralamasına göre Archimedean Riesz uzayıdır.

Tanım 2.2.9 E sıralı vektör uzayının $x \leq y$ özelliğine sahip x ve y öğeleri için $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine sıralı aralık denir. Eğer E nin A altkümesi bir sıralı aralığın içinde kalıyorsa A ya sıralı sınırlı küme denir.

E ve F sıralı vektör uzayları olmak üzere $T : E \to F$ lineer dönüşümü için E nin sıralı sınırlı kümelerinin görüntüsü F nin sıralı sınırlı kümeleri oluyorsa, T ye sıralı sınırlı operatör denir ve E den F ye bütün sıralı sınırlı operatörlerin vektör uzayı $\mathcal{L}_b(E, F)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}_b(E, F)$ üzerindeki sıralamaya göre $T \leq S$ olmasının anlamı $S - T \geq 0$ olmasıdır. Böylece $\mathcal{L}_b(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

E ve F Riesz uzayları iken $\mathcal{L}_b(E, F)$ Riesz uzayı olmayabilir [1].

Tanım 2.2.10 E, Riesz uzayı olsun. Eğer E nin boş olmayan üstten sınırlı her altkümesinin supremumu (veya buna denk olarak, boş olmayan alttan sınırlı her altkümesinin infimumu) varsa E ye Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Benzer olarak; eğer E nin boş olmayan üstten sınırlı sayılabilir her altkümesinin supremumu (veya buna denk olarak, boş olmayan alttan sınırlı sayılabilir her altkümesinin infimumu) varsa E ye σ-Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Önerme 2.2.11 E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ise, $\mathcal{L}_b(E, F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır.

Her $S, T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ ve $x \in E^+$ için,

$$(S \vee T)(x) = sup\{Sy + Tz : y, z \in E^+ , y + z = x\}$$

$$(S \wedge T)(x) = inf\{Sy + Tz : y, z \in E^+ , y + z = x\}$$

eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca, $\mathcal{L}_b(E, F)$ de $T_\alpha \downarrow 0$ olması her $x \in E^+$ için $T_\alpha x \downarrow 0$ olmasına denktir.

İspat [1], Önerme 1.13

Tanım 2.2.12 E, bir Riesz uzayı ve G, E nin vektör altuzayı olsun. Her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ veya $x \wedge y \in G$ ise G ye E nin Riesz altuzayı denir.

Tanım 2.2.14 E, Riesz uzayı olsun. $y \in A$ ve $|x| \leq |y|$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in E$ için $x \in A$ olacak şekilde E nin bir A vektör altuzayı varsa A ya E de bir ideal denir.

Tanım 2.2.15 $\{x_\alpha\}$, E Riesz uzayı içinde bir ağ ve $x \in E$ olsun. Her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ $y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $\{y_\alpha\}$ ağı varsa x_α , x 'e sıralı yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ şeklinde gösterilir.

B, E Riesz uzayının altkümesi ve $\{x_\alpha\} \subseteq B$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ iken $x \in B$ oluyorsa, B ye sıralı kapalıdır denir. Sıralı kapalı ideale band denir.

Tanım 2.2.16 E Riesz uzayı ve $e > 0$ olsun.

i. Eğer e ile üretilen esas ideal I_e , E ye eşit, yani her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde λ pozitif sayısı varsa e ye sıralı birim denir.

ii. Eğer e ile üretilen esas band B_e , E ye eşit, yani her $x \in E^+$ için $\{x \wedge ne\}_n \uparrow x$ ise e ye zayıf sıralı birim denir.

iii. Eğer e ile üretilen esas ideal I_e , e ile üretilen vektör altuzayına eşit, yani $I_e = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ise, e ye ayrık eleman denir.

iv. Eğer $x, y \in [0, e]$ ve $x \wedge y = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa e ye atom denir.

Archimedean Riesz uzayında pozitif bir öğenin atom olması için gerek ve yeter koşul ayrık eleman olmasıdır [14], Önerme 26.4.

Tanım 2.2.17 E ve F, sıralı vektör uzayları olmak üzere, $T: E \rightarrow F$ dönüşümü verilsin. Her $x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa, T ye pozitif operatör denir.

Tanım 2.2.18 E ve F vektör uzayları olmak üzere, $T: E \to F$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın.

i. Her $x, y \in E$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$

ii. Her $x \in E$ ve $\alpha \in K$ için $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

Bu durumda T dönüşümüne, lineer operatör denir.

Tanım 2.2.19 E bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$\|.\|: E \to \mathbb{R}, x \to \|x\|$ şeklinde tanımlı dönüşüme, aşağıdaki koşulları sağlarsa E üzerinde bir norm adı verilir.

i. Her $x \in E$ için $\|x\| \geq 0$

ii. Her $x \in E$ için $\|x\| = 0$ ise $x = 0$

iii. Her $x \in E$ ve $a \in K$ için $\|ax\| = |a|\|x\|$

iv. Her $x, y \in E$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

Bu durumda $(E, \|.\|)$ çiftine normlu vektör uzayı denir. Üzerinde norm tanımlanmış uzaya normlu uzay adı verilir.

Örnek 2.2.20

i. $E = \mathbb{R}$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $\|x\| = |x|$ tanımı ile $\|.\|$ $\mathbb{R}$ üzerinde norm belirtir.

ii. $E = \mathbb{C}$ olsun. $x \in \mathbb{C}$ için $\|x\| = |x|$ tanımı ile $\|.\|$ $\mathbb{C}$ üzerinde norm belirtir.

iii. $E = \mathbb{R}$ olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ için,

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

tanımı ile $\|.\|$ E üzerinde normdur.

iv. $1 \leq p < \infty$ için $E = l_p$ olsun. $x = (x_n) \in l_p$ için,

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

tanımı ile $\|.\|$ E üzerinde normdur.

v. X boş olmayan bir küme ve $B(X)$, X üzerinde tanımlı sınırlı reel değerli fonksiyonların vektör uzayı olsun.

$f \in B(X)$ için $\|f\| = sup_{t\in X}|f(t)|$ tanımı ile $\|.\|$ $B(X)$ üzerinde normdur.

Tanım 2.2.21 $(E, \|.\|)$ normlu uzay ve (x_n) E de bir dizi olsun. Verilen her $\mathcal{E} > 0$ için bir n_0 bulunduğunda her $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < E$ oluyorsa (x_n) dizisine E de bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.2.22 Eğer E deki her Cauchy dizisi E deki norma göre yakınsak ise E uzayına Banach uzayı (Tam uzay) adı verilir. O halde normlu E uzayının Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul, $x_n \in E$ ve verilen her $\mathcal{E} > 0$ için bir n_0 sayısı vardır öyle ki her $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < E$ eşitsizliği sağlandığında bir $x \in E$ ve bir n_1 sayısı bulunabilir ki $n \geq n_1$ için $\|x_n - x\| < E$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 2.2.23

i. $1 \leq p < \infty$ için l_p uzayı Banach uzayıdır.

ii. Sınırlı dizilerin uzayı l_∞ , üzerindeki supremum normuna göre Banach uzayıdır. Yani, $x = (x_n) \in l_\infty$ için,

$$\|x\| = sup_n|x_n|.$$

iii. Yakınsak dizilerin uzayı c , üzerinde tanımlanan supremum normuna göre Banach uzayıdır. Yani, $x = (x_n) \in c$ için,

$$\|x\| = sup_n|x_n|.$$

Tanım 2.2.24 E ve F, normlu uzaylar ve $T: E \to F$ lineer operatör olsun. T nin normu $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$ ile tanımlanır. Eğer $\|T\| < \infty$ ise T ye sınırlı operatör denir.

Örnek 2.2.25

i. $T: l_\infty \to l_\infty$, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, \dots)$ ile tanımlı T operatörü lineer ve sınırlıdır.

ii. $T: C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$ tanımıyla T sınırlı lineer operatördür.

iii. $E = \{p \mid p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, polinom\}$ uzayı veriliyor. $T: E \to \mathbb{R}$, $T(p) = p(t)$, $t \in \mathbb{R}$ tanımıyla T lineer operatördür.

Tanım 2.2.26 E bir vektör uzayı ve K reel veya kompleks sayıların cismi olsun. $f: E \to K$ lineer operatörüne lineer fonksiyonel denir.

Tanım 2.2.27 $f: E \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonel olsun. f, E nin sıralı sınırlı altuzaylarını, $\mathbb{R}$ nin sınırlı altuzaylarına örterek eşliyorsa f ye sıralı sınırlı fonksiyonel denir.

Tanım 2.2.28 E bir Riesz uzayı olsun.

i. E üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin vektör uzayına E nin sıralı duali denir ve $E^{\sim}$ ile gösterilir.

ii. E üzerindeki sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı $E_n^{\sim}$ ile gösterilir. $E_n^{\sim}$ E üzerinde banddır. $E_n^{\sim}$ bandına, E nin sıralı sürekli duali denir.

iii. E bir Riesz uzayı ise E nin sıralı duali olan $E^{\sim}$ de Riesz uzayıdır. $E^{\sim}$ üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin Riesz uzayına E nin ikinci sıralı duali denir ve $E^{\sim\sim}$ ile gösterilir. $E^{\sim\sim}$, $E^{\sim}$ nin sıralı dualidir.

Tanım 2.2.29 E ve F, Riesz uzayları ve $T: E \to F$ bir operatör olsun.

i. Eğer E de $x_\alpha \overset{0}{\to} 0$ iken F de $Tx_\alpha \overset{0}{\to} 0$ oluyorsa T ye sıralı sürekli operatör denir.

ii. Eğer E de $x_n \overset{0}{\to} 0$ iken F de $Tx_n \overset{0}{\to} 0$ oluyorsa T ye dizisel sıralı sürekli operatör denir.

$$\mathcal{L}_n(E,F) \coloneqq \{T \in \mathcal{L}_b(E,F) : T\ sıralı\ sürekli\}$$

$$\mathcal{L}_c(E,F) \coloneqq \{T \in \mathcal{L}_b(E,F) : T\ dizisel\ sıralı\ sürekli\}$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{L}_n(E,F)$ ve $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_b(E,F)$ nin vektör altuzaylarıdır. Üstelik $\mathcal{L}_n(E,F) \subseteq \mathcal{L}_c(E,F)$ dir. F Dedekind tam olduğunda $\mathcal{L}_n(E,F)$ ve $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde banddır [1], Önerme 4.4.

