

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİE GRUPLARI ÜZERİNDE GÖZLENEBİLİRLİK PROBLEMİ VE BAZI
UYGULAMALARI**

HASAN HALİT TALİ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. AYŞE KARA HANSEN**

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİE GRUPLARI ÜZERİNDE GÖZLENEBİLİRLİK PROBLEMİ VE BAZI
UYGULAMALARI**

Hasan Halit TALİ tarafından hazırlanan tez çalışması 28.04.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Y.Doç. Dr.Tayfun YEGÜL
Haliç Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer OĞUZ
Haliç Üniversitesi

ÖNSÖZ

Tez konusunun seçimindeki katkılarından, araştırmanın her aşamasında verdiği yönlendirici ve geliştirici destekten, ayrıca araştırmanın sonuca ulaşmasındaki cesaret veren yardımlarından ötürü danışman hocam Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN'e; çalışmalarımın her aşamasında beni maddi ve manevi olarak destekleyen arkadaşım ve meslektaşım Mahmut KUDEYT'e; bu zorlu süreçte her türlü sabrı ve anlayışı gösterip beni destekleyen aileme teşekkür ederim.

Nisan, 2016

Hasan Halit TALİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER	3
2.1 Manifold.....	3
2.2 Lie Grupları.....	8
2.3 Lie Cebirleri	11
2.4 Homomorfizmalar	12
2.5 Üstel Tasvir.....	13
2.6 Adjoint Gösterilim	14
2.7 Lie Türevi.....	16
BÖLÜM 3	
LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ BAZI KONTROL SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİKLERİ	18
3.1 Genel Kontrol sistemleri	18
3.2 Gözlenebilirlik	20
3.3 SE(2) Özel Öklid Uzayı Üzerindeki Çıkış-Gözlenebilirlik Fonksiyonlu Sapan Vektör Alanı Normalizörden Olan Lineer Kontrol Sisteminin Gözlenebilirliği	21
3.4 G Lie Grubu Üzerindeki Çıkış-Gözlenebilirlik Fonksiyonlu Sapan Vektör Alanı Normalizörden Olan Lineer Kontrol Sistemlerini Gözlenebilirliği.....	29

BÖLÜM 4

KONİK SİSTEMLERİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ	34
4.1 Genel Kontrol sistemleri	34
4.2 Gözlenebilirlik	35
SONUÇ VE ÖNERİLER	38
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	41



SİMGE LİSTESİ

M	n -boyutlu topolojik manifold
$\mathfrak{F}$	koordinat sistemleri topluluğu
$T(M)$	tanjant demeti
$T^*(M)$	kotanjant demeti
$T_p M$	M 'nin bir p noktasındaki teğet uzayı
$T_p^* M$	M 'nin bir p noktasındaki kotanjant uzayı
$[X, Y]$	X, Y vektör alanlarının Lie parantezi
l_σ	σ 'nın sol ötelemesi
exp	üstel tasvir
Ad	adjoint gösterilim
ad	adjoint gösterilimin türevi
$(L_X Y)_m$	Y 'nin X 'e göre $m \in M$ noktasındaki Lie türevi
γ_m	X vektör alanının bir m noktasındaki integral eğrisi
$\chi(M)$	M 'nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı olan bütün diferansiyellenebilir vektör alanlarının bir kümesi
$dom(X)$	X vektör alanının tanım kümesi
Σ	kontrol sistemi
D	sistemin dinamiği
G_Σ	sözde (pseudo) grubu
S_Σ	sözde yarı (pseudo-semi) grubu
$\tilde{x}$	x 'ten ayırt edilemeyen noktaların kümesi
$L(G)$	G 'nin Lie cebiri
I	e den ayırt edilemeyen noktaların kümesi
$L(I)$	I 'nin Lie cebri

$Ker(h)$	h 'nin çekirdeği
K	$Ker(h)$ 'nin Lie cebiri
$Fix(T)$	G üzerinde T etkisi ile sabit noktaların kümesi
$trj_x(u)$	yörünge eğrisi
$T(\sigma)$	σ 'nın yörünge eğrilerinin kümesi
$T(\sigma, x)$	x 'de başlayan yörünge eğrilerinin kümesi
$T(\sigma, x, y)$	x 'de başlayan ve y 'de biten yörünge eğrilerinin kümesi
ϕ_t^u	u kontrolü ile tanımlı akış
$LH(M)$	M 'den N 'ye tüm yerel homeomorfizmaların kümesi



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 σ eğrisi boyuncaki X vektör alanı	7
Şekil 2. 2 Y 'nin X 'e göre m noktasındaki Lie türevi	17



**LİE GRUPLARI ÜZERİNDE GÖZLENEBİLİRLİK PROBLEMİ VE BAZI
UYGULAMALARI**

Hasan Halit TALİ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN

“Lie Grupları Üzerinde Gözlenebilirlik Problemi ve Bazı Uygulamaları” adlı bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Literatür Özeti, Tezin Amacı ve Hipotez hakkında bilgi verilmektedir.

İkinci bölümde Ön Bilgiler Başlığı altında temel kavramlar yer almaktadır.

Üçüncü bölümde ise tezin özgün kısımlarından ilki yer almakta ve $SE(2)$ Özel Öklid uzayı üzerindeki sapan vektör alanı normalizörden olan lineer kontrol sisteminin gözlenebilirliği incelenmektedir. Bu amaçla, Genel Kontrol Sistemleri ve gözlenebilirlik problemi verilerek, V. Ayala ve A. Kara’nın Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirlik karakterizasyonu incelenmiştir. Daha sonra bu karakterizasyonu kullanarak durum uzayı $SE(2)$ özel Öklid uzayı ve sapan vektör alanı normalizörden olan lineer kontrol sisteminin h fonksiyonunun homomorfizma olmama durumundaki gözlenebilirliği incelenmiş olup, bu sistem için gözlenebilirliği garanti eden ve homomorfizma olmayan bir çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonunun var olduğu gösterilmiştir. Bunun dışında h fonksiyonunun homomorfizma olması durumunda ise bu fonksiyon için orijinal bir $*$ özelliği tanımlanarak sistemin yerel gözlenebilir olmasının sistemin genel gözlenebilir olması için yeter şart olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde de tezin özgün sonuçları olup, yeni bir kontrol sistemi olan konik sistemler, [2], üzerinde ilk kez gözlenebilirlik problemi çalışılmış ve gözlenebilirlik karakterizasyonu elde edilmiştir. Bu amaçla, birim elemandan ayırt edilemeyen noktaların kümesi bulunmuş ve geometrik-topolojik yapısı incelenerek bir Lie grubu olduğu ispatlanmıştır. Bu ayırt edilemeyen noktaların kümesi ve sabit noktaların kümesi yardımıyla gözlenebilirlik karakterizasyonu elde edilmiş ve ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lie grubu, Lie cebiri, Gözlenebilirlik, Yerel gözlenebilirlik, Lineer kontrol sistemi, Konik kontrol sistemi.



OBSERVABILITY PROBLEM ON LIE GROUPS AND SOME APPLICATIONS

Hasan Halit TALİ

Department of Mathematics

Phd. Thesis

Thesis Advisor: Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN

This thesis titled “Observability Problem on Lie Groups and Some Applications” consists of four chapters.

In the first chapter, literature review, the purpose of the thesis and the hypothesis are given.

In the second chapter, under the title of Introductory Information, basic information is given.

In the third chapter in which there exists the first original part of this thesis, observability of linear control system on special Euclidean space $SE(2)$ with the drift vector field from normalizer has been studied. For this aim, by giving general control systems and observability problem, observability characterization of linear control systems on Lie groups by V. Ayala and A. Kara has been considered. Then, using that characterization, observability of linear control system on special Euclidean space $SE(2)$ with the drift vector field from normalizer has been studied when h is not a homomorphism and for that system existence of an output-observability function which is not a homomorphism and which guaranties observability is found. Moreover, by defining an original $*$ property, that the local observability implies global observability when h is a homomorphism, has been proved.

In the fourth chapter in which there also exists the original part of the thesis, observability problem on conic control systems which is a new control system, [2], has been studied, and observability characterization has been found. For this aim, set of indistinguishable points from neutral element is found and by looking its geometric-topologic aspects it has been proved that it is a Lie group. By that set of indistinguishable points and the set of fix points observability characterization has been found and proved.

Key Words: Lie Group, Lie Algebra, Observability, Local Observability, Linear Control System, Conic Control System.



1.1 Literatür Özeti

Bu tezde Matematiksel Kontrol Sistem Teorinin klasik temel iki probleminden biri olan gözlenebilirlik problemi Lie grupları üzerinde çalışılmıştır. Bunun için Lie grupları, Lie cebirleri, Topoloji ve Diferansiyel Geometri kullanılmıştır. Gözlenebilirlik problemi, çıkış uzayındaki görüntüye sadece diferansiyellenebilir bir fonksiyon ile bakarak sistemin tüm noktalarının ayırt edilebilmesi problemidir. Literatürde R^n ve Lie grupları için yerel ve genel gözlenebilirlik karakterizasyonları yapılmıştır. Bu tezde ise, Lie grupları üzerinde farklı bir bakış açısıyla bir gözlenebilirlik karakterizasyonu oluşturulabilir mi ya da incelenmemiş bir sistem üzerinde böyle bir karakterizasyon yapılabilir mi diye yola çıkılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı Matematiksel Kontrol Sistem Teoriye katkıda bulunmaktır. V. Ayala ve A. Kara'nın Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği hakkındaki gözlenebilirlik karakterizasyonunda, sistemin gözlenebilir olması için diferansiyellenebilir olan sistemin h çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonunun homomorfizma ve sistemin de yerel gözlenebilir olma şartı vardır. Bu tezde ise h fonksiyonunun homomorfizma olmama durumunda da sistemin ayırt edilemeyen noktalarının nasıl belirlenebileceği, sistemin gözlenebilir olması için yerel gözlenebilir olmasının yeterli olup olmadığı, eğer yeterli ise, hangi şartlar altında yeterli olduğu incelenmiştir. Ayrıca, incelenmemiş bir sistem olan konik sistemler üzerinde de gözlenebilirlik karakterizasyonu araştırılmıştır.

1.3 Hipotez

Bu tezde, sistemin çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonu olan diferansiyellenebilir h fonksiyonunun homomorfizma olmaması durumunda sistemin durum uzayının birim elemanı olan e den ayırt edilemeyen noktaların kümesi olan I kümesi belirlenip sistemin gözlenebilirliği hakkında yorum yapılmıştır. Ayrıca, h çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonunun homomorfizma olması durumunda da h fonksiyonu için bir $*$ özelliği tanımlanıp sistemin gözlenebilir olması için yerel gözlenebilir olmasının yeterli olduğu kanısına varılmıştır. Son olarak, konik kontrol sistemleri için sistemin durum uzayının birim elemanı olan e den ayırt edilemeyen noktaların kümesi belirlenip gözlenebilirlik karakterizasyonu oluşturulmuştur.



BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1 Manifold

Tanım 2.1.1 Herbir noktası R^n 'nin açık bir alt kümesine homeomorfik olacak şekilde bir komşuluğa sahip bir M Hausdorff topolojik uzayına n -boyutlu bir yerel Öklid uzayı denir.

Eğer $\varphi; U \subset M$ açık kümesinden R^n 'nin açık bir alt kümesine homeomorfizma ise φ 'ye bir koordinat tasvir ve (U, φ) çiftine de bir koordinat sistemi denir, [1].

Tanım 2.1.2 M , n -boyutlu yerel Öklid uzayı olmak üzere, $\mathfrak{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | U_\alpha \subset M \text{ açık bağlantılı alt kümesi}\}$ topluluğu aşağıdaki üç özelliği sağlıyor ise, $(M, \mathfrak{F})$ ikilisine C^k sınıfından n -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold denir :

- a) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$
- b) $\forall \alpha, \beta$ için $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \in C^k$ ($\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^k$)
- c) $\mathfrak{F}$ topluluğu maksimaldir. Yani; eğer (U, φ) bir koordinat sistemi ve $\forall \alpha \in A$ için, $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ve $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ise, $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$ dir, [1].

Tanım 2.1.3 R^n yerel Öklid uzayının bir p noktasında bileşenleri, $v_1, \dots, v_n$ olan v vektörü diferansiyellenebilir fonksiyonlar üzerinde bir operatördür. Özel olarak, eğer f , p 'nin bir komşuluğunda diferansiyellenebilir ise, $v(f)$ reel sayısına; f 'nin p noktasındaki v vektörü yönündeki yönlü türevi denir ve

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} \Big|_p + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial r_n} \Big|_p$$

ile gösterilir. Yönlü türev aşağıdaki özellikleri sağlar :

- a) $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$,
- b) $v(f \cdot g)(p) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

f ve g fonksiyonları, p noktasının komşuluğunda diferansiyellenebilir ve $\lambda \in R$ dir, [1].

Tanım 2.1.4 $\psi: M \rightarrow N$ fonksiyonu M manifoldundan N manifolduna C^∞ sınıfından bir fonksiyon olsun.

- a) Eğer $\forall m \in M$ için $d\psi_m$ tekil değilse (non-singular), o taktirde ψ' ye bir immersiyon (immersion) denir.
- b) Eğer ψ bire-bir bir immersiyon (immersion) ise, (M, ψ) çiftine N 'nin bir alt manifoldu (submanifold) denir.
- c) Eğer ψ bire-bir bir immersiyon ise, ψ' ye bir gömme (imbedding) denir.
- d) Eğer ψ bire-bir, örten ve $\psi^{-1} \in C^\infty$ ise, ψ' ye bir difeomorfizma denir.

Teorem 2.1.5 Ters Fonksiyon Teoremi (Inverse Function Theorem)

$U \subset R^d$ açık ve $f: U \rightarrow R^d \in C^\infty$ olsun. Eğer $\left\{ \frac{\partial r_i \circ f}{\partial r_j} \right\}$, $i, j = 1, 2, \dots, d$ Jakobiyeen matrisi $r_0 \in U$ da tekil değilse, $r_0 \in V \subset U$ olacak şekilde bir V açık kümesi vardır öyle ki, $f|_V: V \rightarrow f(V)$ bire-bir örten ve $(f|_V)^{-1}$ dir, [1].

Teorem 2.1.6 Kapalı Fonksiyon Teoremi (Implicit Function Theorem)

$U \subset R^{c-d} \times R^d$ açık ve $f: U \rightarrow R^d$, C^∞ olsun. $R^{c-d} \times R^d$ üzerindeki kanonik sistem $(r_1, r_2, \dots, r_{c-d}, s_1, s_2, \dots, s_d)$ şeklindedir. $(r_0, s_0) \in U$ noktasında $f(r_0, s_0) = 0$ ve $\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \Big|_{(r_0, s_0)} \right\}$, $i, j = 1, 2, \dots, d$ matrisinin tekil olmadığı kabul edilsin. $V \times W \subset U$ olacak şekilde R^{c-d} de r_0 'ın açık bir V komşuluğu ve R^d de s_0 'ın açık bir W komşuluğu ve bir $g: V \rightarrow W \in C^\infty$ dönüşümü vardır öyle ki,

$$\forall (p, q) \in V \times W \text{ için } f(p, q) = 0 \Leftrightarrow q = g(p) \text{ dir, [1].}$$

Tanım 2.1.7 M , $\mathfrak{F}$ diferansiyellenebilir yapısına sahip C^∞ sınıfından bir manifold olsun.

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

ve

$$T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

sırasıyla tanjant demeti ve kotanjant demeti olarak adlandırılır.

$$v \in T_p M, \pi: T(M) \rightarrow M, \pi(v) = p$$

$$\tau \in T_p^* M, \pi^*: T^*(M) \rightarrow M, \pi^*(\tau) = p$$

dönüşümleri doğal iz düşümleridir.

Eğer M ve N diferansiyellenebilir birer manifold olmak üzere $\psi: M \rightarrow N$ fonksiyonu C^∞ sınıfından bir fonksiyon ise, ψ 'nin diferansiyeli tanjant demetlerinin bir fonksiyonunu tanımlar. Yani;

$$d\psi: T(M) \rightarrow T(N),$$

$$v \in M_m \text{ için } d\psi(m, n) = d\psi_m(v) \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.8 n -boyutlu bir V vektör uzayından reel sayılara bir dönüşüme bir 1-form denir. 1-formlar n -boyutlu bir V^* vektör uzayı oluşturur ki bu orijinal V vektör uzayının dual uzayı olarak adlandırılır. Yani 1-formlar vektörlerin duali olan nesnelerdir. α , 1-formunun bir v vektöründeki değeri $\alpha(v)$ veya $\alpha.v$ olarak gösterilir.

Ayrıca, $a, b \in R$ ve $u, v \in V$ olmak üzere, α lineer olduğundan

$$\alpha.(au + bv) = a\alpha.u + b\alpha.v \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.9 Vektör alanlarından reel sayılara

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$$

şeklindeki lineer dönüşüme α 1- formunun diferansiyel formu denir.

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

bir vektör alanı olmak üzere,

$$\alpha.v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.10 z, M' de bir skaler fonksiyon olmak üzere,

$$dz = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i$$

z 'nin diferansiyelidir. Bu diferansiyel, formun özel bir çeşididir ve bir skalerin diferansiyeline bir tam diferansiyel form denir.

Teorem 2.1.11 Eğer

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$$

bir tam diferansiyel form ise;

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

dir.

Tanım 2.1.12 M manifoldu üzerindeki bir diferansiyellenebilir w 2-formu; $x \in M$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $x \rightarrow w_x$ dönüşümüdür.

a) $w_x: T_x M \times T_x M \rightarrow R$, bilineer ve ters simetrik bir dönüşümdür.

b) $x \rightarrow w_x$ dönüşümü C^∞ dur, [2].

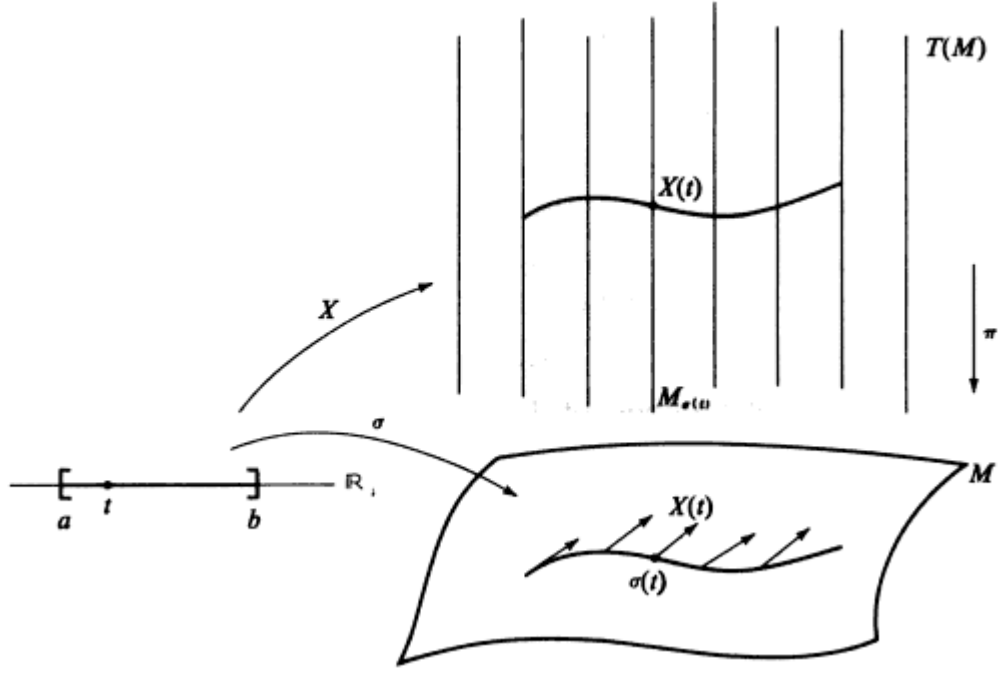
Tanım 2.1.13 M manifoldu üzerindeki bir α 1-formunun dış türevi $d\alpha$ bir 2-formdur ve

$$d\alpha_x(X_1(x), X_2(x)) = X_1(\alpha(X_2)) - X_2(\alpha(X_1)) + \alpha([X, X_1]) \text{ dir, [2].}$$

Tanım 2.1.14 Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ açık aralığından M 'ye bir $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ C^∞ dönüşümüne, M 'de düzgün bir eğri denir. σ 'nın tanjant vektörü ise, $\dot{\sigma}(t) = d\sigma\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) \in M_{\sigma(t)}$ şeklinde tanımlanır, [1].

Tanım 2.1.15 Bir $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ eğrisini $\pi \circ X = \sigma$ olacak şekilde $T(M)$ teğet demetine taşıyan $X: [a, b] \rightarrow T(M)$ sürekli fonksiyonuna σ eğrisi boyunca bir vektör alanı denir, [1].

$$\pi \circ X = \sigma$$



Şekil 2.1 σ eğrisi boyuncaki X vektör alanı, [3]

Önerme 2.1.16 X, M' 'de bir vektör alanı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir :

- a) $X \in C^\infty$, X diferansiyellenebilirdir.
- b) Eğer $(U, x_1, \dots, x_n), M'$ 'de bir koordinat sistemi ve $\{a_i\}$ kümesi de

$$X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

X 'in U 'ya kısıtlanması ile tanımlanmış U üzerindeki fonksiyonların bir topluluğu ise, $a_i \in C^\infty(U)$ dur.

- c) V, M' 'de açık ve $f \in C^\infty(V)$ ise, $X(f) \in C^\infty(V)$ dir, [1].

Tanım 2.1.17 X ve Y, M manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanları olsun. $[X, Y]$ vektör alanına X ve Y 'nin Lie parantezi denir ve

$f \in C^\infty, p \in M$ için, $[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$ şeklinde tanımlanır, [1].

