

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN KESİR MERTEBELİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

ESİN AKSOY

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. ADEM CENGİZ ÇEVİKEL**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KESİR MERTEBELİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Esin AKSOY tarafından hazırlanan tez çalışması 02.12.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

Doç. Dr. Muhammet KURULAY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ahmet BEKİR
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Bu alışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün 2014-09-04-DOP01 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tezin her aşamasında bana destek olan, yardımını ve bilgisini esirgemeyen değerli tez hocam Sayın Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve destekleri konusunda kendilerini sürekli yanımda hissettiğim saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet BEKİR'e en içten duygularıyla teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bununla birlikte, yapmış oldukları katkılarından dolayı Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Son olarak; benden maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen sevgili aileme ve nişanım Mahmut ELMACI'ya çok teşekkür ederim.

Aralık, 2015

Esin AKSOY

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	viii
KISALTMA LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT.....	xiv
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	3
1.3 Orijinal Katkı	5
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1 Gamma Fonksiyonu	7
2.2 Beta Fonksiyonu	10
2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu	11
2.4 Dalga ve Soliton Teorisine Fiziksel Bakış.....	13
2.5 Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri	14
BÖLÜM 3	
KESİR MERTEBELİ TÜREV TANIMI VE ÖZELLİKLERİ.....	16
3.1 Kesir Mertebeli Türev Tanımı ve Özellikleri	16
3.2 Grünwald-Letnikov Kesir Mertebeli Türev	17
3.3 Riemann-Liouville Kesir Mertebeli Türev	18
3.4 Caputo Kesir Mertebeli Türev	20
3.5 Modifiye Riemann-Liouville Kesir Mertebeli Türev	22
3.6 Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemler.....	27
3.6.1 Kesir Mertebeli Adi Diferensiyel Denklemler	27
3.6.2 Kesir Mertebeli Kısmi Diferensiyel Denklemler	28

3.6.3	Kesir Mertebeli Lineer Diferensiyel Denklemler	28
3.6.4	Lineer Olmayan Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemler	29
3.6.5	Kesir Türevli Adi Diferensiyel Denklemin Mertebesi	29
3.6.6	Kesir Mertebeli Adi Diferensiyel Denklemin Derecesi	30

BÖLÜM 4

LİNEER OLMAYAN KESİR MERTEBELİ KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

4.1	Tam Çözüm Yöntemleri	31
4.2	Kesirsel Karmaşık Dönüşüm	32
4.2.1	Kesirsel Karmaşık Dönüşümün Farklı Türden Denklemlere Uygulanması	44
4.3	Alt Denklemler Yöntemi	45
4.4	Fonksiyonel Değiştirme Yöntemi	49
4.5	Modifiye Edilmiş Basit Denklemler Yöntemi	50
4.6	Kudryashov Yöntemi	51
4.6.1	Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi	51
4.6.2	Geliştirilmiş Kudryashov Yöntemi	52
4.6.3	Modifiye Edilmiş Kudryashov Yöntemi	54
4.7	Modifiye Edilmiş Deneme Denklemler Yöntemi	56

BÖLÜM 5

YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI

5.1	Alt Denklemler Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler	58
5.1.1	Zaman Kesir Mertebeli Cahn-Allen Denklemi	58
5.1.2	Zaman Kesir Mertebeli Fisher Denklemi	62
5.1.3	Zaman Kesir Mertebeli Hirota-Satsuma Birleştirilmiş KdV Denklemi	65
5.1.4	Uzay-Zaman Kesirli Beşinci Mertebeden Sawada-Kotera Denklemi	69
5.1.5	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli (2+1)-Boyutlu Dağılımlı Uzun Dalga Denklemleri	71
5.2	Fonksiyonel Değişken Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler	74
5.2.1	Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi	74
5.2.2	Zaman Kesir Mertebeli Boussinesq Denklemi	77
5.2.3	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony (ZK-BBM) Denklemi	78
5.2.4	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) Denklemi	80
5.2.5	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Klein-Gordon Denklemi	82
5.3	Modifiye Edilmiş Basit Denklemler Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler	83
5.3.1	Zaman Kesir Mertebeli Biyolojik Populasyon Denklemi	83
5.3.2	Zaman Kesir Mertebeli Hamiltonian Sistemi	87
5.3.3	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili (pKP) Denklemi	91

5.3.4	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) Denklemi	94
5.3.5	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Birleştirilmiş Burgers Denklemleri ...	97
5.4	Kudryashov Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler	100
5.4.1	Zaman Kesir Mertebeli Chan-Allen Denklemi	100
5.4.2	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Klein-Gordon Denklemi.....	103
5.4.3	Zaman Kesir Mertebeli (2+1)-Boyutlu Zoomeron Denklemi	105
5.4.4	Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) Denklemi	112
5.5	Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler.....	114
5.5.1	Zaman Kesir Mertebeli Fitzhugh-Nagumo Denklemi.....	114
5.5.2	Zaman Kesir Mertebeli Genelleştirilmiş Burgers Denklemi.....	118
BÖLÜM 6		
SONUÇ VE ÖNERİLER.....		123
KAYNAKLAR		126
ÖZGEÇMİŞ		133

SİMGE LİSTESİ

$\Gamma(.)$	Gamma fonksiyonu
B	Beta fonksiyonu
E_{α}	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
Σ	Toplam sembolü

KISALTMA LİSTESİ

fmKdV	Kesir Mertebeli Modifiye Korteweg de Vries
HPM	Homotopi Pertürbasyon Metodu
KdV	Korteweg de Vries
mBBM	Modifiye Benjamin Bona Mahony
pKP	Potansiyel Kadomtsev Petviashvili
TSD	Ters Saçılım Dönüşümü
ZKBBM	Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Gamma fonksiyonun eğrisi.....	10
Şekil 5. 1 $\alpha = 0.5$ için $u_5(x, t)$ 'nin tam çözümü	61
Şekil 5. 2 $\alpha = 0.5, k = 1, \lambda = -2$ için $u_{3,4}(x, t)$ 'nin tam çözümü.....	76
Şekil 5. 3 $\alpha = 0.5, k = 1, \lambda = 2, r = 4, h = 1, y = 0$ için $u_{1,2}(x, t)$ 'nin tam çözümü	86
Şekil 5. 4 $\alpha = 0.5, k = 1, c = 2, A = 8, y = 0$ için $u_1(x, y, t)$ 'nin tam çözümü	108
Şekil 5. 5 $\alpha = \beta = 0.01, a_1 = b_0 = b_1 = p = k = 1$ için $u(x, t)$ 'nin tam çözümü	122

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2. 1 Gamma fonksiyonunun bazı sayısal değerleri.....	9

LİNEER OLMAYAN KESİR MERTEBELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Esin AKSOY

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL

Kesirli analiz, tamsayı mertebeden türev ve integralin sırasıyla tamsayı olmayan mertebeden türev ve integrale genişlemesidir. Lineer olmayan olayların matematiksel modellenmesinde kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin, tamsayı mertebeli diferensiyel denklemlere göre gerçeğe daha yakın modeller oluşturduğu birçok araştırmacı tarafından tespit edilmiştir. Hızla gelişen bilim ve teknolojide; özellikle de mühendislik bilimlerinde lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması büyük önem kazanmıştır. Son yıllarda pek çok araştırmacı kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin yaklaşık ve tam çözümleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalar sonucunda, farklı ve etkili birçok yöntem ortaya çıkmıştır.

Bu tezin amacı, lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerinin ve denklem sistemlerinin farklı yöntemlerle fizik, biyoloji ve mühendislik gibi birçok bilim dalında kullanılabilir yeni tam çözümlerini elde etmektir. Bu çözümler hareketli dalga, soliter dalga, periyodik, üstel, rasyonel, hiperbolik ve soliton çözümleri kapsadığı için günümüzdeki birçok fiziksel modelin geliştirilmesinde öncülük yapacaktır.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; kesirli analiz kavramı, kesirli analiz'in tarihsel gelişimi ve kullanım alanları hakkında önemli bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde; sonraki bölümlerde kullanılacak bazı özel fonksiyonlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde; literatürde yer alan bazı önemli kesir mertebeli türevlerin tanımlarına ve önemli özelliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde; kesir mertebeli diferensiyel denklemleri adi diferensiyel denklemlere dönüştüren kesirsel karmaşık dönüşümden bahsedilmiştir. Ayrıca kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için kullanılan; alt denklem, fonksiyonel değişken, modifiye

edilmiş basit denklem, Kudryashov ve modifiye edilmiş deneme denklem yöntemleri ele alınmıştır. İzleyen bölümde, dördüncü bölümde tanıtılan dönüşüm ve metotlar yardımıyla, bazı önemli kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümleri araştırılmış ve bu denklemlerin farklı tiplerde tam çözümleri elde edilmiştir. Tezin son bölümünde ise elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklem, modifiye Riemann-Liouville türevi, kesirsel karmaşık dönüşüm, alt denklem yöntemi, fonksiyonel değişken yöntemi, modifiye edilmiş basit denklem yöntemi, Kudryashov yöntemi, modifiye edilmiş deneme denklem yöntemi, tam çözüm

ABSTRACT

EXACT SOLUTION METHODS FOR NONLINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Esin AKSOY

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL

Fractional calculus is the extension of integer order derivative and integral to non-integer order derivative and integral, respectively. By authorities, it is commonly expressed that fractional order differential equations has more realistic mathematical modelling of nonlinear world rather than integer order differential equations. In rapidly developing science and technology, especially in engineering, it has been very important to find exact solutions of fractional differential equations. In recent times, many scientific workers have published many papers on fractional order differential equations and its exact solutions. Upon these papers, different and efficient methods arose.

The purpose of this dissertation is to obtain new exact solutions of fractional differential equations and systems of fractional differential equations via different methods that can be used in many research areas such as physics, biology, engineering. Since these solutions contain travelling wave, solitary wave, periodic, exponential, rational, hyperbolic and soliton type solutions, this research will be a pioneer work to develop many physical models used in these days.

This thesis consists of six sections. In the first section, fractional calculus concept, historical evolution and employment areas of fractional calculus are given. In the second section, some special functions that will be used in next sections are presented. In the third section, definitions and properties of some special fractional order differential equations in literature are given. In the fourth section, fractional complex

transformation which is used to convert fractional order differential equations to ordinary differential equations is introduced. Besides, sub-equation, functional variable, modified simple equation, Kudryashov and modified trial equation that are used to get exact solutions of fractional differential equations are discussed. In the next section, via transformations and methods given in fourth section, solutions of some special fractional order differential equations and systems of fractional order differential equations have been investigated, different kinds of solutions have been found. In the last section of the thesis, obtained results from the application part in the previous section are interpreted and suggestions are presented.

Keywords: Non-linear fractional differential equation, modified Riemann-Liouville derivative, fractional complex transform, sub-equation method, functional variable method, modified simple equation method, Kudryashov method, modified trial equation method, exact solution

1.1 Literatür Özeti

Genel anlamda teknolojinin temelini oluşturan türev kavramı aynı zamanda doğal ve yapay sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada önemli bir araçtır. Bu da türevin, matematikle beraber fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi çeşitli bilim dallarındaki birçok uygulamalı problemlerin çözümlerinin bulunmasında kolaylık sağlamaktadır.

Tamsayı mertebeli türev kavramı, açık bir matematiksel (geometride) ve fiziksel yoruma sahiptir. Yani türev, matematikte bir fonksiyonun grafiği olan eğrinin bir noktadaki teğetinin eğiminin bulunmasıyla, fizikte ise hareketli bir cismin anlık hızının bulunması problemlerinden ortaya çıkmıştır. Ancak gerçek dünya problemleri için hem teorik hem de uygulama alanlarında hızlı bir büyümeyi (değişimi) temsil eden kesirli türevler (tamsayı mertebeli olmak zorunda değil) fiziksel ve geometrik yorumlamalar açısından oldukça zayıftır. Bunun yanı sıra çeşitli yazarlar kesirli türevin tam olarak bir fiziksel ve geometrik yorumunu yapamamakla birlikte çeşitli yaklaşımlar ve özel fonksiyonlar için uygulamalar vermişlerdir. Yapılan uygulamalar kesirli türev modellemesine uygun fonksiyonlar ve yapılarıdır. Son yıllarda kesirli türevler, kesirli integraller ve kesirli diferansiyel denklemler için çeşitli problemler ortaya atılmış ve bunların çözümleri çalışılmıştır.

Türev operatörü $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere, uygun şartlarda seçilmiş bir $f(x)$

fonksiyonunun n . mertebeden türevi olan $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, n 'nin pozitif tamsayı

seçilmesi durumunda kolayca hesaplanabilmektedir. Yani bir fonksiyonun birinci,

ikinci, üçüncü vs. türevlerinin nasıl alındığı biliniyor, fakat $\frac{1}{2}$. veya $\frac{3}{2}$. türevi nasıl alınabilir? Aynı şekilde uygun şartlarda alınmış bir fonksiyonu iki ya da üç defa integre edebilir ama $\frac{1}{2}$ defa integre edilebilir mi? Diğer bir yandan yarım türev olarak adlandırılan $D^{\frac{1}{2}}$ operatör olmak üzere $D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}$ eşitliği sağlanır mı?

30 Eylül 1695 yılında, Gottfried Wilhelm Leibnitz tarafından Marquis L'Hospital'a yöneltilen "*Tamsayı mertebeli $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevi, tamsayı mertebeli olmayan için genellenebilir mi?*" sorusu kesirli analizin çıkış tarihi olarak gösterilebilir. Daha sonra bu soruyu "*n herhangi bir sayı olabilir mi?*" şeklinde sormuştur. L' Hospital bu soruya " *$n = \frac{1}{2}$ olduğunda $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonu ne olacak?*" sorusuyla karşılık vermiştir. Leibnitz bu soruya o zamanda açık bir paradoks olan ama sonrasında çok önemli sonuçlar ortaya çıkaran " $\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ " cevabını verir.

Leibnitz'in yanı sıra 17. yüzyıldan itibaren Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald, Letnikov ve Caputo gibi birçok ünlü matematikçi kesir türevler üzerine çalışmalar yaptılar (Loverro [1]). Örneğin; 1730 yılında L. Euler kuvvet fonksiyonunun kesirli mertebeden türevi hesaplanırken büyük öneme sahip Gamma fonksiyonunu tanımladı. 1819 yılında S.F. Lacroix kesirli türev konusuna ilk katkı yapan matematikçi oldu. m pozitif tamsayı olmak üzere $y = x^m$ ifadesini Gamma fonksiyonunu kullanarak n . mertebeden türevini

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (1.1)$$

olarak buldu. Daha sonra S.F. Lacroix bu denklemi $m=1$ ve $n = \frac{1}{2}$ alınmasıyla $y = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevinin

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} y = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.2)$$

olduğunu gösterdi. 1823’de Abel, yerçekiminin etkisi altında, sürtünmesiz bir düzlemde yukarıdan aşağıya sarkıtılan bir cismin salınımı sonucunda oluşturduğu eğrinin bulunması olarak tanımlanan “Tautochrone” probleminin çözümünü Riemann-Liouville kesir integrasyonu ile tanımlanan bir integral eşitliği olarak elde etti. 1832-1837 yılları arasında Liouville kesir mertebeli integral ve kesir mertebeli diferensiyel ile ilgili birçok çalışma yaptı. 1847 yılında Riemann yazmış olduğu yazılarda kesirli integral tanımını verdi. Daha sonra bu tanım Liouville tanımıyla birleştirilerek çok yaygın hale geldi (Oldham ve Spanier [2], Hilfer [3], Kilbas vd. [4]). Grünwald ve Letnikov (1967-1968) kesir uygulamaları için sonlu fark yaklaşımını kullandı ve sonra bu tanımın bazı şartlar altında Riemann-Liouville tanımına denk olduğu ispatlandı (Podlubny [5], Samko vd. [6], Bertram [7]). Kesir mertebeden türevin Riemann-Liouville tanımından farklı bir versiyonunu da aynı yıllarda Michele Caputo tanımladı. Son yıllarda, başlangıç şartları ile verilen kesir mertebeli türevlere sahip diferensiyel denklemler için Caputo tarafından verilen türev tanımı daha kullanışlı olduğundan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerde bu türev sıklıkla kullanılmaktadır (Kurulay [8], Taşbozan [9]).

Kesirli analiz için yapılan tanımların bazen çelişmesi ve tamamlanmamış olması kesirli analizin mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmasına engel olmuştur. 19. yy’ın ortalarında, Liouville (1834), Riemann (1847), Grünwald (1867) ve Letnikov (1868) koydukları kesirli türev ve integral tanımları teorinin gelişimine hız kazandırmasına rağmen bu tanımların kabulü ve uygulama problemlerinde kullanılmaları zaman almıştır.

Kesirli türev ve integral için tek bir tanımın olmayışı ve cebirsel işlemlerde farklı tanımların kullanımı ile ortaya çıkan farklı sonuçlar, pek çok zorluğa sebep olmuş, ancak zamanla problem türleri daha iyi sınıflandırılmış ve hangi problemde ne tür bir tanım kullanmanın gerekliliği ortaya konmuştur (Karadeniz [10]).

1.2 Tezin Amacı

Matematiksel analizin bir kolu olan kesirli analiz, türev ve integralin tamsayı olmayan (keyfi) derecelere genişletilmiş şeklidir. Zengin tarihsel geçmişine rağmen, son

zamanlara kadar kesirli analiz karmaşık yapısından ötürü sadece matematikçiler tarafından çalışılan teorik bir konu olarak kalmıştı. Tamsayı dereceli olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm metotları mevcut olmadığından diğer bilim dalları tarafından uzunca bir süre etkin bir biçimde kullanılamamıştır (Oldham ve Spainer [2], Kilbas vd. [4], Podlubny [5], Miller ve Ross [11]). Günümüzde, kesirli diferansiyel hesap tekniği, fiziksel olayları açıklamak için yapılan matematiksel yaklaşımlara yeni bir boyut kazandırmasının yanı sıra, fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmuştur. Fiziksel olayları betimleyen diferansiyel denklemlerin mertebeleri, ele alınan fiziksel olayda bir değişim hızını belirlemektedir. Bu noktada kesirli mertebeden diferansiyel, tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olaylar açıklamadaki zayıflıklarını kapatmakla birlikte fiziksel olayın karakterinin anlaşılmasında da büyük bir rol oynamaktadır (Çavuş [12]).

Eğer zaman bölgesinde tanımlanan bir sistem oldukça yavaş sönüm yapıyorsa, anormal hızlanıyorsa, kendi yayılım hızını yavaşlatıyorsa ya da kendisine ait verilerin ifade edilebilmesi için çok fazla sayıda üstel fonksiyonun toplamını gerektirip işlemleri zorlaştırıyorsa bu durumda kesirli analize başvurmak sistemin tanımlanabilmesi ve analizi açısından oldukça etkilidir. Bir sistemin gerçeğine çok yakın bir modelinin geliştirilebilmesi için sistem farklı alt bölümlere ayrılır. Bu esnada bir takım pratik ve deneysel veriler ile ek oran ya da değişim sabitleri göz önüne alınır. Aynı zamanda, kompleks bir modelin bütün parametrelerinin gerçeğe en yakın değerleri için basitleştirilmiş varsayımlara gerek vardır. Bu noktada eğer kesirli analiz az sayıda sabit kullanarak sistem bilgilerini gerçeğe en uygun halde tanımlayabiliyorsa ve daha sınırlı bir zaman diliminde (zamanın sınırlı olması incelemedeki hassasiyeti artırır) bu sistem sabitleri için iyi bir yaklaşım yapabiliyorsa bu basit ve kısa bir sistem modeli sağlar. Bir sistemin gösterimi ne kadar basitleşirse, o sistemi modellemek ve kontrol etmek o kadar kolaylaşır (Karadeniz [10]).

Kesirli analizle birçok farklı bilim alanında özellikle uygulamalı matematik, fizik, biyoloji, kimya, mühendislik ve ekonomi bilimi alanlarında sıklıkla karşılaşılmıştır. Bunlara örnek olarak; histerisis, sönme, hafıza ve gerilim faktörlerinin doğal olarak ortaya çıktığı viskoelastik (yapışkan ve esnek) materyallerin (kıkırdak, deri, kas) fiziksel durumlarının modellenmesinde (Magin [13]), fiziko-kimyada, bir metal ve iyonik ortam arasındaki pürüzlü ara yüzden akan akımın, gerilimin kesir dereceli türeviyle orantılı olması; elektrikte, bir kapasitenin elektrotlarından en az bir tanesinin

pürüzlü bir yüzeye sahip olması durumunda benzer şekilde kapasiteden geçen akımın, gerilimin kesir dereceli türeviyle orantılı olması; elektronikte, $5/2$ dereceden sinüzoidal osilatörlerin varlığı; yayılma alanında, homojen olmayan medyada anormal yayılma olayının tanımlanmasının kesir mertebeli türevle sağlanması verilebilir. Bunun yanında, elektrokimyada difüzyon modeli, elektrot elektrolit arayüz empedansı, kapasitör teorisi, fraktans devreleri, kaos, türbülans, sinyal işleme, anormal difüzyon gibi konularda birer örnek olabilir. Konuyla ilgili olarak son yıllarda oldukça önemli çalışmalara imza atılmıştır.

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin fizik, biyoloji ve mühendislik gibi bilim dallarında kullanılabilir yeni tam çözümlerini elde etmek için önemli birçok yöntem bir arada kullanılmıştır. Matematik alanlarındaki araştırma başlıklarını zenginleştirme potansiyeline sahip çalışmamızda uygulamalar sonucunda elde edilen farklı ve yeni çözümler; fizik, biyoloji, kimya ve mühendislik gibi bilim dallarında uygulama alanlarının genişletilmesine katkı sağlayacak ve günümüzdeki birçok fiziksel modelin geliştirilmesinde öncülük yapacaktır.

Elde edilen tam çözümler uygulamalı matematiğin diğer alanındaki yaklaşık (nümerik) çözümlerin hata oranının belirlenmesine yardımcı olacaktır.

1.3 Orijinal Katkı

Kesir mertebeli diferensiyel denklemler, tamsayı mertebeli diferensiyel denklemlere göre gerçek yaşam problemlerinin daha iyi modellenmesine olanak sağlamaktadır. Bu sebeple sabit katsayılı lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin literatürde olmayan tam çözümlerini elde etmek için farklı yöntemler kullanılmıştır. Bulunan sayısal sonuçlar: tezde kullanılan yöntemlerin lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmede çok etkili ve pratik olduğunu gösterilmiştir.

Ayrıca, tezde kullanılan yöntemlerin her birinin avantajları ve dezavantajları kapsamlı olarak ilk kez tarafımdan verilmiştir.

Bu tez çalışmasının, ilk bölümünde kesirli analiz kavramı, tarihsel gelişimi, önemi ve kullanım alanları hakkında kısa bir giriş yapıldı. Ayrıca kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin kullanım alanları ile ilgili kısa bir literatür taraması yapıldı. İkinci

bölümde, konunun daha iyi anlaşılması için bazı temel kavramlar verilmiş ve tam çözüm kavramına değinilmiştir. Üçüncü bölümde, literatürde en çok kullanılan kesir mertebeden türevler ile birlikte çalışmamızda kullanacağımız modifiye Riemann-Liouville türev ile ilgili temel tanım ve bazı özelliklere yer verildi. Grünwald-Letnikov türev operatörü, Riemann- Liouville ve modifiye Riemann- Liouville türev operatörleri ile Caputo türev operatörü tanıtıldı, bunların genel bazı özelliklerine değinildi. Bu kısımda yer verilen bazı teorem ve özelliklerin ispatları, literatürde yer aldığı için verilmemiştir. Dördüncü bölümde; kesirsel karmaşık dönüşüm, alt denklem yöntemi, fonksiyonel değişken yöntemi, modifiye edilmiş basit denklem yöntemi, Kudryashov yöntemi (genelleştirilmiş, geliştirilmiş ve modifiye edilmiş Kudryashov yöntemleri) ve modifiye edilmiş deneme denklem yöntemleri verildi. Beşinci bölümde; bir önceki bölümde verilen yöntemleri kullanarak farklı tiplerdeki lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin tam çözüm uygulanmalarının bazıları ilk kez tarafımdan verildi. Bu bölümdeki hesaplamalar için Maple paket programı kullanıldı.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Kesirli hesabın tanımları ve kullanımını anlamak için bazı matematik tanımlarını iyi bilmek gerekmektedir. Bu kısımda sonraki kısımlarda kullanılacak olan bazı özel fonksiyonlar verildi. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler teorisinde sıkça rastlanan bu fonksiyonlar; Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonlarıdır.

2.1 Gamma Fonksiyonu

Ünlü matematikçi ve fizikçi Leonhard Euler, 1730 yılında kuvvet fonksiyonunun kesirli mertebeden türevi hesaplanırken büyük öneme sahip Gamma fonksiyonunu tanımlamıştır.

Kesirli analizin temel fonksiyonlarından biri Gamma fonksiyonudur. Gamma fonksiyonunun en basit anlamı faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir. Yani, $n!$ 'i genelleştiren, n 'nin tamsayı olmayan ve hatta kompleks değerler almasını mümkün kılan, Euler'in $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu $\Gamma(\cdot): \mathbb{C} - \{\dots, -2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

ile tanımlanır ve kompleks düzlemin sağ yarısında ($\text{Re}(z) > 0$) yakınsaktır. Gerçekten de;

$$\begin{aligned}\Gamma(z) = \Gamma(x+iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log t) + i \sin(y \log t)] dt\end{aligned}\quad (2.2)$$

olarak yazılabilir. (2.2) denkleminde köşeli parantezin içindeki ifade her t için sınırlıdır; e^{-t} den dolayı sonsuzda yakınsaklık sağlanır ve $t=0$ daki yakınsaklık için de $x = \operatorname{Re}(z) > 1$ olması gerekmektedir.

Gamma fonksiyonun bazı önemli özellikleri şöyle sıralanabilir:

i. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

dir. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \underbrace{-t^z e^{-t}}_0 \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (2.3)$$

ii. $z = 1, 2, 3, \dots$ için (2.3) denklemini kullanarak;

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

.....

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Buradan açıkça görülmektedir ki; $n=0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -(0-1) = 1$$

dir. Bu sonuç $\Gamma(1) = 0!$ in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Böylece, Gamma fonksiyonunun integral gösterimi; kesirli değerler için de faktöriyel hesabı yapmayı mümkün kılmaktadır.

iii. $n < 0$ için $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$ şeklinde tanımlanır.

iv. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad (2n-1)!=1.3.....(2n-1) \quad (n \in \mathbb{N})$

v. Gamma fonksiyonunun limit gösterimi

$$\Gamma(z)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2).....(z+n)}$$

biçimindedir.

vi. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$

vii. $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1)=\sqrt{x}\Gamma(2x)$ şeklinde, Gamma fonksiyonu için **çoğalma**

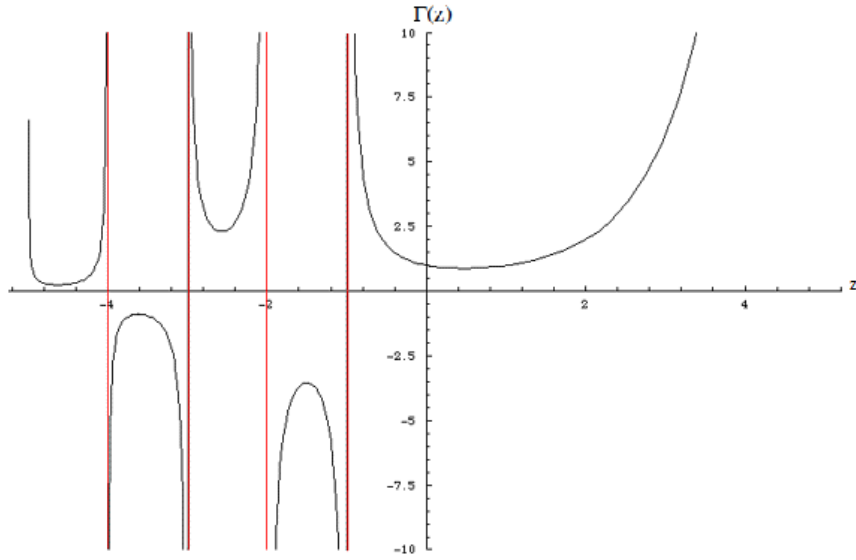
formülü verilebilir (Arfken ve Weber [14]).

Gamma fonksiyonuna ilişkin bazı sayısal değerler aşağıdaki Çizelge 2.1 de verilmiştir:

Çizelge 2. 1 Gamma fonksiyonunun bazı sayısal değerleri

$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$
$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-2\sqrt{\pi}$
$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

Gamma fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2. 1 Gamma fonksiyonun eğrisi

Şekil 2.1 sıfır noktası civarında Gamma fonksiyonunun davranışını göstermektedir. Gamma fonksiyonu pozitif bölgede her noktada tanımlı olmasına karşın, negatif tamsayı değerlerinde sonsuza gitmektedir.

2.2 Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur. Genellikle Beta fonksiyonu; $B: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau, \quad \{\text{Re}(x) > 0, \text{Re}(y) > 0\} \quad (2.4)$$

ile tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır. Beta fonksiyonunun bir diğer tanımı

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \quad (2.5)$$

şeklindedir. Beta fonksiyonu ile ilgili önemli özellikler arasında

$$\text{i. } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

ii. $B(x, y) = B(y, x)$

verilebilir (Podlubny [5]).

2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Üstel fonksiyon e^z , tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir rol oynar. Onun bir parametrelili genelleştirilmesi ile gösterilen fonksiyon $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.6)$$

G. M. Mittag-Leffler tarafından tanımlanmıştır (Leffler [15]) ve sonrasında A. Wisman tarafından da çalışılmıştır.

Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli diferansiyel denklemlerin hesaplamalarında çok yaygın kullanım alanları bulan oldukça önemli bir fonksiyondur. $|z| < 1$ ve α nın bazı özel değerleri için bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$\begin{aligned} E_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z} \\ E_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{\Gamma(1+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(1+2)} + \frac{z^3}{\Gamma(1+3)} + \dots \\ &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = e^z \\ E_2(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k!} = 1 + \frac{z^2}{\Gamma(2+1)} + \frac{z^4}{\Gamma(4+1)} + \frac{z^6}{\Gamma(6+1)} + \dots \\ &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = \cosh(z) \end{aligned}$$

$$E_2(z^2) = E_2(-z^2) = \cosh(z)$$

şeklinde yazılır.

Yukarıdaki verilere göre Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla bazı hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\sinh_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(z^{\alpha}) - E_{\alpha}(-z^{\alpha})}{2}, & \cosh_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(z^{\alpha}) + E_{\alpha}(-z^{\alpha})}{2}, \\
\sin_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(iz^{\alpha}) - E_{\alpha}(-iz^{\alpha})}{2}, & \cos_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(iz^{\alpha}) + E_{\alpha}(-iz^{\alpha})}{2}, \\
\tanh_{\alpha}(z) &= \frac{\sinh_{\alpha}(z)}{\cosh_{\alpha}(z)}, & \coth_{\alpha}(z) &= \frac{\cosh_{\alpha}(z)}{\sinh_{\alpha}(z)}, \\
\tan_{\alpha}(z) &= \frac{\sin_{\alpha}(z)}{\cos_{\alpha}(z)}, & \cot_{\alpha}(z) &= \frac{\cos_{\alpha}(z)}{\sin_{\alpha}(z)}
\end{aligned}$$

Burada $E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu ifade etmektedir.

Kesirli mertebeden diferansiyel hesaplamada önemli bir yere sahip olan iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, ilk olarak 1953 yılında R.P. Agarwal ve A. Erdelyi tarafından tanımlanmıştır. $z \in \mathbb{C}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0 \quad (2.7)$$

seri açılımı şeklinde verilir. Ayrıca, Agarwal ve Humbert tarafından bu fonksiyon için bazı bağıntılar elde edilmiştir.

