

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÇARPIMSAL LATİSLERİN SPEKTRUMU

GÜLŞEN ULUCAK

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL**

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL LATİSLERİN SPEKTRUMU

Gülşen ULUCAK tarafından hazırlanan tez çalışması 22.01.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP

Beykent Üniversitesi

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Esra ŞENGELN SEVİM

İstanbul Bilgi Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL

Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitim hayatım boyunca bilgisinden ve tecrübesinden istifade ettiğim ve bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL' a sonsuz teşekkür ederim.

Lisans ve lisansüstü eğitim hayatım ve tez çalışmalarım boyunca akademik bilgi ve tecrübeleriyle bana katkılarından dolayı ayrıca her türlü destek ve yardımlarından dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e en içten dileklerle teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca tez jürimde olmayı kabul eden çok değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP, sayın Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY, sayın Doç. Dr. Esra Şengelen SEVİM, sayın Doç. Dr. Murat ALAN ve sayın Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL' e sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca, öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim sevgili anne ve babama sonsuz teşekkür ederim.

Ocak 2016

Gülşen ULUCAK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	5
BÖLÜM 2	
TOPOLOJİK TANIMLAR VE BAZI TOPOLOJİK UZAYLAR	6
BÖLÜM 3	
LATİS VE LATİS MODÜLLERİN TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLERİ	11
3.1 Latislerin Temel Tanım ve Özellikleri	12
3.2 Latis Modüllerin Temel Tanım ve Özellikleri.....	22
BÖLÜM 4	
EŞ ÇARPIMSAL LATİS MODÜLLER.....	27
BÖLÜM 5	
ÇARPIMSAL LATİSLERİN SPEKTRUMU	41
5.1 Çarpımsal Latisler Üzerinde Zariski Topoloji.....	41
5.2 Latis Modüller Üzerinde Zariski Topolojisi.....	46

BÖLÜM 6

LATİS VE LATİS MODÜLLER ÜZERİNDE T_0 ve T_1 ARASINDAKİ BAZI AYIRMA

AKSİYOMLARI 54

6.1 Latis Üzerinde T_0 ve T_1 Arasındaki Bazı Ayırma Aksiyomları 56

6.2 Latis Modüller Üzerinde T_0 ve T_1 Arasındaki Bazı Ayırma Aksiyomları 60

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER 66

KAYNAKLAR 67

ÖZGEÇMİŞ 70

SİMGE LİSTESİ

(X, τ)	Topolojik uzay
$\widehat{\{x\}}$	x elemanının çekirdeği
$\widetilde{\{x\}}$	x elemanının kabuğu
$P(A)$	A kümesinin kuvvet kümesi
$cl(A)$	A kümesinin kapanış
A'	A kümesinin türev kümesi
τ_A	A kümesi üzerindeki Relatif topoloji
$A - B$	A kümesinin B kümesinden farkı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup (0)$
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$L(R)$	R nin ideallerinin kümesi
$L(M)$	R –modül M nin alt modüllerinin kümesi
L	Latis
$\wedge$	İnfimum işlemi
$\vee$	Supremum işlemi
$\cup$	Birleşme işlemi
$\cap$	Kesişim işlemi
$\sqrt{a}$	a elemanının radikali
$Jac(L)$	L nin maksimal elemanlarının infimumları
$\sigma(L)$	L latisinin asal elemanlarının kümesi
$\sigma(M)$	M latis modülünün asal elemanlarının kümesi
$max(L)$	L latisinin maksimal elemanlarının kümesi
$Max(M)$	M latis modülünün maksimal elemanlarının kümesi
$\dim(L)$	L latisinin boyutu
$\dim(M)$	M latis modülünün boyutu
PG –latis	Temel elemanlar tarafından üretilmiş latis
CG –latis	Kompakt elemanlar tarafından üretilmiş latis

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3. 1 L latisinin yapısı	22
Çizelge 3. 2 L latisinin çarpma işlemine göre yapısı	22
Çizelge 3. 3 M latis modülünün yapısı	22

ÇARPIMSAL LATİSLERİN SPEKTRUMU

Gülşen ULUCAK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Eş Danışman: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İlk olarak modüller üzerinde incelenmiş olan eş çarpımsal modül yapısı latis modüller üzerine aktarılacaktır. Tanımlanan eş çarpımsal latis modül kavramının temel özellikleri incelenecektir. Eş çarpımsal latis modüller için Nakayama Lemma'nın duali ifade edilecektir. Bir idealin ve bir alt modülün asalımsı ayrışımı halka ve modül teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Eş çarpımsal latis modüller için bir elemanın asalımsı ayrışımına sahip olması için gerekli durumlar araştırılacaktır.

Daha sonra halkaların asal ideallerinin kümesi üzerinde kurulan Zariski topolojisi, çarpımsal latis ve latis modüllerin asal elemanlarının kümeleri üzerinde kurulacaktır ve kurulan bu topolojilerin topolojik özellikleri incelenecektir. Kurulan bu topolojiler yardımı ile asal spektrumu T_0 ve T_1 arasındaki bazı aksiyomları sağlayan latis ve latis modüller karakterize edilecektir. Çalışmanın devamında N.K. Thakare' nin makalesinde kurulmuş olan çarpımsal latislerin asal elemanları kümesi üzerindeki topoloji için bazı özellikler, önermeler ve teoremler incelenecektir. Bu topolojiden esinlenerek latis modüllerin asal elemanları kümesi üzerinde bir topoloji kurulacaktır. Kurulacak olan bu topolojik uzayın özellikleri incelenecek ve hangi şartlar altında T_0 ve T_1 uzay oldukları gösterilecektir.

Son olarak çarpımsal latis ve latis modüller üzerinde kurduğumuz bu topolojik uzayların T_0 ve T_1 arasındaki bazı aksiyomları hangi durumlarda sağladığı incelenecektir. Sonuç olarak çarpımsal latis modüllerin asal elemanları üzerinde kurulmuğ olan topolojiye benzer şekilde latis modüllerin asal elemanları üzerinde bir topoloji kurulacaktır ve bu iki topolojinin de özellikleri incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: arpımsal latis, çarpımsal latis modül, eė çarpımsal latis modül, Zariski topolojisi, asal spektrum.

THE SPECTRUM OF MULTIPLICATIVE LATTICES

Gulsen ULUCAK

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Assoc. Dr. Kursat Hakan ORAL

Co-Adviser: Prof. Dr. Unsal TEKIR

First of all, modules that have been tested on comultiplication module will be transferred onto the lattice structure. Basic properties of defined comultiplication lattice module concept will be investigated. A duali of Nakayama's lemma will be expressed over comultiplication lattice modules. The primary decomposition of a submodule and a ideal constitutes an important part of ring and module theory. The necessary condition to have decomposition of an element of the comultiplication lattice module will be researched. Later, the Zariski topology, established on the set of prime ideals of the ring, will be built on sets of prime elements of the multiplicative lattice and lattice module and then topological properties of established topology will be shown. The lattices and lattice modules whose prime spectrums satisfy some of the separation axioms between T_0 and T_1 will be characterized by means of prime spectrum of established these topologies.

In the later part of the study, we study some properties, propositions and theorems for the topology, established on a set of prime elements of multiplicative lattice in the article of N.K. Thakare. In the other part, a topology will be established on the set of prime elements of a lattice modules, which is inspired by the topology on multiplicative lattice. Properties of this topological space will be studied and shown to be T_0 and T_1 space under which circumstances.

Finally, some cases, which have some axioms between T_0 and T_1 , the topological spaces, will be examined in the topological spaces, established over the multiplicative lattice and lattice module. Consequently, it will establish a topology on set of the prime elements of the lattice modules analogically the topology established on the prime elements of the lattices and it will examine the properties of these two topologies.

Keywords: Multiplicative lattice, multiplication lattice modules, comultiplication lattice modules, Zariski topology, prime spectrum.

1.1 Literatür Özeti

D.D. Anderson tarafından 1976 yılında yapılan “Abstract Commutative Ideal Theory Without Chain Condition” adlı çalışmada, R.P. Dilworth tarafından 1971 yılında yapılan “Abstract Commutative Ideal Theory” adlı çalışmada ve F. Alarcon, D.D. Anderson ve C. Jayaram tarafından 1995 yılında yapılan “Some Results on Abstract Commutative Ideal Theory” adlı çalışmada $L(R)$ nin teorisi, çarpımsal latis ve onun diğer cebirsel sistemler üzerine uygulamaları incelenmiştir [1], [2], [3]. L tam latisinin supremumları üzerinde dağılmalı ($J(VK_\alpha) = VJK_\alpha$), birleşmeli ve değişmeli bir çarpım tanımlı ve çarpımsal birim elemanı olarak 1_L en büyük elemanı var ise L ye bir çarpımsal latis denir. R birimli, değişmeli bir halka ve $L(R)$, R nin ideallerinin latisi olsun. İdealler üzerinde genel işlemler alındığında $L(R)$ supremumlar üzerinde dağılmalı ($J(VK_\alpha) = VJK_\alpha$), birleşmeli ve değişmeli bir çarpım ile tam modüler latistir ve $L(R)$ nin en küçük üst sınırı R halkasının kendisidir ve bu bir çarpımsal birimdir.

C. Jayaram ve E. W. Johnson tarafından sırasıyla 1995, 1995, 1997, 1997 ve 1998 yıllarında yapılan “Some Results on Almost Principal Element Lattices”, “ s -Prime Elements in Multiplicative Lattices”, “Dedekind Lattice”, “Strong Compact Elements in Multiplicative Lattices” ve “ σ -Elements in Multiplicative Lattices” başlıklı makalelerde ve ayrıca C. Jayaram tarafından sırasıyla 2002 ve 2003 yıllarında yapılan yapıları “ l -Prime Elements in Multiplicative Lattices” ve “Laskerian Lattices” adlı makalelerde çarpımsal latis yapısı kapsamlı bir şekilde incelenmiştir ve temel elemanlarının tanımları, kompakt eleman tanımı ve özellikleri açıklanmıştır [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

H.M. Nakkar ve I.A. Al-Khouja tarafından 1985 yılında yapılan “Nakayama’s Lemma and The Principal Elements in Lattice Modules over Multiplicative Lattices” başlıklı çalışmada latis modüller üzerinde Nakayama Lemma’ yı incelemiştir [11]. D. Scott Culhan, 2005 yılında yaptığı “Associated Primes and Primal Decomposition in Modules and Lattice Modules, and Their Duals” başlıklı çalışmada latis modüller üzerinde asal ve asalımsı eleman yapıları üzerinde durmuştur [12]. C. Jayaram ve E. W. Johnson tarafından yapılan “Lattice Modules over Principal Element Domains” isimli makalede temel eleman bölgelerinde latis modülleri incelemiştir [13]. E.A. Al-Khouja tarafından 2003 yılında yapılan çalışmada çarpımsal latisler üzerinde tanımlanan latis modüllerin maksimal elemanın varlığı incelenmiştir [14].

2011 yılında F. Çallıalp ve Ü. Tekir tarafından yapılan “Multiplication Lattice Modules” isimli makalede çarpımsal latis modül kavramı tanımlanmış ve çarpımsal latis modülün özellikleri incelenmiştir. Çalışmaya ilk olarak latis modül tanımı ile başlanılmış, çarpımsal latis modülün özellikleri, önerme ve teoremler altında incelenmiştir [15].

H. M. Nakkar ve I. A. Al-Khouja tarafından 1989 ve D.G. Whitman tarafından 1971 yıllarında yapılan çalışmalarda latis modüle kapsamlı şekilde incelenmiş ve ilk makaleden latis modülde maksimal elemanın var olması için en büyük elemanın kompakt olması gerektiği görülmüştür [16], [17].

H. Ansari-Toroghy ve F. Farshadifar tarafından 2008 ve 2011 yılında yapılan çalışmaları ile Y. Shaniafi ve P.F. Smith tarafından 2011 yılında yapılan çalışmada değişmeli halkalar üzerinde eş çarpımsal modüller hakkında incelemeler yapılarak, bu modüllerin özellikleri üzerine önemli teoremler elde edilmiştir [18], [19], [20].

H. Ansari-Toroghy ve F. Farshadifar tarafından 2007 yılında yapılan “The Dual Notion of Multiplication Modules” adlı makalede eş çarpımsal modüller için bazı sonuçlar gösterilmiş ve çarpımsal modüllerin hangi şartlar altında eş çarpımsal modül olduğu incelenmiştir. Ayrıca, sonlu eş üretilmiş modüller için Nakayama Lemma’ nın duali ifade edilmiş ve ispatlanmıştır [21].

1988 yılında N.K. Thakare, C.S. Manjarekar ve S. Maeda tarafından yapılan “Abstract Spectral Theory. 2: Minimal Characters and Minimal Spectrums of Multiplicative Lattices” başlıklı makalede çarpımsal latisler üzerinde topoloji kurulmuştur. Öncelikle

karakter tanımı yapılmış ve bunun çarpımsal latisin asal elemanları ile denk olduğu gösterilmiştir. Makalede $\sigma(L)$ ile L nin karakterlerinin yani asal elemanlarının kümesi gösterilmiştir. $\sigma(L)$ üzerinde kapalı kümeler $a \in L$ için $V(a) = \{p \in \sigma(L) | a \leq p\}$ olmak üzere Hull Kernel topolojisi kurulmuştur. Bir $a \in L$ için $V(a) = \{p \in \sigma(L) | a \leq p\}$ olmak üzere aşağıdaki topoloji olma şartları sağlanmaktadır.

1. $V(0) = \sigma(L)$ ve $V(1_L) = \emptyset$.
2. $V(a) \cup V(b) = V(ab) = V(a \wedge b)$.
3. $\bigcap_{\alpha} V(a_{\alpha}) = V(\bigvee_{\alpha} a_{\alpha})$ [22].

M.F. Atiyah, I.G. Macdonald ve F. Çallıalp, Ü. Tekir tarafından 1969 ve 2009 senelerinde yazılmış olan “Introduction to Commutative Algebra” ve “Değişmeli Halkalar ve Modüller” isimli kitaplarda $Spec(R)$ ile R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi gösterilmiş ve bir E idealinin varyetesi $V(E) = \{P \in Spec(R) | E \subseteq P\}$ kümesi olarak tanımlanmıştır [8]. Burada $\Gamma = \{V(E) | E \subseteq R\}$ elemanları kapalı kümeler olarak göz önüne alındığında $X = Spec(R)$ üzerinde bir topoloji kurulmuş ve bu topolojiye Zariski topolojisi denilmiştir. Bu durumda $Spec(R)$ nin bir açık kümesi $X \setminus V(E)$ şeklindedir. Buna göre taban kavramından bahsedilmiştir [23], [24].

A. Pena, L.M. Ruza ve J. Vielma tarafından 2009 yılında yapılan çalışmada değişmeli halkanın asal idealleri kümesi üzerinde kurulan Zariski topolojisi yarı halkaların asal idealleri kümesi üzerinde kurulmuştur. Kurulan bu topoloji için bazı ayırma aksiyomları incelenmiştir [25].

C.P. Lu tarafından yazılan 1999 da yayınlanmış olan “The Zariski Topology on the Prime Spectrum of a Module” başlıklı makalede modüller üzerinde bir topoloji kurulmuştur. Bu çalışmada $Spec(M)$ ile R –modül M nin tüm asal alt modüllerinin kümesi gösterilmiş ve bu küme üzerinde iki tip varyete tanımlanmıştır. İlk olarak N, M nin alt modülü olmak üzere $V^*(N) = \{P \in Spec(M) | N \subseteq P\}$ varyetesi tanımlanmıştır. Bu varyete kapalı küme olarak kabul edilmiştir fakat sonlu birleşimler altında kapalılık özelliğini sağlamadığından varyete değiştirilmiş ve şu şekilde tanımlanmıştır:

$V(N) = \{P \in Spec(M) | (N:M) \subseteq (P:M)\}$. Burada $\zeta(M) = \{V(M) | N \text{ alt modül } M\}$ elemanları kapalı kümeler olarak göz önüne alındığında $X = Spec(M)$ üzerinde bir

topoloji kurulmuş ve bu topolojiye Zariski topolojisi denilmiştir. Bu topolojinin kurulması ile bazı ifadeler incelenmiştir [26].

Ü. Tekir tarafından yazılan 2009 yılında yayınlanmış olan “The Zariski Topology on the Prime Spectrum of a Module over Noncommutative Rings” başlıklı çalışmada değişmeli olmayan halkalar üzerinde tanımlanan modüllerin asal alt modülleri kümesi üzerinde Zariski topolojisi kurulmuştur. Bu makalede varyete $V(N) = \{P \in \text{Spec}(M) | (N:M) \subseteq (P:M)\}$ şeklinde tanımlanmıştır ve bu varyeteler Zariski topolojisi için kapalı kümelerdir [27].