Tanım 2.1.18 M ve N birer manifold olmak üzere, eğer $\varphi(p)$ de diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu

$$\begin{array}{ccc}
U \subset M & \xrightarrow{f} & N \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \theta \\
\varphi(U) & \xrightarrow{\theta \circ f \circ \varphi^{-1}} & \theta(V)
\end{array}$$

diyagramı ile, (U, φ) ve $f(p)$ için, (V, θ) koordinat sistemleri mevcut ise, $f: M \rightarrow N$ fonksiyonuna $p \in M$ noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.1.19 M ve N birer manifold ve $f: M \rightarrow N$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, f 'nin türevi ;

$df: TM \rightarrow TN$ dir. Burada,

$\forall X \in TM$ ve her $g \in C^\infty(N)$ için $df(X)(g) = X(g \circ f)$ tasviri ile tanımlıdır, [1].

Tanım 2.1.20 X , M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı olsun. Eğer M manifoldundaki bir σ düzgün eğrisinin tanım aralığının her bir t elemanı için $\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$ ise, M manifoldundaki σ düzgün eğrisine X 'in bir integral eğrisi denir, [1].

2.2 Lie Grupları

Tezdeki durum uzayı olarak kullanılan hem manifold ve hem de grup yapısına sahip olan Lie grubu hakkındaki temel tanım ve kavramlar bu kısımda verilmektedir, [1], [3], [4], [5].

Tanım 2.2.1 G grup yapısına sahip diferansiyellenebilir bir manifold ve buna ek olarak

$$\begin{aligned}
G \times G &\rightarrow G \\
(\sigma, \tau) &\mapsto \sigma\tau^{-1}
\end{aligned}$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise, G ye bir Lie grubu denir.

Tanım 2.2.2 G bir Lie grubu ve $\sigma \in G$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
l_\sigma: G &\rightarrow G \\
l_\sigma(\tau) &= \sigma\tau
\end{aligned}$$

dönüşümü G 'nin bir difeomorfizmasıdır ve bu dönüşüme σ 'nın sol ötelemesi denir.

l_σ nın türevi ise,

$dl_\sigma: TG \rightarrow TG$ şeklinde tanımlıdır ve

$dl_\sigma(T_\tau G) \subset T_{\sigma\tau} G$ dir.

Tanım 2.2.3 X bir vektör alanı olsun.

$\forall \sigma \in G$ için $X \circ l_\sigma = dl_\sigma \circ X$ ise, X vektör alanına G' 'de sol invaryanttır denir.

Teorem 2.2.4 G bir Lie grubu ve g de G' 'nin sol invaryant vektör alanlarının kümesi olsun. Bu taktirde, g bir reel vektör uzayıdır ve

$$\alpha: g \rightarrow T_e G$$

$$\alpha(X) = X_e$$

şeklinde tanımlı α dönüşümü bir izomorfizmadır. Buradan da,

$$\dim g = \dim T_e G = \dim G \text{ dir, [1].}$$

İspat: g 'nin G 'nin sol invaryant vektör alanlarının kümesi olarak g bir reel vektör uzayıdır. $X, Y \in g$ ve $m, n \in R$ için

$$\alpha(mX + nY) = (mX + nY)_e = mX(e) + nY(e) = m\alpha(X) + n\alpha(Y) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, α lineerdir.

$\forall \sigma \in G$ için $\alpha(X) = \alpha(Y)$ olsun.

$$\begin{aligned} X(\sigma) &= (X \circ l_\sigma)(e) = (dl_\sigma \circ X)(e) = dl_\sigma(X(e)) \\ &= dl_\sigma(Y(e)) = (dl_\sigma \circ Y)(e) = (Y \circ l_\sigma)(e) = Y(\sigma) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $X = Y$ ve $\alpha; 1 - 1$ elde edilir. Ayrıca,

$\forall \sigma \in G$ ve $X \in T_e G$ için, $X(\sigma) = dl_\sigma(X)$ ise, α örtendir. Bundan hareketle,

$$\alpha(X) = X \text{ dir ve } X \text{ sol invaryanttır.}$$

$\forall \sigma, \tau \in G$ için,

$$(X \circ l_\sigma)(\tau) = X(\sigma\tau) = dl_{\sigma\tau}(X) = dl_\sigma dl_\tau(X) = dl_\sigma(X(\tau))$$

dir. Buradan da,

$$g \cong T_e G \text{ dir,}$$

ve dolayısıyla,

$$\dim g = \dim T_e G = \dim G \text{ elde edilir.}$$

Teorem 2.2.5 X , M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı olsun.

Her bir $m \in M$ için, aşağıdaki özelliklere sahip $a(m), b(m) \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$ ve $\gamma_m: (a(m), b(m)) \rightarrow M$ düzgün eğrisi vardır;

a) $0 \in (a(m), b(m))$ ve $\gamma_m(0) = m$,

b) γ_m , X 'in M manifoldu üzerindeki m noktasındaki bir integral eğrisi ve

c) Eğer $\mu: (c, d) \rightarrow M$, a) ve b) koşullarını sağlayan düzgün bir eğri olmak üzere, $(c, d) \subset (a(m), b(m))$ ve $\mu = \gamma_m|_{(c, d)}$ dir, [1].

Teorem 2.2.6 $\forall t \in R$ için, X vektör alanının indirgediği ve tanım bölgesi

$D_t = \{m \in M: t \in (a(m), b(m))\}$ olan bir X_t dönüşümü

$X_t(m) = \gamma_m(t)$ şeklinde tanımlanmak üzere;

a) Her bir $m \in M$ için, $(t, p) \rightarrow X_t(p)$ dönüşümü tanımlı ve $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V \rightarrow M$ tanımlı ve C^∞ sınıfından olacak şekilde m 'nin bir açık V komşuluğu vardır ve $\varepsilon > 0$ dir.

b) Her t için D_t açıktır.

c) $\bigcup_{t>0} D_t = M$ dir.

d) $X_t: D_t \rightarrow D_{-t}$ tersi X_{-t} bir difeomorfizmadır, [1].

Teorem 2.2.7 Eğer $\forall t$ için, $D_t = M$ ise, M üzerindeki düzgün bir X vektör alanı tamdır denir. Yani, $\forall m \in M$ için, γ_m , X 'in M manifoldu üzerindeki m noktasındaki integral eğrisinin tanım bölgesi $(-\infty, \infty)$ dur, [1].

Tanım 2.2.8 Eğer X vektör alanı tam ise, X_t dönüşümleri reel sayılar tarafından parametrize edilmiş M 'nin dönüşümlerinin bir grubudur ve bu X 'in 1-parametrelili dönüşüm grubu olarak adlandırılır. Eğer X vektör alanı tam değil ise, X_t 'ler t 'ye bağlı bölgelerinde bir grup değildirler.

Tanım 2.2.9 $\varphi: M \rightarrow N, C^\infty$ olsun. Eğer

$$d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$$

ise, M üzerindeki düzgün X vektör alanı ve N üzerindeki düzgün Y vektör alanı φ – bağlantılıdır denir.

Önerme 2.2.10 $\varphi: M \rightarrow N, C^\infty$ olsun. X ve X_1 , M üzerinde ve Y ve Y_1 , N üzerinde düzgün vektör alanları olmak üzere, eğer X ile Y ve X_1 ile Y_1 φ –bağılantılı ise, $[X, X_1]$ ile $[Y, Y_1]$ de φ –bağılantılıdır.

İspat: İlk olarak,

$$d\varphi \circ [X, X_1] = [Y, Y_1] \circ \varphi$$

olduğu ve ardından

$m \in M$ ve $f \in C^\infty(N)$ olmak üzere,

$$d\varphi([X, X_1]_m)(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} d\varphi([X, X_1]_m)(f) &= [X, X_1]_m(f \circ \varphi) = X_m(X_1(f \circ \varphi)) - X_1|_m(X(f \circ \varphi)) \\ &= X_m(d\varphi \circ X_1)(f) - X_1|_m((d\varphi \circ X)(f)) = X_m(Y_1(f) \circ \varphi) - X_1|_m(Y(f) \circ \varphi) \\ &= d\varphi(X_m)Y_1(f) - d\varphi(X_1|_m)(Y(f)) = Y_{\varphi(m)}(Y_1(f)) - Y_1|_{\varphi(m)}(Y(f)) \\ &= [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f) \text{ dir.} \end{aligned}$$

2.3 Lie Cebirleri

Bu kısımda, Lie gruplarının Lie cebirleri hakkında temel bilgiler verilmektedir. Lie grupları ilişik oldukları vektör uzayları olan Lie cebirlerindeki özellikleri yansıtır. Lie cebirlerinin birden fazla Lie grupları olabilir. Ancak, her bir Lie grubunun tek bir Lie cebiri vardır.

Tanım 2.3.1 g, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$g \times g \rightarrow g$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

şeklindeki bir bilineer dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, g ye bir Lie cebiri denir;

a) $[X, Y] = -[Y, X]$

ters simetri özelliği

b) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

Jakobi özelliği, [6].

Tanım 2.3.2 G bir Lie grubu ve g' de onun Lie cebiri olsun. g Lie cebiri; birimdeki teğet uzayı $T_e G$ ve aynı zamanda G üzerindeki bütün sol invaryant vektör alanlarının kümesine izomorfiktir, [1].

2.4 Homomorfizmalar

Tanım 2.4.1 Eğer $\varphi: C^\infty$ sınıfından ve soyut grupların bir grup homomorfizması ise, $\varphi: G \rightarrow H$ ye bir Lie grubu homomorfizması denir.

Eğer bunlara ek olarak, φ biyektif ise, φ ye bir Lie grup izomorfizması denir.

Tanım 2.4.2 g ve h Lie cebirleri olsun. Eğer ψ lineer ve her X, Y için,

$$\psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$$

ise, $\psi: g \rightarrow h$ dönüşümü Lie cebir homomorfizmasıdır denir.

Eğer bunlara ek olarak, ψ , 1-1 ve örten ise, ψ bir Lie cebir izomorfizmasıdır denir.

Teorem 2.4.3 G ile H , Lie cebirleri sırasıyla g ile h olan birer Lie grubu ve $\varphi: G \rightarrow H$ bir Lie grubu homomorfizması olsun. O takdirde,

a) $\forall X \in g$ için, X ve $d\varphi(X)$, φ -bağlantılıdır ve

b) $d\varphi: g \rightarrow h$ bir Lie cebiri homomorfizmasıdır, [1].

İspat: **a)** $\tilde{X} = d\varphi(X)$ olsun. X ile $\tilde{X}$ 'nin φ -bağlantılı olduğu aşağıda gösterilmektedir.