α ve β parametrelerinin özel seçimleri ile $E_{\alpha, \beta}$ fonksiyonundan bilinen bazı fonksiyonlar elde edilir. Örneğin;

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{\Gamma(1+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2+1)} + \frac{z^3}{\Gamma(3+1)} + \dots \\
&= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = e^z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \frac{e^z - 1}{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \\
&= \frac{1}{z^2} \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}
\end{aligned}$$

olarak verilir. En genel haliyle

$$E_{1,n}(z) = \frac{1}{z^{n-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

elde edilir. Hiperbolik kosinüs fonksiyonu ve hiperbolik sinüs fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonunun özel birer durumlarıdır:

$$\begin{aligned}
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = \cosh(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \frac{\sinh(z)}{z}
\end{aligned}$$

Ayrıca iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunda $\beta = 1$ olarak alınırsa

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z)$$

şeklinde bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu elde edilir (Podlubny [5]).

2.4 Dalga ve Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime *dalga* adı verilir. Ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketlerinin dalgaları ve suda ilerleyen yüzey dalgaları en bilindik dalgalarıdır.

Dalgalar, durağan ve hareketli (travelling) dalgalar olarak sınıflandırılabilirler. Durağan dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalarıdır. Bu tip dalgalar, dalgaın bulunduğu ortam dalgaın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda

birbiri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. Hareketli dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Bu kısımda hareketli dalgalardan soliter dalgalar ve soliton hakkında bilgi verilecektir.

Soliter dalgalar, ilk olarak İskoçyalı mühendis John Scott Russell tarafından 1834 yılında gözlemlenmiştir (Russell [16]). Russell, Edinburg-Glasgow kanalında dalga'nın yapısında herhangi bir değişiklik olmadan yavaş bir şekilde hareket eden suyun çıkışını gözlemlemiştir. Ancak soliter dalgaların varlığı Korteweg de Vries tarafından kanıtlanmıştır. Bununla birlikte dalgaların kararlılıkları ve iki soliter dalga'nın çarpışma sonrası şekillerinin değişip değişmediği konusu netlik kazanmamıştır. Bu konu Kruskal ve Zabusky tarafından incelenmiş, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümleri araştırılırken, soliter dalgaların çarpışma sonrası şekillerini değiştirmedikleri görülmüştür. Bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediği bulunarak bu tip dalgalara *soliton* adı verilmiştir (Zabusky ve Kruskal [17]). Daha sonra konu ile ilgili Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılım dönüşüm (TSD) yöntemi geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati [18]):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlılırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, soliter dalga şartıdır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir. Ayrıca solitonlar uzun mesafelerde yol alabilirler.

2.5 Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri

Birinci mertebeden ve yüksek mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemler için genel çözümler farklı yöntemlerle elde edilebilir. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmak ise her zaman mümkün olmayabilir. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri Lagrange-Charpit yöntemi ile bulunabilir. Fakat yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi

diferensiyel denklemlerin genel çözümünün bulunması için belirli bir yöntem yoktur. Bu nedenle bu denklemleri sağlayan çözümler tam çözümler olarak adlandırılır.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümleri periyodik, kompleks, kink, soliton ve kompakton olarak elde edilir. Periyodik çözümler; $\sin$, $\cos$, $\tan$ ve $\cot$

fonksiyonlarını, kompleks çözümler; karmaşık fonksiyonları, kink çözümler $(a + \tanh)$ ve $(a + \coth)$ fonksiyonlarını, soliton çözümler $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\coth$ fonksiyonlarını ve kompakton çözümler $\sin^2$, $\cos^2$, $\sec^2$, $\csc^2$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir.

KESİR MERTEBELİ TÜREV TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

3.1 Kesir Mertebeli Türev Tanımı ve Özellikleri

Kesir mertebeli türev, teoride çok eskiden beri bilinmesine karşın fizik, kimya ve mühendislik gibi bilimlerdeki uygulamalarıyla son zamanlarda sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Kesir mertebeli türev kavramı uygulamalı matematiğin önemli bir dalını oluşturur. Kesirli analizin ve bu bağlamda kesir mertebeli türev kavramının ortaya çıkmasının en önemli nedenlerinden birisi, doğada meydana gelen birçok olayın tam sayılarla ifade edilememesidir. Kesir mertebeli türev; bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerinin mertebesinin tamsayı değil de, rasyonel sayı olduğu zamanki haldir.

Bir fonksiyonun kesir mertebeden türevini hesaplamak oldukça zordur. Bunun için farklı türden kesir mertebeli türev tanımları verilmiştir. Birden fazla türev tanımının var olması, problemin türüne en uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Farklı türden kesir mertebeli türevlerin bazıları; Kolwankar-Gangal türevi (Kolwankar ve Gangal [19]), Chen's fraktal türevi (Sun ve Chen [20], Chen ve Sun [21]), Cresson's türevi (Cresson [22], Cresson [23]), Grünwald-Letnikov kesir mertebeli türevi (Samko vd. [6]), Caputo kesir mertebeli türevi (Caputo [24]), Riemann-Liouville kesir mertebeli türevi (Samko vd. [6]) ve modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevidir (Jumarie [25], Jumarie [26]).

Son zamanlarda bu tanımların içinden en çok kullanılanlar arasında Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türev tanımları bulunmaktadır. Genel olarak, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve

modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türev tanımı matematik ve mühendislik bilimlerinde, Caputo kesirsel türev tanımı ise fizikte kullanılmaktadır.

Tezin bu bölümünde son zamanlarda sık kullanılan bu türev tanımları ile birlikte uygulama kısmında kullanılan modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevinin tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Daha sonra kısaca kesir mertebeli diferensiyel denklemlerden bahsedilmiştir.

3.2 Grünwald-Letnikov Kesir Mertebeli Türev

Bu tanım önce 1867 de Anton Karl Grünwald tarafından önerilmiş daha sonra 1868 yılında Aleksey Vasilievich Letnikov tarafından geliştirilmiştir (Letnikov [27]).

$f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere α . mertebeden Grünwald-Letnikov kesir mertebeli türev

$${}^aGLD_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh \rightarrow t-a}} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada;

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

ifadesi binom sabitleri için genel gösterimdir. Bu türev;

$m, m \leq \alpha \leq m+1$ olacak şekilde bir tamsayı, $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve $f^{(k)}(t)$, $(k=1, 2, 3, \dots, m+1)$ türevleri de $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Grünwald-Letnikov kesir mertebeli türevi

$${}^aGLD_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t (t-\xi)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

biçiminde de tanımlanır.

Grünwald-Letnikov kesir mertebeli türevinin bazı özellikleri;

1. λ ve μ sabit sayı olmak üzere;

$${}^aGLD_t^\alpha \{ \lambda f(t) + \mu g(t) \} = \lambda {}^aGLD_t^\alpha f(t) + \mu {}^aGLD_t^\alpha g(t)$$

Grünwald-Letnikov kesir mertebeli türev operatörü lineerdir.

2. n tamsayı ve $\alpha > 0$ olmak üzere $f^{(k)}(a) = 0$, ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$) ise

$$\frac{d^n}{dt^n} \left({}^{GL}_a D_t^\alpha f(t) \right) = {}^{GL}_a D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}^{GL}_a D_t^{\alpha+n} f(t)$$

tamsayı mertebeden türevler ile Grünwald-Letnikov kesir mertebeli türevlerin bileşke özelliği vardır.

3. $0 \leq n < \alpha < n+1$ ve $0 \leq m < \beta < m+1$ olsun. Eğer $f(t)$ fonksiyonu,

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, r-1)$$

koşulunu $r = \max(n, m)$ olmak üzere sağlıyorsa, ${}^{GL}_a D_t^\alpha$ ve ${}^{GL}_a D_t^\beta$ kesir mertebeli diferensiyellerinin birleşimi

$${}^{GL}_a D_t^\beta \left({}^{GL}_a D_t^\alpha f(t) \right) = {}^{GL}_a D_t^\alpha \left({}^{GL}_a D_t^\beta f(t) \right) = {}^{GL}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

şeklinde yazılır.

4. $0 \leq n < \alpha < n+1$ ve $\beta < 0$ için $f^{(k)}(a) = 0$, ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$)

$${}^{GL}_a D_t^\beta \left({}^{GL}_a D_t^\alpha f(t) \right) = {}^{GL}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

şeklindedir. Ancak $\alpha < 0$ ve β herhangi bir reel sayı ise

$${}^{GL}_a D_t^\beta \left({}^{GL}_a D_t^\alpha f(t) \right) = {}^{GL}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

yazılır (Podlubny [5]).

3.3 Riemann-Liouville Kesir Mertebeli Türev

f , $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli ve integrallenebilen zaman değişkenli bir fonksiyon olsun. $n-1 \leq \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere, $t > a$ için α . mertebeden Riemann-Liouville kesir mertebeli türev

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (3.3)$$

yada

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right), \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $f(t)$, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $m+1$ defa sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise, her p ($0 \leq m \leq p < m+1$) için Riemann-Liouville kesir mertebeli türevi ${}_a D_t^\alpha f(t)$ mevcuttur ve Grünwald-Letnikov kesir mertebeli türevine ${}^{GL}D_t^\alpha f(t)$ eşittir. Gerçekten de Riemann-Liouville kesir mertebeli türev tanımında $m+1$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \int_a^t (t-\xi)^{m-\alpha} f(\xi) d\xi \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t (t-\xi)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\xi) d\xi \\ &= {}^{GL}D_t^\alpha f(t) \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

Riemann-Liouville kesir mertebeli türevinin bazı özellikleri;

1. c sabit sayı olmak üzere;

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha c = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

2. λ ve μ sabit sayı olmak üzere;

$${}_a D_t^\alpha \{ \lambda f(t) + \mu g(t) \} = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t)$$

Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörü lineerdir.

3. m tamsayı olmak üzere $f^{(k)}(a) = 0$, ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$) ise

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t)$$

tamsayı mertebeden türevler ile Riemann-Liouville kesir mertebeli türevlerin bileşke özelliği vardır.

4. $m-1 \leq \alpha < m$, $n-1 \leq \beta < n$ için $f(t)$ fonksiyonu

$$f^{(s)}(a) = 0, \quad (s = 0, 1, 2, 3, \dots, r-1), \quad r = \max(m, n)$$

$${}_a D_t^\beta ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\beta f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

şeklinde türev operatörü yer değiştirebilir.

5. $\alpha > 0$ olmak üzere

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^{-\alpha} f(t)) = f(t)$$

eşittir. Ancak $m-1 \leq \alpha < m$ için

$${}_a D_t^{-\alpha} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=1}^m [{}_a D_t^{\alpha-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (3.5)$$

olur. Özel olarak $k=1$ alınırsa (3.5) ifadesi

$${}_a D_t^{-\alpha} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{\alpha-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

olarak bulunur (Podlubny [5], Ross [28]).

Yani Riemann-Liouville kesir mertebeli türevde, sürekli bir $f(t)$ fonksiyonunun integralinin türevi fonksiyonun kendisine eşittir. Ancak bu fonksiyonun türevinin integrali fonksiyona eşit değildir.

3.4 Caputo Kesir Mertebeli Türev

Riemann-Liouville kesir mertebeli türev yaklaşımıyla, başlangıç koşullarına sahip başlangıç değer problemleri matematiksel olarak başarıyla çözülebilir ancak bu çözümler pratikte kullanışsızdır. Çünkü kesirli başlangıç şartlarının fiziksel olarak ne anlama geldiği açık değildir. 1960'larda İtalyan matematikçi Michele Caputo, matematiksel teori ve pratik ihtiyaçlar arasındaki bu uyuşmazlığı Caputo kesir mertebeli türev kavramını tanımlayarak çözmüştür. Riemann-Liouville kesir mertebeli türev

tanımı üzerinde bazı değişiklikler yapılarak Caputo kesir mertebeli türevi elde edilmiştir.

Kesir mertebeli diferansiyel hesaplamalarında başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımı olmuştur. Bu özelliğinden dolayı başlangıç değer problemleri için Caputo kesir mertebeli türev tanımı daha kullanışlıdır.

α herhangi bir pozitif tamsayı, $n-1 \leq \alpha < n$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$ olacak şekilde $f(t)$ fonksiyonu n -defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Caputo kesir mertebeli türevi

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. $f(t)$ fonksiyonunda (3.6) de tanımlanan Caputo kesir mertebeli türevi $\alpha \rightarrow n$ iken, bu fonksiyonun n tamsayı mertebeden türevine eşit olur. Gerçekten $0 \leq n-1 < \alpha < n$ ve $f(t)$ fonksiyonu her $T > a$ için $[a, T]$ aralığında $n+1$ mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\xi)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\xi) d\xi \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\xi) d\xi \\ &= f^{(n)}(t), \quad n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesir mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. (Podlubny [5]).

Riemann-Liouville kesir mertebeli türev ve Caputo kesir mertebeli türev tanımları arasındaki önemli bir fark sabit fonksiyonun türevidir. Riemann-Liouville kesirli türev tanımında sonlu bir alt sınır değeri için sabitin türevi sıfırdan farklı iken Caputo kesir mertebeli türevde sabitin türevi sıfırdır.

$f(t)$ fonksiyonu her (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m-1 \leq \alpha < m$, $(m \in \mathbb{Z}^+)$ olacak şekilde $f^{(k)}(t)$, $(k = 0, 1, 2, \dots, m+1)$ türevleri de $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu durumda $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ şartları sağlanırsa,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t)$$

eşitliği vardır.

Caputo kesir mertebeli türevinin bazı özellikleri;

1. λ ve μ sabit sayı olmak üzere;

$${}_a^C D_t^\alpha \{ \lambda f(t) + \mu g(t) \} = \lambda {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a^C D_t^\alpha g(t)$$

Caputo kesir mertebeli türev operatörü lineerdir.

2. $m = 0, 1, 2, \dots$ ve $n-1 \leq \alpha < n$ olmak üzere

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t)$$

yazılabilir.

3. $f^{(s)}(0) = 0$, $(s = n, n+1, n+2, \dots, m)$ ve $m = 0, 1, 2, \dots$; $n-1 \leq \alpha < n$ olması

durumunda

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t)$$

şeklinde türev operatörü yer değiştirebilir. Riemann-Liouville yaklaşımının tersine Caputo yaklaşımında $s = 0, 1, 2, \dots, m$ olması durumunda $f^{(s)}(0) = 0$ için herhangi bir kısıtlama yoktur.

3.5 Modifiye Riemann-Liouville Kesir Mertebeli Türev

Riemann-Liouville kesir mertebeli türev yaklaşımında sabit sayının türevinin sıfırdan farklı olması bu türevle ilgili can sıkıcı bir durum ortaya çıkardı. Bu durum Caputo kesir mertebeli türev gibi yeni yaklaşımların tanımlanmasına neden oldu. Ancak bu türev yaklaşımında da bir fonksiyonun birinci türevini bulmak için ikinci türevini bilme

gerekliliği gibi işi zorlaştıran bir durum ortaya çıktı. 2006 yılında Jumarie, Riemann-Liouville kesir mertebeli türev yaklaşımını geliştirerek modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türev yaklaşımını

$$D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha-1} [f(\xi) - f(0)] d\xi, & \alpha < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} [f(\xi) - f(0)] d\xi, & 0 < \alpha < 1 \\ \left(f^{(n)}(t) \right)^{(\alpha-n)}, & n \leq \alpha < n+1, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımladı. Böylece bu tanımla, sabitin türevi ile ilgili sorun ortadan kaldırılmış oldu. Aynı zamanda bu tanım, standart türevin tanımına oldukça yakındır.

Modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevinin bazı özellikleri;

1. Sabit fonksiyonun kesir mertebeli türevi sıfırdır. Yani, c sabit sayı olmak üzere;

$${}_a D_t^\alpha c = 0$$

dır.

2. c sabit sayı olmak üzere, kesir mertebeli türev tanımında homojenlik özelliği

$${}_a D_t^\alpha [cf(t)] = c [{}_a D_t^\alpha f(t)]$$

şeklinde belirtilmiştir.

3. λ ve μ sabit sayı olmak üzere;

$${}_a D_t^\alpha \{ \lambda f(t) + \mu g(t) \} = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t)$$

modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörü lineerdir.

4. $f(t) = (t-a)^r$, $(t > a)$ tipindeki polinom fonksiyonlarının kesirli türevi

$$D_t^\alpha (t-a)^r = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)} (t-a)^{r-\alpha}, \quad r > 0$$

şeklinde (Jumarie [25], Jumarie [29], Jumarie [23]).

Modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevin tanımını ve dördüncü özelliğini kullanarak aşağıdaki birkaç örneği çözelim.

Örnek 1: $f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini bulalım.

Çözüm: $\alpha = \frac{1}{2}$ için türev tanımındaki formülden (3.7) de işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} D_t^{1/2} t &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(\xi-0)d\xi}{(t-\xi)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\xi d\xi}{(t-\xi)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Çizelge 2.1 den $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınırsa

$$D_t^{1/2} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

elde edilir. Diğer taraftan modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevinin dördüncü özelliğinden (polinom fonksiyonunun kesir mertebeli türevi)

$a = 0$, $r = 1$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ yerine yazılırsa

$$D_t^{1/2} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-\frac{1}{2})} t^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

elde edilir. Buda eşitlik (3.8) in eşitlik (3.9) ile aynı sonucu verdiğini gösterir.

Örnek 2: $f(t) = 5t^3 - 3t^2 + t + 1$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini bulalım.

Çözüm: Kesir mertebeli türevler için lineerlik özelliği olduğu biliniyor; (3.7) deki polinom fonksiyonlar için kısa kesir mertebeli türev formülünde t^3 , t^2 , t , 1 in kesirli türevleri bulunup ara işlemler yazılırsa $D_t^{1/2} f(t)$ bulunur. Polinom fonksiyonunun kesir mertebeli türevi yardımıyla

$$D_t^\alpha (t-a)^r = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)} (t-a)^{r-\alpha}$$

t^3 polinomu için $a=0$, $r=3$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ yerine yazılırsa

$$D_t^{1/2} t^3 = \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+3-\frac{1}{2})} t^{3-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})} t^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}}$$

t^2 polinomu için $a=0$, $r=2$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ yerine yazılırsa

$$D_t^{1/2} t^2 = \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1+2-\frac{1}{2})} t^{2-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} t^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

t polinomu için $a=0$, $r=1$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ yerine yazılırsa

$$D_t^{1/2} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-\frac{1}{2})} t^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$$

t^0 için $r=0$ olup modifiye Riemann Liouville türevinin birinci özelliğinde sabitin türevi sıfır olduğundan

$$D_t^{1/2} 1 = 0$$

elde edilir. Bulunan değerler yerine yazılırsa modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevin lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned} D_t^{1/2} (5t^3 - 3t^2 + t + 1) &= 5 \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - 3 \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + 0 \\ &= \frac{16}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} (8t^2 - 4t + 1) \end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur. Kesir mertebeli türev formülünde aynı fonksiyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
D_t^{1/2} (5t^3 - 3t^2 + t + 1) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(5t^3 - 3t^2 + t + 1) d\xi}{(t-\xi)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(5t^3 - 3t^2 + t + 1) d\xi}{(t-\xi)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{16}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) deki sonuçların aynı olduğu görülür.

Örnek 3: $f(t) = (t-3)^4$ fonksiyonunun $\frac{5}{2}$. mertebeden türevini bulalım.

Çözüm: Polinom fonksiyonunun kesirli türevi

$$D_t^\alpha (t-a)^r = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)} (t-a)^{r-\alpha}$$

için $a=3$, $r=4$ ve $\alpha=\frac{5}{2}$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
D_t^{\frac{5}{2}} (t-3)^4 &= \frac{\Gamma(1+4)}{\Gamma(1+4-\frac{5}{2})} (t-3)^{4-\frac{5}{2}} \\
&= \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{5}{2})} (t-3)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{32}{\sqrt{\pi}} (t-3)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

(3.7) deki kesirli türev formülünden de çözümün aynı olduğu görülür.

Örnek 4: $f(t)=t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevinin $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi bu fonksiyonun birinci mertebeden türevine eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm: Polinom fonksiyonunun kesirli mertebeli türevini kullanalım.

$$f(t) = t$$

$$D_t^{1/2} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-\frac{1}{2})} t^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$$

aynı şekilde bulduğumuz bu fonksiyonun bir kez daha $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi alınırsa

$$D_t^{1/2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} t^0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1} = 1$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$D_t^{1/2} (D_t^{1/2} f(t)) = D_t^{1/2+1/2} f(t) = D_t f(t) = D_t t = 1$$

bulunur.

Bu örnek modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevin ardışık türevler özelliğini göstermektedir.

3.6 Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemler

Kesir mertebeli diferensiyel denklem, bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerinin mertebesinin tamsayı olmayıp, kesirli olduğu halidir.

3.6.1 Kesir Mertebeli Adi Diferensiyel Denklemler

Bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesir mertebeli adi diferensiyel denklemler denir. Örneğin,

$$1. \quad x D^{\frac{1}{2}} y(x) - 3 D^{\frac{1}{3}} y(x) - y(x) = 2 \sin x$$

$$2. \quad D^{\frac{2}{3}} y(x) - 2 y^2(x) = x^2$$

$$3. \quad D^{\frac{5}{2}} y(x) + y(x) = x$$

$$4. \quad D^{\frac{3}{4}} y(t) - D^{\frac{1}{2}} y(t) = 4$$

$$5. D^{\frac{1}{3}}y(t) - D^{\frac{1}{4}}y(t) - 5y(t) = 0$$

denklemleri birer kesir mertebeli adi diferensiyel denklemdir.

3.6.2 Kesir Mertebeli Kısmi Diferensiyel Denklemler

Bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler denir. Örneğin

$$1. D_t^{\frac{1}{2}}u(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$2. D_t^\alpha u(x, y, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

denklemleri birer kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemdir.

3.6.3 Kesir Mertebeli Lineer Diferensiyel Denklemler

x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere

$$a_n(x)D^{\alpha_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(x) + \dots + a_1(x)D^{\alpha_1}y(x) + a_0(x)D^{\alpha_0}y(x) = f(x)$$

şeklinde yazılabilen denklemlere kesir mertebeli lineer diferensiyel denklem denir. Bu denklemin lineer olması için; bağımlı değişken olan y ve onun bütün kesirli türevlerinin derecesi bir olmalı ve $a(x)$ katsayıları yalnızca x bağımsız değişkenine bağlı olmalıdır (Kurulay [8]). Örneğin;

$$1. x^2 D^{\frac{3}{2}}y(x) - y(x) = 2e^x$$

$$2. D^{2\alpha}y(x) + 2D^\alpha y(x) - y(x) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

denklemleri birer lineer kesir mertebeli diferensiyel denklemdir.

3.6.4 Lineer Olmayan Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemler

Yukarıda belirtilen lineerlik tanımının en az birinin sağlanmadığı kesir türevli diferensiyel denklemlere lineer olmayan (nonlinear) kesir mertebeli diferensiyel denklemler denir. Örneğin,

1. $D_t^\alpha u - au_{xx} + bu + cu^3 = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$ (Lineer olmayan zaman kesir türevli bir boyutlu dalga denklemi)
2. $D_t^\alpha u - u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$ (Lineer olmayan zaman kesir türevli modifiye KdV denklemi)
3. $D_t^\alpha u + D_x^\alpha u - au^2 D_x^\alpha u + D_x^{3\alpha} u = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$ (Lineer olmayan uzay-zaman kesir türevli modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) denklemi)
4. $D_{tt}^{2\alpha} u - D_{xx}^{2\alpha} u + au - u^2 = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$ (Lineer olmayan uzay-zaman kesir türevli Klein-Gordon denklemi)
5.
$$\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial y^\alpha \partial x^\alpha} + \frac{\partial^{2\alpha} v}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^\alpha \left(u \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right)}{\partial y^\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha (uv)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^{3\alpha} u}{\partial x^{2\alpha} \partial y^\alpha} = 0,$$
 (Lineer olmayan (2+1)-boyutlu uzay-zaman kesir türevli dağılımlı uzun dalga denklemleri)

denklemleri de lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerdir.

3.6.5 Kesir Türevli Adi Diferensiyel Denklemin Mertebesi

Bir kesir mertebeli adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine o denklemin mertebesi denir. Örneğin,

1. $D^{\frac{3}{2}} y(x) - 5D^{\frac{1}{2}} y(x) + 3y(x) = 2$ $\frac{3}{2}$. mertebeden lineer adi diferensiyel denklem
2. $D^{\frac{1}{2}} y(x) - 3y^2(x) = \sin(x)$ $\frac{1}{2}$. mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklem

şeklindedir.

3.6.6 Kesir Mertebeli Adi Diferensiyel Denklemin Derecesi

Bir kesir mertebeli adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin derecesine (kuvvetine) o kesir mertebeli adi diferensiyel denklemin derecesi denir. Örneğin,

1. $D^{\frac{1}{2}}y(x) + y(x) = 0$ denklemi $\frac{1}{2}$. mertebeden, 1. dereceden lineer adi diferensiyel denklemdir.
2. $\left(D^{\frac{5}{2}}y(x)\right)^2 - 2D^{\frac{1}{2}}y(x) + y(x) = 0$ denklemi $\frac{5}{2}$. mertebeden, 2. dereceden lineer olmayan adi diferensiyel denklemdir.
3. $\left(D^{\frac{3}{2}}y(x)\right)^5 - 2D^{\frac{1}{4}}y(x) = \sin x$ denklemi $\frac{3}{2}$. mertebeden, 5. dereceden lineer olmayan adi diferensiyel denklemdir.
4. $\left(D_t^\alpha y(x, t)\right)^3 - D^{0.5}y(x, t) = f(x, t)$ denklemi α . mertebeden, 3. dereceden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemdir.

LİNEER OLMAYAN KESİR MERTEBELİ KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

4.1 Tam Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde, ilk olarak kesir mertebeli diferensiyel denklemler için dengelenme sayısı ve kesirsel karmaşık dönüşümü (fractional complex transform) verildi. Daha sonra kesir mertebeli diferensiyel denklemlerinin bazı tam çözüm yöntemleri tanıtıldı. Bunlar; alt denklem yöntemi, fonksiyonel değişken yöntemi, modifiye edilmiş basit denklem yöntemi, Kudrasyhov yöntemi ve modifiye edilmiş deneme denklem yöntemidir. Bölüm 5 de, bu bölümde verilen yöntemlerle ilgili lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin tam çözümleri verildi.

Öncelikle, tam çözümlerde kullanılacak olan dengelenme sayısı hakkında bazı bilgiler verelim.

Dengelenme Sayısı: Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında elde edilen sabit sayıya “*dengelenme sayısı*” denir. Herhangi bir adi diferensiyel denklemde

en yüksek mertebeden lineer terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim

$u^p \left(\frac{d^q u}{d\xi^q} \right)^r$ olarak verilsin. Burada $u = \tau^n$ dönüşümü yapılsa, p, q, r sabit sayı ve n

dengelenme terimi olmak üzere dengelenme bağıntısı $n + q = np + s(n + q)$ olarak yazılır ve bu denklemin çözümünden n pozitif dengelenme sayısı bulunur (Bekir vd. [30]).

4.2 Kesirsel Karmaşık Dönüşüm

Son yıllarda kesir mertebeli diferensiyel denklemler birçok araştırma alanında çok sık görülmeye başlamıştır. Literatürde kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin çözümü için birçok güçlü yöntem vardır. Bu yöntemler bazı özel durumlarda tam çözümlere yol açsa da, genel manada nümerik ve yaklaşık çözümler verir. Ancak mühendislikte tam çözüm gereklidir.

Matematik problemlerinin çözümünde kullanılan farklı birçok dönüşüm literatürde yer almıştır. Bunlardan bazıları: hareketli dalga dönüşümü, Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü, Bäcklund dönüşümü, integral dönüşümü ve yerel kesir mertebeli integral dönüşüm olarak verilebilir.

Tezin bu kısmında kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin çözümü için kesirsel karmaşık dönüşüm diye adlandırılan yeni bir yöntem tanımlanacaktır.

Kesirsel karmaşık dönüşümü, ilk olarak 2010 yılında Li ve He (Li ve He [31]) tarafından önerilmiştir.

Genel olarak kesirsel karmaşık dönüşüm; $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1} \leq 1$ için sonradan belirlenecek sıfırdan farklı bilinmeyen sabitler $c, k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ olmak üzere,

$$\xi = \frac{k_1 x_1^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)} + \frac{k_2 x_2^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} + \frac{k_3 x_3^{\alpha_3}}{\Gamma(1+\alpha_3)} + \dots + \frac{k_n x_n^{\alpha_n}}{\Gamma(1+\alpha_n)} + \frac{ct^{\alpha_{n+1}}}{\Gamma(1+\alpha_{n+1})} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n+1} = 1$ olarak alınırsa kesirli karmaşık dönüşümü

$$\xi = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \dots + k_n x_n + ct \quad (4.2)$$

standart hareketli dalga dönüşümüne dönüşür. Sonuç olarak, kesirsel karmaşık dönüşüm hareketli dalga dönüşümünün doğal açılımıdır.

Kesirsel karmaşık dönüşümün temel amacı, kesir mertebeli diferensiyel denklemleri modifiye Riemann-Liouville türevi ile birlikte adi diferensiyel denklemlere çevirmek ve çözüm prosedürünü kolaylaştırmaktır. Böylece lineer olmayan tamsayı mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanılan tüm analitik metotlar kolayca kesir mertebeli diferensiyel denklemlere de uygulanabilir (Güner [32]).

Örnek 1: $u(x,t)$ reel değerli bir değişken, ∂_t^α ve ∂_x^β notasyonları modifiye Riemann-Liouville kesir mertebeli türevleri ifade etmekte, k pozitif tamsayı ve $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere kesir mertebeli diferensiyel denklem

$$\partial_t^\alpha u(x,t) = k \partial_x^\beta u(x,t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

olarak verilsin. Başlangıç şartları, $u(x,0) = u_0(x) = 2x$ için kesirsel karmaşık dönüşümü yardımıyla bir çözüm bulalım.

p ve q sıfırdan farklı olmak üzere kesirsel karmaşık dönüşüm,

$$\xi = \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. Dönüşüm denklemde yerine yazılırsa

$$(kp - q)u_\xi = 0$$

bulunur.

1. Durum: $kp - q \neq 0$ için çözüm, c sabit sayı olmak üzere $u(\xi) = c$ olur. Bu çözüm başlangıç şartını sağlamayan aşıkâr çözümdür.

2. Durum: $kp - q = 0$ için çözüm, başlangıç şartı gözönüne alındığında

$$u_\xi = \frac{2}{\beta} \left(\frac{\Gamma(1+\beta)}{p} \right)^{\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{1}{\beta}-1}$$

yada

$$u(\xi) = 2 \left(\frac{\Gamma(1+\beta)}{k} \right)^{\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{1}{\beta}-1} \quad (4.5)$$

şekilde seçilir. c ve k ; $kr - c = 0$ şartını sağlayan bağımsız parametreler olmak üzere (4.4) denklemi (4.5) denkleminde yerine yazılırsa başlangıç şartını sağlayan çözüm

$$u(x,t) = 2 \left(\frac{\Gamma(1+\beta)}{p} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^{\frac{1}{\beta}-1} \quad (4.6)$$

olarak bulunur (Li ve He [31]).