E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam olsun. $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ için T nin sıfır ideali $N_T \coloneqq \{x \in E : |T||x| = 0\}$ olarak tanımlanır. Gerçekten N_T , E de idealdir.

Tanım 2.2.30 E Riesz uzayı, $\{x_n\}$ dizisi ve $x \in E$ verilsin.

i. $u \in E^+$ olmak üzere, her $\mathcal{E} > 0$ için $N \leq n, m$ iken $|x_n - x_m| < \mathcal{E}u$ olacak şekilde N doğal sayısı bulunabilirse, $\{x_n\}$ dizisine u-düzgün Cauchy dizisi denir.

ii. $v \in E^+$ olmak üzere, her $\mathcal{E} > 0$ için $N \leq n$ iken $|x_n - x| < \mathcal{E}v$ olacak şekilde N doğal sayısı bulunabilirse, $\{x_n\}$ dizisine x 'e v-düzgün yakınsaktır denir.

iii. E nin, bir $u \in E^+$ için u-düzgün Cauchy (u-düzgün yakınsak) dizisine, yerel düzgün Cauchy (yerel düzgün yakınsak) dizisi denir.

iv. E Riesz uzayında her yerel düzgün Cauchy dizisi yerel düzgün yakınsak oluyorsa, E ye yerel düzgün tam denir.

Tanım 2.2.31 E Riesz uzayı, $\{x_n\}$ dizisi ve $0 \leq v \in X$ verilsin.

i. Eğer her $\mathcal{E} > 0$ reel sayısı için bir $n_{\mathcal{E}}$ doğal sayısı vardır ki her $n \geq n_{\mathcal{E}}$ için $|x_n - x| \leq \mathcal{E}v$ oluyorsa X'deki $\{x_n\}_{n\geq 0}$ dizisine, $x \in X$ 'e (v)-relatif düzgün yakınsaktır denir ve $x_n \to x(v)$ şeklinde gösterilir.

ii. Eğer $0 \leq v \in X$ için $x_n \to x(v)$ ise bu takdirde $\{x_n\}_{n\geq 0}$ dizisine x'e (relatif) düzgün yakınsaktır denir. Bu ise $x_n \to x$(r.u) şeklinde gösterilir.

iii. X 'de her relatif düzgün Cauchy dizisi bir tek limite sahipse, X'e relatif düzgün tamdır denir.

X Archimedean ise relatif düzgün limitler tektir.

iv. Her düzgün sınırlı $(x_n)_1^\infty \subset X^+$ dizisi için $sup\{\sum_{i=1}^{n} x_i : n \in N\}$ mevcut ise X 'e düzgün tamdır denir.

2.3 f-Cebirleri ve Ortomorfizmalar

Tanım 2.3.1 B, E Riesz uzayında band olmak üzere $E = B \oplus B^d$ ise B ye projeksiyon band denir. E Riesz uzayının her x ögesiyle üretilen esas band, projeksiyon band ise E ye esas projeksiyon özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.3.2 E ve F Riesz uzayları, $T: E \to F$ operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa T ye Riesz homomorfizması denir.

$T: E \to F$ birebir ve örten operatör olsun. T nin Riesz homomorfizması olması için gerek ve yeter koşul T ve T^{-1} in pozitif operatör olmasıdır [1], Önerme 7.3.

Tanım 2.3.3 E ve F Riesz uzayları, $T: E \to F$ operatör olsun. T pozitif operatör ve her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa T ye aralık koruyan operatör denir.

Tanım 2.3.4 E, Riesz uzayı ve $T : E \to E$ operatör olsun. E nin her B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa T ye band koruyan operatör denir.

Band koruyan, sıralı sınırlı operatöre ortomorfizma denir. E nin bütün ortomorfizmalarının kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir.

E, Archimedean Riesz uzayı olsun. $T \in \mathcal{L}_b(E)$ iken $T \in Orth(E)$ olması için gerek ve yeter koşul, $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır [1], Önerme 8.2.

$\mathcal{L}_b(E)$ içinde birim operatör ile üretilen esas ideale E nin merkezi denir ve $Z(E)$ ile gösterilir. Buna göre, $Z(E) = \{S \in \mathcal{L}_b(E) : -\lambda I \leq S \leq \lambda I\}$ ve $Z(E) \subseteq Orth(E)$ dir.

Önerme 2.3.5 E, Archimedean Riesz uzayı ise $Orth(E)$ de Archimedean Riesz uzayıdır. $S, T \in Orth(E)$ ve her $x \in E^+$ için, $(S \vee T)(x) = Sx \vee Tx$ ve $(S \wedge T)(x) = Sx \wedge Tx$ dir.

İspat [1], Önerme 8.9.

Önerme 2.3.6 Archimedean Riesz uzayı üzerinde her ortomorfizma sıralı süreklidir.

İspat [1], Önerme 8.10.

Önerme 2.3.7 E Dedekind tam Riesz uzayı ve B_I , birim ile üretilen band ise $B_I = Orth(E)$ dir.

İspat [1], Önerme 8.11.

Önerme 2.3.8 G, E Dedekind tam Riesz uzayının altuzayı ve $T : G \to E$ operatörü her $x \in G^+$ için $0 \leq Tx \leq x$ eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde T, E üzerinde bir pozitif ortomorfizmaya genişler.

Özel olarak, E Dedekind tam, $x \in E^+$ ve $0 \leq |y| \leq x$ ise $-I \leq T \leq I$, $Tx = y$ olacak şekilde $T = Orth(E)$ vardır.

İspat [1], Önerme 8.15

Önerme 2.3.9 E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $T : E \to F$ pozitif operatör olsun. Aşağıdakiler denktir:

i. T Riesz homomorfizmasıdır.

ii. Her $S : E \to F$, $0 \leq S \leq T$ için $\pi T = S$, $0 \leq \pi \leq I$ olacak şekilde $\pi \in Orth(F)$ vardır.

İspat [1], Önerme 8.16

Tanım 2.3.10 E Riesz uzayı birleşmeli cebir olsun. Eğer her $x, y \in E^+$ için $xy \in E^+$ sağlanıyorsa, E ye Riesz cebiri denir.

Örnek 2.3.11

i. L Dedekind tam Riesz uzayındaki tüm sıralı sınırlı operatörler cebiri $L_b(L)$, Riesz cebiridir.

ii. X topolojik uzayı üzerindeki tüm reel değerli fonksiyonların uzayı $C(X)$, Riesz cebiridir.

Tanım 2.3.12 E, Riesz cebiri olsun. Eğer her $z \in E^+$ için, $x \wedge y = 0$ olduğunda, $xz \wedge y = zx \wedge y = 0$ oluyorsa E ye f-cebiri denir. Archimedean özelliğini sağlayan f-cebirine Archimedean f-cebiri denir.

Örnek 2.3.13

i. X üzerindeki tüm sürekli reel fonksiyonların cebiri $C(X)$, f-cebiridir.

ii. X üzerindeki tüm sınırlı sürekli reel fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı $C_b(X)$, f-cebiridir.

iii. Boştan farklı bir X kümesi üzerinde tüm reel fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı $\mathbb{R}_X$, f-cebiridir.

iv. Boştan farklı X kümesi üzerinde tüm sınırlı reel değerli fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı $l_\infty(X)$, f-cebiridir.

Önerme 2.3.14 E, Archimedean Riesz uzayı olsun. $Orth(E)$ bileşke işlemine göre birimli f-cebiridir.

İspat [21], Önerme 140.9.

Her Archimedean f-cebiri değişmelidir [21], Önerme 140.10.

Önerme 2.3.15 E, birimli Arşimedyan f-cebiri olsun. Eğer $\pi \in Orth(E)$ ise her $x \in E$ için $\pi(x) = px$ olacak şekilde $p \in E$ vardır. Tersine, her $p \in E$ için $\pi: E \to E$, $x \to px$ ile tanımlanırsa $\pi \in Orth(E)$ dir.

π nin pozitif ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul π ile uyuşan p elemanının pozitif olmasıdır.

$\pi \in Z(E)$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde birim ile üretilen ideal I_e olmak üzere, $p \in I_e$ dir.

İspat [21], Önerme 141.1.

Önerme 2.3.16 E, f-cebiri olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. Her $x, y \in E$ için $|xy| = |x||y|$ dir. Üstelik, $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$ ve $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$ dır.

ii. Her $x, y, z \in E$ için $x \perp y$ ise $xz \perp y$ ve $zx \perp y$ dir. Böylece, E deki dik tümleyen, iki taraflı halka idealidir.

iii. Eğer E içinde $x \perp y$ ise $xy = 0$ dır. Özellikle, $x^+x^- = x^-x^+ = 0$ dır.

iv. Her $x \in E$ için $x^2 \geq 0$ ve $xx^+ = x^+x = (x^+)^2 \geq 0$ dır.

İspat [21], Önerme 142.1.

E, birimli Archimedean f-cebiri ise $e = e^2 \geq 0$ olduğundan birim pozitif elemandır. Üstelik, $x \wedge e = 0$ ise $x = x \wedge x = ex \wedge x = 0$ olduğundan e, E nin zayıf sıralı birimidir.

Tanım 2.3.17 E, Riesz cebiri olsun.

i. n bir doğal sayı olmak üzere, E içinde $x^n = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa E ye yarıasaldır denir.

ii. I, E nin vektör altuzayı ve iki taraflı halka ideali ise I ya r-ideal denir.

E Riesz cebirinin yarıasal olması için gerek ve yeter koşul $x^2 = 0$ iken $x = 0$ olmasıdır.

E, yarıasal f-cebiri olsun. O halde, $x \perp y$ olması için gerek ve yeter koşul $xy = 0$ olmasıdır [21], Önerme 142.3.

E, birimli Archimedean f-cebiri ise E yarıasaldır [21], Önerme 142.5.

E, Archimedean yarıasal f-cebiri ve $x, y \in E^+, x^2 \leq yx$ ise $x \leq y$ dir [22], Önönerme 12.3.

Önerme 2.3.18 E, Archimedean Riesz uzayı ve $e > 0$ olsun. O halde, birimi e olacak şekilde E yi birimli f-cebiri yapan en fazla bir çarpma vardır.

İspat [1], Önerme 8.23.