φ bir homomorfizma olduğundan;

$$l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi(\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau) = \varphi(\sigma\tau) = \varphi \circ (\sigma\tau) = \varphi \circ l_\sigma(\tau)$$

$$\Rightarrow l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi = \varphi \circ l_\sigma$$

$$\tilde{X} = l_{\varphi(\sigma)}(e) = dl_{\tau(\sigma)} \circ \tilde{X}(e) = dl_{\tau(\sigma)} d\varphi(X(e)) = d(l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)X(e)$$

$$= d(\varphi \circ l_\sigma)X(e) = d\varphi \circ dl_\sigma X(e) = d\varphi \circ (X \circ l_\sigma(e)) = d\varphi \circ (X \circ \sigma(e))$$

$$= d\varphi \circ (X \circ \sigma) = d\varphi(X(\sigma))$$

$$\Rightarrow \tilde{X} \circ \varphi(\sigma) = d\varphi \circ X(\sigma) \Rightarrow \tilde{X} \circ \varphi = d\varphi \circ X$$

$$\Rightarrow X \text{ ile } \tilde{X} \text{ } \varphi\text{-bağlantılıdır.}$$

b) $\tilde{X} = d\varphi(X)$ ve $\tilde{Y} = d\varphi(Y)$ olsun.

a) şikkından X ile $\tilde{X}$ ve Y ile $\tilde{Y}$ φ -bağlantılıdır.

$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ 'nin φ -bağlantılı olduğu aşağıda gösterilmektedir.

$[X, Y]$ ile $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ φ – bağlantılıdır.

$$\Rightarrow [\tilde{X}, \tilde{Y}] \circ \varphi(e_G) = d\varphi([X, Y](e_G))$$

$$\Rightarrow [\tilde{X}, \tilde{Y}](e_H) = (d\varphi[X, Y])(e_H)$$

$$\Rightarrow [\tilde{X}, \tilde{Y}] = d\varphi[X, Y] = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \text{ dir.}$$

2.5 Üstel Tasvir

Tanım 2.5.1. G bir Lie grubu olmak üzere, bir $\varphi: R \rightarrow G$ homomorfizmasına, G 'nin bir 1-parametrelili alt grubu denir, [1].

Tanım 2.5.2 G bir Lie grubu, g de onun bir Lie cebiri ve $X \in g$ olsun.

$$\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X$$

dönüşümüne R 'nin Lie cebirinden g 'ye bir homomorfizma denir, [1].

Tanım 2.5.3 Reel doğru basit bağlantılı olduğundan,

$$d\exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X$$

olacak şekilde G 'nin

$$\exp_X: R \rightarrow G$$

1-parametrelili tek bir alt grubu vardır. Başka bir ifade ile;

$$t \mapsto \exp_X(t)$$

dönüşümüne, sıfır noktasındaki teğeti $X(e)$ olan G nin 1-parametrelili tek bir alt grubudur denir, [1].

Tanım 2.5.4 G bir Lie grubu, g de onun bir Lie cebiri olsun.

$\exp: g \rightarrow G$ şeklindeki dönüşüme üstel tasvir denir ve

$$\exp(X) = \exp_X(1)$$

şeklinde tanımlanır, [1].

Teorem 2.5.5 G bir Lie grubu, g de G 'nin bir Lie cebiri ve $X \in g$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki özellikler sağlanır :

$$\text{a) } \exp(tX) = \exp_X(t), \forall t \in R$$

- b) $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp(t_1X))(\exp(t_2X)), \forall t_1, t_2 \in R$
- c) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1} \forall t \in R$
- d) $\exp: g \rightarrow G$ dönüşümü C^∞ sınıfındandır ve $d\exp: g_0 \rightarrow G_e$ birim tasvirdir. Ayrıca, $\exp, g$ deki 0'ın bir komşuluğundan G deki e 'nin bir komşuluğuna bir difeomorfizma verir.
- e) $l_\sigma \circ \exp_X, 0$ da σ değerini alan X 'in tek integral eğrisidir. Bunun sonucunda sol invariant vektör alanları daima tamdır, [1].

Teorem 2.5.6 $\varphi: H \rightarrow G$ dönüşümü bir homomorfizma olsun.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ h & \xrightarrow{d\varphi} & g \end{array}$$

diagramı değişmelidir, [3].

İspat: $X \in h$ olsun. O halde, sıfırdaki teğeti $d\varphi(X(e))$ olan $t \mapsto \varphi(\exp(tX))$ dönüşümü G 'de düzgün bir eğridir. φ 'nin bir homomorfizma olması nedeniyle bu dönüşüm aynı zamanda G 'nin 1-parametrelili bir alt grubudur. Fakat $t \mapsto \varphi(\exp(d\varphi(X)))$ dönüşümü sıfırdaki teğeti $(d\varphi(X))(e)$ olan G 'nin tek 1-parametrelili alt grubudur. Bu yüzden;

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X))) \text{ olur.}$$

Eğer $t = 1$ seçilirse,

$$\varphi(\exp(X)) = \exp(d\varphi(X)) \Rightarrow \varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi \text{ eşitliği elde edilir, [1].}$$

2.6 Adjoint Gösterilim

Tanım 2.6.1 M bir diferansiyellenebilir manifold ve G de bir Lie grubu olsun.

$$\mu: G \times M \rightarrow M$$

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m)) \quad , \quad \mu(e, m) = m \quad \forall \sigma, \tau \in G, \forall m \in M$$

diferansiyellenebilir dönüşüme G nin M üzerindeki bir sol etkisi denir ve sabit bir $\sigma \in G$ için $m \mapsto \mu(\sigma, m)$ dönüşümü de M 'nin bir difeomorfizmasıdır ki bu dönüşüm μ_σ ile gösterilir. Buradan yola çıkarak,

$$\mu: M \times G \rightarrow M$$

$$\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau) \quad , \quad \mu(m, e) = m \quad \forall \sigma, \tau \in G, \forall m \in M$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne de G nin M üzerindeki bir sağ etkisi denir, [1].

Teorem 2.6.2 M bir diferansiyellenebilir manifold ve G de bir Lie grubu olmak üzere,

$\mu: G \times M \rightarrow M$ dönüşümü G nin M üzerinde bir sol etkisi ve $m_0 \in M$ bir sabit nokta

yani, $\mu_\sigma(m_0) = m_0, \forall \sigma \in G$ olsun. $\psi(\sigma) = d_{\mu_\sigma}|_{M_{m_0}}$ ile tanımlı . $\psi: G \rightarrow \text{Aut}(M_{m_0})$

dönüşümüne G 'nin bir gösterilimi denir, [1].

Tanım 2.6.3 G bir Lie grubu olmak üzere, bu Lie grubunun kendi üzerindeki sol etkisi ile meydana gelen iç otomorfizması;

$$a: G \times G \rightarrow G$$

$$a(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = a_\sigma(\tau)$$

şeklindedir ve birim elemanı bu sol etkinin sabit noktasıdır. Yani, $\forall \sigma \in G$ için $a_\sigma(e) = e$ dir. Bu durumda,

$$\sigma \mapsto da_\sigma|_e \quad T_e G \cong g$$

dönüşümü G Lie grubunun $\text{Aut}(g)$ içine bir gösterilimidir ve bu gösterilime adjoint gösterilim denir ve

$$Ad: G \rightarrow \text{Aut}(g)$$

şeklinde tanımlanır. Adjoint gösterilimin diferansiyeli $d(Ad) = ad$ dir.

Buradan da,

$$Ad(\sigma) = Ad_\sigma \quad ve \quad ad(X) = ad_X$$

şeklindedir.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & \text{Aut}(g) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ g & \xrightarrow{ad} & \text{End}(g) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a_\sigma} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ g & \xrightarrow{Ad_\sigma} & g \end{array}$$

diyagramları değişmelidir. Başka bir ifade ile

$$\exp(Ad_\sigma(X)) = \sigma(\exp X)\sigma^{-1} \text{ dir.}$$

Özel olarak, $G = Aut(V)$ alınırsa $B \in Aut(V)$ için diyagramlar

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{Ad} & Aut(EndV) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ End(V) & \xrightarrow{ad} & End(End(V)) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{a_B} & Aut(V) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ End(V) & \xrightarrow{Ad_B} & End(V) \end{array}$$

haline dönüşür. Ayrıca, $C \in End(V)$ için, $Ad_B(C) = B \circ C \circ B^{-1}$ dir, [1].

Önerme 2.6.4 G bir Lie grubu, g de G 'nin bir Lie cebiri ve $X, Y \in g$ olsun.

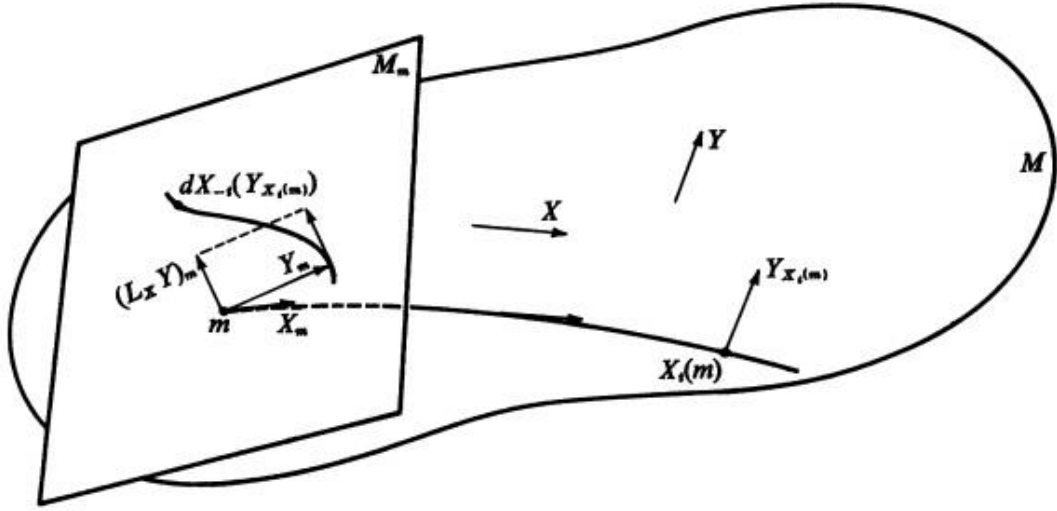
Bu taktirde, $ad_X Y = [X, Y]$ dir, [1].

2.7 Lie Türevi

Tanım 2.7.1 M bir diferansiyellenebilir manifold, $m \in M$ ve X, Y de M 'de diferansiyellenebilir vektör alanları olsun. Y 'nin X 'e göre m noktasındaki türevi, m noktasındaki M manifoldunun teğet uzayı $T_m M$ 'de bir vektör olup, bu vektöre Y 'nin X 'e göre m noktasındaki Lie türevi denilmektedir ve $(L_X Y)_m$ ile gösterilir.

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(m)}) - Y_m}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [dX_{-t}(Y_{X_t(m)})]$$

şeklinde tanımlanır, [1].



Şekil 2.2 Y 'nin X 'e göre m noktasındaki Lie türevi, [3]

Önerme 2.7.2 X , M üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı olmak üzere, M üzerindeki her bir diferansiyellenebilir Y vektör alanı için

$$L_X Y = [X, Y] \text{ dir, [1].}$$

LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ BAZI KONTROL SİSTEMLERİNİN GÖZLENEBİLİRLİKLERİ

3.1 Genel Kontrol sistemleri

Bu kısımda, sapan vektör alanı normalizörden alınarak oluşturulan bazı Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliğini sağlamak için karakterizasyonlar verilmektedir. Bu amaçla, öncelikle sapan vektör alanı normalizörden olan Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemleri ve gözlenebilirlik problemi için gerekli tanımlar verilmektedir, [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] ve [17].