Örnek 2: Uzay-zaman kesir mertebeli adveksiyon dağılım denklemi

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + v \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta} - k \frac{\partial^{2\beta} u(x,t)}{\partial x^{2\beta}} = 0 \quad (4.7)$$

olacak şekilde $t > 0$, $x > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < \beta \leq 1$ için başlangıç-sınır şartları

$$\begin{cases} u(0,t) = \exp\left\{\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} \\ \frac{\partial^\beta u(0,t)}{\partial x^\beta} = 6 \exp\left\{\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} \\ u(x,0) = \exp\left\{\frac{6t^\alpha}{\Gamma(1+\beta)}\right\} \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklinde verilsin. p ve q sıfırdan farklı bilinmeyen sabitler olmak üzere

$$\xi = \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)}$$

kesirsel karmaşık dönüşümü yardımı ile

$$(vp + q)u_\xi = kp^2 u_{\xi\xi} \quad (4.9)$$

denklemini elde edilir. (4.9) denklemini çözüldüğünde, c_1 ve c_2 integral sabiti olmak üzere

$$u(\xi) = c_1 + c_2 \exp\left\{\frac{(vp + q)\xi}{kp^2}\right\}$$

veya

$$u(\xi) = c_1 + c_2 \exp\left\{\frac{(vp + q)}{kp^2} \left(\frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right)\right\} \quad (4.10)$$

çözümü elde edilir. (4.10) denkleminde başlangıç-sınır şartları kullanılarak

$$u(0,t) = c_1 + c_2 \exp\left\{\frac{(vp + q)qt^\alpha}{kp^2\Gamma(1+\alpha)}\right\} \equiv \exp\left\{\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\}$$

$$\frac{\partial^\beta u(0,t)}{\partial x^\beta} = \frac{c_2(vp+q)}{kp} \exp\left\{\frac{(vp+q)qt^\alpha}{kp^2\Gamma(1+\alpha)}\right\} \equiv 6 \exp\left\{\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\}$$

$$u(x,0) = c_1 + c_2 \exp\left\{\frac{(vp+q)x^\beta}{kp\Gamma(1+\beta)}\right\} \equiv \exp\left\{\frac{4x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right\}$$

yazılır. Bu denklem sisteminde $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ seçilirse

$$\frac{(vp+q)q}{kp^2} = 4 \quad (4.11)$$

$$\frac{(vp+q)}{kp} = 6 \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) denklemlerinden $p = 3$; $q = 2$ ve $\frac{(3v+2)}{3k} = 6$ bulunur.

Böylece $18k - 3v - 2 = 0$ olmak üzere denklemin tam çözümü

$$u(\xi) = \exp\left\{\frac{(3v+2)}{9k}\left(\frac{3x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{2t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right\} \quad (4.13)$$

olarak bulunur (Li [33]).

Örnek 3: Kesir mertebeli diferensiyel denklemi

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + 2u \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + 3 \frac{\partial^{3\beta} u}{\partial x^{3\beta}} + 4 \frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} + 5 \frac{\partial^\lambda u}{\partial z^\lambda} = 0 \quad (4.14)$$

gözönüne alınsın. $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$, ifadesi α . mertebeden t ye göre modifiye Riemann-Liouville anlamında kesir türevidir. $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$ ve $0 < \lambda \leq 1$, olmak üzere kesirsel karmaşık dönüşüm,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\
X &= \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \\
Y &= \frac{ky^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \\
Z &= \frac{lz^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olarak alınır. Modifiye Riemann-Liouville kesirli türev ve özellikleri yardımıyla (4.15) denklemi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = q \frac{\partial u}{\partial T} \\
\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial^\beta X}{\partial x^\beta} = p \frac{\partial u}{\partial X} \\
\frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} &= \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^\gamma Y}{\partial y^\gamma} = k \frac{\partial u}{\partial Y} \\
\frac{\partial^\lambda u}{\partial z^\lambda} &= \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial^\lambda Z}{\partial z^\lambda} = l \frac{\partial u}{\partial Z}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklinde klasik türeve dönüştürülür. Böylece (4.14) denklemi

$$q \frac{\partial u}{\partial T} + 2pu \frac{\partial u}{\partial X} + 3p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 4k\gamma \frac{\partial u}{\partial Y} + 5\lambda l \frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \tag{4.17}$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür. Bu denklem farklı yöntemler ile örneğin alt denklem, üstel fonksiyon, ... gibi yöntemlerle çözülebilir (Li ve He [34]).

Örnek 4: Uzay-zaman kesir mertebeli KdV denklemi

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + 6u \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^{3\beta} u}{\partial x^{3\beta}} = 0 \tag{4.18}$$

için kesirsel karmaşık dönüşüm

$$\begin{aligned}
T &= \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\
X &= \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)}
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Böylece

$$q \frac{\partial u}{\partial T} + 6pu \frac{\partial u}{\partial X} + p^3 \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} = 0 \quad (4.19)$$

şeklinde denkleme dönüşür. İşlemleri basitleştirmek için $p = q = 1$ alınırsa (4.19) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial T} + 6u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} = 0 \quad (4.20)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin soliton çözümü

$$u = \frac{A}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{A}}{2} (X - AT) \right]$$

veya

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{A}}{2} \left(\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - A \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right] \quad (4.21)$$

olarak elde edilir (He ve Li [35]).

Kesirsel karmaşık dönüşüm kesir mertebeli diferensiyel denklem sistemlerine de kolay bir şekilde uygulanabilir.

Örnek 5: α ve β modifiye Riemann-Liouville anlamında kesir türev ve başlangıç şartları

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{e^{x^\beta}}{\Gamma(1+\beta)} \\ v(x, 0) &= \frac{e^{-x^\beta}}{\Gamma(1+\beta)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

olan

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) + D_x^\beta v(x, t) &= 0 \\ D_t^\alpha v(x, t) + D_x^\beta u(x, t) &= 0, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

kesir mertebeli lineer diferensiyel denklem sistemi verilsin. p ve q sıfırdan farklı bilinmeyen sabitler olmak üzere kesirsel karmaşık dönüşüm

$$T = \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

$$X = \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)}$$

olarak alınır. Jumarie'nin zincir kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = q \frac{\partial u}{\partial T}, & \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = q \frac{\partial v}{\partial T} \\ \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial^\beta X}{\partial x^\beta} = p \frac{\partial u}{\partial X}, & \frac{\partial^\beta v}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial^\beta X}{\partial x^\beta} = p \frac{\partial v}{\partial X} \end{aligned} \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır. $p = q = 1$ alınarak

$$\begin{aligned} u_T + v_X &= 0 & v_T + u_X &= 0, \\ u(X, 0) &= e^X & v(X, 0) &= e^{-X} \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. Bu başlangıç şartları ile verilen denklem sisteminin çözümleri Ayaz tarafından (Ayaz [36])

$$\begin{aligned} u(X, T) &= e^X \cosh T + e^{-X} \sinh T \\ v(X, T) &= e^{-X} \cosh T - e^X \sinh T \end{aligned} \quad (4.26)$$

şeklinde verilmiştir. Böylece;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}} \cosh\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + e^{-\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}} \sinh\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) \\ v(x, t) &= e^{-\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}} \cosh\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) - e^{\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}} \sinh\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

kesir mertebeli lineer diferensiyel denklem sisteminin çözümleri elde edilir.

Örnek 6: Kesir mertebeli kısmi diferensiyel sistemi

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) + v D_x^\beta u(x, t) + u(x, t) &= 1 \\ D_t^\alpha v(x, t) + u D_x^\beta v(x, t) - v(x, t) &= -1, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

ve başlangıç şartları

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= e^{\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}} \\
v(x,0) &= e^{\frac{-x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

için kesirsel karmaşık dönüşüm yardımıyla

$$\begin{aligned}
u_T + vu_x + u &= 1, & v_T + uv_x - v &= -1, \\
u(X,0) &= e^X, & v(X,0) &= e^{-X}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.30) denklem sisteminin çözümleri Ayaz tarafından (Ayaz, 2004)

$$\begin{aligned}
u(X,T) &= e^{XT} \\
v(X,T) &= e^{-X+T}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

şeklinde verilmiştir. Bu durumda denklem sisteminin çözümleri

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= e^{\left(\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)} \\
v(x,t) &= e^{\left(-\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak elde edilir (Ghazanfari ve Ghazanfari [37]).

He ve çalışma arkadaşları 2012 yılında (He vd. [38]) yazdıkları makalede kesir mertebeli türevlerde zincir kuralının farklı olduğunu ifade etmiş ve bu durumu şu örneklerle açıklamışlardır.

Örnek 7: $\beta > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
u(t) &= t^2 \\
s(x) &= x^\beta
\end{aligned} \tag{4.33}$$

olsun. Bu durumda modifiye Riemann-Liouville kesirli türevine göre;

$$D_x^\alpha u(s(x)) = D_x^\alpha u(x^\beta) = D_x^\alpha x^{2\beta} = \frac{x^{2\beta-\alpha}\Gamma(2\beta+1)}{\Gamma(2\beta-\alpha+1)} \tag{4.34}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$u'(s(x)) = 2x^\beta \tag{4.35}$$

$$u'(s(x))D_x^\alpha s(x) = 2x^\beta \frac{x^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} = 2 \frac{x^{2\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \quad (4.36)$$

elde edilir ki buda

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \neq \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^\alpha s}{\partial t^\alpha} \quad (4.37)$$

olduğu anlamına gelir. Yani zincir kuralındaki bu tutarsızlık, kesirli hesaplamının değişme özelliğinin (aşağıdaki özellik) olmadığını gösterir.

$$D^{\alpha+\beta} \neq D^\alpha D^\beta \neq D^\beta D^\alpha \quad (4.38)$$

Buradan hareketle, He ve çalışma arkadaşları kesirsel karmaşık dönüşümü şu şekilde modifiye etmişlerdir.

$0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$ ve $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin genel hali

$$F(u, u_t^\alpha, u_x^\beta, u_y^\gamma, u_z^\lambda, u_t^{2\alpha}, u_x^{2\beta}, u_y^{2\gamma}, u_z^{2\lambda}, \dots) = 0, \quad (4.39)$$

şeklinde gösterilir. Yine $u_t^\alpha = D_t^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ Jumarie'nin kesir mertebeli türevini ifade etsin. u sürekli fonksiyon (fakat türevlenebilir olması gerekmeyen) olmak üzere, modifiye Riemann-Liouville türevi

$$D_t^\alpha u(t, x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} [u(\xi, x, y, z) - u(0, x, y, z)] d\xi \quad (4.40)$$

olarak tanımlanır. Modifiye kesirsel karmaşık dönüşümü

$$T = \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (4.41)$$

$$X = \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \quad (4.42)$$

$$Y = \frac{ky^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (4.43)$$

$$Z = \frac{Iz^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)} \quad (4.44)$$

şeklinde yazılsın. Bu dönüşüm, sürekli uzay zamanı bir fraktal uzay zamana dönüştürmektedir. Kesirsel karmaşık dönüşümün anlamı şu şekilde ifade edilmiştir. He (He [39]) önceki çalışmasında, kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin en iyi süreksiz ortamda tanımlanabilir olduğunu ve kesir mertebenin kesir boyutla aynı anlama geldiğini göstermiştir.

Kesirli hesaplamalar için zincir kuralı

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \sigma_s' \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^\alpha s}{\partial t^\alpha} \quad (4.45)$$

olarak verilir. σ_s , σ_x , σ_y , σ_z fraktal indeksler olmak üzere,

$$\begin{aligned} s &= t^\alpha \\ X &= x^\beta \\ Y &= y^\gamma \\ Z &= z^\lambda \end{aligned} \quad (4.46)$$

dönüşümler kullanılarak,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^\alpha s}{\partial t^\alpha} = \sigma_s \frac{\partial u}{\partial s} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial^\beta X}{\partial x^\beta} = \sigma_x \frac{\partial u}{\partial X} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^\gamma Y}{\partial y^\gamma} = \sigma_y \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial^\lambda u}{\partial z^\lambda} = \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial^\lambda Z}{\partial z^\lambda} = \sigma_z \frac{\partial u}{\partial Z} \quad (4.50)$$

elde edilir. Böylece, kesir mertebeli diferensiyel denklemler kolay bir şekilde adi diferensiyel denklemlere dönüştürülür. Bu hesaplama herkesin kolayca yapabileceği zor olmayan işlemlerdir (He vd. [40]).

σ_s yi belirlemek için $s = t^\alpha$ ve $u = s^m$ özel olarak alınırsa

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\Gamma(1+m\alpha)t^{m\alpha-\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)} = \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma m t^{m\alpha-\alpha} \quad (4.51)$$

yazılır. Böylece σ_s ,

$$\sigma_s = \frac{\Gamma(1+m\alpha)}{m\Gamma(1+m\alpha-\alpha)} \quad (4.52)$$

olarak belirlenir. Diğer fraktal indeksleri de ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) benzer yolla bulunabilir.

Bir örnek ile fraktal indeksin nasıl belirleneceği gösterilsin.

Örnek 8: Kesir mertebeli diferensiyel denklemi

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + Bu = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad u(0) = 1 \quad (4.53)$$

ele alınsın.

$$s = t^\alpha \quad (4.54)$$

dönüşümü sonrasında a_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) ler daha sonradan belirlenecek sabitler olmak üzere varsayalım ki çözüm

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m \quad (4.55)$$

serisi şeklinde olsun. (4.55) denklemi (4.53) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{\partial}{\partial s} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{sm} a_m s^m + B \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m = 0 \quad (4.56)$$

veya

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \sigma_{sm} a_m s^{m-1} + B \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m = 0 \quad (4.57)$$

elde edilir. σ_{sm} fraktal indeksini belirlemek için (4.52) denkleminde

$$\sigma_{sm} = \frac{\Gamma(1+m\alpha)}{m\Gamma(1+m\alpha-\alpha)} \quad (4.58)$$

olur. (4.57) ve (4.58) denklemlerinden

$$\frac{\Gamma(1+m\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)} a_m + B a_{m-1} = 0, \quad (4.59)$$

elde edilir. Genel olarak, $u_0 = u(0) = 1$ başlangıç şartı gözönüne alınırsa basit bir hesaplamayla

$$a_m = \frac{(-B)^m}{\Gamma(1+m\alpha)} \quad (4.60)$$

bulunur. Böylece (4.53) denkleminin tam çözümü

$$u(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-B)^m}{\Gamma(1+m\alpha)} s^m \quad (4.61)$$

yada

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-B)^m}{\Gamma(1+m\alpha)} t^{m\alpha} = E_{\alpha}(-Bt^{\alpha}) \quad (4.62)$$

şeklinde bulunur. Mittag-Leffler fonksiyonu E_{α} ,

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{\Gamma(1+m\alpha)}$$

olarak tanımlanmaktadır (İbrahim [41]).

Kısaca, kesir mertebeli diferensiyel denklemlerde kesirsel karmaşık dönüşümü

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha} u &= \sigma'_t \frac{\partial u}{\partial \xi} D_t^{\alpha} \xi \\ D_x^{\alpha} u &= \sigma'_x \frac{\partial u}{\partial \xi} D_x^{\alpha} \xi \end{aligned} \quad (4.63)$$

zincir kuralından gelen fraktal indeksleri, l sabit olmak üzere

$$\sigma'_t = \sigma'_x = l \quad (4.64)$$

şeklinde düşünüp kesir mertebeli diferansiyel denklemi kolay bir şekilde adi diferansiyel denkleme dönüştürülür (Saad vd. [42], Elghareb vd. [43]).

4.2.1 Kesirsel Karmaşık Dönüşümün Farklı Türden Denklemlere Uygulanması

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişkenler, u bağımlı değişken ve $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere; P , u ve u 'nun kısmi kesir mertebeli türevlerinden oluşan bir polinom olsun. Lineer olmayan uzay kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin genel gösterimi

$$P(u, u_t, D_{x_1}^\beta u, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_m}, D_{x_1}^{2\beta} u, u_{x_2 x_2}, u_{x_3 x_3}, \dots) = 0 \quad (4.65)$$

ve k_i ($i=1, 2, 3, \dots, m$) ve c sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$U(\xi) = u(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \quad \xi = \frac{cx_1^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + k_1 x_2 + k_2 x_3 + \dots + k_m t \quad (4.66)$$

kesirsel karmaşık dönüşüm kullanılarak uzay kesirli diferansiyel denklemler

$$Q(U(\xi), U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0 \quad (4.67)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada $U' = \frac{dU}{d\xi}$, $U'' = \frac{d^2 U}{d\xi^2}$, ... ifade etmektedir.

Benzer şekilde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere; P , u ve u 'nun kısmi kesir mertebeli türevlerinden oluşan bir polinom olsun. Lineer olmayan zaman kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin genel gösterimi

$$P(u, D_t^\alpha u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_m}, D_t^{2\alpha} u, u_{x_1 x_1}, u_{x_2 x_2}, u_{x_3 x_3}, \dots) = 0 \quad (4.68)$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, k_i ($i=1, 2, 3, \dots, m$) ve c sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$U(\xi) = u(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \quad \xi = \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m \quad (4.69)$$

dönüşümü yardımıyla zaman kesir mertebeli diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürür.

Son olarak, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1} \leq 1$ olmak üzere; P , u ve u 'nun kısmi kesir mertebeli türevlerinden oluşan bir polinom olsun. Lineer olmayan uzay-zaman kesir mertebeli diferensiyel denklemleri genel gösterimi

$$P(u, D_t^{\alpha_1} u, D_{x_1}^{\alpha_2} u, D_{x_2}^{\alpha_3} u, \dots, D_{x_m}^{\alpha_{m+1}} u, D_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_2} u, D_t^{\alpha_1} D_{x_1}^{\alpha_2} u, \dots) = 0 \quad (4.70)$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, k_i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) ve c sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$U(\xi) = u(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \quad \xi = \frac{ct^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)} + \frac{k_1 x_1^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} + \frac{k_2 x_2^{\alpha_3}}{\Gamma(1+\alpha_3)} + \dots + \frac{k_m x_m^{\alpha_{m+1}}}{\Gamma(1+\alpha_{m+1})} \quad (4.71)$$

kesirsel karmaşık dönüşüm uzay-zaman kesirli diferensiyel denklemler adi diferensiyel denkleme dönüştürülür.

Elde edilen adi diferensiyel denklemler de imkân varsa, terim terim bir veya daha fazla integrali alınabilir. Bu dönüşüm sadece kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin "dalga" çözümleri için geçerlidir. Ancak her kesirli diferensiyel denklemler için "dalga" çözümünü bulunamadığından dolayı uygulamaları sınırlıdır.

Sonuç olarak; kesir mertebeli diferensiyel denklemleri çözmek için son yıllarda geliştirilmiş birçok yöntem vardır. Ancak bu yöntemler arasında kesirsel karmaşık dönüşüm, kesir mertebeli diferensiyel denklemleri adi diferensiyel denklemlere çevirmek için önerilen en basit yaklaşımdır. Bu dönüşüm, kesir mertebeli diferensiyel denklemleri klasik diferensiyel denklemlere çevirir ve çözüm prosedürünü oldukça kolay hale getirir. Böylece matematiksel analizin tüm analitik metotları kolayca kesirli analize uygulanabilir.

4.3 Alt Denklemler Yöntemi

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken $u_s = u_s(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$, $s = 1, 2, 3, \dots, k$ olmak üzere; P , u ve u 'nun kısmi kesir mertebeli türevlerinden oluşan bir polinom olsun. Lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin genel gösterimi

$$P(u_1, \dots, u_k, D_t^\alpha u_1, \dots, D_t^\alpha u_k, D_{x_1}^\alpha u_1, \dots, D_{x_1}^\alpha u_k, \dots, D_{x_m}^\alpha u_1, \dots, D_{x_m}^\alpha u_k, D_t^{2\alpha} u_1, \dots, D_t^{2\alpha} u_k, D_{x_1}^{2\alpha} u_1, \dots, D_{x_1}^{2\alpha} u_k, \dots, D_{x_m}^{2\alpha} u_1, \dots, D_{x_m}^{2\alpha} u_k, \dots) = 0 \quad (4.72)$$

şeklindedir.

Adım 1: (4.72) denkleminde genel haliyle verilen kesir mertebeli diferensiyel denklem için ξ kompleks bir değişken, k_j ($j=1,2,3,\dots,m$) ve c sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$U_s(\xi) = u_s(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \quad \xi = ct + k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m + \xi_0 \quad (4.73)$$

hareketli dalga dönüşümü ile

$$Q(U_1, \dots, U_k, c^\alpha D_\xi^\alpha U_1, \dots, c^\alpha D_\xi^\alpha U_k, k_1^\alpha D_\xi^\alpha U_1, \dots, k_1^\alpha D_\xi^\alpha U_k, \dots, k_m^\alpha D_\xi^\alpha U_1, \dots, k_m^\alpha D_\xi^\alpha U_k, c^{2\alpha} D_\xi^{2\alpha} U_1, \dots, c^{2\alpha} D_\xi^{2\alpha} U_k, k_1^{2\alpha} D_\xi^{2\alpha} U_1, \dots) = 0 \quad (4.74)$$

şeklinde kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme basitçe dönüştürülebilir. Burada türev ξ ye göredir.

Adım 2: Alt denklem yöntemi (sub-equation method), Zhang ve çalışma arkadaşı (Zhang ve Zhang [44]) tarafından tanımlanmış daha sonra birçok lineer olmayan kesirli diferensiyel denkleme uygulanmıştır (Guo vd. [45], Tang vd. [46]). Bu yöntem, lineer olmayan oluşum denklemlerinin hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözümlerini bulmak için oldukça etkili bir yöntemdir.

Alt denklem yönteminde $a_n \neq 0$ ve a_i ($i=0,1,2,\dots,n$) daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere (4.74) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \mathcal{G}^i \quad (4.75)$$

şeklinde aranır. Burada $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\xi)$ için

$$D_\xi^\alpha \mathcal{G} = \sigma + \mathcal{G}^2, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.76)$$

kesirli Riccati denklemini ifade etmektedir. σ sabit sayı ve n pozitif tamsayısı dengelenme sayısıdır. İlk olarak Zhang ve arkadaşları, (Zhang vd. [47]) genelleştirilmiş üstel fonksiyon metodunu kullanarak (4.76) denkleminin genel çözümünü

$$\mathcal{G}(\xi) = \begin{cases} -\sqrt{-\sigma} \tanh_{\alpha}(\sqrt{-\sigma}\xi), & \sigma < 0 \\ -\sqrt{-\sigma} \coth_{\alpha}(\sqrt{-\sigma}\xi), & \sigma < 0 \\ \sqrt{\sigma} \tan_{\alpha}(\sqrt{\sigma}\xi), & \sigma > 0 \\ -\sqrt{\sigma} \cot_{\alpha}(\sqrt{\sigma}\xi), & \sigma > 0 \\ -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\xi^{\alpha} + \omega}, \quad \omega = \text{sabit}, & \sigma = 0 \end{cases} \quad (4.77)$$

olarak elde etmişlerdir. Burada

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere bazı hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar

$$\begin{aligned} \sinh_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(z^{\alpha}) - E_{\alpha}(-z^{\alpha})}{2}, & \cosh_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(z^{\alpha}) + E_{\alpha}(-z^{\alpha})}{2}, \\ \sin_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(iz^{\alpha}) - E_{\alpha}(-iz^{\alpha})}{2}, & \cos_{\alpha}(z) &= \frac{E_{\alpha}(iz^{\alpha}) + E_{\alpha}(-iz^{\alpha})}{2}, \\ \tanh_{\alpha}(z) &= \frac{\sinh_{\alpha}(z)}{\cosh_{\alpha}(z)}, & \coth_{\alpha}(z) &= \frac{\cosh_{\alpha}(z)}{\sinh_{\alpha}(z)}, \\ \tan_{\alpha}(z) &= \frac{\sin_{\alpha}(z)}{\cos_{\alpha}(z)}, & \cot_{\alpha}(z) &= \frac{\cos_{\alpha}(z)}{\sin_{\alpha}(z)} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Adım 3: n pozitif tamsayısı, indirgenmiş (4.74) denkleminde yer alan lineer olmayan en yüksek dereceden terim ile en yüksek mertebeden lineer terim arasındaki homojen denge düşünülerek belirlenilir.

Adım 4: (4.75) denklemi (4.74) denkleminde yerine yazılır ve (4.76) denklemi kullanılarak, $\mathcal{G}(\xi)$ 'ye bağlı homojen bir denklem elde edilir. Bu denklemde $\mathcal{G}^i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), k_j ($j = 1, 2, 3, \dots, m$) ve c için bir cebirsel denklemler kümesi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple ile çözümünden a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), k_j ($j = 1, 2, 3, \dots, m$) ve c değerleri bulunur.

Adım 5: Bulunan bu değerler (4.75) denkleminde yerine yazılır ve (4.77) denklemi kullanılarak, (4.72) denkleminin farklı tam çözümleri hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel formlarda elde edilir.

Diğer bir yol olarak; (4.72) formundaki kesir mertebeli diferensiyel denklemi (4.71) denklemi yardımıyla (4.67) adi diferensiyel denkleme indirgenir.

$$\phi' = r + \phi^2 \quad (4.78)$$

ϕ , yardımcı denkleminin çözümü olmak üzere tam çözüm

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j \phi^j, \quad a_n \neq 0 \quad (4.79)$$

olarak aranır. Burada r ve a_i ($i=0,1,2,...,n$) sonradan belirlenecek sabitler ve n dengelenme sayısıdır. Dönüşümün çözülebilir olması için, homojen denge prensibi yardımıyla n dengelenme sayısını belirlenir. (4.79) denklemi (4.67) denkleminde yerine yazılılarak ve (4.78) denklemin yardımıyla elde edilen homojen denklemden ϕ^j ($j=0,1,2,...$) katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Cebirsel sistemin çözümünden r ve a_i ($i=0,1,2,...,n$) değerleri bulunur. Bulunan değerler ve ξ değeri, (4.79) denkleminde yerine yazılmasıyla kesir mertebeli diferensiyel denklemin tam çözümleri elde edilmiş olur.

Yöntemin avantaj ve dezavantajları: Bu yöntemin avantajı, çoğu diferensiyel denkleme doğrudan uygulanabilmesidir. Ayrıca elde edilen bir durum için üç farklı türden çözüm fonksiyonu (hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel) elde edilmektedir. Bu çözümler arasında diğer yöntemlerle elde edilemeyen rasyonel çözümler bulunmaktadır.

Diğer yandan, alt denklem yöntemi doğrudan ve yardımcı denklem yardımı ile olmak üzere farklı iki şekilde uygulanabiliyor olmasına rağmen, doğrudan uygulama tavsiye edilir. Çünkü doğrudan uygulama hem yardımcı denklem ile uygulamaya göre daha kolaydır hem de yardımcı denklem ile uygulamada bazı çözümler göz ardı edilmiş olabilir.

4.4 Fonksiyonel Değişirme Yöntemi

Adım 1: (4.70) da genel hali verilen kesir mertebeli diferansiyel denklemler; Li ve He (Li ve He [31], Li ve He [34], He vd. [38]) nin bulduğu kesirsel karmaşık dönüşüm ile adi diferansiyel denklemlere basitçe dönüştürülebilir.

Adım 2: Fonksiyonel değişirme yöntemi (functional variable method), ilk olarak Zerarka ve çalışma arkadaşları (Zerarka vd. [48]) tarafından tanımlanmış ve birçok bilim insanı tarafından çeşitli uygulamaları verilmiştir (Liu ve Chen [49], Bekir vd. [50], Çevikel vd. [51]). İndirgenmiş (4.67) denkleminde U bilinmeyen fonksiyon olmak üzere fonksiyonel değişken formuna

$$U_{\xi} = \frac{dU}{d\xi} = F(U) \quad (4.80)$$

şeklinde dönüşüm yapılır. (4.80) denkleminde yararlanarak sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}(F^2)', \\ U_{\xi\xi\xi} &= \frac{1}{2}(F^2)''\sqrt{F^2}, \\ U_{\xi\xi\xi\xi} &= \frac{1}{2}[(F^2)'''F^2 + (F^2)''(F^2)'] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.81)$$

Böylece (4.81) dönüşümü kullanıldığında (4.67) denklemi ile verilen indirgenmiş adi diferansiyel denklem U , F ve F nin türevlerinden oluşan

$$R(U, F, F', F'', F''', \dots) = 0 \quad (4.82)$$

denklemine dönüştürülür.

Adım 3: Daha sonra (4.82) denklemi integre edilerek $F(U)$ bulunur. (4.80) ile verilen dönüşümde her iki tarafın ξ ye göre integralini alarak (4.70) denkleminin tam çözümü elde edilir.

Yöntemin avantaj ve dezavantajları: Fonksiyonel değıştirme yönteminde yardımcı denklem olmaması bu yöntemin bir avantajı olarak gösterilebilir. Ancak, bu yöntem kullanıldığında her diferensiyel denklemin (4.80) formundaki integral kavramı alınamayabilir. Dolayısıyla her lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemin çözümü bulunamayabilir. Bu durumda yöntemin dezavantajıdır. Yani, fonksiyonel değışken yönteminin kesir mertebeli diferensiyel denklemlere uygulaması kolay ancak uygulama alanları kısıtlıdır.

4.5 Modifiye Edilmiş Basit Denklem Yöntemi

Adım 1: (4.70) de genel haliyle verilen kesir mertebeli diferensiyel denklem; (4.71) deki kesirsel karmaşık dönüşüm yardımıyla (4.67) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. Eğer imkân varsa, cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için (4.67) denkleminin terim terim bir veya daha fazla integrali alınabilir.

Adım 2: Bu yöntem ilk olarak Kudryashov (Kudryashov [52]) tarafından tanımlanmış ve uygulamaları birçok bilim insanı tarafından verilmiştir (Jawad vd. [53], Zayed [54], Pandır vd. [55]). Modifiye edilmiş basit denklem yönteminde, (modified simple equation method) (4.67) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)} \right)^k \quad (4.83)$$

şeklinde aranır. Burada N pozitif tamsayısı, $a_N \neq 0$ olmak üzere a_k , ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) keyfi sabitler ve $\psi(\xi)$ fonksiyonu daha sonra belirlenecektir.

Adım 3: Homojen denge prensibine göre, (4.67) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle (4.83) denklemindeki N pozitif tamsayısı bulunur.

Adım 4: (4.83) denkleminde U nun gerekli türevlerinin hesaplanarak indirgenmiş diferensiyel denklemde yerine yazılmasıyla $\psi(\xi)$ nin azalan kuvvetlerine göre düzenlenerek adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden $\psi(\xi)$ fonksiyonu ve a_k , ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) keyfi sabitler hesaplanır ve bulunan değerlerin (4.83) de yerine yazılmasıyla (4.70) de verilen kısmi türevli denklemin tam çözümleri elde edilmiş olur.

Yöntemin avantaj ve dezavantajları: Tanh yöntemi, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemi, üstel fonksiyon yöntemi gibi diğer bazı yöntemlerde, çözüm önceden tanımlanan bir fonksiyonun terimleri cinsinden ifade edilmektedir. Fakat modifiye edilmiş basit denklem yönteminde, $\psi(\xi)$ fonksiyonunun önceden tanımlanmamış olması ya da önceden tanımlanan herhangi bir fonksiyonun çözümü olmaması sebebiyle bu yöntem yardımıyla yeni çözümler bulunabilir (Taghizadeh vd. [56], Khan ve Akbar [57], Khan ve Akbar [58]). Bu durum da modifiye edilmiş basit denklem yönteminin avantajı olarak ifade edilebilir.

Diğer yandan, aşikâr çözümden farklı bir $\psi(\xi)$ fonksiyonunun her zaman bulunamaması bu yöntemin dezavantajı olarak görülebilir.

4.6 Kudryashov Yöntemi

Kudryashov yöntemi (Kudryashov method), Kudryashov (Kudryashov [59]) tarafından bulunmuş ve birçok lineer olmayan diferensiyel denkleme uygulanmıştır (Bulut ve Kılınç [60], Demiray vd. [61], Ege ve Mısırlı [62]). Bu bölümde, lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerinin tam çözümünü bulmak için genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi, geliştirilmiş Kudryashov yöntemi ve modifiye Kudryashov yöntemi olmak üzere üç farklı tipte Kudryashov yöntemi verilmiştir.

4.6.1 Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi

Adım 1: (4.70) da genel hali verilen kesir mertebeli diferensiyel denklem; (4.71) deki kesirsel karmaşık dönüşüm ile (4.67) adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Burada türev ξ ye göredir. Eğer imkân varsa, cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için (4.67) denkleminin terim terim bir veya daha fazla integrali alınabilir.