E ve F Archimedean yarıasal f-cebirleri ve $T : E \to F$ cebir homomorfizması ise T dikliği korur, yani E de $x \perp y$ iken F de $Tx \perp Ty$ dir. Pozitif, dikliği koruyan operatörler Riesz homomorfizması olduğu için $T : E \to F$ cebir homomorfizmasının, Riesz homomorfizması olması için gerek ve yeter koşul T nin pozitif olmasıdır.

Önerme 2.3.19 E ve F Archimedean yarıasal f-cebirleri ve E yerel düzgün tam olsun. O halde, $T : E \to F$ cebir homomorfizması ise T Riesz homomorfizmasıdır.

İspat [23], Önerme 5.1.

Önerme 2.3.20 E ve F birimli Archimedean f-cebirleri, E nin birimi e ve F nin birimi e' olsun. $T : E \to F$ pozitif operatör ve $T(e) = e'$ olsun. T nin cebir homomorfizması olması için gerek ve yeter koşul, T nin Riesz homomorfizması olmasıdır.

İspat [23], Sonuç 5.5.

Önerme 2.3.21 X herhangi bir topolojik uzay ve L, $C(X)$ in yerel düzgün kapalı alt cebiri olsun. O halde L, $C(X)$ in altuzayıdır.

İspat [23], Önerme 6.3.

Örnek 2.3.22

i. $C(\mathbb{R})$, Archimedean f-cebiridir. $C(\mathbb{R})$ içinde $g(x) = x$ fonksiyonu ile üretilen ideal I olsun. Yani, $I = \{f \in C(\mathbb{R}) : 0 \leq |f| \leq \lambda |g|\}$ olsun. $g^2 \notin I$ dır. Böylece I, $C(\mathbb{R})$ içinde cebir değil, dolayısıyla r-ideal değildir.

ii. $C[0,1]$ içinde her $x \in [0,1]$ için $g(x) = x$ olsun. $R = \{f.g : f \in C[0,1]\}$ ile tanımlanırsa R, $C[0,1]$ içinde r-idealdir. Eğer $0 < x \leq 1$ için $h(x) = x\left|sin\frac{1}{x}\right|$ ve $h(0) = 0$ ise $0 \leq h \leq g$ olmasına karşın $h \notin R$ dir. Böylece R ideal değildir. Bu durum, $\pi(g) = h$ olacak şekilde bir $\pi \in Ort(C[0,1])$ bulunamadığını gösterir. Bu ise,

$C[0,1]$ in, daha sonra tanımlanacak olan, zengin merkeze sahip olma özelliğini sağlamadığını gösterir.

Önerme 2.3.23 E, birimli Archimedean f-cebiri olsun. Aşağıdakiler denktir:

i. E de her r-ideal, idealdir.

ii. E de $0 \leq u \leq v$ ise $wv = u$ olacak şekilde $w \in E^+$ vardır.

İspat [22], Önerme 17.5.

Önerme 2.3.24 E birimli Archimedean f-cebiri olsun. Aşağıdakiler denktir:

i. E de her ideal, r-idealdir.

ii. E nin birimi sıralı birimdir.

İspat [22], Gözlem 17.18

Önerme 2.3.25 E Dedekind tam Riesz uzayı ve $0 \leq \Psi \leq \Phi$, $\Phi \in E_n^\sim$ olsun. $\Psi = \Phi\pi_0$ olacak şekilde E üzerinde π_0 pozitif ortomorfizması vardır.

İspat [21], Önerme 145.12

Tanım 2.3.26 A bir Archimedean f-cebiri ve E Archimedean Riesz uzayı olsun. E ye, aşağıdaki koşulları sağlarsa A üzerinde bir sol f-modülüdür denir.

i. $A \, x \, E \rightarrow E$, $(a, f) \rightarrow a.f$ çarpımına göre E, A üzerinde bir sol modüldür. Yani her $a, b \in A$, $f, g \in E$ ve $\lambda \in R$ için,

$(a+b).f = a.f + b.f$

$a.(f+g) = a.f + a.g$

$a.(b.f) = (ab).f$

$a.(\lambda f) = (\lambda a).f = \lambda\,(a.f)$

ii. $0 \leq a \in A$ ve $0 \leq f \in E$ olduğunda, $a.f \geq 0$

iii. Her $a \in A$ için E de $f \perp g$ ise $a.f \perp g$

Sağ f-modülünün tanımı da benzer şekildedir.

2.4 Riesz Cebirlerinin İkinci Sıralı Duali

Bu kısımda, Riesz cebirlerinin ve özel olarak f-cebirlerinin ikinci sıralı dualinde Arens çarpımının davranışından bahsedilecektir.

Birleşmeli, ancak değişmeli olmayan herhangi bir A cebiri için, A nın ikinci cebirsel duali olan A^{**} nde bir çarpım tanımlanabilir [24]. "Arens çarpımı" adı verilen bu çarpım üç adımdan oluşur:

1) $A^* \times A \to A^*$
   $(f, a) \to f.a : (f.a)(b) = f(ab)$, $f \in A^*$ ve $a, b \in A$,

2) $A^{**} \times A^* \to A^*$
   $(F, f) \to T.f : (F.f)(a) = F(f.a)$, $F \in A^{**}$, $f \in A^*$ ve $a \in A$,

3) $A^{**} \times A^{**} \to A^{**}$
   $(F, G) \to F.G : (F.G)(f) = F(G.f)$, $F, G \in A^{**}$ ve $f \in A^*$.

Bu dönüşümlere göre aşağıdaki özdeşlikler sağlanır:

$$(f.a)(b) = f.(ab)$$

$$(F.f)(a) = F.(f.a)$$

$$(F.G)(f) = F.(G.f).$$

Her $F, G, H \in A^{**}$ için $(F.G).H = F.(G.H)$ olduğu görülür. Bu ise, 3) ile tanımlı Arens çarpımının birleşmeli cebir olduğunu gösterir. Ancak, değişmeli cebir değildir. A da ilk çarpım değişmeli olsa bile A^{**} deki Arens çarpımının da değişmeli olması gerekir. A^{**} nin A ya kanonik olarak gömülmesi ile, A^{**} ndeki Arens çarpımı A ya genişletilerek bu gerçekleştirilir. Şimdi, $\sigma: A \to A^{**}$ kanonik gömmesine ilişkin bazı özelliklerden bahsedilecektir (Bundan böyle, her $a \in A$ için $\sigma(a)$ ifadesi a'' ile gösterilecektir. Yani, her $f \in A^*$ için $a''(f) = f(a)$ olacaktır.):

i. Eğer A, e birim elemanına sahip ise $\sigma(e) = e''$, A^{**} nin çarpımsal birimidir. Bu ilişkiyi şöyle belirtelim: Eğer A^{**} bir E birim elemanına sahipse, bu durumda her $f \in A^*$ için $E.f = f$ olur.

ii. Eğer A değişmeli ise, her $a \in A$ ve $f \in A^*$ için $a''.f = f.a$ olur. Gerçekten, her $b \in A$ için $(a''.f)(b) = a''(f.b) = (f.b)(a) = f(ba) = f(ab) = (f.a)(b)$ elde edilir.

A, Riesz cebiri olsun. Simgesel kolaylık için A nın sıralı duali A', ikinci sıralı duali ise A'' ile, A' deki tüm sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin A'' deki bandı ise $(A')'_n$ ile gösterilecektir. Şimdi, sonraki bölümlerde kullanılacak olan önemli tanım ve özellikler verilecektir.

Tanım 2.4.1 E, Archimedean Riesz uzayı olsun. E den bir Archimedean Riesz uzayında her pozitif lineer dönüşüm sıralı sürekli ise, E ye sıralı süreklilik özelliğine sahiptir denir.

Önerme 2.4.2 Birimi e olan her A Archimedean f-cebiri için, A' sıralı duali sıralı süreklilik özelliğine sahiptir.

İspat [25], Teorem 3.3

Önerme 2.4.3 Her Archimedean birimsel f-cebiri için A''=$(A')'_n$ dir [25], Sonuç 3.4.

Önerme 2.4.4 A, Riesz cebiri olsun. Eğer $F, G \in A''$ ise, bu takdirde $F.G \in A''$ ve $|F.G| \leq |F|.|G|$ dir. Yani, A'' ikinci sıralı duali Arens çarpımına göre Riesz cebiridir. Aynı durum, $(A')'_n$ için de geçerlidir.

İspat [25], Teorem 4.1

Önerme 2.4.5 Ayıran duale sahip her Archimedean birimsel f-cebiri için, A'' Arens çarpımına göre f-cebiridir [25], Sonuç 4.5.

2.5 Banach Latisleri

Bu tez çalışması boyunca, E Riesz uzayının sıralı duali $E^{\sim}$ nin, E nin noktalarını ayırdığı kabul edilmiştir.

Tanım 2.5.1 p, E Riesz uzayı üzerinde yarınorm olmak üzere $|x| \leq |y|$ iken $p(x) \leq p(y)$ oluyorsa p ye Riesz yarınormu, ek olarak p norm ise p ye Riesz normu denir ve bu durumda $(E, \|.\|)$ uzayına normlu Riesz uzayı denir. Norma göre tam olan, normlu Riesz uzayına Banach latisi denir.

Tanım 2.5.2 Eğer her $x, y \in X^+$ için $\|x \vee y\| = max\{\|x\|, \|y\|\}$ ise, X üzerindeki $\|.\|$ latis normuna M-norm adı verilir.

Tanım 2.5.3 E Banach latisi üzerindeki norm M-norm ise, E ye AM-uzayı denir.

Önerme 2.5.4 E Riesz uzayı yerel düzgün tam ve $x \in E$ olsun. x ile E içinde üretilen ideal I_x , her $y \in I_x$ için $\|y\|_\infty = inf\{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda|x|\}$ normuna göre birimli AM-uzayıdır. I_x üzerindeki bu norma sıralı birim norm denir.

Özellikle, her Banach örgüsü yerel düzgün tam olduğundan, E Banach örgüsü, $x \in E$ için I_x birimli AM-uzayıdır.

İspat [26], Önerme 1.2.13 ve [1], Önerme 12.20

Bir Riesz uzayını Banach latisi yapan bütün normlar denktir [1], Sonuç 12.4. Böylece E Banach latisi sıralı birime sahipse, tekrar normlandırılarak AM-uzayı olur. Başka bir deyişle bir Banach latisinin birimli AM-uzayı olması, üzerindeki normun sıralı birim norm olduğunu gösterir.