J.L. Kelley, 1955 yılında basılmış olan “General Topology” başlıklı kitabında çalışmamız için ihtiyaç duyulan topolojik tanımlar ve özellikler incelenmiştir [28].

J. A. Avila tarafından 2005 ve 2006 yıllarında yapılan “ $\text{Spec}(R)$ and Separation Axioms Between T_0 and T_1 ” ve “Rings That Characterize Some Separation Notions” başlıklı çalışmalarda asal spektrumları T_0 ve T_1 arasındaki bazı aksiyomları sağlayan değişmeli halkalar karakterize edilmiştir. Bu karakterizasyonların bazıları m –halka, pm –halka, Y –halka, ε –halka, U –halkadır [30], [31].

K. Murata tarafından 1970 yılında yapılan “Primary Decomposition of Elements in Compactly Generated Integral Multiplicative Lattices” isimli çalışmasında latis modüllerde minimal asal eleman tanımı verilmiş ve minimal asal elemanın varlığı incelenmiştir [29].

Literatürde incelediğimiz son beş çalışmanın latis ve latis modül yapılarını daha anlaşılır şekilde açıklayan örneklerinden faydalanılmıştır ve ayrıca bazı yeni tanımlanan latis modül yapıları incelenmiştir [32], [33], [34], [35], [36].

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın ilk amacı, modüller üzerinde tanımlanmış olan eş çarpımsal modül kavramını latis modüller üzerinde tanımlamaktır. Eş çarpımsal latis modüllerin özelliklerini araştırmaktır.

Diğer bölümün amacı halkaların asal idealleri üzerinde kurulmuş olan Zariski topolojisini ve özelliklerini çarpımsal latis ve latis modüllerin asal elemanlarının kümeleri üzerinde kurmak ve topolojik özellikleri göstermektir.

Son bölümün amacı ise asal spektrumları T_0 ve T_1 arasındaki bazı aksiyomları sağlayan latis ve latis modülleri karakterize etmektir.

1.3 Hipotez

Modüller üzerinde tanımlanmış olan eş çarpımsal modül kavramı yardımıyla latis modüller üzerinde eş çarpımsal latis modül kavramı tanımlanacaktır. Eş çarpımsal modüllerin özellikleri latis modüllerin üzerine aktarılacaktır.

Tezin diğer bölümünde, latis ve latis modüllerin asal elemanlarının kümeleri üzerinde halkaların ve modüllerin asal spektrumları üzerinde kurulmuş olan topoloji yardımıyla topoloji kurulacaktır.

Son bölümde, latis ve latis modüllerin asal spektrumları üzerindeki topoloji için T_0 ve T_1 arasındaki bazı aksiyomları araştırılacaktır. Bu ayırma aksiyomlarını sağlayan latis ve latis modüller karakterize edilecektir.

TOPOLOJİK TANIMLAR VE BAZI TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan topolojik tanımlar ve özellikler incelenmiştir. Buradaki topolojik tanımlar ve özellikler için temel kaynaklar olarak General Topology, 1955 [28] kitabı, *Spec(R)* and Separation Axioms Between T_0 and T_1 [30] ve Rings That Characterize Some Separation Notions [31] makalelerinden faydalanılmıştır.

Tanım 2.1 $\emptyset \neq X$ bir küme olsun. Eğer $P(X)$ kuvvet kümesinin alt kümesi τ aşağıdaki koşulları sağlarsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir.

- i.* $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$.
- ii.* $U_1 \in \tau$ ve $U_2 \in \tau$ iken $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
- iii.* τ kümesinin keyfi sayıda elemanlarından oluşan herhangi bir alt ailesi $\{U_i | i \in \Delta\}$ kümesi olmak üzere $\bigcup_{i \in \Delta} U_i \in \tau$ dur [28].

Tanım 2.2 τ topolojisinin her bir elemanına (X, τ) uzayında bir açık küme (τ -açık küme) adı verilir [28].

Sonuç 2.3 (X, τ) topolojik uzayında;

- i.* X ve $\emptyset$ açık kümelerdir.
- ii.* Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.
- iii.* Keyfi sayıda açık kümenin birleşimi de açıktır [28].

Tanım 2.4 Bir (X, τ) topolojik uzayında açık bir kümenin tümleyeni olan kümeye (veya tümleyeni açık olan kümeye) kapalı küme denir [28].

Önerme 2.5 Bir (X, τ) topolojik uzayında;

- i.* $\emptyset$ ve X birer kapalı kümedir.

ii. Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi de kapalıdır.

iii. Keyfi sayıda kapalı kümenin kesişimi de kapalıdır [28].

Tanım 2.6 Bir (X, τ) topolojik uzayını ve bu uzayın bir Y alt kümesini göz önüne alalım. Bu uzayın Y alt kümesini içeren tüm kapalı alt kümelerinin kesişimine Y nin kapanışı denir ve $cl(Y)$ ile gösterilir [28].

Sonuç 2.7 Bir (X, τ) topolojik uzayında Y nin kapanışı, Y kümesini içeren en küçük kapalı kümedir [28].

Teorem 2.8 $x \in cl(Y)$ olması için gerek ve yeter koşul x i içeren her açık küme ile Y nin kesişiminin boştan farklı olmasıdır [28].

Önerme 2.9 Bir (X, τ) topolojik uzayının bir Y alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $Y = cl(Y)$ olmasıdır [28].

Tanım 2.10 (X, τ) bir topolojik uzay, A , (X, τ) topolojik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun.

- i.* $\{y \in X | x \in cl(y)\}$ kümesine x elemanının çekirdeği denir ve $\widehat{\{x\}}$ ile gösterilir [30].
- ii.* $\widehat{\{x\}} - \{x\}$ kümesine x elemanının kabuğu denir ve $\widetilde{\{x\}}$ ile gösterilir [30].
- iii.* x noktasının her komşuluğu x den başka A nın noktalarını içeriyorsa x noktasına A nın yığılma noktası denir[28].
- iv.* Bir A kümesinin bütün yığılma noktalarının kümesine A nın türev kümesi denir ve A' ile gösterilir [28].

Not 1: A , (X, τ) topolojik uzayının bir alt kümesi olmak üzere bir $x \in X$ noktasının her komşuluğunun A kümesi ile kesişmesi için gerek ve yeter koşul x in ya A da olması ya da A nın yığılma noktası olmasıdır [28].

Not 2: Bir kümenin kapanışı, kümenin kendisi ile türev kümesinin birleşimidir [28].

Tanım 2.11 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in alt kümelerinin meydana getirdiği β küme ailesinin bir taban teşkil etmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

- i.* $\beta \subset \tau$.
- ii.* Eğer $\emptyset \neq U \in \tau$ ise $U = \bigcup_{B_\alpha \in \beta} B_\alpha$ şeklinde yazılabilir [28].

Tanım 2.12 (X, τ) topolojik uzayının boş olmayan bir alt kümesi $A \subset X$ olsun. τ_A , X in bütün τ -açık kümeleri ile A nın arakesitlerinden meydana gelen kümelerin oluşturduğu topolojiyi gösterebilir. Bu küme sistemine A üzerinde Relatif Topoloji denir ve (A, τ_A) ile gösterilir. (A, τ_A) , (X, τ) nun bir alt uzayıdır. A nın bir W alt kümesinin τ_A uzayında açık olması için $W = U \cap A$ olacak şekilde τ topolojisinin bir U açık kümesi olmasıdır [28].

Tanım 2.13 Bir X kümesi, bu kümenin bir Y alt kümesi ve bir $\omega \subset P(X)$ ailesi verilmiş olsun. Eğer $Y \subseteq \bigcup \{U \mid U \in \omega\}$ oluyorsa ω ailesine Y alt kümesinin bir örtüsü denir. Eğer ω sayılabilir ise sayılabilir örtü, ω sonlu ise sonlu örtü denir [28].

Tanım 2.14 Bir (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu uzaya kompakt uzay denir [28].

Tanım 2.15 (X, τ) ve (Y, η) birer topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer Y nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü X de açıksa f fonksiyonuna sürekli denir [28].

Teorem 2.16 (X, τ) ve (Y, η) birer topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y nin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsünün X de kapalı olmasıdır [28].

Tanım 2.17 Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için x elemanını içeren fakat y yi içermeyen veya y yi içeren fakat x i içermeyen bir açık kümesi varsa (X, τ) topolojik uzayına T_0 -uzayı ve τ topolojisine de T_0 -topolojisi denir [28].

Teorem 2.18 (X, τ) topolojik uzayının T_0 -uzayı olması için gerek ve yeter koşul $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ olmasıdır [28].

Tanım 2.19 Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için x elemanını içeren fakat y yi içermeyen ve y yi içeren fakat x elemanını içermeyen iki açık kümesi varsa bu uzaya T_1 -uzayı ve τ topolojisine de T_1 -topolojisi denir [28].

Teorem 2.20 (X, τ) topolojik uzayının T_1 -uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesinin kapalı olmasıdır [28].

Tanım 2.21 Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa bu uzaya Hausdorff uzayı veya T_2 -uzayı denir [28].

Teorem 2.22 Aşağıdaki özellikler denktir:

- i.* X uzayı Hausdorff uzayıdır.
- ii.* $a \in X$ olsun. $x \neq a$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $a \in U$ iken $x \notin cl(U)$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır [28].

Sonuç 2.23 Her T_2 -uzayı, T_1 -uzayı ve her T_1 -uzayı, T_0 -uzayıdır [28].

Tanım 2.24 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $F \subset X$ kapalı kümesi ve $x \notin F$ noktası için $x \in U$, $F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde açık U ve V kümeleri varsa bu uzaya Regüler uzay denir [28].

Teorem 2.25 Her kompakt T_2 -uzayı regüler uzaydır [28].

İspat (X, τ) topolojik uzayı kompakt T_2 -uzayı olsun. F , bu uzayın kapalı bir kümesi ve $x \in X - F$ olsun. Böylece her $y \in F$ için $x \neq y$ dir. (X, τ) , T_2 -uzayı olduğundan $x \in U_y$, $y \in V_y$ ve $U_y \cap V_y = \emptyset$ olacak şekilde açık U_y , V_y kümeleri vardır. $F \subseteq \bigcup_{y \in F} V_y$ dir ve F kapalı kümesi kompakt olduğundan $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ olacak şekilde bir alt örtüsü vardır. $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ olsun. Her $x = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ kümesi x i kapsayan açık bir kümedir ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Çünkü bir $z \in U$ için $z \in U_{y_i}$ olacak şekilde bir i vardır. Fakat, $z \notin V_{y_i}$ dir ve böylece $z \notin V$ dir.

Tanım 2.26 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her ayrık kapalı küme çifti F_1 ve F_2 için $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa bu uzaya Normal uzay denir [28].

Tanım 2.27 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\emptyset \neq X$ ve U ile V , X in herhangi boş olmayan iki açık kümesi olsun. $U \cap V \neq \emptyset$ ise X uzayına indirgenemez denir [26].

Bu tanıma dayanarak şu sonuç elde edilir: $\emptyset \neq X$ uzayı indirgenemez değil ise $X = F_1 \cup F_2$ iken $X = F_1$ veya $X = F_2$ olacak şekilde F_1 ve F_2 kapalı kümeleri vardır [26].

Önerme 2.28 (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

- i.* Y , X in indirgenemez alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul $cl(Y)$, X in indirgenemez alt uzayıdır.
- ii.* X in her indirgenemez alt uzayı bir maksimal indirgenemez uzayda kapsanır.
- iii.* X in maksimal indirgenemez uzayları kapalıdır ve X i örterler [26].

Tanım 2.29 (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

- i.** Bir $x \in X$ için $\{x\}'$ boş küme ya da tek nokta kümesi ise uzaya $T(\beta)$ -uzayı denir [31].
- ii.** Bir $x \in X$ için $\widetilde{\{x\}}$ boş küme ya da tek nokta kümesi ise uzaya $T(\beta')$ -uzayı denir [31].
- iii.** Farklı $x, y \in X$ için $\{x\}' \cap \{y\}'$ boş küme ya da tek nokta kümesi ise uzaya $T(\varepsilon)$ -uzayı denir [31].
- iv.** Bir $x \in X$ için $\{x\}'$ ayrık kapalı kümelerin birleşimi ise uzaya T_{UD} -uzayı denir [30].
- v.** Bir $x \in X$ için $\{x\}'$ kapalı bir küme ise uzaya T_D -uzayı denir [30].
- vi.** Farklı $x, y \in X$ için $\{x\}' \cap \{y\}'$ boş küme ve uzay T_D -uzayı ise uzaya T_{DD} -uzayı denir [30].
- vii.** Farklı $x, y \in X$ için $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\})$ boş küme ya da tek nokta kümesi ise uzaya T_Y -uzayı denir [30].
- viii.** Farklı $x, y \in X$ için $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\})$ ya boş küme ya $\{x\}$ ya da $\{y\}$ ise uzaya T_{YS} -uzayı denir [30].

LATİS VE LATİS MODÜLLERİN TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, latis ve latis modül kavramlarını açıklamak için gerekli tanım ve özellikleri vererek ve latis ve latis modül çeşitleri incelenecektir. Latis ve latis modülleri daha iyi açıklayabilmek için örnekler verilecektir. Burada latis kavramını ve özelliklerini açıklamak için gerekli ana kaynaklar olarak Abstract Commutative Ideal Theory without Chain Condition [1], Abstract Commutative Ideal Theory [2], Some Results on Abstract Commutative Ideal Theory [3], Some Results on Almost Principal Element Lattices [4] ve Dedekind Lattice [6] makaleleri ve Multiplicative Lattice [34] başlıklı tezden faydalanılmıştır. Bu çalışmada çarpımsal latisler üzerinde bir topoloji kurulmuştur. Bunun için bu bölümde çarpımsal latis kavramı ve özellikleri incelenmiştir. Çarpımsal latis tanım ve özellikleri için başlıca kaynaklar olarak s –Prime Elements in Multiplicative Lattices [5], Strong Compact Elements in Multiplicative Lattices [7], σ –Elements in Multiplicative Lattices [8], l –Prime Elements in Multiplicative Lattices [9], Laskerian Lattices [10] ve Abstract Spectral Theory. II: Minimal Characters and Minimal Spectrums of Multiplicative Lattices [22] makaleleri kullanılmıştır. Latis modülleri açıklamak için Associated Primes and Primal Decomposition in Modules and Lattice Modules and Their Duals [12], Lattice Modules over Principal Element Domains [13], Maximal Elements and Prime elements in Lattice Modules [14] ve Multiplication Lattice Modules [15] makalelerinden faydalanılmıştır.

3.1 Latislerin Temel Tanım ve Özellikleri

Tanım 3.1.1 Herhangi iki elemanın bir supremumu ve infimumu olan kısmi sıralı kümeye latis denir ve L ile gösterilir. x ve y , L nin iki elemanı olmak üzere bu iki elemanın supremumu $x \vee y$, infimumu $x \wedge y$ ile gösterilir [33].

Aşağıda bazı latis çeşitlerinin tanımları verilmiştir [33]:

- i.* Her alt kümesinin supremumu ve infimumu olan bir latise tam latis denir. Bir tam latis en büyük ve en küçük elemanları içerdiği açıktır.
- ii.* Bir L latisi $x, y, z \in L$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ eşitliği sağlanıyorsa L latisine dağılmalı latis denir.
- iii.* Bir L latisinin her x, y, z elemanları için $z \leq x$ iken $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$ gerektirmesi sağlanıyorsa L latisine modüler latis adı verilir.

Örnek 3.1.2 Bir A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$, birleşme ($\cup$) ve kesişim ($\cap$) işlemleri ile bir latistir. Ayrıca $X, Y, Z \in P(A)$ olmak üzere $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ eşitliği sağlandığından $P(A)$ bir dağılmalı latistir. $X, Y, Z \in P(A)$ olmak üzere $Z \subseteq X$ iken $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$ eşitliği sağlandığından $P(A)$ bir modüler latistir [33].

Örnek 3.1.3 $L(M)$, bir R –modül M nin bütün alt modüllerinin ailesi olsun. Infimum alt modüllerin kesişimi ve supremum alt modüllerin toplamı olmak üzere $L(M)$ bir latistir. $L(M)$ nin dağılmalı latis olduğu açıktır [33].

Örnek 3.1.4 Bilinen sıralamaya göre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer dağılmalı latistir. Fakat hiçbirisi en büyük elemanı içermediğinden bir tam latis değildir [33].

