

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖZEL DEVİRLİ KODLAR AİLESİ VE DNA UYGULAMALARI**



**ELİF SEGÂH ÖZTAŞ**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
DOÇ. DR. BAYRAM ALİ ERSOY**

**İSTANBUL, 2016**

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖZEL DEVİRLİ KODLAR AİLESİ VE DNA UYGULAMALARI**

Elif Segâh ÖZTAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 16.11.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY  
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN  
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR  
Marmara Üniversitesi

Doç. Dr. Esra ŞENGELİN SEVİM  
İstanbul Bilgi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Nilgün AYGÖR  
Yıldız Teknik Üniversitesi



Bu alışma, TÜBİTAK'ın 113F071 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

## ÖNSÖZ

---

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında büyük desteğini gördüğüm, kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY'a ve değerli görüşleriyle yardımlarını esirgemeyen ve beni bu çalışmadaki konular ile tanıştıran kıymetli ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. İrfan ŞİAP'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi okuyarak değerlendiren tez jüri üyelerine de teşekkürü bir borç bilirim.

Her zaman verdikleri destek ve yardımlarından dolayı Annem, Babam ve kardeşlerime minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana maddi ve manevi destek olan tüm arkadaşlarıma ve bu süreçte, bursiyeri olduğum 113F071 numaralı proje ile, maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Kasım, 2016

Elif Segâh ÖZTAŞ

## İÇİNDEKİLER

|                                                  | Sayfa |
|--------------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ.....                               | vii   |
| KISALTMA LİSTESİ.....                            | viii  |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                               | ix    |
| ÇİZELGE LİSTESİ .....                            | x     |
| ÖZET .....                                       | xi    |
| ABSTRACT.....                                    | xii   |
| BÖLÜM 1                                          |       |
| GİRİŞ.....                                       | 1     |
| 1.1    Literatür Özeti .....                     | 1     |
| 1.2    Tezin Amacı .....                         | 3     |
| 1.3    Orijinal Katkı.....                       | 3     |
| BÖLÜM 2                                          |       |
| TEMEL BİLGİLER .....                             | 4     |
| 2.1    Temel Tanımlar .....                      | 4     |
| 2.2    Sonlu Cisimler .....                      | 5     |
| 2.2.1    Polinom Halkaları.....                  | 5     |
| 2.2.2    Sonlu Cisimlerin Yapısı.....            | 6     |
| 2.3    Lineer Kodlar .....                       | 6     |
| 2.4    Devirli Kodlar.....                       | 8     |
| 2.5    DNA İle İlgili Temel Bilgiler .....       | 9     |
| BÖLÜM 3                                          |       |
| YÜKSELTİLMİŞ POLİNOMLAR VE DNA UYGULAMALARI..... | 10    |
| 3.1 $F_q$ 'da Yükseltilmiş Polinomlar .....      | 10    |
| 3.2    Dual Tanımlamalar .....                   | 13    |

|                                                                               |                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3                                                                           | $F_{4^{2k}}$ Cisminde Ters Sıralı DNA Kodları .....                             | 14 |
| 3.4                                                                           | Yükseltilmiş Polinomların Halkalara Genelleştirilmesi ve DNA Uygulamaları ..... | 26 |
| 3.5                                                                           | DNA $k$ -bazlıları ile $\mathcal{R}_{2k}$ Elemanları Arasındaki Eşleştirme..... | 28 |
| 3.6                                                                           | DNA Kodları İçin $\varphi$ -Yükseltilmiş Polinomlar.....                        | 31 |
| BÖLÜM 4                                                                       |                                                                                 |    |
| EŞTERİMLİ POLİNOMLAR VE $F_2[u]/(u^{2k}-1)$ HALKASINDA DNA UYGULAMALARI ..... |                                                                                 | 33 |
| 4.1                                                                           | $R$ Üzerinde Eşterimli Polinomlar ile Ters Sıralı Kodlar .....                  | 33 |
| 4.2                                                                           | $R$ -eşterimli Polinomlar ve DNA Kodlar .....                                   | 37 |
| BÖLÜM 5                                                                       |                                                                                 |    |
| $F_2[u]/(u^{2^k}-1)$ HALKASINDA DEVİRLİ KODLAR VE DNA UYGULAMALARI.....       |                                                                                 | 44 |
| 5.1                                                                           | Devirli Kodlar ve DNA Kodlar .....                                              | 46 |
| 5.2                                                                           | Dual ve Kendine Dual Devirli Kodlar ve DNA Kodlar .....                         | 49 |
| BÖLÜM 6                                                                       |                                                                                 |    |
| SONUÇ VE ÖNERİLER .....                                                       |                                                                                 | 51 |
| KAYNAKLAR.....                                                                |                                                                                 | 52 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                |                                                                                 | 55 |

## SİMGE LİSTESİ

---

|                        |                                       |
|------------------------|---------------------------------------|
| $F_q$                  | $q$ elemanlı sonlu cisim              |
| $F_q^n$                | $F_q$ vektör uzayı                    |
| $\deg(g(x))$           | $g(x)$ polinomunun derecesi           |
| $(g(x))$               | $g(x)$ ile üretilen ideal             |
| $\langle g(x) \rangle$ | $g(x)$ 'in gerdiği modül / lineer kod |

## KISALTMA LİSTESİ

---

|     |                         |
|-----|-------------------------|
| TS  | Ters sıralı             |
| TST | Ters sıralı tamlayan    |
| WCC | Watson-Crick complement |

## ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

|                                                            |   |
|------------------------------------------------------------|---|
| Şekil 2.1 DNA bazlarının karşılıklı dizilimi şablonu ..... | 9 |
|------------------------------------------------------------|---|



## ÇİZELGE LİSTESİ

---

|                                                                                                                                                                                                                                  | Sayfa |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Çizelge 3. 1 Yükseltilmiş polinomlar ile üretilen bazı optimal kodlar .....                                                                                                                                                      | 12    |
| Çizelge 3. 2 $4^2$ -kuvvet tablosu.....                                                                                                                                                                                          | 20    |
| Çizelge 3. 3 DNA 2-bazlıları için 4-kuvvet tablosu.....                                                                                                                                                                          | 23    |
| Çizelge 4. 1 Teorem 4.3'e göre üretilen bazı ters sıralı (TS) kodlar. (*1: [23]'de Optimal kod , *2: Bilinen en iyi kod, *3: Griesmer sınırına göre optimal, *4: [20], [25]'de Halka için, Griesmer sınırına göre optimal) ..... | 36    |
| Çizelge 4. 2 $C = \langle S_g^0 \rangle$ için DNA karşılıkları, Örnek 4.14 .....                                                                                                                                                 | 42    |
| Çizelge 4. 3 $C = \langle S_g^{0,c} \rangle$ için DNA karşılıkları, Örnek 4.14 .....                                                                                                                                             | 42    |

## BAZI ÖZEL DEVİRLİ KODLAR AİLESİ VE DNA UYGULAMALARI

Elif Segâh ÖZTAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Bu tez çalışmasındaki amaç, DNA zincirlerindeki baz dizilimlerine uygun olan kodları oluşturmaktır. Bu amaç doğrultusunda Ters sıralı (TS) ve Ters sıralı tamlayan (TST) özellikli kodlar üzerinde yoğunlaşmış ve istenen formda kodlar elde edebilmek için yeni yapılar tanımlanmıştır. Ayrıca bu tezde ilk kez sunulan yükseltilmiş (lifted) ve eşterim (coterm) olarak adlandırılan bu yöntemler sayesinde DNA ve optimal kodlar elde edilmiştir.

DNA bazları ile tam eşleşebilen halka ve özel basamak özellikleri tanımlanmıştır.

Ayrıca hem Ters sıralı tamlayan (TST) DNA hem de devirli kod olabilen kodlar elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ters sıralı kodlar, DNA kodlar, Yükseltilmiş polinomlar, Eşterim polinomlar, Devirli kodlar.

**FAMILY OF SOME SPECIAL CYCLIC CODES AND DNA APPLICATIONS**

Elif Segâh ÖZTAŞ

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

The aim of this study is building codes which are suitable sequences of the bases on DNA strings. For this purpose, focused on reversible and reversible codes and defined new structures to obtain codes in desired focus. Further, optimal codes are obtained with the polynomials called lifted (yükseltilmiş) and coterm (eşterimli).

The ring and properties of digits that are suitable DNA sequences, are defined.

Moreover, both reversible code and reversible complement DNA codes are obtained in same code.

**Keywords:** Reversible codes, DNA codes, Lifted polynomials, Coterm polynomials, Cyclic code.

#### 1.1 Literatür Özeti

DNA kodları ile ilk ilgilenen L. Adleman, 1994'te meşhur ve çözülmesi çok uzun zaman olan Hamilton yolu problemini test tüpünde DNA moleküllerinin manipülasyonu ile çözdü. Kombinatorikte yer alan ve ünlü bir problem olan König Köprü problemi olarak da bilinen; çizge (graf) teorisinde 7 düğüm ve aralarındaki ikişer yollar ile modellenen 7 satıcı problemini, DNA moleküllerini kullanarak çok hızlı bir şekilde çözdü. Adleman'ın yaklaşımı DNA'nın özelliği olan WCC (Watson-Crick Complement)'ye dayanmaktadır [1]. Hamming kısıtı, ters sıra tamlayan (reverse-complement) kısıtı, ters sıra (reverse) kısıtı ve sabit GC-miktar kısıtı DNA kodlarında en çok kullanılan kısıtlardır [2], [3], [4], [5]. [6] çalışmasında, DNA hesaplamalarında uygun olan kodsözleri dizayn etmek için ayrıca stokastik araştırma algoritmaları kullanılmıştır. [7], [8] çalışmalarında, istenmeyen bağlara dönüşme ihtimali az olan DNA dizlerinin kümesini seçen, genetik ve evrimsel algoritmalar geliştirilmiştir. [9] çalışmasında ise cebirsel olarak DNA kodlarını oluşturmak için  $GF(4)$  (4 elemanlı cisim)'te devirli kodların kullanılması amaçlanmış ama yapılan çalışma sadece  $GF(4)$ 'te lineer ters sıralı (TS) devirli kodlar üzerine olmuştur. [10], [11] çalışmalarında Levenshtein metriktan biraz farklı olarak Hamming uzaklığına göre daha uygun olan silinmiş (deletion) uzaklık kullanılmış. [12] çalışmasında, 4 elemanlı  $F_2[u]/(u^2 - 1)$  halkasında silinmiş uzaklık ve GC miktar kısıtı kullanılmıştır.

[13], [14] çalışmalarında Data Encryption Standardı (DES) kriptografik sisteminin kırılması için moleküler bir program sunulmuştur. DNA moleküllerinin medya

depolamada kullanılabileceği [15] çalışmasında gösterilmiştir. 3,4 nm periyoduna sahip heliks DNA molekülünün 10 baz çifti ya da periyod başına 20 bite karşılık geldiği gösterilmiştir. Dolayısıyla bir DNA molekülünde bilgi depolama boyunca oluşan lineer yoğunluk diğer elektronik, manyetik ve optik teknolojilerinden daha iyi olacak şekilde 0,17 nm başına 1 bit ya da 149 Mbit/in'dir.

[2], [4], [16], [17] çalışmalarında önceden saptanmış minimum Hamming uzaklıklarıyla DNA kodsözlerinin büyük kümelerini inşa etme üzerine odaklanılmıştır. [16], [17] çalışmalarında  $GF(4)$ 'te ters sıra tamlayan kısıtı kullanılmış. [17] çalışmasının bir genişlemesi olarak, [18] çalışmasında ters sıra tamlayan kısıtı istenmeyen hibridizasyonlara mani olmak için bilinen kısıtlara (Hamming kısıtı ve GC miktar kısıtı) eklenerek, birçok yeni en iyi kod elde edilmiştir ve  $GF(4)$ 'te lineer kodlar ile toplamsal kodlar göz önünde bulundurulmuştur.

[11] çalışmasında 16 elemanlı halka üzerinde ve tek uzunluklu devirli DNA kodları üzerinde çalışılmıştır, bunların cebirsel yapıları belirlenmiştir, devirli kodlardan DNA kodlara dönüşümünü gerçekleştiren bir dönüşüm tanımlanmıştır ve minimum Hamming uzaklık da kullanılmıştır.

[19] çalışmasında, DNA'nın dört bazı ile  $Z_4$ 'ün elemanları arasında 24 farklı türdeki eşleşmeye göre,  $Z_4$  halkası üzerinde bulunan kodsözler ile gerçek DNA parçalarına -en az 1 hata ile- karşılık gelen kodsözler bulunmuştur.

Çift sarmal zincir yapısına sahip olan DNA, bir işlem uyguladığı sırada (protein üretmek, çoğalmak vs.) DNA üzerinde işlem yapacak genin olduğu kısımdaki zincir açılmakta ve uygun gen istenen görevi yerine getirdikten sonra yeniden kapanmaktadır veya farklı işlemler zinciri olarak devam etmektedir.

DNA'da "bağlanma bölgesi (binding site)" denilen bölgeye bir protein (Transkripsiyon faktörü - TF) bağlanarak açılma işlemi başlamakta ve ilgili gen işlemleri yapılmaya başlanmaktadır. Eğer bağlanma bölgesi bilinirse dışardan bir etki ile DNA'nın ilgili geni çalıştırması veya kapatması, gerekli proteini üretmesi, fonksiyonlarının belirlenmesi ile tedavilerde kullanılmasının vb. sağlanabileceği düşünülmektedir.

[20] çalışmasında, bağlanma bölgesi'nin hangi bazlardan oluştuğunu bulmak için, DNA 8 baz uzunluğundaki parçalara göre sayılıp, “çok görülen” ve “çok görülmesi beklenen” şeklinde oranlara göre hesaplanıp, yapılan istatistiksel işlem sonucu özel tablolar oluşturulmuştur. Oluşturulan tablolarda  $k$ -mer'lerin ( $k$ -bazlıların:  $k$  uzunluğunda DNA parçası) büyük çoğunluğunun hem kendileri hem de ters sıra tamlayanlarının çok yoğun bir şekilde yerleştiği gözlemlenmiştir. Bu yoğun görülen  $k$ -merlerden birinin veya birkaçının bağlanma bölgesi olduğu öngörülmektedir. Sonuç olarak bağlanma bölgesi olma ihtimali çok daha yüksek olan kısımlar bir TST kod veya TST kodun içindeki bir küme olarak düşünülmektedir. Bu sonuçlardan da görüldüğü gibi DNA üzerinde TST özelliği önemli bir yere sahiptir.

## **1.2 Tezin Amacı**

Bu tezde TS özelliğine sahip kodlar bulmak, bunların DNA karşılıklarının da TS ve TST özelliğini sağlattırmak, DNA parçalarını bir halkanın elemanı şekilde ifade edebilecek bir cebirsel yapı ve sistem oluşturmak ve bunları devirli kodlarda da uygulayabilmek amaçlanmıştır.

## **1.3 Orijinal Katkı**

Tezin amacı doğrultusunda istenilen sonuçlar elde edilip uluslararası yayınlar yapılarak literatüre yeni tanımlar ve teoremler kazandırılmıştır.

### TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler yer almaktadır. Temel bilgiler çoğunlukla [21] kitabından faydalanılarak hazırlanmıştır.

#### 2.1 Temel Tanımlar

**Tanım 2.1**  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_tx^t$  polinomunun resiprokali  $a_0 \neq 0$  ve  $\deg(g^*(x)) \leq \deg(g(x))$  olacak şekilde  $g^*(x) = x^r g(1/x) = a_t + a_{t-1}x + \dots + a_0x^t$  ile gösterilir. Eğer  $g^*(x) = g(x)$  ise  $g(x)$ 'e kendine resiprokal polinom denir.

**Tanım 2.2**  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  sıralı  $n$ -lisinin ters sırası  $a^r = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$  şeklindedir.

**Tanım 2.3**  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  sıralı  $n$ -lisi ters sırası olan  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ 'ye eşit ise  $(a = a^r)$   $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ 'ye kendine ters sıra denir.

**Tanım 2.4**  $S \neq \emptyset$  sıralı  $n$ -lilerin bir kümesi olmak üzere, eğer her  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in S$  için  $a^r = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \in S$  ise  $S$ 'ye ters sıralı küme denir.

**Tanım 2.5**  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  sıralı  $n$ -lisinin,  $m$  sabit bir değer olmak üzere, tamlayanı  $a^c = (a_0 + m, a_1 + m, \dots, a_n + m)$  şeklindedir.

**Tanım 2.6**  $S \neq \emptyset$  sıralı  $n$ -lilerin bir kümesi olmak üzere.  $m$  sabit bir değer olsun. Eğer her  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in S$  için  $a^c = (a_0 + m, a_1 + m, \dots, a_n + m) \in S$  ise  $S$ 'ye tamlayan küme denir.

**Tanım 2.7**  $S \neq \emptyset$  sıralı  $n$ -lilerin bir kümesi olmak üzere.  $m$  sabit bir değer olsun. Eğer her  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in S$  için  $a^{rc} = (a_n + m, a_{n-1} + m, \dots, a_0 + m) \in S$  ise  $S$ 'ye ters sıralı tamlayan küme denir.

## 2.2 Sonlu Cisimler

**Tanım 2.8**  $F \neq \emptyset$  kümesi üstünde “.” ve “+” iki işlemi tanımlı olsun.  $(F, +)$  ve  $(F \setminus \{0\}, \cdot)$  değişmeli gruplar ise  $(F, +, \cdot)$  üçlüsüne cisim denir.

**Önerme 2.9**  $F$  bir cisim,  $a, b \in F$  herhangi iki eleman için

- i.  $(-1)a = -a$ ;
- ii.  $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

**Teorem 2.10**  $Z_p$  bir cisimdir  $\Leftrightarrow p$  asal sayıdır.

**Tanım 2.11**  $F$  bir cisim. 1,  $F$ 'nin birimsel elemanı olmak üzere  $p.1 = 0$ 'ı sağlayan en küçük pozitif  $p$  tamsayısına  $F$ 'nin karakteristiği denir. Eğer böyle bir  $p$  yok ise karakteristik 0 dır.

**Teorem 2.12** Cismin karakteristiği ya 0 ya da asal sayıdır.

**Tanım 2.13**  $E, F$  iki cisim ve  $F \subseteq E$  olsun.  $F$ 'ye  $E$ 'nin alt cismi denir.

**Teorem 2.14** Karakteristiği  $p$  olan sonlu cisimlerin eleman sayısı  $p^n$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) dir.

### 2.2.1 Polinom Halkaları

**Tanım 2.15**  $F$  bir cisim.  $F[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in F, n \geq 0 \right\}$  kümesine  $F$  üzerinde polinom

halkası denir.  $F[x]$ 'in elemanlarına  $F$  üzerinde polinomlar denir.  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

polinomu için  $n$ ,  $f(x)$ 'in derecesidir ve  $\text{der}(f(x))$  olarak gösterilir. Eğer  $a_n = 1$  ise  $f(x)$  monik polinomdur denir.  $g(x)$  ve  $h(x)$   $F$ 'de polinomlar ve  $\text{der}(g(x)) < \text{der}(f(x))$ ,  $\text{der}(h(x)) < \text{der}(f(x))$  olacak şekilde  $f(x) = g(x)h(x)$  ise  $f(x)$ 'e indirgenebilir polinom aksi durumda indirgenemez polinom denir.

**Teorem 2.16**  $f(x) \in F[x]$  ve  $\deg(f(x)) > 1$  şeklinde bir polinom olsun.  $F[x]/(f(x))$  bir cisim olması için gerek ve yeter koşul  $f(x)$  indirgenemez bir polinom olmasıdır.

### 2.2.2 Sonlu Cisimlerin Yapısı

**Önerme 2.17**  $q$  elemanlı bir  $F$  cisminin her  $\beta$  elemanı için  $\beta^q = \beta$  sağlanır.

**Sonuç 2.18**  $|F| = q$  ve  $F, E'$ 'nin alt cismi olsun.  $\beta \in E'$ 'nin  $F$ 'de bulunan bir eleman olması için gerek ve yeter şart  $\beta^q = \beta$  olmasıdır.

**Teorem 2.19** Herhangi bir  $p$  asalı ve  $n \geq 1$  tamsayısı için, izomorfik durum hariç tutulduğunda,  $p^n$  elemanlı tek bir sonlu cisim vardır.

$q$  elemanlı sonlu cisimler  $F_q$  veya  $GF(q)$  şeklinde gösterilmektedir.

**Tanım 2.20** Eğer  $F_q = \{0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-1}\}$  ise  $\alpha$  elemanına primitif (ilkel) eleman denir.  $\alpha$ 'nın kuvvetleri  $F$  cismini üretebilmektedir.

**Tanım 2.21**  $\alpha \in F_q$  olmak üzere,  $\alpha^k = 1$  eşitliğini sağlayan en küçük, sıfırdan farklı,  $k$  değerine  $\alpha$ 'nın mertebesi denir ve  $\text{ord}(\alpha)$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 2.22** i. Her  $\alpha \in F_q^*$  ( $F_q^* = F_q - \{0\}$ ) için  $\text{ord}(\alpha) \mid (q-1)$ .

ii.  $\alpha, \beta \in F_q^*$  sıfırdan farklı elemanları için, eğer  $\text{obeb}(\text{ord}(\alpha), \text{ord}(\beta)) = 1$  ise  $\text{ord}(\alpha\beta) = \text{ord}(\alpha) \cdot \text{ord}(\beta)$ 'dir.