Önerme 2.5.5 E bir Banach latisi olsun. E nin birimli AM-uzayı olması için gerek ve yeter koşul bir tek (homeomorfik olarak) K kompakt Hausdorff için $C(K)$ uzayına Riesz izometrik olmasıdır.

Özel olarak, E nin AM-uzayı olması için gerek ve yeter koşul $C(K)$ nın kapalı bir altuzayına Riesz izometrik olmasıdır.

İspat [1], Önerme 12.28

E, birim elemanı e olan AM-uzayı olsun. Önerme 2.3.18'den, birimi e olacak şekilde E yi birimli f-cebiri yapan en fazla bir çarpma vardır. Diğer taraftan, Önerme 2.5.5'ten bir tek kompakt Hausdorff uzayı K ve böylece $\pi: E \to C(K)$, $\pi(e) = 1$ olacak şekilde π örten, Riesz izometrisi vardır (Burada 1, K üzerindeki sabit bir fonksiyonu). $C(K)$, birimi 1 olan f-cebiri olduğundan E de $xy = \pi^{-1}\big(\pi(x)\pi(y)\big)$ ile tanımlı çarpmaya göre çarpımsal birimi e olan f-cebiridir.

Böylece E, birimli AM-uzayı, birimi e ise çarpımsal birimi e olan f-cebiri yapısına sahiptir ve her $x \in E$ için E üzerinde, $M(x) = xy$ ile çarpım operatörü tanımlanır. Üstelik M, E nin ortomorfizmasıdır.

Böylece E Banach latisi, $x \in E$ için I_x , sıralı birim norma göre birimi $|x|$ olan AM-uzayı olduğundan, I_x bol miktarda çarpım operatörüne sahiptir. Başka bir deyişle, her Banach latisi aşağıdaki yerel davranışa sahiptir:

Her esas ideal üzerinde bol miktarda çarpım operatörü vardır.

Önerme 2.5.6 E Banach latisi, $0 < u \in E$ ve $T : I_u \to I_u$ çarpım operatörü olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i. E ile I_u üzerine indirgenen norma göre T süreklidir.

ii. Eğer E σ-Dedekind tam ise, T E üzerinde bir ortomorfizmaya genişler. T pozitifken genişleme de pozitiftir.

İspat [1], Önönerme 15.6.

Tanım 2.5.7

i. E, Riesz uzayı olmak üzere her $x \in E^+$ için $0 \leq y \leq x$ iken $\pi(x) = y$ olacak şekilde $\pi \in Z(E)^+$ varsa, E ye zengin merkeze sahiptir denir.

Eğer gerekirse, $\pi \wedge I$ operatörü ile çalışılarak $0 \leq \pi \leq I$ olduğu kabul edilir.

ii. E Riesz uzayı olmak üzere her $x \in E^+$ için x ile üretilen ideal $Z(E)x$ in $\sigma(E, E^\sim)$ kapanışının altkümesi ise E ye topolojik dolu merkeze sahiptir denir. Yani, her $x \in E^+$, $0 \leq y \leq x$ için $\pi_\alpha x \to y\big(\sigma(E, E^\sim)\big)$ olacak şekilde $Z(E)$ içinde $\{\pi_\alpha\}$ ağı vardır.

Eğer her $x \in E^+$, $0 \leq y \leq x$ için $\pi_\alpha x \to y\big(\sigma(E, E^\sim)\big)$ olacak şekilde $[0, I]$ içinde $\{\pi_\alpha\}$ ağı varsa, E ye kuvvetli topolojik dolu merkeze sahiptir denir.

iii. I, E Riesz uzayı içinde ideal olsun. Her $\pi_0 \in Z(I)$ için $\pi \in Z(E)$ olacak şekilde π genişlemesi varsa I ya $Z(E)$-genişleme özelliğine sahiptir denir.

iv. E Banach latisi ve I, E içinde ideal olsun. Her $\pi_0 \in Z(I)$ için $\pi_n(x) \to \pi_0(x)$ (her $x \in I$ için) olacak şekilde $Z(E)$ içinde $\{\pi_n\}$ dizisi varsa I ya $Z(E)$-yaklaşık genişleme özelliğine sahiptir denir.

v. E normlu Riesz uzayı, $0 < u \in E$ olsun. u ile üretilen sıralı ideal, E içinde norm yoğunsa, u ya E nin $\frac{1}{2}$ -sınırlı iç noktası denir.

E zengin merkeze sahipken, topolojik dolu merkeze sahiptir.

E Banach latisi iken, E nin σ-Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul E nin esas projeksiyon özelliğine sahip olmasıdır [24], Önerme 1.2.20.

E σ-Dedekind tam Riesz uzayı ise zengin merkeze sahiptir [22], Önerme 19.4.

E Banach latisi $\frac{1}{2}$-sınırlı iç noktaya sahip ise topolojik dolu merkeze sahiptir.

E Banach latisi iken $E^{\sim} = E'$ olduğundan her $x \in E^+$ için $Z(E)x$ konveks kümesinin norm kapanışı ile $\sigma(E, E^{\sim})$ kapanışı aynıdır. Böylece E topolojik dolu merkeze sahip Banach latisi ise, her $x \in E^+$, $0 \leq y \leq x$ için $\pi_n x \to y$ (norma göre) olacak şekilde $Z(E)$ içinde $\{\pi_n\}$ dizisi vardır ve latis operasyonlarının sürekliliğinden, eğer gerekirse, $0 \leq \pi_n \leq I$ olarak alınabilir.

E Banach latisi iken, bu bilgileri aşağıdaki biçimde verebiliriz:

Dedekind tam

$\Searrow$

σ-Dedekind tam

$\Searrow$

Zengin merkeze sahip

$\Downarrow$

Birimli AM-uzayı $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$-sınırlı iç noktaya sahip $\Rightarrow$ Topolojik dolu merkeze sahip

Örnek 2.5.8

i. E, $[0,1]$ üzerinde sürekli, sonlu kırık doğrular biçimindeki fonksiyonların Riesz uzayı olsun. E, $C[0,1]$ in altlatisidir. Her $0 \leq f \in C[0,1]$ için $f \leq e$ olacak şekilde $e \in E$ vardır. E üzerindeki her pozitif fonksiyonel $C[0,1]$ üzerinde pozitif fonksiyonele genişletilebilir [21], Önerme 83.15. Böylece $E^{\sim} = C[0,1]^{\sim}$. Ancak $Z(E) = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}\}$ olduğundan E topolojik dolu merkeze sahip değildir. Gerçekten, $T \in Z(E)$ ve $f \in E$ olsun. $x \in [0,1]$ için $f_x = f - f(x)1$. Üstelik $|Tf_x| \leq \lambda f_x$ olacak şekilde λ pozitif sayısı vardır. $f_x(x) = 0$ olduğundan $|Tf_x|(x) = 0$ dır. Böylece her $x \in [0,1]$ için $(Tf)(x) = (T1)(x)f(x)$ dir. $T1$, $[0,1]$ üzerinde sabit fonksiyondur. Eğer $T1$ sabit fonksiyon değilse, bir açık aralıkta $T(T1)(x) = (ax + b)^2$ dir. Böylece bir açık aralıkta $T(T1)(x) = a^2x^2 + 2abx + b^2$ dir. Bu, $T(T1)$ in E de olmasıyla çelişir. Böylece, $(Tf)(x) = (T1)(x)f(x)$ olduğundan $\alpha_T = T1$ olmak üzere $Tf = \alpha_T f$ dir.

ii. $C[0,1]$ topolojik dolu merkeze sahip olmasına rağmen zengin merkeze sahip değildir. Bu durum Örnek 2.3.22 (ii)'de gösterilmiştir.

BÖLÜM 3

f-CEBİRLERİNİN SIRALI DUALİNDE OPERATÖRLER

A, f-cebiri olsun. A nın sıralı duali A', ikinci sıralı duali A'' olsun. A nın aynı zamanda f-cebiri olan ikinci sıralı duali A'' üzerinde bir çarpım tanımlanabilir. Bu çarpım dört adımdan oluşur [27]:

1) $A \times A \to A$
   $(a, b) \to a.b$, $a, b \in A$,

2) $A \times A' \to A'$
   $(a, f) \to f.a : (f.a)(b) = f(ab)$, $a, b \in A, f \in A'$

3) $A'' \times \mathrm{A}' \to \mathrm{A}'$
   $(F, f) \to T.f : (F.f)(a) = F(f.a)$, $a \in A, f \in A', F \in A''$

4) $A'' \times A'' \to A''$
   $(F, G) \to F.G : (F.G)(f) = F(G.f)$, $f \in A'$, $F, G \in A''$

A, ayıran sıralı duale sahip f-cebiri ve $f \in A'$ olsun. Her $F \in A''$ için $T_f(F) = F.f$ şeklinde tanımlanan $T_f : A'' \to A'$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $f \in A'$ için $V_F(f) = F.f$ olmak üzere, her $F \in A''$ için $V(F) = V_F$ ile tanımlı $V : A'' \to Orth(A')$ dönüşümü lineer, pozitif, cebir ve Riesz homomorfizmasıdır.

Teorem 3.1 $0 \leq f \in A'$ için T_f aralık koruyan latis homomorfizmasıdır.

İspat T_f pozitiftir. Şimdi sırasıyla aşağıdakiler gösterilmelidir.

i) T_f lineer dönüşümdür.

ii) T_f latis homomorfizmasıdır.

i) $T_f : A'' \to A'$

$T_f(F) = F.f$ for $F \in A''$, $f \in A'$.

T_f lineer dönüşümdür.

a) $T_f(F+G) = T_f(F) + T_f(G)$. Bunu göstermek için, her $x \in A$ için

$T_f(F+G)x = \big(T_f(F)\big)x + \big(T_f(G)\big)x$ olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} T_f(F+G)x &= \big((F+G).f\big)x \\ &= (F+G)(f.x) \\ &= F(f.x) + G(f.x) \\ &= (F.f).x + (G.f).x \\ &= \big(T_f(F)\big)x + \big(T_f(G)\big)x. \end{aligned}$$

b) $T_f(\alpha F) = \alpha\big(T_f(F)\big)$. Bunu ispatlamak için, her $x \in A$ için

$\big(T_f(\alpha F)\big)x = \alpha\big(T_f(F)\big)x$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \big(T_f(\alpha F)\big)x &= \big((\alpha F).f\big)x \\ &= (\alpha F)(f.x) \\ &= (\alpha F.f)(x) \\ &= \alpha(F.f).x \\ &= \alpha\big(T_f(F)\big)x. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, T_f bir lineer dönüşümdür.

ii) $V : A'' \to Orth(A')$ dönüşümü latis homomorfizması ve her $F, G \in A''$ için

$V_F, V_G \in Orth(A')$ olduğundan,

$$\begin{aligned} T_f(F \vee G) &= (F \vee G).f \\ &= V_{F \vee G}(f) \\ &= \big(V(F \vee G)\big)(f) \\ &= \big(V(F) \vee V(G)\big)(f) \\ &= (V(F)(f)) \vee (V(G)(f)) \end{aligned}$$

$$= F.f \vee G.f$$

$$= T_f(F) \vee T_f(G)$$

O halde, T_f latis homomorfizmadır.