Örnek 3.1.5 $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesi ve $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için $x \leq y$ sıralama bağıntısı x böler y olsun. $\mathbb{Z}^+$ kümesi $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için $x \vee y$, x ve y nin en küçük ortak katı ve $x \wedge y$, x ve y nin en büyük ortak böleni olmak üzere $(\mathbb{Z}^+, \vee, \wedge)$ bir latistir. $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ için x, y ya da z yi bölen bütün asal sayılar p_i lerin kuvvetlerinin çarpımı $\prod p_i^{e_i}$ olsun. $x \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $e_i(x)$; x sayısını bölen p_i asal sayısının kuvveti olsun. Eğer p_i sayısı x sayısını bölmez ise $e_i(x) = 0$ dır. Buna göre $e_i(x \wedge y) = \min\{e_i(x), e_i(y)\}$ ve $e_i(x \vee y) = \max\{e_i(x), e_i(y)\}$ dir. Her i için $e_i(x \vee (y \wedge z)) = e_i((x \vee y) \wedge (x \vee z))$ eşitliği sağlandığından $(\mathbb{Z}^+, \vee, \wedge)$ bir dağılmalı latistir [33].

Örnek 3.1.6 G bir grup ve $S(G)$, G nin alt gruplarının kümesi olsun. $S(G)$ üzerindeki sıralama bağıntısı küme kapsama işlemi ve $H, K \in S(G)$ için $H \wedge K = H \cap K$ ve $H \vee K$, H ve K yı kapsayan en küçük alt grup olmak üzere $(S(G), \vee, \wedge)$ bir tam latistir. Fakat modüler latis değildir. Çünkü A_4 alterne grubunu ve $a = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$, $b = \langle (123) \rangle$ ve $c = \langle (12)(34) \rangle$ alt gruplarını ele aldığımızda $c \leq a$ iken $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee c$ olduğu görülür. Diğer taraftan bir G grubunun bütün normal alt gruplarının kümesi $N(G)$ olmak üzere $H, K \in N(G)$ için $H \wedge K = H \cap K$ ve $H \vee K = HK$ ile $(N(G), \vee, \wedge)$ bir modüler latistir [33].

Tanım 3.1.7 L bir çarpımsal latis ve $a \in L$ olsun. $a \leq \bigvee_{\alpha} b_{\alpha}$ iken bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ alt kümesi için $a \leq b_{\alpha_1} \vee b_{\alpha_2} \vee \dots \vee b_{\alpha_n}$ sağlanıyorsa a ya kompakt eleman denir [1].

Bu tez çalışması boyunca bir L latisinin kompakt elemanlarının kümesi L_* ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.8 L , en küçük elemanı 0_L ve en büyük elemanı ve kompakt elemanı 1_L olan bir tam latis olsun. L latisinde değişmeli, birleşmeli, supremum üzerine dağılmalı bir çarpım tanımlı ve 1_L çarpımsal birim ise L ye çarpımsal latis denir [5].

Tanım 3.1.9 L bir latis olsun. Her $a, b \in L$ için a nın b ye göre rezidüsü $(a :_L b) = \bigvee \{x \in L \mid xb \leq a\}$ şeklinde tanımlanır [1].

Çarpımsal latislerin çarpma işlemlerinin sağladığı bazı temel bağıntı ve özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir [2]:

- i.* $(x :_L y)y \leq x$.
- ii.* $zx \leq y$ ise $z \leq (y :_L x)$ sağlanır.
- iii.* $x \leq y$ olması için gerek ve yeter koşul $(y :_L x) = 1_L$ olmasıdır.
- iv.* $((x \wedge y) :_L z) = (x :_L z) \wedge (y :_L z)$.
- v.* $(x :_L yz) = ((x :_L y) :_L z)$.
- vi.* $x \leq (x :_L y)$.
- vii.* $x \leq (xy :_L y)$.
- viii.* $(x :_L z) \vee (y :_L z) \leq ((x \vee y) :_L z)$.
- ix.* $(x \wedge y)z \leq (xz) \wedge (yz)$.
- x.* $((x \wedge y) :_L y) = (x :_L y)$.
- xi.* $(x :_L (x \vee y)) = (x :_L y)$.

$$\text{xii. } (x:_L (y \vee z)) = (x:_L y) \wedge (x:_L z).$$

$$\text{xiii. } x \vee z = y \vee z = 1_L \text{ ise } (xy \vee z) = 1_L \text{ sağlanır.}$$

$$\text{xiv. } x \vee z = 1_L \text{ ise } (x \wedge y) \vee z = y \vee z \text{ sağlanır.}$$

$$\text{xv. } (x_1 \vee \dots \vee x_n)^{i_1 + \dots + i_n} \leq x_1^{i_1} \vee \dots \vee x_n^{i_n}.$$

Tanım 3.1.10 L bir çarpımsal latis olsun. $a, b \in L$ için;

- i. $a \wedge mb = m((a:_L m) \wedge b)$ sağlayan $m \in L$ ye infimum temel eleman,
- ii. $a \wedge m = m(a:_L m)$ sağlayan $m \in L$ ye zayıf infimum temel eleman,
- iii. $a \vee (b:_L m) = ((am \vee b):_L m)$ sağlayan $m \in L$ ye supremum temel eleman,
- iv. $a \vee (0:_L m) = (ma:_L m)$ sağlayan $m \in L$ ye zayıf supremum temel eleman denir [2].

$m \in L$, i. ve iii. şartlarını sağlıyorsa temel eleman, ii. ve iv. şartlarını sağlıyorsa zayıf temel eleman denir [2].

Önerme 3.1.11 L bir çarpımsal latis olsun. $m, a, b \in L$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır [1]:

- i. $a \wedge mb \geq m((a:_L m) \wedge b).$
- ii. $a \vee (b:_L m) \leq ((am \vee b):_L m).$

İspat i. $m((a:_L m) \wedge b) \leq m(a:_L m) \wedge mb \leq mb$ ve L çarpımsal latis olduğundan $m(a:_L m) = \vee \{xm \in L \mid xm \leq a\} \leq a$ sağlanır. Bu iki ifadenin infimumu alındığında $m((a:_L m) \wedge b) \leq a \wedge mb$ ifadesinin sağlandığı görülür.

ii. $x \leq a \vee (b:_L m)$ olacak şekilde bir $x \in L$ alalım. Böylece, $y \leq (b:_L m)$ olacak şekilde bir $y \in L$ için $x \leq a \vee y$ sağlanır. Buradan $xm \leq (a \vee y)m = am \vee ym \leq am \vee b$ elde edilir. Böylece $x \leq ((am \vee b):_L m)$ olduğu açıktır.

Önerme 3.1.12 L bir çarpımsal latis olsun. $m \in L$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır [1]:

- i. m infimum (supremum) temel eleman ise m bir zayıf infimum (supremum) temel elemandır.
- ii. m nin bir zayıf infimum eleman olması için gerek ve yeter koşul $a \leq m$ iken $a = mc$ olacak şekilde bir $c \in L$ bulunmasıdır.
- iii. m nin bir zayıf supremum temel eleman olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in L$ için $ma \leq mb$ iken $a \leq b \vee (0:_L m)$ olmasıdır.

iv. L modüler latis ise m nin temel eleman olması için gerek ve yeter koşul zayıf temel eleman olmasıdır.

İspat i. m infimum (supremum) temel eleman olsun. Böylece $a, b \in L$ için $a \wedge mb = m((a:_L m) \wedge b) ((a \vee (b:_L m)) = ((am \vee b):_L m))$ sağlanır. Bu eşitlikte b yerine $1_L (0_L)$ alınırsa $m \in L$ için istenen elde edilir.

ii. ($\Rightarrow$): m bir zayıf infimum eleman ve $a \leq m$ olsun. O halde $a = a \wedge m = m(a:_L m)$ olduğundan $c = (a:_L m)$ olarak bulunur.

($\Leftarrow$): Her $a \in L$ için $a \leq m$ iken $a = mc$ olacak şekilde bir $c \in L$ bulunduğunu kabul edelim. Bu takdirde $a \wedge m \leq m$ olduğundan bir $c \in L$ için $a \wedge m = cm$ gerçekleşir. O halde $c \leq (a:_L m)$ olduğundan $a \wedge m \leq (a:_L m)m$ elde edilir. Böylece bir önceki önermenin i. şikkından m bir zayıf infimum elemandır.

iii ($\Rightarrow$): m nin bir zayıf supremum eleman olduğunu ve $a, b \in L$ için $am \leq bm$ olduğunu kabul edelim. $ma \leq mb$ olduğundan $(ma:_L m) \leq (mb:_L m)$ sağlanır ve m zayıf supremum eleman olduğundan $a \leq a \vee (0_L:_L m) = (ma:_L m) \leq (mb:_L m) = b \vee (0_L:_L m)$ elde edilir.

($\Leftarrow$): Herhangi $a', b' \in L$ için $ma' \leq mb'$ iken $a' \leq b' \vee (0_L:_L m)$ olduğunu kabul edelim. a' yerine $(ma:_L m)$ ve b' yerine a alındığında $(ma:_L m) \leq a \vee (0_L:_L m)$ sağlanır. Böylece bir önceki önermenin ii. şikkından m bir zayıf supremum elemandır.

iv. ($\Rightarrow$): Önermenin i. şikkından istenilen açık şekilde görülür.

($\Leftarrow$): $m \in L$ bir zayıf temel eleman olsun. m nin her $a, b \in L$ için infimum temel eleman olduğunu gösterelim. $bm \leq m$ olduğundan $a \wedge bm = (a \wedge bm) \wedge m$ eşitliği sağlanır. m zayıf infimum temel eleman olduğundan $(a \wedge bm) \wedge m = m((a \wedge bm):_L m) = m((a:_L m) \wedge (bm:_L m))$ sağlanır ve yine m zayıf infimum temel eleman olduğundan $m((a:_L m) \wedge (bm:_L m)) = m((a:_L m) \wedge ((0_L:_L m) \vee b))$ eşitliği elde edilir. L nin modüler çarpımsal latis olması $m((a:_L m) \wedge ((0_L:_L m) \vee b)) = m(0_L:_L m) \vee m((a:_L m) \wedge b)$ eşitliğini gerektirir. Bu takdirde $a \wedge bm = m((a:_L m) \wedge b)$ elde edilir. Böylece m bir infimum temel elemandır. Şimdi m nin supremum temel eleman olduğunu gösterelim. Bunun için $((ma \vee b):_L m) \leq (a \vee (b:_L m))$ olduğunu göstermek yeterli

olacaktır. Hipotezden m bir zayıf supremum temel eleman olduğu için $m((ma \vee b):_L m) \leq m(a \vee (b:_L m))$ eşitsizliği gösterilebilirse, önermenin iii. şikkından istenilen sağlanmış olur. Şimdi, m zayıf infimum temel eleman ve L modüler latis olduğundan $a, b \in L$ için $m((ma \vee b):_L m) = (ma \vee b) \wedge m = ma \vee (b \wedge m) = ma \vee m(b:_L m) = m(a \vee (b:_L m))$ elde edilir. Böylece m bir supremum temel elemandır.

Tanım 3.1.13 L bir çarpımsal latis olsun.

- i.* Bir $a \in L$ için $a < 1_L$ sağlanıyorsa a elemanına has eleman denir [3].
- ii.* Her $a, b \in L$ için $ab \leq p$ iken $a \leq p$ veya $b \leq p$ oluyorsa $p < 1_L$ elemanına asal eleman denir [4].
- iii.* Her $a, b \in L$ için $ab \leq p$ iken $a \leq p$ veya bir n pozitif tam sayısı için $b^n \leq p$ oluyorsa $p < 1_L$ elemanına asalımsı eleman denir. Ayrıca, q asalımsı ve $\sqrt[n]{q} = p$ asal eleman ise q elemanına p –asalımsı eleman denir [5].
- iv.* L nin bir $m < 1_L$ elemanına, $m < x \leq 1_L$ olduğunda $x = 1_L$ sağlanıyorsa maksimal eleman adı verilir. Ayrıca, tek bir maksimal elemana sahip olan çarpımsal latise quasi-lokal latis denir [6].
- v.* $a \in L$ nin radikali $\sqrt[n]{a} = \bigvee \{x \in L \mid x^n \leq a, n \text{ bir pozitif tam sayı}\}$ şeklinde tanımlanır [8].
- vi.* L latisinin bir a elemanına, bir n pozitif tam sayısı için $a^n = 0$ sağlanıyorsa nilpotent eleman denir [22].

Örnek 3.1.14 L bir tam zincir olsun ve L üzerinde infimum işlemi ile bir çarpım tanımlansın. Böylece L bir çarpımsal latistir ve her elemanı infimum temel elemandır. $m \in L$ elemanının infimum temel eleman olduğunu gösterelim: Herhangi $a, b \in L$ için $m((a:_L m) \wedge b) \leq a \wedge mb$ ifadesi sağlanır. Tersini göstermek için; $x \leq a \wedge mb$ olduğunu kabul edelim. Böylece $x \leq a \wedge (m \wedge b)$ dir. Buradan $x \leq a$, $x \leq m$ ve $x \leq b$ elde edilir. $x \leq (a:_L m)$ olduğundan $x \leq m \wedge ((a:_L m) \wedge b)$ elde edilir. Kabulümüzden $x \leq m((a:_L m) \wedge b)$ sağlanır. Böylece L nin her elemanı infimum temel elemandır. L bir tam zincir olduğundan L nin her elemanının asal eleman olduğu görülür. Şimdi L nin zayıf supremum temel elemanlarının 1_L ve 0_L olduğunu gösterelim. $a \in L$ zayıf supremum temel eleman olsun. Böylece bir $m \in L$ için $m \vee (0_L:_L a) = (a:_L ma)$ eşitliği sağlanır. $a^2 = a \wedge a = a = a1_L$ olduğundan $(a:_L a^2) = 1_L$ dir. O halde $a \vee (0_L:_L a) =$

$(a;_L aa) = 1_L$ elde edilir. Buradan $a = 1_L$ veya $(0_L;_L a) = 1_L$ dir. Böylece $a = 1_L$ veya $a = 0_L$ dir. L nin her elemanının asal eleman olduğu bir çarpımsal latis olduğunu varsayalım. Böylece $a, b \in L$ için ab , L nin bir asal elemanıdır. O halde $ab = ab$ olduğundan $a \leq ab$ veya $b \leq ab$ dir. Buradan $a \leq a \wedge b$ veya $b \leq a \wedge b$ elde edilir. Böylece $a \leq b$ veya $b \leq a$ dir. Buna göre L bir tam zincirdir. Ayrıca ab asal eleman olduğundan $ab = a$ veya $ab = b$ olmasını sağlar. Buna göre $a \wedge b = ab$ elde edilir. Böylece verilen çarpma işlemi L latisinin infimum işlemidir [2].

Örnek 3.1.15 $L_1, \dots, L_n$ çarpımsal latisler ve $L = L_1 \times \dots \times L_n$ olsun. L kartezyen çarpımı, $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in L$ olmak üzere $(a_1, \dots, a_n) \wedge (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \wedge_1 b_1, \dots, a_n \wedge_n b_n)$ ve $(a_1, \dots, a_n) \vee (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \vee_1 b_1, \dots, a_n \vee_n b_n)$ işlemleri ile bir latistir. Ayrıca $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \cdot_1 b_1, \dots, a_n \cdot_n b_n)$ çarpımı ile de bir çarpımsal latistir. L nin en büyük elemanı ve çarpımsal birim elemanı $1_L = (1_{L_1}, \dots, 1_{L_n})$ ve en küçük elemanı $0_L = (0_{L_1}, \dots, 0_{L_n})$ dir. L nin bir $a = (a_1, \dots, a_n)$ elemanının (zayıf) infimum (supremum) temel eleman olması için gerek ve yeter koşul her $a_i \in L_i$ nin (zayıf) infimum (supremum) temel eleman olmasıdır [34].

Örnek 3.1.16 L bir çarpımsal latis ve $L[X]$, L nin $a_0 \leq a_1 \leq \dots$ şeklindeki a_i elemanlarının $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ toplamalarının kümesi olsun. $L[X]$ de supremum, infimum ve çarpım işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \vee (\sum_{i=0}^{\infty} b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \vee b_i),$$

$$(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \wedge (\sum_{i=0}^{\infty} b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \wedge b_i),$$

$$(\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{i=0}^{\infty} b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} (\bigvee_{j+k=i} a_j b_k).$$

$L[X]$, tanımlanan supremum ve infimum işlemleri ile bir latistir. Ayrıca $L[X]$ tanımlanan çarpma işlemi ile çarpımsal birim elemanı ve en büyük elemanı $1_{L[X]} = \sum_{i=0}^{\infty} 1_L$ ve en küçük elemanı $0_{L[X]} = \sum_{i=0}^{\infty} 0_L$ olan bir çarpımsal latistir. $L[X]$ in modüler (dağılmalı) latis olması için gerek ve yeter koşul L nin modüler (dağılmalı) latis olmasıdır [34].