**Önerme 2.23** i.  $F_q$ 'nin sıfırdan farklı elemanlarının primitif eleman olması için gerek ve yeter şart mertebelerinin  $q-1$  olmasıdır.

ii. Her sonlu cisim en az bir primitif elemana sahiptir.

### 2.3 Lineer Kodlar

**Tanım 2.24**  $F_q^n$ 'de  $n$  uzunluğundaki bir lineer kod  $F_q^n$ 'in bir alt vektör uzayıdır. Kodun elemanlarına kodsöz denir.

**Tanım 2.25**  $C, F_q^n$ 'de bir lineer kod olsun.

- i.  $F_q^n$ 'nin bir  $C$  alt uzayının  $C^\perp = \{x \in F_q^n : \langle x, c \rangle = 0, \forall c \in C\}$  şeklinde tanımlanan ortogonal tamlayanına  $C$ 'nin dual kodu denir ve  $C^\perp$  ile gösterilir.
- ii.  $C$  lineer kodunun boyutu  $F_q$  üzerindeki vektör uzayı olan  $C$ 'nin boyutudur. Kısaca  $\text{boy}(C)$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 2.26**  $C, F_q^n$ 'de  $n$  uzunluğunda bir lineer kod olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- i.  $|C| = q^{\text{boy}(C)}$  yani  $\text{boy}(C) = \log_q |C|$ .
- ii.  $C^\perp$  bir lineer koddur ve  $\text{boy}(C) + \text{boy}(C^\perp) = n$ .
- iii.  $(C^\perp)^\perp = C$ .

$x$  ve  $y$  aynı uzunlukta, aynı alfabe  $A = \{a_1, \dots, a_q\}$  üzerinde tanımlanmış,  $n$ -liler olsun.  $x$  ve  $y$  nin farklı bileşenlerinin sayısına Hamming uzaklığı denir ve  $d(x, y)$  ile gösterilir. Yani,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ise  $d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$  olur.

Bir  $C$  kodu için,  $d(C) = \min_{c, d \in C, c \neq d} d(c, d)$  ye de kodun minimum uzaklığı denir.  $w(x) = d(x, 0)$ 'a Hamming ağırlığı denir.  $w(C) = \min_{c \in C} w(c, 0)$ 'e minimum Hamming ağırlığı denir.

$C, F_q^n$ 'de  $n$  uzunluğunda ve  $k$  boyutunda bir lineer kod olsun.  $C$  lineer kodu  $(q - lu)$   $[n, k]$ -kod veya  $(n, q^k)$ -kod şeklinde ifade edilir. Eğer  $C$ 'nin bir  $d$  uzaklığı biliniyorsa  $C$ 'ye  $[n, k, d]$ -lineer kod denir.

**Tanım 2.27**  $C$  bir lineer kod olsun.

- i. Eğer  $C \subseteq C^\perp$  ise  $C$  kendine ortogonaldir (diktir).
- ii. Eğer  $C = C^\perp$  ise  $C$  kendine dualdir.

Eğer  $C$   $[n, k]$ -lineer kodunun üreteç matrisi ( $C$  alt vektör uzayının bazlarının içerildiği matris) olan,  $k \times n$  boyutlu  $G$  matrisinin standart formu  $G = (I_k \mid A)$  ise  $C^\perp$  in üreteç matrisi  $H = (-A^T \mid I_{n-k})$  olur.  $H$  matrisine  $C$  kodunun kontrol matrisi de denir.  $H$  matrisi  $C^\perp, [n, n-k]$ -kodunun üreteç matrisidir.

**Örnek 2.28**  $C$  kodunun üreteç matrisi

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun.  $C$  bir  $[7,4,3]$  koddur.  $C$ 'nin üreteç matrisinden elde edilen kontrol matrisi aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve  $H$  ile üretilen  $C^\perp$  kodu bir  $[7,3,4]$  koddur.

Aşağıdaki tanım sonlu cisimler için Griesmer sınırını ifade etmektedir. Bu sınır için eşitliği sağlayan kodlar da optimal kodlardır.

**Tanım 2.29**  $F_q$  sonlu cismi üzerindeki bir lineer kod için, Griesmer sınırı  $n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil$  şeklindedir.

## 2.4 Devirli Kodlar

**Tanım 2.30**  $C \subset F_q^n$  lineer kodu için, eğer her  $(c_0 c_1 \dots c_{n-1}) \in C$  için  $(c_{n-1} c_0 c_1 \dots c_{n-2}) \in C$  ise bu lineer koda bir devirli kod denir.

$F_q$  üzerinde derecesi en fazla  $n-1$  olan polinomlar ile  $F_q^n$  vektör uzayı arasında bir izomorfizma kurulabilir.

$$\Phi : F_q^n \rightarrow F_q[x]/(x^n - 1)$$

$$\Phi((c_0, c_1, \dots, c_{n-1})) = \bar{c} = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan  $\Phi$  fonksiyonu  $F_q^n$  ile  $F_q[x]/(x^n - 1)$  arasında bir  $F_q$ -vektör izomorfizmasıdır.

Eğer  $C$ ,  $F_q[x]/(x^n - 1)$  halkasının bir ideali ise  $C$  bir devirli kod olur.

$(g(x))$ ,  $g(x)$  tarafından üretilen bir ideal olmak üzere üreteç polinomu  $g(x)$  olan  $C$  kodu  $C = (g(x)) = \{r(x)g(x) : \deg(r(x)) < n - \deg(g(x))\}$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 2.31**  $g(x)$  monik polinomu ile üretilen devirli kod ters sıralıdır ancak ve ancak  $g(x) | (x^n - 1)$  için  $g(x)$  kendine resiprokaldır [22].

## 2.5 DNA ile İlgili Temel Bilgiler

DNA (Deoksiribonükleik asit); Adenin (A), Guanin (G), Sitozin (C) ve Timin (T) adlı bazların (nükleotitler) dizilmesi ile oluşan yapıdır.

DNA karşılıklı gelen çift zincir ve heliks şeklindedir. Karşılıklı gelen zincirlerde bazlar özel bir kurala göre yerleşmektedirler, buna Watson-Crick Complement (WCC) kuralı denilmektedir. WCC'ye göre A ile T ve G ile C birbirlerini tamlayan (complement) bazlardır ve  $A^c = T$ ,  $T^c = A$ ,  $G^c = C$  ve  $C^c = G$  şeklinde ifade edilirler.

|   |   |
|---|---|
| A | T |
| T | A |
| G | C |
| C | G |
| C | G |
| T | A |

Şekil 2.1 DNA bazlarının karşılıklı dizilimi şablonu

İleriki bölümlerde kullanılacak DNA  $k$  - bazlısı örnek olarak  $\underbrace{ATG\dots TAA}_k$  şeklinde ifade edilmektedir.

ATGGTGCAG şeklinde bir DNA parçasının tamlayanı TACCACGCTC, ters sırası GAGCGTGGTA, ters sıra tamlayanı CTCGCACCAT şeklindedir.

## YÜKSELTİLMİŞ POLİNOMLAR VE DNA UYGULAMALARI

Bu bölümde ters sıralı (TS) kodları üretmek için “yükseltilmiş (lifted) polinom” olarak adlandırılan özel polinomlar tanımlanmıştır. Yükseltilmiş polinomlar sonlu değişmeli bazı cebirsel yapılar üzerinde tanımlanıp, TS ve ters sıralı tamlayan (TST) DNA kodlarının üretilmesi için yöntemler sunulmuştur.

3.1  $F_q$  'da Yükseltilmiş Polinomlar

**Tanım 3.1**  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_tx^t$ ,  $\mathbb{Z}_p$  'de ( $p$  asal) kendine resiprokal bir polinom ve  $g(x) | (x^n - 1) \pmod{p}$  olsun.  $g(x)$  in bir yükseltilmiş polinomu  $\ell_g(x) \in F_q[x]$  ( $q = p^k$ ) aşağıdaki gibi ifade edilir.  $\beta_i \in F_q - \{0\}$  olmak üzere, eğer  $t$  tek ise,

$$\ell_g(x) = \sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} \theta_i; \quad \theta_i = \begin{cases} \beta_i x^i + \beta_i x^{t-i} & , a_i \neq 0 \\ 0 & , a_i = 0 \end{cases}$$

Eğer  $t$  çift ise,

$$\ell_g(x) = \sum_{i=0}^{\frac{t}{2}} \theta_i; \quad \theta_i = \begin{cases} \beta_i x^i + \beta_i x^{t-i} & , a_i \neq 0 \quad i \neq t/2 \\ 0 & , a_i = 0 \\ \beta_{\frac{t}{2}} x^{\frac{t}{2}} & , a_i \neq 0, i = t/2 \end{cases}$$

$\beta_i$  'nin değerlerine göre  $g(x)$  'in birden fazla yükseltilmiş polinomu vardır ve bunların kümesi  $\mathcal{L}_g(x)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.2**  $n = 26$  için  $\mathbb{Z}_5$  'de,  $g(x) | (x^{26} - 1)$  olacak şekilde, kendine resiprokal  $g(x) = 1 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + x^4$  polinomu bulunmaktadır. Yükseltilmiş polinomunun tanımından faydalanılarak katsayılar rastgele seçildiğinde çeşitli  $\ell_g(x)$  yükseltilmiş polinomları aşağıdaki şekillerde elde edilir;  $\alpha^i \in F_{25}, i \in \{0, 1, \dots, 23\}$  olmak üzere,

$$\ell_g(x) = 1 + \alpha^{12}x + 4x^2 + \alpha^{12}x^3 + x^4$$

ve

$$\ell_g(x) = \alpha^{23} + 2x + \alpha^6x^2 + 2x^3 + \alpha^{23}x^4$$

birer örnektir.

Aşağıdaki önermenin ispatı yükseltilmiş polinomun tanımı gereği açıktır.

**Önerme 3.3**  $F_q$  'da yükseltilmiş polinomlar kendine resiprokal polinomlardır.

**Önerme 3.4**  $S, F_q$  'da, her vektörün ters sırasının bulunduğu bir küme olsun.  $S$  'nin ürettiği kod  $F_q$  -alt vektör uzayı olarak bir TS koddur.

**İspat:**  $S$  'deki her vektörün ters sırası yine  $S$  'de olsun.  $1 \leq t \leq m$  olmak üzere  $c_i$  ler kodsözleri,  $c_{s_t}$  'ler ise  $c_{s_t}^r = c_{s_t}^r$  (kendine ters sıra) olan kodsözleri ifade etsin.  $\langle S \rangle = \langle c_1, c_1^r, c_2, c_2^r, \dots, c_k, c_k^r, c_{s_1}, c_{s_2}, \dots, c_{s_m} \rangle$  olmak üzere  $C = \langle S \rangle$  olsun.  $(\alpha c_i + \beta c_j)^r = \alpha c_i^r + \beta c_j^r$  olduğundan, her  $c = \sum \beta_i c_i \in C$  kodsözü için  $i, j \in \{1, 2, \dots, k, s_1, \dots, s_m\}$  olacak şekilde bir  $c^r = \sum \beta_i c_i^r \in C$  kodsözü bulunmaktadır. Dolayısıyla  $C$  bir TS koddur.

**Not 3.5**  $\langle S \rangle$  gösterimi  $S$  tarafından üretilen vektör uzayını belirtir. Ancak  $(S)$  gösterimi bir ideali belirtir.

**Tanım 3.6**  $C$  kodunda her  $c \in C$  için  $c^r \in C$  ise  $C$  'ye ters sıralı (TS) kod denir.

Aşağıdaki teorem yükseltilmiş polinomlar ile TS kodlar üretmek için kullanılmaktadır.

**Teorem 3.7**  $\ell_g(x), F_q$  'da,  $g(x)$  kendine resiprokal polinomunun bir yükseltilmiş polinomu,  $n$  tek pozitif bir tamsayı olsun ve  $g(x) | (x^n - 1)(\text{mod } p), \deg(g(x)) = t$ .

$$S_{\ell_g} = \{\ell_g(x), x\ell_g(x), \dots, x^{n-t-1}\ell_g(x)\}$$

ve  $C_\ell = \langle S_{\ell_g} \rangle$  olsun. Dolayısıyla  $C_\ell$  bir TS  $F_q$ -lineer koddur. Kısaca  $C_\ell = \langle \ell_g(x) \rangle$  şeklinde gösterilir.

**İspat:**  $\beta_{i_j} \in F_q, i_j \in \{0, 1, \dots, n-t-1\}$  olmak üzere,  $0 \leq i_j \leq n-t-1$  olduğundan  $n-t-1 \geq n-t-1-i_j \geq 0$  elde edilir ve Önerme 3.4 yardımı ile her kodsözün ters sırası aşağıdaki şekilde bulunabilmektedir

$$\left( \Phi \left( \sum_{j=1}^{n-t} \beta_{i_j} x^{i_j} \ell_g(x) \right) \right)^r = \Phi \left( \sum_{j=1}^{n-t} \beta_{i_j} x^{n-t-1-i_j} \ell_g(x) \right).$$

Çizelge 3.1’de  $F_8, F_9, F_{16}$  ve  $F_{256}$ ’da yükseltilmiş polinomlar ile üretilen iyi parametrelere sahip optimal kodlar ve Griesmer sınırını sağlayan bazı optimal kodlar gösterilmektedir. Bu optimal kodların aynı zamanda TS kodlar olduğu görülmektedir. [23] çalışmasında, elde edilen bazı kodlar “kodların kısaltılması” (shortening), “kodun delinmesi” (puncturing) ve bunun gibi dolaylı yollar ile elde edilirken yükseltilmiş polinomlar ile üretilen kodlar direk üretilmekte ve herhangi bir dolaylı kod üretim yöntemine ihtiyaç duyulmamaktadır.

Çizelge 3. 1 Yükseltilmiş polinomlar ile üretilen bazı optimal kodlar

| $n$ | Yükseltilmiş polinomlar                      | Parametre | Cisim     | Açıklama              |
|-----|----------------------------------------------|-----------|-----------|-----------------------|
| 9   | $1 + wx + x^2$                               | [9,7,2]   | $F_4$     | [12]’de optimal kod   |
| 9   | $1 + w^2x + x^2$                             | [9,7,2]   | $F_4$     | [12]’de optimal kod   |
| 15  | $1 + wx + x^2$                               | [15,13,2] | $F_4$     | [12]’de optimal kod   |
| 15  | $1 + x + wx^2 + x^3 + x^4$                   | [15,11,4] | $F_4$     | [12]’de optimal kod   |
| 15  | $1 + wx + w^2x^2 + wx^3 + x^4$               | [15,11,4] | $F_4$     | [12]’de optimal kod   |
| 15  | $1 + wx + wx^3 + wx^4 + wx^5 + wx^7 + x^8$   | [15,7,7]  | $F_4$     | [12]’de optimal kod   |
| 9   | $w^3 + x + w^3x^2$                           | [9,7,3]   | $F_8$     | [12]’de optimal kod   |
| 15  | $1 + wx + w^5x^2 + wx^3 + x^4$               | [15,11,4] | $F_8$     | [12]’de optimal kod   |
| 10  | $w + w^6x + w^7x^2 + w^7x^3 + w^6x^4 + wx^5$ | [10,5,6]  | $F_9$     | [12]’de optimal kod   |
| 10  | $1 + w^7x + w^2x^2 + w^2x^3 + w^7x^4 + x^5$  | [10,5,6]  | $F_9$     | [12]’de optimal kod   |
| 9   | $w^5 + x + w^5x^2$                           | [9,7,3]   | $F_{16}$  | Maks. Griesmer sınırı |
| 15  | $1 + w^3x + x^2$                             | [15,13,3] | $F_{16}$  | Maks. Griesmer sınırı |
| 9   | $w^3 + x + w^3x^2$                           | [9,7,3]   | $F_{256}$ | Maks. Griesmer sınırı |

Çizelge 3. 1 Yükseltmiş polinomlar ile üretilen bazı optimal kodlar (devamı)

|    |                     |           |           |                       |
|----|---------------------|-----------|-----------|-----------------------|
| 15 | $1 + w^{12}x + x^2$ | [15,13,3] | $F_{256}$ | Maks. Griesmer sınırı |
|----|---------------------|-----------|-----------|-----------------------|

**Örnek 3.8**  $g(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8$  ve  $g \mid (x^{15} - 1)(\text{mod } 2)$  olsun.  $F_4$  üzerinde

$\ell_g(x) = 1 + wx + wx^3 + wx^4 + wx^5 + wx^7 + x^8$  yükseltmiş polinomu seçilsin.  $\langle \ell_g(x) \rangle$

geren kümesi (spanning set) üreteç matrisi olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & w & 0 & w & w & w & 0 & w & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w & 0 & w & w & w & 0 & w & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w & 0 & w & w & w & 0 & w & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w & 0 & w & w & w & 0 & w & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w & 0 & w & w & w & 0 & w & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w & 0 & w & w & w & 0 & w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w & 0 & w & w & w & 0 & w & 1 \end{pmatrix}$$

$C_\ell = \langle \ell_g(x) \rangle$  kodu  $[15, 7, 7]_4$  parametrelerine sahip bir TS koddur. [23] tablosuna göre iyi parametrelere sahip optimal bir koddur.

### 3.2 Dual Tanımlamalar

**Tanım 3.9**  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  bir matris olsun.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisin sütun tersi  $A^{c^r} = \begin{pmatrix} a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$  şeklindedir.

A matrisinin satır tersi ise  $A^{r^r} = \begin{pmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & a_{m1} \end{pmatrix}$  şeklindedir.

Matrisin satır-sütun tersi  $A^{c^r r^r} = \begin{pmatrix} a_{mn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$  şeklindedir.

**Teorem 3.10**  $C = \langle \ell_g(x) \rangle$  yükseltmiş polinom ile üretilen bir kod ve üreteç matrisinin standart formda gösterilmesi  $G = [I_k : A]_{k \times n}$  şeklinde ise duali  $G^\perp = H = [I_{n-k} : A^{c^r}]_{(n-k) \times n}$  nin ürettiği uzaya eşittir.

**Örnek 3.11**  $g(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8$  ve  $g \mid (x^{15} - 1)(\text{mod } 2)$  olsun.  $F_{16}$  'da  $\ell_g(x) = \omega^2 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + \omega^2 x^8$  olsun ve  $\ell_g(x)$  ile üretilen kodun üreteç matrisi, standart formda,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^{14} & w^{12} & 1 & w^8 & w^6 & w^7 & w & w^6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^6 & w^9 & w^{12} & w & w^5 & w^{12} & w^7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & w^9 & w & w^{12} & w^7 & w^{12} & w^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^5 & w^{14} & 1 & w & w^9 & w^{10} & w^7 & w^{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^{10} & w^4 & w^{14} & w^2 & w^{10} & w^{12} & w^{10} & w^{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w^{11} & w^{13} & w^4 & w^4 & w^{11} & w^{13} & w^{12} & w^{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^{13} & 0 & w^{13} & w^{13} & w^{13} & 0 & w^{13} & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde  $[15, 7, 7]_{16}$  parametrelere sahiptir. Bu üreteç matris ile üretilen kodun dualinin üreteç matrisi de aşağıdaki gibidir.

$$G^\perp = H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^{13} & w^{11} & w^{10} & w^5 & 1 & w^6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^{13} & w^{12} & w^{10} & w^7 & w^{12} & w^7 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^{13} & w^{12} & w^{10} & w^7 & w^{12} & w^7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^{13} & w^{11} & w^{10} & w^9 & w^{12} & w^5 & w^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^{13} & w^4 & w^2 & w & w & w & w^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^{13} & w^4 & w^{14} & 1 & w^9 & w^{12} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^{13} & w^4 & w^{14} & 1 & w^9 & w^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w^{13} & w^{11} & w^{10} & w^5 & 1 & w^6 & w^{14} \end{pmatrix}$$

ve  $[15, 8, 6]_{16}$  parametrelerine sahip bir kod üretir.

### 3.3 $F_{4^{2k}}$ Cisminde Ters Sıralı DNA Kodları

Bu bölümde, DNA  $2k$  -bazlıları ile  $F_{4^{2k}}$  cismi üzerinde çalışılmaktadır. Özel olarak  $F_{16}$  ve  $F_{256}$  tabloları ve örnekleri üzerinde gösterimlerde bulunulmuştur. Aşağıda örneklendirildiği gibi ters sıralama problemi,  $k > 0$  için, tüm  $F_{4^{2k}}$  üzerindeki DNA

kodları için mevcuttur. Örneğin,  $F_{256}$  ters sıralama problemi:  $\alpha^{87}, \alpha^7, \alpha \in F_{256}$  olmak üzere ve  $\alpha^{87} \rightarrow \text{TAAG}, \alpha^7 \rightarrow \text{AAGA}, \alpha \rightarrow \text{AAAT}$  olacak şekilde,  $(\alpha^{82}, \alpha^7, \alpha)$  kodsözü TAAGAAGAAAAT DNA parçasına karşılık gelsin.  $(\alpha^{82}, \alpha^7, \alpha)$ 'nin ters sırası  $(\alpha, \alpha^7, \alpha^{82})$  dir ve  $(\alpha, \alpha^7, \alpha^{82})$  AAATAAGATAAG DNA parçasına karşılık gelmektedir. Fakat, AAATAAGATAAG 12-bazlısı TAAGAAGAAAAT'nın ters sırası değildir. TAAGAAGAAAAT nin ters sırası TAAAAGAAGAAT'dır. Bu ters sıralama problemini çözmek için  $4^k$  - yükseltilmiş polinomları tanımlanmıştır. Bu eşleştirme metodu aşağıda sunulmaktadır.