Tanım 3.1.1 M diferansiyellenebilir bir manifold olsun ve $\mathcal{X}(M)$ 'de M 'nin açık alt kümelerinde tanımlı tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının bir ailesini göstereyin. $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, M manifoldunda yerel difeomorfizmaların 1-parametrelili bir grubunu tanımlar, yani vektör alanları aracılığıyla $\forall t \in R$ için,

$$X_t: \text{dom}(X_t) \subset M \rightarrow M$$

şeklinde bir yerel difeomorfizma elde edilir ve $\gamma^X(\cdot, x)$, x noktasından geçen X vektör alanının integral eğrisini belirleyen fonksiyon olmak üzere,

$$X_t(x) = \gamma^X(t, x)$$

dir ve aşağıdaki özellikler sağlanır :

a) $X_t \circ X_s = X_{t+s}$, $\forall t, s \in R$,

b) $(X_t)^{-1} = X_{-t}$, $\forall t \in R$ ($X_{-t}: X_t(\text{dom}(X_t)) \subset M \rightarrow \text{dom}(X_t) \subset M$) ve

c) $X_0 = Id$ dir, [7].

Tanım 3.1.2 M diferansiyellenebilir bir manifold ve D de $\mathcal{X}(M)$ nin bir alttopluluğu olmak üzere, $\Sigma = (M, D)$ şeklindeki bir ikiliye kontrol sistemi denir. Burada, M ye Σ 'nın durum uzayı ve D 'nin elemanlarına da sistemin stratejileri denir.

Tanım 3.1.3 Σ kontrol sistemi,

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r | X^j \in D, t_j \in R, r \in N\}$$

şeklinde bir sözde (pseudo) grubu tanımlar ve Σ tarafından M 'de x 'in yörüngesi, x de G_Σ 'nın etkisi ile verilir. Yani;

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi(x) | \varphi \in G_\Sigma\} \text{ dir.}$$

Tanım 3.1.4 Eğer bir $x \in M$ için $G_\Sigma(x) = M$ ise, Σ sistemine $x \in M$ noktasında geçişli bir sistem denir.

G_Σ sözde (pseudo) grubu ile M üzerinde tanımlı

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G_\Sigma(x)$$

" $\sim$ " bağıntısını göz önüne aldığımızda bu bir denklik bağıntısıdır. Özel olarak, eğer Σ sistemi geçişli bir sistem ise,

$$G_\Sigma(x) = M, \quad \forall x \in M \text{ dir.}$$

Tanım 3.1.5 Σ kontrol sistemi;

$$S_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r | X^j \in D, t_j \geq 0, r \in N\}$$

şeklinde sisteme ilişik sözde yarı (pseudo-semi) grubunu tanımlar. Burada, Σ 'nin ulaşılabilirlik kümesini içeren $x \in M$ 'nin pozitif yörüngesi;

$$S_\Sigma(x) = \{\varphi(x) | \varphi \in S_\Sigma\} \text{ şeklindedir.}$$

Genel olarak,

$$\forall x \in M \text{ için, } S_\Sigma(x) \subseteq G_\Sigma(x) \subseteq M \text{ dir.}$$

M üzerinde S_Σ ile tanımlı " $\sim$ " bağıntısı denklik bağıntısı değildir. Çünkü, $t > 0$ olduğunda $X_{-t}(x)$ 'in $S_\Sigma(x)$ 'e ait olması gerekmez. Başka bir ifade ile;

$X \in D \not\Rightarrow -X \in D$ dir.

Yani " $\sim$ " bağıntısı simetrik olmayabilir.

3.2 Gözlenebilirlik

Tanım 3.2.1 Gözlenebilirlik fonksiyonlu Σ kontrol sistemi $\Sigma=(M, D, h, N)$ şeklindedir.

Burada, M ve N diferansiyellenebilir iki manifold, $D \subset \chi(M)$ sistemin dinamiği ve $h: M \rightarrow N$ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

M' 'ye durum uzayı, N' ye çıkış-gözlenebilirlik uzayı ve h' ye Σ' 'nin çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonu denir.

Tanım 3.2.2 Σ bir kontrol sistemi olsun. $x, y \in M$ olmak üzere;

$$\forall \varphi \in S_{\Sigma} \text{ için, } h \circ \varphi(x) = h \circ \varphi(y)$$

ise, $x, y \in M$ noktalarına Σ 'nın ayırt edilemez noktaları denir.

$\tilde{x}$, $x \in M$ noktasının ayırt edilemez denklik sınıflarını göstermek üzere,

$$\tilde{x} = \{y \in M: \forall \varphi \in S_{\Sigma} \text{ için } h \circ \varphi(x) = h \circ \varphi(y)\} \text{ ile tanımlanır.}$$

Tanım 3.2.3 Σ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olsun.

a) $x \in M$ noktasında $\tilde{x} \cap U = \{x\}$

olacak şekilde x 'in bir U komşuluğu varsa, $x \in M$ noktasında Σ yerel gözlenebilirdir denir. Yani, x 'in U 'da ayırt edilemez hiç bir noktasının olmamasıdır. Eğer $\forall x \in M$ için bu durum geçerli ise, Σ yerel gözlenebilirdir denir.

b) $x \in M$ noktasında $\tilde{x} \cap M = \{x\}$ ise,

$x \in M$ noktasında Σ gözlenebilirdir denir. Yani, Σ 'nin $x \in M$ noktasında gözlenebilir olması için $h \circ S_{\Sigma}$ ailesinin M 'nin herhangi bir noktasını $x \in M$ noktasından ayırması demektir. Eğer $\forall x \in M$ için bu koşul sağlanıyorsa, Σ gözlenebilirdir denir.

3.3 $SE(2)$ Özel Öklid Uzayı Üzerindeki Çıkış-Gözlenebilirlik Fonksiyonlu, Sapan Vektör Alanı Normalizörden Olan Lineer Kontrol Sisteminin Gözlenebilirliği

Durum uzayı $M=SE(2)=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \middle| v_1, v_2, \theta \in R \right\}$ olmak üzere,

çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonlu $\Sigma=(M, D, h, N)$ kontrol sisteminin dinamiği aşağıdaki diferansiyel denklemler vasıtasıyla tanımlanır :

$$\dot{g} = X_g + \sum_{n=1}^3 u_n E_{n,g}$$

$$y = h(g), g \in SE(2)$$

$SE(2)$ 3-boyutlu Lie grubunun Lie cebiri;

$\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow SE(2)$, $\beta(0) = e$ şeklinde bir eğri olsun.

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1(t) & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ v_2(t) & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \in SE(2)$$

$$\beta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1(0) & \cos(\theta(0)) & -\sin(\theta(0)) \\ v_2(0) & \sin(\theta(0)) & \cos(\theta(0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{v}_1(0) & 0 & -\dot{\theta}(0) \\ \dot{v}_2(0) & \dot{\theta}(0) & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(SE(2)) = \left\{ A \in R^{3 \times 3} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 \\ a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3 \in R \right\} \text{ dır.}$$

Dolayısıyla,

$$L(SE(2)) = \text{geren} \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

şeklindedir. Burada,

$$[E_1, E_2] = E_1 E_2 - E_2 E_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$[E_2, E_3] = E_2 E_3 - E_3 E_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$$

ve

$$[E_3, E_1] = E_3 E_1 - E_1 E_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$

dir. Sistemin dinamiği;

$$D = \{X + uY : X \in \text{norm}_{\chi(SE(2))}(L(SE(2))), Y \in L(SE(2)), u \text{ kabul edilir kontrol}\}$$

ile belirlidir. Burada, u kontrollerinin kabul edilebilir kümesi;

$$U = \{u : [0, \infty) \rightarrow R\}$$

şeklinde tanımlı parçalı sabit reel değerli fonksiyonların kümesidir.

Ayrıca, $L(SE(2))$ 'nin normalizörü;

$$\begin{aligned} & \text{norm}_{\chi(SE(2))}(L(SE(2))) \\ &= \{X \in \chi(SE(2)) : ad(X)(Y) = [X, Y] \in L(SE(2)), \forall Y \in L(SE(2))\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$g, A \in SE(2) \text{ yani } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ve } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ a_2 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\text{O zaman } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi \\ a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

O halde, g'nin iç (inner) otomorfizması;

$$AgA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 + v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi - a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta \\ a_2 + v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi - a_1 \sin \theta - a_2 \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

olur.

θ' 'ya göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial(AgA^{-1})}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta & -\sin \theta & -\cos \theta \\ -a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$\theta = 0$ için,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -1 \\ -a_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -a_1 E_2 + a_2 E_1 + E_3 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla,

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = -v_1 E_2 + v_2 E_1 + E_3 \text{ bulunur.}$$

$\Sigma = (SE(2), X, h, R^2)$ kontrol sistemini

$$h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (v_2, \theta)$$

çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonu ile göz önüne alınsın.

Her $u \in U$ kabul edilebilir kontrolü için,

$$\dot{g} = X_g + \sum_{n=1}^3 u E_{n,g}$$

diferansiyel denkleminin $\gamma(0) = g$ başlangıç koşulu ile $\gamma(t)$ çözümü

$t \in R$ için, $\gamma(t) = X_t(\beta(t).g)$ şeklindedir.

Burada, $\beta(t): R \rightarrow SE(2)$ sürekli fonksiyonu;

$$\dot{\beta}(t) = (X_{-\beta(t)})_* \circ \sum_{n=1}^3 u E_n \circ X(\beta(t))$$

diferansiyel denklemini sağlayan $SE(2)$ üzerinde bir eğridir.

O halde, $\forall g_1, g_2 \in SE(2)$ noktalarının ayırt edilememesi

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow h(X_t(\beta(t).g_1)) = h(X_t(\beta(t).g_2)), \forall t \in R$$

şeklindedir.

Lemma 3.3.1 $\Sigma=(SE(2),X,h,R^2)$ kontrol sistemi olmak üzere h fonksiyonu homomorfizma özelliği taşımayan bir diferansiyellenebilir fonksiyondur.

İspat : Durum uzayından alınan herhangi iki eleman

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ a_2 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in SE(2) \text{ için,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ a_2 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 + a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta & \cos(\theta + \alpha) & -\sin(\theta + \alpha) \\ v_2 + a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta & \sin(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

olup,

$$h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 + a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta & \cos(\theta + \alpha) & -\sin(\theta + \alpha) \\ v_2 + a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta & \sin(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$= (v_2 + a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta, \theta + \alpha) \text{ dir.}$$

Diğer taraftan ise,

$$h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (v_2, \theta), \quad h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ a_2 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = (a_2, \alpha) \text{ olduğundan,}$$

$$h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ a_2 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = (v_2 + a_2, \theta + \alpha) \text{ dir.}$$

Buradan da, en azından $\theta = \frac{\pi}{2}$, $a_1 \neq a_2$ için

$$v_2 + a_2 \neq v_2 + a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, h bir homomorfizma değildir.