Sonuç 3.2 $f \in A'$ ve $F \in A''$ olsun. Bu durumda $|F.f| = |F|.|f|$ olur. Ayrıca, eğer A' nde $f \perp g$ ise her $F, G \in A''$ için $F.f \perp G.g$ sağlanır.

İspat $f \in A'$ olsun. f yi $f = f^+ - f^-$ şeklinde bileşenlerine ayıralım. $f^+ \wedge f^- = 0$ ve $V_F \in Orth(A')$ olduğundan $V_F(f^+) \perp V_F(f^-)$ olur. Teorem 3.1'den ve $|f| = f^+ + f^-$ ve $= f^+ - f^-$ formülleri kullanılarak $|F.f| = |F|.|f|$ eşitliği elde edilir.

A' nde $f \perp g$ olsun. O halde her $|F.f| \wedge |G.g| = 0$ eşitliği elde edilir ki bu da $F, G \in A''$ için $F.f \perp G.g$ olduğu anlamına gelir.

A'' nin T_f altındaki görüntüsü $R(f) = \{F.f \,:\, F \in A''\}$ olsun.

Sonuç 3.3 A, f-cebiri ve $f \in A'$ ise, $R(f) = R(|f|)$ ifadesi sağlanır. Üstelik, $R(f)$, A' nde bir sıralı idealdir.

İspat $T_{|f|}$ aralık koruyan latis homomorfizması olduğundan $R(|f|)$, A' nde bir sıralı idealdir. Sonuç 3.2'den $R(f) \subseteq R(|f|)$ olduğu sonucuna varılır. Aynı zamanda $R(|f|) \subseteq R(f)$ olduğundan sonuç sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.4 A, çarpanlara ayrılma özelliğine sahip bir f-cebiri ve $f \in A'$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $f.x = 0$ ise, $f = 0$ dır.

İspat A, çarpanlara ayrılma özelliğine sahip olduğundan her $a \in A^+$ için $a = xy$ olacak şekilde $x, y \in A$ mevcuttur. Çarpanlara ayrılma özelliğinin tanımından $f = 0$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

Teorem 3.5 A, çarpanlara ayrılma özelliğine sahip f-cebiri olsun. Eğer $f, g \in A'$ ise, $f \perp g$ olması için gerek ve yeter koşul $R(f) \perp R(g)$ olmasıdır.

İspat A' nde $f \perp g$ olsun. Sonuç 3.2'den her $F, G \in A''$ için $F.f \perp G.g$ dir. Bu da $R(f) \perp R(g)$ olduğunu ifade eder.

Tersine, eğer $R(f)$ ve $R(g)$ ayrık iseler, her $F \in (A'')^+$ için

$$F.(|f| \wedge |g|) = 0$$

eşitliği elde edilir. Özel olarak, her $x \in A$ için $x'' \in A''$ kanonik tasviri

$$x''.(|f| \wedge |g|) = (|f| \wedge |g|).x = 0$$

eşitliğini sağlar.

A, f-cebiri ve $T \in L_b(A')$ olsun. Eğer her $f \in A'$ için $R(Tf) \subseteq R(f)$ ise A' nin tüm f-ortomorfizmalarının koleksiyonu $Orth\ (A', A'; A'')$ ile gösterilecektir.

Bir sonraki sonuç, f-ortomorfizmaları ve çarpanlara ayırma özelliğine sahip f-cebirlerinin sıralı dualinin ortomorfizmaları arasındaki ilişki ile ilgilidir. $Orth(A')$, $L_b(A')$ nde bir banddır [28].

Teorem 3.6 A, f-cebiri olsun. O halde $Orth(A', A'; A'')$, $L_b(A')$ nin lineer altuzayıdır ve

$$Orth(A') \subseteq Orth(A', A'; A'')$$

dır. Ayrıca, eğer A çarpanlara ayrılma özelliğine sahip ise

$$Orth(A', A'; A'') = Orth(A')$$

olur.

İspat $Orth(A', A'; A'')$, $L_b(A')$ nin lineer altuzayıdır. Aynı zamanda

$$Orth(A') \subseteq Orth(A', A'; A'')$$

kapsaması vardır.

A, ayıran sıralı duale sahip f-cebiri ve $T \in L_b(A')$ olsun. Eğer her $f \in A'$ ve $G \in A''$ için $T(G.f) = G.(T(f))$ ise T'ye A'' ye göre f-lineerdir denir. A' üzerindeki tüm f-lineer operatörlerin kümesini $L_b(A', A'; A'')$ ile göstereceğiz. $L_b(A', A'; A'')$, $L_b(A')$ nde bir banddır [28].

Teorem 3.7 A, ayıran sıralı duale sahip f-cebiri olsun. O halde,

$$Orth(A') \subseteq L_b(A', A'; A'')$$

sağlanır.

Aşağıdaki sonuç için, sıralı sınırlı bir operatörün sıralı adjointinin sıralı sürekli olduğu kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 3.8 $T \in L_b(A', A'; A'')$ olsun. Bu durumda, T nin T' adjointi, her $F \in A''$ ve $f \in A'$ için $T'(F).f = F.T(f)$ eşitliğini sağlar. Öte yandan, her $F, G \in A''$ için $G.T'(F) = T'(G.F)$ dir.

İspat $T \in L_b(A', A'; A'')$ ve A'' değişmeli f-cebiri olduğundan, her $F \in A''$, $f \in A'$ ve $x \in A$ için $(T'(F).f)(x) = \big(F.T(f)\big)(x)$ eşitliği elde edilir. Böylece, $T'(F).f = F.T(f)$ olur. $F, G \in A''$ olsun. Buradan da, $G.T'(F) = T'(G.F)$ olduğu görülür.

Teorem 3.9 $L_b(A', A'; A'') \subseteq Orth(A', A'; A'')$ dir.

Teorem 3.6, Teorem 3.7 ve Teorem 3.9'un birleştirilmesiyle aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.10 Her A f-cebiri için

$$Orth(A') \subseteq L_b(A', A'; A'') \subseteq Orth(A', A'; A'')$$

dir. Özel olarak, A faktorizasyon özelliğine sahipse, o halde

$$Orth(A') = L_b(A', A'; A'') = Orth(A', A'; A'')$$

olur.

BÖLÜM 4

f-MODÜLLERİNİN SIRALI DUALİ İLE İLGİLİ BAZI ÖZELLİKLER

A, birimsel f-cebiri olmak üzere A nın sıralı duali A', ikinci sıralı duali A'' olsun. L Riesz uzayı olsun. Eğer L, A üzerinde f-modülü ve L nin sıralı duali L', ikinci sıralı duali L'' ise, aşağıdaki dönüşümler tanımlanabilir:

1) $L \times L' \to A'$
   $(x, f) \to x.f : (x.f)(a) = f(a.x)\ , x \in L, f \in L', a \in A,$

2) $A'' \times L' \to L'$
   $(F, f) \to T.f : (F.f)(x) = F(f.x)\ , x \in L, f \in L', F \in A'',$

3) $A'' \times L'' \to L''$
   $\left(F, \hat{f}\right) \to F.\hat{f} : \left(F.\hat{f}\right)(f) = \hat{f}(F.f)\ , f \in L', F \in A'', \hat{f} \in L''.$

A nın aynı zamanda f-cebiri olan ikinci sıralı duali A'' üzerinde 3) dönüşümünde verildiği şekilde bir çarpım tanımlanabilir. A, ayıran duale sahip birimsel f-cebiri, L, A üzerinde f-modülü, $f \in L'$ ve $F \in A''$ olsun. Her $F \in A''$ için $T_f(F) = F.f$ şeklinde tanımlı $T_f : A'' \to L'$ dönüşümü verilsin. Her $f \in L'$ için $V_F(f) = F.f$ koşulunu sağlayan her $F \in A''$ için $V(F) = V_F$ şeklinde tanımlanan $V : A'' \to Orth(L')$ dönüşümü lineer, pozitif, cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. Dolayısıyla, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1 L, f-cebiri üzerinde bir f-modülü ve $0 \leq f \in L'$ olsun. Her $F \in A''$ için $T_f(F) = F.f$ şeklinde tanımlı $T_f : A'' \to L'$ dönüşümü aralık koruyan latis homomorfizmasıdır.

İspat T_f pozitiftir. Şimdi sırasıyla aşağıdakileri ispatlayalım.

i. T_f lineer dönüşümdür.

ii. T_f latis homomorfizmasıdır.

i. $T_f : A'' \to L'$

$T_f(F) = F.f$ for $F \in A''$, $f \in L'$.

T_f lineer dönüşümdür.

1) $T_f(F+G) = T_f(F) + T_f(G)$. Bunu göstermek için her $x \in L$ için

$T_f(F+G)x = \big(T_f(F)\big)x + \big(T_f(G)\big)x$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
T_f(F+G)x &= \big((F+G).f\big)x \\
&= (F+G)(f.x) \\
&= F(f.x) + G(f.x) \\
&= (F.f).x + (G.f).x \\
&= \big(T_f(F)\big)x + \big(T_f(G)\big)x.
\end{aligned}$$

2) $T_f(\alpha F) = \alpha\big(T_f(F)\big)$. Bunu ispatlamak için her $x \in L$ için

$\big(T_f(\alpha F)\big)x = \alpha\big(T_f(F)\big)x$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
\big(T_f(\alpha F)\big)x &= \big((\alpha F).f\big)x \\
&= (\alpha F)(f.x) \\
&= (\alpha F.f)(x) \\
&= \alpha(F.f).x \\
&= \alpha\big(T_f(F)\big)x.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, T_f bir lineer dönüşümdür.

ii. $V : A'' \to Orth(L')$ dönüşümü latis homomorfizması ve her $F, G \in A''$ için

$V_F, V_G \in Orth(L')$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
T_f(F \vee G) &= (F \vee G).f \\
&= V_{F \vee G}(f)
\end{aligned}$$

$$= \big(V(F \vee G)\big)(f)$$

$$= \big(V(F) \vee V(G)\big)(f)$$

$$= (V(F)(f)) \vee (V(G)(f))$$

$$= F.f \vee G.f$$

$$= T_f(F) \vee T_f(G)$$

O halde, T_f latis homomorfizmadır.