DNA bazları  $S_{D_4} = \{A, T, G, C\}$  kümesi ile, DNA 2-bazlıları

$$S_{D_{16}} = \{AA, AT, AG, AC, TT, TA, TG, TC, GG, GA, GC, GT, CC, CA, CG, CT\},$$

DNA 4-bazlıları

$$S_{D_{256}} = \{AAAA, AAAT, AAAG, AAAC, TTAA, \dots, CCCC\},$$

en genel olarak ise DNA  $2k$  -bazlıları

$$S_{D_{4^{2k}}} = \{\underbrace{AAAAAA \dots AAA}_{2k}, TTTTT \dots TGGCCC, \dots, CC \dots CC\}$$

kümeleri ile tanımlanmıştır. DNA bazları ile cismin elemanlarını, ters sıralılığı ve diğer işlemleri sağlayacak şekilde, eşleştirmek genelde zor bir problemdir. Kurulacak olan bu eşleştirme DNA'nın özelliklerine uygun olmalıdır. Bu bölümde,  $4^k$  -kuvvet tablosunun genel formunun nasıl inşaa edileceğini gösteren bir metod tanımlanmıştır.  $4^k$  -kuvvet tablosu, DNA  $2k$  -bazlıları ile  $F_{4^{2k}}$  cisminin elemanları arasındaki eşleşmeyi gösteren özel bir tablodur.

DNA  $2k$  -bazlıları için WCC özelliği  $(AATC \dots TG)^c = TTAG \dots AC$ ,  $(TCAA \dots GG)^c = AGTT \dots CC$  şeklinde gösterilir.

$b$  bir DNA  $2k$  -bazlısı olsun. Örneğin,  $b = \underbrace{AATC \dots TG}_{2k}$  için, ters sırası  $b^r = GT \dots CTAA$ , tamlayanı  $b^c = TTAG \dots AC$  ve ters sıra tamlayanı  $b^{rc} = CA \dots GATT$  şeklindedir.

Aşağıda DNA  $2k$ -bazlıları için  $4^k$ -kuvvet tablosunun üretilmesi için bir algoritma verilmektedir.

#### $4^k$ -kuvvet tablosu oluşturma algoritması:

DNA'da;

- (Adım 1) Her DNA  $2k$ -bazlısı için, {DNA  $2k$ -bazlısı, DNA ters sırası, DNA tamlayanı, DNA ters sıra tamlayanı} =  $\{b, b^r, b^c, b^{rc}\}$  olacak şekilde kümeler oluşturulur.
- (Adım 2) Bu oluşturulan kümelerden iki elemanlı olanları belirlenir;

Burada iki durum söz konusudur:

- (Adım 2.1)  $b = b^r$  durumu: DNA  $2k$ -bazlısının kendi ters sırasına eşit olma durumu (Kendine ters sıralı DNA  $2k$ -bazlısı).  $h_i \in \{A, T, G, C\}$  için kendine ters sıra DNA  $2k$ -bazlıları  $h_1 h_2 \dots h_k h_k \dots h_2 h_1$  formunda olması gerektiğinden, bu ifadenin ilk  $k$  bazının farklı kombinasyonlarının sayısı olan  $4^k$  tane kendine ters sıra DNA  $2k$ -bazlısı vardır.  $k = 4$  için *ATCGGCTA* şeklinde bir örnek verilebilir.
- (Adım 2.2)  $b^r = b^c$  ( $b = b^{rc}$ ) durumu: DNA  $2k$ -bazlısı kendi ters sıra tamlayanına eşit olma durumu (Kendine ters sıralı tamlayan DNA  $2k$ -bazlısı).  $h_i \in \{A, T, G, C\}$  için kendine ters sıra tamlayan DNA  $2k$ -bazlıları  $h_1 h_2 \dots h_k h_k^c \dots h_2^c h_1^c$  formunda olması gerektiğinden, bu ifadenin ilk  $k$  bazının farklı kombinasyonlarının sayısı olan  $4^k$  tane kendine ters sıra tamlayan DNA  $2k$ -bazlısı vardır.  $k = 4$  için *ATCGCGAT* şeklinde bir örnek verilebilir.

$F_{4^{2k}}$  cisminde;

- (Adım 3)  $\alpha$  ilkel eleman olmak üzere,  $F_{4^{2k}}$  cismindeki tüm elemanlar için  $\{\alpha^i, \alpha^{4^k i}, \alpha^i + 1, \alpha^{4^k i} + 1\}$  şeklinde kümeler oluşturulur.
- (Adım 4) Bu oluşturulan kümelerden iki elemanlı olanlar belirlenir;

Burada iki durum söz konusudur:

➤ (Adım 4.1)  $\alpha^i = \alpha^{4^k i}$  durumu:  $\alpha^i = \alpha^{4^k i}$  eşitliğini sağlayan çözüm kümesi  $\{0, 1, \alpha^{4^k+1}, \alpha^{2(4^k+1)}, \dots, \alpha^{(4^k-2)(4^k+1)}\}$  şeklinde  $4^k$  eleman içermektedir.

➤ (Adım 4.2)  $\alpha^i + 1 = \alpha^{4^k i}$  ( $\alpha^i = \alpha^{4^k i} + 1$ ) durumu:  $\alpha^i \alpha^j = \alpha^i + 1$  olacak şekilde bir tane  $\alpha^j \in F_{4^{2k}}$  vardır.  $\alpha^i + 1 = \alpha^{4^k i}$  olduğunda  $\alpha^i \alpha^j = \alpha^{4^k i}$  yazılabilir. Adım 4.1'den ve  $\alpha^i \alpha^j = \alpha^{4^k i}$  denkleminin, her  $i$  için bir tek  $j$  çözümü olduğundan  $\alpha^i + 1 = \alpha^{4^k i}$ 'yi sağlayan  $4^k$  tane eleman bulunmaktadır.

- (Adım 5) Adım 2.1 ile Adım 4.1'de oluşan kümeler rastgele eşleştirilir. Bu kümelerin elemanları arasında bire bir eşleşme mevcuttur.
- (Adım 6) Adım 2.2 ile Adım 4.2'de oluşan kümeler rastgele eşleştirilir. Bu kümelerin elemanları arasında yine bire bir eşleşme mevcuttur.
- (Adım 7) Yukarıdaki 5. ve 6. adımların elemanlarının dışında, DNA ve cisimde kalan kümeler rastgele eşleştirilir.

Yukarıda açıklanan yöntemde  $F_{4^{2k}}$  cismi ile DNA  $2k$ -bazlıları arasındaki eşleşmenin DNA özellikleri ile uyumluluğu için aşağıdaki şekilde iki önemli kural rol oynamaktadır.

**Kural 1:** +1 ile toplama: Cismin herhangi bir elemanını 1 ile toplamak, elemanın DNA karşılığının tamlayanının cisimdeki karşılığına denk gelmektedir. Örneğin,  $F_{256}$  için,  $\alpha^5 = AATG$ .  $\alpha^5 + 1 = \alpha^{122} = TTAC$  olur. Bu kural  $(\alpha^i + 1) + 1 = \alpha^i$  ve  $(b^c)^c = b$  ifadelerinin sonucudur.

**Kural 2:**  $4^k$  kuvvetini alma: Cismin herhangi bir elemanının  $4^k$  kuvvetini almak, elemanın DNA karşılığının ters sırasına karşılık gelmektedir. Örneğin,  $F_{256}$  için,  $\alpha^5 = AATG$ .  $(\alpha^5)^{16} = \alpha^{80} = GTAA$  olur. Bu kural  $((\alpha^i)^{4^k})^{4^k} = \alpha^i$  ve  $\alpha^{4^{2k}-1} = 1$  ifadelerinin sonucudur.

**Örnek 3.12** DNA 4-bazlıları için,  $F_{256}$  'da,  $4^2$  - kuvvet tablosunun oluşturulma aşamaları aşağıdaki gibidir.  $\alpha$  ilkel eleman olmak üzere, kural 2 gereği,  $F_{256}$  'da,  $4^2$  kuvveti DNA karşılığının ters sıra özelliğini sağlayacaktır.

- (Adım 1) Tüm DNA 4-bazlıları için,  $b \in S_{D_{256}}$  olmak üzere,  $\{b, b^r, b^c, b^{rc}\}$  kümeleri oluşturulur.

$$\{b, b^r, b^c, b^{rc}\}$$

$$\{AAAA, AAAA, TTTT, TTTT\}$$

$$\{TTTT, TTTT, AAAA, AAAA\}$$

$$\{AAAT, TAAA, TTTA, ATTT\}$$

$$\{ACCT, TCCA, TGGA, AGGT\}$$

$$\{TGCC, CCGT, ACGG, GGCA\}$$

... şeklinde devame eder

- (Adım 2.1) DNA 4-bazlıları içinde, kendine ters sırasına eşit olan DNA 4-bazlıları belirlenir. Bunlar  $h_1 h_2 h_2 h_1$  formunda olup, bu forma göre sağlanan 16 eleman bulunmaktadır ve bunlar {AAAA, ATTA, AGGA, ACCA, TAAT, TTTT, TGGT, TCCT, GAAG, GTTG, GGGG, GCCG, CAAC, CTTC, CGGC, CCCC} şeklindedirler.

$$\{b, b^r, b^c, b^{rc}\} \rightarrow b = b^r \rightarrow \{b, b^c\}$$

$$\{AAAA, AAAA, TTTT, TTTT\} \rightarrow \{AAAA, TTTT\}$$

$$\{TTTT, TTTT, AAAA, AAAA\} \rightarrow \{TTTT, AAAA\}$$

$$\{ATTA, ATTA, TAAT, TAAT\} \rightarrow \{ATTA, TAAT\}$$

$$\{CAAC, CAAC, GTTG, GTTG\} \rightarrow \{CAAC, GTTG\}$$

... şeklinde devame eder

- (Adım 2.2) DNA 4-bazlıları içinde, kendine ters sıra tamlayanına eşit olan DNA 4-bazlıları belirlenir. Bunlar  $h_1 h_2 h_2^c h_1^c$  formunda olup, bu forma göre sağlanan 16 eleman bulunmaktadır ve bunlar {AATT, ATAT, AGCT, ACGT, TATA, TTAA, TGCA, TCGA, GATC, GTAC, GGCC, GCGC, CATG, CTAG, CGCG, CCGG} şeklindedirler.

$$\{b, b^r, b^c, b^{rc}\} \rightarrow b^r = b^c (b = b^{rc}) \rightarrow \{b, b^r\}$$

$$\begin{aligned}\{AATT,TTAA,TTAA,AATT\} &\rightarrow \{AATT,TTAA\} \\ \{TGCA,ACGT,ACGT,TGCA\} &\rightarrow \{TGCA,ACGT\} \\ \{CATG,GTAC,GTAC,CATG\} &\rightarrow \{CATG,GTAC\}\end{aligned}$$

... şeklinde devame eder

- (Adım 3)  $F_{256}$ 'nın tüm elemanları  $\{\alpha^i, \alpha^{16i}, \alpha^i + 1, \alpha^{16i} + 1\}$  formunda yazılır.

$$\{\alpha^i, \alpha^{16i}, \alpha^i + 1, \alpha^{16i} + 1\}$$

$$\{\alpha, \alpha^{16}, \alpha^{126}, \alpha^{231}\}$$

$$\{\alpha^2, \alpha^{32}, \alpha^{207}, \alpha^{252}\}$$

$$\{\alpha^3, \alpha^{48}, \alpha^{35}, \alpha^{50}\}$$

... şeklinde devame eder

- (Adım 4.1)  $\alpha^i = \alpha^{16i}$  eşitliğini sağlayan elemanlar belirlenir ve  $\{\alpha^i, \alpha^{16i}, \alpha^i + 1, \alpha^{16i} + 1\}$  formundaki kümeler düzenlenir.  $\alpha^i = \alpha^{16i}$  eşitliğini sağlayan elemanlar  $\{0, 1, \alpha^{17}, \alpha^{2.17}, \alpha^{3.17}, \dots, \alpha^{14.17}\}$  şeklindedir.

$$\{\alpha^i, \alpha^{16i}, \alpha^i + 1, \alpha^{16i} + 1\} \rightarrow \alpha^i = \alpha^{16i} \rightarrow \{\alpha^i, \alpha^{16i} + 1\}$$

$$\{0, 0, 1, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\{1, 1, 0, 0\} \rightarrow \{1, 0\}$$

$$\{\alpha^{17}, \alpha^{17.16=17}, \alpha^{17} + 1 = \alpha^{204}, \alpha^{204}\} \rightarrow \{\alpha^{17}, \alpha^{204}\}$$

$$\{\alpha^{34}, \alpha^{34.16=34}, \alpha^{34} + 1 = \alpha^{153}, \alpha^{153}\} \rightarrow \{\alpha^{34}, \alpha^{153}\}$$

... şeklinde devame eder

- (Adım 4.2)  $\alpha^i = \alpha^{16i} + 1$  eşitliğini sağlayan elemanlar belirlenir ve  $\{\alpha^i, \alpha^{16i}, \alpha^i + 1, \alpha^{16i} + 1\}$  formundaki kümeler düzenlenir.  $\alpha^i = \alpha^{16i} + 1$  eşitliğini sağlayan elemanlar aşağıdaki şekildedir.

$$\{\alpha^9, \alpha^{18}, \alpha^{31}, \alpha^{33}, \alpha^{36}, \alpha^{62}, \alpha^{66}, \alpha^{72}, \alpha^{124}, \alpha^{132}, \alpha^{143}, \alpha^{144}, \alpha^{199}, \alpha^{227}, \alpha^{241}, \alpha^{248}\}$$

$$\{\alpha^i, \alpha^{16i}, \alpha + 1, \alpha^{16i} + 1\} \rightarrow \alpha^i = \alpha^{16i} + 1 \rightarrow \{\alpha^i, \alpha^{16i}\}$$

$$\{\alpha^9, \alpha^{9 \cdot 16=144}, \alpha^9 + 1 = \alpha^{144}, \alpha^9\} \rightarrow \{\alpha^9, \alpha^{144}\}$$

$$\{\alpha^{18}, \alpha^{19 \cdot 16=33}, \alpha^{18} + 1 = \alpha^{33}, \alpha^{18}\} \rightarrow \{\alpha^{18}, \alpha^{33}\}$$

... şeklinde devame eder

- (Adım 5) Adım 2.1 ile Adım 4.1 kümeleri rastgele eşleştirilir (Çizelge 3.2’de bir örnek verilmiştir).
- (Adım 6) Adım 2.2 ile Adım 4.2 kümeleri rastgele eşleştirilir (Çizelge 3.2’de bir örnek verilmiştir).
- (Adım 7) DNA’nın kalan kümeleri ile cismin kalan kümeleri rastgele eşleştirilir (Çizelge 3.2’de bir örnek verilmiştir).

$$\alpha^i = \alpha^{16i} \rightarrow b = b^r \rightarrow \text{Eşleşme}$$

$$\{\alpha^{17}, \alpha^{204}\} \rightarrow \{\text{ATTA}, \text{TAAT}\} \rightarrow \alpha^{17} \rightarrow \text{ATTA}, \alpha^{204} \rightarrow \text{TAAT}$$

... şeklinde devame eder

$$\alpha^i = \alpha^{16i} + 1 \rightarrow b = b^{rc} \rightarrow \text{Eşleşme}$$

$$\{\alpha^9, \alpha^{144}\} \rightarrow \{\text{AATT}, \text{TTAA}\} \rightarrow \alpha^9 \rightarrow \text{AATT}, \alpha^{144} \rightarrow \text{TTAA}$$

... şeklinde devame eder

$$\alpha^i = \alpha^{16i} + 1 \rightarrow b = b^{rc} \rightarrow \text{Eşleşme}$$

$$\{\alpha^3, \alpha^{48}, \alpha^{35}, \alpha^{50}\} \rightarrow \{\text{AAAC}, \text{CAAA}, \text{TTTG}, \text{GTTT}\} \rightarrow \alpha^3 \rightarrow \text{AAAC}, \alpha^{48} \rightarrow \text{CAAA}, \\ \alpha^{35} \rightarrow \text{TTTG}, \alpha^{50} \rightarrow \text{GTTT}$$

... şeklinde devame eder

Sonuç olarak aşağıdaki  $4^2$  -kuvvet tablosu elde edilir.

Çizelge 3. 2  $4^2$  -kuvvet tablosu

|                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $0 \rightarrow \text{AAAA}, \alpha \rightarrow \text{AAAT}, \alpha^2 \rightarrow \text{AAAG}, \alpha^3 \rightarrow \text{AAAC}, \\ \alpha^4 \rightarrow \text{AATA}, \alpha^5 \rightarrow \text{AATG}, \alpha^6 \rightarrow \text{AATC}, \alpha^7 \rightarrow \text{AAGA},$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Çizelge 3. 2  $4^2$  -kuvvet tablosu (devamı)

$\alpha^8 \rightarrow AAGT, \alpha^9 \rightarrow AATT, \alpha^{10} \rightarrow AAGG, \alpha^{11} \rightarrow AAGC,$   
 $\alpha^{12} \rightarrow AACA, \alpha^{13} \rightarrow AACT, \alpha^{14} \rightarrow AACG, \alpha^{15} \rightarrow AACC,$   
 $\alpha^{16} \rightarrow TAAA, \alpha^{17} \rightarrow ATTA, \alpha^{18} \rightarrow ATAT, \alpha^{19} \rightarrow ATAG,$   
 $\alpha^{20} \rightarrow ATAC, \alpha^{21} \rightarrow TTCG, \alpha^{22} \rightarrow ATTG, \alpha^{23} \rightarrow ATTC,$   
 $\alpha^{24} \rightarrow ATGA, \alpha^{25} \rightarrow TACT, \alpha^{26} \rightarrow ATGT, \alpha^{27} \rightarrow ATGG,$   
 $\alpha^{28} \rightarrow ATGC, \alpha^{29} \rightarrow ATCA, \alpha^{30} \rightarrow ATCT, \alpha^{31} \rightarrow AGCT,$   
 $\alpha^{32} \rightarrow GAAA, \alpha^{33} \rightarrow TATA, \alpha^{34} \rightarrow AGGA, \alpha^{35} \rightarrow TTTG,$   
 $\alpha^{36} \rightarrow ACGT, \alpha^{37} \rightarrow GAAT, \alpha^{38} \rightarrow ATCG, \alpha^{39} \rightarrow ATCC,$   
 $\alpha^{40} \rightarrow AGAG, \alpha^{41} \rightarrow AGAC, \alpha^{42} \rightarrow TAAC, \alpha^{43} \rightarrow CCAT,$   
 $\alpha^{44} \rightarrow AGTG, \alpha^{45} \rightarrow TTGC, \alpha^{46} \rightarrow AGTC, \alpha^{47} \rightarrow AGGT,$   
 $\alpha^{48} \rightarrow CAAA, \alpha^{49} \rightarrow GATA, \alpha^{50} \rightarrow GTTT, \alpha^{51} \rightarrow ACCA,$   
 $\alpha^{52} \rightarrow AGGG, \alpha^{53} \rightarrow ACAT, \alpha^{54} \rightarrow AGGC, \alpha^{55} \rightarrow AGCA,$   
 $\alpha^{56} \rightarrow AGCG, \alpha^{57} \rightarrow AGCC, \alpha^{58} \rightarrow ACAG, \alpha^{59} \rightarrow ACAC,$   
 $\alpha^{60} \rightarrow ACTG, \alpha^{61} \rightarrow CTCT, \alpha^{62} \rightarrow GATC, \alpha^{63} \rightarrow TTCA,$   
 $\alpha^{64} \rightarrow ATAA, \alpha^{65} \rightarrow CATA, \alpha^{66} \rightarrow TGCA, \alpha^{67} \rightarrow GGGA,$   
 $\alpha^{68} \rightarrow TGGT, \alpha^{69} \rightarrow CACT, \alpha^{70} \rightarrow TTAG, \alpha^{71} \rightarrow ACTC,$   
 $\alpha^{72} \rightarrow GTAC, \alpha^{73} \rightarrow ACGG, \alpha^{74} \rightarrow GACT, \alpha^{75} \rightarrow CGCT,$   
 $\alpha^{76} \rightarrow ACGC, \alpha^{77} \rightarrow ACCG, \alpha^{78} \rightarrow ACCC, \alpha^{79} \rightarrow CCTT,$   
 $\alpha^{80} \rightarrow GTAA, \alpha^{81} \rightarrow GCTT, \alpha^{82} \rightarrow TAAG, \alpha^{83} \rightarrow TACA,$   
 $\alpha^{84} \rightarrow TCAC, \alpha^{85} \rightarrow GAAG, \alpha^{86} \rightarrow GCCT, \alpha^{87} \rightarrow GAAC,$   
 $\alpha^{88} \rightarrow GATG, \alpha^{89} \rightarrow GAGG, \alpha^{90} \rightarrow TACG, \alpha^{91} \rightarrow GAGC,$   
 $\alpha^{92} \rightarrow TGCC, \alpha^{93} \rightarrow GACG, \alpha^{94} \rightarrow GGCT, \alpha^{95} \rightarrow GACC,$   
 $\alpha^{96} \rightarrow CTAA, \alpha^{97} \rightarrow GTTA, \alpha^{98} \rightarrow GCTA, \alpha^{99} \rightarrow CGGA,$   
 $\alpha^{100} \rightarrow GATT, \alpha^{101} \rightarrow TCCG, \alpha^{102} \rightarrow GTTG, \alpha^{103} \rightarrow TAGT,$   
 $\alpha^{104} \rightarrow TGGC, \alpha^{105} \rightarrow TCTT, \alpha^{106} \rightarrow CCCT, \alpha^{107} \rightarrow CTAT,$   
 $\alpha^{108} \rightarrow GTGG, \alpha^{109} \rightarrow TAGC, \alpha^{110} \rightarrow GTGC, \alpha^{111} \rightarrow GTCG,$   
 $\alpha^{112} \rightarrow AGAA, \alpha^{113} \rightarrow CTTA, \alpha^{114} \rightarrow CCTA, \alpha^{115} \rightarrow ACGA,$   
 $\alpha^{116} \rightarrow CTCA, \alpha^{117} \rightarrow CAAG, \alpha^{118} \rightarrow TGAT, \alpha^{119} \rightarrow GGGG,$   
 $\alpha^{120} \rightarrow CAGC, \alpha^{121} \rightarrow TGGG, \alpha^{122} \rightarrow TTAC, \alpha^{123} \rightarrow CAGT,$   
 $\alpha^{124} \rightarrow GGCC, \alpha^{125} \rightarrow GTCC, \alpha^{126} \rightarrow ATTT, \alpha^{127} \rightarrow TGCT,$   
 $\alpha^{128} \rightarrow TGAA, \alpha^{129} \rightarrow AGTA, \alpha^{130} \rightarrow GAGA, \alpha^{131} \rightarrow GCGA,$   
 $\alpha^{132} \rightarrow CATG, \alpha^{133} \rightarrow GTAG, \alpha^{134} \rightarrow CGGT, \alpha^{135} \rightarrow CGAC,$   
 $\alpha^{136} \rightarrow CAAC, \alpha^{137} \rightarrow CTCG, \alpha^{138} \rightarrow CATC, \alpha^{139} \rightarrow TCTG,$   
 $\alpha^{140} \rightarrow TTGT, \alpha^{141} \rightarrow CTCC, \alpha^{142} \rightarrow GTGT, \alpha^{143} \rightarrow GCGC,$