Örnek 3.1.17 $(S, \cdot)$, 0 ve 1 elemanları ile değişmeli bir yarıgrup olsun. S nin bir ideali $JS \subseteq J$ koşulunu sağlayan bir J alt kümesidir. $1 \in S$ olduğundan $JS = J$ dir. $L(S)$, S nin ideallerinin bir kümesi olmak üzere küme kapsama işlemi ile bir kısmi sıralı kümedir. İdeal tanımına göre ideallerin birleşimi ve kesişimi birer idealdir. J, K ; S nin iki ideali

olmak üzere $JK = \{jk | j \in J, k \in K\}$ olsun. Buna göre JK, S nin bir idealidir. Tanımlanan bu çarpım değişmeli ve birleşmelidir. Supremum işlemi olarak ideallerin birleşimini alalım. O halde $J(\cup K_\alpha) = \cup JK_\alpha$ dır. Çünkü; $ab \in J(\cup K_\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul $a \in J$ ve bir α için $b \in K_\alpha$ olmasıdır. Bir α için $ab \in JK_\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $ab \in \cup JK_\alpha$ dır. İnfimum işlemi olarak da kesişim işlemini aldığımızda; $I, J, K \in L(S)$ olmak üzere $I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap (I \cup K)$ sağlanır. Buna göre $L(S)$ bir dağılmalı latistir. Ayrıca $L(S)$ nin her alt kümesinin bir supremum ve infimum elemanı var olduğundan bir tam latistir. $(a) = Sa = \{sa | s \in S\}$ kümesi $a \in S$ tarafından üretilmiş temel ideal olmak üzere $L(S)$ latisinde bir kompakt elemandır. S birimsel elemanı içerdiğinden $S, L(S)$ latisinin kompakt çarpımsal birimidir. Böylece $L(S)$ bir çarpımsal latistir. S nin her v elemanı için $uv = 1$ eşitliğini sağlayan $u \in S$ ye birim eleman denir. S nin birimsel elemanlarının kümesi bir değişmeli gruptur ve S nin birimsel olmayan elemanları S nin tek maksimal idealini oluşturur. Böylece $L(S)$ quasi-lokal latistir. S nin herhangi bir temel ideali (a) nın $L(S)$ de bir infimum temel eleman olduğunu gösterelim: $J, K; S$ nin idealleri olmak üzere $y \in J(a) \cap K$ olsun. O halde $y = ja$ olacak şekilde bir $j \in J$ vardır. Buradan $j \in (K_{:L(S)}(a))$ sağlanır. Böylece $y = ja \in (J \cap (K_{:L(S)}(a))) (a)$ elde edilir. O halde $J(a) \cap K \subseteq (J \cap (K_{:L(S)}(a))) (a)$ sağlanır. Kapsamanın diğer tarafı her zaman sağlanır [34].

Fakat S nin bir temel ideali, $L(S)$ nin zayıf supremum temel elemanı olmayabilir. Bunun için Örnek 3.1.18 ye bakılabilir.

Örnek 3.1.18 $S = \{0, 1, x, y\}$ kümesi $x = x^2, y = y^2$ ve $xy = yx = 0$ çarpımı ile bir yarıgrup olsun. Temel ideal (x) bir infimum temel elemandır, fakat zayıf supremum temel eleman değildir. Çünkü, $(x) \cup (0_{:L(S)}(x)) = (x) \cup (y) = (x, y)$ olduğu görülür. Fakat, $((x)(x)_{:L(S)}(x)) = ((x)_{:L(S)}(x)) = S$ eşitliği sağlanır. Burada S nin temel olmayan maksimal ideali $(x, y) = \{0, x, y\}$ nin infimum temel eleman olduğu görülür [34].

Tanım 3.1.19 L bir latis ve $a \in L$ olmak üzere $L/a = \{b \in L | b \geq a\}$ ailesi şeklinde tanımlanır [1].

L bir çarpımsal latis ise L/a ailesinin bir tam latis olduğu açıktır.

L latisinin bir modüler latis olduğunu kabul edelim. $c, d, e \in L/a$ ve $e \leq c$ olsun. $c, d, e \in L$ olduğundan $c \wedge (d \vee e) = (c \wedge d) \vee e$ gerektirmesi sağlanır. Böylece L/a ailesi de bir modüler latistir.

Ayrıca $c, d \in L$ için $c \circ d = cd \vee a$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile L/a latisinin bir çarpımsal latis olduğunu gösterelim:

$c, d \in L/a$ için $c \circ d = cd \vee a = dc \vee a = d \circ c$ işlemi ile değişme özelliği sağlanır.

$c, d, e \in L/a$ için $(c \circ d) \circ e = (cd \vee a) \circ e = (cd \vee a)e \vee a = (cde \vee ae) \vee a = cde \vee (ae \vee a) = cde \vee a$ ve

$c \circ (d \circ e) = c \circ (de \vee a) = c(de \vee a) \vee a = (cde \vee ca) \vee a = cde \vee (ca \vee a) = cde \vee a$ işlemleri ile birleşme özelliğinin sağlandığı görülür.

$c, d_\alpha \in L/a$ için $c \circ (\vee_\alpha d_\alpha) = c(\vee_\alpha d_\alpha) \vee a = \vee_\alpha cd_\alpha \vee a = \vee_\alpha (cd_\alpha \vee a) = \vee_\alpha (c \circ d_\alpha)$ ile supremum üzerine dağılmalı bir çarpım olduğu görülür. Böylece L/a latisi bir çarpımsal latistir.

Eğer L bir modüler çarpımsal latis ise $m \in L$ nin bir (zayıf) infimum eleman olması, $m \vee a$ nın L/a da bir (zayıf) infimum eleman olmasını gerektirir [2].

Önerme 3.1.20 L bir çarpımsal latis olsun. Bir $a \in L$ için $m \in L$ nin bir supremum eleman olması için gerek ve yeter koşul $m \vee a$ nın L/a da zayıf supremum temel eleman olmasıdır [1], [2].

İspat: ($\Rightarrow$): Bu önermenin gerektirmesi aşıkardır.

($\Leftarrow$): $m \vee a$ nın L/a da zayıf supremum temel eleman olduğunu kabul edelim. Böylece, bir $b \in L$ için $\left(((m \vee a) \circ (b \vee a)) :_L (m \vee a) \right) = (b \vee a) \vee (a :_L (m \vee a))$ eşitliği sağlanır. $((mb \vee a) :_L m) = ((mb \vee a) :_L (m \vee a)) = \left(((m \vee a) \circ (b \vee a)) :_L (m \vee a) \right) = (b \vee a) \vee (a :_L (m \vee a)) = (b \vee a) \vee (a :_L m) = b \vee (a :_L m)$ elde edilir. Böylece $m \in L$ bir supremum elemandır.

L modüler çarpımsal latis ise L nin her temel elemanı m için $m \vee a$, L/a da bir temel elemandır [2].

Teorem 3.1.21 L çarpımsal latis ve 1_L kompakt eleman olsun. $a \in L$ zayıf temel eleman olmak üzere $a = \bigvee_{\alpha} a_{\alpha}$ iken bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ alt kümesi için $a = a_{\alpha_1} \bigvee a_{\alpha_2} \bigvee \dots \bigvee a_{\alpha_n}$ eşitliği sağlanır [2].

İspat $a \in L$ zayıf temel eleman ve $a = \bigvee_{\alpha} a_{\alpha}$ olduğunu kabul edelim. Böylece, her α için $a_{\alpha} \leq a$ olduğundan $a_{\alpha} = a \wedge a_{\alpha} = a(a_{\alpha} :_L a)$ sağlanır. Buradan $a = \bigvee_{\alpha} a_{\alpha} = \bigvee_{\alpha} (a(a_{\alpha} :_L a)) = a(\bigvee_{\alpha} (a_{\alpha} :_L a))$ elde edilir. $a \in L$ zayıf temel eleman olduğundan $1_L = (\bigvee_{\alpha} (a_{\alpha} :_L a)) \vee (0_L :_L a)$ sağlanır ve 1_L kompakt eleman olduğundan bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ alt kümesi için $1_L = (a_{\alpha_1} :_L a) \vee \dots \vee (a_{\alpha_n} :_L a) \vee (0_L :_L a)$ elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafı $a \in L$ ile çarpıldığında $a = a(a_{\alpha_1} :_L a) \vee \dots \vee a(a_{\alpha_n} :_L a) \vee a(0_L :_L a) = a_{\alpha_1} \bigvee a_{\alpha_2} \bigvee \dots \bigvee a_{\alpha_n}$ eşitliği elde edilir.

Tanım 3.1.22 L bir çarpımsal latis ve $\emptyset \neq S \subseteq L$ olsun. S, L de tanımlanan çarpma işlemine göre kapalı ise S ye çarpımsal kapalı alt küme denir [5].

Tanım 3.1.23 L , (modüler latis olması gerekmeyen) bir tam çarpımsal latis ve C kompakt elemanların çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $0_L, L$ nin en küçük elemanı ve $1_L, L$ nin en büyük kompakt elemanı olmak üzere L, C nin elemanlarının supremumları tarafından üretiliyorsa L ye C –latis denir [5].

Bir C –latiste kompakt elemanların sonlu çarpımlarının yine kompakt eleman olduğu açıktır [34].

Örnek 3.1.24 R birimli, değişmeli bir halka ve $L(R)$, R nin tüm ideallerinin kümesi olsun. I ve J , R nin iki ideali olmak üzere $I \vee J = I + J$, $I \wedge J = I \cap J$ işlemleri ile bir latistir. Ayrıca $L(R)$ nin her alt kümesinin supremum ve infimum elemanları var olduğundan bir tam latistir. $I, J, K \in L(R)$ için $IJ = JI$ değişme, $I(JK) = (IJ)K$ birleşme ve $I(J + K) = IJ + IK$ çarpmanın supremum üzerine dağılma özelliği sağlanır. R birimli olduğundan $IR = I$ sağlanır. Buna göre $R, L(R)$ nin çarpımsal birim elemanıdır, ayrıca R en büyük elemanı ve (0) en küçük elemanıdır. Böylece $L(R)$ bir çarpımsal latistir. $I \subseteq K$ olsun. $I + (J \cap K) = (I + J) \cap K$ modüler özelliği sağlandığından $L(R)$ modüler latistir. Şimdi $L(R)$ nin her temel idealinin temel eleman olduğunu gösterelim. $m \in R$ için $I = (m)$ olsun. $A, B \in L(R)$ için $x \in AI \cap B$ olsun. Böylece $x = am$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Böylece $a \in (B : I)$ dir ve $a \in A \cap (B :_{L(R)} I)$ sağlanır. Buradan $x = am \in (A \cap$

$(B:_{L(R)} I))I$ elde edilir. Böylece I infimum temel eleman olduğu gösterilmiş olur. I nin supremum temel eleman olduğunu gösterelim: $y \in ((A + BI):_{L(R)} I)$ olsun. O halde $yI \subseteq A + BI$ dir ve $ym = a + bm$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Buradan $a = (y - b)m$ dir. Böylece $y - b \in (A:_{L(R)} I)$ dir ve buradan $y \in (A:_{L(R)} I) + B$ elde edilir. Buna göre I supremum temel elemandır. Böylece $L(R)$ nin her temel idealinin temel eleman olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca R nin bir idealinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul idealin sonlu üretilmiş olmasıdır. Burada R bir kompakt elemandır. Böylece $L(R)$ bir C –latistir [34].

Örnek 3.1.25 R , her A ideali için $RA = A$ koşulunu sağlayan değişmeli, birimsiz bir halka olsun. O halde R nin bütün ideallerinin kümesi $L(R)$ bir tam latistir. $R, L(R)$ nin birimi ve en büyük elemanıdır. R nin temel idealleri $L(R)$ nin temel elemanlarıdır. Fakat R kompakt değildir [34].

Aşağıdaki örnek bu halkayı açıklamaktadır.

Örnek 3.1.26 R_α lar birimli, değişmeli halkalar ve $R = \sum R_\alpha$ bu halkaların sonsuz direkt toplamı olsun. Fakat $R = \sum R_\alpha$ iken $R \neq \sum_{i=1}^n R_{\alpha_i}$ olduğundan R kompakt değildir [34].

Önerme 3.1.27 L latisinin en büyük elemanı 1_L kompakt eleman ise L nin bir maksimal elemanı vardır.

İspat $\Omega = \{a \in L | a < 1_L\}$, L nin has elemanlarının kümesi $0_L \in \Omega$ olduğundan boştan farklıdır. $\leq$ bağıntısı Ω üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır. $\Delta = \{a_i \in \Omega | i \in I\}$, Ω nin boştan farklı tam sıralı bir alt kümesi olsun. $b = \bigvee_{a_i \in \Delta} a_i \neq 1_L$ sağlanır. Eğer $b = 1_L$ olsaydı, bir $i \in I$ için $a_i = 1_L$ sağlanırdı. O halde b , Ω nin tam sıralı kümesinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemma’ dan $(\Omega, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal eleman L latisinin bir maksimal elemanıdır.

Önerme 3.1.28 Bir çarpımsal latis L de her maksimal eleman bir asal elemandır [2].

İspat: $m \in L$ maksimal eleman olsun. $a, b \in L$ için $ab \leq m$ ve $a \not\leq m$ olduğunu kabul edelim. Böylece $m \leq m \vee a$ sağlanır ve m maksimal eleman olduğundan $1 = m \vee a$ elde edilir. Buradan $b = (m \vee a)b = mb \vee ab \leq m$ sağlanır.

3.2 Latis Modüllerin Temel Tanım ve Özellikleri

Tanım 3.2.1 M bir tam latis ve L bir çarpımsal latis olsun. L ve M nin elemanları arasında, $l \in L$ ve $B \in M$ için lB ile gösterilen, bir çarpım varsa ve bu çarpım aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye çarpımsal latis L üzerinde bir latis modül ya da kısaca bir L –modül denir.

Her $l, l_\alpha, b \in L$ ve $B, B_\beta \in M$ için;

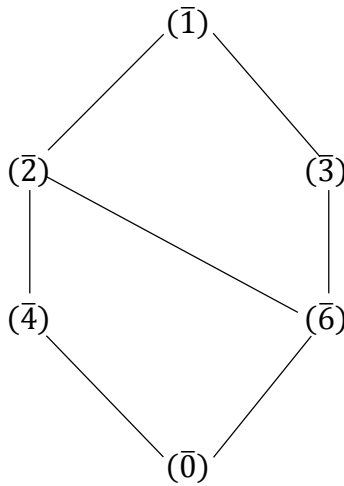
- i. $(lb)B = l(bB)$;
- ii. $(\bigvee_\alpha l_\alpha)(\bigvee_\beta B_\beta) = \bigvee_{\alpha,\beta} l_\alpha B_\beta$;
- iii. $1_L B = B$;
- iv. $0_L B = 0_M$ [34].

Örnek 3.2.2 R değişmeli bir halka ve M bir R –modül olsun. M nin alt modüllerinin latisi $L(M)$ bir $L(R)$ –modüldür [34].

Aşağıdaki iki örnek, Örnek 3.2.2 deki ifadeyi açıklamaktadır.

Örnek 3.2.3 $R = \langle \mathbb{Z}_{12}, +, . \rangle$ olsun. L , R halkasının ideallerinin kümesi, yani $L = \{(\bar{0}), (\bar{1}), (\bar{2}), (\bar{3}), (\bar{4}), (\bar{6})\}$ olsun. L latisinin yapısını aşağıdaki şekil üzerinde görelim.

Çizelge 3. 1 L latisinin yapısı



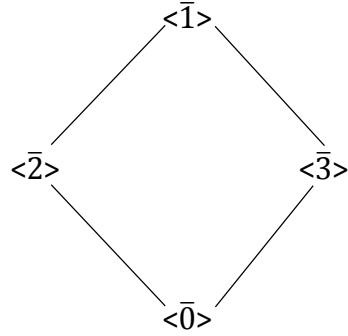
L latisi kendi üzerinde bir latis modüldür. Burada kullanılan çarpma işlemi aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Çizelge 3. 2 L latisinin çarpma işlemine göre yapısı

.	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{2} \rangle$	$\langle \bar{3} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$	$\langle \bar{1} \rangle$
$(\bar{0})$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$
$(\bar{2})$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{2} \rangle$
$(\bar{3})$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$	$\langle \bar{3} \rangle$
$(\bar{4})$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$
$(\bar{6})$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$
$(\bar{1})$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{2} \rangle$	$\langle \bar{3} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{6} \rangle$	$\langle \bar{1} \rangle$

Örnek 3.2.4 $L, \mathbb{Z}$ halkasının ideallerinin kümesi ve $M, \mathbb{Z}$ —modül $\mathbb{Z}_6$ nın alt modüllerinin ailesi olsun. L nin bir çarpımsal latis ve M nin bir tam latis olduğunu biliyoruz. M nin yapısına şekil üzerinde bakalım:

Çizelge 3. 3 M latis modülünün yapısı



$I, J, I_\alpha \in L$ ve $N, N_\beta \in M$ için;

- i. $(IJ)N = I(JN),$
- ii. $(\sum I_\alpha)(\sum N_\beta) = \sum I_\alpha N_\beta,$
- iii. $1_L = \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}N = N,$
- iv. $0_L = (0)$ olmak üzere $(0)N = (0)$ sağlandığından M, L üzerinde bir latis modüldür [35].