Adım 2: Genelleştirilmiş Kudryashov yönteminde, N pozitif tamsayısı ve a_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere (4.67) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i F^i(\xi) \quad (4.84)$$

şeklinde aranır. (4.84) denklemini

$$U(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi) + \dots + a_N F^N(\xi) \quad (4.85)$$

olarak da yazılabilir. Burada $F(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ fonksiyonu ve birinci mertebeden yardımcı denklem

$$F_\xi = F^2 - F \quad (4.86)$$

şeklindedir.

Adım 3: (4.67) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimlerin dengelenmesinden N dengelenme sayısı belirlenir. (Denge prensibi). U nun birinci ve ikinci türevleri genel olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} U_\xi &= \sum_{i=1}^N a_i i (F-1) F^i \\ U_{\xi\xi} &= \sum_{i=1}^N a_i i \left[(i+1) F^2 - (2i+1)(F-1) \right] F^i \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (4.87)$$

Adım 4: (4.87) deki denklemleri, (4.67) denkleminde yerine yazar ve (4.84) denkleminin de yardımıyla $F^n(\xi)$, ($n=0,1,2,\dots$) in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Maple paket programı yardımıyla bu denklem sisteminden a_N , c ve k_m değerleri bulunarak lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümleri elde edilir.

4.6.2 Geliştirilmiş Kudryashov Yöntemi

Adım 1: (4.70) denklemini genel hali verilen kesir mertebeli diferensiyel denklemini; (4.71) deki kesirsel karmaşık dönüşüm ile (4.67) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. Burada türev ξ ye göredir. Eğer imkân varsa, cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için (4.67) denkleminin terim terim bir veya daha fazla integrali alınabilir.

Adım 2: Geliştirilmiş Kudryashov yönteminde, N ve M pozitif tamsayıları, a_i

$(i = 0, 1, 2, \dots, N)$ ve b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, M$) daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere (4.67) denkleminin çözümünü

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i F^i(\xi)}{\sum_{j=0}^M b_j F^j(\xi)} = \frac{A[F(\xi)]}{B[F(\xi)]} \quad (4.88)$$

şeklinde aranır. (4.88) denklemini

$$U(\xi) = \frac{a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi) + \dots + a_N F^N(\xi)}{b_0 + b_1 F(\xi) + b_2 F^2(\xi) + \dots + a_M F^M(\xi)} \quad (4.89)$$

şekilde de yazılabilir. Burada $F(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ fonksiyonu ve birinci mertebeden yardımcı denklem

$$F_\xi = F^2 - F \quad (4.90)$$

şeklindedir.

Adım 3: (4.67) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimlerin dengelenmesinden N ve M dengelenme sayıları belirlenir. U nun birinci, ikinci ve üçüncü türevleri genel olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} U_\xi &= \frac{A' B F'(\xi) - A B' F'(\xi)}{B^2} \\ &= F'(\xi) \left[\frac{A' B - A B'}{B^2} \right] \\ &= (F^2(\xi) - F(\xi)) \left[\frac{A' B - A B'}{B^2} \right] \\ U_{\xi\xi} &= \frac{F^2(\xi) - F(\xi)}{B^2} (2F(\xi) - 1)(A' B - A B') \\ &\quad + \frac{(F^2(\xi) - F(\xi))^2}{B^3} [B(A'' B - A B'') - 2B' A' B + 2A(B')^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi\xi} = & \left(F^2(\xi) - F(\xi)\right)^3 \left[\left\{ (A'''B - AB''' - 3A''B' - 3B''A')B + 6B(AB'' + B'A') \right\} (B^3)^{-1} - \frac{6A(B')^3}{B^4} \right] \\
& + 3 \left(F^2(\xi) - F(\xi)\right)^2 (2F(\xi) - 1) \left[\frac{B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2}{B^3} \right] \\
& + \left(F^2(\xi) - F(\xi)\right) (6F^2(\xi) - 6F(\xi) + 1) \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot
\end{aligned}$$

Adım 4: $U(\xi)$ ve $U(\xi)$ 'nin gerekli türevlerini, (4.67) denkleminde yerine yazar ve (4.90) denkleminin de yardımıyla $F^n(\xi)$, $(n=0,1,2,...)$ in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Maple paket programı yardımıyla bu denklem sisteminden a_i ($i=0,1,2,...,N$), b_j ($j=0,1,2,...,M$), c ve k_m değerleri bulunarak lineer olmayan kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri elde edilir.

4.6.3 Modifiye Edilmiş Kudryashov Yöntemi

Adım 1: Genel olarak (4.70) de verilen kesir mertebeli diferansiyel denklem (4.71) deki kesirsel karmaşık dönüşüm yardımıyla (4.67) adi diferansiyel denklemine dönüştürülür. Eğer imkân varsa, cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için (4.67) denkleminin terim terim bir veya daha fazla integrali alınabilir.

Adım 2: Modifiye edilmiş Kudryashov yönteminde, N pozitif tamsayısı ve a_i , ($i=0,1,2,...,N$) daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere (4.67) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i F^i(\xi) \quad (4.91)$$

şeklinde aranır. Burada $F(\xi) = \frac{1}{1 \pm a^\xi}$ fonksiyonu ve birinci mertebeden yardımcı denklem

$$F_\xi = \ln a (F^2 - F) \quad (4.92)$$

şeklindedir.

Adım 3: (4.67) denklemin çözümünü

$$U(\xi) = a_N F^N(\xi) + \dots \quad (4.93)$$

şeklinde de yazılabilir. (4.93) denkleminde

$$\begin{aligned} U'(\xi) &= a_N N F^{N+1}(\xi) + \dots, \\ U''(\xi) &= a_N N(N+1) F^{N+2}(\xi) + \dots, \\ U^{(s)}(\xi) &= a_N N(N+1)\dots(N+s-1) F^{N+s}(\xi) + \dots, \\ U^l U^{(s)}(\xi) &= \overline{a_N} N(N+1)\dots(N+s-1) F^{(l+1)N+s}(\xi) + \dots, \\ \left(U^{(p)}\right)^r(\xi) &= \left(a_N N(N+1)\dots(N+s-1)\right)^r F^{r(N+p)}(\xi) + \dots, \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. (4.67) deki en yüksek dereceden lineer olmayan terimlerin dengelenmesinden N değeri belirlenir. Bunun için (4.67) denkleminde en yüksek dereceden lineer olmayan terimleri $U^l(\xi)U^{(s)}(\xi)$ ve $\left(U^{(p)}(\xi)\right)^r$ olarak düşünülürse homojen denge prensibinden

$$(l+1)N + s = r(N + p)$$

ve

$$N = \frac{s - rp}{r - l - 1}$$

olarak elde edilir.

Adım 4: (4.91) denklemi, (4.67) denkleminde yerine yazılır ve $F^n(\xi)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Maple paket programı yardımıyla bu denklem sisteminden a_N , c ve k_m değerleri bulunarak (4.91) de yerine yazılır. Böylece lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümleri elde edilir.

Yöntemin avantaj ve dezavantajları: Bu yöntemin yardımcı denkleminde üstel fonksiyon ifadesi bulunduğundan çözümler genel olarak elde edilir. Dolayısıyla bulunan çözümlerde, trigonometrik özdeşlikler yardımıyla hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonları cinsinden de bulunabilir. Yöntemin dezavantajı olarak yardımcı denklem kullanılarak çözümün aranması olabilir.

4.7 Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Yöntemi

Adım 1: (4.70) denkleminde genel hali verilen kesir mertebeli diferensiyel denklem; (4.71) deki kesirsel karmaşık dönüşüm ile (4.67) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. Burada türev ξ ye göredir. Eğer imkân varsa, cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için (4.67) denkleminin terim terim bir veya daha fazla integrali alınabilir.

Adım 2: Deneme denklem yöntemi, Ma ve Fuchssteiner (Ma ve Fuchssteiner [63]) tarafından tanımlanmış ve sonra birçok lineer olmayan kesirli diferensiyel denkleme uygulanmıştır (Pandir vd. [64]). Modifiye edilmiş deneme denklem yönteminde (modified trial equation method) $F(U)$ ve $G(U)$, U ya bağlı birer polinom olmak üzere, indirgenmiş (4.67) deki adi diferensiyel denklemini için modifiye deneme denklem yöntemi,

$$U' = \frac{F(U)}{G(U)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i U^i}{\sum_{j=0}^l b_j U^j} = \frac{a_0 + a_1 U + \dots + a_n U^n}{b_0 + b_1 U + \dots + b_l U^l} \quad (4.94)$$

ve

$$U'' = \frac{F(U)(F'(U)G(U) - F(U)G'(U))}{G^3(U)} \quad (4.95)$$

biçiminde ele alınır.

Adım 3: (4.67) denkleminde dengelenme prensibinden n ve l arasında bağıntı bulunur. n ve l nin bazı değerlerine göre (4.94) denklemi açılır. Daha sonra (4.94) ve (4.95) denklemlerini indirgenmiş (4.67) denkleminde yerine yazarak

$$\Omega(U) = \rho_s U^s + \dots + \rho_1 U + \rho_0 = 0, \quad (4.96)$$

şeklinde U ya bağlı $\Omega(U)$ polinomu denklemi yazılır. $\Omega(U)$ nun bütün katsayılarını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\rho_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s \quad (4.97)$$

(4.97) deki denklem sistemin çözümünden a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) ve b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, l$)

değerleri belirlenir.

Adım 4: Bulunan değerler (4.94) denkleminde yerine yazılır ve her iki tarafın ξ ye göre integrali alınır

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{G(U)}{F(U)} dU \quad (4.98)$$

şeklinde (4.67) denklemin tam çözümü bulunur. Burada, paydadaki $F(U)$ nun köklerini diskriminantının durumuna göre sınıflandırılıp, (4.98) denklemin integrali Maple paket programı yardımıyla bulunur. Böylece (4.70) deki lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemin hareketli dalga çözümleri elde edilir.

Yöntemin avantaj ve dezavantajları: Bu yöntem değişken katsayılı lineer olmayan kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler için kullanılan bir yöntemdir.

Bunun yanı sıra, verilen diferensiyel denklemlerin çözümlerinin çözülebilir diferensiyel denklemlerin çözüm fonksiyonu olarak genişletilmesi esasına dayanmaktadır. Böylece bu yöntem ile tanh yöntemi, homojen denge yöntemi, üstel fonksiyon yöntemi ve Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi gibi tam çözüm yöntemlerini birleştirmektedir.

Ayrıca, çoğu diferensiyel denkleme doğrudan uygulanabilmesi bu yöntemin avantajı olarak görülebilir.

YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI

Bu bölümde bazı lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin alt denklem yöntemi, fonksiyonel değişken yöntemi, modifiye edilmiş basit denklem yöntemi, Kudrasyhov yöntemi ve modifiye edilmiş deneme denklem yöntemiyle tam çözümleri verilmiştir.

5.1 Alt Denklem Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler

Bu kısımda; lineer olmayan zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denklemi, zaman kesir mertebeli Fisher denklemi, zaman kesir mertebeli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi, uzay-zaman kesirli beşinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi ve uzay-zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu dağılımlı uzun dalga denklemlerinin alt denklem yöntemiyle tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu denklemlerin kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

5.1.1 Zaman Kesir Mertebeli Cahn-Allen Denklemi

α , kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre olmak üzere; zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denklemi

$$D_t^\alpha u - u_{xx} + u^3 - u = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.1)$$

formundadır. Bu denklem; matematiksel biyoloji, kuantum mekaniği ve plazma fiziği gibi birçok bilimsel uygulamalarda ortaya çıkar. İyi bilinir ki; plazma ortamındaki dalga olayı, akışkan dinamikler kink şekliyle ve tanh çözümleri ile veya zil şekilli sech çözümleri şeklinde modellenir.

k ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.2)$$

biçiminde seçilir. " U' " = $\frac{dU}{d\xi}$ olmak üzere, (5.2) denklemi (5.1) denkleminde yerine yazılırsa, (5.1) denklemi

$$-\lambda U' - k^2 U'' + U^3 - U = 0, \quad (5.3)$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir.

(5.3) denklemindeki en yüksek dereceden lineer olmayan terim U^3 ile en yüksek mertebeden lineer U'' terimlerinin dengelenmesinden, dengelenme sayısı

$$\begin{aligned} 3n &= n + 2 \\ n &= 1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

bulunur. $n=1$ olmasından dolayı (4.75) denklemindeki çözüm formu

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \mathcal{G}, \quad a_1 \neq 0 \quad (5.5)$$

biçiminde ele alınır. a_0, a_1, k ve λ daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere, (5.5) denklemi ve yardımcı denklemi kullanılarak

$$U' = a_1 \sigma + a_1 \mathcal{G}^2 \quad (5.6)$$

ve

$$U'' = 2a_1 \sigma \mathcal{G} + 2a_1 \mathcal{G}^3 \quad (5.7)$$

elde edilir. (5.5)-(5.7) denklemleri, (5.3) denkleminde yerine yazılırsa, $\mathcal{G}^i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) ye bağlı bir polinom elde edilir. Bu ifadede $\mathcal{G}$ nin kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$\mathcal{G}^0: \quad -\lambda \sigma a_1 + a_0(a_0 - 1)(a_0 + 1) = 0$$

$$\mathcal{G}^1: \quad -2k^2 \sigma a_1 + 3a_0^2 a_1 - a_1 = 0,$$

$$\mathcal{G}^2: \quad \lambda a_1 + 3a_0 a_1^2 = 0,$$

$$\mathcal{G}^3: \quad -2k^2 a_1 + a_1^3 = 0.$$

yukarıdaki denklem sistemi elde edilir. k ve λ keyfî sabitler olmak üzere, Maple yardımıyla bu denklem sistemi çözüldüğünde farklı iki durum söz konusudur.

1. Durum:

$$a_0 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = 2k, \quad \lambda = -3k, \quad k = \pm \frac{i}{2\sqrt{2}\sigma} \quad (5.8)$$

burada bulunan değerler (5.5) denkleminde yerine yazılırsa, $\xi = x - \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$U(\xi) = -\frac{1}{2} + 2k\vartheta(\xi), \quad a_1 \neq 0 \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.2) denklemi (4.77) yardımıyla (5.9) denkleminde yerine yazılırsa, zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denkleminin 4 farklı tam çözümü:

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh \left[\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma < 0$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \coth \left[\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma < 0$$

$$u_3(x, t) = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \tan \left[\pm \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma > 0$$

$$u_4(x, t) = -\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2} \cot \left[\pm \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma > 0$$

bulunur.

2. Durum:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 2k, \quad \lambda = 3k, \quad k = \pm \frac{i}{2\sqrt{2}\sigma} \quad (5.10)$$

(5.10) da bulunan değerler (5.4) denkleminde yerine yazılırsa, $\xi = x + \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$U(\xi) = \frac{1}{2} + 2k\vartheta(\xi), \quad a_1 \neq 0 \quad (5.11)$$

elde edilir. (4.77) denklemi (5.11) denkleminde yerine yazılırsa, zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denkleminin farklı tam çözümleri aşağıdaki gibi bulunur:

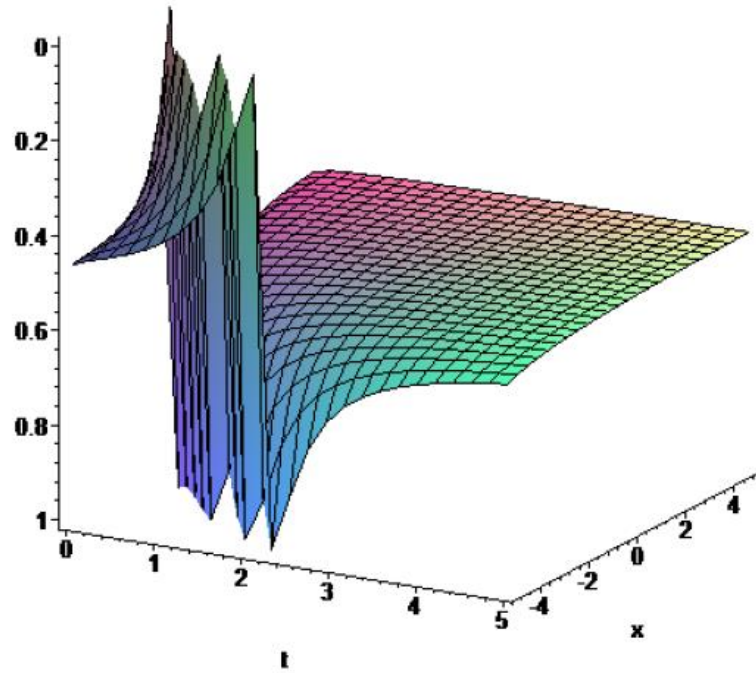
$$u_5(x, t) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh \left[\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma < 0$$

$$u_6(x, t) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \coth \left[\mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma < 0$$

$$u_7(x, t) = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \tan \left[\pm \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma > 0$$

$$u_8(x, t) = \frac{1}{2} \mp \frac{i}{2} \cot \left[\pm \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(x + \frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right], \quad \sigma > 0$$

Böylece, zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denkleminin hiperbolik ve trigonometrik hareketli dalga çözümleri elde edilmiş olur (Bekir vd. [65]).



Şekil 5. 1 $\alpha = 0.5$ için $u_5(x, t)$ 'nin tam çözümü

5.1.2 Zaman Kesir Mertebeli Fisher Denklemi

A keyfi sabit ve α zaman kesir mertebeli türevi ifade etmek üzere, lineer olmayan zaman kesir mertebeli Fisher denklemi

$$D_t^\alpha u - u_{xx} - A(1-u) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.12)$$

şeklinde ifade edilir. Fisher denkleminin; lojistik nüfus artışı, nörofizyolojisi, otokatalitik kimyasal reaksiyon ve Brown'un hareket süreçlerinin dallanması gibi alanlarda uygulamaları vardır.

k ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = kx + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.13)$$

denklem zaman kesir mertebeli olduğu için kesirsel karmaşık dönüşüm (5.13) deki şekilde tanımlanır ve (5.12) denkleminde yerine yazılır. " U' " = $\frac{dU}{d\xi}$ olmak üzere

modifiye Riemann-Liouville türevi yardımıyla, (5.12) denklemi aşağıdaki gibi adi diferensiyel denklemine dönüşür.

$$\lambda U' - k^2 U'' - AU(1-U) = 0, \quad (5.14)$$

İndirgenmiş (5.14) denkleminde en yüksek mertebeden lineer U'' terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim U^2 dengelenmesinden, n dengelenme sayısı

$$\begin{aligned} n+2 &= 2n \\ n &= 2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

bulunur.

Alt denklem yöntemine göre (5.14) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \vartheta + a_2 \vartheta^2, \quad a_2 \neq 0. \quad (5.16)$$

biçiminde ele alınır. a_0, a_1, a_2, k ve λ daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere, (5.16) denklemi ile (4.78) denklemi kullanılarak

$$U' = 2a_2\mathcal{G}^3 + a_1\mathcal{G}^2 + 2a_2\sigma\mathcal{G} + a_1\sigma \quad (5.17)$$

ve

$$U'' = 6a_2\mathcal{G}^4 + 2a_1\mathcal{G}^3 + 8a_2\sigma\mathcal{G}^2 + 2a_1\sigma\mathcal{G} + 2a_2\sigma^2 \quad (5.18)$$

eşitlikleri bulunur. (5.16)-(5.18) denklemlerini, (5.14) denkleminde yerine yazılıp, $\mathcal{G}^i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) kuvvetlerine göre düzenlenir. Oluşturulan bu katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^0: \quad & \lambda\sigma a_1 - 2k^2\sigma^2 a_2 - Aa_0 + Aa_0^2 = 0, \\ \mathcal{G}^1: \quad & 2\lambda\sigma a_2 - 2k^2\sigma a_1 - Aa_1 + 2Aa_0a_1 = 0, \\ \mathcal{G}^2: \quad & \lambda a_1 - 8k^2\sigma a_2 - Aa_2 + 2Aa_2a_0 + Aa_1^2 = 0, \\ \mathcal{G}^3: \quad & 2a_2(\lambda + Aa_1) - 2k^2a_1 = 0, \\ \mathcal{G}^4: \quad & Aa_2^2 - 6k^2a_2 = 0. \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. k ve A keyfi sabitler olmak üzere, yukarıdaki denklem sisteminin Maple yardımıyla çözümünden aşağıdaki 2 farklı durum elde edilir.

1. Durum: İlk olarak

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = -\frac{6\lambda}{5A}, \quad a_2 = \frac{6k^2}{A}, \quad \sigma = -\frac{A}{24k^2}, \quad \lambda = -5k\sqrt{\frac{A}{6}} \quad (5.19)$$

değerleri bulunur. $\xi = kx - 5k\sqrt{\frac{A}{6}} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere, (5.19) da bulunan değerler

(5.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U(\xi) = \frac{1}{4} - \frac{6\lambda}{5A}\mathcal{G} + \frac{6k^2}{A}\mathcal{G}^2 \quad (5.20)$$

elde edilir. (4.77) denklemi (5.20) denkleminde yerine yazılırsa, zaman kesir mertebeli kesir mertebeli Fisher denkleminin 4 farklı hareketli dalga çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \frac{1}{4} \tanh^2\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A > 0 \\
u_2(x,t) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \frac{1}{4} \coth^2\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A > 0 \\
u_3(x,t) &= \frac{1}{4} + \frac{i}{2} \tan\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) - \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A < 0 \\
u_4(x,t) &= \frac{1}{4} - \frac{i}{2} \cot\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) - \frac{1}{4} \cot^2\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A < 0
\end{aligned}$$

2. Durum: Son olarak

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_1 = -\frac{6\lambda}{5A}, \quad a_2 = \frac{6k^2}{A}, \quad \sigma = \frac{A}{24k^2}, \quad \lambda = -5ik\sqrt{\frac{A}{6}} \quad (5.21)$$

çözüm kümesi elde edilir. (5.21) da bulunan değerler (5.16) denkleminde yerine yazılırsa, $\xi = kx - 5ik\sqrt{\frac{A}{6}} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$U(\xi) = \frac{3}{4} - \frac{6\lambda}{5A} g + \frac{6k^2}{A} g^2 \quad (5.22)$$

sonucuna varılır. (4.77) denkleminin değerleri (5.22) denkleminde yerine yazıldığında zaman kesir mertebeli kesir mertebeli Fisher denkleminin 4 farklı hareketli dalga çözümü aşağıdaki gibi elde edilir (Bekir ve Aksoy [66]).

$$\begin{aligned}
u_5(x,t) &= \frac{3}{4} \mp \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) - \frac{1}{4} \tanh^2\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A > 0 \\
u_6(x,t) &= \frac{3}{4} \mp \frac{1}{2} \coth\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) - \frac{1}{4} \coth^2\left(\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A > 0 \\
u_7(x,t) &= \frac{3}{4} \pm \frac{i}{2} \tan\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A < 0 \\
u_8(x,t) &= \frac{3}{4} \mp \frac{i}{2} \cot\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \frac{1}{4} \cot^2\left(\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{A}{6}} \left(kx + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right), & A < 0
\end{aligned}$$

Elde edilen çözümlerin, Khan ve çalışma arkadaşlarının (Khan vd. [67]) homotopi pertürbasyon metoduyla (HPM) elde ettiği tam çözümlerden farklı olduğu görülür

5.1.3 Zaman Kesir Mertebeli Hirota-Satsuma Birleştirilmiş KdV Denklemi

$0 < \alpha \leq 1$ kesir mertebeli türevi ifade etmek üzere zaman kesir mertebeli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denklemi

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u - \frac{1}{4} u_{xxx} - 3uu_x - 3(-v^2 + w)_x &= 0, \\ D_t^\alpha v + \frac{1}{2} v_{xxx} + 3uv_x &= 0, \\ D_t^\alpha w + \frac{1}{2} w_{xxx} + 3uw_x &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

olarak bilinir. Denklem sistemi zaman kesir mertebeli olduğu için kesirsel karmaşık dönüşümü, k ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\ v(x, t) &= V(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\ w(x, t) &= W(\xi) \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

şeklinde seçilir. (5.24) denklemi (5.23) denklemine yerine yazılırsa, " U' " = $\frac{dU}{d\xi}$,

" V' " = $\frac{dV}{d\xi}$ ve " W' " = $\frac{dW}{d\xi}$ olmak üzere; (5.23) denklemi

$$\begin{aligned} -\lambda U' - \frac{k^3}{4} U''' - 3kUU' + 6kVV' - 3kW' &= 0, \\ -\lambda V' + \frac{k^2}{2} V''' + 3kUV' &= 0, \\ -\lambda W' + \frac{k^2}{2} W''' + 3kUW' &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

adi diferensiyel denklemlerine dönüşür. $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\xi)$ olmak üzere, indirgenmiş denklemlerin çözümü;

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \mathcal{G}^i, \quad V(\xi) = \sum_{i=0}^n b_i \mathcal{G}^i, \quad W(\xi) = \sum_{i=0}^p c_i \mathcal{G}^i \quad (5.26)$$

olarak aranır. (5.25) denklemlerindeki en yüksek mertebeden lineer terim U''' ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimlerin UU' dengelenmesinden

$$\begin{aligned} m+3 &= m+m+1 \\ m &= 2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

elde edilir. (5.25) denkleminde V''' ve UV' terimlerinin önceki denklemlere benzer dengelenmesinden

$$\begin{aligned} n+3 &= m+n+1 \\ n &= 2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

bulunur ve (5.25) denkleminde benzer mantıkla W''' ve UW' dengelenmesinden

$$\begin{aligned} p+3 &= m+p+1 \\ p &= 2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

dir. Bu durumda çözüm polinomu olarak

$$\begin{aligned} U(\xi) &= a_0 + a_1\mathcal{G} + a_2\mathcal{G}^2, \quad a_2 \neq 0 \\ V(\xi) &= b_0 + b_1\mathcal{G} + b_2\mathcal{G}^2, \quad b_2 \neq 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$W(\xi) = c_0 + c_1\mathcal{G} + c_2\mathcal{G}^2, \quad c_2 \neq 0$$

alınır. (5.30) denklemlerinde gerekli türevler alınarak indirgenmiş adi dferensiyel denklemlerinde yerine yazılıp, $\mathcal{G}$ nin kuvvetlerine göre düzenlenir. $\mathcal{G}$ nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin Maple programı ile çözümünden, b_0 ve c_0 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\lambda + 4k^4\sigma}{3k}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2k^2, \\ b_0 &= b_0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \pm\sqrt{3k}k^2, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$c_0 = c_0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{4\lambda k^2}{3} \pm 2\sqrt{3k}k^2b_0 - 4k^5\sigma,$$

çözüm kümesi elde edilir. (5.31) denklemindeki değerler, (5.30) denkleminde yerine yazıldığında

$$U(\xi) = -\frac{\lambda + 4k^4\sigma}{3k} - 2k^2g^2$$

$$V(\xi) = b_0 \pm \sqrt{3k}k^2g^2 \quad (5.32)$$

$$W(\xi) = c_0 + \left(-\frac{4\lambda k^2}{3} \pm 2\sqrt{3k}k^2b_0 - 4k^5\sigma \right) g^2$$

denklemini elde edilir. (4.77) denkleminin değerleri (5.32) denkleminde yerine yazıldığında zaman kesir mertebeli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminin 5 farklı hareketli dalga cözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

1. Durum: $\sigma < 0$ için $b_0, c_0, \lambda, k, \sigma$ keyfi sabitler ve $\xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$u_1(x, t) = -\frac{\lambda + 4k^4\sigma}{3k} + 2k^2\sigma \tanh^2 \left(\sqrt{-\sigma} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right)$$

$$v_1(x, t) = b_0 \mp \sqrt{3k}k^2\sigma \tanh^2 \left(\sqrt{-\sigma} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right)$$

$$w_1(x, t) = c_0 - \left(-\frac{4\lambda k^2}{3} \pm 2\sqrt{3k}k^2b_0 - 4k^5\sigma \right) \sigma \tanh^2 \left(\sqrt{-\sigma} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right)$$

ve

$$u_2(x, t) = -\frac{\lambda + 4k^4\sigma}{3k} + 2k^2\sigma \coth^2 \left(\sqrt{-\sigma} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right)$$

$$v_2(x, t) = b_0 \mp \sqrt{3k}k^2\sigma \coth^2 \left(\sqrt{-\sigma} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right)$$

$$w_2(x, t) = c_0 - \left(-\frac{4\lambda k^2}{3} \pm 2\sqrt{3k}k^2b_0 - 4k^5\sigma \right) \sigma \coth^2 \left(\sqrt{-\sigma} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right)$$

şeklinde hiperbolik fonksiyon cözümleri bulunur.

2. Durum: $\sigma > 0$ için $b_0, c_0, \lambda, k, \sigma$ keyfi sabitler ve $\xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$u_3(x, t) = -\frac{\lambda + 4k^4\sigma}{3k} - 2k^2\sigma \tan^2\left(\sqrt{\sigma}\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)$$

$$v_3(x, t) = b_0 \pm \sqrt{3k}k^2\sigma \tan^2\left(\sqrt{\sigma}\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)$$

$$w_3(x, t) = c_0 + \left(-\frac{4\lambda k^2}{3} \pm 2\sqrt{3k}k^2b_0 - 4k^5\sigma\right)\sigma \tan^2\left(\sqrt{\sigma}\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)$$

ve

$$u_4(x, t) = -\frac{\lambda + 4k^4\sigma}{3k} - 2k^2\sigma \cot^2\left(\sqrt{\sigma}\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)$$

$$v_4(x, t) = b_0 \pm \sqrt{3k}k^2\sigma \cot^2\left(\sqrt{\sigma}\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)$$

$$w_4(x, t) = c_0 + \left(-\frac{4\lambda k^2}{3} \pm 2\sqrt{3k}k^2b_0 - 4k^5\sigma\right)\sigma \cot^2\left(\sqrt{\sigma}\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)$$

olarak trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunur.

3. Durum: $\sigma = 0$ için λ , k , ϖ keyfi sabitler ve $\xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$u_5(x, t) = -\frac{\lambda}{3k} - 2k^2 \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \varpi\right)^2}$$

$$v_5(x, t) = b_0 \pm \sqrt{3k}k^2 \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \varpi\right)^2}$$

$$w_5(x, t) = c_0 + \left(-\frac{4\lambda k^2}{3} \pm 2\sqrt{3k}k^2b_0\right) \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \varpi\right)^2}$$

şeklinde rasyonel fonksiyon çözümleri bulunur (Bekir vd. [65]).

Elde edilen bu çözümler zaman kesir mertebeli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminin tam çözümleridir. Zaman kesir mertebeli Hirota-Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminin alt denklem yöntemiyle elde edilen bu çözümleri, bu konuda çalışan diğer araştırmacıların çözümleriyle (Lu [68], Taghizadeh vd. [69]) karşılaştırıldığında, bazı çözümlerin benzer olduğu görülmüştür.

5.1.4 Uzay-Zaman Kesirli Beşinci Mertebeden Sawada-Kotera Denklemi

α , kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre ve $u(x,t)$, x ve t ye bağlı bir fonksiyon olsun. Uzay-zaman kesirli beşinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi, $t > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$D_t^\alpha u + D_x^{5\alpha} u + 45u^2 D_x^\alpha u + 15(D_x^\alpha u D_x^{2\alpha} u + u D_x^{3\alpha} u) = 0 \quad (5.33)$$

şeklinde ifade edilir.

k ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, beşinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi uzay-zaman kesir mertebeli olduğundan, hareketli dalga dönüşümü

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t \quad (5.34)$$

şeklinde yazılır. " $D_\xi^\alpha U$ " = $\frac{\partial^\alpha U}{\partial \xi^\alpha}$ olmak üzere (5.34) denklemi (5.33) denkleminde yerine

konularak (5.33) denklemi

$$\lambda^\alpha D_\xi^\alpha U + k^{5\alpha} D_\xi^{5\alpha} U + 45k^\alpha U^2 D_\xi^\alpha U + 15k^{3\alpha} (D_\xi^\alpha U D_\xi^{2\alpha} U + U D_\xi^{3\alpha} U) = 0 \quad (5.35)$$

kesir mertebeli adi diferensiyel denklemine indirgendiği görülür.