Çizelge 3. 2  $4^2$  -kuvvet tablosu (devamı)

$$\begin{aligned}
 &\alpha^{144} \rightarrow TTAA, \alpha^{145} \rightarrow TCAT, \alpha^{146} \rightarrow CAGA, \alpha^{147} \rightarrow CCGA, \\
 &\alpha^{148} \rightarrow GGCA, \alpha^{149} \rightarrow GGAG, \alpha^{150} \rightarrow TTCT, \alpha^{151} \rightarrow GGGT, \\
 &\alpha^{152} \rightarrow GCTC, \alpha^{153} \rightarrow TCCT, \alpha^{154} \rightarrow AGTT, \alpha^{155} \rightarrow GGGC, \\
 &\alpha^{156} \rightarrow ACCT, \alpha^{157} \rightarrow GAGT, \alpha^{158} \rightarrow GTAT, \alpha^{159} \rightarrow TTAT, \\
 &\alpha^{160} \rightarrow GGAA, \alpha^{161} \rightarrow TGTA, \alpha^{162} \rightarrow CAAT, \alpha^{163} \rightarrow GACA, \\
 &\alpha^{164} \rightarrow TCAG, \alpha^{165} \rightarrow GCAT, \alpha^{166} \rightarrow TCCC, \alpha^{167} \rightarrow CATT, \\
 &\alpha^{168} \rightarrow CTAC, \alpha^{169} \rightarrow TTGA, \alpha^{170} \rightarrow CTTC, \alpha^{171} \rightarrow GGAC, \\
 &\alpha^{172} \rightarrow CCAC, \alpha^{173} \rightarrow GCGT, \alpha^{174} \rightarrow CTGG, \alpha^{175} \rightarrow CTTG, \\
 &\alpha^{176} \rightarrow CGAA, \alpha^{177} \rightarrow GGTA, \alpha^{178} \rightarrow TACC, \alpha^{179} \rightarrow CACA, \\
 &\alpha^{180} \rightarrow TCGC, \alpha^{181} \rightarrow CGAG, \alpha^{182} \rightarrow TATC, \alpha^{183} \rightarrow TGAC, \\
 &\alpha^{184} \rightarrow GTCT, \alpha^{185} \rightarrow CGGG, \alpha^{186} \rightarrow CAGG, \alpha^{187} \rightarrow GCCG, \\
 &\alpha^{188} \rightarrow TAGG, \alpha^{189} \rightarrow AGAT, \alpha^{190} \rightarrow CTGC, \alpha^{191} \rightarrow GCCC, \\
 &\alpha^{192} \rightarrow ACAA, \alpha^{193} \rightarrow CGTA, \alpha^{194} \rightarrow GTGA, \alpha^{195} \rightarrow GTCA, \\
 &\alpha^{196} \rightarrow CGCA, \alpha^{197} \rightarrow CCGT, \alpha^{198} \rightarrow GGTG, \alpha^{199} \rightarrow CCGG, \\
 &\alpha^{200} \rightarrow TGTT, \alpha^{201} \rightarrow TCCA, \alpha^{202} \rightarrow CACC, \alpha^{203} \rightarrow GGAT, \\
 &\alpha^{204} \rightarrow TAAT, \alpha^{205} \rightarrow GGCG, \alpha^{206} \rightarrow TGTC, \alpha^{207} \rightarrow TTTC, \\
 &\alpha^{208} \rightarrow TCAA, \alpha^{209} \rightarrow ACTA, \alpha^{210} \rightarrow CGTT, \alpha^{211} \rightarrow TCTC, \\
 &\alpha^{212} \rightarrow GCCA, \alpha^{213} \rightarrow GCAG, \alpha^{214} \rightarrow CGAT, \alpha^{215} \rightarrow CCTG, \\
 &\alpha^{216} \rightarrow CCTC, \alpha^{217} \rightarrow TGAG, \alpha^{218} \rightarrow TGCG, \alpha^{219} \rightarrow TAGA, \\
 &\alpha^{220} \rightarrow GCGG, \alpha^{221} \rightarrow CCCC, \alpha^{222} \rightarrow GGTT, \alpha^{223} \rightarrow CGCC, \\
 &\alpha^{224} \rightarrow GCAA, \alpha^{225} \rightarrow TCTA, \alpha^{226} \rightarrow CTGA, \alpha^{227} \rightarrow CTAG, \\
 &\alpha^{228} \rightarrow CCCA, \alpha^{229} \rightarrow TCGG, \alpha^{230} \rightarrow CGTG, \alpha^{231} \rightarrow TTTA, \\
 &\alpha^{232} \rightarrow TGTG, \alpha^{233} \rightarrow TATG, \alpha^{234} \rightarrow GGTC, \alpha^{235} \rightarrow CGTC, \\
 &\alpha^{236} \rightarrow CTGT, \alpha^{237} \rightarrow TTGG, \alpha^{238} \rightarrow CGGC, \alpha^{239} \rightarrow CACG, \\
 &\alpha^{240} \rightarrow CCAA, \alpha^{241} \rightarrow TCGA, \alpha^{242} \rightarrow TGGA, \alpha^{243} \rightarrow ACTT, \\
 &\alpha^{244} \rightarrow TTCC, \alpha^{245} \rightarrow CCAG, \alpha^{246} \rightarrow GCTG, \alpha^{247} \rightarrow TCGT, \\
 &\alpha^{248} \rightarrow CGCG, \alpha^{249} \rightarrow TATT, \alpha^{250} \rightarrow GTTC, \alpha^{251} \rightarrow CCCG, \\
 &\alpha^{252} \rightarrow CTTT, \alpha^{253} \rightarrow CCGC, \alpha^{254} \rightarrow GCAC, 1 \rightarrow TTTT.
 \end{aligned}$$

**Örnek 3.13** Benzer şekilde DNA 2-bazlıları için  $F_{16}$  'da, 4-kuvvet tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

Çizelge 3. 3 DNA 2-bazlıları için 4-kuvvet tablosu

| DNA 2-bazlısı | $F_{16}$ elemanlar                               |
|---------------|--------------------------------------------------|
| AA            | 0                                                |
| TT            | $\alpha^0 = 1$                                   |
| AT            | $\alpha^1 = \alpha$                              |
| GC            | $\alpha^2 = \alpha^2$                            |
| AG            | $\alpha^3 = \alpha^3$                            |
| TA            | $\alpha^4 = 1 + \alpha$                          |
| CC            | $\alpha^5 = \alpha + \alpha^2$                   |
| AC            | $\alpha^6 = \alpha^2 + \alpha^3$                 |
| GT            | $\alpha^7 = 1 + \alpha + \alpha^3$               |
| CG            | $\alpha^8 = 1 + \alpha^2$                        |
| CA            | $\alpha^9 = \alpha + \alpha^3$                   |
| GG            | $\alpha^{10} = 1 + \alpha + \alpha^2$            |
| CT            | $\alpha^{11} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$     |
| GA            | $\alpha^{12} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$ |
| TG            | $\alpha^{13} = 1 + \alpha^2 + \alpha^3$          |
| TC            | $\alpha^{14} = 1 + \alpha^3$                     |

Aşağıdaki tanımlama, kodsözler ile DNA kodsözlerinin (parçalarının) arasındaki geçişi ifade etmektedir.

**Tanım 3.14**  $C$ ,  $F_{4^{2k}}$ 'de  $n$  uzunluğunda bir kod olsun ve  $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ ,  $c_i \in F_{4^{2k}}$  olmak üzere  $c \in C$  bir kodsöz olsun. Her  $c_i$  koordinatı  $(b_{2ki}, b_{2ki+1}, \dots, b_{2ki+2k-1})$ 'e ( $i = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ) karşılık gelecek şekilde  $\Theta: C \rightarrow S_{D_4}^{2kn}$ ,  $\Theta(c) = \Theta((c_0, c_1, \dots, c_{n-1})) = (b_0, b_1, \dots, b_{2kn-1})$  dönüşümü tanımlanır. Burada  $b_j \in S_{D_4}$  ve  $j \in \{0, 1, \dots, 2kn-1\}$  için  $\Theta(c) = (b_0, b_1, \dots, b_{2kn-1})$ ,  $\Theta(C)$  DNA kodunun bir DNA kodsözüdür.

Örneğin,  $F_{256}$  için  $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (\alpha, \alpha^{30}, \alpha^{72}, \alpha^{210}) \rightarrow (AAATATCTGTACCGTT) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{15})$  olur.

$F_{4^{2k}}$  ile TS DNA kodlarını elde etmek için yükseltilmiş polinomlarının yeni bir formu aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 3.15**  $g(x)$ ,  $\mathbb{Z}_2$ 'de kendine resiprokal bir polinom ve  $g(x)|(x^n-1)$ ,  $\deg(g(x)) = t$  olsun.  $g(x)$ 'in  $F_{4^{2k}}[x]$ 'de bir  $4^k$ -yükseltilmiş polinomu  $\ell_g^{(4^k)}(x)$  ile ifade edilir.  $\ell_g^{(4^k)}(x)$ ,  $\beta_i \in F_{4^{2k}} - \{0\}$  olmak üzere eğer  $t$  tek ise

$$\ell_g^{(4^k)}(x) = \sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} \tau_i; \quad \tau_i = \begin{cases} \beta_i^v x^i + \beta_i^{4^k v} x^{t-i} & , a_i \neq 0 \\ 0 & , a_i = 0 \end{cases},$$

Eğer  $t$  çift ise

$$\ell_g^{(4^k)}(x) = \sum_{i=0}^{\frac{t}{2}} \tau_i; \quad \tau_i = \begin{cases} \beta_i^v x^i + \beta_i^{4^k v} x^{t-i} & , a_i \neq 0, i \neq t/2 \\ 0 & , a_i = 0 \\ \beta_{\frac{t}{2}} x^{\frac{t}{2}} & , a_i \neq 0, i = t/2, \\ \beta_{\frac{t}{2}} \in \{0, 1, \alpha^{4^k+1}, \alpha^{2(4^k+1)}, \dots, \alpha^{(4^k-2)(4^k+1)}\} \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır.  $\ell_g^{(4^k)}(x)$  kısaca  $\ell^{(4^k)}$  şeklinde de ifade edilebilir.

**Örnek 3.16**  $n=17$  ve  $g(x)=1+x^3+x^4+x^5+x^8$  kendine resiprokal polinom ve  $Z_2$ 'de  $g(x)|(x^{17}-1)$  olsun.  $F_{256}$ 'da  $g(x)$ 'in bazı 16-yükseltilmiş polinomları aşağıdaki gibidir.

$$\ell_g^{(16)}(x) = \alpha + \alpha^4 x^3 + x^4 + \alpha^{4 \cdot 16} x^5 + \alpha^{16} x^8 \text{ veya}$$

$$\ell_g^{(16)}(x) = \alpha^{10} + \alpha^6 x^3 + \alpha^{17} x^4 + \alpha^{96} x^5 + \alpha^{160} x^8.$$

**Teorem 3.17**  $n$  tek için,  $F_{4^{2k}}$ 'de,  $g(x)|(x^n-1)(\text{mod } 2)$  ve  $\deg(g(x))=t$  olmak üzere,

$g(x)$  kendine resiprokal polinomunun bir  $4^k$ -yükseltilmiş polinomu  $\ell_g^{(4^k)}(x)$  olsun.

$C_{\ell^{(4^k)}} = \langle S_{\ell^{(4^k)}} \rangle$  kodunu üreten üreteç kümesi aşağıdaki gibidir.

$$S_{\ell^{(4^k)}} = \{\ell_g^{(4^k)}(x), x\ell_g^{(4^k)}(x), \dots, x^{n-t-1}\ell_g^{(4^k)}(x)\}.$$

Buradan  $\Theta(C_{\ell^{(4^k)}})$   $2kn$  uzunluğunda bir TS DNA koddur ve  $C_{\ell^{(4^k)}}, C_{\ell^{(4^k)}} = \langle \ell_g^{(4^k)}(x) \rangle$

şeklinde de ifade edilebilir.

**İspat:**  $\Theta(C_{\ell^{(4^k)}})$ 'nin DNA kodsözleri  $\Theta(\sum_i \beta_i x^i l_g^{(4^k)})$  ile tanımlanır.  $i \in \{0, 1, \dots, n-t-1\}$

olmak üzere, DNA kodsözlerin ters sırası da aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\Theta(\sum_i \beta_i x^i l_g^{(4^k)}(x))^r = \Theta(\sum_i \beta_i^{4^k} x^{n-t-1-i} l_g^{(4^k)}(x))$$

Önerme 3.4'ten,  $C_{\ell^{(4^k)}}$ 'nın üreteç kümesi  $S_{\ell^{(4^k)}}$ 'in yapısı nedeniyle yukarıdaki gibi her

kodsözün ters sırası belirlenebildiğinden  $\Theta(C_{\ell^{(4^k)}})$  bir TS DNA koddur.

$\langle \ell_g^{(4^k)}(x) \rangle$ ,  $S_{\ell^{4^k}}$  kümeleri tarafından üretilen  $F_{4^{2k}}$ -lineer koddur, ideal değildir.

**Örnek 3.18**  $Z_2$ 'de,  $n=9$  için,  $g(x)=1+x+x^2$  kendine resiprokal polinomunun 16-yükseltilmiş polinomu,  $F_{256}$ 'da  $\ell_g^{(16)}(x)=\alpha+x+\alpha^{16}x^2$  şeklinde alınsın.  $\ell_g^{(16)}(x)$  için geren matris

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matris ile üretirken kod  $C_{\ell^{(16)}} = \langle S_{\ell^{(16)}} \rangle$  olup,  $[9, 7, 3]_{256}$  parametrelerine sahiptir. Bu kod maksimum Griesmer sınırını sağlayan optimal bir koddur. Aynı zamanda  $(\Theta(C_{\ell^{(16)}}))$  bir TS DNA koddur.

**Teorem 3.19**  $n$  tek için,  $F_{4^{2k}}$ 'de,  $g(x)|(x^n-1)(\text{mod } 2)$  ve  $\deg(g(x))=t$  olmak üzere,  $g(x)$  kendine resiprokal polinomunun bir  $4^k$ -yükseltilmiş polinomu  $\ell_g^{(4^k)}(x)$  olsun ve  $r(x)=1+x+\dots+x^{n-1}$  olsun.  $C_{\ell^{(4^k)},r} = \langle S_{\ell^{(4^k)},r} \rangle$  kodunu üreten üreteç kümesi aşağıdaki gibidir.

$$S_{\ell^{(4^k)},r} = \{\ell_g^{(4^k)}(x), x\ell_g^{(4^k)}(x), \dots, x^{n-t-1}\ell_g^{(4^k)}(x), r(x)\}.$$

Buradan  $\Theta(C_{\ell^{(4^k)},r})$   $2kn$  uzunluğunda bir TST DNA koddur ve  $C_{\ell^{(4^k)},r}$ ,

$$C_{\ell^{(4^k)},r} = \langle \ell_g^{(4^k)}(x), r(x) \rangle \text{ şeklinde de ifade edilebilir.}$$

**İspat:** Teorem 3.17 ile benzer şekilde oluşmaktadır.  $r(x)$ , +1 ile toplama kuralı ile, kodun tamlayan kısmını meydana getirmektedir.

**Örnek 3.20** Örnek 3.18'ye göre  $r(x)$  tamlayan kısmını eklediğimizde  $C_{\ell^{(16)},r} = \langle S_{\ell^{(16)},r} \rangle = \langle \ell_g^{(16)}(x), r(x) \rangle$  [9,8,2] parametrelerine sahip, maksimum Griesmer sınırını sağlayan optimal kod elde edilir. Ayrıca  $(\Theta(C_{\ell^{(16)},r}))$  TST DNA koddur. Üreteç matrisi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^{16} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Yükseltilmiş Polinomların Halkalara Genelleştirilmesi ve DNA Uygulamaları

Bu alt bölümde yükseltilmiş polinomların sonlu halkalara genelleştirilmesine çalışılmıştır. Amaç,  $x^n - 1$ 'i bölen polinomları alıp, belirli bir kurala göre, sonlu halkalar üzerinde oluşturmak ve  $x^n - 1$ 'i bölen polinomlar sayesinde üretilen kodların parametrelerini belirlemede kolaylık sağlamaktır. Yükseltilmiş polinomların halkalardaki uygulaması için özel olarak  $F_2[u]/(u^{2^k} - 1)$  halkası kullanılarak DNA TS ve TST kodlar üretilmiştir.

**Tanım 3.21**  $R$  sonlu bir halka ve  $R_1$  ve  $R_2$ ,  $R$  halkası üzerinden türetilmiş ( $R_1$ 'in bir kopyası  $R_2$  içinde olmak üzere) sonlu halkalar (bölüm halkaları) veya  $R_2$ ,  $R_1$  tarafından türetilmiş (cisimden halkaya genişleme, cisimden cisme genişleme) olsun ve halkaların eleman sayıları arasındaki ilişki  $|R_1| < |R_2|$  şeklinde olsun.  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_tx^t$ ,  $R_1[x]$ 'de bir polinom ve  $g(x) | (x^n - 1)$  olsun.  $g(x)$ ' in bir "halka yükseltilmiş polinomu"  $\ell_{Rg}(x) \in R_2[x]$  şeklinde tanımlanıp aşağıdaki gibi ifade edilir.  $\beta_i \in U_{R_2}$  ve  $z \in Z_{R_2}$  ( $Z_{R_1}$  sıfır bölenler kümesi)  $zs \in Z_{R_2} \cup \{0\}$  olmak üzere

$$\ell_{Rg}(x) = \sum_{i=0}^t \theta_i x^i; \quad \theta_i = \begin{cases} \beta_i x^i & , a_i \in U_{R_1} \\ z_i x^i & , a_i \in Z_{R_1}, z_i \neq 0 \\ z s_i x^i & , a_i = 0 \end{cases}$$

**Örnek 3.22**  $R = \mathbb{Z}$  olmak üzere  $R_1 = \mathbb{Z} / (2) \cong \mathbb{Z}_2$  ve  $R_2 = \mathbb{Z} / (4) \cong \mathbb{Z}_4$ .

**Örnek 3.23**  $R_1 = \mathbb{Z}_2$  olmak üzere  $R_2 = \mathbb{Z}_2[u] / (u^3 - 1)$ .

**Teorem 3.24**  $\ell_{Rg}(x)$ ,  $R_2$ 'de  $g(x) \in F_2$ 'nin halka yükseltmiş polinomu ve  $R_1$ 'de  $g(x) | (x^n - 1)$ ,  $\deg(g(x)) = t$  olmak üzere,

$$S = \{\ell_{Rg}(x), x\ell_{Rg}(x), \dots, x^{n-t-1}\ell_{Rg}(x)\}$$

kümesi ile üretilen bir kod  $C_\ell = \langle S \rangle$  şeklinde gösterilir.