Örnek 3.2.5 R derecelendirilmiş değişmeli bir halka ve M bir derecelendirilmiş R –modül olsun. M nin derecelendirilmiş alt modüllerinin latisi $L_G(M)$; $L_G(R)$, R nin derecelendirilmiş ideallerinin latisi olmak üzere bir $L_G(R)$ – modüldür [34].

Örnek 3.2.6 $S, 0$ ı içeren değişmeli monoid ve $T, 0$ ı içeren değişmeli yarıgrup olsun. $S \times T \rightarrow T$ ye her $s_1, s_2 \in S$ ve $t \in T$ için $(s_1 s_2)t = s_1(s_2 t)$, $1t = t$ ve $0t = 0$ özelliklerini sağlayan bir çarpım var olduğunu kabul edelim. $L(T)$, S altında kapalı T nin ideallerinin latisi ve $L(S)$, S nin ideallerinin latisi olsun. Yukarıda tanımlanan çarpım ile $L(T)$ bir $L(S)$ –modüldür [34].

Tanım 3.2.7 M bir L –modül olsun. $N, K \in M$ olmak üzere $(N:_L K)$, $aK \leq N$ sağlayan $a \in L$ lerin supremumudur. Bir $a \in L$ ve $N \in M$ için $(N:_M a) = \bigvee \{X \in M | aX \leq N\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $a \in L$ ise $(0_M:_M a)$, $aH = 0_M$ sağlayan $H \in M$ lerin supremumudur [15].

Tanım 3.2.8 M bir L –modül olsun. Her $b \in L$ ve $B \in M$ için;

- i. $(b \wedge (B:_L N))N = bN \wedge B$ sağlanıyor ise $N \in M$ ye infimum temel eleman,
- ii. $b \vee (B:_L N) = ((bN \vee B):_L N)$ sağlanıyor ise $N \in M$ ye supremum temel eleman,
- iii. $(B:_L N)N = B \wedge N$ sağlanıyor ise $N \in M$ ye zayıf infimum temel eleman,
- iv. $(bN:_L N) = b \vee (0_M:_L N)$ sağlanıyor ise $N \in M$ ye zayıf supremum temel eleman adı verilir [13].

Ayrıca N , hem infimum temel eleman hem de supremum temel eleman ise temel eleman ve N , hem zayıf infimum temel eleman hem de zayıf supremum temel eleman ise zayıf temel eleman denir [13].

Bir L –modül M için aşağıdaki bağıntı ve özellikler sağlanır [17]:

Her $a, b, a_\alpha \in L$ ve $N, K, T, N_\alpha \in M$ için;

- i. $\bigwedge_\alpha (N_\alpha:_L N) = ((\bigwedge_\alpha N_\alpha):_L N)$ ve $\bigwedge_\alpha (N_\alpha:_M a) = ((\bigwedge_\alpha N_\alpha):_M a)$ elde edilir.
- ii. $(N:_L (\bigvee_\alpha N_\alpha)) = \bigwedge_\alpha (N:_L N_\alpha)$ ve $(N:_M (\bigvee_\alpha a_\alpha)) = \bigwedge_\alpha (N:_M a_\alpha)$ sağlanır.
- iii. $(N:_M ab) = ((N:_M a):_M b)$ ve $(N:_L aK) = ((N:_M a):_L K) = ((N:_L K):_L a)$ sağlanır.
- iv. $a \leq b$ ise $aN \leq bN$ ve $aN \leq N$ olur ve eğer $N \leq K$ ise $aN \leq aK$ sağlanır.
- v. $a(N:_M a) \leq N$, $(N:_L K)K \leq N$ ve $N \leq (N:_M a)$.

- vi.** $1_L = (N:_L K)$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq N$ olmasıdır.
- vii.** $a \leq b$ ise $(N:_M b) \leq (N:_M a)$ sağlanır ve eğer $N \leq K$ ise $(N:_M a) \leq (N:_M b)$ ve $(T:_L K) \leq (T:_L N)$ sağlanır.
- viii.** $(N:_L K) = (N:_L (N \vee K))$ ve $(N:_L K) = ((N \wedge K):_L K)$.
- ix.** $(a:_L b)N \leq (aN:_M b)$ ve $(a:_L b) \leq (aN:_L bN)$.

Tanım 3.2.9 M bir L –modül ve $N \in M$ olsun. $N \leq \bigvee_{\alpha} B_{\alpha}$ iken bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ alt kümesi için $N \leq B_{\alpha_1} \bigvee B_{\alpha_2} \bigvee \dots \bigvee B_{\alpha_n}$ sağlanıyorsa N ye kompakt eleman denir [13].

Tanım 3.2.10 Bir L –modül M nin en büyük elemanı 1_M ile gösterilsin. M nin her elemanı temel (kompakt) elemanların supremumu ise L –modül M ye PG –latis L –modül (CG –latis L –modül) denir [13].

Tanım 3.2.11 M bir L –modül ve en büyük elemanı 1_M kompakt olsun.

- i.** Bir $N \in M$ için $N < 1_M$ sağlanıyorsa N ye has eleman denir [12].
- ii.** Her $a \in L$ ve $X \in M$ için $aX \leq N$ iken $X \leq N$ veya $a1_M \leq N$ ($a \leq (N:_L 1_M)$) ise $N < 1_M$ ye asal eleman denir [12].
- iii.** M nin bir $N < 1_M$ elemanına $N < X \leq 1_M$ olduğunda $X = 1_M$ sağlanıyorsa maksimal eleman adı verilir [14].

Bu tanımlara göre; eğer N, M nin bir asal elemanı ise $(N:_L 1_M)$, L nin bir asal elemanıdır [14].

Önerme 3.2.12 M latis modülünün en büyük elemanı 1_M kompakt eleman ise M nin bir maksimal elemanı vardır [14], [16].

İspat $\Psi = \{N \in M | N < 1_M\}$, M nin has elemanlarının kümesi, $0_M \in \Psi$ olduğundan boştan farklıdır. $\leq$ bağıntısı Ψ üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır. $\Delta = \{N_i \in \Omega | i \in I\}$, Ψ nin boştan farklı tam sıralı bir alt kümesi olsun. $K = \bigvee_{N_i \in \Delta} N_i \neq 1_M$ sağlanır. Eğer $K = 1_M$ olsaydı, bir $i \in I$ için $N_i = 1_M$ sağlanırdı. O halde K, Ψ nin tam sıralı kümesinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemma’ dan $(\Psi, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal eleman M latis modülünün bir maksimal elemanıdır.

Tanım 3.2.13 M bir L –modül olsun. M nin $N < 1_M$ elemanı, her $a \in L$ ve $X \in M$ için $aX \leq N$ ve $X \not\leq N$ iken bir k pozitif tamsayısı için $a^k 1_M \leq N$ (yani $a^k \leq (N:_L 1_M)$) ise N

asalımsı elemandır. Ayrıca, N asalımsı eleman ve $\sqrt{(N:_L 1_M)} = p$, L latisinin asal elemanı ise N ye p –asalımsı eleman denir [15].

Önerme 3.2.14 M bir L –modül ve $N < 1_M$, M nin elemanı olsun. $(N:_L 1_M)$, L nin asal elemanı ve N , M nin asalımsı elemanı ise N bir asal elemandır [15].

İspat: $a \in L$ ve $X \in M$ için $aX \leq N$ olsun. N , M nin asalımsı elemanı olduğundan $X \leq N$ veya bir k pozitif tamsayısı için $a^k 1_M \leq N$ sağlanır. $(N:_L 1_M)$, L nin asal elemanı olduğundan $a \leq (N:_L 1_M)$ olur.

Tanım 3.2.15 M bir L –modül olsun. $\text{Ann}(M) = (0_{M:_L 1_M}) = 0_L$ ise M ye sadık L –modül denir. $c \in L$ ve $m \in M$ için $cm = 0_M$ iken $m = 0_M$ veya $c = 0_L$ ise M ye serbest burulmalı L –modül denir [15].

Tanım 3.2.16 M bir L –modül olsun. Her $N \in M$ için $N = a1_M$ olacak şekilde bir $a \in L$ varsa M ye çarpımsal latis modül denir [15].

Önerme 3.2.17 M bir L –modül olsun. M nin çarpımsal latis modül olması için gerek ve yeter koşul her $N \in M$ için $N = (N:_L 1_M)1_M$ sağlanmasıdır [15].

EŞ ÇARPIMSAL LATİS MODÜLLER

Bu bölümde modüller üzerinde incelenmiş olan eş çarpımsal modül yapısı latis modüller üzerinde incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar için Nakayama's Lemma and The Principal Elements in Lattice Modules over Multiplicative Lattices [11], Multiplication Elements and Distributive and Supporting Elements in Lattice Modules [16], On Multiplication and Comultiplication Modules [19], Comultiplication Modules over Commutative Rings [20], The Dual Notion of Multiplication Modules [21] ve Comultiplication Modules and Related Results [18] makalelerinden faydalanılmıştır.

Tanım 4.1.1 M bir latis modül olsun. M nin her N elemanı için $N = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde bir $a \in L$ varsa M ye eş çarpımsal latis modül denir.

Lemma 4.1.2 Bir M latis modülünün eş çarpımsal latis modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her N elemanı için $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N))$ olmasıdır.

İspat: $\Leftarrow$: Aşıkardır.

$\Rightarrow$: M eş çarpımsal latis modül ve $N \in M$ olsun. Böylece $N = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde bir $a \in L$ vardır. Böylece $a \leq (0_{M:L} N)$ dir ve buradan $(0_{M:M} (0_{M:L} N)) \leq (0_{M:M} a) = N$ elde edilir. $N \leq (0_{M:M} (0_{M:L} N))$ olduğu aşıkardır. Böylece $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N))$ olduğu görülür.

Önerme 4.1.3 M bir L –modül olsun. Böylece aşağıdaki ifadeler denktir:

- i.* Herhangi $K, N \in M$ için $(0_{M:L} K) \leq (0_{M:L} N)$ ise $N \leq K$.

ii. Herhangi $K, N \in M$ için $(K :_L N) = ((0_{M:L} N) :_L (0_{M:L} K))$.

İspat: $i \Rightarrow ii$: Herhangi $K, N \in M$ için $(K :_L N) \leq ((0_{M:L} N) :_L (0_{M:L} K))$ olduğunu gösterelim: $b = (K :_L N)$ olsun. Buradan $bN \leq K$ olduğu açıktır. O halde $b(0_{M:L} K)N = 0_M$ sağlanır. Böylece $b(0_{M:L} K) \leq (0_{M:L} N)$ elde edilir ve $b = (K :_L N) \leq ((0_{M:L} N) :_L (0_{M:L} K))$ olur. Tersini için, $r = ((0_{M:L} N) :_L (0_{M:L} K))$ olsun. Buradan $r(0_{M:L} K)N = 0_M$ eşitliği elde edilir ve $(0_{M:L} K) \leq (0_{M:L} rN)$ olduğu görülür. Böylece (i) den $rN \leq K$ sağlanır ve sonuç olarak $r \leq (K :_L N)$ olduğu gösterilmiş olur.

$ii \Rightarrow i$: $(0_{M:L} K) \leq (0_{M:L} N)$ olduğunu kabul edelim. Böylece ii şikkından $(K :_L N) = ((0_{M:L} N) :_L (0_{M:L} K)) = 1_L$ sağlanır. $N \leq K$ olduğu elde edilir.

Teorem 4.1.4 M bir L –modül olsun. Her $a \in L$ ve $N \in M$ için $\phi: L \rightarrow M$, $\phi(a) = (0_{M:M} a)$ ve $\psi: M \rightarrow L$, $\psi(N) = (0_{M:L} N)$ şeklinde tanımlansın. Böylece her $a \in L$ ve $N \in M$ için,

$$i. \quad (\phi\psi\phi)(a) = (0_{M:M} (0_{M:L} (0_{M:M} a))) = (0_{M:M} a) = \phi(a).$$

$$ii. \quad (\psi\phi\psi)(N) = (0_{M:L} (0_{M:M} (0_{M:L} N))) = (0_{M:L} N) = \psi(N).$$

İspat: i . $(0_{M:M} a) = N$ olsun. $(0_{M:M} a) = N \leq (0_{M:M} (0_{M:L} N))$ olduğu açıktır. Diğer yandan $aN = 0_M$ olduğundan $a \leq (0_{M:L} N)$ olduğu görülür. Böylece $(0_{M:M} (0_{M:L} N)) \leq (0_{M:M} a) = N$ dir.

ii . $b = (0_{M:L} N)$ olsun. $b = (0_{M:L} N) \leq (0_{M:L} (0_{M:M} (0_{M:L} N)))$ olduğu açıktır. Diğer yandan $bN = 0_M$ olduğu açıktır ve buradan $N \leq (0_{M:M} b) = (0_{M:M} (0_{M:L} N))$ elde edilir. Böylece $(0_{M:L} (0_{M:M} (0_{M:L} N))) \leq (0_{M:L} N) = b$ dir.

Sonuç 4.1.5 M bir L –modül olsun. Her $a \in L$ ve $N \in M$ için $\phi: L \rightarrow M$, $\phi(a) = (0_{M:M} a)$ ve $\psi: M \rightarrow L$, $\psi(N) = (0_{M:L} N)$ şeklinde tanımlansın. Her $a \in L$ ve $N \in M$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i.** M bir eş çarpımsal L –modüldür.
- ii.** ϕ örten fonksiyondur.
- iii.** Her $N \in M$ için $N = (0_{M:M} a) = \phi(a)$ olacak şekilde $a \in L$ vardır.
- iv.** $\phi\psi$ özdeş fonksiyondur.
- v.** ψ bire-bir fonksiyondur.
- vi.** $(0_{M:L} K) = (0_{M:L} N)$ ise $K = N$ olur.

Önerme 4.1.6 M bir eş çarpımsal latis modül olsun. Eğer L , Artinian (Noetherian) çarpımsal latis ise M , Noetherian (Artinian) latis modüldür.

İspat: L Artinian çarpımsal latis olsun. $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ olduğunu varsayalım. Böylece $(0_{M:L} N_1) \geq (0_{M:L} N_2) \geq \dots$ dir. L Artinian olduğundan $(0_{M:L} N_k) = (0_{M:L} N_{k+1}) = \dots$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı vardır. Böylece $N_k = (0_{M:M} (0_{M:L} N_k)) = (0_{M:M} (0_{M:L} N_{k+1})) = N_{k+1} = \dots$ dir. Sonuç olarak M Noetherian latis modüldür. L çarpımsal latisinin Noetherian olduğu durumda M latis modülünün Artinian olduğu benzer şekilde gösterilir.

L çarpımsal latis ve M bir L –modül olsun. $N \in M$ olduğunu kabul edelim. $[0_M, N] = \{A \in M | A \leq N\}$ kümesi M nin bir alt modülüdür [14]. Eğer M eş çarpımsal L –modül ise $[0_M, N]$ nin eş çarpımsal L –modül olduğu açıktır.

Önerme 4.1.7 M eş çarpımsal L –modül olsun. Eğer bir $b \in L$ için $(0_{M:M} b) = 0_M$ ise her $Y \in M$ için $bY = Y$ dir. Özel olarak $b1_M = 1_M$ dir.

İspat: $b \in L$ ve $Y \in M$ olsun. M eş çarpımsal L –modül olduğundan $bY = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde bir $a \in L$ vardır. Böylece $abY = 0_M$ sağlanır. $(0_{M:M} b) = 0_M$ olduğundan $aY = 0_M$ elde edilir. Sonuç olarak $Y \leq (0_{M:M} a) = bY$ dir ve böylece $bY = Y$ olduğu görülür.

Önerme 4.1.8 M bir eş çarpımsal L –modül olsun. Eğer p, L nin bir maksimal elemanı ve $(0_{M:M} p) \neq 0_M$ ise $(0_{M:M} p)$, M nin bir minimal elemanıdır.

İspat: Bir $N \in M$ için $N \leq (0_{M:M} p)$ olduğunu kabul edelim. M bir eş çarpımsal L –modül olduğundan $N = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde L nin bir a elemanı vardır. $N \leq (0_{M:M} p)$ olduğundan $pN = 0_M$ ve $p \leq (0_{M:L} N)$ sağlanır. p maksimal olduğundan $p = (0_{M:L} N)$ ya da $1_L = (0_{M:L} N)$ elde edilir. Eğer $p = (0_{M:L} N)$ ise Lemma 4.1.2 den $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N)) = (0_{M:M} p)$ eşitliği sağlanır. Eğer $1_L = (0_{M:L} N)$ ise $N = 0_M$ olur. Böylece $(0_{M:M} p)$, M de minimal elemandır.

Önerme 4.1.9 M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül ve 1_M kompakt eleman olsun. Eğer $p \in L$ asal ve $(0_{M:M} p) = 0_M$ ise $c \not\leq p$ ve $c1_M = 0_M$ olacak şekilde $c \in L$ vardır.