Teorem 4.2 L, A f-cebiri üzerinde bir f-modülü olsun. Her $f \in L'$ ve $F \in A''$ için $|F.f| = |F|.|f|$ elde ederiz. Ayrıca, L' nde $f \perp g$ ise, her $F, G \in A''$ için $F.f \perp G.g$ sağlanır.

İspat $f \in L'$ olsun. f yi $f = f^+ - f^-$ şeklinde bileşenlerine ayıralım. $f^+ \wedge f^- = 0$ ve $V_F \in Orth(L')$ olduğundan $V_F(f^+) \perp V_F(f^-)$ elde ederiz. Teorem 4.1'den ve aynı zamanda $|f| = f^+ + f^-$ ve $f = f^+ - f^-$ formülleri de kullanılarak

$$|F.f| = |F.f^+| + |F.f^-|$$

$$= \left|T_{f^+}(F)\right| + \left|T_{f^-}(F)\right|$$

$$= T_{f^+}(|F|) + T_{f^-}(|F|)$$

$$= |F|.f^+ + |F|.f^-$$

$$= |F|.|f|.$$

elde edilir.

L' nde $f \perp g$ olsun. O halde,

$$|F.f| \wedge |G.g| = |F|.|f| \wedge |G|.|g|$$

$$\leq \big((|F| + |G|).|f|\big) \wedge \big((|F| + |G|).|g|\big)$$

$$= (|F| + |G|).(|f| \wedge |g|)$$

$$= 0$$

elde edilir ki, bu da her $F, G \in A''$ için $F.f \perp G.g$ olduğunu ifade eder.

A'' nin T_f altındaki görüntüsü $R(f) = \{F.f : F \in A''\}$ ile gösterilsin. $R(f)$, L' nin bir lineer alt uzayıdır.

Tanım 4.3 A, Archimedean f-cebiri olsun. L nin A üzerinde bir f-modülü ve $f \in L'$ olduğunu varsayalım. L nin k-özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için $f.a = 0$ olduğunda $f = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.4 A bir f-cebiri ve L, A üzerinde k-özelliğine sahip bir f-modülü olsun. Eğer $f, g \in L'$ ise bu takdirde $f \perp g$ olması için gerek ve yeter şart $R(f) \perp R(g)$ olmasıdır.

İspat L' nde $f \perp g$ olsun. Teorem 4.2'den her $F, G \in A''$ için $F.f \perp G.g$ dir. Bu ise, $R(f) \perp R(g)$ olduğunu ifade eder.

Tersine, $R(f)$ ve $R(g)$ ayrık iseler, her $F \in (A'')^+$ için

$$\begin{aligned} F.(|f| \wedge |g|) &= V_F(|f| \wedge |g|) \\ &= V_F(|f|) \wedge V_F(|g|) \\ &= F.|f| \wedge F.|g| \\ &= |F.f| \wedge |F.g| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Özel olarak, her $a \in A$ için, $a'' \in A''$ kanonik tasviri aynı zamanda

$$a''.(|f| \wedge |g|) = (|f| \wedge |g|).a = 0$$

eşitliğini sağlar. Önceki tanımdan, $|f| \wedge |g| = 0$ elde edilir ki, bu ise $f \perp g$ olması anlamına gelir.

A, ayıran sıralı duale sahip birimsel f-cebiri, L, A üzerinde bir f-modülü ve $T \in L_b(L')$ olsun. Eğer, her $f \in L'$ ve $G \in A''$ için $T(G.f) = G.(T(f))$ ise T ye A'' ye göre f-lineerdir denir. L' üzerindeki tüm f-lineer operatörlerin kümesi $L_b(L', L'; A'')$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.5 A, ayıran sıralı duale sahip birimsel f-cebiri ve L, A üzerinde bir f-modülü olsun. O halde, $Orth(L') \subseteq L_b(L', L'; A'')$ dir.

İspat $Orth(L')$ nin değişmeli olduğu açıktır. $\pi \in Orth(L')$ alalım. Her $f \in L'$ ve $G \in A''$ için $\pi(G.f) = \pi(V_G(f)) = V_G(\pi(f)) = G.(\pi(f))$ eşitliği elde edilir. Böylece, $\pi \in L_b(L', L'; A'')$ olur.

BÖLÜM 5

f-MODÜLLERİNİN İKİNCİ SIRALI DUALİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

A, birimsel f-cebiri olmak üzere A nın sıralı duali A', ikinci sıralı duali A'' olsun. L Riesz uzayı olsun. Eğer L, A üzerinde f-modülü ve L nin sıralı duali L', ikinci sıralı duali L'' ise, aşağıdaki dönüşümler tanımlanabilir:

(1) $L \times L' \to A'$

$(x, f) \to x.f \,:\, (x.f)(a) = f(a.x)\,,\, x \in L, f \in L', a \in A,$

(2) $A'' \times L' \to L'$

$(F, f) \to T.f \,:\, (F.f)(x) = F(f.x)\,,\, x \in L, f \in L', F \in A'',$

(3) $A'' \times L'' \to L''$

$(F, \hat{f}) \to F.\hat{f} \,:\, (F.\hat{f})(f) = \hat{f}(F.f)\,,\, f \in L', F \in A'', \hat{f} \in L''.$

A nın aynı zamanda f-cebiri olan ikinci sıralı duali A'' üzerinde (3) dönüşümünde verildiği şekilde bir çarpım tanımlanabilir. A, ayıran duale sahip birimsel f-cebiri, L, A üzerinde f-modülü, $F \in A''$ ve $\hat{f} \in L''$ olsun. Her $F \in A''$ için $T_{\hat{f}}(F) = F.\hat{f}$ şeklinde tanımlı $T_{\hat{f}} : A'' \to L''$ dönüşümü verilsin. Her $\hat{f} \in L''$ için $V_F(\hat{f}) = F.\hat{f}$ koşulunu sağlayan her $F \in A''$ için $V(F) = V_F$ şeklinde tanımlanan $V : A'' \to Orth(L'')$ dönüşümü lineer, pozitif, cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. Dolayısıyla, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1 L, A f-cebiri üzerinde bir f-modülü ve $0 \leq \hat{f} \in L''$ olsun. Her $F \in A''$ için $T_{\hat{f}}(F) = F.\hat{f}$ şeklinde tanımlı $T_{\hat{f}} : A'' \to L''$ dönüşümü latis homomorfizmasıdır.

İspat $T_{\hat{f}}$ pozitiftir. Şimdi sırasıyla aşağıdakileri ispatlayalım.

i. $T_{\hat{f}}$ lineer dönüşümdür.

ii. $T_{\hat{f}}$ latis homomorfizmasıdır.

i. $T_{\hat{f}} : A'' \to L''$

$T_{\hat{f}}(F) = F.\hat{f}$ for $F \in A''$, $\hat{f} \in L''$.

$T_{\hat{f}}$ lineer dönüşümdür.

a) $T_{\hat{f}}(F+G) = T_{\hat{f}}(F) + T_{\hat{f}}(G)$. Bunu göstermek için her $f \in L'$ için

$$T_{\hat{f}}(F+G)f = \big(T_{\hat{f}}(F)\big)f + \big(T_{\hat{f}}(G)\big)f$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} T_{\hat{f}}(F+G)f &= \Big((F+G).\hat{f}\Big)f \\ &= (F+G)\big(\hat{f}.f\big) \\ &= F\big(\hat{f}.f\big) + G(\hat{f}.f) \\ &= \big(F.\hat{f}\big).f + \big(G.\hat{f}\big).f \\ &= \big(T_{\hat{f}}(F)\big)f + \big(T_{\hat{f}}(G)\big)f. \end{aligned}$$

b) $T_{\hat{f}}(\alpha F) = \alpha\big(T_{\hat{f}}(F)\big)$. Bunu ispatlamak için her $f \in L'$ için

$$\big(T_{\hat{f}}(\alpha F)\big)f = \alpha\big(T_{\hat{f}}(F)\big)f$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \big(T_{\hat{f}}(\alpha F)\big)f &= \Big((\alpha F).\hat{f}\Big)f \\ &= (\alpha F)(\hat{f}.f) \\ &= \big(\alpha F.\hat{f}\big)(f) \\ &= \alpha\big(F.\hat{f}\big).f \\ &= \alpha\big(T_{\hat{f}}(F)\big)f. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $T_{\hat{f}}$ bir lineer dönüşümdür.

ii. $V : A'' \to Orth(L'')$ dönüşümü latis homomorfizması ve her $F, G \in A''$ için

$V_F, V_G \in Orth(L'')$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
T_{\hat{f}}(F \vee G) &= (F \vee G).\hat{f} \\
&= V_{F\vee G}(\hat{f}) \\
&= \big(V(F \vee G)\big)(\hat{f}) \\
&= \big(V(F) \vee V(G)\big)(\hat{f}) \\
&= \big(V(F)(\hat{f})\big) \vee \big(V(G)(\hat{f})\big) \\
&= F.\hat{f} \vee G.\hat{f} \\
&= T_{\hat{f}}(F) \vee T_{\hat{f}}(G)
\end{aligned}
$$

O halde, $T_{\hat{f}}$ latis homomorfizmadır.

Teorem 5.2 L, A f-cebiri üzerinde bir f-modülü olsun. Her $\hat{f} \in L''$ ve $F \in A''$ için $|F.\hat{f}| = |F|.|\hat{f}|$ elde ederiz. Ayrıca, L'' nde $\hat{f} \perp \hat{g}$ ise, her $F, G \in A''$ için $F.\hat{f} \perp G.\hat{g}$ sağlanır.