Lemma 3.3.2 $h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ v_2 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (v_2, \theta)$ ile tanımlı h çıkış-gözlenebilirlik

fonksiyonlu ve $L(SE(2))$ 'nin normalizöründen alınmış X sapan vektör uzaylı

$\Sigma=(SE(2),X,h,R^2)$ lineer kontrol sistemi hem yerel hem de genel gözlenebilirdir.

İspat : $\forall g \in SE(2)$ için, e birim eleman olmak üzere, e ve g noktalarının ayırt edilememesi için gerek ve yeter koşul;

$$h(X_t(\beta(t).e)) = h(X_t(\beta(t).g)), \forall t \in R$$

olduğundan birim elemandan ayırt edilemeyen noktalar kümesi;

$$\tilde{e} = I = \{g \in SE(2): v_1 = v_2 = \theta = 0\}$$

şeklinde elde edilir. Böylece sistem I 'nin sadece birim elemandan oluşmasından dolayı hem yerel hem de genel gözlenebilir olur.

Yukarıdaki Lemma, $L(SE(2))$ 'nin normalizöründen alınmış X sapan vektör uzaylı $\Sigma=(SE(2), X, h, R^2)$ lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliğini garanti eden, h çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonunun varlığını garanti eder. Bir anlamda varlık teoremidir.

- Eğer h bir homomorfizma ise, aşağıdaki algorithmadan gözlenemeyen durumlar hesaplanabilir.

Algoritma, [1] :

I 'nin Lie cebiri olan $L(I)$ 'yi bulmak için aşağıdaki algoritmayı göz önüne alacağız.

- 1) $Ker(h)$ 'nin hesaplanması,
- 2) K Lie alt cebiri için bir $\beta = \{Z^1, Z^2, \dots, Z^p\}$ tabanının seçilmesi
- 3) $\beta^\perp = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-p}\}$, β dik-dual (β -dual) tabanın bulunması,
- 4) $L(I)^\perp$ için $ad(X)(\beta^\perp)$ 'e ilişik tabanın bulunması,
 - $ad(X)(\beta^\perp) = \{ad^i(X)(w_j): 0 \leq i \leq k^*, 1 \leq j \leq n-p\}$
 - $ad^0(X) = Id$
 - $ad(X)(w) = L_X(w)$
 - $ad^i(X)(w) = ad^{i-1}(ad(X)(w)), i \geq 1$
 - $L_X(wY) = (L_X w)Y + w[X, Y]$
 - $L(I) = \overline{geren(ad(X)(\beta^\perp))}^\perp$

Teorem 3.3.3, [1] $\Sigma=(G, X, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi olsun.

Σ gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$

- a) $L(I) = 0$

$$b) \{g: X_t(g) = g, \forall t \in R\} = \text{Fix}(T) \cap \text{Ker}(h) = \{e\}.$$

Yukarıda verilmiş olan Lie grubu üzerindeki lineer kontrol sistemi karakterizasyonunda h bir Lie grubu homomorfizması olarak alınmıştır. Lemma 3.3.1'de homomorfizma olmadığı gösterilen h fonksiyonu için gözlenebilirlik Lemma 3.3.2'de yerel ve genel olarak denk elde edilmekte ve gösterilmektedir. Gözlenemeyen noktaların incelenmesi bakımından h 'ın homomorfizmaya dönüştüğü durum aşağıda incelenmektedir.

$\theta = 0 + 2k\pi$ olarak ele aldığımızda fonksiyonumuz homomorfizma olmaktadır. Şimdi ilk olarak $\text{Ker}(h)$ hesaplanırsa,

$$\text{Ker}(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : v_1 \in R \right\} \text{ dir.}$$

$\beta = \{E_1\}$ seçildiğinde,

$$\beta^\perp = \{w_1 = E_2^*, w_2 = E_3^*\} \text{ dir.}$$

iç otomorfizma bulunurken θ' 'ya göre türev alındığında,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3 \text{ dür.}$$

Buradan da,

$$[X, E_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$

$$[X, E_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_1$$

$$[X, E_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir.

$$\text{ad}^0(X) = \text{Id} \text{ olduğundan;}$$

$$\text{ad}^0(X)w_1 = \text{Id}(w_1) = w_1 = E_2^*$$

$$\text{ad}^0(X)w_2 = \text{Id}(w_2) = w_2 = E_3^* \text{ dir.}$$

$$\text{ad}(X)(w) = L_X(w) \text{ olduğundan;}$$

$L_X(wY) = (L_X w)Y + w[X, Y]$ için, $w_1 = E_2^*$ ve sırasıyla $Y = E_1, E_2, E_3$ seçersek,

$$L_X(E_2^* E_1) = (L_X E_2^*)E_1 + E_2^* [X, E_1] \text{ bulunur.}$$

Buradan;

$$0 = (L_X E_2^*)E_1 + 1$$

dir. Sonuç olarak;

$$(L_X E_2^*) = -E_1^* \text{ olur.}$$

$$L_X(E_2^* E_2) = (L_X E_2^*)E_2 + E_2^* [X, E_2] \text{ dir. Buradan } 0 = (L_X E_2^*)E_2^* + 0 \text{ elde edilir.}$$

$$0 \text{ halde } (L_X E_2^*) = 0, (L_X E_2^*) = E_1^* \text{ ya da } (L_X E_2^*) = E_3^* \text{ olur.}$$

$$L_X(E_2^* E_3) = (L_X E_2^*)E_3 + E_2^* [X, E_3] \text{ dir. Buradan } 0 = (L_X E_2^*)E_3 + 0 \text{ olur.}$$

$$\text{Sonuç olarak } (L_X E_2^*) = 0, (L_X E_2^*) = E_1^* \text{ ya da } (L_X E_2^*) = E_2^* \text{ olur.}$$

$L_X(wY) = (L_X w)Y + w[X, Y]$ için $w_2 = E_3^*$ ve sırasıyla $Y = E_1, E_2, E_3$ seçersek,

$$L_X(E_3^* E_1) = (L_X E_3^*)E_1 + E_3^* [X, E_1] \text{ dir. Buradan } 0 = (L_X E_3^*)E_1 + 0 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak,

$$(L_X E_3^*) = 0, (L_X E_3^*) = E_2^* \text{ ya da } (L_X E_3^*) = E_3^* \text{ olur.}$$

$$L_X(E_3^* E_2) = (L_X E_3^*)E_2 + E_3^* [X, E_2] \text{ dir. Buradan } 0 = (L_X E_3^*)E_2 + 0 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak,

$$(L_X E_3^*) = 0, (L_X E_3^*) = E_1^* \text{ ya da } (L_X E_3^*) = E_3^* \text{ olur.}$$

$$L_X(E_3^* E_3) = (L_X E_3^*)E_3 + E_3^* [X, E_3] \text{ dir.}$$

Buradan,

$$0 = (L_X E_3^*)E_3 + 0 \text{ olur. Sonuç olarak,}$$

$$(L_X E_3^*) = 0, (L_X E_3^*) = E_1^* \text{ ya da } (L_X E_3^*) = E_2^* \text{ olur. Dolayısıyla,}$$

$$\text{geren}(ad(X)(\beta^\perp)) = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*\} \quad \text{ve}$$

$$L(I) = \text{geren}(ad(X)(\beta^\perp))^\perp = 0 \text{ elde edilir.}$$

O halde, Σ yerel gözlenebilirdir.

Şimdi $\exp(tX)$ 'i hesaplayalım. Bu işlem için aşağıdaki eşitlik kullanılarak işlemler yapılmaktadır :

$$\exp(tX) = I + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots$$

$$tX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla,

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) \\ 0 & \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(2) \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 \cos t - v_2 \sin t & \cos t & -\sin t \\ v_1 \sin t + v_2 \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & \cos t & -\sin t \\ v_2 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\exp(tX) \cdot g = g \cdot \exp(tX) \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0 \quad \text{dır.}$$

Dolayısıyla,

$$Fix(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in R \right\}$$

elde edilir. O halde,

$$Ker(h) \cap Fix(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, Teorem 3.3.3' e göre, Σ genel gözlenebilirlik.

3.4 G Lie Grubu Üzerindeki Çıkış-Gözlenebilirlik Fonksiyonlu, Sapan Vektör Alanı Normalizörden Olan Lineer Kontrol Sistemlerinin Gözlenebilirliği

G , n -boyutlu bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olsun. Çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonlu $\Sigma=(G, D, h, V)$ lineer kontrol sistemini göz önüne alalım. Sistemin dinamiği aşağıdaki diferansiyel denklemlerle tanımlanır :

$$\dot{g} = X_g + \sum_{j=1}^n u Y_g^j$$

$$y = h(g), g \in G$$

Burada,

$$X \in norm_{\chi(G)}(L(G)) = \{X \in X(G) : ad(X)(Y) = [X, Y] \in L(G), \forall Y \in L(G)\}, [5], \text{ ve}$$

$$Y^1, Y^2, \dots, Y^n \in L(G) \text{ dir, [11], [12], [16], [17].}$$

Tanım 3.4.1 (* Özelliği) h diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, farklı iki x ve y elemanları için $h(x) = h(y)$ eşitliği ancak $y=x^{-1}$ için sağlanıyorsa h ; * özelliğini sağlıyordur denir.

- h fonksiyonu * özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun.

O zaman;

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow h(X_t(g_1)) = h(X_t(g_2)), \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow * \text{ özelliğinden } X_t(g_1) = (X_t(g_2))^{-1}, \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X_t(g_1)X_t(g_2) = X_t(g_2^{-1})X_t(g_2), \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X_t(g_1g_2) = X_t(g_2^{-1}g_2) = X_t(e) = e, \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g_1 g_2 \in \text{Ker} X_t, \forall t \geq 0$$

elde edilir.

Buradan yola çıkarak e' 'den ayırt edilemeyen noktaların kümesi olan I kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$I = \tilde{e} = \{g \in G \mid g \in \text{Ker} X_t, \forall t \geq 0\}$$

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2 \in I g_1^{-1}$$

Aşağıda, $*$ özelliğine sahip çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonlu Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin yerel ve genel gözlenebilirliği gösterilmektedir. [7]'den farkı sistemin çözümlerini taşıyan çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonu h 'nin bir homomorfizma olmamasıdır.

Teorem 3.4.2 h $*$ özelliğini sağlayan herhangi bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $\Sigma = (G, D, h, V)$ lineer kontrol sisteminin yerel gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $L(I) = 0$ olmasıdır.

İspat : ($\Rightarrow$) $L(I) \neq 0$ ve $X \in L(I)$ olsun. O zaman, $\exp(tX) \in I$ olduğundan dolayı, en az bir $g \in G$ için $\tilde{g} \cap U \neq \{g\}$ dir .

Bu yerel gözlenebilirlikle çelişir, dolayısıyla, $L(I) = 0$ dır.