İspat: 1_M kompakt olduğundan her $i = 1, \dots, n$ için Y_i elemanları temel elemanlar olmak üzere $1_M = \bigvee_{i=1}^n Y_i$ sağlanır. Önerme 4.1.7 den $(0_{M:M} p) = 0_M$ olduğunda her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $pY_i = Y_i$ olduğu elde edilmişti. Böylece $p \vee (0_{M:L} Y_i) = (pY_i:L Y_i) = 1_L$

sağlanır ve böylece her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $(0_{M:L} Y_i) \not\leq p$ olduğu görülür. Sonuç olarak $c = \prod_{i=1}^n (0_{M:L} Y_i)$ için $c \not\leq p$ ve $c1_M = 0_M$ sağlanır.

Sonuç 4.1.10 M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül ve 1_M kompakt eleman olsun. Eğer M sadık L –modül ise L nin bazı p asal elemanları için $(0_{M:M} p) \neq 0_M$ sağlanır.

Sonuç 4.1.11 M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül, 1_M kompakt eleman ve $a \in L$ için $(0_{M:M} a) = 0_M$ ise $1_L = a \vee (0_{M:L} 1_M)$ elde edilir.

İspat: $1_L \neq a \vee (0_{M:L} 1_M)$ olduğunu kabul edelim. Böylece $a \vee (0_{M:L} 1_M) \leq p$ olacak şekilde bir maksimal $p \in L$ vardır. Buradan $(0_{M:M} p) \leq (0_{M:M} a) = 0_M$ sağlanır. Böylece $(0_{M:M} p) = 0_M$ dir. Önerme 4.1.9 dan $c \not\leq p$ ve $c \leq (0_{M:L} 1_M)$ olacak şekilde $c \in L$ vardır. Fakat $(0_{M:L} 1_M) \leq p$ olduğundan $c \leq p$ sağlanır Buradan bir çelişki elde edilir. Böylece $1_L = a \vee (0_{M:L} 1_M)$ olduğu görülür.

Önerme 4.1.12 M sıfırdan farklı bir eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Böylece, M nin bir minimal elemanı vardır. Özel olarak, M nin her sıfırdan farklı elemanının bir minimal elemanı vardır.

İspat: Y , M nin sıfırdan farklı temel elemanı olsun. Buradan, $(0_{M:L} Y) = a < 1_L$ olduğu görülür. $a \leq p$ olacak şekilde bir maksimal p elemanı vardır. Eğer $N = (0_{M:M} p) = 0_M$ ise Önerme 4.1.7 den $pY = Y$ dir ve böylece $p \vee (0_{M:L} Y) = (pY:L Y) = 1_L$ sağlanır. Buna göre $a = (0_{M:L} Y) \not\leq p$ olur (Çelişki). Böylece $N = (0_{M:M} p) \neq 0_M$ dir. Önerme 4.1.8 den N , M nin bir minimal elemanıdır.

Önerme 4.1.13 M sıfırdan farklı bir eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Böylece $K \in M$ nin minimal temel eleman olması için gerek ve yeter koşul bir $p \in L$ maksimali için $K = (0_{M:M} p) \neq 0_M$ olmasıdır.

İspat: ($\Leftarrow$): Önerme 4.1.8 den açıktır.

($\Rightarrow$): K , M nin minimal temel elemanı olsun. M eş çarpımsal L –modül olduğundan $K = (0_{M:M} (0_{M:L} K))$ sağlanır. $(0_{M:L} K)$ elemanının maksimal olduğunu gösterelim. c , $(0_{M:L} K) \leq c$ olacak şekilde L nin bir elemanı olsun. K , minimal eleman ve $cK \leq K$ olduğundan $cK = K$ ya da $cK = 0_M$ elde edilir. Eğer $cK = K$ ise $1_L = (cK:L K) = c \vee (0_{M:L} K) = c$ sağlanır. Eğer $cK = 0_M$ ise $c \leq (0_{M:L} K)$ dir ve böylece $c = (0_{M:L} K)$ dir.

Önerme 4.1.14 M bir eş çarpımsal L –modül olsun. Böylece $a \in L$, $N \in M$ için $(N:_M a) = ((0_{M:M} a):_M (0_{M:L} N))$ dir.

İspat: $K = (N:_M a)$ olsun. $aK \leq N$ sağlanması için gerek ve yeter koşul $(0_{M:L} N)aK = 0_M$ olmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $(0_{M:L} N)K \leq (0_{M:M} a)$ sağlanmasıdır. Bu durumun sağlanması için gerek ve yeter koşul $K = (N:_M a) \leq ((0_{M:M} a):_M (0_{M:L} N))$ olmasıdır. Tersini için $R = ((0_{M:M} a):_M (0_{M:L} N))$ olsun. Buradan, $(0_{M:L} N)R \leq (0_{M:M} a)$ olması için gerek ve yeter koşul $(0_{M:L} N)aR = 0_M$ sağlanmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $aR \leq (0_{M:M} (0_{M:L} N)) = N$ sağlanmasıdır. Sonuç olarak, $R \leq (N:_M a)$ sağlanır.

Teorem 4.1.15 L bir dağılmalı latis, M bir eş çarpımsal L –modül ve $a, b \in L$ için $(0_{M:M} a) \vee (0_{M:M} b) = (0_{M:M} a \wedge b)$ olsun. Böylece, M dağılmalı L –modüldür.

İspat: $X, Y, Z \in M$ olsun. M eş çarpımsal L –modül olduğundan $X = (0_{M:M} a)$, $Y = (0_{M:M} b)$, $Z = (0_{M:M} c)$ olacak şekilde $a, b, c \in L$ vardır. Böylece, $(X \vee Y) \wedge Z = ((0_{M:M} a) \vee (0_{M:M} b)) \wedge (0_{M:M} c) = (0_{M:M} a \wedge b) \wedge (0_{M:M} c) = (0_{M:M} a \wedge b) \wedge (0_{M:M} c) = (0_{M:M} (a \wedge b) \vee c) = (0_{M:M} (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = (0_{M:M} a \wedge c) \wedge (0_{M:M} b \wedge c) = (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$ sağlanır. Böylece M dağılmalı L –modüldür.

Sonuç 4.1.16 L bir dağılmalı latis, M bir eş çarpımsal L –modül ve $a, b \in L$ için $a \vee b = 1_L$ olsun. Böylece M dağılmalı L –modüldür.

İspat: Herhangi $a, b \in L$ için $a \vee b = 1_L$ olduğunu kabul edelim. $ab \leq a \wedge b$ ve bir $K \in M$ için $(K:_M ab) = (K:_M a)b$ ifadeleri sağlandığından $a(K:_M a \wedge b) \leq (K:_M b)$ ve $b(K:_M a \wedge b) \leq (K:_M a)$ eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Böylece $(K:_M a \wedge b) = (K:_M a \wedge b)(a \vee b) = a(K:_M a \wedge b) \vee b(K:_M a \wedge b) \leq (K:_M b) \vee (K:_M a)$ elde edilir. Ayrıca $(K:_M b) \vee (K:_M a) \leq (K:_M a \wedge b)$ olduğundan $(K:_M a \wedge b) = (K:_M b) \vee (K:_M a)$ eşitliği görülür. $K = 0_M$ için $(0_{M:M} a) \vee (0_{M:M} b) = (0_{M:M} a \wedge b)$ eşitliğini elde ederiz. Teorem 4.1.15 den M dağılmalı L –modüldür.

Önerme 4.1.17 M bir eş çarpımsal L –modül ve $p, q \in L$ nin maksimal elemanları olsun. Eğer $(0_{M:M} p) \neq 0_M$ ve $(0_{M:M} q) \neq 0_M$ ise $(0_{M:M} p) \vee (0_{M:M} q) = (0_{M:M} p \wedge q)$ dir.

İspat: $0_M \neq (0_{M:M} p) = N$ olsun. $pN = 0_M$ ve p maksimal olduğundan $p = (0_{M:L} N)$ elde edilir. Benzer şekilde, eğer $0_M \neq K = (0_{M:M} q)$ ise $q = (0_{M:L} K)$ sağlanır. M eş çarpımsal olduğundan $NVK = (0_{M:M} (0_{M:L} NVK)) = (0_{M:M} ((0_{M:L} N) \wedge (0_{M:L} K)))$ dir. Sonuç olarak, $(0_{M:M} p) \vee (0_{M:M} q) = (0_{M:M} p \wedge q)$ elde edilir.

Tanım 4.1.18 Bir L –modül M nin elemanlarının her $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kümesi için $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = 0_M$ iken $m > 0$ pozitif tam sayısı için $\bigwedge_{i=1}^m M_{\lambda_i} = 0_M$ sağlanıyorsa M ye sonlu aralarında üretilmiş denir.

Teorem 4.1.19 M bir sadık eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun.

- i.* 1_M kompakttır.
- ii.* $a < 1_L$ için $(0_{M:M} a) \neq 0_M$ dir.
- iii.* L nin her maksimal elemanı p için $(0_{M:M} p) \neq 0_M$ dir.
- iv.* M sonlu aralarında üretilmiştir.

Böylece, $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ sağlanır.

İspat: $i \Rightarrow ii$: $(0_{M:M} a) = 0_M$ ve $a < 1_L$ olduğunu kabul edelim. $a \leq p$ sağlayan her maksimal elemanı p için $(0_{M:M} p) = 0_M$ dir. Bu ise Sonuç 4.1.10 ile çelişir.

$ii \Rightarrow iii$: Aşıkardır.

$iii \Rightarrow iv$ $N_\alpha = (0_{M:M} a_\alpha)$ olsun. $0_M = \bigwedge_{\alpha \in I} N_\alpha = \bigwedge_{\alpha \in I} (0_{M:M} a_\alpha) = (0_{M:M} \bigvee_{\alpha \in I} a_\alpha)$ olduğunu varsayalım. Böylece, $\bigvee_{\alpha \in I} a_\alpha = 1_L$ dir. Gerçekten, maksimal eleman p için $\bigvee_{\alpha \in I} a_\alpha \leq p$ ise $(0_{M:M} p) \leq (0_{M:M} \bigvee_{\alpha \in I} a_\alpha) = 0_M$ olur. Bu ise (iii) ile çelişir. 1_M kompakt olduğundan $\bigvee_{i=1}^n a_{\alpha_i} = 1_L$ dir ve böylece $n \geq 1$ için $0_M = \bigwedge_{\alpha \in I} N_\alpha = (0_{M:M} \bigvee_{i=1}^n a_{\alpha_i}) = \bigwedge_{i=1}^n (0_{M:M} a_{\alpha_i}) = \bigwedge_{i=1}^n N_{\alpha_i}$ sağlanır.

Tanım 4.1.20 $Jac(L)$, L nin maksimal elemanlarının infimumları olsun. $Jac(L)$ ye L nin Jacobson radikali denir.

Teorem 4.1.21 (Eş Çarpımsal Latis Modüller için Nakayama Lemma' nın Duali) M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun. a , L nin $a \leq Jac(L)$ olacak şekilde bir elemanı ve $(0_{M:M} a) = 0_M$ ise $M = 0_M$ dir.

İspat: $M \neq 0_M$ olduğunu kabul edip bir çelişkiye gidelim. Böylece Önerme 4.1.12 ve Önerme 4.1.13 den $0_M \neq K = (0_{M:M} p)$, M de minimal olacak şekilde bir maksimal $p \in$

L vardır. Buradan $a \leq p$ ve $(0_{M:M} a) = 0_M$ olduğundan $(0_{M:M} p) = 0_M$ eşitliği elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Teorem 4.1.22 M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül ve $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, M nin elemanlarının $\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha = 0_M$ eşitliğini sağlayan bir kümesi olsun. $a = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} (0_{M:L} N_\alpha)$ ve X , M nin kompakt bir elemanı iken $1_L = a \vee (0_{M:L} X)$ dir.

İspat: X , M nin kompakt bir elemanı ve $a = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} (0_{M:L} N_\alpha)$ için $a \vee (0_{M:L} X) \neq 1_L$ ise L nin $a \vee (0_{M:L} X) \leq p$ olacak şekilde bir maksimal p elemanı vardır. Buradan $(0_{M:M} p) \leq (0_{M:M} a) = (0_{M:M} \bigvee_{\alpha \in \Lambda} (0_{M:L} N_\alpha)) = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha = 0_M$ sağlanır. Böylece $(0_{M:M} p) = (0_{M:X} p) = 0_M$ elde edilir. $[0_M, X]$ alt modülü eş çarpımsal ve X kompakt olduğundan Önerme 4.1.9 dan $c \leq Ann(X)$ ve $c \not\leq p$ olacak şekilde $c \in L$ vardır. Bu ise $Ann(X) = (0_{M:L} X) \leq p$ olması ile çelişir. O halde $a \vee (0_{M:L} X) = 1_L$ sağlanır.

Sonuç 4.1.23 M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun. X , M nin kompakt bir elemanı ise alt modül $[0_M, X]$ sonlu aralarında üretilmiştir.

İspat $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = 0_M$ olacak şekilde $X_\lambda \leq X$ sağlayan elemanların kümesi olsun. Teorem 4.1.22 den $a = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (0_{M:L} X_\lambda)$ olmak üzere $1_L = a \vee (0_{M:L} X)$ dir. Fakat her $\lambda \in \Lambda$ için $(0_{M:L} X) \leq (0_{M:L} X_\lambda)$ olduğundan $1_L = a = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (0_{M:L} X_\lambda)$ sağlanır. 1_L kompakt olduğundan bir $n \geq 1$ için $1_L = a = \bigvee_{i=1}^n (0_{M:L} X_{\lambda_i})$ olur. Alt modül $[0_M, X]$ eş çarpımsal olduğundan her $\lambda \in \Lambda$ için $X_\lambda = (0_{M:M} (0_{M:L} X_\lambda))$ sağlanır. Böylece $0_M = (0_{M:M} 1_L) = (0_{M:M} \bigvee_{i=1}^n (0_{M:L} X_{\lambda_i})) = \bigwedge_{i=1}^n (0_{M:M} (0_{M:L} X_{\lambda_i})) = \bigwedge_{i=1}^n X_{\lambda_i}$ elde edilir.

Tanım 4.1.24 M bir L –modül olsun. 1_M , M nin temel elemanı ise M ye devirli latis modül denir [15].

Teorem 4.1.25 M bir PG –latis L –modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i.* M bir çarpımsal L –modül ve M nin bir temel elemanı N için $[0_M, N]$ alt modülü sadık ise L nin her has elemanı a için $a 1_M < 1_M$ dir.
- ii.* M bir sadık devirli eş çarpımsal L –modül ise $a < 1_L$ şeklindeki her $a \in L$ için $(0_{M:M} a) \neq 0_M$ sağlanır.
- iii.* M bir eş çarpımsal L –modül ise $a 1_M < 1_M$ sağlayan her $a \in L$ için $(0_{M:M} p)$, M de minimal eleman olacak şekilde $a \vee (0_{M:M} 1_M) \leq p$ sağlayan bir maksimal $p \in L$ vardır.

İspat i. M çarpımsal L –modül olduğundan $N = b1_M$ olacak şekilde bir $b \in L$ vardır. Eğer $a1_M = 1_M$ olacak şekilde L nin $a < 1_L$ elemanı varsa $N = b1_M = a(b1_M) = aN$ sağlanır. N, M de temel eleman olduğundan $aV(0_{M:L} N) = (aN:L N) = 1_L$ sağlanır ve buradan $a = 1_L$ olur. Bu ise a nın has eleman olması ile çelişir.

ii. Eğer $(0_{M:M} a) = 0_M$ olacak şekilde L nin $a < 1_L$ elemanı varsa Önerme 4.1.7 den $a1_M = 1_M$ elde edilir. 1_M temel eleman ve $(0_{M:L} 1_M) = 0_L$ olduğundan $1_L = (a1_{M:L} 1_M) = aV(0_{M:L} 1_M) = a$ sağlanır. Bu ise $a < 1_L$ olması ile çelişir.

iii. $a, a1_M < 1_M$ sağlayan L nin bir elemanı olsun. Buradan Önerme 4.1.7 den $(0_{M:M} a) \neq 0_M$ dir. Önerme 4.1.12 den $K \leq (0_{M:M} a)$ olacak şekilde M de bir minimal eleman K vardır. Böylece Önerme 4.1.13 den $K = (0_{M:M} p) \neq 0_M$ olacak şekilde bir maksimal eleman $p \in L$ vardır. Buradan $(0_{M:L} 1_M) \leq p$ sağlanır. Çünkü $(0_{M:L} 1_M) \leq (0_{M:L} K) = (0_{M:L} (0_{M:M} p)) \geq p$ ve p maksimal eleman olduğundan $(0_{M:L} (0_{M:M} p)) = p$ elde edilir ve böylece $(0_{M:L} 1_M) \leq p$ olduğu görülür. $a \leq p$ olduğu gösterildiğinde ispat tamamlanmış olur. $a \not\leq p$ olduğunu varsayalım. Buradan $aVp = 1_L$ elde edilir. $K \leq (0_{M:M} a)$ olduğundan $0_M = (0_{M:M} 1_L) = (0_{M:M} aVp) = (0_{M:M} a) \wedge (0_{M:M} p) = K$ dir. Böylece $K = 0_M$ olduğu görülür. Bu ise $K \neq 0_M$ olması ile çelişir. Böylece $a \leq p$ olmalıdır.