Burada değişmeli halkalar genel olarak  $R$  ile gösterilmektedir. Bir sonraki bölüm için özel olarak, karakteristiği 2 olan ve  $2^k$  elemanlı

$$\mathcal{R}_k = F_2[u] / (u^k - 1) = \{a_0 + a_1u + \dots + a_{k-1}u^{k-1} \mid a_i \in F_2, u^k = 1\}$$

değişmeli sonlu halka kullanılmaktadır.

$R$  üzerinde,  $n$  uzunluğundaki bir  $C$  lineer kodu  $R^n$ 'nin  $R$ -alt modülüdür.

**Tanım 3.25** Bir  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in R^n$  elemanı için  $\tau(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-2})$  şeklinde tanımlanan  $\tau$  fonksiyonuna (permutasyonuna) “devirli sağ kaydırma” fonksiyonu denir.

$c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} \in R[x]$  polinomlarının  $R^n$  üzerindeki elemanlar şeklindeki görüntüsü  $\Phi(c(x)) = \bar{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  ile ifade edilir.

$\tau^i$ ; eğer  $i$  pozitif ise  $i$ . sağ kaydırmayı, eğer  $i$  negatif ise  $i$ . sol kaydırmayı ifade etmektedir.

Örneğin;

$$\tau^2(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_{n-2}, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-3}) \text{ ve}$$

$$\tau^{-1}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0).$$

### 3.5 DNA $k$ -bazlıları ile $\mathcal{R}_{2k}$ Elemanları Arasındaki Eşleştirme

Bu bölümde  $\mathcal{R}_{2k}$  halkası üzerinde ters sıra ve ters sıra tamlayan özelliğini sağlayan kodlar elde etmek amaçlanmaktadır. DNA  $k$  -bazlıları ile  $\mathcal{R}_{2k}$  halkasının elemanları arasında bir eşleme sistemi kurulmuştur. Ters sıralama problemi önceki bölümde olduğu gibi burada da ortaya çıkmaktadır. Örneğin;  $u_1 = 1 + u + u^2$ ,  $u_2 = u + u^3 + u^4 + u^5$ ,  $u_3 = u + u^2 + u^3 + u^4 \in \mathcal{R}_6$  olacak şekilde  $(u_1, u_2, u_3)$  bir kodsöz ve DNA karşılığı AGTTCCGTC şeklinde olsun.  $(u_1, u_2, u_3)$ 'nin tersi  $(u_3, u_2, u_1)$  olup, DNA karşılığı GTCTCCAGT olmaktadır. GTCTCCAGT, AGTTCCGTC'nin ters sırası değildir. Yeni tip polinomlar ve oluşturulan teoremler ile bu problem ileriki bölümlerde çözülmüştür.

**Tanım 3.26**  $\mathfrak{T}$ ,  $R$ 'nin bir alt halkası olsun.  $C$ ,  $R[x]/(x^n - 1)$ 'de  $g(x)$  ile  $C = \{(r_0 + r_1x + \dots + r_{n-1}x^{n-1})g(x) \mid r_i \in \mathfrak{T}\}$ 'deki gibi üretiliyorsa veya  $S = \{c_1, c_2, \dots, c_z\}$ ,  $R^n$ 'de  $C$  kodunu  $C = \{r_0c_1 + r_1c_2 + \dots + r_zc_z \mid r_i \in \mathfrak{T}\}$  şeklinde üreten bir alt küme ise,  $C$ 'ye bir  $\mathfrak{T}$  - modül kod denir. Eğer  $\mathfrak{T}$ ,  $x \in R$  gibi tek eleman ile üretiliyorsa, koda  $x$  - modül kod denir.

**Tanım 3.27**  $\mathcal{R}_{2k}$ 'nin elemanları özel olarak 1ler,  $u^2$  ler,  $u^4$  ler,  $\dots$ ,  $u^{2(k-1)}$  ler basamakları ile ifade edilir.

$$\alpha = r_0 + r_1u + r_2u^2 + r_3u^3 + \dots + r_{2k-1}u^{2k-1} + r_{2k}u^{2k} \in \mathcal{R}_{2k}$$

$$\Rightarrow \alpha = r_0 + r_1u + (r_2 + r_3u)u^2 + \dots + (r_{2k-1} + r_{2k}u)u^{2k-1} \in \mathcal{R}_{2k}$$

şeklinde tek türlü yazılır.

Bu basamak sistemine  $u^2$  -adik sistem denir. Diğer bir deyişle  $\mathcal{R}_{2k}$ 'nin herhangi bir elemanı, katsayılar  $F_2[u]/(u^2 - 1)$ 'den olmak üzere,  $1, u^2, u^4, \dots, u^{2(k-1)}$  lerin lineer kombinasyonları ile ifade edilir.

[19]'da,  $Z_4$  halkasının elemanları ile DNA'nın 4 bazı arasındaki 24 farklı eşleme test edilerek bir DNA zincirine (en az bir hata ile) eş kodsözler bulunmuştur. Yukarıda tanımlanan  $u^2$  -adik sistem yardımıyla  $k$  uzunluğunda bir DNA parçası veya tüm DNA zinciri  $\mathcal{R}_{2k}$ 'nin bir elemanına veya  $n$  uzunluğundaki bir kodsözle eşleştirilebilmektedir.

[12]'de DNA bazları ve  $\mathcal{R}_2 = F_2[u]/(u^2 - 1)$  halkası elemanları arasında doğal bir eşleme kurulmuştur. Bu eşleme  $A \rightarrow 0, T \rightarrow 1+u, C \rightarrow u, G \rightarrow 1$  şeklindedir. Buradaki amacımız  $\mathcal{R}_{2k}$  halkasının elemanları ile DNA  $k$ -bazlılarının eşleştirilmesini sağlamak. Bu eşleştirme ve cebirsel olarak kodlarla ifade için, oluşturulan  $u^2$ -adik sisteminden ve tanımlanan  $u^2$ -modül kodlardan faydalanılmıştır.

[12]'deki DNA bazlarının  $\mathcal{R}_2$ 'deki halka elemanları ile eşleşmesi  $\eta$  ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\eta(A) = 0, \eta(T) = 1+u, \eta(G) = 1 \text{ ve } \eta(C) = u.$$

**Tanım 3.28**  $b_i \in \{A, T, G, C\}$  olmak üzere  $b_1 b_2 \dots b_k$  bir DNA  $k$ -bazlısı olsun. Bu DNA  $k$ -bazlısının  $u^2$ -adik sistem yardımı ile  $\mathcal{R}_{2k}$  halkasındaki karşılığı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\zeta(b_1 b_2 \dots b_k) = \alpha \in \mathcal{R} \text{ olmak üzere}$$

$$\alpha = \eta(b_k)1 + \eta(b_{k-1})u^2 + \eta(b_{k-2})u^4 + \dots + \eta(b_1)u^{2(k-1)} = \sum_{t=1}^k \eta(b_t)u^{2(k-t)} \text{ şeklindedir.}$$

**Örnek 3.29** TCGCAT, DNA 6-bazlısının  $\mathcal{R}_{12} = \mathbb{Z}_2[u]/(u^{12} - 1)$ 'deki karşılığı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\text{TCGCAT} \rightarrow \zeta(\text{TCGCAT}) = \eta(T)1 + \eta(A)u^2 + \eta(C)u^4 + \eta(G)u^6 + \eta(C)u^8 + \eta(T)u^{10}.$$

Basamak sistemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir;

|                           |          |       |       |       |       |       |
|---------------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Basamaklar                | $u^{10}$ | $u^8$ | $u^6$ | $u^4$ | $u^2$ | 1     |
| DNA                       | T        | C     | G     | C     | A     | T     |
| $\mathcal{R}_2$ karşılığı | $1+u$    | $u$   | 1     | $u$   | 0     | $1+u$ |

Dolayısıyla,

$$\text{TCGCAT} \rightarrow \zeta(\text{TCGCAT}) = (1+u)1 + (0)u^2 + (u)u^4 + (1)u^6 + (u)u^8 + (1+u)u^{10}$$

ve buradan

$$\text{TCGCAT} \rightarrow \zeta(\text{TCGCAT}) = 1+u+u^5+u^6+u^9+u^{10}+u^{11}$$

elde edilir.

**Önerme 3.30** Eğer  $\alpha \in \mathcal{R}_{2k}$  ve  $\zeta(b_1 b_2 \dots b_k) = \alpha$  ise  $\zeta^{-1}(u^2 \alpha) = b_2 \dots b_k b_1$  sağlanır.

**İspat:**  $u^2$ -adik sitemin özelliğinden dolayı halkanın elemanını  $u^2$  ile çarpmak DNA karşılığındaki DNA  $k$ -bazlısının sırasını sola doğru devirli olarak bir kaydırır.

**Tanım 3.31**  $\mathfrak{B}^k = b_1 b_2 \dots b_k$  DNA  $k$ -bazlısı olsun.  $(\mathfrak{B}_1^k, \mathfrak{B}_2^k, \dots, \mathfrak{B}_n^k)$   $n$  li DNA  $k$ -bazlısı olarak adlandırılır ve aşağıdakiler tanımlanır:

$\mathfrak{B}^k$  'nın ters sırası  $(\mathfrak{B}^k)^r = b_k b_{k-1} \dots b_1$  şeklindedir.

$\mathfrak{B}^k$  'nın tamlayanı  $(\mathfrak{B}^k)^c = b_1^c b_2^c \dots b_k^c$  şeklindedir.

$\mathfrak{B}^k$  'nın ters sıra tamlayanı  $(\mathfrak{B}^k)^{rc} = b_k^c b_{k-1}^c \dots b_1^c$  şeklindedir.

$\zeta(\mathfrak{B}_1^k, \mathfrak{B}_2^k, \dots, \mathfrak{B}_n^k) = (\zeta(\mathfrak{B}_1^k), \zeta(\mathfrak{B}_2^k), \dots, \zeta(\mathfrak{B}_n^k))$ .

**Teorem 3.32**  $p(u) \in \mathcal{R}_{2k}$   $u$ 'ya bağlı bir polinom olsun.  $d(u)$ ,  $p(u)$ 'nun tek kuvvetli terimlerini ve  $e(u)$ ,  $p(u)$ 'nun çift kuvvetli terimlerini gösterebilir.  $\varphi(p(u)) = u^{2k} d(1/u) + u^{2k-2} e(1/u)$  şeklinde ifade edilsin.  $\varphi(p(u))$ 'nın DNA karşılığı,  $p(u)$ 'nin DNA karşılığının ters sırasıdır. Yani,  $\zeta^{-1}(\varphi(p(u))) = (\zeta^{-1}(p(u)))^r$ 'dir.

**İspat:**  $\eta^{-1}(a_1 + b_1 u) \eta^{-1}(a_2 + b_2 u) \dots \eta^{-1}(a_k + b_k u)$  DNA  $k$ -bazlısı olsun. Dolayısıyla,  $p(u) = \zeta(\mathfrak{B}^k) = a_k + b_k u + (a_{k-1} + b_{k-1} u) u^2 + \dots + (a_1 + b_1 u) u^{2k-2}$  olur.

Çift ve tek kuvvetliler ayrı ayrı gösterilirse;

$$p(u) = e(u) + d(u) = (a_k + a_{k-1} u^2 + \dots + a_1 u^{2k-2}) + (b_k u + b_{k-1} u^3 + \dots + b_1 u^{2k-1})$$

olur.

$$\begin{aligned} \varphi(p(u)) &= u^{2k-2} e(1/u) + u^{2k} d(1/u) \\ &= u^{2k-2} (a_k + a_{k-1} (1/u^2) + \dots + a_1 (1/u^{2k-2})) + u^{2k} (b_k (1/u) + \dots + b_1 (1/u^{2k-1})) \\ &= a_1 + b_1 u + (a_2 + b_2 u) u^2 + \dots + (a_k + b_k u) u^{2k-2} \end{aligned}$$

olur ve  $\zeta^{-1}(\varphi(p(u))) = \eta^{-1}(a_k + b_k u) \dots \eta^{-1}(a_1 + b_1 u)$  elde edilir. Bunun anlamı  $\zeta^{-1}(\varphi(p(u))) = (\mathfrak{B}^k)^r$ 'dir.

**Örnek 3.33**  $\mathcal{R}_6 = F_2[u]/(u^6 - 1)$  halkası için,  $u^2 + u^3 + u^5 = \text{CTA}$  ise  $\varphi(u^2 + u^3 + u^5) = u + u^2 + u^3 = \text{ATC}$  dir

**Örnek 3.34**  $p(u) = 1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^7 \in \mathcal{R}_8$ ,  $\zeta^{-1}(p(u)) = \text{CGTG}$ ,  
 $\varphi(p(u)) = u + u^2 + u^4 + u^5 + u^6$ ,  $\zeta^{-1}(\varphi(p(u))) = \text{GTGC}$ .

### 3.6 DNA Kodları İçin $\varphi$ -Yükseltilmiş Polinomlar

Bu alt bölümde  $\mathcal{R}_{2^k}$  halkası üzerinde çalışılmıştır. TS ve TST DNA kod üretebilmek için, halka yükseltilmiş polinomlarının özel bir formu olan,  $\varphi$ -yükseltilmiş polinomu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Aşağıda ifade edilen tanım ve teorem sayesinde üretilen kodların parametrelerini ve eleman sayılarını bilmek mümkün olmaktadır.

**Tanım 3.35**  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_tx^t$ ,  $Z_2$ 'da bir polinom ve  $g(x) \mid (x^n - 1)$  olsun.  $g(x)$ ' in  $\varphi$ -yükseltilmiş polinomu  $\ell_g^\varphi(x) \in \mathcal{R}_{2^k}[x]$  şeklinde tanımlanıp aşağıdaki gibi ifade edilir.  $\beta_i \in U_{\mathcal{R}_{2^k}}$  ve  $z \in Z_{\mathcal{R}_{2^k}}$  ( $Z$  sıfır bölenler)  $zs \in Z_{\mathcal{R}_{2^k}} \cup \{0\}$  olmak üzere  $t$  tek ise,

$$\ell_g^\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} \theta_i; \quad \theta_i = \begin{cases} \beta_i x^i + \varphi(\beta_i) x^{t-i} & , a_i \neq 0 \\ zs_i x^i + \varphi(zs_i) x^{t-i} & , a_i = 0 \end{cases},$$

Eğer  $t$  çift ise,

$$\ell_g^\varphi(x) = \sum_{i=0}^{t/2} \theta_i; \quad \theta_i = \begin{cases} \beta_i x^i + \varphi(\beta_i) x^{t-i} & , a_i \neq 0, i \neq t/2 \\ zs_i x^i + \varphi(zs_i) x^{t-i} & , a_i = 0 \\ zs_{t/2} x^{t/2} & , a_i = 0, i = t/2, zs_{t/2} = \varphi(zs_{t/2}). \end{cases}$$

Bu kısımda  $\mathcal{R}_{2^k}$  halkasının kullanılma nedeni,  $\varphi$ -yükseltilmiş polinomunun tanımı gereği, bir birimsel (veya sıfır bölen) elemanın  $\varphi$  altındaki karşılığı da birimsel (veya sıfır bölen) olmak zorundadır ve bu durum  $\mathcal{R}_{2^k}$  halkalarında (zincir halkası olmaları nedeniyle) düzgün çalışırken  $\mathcal{R}_{2^k}$  dışındaki  $\mathcal{R}_k$  formundaki halkalar için sorun teşkil etmektedir. Örneğin,  $\mathcal{R}_6 = F_2[u]/(u^6 - 1)$  alındığında  $\text{CTA} = u^2 + u^3 + u^5$  birimsel elemanın  $\varphi$  karşılığı  $\varphi(u^2 + u^3 + u^5) = u + u^2 + u^3 = \text{ATC}$  şeklinde bir sıfır bölen

eleman olmaktadır. Bu  $\varphi$ -yükseltirilmiş polinomunun tanımı gereği istenmeyen bir durumdur.

**Teorem 3.36**  $\ell_g^\varphi(x)$   $\mathcal{R}_{2^k}$ 'de  $g(x) \in F_2$ 'nin  $\varphi$ -yükseltirilmiş polinomu ve  $g(x) \mid (x^n - 1)(\text{mod } 2)$ ,  $\deg(g(x)) = t$  olmak üzere,

$$S = \{\ell_g^\varphi(x), x\ell_g^\varphi(x), \dots, x^{n-t-1}\ell_g^\varphi(x)\}$$

kümesi ile üretilen bir  $u^2$ -modül kodu  $C_\ell = \langle S \rangle$  bir TS DNA koddur. Tamlayanlık satırı olarak  $r(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$  eklendiğinde TST DNA kod olup  $C_\ell = \langle \ell_{Rg}^\varphi(x), r(x) \rangle$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.37**  $g(x) = 1 + x + x^4 + x^5 \mid x^8 - 1$ ,  $F_2$ 'de bir polinom ve  $\mathcal{R}_8$ 'daki  $\varphi$ -yükseltirilmiş polinomu  $\ell_g^\varphi(x) = (u^5 + u^2 + u) + (u^6 + u^4 + u^3)x + (1 + u^2 + u^5)x^4 + (u^7 + u^4 + u^3)x^5$  olsun. Geren kümesinden oluşan satırların kümesi aşağıdaki şekilde gösterilmek üzere,

$$\begin{pmatrix} u^5 + u^2 + u & u^6 + u^4 + u^3 & 0 & 0 & 1 + u^2 + u^5 & u^7 + u^4 + u^3 & 0 & 0 \\ 0 & u^5 + u^2 + u & u^6 + u^4 + u^3 & 0 & 0 & 1 + u^2 + u^5 & u^7 + u^4 + u^3 & 0 \\ 0 & 0 & u^5 + u^2 + u & u^6 + u^4 + u^3 & 0 & 0 & 1 + u^2 + u^5 & u^7 + u^4 + u^3 \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşan kod 4096 elemanlı,  $d = 4$  olan,  $\mathcal{R}_8$ 'da bir  $u^2$ -modül koddur ve DNA karşılığı 32 uzunluğunda TS DNA koddur.

## EŞTERİMLİ POLİNOMLAR VE $F_2[u]/(u^{2k}-1)$ HALKASINDA DNA UYGULAMALARI

Bu bölümde “eşterimli” olarak adlandırılan polinomlar genel olarak tanımlanmıştır. Eşterimli polinomlar TS kodlar ve bu polinomların tanımlanan bir formu da TS ve TST DNA kodlar elde etmede yardımcı polinomlardır. İlk olarak [24]’da  $F_{16}$  toplamsal kodlar için ifade edilmiştir.

### 4.1 $R$ Üzerinde Eşterimli Polinomlar ile Ters Sıralı Kodlar

Eşterimli polinomlar genel olarak değişmeli halkalarda tanımlanmıştır. Burada değişmeli halkalar genel olarak  $R$  ile gösterilmektedir.

**Tanım 4.1**  $a_i \in R$  olmak üzere  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \in R[x]/(x^n - 1)$  için, eğer  $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$  olmak üzere  $a_i = a_{n-i}$  sağlanıyor ise  $f(x)$ ’e  $R$ ’de bir eşterimli polinomdur denir. Diğer bir deyişle eğer  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  kendine ters sıra ise  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ ,  $R[x]/(x^n - 1)$ ’de bir eşterimli polinomdur denir.

Örneğin;  $\mathcal{R}_2[x]/(x^5 - 1)$ ’de  $1 + (1+u)x^2 + (1+u)x^3$  ve  $\mathcal{R}_2[x]/(x^6 - 1)$ ’de  $1 + (1+u)x^3$  eşterimli polinomlardır.

Ters sıralı kodları bulmaya yarayan önerme aşağıdaki gibidir.

**Önerme 4.2**  $S \subseteq R^n$  boştan farklı bir küme ve  $\bar{c} \in S$  iken  $\bar{c}^r \in S$  olsun.  $S$  kümesi tarafından üretilen  $R$ -alt modülü,  $R$  üzerinde  $n$  uzunluğunda lineer ters sıralı bir koddur.

**İspat:** İspat, aşağıdaki iki ifade ile görülmektedir:

$$(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)^r = \bar{c}_1^r + \bar{c}_2^r, \quad \forall \bar{c}_1, \bar{c}_2 \in R^n \text{ ve}$$

$$(\alpha \bar{c})^r = \alpha \bar{c}^r, \quad \forall \alpha \in R.$$

Aşağıdaki teorem eşterimli polinomlar ile TS kodların nasıl üretileceğine dair temel teoremdir.

**Teorem 4.3**  $g(x)$ ,  $R[x]/(x^n - 1)$ 'de bir eşterimli polinom ve  $t < \lfloor n/2 \rfloor$  olacak şekilde seçilen bir pozitif tamsayı olsun.  $g(x)$ 'in  $R^n$ 'deki karşılığı  $\bar{c}$  olarak gösterilsin.

Tanımlanan

$$S_g^t = \{\tau^{-t-1}(\bar{c}), \dots, \tau^{-1}(\bar{c}), \tau^0(\bar{c}), \tau^1(\bar{c}), \dots, \tau^t(\bar{c})\}$$

kümesi için eğer  $S_g^t$ ,  $R^n$ 'de serbest elemanlardan oluşan lineer bağımsız bir küme ise  $|S_g^t| = 2t + 2 = k$  olur ve  $n$  tek olmak üzere tanımlanan

$$O_g^t = \{\tau^{-t-1}(\bar{c}), \dots, \tau^{-1}(\bar{c}), \tau^0(\bar{c}), \tau^1(\bar{c}), \dots, \tau^t(\bar{c}), \tau^{(n-1)/2}(\bar{c})\}$$

kümesi için eğer  $O_g^t$ ,  $R^n$ 'de serbest elemanlardan oluşan lineer bağımsız bir küme ise  $|O_g^t| = 2t + 3 = k$  olur.  $C = \langle S_g^t \rangle$  ( $C = \langle O_g^t \rangle$ ),  $R^n$ 'de  $S_g^t$  ( $O_g^t$ ) tarafından üretilen ve boyutları  $2t + 2$  ( $2t + 3$ ) olan bir TS koddur.