(5.35) denklemindeki en yüksek dereceden lineer olmayan terim $D_\xi^\alpha U D_\xi^{2\alpha} U$ ile en yüksek mertebeden lineer $D_\xi^{5\alpha} U$ terimlerinin dengelenmesinden, n dengelenme sayısı

$$\begin{aligned} 2n + 3 &= n + 5 \\ n &= 2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

bulunur.

Böylece a_0 , a_1 , a_2 , λ ve k daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere, (5.35)

denkleminin çözüm polinomu

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \mathcal{G} + a_2 \mathcal{G}^2, \quad a_2 \neq 0 \quad (5.37)$$

biçiminde alınır.

(5.37) denklemini (4.76) yardımcı denklemi kullanarak (5.35) denkleminde yerine yazılır ve $\mathcal{G}^i$, ($i = 0, 1, 2, 3$) kuvvetlerine göre düzenlenir. Oluşturulan $\mathcal{G}^i$, ($i = 0, 1, 2, 3$) nin katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle bir denklem sistemi elde edilir. Maple yardımıyla bu denklem sistemi çözüldüğünde; k ve σ keyfi sabit olmak üzere

$$a_0 = \frac{1}{3} - \frac{8k^{2\alpha}\sigma}{9}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{4k^{2\alpha}}{3}, \quad \lambda = \left(\frac{32}{3} k^{2\alpha} \sigma^2 - 15k^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad (5.38)$$

değerleri elde edilir. Bu değerler (4.137) deki denklemde yerine yazıldığında

$$\xi = kx + \left(\frac{32}{3} k^{2\alpha} \sigma^2 - 15k^\alpha \right)^{1/\alpha} t \text{ olmak üzere}$$

$$U(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{8k^{2\alpha}\sigma}{9} - \frac{4k^{2\alpha}}{3} \mathcal{G}^2 \quad (5.39)$$

sonucuna ulaşılır.

(4.77) denkleminin değerleri (5.39) denkleminde yerine yazıldığında uzay-zaman kesirli beşinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi 5 farklı hareketli dalga çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1(x, t) = \frac{1}{3} - \frac{8k^{2\alpha}\sigma}{9} + \frac{4k^{2\alpha}\sigma}{3} \tanh_\alpha^2 \left[\sqrt{-\sigma}(kx + \lambda t) \right], \quad \sigma < 0,$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{3} - \frac{8k^{2\alpha}\sigma}{9} + \frac{4k^{2\alpha}\sigma}{3} \coth_\alpha^2 \left[\sqrt{-\sigma}(kx + \lambda t) \right], \quad \sigma < 0,$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{3} - \frac{8k^{2\alpha}\sigma}{9} - \frac{4k^{2\alpha}\sigma}{3} \tan_\alpha^2 \left[\sqrt{\sigma}(kx + \lambda t) \right], \quad \sigma > 0,$$

$$u_4(x, t) = \frac{1}{3} - \frac{8k^{2\alpha}\sigma}{9} - \frac{4k^{2\alpha}\sigma}{3} \cot_\alpha^2 \left[\sqrt{\sigma}(kx + \lambda t) \right], \quad \sigma > 0,$$

$$u_5(x, t) = \frac{1}{3} - \frac{4k^{2\alpha}\Gamma^2(1+\alpha)}{3(\xi^\alpha + \varpi)^2}, \quad \sigma = 0$$

Böylece $\xi = kx + \left(\frac{32}{3} k^{2\alpha} \sigma^2 - 15k^\alpha \right)^{1/\alpha} t$ için uzay-zaman kesirli beşinci mertebeden Sawada-Kotera denkleminin hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir (Bekir vd. [30]).

5.1.5 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli (2+1)-Boyutlu Dağılımlı Uzun Dalga Denklemleri

α , $0 < \alpha \leq 1$ uzay-zaman kesirli mertebeden türevi göstermek üzere, uzay-zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu dağılımlı uzun dalga denklemleri,

$$\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial y^\alpha \partial t^\alpha} + \frac{\partial^{2\alpha} v}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^\alpha \left(u \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right)}{\partial y^\alpha} = 0, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha (uv)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^{3\alpha} u}{\partial x^{2\alpha} \partial y^\alpha} = 0.$$

şeklinde tanımlanır. Denklem sistemi (2+1)-boyutlu ve uzay-zaman kesir mertebeli olduğu için hareketli dalga dönüşümü, k , l ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$u(x, y, t) = U(\xi), \quad v(x, y, t) = V(\xi) \quad (5.41)$$

$$\xi = kx + ly + \lambda t$$

biçiminde tanımlanır. " $D_\xi^\alpha U$ " = $\frac{\partial^\alpha U}{\partial \xi^\alpha}$ ve " $D_\xi^\alpha V$ " = $\frac{\partial^\alpha V}{\partial \xi^\alpha}$ olmak üzere (5.41) denklemini

(5.40) denklem sisteminde yerine konularak (5.40) denklem sistemini

$$\lambda^\alpha l^\alpha D_\xi^{2\alpha} U + k^{2\alpha} D_\xi^{2\alpha} V + k^\alpha l^\alpha (U D_\xi^{2\alpha} U + (D_\xi^\alpha U)^2) = 0, \quad (5.42)$$

$$\lambda^\alpha D_\xi^\alpha V + k^\alpha D_\xi^\alpha U + k^\alpha D_\xi^{2\alpha} (UV) + k^{2\alpha} l^\alpha D_\xi^{3\alpha} U = 0$$

kesir mertebeli adi diferensiyel denklem sistemine dönüştürür.

n ve m dengelenme sayıları olmak üzere (5.42) denklem sisteminin çözümü

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i g^i, \quad V(\xi) = \sum_{i=0}^m b_i g^i \quad (5.43)$$

şeklinde aranır.

(5.42) denkleminde $D_\xi^{3\alpha}U$ ve $D_\xi^\alpha(UV)$ terimlerinin önceki denklemlere benzer dengelenmesinden

$$\begin{aligned} n+3 &= n+m+1 \\ m &= 2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

bulunur. (5.42) denkleminde benzer mantıkla $D_\xi^{2\alpha}V$ ve $UD_\xi^{2\alpha}U$ dengelenmesinden

$$\begin{aligned} m+2 &= n+n+2 \\ n &= 1 \end{aligned} \quad (5.45)$$

elde edilir. Bu durumda (5.42) denklem sisteminin çözüm polinomları

$$U(\xi) = a_0 + a_1\mathcal{G}, \quad a_1 \neq 0 \quad (5.46)$$

$$V(\xi) = b_0 + b_1\mathcal{G} + b_2\mathcal{G}^2, \quad b_2 \neq 0$$

olarak alınır. (4.76) denklemini yardımıyla (5.46) denklemlerinin gerekli türevleri alınıp (5.42) denklemlerinde yerine yazılır ve $\mathcal{G}$ nin kuvvetlerine göre düzenlenir. $\mathcal{G}$ nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitleyerek bir denklem sistemi elde edilir. Maple yardımıyla bu denklem sistemi çözülürse,

$$a_0 = -\lambda^\alpha k^{-\alpha}, \quad a_1 = \pm 2k^\alpha \quad (5.47)$$

$$b_0 = -2k^\alpha l^\alpha \sigma - 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -2k^\alpha l^\alpha$$

çözüm kümeleri elde edilir.

(5.47) denklemindeki değerleri, (5.46) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$U(\xi) = -\lambda^\alpha k^{-\alpha} \pm 2k^\alpha \mathcal{G} \quad (5.48)$$

$$V(\xi) = -2k^\alpha l^\alpha \sigma - 1 - 2k^\alpha l^\alpha \mathcal{G}^2$$

elde edilir.

(4.77) denkleminin (5.48) denklemlerinde yerine yazılmasıyla, lineer olmayan uzay-zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu dağılımlı uzun dalga denkleminin 10 farklı tam çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

1. Durum: $\sigma < 0$ için λ, k, l, σ keyfi sabitler ve $\xi = kx + ly + \lambda t$ olmak üzere lineer olmayan uzay-zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu dağılımlı uzun dalga denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümleri:

$$u_{1,2}(x, y, t) = -\lambda^\alpha k^{-\alpha} \pm 2k^\alpha \sqrt{-\sigma} \tanh_\alpha \left(\sqrt{-\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

$$v_{1,2}(x, y, t) = -2k^\alpha l^\alpha \sigma - 1 + 2k^\alpha l^\alpha \sigma \tanh_\alpha^2 \left(\sqrt{-\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

ve

$$u_{3,4}(x, y, t) = -\lambda^\alpha k^{-\alpha} \pm 2k^\alpha \sqrt{-\sigma} \coth_\alpha \left(\sqrt{-\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

$$v_{3,4}(x, y, t) = -2k^\alpha l^\alpha \sigma - 1 + 2k^\alpha l^\alpha \sigma \coth_\alpha^2 \left(\sqrt{-\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

olarak bulunur.

2. Durum: $\sigma > 0$ için λ, k, l, σ keyfi sabitler ve $\xi = kx + ly + \lambda t$ olmak üzere lineer olmayan uzay-zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu dağılımlı uzun dalga denkleminin periyodik fonksiyon çözümleri:

$$u_{5,6}(x, y, t) = -\lambda^\alpha k^{-\alpha} \mp 2k^\alpha \sqrt{\sigma} \tan_\alpha \left(\sqrt{\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

$$v_{5,6}(x, y, t) = -2k^\alpha l^\alpha \sigma - 1 - 2k^\alpha l^\alpha \sigma \tan_\alpha^2 \left(\sqrt{\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

ve

$$u_{7,8}(x, y, t) = -\lambda^\alpha k^{-\alpha} \pm 2k^\alpha \sqrt{\sigma} \cot_\alpha \left(\sqrt{\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

$$v_{7,8}(x, y, t) = -2k^\alpha l^\alpha \sigma - 1 - 2k^\alpha l^\alpha \sigma \cot_\alpha^2 \left(\sqrt{\sigma} (kx + ly + \lambda t) \right)$$

olarak elde edilir.

3. Durum: $\sigma = 0$ için λ, k, l, ϖ keyfi sabitler ve $\xi = kx + ly + \lambda t$ olmak üzere lineer olmayan uzay-zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu dağılımlı uzun dalga denkleminin rasyonel fonksiyon çözümleri:

$$u_{9,10}(x, y, t) = -\lambda^\alpha k^{-\alpha} \pm \frac{2k^\alpha \Gamma(1+\alpha)}{(kx + ly + \lambda t)^\alpha + \varpi}$$

ve

$$v_{9,10}(x, y, t) = -1 + \frac{2k^\alpha l^\alpha \Gamma^2(1+\alpha)}{\left((kx + ly + \lambda t)^\alpha + \varpi\right)^2}$$

şeklindedir.

Böylece lineer olmayan uzay-zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu dağılımlı uzun dalga denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir (Bekir vd. [30]).

5.2 Fonksiyonel Değişken Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler

Bu kısımda; lineer olmayan zaman kesir mertebeli modifiye Korteweg-de Vries (mKdV) denkleminin, uzay-zaman kesir mertebeli Boussinesq denkleminin, uzay-zaman kesir mertebeli Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony (ZK-BBM) denkleminin, uzay-zaman kesir mertebeli modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) ve uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denkleminin fonksiyonel değişken yöntemiyle tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu denklemlerin kullanım alanlarına kısaca değinilmiştir.

5.2.1 Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi

α , kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre olmak üzere; zaman kesir mertebeli mKdV denklemi

$$D_t^\alpha u + 6u^2 u_x - u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.49)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem; çarpışmasız plazmadaki Alfvén dalgaları, anharmonik örgülerdeki akustik dalgaları, Schottky bariyerlerindeki iletim hatları, trafik sıkışıklığı modellemeleri, akustik iyon dalgaları, elastik medya, sıg su modeli, plazma bilimi, biyofizik gibi pek çok alanda görülmektedir (Yan [70]).

k ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, modifiye KdV denklemi zaman kesir mertebeli olduğundan, kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = kx + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.50)$$

biçiminde seçilir. " $U'' = \frac{dU}{d\xi}$ " olmak üzere, (5.50) denklemi (5.49) denkleminde yerine yazılırsa, (5.49) denklemi

$$\lambda U' + 6kU^2U' + k^3U''' = 0, \quad (5.51)$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir. ξ ye göre (5.51) denklemi bir kez integre edilirse

$$\lambda U + 2kU^3 + k^3U'' = 0, \quad (5.52)$$

veya

$$U_{\xi\xi} = -\frac{\lambda}{k^3}U - \frac{2k}{k^3}U^3 \quad (5.53)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra fonksiyonel değişken yöntemine göre

$$\begin{aligned} U_\xi &= F(U) \\ U_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}(F^2)' \end{aligned} \quad (5.54)$$

(5.54) dönüşümleri (5.53) denkleminde kullanılarak,

$$\frac{1}{2}(F^2(U))' = -\frac{\lambda}{k^3}U - \frac{2k}{k^3}U^3 \quad (5.55)$$

ve buradan

$$F^2(U) = -\frac{\lambda}{k^3}U^2 - \frac{1}{k^2}U^4 \quad (5.56)$$

elde edilir. Böylece (5.56) denklemini

$$F(U) = \mp \frac{1}{k}U \sqrt{\frac{\lambda}{k} + U^2} \quad (5.57)$$

veya

$$U_{\xi} = \mp \frac{1}{k} U \sqrt{\frac{\lambda}{k} + U^2} \quad (5.58)$$

şeklinde yazılabilir. İntegral sabiti sıfır olmak üzere, (5.58) denklemini ξ ye göre integre edilirse (5.49) denkleminin tam çözümü

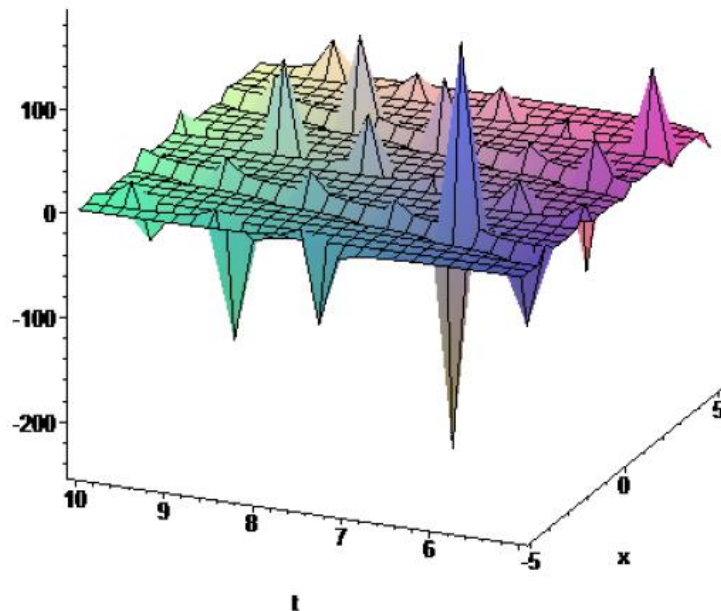
$$U_{1,2}(\xi) = \mp \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \csc \left\{ \sqrt{-\frac{\lambda}{k^3}} \xi \right\}, \quad (5.59)$$

şeklinde bulunur. Böylece, zaman kesir mertebeli mKdV denkleminin periyodik ve hiperbolik dalga çözümleri:

$$u_{1,2}(x,t) = \mp \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \csc \left\{ \sqrt{-\frac{\lambda}{k^3}} \left(kx + \frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\},$$

$$u_{3,4}(x,t) = \mp \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \csc h \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{k^3}} \left(kx + \frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\},$$

olarak elde edilir.



Şekil 5. 2 $\alpha = 0.5$, $k = 1$, $\lambda = -2$ için $u_{3,4}(x,t)$ 'nin tam çözümü

Elde edilen çözümlerin, Odibat ve Momani'nin varyasyonel iterasyon yöntemi kullanarak elde ettiği tam çözümlerden (Odibat ve Momani [71]) ve Abdulaziz ve arkadaşlarının (Abdulaziz vd. [72]) buldukları analitik çözümlerden farklı olduğu görülmektedir (Bekir vd. [50]).

5.2.2 Zaman Kesir Mertebeli Boussinesq Denklemi

α , kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli Boussinesq denklemi

$$D_t^{2\alpha}u + bD_x^{2\alpha}u + \beta D_x^{2\alpha}(u^2) + \gamma D_x^{4\alpha}u = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.60)$$

olarak verilir. Bu denklemde, $\gamma > 0$ sabiti materyalin basınç ve sertlik özelliklerine bağlı dağılım parametresidir, $\beta \in \mathbb{R}$ lineer olmayan kısmi kontrol eden sabit katsayı, $u(x, t)$ dikey saptırma ve ikinci dereceden $(u^2)_{xx}$ eğik kirişin eğriliğini oluşturmaktadır (Jafari vd. [73])

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli olduğu için kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.61)$$

biçiminde alınır. (5.61) denklemi (5.60) denklemine yerine yazılarak " $U'' = \frac{dU}{d\xi}$ "

olmak üzere, (5.60) denkleminin

$$\lambda^2 U'' + bk^2 U'' + \beta k^2 (U^2)'' + \gamma k^4 U'''' = 0 \quad (5.62)$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir. ξ ye göre (5.62) denklemini iki kez integre eder ve integral sabiti sıfır seçilirse

$$(\lambda^2 + bk^2)U + \beta k^2 U^2 + \gamma k^4 U'' = 0 \quad (5.63)$$

ve buradan da

$$U_{\xi\xi} = -\frac{\lambda^2 + bk^2}{\gamma k^4}U - \frac{\beta}{\gamma k^2}U^2 \quad (5.64)$$

denklemini elde edilir. Daha sonra fonksiyonel değişken yöntemine göre $U_\xi = F(U)$ dönüşümü kullanılırsa

$$\frac{1}{2}(F^2(U))' = -\frac{\lambda^2 + bk^2}{\gamma k^4}U - \frac{\beta}{\gamma k^2}U^2 \quad (5.65)$$

elde edilir. (5.65) denklemini

$$F(U) = \mp U \sqrt{\frac{\lambda^2 + bk^2}{\gamma k^4} + \frac{2\beta}{3\gamma k^2}}U \quad (5.66)$$

şeklinde de yazılabilir. İntegral sabiti sıfır olmak üzere, (5.66) denklemini ξ ye göre integre edilirse (5.66) denkleminin tam çözümü

$$U(\xi) = -\frac{3(\lambda^2 + bk^2)}{2\beta k^2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{(\lambda^2 + bk^2)\gamma}{2\gamma k^2}} \xi \right\} \quad (5.67)$$

şeklinde bulunur. Böylece, uzay-zaman kesir mertebeli Boussinesq denkleminin hiperbolik çözümleri:

$$u_1(x, t) = -\frac{3(\lambda^2 + bk^2)}{2\beta k^2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{(\lambda^2 + bk^2)\gamma}{2\gamma k^2}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\}$$

$$u_2(x, t) = -\frac{3(\lambda^2 + bk^2)}{2\beta k^2} \left\{ 1 + \tanh^2 \left[\sqrt{\frac{(\lambda^2 + bk^2)\gamma}{2\gamma k^2}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right] \right\}$$

olarak elde edilir.

Bulunan tam çözümlerin, Jafari ve arkadaşlarının alt denklem metoduyla elde ettiği tam çözümlerden (Jafari vd. [74]) farklı olduğu görülür (Bekir vd. [50]).

5.2.3 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Zakharov-Kuznetsov-Benjamin-Bona-Mahony (ZK-BBM) Denklemi

a ve b keyfi sabitler ve α kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli ZK-BBM denklemi

$$D_t^\alpha u + D_x^\alpha u - 2auD_x^\alpha u - bD_t^\alpha (D_x^{2\alpha} u) = 0 \quad (5.68)$$

olarak verilir. Bu denklem, uzun dalga rejimdeki yerçekimi su dalgalarının açıklamasında kullanılmıştır.

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere,

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.69)$$

uzay-zaman kesir mertebeli olduğu için kesirsel karmaşık dönüşüm (5.69) deki gibi alınır ve (5.68) denkleminde yerine yazılır. " U'' " = $\frac{dU}{d\xi}$ olmak üzere, modifiye

Riemann-Liouville türev yardımıyla

$$(k - \lambda)U' - 2akUU' + b\lambda k^2 U'' = 0 \quad (5.70)$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir. ξ ye göre (5.70) denklemini bir kez integre eder ve integral sabiti sıfır seçilirse

$$(k - \lambda)U - akU^2 + b\lambda k^2 U'' = 0 \quad (5.71)$$

veya

$$U_{\xi\xi} = \frac{a}{bk\lambda} U^2 - \frac{k - \lambda}{bk^2\lambda} U \quad (5.72)$$

denklemini elde edilir. Sonra (5.72) denkleminde $U_\xi = F(U)$ dönüşümü kullanılırsa

$$\frac{1}{2} (F^2(U))' = \frac{a}{bk\lambda} U^2 - \frac{k - \lambda}{bk^2\lambda} U \quad (5.73)$$

yazılır ve buradan

$$F(U) = \mp U \sqrt{\frac{2akU - 3k + 3\lambda}{3bk^2\lambda}} \quad (5.74)$$

olarak bulunur. Böylece (5.68) denkleminin tam çözümü

$$U(\xi) = \frac{3(k - \lambda)}{2ak} \sec^2 \left\{ \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{k - \lambda}{b\lambda}} \xi \right\} \quad (5.75)$$

şeklinde bulunur. Böylece, uzay-zaman kesir mertebeli ZK-BBM denkleminin periyodik ve hiperbolik çözümleri

$$u_1(x,t) = \frac{3(k-\lambda)}{2ak} \sec^2 \left\{ \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{k-\lambda}{b\lambda}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\}$$

$$u_2(x,t) = \frac{3(k-\lambda)}{2ak} \sec^2 h^2 \left\{ \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{k-\lambda}{b\lambda}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\}$$

kolay bir şekilde elde edilir.

Elde edilen çözümlerin, Alzaidy'in (Alzaidy [75]) alt denklem metoduyla elde ettiği tam çözümlerden farklı ve bu çözümlerin yeni olduğu görülmüştür.

5.2.4 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) Denklemi

$0 < \alpha \leq 1$, kesir mertebeli türev ve v sıfırdan farklı pozitif bir sabit olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli mBBM denklemi

$$D_t^\alpha u + D_x^\alpha u - vu^2 D_x^\alpha u + D_x^{3\alpha} u = 0 \quad (5.76)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem ilk olarak lineer olmayan dağıtıcı ortamda, uzun dalga yüzeylerinin yaklaşık değerini belirlemek için kullanılmıştır. Aynı zamanda soğuk plazmadaki hidromanyetik dalgaların, harmonik olmayan kristallerinin akustik dalgalarının ve sıkıştırılabilir akışkanlardaki akustik yer çekimi dalgalarının tanımlanmasında da önemli rol oynamaktadır.

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.77)$$

şeklinde alınır. (5.77) denklemi (5.76) denkleminde yerine yazılırsa, " U "' = $\frac{dU}{d\xi}$ olmak

üzere; (5.76) denklemi

$$(k-\lambda)U' - vU^2U' + k^3U''' = 0 \quad (5.78)$$

adi diferensiyel denklemine indirgendiği görülür.

(5.78) denklemi bir kez integre edilir ve integral sabiti sıfır alınır

$$(k - \lambda)U - vk \frac{U^3}{3} + k^3 U'' = 0 \quad (5.79)$$

veya

$$U_{\xi\xi} = \frac{vk}{3}U^3 - (k - \lambda)U \quad (5.80)$$

denklemi elde edilir. Fonksiyonel değişken yöntemine göre $U_\xi = F(U)$ dönüşümü kullanılarak

$$\frac{1}{2}(F^2(U))' = \frac{vk}{3}U^3 - (k - \lambda)U \quad (5.81)$$

yazılır ve

$$F(U) = \mp U \sqrt{\frac{vkU^2 - 6k + 6\lambda}{6}} \quad (5.82)$$

olarak bulunur. (5.76) denkleminin tam çözümü

$$U(\xi) = \sqrt{\frac{6(k - \lambda)}{vk}} \sec \left\{ \frac{vk}{k - \lambda} \xi \right\} \quad (5.83)$$

elde edilir. Uzak-zaman kesir mertebeli mBBM denkleminin

$$u_1(x, t) = \sqrt{\frac{6(k - \lambda)}{vk}} \sec \left\{ \frac{vk}{k - \lambda} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \right\}$$

$$u_2(x, t) = \sqrt{\frac{6(k - \lambda)}{vk}} \operatorname{sech} \left\{ \frac{vk}{k - \lambda} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \right\}$$

periyodik ve hiperbolik çözümleri elde edilmiş olur.

Uzak-zaman kesir mertebeli mBBM denkleminin bulunan çözümleri, Alzaidy'in (Alzaidy [75]) alt denklem yöntemiyle bulduğu tam çözümlerle karşılaştırıldığında elde edilen çözümlerin yeni olduğu görülecektir.

5.2.5 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Klein-Gordon Denklemi

β ve γ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denklemi

$$D_{tt}^{2\alpha} u - D_{xx}^{2\alpha} u + \gamma u - \beta u^2 = 0 \quad (5.84)$$

şeklinde tanımlanır. Lineer olmayan kesir mertebeli Klein-Gordon denkleminin birçok farklı tiplerinin olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra, Klein-Gordon denklemi katı hal fiziği, lineer olmayan optik ve kuantum alan teorisi gibi birçok gerçek hayat uygulamasında önemli rol oynamaktadır.

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.85)$$

şeklinde alınır. (5.85) denklemi (5.84) denkleminde yerine yazılırsa, " $U'' = \frac{dU}{d\xi}$ " olmak üzere; (5.84) denklemi

$$(\lambda^2 - k^2)U'' + \gamma U - \beta U^2 = 0 \quad (5.86)$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir. Sonra (5.86) denklemi

$$U_{\xi\xi} = \frac{\beta}{\lambda^2 - k^2} U^2 - \frac{\gamma}{\lambda^2 - k^2} U \quad (5.87)$$

olarak düzenlenir. (5.87) denkleminde

$$\begin{aligned} U_\xi &= F(U) \\ U_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}(F^2)' \end{aligned} \quad (5.88)$$

dönüşümleri uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$F(U) = \mp U \sqrt{\frac{2\beta}{3(\lambda^2 - k^2)} U - \frac{\gamma}{\lambda^2 - k^2}} \quad (5.89)$$

haline gelir. (5.84) denkleminin tam çözümü

$$U(\xi) = \frac{3\gamma}{2\beta} \sec^2 \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{4(\lambda^2 - k^2)}} \xi \right\} \quad (5.90)$$

bulunur. Lineer olmayan uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denkleminin

$$u_1(x, t) = \frac{3\gamma}{2\beta} \sec^2 \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{4(\lambda^2 - k^2)}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\}$$

$$u_2(x, t) = \frac{3\gamma}{2\beta} \sec h^2 \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{4(\lambda^2 - k^2)}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\}$$

periyodik ve hiperbolik çözümleri elde edilir.

Elde edilen çözümler ile, Jafari ve arkadaşlarının alt denklem yöntemiyle bulduğu çözümler (Jafari vd. [74]) karşılaştırıldığında bu çözümlerin yeni olduğu görülmüştür.

5.3 Modifiye Edilmiş Basit Denklem Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler

Bu kısımda; zaman kesir mertebeli biyolojik populasyon denklemi, zaman kesir mertebeli Hamiltonian sistemi, uzay-zaman kesir mertebeli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili (pKP) denklemi, uzay-zaman kesir mertebeli modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) denklemi ve uzay-zaman kesir mertebeli birleştirilmiş Burgers denklemlerinin modifiye edilmiş basit denklem metoduyla tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca verilen denklemlerin kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

5.3.1 Zaman Kesir Mertebeli Biyolojik Populasyon Denklemi

α kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre, h ve r birer sabit olmak üzere, zaman kesir mertebeli biyolojik populasyon denklemi

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) - h(u^2 - r) = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (5.91)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde, u populasyon yoğunluğunu ve $h(u^2 - r)$ doğum ve ölüme göre populasyon değişimini göstermektedir.

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit ve $i^2 = -1$ olmak üzere, zaman kesir mertebeli olduğu için kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x, y, t) = U(\xi), \quad \xi = kx + iky - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.92)$$

olarak tanımlanır. (5.92) denklemi (5.91) denkleminde yerine yazılırsa; " U'' " = $\frac{dU}{d\xi}$ olmak üzere; (5.91) denklemi

$$\lambda U' + hU^2 - hr = 0 \quad (5.93)$$

adi diferensiyel denkleme dönüşür.

Bu denklemin çözümü modifiye edilmiş basit denklem yöntemi gereğince (4.83) denklemindeki gibi ele alınır. N dengelenme sayısını bulmak için, (5.93) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terimi U' ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimi U^2 aşağıdaki gibi dengelenir. Yani

$$\begin{aligned} N + 1 &= 2N \\ N &= 1 \end{aligned} \quad (5.94)$$

bulunur. $\psi(\xi) = \psi$ için, (5.91) denkleminin, $N = 1$ olmasından dolayı çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) \quad (5.95)$$

biçiminde ele alınır. Sonradan belirlenecek a_0, a_1 keyfi sabitleri ve $\psi(\xi)$ fonksiyonu olmak üzere,

$$U' = a_1 \left[\frac{\psi''}{\psi} - \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 \right] \quad (5.96)$$

ve

$$U^2 = a_1^2 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + 2a_0 a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) + a_0^2 \quad (5.97)$$

elde edilir. (5.96) ve (5.97) denklemleri (5.93) denkleminde yerine yazıldığında

$$\lambda a_1 \left(\frac{\psi''}{\psi} \right) - \lambda a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + h a_0^2 + 2h a_0 a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) + h a_1^2 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 - h r = 0 \quad (5.98)$$

şeklinde $\left(\frac{\psi'}{\psi} \right)$ ye bağlı polinom elde edilir. Bu ifade de ψ^{-2} , ψ^{-1} ve ψ^0 nin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$\psi^{-2}: h a_1^2 (\psi')^2 - \lambda a_1 (\psi')^2 = 0, \quad (5.99)$$

$$\psi^{-1}: \lambda a_1 \psi'' + 2h a_0 a_1 \psi' = 0, \quad (5.100)$$

$$\psi^0: h a_0^2 - h r = 0 \quad (5.101)$$

yukarıdaki denklem sistemi elde edilir. λ , r ve h keyfi sabitler olmak üzere, Maple yardımıyla (5.99) ve (5.101) denklemleri çözüldüğünde

$$a_0 = \pm \sqrt{r}, \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{h}}, \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.102)$$

bulunur. $a_0 = \pm \sqrt{r}$ ve $a_1 = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{h}}$ değerleri için, C_1 ve C_2 integral sabiti olmak üzere (5.100) denkleminde

$$\psi(\xi) = C_1 + C_2 \exp\left(\mp \frac{2h\sqrt{r}}{\lambda} \xi\right) \quad (5.103)$$

elde edilir. Böylece (5.102) ve (5.103) deki değerler (5.95) denkleminde yerine yazılırsa

$$\xi = kx + iky - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \text{ olmak üzere (5.91) denkleminin tam çözümü}$$

$$U(\xi) = \pm \sqrt{r} \mp \frac{2C_2 \sqrt{r} \exp\left(\mp \frac{2h\sqrt{r}}{\lambda} \xi\right)}{C_1 + C_2 \exp\left(\mp \frac{2h\sqrt{r}}{\lambda} \xi\right)} \quad (5.104)$$

olarak elde edilir.