($\Leftarrow$) $L(I) = 0$ ise, I , G nin bir ayrık Lie alt grubudur. Yani, her bir $g \in G$ için

$$\tilde{g} \cap U = \{g\}$$

olacak şekilde g 'nin bir U komşuluğu vardır ve bundan dolayı Σ yerel gözlenebilirdir.

Teorem 3.4.3 h , $*$ özelliğini sağlayan çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonlu $\Sigma = (G, D, h, V)$ lineer kontrol sistemi olmak üzere,

Σ' nın gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

a) $L(I) = 0$ ve

b) $\text{Fix}(T) = \{g \in G : X_t(g) = g, t \geq 0\}$ olmak üzere, $\text{Ker}(h) \cap \text{Fix}(T) = \{e\}$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Σ gözlenebilir olduğundan, Teorem 3.4.2 den dolayı, $L(I) = 0$ dir.

$g \in \text{Ker}(h) \cap \text{Fix}(T)$ olsun. O halde, $g \in \text{Fix}(T)$ dir. $\text{Fix}(T)$ 'nin tanımından dolayı,

$X_t(g) = g$ dir. Dolayısıyla, $g \in I$ dir. Σ gözlenebilir olduğundan dolayı, $I = \{e\}$ dir.

Buradan da, $g = e$ olur.

($\Leftarrow$) Karşıt olarak, $L(I) = 0$ olması, I 'nin $Ker(h)$ 'nin bir ayrık Lie alt grubu olduğunu gösterir. Burada, $g \in I$ alınır.

$$\psi: R \times G \rightarrow G$$

$$(t, g) \rightarrow \psi(t, g) = X_t(g)$$

bir tasvir olmak üzere, ψ 'nin $R \times \{g\}$ 'ye kısıtlanması olan $\psi|_{R \times \{g\}}$ sürekli tasviri için, $\psi|_{R \times \{g\}}$ 'nin tanım bölgesi bağlantılı olduğundan,

$$Im(\psi_g) = \{X_t(g) : t \in R\}$$

de bağlantılıdır. Ancak, X_0 , G 'nin özdeşlik tasviri ve I , T – invaryanttır. O zaman, $g \in Im(\psi_g) \subset I$ dir. I ayrık olduğundan, $\{g\} = Im(\psi_g)$ elde edilir. Buradan da, $g \in Fix(T)$ olduğu elde edilir. Böylece, $g \in Ker(h) \cap Fix(T)$ dir.

Sonuç olarak,

$$g = e \text{ ve } \Sigma \text{ gözlenebilirdir.}$$

Teorem 3.4.4 $\Sigma=(G, D, h, V)$ bir lineer kontrol sistemi ve $h, *$ özelliğini sağlayan bir homomorfizma olmak üzere, Σ 'nin yerel ve genel gözlenebilirliği denktir.

İspat: Genel gözlenebilirliğin yerel gözlenebilirliği gerektirdiği aşıkardır. Σ 'nin yerel gözlenebilir olduğunu kabul edilsin. Yani;

$$a \neq e \text{ ve } a \in Ker(h) \text{ olsun. Dolayısıyla, } L(I) = 0 \text{ dir.}$$

$$O \text{ halde } h(a) = h(e) = e \text{ dir.}$$

$$h * \text{ özelliğini sağladığından } a = e^{-1} = e \text{ dir. Buradan çelişki elde edilir.}$$

$$\text{Dolayısıyla, } Ker(h) = \{e\} \text{ dir.}$$

$$e \in Fix(T) \text{ olduğundan dolayı, } Ker(h) \cap Fix(T) = \{e\} \text{ dir.}$$

Teorem 3.4.3'e göre, Σ genel gözlenebilirdir.

Örnek 3.4.5

Matris gruplarından özel ortogonal Lie grubu olan $SO(3)$ rotasyon grubunu gözönüne alalım, [18] ve [19]. R^3 deki eksen rotasyonlarından birinin temsili olan

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in R \right\}$$

Lie grubunun Lie cebiri;

$$L(S) = \text{geren} \left\{ E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{dir.}$$

$$g, A \in S \text{ olmak üzere, } g = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Buradan, g 'nin iç otomorfizması;

$$AgA^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

α' ya göre türev alınırsa ve $\alpha = 0$ yazılırsa,

$$\left. \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

dır. Buradan, $X = E$ olarak alındığında,

$\Sigma = (S, X, h, R)$ lineer kontrol sistemi,

$$h \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha$$

çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonu ile göz önüne alınsın ve

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S \text{ olsun. Bu durumda,}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) & -\sin(\alpha + \theta) & 0 \\ \sin(\alpha + \theta) & \cos(\alpha + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) & -\sin(\alpha + \theta) & 0 \\ \sin(\alpha + \theta) & \cos(\alpha + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha + \theta)$$

$$h \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha, \quad h \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \theta$$

$$h \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha + \theta$$

dır. Dolayısıyla, h fonksiyonu bir homomorfizmadır.

Ayrıca, farklı iki x ve y elemanları için, $h(x) = h(y)$ eşitliği sağlanmadığından dolayı, $*$ özelliğine aykırı bir durum yoktur. Bundan dolayı, h fonksiyonu otomatik olarak $*$ özelliğine sahiptir.

$Ker(h)$ hesaplanırsa,

$$Ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\beta^\perp = \{E^*\}$$

$$geren(ad(X)(\beta^\perp)) = \{E^*\}$$

$L(I) = geren(ad(X)(\beta^\perp))^\perp = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\sum$ yerel gözlenebilirdir ve h , $*$ özelliğini sağladığından dolayı, Teorem 3.4.3'e göre, genel gözlenebilirdir.

KONİK SİSTEMLERİN GÖZLENEBİLİRLİĞİ**4.1 Genel Kontrol sistemleri**

Tezin bu bölümünde [20] de sunulmuş yeni bir sistemde henüz incelenmemiş olan gözlenebilirlik problemi incelenmektedir. Konik Sistemler yeni bir kontrol sistemi olup, üzerinde gözlenebilirlik problemi çalışılmamıştır. Dolayısıyla, öncelikle bu yapı verilerek çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonlu sistem oluşturulacaktır.

M ve N bir d_R uzaklık fonksiyonu indirgeyen bir Riemann metriği ile verilmiş n – boyutlu bağlantılı düzgün bir manifold olmak üzere, M üzerindeki düzgün vektör alanlarının reel vektör uzayı $\chi(M)$ 'nin sonlu boyutlu bir E alt uzayı göz önüne alınsın. E üzerinde ve karşılık gelen fonksiyon uzayları üzerinde birer topoloji olabilmesi için E , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımına sahip olsun, [21]. σ , E 'nin hiç bir öz alt uzayında kapsanmayan E içinde üretilen bir konveks koni olmak üzere, $\sigma \subset E$ alınsın. Böylece, norm ile E 'nin $\chi(M)$ vektör alanlarının uzayı içine olan kapsama tasviri düzgün bir tasvirdir. σ 'daki tüm vektör alanları ileri tam olsunlar. Ayrıca, σ Lie cebiri rank koşulunu sağlasın, yani; Γ , σ 'yı (veya E 'yi) içeren vektör alanlarının en küçük Lie cebiri olmak üzere, $\forall x \in M$ için, $\Gamma = T_x M$ olsun. Verilen bir $x \in M$ için, $E(x)$, $T_x M$ tanjant uzayının alt uzayıdır ve $\sigma(x) \in T_x M$ bir konveks konidir. σ 'nın yörünge eğrisi (trajectory) $\alpha'(t) \in \sigma(\alpha(t))$ olacak şekilde M içinde mutlak sürekli bir α eğrisidir. Eğer, $T > 0$ olmak üzere, $\alpha: [0, T] \rightarrow M$ bir yörünge eğrisi ise, o takdirde $\beta(t) = \alpha(Tt)$ ile tanımlı $\beta: [0, 1] \rightarrow M$ eğrisi $\beta'(T) = T\alpha'(Tt) \in \sigma(\beta(t))$ 'yi sağlar ve dolayısıyla, aynı zamanda, bir yörünge eğrisidir. ε , $\|\cdot\|_\infty$ ess sup-normu ile $u: [0, 1] \rightarrow M$ şeklindeki sınırlı ölçülebilir

fonksiyonların Banach uzayını gösterebilirsin. Burada, E üzerindeki norm iç çarpımdan gelmektedir. U , σ' 'da değer alan $u \in \varepsilon$ fonksiyonları ile oluşan konveks koni olsun. σ' 'nın E içinde üretilen bir konveks koni oluşu U 'nun ε içinde sup-norma göre boştan farklı bir içe sahip olduğunu gösterir. U 'nun elemanlarına σ' 'nın kontrol fonksiyonları denir. Genel bir $u: [0,1] \rightarrow \sigma$ kontrol fonksiyonu ve bir $x \in M$ başlangıç koşulu için, karşılık gelen $trj_x(u): [0,1] \rightarrow M$ yörünge eğrisi x' 'de başlayan $\dot{x} = u(t)x$ diferansiyel denkleminin çözümüdür.

$T(\sigma)$, σ' 'nin yörünge eğrilerinin kümesini, $T(\sigma, x)$, x' 'de başlayan yörünge eğrilerinin kümesini ve $T(\sigma, x, y)$ de x' 'de başlayan ve y' 'de biten yörünge eğrilerinin kümesini gösterebilirsin.

ϕ_t^u , u kontrolü ile tanımlı akış (flow) olmak üzere,

$\phi_t^u(x) = trj_x(u)(t)$ dir.

Burada, verilen bir başlangıç koşulunu karşılayan birinci dereceden diferansiyel denklemlerin tek çözümünün varlığını mümkün kılan diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden, ϕ_t^u M 'nin açık kümeleri arasında 1-1 bir fonksiyondur ve difeomorfizmadır.

4.2 Gözlenebilirlik

Çıkış-gözlenebilirlik fonksiyonlu Σ konik kontrol sistemi $\Sigma=(M, D, h, N)$ göz önüne alınsın. Burada, $D \subset \mathcal{X}(M)$ dinamik ve $h: M \rightarrow N$ bir yerel homomorfizmadır.

Tanım 4.2.1 Her $x, y \in M$ ve her $\phi_t^u \in S_\Sigma$ için, $h \circ \phi_t^u(x) = h \circ \phi_t^u(y)$ ise $x, y \in M$ noktaları, Σ için ayırt edilemez noktalardır denir.

x' 'in denklik sınıfları $\tilde{x} = \{y \in M: h \circ \phi(x) = h \circ \phi(y), \forall \phi \in S_\Sigma\}$ şeklindedir.

Tanım 4.2.2 Σ konik kontrol sistemi ve $x \in M$ olmak üzere,

a) $x \in M'$ 'de Σ 'nın yerel gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{x} \cap V = \{x\}$ olacak şekilde x' 'in bir V komşuluğunun var olmasıdır. Yani; x' 'in V 'den ayırt edilemez noktası olmayacaktır.