**İspat:**  $g(x)$  bir eşterimli polinom ve  $R^n$ 'de karşılığı  $\bar{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$  şeklinde ise  $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$  kendine ters sıralıdır. Eşterimlinin özelliğinden dolayı  $(\bar{c})^r = \tau^{-1}(\bar{c})$  özelliği sağlanmaktadır ve bu ifadenin  $i$ . terimi ile

$$(\tau^i(\bar{c}))^r = \tau^{-i-1}(\bar{c})$$

elde edilir. Benzer yöntem ile  $\tau^n$  birim olduğundan,

$(\tau^{(n-1)/2}(\bar{c}))^r = \tau^{-(n+1)/2}(\bar{c}) = \tau^{(n-1)/2}(\bar{c})$  sağlanır. Bu durumda, teoremin her iki durumunda da, Önerme 3.4 yardımıyla, kodun bu kümeler tarafından üretilen TS bir kod olduğu görülmektedir.

**Örnek 4.4**  $g(x) = 1 + w^2x^2 + wx^3 + x^4 + x^5 + wx^6 + w^2x^7$ ,  $F_4$ 'de bir eşterimli polinom ve  $C = \langle S_g^t \rangle$  Teorem 4.3'deki gibi 9 uzunluğunda bir lineer kod olsun.  $t = 0$  için  $[9, 2, 7]$ ,  $t = 1$  için  $[9, 4, 3]$  ve  $t = 2$  için  $[9, 6, 3]$  TS kodları elde edilir.  $g(x)$ 'in vektörel karşılığı  $\bar{c} = (1, 0, w^2w, 1, 1, w, w^2, 0)$  olur ve aşağıdaki üreteç matrisler, belirlenen  $t$  değerine göre elde edilir.

$$\langle S_g^0 \rangle = \{\tau^{-1}(\bar{c}), \tau^0(\bar{c})\} = \begin{pmatrix} 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\langle S_g^1 \rangle = \{\tau^{-2}(\bar{c}), \tau^{-1}(\bar{c}), \tau^0(\bar{c}), \tau^1(\bar{c})\} = \begin{pmatrix} w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 \end{pmatrix},$$

ve

$$\langle S_g^2 \rangle = \{\tau^{-3}(\bar{c}), \tau^{-2}(\bar{c}), \tau^{-1}(\bar{c}), \tau^0(\bar{c}), \tau^1(\bar{c}), \tau^2(\bar{c})\} = \begin{pmatrix} w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 & 1 & 0 & w^2 \\ w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w & w^2 \\ w^2 & 0 & 1 & 0 & w^2 & w & 1 & 1 & w \end{pmatrix}.$$

**Not 4.5** Parametreleri  $[9, 2, 7]$  ve  $[9, 6, 3]$  olan TS kodlar [23] tablosuna göre optimal kodlardır. Bu kodlar, [23] tablosundaki gibi var olan bazı kodların kesilmesi, delinmesi vb. yöntemlerle üretilmemiştir. Eşterimli polinomlar yardımıyla direk üretilip ayrıca TS kod olma özelliği de sağlanmıştır.

**Tanım 4.6**  $\mathcal{R}_{2^k}$  sonlu zincir halkasındaki bir lineer  $C$  kod olsun.  $k(C)$ ,  $C$ 'yi içeren

serbest  $\mathcal{R}_{2^k}$ -modülün rankı olmak üzere, Griesmer sınırı  $n \geq \sum_{i=0}^{k(C)-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil$  şeklindedir [25].

Çizelge 4. 1 Teorem 4.3'e göre üretilen bazı ters sıralı (TS) kodlar.  
(\*1: [23]'de Optimal kod , \*2: Bilinen en iyi kod, \*3: Griesmer sınırına göre optimal,  
\*4: [20], [25]'de Halka için, Griesmer sınırına göre optimal)

| $n$ | Yapı  | $t$ | $k$ | Eşterimli polinom                                                                              | Parametreler            |
|-----|-------|-----|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 7   | $F_4$ | 0   | 2   | $[1, w^2, 0, w^2, w^2, 0, w^2]$                                                                | $[7, 2, 5]_{F_4}$ *1    |
| 7   | $F_4$ | 0   | 3   | $[1, w^2, w^2, w, w, w^2, w^2]$                                                                | $[7, 3, 4]_{F_4}$ *1    |
| 7   | $F_4$ | 1   | 4   | $[1, w, w, w^2, w^2, w, w]$                                                                    | $[7, 4, 3]_{F_4}$ *1    |
| 22  | $F_4$ | 2   | 6   | $[1, w^2, w^2, w^2, 0, 0, 1, w, w, w, 0, 1, 0, w, w, w, 1, 0, 0, w^2, w^2, w^2]$               | $[22, 6, 12]_{F_4}$ *2  |
| 28  | $F_4$ | 4   | 10  | $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, w^2, w, 1, w, 0, w^2, 0, w, 0, w^2, 0, w, 1, w, w^2, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ | $[28, 10, 12]_{F_4}$ *2 |
| 15  | $F_4$ | 2   | 7   | $[1, 1, 1, w, w, 0, 1, w^2, w^2, 1, 0, w, w, 1, 1]$                                            | $[15, 7, 7]_{F_4}$ *1   |
| 19  | $F_4$ | 2   | 4   | $[1, w^2, 1, w^2, w^2, 0, 1, 0, 0, w^2, w^2, 0, 0, 1, 0, w^2, w^2, 1, w^2]$                    | $[19, 4, 12]_{F_4}$ *1  |
| 19  | $F_4$ | 2   | 4   | $[1, 0, w, 1, w^2, w, w, 1, 0, w, w, 0, 1, w, w, w^2, 1, w, 0]$                                | $[19, 4, 12]_{F_4}$ *1  |
| 19  | $F_4$ | 3   | 8   | $[1, 0, 0, 0, 0, w^2, w^2, w^2, 1, w^2, w^2, 1, w^2, w^2, w^2, 0, 0, 0, 0]$                    | $[19, 8, 8]_{F_4}$ *2   |
| 21  | $F_4$ | 1   | 4   | $[1, 1, w, 1, w^2, w, w, 1, w^2, 1, 1, 1, 1, w^2, 1, w, w, w^2, 1, w, 1]$                      | $[21, 4, 14]_{F_4}$ *1  |
| 11  | $F_3$ | 1   | 4   | $[1, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 1]$                                                            | $[11, 4, 6]_{F_3}$ *1   |
| 17  | $F_3$ | 0   | 3   | $[1, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 0]$                                          | $[17, 3, 11]_{F_3}$ *1  |
| 9   | $F_8$ | 0   | 3   | $[1, w^4, w^2, w^5, w^3, w^3, w^5, w^2, w^4]$                                                  | $[9, 3, 7]_{F_8}$ *1    |
| 17  | $F_8$ | 0   | 3   | $[1, 1, w, 1, w^5, w^4, w^2, w^5, w^4, w^4, w^5, w^2, w^4, w^5, 1, w, 1]$                      | $[17, 3, 13]_{F_8}$ *1  |
| 13  | $F_9$ | 0   | 3   | $[1, w, 1, w^2, w, w^3, 1, 1, w^3, w, w^2, 1, w]$                                              | $[13, 3, 10]_{F_9}$ *1  |

Çizelge 4. 1 Teorem 4.3'e göre üretilen bazı ters sıralı (TS) kodlar.  
 (\*1: [23]'de Optimal kod , \*2: Bilinen en iyi kod, \*3: Griesmer sınırına göre optimal,  
 \*4: [20], [25]'de Halka için, Griesmer sınırına göre optimal) (devamı)

|    |                    |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                |                                     |
|----|--------------------|---|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 9  | $F_{16}$           | 0 | 2 | $[1, w, w^3, 1, w^4, w^4, 1, w^3, w]$                                                                                                                                                                                                          | $[9, 2, 8]_{F_{16}}$ *3             |
| 7  | $F_{16}$           | 0 | 3 | $[1, w^8, 0, w^9, w^9, 0, w^8]$                                                                                                                                                                                                                | $[7, 3, 5]_{F_{16}}$ *3             |
| 10 | $F_{25}$           | 1 | 4 | $[1, 1, w, w^2, 4, w^8, 4, w^2, w, 1]$                                                                                                                                                                                                         | $[10, 4, 7]_{F_{25}}$ *3            |
| 10 | $F_{25}$           | 1 | 4 | $[1, 1, w, w^3, w^{15}, w^9, w^{15}, w^3, w, 1]$                                                                                                                                                                                               | $[10, 4, 7]_{F_{25}}$ *3            |
| 8  | $F_{27}$           | 1 | 4 | $[1, w, w^3, 1, w^6, 1, w^3, w]$                                                                                                                                                                                                               | $[8, 2, 7]_{F_{27}}$ *3             |
| 7  | $\mathcal{R}_4$    | 0 | 2 | $[u, 1+u^3, u+u^2+u^3, 1+u+u^3, 1+u+u^3, u+u^2+u^3, 1+u^3]$                                                                                                                                                                                    | $[7, 2, 4]_{\mathcal{R}_4}$ *4      |
| 15 | $\mathcal{R}_{16}$ | 0 | 3 | $[u^{15}+u^9+u^7+u^4+1, u^{15}+u^9+u^7+u^3+1, u^{14}+u^9+u^8+u^6+u+1, 0, u^{10}+u^9+u^8, u^{13}+u^{12}+u^{10}+u^7+u^5+u^4+1, 0, 1, 1, 0, u^{13}+u^{12}+u^{10}+u^7+u^5+u^4+1, u^{10}+u^9+u^8, 0, u^{14}+u^9+u^8+u^6+u+1, u^{15}+u^9+u^7+u^3+1]$ | $[15, 3, 8]_{\mathcal{R}_{16}}$ *4  |
| 21 | $\mathcal{R}_8$    | 1 | 4 | $[u^4+u+1, u^5+u^4+u^2+u, 0, 0, u^7+u^4+u^2, 0, u^7+u^6+u^5, u^5+u^3+u, u^6, 1, u^7+u^5+u^3+1, u^7+u^5+u^3+1, 1, u^6, u^5+u^3+u, u^7+u^6+u^5, 0, u^7+u^4+u^2, 0, 0, u^5+u^4+u^2+u]$                                                            | $[21, 4, 10]_{\mathcal{R}_{16}}$ *4 |
| 34 | $\mathcal{R}_4$    | 0 | 2 | $[u^3, u^2+u, u^2, u^3+u^2, u^3+u^2+1, u^2+1, 1, u^3+u^2+u+1, 1, 0, 1, 0, u^3+u^2+u, u, u^3+u^2+1, u^2, u^3+u+1, 1, u^3+u+1, u^2, u^3+u^2+1, u, u^3+u^2+u, 0, 1, 0, 1, u^3+u^2+u+1, 1, u^2+1, u^3+u^2+1, u^3+u^2, u^2, u^2+u]$                 | $[34, 2, 22]_{\mathcal{R}_{16}}$ *4 |

#### 4.2 R-eşterimli Polinomlar ve DNA Kodlar

**Tanım 4.7**  $r$ -eşterimli  $n$  li DNA  $k$ -bazlı  $rC_{DNA_k}$  şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$\mathfrak{B}_{sr}^k = (\mathfrak{B}_{sr}^k)^r$ ,  $\mathfrak{B}_{sr\frac{n}{2}}^k = (\mathfrak{B}_{sr\frac{n}{2}}^k)^r$  olacak şekilde, eğer  $n$  tek ise

$$rC_{DNA_k} = (\mathfrak{B}_{sr}^k, \mathfrak{B}_1^k, \mathfrak{B}_2^k, \dots, \mathfrak{B}_{\frac{n-1}{2}}^k, (\mathfrak{B}_{\frac{n-1}{2}}^k)^r, \dots, (\mathfrak{B}_2^k)^r, (\mathfrak{B}_1^k)^r),$$

eğer  $n$  çift ise

$$rC_{DNA_k} = (\mathfrak{B}_{sr}^k, \mathfrak{B}_1^k, \mathfrak{B}_2^k, \dots, \mathfrak{B}_{\frac{n}{2}-1}^k, \mathfrak{B}_{sr\frac{n}{2}}^k, (\mathfrak{B}_{\frac{n}{2}-1}^k)^r, \dots, (\mathfrak{B}_2^k)^r, (\mathfrak{B}_1^k)^r)$$

şeklindedir.

**Örnek 4.8**  $rC_{DNA_3} = (TGT, GAC, TCA, CGT, TGC, ACT, CAG)$  bir  $r$ -eşterimli 7li DNA 3-bazlısıdır.

**Tanım 4.9**  $\mathcal{R}_{2k}[x]/(x^n - 1)$ 'da  $r$ -eşterimli polinom aşağıdaki gibi ifade edilir.

$p_{sr}(u) = \varphi(p_{sr}(u))$  ve  $p_{sr\frac{n}{2}}(u) = \varphi(p_{sr\frac{n}{2}}(u))$  olsun. Eğer  $n$  tek ise

$$rC = (p_{sr}(u), p_1(u), p_2(u), \dots, p_{\frac{n-1}{2}}(u), \varphi(p_{\frac{n-1}{2}}(u)), \dots, \varphi(p_2(u)), \varphi(p_1(u))),$$

$n$  çift ise

$$rC = (p_{sr}(u), p_1(u), p_2(u), \dots, p_{\frac{n-1}{2}}(u), p_{sr\frac{n}{2}}(u), \varphi(p_{\frac{n-1}{2}}(u)), \dots, \varphi(p_2(u)), \varphi(p_1(u))).$$

Dolayısıyla  $\Phi^{-1}(rC)$  ve  $\Phi^{-1}\zeta(rC_{DNA_k})$   $\mathcal{R}_{2k}[x]/(x^n - 1)$ 'da  $r$ -eşterimli polinom olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem TS DNA kodları hakkındaki ters sıralama problemini, yukarıdaki ifadeleri kullanarak çözmektedir.

**Teorem 4.10**  $\mathcal{R}_{2k}[x]/(x^n - 1)$ 'da,  $C = \langle S_g^t \rangle$  ( $C = \langle O_g^t \rangle$ )  $r$ -eşterimli polinom  $g(x)$  ile oluşturulan bir  $u^2$ -modül kod olsun.  $\zeta^{-1}(C)$  bir TS DNA koddur.

**İspat:**  $-t-1 \leq j \leq t$  ve  $a, d \in F_2$  olmak üzere,  $S_g^t$  kümesi için, her elemanın DNA karşılığının ters sırası aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\left( \zeta^{-1} \left( \sum_j (a_{j0} + a_{j1}u^2 + a_{j2}u^4 + \dots + a_{j(k-1)}u^{2(k-1)}) \tau^j(c) \right) \right)^r$$

$$= \zeta^{-1} \left( \sum_j (a_{j0} + a_{j1}u^{2(k-1)} + a_{j2}u^{2(k-2)} + \dots + a_{j(k-1)}u^{2(k-(k-1))}) \tau^{-j-1}(c) \right).$$

$O_g^t$  kümesi için,

$$\left( \zeta^{-1} \left( \sum_j (a_{j0} + a_{j1}u^2 + a_{j2}u^4 + \dots + a_{j(k-1)}u^{2(k-1)}) \tau^j(c) + \right. \right. \\ \left. \left. (d_0 + d_1u^2 + d_2u^4 + \dots + d_{(k-1)}u^{2(k-1)}) \tau^{(n-1)/2}(c) \right) \right)^r$$

$$= \zeta^{-1} \left( \sum_j (a_{j0} + a_{j1}u^{2(k-1)} + a_{j2}u^{2(k-2)} + \dots + a_{j(k-1)}u^{2(k-(k-1))}) \tau^{-j-1}(c) + \right. \\ \left. (d_0 + d_1u^{2(k-1)} + d_2u^{2(k-2)} + \dots + d_{(k-1)}u^{2(k-(k-1))}) \tau^{(n-1)/2}(c) \right)$$

elde edilir.

**Örnek 4.11**  $rC_{DNA_k} = (TTT, GAC, TCA, CGT, TGC, ACT, CAG)$   $r$ -eşterimli 7li DNA 3-bazlısı alınsın.

$$\zeta(rC_{DNA_k}) = (1+u+u^2+u^3+u^4+u^5, u+u^4, u^3+u^4+u^5, 1+u+u^2+u^5, \\ u+u^2+u^4+u^5, 1+u+u^3, 1+u^5)$$

olur.  $t=1$  seçildiğinde  $k=4$  olur.  $C = \langle S_g^1 \rangle$  7 uzunluğunda bir kod ve  $\zeta^{-1}(C)$  ise 21 uzunluğunda TS DNA koddur.

Aşağıdaki önerme literatürde başka halkalar üzerinde tanımlanan kodlar için görülebilen benzer bir ifadedir.

**Önerme 4.12** Eğer bir lineer kod  $\Phi(r(x)) = \Phi((1+u+\dots+u^{2k-1})(1+x+\dots+x^{n-1}))$  kodsözüne sahipse, kodun DNA karşılığı tamlayan bir koddur.

Önerme 4.12 yardımıyla, aşağıdaki teorem TST DNA kodlar hakkında temel bir sonuç vermektedir.

**Teorem 4.13**  $C = \langle S_g^{t,c} \rangle$  ( $C = \langle O_g^{t,c} \rangle$ ),  $g(x) = \Phi^{-1} \zeta(rC_{DNA_k})$   $r$ -eşterimli polinomu ile oluşturulan  $u^2$ -modül kod olsun ve  $r(x) = (1+u+\dots+u^{2k-1})(1+x+\dots+x^{n-1})$  olsun.  $\bar{c}$  ve  $\bar{r}$ ,  $\mathcal{R}_{2k}^n$ 'de  $g(x)$  ve  $r(x)$ 'in karşılığı olsun.  $t < \lfloor n/2 \rfloor$  olmak üzere,

$$S_g^{t,c} = \{\tau^{-t-1}(\bar{c}), \dots, \tau^{-1}(\bar{c}), \tau^0(\bar{c}), \tau^1(\bar{c}), \dots, \tau^t(\bar{c}), \bar{r}\}$$

durumunda eğer kümenin elemanları bağımsız ise  $|S_g^{t,c}| = 2t + 3 = k$  olur.

$n$  tek için,

$$O_g^{t,c} = \{\tau^{-t-1}(\bar{c}), \dots, \tau^{-1}(\bar{c}), \tau^0(\bar{c}), \tau^1(\bar{c}), \dots, \tau^t(\bar{c}), \tau^{(n-1)/2}(\bar{c}), \bar{r}\}$$

iken eğer kümenin elemanları bağımsız ise  $|O_g^{t,c}| = 2t + 4 = k$  olur.  $\mathcal{R}_{2k}$ 'da  $C = \langle S_g^{t,c} \rangle$

( $C = \langle O_g^{t,c} \rangle$ ), önceden belirlenmiş  $k$  ile,  $S_g^{t,c}$  ( $O_g^{t,c}$ ) ile üretilmiş,  $u^2$ -modül koddur ve

$\zeta^{-1}(C)$  TST DNA koddur.

**Örnek 4.14**  $rC_{DNA_3} = (ATA, GCT, ATC, CTA, TCG)$  veya

$$rC = (u^2 + u^3, 1 + u + u^3 + u^4, u + u^2 + u^3, u^2 + u^3 + u^5, 1 + u^3 + u^4 + u^5),$$

alınsın.  $\zeta(rC_{DNA_3}) = rC$ 'dir.

$r$ -eşterimli polinom aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} g(x) &= \Phi^{-1}(rC) \\ &= \Phi^{-1}(\zeta(rC_{DNA_3})) \\ &= u^2 + u^3 + (1 + u + u^3 + u^4)x + (u + u^2 + u^3)x^2 + (u^2 + u^3 + u^5)x^3 + \\ &\quad (1 + u^3 + u^4 + u^5)x^5. \end{aligned}$$

$t = 0$  için üreteç matrisin oluşturulması:

$$\begin{aligned} S_g^0 &= \{\tau^{-1}(\bar{c}), \tau(\bar{c})^0\} \\ &= \{(1 + u + u^3 + u^4, u + u^2 + u^3, u^2 + u^3 + u^5, 1 + u^3 + u^4 + u^5, u^2 + u^3), \\ &\quad (u^2 + u^3, 1 + u + u^3 + u^4, u + u^2 + u^3, u^2 + u^3 + u^5, 1 + u^3 + u^4 + u^5)\} \end{aligned}$$

olur ve matris olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{pmatrix} \tau^{-1}(\bar{c}) \\ \tau(\bar{c})^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + u + u^3 + u^4 & u + u^2 + u^3 & u^2 + u^3 + u^5 & 1 + u^3 + u^4 + u^5 & u^2 + u^3 \\ u^2 + u^3 & 1 + u + u^3 + u^4 & u + u^2 + u^3 & u^2 + u^3 + u^5 & 1 + u^3 + u^4 + u^5 \end{pmatrix}$$

ile üretilen ve  $u^2$ -modül kod olan  $C = \langle S_g^0 \rangle$ 'nin elemanları aşağıdaki gibi ifade edilir :

$\mathcal{R}_6$ 'da  $\langle u^2 \rangle$ ,  $u^2$  ile üretilen bir alt halka ve

$$C = \{\alpha_1 \tau^{-1}(\bar{c}) + \alpha_2 \tau(\bar{c})^0 : \alpha_1, \alpha_2 \in \langle u^2 \rangle\}$$

şeklindedir.