İspat $\hat{f} \in L''$ alalım. $\hat{f}$ yi $\hat{f} = \hat{f}^+ - \hat{f}^-$ şeklinde bileşenlerine ayıralım. $\hat{f}^+ \wedge \hat{f}^- = 0$ ve $V_F \in Orth(L'')$ olduğundan $V_F(\hat{f}^+) \perp V_F(\hat{f}^-)$ elde edilir. Teorem 5.1'den ve aynı zamanda $|\hat{f}| = \hat{f}^+ + \hat{f}^-$ ve $\hat{f} = \hat{f}^+ - \hat{f}^-$ formülleri de kullanılarak

$$
\begin{aligned}
|F.\hat{f}| &= |F.\hat{f}^+| + |F.\hat{f}^-| \\
&= |T_{\hat{f}^+}(F)| + |T_{\hat{f}^-}(F)| \\
&= T_{\hat{f}^+}(|F|) + T_{\hat{f}^-}(|F|) \\
&= |F|.\hat{f}^+ + |F|.\hat{f}^- \\
&= |F|.|\hat{f}|.
\end{aligned}
$$

elde edilir.

L'' nde $\hat{f} \perp \hat{g}$ olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
|F.\hat{f}| \wedge |G.\hat{g}| &= |F|.|\hat{f}| \wedge |G|.|\hat{g}| \\
&\leq \big((|F| + |G|).|\hat{f}|\big) \wedge \big((|F| + |G|).|\hat{g}|\big) \\
&= (|F| + |G|).\big(|\hat{f}| \wedge |\hat{g}|\big)
\end{aligned}
$$

$$= 0$$

elde edilir, bu da her $F, G \in A''$ için $F.\hat{f} \perp G.\hat{g}$ olduğunu ifade eder.

A'' nin $T_{\hat{f}}$ altındaki görüntüsü $R(\hat{f}) = \{F.\hat{f} : F \in A''\}$ ile gösterilsin. $R(\hat{f})$, L'' nin bir lineer alt uzayıdır.

Tanım 5.3 A, Archimedean f-cebiri olsun, L A üzerinde f-modülü ve $\hat{f} \in L''$ olduğunu olsun. Eğer $\hat{f}, \hat{g} \in L''$ ise $\hat{f} \perp \hat{g}$ olması için gerek ve yeter koşul her $F \in A''$ için $F.\hat{f} = 0$ olduğunda $f = 0$ olması ise L ye s-özelliğine sahiptir denir.

Teorem 5.4 A, f-cebiri ve L, A üzerinde s-özelliğine sahip bir f-modülü olsun. Eğer $\hat{f}, \hat{g} \in L''$ ise bu takdirde $\hat{f} \perp \hat{g}$ olması için gerek ve yeter şart $R(\hat{f}) \perp R(\hat{g})$ olmasıdır.

İspat L'' nde $\hat{f} \perp \hat{g}$ olsun. Teorem 5.2'den her $F, G \in A''$ için $F.\hat{f} \perp G.\hat{g}$ dir. Bu ise, $R(\hat{f}) \perp R(\hat{g})$ olduğunu ifade eder.

Tersine, $R(\hat{f})$ ve $R(\hat{g})$ ayrık iseler, her $F \in (A'')^+$ için

$$\begin{aligned} F.\left(|\hat{f}| \wedge |\hat{g}|\right) &= V_F\left(|\hat{f}| \wedge |\hat{g}|\right) \\ &= V_F\left(|\hat{f}|\right) \wedge V_F(|\hat{g}|) \\ &= F.|\hat{f}| \wedge F.|\hat{g}| \\ &= |F.\hat{f}| \wedge |F.\hat{g}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Özel olarak, her $a \in A$ için, $a'' \in A''$ kanonik tasviri aynı zamanda

$$a''.\left(|\hat{f}| \wedge |\hat{g}|\right) = \left(|\hat{f}| \wedge |\hat{g}|\right).a = 0$$

eşitliğini sağlar. Önceki tanımdan, $|\hat{f}| \wedge |\hat{g}| = 0$ elde ederiz ki, bu ise $\hat{f} \perp \hat{g}$ olması anlamına gelir.

A, ayıran sıralı duale sahip birimsel f-cebiri, L, A üzerinde f-modülü ve $T \in L_b(L'')$ olsun. Eğer, her $\hat{f} \in L''$ ve $G \in A''$ için $T(G.\hat{f}) = G.(T(\hat{f}))$ ise T 'ye A'' ye göre f-lineerdir denir. L'' üzerindeki tüm f-lineer operatörlerin kümesi $L_b(L'', L''; A'')$ ile gösterilecektir.

Teorem 5.5 A, ayıran sıralı duale sahip birimsel f-cebiri ve L, A üzerinde f-modülü olsun. O halde, $Orth(L'') \subseteq L_b(L'', L''; A'')$ dir.

İspat $Orth(L'')$ nin değişmeli olduğu açıktır. $\pi \in Orth(L'')$ olsun. Her $\hat{f} \in L''$ ve $G \in A''$ için $\pi\big(G.\hat{f}\big) = \pi\big(V_G(\hat{f})\big) = V_G\big(\pi(\hat{f})\big) = G.\big(\pi(\hat{f})\big)$ eşitliği elde edilir. Böylece, $\pi \in L_b(L'', L''; A'')$ olur.

BÖLÜM 6

BİR DUAL VEKTÖR LATİSİNİN İDEAL MERKEZİ

X bir vektör latisi ve X ’in sıralı duali X' olsun. Bu bölümde, $Orth(X')$ nin ne zaman X' nde ideal merkezi olduğu araştırılacaktır. Wickstead’in 1977 yılında “Representation and Duality of Multiplication Operators on Archimedean Riesz Spaces” [29] çalışmasında sormuş olduğu soruyu, Toumi 2014 yılında “When Orthomorphisms are in the Ideal Center” isimli makalesinde cevaplamıştır. Tezin bu bölümünde, Toumi’nin [30]’daki çalışmasının dual versiyonu araştırılacaktır. Öncelikle, bu bölümün temelini oluşturan tanımlardan bahsedilecektir.

X bir Archimedean vektör latisi olsun. $Orth(X)$, X üzerindeki tüm ortomorfizmaların vektör latisini göstersin. X ’in ideal merkezi $Z(X)$ ise, her $x \in X^+$ için $-\lambda x \leq \pi(x) \leq \lambda x$ olacak şekilde negatif olmayan λ reel sayısı için π’leri içeren $Orth(X)$ in alt latisini göstersin.

Eğer X bir f-cebiri ise $\forall\, x, y \in X$ için $\pi_f(y) = xy$ olmak üzere $\rho(x) = \pi_x$ şeklinde tanımlı $\rho: X \longrightarrow Orth(X)$ dönüşümü cebir ve latis homomorfizmasıdır. Eğer $\rho(x) \in Z(X)$ ise f ye sınırlıdır denir. Eğer X deki her x elemanı sınırlı ise X’e sınırlı f-cebiridir denir [31].

X bir topolojik cebir ve $M(X)$, X deki tüm maksimal iki yanlı ideallerin kümesi olsun. $M(X)$ uzayı hk-topolojisi ile donatılmıştır: $S \subset M(X)$ olsun. S deki tüm ideallerin kesişimi $K(S)$ ve X’in iki yanlı her I ideali için $H(I) = \{M \in M(X): I \subset M\}$ olmak üzere $S = H\big(K(S)\big)$ ise, S kapalıdır. Eğer X, aynı zamanda bir bağdaşık topoloji ile donatılmış ise, $M(X)$ in kapalı ideallerden oluşan bir $m(X)$ alt kümesini göz önüne alalım. $m(X)$ 'e kısıtlanmış H ve K'yı göstermek için h ve k harflerini kullanalım.

Şimdi vereceğimiz teorem ve Toumi'nin [30], Basly ve Triki'nin [31]'deki çalışmalarından görülür.

Teorem 6.1 X bir relatif düzgün tam f-cebiri olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:

i. X sınırlıdır.

ii. X de her maksimal modüler halka ideali düzgün kapalıdır.

iii. X de her maksimal modüler halka ideali, $X \to \mathbb{R}$ bir latis ve cebir homomorfizmasının çekirdeğidir.

iv. X de her maksimal modüler halka ideali , bir maksimal sıralı idealdir.

Teorem 6.2 X, relatif düzgün tam birimsel f-cebiri olsun. O halde, relatif düzgün topolojiye göre $M(X) = m(X)$ olması için gerek ve yeter koşul

i. Her düzgün sonlu üretilmiş halka ideali, X in bir düzgün kapalı maximal halka ideali içinde bulunur.

ii. $m(X)$, hk-topolojisinde kompakttır.

Önerme 6.3 Bir relatif düzgün tam yarıasal X f-cebirinin her maksimal halka ideali bir sıralı idealdir.

Şimdi, [30]'daki çalışmanın dual versiyonunu verelim.

Teorem 6.4 X bir relatif düzgün tam vektör latisi olsun. Aşağıdaki sonuçlar denktir:

i. $Orth(X') = Z(X')$

ii. Relatif düzgün topolojiye göre $M\big(Orth(X')\big) = m\big(Orth(X')\big)$dır.

iii. Her düzgün sonlu üretilmiş halka ideali $Orth(X')$ nin bir düzgün kapalı maksimal halka ideali içinde bulunur ve hk-topolojisinde $m\big(Orth(X')\big)$ kompakttır.