Tanım 4.1.26 M bir L –modül ve B, M nin herhangi bir elemanı olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için Q_i ler M nin P_i –asalımsı elemanları olmak üzere, $B = \bigwedge_{i=1}^n Q_i$ şeklinde yazılabiliyorsa bu yazılışa B nin M de bir asalımsı ayrışımı denir. Eğer $\bigwedge_{i=1}^n Q_i \leq Q_j$ sağlayan Q_j yoksa ve $P_1, P_2, \dots, P_n$ elemanlarının hepsi farklı ise bu asalımsı ayrışımı indirgenmiş denir [32].

Bir L –modül M , CG –latis ve herhangi kompakt elemanlar $h \in L$ ve $H \in M$ için hH elemanı kompakt ise M ye K –latis denir. L , en büyük elemanı 1_L kompakt olan bir K –latis ve M de bir K –latis olsun. M nin keyfi bir elemanı B için B nin herhangi asalımsı ayrışımından indirgenmiş asalımsı ayrışım elde edildiği kolayca görülebilir[32].

Teorem 4.1.27 L ve M birer K –latis ve M eş çarpımsal L –modül olsun. 0_M nin bir asalımsı ayrışımı varsa M nin her elemanının bir asalımsı ayrışımı vardır.

İspat $0_M = \bigwedge_{i=1}^n P_i$ indirgenmiş asalımsı ayrışım olsun. $N \in M$ olduğunu kabul edelim. Böylece $N = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde bir $a \in L$ vardır. Böylece $N = (0_{M:M} a) = \bigwedge_{i=1}^n (P_i :_M a)$ sağlanır. Şimdi her bir $i = 1, 2, \dots, n$ için $(P_i :_M a)$ nin M de bir asalımsı eleman olduğunu gösterelim. $b \in L$ ve $X \in M$ olmak üzere $bX \leq (P_i :_M a)$ olduğunu varsayalım. Böylece $abX \leq P_i$ sağlanır. P_i asalımsı olduğundan bir n pozitif tam sayısı için $b^n 1_M \leq P_i$ veya $aX \leq P_i$ dir. Böylece $X \leq (P_i :_M a)$ veya $b^n 1_M \leq P_i \leq (P_i :_M a)$ elde edilir.

Teorem 4.1.28 M bir L –modül olsun. Böylece aşağıdaki ifadeler denktir:

- i.* M bir eş çarpımsal L –modüldür.
- ii.* Her $N \in M$ ve $N < (0_{M:M} c)$ sağlayan her bir $c \in L$ için $c < b$ ve $N = (0_{M:M} b)$ olacak şekilde $b \in L$ vardır.
- iii.* Her $N \in M$ ve $N < (0_{M:M} c)$ sağlayan her bir $c \in L$ için $c < b$ ve $N \leq (0_{M:M} b)$ olacak şekilde $b \in L$ vardır.

İspat $i \Rightarrow ii$: $N \in M$, $c \in L$ için $N < (0_{M:M} c)$ olsun. M eş çarpımsal L –modül olduğundan $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N))$ sağlanır. $b = c \vee (0_{M:L} N)$ olsun. $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N)) < (0_{M:M} c)$ olduğundan $(0_{M:L} N) \not\leq c$ sağlanır. Böylece $c < b$ olduğu görülür ve $(0_{M:M} b) = (0_{M:M} c) \wedge (0_{M:M} (0_{M:L} N)) = (0_{M:M} (0_{M:L} N)) = N$ elde edilir.

$ii \Rightarrow iii$: Aşıkardır.

$iii \Rightarrow i$: M nin bir eş çarpımsal L –modül olmadığını varsayalım. $1_M = (0_{M:M} 0_L)$ olduğu açıktır. Her $c \in L$ için $N \neq (0_{M:M} c)$ olacak şekilde $N < 1_M$ vardır. $\Omega = \{c \in L \mid N < (0_{M:M} c)\}$ varsayalım. $0_L \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ olduğu görülür. $\{c_i\}$, Ω da bir zincir olsun. $N < (0_{M:M} c_i)$ olduğundan $c_i N = 0_M$ elde edilir ve böylece $(\bigvee c_i) N = \bigvee (c_i N) = 0_M$ sağlanır. Buradan $N \leq (0_{M:M} \bigvee c_i)$ sağlanır. Fakat kabulümüzden $N < (0_{M:M} \bigvee c_i)$ olmalıdır. Böylece $\bigvee c_i \in \Omega$ sağlanır. Zorn Lemma' ya göre Ω nın bir maksimal elemanı vardır. c , Ω nın maksimal elemanı olsun. (iii) şıkkına göre $N < (0_{M:M} c)$ olduğundan $N \leq (0_{M:M} b)$ olacak şekilde $b > c$ vardır. $N \neq (0_{M:M} b)$ olduğundan $b \in \Omega$ olur. $b > c$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Tanım 4.1.29 M bir eş çarpımsal L –modül olsun. Her $a \in L$ için $aN = N$ veya $aN = 0_M$ sağlayan $0_M \neq N \in M$ ye M de ikinci eleman denir.

Önerme 4.1.30 M bir eş çarpımsal L –modül olsun. Eğer $N \in M$ için $(0_{M:L} N) = p$, L nin asal elemanı ise N , M nin ikinci elemanıdır.

İspat $N \in M$ için $(0_{M:L} N) = p$, L nin asal elemanı olsun. $a \in L$ için $aN \neq 0_M$ ise $0_M \neq K = aN \leq N$ sağlanır. $0_M \neq K = aN < N = (0_{M:M} (0_{M:L} N)) = (0_{M:M} p)$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.28 (ii) şikkına göre $p < b$ ve $K = aN = (0_{M:M} b)$ olacak şekilde $b \in L$ vardır. Buradan $baN = 0_M$ sağlanır ve böylece $ba \leq p = (0_{M:L} N)$ elde edilir. p asal ve $b \not\leq p$ olduğundan $a \leq p$ sağlanır ve böylece $aN = 0_M$ elde edilir. Bu ise $aN \neq 0_M$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $K = aN = N$ sağlanır.

Sonuç 4.1.31 M bir eş çarpımsal L –modül ve $N \in M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. N , M nin ikinci elemanıdır.
- ii. $(0_{M:L} N)$, L nin asal elemanıdır.

İspat $i \Rightarrow ii$: N nin M de ikinci eleman olduğunu kabul edelim. $p = (0_{M:L} N)$ olsun. $ab \leq p$ ve $b \not\leq p$ olduğunu varsayalım. $b \not\leq p$ olduğundan $bN \neq 0_M$ sağlanır. N ikinci eleman olduğundan $bN = N$ elde edilir ve böylece $0_M = (ab)N = a(bN) = aN$ sağlanır. Sonuç olarak $a \leq p = (0_{M:L} N)$ olduğu görülür.

$ii \Rightarrow i$: Önerme 4.1.30 dan aşıkardır.

Tanım 4.1.32 Sıfır elemanından farklı hiçbir has elemanı bulunmayan L –modül M ye basit L –modül denir [36].

Önerme 4.1.33 M sıfırdan farklı bir eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun.

- i. $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin $\bigwedge M_\lambda = 0_M$ sağlayan elemanlarının bir ailesi olsun. Böylece her $N \in M$ için $N = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} (N \vee M_\lambda)$ olur.
- ii. p , L nin $(0_{M:M} p) = 0_M$ olacak şekilde bir minimal asal elemanı ise M basittir.

İspat i. $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, M nin $\bigwedge M_\lambda = 0_M$ sağlayan elemanlarının bir ailesi olsun. Böylece $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N)) = (\bigwedge M_{\lambda:M} (0_{M:L} N)) = \bigwedge (M_{\lambda:M} (0_{M:L} N))$ sağlanır ve $\lambda \in \Lambda$ için $M_\lambda \leq (M_{\lambda:M} (0_{M:L} N))$ ve $N \leq (M_{\lambda:M} (0_{M:L} N))$ olduğu görülür. Buradan $N = \bigwedge (M_{\lambda:M} (0_{M:L} N)) \geq \bigwedge (M_\lambda \vee N) \geq N$ elde edilir.

ii. $0_M \neq X \in M$ temel eleman ve p , $(0_{M:M} p) = 0_M$ sağlayan bir minimal eleman olsun. Öyleyse $X = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde $a \in L$ vardır. Böylece $X = (0_{M:M} a) = ((0_{M:M} p):_M a) = (0_{M:M} ap)$ elde edilir. p minimal asal eleman olduğundan $0_L \leq ap \leq$

p sağlanır ve böylece $ap = 0_L$ veya $ap = p$ elde edilir. Eğer $ap = p$ ise $X = (0_{M:M} ap) = (0_{M:M} p) = 0_M$ olur. Bu ise $X \neq 0_M$ olması ile çelişir. Böylece $ap = 0_L$ sağlanır. Buradan $X = (0_{M:M} ap) = 1_M$ temel elemandır. Sonuç olarak M devirlidir. $M = \{0_M, 1_M\}$ olduğundan M basittir.

Tanım 4.1.34 L bir çarpımsal latis ve $a \in L$ olsun. Böylece $ab = 0_L$ olacak şekilde bir $0_L \neq b \in L$ varsa $a \in L$ ye sıfır bölen denir. L nin tek sıfır böleni 0_L ise L ye bölge denir. $Z(L)$ ile L nin sıfır bölenlerinin kümesi gösterilecektir [13].

Lemma 4.1.35 M bir sadık eş çarpımsal L –modül olsun. Öyleyse $W(M) = \{a \in L \mid a1_M < 1_M\} = Z(L)$ olur.

İspat $a \in W(M)$ olsun. Böylece $a1_M < 1_M$ elde edilir. M eş çarpımsal olduğundan $a1_M = (0_{M:M} (0_{M:L} a1_M))$ sağlanır. $(0_{M:L} a1_M) \neq 0_L$ ve $(0_{M:L} a1_M)a1_M = 0_M$ olduğu açıktır. M sadık olduğundan $(0_{M:L} a1_M)a = 0_L$ elde edilir. Böylece $a \in Z(L)$ olur. Tersine $a \in Z(L)$ olsun. Buraadan $ab = 0_L$ olacak şekilde $0_L \neq b \in L$ vardır. Böylece $(ab)1_M = b(a1_M) = 0_M$ elde edilir ve buradan $a1_M \leq (0_{M:M} b) \neq 1_M$ sağlanır. Eğer $(0_{M:M} b) = 1_M$ olsaydı $b1_M = 0_M$ olurdu. M sadık olduğundan $b = 0_L$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $a1_M \neq 1_M$ ve buradan $a \in W(M)$ olur.

Tanım 4.1.36 M bir L –modül olsun. $0_M, M$ nin asal elemanı ise M ye asal L –modül denir [36].

Açıktır ki; $0_M, M$ nin asal elemanı olması için gerek ve yeter koşul her $0_M \neq N \in M$ için $(0_{M:L} 1_M) = (0_{M:L} N)$ olmasıdır [36].

Tanım 4.1.37 M bir L –modül olsun. Her $N \in M$ için $(0_{M:L} 1_M) = (N:L 1_M)$ sağlanıyorsa M ye eş asal L –modül denir [36].

Önerme 4.1.38 M bir L –modül olsun.

- i.* M bir eş çarpımsal asal L –modül olsun. Böylece M bir basit L –modüldür.
- ii.* M bir çarpımsal eş asal L –modül ise M bir basit L –modüldür.
- iii.* L bir bölge ve M bir sadık çarpımsal ve eş çarpımsal L –modül olsun. Buradan M basittir.

İspat i. $0_M \neq N \in M$ olsun. M bir asal L –modül olduğundan her $0_M \neq N \in M$ için $(0_{M:L} 1_M) = (0_{M:L} N)$ sağlanır. Buradan $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N)) = (0_{M:M} (0_{M:L} 1_M)) = 1_M$ olur. Böylece M bir basit L –modül olur.

ii. $N < 1_M$ olsun. M bir eş asal L –modül olduğundan $(0_{M:L} 1_M) = (N:L 1_M)$ elde edilir. M çarpımsal L –modül olduğundan $N = (N:L 1_M)1_M = (0_{M:L} 1_M)1_M = 0_M$ elde edilir. Böylece M nin bir basit L –modül olduğu görülür.

iii. $N \in M$ olsun. Böylece $a, b \in L$ için $N = (0_{M:M} a)$ ve $N = b1_M$ dir. Buradan $aN = ab1_M = 0_M$ elde edilir. M sadık olduğundan $ab = 0_L$ dir. L bölge olduğundan $a = 0_L$ veya $b = 0_L$ olur. Böylece $N = 1_M$ veya $N = 0_M$ elde edilir.

Tanım 4.1.39 i. M bir PG –latis L –modül olsun. Her temel $X \in M$ için $Ann(X) = (0_{M:L} X) \neq 0_L$ sağlanıyorsa M ye burulmalı L –modül denir [15].

ii. M bir L –modül olsun. Her $0_M \neq N \in M$ için $Ann(N) = 0_L$ sağlanıyorsa M ye bir bölge denir [15].

Teorem 4.1.40 M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül ise M devirli veya burulmalıdır.

İspat M bir eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun. M burulmalı L –modül olmadığını varsayalım. Böylece $(0_{M:L} X) = 0_L$ olacak şekilde bir temel eleman $X \in M$ vardır. Buradan $X = (0_{M:M} (0_{M:L} X)) = 1_M$ elde edilir. Böylece M devirlidir.

Sonuç 4.1.41 M bir sadık eş çarpımsal PG –latis L –modül ve 1_M kompakt olsun. Eğer L bir bölge ise M devirli L –modüldür.

İspat M nin devirli olmadığını varsayalım. Buradan M burulmalıdır. Böylece her temel eleman X için $(0_{M:L} X) \neq 0_L$ olur. 1_M kompakt olduğundan $1_M = \bigvee X_i$ iken temel elemanlar X_i ler için $1_M = \bigvee_{i=1}^n X_i$ sağlanır. Böylece L bir bölge olduğundan $0_L = (0_{M:L} 1_M) = \bigwedge_{i=1}^n (0_{M:L} X_i) \geq \prod_{i=1}^n (0_{M:L} X_i) \neq 0_L$ elde edilir. Buradan bir çelişki elde edilir.

Önerme 4.1.42 L bir eş çarpımsal PG –latis ve M bir sadık eş çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Böylece her bir $a < 1_L$ şeklindeki $a \in L$ için $(0_{M:M} a) \neq 0_M$ ve $a1_M < 1_M$ elde edilir.

İspat $a \in L$ ve $a < 1_L$ olsun. $(0_{M:M} a) = 0_M$ olduğunu kabul edelim. Böylece $(0_{L:L} a)1_M = 0_M$ sağlanır. Çünkü $(0_{L:L} a)1_M \neq 0_M$ olsaydı $x \leq (0_{L:L} a)$ olacak şekilde

bir temel eleman $x \in L$ ve $xY \neq 0_M$ olacak şekilde bir temel eleman $Y \in M$ var olurdu. Buradan $ax = 0_L$ olduğundan $axY = 0_M$ sağlanırdı. Böylece $xY \leq (0_{M:M} a) = 0_M$ olurdu. Bu ise $xY \neq 0_M$ olması ile çelişirdi. $(0_{L:L} a)1_M = 0_M$ olduğundan $(0_{L:L} a) \leq \text{Ann}(M) = 0_L$ elde edilir. L bir eş çarpımsal latis olduğundan $a = (0_{L:L} (0_{L:L} a)) = 1_L$ olur. Bu ise a nın has eleman olması ile çelişir. Şimdi, $a1_M = 1_M$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(0_{L:L} a) = (0_{L:L} 1_M) = 0_L$ olur. L bir eş çarpımsal latis olduğundan $a = 1_L$ elde edilir. $a < 1_L$ olması ile çelişir.

Tanım 4.1.43 L bir latis ve a, L nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Her $b \in L$ için $a \wedge b = 0_L$ iken $b = 0_L$ oluyorsa a elemanına büyük denir.

Tanım 4.1.44 L bir latis ve a, L nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Her $b \in L$ için $a \vee b = 1_L$ iken $b = 1_L$ ise a elemanına küçük denir.

Tanım 4.1.45 M bir L –modül ve N, M nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Her $K \in M$ için $N \wedge K = 0_M$ iken $K = 0_M$ oluyorsa N elemanına büyük denir.