C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere zaman kesir mertebeli biyolojik populasyon denkleminin hiperbolik hareketli dalga çözümleri;

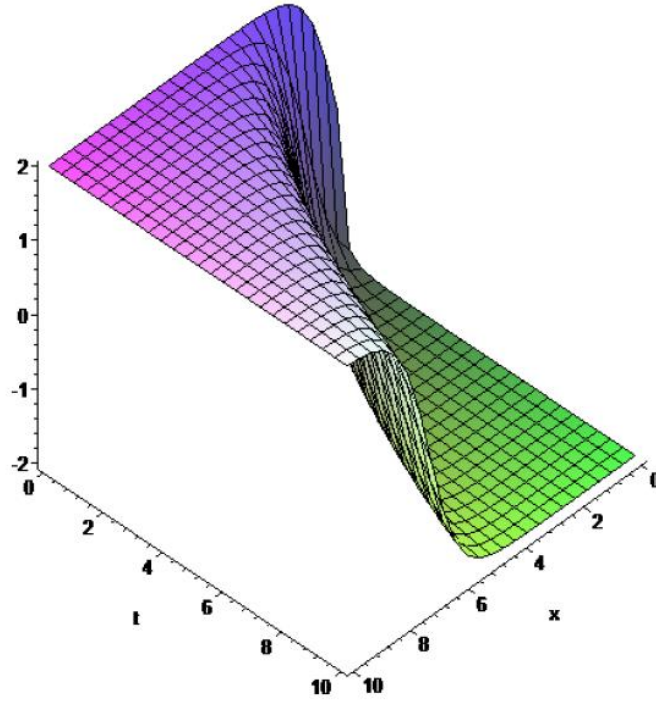
Özel olarak (5.104) denkleminde $C_1 = 1$ ve $C_2 = 1$ seçilirse

$$u_{1,2}(x, y, t) = \mp \sqrt{r} \tanh \left\{ \mp \frac{h\sqrt{r}}{\lambda} \left(kx +iky - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.105)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $C_1 = -1$ ve $C_2 = 1$ alınırsa

$$u_{3,4}(x, y, t) = \mp \sqrt{r} \coth \left\{ \mp \frac{h\sqrt{r}}{\lambda} \left(kx +iky - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.106)$$

tam çözümü elde edilir.



Şekil 5. 3 $\alpha = 0.5$, $k = 1$, $\lambda = 2$, $r = 4$, $h = 1$, $y = 0$ için $u_{1,2}(x, t)$ 'nin tam çözümü

C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere, (5.105) ve (5.106) denklemleri kullanılarak zaman kesir mertebeli biyolojik populasyon denkleminin trigonometrik hareketli dalga çözümleri sırasıyla;

$$u_{5,6}(x, y, t) = \pm i \sqrt{r} \cot \left\{ \mp \frac{h\sqrt{r}}{\lambda} \left(kx + iky - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.107)$$

ve

$$u_{7,8}(x, y, t) = \mp i \sqrt{r} \tan \left\{ \mp \frac{h\sqrt{r}}{\lambda} \left(kx + iky - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.108)$$

olarak bulunur.

Modifiye edilmiş basit denklem yöntemiyle elde edilen çözümlerin, Zhang ve H.Q. Zhang'ın alt denklem metoduyla bulduğu çözümlerle (Zhang ve Zhang [76]) ve Bekir ve çalışma arkadaşlarının üstel fonksiyon yöntemiyle (Bekir vd. [77]) elde ettiği çözümlerden farklı olduğu görülmüştür.

5.3.2 Zaman Kesir Mertebeli Hamiltonian Sistemi

α zaman kesir mertebeli türevi ifade etmek üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial x} + 2v, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} &= 2\varepsilon uv, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (5.109)$$

denklemini zaman kesir mertebeli Hamiltonian sistemi olarak bilinir. Bu denklem, uygulamalı bilimlerde ve matematiksel fizikte önemli bir yere sahiptir.

λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, Hamiltonian sistemi zaman kesir mertebeli olduğundan

$$u(x, t) = U(\xi), \quad v(x, t) = V(\xi), \quad \xi = x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.110)$$

biçiminde kesirsel karmaşık dönüşüm seçilir.

Benzer şekilde (5.110) denklemini (5.109) denkleminde yerine yazıldığı $U'' = \frac{dU}{d\xi}$

ve $V'' = \frac{dV}{d\xi}$ olmak üzere, (5.109) denklem sistemi

$$\begin{aligned} -\lambda U' &= U' + 2V \\ -\lambda V' &= 2\varepsilon UV, \end{aligned} \quad (5.111)$$

adi diferensiyel denklem sistemine indirgenir. (5.111) deki birinci denklemden

$$V = -\frac{1}{2}(\lambda + 1)U' \quad (5.112)$$

eşitliği vardır. (5.112) denklemini (5.111) deki ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\lambda U'' = \varepsilon U U' \quad (5.113)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. ξ_0 integral sabiti olmak üzere, (5.113) denklemi ξ 'ye göre bir kez integre edilirse

$$\lambda U' + \varepsilon U^2 + \xi_0 = 0 \quad (5.114)$$

denklemi elde edilir.

(5.114) denkleminde U' ve U^2 terimlerinin önceki denklemlere benzer dengelenmesinden

$$\begin{aligned} N + 1 &= 2N \\ N &= 1 \end{aligned} \quad (5.115)$$

bulunur. $\psi(\xi) = \psi$ için, (5.114) denkleminin çözüm polinomu

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) \quad (5.116)$$

biçiminde alınır. (5.116) denkleminde

$$U' = a_1 \left[\frac{\psi''}{\psi} - \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 \right] \quad (5.117)$$

$$U^2 = a_1^2 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + 2a_0 a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) + a_0^2 \quad (5.118)$$

yazılır. (5.116)-(5.118) denklemlerini, (5.114) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda a_1 \left(\frac{\psi''}{\psi} \right) - \lambda a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon a_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon a_0 a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon a_1^2 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \xi_0 = 0$$

polinomu elde edilir. ψ^{-i} ($i = 0, 1, 2$) kuvvetlerine göre düzenlenir. Oluşturulan bu katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle

$$\psi^{-2}: -\lambda a_1 (\psi')^2 + \frac{1}{2} \varepsilon a_1^2 (\psi')^2 = 0, \quad (5.119)$$

$$\psi^{-1}: \lambda a_1 \psi'' + \frac{1}{2} \varepsilon a_0 a_1 \psi' = 0, \quad (5.120)$$

$$\psi^0: \frac{1}{2} \varepsilon a_0^2 + \xi_0 = 0 \quad (5.121)$$

denklem sistemi elde edilir. Maple yardımıyla bu denklem sistemi çözüldüğünde;

λ ve ε keyfi sabitler olmak üzere

$$a_0 = \pm \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\varepsilon}, \quad a_1 = \frac{2c}{\varepsilon}, \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.122)$$

çözüm kümeleri elde edilir. C_1 ve C_2 integral sabiti olmak üzere (5.120) denkleminde

$$\psi(\xi) = C_1 + C_2 \exp\left(\mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{c} \xi\right) \quad (5.123)$$

bulunur. Böylece (4.122) ve (5.123) deki değerler (5.116) denkleminde yerine yazılırsa

$\xi = x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere (5.109) denkleminin tam çözümü

$$U(\xi) = \pm \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\varepsilon} \mp \frac{2C_2 \sqrt{-2\varepsilon\xi_0} \exp\left(\mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\lambda} \xi\right)}{\varepsilon \left\{ C_1 + C_2 \exp\left(\mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\lambda} \xi\right) \right\}} \quad (5.124)$$

elde edilir. Buradan

$$V(\xi) = -\frac{(1+\lambda)}{2} \left\{ -\frac{4C_2\xi_0 \exp\left[\mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\lambda} \xi\right]}{\lambda \left(C_1 + C_2 \exp\left[\mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\lambda} \xi\right]\right)} + \frac{4C_2^2\xi_0 \exp\left[\mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\lambda} \xi\right]^2}{\lambda \left\{C_1 + C_2 \exp\left[\mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\lambda} \xi\right]\right\}^2} \right\} \quad (5.125)$$

çözümü elde edilir.

C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere, özel olarak (5.125) denkleminde $C_1=1$ ve $C_2=1$ alınır

$$u_{1,2}(x,t) = \mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\varepsilon} \tanh \left\{ \mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2}\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.126)$$

$$v_1(x,t) = -\frac{(1+\lambda)\xi_0}{2\lambda} \operatorname{sech}^2 \left\{ \mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2}\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $C_1=-1$ ve $C_2=1$ alınır

$$u_{3,4}(x,t) = \mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\varepsilon} \coth \left\{ \mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2}\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.127)$$

$$v_2(x,t) = -\frac{(1+\lambda)\xi_0}{2\lambda} \operatorname{csch}^2 \left\{ \mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2}\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\}$$

tam çözümü elde edilir.

C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere, (5.126) ve (5.127) denklemleri kullanılarak sırasıyla;

$$u_{5,6}(x,t) = \pm \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\varepsilon} i \cot \left\{ \mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2}\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.128)$$

$$v_3(x,t) = \frac{(1+\lambda)\xi_0}{2\lambda} i \left\{ 1 + \cot^2 \left(\mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2}\lambda} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right) \right\}$$

ve

$$u_{7,8}(x,t) = \mp \frac{\sqrt{-2\varepsilon\xi_0}}{\varepsilon} i \tan \left\{ \mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2\lambda}} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.129)$$

$$v_4(x,t) = -\frac{(1+\lambda)\xi_0}{2\lambda} i \left\{ 1 + \tan^2 \left(\mp \frac{\sqrt{-\varepsilon\xi_0}}{\sqrt{2\lambda}} \left(x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right) \right\}$$

çözümleri bulunur. Bu çözümler zaman kesir mertebeli Hamiltonian sisteminin hiperbolik ve trigonometrik hareketli dalga çözümleridir.

Modifiye edilmiş basit denklem metoduyla elde edilen bu çözümler, Katatbeh ve arkadaşlarının (Katatbeh vd. [78]) (G'/G) -açılım metoduyla elde edilen çözümleriyle karşılaştırıldığında bu çözümlerin farklı ve literatürde olmadığı görülür.

5.3.3 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili (pKP) Denklemi

$t > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli pKP denklemi

$$\frac{1}{4} D_x^{4\alpha} u + \frac{3}{2} D_x^\alpha u D_x^{2\alpha} u + \frac{3}{4} D_y^{2\alpha} u + D_t^\alpha (D_x^\alpha u) = 0, \quad (5.130)$$

şeklinde ifade edilir. Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili, fizik plazması, hidro-dinamik ve katı hal fiziği gibi çeşitli fizik konularında ve farklı alanlarda önemli olup, iki boyutlu küçük ama sonlu genlikli dalgaların ve solitonların dinamiklerini açıklar. Denklem, aynı zamanda, dalğanın x -ekseni boyunca ilerlediği ve y -eksenindeki tüm değişikliklerin hareketin yönünden daha yavaş olduğu varsayılarak elde edilmiştir (Ablowitz ve Clarkson [79]).

k , l ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, pKP denklemi uzay-zaman kesir mertebeli ve $(2+1)$ boyutlu olduğu için kesirsel karmaşık dönüşüm;

$$u(x,y,t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.131)$$

olarak ele alınır. " $U'' = \frac{dU}{d\xi}$ " olmak üzere, (5.131) denklemi yardımıyla (5.130)

denklemi

$$\frac{k^4}{4}U'''' + \frac{3k^2}{2}U'U'' + \frac{3l^2}{4}U'' + k\lambda U'' = 0, \quad (5.132)$$

şeklinde adi diferensiyel denkleme indirgenir. ξ_0 integral sabiti olmak üzere, (5.132) denklemi ξ ye göre bir kez integre edilirse

$$\frac{k^4}{4}U''' + \frac{3k^2}{2}(U')^2 + \left(\frac{3l^2}{4} + k\lambda\right)U' + \xi_0 = 0 \quad (5.133)$$

denklemi elde edilir. (5.133) denkleminde U''' ve $(U')^2$ terimlerinin dengelenmesinden

$$\begin{aligned} N+3 &= 2(N+1) \\ N &= 1 \end{aligned} \quad (5.134)$$

bulunur. $\psi(\xi) = \psi$ için, (5.133) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) \quad (5.135)$$

biçiminde alınır. (5.135) denkleminde U''' , $(U')^2$ ve U' değerleri bulunup (5.133) denkleminde yerine yazılır. ψ^{-i} ($i=1,2,3,4$) kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$\psi^{-4} : \left(-\frac{3}{2}k^4a_1 + \frac{3}{4}k^3a_1^2 \right) (\psi')^4 = 0,$$

$$\psi^{-3} : \left(3k^4a_1 - \frac{3}{2}k^3a_1^2 \right) \psi'' (\psi')^2 = 0,$$

$$\psi^{-2} : -k^4a_1\psi'''\psi' - \frac{3}{4}k^4a_1(\psi'')^2 + \frac{3}{4}k^3a_1^2(\psi'')^2 - \frac{3}{4}l^2a_1(\psi')^2 - \lambda ka_1(\psi')^2 = 0,$$

$$\psi^{-1} : \frac{1}{4}k^4a_1\psi'''' + \frac{3}{4}l^2a_1\psi'' + \lambda ka_1\psi'' = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Maple yardımıyla bu denklem sistemi çözüldüğünde;

k, l, λ ve a_0 keyfî sabitler olmak üzere

$$a_0 = a_0, \quad a_1 = 2k, \quad \xi_0 = 0, \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.136)$$

ve

$$\psi(\xi) = C_1 + C_2 \exp\left(\pm \frac{\sqrt{-4k\lambda - 3l^2}}{k^2} \xi\right) \quad (5.137)$$

değerleri bulunur. Burada C_1 ve C_2 integral sabitleridir. (5.136) ve (5.137) denklemleri

$$(5.133) \text{ denkleminde yerine yazılırsa } \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{olmak üzere}$$

(5.130) denkleminin tam çözümü

$$U(\xi) = a_0 \pm \frac{2C_2 \sqrt{-4k\lambda - 3l^2} \exp\left(\pm \frac{\sqrt{-4k\lambda - 3l^2}}{k^2} \xi\right)}{k \left\{ C_1 + C_2 \exp\left(\pm \frac{\sqrt{-4k\lambda - 3l^2}}{k^2} \xi\right) \right\}} \quad (5.138)$$

olarak elde edilir.

(5.138) denklemini kullanarak uzay-zaman kesir mertebeli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili (pKP) denkleminin hiperbolik ve trigonometrik tam çözümleri aşağıda verilmiştir.

Özel olarak (5.138) denkleminde $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ ve $a_0 = \mp \frac{\sqrt{-4k\lambda - 3l^2}}{k}$ alınırsa

$$u_{1,2}(x, y, t) = \mp \frac{\sqrt{-4k\lambda - 3l^2}}{k} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{-(4k\lambda + 3l^2)}}{2k^2} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.139)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $C_1 = -1$, $C_2 = 1$ ve $a_0 = \mp \frac{\sqrt{-4k\lambda - 3l^2}}{k}$ alınırsa

$$u_{3,4}(x, y, t) = \mp \frac{\sqrt{-(4k\lambda + 3l^2)}}{k} \coth \left\{ \frac{\sqrt{-(4k\lambda + 3l^2)}}{2k^2} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.140)$$

tam çözümü elde edilir. Benzer şekilde,

$$u_{5,6}(x, y, t) = \pm \frac{\sqrt{-(4k\lambda + 3l^2)}}{k} i \tan \left\{ \frac{\sqrt{(4k\lambda + 3l^2)}}{2k^2} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.141)$$

$$u_{7,8}(x, y, t) = \pm \frac{\sqrt{-(4k\lambda + 3l^2)}}{k} i \cot \left\{ \frac{\sqrt{(4k\lambda + 3l^2)}}{2k^2} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.142)$$

tam çözümü elde edilir.

Elde edilen çözümlerin; son zamanlarda bu denklem üzerinde çalışan Alzaidy'nin alt denklem yöntemiyle (Alzaidy [80]) ve Zayed'in (G'/G)-açılım metoduyla (Zayed vd. [81]) bulduğu sonuçlardan farklı olduğu görülmüştür.

5.3.4 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) Denklemi

v sıfırdan farklı pozitif sabit olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli mBBM denklemi

$$D_t^\alpha u + D_x^\alpha u - vu^2 D_x^\alpha u + D_x^{3\alpha} u = 0 \quad (5.143)$$

olarak verilir. Bu denklem; ilk olarak lineer olmayan dağıtıcı ortamda, uzun dalga yüzeylerinin yaklaşık değerini belirlemek için kullanılmıştır. Aynı zamanda bu denklem soğuk plazmadaki hidromanyetik dalgaları, inharmonik kristallerinin akustik dalgalarını ve sıkıştırılabilir akışkanlardaki akustik yer çekimi dalgalarının sınıflandırılmasında da önem oluşturmaktadır.

k ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm;

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.144)$$

şeklinde alınır. " U'' " = $\frac{dU}{d\xi}$ olup, (5.144) denklemi (5.143) denkleminde yerine yazıldığında

$$(\lambda + k)U' - vkU^2U' + k^3U''' = 0 \quad (5.145)$$

şeklinde adi diferensiyel denkleminde elde edilir. İntegral sabiti sıfır olmak üzere (5.144) denklemi ξ ye göre bir kez integre edilirse

$$(\lambda + k)U - vk \frac{U^3}{3} + k^3U'' = 0 \quad (5.146)$$

indirgenmiş denklemini bulunur. Denge prensibinden dolayı (5.146) denkleminde U'' ve U^3 terimlerinin dengelenmesinden, dengelenme sayısı

$$\begin{aligned} N + 2 &= 3N \\ N &= 1 \end{aligned} \quad (5.147)$$

olarak bulunur. Böylece modifiye edilmiş basit denklem yöntemine göre (5.146) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) \quad (5.148)$$

formunda alınır. (5.148) denkleminde U'' ve U^3 eşitlikleri bulunup (5.146) denkleminde yerine yazılır. ψ^{-i} ($i = 0, 1, 2, 3$) kuvvetlerinin herbirinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi denklem sistemi elde edilir.

$$\psi^{-3}: \left(-\frac{1}{3}vka_1^3 + 2k^3a_1 \right) (\psi')^3 = 0,$$

$$\psi^{-2}: -3k^3a_1\psi''\psi' - vka_0a_1^2(\psi')^2 = 0,$$

$$\psi^{-1}: (\lambda a_1 + ka_1 - vka_0^2a_1)\psi' + k^3a_1\psi''' = 0,$$

$$\psi^0: \lambda a_0 + ka_0 - \frac{vka_0^3}{3} = 0.$$

k , v ve λ keyfî sabitler olmak üzere, bu denklem sistemi Maple yardımıyla çözüldüğünde iki farklı durum vardır.

1. durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm k \sqrt{\frac{6}{v}}, \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.149)$$

2. durum:

$$a_0 = \pm \sqrt{\frac{3(\lambda + k)}{vk}}, \quad a_1 = \pm k \sqrt{\frac{6}{v}}, \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.150)$$

çözüm kümeleri elde edilir.

Ancak $a_0 = 0$ durumu için $U(\xi)$ çözümü aşikâr çözüm olarak elde edilir. Diğer yandan,

$a_0 = \pm \sqrt{\frac{3(\lambda+k)}{vk}}$ ve $a_1 = \pm k \sqrt{\frac{6}{v}}$ değerleri için, C_1 ve C_2 integral sabiti olmak üzere $\psi(\xi)$ fonksiyonu

$$\psi(\xi) = C_1 + C_2 \exp\left(\mp \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2(\lambda+k)v}{vk}} \xi\right) \quad (5.151)$$

elde edilir. (5.150) ve (5.151) denklemleri (5.148) denkleminde yerine yazılırsa

$\xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere (5.146) denkleminin tam çözümü

$$U(\xi) = \pm \sqrt{\frac{3(\lambda+k)}{vk}} \mp \frac{C_2 \sqrt{\frac{12(\lambda+k)}{vk}} \exp\left(\mp \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2(\lambda+k)v}{vk}} \xi\right)}{C_1 + C_2 \exp\left(\mp \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2(\lambda+k)v}{vk}} \xi\right)} \quad (5.152)$$

olarak bulunur.

(5.152) denklemini kullanarak uzay-zaman kesir mertebeli modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) denkleminin hiperbolik ve trigonometrik tam çözümleri aşağıda verilmiştir.

Özel olarak (5.152) denkleminde $C_1 = 1$ ve $C_2 = 1$ alınırsa

$$u_{1,2}(x,t) = \pm \sqrt{\frac{3(\lambda+k)}{vk}} \tanh\left\{\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{2(\lambda+k)v}{vk}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right\} \quad (5.153)$$

olarak bulunur. Diğer yandan $C_1 = -1$ ve $C_2 = 1$ alınırsa tam çözüm

$$u_{3,4}(x,t) = \pm \sqrt{\frac{3(\lambda+k)}{vk}} \coth\left\{\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{2(\lambda+k)v}{vk}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right\} \quad (5.154)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$u_{5,6}(x,t) = \mp \sqrt{\frac{3(\lambda+k)}{vk}} i \tan\left\{\frac{i}{2k} \sqrt{\frac{2(\lambda+k)v}{vk}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right\} \quad (5.155)$$

$$u_{7,8}(x,t) = \pm \sqrt{\frac{3(\lambda+k)}{vk}} i \cot \left\{ \frac{i}{2k} \sqrt{\frac{2(\lambda+k)v}{vk}} \left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right\} \quad (5.156)$$

tam çözümü elde edilir.

Uzay-zaman kesir mertebeli modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) denkleminin bulunan çözümleri, fonksiyonel değişken yöntemiyle elde edilen çözümlerle (Bekir vd. [50]) ve Alzaidy'in alt denklem yöntemiyle (Alzaidy [75]) bulunduğu tam çözümlerle karşılaştırıldığında elde edilen çözümlerin farklı ve yeni olduğu görülür.

5.3.5 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Birleştirilmiş Burgers Denklemleri

p ve q sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere uzay-zaman kesir mertebeli birleştirilmiş Burgers denklemleri

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u - D_x^{2\alpha} u + 2uD_x^\alpha u + pD_x^\alpha(uv) &= 0, \\ D_t^\alpha v - D_x^{2\alpha} v + 2vD_x^\alpha v + qD_x^\alpha(uv) &= 0 \end{aligned} \quad (5.157)$$

formunda ifade edilir. Bu denklem; yerçekiminin etkisi altında, akışkan süspansiyonlar veya kolloidlerde iki tür parçacığın hacim konsantrasyonunu ölçen sedimentasyon veya evrimin basit bir modellenmesidir.

λ , sıfırdan farklı sabit olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x,t) = U(\xi), \quad v(x,t) = V(\xi), \quad \xi = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.158)$$

olarak ele alınır. " U'' " = $\frac{dU}{d\xi}$ ve " V'' " = $\frac{dV}{d\xi}$ olup, (5.158) denklemi (5.157) denkleminde

yerine yazıldığında

$$\lambda U' - U'' + 2UU' + p(UV)' = 0 \quad (5.159)$$

$$\lambda V' - V'' + 2VV' + q(UV)' = 0$$

şeklinde adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. İntegral sabiti sıfır olmak üzere (5.159) denklem sistemini ξ ye göre bir kez integre edilirse

$$\lambda U - U' + U^2 + pUV = 0 \quad (5.160)$$

$$\lambda V - V' + 2V^2 + qUV = 0$$

indirgenmiş denklemleri bulunur. Denge prensibinden dolayı (5.160) denkleminde U' , U^2 ve UV terimlerinin dengelenmesinden ve ayrıca V' , V^2 ve UV terimlerinin de dengelenmesinden

$$N+1=2N=N+M \quad \text{ve} \quad M+1=2M=N+M \quad (5.161)$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitliklerden $N=1$ ve $M=1$ bulunur. Böylece modifiye edilmiş basit denklem yöntemine göre (5.160) denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} U(\xi) &= a_0 + a_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) \\ V(\xi) &= b_0 + b_1 \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) \end{aligned} \quad (5.162)$$

olarak alınır.

İlk olarak, (5.162) denklemleri yardımıyla U ve V nin gerekli türevleri ve dereceleri bulunup (5.160) denklem sisteminin ilk denkleminde yerine yazılır. ψ^{-i} ($i=0,1,2$) kuvvetlerinin herbirinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\psi^{-2}: a_1^2 + a_1 + pa_1b_1 = 0 \quad (5.163)$$

$$\psi^{-1}: (pa_0b_1 + \lambda a_1 + 2a_0a_1 + pa_1b_0)\psi' - a_1\psi'' = 0 \quad (5.164)$$

$$\psi^0: \lambda a_0 + pa_0b_0 + a_0^2 = 0. \quad (5.165)$$

Benzer şekilde (5.160) denklem sisteminin ikinci denkleminde aşağıdaki gibi cebirsel denklem sistemi bulunur.

$$\psi^{-2}: b_1^2 + b_1 + qa_1b_1 = 0 \quad (5.166)$$

$$\psi^{-1}: (qa_0b_1 + \lambda b_1 + 2b_0b_1 + qa_1b_0)\psi' - b_1\psi'' = 0 \quad (5.167)$$

$$\psi^0: \lambda b_0 + qa_0b_0 + a_0^2 = 0. \quad (5.168)$$

Bu cebirsel denklem sistemleri Maple yardımıyla çözüldüğünde 2 farklı durum bulunuyor.

1. durum:

$$a_0 = b_0 = 0 \text{ ve } a_1 = -\frac{p-1}{qp-1}, \quad b_1 = -\frac{q-1}{qp-1} \quad (5.169)$$

(5.169) denklemindeki değerleri için C_1 ve C_2 integral sabiti olmak üzere $\psi(\xi)$ fonksiyonu

$$\psi(\xi) = C_1 + C_2 \exp(\lambda \xi) \quad (5.170)$$

olarak bulunur. (5.164) ve (5.167) denklemleri (5.162) denkleminde yerine yazılırsa uzay-zaman kesir mertebeli birleştirilmiş Burgers denklemlerinin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{(1-p)C_2\lambda \left[\cosh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \sinh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) \right]}{(qp-1) \left\{ C_1 + C_2 \left[\cosh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \sinh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) \right] \right\}} \quad (5.171)$$

ve

$$v(x, t) = \frac{(1-q)C_2\lambda \left[\cosh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \sinh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) \right]}{(qp-1) \left\{ C_1 + C_2 \left[\cosh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) + \sinh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) \right] \right\}} \quad (5.172)$$

2. durum:

$$a_0 = -\frac{\lambda(p-1)}{qp-1}, \quad b_0 = -\frac{\lambda(q-1)}{qp-1} \text{ ve } a_1 = -\frac{p-1}{qp-1}, \quad b_1 = -\frac{q-1}{qp-1} \quad (5.173)$$

çözüm kümeleri elde edilir.

(5.173) denklemindeki değerler için, C_1 ve C_2 integral sabiti olmak üzere $\psi(\xi)$ fonksiyonu

$$\psi(\xi) = C_1 + C_2 \exp(-\lambda \xi) \quad (5.174)$$

elde edilir. (5.164) ve (5.167) denklemleri (5.162) denkleminde yerine yazılırsa üzere uzay-zaman kesir mertebeli birleştirilmiş Burgers denklemlerinin tam çözümü

$$u(x,t) = \frac{(1-p)C_1\lambda}{(qp-1)\left\{C_1 + C_2\left[\cosh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) - \sinh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)\right]\right\}} \quad (5.175)$$

ve

$$v(x,t) = \frac{(1-q)C_1\lambda}{(qp-1)\left\{C_1 + C_2\left[\cosh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right) - \sinh\left(\lambda\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)\right]\right\}} \quad (5.176)$$

olarak elde edilir (Kaplan vd. [82]).

Bu çalışmada, uzay-zaman kesir mertebeli birleştirilmiş Burgers denklemlerinin elde edilen tam çözümleri, Zayed ve arkadaşlarının geliştirilmiş tanjant hiperbolik yöntemiyle (Zayed vd. [83]) bulunduğu tam çözümlerle karşılaştırıldığında elde edilen çözümlerin farklı ve literatürde olmayan yeni çözümler olduğu görülür.

5.4 Kudryashov Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler

Bu kısımda; zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denklemi ve uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denklemlerini genelleştirilmiş Kudryashov metoduyla, zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu Zoomeron denklemini geliştirilmiş Kudryashov metoduyla, konum-zaman kesir mertebeli modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) denklemini de modifiye edilmiş Kudryashov metoduyla tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu denklemlerin kullanım alanları ile ilgili fiziksel yorumlardan bahsedilmiştir.

5.4.1 Zaman Kesir Mertebeli Chan-Allen Denklemi

$0 < \alpha \leq 1$, kesir mertebeli türevi göstermek üzere; zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denklemi

$$D_t^\alpha u - u_{xx} + u^3 - u = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.177)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem; matematiksel biyoloji, kuantum mekaniği ve plazma fiziği gibi birçok bilimsel uygulamalarda ortaya çıkar. İyi bilinir ki; plazma ortamındaki

dalga olayı, akışkan dinamikler kink şekliyle ve tanh çözümleri ile veya zil şekilli sech çözümleri şeklinde modellenir.

k ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.178)$$

biçiminde seçilir. " U' " $= \frac{dU}{d\xi}$ olmak üzere, (5.178) denklemini (5.177) denkleminde

yerine yazarak (5.177) denkleminin

$$\lambda U' + k^2 U'' - U^3 + U = 0 \quad (5.179)$$

adi diferensiyel denklemine indirgendiği görülür.

(5.179) denklemindeki en yüksek dereceden lineer olmayan terim U^3 ile en yüksek mertebeden lineer U'' terimlerinin dengelenmesinden, dengelenme sayısı

$$\begin{aligned} 3n &= n + 2 \\ n &= 1 \end{aligned} \quad (5.180)$$

bulunur. $n=1$ olmasından dolayı (5.179) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) \quad (5.181)$$

biçiminde alınır. (5.181) denkleminde

$$U'(\xi) = a_1 (F^2(\xi) - F(\xi)) \quad (5.182)$$

$$U'' = a_1 (2F^3(\xi) - 3F^2(\xi) + F(\xi)) \quad (5.183)$$

$$U^3(\xi) = a_0^3 + 3a_0^2 a_1 F(\xi) + 3a_0 a_1^2 F^2(\xi) + a_1^3 F^3(\xi) \quad (5.184)$$

değerleri bulunur. Elde edilen bu (5.181)-(5.184) denklemleri, (5.179) denkleminde yerine yazılırsa, $F(\xi)$ ye bağlı bir polinom elde edilir. Bu ifadede $F^i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) nin kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi denklem sistemi elde edilir.

$$F^3(\xi): 2k^2 a_1 - a_1^3 = 0,$$

$$F^2(\xi): \lambda a_1 - 3k^2 a_1 - 3a_0 a_1^2 = 0,$$

$$F(\xi): -a_1 \lambda + k^2 a_1 - 3a_0^2 a_1 + a_1 = 0,$$

$$F^0(\xi): a_0 - a_0^3 = 0.$$

Bu denklem sistemi Maple yardımıyla çözüldüğünde 4 farklı durum vardır.

1. durum: İlk olarak

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -1, \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.185)$$

değerleri bulunur. Bu değerler (5.181) denkleminde yerine yazılırsa, zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denkleminin tam çözümü

$$u_1(x, t) = - \frac{1}{1 + \cosh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + \sinh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right)}$$

şeklinde elde edilir.

2. durum: Benzer şekilde

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.186)$$

(5.186) denkleminde verilen değerler (5.181) denkleminde yerine yazarak, zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denkleminin tam çözümü

$$u_2(x, t) = \frac{1}{1 + \cosh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + \sinh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right)}$$

olarak elde edilir.

3. durum: Benzer şekilde

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad \lambda = -\frac{3}{2}, \quad k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.187)$$

bulunur. Bu değerler (5.181) denkleminde yerine yazarak zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denkleminin tam çözümü

$$u_3(x, t) = 1 - \frac{1}{1 + \cosh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + \sinh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right)}$$

şeklindedir.