$\alpha_1 = 0$  ve  $\alpha_2 = u^2$  ise üretilen kodsöz aşağıdaki gibidir,

$$c_1 = (u^4 + u^5, 1 + u^2 + u^3 + u^5, u^3 + u^4 + u^5, u + u^4 + u^5, 1 + u + u^2 + u^5).$$

DNA karşılığı;

$$d_{c_1} = \zeta^{-1}(c_1) = (\text{TAA,CTG,TCA,TAC,CGT}) = (\text{TAACTGTCATACCGT}).$$

Teorem 4.10'in ispatına göre yukarıdaki DNA kodsözünün ters sırası  $\alpha_1 = u^4$  ve  $\alpha_2 = 0$  değerleri ile bulunur;

$$c_2 = (u + u^2 + u^4 + u^5, 1 + u + u^5, 1 + u + u^3, u + u^2 + u^3 + u^4, 1 + u),$$

DNA karşılığı;

$$d_{c_2} = \zeta^{-1}(c_2) = (\text{TGCCATACTGTCAAT}) \text{ yani, } (d_{c_1})^r = (d_{c_2}) \text{ olur.}$$

**Örnek 4.15** Bir önceki örneğin devamı olarak, eğer

$$(1 + u^2) \tau^0(\bar{c}) = (u^2 + u^3 + u^4 + u^5, u + u^2 + u^4 + u^5, u + u^2 + u^4 + u^5, u + u^2 + u^3 + u^4, u + u^2 + u^3 + u^4)$$

alınırsa,  $d_{c_3} = \zeta^{-1}((1 + u^2) \tau^0(\bar{c})) = (\text{TTATGCTGCGTCGTC})$  olur.

$$(1 + u^4) \tau^{-1}(\bar{c}) = (1 + u^2 + u^3 + u^5, 1 + u^2 + u^3 + u^5, 1 + u + u^2 + u^5, 1 + u + u^2 + u^5, 1 + u + u^2 + u^3)$$

alınırsa

$$d_{c_4} = \zeta^{-1}((1 + u^4) \tau^{-1}(\bar{c})) = (\text{CTGCTGCGTCGTATT})$$

elde edilir.  $(d_{c_3})^r = d_{c_4}$  bulunur.

**Örnek 4.16** Benzer olarak, eğer

$$(1 + u^2) \tau^0(\bar{c}) + (u^4) \tau^{-1}(\bar{c}) = (1 + u^4, u + u^2 + u^3, u^2, 1 + u^3 + u^4 + u^5, u + u^2 + u^3 + u^5)$$

alınırsa,

$$d_{c_5} = \zeta^{-1}((1 + u^2) \tau^0(\bar{c}) + (u^4) \tau^{-1}(\bar{c})) = (\text{GAGATCAGATCGCTC})$$

elde edilir.

$$(u^2)\tau^0(\bar{c}) + (1+u^4)\tau^{-1}(\bar{c}) = (u+u^2+u^3+u^5, 1+u+u^3+u^4, u^2, u^2+u^3+u^5, 1+u^4)$$

alınırsa

$$d_{c_6} = \zeta^{-1}((u^2)\tau^0(\bar{c}) + (1+u^4)\tau^{-1}(\bar{c})) = (\text{CTCGCTAGACTAGAG})$$

elde edilir.

$$(d_{c_3})^r = d_{c_4} \text{ olduğu görülür.}$$

Aşağıdaki tablolar Örnek 4.14'e ait DNA karşılıklarıdır.

Çizelge 4. 2  $C = \langle S_g^0 \rangle$  için DNA karşılıkları, Örnek 4.14

|                  |                 |                 |                  |
|------------------|-----------------|-----------------|------------------|
| AAAAAAAAAAAAAAAA | TGCCATACTGTCAAT | CTGTCATACCGTTAA | GCTGCTTCGTCGTAT  |
| GCTATCCTATCGATA  | CTGCTGCGTCGTATT | TGCTGCGTCGTCTTA | AAAGGGGGGAAATTT  |
| AATTGCCATACTGTC  | TGGGGGCCAGGGGTG | CTCATCGAGCTACTC | GCACTGGCCTACCTG  |
| GCATCAATTTACGAC  | CTCGCTAGACTAGAG | TGGAAATTGGGGCAC | AATCATTGCACTCAG  |
| TAATGTGCATACCGT  | AGCATCTATCTACGA | GTGGGGACCGGGGGT | CCTTGCAAGACTGGA  |
| CCTCATGGAACCTCT  | GTGAAAGTTGGGCCA | AGCGCTCGCCTAGCT | TAATCACTGTACGCA  |
| TATGCTGCTTCGTCG  | AGGTGAGAACGTTCC | GTCCATCCGGTCACG | CCAAAACACAAAACC  |
| CCAGGGTGTAATGG   | GTCTGCTTAGTCTGC | AGGCTGAGGCGTAGG | TATATCATCTCGAGC  |
| ATAGCTATCCTATCG  | TCCTCAAGGTACTCC | CAGCATTTAACTACG | GGTAAATGTGGGACC  |
| GGTGGGCACGGGTGG  | CAGTGCCCGACTTGC | TCCCTGGAATACAGG | ATAATCGCTCTAAGC  |
| ATTCTGCTGCGTCGT  | TCGATCCGCTCGCGA | CACGGGGTTAAAGGT | GGATGCGGAGTCGGA  |
| GGACATAAGGTCCCT  | CACAAAACCAAACCA | TCGGCTTATTCGGCT | ATTTTCATCACGTGCA |
| TTATGCTGCGTCGTC  | ACCGGGTTGAAAGTG | GAGATCAGATCGCTC | CGTCTGATTGCTCTG  |
| CGTTCAGCCCGTGAC  | GAGGCTGAGTCGGAG | ACCAAACCAAAACAC | TTACATCATGTCCAG  |
| TTTAAAGGGGGGAAA  | ACGCATGTCACTAAT | GACTCACGTTACTAA | CGAGCTCTACTATAT  |
| CGAATCTCGCTAATA  | GACCTGTACTACATT | ACGTGCACTACTTTA | TTTGGGAAAGGGTTT  |

Çizelge 4. 3  $C = \langle S_g^{0,c} \rangle$  için DNA karşılıkları, Örnek 4.14

|                  |                 |                 |                  |
|------------------|-----------------|-----------------|------------------|
| AAAAAAAAAAAAAAAA | AAAGGGGGGAAATTT | AAACCCTTTCCCAA  | AAATTTCCCCCTTT   |
| AATACGACGCAGCAG  | AATGTAGTACAGGTC | AATCATTGCACTCAG | AATTGCCATACTGTC  |
| AGGAGTTCCATGAGG  | AGGGACCTTATGTCC | AGGCTGAGGCGTAGG | AGGTCAGAACGTTCC  |
| AGCATCTATCTACGA  | AGCGCTCGCCTAGCT | AGCCGAATAAGCCGA | AGCTAGGCGAGCGCT  |
| ACGACGCAGCAGAAT  | ACGGTATGACAGTTA | ACGCATGTCACTAAT | ACGTGCACTACTTTA  |
| ACCAAACCAAAACAC  | ACCGGGTTGAAAGTG | ACCCCCGGTCCCCAC | ACCTTTAACCCCGTG  |
| ATAATCGCTCTAAGC  | ATAGCTATCCTATCG | ATACGACGAAGCAGC | ATATAGTAGAGCTCG  |
| ATTAGTGACATGCGT  | ATTGACAGTATGGCA | ATTCTGCTGCGTCGT | ATTTTCATCACGTGCA |
| GAGATCAGATCGCTC  | GAGGCTGAGTCGGAG | GAGCGATCTGATCTC | GAGTAGCTCGATGAG  |
| GACAGTATGGCAATT  | GACGACGCAGCATAA | GACCTGTACTACATT | GACTCACGTTACTAA  |

Çizelge 4. 3  $C = \langle S_g^{0,c} \rangle$  için DNA karşılıkları, Örnek 4.14 (devamı)

|                 |                  |                  |                  |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| GGAACGTTCTGACCT | GGAGTACCTTGAGGA  | GGACATAAGGTCCT   | GGATGCGGAGTCGGA  |
| GGTAAATGTGGGACC | GGTGGGCACGGGTGG  | GGTCCCACATTTACC  | GGTTTTGTGTTTGG   |
| GCAAGTCGGGCACTG | GCAGACTAAGCAGAC  | GCACTGGCCTACCTG  | GCATCAATTTACGAC  |
| GCTATCCTATCGATA | GCTGCTTCGTCGTAT  | GCTCGAGATGATATA  | GCTTAGAGCGATTAT  |
| GTGAAAGTTGGGCCA | GTGGGGACCGGGGGT  | GTGCCCCAATTTCCA  | GTGTTTTGGTTTGGT  |
| GTCACGGGCTGAACG | GTCGTAAATTGATGC  | GTCCATCCGGTCACG  | GTCTGCTTAGTCTGC  |
| CAGACGAATCAGACG | CAGGTAGGCCAGTGC  | CAGCATTTAACTACG  | CAGTGCCCGACTTGC  |
| CACAAAACCAAACCA | CACGGGGTTAAAGGT  | CACCCCTGGCCCCCA  | CACTTTCAACCCGGT  |
| CGAATCTCGTAATA  | CGAGCTCTACTATAT  | CGACGAAGCAGCATA  | CGATAGGATAGCTAT  |
| CGTAGTTAAATGCTG | CGTGACCGGATGGAC  | CGTCTGATTCTGTCTG | CGTTCAGCCCGTGAC  |
| CCAAAACACAAAACC | CCAGGGTGTAATGG   | CCACCCGTGCCACC   | CCATTACACCCTGG   |
| CCTACGCCTCAGCCT | CCTGTATTCCAGGGA  | CCTCATGGAACCTCT  | CCTTGCAAGACTGGA  |
| CTGAGTGCAATGATT | CTGGACATGATGTAA  | CTGCTGCGTCGTATT  | CTGTCATACCGTTAA  |
| CTCATCGAGCTACTC | CTCGCTAGACTAGAG  | CTCCGACTCAGCCTC  | CTCTAGTCTAGCGAG  |
| TAAAGTAGTGCACGT | TAAGACGACGCAGCA  | TAAGTGCATACCGT   | TAATCACTGTACGCA  |
| TATATCATCTCGAGC | TATGCTGCTTCGTCTG | TATCGATAGGATAGC  | TATTAGCGAGATTCTG |
| TGGAAATTGGGGCAC | TGGGGGCCAGGGGTG  | TGGCCCAACTTTTAC  | TGGTTTGGTTTGTG   |
| TGCACGTGATGAAAT | TGCGTACAGTGATTA  | TGCCATACTGTCAAT  | TGCTGCGTCGTCTTA  |
| TCGATCCGCTCGCGA | TCGGCTTATTCGGCT  | TCGCGAGCGGATCGA  | TCGTAGATAGATGCT  |
| TCCAGTCTTGCAAGG | TCCGACTCCGCATCC  | TCCCTGGAATACAGG  | TCCTCAAGGTACTCC  |
| TTAACGGTATGACAG | TTAGTAACGTGAGTC  | TTACATCATGTCCAG  | TTATGCTGCGTCGTC  |
| TTTAAAGGGGGGAAA | TTTGGGAAAGGGTTT  | TTTCCCCCTTTAAA   | TTTTTTTTTTTTTTT  |

**Örnek 4.17**  $rC_{DNA_k} = (TTT, GAC, TCA, CGT, TGC, ACT, CAG)$   $r$ -eşterimli 7li DNA 3-bazlısı alınsın.

$$\zeta(rC_{DNA_k}) = (1+u+u^2+u^3+u^4+u^5, u+u^4, u^3+u^4+u^5, 1+u+u^2+u^5, u+u^2+u^4+u^5, 1+u+u^3, 1+u^5)$$

olur.  $t = 1$  seçilsin ve  $k = 5$  olacak şekilde  $C = \langle S_g^{1,c} \rangle$  7 uzunluğunda bir kod ve  $\zeta^{-1}(C)$  21 uzunluğunda TST DNA koddur.

## $F_2[u]/(u^{2^k}-1)$ HALKASINDA DEVİRLİ KODLAR VE DNA UYGULAMALARI

Bu bölümde, [11] çalışmasından esinlenerek TS ve TST DNA kodların cebirsel yapılar üzerinde genel olarak ifade edilmesi amaçlanıp, özel zincir halkalarındaki devirli kodlar ile TS ve TST DNA kodlar elde edilmiştir.

[26], [27] çalışmalarında zincir halkalarında devirli kodlar ve kendine dual kodlar incelenmiş olup izomorf halkalarda oluşturulan yapıların temelleri bu çalışmalara dayanmaktadır.

Bu bölümde kullanılan yapıların yükseltilmiş polinom ve eşterim polinom yöntemlerinden farkı aynı anda halkadaki kod TS devirli ve DNA karşılığı TS veya TST olabilmektedir.

$p(u) = a_0 1 + a_1 u^2 + a_2 u^4 + \dots + a_{(2^{k-1}-1)} u^{(2^k-2)} \in \mathcal{R}_{2^k}$  elemanı için  $u^2$ -adik basamakları,  $p(u)_{u^2}$  veya  $p_{u^2}$  ile ifade edilip  $p_{u^2} = a_{(2^{k-1}-1)} \dots a_2 a_1 a_0$  olarak gösterilir.  $\varepsilon$  fonksiyonu  $\varepsilon(p_{u^2}) = p(u)$  ile  $u^2$ -adik basamakları halka elemanına dönüştürmektedir.  $[p_{u^2}]^r = a_0 a_1 a_2 \dots a_{(2^{k-1}-1)}$ ,  $p_{u^2}$ 'nin ters sıralı ifadesidir. Önerme 3.30'da da gösterildiği gibi  $u^2 p_{u^2} = a_{(2^{k-1}-2)} \dots a_2 a_1 a_0 a_{(2^{k-1}-1)}$  şeklinde de ifade edilebilir.

**Teorem 5.1**  $\mathcal{R}_{2^k}$  zincir halkasındaki her ideal ters sıralı  $2^k - 1$ -mer DNA kümesine eşittir.

**İspat:**  $\mathcal{R}_{2^k}$  halkasının her ideali  $m = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$  için  $(1+u)^m$  formu ile üretilen temel ideallerdir. Herhangi bir  $((1+u)^m)$  ideali için iki durum incelenmiştir.

1. Durum:  $m$  çift olsun.  $p = p(u) = (1+u)^m$  elemanı  $u^2$ -adik sistemde, ardışık  $\ell$  sıfır  $0^\ell$  ile gösterilir ve  $p$  elemanı  $p_{u^2} = 0^\ell c_1 c_2 \cdots c_{2^{k-1}-\ell}$  şeklinde ifade edilir.  $c_1 \neq 0$  olsun.

$$(1+u)^m = ((1+u)^2)^{m/2} = (1+u^2)^{m/2} \quad \text{ve} \quad \binom{m/2}{i} = \binom{m/2}{m/2-i} \quad \text{olduğundan} \quad (c_1 c_2 \cdots c_{2^{k-1}-\ell})^r = (c_1 c_2 \cdots c_{2^{k-1}-\ell}) \text{ olduğu görülür.}$$

Dolayısıyla,  $0 \leq i \leq \ell$  için  $[(u^2)^i \cdot p_{u^2}]^r = (u^2)^{\ell-i} \cdot p_{u^2}$  ve  $\ell+1 \leq i \leq 2^{k-1}-1$  için  $[(u^2)^i \cdot p_{u^2}]^r = (u^2)^{\ell+2^{k-1}-i} \cdot p_{u^2}$  elde edilir.

$u^2$ 'nin katları ile çarpım,  $u^2$ -adik sistemde  $(1+u)^m$  için ters sıralılığı sağlar.  $[(u(1+u)^m)_{u^2}]^r = u[(1+u)^m]_{u^2}^r$  olduğundan  $u(1+u)^m$  için de ters sıralılık sağlanır.

2. Durum:  $m$  tek ise  $(1+u)^m = (1+u)(1+u)^{m-1} = (1+u)^{m-1} + u(1+u)^{m-1}$  ifadesi yazılabilir ve  $(1+u)^{m-1}$  için 1. durum kullanılır.

Sonuç olarak,  $q(u) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} q_i u^{2^i}$  formunda alınan bir eleman için  $\varepsilon([q(u)(1+u)^m]^r) \in ((1+u)^m)$  sağlanır.

Her ideal  $(1+u)^{2^{k-1}} = 1+u+u^2+\cdots+u^{2^{k-1}-1}$  elemanını içereceğinden ve bu eleman ile elemanları toplamak, elemanların DNA tamlayanına karşılık geldiğinden;  $\mathcal{R}_{2^k}$ 'nin herhangi bir  $I$  ideali için her elemanın tamlayanı yine idealdedir sonucuna varılır.

**Örnek 5.2**  $\mathcal{R}_8 = F_2[u]/(u^8-1)$ 'de  $p(u) = (1+u)^2$  ve  $J = (p(u))$  alınsın.

$q(u) = u^6 + u + 1$  olsun.  $[(q(u)p(u))_{u^2}]^r$  aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} q(u)p(u) &= (u^6 + u + 1)(u^2 + 1) = u^8 + u^6 + (u+1)u^2 + u + 1 \\ &= u^6 + (u+1)u^2 + u \rightarrow (q(u)p(u))_{u^2} = 10\bar{u}u. \end{aligned}$$

$$p(u) = u^2 + 1 = 0u^6 + 0u^4 + 1u^2 + 1 \rightarrow 0011 \text{ olduğundan } \ell = 2 \text{ 'dir.}$$

$$[u^6 p(u)_{u^2}]^r = [(u^2)^3 p(u)_{u^2}]^r = (u^2)^{\ell+2^{k-1}-3} p(u) = (u^2)^3 p(u) = u^6 p(u) = u^6 + 1$$

$$[up(u)_{u^2}]^r = u[(u^2)^0 p(u)_{u^2}]^r = u(u^2)^{\ell-0} p(u) = uu^4 p(u) = u^5 p(u) = u^5 + u^7$$

$$[p(u)_{u^2}]^r = [(u^2)^0 p(u)_{u^2}]^r = (u^2)^{\ell-0} p(u) = (u^2)^2 p(u) = u^4 p(u) = u^6 + u^4.$$

Dolayısıyla,

$$[(q(u)p(u))_{u^2}]^r = [u^6 p(u)_{u^2}]^r + [up(u)_{u^2}]^r + [p(u)_{u^2}]^r = u^6 + 1 + u^5 + u^7 + u^6 + u^4$$

$$[(q(u)p(u))_{u^2}]^r = u \cdot u^6 + (u+1) \cdot u^4 + 1 = u\bar{u}01$$

olur.

DNA karşılıkları aşağıdaki gibidir.

$$[(q(u)p(u))_{u^2}] = u^6 + 0 \cdot u^4 + (u+1)u^2 + u = 10\bar{u}u \rightarrow \zeta^{-1}(q(u)p(u)) = \text{GATC}.$$

$$[q(u)p(u)_{u^2}]^r = u \cdot u^6 + (u+1) \cdot u^4 + 0 \cdot u^2 + 1 = u\bar{u}01 \rightarrow \zeta^{-1}([q(u)p(u)]^r) = \text{CTAG}.$$

**Örnek 5.3** Aşağıda  $\mathcal{R}_{2^3}$  ün bazı idealleri ve DNA 4-mer karşılıkları verilmiştir.

$$((1+u)^7) = \{0, (1+u)^7\} \rightarrow \{\text{AAAA}, \text{TTTT}\}$$

$$((1+u)^6) = \{0, u^6 + u^4 + u^2 + 1, u^7 + u^5 + u^3 + u, u^7 + u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1\} = \{\text{AAAA}, \text{GGGG}, \text{CCCC}, \text{TTTT}\}$$

$$\begin{aligned} ((1+u)^5) &= \{0, u^5 + u^4 + u + 1, u^6 + u^4 + u^2 + 1, u^6 + u^5 + u^2 + u, u^7 + u^4 + u^3 + 1, \\ &u^7 + u^5 + u^3 + u, u^7 + u^6 + u^3 + u^2, u^7 + u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1\} \\ &\rightarrow \{\text{AAAA}, \text{ATAT}, \text{GGGG}, \text{GCGC}, \text{CGCG}, \text{CCCC}, \text{TATA}, \text{TTTT}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((1+u)^3) &\rightarrow \{\text{AAAA}, \text{AATT}, \text{AGAG}, \text{AGTC}, \text{ACAC}, \text{ACTG}, \text{ATAT}, \\ &\text{ATTA}, \text{GAGA}, \text{GACT}, \text{GGGG}, \text{GGCC}, \text{GCGC}, \text{GCCG}, \text{GTGT}, \text{GTCA}, \\ &\text{CAGT}, \text{CACA}, \text{CGGC}, \text{CGCG}, \text{CCGG}, \text{CCCC}, \text{CTGA}, \text{CTCT}, \text{TAAT}, \\ &\text{TATA}, \text{TGAC}, \text{TGTG}, \text{TCAG}, \text{TCTC}, \text{TTAA}, \text{TTTT}\} \end{aligned}$$

### 5.1 Devirli Kodlar ve DNA Kodlar

**Teorem 5.4**  $F_2$ 'de  $f_{2^t-1} | \dots | f_3 | f_2 | f_1 | f_0 | (x^n - 1)$  olacak şekilde,  $C$   $\mathcal{R}_{2^t}$ 'de  $C = (f_0, (1+u)^{i_1} f_1, (1+u)^{i_2} f_2, \dots, (1+u)^{i_{2^k-1}} f_{2^k-1})$  ( $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{2^k-1}$ ) şeklinde üretilen bir devirli kod olsun. Eğer  $f_i$ 'ler kendine resiprokal polinomlar ise  $C$  TS bir koddur ve  $\zeta^{-1}(C)$  TS DNA koddur. Eğer tüm kendine resiprokal  $f_i$  polinomlar  $(x^n - 1)/(x+1)$ 'i böler ise  $C$  TS bir koddur ve  $\zeta^{-1}(C)$  TST DNA koddur.