Eğer $\forall x \in M$ için (a) şartı sağlanıyorsa, Σ yerel gözlenebilirdir denir.

b) $x \in M$ 'de Σ 'nin gözlenebilir olması için $\tilde{x} \cap M = \{x\}$ olması gerekir. Yani; Σ 'nin $x \in M$ 'de gözlenebilir olması için $h \circ \phi_t^u(x)$, M 'nin herhangi bir noktasını x 'den ayırması gerekir.

Eğer $\forall x \in M$ için, (b) şartı sağlanıyorsa, Σ gözlenebilirdir denir.

İncelenen kontrol sistemindeki durum ve gözlenebilirlik uzayları olan M ve N diferansiyellenebilir manifoldların Riemann manifold yapılarına ek olarak, $M \times M \rightarrow M$ için $(m_1, m_2) \rightarrow m_1 m_2^{-1} \in C^\infty$ ve $N \times N \rightarrow N$ için $(n_1, n_2) \rightarrow n_1 n_2^{-1} \in C^\infty$ koşulları eklensin. Dolayısıyla, grup yapısı eklenmiş ve bağlantılı manifoldlar üzerinde bağlantılı Lie grupları elde edilmiş olur.

$$\dot{g}(t) = u(t)(x)$$

$$h(g) = n \in N$$

$LH(M)$ M 'den N 'ye tüm yerel homeomorfizmaların kümesi olmak üzere, $h \in LH(M)$

olsun. Her $g \in M$ için, dh_g 1-1 ve üzerine olacak şekilde bir diferansiyellenebilir dönüşümdür. Kontrol fonksiyonları düzenli (regüler) vektör alanları olsun. O taktirde, her $t > 0$ için, $h(\phi_t^u(g_1)) = h(\phi_t^u(g_2)) \Leftrightarrow \phi_t^u(g_1^{-1}g_2) \in Kerh$ dir. Burada, ϕ_t^u genel homomorfizmaya dönüşür, [20].

Teorem 4.2.3 $I = \{g \in M: \phi_t^u(g) \in Kerh, \forall t \geq 0\}$ M 'nin bir Lie grubudur.

İspat : I 'nin M 'nin kapalı ve normal bir alt grubu olduğu gösterelim.

$g_1 \sim e \sim g_2$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in M$ elemanları alınsın. O taktirde, $g_1 g_2^{-1} \in I$ dir.

Buradan, I , M 'nin bir alt grubudur.

$t \geq 0$ için, her $g \in M$ ve her $b \in I$ olmak üzere,

$$\phi_t^u(g b g^{-1}) = \phi_t^u(g) \phi_t^u(b) \phi_{-t}^u(g) \text{ dir. } \phi_t^u(b) \in Kerh$$

olduğundan dolayı, $g b g^{-1} \in I$ dir. O halde, I bir normal alt gruptur.

I 'daki b 'ye yakınsayan herhangi bir $\{b_n\}$ dizisi ve her bir $t \geq 0$ için, ϕ_t^u 'nin sürekliliğinden dolayı, $\phi_t^u(b_n) \rightarrow \phi_t^u(b)$ elde edilir ve dolayısıyla, I kapalıdır.

Kapalı alt grup teoreminden dolayı, M 'nin gömülü (embedded) alt manifoldu olarak indirgenmiş topolojide bir Lie grubudur.

Teorem 4.2.4 $\Sigma=(M, D, h, N)$ bir konik sistem ve h bir yerel difeomorfizma olsun.

Σ konik sistemi yerel gözlenebilirdir $\Leftrightarrow L(I) = 0$

İspat : ($\Rightarrow$) $L(I) \neq 0$ ve $X \in L(I)$ olsun. O taktirde, I diskrit bir Lie grubu değildir. Ayrıca, $\exp(tX) \in I, \forall g \in M$ için, $\exp(tX) = \phi_t^u(g)$ eşitliğini sağlayan bir eğridir. g 'yi içeren tüm açık alt kümeler için $h(\phi_t^u(g)) = h(\phi_t^u(g^*)), \forall t \geq 0$, eşitliğini sağlayan en az bir g^* vardır. Bu yerel gözlenebilirlikle çelişir, dolayısıyla $L(I) = 0$ dir.

($\Leftarrow$) $L(I) = 0$ olduğundan dolayı, I diskrit bir Lie grubudur. Dolayısıyla, $\forall g \in I = \{g \in M: \phi_t^u(g) \in Ker h, \forall t \geq 0\}$ için $\phi_t^u(g) = g$ olması yerel gözlenebilirliği sağlar. O halde,

$\forall g \sim e = h(\phi_t^u(g)) = h(\phi_t^u(e)) = e_N$ dir.

Teorem 4.2.5 $\Sigma=(M, D, h, N)$ bir konik sistem ve h bir yerel difeomorfizma olsun.

Σ gözlenebilirdir $\Leftrightarrow$

a) Σ yerel gözlenebilir ve

b) $Fix(\phi_t^u) = \{g \in G: \phi_t^u(g) = g, t \geq 0\}$ olmak üzere $Ker(h) \cap Fix(\phi_t^u) = \{e\}$.

İspat : ($\Rightarrow$) Σ 'nın genel gözlenebilirliği yerel gözlenebilirliğini gerektirir. b) şıkkının doğruluğunu göstermek için, $g \in Ker(h) \cap Fix(\phi_t^u)$ ve $g \neq e$ olsun. $g \in G$ elemanı $Fix(\phi_t^u)$ 'nin ve aynı zamanda h 'nin çekirdeğine ait olan bir durum uzayı elemanı olduğundan dolayı,

$\phi_t^u(g) = g \in Ker(h)$ ve $g \in I$ olur.

Bu durum, yerel gözlenebilirlik ile çelişir. Dolayısıyla,

$Ker(h) \cap Fix(\phi_t^u) = \{e\}$ dir.

($\Leftarrow$) Σ yerel gözlenebilir olsun. Bu genel gözlenebilirlik için yeterli değildir. Çünkü, $L(I) = 0$ olması I 'nin bir diskrit grup olmasını sağlar, ancak, $I \neq \{e\}$ olabilir.

Eğer $g \in I, \phi_t^u(g) \in Ker(h)$ ise, $Ker(h) \cap Fix(\phi_t^u) = \{e\}$ ve I 'nin diskrit bir grup olmasından dolayı, $g = e$ dir. Buradan, Σ global gözlenebilirliği elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Lie grupları üzerindeki lineer kontrol sistemlerinin gözlenebilirliği farklı bir bakış açısı ile ele alınmıştır. h fonksiyonunun homomorfizma olmama durumunda e' 'den ayırt edilemeyen noktaların kümesi olan I kümesi belirlenip sistemin gözlenebilirliği hakkında yorum yapılmıştır. Ayrıca, h fonksiyonunun homomorfizma olması durumunda da h fonksiyonu için bir $*$ özelliği tanımlanıp sistemin yerel gözlenebilir olması durumunda gözlenebilir olduğu gösterilerek yeni bir gözlenebilirlik karakterizasyonu oluşturulmuştur. Bunun dışında, durum uzayı $SE(2)$ özel Öklid uzayı olan sapan vektör alanı normalizörden alınan lineer kontrol sisteminin gözlenebilirliği incelenmiştir. Son olarak ise, yeni bir kontrol sistemi olup üzerinde gözlenebilirlik problemi çalışılmamış olan Konik Sistemlerin gözlenebilirlik karakterizasyonunu oluşturulmuştur.

h fonksiyonu için bir başka $*$ özelliği tanımlanıp sistemin yerel gözlenebilir olması durumunda gözlenebilir olması sonucunun incelenmesi durumunda gözlenebilirlik için ilginç sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca, Konik sistemlerin yeni bir sistem olması gözlenebilirlik karakterizasyonu açısından bir çok yeniliğe açık olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Warner, F.W., (1971), Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, First Edition, Springer, New York.
- [2] Jurdjevic, V., (1997), Geometric Control Theory, First Edition, Cambridge University Press, New York.
- [3] Bourbaki, N., (2005), Lie Groups and Lie Algebras, First Edition, Springer, Berlin.
- [4] Humphreys, J. E., (1997), Introduction To Lie algebras and Representation Theory, First Edition, Springer, New York.
- [5] Helgason, S., (2001), Differential Geometry , Lie Groups and Symmetric Spaces, First Edition, American Mathematical Society, Rhode Island.
- [6] Varadarajan, V., (1974), Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, First Edition, Springer, New York.
- [7] Hacibekiroğlu, A.K., (1996). Lie Grupları Üzerinde Lineer Kontrol Sistemleri, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [8] Ayala, V., ve Kara Hacibekiroğlu, A., (1997). "Observable Linear Pairs", Computational Applied Mathematics, 16(3):205-214.
- [9] Ayala, V., Kara Hacibekiroğlu, ve A., Kizil, E., (2000). "Observable of General Linear Pairs", Computers and Mathematics with Applications, 39(1-2):35-43.
- [10] Kara, A., (2007), "On Observability of Affine Control Systems on Lie Groups" , Int. J. Contemp. Math.Sci., 2:825-829.
- [11] Sussmann, H., ve Jurdjevic, V., (1972), "Control Systems on Lie Groups", Journal of Differential Equations, 12:313-329.
- [12] Sussmann, H., (1977), "Existence and Uniqueness of Minimal Realization of Non-linear Systems", Mathematical System Theory, 10:263-284.
- [13] Sussmann, H., (1973), "Orbits of families of vector fields and integrability of distributions", Trans.American Math.Soc., 180:171-188.
- [14] Agrachev, A.A., Gamkrelidze, R.V., ve Sarychev, A.V., (1989), "Local Invariant of Smooth Control Systems", Acta Applicandae Mathematicae 14:191-237.

- [15] Cheng, D., Dayawansa, W.P., ve Martin, C.F., (1990). "Observability of systems of Lie groups and coset space", SIAM J.Control and Optimization, 28(3):570-581.
- [16] Ayala, V., ve Tirao, J., (1999). "Linear control systems on Lie groups and controllability", American Mathematical Society Series, 64:47-64.
- [17] Isidori, A., (1989), Nonlinear Control Systems: An Introduction, Second Edition, Springer, New York.
- [18] Stilwell, J., (2008), Naive Lie Theory, First Edition, Springer, New York.
- [19] Hall, B.C., (2003), Lie Groups, Lie Algebras and Representations, Second Edition, Springer, New York.
- [20] Colonius, F., Kızıl, E., ve San Martin, L.A.B., (2005) "Covering space for monotonic homotopy of trajectories of control systems", J. Differential Equations 216: 324 – 353.
- [21] Munkres, J.R., (1975), Topology A First Course, Second Edition, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Hasan Halit TALİ
Doğum Tarihi ve Yeri :1983-İstanbul
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :hasanhalittali@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Uygulamalı Matematik	Haliç Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2007
Lise	Fen	İstanbul Atatürk Lisesi	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2008-	Haliç Üniversitesi	Arş.Gör.

YAYINLARI

Bildiri

1.Kara Hansen, A., Tali, H.H., (2015). "Lie Grupları Üzerindeki Konik Kontrol Sistemlerin Gözlenebilirliği", 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, Antalya,