İspat

i⇒ii X' Dedekind tam olduğundan, $Orth(X')$ de Dedekind tamdır. Dolayısıyla, $Orth(X')$ relatif düzgün tamdır. İlk olarak, $\pi \in Orth(X')$ için

$$P(\pi) = inf\{\lambda \in \mathbb{R} : -\lambda Id_{X'} \leq \pi \leq \lambda Id_{X'}\}$$

ölçü fonksiyonunu tanımlayalım. $Orth(X') = Z(X')$ olduğundan, $P(\pi)$ M-normdur. Ayrıca $(Orth(X'), P)$ bir Banach latisidir. $Orth(X')$, birleşim altında birimsel f-cebiri olduğundan, aynı zamanda Banach birimsel f-cebiridir. $Orth(X')$ nde her maksimal halka ideali düzgün kapalı olduğundan, $Orth(X')$ nde her maksimal halka ideali norm topolojiye göre kapalıdır.
ii⇔iii Teorem 6.2'den görülür.

ii⇒i Varsayalım ki, tersine $Z(X') \subsetneq Orth(X')$ olsun. O halde $\pi \notin Z(X')$ olacak şekilde $\pi \in (Orth(X'))^+$ vardır. $\varphi \in \pi \wedge Id_A \in (Orth(A))^+$ ve $\forall n \in N$ için $w_n = \pi - (\pi \wedge n\varphi) > 0$ olsun. $\pi \notin Z(X')$ olduğundan, $w_n = \pi - (\pi \wedge n\varphi) > 0$ dır. O halde, $\{w_n\}^d$, $Orth(A)$ nın relatif düzgün kapalı sıralı ve halka idealidir ve $\forall n \geq 1$ için $\{w_n\}^d \subset \{w_{n+1}\}^d$ dir. $B = \bigcup_{n\geq 1}\{w_n\}^d$ olsun. Bu durumda B, $Orth(X')$ nin bir relatif halka idealidir. Dolayısıyla $(Id_{X'} - \varphi) \wedge (\pi - \varphi) = 0$ dır. $\forall\, \psi \in Orth(X')$ için $\psi(Id_{X'} - \varphi) \wedge (\pi - \varphi) = 0$ dır. Sonuç olarak, $\psi(Id_{X'} - \varphi) = \psi - \psi\varphi \in \{w_n\}^d$ ve dolayısıyla $\forall\, \psi \in Orth(X')$ için $\psi - \psi\varphi \in B$ dir. $B \subset M$ olacak şekilde bir kapalı maksimal M halka ideali mevcut olduğundan ve $M(Orth(X')) = m(Orth(X'))$ olduğundan, Önerme 6.3'e göre M, $Orth(X')$ nin relatif düzgün kapalı sıralı idealidir. O halde $Orth(X')/M$ vektör latis bölümü Archimedeandır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\pi_n = (\pi \vee n\varphi) - \pi$ olsun. Böylece $\pi_n w_n = 0$ olur. Dolayısıyla, $\pi_n \in \{w_n\}^d \in B$ dir. M modül sınıflarına geçerek, $\forall n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}\overline{\pi_n} &= \overline{(\pi \vee n\varphi) - \pi}\\ &= (\bar{\pi} \vee \overline{n\varphi}) - \bar{\pi}\\ &= \bar{0}\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\forall n \geq 1$ için $\bar{0} \leq \overline{n\varphi} \leq \bar{\pi}$ dir. $Orth(X')/M$, Archimedean olduğundan $\varphi \in M$ dir. $\psi - \psi\varphi \in B$ bağıntısına göre $\forall\psi \in Orth(X')$ için $\psi - \psi\varphi \in B \subset M$ ve dolayısıyla $\psi \in M$ dir. Sonuç olarak, $M = Orth(X')$ elde edilir ki, bu ise çelişkidir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 6.5 X bir Banach latisi olsun. $Orth(X') = Z(X')$ dır.

İspat X bir Banach vektör latisi olduğundan, X' nde her π ortomorfizması süreklidir,[26]. Ayrıca, π 'nin modülü mevcut olduğundan [32], $Orth(X')$ birleşim altında bir Banach birimsel f-cebiridir. $Orth(X')$ nde her maksimal halka ideali norm topolojiye göre kapalıdır. Dolayısıyla, $Orth(X')$ nde her maksimal halka ideali düzgün kapalıdır. O halde, relatif düzgün topolojiye göre

$$M(Orth(X')) = m(Orth(X'))$$

dır. Teorem 6.4' teki ii⇒i denklik koşulu kullanılarak, $Orth(X') = Z(X')$ elde edilir.

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, bir Archimedean f-cebirinin ve f-modülünün sıralı ve ikinci sıralı dualinde tanımlı Arens çarpımlarından yararlanarak yeni özellikler elde edilmiş olup, f-ortomorfizmalar ile f-cebirlerinin ve f-modüllerinin sıralı ve ikinci sıralı dualindeki ortomorfizmalar arasındaki ilişki ortaya konmuştur. Ayrıca, bir dual vektör latisinin ideal merkezi ile ortomorfizmalar arasındaki ilişki incelenmiştir.

Konu ile ilgilenen araştırmacılar, ortomorfizmalar ile f-cebirleri ve f-modülleri arasında yeni ilişkiler elde edebilirler. Tanımlanan farklı dönüşümlere göre elde edilen sonuçların aynı zamanda d-cebirleri, hemen hemen f-cebirleri ve hemen hemen d-cebirleri için de gerçeklenip gerçeklenmeyeceği araştırılabilir. Ayrıca vektör latislerinin ideal merkezi ile ortomorfizmalar uzayı arasındaki bağıntılar genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., (1985). Positive Operators, Indianapolis, Indiana, Academic Press, Inc.

[2] Amemiya, I., (1953). “A General Spectral Theory in Semi-Ordered Linear Spaces”, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I., 12 : 111-156

[3] Bigard, A., Kemiel, K., Wolfenstein, S., (1977). “Groupes et Anneaux Réticulésé, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 608, Springer-Verlag, Berlin, French.

[4] Birkhoff, G., Pierce, R. S., (1956). “Lattice-Ordered Rings”, An. Acad. Brasil. Ci., 28 : 41-69.

[5] Fuchs, L., (1966). Teilweise Geordnete Algebraische Strukturen, Studia Mathematica-Mathematische Lehrbücher, Band XIX. Übersetzt aus dem Englischen von Eva Vas, Vandenhoeck Ruprecht, Göttingen, German.

[6] Henriksen, M., Isbell, J. R., Johnson, D. G., (1961/1962). “Residue Class Fields of Lattice-Ordered Algebras”, Fund. Math., 50 : 107-117.

[7] Henriksen, M., Johnson, D. G., (1961/1962). “On the Structure of a Class of Archimedean Lattice-Ordered Algebras”, Fund. Math., 50 : 73-94.

[8] Johnson, D. G., (1960). “A Structure Theory for a Class of Lattice-Ordered Rings”, Acta Math., 104 : 163-215.

[9] Nakano, H., (1950). Modern Spectral Theory, Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

[10] Huijsmans, C. B., De Pagter, B., (1982). “Ideal Theory in f-Algebras”, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 269, No. 1 : 225-245.

[11] Riesz, F., (1930). “Sur la Composition des Operations Lineaires”, Atti Cong. Int. Math., Bologna, 3 : 143-148.

[12] Birkhoff, G., (1967). Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Third Edition, No. 25, Providence, Rhode Island.

[13] Kantorovich, L. V., Vulikh, B. Z., Pinsker, A. G., (1950). Functional Analysis in Partially Ordered Spaces, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moskow and Leningrad.

[14] Luxemburg, W. A. J., Zaanen, A. C., (1971). Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam.

[15] Schaefer, H. H., (1974). Banach Lattices and Positive Operators, Springer Verlag, Berlin and New York.

[16] Dodds, P. G., Fremlin, D. H., (1979). “Compact Operators in Banach Lattices”, Israel J. Math., 34 : 287-320.

[17] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., (1980). “Positive Compact Operators on Banach Lattices”, Math. Z., 174 : 289-298.

[18] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., (1982). “Dunford-Pettis Operators on Banach Lattices”, Trans. Amer. Math. Soc., 274 : 227-238.

[19] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., (1983). “The Components of a Positive Operator”, Indagationes Math., 86 : 229-241.

[20] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., (1984). “Factoring Compact and Weakly Compact Operators Through Reflexive Banach Lattices”, Trans. Amer. Math. Soc., 283 : 369-381.

[21] Zaanen, A. C., (1983). Riesz Spaces II, North-Holland, Amsterdam.

[22] De Pagter, B., (1981). f-Algebras and Orthomorphisms, Ph.D. Dissertation, University of Leiden.

[23] Huijsmans, C. B., De Pagter, B., (1984). “Subalgebras and Riesz Subspaces of an f-Algebra”, Proc. London Math. Soc., Vol. 3, 48 : 161-174.

[24] Arens, R., (1951). “Operations Induced in Function Classes”, Monatsh. Math., Vol. 55 : 1-19.

[25] Huijsmans, C. B., De Pagter, B., (1984). “The Order Bidual of Lattice Order Algebras”, Journal of Functional Analysis, Vol. 59 : 41-64.

[26] Meyer, P., Nieberg, (1991). Banach Lattices, North Holland Mathematical Library, Springer Verlag, Germany.

[27] Turan, B., (2000). “On f-Linearity and f-Orthomorphisms”, Positivity, 3 : 293-301.

[28] Feng, Y., Chen, J. X., Chen, Z. L., (2012). “f-Orthomorphisms and f-Linear Operators on the Order Dual of an f-Algebra”, Abstract and Applied Analysis, Article ID 971560, 7 pages.

[29] Wickstead, A. W., (1977). “Representation and Duality of Multiplication Operators on Archimedean Riesz Spaces”, Compos. Math., Vol. 35, 3 : 225-238.

[30] Toumi, M. A., (2014). “When Orthomorphisms are in the Ideal Center”, Positivity, Vol 18, 3 : 579-583.

[31] Basly, M., Triki, A., (1995). “On Uniformly Closed Ideals in f-Algebras”, In:2nd Conference, Function Spaces, Marcel Dekker, 29-33.

[32] Dales, H. G., Lau, A. T. M., Strauss, D, (2010). “Banach Algebras on Semigroups and on Their Compactifications”, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 966, 165.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Serap ÖZCAN

Doğum Tarihi ve Yeri : 11.07.1987 Bandırma

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : serapozcan87@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Sakarya Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	Ondokuzmayıs Üniversitesi	2009
Lise	Fen Bilimleri	Niğde Cumhuriyet Lisesi	2005

YAYINLARI

Makale

1. Özcan, S., Gök, Ö., (2014). A Note on Operators on the Order Dual of an f- Algebra, Pure Mathematical Sciences, Vol. 3, 2014, no. 2, 53-57.
2. Özcan, S., Gök, Ö., (2014). On Some Properties Related to Order Dual of an f-Module, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 8, 2014, no. 25, 1249-1253.

3. Özcan, S., Gök, Ö., (2015). On the Ideal Center of a Dual Vector Lattice, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 9, 2015, no. 1, 15-18.

Bildiri

1. Özcan, S., (2014). Order Ideals in f-Algebras, International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology ICEMST 2014, Necmettin Erbakan University, Konya, TURKEY, May 16-18, 2014.
2. Özcan, S., (2014). On Some Results Related to Second Order Dual of an f-Module, The 10th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, GFTA 2014, Oradea, ROMANIA, August 25-28, 2014.
3. Özcan, S., Gök, Ö., (2015). Bir Dual Vektör Latisinin İdeal Merkezi, 10. Ankara Matematik Günleri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, TÜRKİYE, 11-12 Haziran 2015.