**İspat:**  $F_2[u]/(u^{2^t}-1)$  bir zincir halkası ve idealleri  $(0) \subset ((1+u)^{(2^t-1)}) \subset \dots \subset ((1+u)^2) \subset (1+u) \subset (1) = \mathcal{R}_{2^t}$  şeklindedir.

$F_2$ 'de  $f_{2^{t-1}} | \dots f_3 | f_2 | f_1 | f_0 | (x^n-1)$  olduğundan ve tüm  $f_i$ 'ler kendine resiprokal olduğundan  $C = (f_0, (1+u)^{i_1} f_1, (1+u)^{i_2} f_2, \dots, (1+u)^{i_{2^{k-1}}} f_{2^{k-1}})$  ( $i_1 \leq i_2 \leq \dots i_{2^{k-1}}$ ) devirli kodu bir TS koddur. Burada her kodsözün ters sırasının var olduğu ve her kodsözün DNA ters sırasının bu kodun içinde var olduğu aşağıdaki Teorem 5.1'den elde edilir. Eğer kendine resiprokal tüm  $f_i$  polinomlar  $(x^n-1)/(x+1)$ 'i böler ise kombinatorik karşılığı (11111...111) olan kodsöz elde edilir ve  $(1+u)^{2^t-1}$  katının da var olmak zorunda olması nedeniyle  $C$  TS kod ve TST DNA koddur.

**Örnek 5.5** Üretilen bir kodda bazı elemanların TS DNA olan karşılıklarının koddaki yeri bu örnek ile gösterilmektedir.

$f_0 = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ,  $f_1 = x^6 + x^3 + 1$ ,  $f_1 | f_0 | x^9 - 1$  olsun ve  $C = ((1+u)^3 f_0, (1+u)^4 f_1)$  devirli kodu alınsın.  $C$  devirli kodunun üreteç matrisi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 \\ (u+1)^4 & 0 & 0 & (u+1)^4 & 0 & 0 & (u+1)^4 & 0 & 0 \\ 0 & (u+1)^4 & 0 & 0 & (u+1)^4 & 0 & 0 & (u+1)^4 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$v_2$ ,  $C$  kodunun bir elemanı ve aynı zamanda üreteç matrisinin 2. satırı olmak üzere;  $v_2$ 'nin ters sırası  $v_2^r = (1+u)v_1 + v_2 + v_3$  dir.

$v_2 = (1+u^4, 0, 0, 1+u^4, 0, 0, 1+u^4, 0, 0)$  iken

$(1+u)v_1 + v_2 = (0, 0, u^4 + 1, 0, 0, u^4 + 1, 0, 0, u^4 + 1) = v_2^r$  elde edilir.

$C$  kodundan rastgele bir eleman olarak  $c_1$  kodsözü alınsın ve aşağıdaki şekilde verilsin.

$$c_1 = (1 + u^2 + u^3) * v_2 \\ = (u^7 + u^6 + u^4 + u^3 + u^2 + 1, 0, 0, u^7 + u^6 + u^4 + u^3 + u^2 + 1, \\ 0, 0, u^7 + u^6 + u^4 + u^3 + u^2 + 1, 0, 0)$$

$c_1$  'in DNA karşılığı

$$\zeta^{-1}(c_1) = (T, G, T, G, A, A, A, A, A, A, T, G, T, G, A, A, A, A, A, \\ A, A, T, G, T, G, A, A, A, A, A, A, A, A)$$

şeklindedir.

$$c_2 = (1 + u + u^2) * ((1 + u)v_1 + v_2 + v_3) \\ = (1 + u + u^2) * v_2^r = (0, 0, u^6 + u^5 + u^4 + u^2 + u + 1, \\ 0, 0, u^6 + u^5 + u^4 + u^2 + u + 1, 0, 0, u^6 + u^5 + u^4 + u^2 + u + 1)$$

$c_1$  'in DNA karşılığının ters sırasına eşittir ve aşağıdaki gibidir.

$$\zeta^{-1}(c_2) = (A, A, A, A, A, A, A, G, T, G, T, \\ A, A, A, A, A, A, A, G, T, G, T, A, A, A, A, A, A, A, G, T, G, T)$$

$$\zeta^{-1}(c_1)^r = \zeta^{-1}(c_2) \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 5.6** Örnek 5.5'teki  $C$  kodu için aşağıdaki işlemler örnek olarak verilmiştir.

$$c_3 = uv_1 + (1 + u^3)v_2 + (u^2 + u^3)v_3 = (u^7 + u^2 + u + 1, u^7 + u^5 + u^4 + u^2, u^4 + u^3 + u^2 + u, \\ u^7 + u^2 + u + 1, u^7 + u^5 + u^4 + u^2, u^4 + u^3 + u^2 + u, \\ u^7 + u^2 + u + 1, u^7 + u^5 + u^4 + u^2, u^4 + u^3 + u^2 + u)$$

$$\zeta^{-1}(c_3) = (C, A, G, T, C, T, G, A, A, G, T, C, C, A, \\ G, T, C, T, G, A, A, G, T, C, C, A, G, T, C, T, G, A, A, G, T, C)$$

Üreteç matristen  $v_1^r = v_1, v_3^r = v^3$  olduğu görülmektedir.

$$c_4 = ((u^2 + u^3 + u^4))v_1^r + (u + u^2)v_2^r + (u + u^3)v_3^r \\ = (u^7 + u^5 + u^4 + u^2, u^4 + u^3 + u^2 + u, \\ u^7 + u^6 + u^4 + u, u^7 + u^5 + u^4 + u^2, u^4 + u^3 + u^2 + u, u^7 + u^6 + u^4 + u, \\ u^7 + u^5 + u^4 + u^2, u^4 + u^3 + u^2 + u, u^7 + u^6 + u^4 + u)$$

$$\zeta^{-1}(c_4) = (C, T, G, A, A, G, T, C, T, G, A, C, C, T, G, A, \\ A, G, T, C, T, G, A, C, C, T, G, A, A, G, T, C, T, G, A, C)$$

$\zeta^{-1}(c_3)^r = \zeta^{-1}(c_4)$  elde edilir.

**Örnek 5.7**  $F_2$ 'de  $f_2 \mid f_1 \mid f_0 \mid (x^6 - 1)$  olacak şekilde  $f_0 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ,  $f_1 = x^4 + x^2 + 1$ ,  $f_2 = x^2 + x + 1$ ,  $f_3 = f_4 = \dots f_7 = 0$  alınsın.  $\mathcal{R}_{2^3}$ 'de  $C$  kodu  $C = (f_0, (1+u)^4 f_1, (1+u)^6 f_2)$  şeklinde üretilsin. Üreteç matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u^5 + u^4 + u + 1 & 0 & u^5 + u^4 + u + 1 & 0 & u^5 + u^4 + u + 1 & 0 \\ u^6 + u^4 + u^2 + 1 & u^6 + u^4 + u^2 + 1 & u^6 + u^4 + u^2 + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^6 + u^4 + u^2 + 1 & u^6 + u^4 + u^2 + 1 & u^6 + u^4 + u^2 + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_1, f_2, f_3 \mid (x^6 - 1)_{(x-1)}$  olduğundan  $C$  kodu 24 uzunluğunda bir TST DNA koda karşılık gelmektedir.

## 5.2 Dual ve Kendine Dual Devirli Kodlar ve DNA Kodlar

**Teorem 5.8**  $f_{2^t-1} \mid \dots f_3 \mid f_2 \mid f_1 \mid f_0 \mid (x^n - 1)$  olacak şekilde bir devirli kod

$C = (f_0, (1+u)f_1, (1+u)^2 f_2, \dots, (1+u)^{2^t-1} f_{2^t-1})$  alınsın.  $\hat{f}_i = (x^n - 1) / f_i$  olmak üzere,

$C^\perp = (\hat{f}_{2^t-1}^*, \dots, (1+u)^{2^t-2} \hat{f}_1^*, (1+u)^{2^t-1} \hat{f}_0^*)$  şeklinde bir devirli koddur. Eğer  $\hat{f}_i^*$ 'ler kendine

resiprokal polinomlar ise  $C^\perp$  TS bir koddur ve  $\zeta^{-1}(C^\perp)$  TS DNA koddur. Eğer tüm

kendine resiprokal  $\hat{f}_i^*$  polinomlar  $(x^n - 1) / (x + 1)$ 'i böler ise  $C^\perp$  TS bir koddur ve

$\zeta^{-1}(C^\perp)$  TST DNA koddur. Eğer  $0 \leq i \leq 2^k - 1$  için  $f_{2^k-1-i} = \hat{f}_i^*$  ise  $C$  bir kendine dual koddur.

**İspat**  $\hat{f}_0^* \mid \hat{f}_1^* \mid \dots \mid \hat{f}_{2^t-1}^* \mid (x^n - 1)$  olduğundan.  $C^\perp$  devirli bir koddur. [27] çalışmasından  $C$ 'nin kendine duallığı görülmektedir.

**Örnek 5.9**  $f_0 = x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ,

$f_1 = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ ,  $f_2 = x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$  kendine resiprokal

polinomları için  $f_2 \mid f_1 \mid f_0 \mid (x^{15} - 1) \pmod{2}$  dir.  $C = (f_0, (1+u)f_1, (1+u)^3 f_2)$   $\mathcal{R}_{2^2}$ 'de bir

devirli koddur ve  $\zeta^{-1}(C)$  ters sıralı tamlanan DNA koddur.

Üreteç matrisi

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 \\ 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 \\ (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^\perp = (\hat{f}_2^*, (1+u)\hat{f}_1^*, (1+u)^2\hat{f}_1^*, (1+u)^3\hat{f}_0^*) \text{ olduğundan}$$

$$C^\perp = (\hat{f}_2^*, (1+u)\hat{f}_1^*, (1+u)^3\hat{f}_0^*) \text{ elde edilir ve } \zeta^{-1}(C^\perp) \text{ ters sıralı DNA koddur.}$$

Üreteç matrisi aşağıdaki gibidir.

$$G_{C^\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & u+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (u+1)^3 & (u+1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Örnek 5.10**  $\mathcal{R}_{2^3}$ 'de  $f = (x-1)$  olmak üzere  $(f^{13}, (u-1)^3 f^9, (u-1)^4 f^7, (u-1)^5 f^3)$

kodu 16 uzunluğunda kendine dual bir koddur.

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada yükseltilmiş ve eşterimli polinomlar tanımlanmıştır. Bu polinomlar yardımıyla sonlu cisim ve halkalarda optimal kodlar elde edilmiştir. Yükseltilmiş ve eşterimli polinomların bir formu ve özel tablolar ve basamak sistemleri ile elde edilen kodlar TS ve TST DNA kodların oluşturulmasında kullanılmıştır. Son olarak  $\mathcal{R}_{2^k}$  halkasında devirli kodlar ve kendine dual kodlar üzerinde TS ve TST DNA kodları elde edilmiştir.

$\mathcal{R}_k$  formundaki halkalar için devirli kodlar ile TS ve TST DNA kodları üretmek, gerçek DNA kodları ile ilişkili uygun kodlar elde etmek ve bu çalışmalar için uygun kod sınırlarını elde etmek ve kullanmak açık bir problem olarak bulunmaktadır.

- [1] Adleman, L.M., (1994). "Molecular Computation of Solutions to Combinatorial Problems", Science, 266: 1021-1024.
- [2] King, O.D., (2003). "Bounds for DNA Codes with Constant GC-Content", Electronic Journal of Combinatorics, 10.
- [3] Marathe, A., Condon, A.E. ve Corn, R.M., (2001). "On Combinatorial DNA Word Design", Journal of Computational Biology, 8: 201-219.
- [4] Frutos, A.G., Liu, Q., Thiel, A.J., Sanner, A.M.W., Condon, A.E., Smith, L.M. ve Corn, R.M., (1997). "Demonstration of a Word Design Strategy for DNA Computing on Surfaces", Nucleic Acids Research, 25: 4748-4757.
- [5] Li, M., Lee, H.J., Condon, A.E. ve Corn, R.M., (2002). "DNA Word Design Strategy for Creating Sets of Non-Interacting Oligonucleotides for DNA Microarrays", Langmuir, 18: 805-812.
- [6] Tulpan, D.C., Hoos, H.H. ve Condon, A.E., (2003). "Stochastic Local Search Algorithms for DNA Word Design", Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2568: 229-241.
- [7] Deaton, R., Murphy, R.C., Rose, J.A., Garzon, M., Franceschetti, D.R. ve Stevens, S.E., (1997). "A DNA Based Implementation of an Evolutionary Search for Good Encodings for DNA Computation", Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC '97): 267-271.
- [8] Deaton, R., Garzon, M., Murphy, R.C., Franceschetti, D.R. ve Stevens, S.E., (1996). Genetic Search of Reliable Encoding for DNA Based Computation, First Conference on Genetic Programming GP-96. Stanford University, 9-15.
- [9] Rykov, V.V., Torney, D.C., Macula, A.J. ve White, P.S., (2001). "DNA Sequences and Quaternary Cyclic Codes": IEEE
- [10] D'Yachkov, A.G., Erdős, P.L., Macula, A.J., Rykov, V.V., Torney, D.C., Tung, C.S., Vilenkin, P.A. ve White, P.S., (2003). "Exordium for DNA Codes", Journal of Combinatorial Optimization, 7: 369-379.
- [11] Yildiz, B. ve Siap, I., (2012). "Cyclic Codes Over  $F_2[u]/(u^4 - 1)$  and Applications to DNA Codes", Computers & Mathematics with Applications, 63: 1169-1176.

- [12] Siap, I., Abualrub, T. ve Ghrayeb, A., (2009). "Cyclic DNA Codes Over the Ring  $F_2[u]/(u^2-1)$  Based on the Deletion Distance", Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 346: 731-740.
- [13] Adleman, L.M., Rothmund, P.W.K., Roweis, S. ve Winfree, E., (1999). "On Applying Molecular Computation to the Data Encryption Standard", Journal of Computational Biology, 6: 53-63.
- [14] Boneh, D., Dunworth, C. ve Lipton, R., (1995). Breaking DES Using Molecular Computer, Princeton CS
- [15] Mansuripur, M., Khulbe, P.K., Kuebler, S.M., Perry, J.W., Giridhar, M.S. ve Peyghambarian, N., (2003). "Information Storage and Retrieval Using Macromolecules as Storage Media", Vancouver, BC: Optical Society of America.
- [16] Abualrub, T., Ghrayeb, A. ve Nian Zeng, X., (2006). "Construction of Cyclic Codes Over  $GF(4)$  for DNA Computing", Journal of the Franklin Institute, 343: 448-457.
- [17] Gaborit, P. ve King, O.D., (2005). "Linear Constructions for DNA Codes", Theoretical Computer Science, 334: 99-113.
- [18] Aboluion, N., Smith, D.H. ve Perkins, S., (2012). "Linear and Nonlinear Constructions of DNA Codes with Hamming Distance  $d$ , Constant GC-Content and a Reverse-Complement Constraint", Discrete Mathematics, 312: 1062-1075.
- [19] Faria, L.C.B., Rocha, A.S.L., Kleinschmidt, J.H., Silva-Filho, M.C., Bim, E., Herai, R.H., Yamagishi, M.E.B. ve Palazzo, R., (2012). "Is a Genome a Codeword of an Error-Correcting Code?", Plos One, 7.
- [20] Lichtenberg, J., Yilmaz, A., Welch, J.D., Kurz, K., Liang, X.Y., Drews, F., Ecker, K., Lee, S.S., Geisler, M., Grotewold, E. ve Welch, L.R., (2009). "The Word Landscape of the Non-Coding Segments of the Arabidopsis Thaliana Genome", BMC Genomics, 10.
- [21] Ling, S. ve Xing, C., (2004). Coding Theory: A First Course: Cambridge University Press.
- [22] Massey, J.L., (1964). "Reversible Codes", Information and Control, 7: 369-380.
- [23] Grassl, M., Bounds on the Minimum Distance of Linear Codes and Quantum Codes., <http://www.codetables.de>, 13 Nisan 2016.
- [24] Öztaş, E.S., (2009). DNA Kodlarının Cebirsel Yapısı, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- [25] Shiromoto, K. ve Storme, L., (2003). "A Griesmer Bound for Linear Codes Over Finite Quasi-Frobenius Rings", Discrete Applied Mathematics, 128: 263-274.
- [26] Norton, H.G. ve Sălăgean, A., "On The Structure of Linear and Cyclic Codes Over a Finite Chain Ring", Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 10: 489-506.

- [27] Ricardo Alfaro, S.B., Harvey, J., and Thornburg, C., (2009). "On Distances and Self-Dual Codes Over  $F_q[u]/(u^t)$ ", *Involve a Journal of Mathematics*, 2: 177-194.



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** :Elif Segâh ÖZTAŞ  
**Doğum Tarihi ve Yeri** :27.11.1985 Elazığ  
**Yabancı Dili** :İngilizce  
**E-posta** :elifsegahoztas@gmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU

| Derece    | Alan      | Okul/Üniversite              | Mezuniyet Yılı |
|-----------|-----------|------------------------------|----------------|
| Doktora   | Matematik | Yıldız Teknik Üniversitesi   | 2016           |
| Y. Lisans | Matematik | Sakarya Üniversitesi         | 2009           |
| Lisans    | Matematik | Sakarya Üniversitesi         | 2007           |
| Lise      | Fen       | İstanbul Atatürk Lisesi(YDA) | 2003           |

### İŞ TECRÜBESİ

| Yıl       | Firma/Kurum                        | Görevi              |
|-----------|------------------------------------|---------------------|
| 2011-2017 | Yıldız Teknik Üniversitesi         | Araştırma Görevlisi |
| 2011-2011 | Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi | Araştırma Görevlisi |

## YAYINLARI

### Makale

1. Öztaş, E.S. ve Şiap, İ., (2013). “Lifted Polynomials Over  $F_{16}$  and Their Applications to DNA Codes”, Filomat, 27(3): 461–468.
2. Öztas, E. S. ve Şiap, İ., (2015). “On a Generalization of Lifted Polynomials Over Finite Fields and Their Applications to DNA Codes”, International Journal of Computer Mathematics, 92(9): 1976-1988.

### Bildiri

1. Oztas, E. S., Siap, I. ve Yıldız, B., (2015). “On DNA Codes From a Family of Chain Rings”, International Conference on Coding and Cryptography, ICCCC, 2-5 November 2015, Algeria.
2. Oztas, E. S., Yildiz, B. ve Siap, I., (2015). "Lifted Polynomials on the Rings and DNA Applications", The Second International Conference on Mathematics and Statistics (AUS-ICMS '15), 39, 2-5 April 2015, Sharjah, BAE.
3. Oztas, E. S., Siap, I. ve Yıldız, B., (2014). “Reversible Codes and Applications to DNA”, Lecture Notes in Computer Science 4th International Conference on Mathematical Software, 8592, 124-128, 5-9 August 2014, South Korea.
4. Siap, I., Oztas, E. S., Yildiz, B. ve Yilmaz, A., (2014). “Relations Between Algebraic DNA Structures and Real DNA”, 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences And Applications, 25-28 August 2014, Vienna-Austria.
5. Oztas, E. S. ve Siap, I., (2013) “A Special Class of Reversible Codes Over  $GF(256)$  and DNA Constructions”, CMMSE 2013, 13th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, 4:1133, 23-27 June 2013, Spain.
6. Oztas, E. S., Siap, I. ve Ozen, M., (2012) “Reversible Codes Over  $GF(16)$  and DNA Codes”, The Algerian-Turkish International Days on Mathematics (ATIM\2012), 1:35, 9 - 11 October 2012, Algeria.

### Proje

1. Homojen Ağırlıklarına Bağlı Galois Halkaları Üzerinde Tanımlı Lineer Kodlarda Sınırlar ve Mükemmel Kodlar (TÜBİTAK-109T328), Bursiyer.
2. Bazı Sonlu Halkalar Üzerinde tanımlı Ters Sıralı-Tamlama Kodlar Ve DNA'ya Uygulamaları (TÜBİTAK-113F071), Bursiyer.

## **ÖDÜLLERİ**

1. 2012-2013 YTÜ Yayın Teşvik Ödülü
2. 2015 TÜBİTAK UBYT Yayın Teşvik Ödülü