4. durum: Son olarak,

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1, \quad \lambda = -\frac{3}{2}, \quad k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (a_1 \neq 0) \quad (5.188)$$

bu değerleri (5.181) denkleminde yerine yazarak zaman kesir mertebeli Cahn-Allen denkleminin farklı tam çözümü

$$u_4(x, t) = -1 + \frac{1}{1 + \cosh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + \sinh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right)}$$

olarak bulunur. Elde edilen tam çözümler; Esen ve çalışma arkadaşlarının (Esen vd. [84]) elde ettiği çözümlerden farklıdır. Ayrıca, Bekir ve arkadaşlarının alt denklem metodu (Bekir vd. [65]) kullanarak bulduğu tam çözümlerden de farklı ve bu çözümler yeni tam çözümlerdir.

5.4.2 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Klein-Gordon Denklemini

Matematiksel fizikte önemli bir yere sahip olan uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denklemini, β ve γ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$D_{tt}^{2\alpha} u - D_{xx}^{2\alpha} u + \gamma u - \beta u^2 = 0 \quad (5.189)$$

şeklinde tanımlanır. Lineer olmayan kesir mertebeli Klein-Gordon denkleminin birçok farklı tiplerinin olduğu bilinmektedir. Ayrıca, Klein-Gordon denklemini katı hal fiziği, lineer olmayan optik ve kuantum alan teorisi gibi birçok gerçek hayat uygulamasında önemli rol oynamaktadır.

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm

$$u(x,t)=U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.190)$$

şeklinde alınır. (5.190) denklemi (5.189) denkleminde yerine yazılırsa, " $U'' = \frac{dU}{d\xi}$ "

olmak üzere; (5.189) denklemi

$$(\lambda^2 - k^2)U'' + \gamma U - \beta U^2 = 0 \quad (5.191)$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir.

n dengelenme sayısı (5.191) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer terim U'' ile en yüksek dereceden lineer olmayan U^2 terimlerinin dengelenmesinden,

$$\begin{aligned} n+2 &= 2n \\ n &= 2 \end{aligned} \quad (5.192)$$

bulunur. Dolayısıyla (5.191) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi) \quad (5.193)$$

biçiminde alınır. (5.193) denkleminde U'' ve U^2 değerlerini bulup (5.191) denkleminde yerine yazılırsa, $F(\xi)$ ye bağlı bir polinom elde edilir. Bu ifadede $F^i(\xi)$ ($i=0,1,2,3,4$) nin kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$F^4(\xi): 6\lambda^2 a_2 - 6k^2 a_2 - \beta a_2^2 = 0,$$

$$F^3(\xi): -10\lambda^2 a_2 + 2\lambda^2 a_1 + 10k^2 a_2 - 2k^2 a_1 - 2\beta a_2 a_1 = 0,$$

$$F^2(\xi): 4\lambda^2 a_2 - 3\lambda^2 a_1 - 4k^2 a_2 + 3k^2 a_1 + \gamma a_2 - 2\beta a_2 a_0 - \beta a_1^2 = 0,$$

$$F(\xi): \lambda^2 a_1 - k^2 a_1 + \gamma a_1 - 2\beta a_1 a_0 = 0,$$

$$F^0(\xi): \gamma a_0 - \beta a_0^2 = 0$$

denklem sistemi elde edilir. k ve γ, β keyfi sabitler olmak üzere denklem sistemi Maple yardımıyla çözüldüğünde 2 farklı durum söz konusudur.

1. durum: İlk olarak $a_2 \neq 0$ için

$$a_0 = \frac{\gamma}{\beta}, \quad a_1 = -\frac{6\gamma}{\beta}, \quad a_2 = \frac{6\gamma}{\beta}, \quad \lambda = \pm\sqrt{k^2 + \gamma} \quad (5.194)$$

çözüm kümesi elde edilir. Bu değerler (5.193) denkleminde yerine yazılırsa, uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denkleminin tam çözümü

$$u_1(x, t) = \frac{\gamma}{\beta} \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \frac{\sqrt{k^2 + \gamma} t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) - 2}{\cosh\left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \frac{\sqrt{k^2 + \gamma} t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + 1} \right\}$$

şeklinde elde edilir.

2. durum: Son olarak $a_2 \neq 0$ için

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{6\gamma}{\beta}, \quad a_2 = -\frac{6\gamma}{\beta}, \quad \lambda = \pm\sqrt{k^2 - \gamma} \quad (5.195)$$

değerleri bulunur. Benzer şekilde bu değerler (5.193) denkleminde yerine yazarak, uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denkleminin tam çözümü

$$u_2(x, t) = \frac{3\gamma}{\beta \left\{ \cosh\left(\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \frac{\sqrt{k^2 - \gamma} t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + 1 \right\}}$$

olarak bulunur.

Bu çözümler uzay-zaman kesir mertebeli Klein-Gordon denkleminin kink soliton çözümleridir. Bulunan çözümler Alzaidy'in alt denklem yöntemiyle (Alzaidy [75]) elde ettiği tam çözümlerden farklı olduğu görülmüştür.

5.4.3 Zaman Kesir Mertebeli (2+1)-Boyutlu Zoomeron Denklemleri

$0 < \alpha \leq 1$ kesir mertebeli türevin parametresi olmak üzere zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu Zoomeron denklemleri

$$D_{tt}^{2\alpha} \left[\frac{u_{xy}}{u} \right] - \left[\frac{u_{xy}}{u} \right]_{xx} + 2D_t^\alpha [u^2]_x = 0 \quad (5.196)$$

olarak bilinir. Bu denklemde; $u(x,y,t)$ fonksiyonu dalga modunu genliğini ifade etmekle birlikte ilk kez Calogero ve Degasperis tarafından tanıtılmıştır (Calogero ve Degasperis [85]).

k, l ve λ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, denklem hem zaman kesir mertebeli hemde (2+1)-boyutlu olduğu için kesirsel karmaşık dönüşüm;

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = kx + ly - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (5.197)$$

olarak alınır. " U'' " = $\frac{dU}{d\xi}$ olmak üzere; (5.197) denklemini (5.196) denkleminde yerine yazılırsa, (5.196) denklemi

$$kl\lambda^2 \left(\frac{U''}{U} \right)'' - k^3 l \left(\frac{U''}{U} \right)' - 2k\lambda (U^2)'' = 0 \quad (5.198)$$

adi kesir mertebeli denkleme dönüşür. A sıfırdan farklı integral sabiti olmak üzere,

(5.198) denklemini ξ ye göre iki kez integre edilirse

$$kl(\lambda^2 - k^2)U'' - 2k\lambda U^3 - AU = 0 \quad (5.199)$$

elde edilir. Genişletilmiş Kudryashov yöntemine göre çözümü

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i F^i(\xi)}{\sum_{j=0}^M b_j F^j(\xi)} \quad (5.200)$$

olarak aranır. N ve M sayılarını belirlemek için, (5.179) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim U'' ile en yüksek dereceden lineer olmayan U^3 terimlerinin dengelenmesine bakılır. c_k ($k = 1, 2, 3, 4$) fonksiyonun katsayıları olmak üzere

$$U'' = \frac{c_1 F^{N+3M+2} + \dots}{c_2 F^{4M} + \dots} \quad (5.201)$$

ve

$$U^3 = \frac{c_3 F^{3N} + \dots}{c_4 F^{3M} + \dots} \quad (5.202)$$

bulunur. Böylece (5.201) ve (5.202) denklemlerinden

$$\begin{aligned} N - M + 2 &= 3N - 3M \\ N &= M + 1 \end{aligned} \quad (5.203)$$

şeklinde bulunur.

İşlem kolaylığı olsun diye $M = 1$ için $N = 2$ alınıp (5.200) yardımıyla (5.199) denkleminin çözümü:

$$U(\xi) = \frac{a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi)}{b_0 + b_1 F(\xi)} \quad (5.204)$$

olarak alınır. (5.184) ve (4.90) denklemlerinden U'' ve U^3 değerlerini bulunarak (5.199) denkleminde yerine yazılır. Sonra $F^i(\xi)$ ($i = 0, 1, \dots, 6$) nin kuvvetlerine göre düzenlenir ve oluşan katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle bir denklem sistemi elde edilir. k , λ ve A keyfi sabitler olmak üzere, elde edilen algoritmik sistemde Maple kullanılarak aşağıdaki tam çözümler elde edilir.

1. durum: b_0 keyfi sabiti için

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -2\sqrt{\frac{A}{k\lambda}}ib_0, \quad a_2 = 2\sqrt{\frac{A}{k\lambda}}ib_0, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = -2b_0, \quad l = \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)} \quad (5.205)$$

çözüm kümesi elde edilir. Bulunan değerler (5.204) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \xi &= kx + \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \text{ olmak üzere,} \\ U(\xi) &= \frac{-2\sqrt{\frac{A}{k\lambda}}ib_0\left(\frac{1}{1 \pm e^\xi}\right) + 2\sqrt{\frac{A}{k\lambda}}ib_0\left(\frac{1}{1 \pm e^\xi}\right)^2}{b_0 - 2b_0\left(\frac{1}{1 \pm e^\xi}\right)} \end{aligned} \quad (5.206)$$

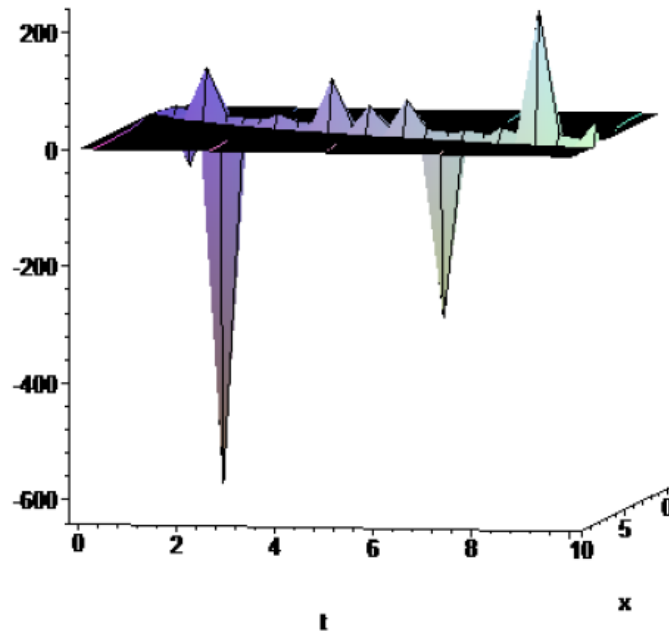
elde edilir. (5.206) denkleminde birkaç basit dönüşüm kullanılarak zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu Zoomeron denkleminin

$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{k\lambda}} \frac{\left\{ \left[\tanh\left(\frac{k}{2}x + \frac{A}{2k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) \right]^2 - 1 \right\}}{\tanh\left(\frac{k}{2}x + \frac{A}{2k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right)}$$

ve

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{k\lambda}} \frac{\left\{ \left[\coth\left(\frac{k}{2}x + \frac{A}{2k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) \right]^2 - 1 \right\}}{\coth\left(\frac{k}{2}x + \frac{A}{2k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right)}$$

yeni tam çözümleri elde edilir.



Şekil 5. 4 $\alpha = 0.5$, $k = 1$, $c = 2$, $A = 8$, $y = 0$ için $u_1(x, y, t)$ 'nin tam çözümü

2. durum: b_0 keyfî sabiti için

$$a_0 = \pm \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i b_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = -2b_0, \quad l = -\frac{2A}{k(\lambda^2 - k^2)} \quad (5.207)$$

çözüm kümesi bulunur. Benzer şekilde bu değerleri (5.204) denkleminde yerine

yazarak, $\xi = kx - \frac{2A}{k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$U(\xi) = \frac{\pm \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i b_0}{b_0 - 2b_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right)} \quad (5.208)$$

eşitliği bulunur. (5.188) denkleminde birkaç basit dönüşüm kullanılarak

$$\begin{aligned} u_3(x, y, t) &= \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \frac{1}{\tan \left[i \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \cot \left[i \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_4(x, y, t) &= \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \frac{1}{\cot \left[i \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \tan \left[i \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right] \end{aligned}$$

farklı tam çözümü elde edilir.

3. durum: b_0 ve b_1 keyfi sabitleri için

$$a_0 = \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i b_0, \quad a_1 = -\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i (b_1 + 2b_0), \quad a_2 = 0, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = b_1, \quad l = -\frac{2A}{k(\lambda^2 - k^2)} \quad (5.209)$$

değerleri bulunur. (5.209) de bulunan değerler (5.204) denkleminde yerine yazılırsa,

$\xi = kx - \frac{2A}{k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere

$$U(\xi) = \frac{\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i b_0 - \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i (b_1 + 2b_0) \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right)}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right)} \quad (5.210)$$

bulunur. (5.210) denkleminde bazı basit dönüşümler yardımıyla

$$u_5(x, y, t) = \frac{\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0 \tanh\left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) - \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_1 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) \right\}}{b_0 + b_1 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) \right\}}$$

ve

$$u_6(x, y, t) = \frac{\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0 \coth\left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) - \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_1 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) \right\}}{b_0 + b_1 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) \right\}}$$

çözümleri bulunur.

4. durum: b_0 ve b_1 keyfi sabitleri için

$$a_0 = \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0, \quad a_1 = -\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i(2b_0 - b_1), \quad a_2 = -\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_1, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = b_1, \quad l = -\frac{2A}{k(\lambda^2 - k^2)} \quad (5.211)$$

değerleri bulunur. $\xi = kx - \frac{2A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere, bulunan bu değerler

(5.204) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U(\xi) = \frac{\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0 + \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} i(b_1 - 2b_0) \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right) - 2\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right)^2}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right)} \quad (5.212)$$

çözümü elde edilir. Bazı basit dönüşümlerle daha önce literatürde olmayan yeni tam çözümler

$$u_7(x, y, t) = \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \tan \left[i \left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right]$$

ve

$$u_8(x, y, t) = \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \cot \left[i \left(\frac{k}{2}x - \frac{A}{k(\lambda^2 - k^2)}y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right]$$

şeklinde elde edilir.

5. durum: b_0 keyfi sabiti için

$$a_0 = \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0, \quad a_1 = -2\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0, \quad a_2 = 2\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = -2b_0, \quad l = -\frac{A}{2k(\lambda^2 - k^2)} \quad (5.213)$$

değerleri bulunur. Son olarak, bulunan değerler (5.204) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\xi = kx - \frac{A}{2k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \text{ olmak üzere}$$

$$U(\xi) = \frac{\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0 - 2\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right) + 2\sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} ib_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right)^2}{b_0 - 2b_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^\xi} \right)} \quad (5.214)$$

çözümü bulunur. Bazı basit dönüşümlerle ve matematiksel işlemler yardımıyla

$$u_9(x, y, t) = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \left\{ 1 + \left[\tanh \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{4k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right]^2 \right\}}{\tanh \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{4k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right)}$$

ve

$$u_{10}(x, y, t) = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{2k\lambda}} \left\{ 1 + \left[\coth \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{4k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right) \right]^2 \right\}}{\coth \left(\frac{k}{2} x - \frac{A}{4k(\lambda^2 - k^2)} y - \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \right)}$$

şeklinde farklı tam çözümler bulunur. Böylece A integral sabiti olmak üzere zaman kesir mertebeli (2+1)-boyutlu Zoomeron denkleminin daha önceden literatür de bulunmayan yeni tam çözümleri elde edilmiştir.

Elde edilen çözümlerin; son zamanlarda bu denklem üzerinde çalışan Zayed ile Amer'in ilk integral yöntemiyle (Zayed ve Amer [86]) bulunduğu sonuçlardan farklı olduğu görülecektir. Aynı zamanda bulunan çözümler, Zayed ve Arnous'un (G'/G) -açılım metoduyla (Zayed ve Arnous [87]), Gao ve Khan'ın (Gao [88], Khan [89]) elde ettikleri hareketli dalga çözümlerden de farklıdır.

5.4.4 Uzay-Zaman Kesir Mertebeli Modifiye Benjamin-Bona-Mahony (mBBM) Denklemi

v sıfırdan farklı pozitif sabit ve $0 < \alpha \leq 1$, $t > 0$ olmak üzere, uzay-zaman kesir mertebeli mBBM denklemi

$$D_t^\alpha u + D_x^\alpha u - v u^2 D_x^\alpha u + D_x^{3\alpha} u = 0 \quad (5.215)$$

verilsin. Bu denklem; ilk olarak lineer olmayan dağıtıcı ortamda, uzun dalga yüzeylerinin yaklaşık değerini belirlemek için kullanılmıştır. Aynı zamanda bu denklem soğuk plazmadaki hidromanyetik dalgaları, inharmonik kristallerinin akustik dalgalarını ve sıkıştırılabilir akışkanlardaki akustik yer çekimi dalgalarının sınıflandırılmasında da önem oluşturmaktadır.

k , λ ve ξ_0 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, kesirsel karmaşık dönüşüm;

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \xi_0 \quad (5.216)$$

şeklinde alınır. " U' " = $\frac{dU}{d\xi}$ olup, (5.216) denklemi (5.215) denkleminde yerine yazıldığında

$$(\lambda + k)U' - v k U^2 U' + k^3 U''' = 0 \quad (5.217)$$

şeklinde adi diferensiyel denkleme indirgenir.

İntegral sabiti sıfır olmak üzere (5.217) denklemi ξ ye göre bir kez integre edilirse

$$(\lambda + k)U - v k \frac{U^3}{3} + k^3 U'' = 0 \quad (5.218)$$

indirgenmiş denklemi yazılır. Denge prensibinden de $N = 1$ bulunur. Böylece modifiye edilmiş Kudryashov yöntemine göre çözüm,

$$U(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) \quad (5.219)$$

biçiminde alınır. $U(\xi)$ nin gerekli türevleri

$$U' = \ln a (a_1 F^2 - a_1 F) \quad (5.220)$$

ve

$$U'' = (Ina)^2 (2a_1 F^3 - 3a_1 F^2 + a_1 F) \quad (5.221)$$

şeklinde bulunur.

(5.219)-(5.221) denklemlerini (4.92) denklemi yardımıyla (5.218) denkleminde yerine yazarak, $F(\xi)$ ye bağlı bir polinom oluşturulur. Bu ifade de $F^i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) nin herbir kuvvetinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. k ve v keyfi sabitler olmak üzere denklem sistemi Maple yardımıyla çözüldüğünde 2 farklı durum bulunur.

1. durum: İlk olarak

$$a_0 = \sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{3/2} (Ina), \quad a_1 = -\sqrt{\frac{6}{vk}} k^{3/2} (Ina), \quad \lambda = \frac{1}{2} k (-2 + k^2 (Ina)^2) \quad (5.222)$$

çözüm kümesi elde edilir. Bu değerler (5.219) denkleminde yerine yazılırsa, konum-zaman kesir mertebeli mBBM denkleminin tam çözümü

$$u_1(x, t) = (Ina) \sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{3/2} \tan Fs \left(\frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right)$$

ve

$$u_2(x, t) = (Ina) \sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{3/2} \cot Fs \left(\frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right)$$

şeklinde elde edilir.

2. durum: İkinci olarak

$$a_0 = -\sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{3/2} (Ina), \quad a_1 = \sqrt{\frac{6}{vk}} k^{3/2} (Ina), \quad \lambda = \frac{1}{2} k (-2 + k^2 (Ina)^2) \quad (5.223)$$

değerleri bulunur. Benzer şekilde bu değerler (5.219) denkleminde yerine yazarak, uzay-zaman kesir mertebeli mBBM denkleminin tam çözümü

$$u_3(x, t) = -(Ina) \sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{3/2} \tan Fs \left(\frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right)$$

ve

$$u_4(x, t) = -(Ina) \sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{\frac{3}{2}} \cot Fs \left(\frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\lambda t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right)$$

olarak bulunur (Ege ve Mısırlı [90]).

Elde edilen çözümler Stakhov and Rozin (Stakhov ve Rozin [91]) tarafından önerilen simetrik hiperbolik Fibonacci fonksiyonlarına bağlıdır. Simetrik Fibonacci sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$sFs(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad cFs(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{\sqrt{5}},$$

$$\tan Fs(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, \quad \cot Fs(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}},$$

Uzay-zaman kesir mertebeli mBBM denkleminin bulunan simetrik hiperbolik Fibonacci fonksiyon çözümleri, Alzaidy'in alt denklem yöntemiyle (Alzaidy [75]) elde ettiği tam çözümlerden farklıdır. Ayrıca bulunan bu çözümler literatürde bulunmayan yeni tam çözümlerdir.

5.5 Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Yöntemiyle Elde Edilen Tam Çözümler

Bu kısımda; zaman kesir mertebeli Fitzhugh-Nagumo denklemi ve zaman kesir mertebeli genelleştirilmiş Burgers denkleminin deneme denklem metoduyla tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu denklemlerin kullanım alanları ile ilgili kısa bilgiler verilmiştir.

5.5.1 Zaman Kesir Mertebeli Fitzhugh-Nagumo Denklemi

α kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre ve δ sıfırdan farklı olmak üzere,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - u(1-u)(u-\delta) = 0, \quad 0 < \delta < 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.224)$$

zaman kesir mertebeli Fitzhugh-Nagumo denklemi sinir uyarılarının iletimini modellemekte kullanılan önemli bir lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemdir

(Fitzhugh [92], Naguma vd. [93]). Ayrıca biyolojide ve devre teorisinde popülasyon genetiği alanında kullanılır.

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad (5.225)$$

yukarıdaki (5.225) dönüşümü (5.224) denkleminde uygulanır. $U' = \frac{dU}{d\xi}$ için (5.224)

denklemini

$$-\lambda U' - k^2 U'' + \delta U - (1 + \delta)U^2 + U^3 = 0, \quad (5.226)$$

adi diferensiyel denklemine indirgendiği görülür.

(4.94) denklemindeki l ve n denge sayılarını belirlemek için (5.226) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim U'' ile en yüksek dereceden lineer olmayan U^3 terimlerinin dengelenmesine bakılır.

$$U' = \frac{a_n}{b_l} U^{n-l} + \dots \quad (5.227)$$

ve

$$U'' = \frac{(a_n^2 n b_l - b_l l a_n^2)}{b_l^3} U^{2n-2l-1} + \dots \quad (5.228)$$

bulunur. Böylece U'' ve U^3 denklemlerinden

$$2n - 2l - 1 = 3 \quad (5.229)$$

$$n = l + 2$$

şeklinde bulunur.

İşlem kolaylığı olsun diye $l = 0$ için $n = 2$ alınırsa, $a_2 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ olmak üzere

$$U' = \frac{a_2 U^2 + a_1 U + a_0}{b_0}, \quad (5.230)$$

ve

$$U'' = \frac{(2a_2U + a_1)(a_2U^2 + a_1U + a_0)}{2b_0}, \quad (5.231)$$

yazılır. (5.230) ve (5.231) denklemleri indirgenmiş (5.226) denkleminde yerine yazılırsa ve U^s ($s = 0, 1, 2, 3$) nin katsayıları bir araya getirip sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} -2\lambda a_0 - k^2 a_0 a_1 &= 0, \\ -2\lambda a_1 - 2k^2 a_0 a_2 - k^2 a_1^2 + 2b_0 \delta &= 0, \\ -2\lambda a_2 - 3k^2 a_1 a_2 + 2b_0(1 + \delta) &= 0, \\ -2k^2 a_2^2 + 2b_0 &= 0. \end{aligned}$$

gibi cebirsel denklem sistemini elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple paket programı ile çözümünden, k , δ ve b_0 keyfi sabitler olmak üzere iki farklı durum söz konusudur.

1.durum: İlk olarak

$$a_0 = \pm \frac{\delta b_0}{\sqrt{2k}}, \quad a_1 = \pm \frac{(\delta - 1)b_0}{\sqrt{2k}}, \quad a_2 = \pm \frac{b_0}{\sqrt{2k}}, \quad b_0 = b_0, \quad \lambda = \pm \frac{k(\delta - 1)}{\sqrt{2}} \quad (5.232)$$

çözüm kümesi elde edilir. (5.232) deki bu değerlerin (4.94) ve (4.98) denklemleri yardımıyla (5.226) denkleminde yerine konulmasıyla

$$\pm(\xi - \xi_0) = \sqrt{2k} \int \frac{dU}{U^2 + \frac{a_1}{a_2}U + \frac{a_0}{a_2}} \quad (5.233)$$

denklemini elde edilir. Paydadaki polinomsal ifadenin kökleri α_1 ve α_2 olmak üzere (5.224) denkleminin çözümleri;

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\frac{\sqrt{2k}}{U - \alpha_1}, \quad (5.234)$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{\sqrt{2k}}{\alpha_2 - \alpha_1} \ln \left| \frac{U - \alpha_1}{U - \alpha_2} \right| \quad (5.235)$$

olarak bulunur. (5.234) ve (5.235) denklemlerinden zaman kesir mertebeli Fitzhugh-Nagumo denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(x,t) = \alpha_1 \pm \frac{\sqrt{2}k}{k \left(x \pm \frac{(\delta-1)t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\xi_0}{k} \right)}, \quad (5.236)$$

$$u(x,t) = \alpha_2 \pm \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\exp \left[\frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{2}k} \left(x \pm \frac{(\delta-1)t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\xi_0}{k} \right) \right] - 1}, \quad (5.237)$$

$$u(x,t) = \alpha_1 \pm \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp \left[\frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{2}k} \left(x \pm \frac{(\delta-1)t^\alpha}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\xi_0}{k} \right) \right] - 1}, \quad (5.238)$$

$$B = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{2\sqrt{2}k} \quad \text{ve} \quad \lambda_1 = \pm \frac{(\delta-1)}{\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{olmak üzere, sırasıyla (5.237) ve (5.238)}$$

denklemlerinde, özel olarak $\xi_0 = 0$ ve $\alpha_1 = -\alpha_2$ alınırsa;

$$u(x,t) = \alpha_2 \coth(B(x - \lambda_1 t^\alpha)), \quad (5.239)$$

$$u(x,t) = \alpha_1 \coth(B(x - \lambda_1 t^\alpha)), \quad (5.240)$$

bulunur.

B solitonun ters genişliğini ifade etmek üzere, bu denklemler zaman kesir mertebeli Fitzhugh-Nagumo denkleminin hiperbolik çözümleridir.

2. durum: Son olarak

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{b_0 \left(\sqrt{\delta(\delta-6)+1}\delta - 1 \right)}{2\sqrt{2}k}, \quad a_2 = -\frac{b_0}{\sqrt{2}k}, \quad b_0 = b_0, \quad (5.241)$$

$$\lambda = \frac{k \left(3\sqrt{\delta(\delta-6)+1} + 1 - \delta \right)}{2\sqrt{2}}$$

çözüm kümeleri elde edilir. (5.241) de bulunan değerler (5.226) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\xi - \xi_0) = \sqrt{2}k \int \frac{dU}{U^2 + \frac{a_1}{a_2}U} \quad (5.242)$$

elde edilir. (5.242) denkleminin integrali alınırsa zaman kesir mertebeli Fitzhugh-Nagumo denkleminin tam çözümü:

$$u(x,t) = \frac{a_1}{\exp \left[\pm \frac{a_1}{\sqrt{2ka_2}} \left(kx \pm \frac{k(3\sqrt{\delta(\delta-6)+1}+1-\delta)t^\alpha}{2\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} - \xi_0 \right) \right] - a_2} \quad (5.243)$$

olarak bulunur.

$$B_1 = \pm \frac{3k}{\sqrt{2k}}, \quad \lambda_2 = \frac{3\sqrt{\delta(\delta-6)+1}+1-\delta}{2\sqrt{2}\Gamma(1+\alpha)} \text{ olmak üzere, özel olarak } \xi_0 = 0 \text{ ve } a_1 = 3a_2$$

seçilir ve $a_2 = 1$ alınırsa (5.243) denkleminde

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(1 - \coth \left(B_1(x - \lambda_2 t^\alpha) \right) \right), \quad (5.244)$$

ve $a_2 = -1$ alınırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(B_1(x - \lambda_2 t^\alpha) \right) \right), \quad (5.245)$$

çözümleri elde edilir.

B_1 solitonun ters genişliği ifade etmek üzere, bu denklemler zaman kesir mertebeli Fitzhugh-Nagumo denkleminin kink soliton çözümleridir (Pandir ve Tandoğan [94]).

5.5.2 Zaman Kesir Mertebeli Genelleştirilmiş Burgers Denklemi

$0 < \alpha \leq 1$ kesir mertebeli türevin mertebesini belirleyen bir parametre, $p > 0$ ve β keyfi sabit olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - \beta u^p u_x = 0, \quad (5.246)$$

şeklinde verilen denklem zaman kesir mertebeli genelleştirilmiş Burgers denklemi olarak bilinir (Sahadevan ve Bakkyaraj [95]). Bu denklemde zaman kesir mertebeye alt difüzyon (yayılım) ve alt dispersiyonu (homojen dağılım) gibi matematiksel fiziğin farklı alanlarını oluşturmaktadır. Bunların sonsuz küçüklerinin elde edilmesi Lie simetri analizine kadar uzanmaktadır. Sonsuz küçükler kullanarak, her kesir mertebelinin Lie

cebiri bulunur. Böylece lineer olmayan kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin lineer olmayan adi diferansiyel denklemler halinde elde edilebileceğini göstermektedir. Birçok araştırmacı, bu denklemin tam çözümünü bulabilmek için farklı metodlar kullanmışlardır (Sachdev ve Srinivasa [96], Biswas vd. [97]).

k ve λ sıfırdan farklı birer sabit olmak üzere

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad (5.247)$$

yukarıdaki (5.247) dönüşümü (5.246) denkleminde uygulanır. $U' = \frac{dU}{d\xi}$ için zaman

kesir mertebeli genelleştirilmiş Burgers denklemi

$$-\lambda U' - k^2 U'' - \beta k U^p U' = 0, \quad (5.248)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme indirgendiği görülür. Öncelikle $U(\xi) = V^{1/p}(\xi)$ dönüşümü yaparak indirgenmiş denklem

$$\lambda p(p+1)V - k^2(p+1)V' - \beta k V^2 = 0 \quad (5.249)$$

şeklini alır.

(4.94) denklemi ile verilen çözüm formundaki l ve n denge sayılarını belirlemek için (5.249) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim V' ile en yüksek dereceden lineer olmayan V^2 terimlerinin dengelenmesine bakılır.

$$V' = \frac{a_n}{b_l} V^{n-l} + \dots \quad (5.250)$$

ve

$$V'' = \frac{(a_n^2 n b_l - b_l^2 a_n^2)}{b_l^3} V^{2n-2l-1} + \dots \quad (5.251)$$

olarak yazılır. Böylece V'' ve V^3 denklemlerinden

$$\begin{aligned} 2n - 2l - 1 &= 3 \\ n &= l + 2 \end{aligned} \quad (5.252)$$

şeklinde bulunur.

1. durum: Eğer $l = 0$ için $n = 2$ alınırsa, $a_2 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ olmak üzere

$$V' = \frac{a_2 V^2 + a_1 V + a_0}{b_0}, \quad (5.253)$$

ve

$$V'' = \frac{(2a_2 V + a_1)(a_2 V^2 + a_1 V + a_0)}{2b_0}, \quad (5.254)$$

türevleri bulunur. (5.253) ve (5.254) denklemleri indirgenmiş (5.249) denkleminde yerine yazılır ve V^s ($s = 0, 1, 2, 3$)ye bağlı polinomun katsayıları bir araya getirip sıfıra eşitlenir. Elde edilen cebirsel denkleminin Maple paket programı ile çözümünden, k , a_1 ve b_0 keyfi sabitler olmak üzere

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = -\frac{p\beta b_0}{k + kp}, \quad b_0 = b_0, \quad \lambda = -\frac{k^2 a_1}{pb_0} \quad (5.255)$$

çözüm kümesi elde edilir. (5.255) deki bu değerler (5.253) denkleminde yerine konulmasıyla

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\frac{k + kp}{p\beta} \int \frac{dV}{V^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)V} \quad (5.256)$$

denklemini elde edilir. Paydadaki polinomsal ifadenin kökleri α_1 ve α_2 olmak üzere (5.226) denkleminin çözümleri;

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{A_1}{V - \alpha_1}, \quad (5.257)$$

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{A_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{V - \alpha_1}{V - \alpha_2} \right| \quad (5.258)$$

olarak bulunur. Burada $A_1 = -\frac{k + kp}{p\beta}$ olarak alınmıştır. (5.257) ve (5.258)

denklemlerinden zaman kesir mertebeli genelleştirilmiş Burgers denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü ve kink çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{A_1}{\left(\left(kx + \frac{ka_1 t^\alpha}{pb_0 \Gamma(1+\alpha)} \right) - \eta_0 \right)} \right]^{1/p} \quad (5.259)$$

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp \left[\frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_1} \left(kx + \frac{k^2 a_1 t^\alpha}{pb_0 \Gamma(1+\alpha)} - \eta_0 \right) \right] - 1} \right]^{1/p} \quad (5.260)$$

elde edilir. $B_1 = \frac{A_1}{k}$, $B_2 = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_1}$ ve $\lambda_1 = -\frac{ka_1}{pb_0 \Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere, özel olarak $\eta_0 = 0$ alınırsa (5.259) ve (5.260) çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{B_1}{(x - \lambda_1 t^\alpha)} \right]^{1/p}$$

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp[B_2(x - \lambda_1 t^\alpha)] - 1} \right]^{1/p}$$

2. durum: Eğer $l = 1$ için $n = 3$ alınırsa, $a_3 \neq 0$ ve $b_1 \neq 0$ olmak üzere cebirsel denklem sisteminin çözümünde

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= a_1, & a_2 &= a_2, & a_3 &= -\frac{p\beta b_0(k(1+p)a_2 + p\beta b_0)}{k^2(1+p)^2 a_1}, \\ b_0 &= b_0, & b_1 &= -\frac{b_0(k(1+p)a_2 + p\beta b_0)}{k(1+p)a_1}, & \lambda &= -\frac{k^2 a_1}{pb_0} \end{aligned} \quad (5.261)$$

değerleri elde edilir. Bulunan değerler yardımıyla

$$\pm(\xi - \xi_0) = \frac{k(1+p)}{p\beta} \int \frac{V + \frac{b_0}{b_1}}{V^3 + \frac{a_2}{a_3}V^2 + \frac{a_1}{a_3}V} dV \quad (5.262)$$

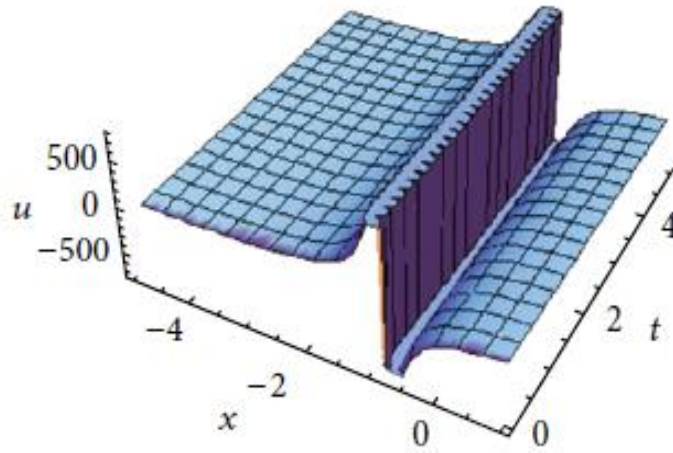
elde edilir. Paydadaki polinomsal ifadenin kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve $A_2 = \frac{k+kp}{p\beta}$ olmak üzere (5.262) denkleminin integrali alınırsa zaman kesir mertebeli genelleştirilmiş Burgers denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü:

$$u(x,t) = \left[\left(b_1 (2\alpha_1 \xi - A_2) \right) + \sqrt{A_2 b_1 (A_2 b_1 - 2(b_0 + b_1 \alpha_1) \xi)} (2b_1 \xi)^{-1} \right]^{1/p} \quad (5.263)$$

bulunur. Burada $\xi = kx + \frac{k^2 a_1 t^\alpha}{p b_0 \Gamma(1+\alpha)} - \eta_0$ olarak verilmiştir. Özel olarak $\eta_0 = 0$ alınırsa (5.263) denkleminin rasyonel çözümü:

$$u(x,t) = \left[\left(b_1 (2\alpha_1 (kx \pm k\lambda_2 t^\alpha) - A_2) \right) + \sqrt{A_2 b_1 (A_2 b_1 - 2(b_0 + b_1 \alpha_1) (kx \pm k\lambda_2 t^\alpha))} (2b_1 (kx \pm k\lambda_2 t^\alpha))^{-1} \right]^{1/p} \quad (5.264)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 5. 5 $\alpha = \beta = 0.01, a_1 = b_0 = b_1 = p = k = 1$ için $u(x,t)$ 'nin tam çözümü

Bulunan rasyonel fonksiyon çözümü literatürde daha önceden bulunmamaktadır ve bu çözüm zaman kesir mertebeli genelleştirilmiş Burgers denkleminin yeni hareketli dalga çözümleridir (Bulut vd. [98]).

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının beş ana bölümünün değerlendirilmesi aşağıda yapılmıştır.

Birinci bölümde genel anlamda kesirli analiz kavramı açıklanmış, ayrıca 300 yıldan fazla bir süre önce ortaya atılan kesirli analizin tarihsel gelişimi, kullanım alanları neden kesirli analize ihtiyaç duyulduğundan ve tezin amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde kesirli analizin bazı temel fonksiyonları olan Gamma, Beta ve Mittag-Leffler fonksiyonları tanımlanmış ve bu fonksiyonların önemli özelliklerine değinilmiştir. Burada iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlarla olan bağlantıları verilmiştir. Ayrıca fiziksel açıdan dalga ve soliton kavramları tanımlanmıştır. Daha sonra lineer olmayan diferensiyel denklemler için tam çözüm ifadesi açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde son zamanlarda yaygın olarak kullanılan kesir mertebeli türev tanımı ve bazı özellikleri verilmiş, bununla birlikte kesir mertebeli diferensiyel denklem tanımı ve sınıflarından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm uzay, zaman ve uzay-zaman kesir mertebeli diferensiyel denklemlerini, adi diferensiyel denklemlere dönüştüren kesirsel karmaşık dönüşüm metodu verilmiş ve bu metodun geometrik yorumu örneklerle açıklanmıştır. Ayrıca lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanılan alt denklem yöntemi, fonksiyonel değişken yöntemi, modifiye edilmiş basit denklem yöntemi, Kudryashov yöntemi ve modifiye edilmiş deneme denklem yöntemleri ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Kullanılan yöntemlerin her birinin avantajları ve dezavantajları ilk kez tarafımdan açıklanmıştır.

Beşinci bölümde, fiziksel olayların bir modellemesi olarak ele alınan denklemlerin kullanım alanlarına kısaca değinilmiştir. Sonrasında kesirsel karmaşık dönüşüm yöntemi ile adi diferensiyel denklemlere dönüştürülen çeşitli lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin, dördüncü bölümde tanıtılan yöntemler yardımıyla tam çözümleri bulunmuştur. Bu yöntemlerin bazılarının uygulamadaki örnekleri ilk kez tarafımdan elde edilmiştir.

Lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemler ve denklem sistemi için alt denklem yönteminin diğer yöntemlere göre daha kullanışlı olduğu söylenebilir. Elde edilen çözümler arasında farklı türden tam çözümler (hiperbolik fonksiyon, trigonometrik fonksiyon ve rasyonel fonksiyon) bulunduğundan bu yöntem diğer yöntemlere göre daha etkilidir. Ayrıca, alt denklem yöntemi lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemler ve denklem sistemlerine yine fark denklemlerine ve fark denklem sistemlerine kolaylıkla uygulanabilmektedir.

Fonksiyonel değişken yöntemi, modifiye edilmiş basit denklem yöntemi ve modifiye edilmiş deneme denklem yöntemi dengelenme şartını sağlayan her türlü denkleme uygulanabilir olmasına rağmen diğer yöntemlere göre oldukça kısıtlıdır. Ancak modifiye edilmiş deneme denklem yönteminin değişken katsayılı lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklemler için kullanılması yöntemin avantajlı olduğunu göstermektedir. Bu yöntem; tanh yöntemi, homojen denge yöntemi, üstel fonksiyon yöntemi, Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi gibi tam çözüm yöntemlerinin birleştirilmesi olduğundan geniş çözüm fonksiyonlarının bulunmasını sağlar.

Üç farklı tipte verilen Kudryashov yöntemi kesir mertebeli diferensiyel denklem ve denklem sistemleri kolaylıkla uygulanabilir.

Bu tez çalışmasında verilen fonksiyonel değişken yöntemi, modifiye edilmiş basit denklem yöntemi, Kudrasyhov yöntemi ve modifiye edilmiş deneme denklem yöntemlerini kesir mertebeli fark denklemleri ve denklem sistemlerinin yeni tam çözümlerini bulmak için çalışmalar yapılabilir. Kesir mertebeli diferensiyel denklemler için tam çözüm yöntemleri bu tez çalışmasında verilenlerle sınırlı değildir. Başka yöntemlerle de bu denklemlerin tam çözümleri incelenebilir.

Bu tezde kullanılan denklemlerden elde edilen tam çözümler, literatürde var olan çözümlerden farklıdır. Bulunan tam çözümler, nümerik yöntemlerle elde edilen yaklaşık

özüm­lerin karşılaştırılmasında kullanılabilir. Böylece yaklaşık (nümerik) özüm­lerin hata oranının belirlenmesine yardımcı olabilir.

Matematik alanlarındaki araştırma başlıklarını zenginleştirme potansiyeline sahip bu çalışmada elde edilen yeni çözüm­ler; fizik, biyoloji, kimya ve mühendislik gibi bilim dallarındaki uygulama alanlarının genişletilmesine katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Loverro, A., (2004). Fractional Calculus: History, Defination and Aplications for the Engineer, Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA.
- [2] Oldham, K.B. ve Spainer, J., (1974). The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- [3] Hilfer, P., (2000). Applications of Fractional Calculus In Physics, World Scientific, Germany.
- [4] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. ve Trujillo. J.J., (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam.
- [5] Podlubny, I., (1999). Fractional Differential Equations, Academic Press, California.
- [6] Samko, S.G., Kilbas, A.A. ve Marichev, O.I., (1993). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland.
- [7] Bertram, R., (1975). Fractional Calculus and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Kurulay, M., (2009). Zaman-Kesirli Mertebeli Non-lineer Kısmi Türevli Diferensiyel Deklemlerin Nümerik Çözümleri, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [9] Taşbozan, O., (2011). Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [10] Karadeniz, D., (2008). Kesirli Yayılım-Dalga Denklemlerinin Silindirik Koordinatlarda İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- [11] Miller, K.S. ve Ross, B., (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York.
- [12] Çavuş, M.S., (2006). Kesirli (Fractional) Diferensiyel Denklemler Teorisi ve Dielektrik Durulmanın Kesirli Master Denklemi Yöntemiyle Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- [13] Magin, R.L., (2004). "Fractional Calculus in Bioengineering", Critical Reviews in Biomedical Engineering, 32 (1): 1.

- [14] Arfken, G.B. ve Weber, H.J., (1995). *Mathematical Methods for Physicist*, Fourth Edition, Academic Pres.
- [15] Mittag-Leffler, G.M., (1903). "Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ ", C. R. Acad. Sci. Paris, (Ser. II) 137, 554-558.
- [16] Russell, J.S., (1845). Report on Waves. Report of the 14th meeting of the British, Association for the Advancement of Science, September: 311-390, London.
- [17] Zabusky, N.J. ve Kruskal, M.D., (1965). Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, J.Phys. Rev. Lett. 15, 240.
- [18] Wadati, M., (1983), Stochastic Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Jpn. 52: 2642-2648.
- [19] Kolwankar, K.M. ve Gangal, A.D., (1996). "Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions", Chaos, 6: 505-513.
- [20] Sun, H.G. ve Chen, W., (2009). "Fractal derivative multi-scale model of fluid particle transverse accelerations in fully developed turbulence", Science in China Series E: Technological Sciences, 52(3): 680-683.
- [21] Chen, W. ve Sun, H.G., (2009). "Multiscale statistical model of fully developed turbulence particle accelerations", Modern Physics Letters B, 23(3): 449-452.
- [22] Cresson, J., (2003). "Scale calculus and the Schrödinger equation", Journal of Mathematical Physics, 44(11): 4907-4938.
- [23] Cresson, J., (2005). "Non-differentiable variational principles", J. Math. Anal. Appl., 307(1): 48-64.
- [24] Caputo, M., (1967). "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II", Geophys. J. Royal Astronom. Soc., 13: 529-539.
- [25] Jumarie, G., (2006). "Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results", Comput. Math. Appl., 51: 1367-1376.
- [26] Jumarie, G., (2009). "Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for nondifferentiable functions", Appl. Maths. Lett., 22: 378-385.
- [27] Letnikov, A.V., (1868). "Theory of differentiation with an arbitrary order", Mat. Sb., 3: 1-66.
- [28] Ross, R., (editör), (1975). *Fractional Calculus and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- [29] Jumarie, G., (2007). "Fractional partial differential equations and modified Riemann-Liouville derivative new methods for solution", J. Appl. Math. & Computing, 24(1-2): 31-48.
- [30] Bekir, A., Aksoy, E. ve Güner, Ö., (2014). "A generalized fractional sub-equation method for nonlinear fractional differential equations", AIP Conference Proceedings, 1611(78): DOI: 10.1063/1.4893808.

- [31] Li, Z.B. and He, J.H., (2010). "Fractional complex transform for fractional differential equations", *Math. Comput. Appl.*, 15: 970-973.
- [32] Güner, Ö., (2014). Kesir Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Tam çözümleri, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- [33] Li, Z.B., (2010). "An Extended Fractional Complex Transform", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 11: 335-337.
- [34] Li, Z.B. ve He, J.H., (2011). "Application of the fractional complex transform to fractional differential equations", *Nonlinear Sci. Lett. A*, 2: 121-126.
- [35] He, J.H. ve Li, Z.B., (2012). "Converting Fractional Differential Equations into Partial Differential Equations", *Thermal Science*, 16(2): 331-334.
- [36] Ayaz, F., (2004). "Solution of the system of differential equations by differential transform method", *Applied Math. Comput.*, 147: 547-567.
- [37] Ghazanfari, B. ve Ghazanfari, A.G., (2012). "Solving System of Fractional Differential Equations by Fractional Complex Transform Method", *Asian Journal of Applied Sciences*, 5(6): 438-444.
- [38] He, J.H., Elegan, S.K. ve Li, Z.B., (2012). "Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus", *Physics Letters A*, 376: 257-259.
- [39] He, J.H., (2008). "String theory in a scale dependent discontinuous space-time", *Chaos, Solitons & Fractals*, 36(3): 542-545.
- [40] He, J.H., Wu, G.C. ve Austin, F., (2010). "The Variational Iteration Method Which Should Be Followed", *Nonlinear Science Letters A*, 1(2010): 1-30.
- [41] Ibrahim, R.W., (2012). "Fractional Complex Transform to Fractional Differential Equations", *Advances in Difference equations*, 2012: 192.
- [42] Saad, M., Elagan, S.K., Hamed, Y.S. ve Sayed, M., (2013). "Using a complex transformation to get an exact solutions for fractional generalized coupled MKDV and KDV equations", *Int. Journal of Basic&Applied Sciences*, 13(01): 23-25.
- [43] Elghareb, T., Elagan, S.K., Hamed, Y.S. ve Sayed, M., (2013). "An Exact Solutions for the Generalized Fractional Kolmogorov-Petrovskii Piskunov Equation by Using the Generalized (G'/G) -Expansion Method", *Int. Journal of Basic&Applied Sciences*, 13(01): 19-22.
- [44] Zhang, S. ve Zhang, H.Q., (2011). "Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs", *Physics Letters A*, 375: 1069-1073.
- [45] Guo, S., Mei, L., Li, Y. ve Sun, Y., (2012). "The improved fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in fluid mechanics", *Physics Letters A*, 376: 407- 411.
- [46] Tang, B., He, Y., Wei, L. ve Zhang, X., (2012). "A generalized fractional sub-equation method for fractional differential equations with variable coefficients", *Physics Letters A*, 376: 2588-2590.

- [47] Zhang, S., Zong, Q-A., Liu, D. ve Gao, Q., (2010). "A Generalized Exp-Function Method for Fractional Riccati Differential Equations", *Communications in Fractional Calculus*, 1(1): 48-51.
- [48] Zerarka, A., Ouamane, S. ve Attaf, A., (2010). "On the functional variable method for finding exact solutions to a class of wave equations", *Applied Mathematics and Computation*, 217(7): 2897.
- [49] Liu, W. ve Chen, K., (2013). "The functional variable method for finding exact solutions of some nonlinear time-fractional differential equations", *Indian Academy of Sciences*, 81(3): 377-384.
- [50] Bekir, A., Güner, O., Aksoy, E. ve Pandır, Y., (2015). "Functional variable method for the nonlinear fractional differential equations", *AIP Conference Proceedings*, 1648: 730001 doi: 10.1063/1.4912955.
- [51] Çevikel A.C., Bekir, A., Akar, M. ve San, S., (2012). "A procedure to construct exact solutions for nonlinear evolution equations", *Pramanal-Journal of Physics*, 79(3): 337-344.
- [52] Kudryashov N.A., (2005). "Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations", *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(5) 1217-1231.
- [53] Jawad, A.J.M., Petkovic, M.D. ve Biswas, A., (2010). "Modified simple equation method for nonlinear evolution equations", *Applied Mathematics and Computation*, 217: 869.
- [54] Zayed E.M.E., (2011). "A note on the modified simple equation method applied to Sharma-Tasso-Olver equation", *Applied Mathematics and Computation*, 218: 3962.
- [55] Pandır, Y., Gurefe Y. ve Mısırlı, E., (2013). "The extended trial equation method for some time fractional differential equations", *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013:13.
- [56] Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Samiei Paghaleh, A. ve Vahidi, J., (2012). "Exact solutions of nonlinear evolution equations by using the modified simple equation method", *Ain Shams Engineering Journal* 3: 321-325.
- [57] Khan, K. ve Akbar, M.A., (2013). "Exact and solitary wave solutions for the Tzitzeica-Dodd-Bullough and the modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equations using the modified simple equation method", *Ain Shams Engineering Journal* 4: 903-909.
- [58] Khan, K. ve Akbar, M.A., (2014). "Exact solutions of the (2+1)-dimensional cubic Klein-Gordon equation and the (3+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation using the modified simple equation method", *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences* 15: 74-81.
- [59] Kudryashov, N.A., (2012). "One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17: 2248-2253.
- [60] Bulut, H. ve Kılınc, B., (2013). "Exact solutions for some fractional nonlinear partial differential equations via Kudryashov mothod", *New World Sciences Academy*, 8(1): 24-31.

- [61] Demiray, S.T., Pandır, Y. ve Bulut, H., (2014). "Generalized Kudryashov method for time-fractional differential equations", *Abstract and Applied Analysis*, 2014(901540): 13.
- [62] Ege, S.M. ve Mısırlı, E., (2014). "The modified Kudryashov method for solving some fractional-order nonlinear equations", *Advances in Difference Equations*, 2014: 135.
- [63] Ma, W.X. ve Fuchssteiner, B., (1996). "Explicit and exact solutions to a Kolmogorov Petrovskii Piskunov equation", *Int. J. Non-Linear Mech.*, 31: 329-338.
- [64] Pandır, Y., Gürefe, Y. ve Mısırlı, E., (2013). "New Exact Solutions of the Time-Fractional Nonlinear Dispersive KdV Equation", *International Journal of Modeling and Optimization*, 3(4): 349-352.
- [65] Bekir, A., Aksoy, E. ve Çevikel, A.C., (2014). "Exact solutions of nonlinear time fractional partial differential equations by sub-equation method", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015(38): 2779-2784.
- [66] Bekir, A. ve Aksoy, E., (2015). "Application of the sub-equation method to some differential equations of time fractional order", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics Published by ASME*, 10(5): 054503-054503-5.
- [67] Khan, N.A., Ayaz, M., Jin, L. ve Yıldırım, A., (2011). "On approximate solutions for the time-fractional reaction-diffusion equation of Fisher type", *International Journal of the Physical Sciences*, 6(10): 2483-2496.
- [68] Lu, B., (2012). "The first integral method for some time fractional differential equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 395: 684-693.
- [69] Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Rahimian, M. ve Akbari, M., (2013). "Application of the simplest equation method to some time-fractional partial differential equations", *Ain Shams Engineering Journal*, 4: 897-902.
- [70] Yan, Z., (2008). "The modified KdV equation with variable coefficients: Exact uni/bi-variable travelling wave-like solutions", *Applied Mathematics and Computation*, 203: 106-112.
- [71] Odibat, Z. ve Momani, S., (2009). "The variational iteration method: An efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics, *Computers and Mathematics with Applications*, 58: 2199-2208.
- [72] Abdulaziz, O., Hasim, I. ve Ismail, E.S., (2009). "Approximate analytical solution to fractional modified KdV equations", *Mathematical and Computer Modelling*, 49: 136-145.
- [73] Jafari, H., Tajadodi, H., Baleanu, D., Al-Zahrani, A.A., Alhamed, Y.A. ve Zahid, A.H., (2013). "Exact solutions of Boussinesq and KdV-mKdV equations by fractional sub-equation method", *Romanian Reports in Physics*, 65(4): 1119-1124.
- [74] Jafari, H., Tajadodi, H., Kadkhoda, N. ve Baleanu, D., (2013). "Fractional Subequation Method for Cahn-Hilliard and Klein-Gordon Equations", *Abstract and Applied Analysis*, 2013: 587179.

- [75] Alzaidy, J.F., (2013). "Fractional Sub-Equation Method and its Applications to the Space-Time Fractional Differential Equations in Mathematical Physics", British Journal of Mathematics & Computer Science, 3: 153-163.
- [76] Zhang, S. ve Zhang, H.Q., (2011). "Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs", Physics Letters A, 375: 1069-1073.
- [77] Bekir, A., Güner, O. ve Cevikel, A.C., (2013). "Fractional Complex Transform and exp-Function Methods for Fractional Differential Equations", Abstract and Applied Analysis, 2013: 426462.
- [78] Katatbeh, Q., Abu-Irwaq, I., Alquran, M. ve Qawasmeh, A., (2014). "Solitary wave solutions to time-fractional coupled degenerate Hamiltonian equations", International Journal of Pure and Applied Mathematics, 93(3): 377-387.
- [79] Ablowitz, M.J. ve Clarkson, P.A., (1990). Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform, Cambridge University Press, Cambridge.
- [80] Alzaidy, J.F., (2013). "The fractional sub-equation method and exact analytical solutions for some nonlinear fractional PDEs", American Journal of Mathematical Analysis, 1(1): 14-19.
- [81] Zayed, E.M.E., Amer, Y.A. ve Shohib, R.M.A., (2014). "Exact traveling wave solutions for nonlinear fractional partial differential equations using the improved (G'/G) -expansion method", International Journal of Engineering and Applied Science, 4, 7.
- [82] Kaplan, M., Bekir, A., Akbulut, A. ve Aksoy, E., "The modified simple equation method for nonlinear fractional differential equations", Romanian Journal of Physics, (baskıda).
- [83] Zayed, E.M.E., Amer, Y.A. ve Shohib, R.M.A., (2014). "The fractional complex transformation for nonlinear fractional partial differential equations in the mathematical physics", Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences.
- [84] Esen, A., Yağmurlu, N.M. ve Tasbozan, O., (2013). "Approximate Analytical Solution to Time-Fractional Damped Burger and Cahn-Allen Equations", Appl. Math. Inf. Sci., 7(5): 1951-1956.
- [85] Calogero, F. ve Degasperis, A., (1976). "Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform", I. Il Nuovo Cimento B., 32: 201-242.
- [86] Zayed, E.M.E. ve Amer, Y.A., (2014). "The first integral method and its application for finding the exact solutions of nonlinear fractional partial differential equations (PDEs) in the mathematical physics", International Journal of Physical Sciences, 9(8): 174-183.
- [87] Zayed, E.M.E. ve Arnous, A.H., (2014). "Exact traveling wave solutions for coupled nonlinear fractional PDEs using the (G'/G) -expansion method", European Journal of Academic Essays, 1(2): 6-16.
- [88] Gao, H., (2014). "Symbolic computation and new exact travelling solutions for the $(2+1)$ -dimensional Zoomeron equation", International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application, 3, 23-28.

- [89] Khan, H., (2014). "Traveling wave solutions of the (2+1)-dimensional Zoomeron equation and the Burgers equations via the MSE method and Exp-function method", Ain Shams Engineering Journal, 5, 247-256.
- [90] Ege, S.M. ve Mısırlı, E., (2014). "The modified Kudryashov method for solving some fractional-order nonlinear equation", Advances in Difference Equations, 2014:135.
- [91] Stakhov, A. ve Rozin, B., (2005). "On a new class of hyperbolic functions", Chaos Solitons Fractals, 23: 379-389.
- [92] Fitzhugh, R., (1961). "Impulse and physiological states in models of nerve membrane", Biophys. J., 1: 445-466.
- [93] Nagumo, J.S., Arimoto, S. ve Yoshizawa, S., (1962). "An active pulse transmission line simulating nerve axon", Proc IRE., 50: 2061-70.
- [94] Pandır, Y. ve Tandogan, Y.A., (2013). "Exact solutions of the time-fractional Fitzhugh-Nagumo equation", AIP Conference Proceedings, 1558: 1919.
- [95] Sahadevan, R. ve Bakkyaraj, T., (2012). "Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg-de Vries equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 393(2): 341-347.
- [96] Sachdev, P.L. ve Srinivasa, R.C.H., (2000). " N -wave solution of modified Burgers equation", Applied Mathematics Letters, 13(4): 1-6.
- [97] Biswas, A., Triki, H., Hayat, T. ve Aldossary, O.M., (2011). "1-soliton solution of the generalized Burgers equation with generalized evolution", Applied Mathematics and Computation, 217(24): 10289-10294.
- [98] Bulut, H., Baskonus, H.M. ve Pandır, Y., (2013). "The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation, Abstract and Applied Analysis, 2013: 636802.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Esin AKSOY
Doğum Tarihi ve Yeri : 1984/Antakya
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : eesinaksoy@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	—
Y. Lisans	Uygulamalı Matematik	Dumlupınar Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Dumlupınar Üniversitesi	2008
Lise		Fevzi Çakmak Lisesi	2002

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014	Eskişehir Murat Tuzsuz Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi	Vekil Öğretmen
2011	Eskişehir Murat Tuzsuz Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi	Vekil Öğretmen

2009	Kütahya Atatürk Lisesi	Vekil Öğretmen
2008	Özel Başaran Yıldız Lisesi	Stajer Öğretmen

YAYINLARI

Uluslar arası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler (SCI ve SCI-exp)

1. **Aksoy E.**, Kaplan M., Bekir A., “Exponential rational function method for space-time fractional differential equations”, *Waves in Random and Complex Media*, (baskıda).
2. Kaplan M., Bekir A., Akbulut A., **Aksoy E.**, “The modified simple equation method for nonlinear fractional differential equations”, *Romanian Journal of Physics*, (baskıda).
3. Bekir A., Güner Ö., **Aksoy E.**, Pandır Y., (2015). “Functional variable method for the nonlinear fractional differential equations”, *AIP Conference Proceedings*, 1648, 730001, doi: 10.1063/1.4912955, ISBN: 978-0-7354-1287-3.
4. Bekir A., **Aksoy E.**, (2015). “Application of the sub-equation method to some differential equations of time fractional order”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics Published by ASME*, 10, 5 054503-054503-5. DOI: 10.1115/1.4028826.
5. Bekir A., **Aksoy E.**, Çevikel A. C., (2015). “Exact solutions of nonlinear time fractional partial differential equations by sub-equation method”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38, 13, 2779-2784.
6. Bekir A., **Aksoy E.**, Güner Ö., (2014). “A generalized fractional sub-equation method for nonlinear fractional differential equations”, *AIP Conference Proceedings*, 1611, 78-83 DOI: 10.1063/1.4893808, ISBN: 978-0-7354-1247-7.
7. Bekir A., **Aksoy E.**, Güner Ö., (2013). “Optical soliton solutions of the Long-short-wave interaction system”, *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 22 (2), 1350015.
8. Bekir A., **Aksoy E.**, (2013). “Exact solutions of extended shallow water wave equations by exp-function method”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 23 (2), 305-319.
9. Bekir A., **Aksoy E.**, Güner Ö., (2012). “Bright and dark soliton solutions for variable-coefficient diffusion–reaction and modified Korteweg-de Vries equations”, *Physica Scripta*, 85 (3), 035009.
10. Bekir A., **Aksoy E.**, (2012). “Exact solutions of shallow water wave equations by using the (G'/G)-expansion method”, *Waves in Random and Complex Media*, 22 (3) 317-331.
11. Bekir A., **Aksoy E.**, (2010). “Exact solutions of nonlinear evolution equations with variable coefficients using exp-function method”, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (1), 430-436.

Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler (Diğer)

1. Çevikel A. C., **Aksoy E.**, Güner Ö., Bekir A., (2013). “Dark-Bright soliton solutions for some evolution equations”, *International Journal of Nonlinear Science*, 16, 3 195-202.

Bildiri

1. **Aksoy E.**, Güner Ö., Bekir A., Çevikel A.C., “Exact Solutions of the (3+1)-dimensional space-time fractional Jimbo-Miwa equation”, 13th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2015), Rodos Palace Hotel, 23-29 Eylül 2015, YUNANİSTAN.
2. Güner Ö., **Aksoy E.**, Çevikel A.C., Bekir A., “Various methods for solving time fractional KdV-Zakharov-Kuznetsov equation”, 13th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2015), Rodos Palace Hotel, (2015) YUNANİSTAN.
3. **Aksoy E.**, Çevikel A.C., Bekir A., “Applications of the fractional differential equations with modified Riemann-Liouville derivative via generalized Kudryashov method”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2015) Yıldız Teknik Üniversitesi, 8-12 Haziran 2015, İSTANBUL.
4. **Aksoy E.**, Çevikel A.C., Bekir A., “Analytical solutions of the time fractional Huxley equation including modified Riemann-Liouville derivative using three different methods”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2015) Yıldız Teknik Üniversitesi, 8-12 Haziran 2015, İSTANBUL.
5. **Aksoy E.**, Bekir A., Çevikel A.C., “(2+1)- boyutlu zaman kesir mertebeli Zoomeron denkleminin tam çözümleri”, 14. Matematik Sempozyumu, Niğde Üniversitesi, 14-16 Mayıs 2015, NİĞDE.
6. **Kaplan M.**, Akbulut A., **Aksoy E.**, “Lineer olmayan kesir mertebeli diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin çözümleri”, 14. Matematik Sempozyumu, Niğde Üniversitesi, 14-16 Mayıs 2015, NİĞDE.
7. **Kaplan M.**, Bekir A., **Aksoy E.**, “Kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin Üstel Rasyonel fonksiyon yöntemi ile çözümleri”, 9. Ankara Matematik Günleri, Atılım Üniversitesi, 12-13 Haziran 2014, ANKARA.
8. **Aksoy E.**, Çevikel A.C., Bekir A., “Kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerin alt denklem metoduyla çözümleri”, 13. Matematik Sempozyumu, Karabük Üniversitesi, 15-17 Mayıs 2014, KARABÜK.
9. **Aksoy E.**, Bekir A., Güner Ö., Çevikel A.C., “Lineer olmayan oluşum denklemleri için tam soliton çözümler”, 25. Ulusal Matematik Sempozyumu, Niğde Üniversitesi, 5-8 Eylül 2012, NİĞDE.
10. Çevikel A.C., **Aksoy E.**, Bekir A., Güner Ö., “Soliton solutions for some evolution equations”, International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA2012), Yıldız Teknik Üniversitesi, 20-24 Haziran 2012, İSTANBUL.

Proje

“Lineer Olmayan Kesir Mertebeli Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözüm Yöntemleri”, Yıldız Teknik Üniversitesi, Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ nün 2014-09-04-DOP01 numaralı projesidir.