Tanım 4.1.46 M bir L –modül ve N, M nin has elemanı olsun. Her $K \in M$ için $N \vee K = 1_M$ iken $K = 1_M$ ise N elemanına küçük denir [36].

Önerme 4.1.47 M bir sadık eş çarpımsal PG –latis L –modül ve 1_M kompakt eleman olsun. Öyleyse M nin her sıfırdan farklı elemanının büyük olması için gerek ve yeter koşul $a < 1_L$ şeklindeki her $a \in L$ nin küçük olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): M nin her sıfırdan farklı elemanının büyük olduğunu varsayalım. a, L nin herhangi $0_L \neq b \in L$ elemanı için $a \vee b = 1_L$ sağlayan bir has elemanı olsun. Öyleyse $0_M = (0_{M:M} a \vee b) = (0_{M:M} a) \wedge (0_{M:M} b)$ sağlanır. $a < 1_L$ olduğundan Teorem 4.1.19 dan $(0_{M:M} a) \neq 0_M$ elde edilir. $(0_{M:M} a)$ büyük olduğundan $(0_{M:M} b) = 0_M$ olur. Böylece $b = 1_L$ sağlanır.

($\Leftarrow$): $N \in M$ nin $0_M \neq K \in M$ olmak üzere $K \wedge N = 0_M$ sağladığını varsayalım. M bir eş çarpımsal L –modül olduğundan $K = (0_{M:M} (0_{M:L} K))$ ve $N = (0_{M:M} (0_{M:L} N))$ olduğu görülür. Buradan $0_M = K \wedge N = (0_{M:M} (0_{M:L} K) \vee (0_{M:L} N))$ eşitliği sağlanır ve böylece $(0_{M:L} K) \vee (0_{M:L} N) = 1_L$ elde edilir. $0_M \neq K$ olduğundan $(0_{M:L} K) \neq 1_L$ olur. $(0_{M:L} K)$ küçük olduğundan $(0_{M:L} N) = 1_L$ sağlanır ve böylece $N = 0_M$ elde edilir.

Önerme 4.1.48 M bir sadık eş çarpımsal PG –latis L –modül ve 1_M kompakt eleman olsun. Böylece $N \in M$ nin büyük olması için gerek ve yeter koşul $N = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde bir küçük $a \in L$ var olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $N \in M$ nin büyük olduğunu varsayalım. M bir eş çarpımsal L –modül olduğundan $N = (0_{M:M} a)$ sağlanır. $0_L \neq b \in L$ için $a \vee b = 1_L$ olduğunu kabul edelim. Böylece $N \wedge (0_{M:M} b) = (0_{M:M} a) \wedge (0_{M:M} b) = (0_{M:M} a \vee b) = 0_M$ elde edilir. N büyük olduğundan Teorem 4.1.19 aracılığıyla $(0_{M:M} b) = 0_M$ sağlanır. Böylece $b = 1_L$ olur. Yani a bir küçük elemandır.

($\Leftarrow$): $N = (0_{M:M} a)$ olacak şekilde bir küçük $a \in L$ var olduğunu kabul edelim. $N \wedge K = 0_M$ olacak şekilde $K \in M$ alalım. M bir eş çarpımsal L –modül olduğundan $K = (0_{M:M} b)$ olacak şekilde $b \in L$ vardır. Böylece $0_M = N \wedge K = (0_{M:M} a) \wedge (0_{M:M} b) = (0_{M:M} a \vee b)$ sağlanır ve böylece Teorem 4.1.19 dan $a \vee b = 1_L$ olur. Sonuç olarak $b = 1_L$ olur. Böylece $K = (0_{M:M} b) = 0_M$ dir. Buradan N büyüktür.

ÇARPIMSAL LATİSLERİN SPEKTRUMU

Bu bölümde halka ve modüllerin asal spektrumları üzerinde kurulan Zariski topolojisi, latis ve latis modüllerin asal spektrumları üzerinde kurulmuştur. Çalışmanın bu bölümü için kaynak olarak On Ring Theoretic Lattice Modules [17], The Zariski Topology on The Prime Spectrum of a Module [26], Seperation Axioms and Their Prime Spectrum of Commutative Semirings [25], Abstract Spectral Theory. II: Minimal Characters and Minimal Spectrums of Multiplicative Lattices [22] ve The Zariski Topology on the Prime Spectrum of a Module over Noncommutative Rings [27] makalelerinden faydalanılmıştır.

5.1 Çarpımsal Latisler Üzerinde Zariski Topolojisi

Bu bölümde N.K. Thakare' nin makalesinde kurulmuş olan topoloji için bazı özellikler, önermeler ve teoremler incelenmiştir. $\sigma(L)$ ile L nin asal elemanlarının kümesi gösterilmiştir. Herhangi bir $a \in L$ için $V(a) = \{p \in \sigma(L) \mid a \leq p\}$ kapalı kümeler olmak üzere $\sigma(L)$ üzerinde bir topoloji belirlenmiştir. Topoloji olma şartları aşağıdaki önermede incelenmiştir. Bu topolojiye Zariski topolojisi denilmiştir.

Önerme 5.1.1 Yukarıdaki tanımlar ile $\sigma(L)$ aşağıdaki durumları sağlar [22]:

- i.* $V(0) = \sigma(L)$ ve $V(1_L) = \emptyset$.
- ii.* $\bigcap_{\alpha} V(a_{\alpha}) = V(\bigvee_{\alpha} a_{\alpha})$.
- iii.* $V(a) \cup V(b) = V(ab) = V(a \wedge b)$.

İspat i. Aşıkardır.

ii. $p \in \bigcap_{\alpha} V(a_{\alpha})$ olsun. Buradan her $\alpha \in \Delta$ için $p \in V(a_{\alpha})$ olur. $p \in V(a_{\alpha})$ sağlanması için gerek ve yeter koşul $a_{\alpha} \leq p$ olmasıdır. Her $\alpha \in \Delta$ için $V_{\alpha} a_{\alpha} \leq p$ sağlanması için gerek ve yeter koşul $p \in V(V_{\alpha} a_{\alpha})$ olmasıdır.

iii. $p \in V(a) \cup V(b)$ olsun. Bu durumda $a \leq p$ veya $b \leq p$ dir. O halde $a \wedge b \leq p$ olur ve böylece $p \in V(a \wedge b)$ dir. $ab \leq a \wedge b$ olduğundan $V(a \wedge b) \subseteq V(ab)$ sağlanır. Şimdi $p \in V(ab)$ olduğunu kabul edelim. Böylece $ab \leq p$ olur ve p asal olduğundan $a \leq p$ veya $b \leq p$ sağlanır. Böylece $p \in V(a) \cup V(b)$ olur.

$\sigma(L)$ nin kapalı kümeleri $a \in L$ için $V(a)$ şeklinde olduğundan $\sigma(L)$ nin açık kümeleri $\sigma(L) - V(a)$ şeklindedir. $a \in L$ olmak üzere $\sigma(L) - V(a)$ kümesi D_a ile gösterilecektir.

Önerme 5.1.2 L bir C -latis ve a , L nin bir has elemanı olsun. O halde $\sqrt{a} = \bigwedge \{p \in \sigma(L) | p \in V(a)\}$ sağlanır.

İspat $x \leq \sqrt{a}$ olacak şekilde bir $x \in L$ alalım. Her $p \in V(a)$ için $x^n \leq p$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. p bir asal eleman olduğundan $x \leq p$ sağlanır. Böylece $\sqrt{a} \leq \bigwedge_{p \in V(a)} p$ olduğu açıktır. Eğer $\sqrt{a} < \bigwedge_{p \in V(a)} p$ ise $c \leq \bigwedge_{p \in V(a)} p$ ve $c \not\leq \sqrt{a}$ olacak şekilde bir $c \in L_*$ vardır. O halde her n pozitif tam sayısı için $c^n \not\leq a$ sağlanır. [29, Önerme 2.1] aracılığıyla $a \leq p$ ve $c \not\leq p$ olacak şekilde bir $p \in \sigma(L)$ vardır. Bu ise $c \leq \bigwedge_{p \in V(a)} p$ olması ile çelişir.

Önerme 5.1.3 L bir C -latis ve L_* , L nin kompakt elemanlarının kümesi olmak üzere $\{D_a | a \in L_*\}$ kümesi $\sigma(L)$ üzerindeki Zariski topolojisi için bir taban oluşturur.

İspat G açık bir küme olsun. Buradan $G = \sigma(L) - V(a)$ olacak şekilde $a \in L$ vardır. L bir C -latis olduğundan $G = \sigma(L) - V(a) = \sigma(L) - V(\bigvee_{c \in L_*} c) = \sigma(L) - \bigcap_{c \in L_*} V(c) = \bigcup_{c \in L_*} (\sigma(L) - V(c)) = \bigcup_{c \in L_*} D_c$ sağlanır. Böylece $\{D_a | a \in L_*\}$ kümesi $\sigma(L)$ üzerindeki Zariski topolojisi için bir taban oluşturur.

Önerme 5.1.4 L çarpımsal latis ve bir $a \in L$ için $D_a = \sigma(L) - V(a)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $a, b \in L$ için $D_a \cap D_b = D_{ab}$.

ii, iii, ve iv için L nin C -latis olduğunu kabul edelim:

ii. $D_a = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul a nın nilpotent eleman olmasıdır.

iii. $D_a = D_b$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ olmasıdır.

iv. $\sigma(L)$ kompakt uzaydır.

İspat i. $a, b \in L$ için $p \in D_a \cap D_b$ olması için gerek ve yeter koşul $a \not\leq p$ ve $b \not\leq p$ sağlanması için gerek ve yeter koşul $ab \not\leq p$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in D_{ab}$ olmasıdır.

ii. $D_a = \emptyset$ olsun. Böylece $V(a) = \sigma(L)$ dir ve buradan her $p \in \sigma(L)$ için $a \leq p$ olduğu görülür. Böylece $a \leq \sqrt{0}$ dir, yani $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. Böylece a nilpotent elemandır. Tersine a nilpotent eleman olsun. Yani $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı var olsun. Buradan her $p \in \sigma(L)$ için $a^n \leq p$ sağlanır. Böylece her $p \in \sigma(L)$ için $a \leq p$ olur, yani $V(a) = \sigma(L)$. Öyleyse $D_a = \emptyset$ elde edilir.

iii. $D_a = D_b$ olması için gerek ve yeter koşul $V(a) = V(b)$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ olmasıdır.

iv. $\{G_i | i \in \nabla\}$, $\sigma(L)$ nin bir açık örtülüğü olsun. Genelliği bozmaksızın $i \in \nabla, c_i \in L_*$ için $G_i = D_{c_i}$ olduğunu kabul edelim. $\sigma(L) = \bigcup_{i \in \nabla} G_i = \bigcup_{i \in \nabla} D_{c_i} = \bigcup_{i \in \nabla} (\sigma(L) - V(c_i)) = \sigma(L) - \bigcap_{i \in \nabla} V(c_i) = \sigma(L) - V(\bigvee_{i \in \nabla} c_i)$. Böylece $V\left(\bigvee_{i \in \nabla} c_i\right) = \emptyset$ elde edilir. Yani $\bigvee_{i \in \nabla} c_i$ elemanı hiçbir asal eleman tarafından kapsanmaz. Öyleyse $\bigvee_{i \in \nabla} c_i = 1_L$ eşitliği sağlanır. 1_L kompakt eleman olduğundan $1_L = \bigvee_{j \in I} c_j$ olacak

şekilde ∇ nin sonlu bir alt kümesi I vardır. Buna göre $V\left(\bigvee_{j \in I} c_j\right) = \emptyset$ olur. Buradan

$$\sigma(L) = \sigma(L) - V\left(\bigvee_{j \in I} c_j\right) = \sigma(L) - \bigcap_{j \in I} V(c_j) = \bigcup_{j \in I} (\sigma(L) - V(c_j)) =$$

$\bigcup_{j \in I} D_{c_j}$ sağlanır. Böylece $\sigma(L)$ kompakt uzaydır.

Lemma 5.1.5 L bir C -latis olsun. Böylece, $\sigma(L)$ nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{0}$ in bir asal eleman olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sqrt{0}$ nin bir asal eleman olmadığını kabul edelim. Böylece, $ab \leq \sqrt{0}$ fakat $a, b \not\leq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a, b \in L$ vardır. $a \not\leq \sqrt{0}$ olduğundan $V(a) \neq \sigma(L)$ dir ve böylece $\sigma(L) - V(a) = G_a \neq \emptyset$ dir. Benzer şekilde, $\sigma(L) - V(b) = G_b \neq \emptyset$ dir. G_a ve

G_b açık kümelerdir ve $G_a \cap G_b = (\sigma(L) - V(a)) \cap (\sigma(L) - V(b)) = \sigma(L) - (V(a) \cup V(b)) = \sigma(L) - V(ab)$ elde edilir. $ab \leq \sqrt{0} = \bigwedge_{p \in \sigma(L)} p$ olduğundan $V(ab) = \sigma(L)$ ve böylece $G_a \cap G_b = \sigma(L) - V(ab) = \emptyset$ dir. Buna göre $\sigma(L)$ indirgenemez değildir. Bu durum kabulümüz ile çelişir. Sonuç olarak $\sqrt{0}$ bir asal elemandır.

($\Leftarrow$): $\sqrt{0}$ nın bir asal eleman olduğunu varsayalım. U ve V , $\sigma(L)$ nin boştan farklı iki açık kümesi olsun. $p \in U, q \in V$ ve $a \in L$ için $U = \sigma(L) - V(a)$ olsun. Bu durumda $p \in U$ olduğundan $p \notin V(a)$, buradan $a \not\leq p$ ve $\sqrt{0} \leq p$ dir. Böylece $\sqrt{0} \notin V(a)$ dir. Bu ise $\sqrt{0} \in \sigma(L) - V(a)$, yani $\sqrt{0} \in U$ olmasını sağlar. Benzer şekilde, $\sqrt{0} \in V$ dir ve $\sqrt{0} \in U \cap V$ dir. Böylece $U \cap V \neq \emptyset$ elde edilir. $\sigma(L)$ nin indirgenemez olduğu görülür.

Y , $\sigma(L)$ nin bir alt kümesi olsun. Y deki bütün elemanların infimumu $\xi^*(Y)$ ile $\sigma(L)$ de Y nin kapanışı ise $cl(Y)$ ile gösterilecektir.

Önerme 5.1.6 Y , $\sigma(L)$ nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. $cl(Y) = V(\xi^*(Y))$ dir.
- ii. Y nin bir kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $V(\xi^*(Y)) = Y$ olmasıdır.
- iii. Y nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\xi^*(Y)$ bir asal eleman olmasıdır.

İspat i. $a \in L$ olmak üzere $V(a)$ kapalı kümesi Y kümesini içerirse her $p \in Y$ için $a \leq p$ sağlanır. Böylece $a \leq \xi^*(Y)$ ve buradan $V(\xi^*(Y)) \subseteq V(a)$ olduğu görülür. $Y \subseteq V(\xi^*(Y))$ olduğundan $V(\xi^*(Y))$, Y kümesini kapsayan $\sigma(L)$ nin en küçük kapalı kümesidir.

ii. i şikkından açıktır.

iii. $\xi^*(Y)$, p ile gösterelim ve Y kümesinin indirgenemez olduğunu kabul edelim. $a, b \in L$ için $ab \leq p$ olsun. Böylece, $Y \subseteq V(ab) = V(a) \cup V(b)$ dir. Y indirgenemez ve $V(a)$, $V(b)$ kapalı kümeler olduklarından $Y \subseteq V(a)$ veya $Y \subseteq V(b)$ dir. Bu durumda $a \leq p$ veya $b \leq p$ dir ve böylece p asaldır. Tersine, p asal eleman olsun. i. şartından $cl(Y) = V(p)$ dir ve p asal olduğundan $p = \xi^*(p)$ dir. Böylece $cl(Y) = V(\xi^*(p)) = cl(\{p\})$ sağlanır ve Önerme 2.28 den Y indirgenemezdir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.

Önerme 5.1.7 $p \in \sigma(L)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i.* $cl(\{p\}) = V(p)$ dir.
- ii.* $\{p\}$ nin bir kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul p nin bir maksimal eleman olmasıdır.

İspat i. Önerme 5.1.6 da Y yerine $\{p\}$ alındığında aşıkardır.

ii. $(\Leftarrow)$: $p \in \sigma(L)$ nin bir maksimal eleman olduğunu kabul edelim. Buradan, $\{p\} = V(p) = cl(\{p\})$ dir ve böylece $\{p\}$ bir kapalı kümedir.

$(\Rightarrow)$: Eğer $\{p\}$ kapalı küme ise $\{p\} = cl(\{p\}) = V(p)$ dir. Böylece $p \in \sigma(L)$ bir maksimal elemandır.

Önerme 5.1.8 L bir C –latis olsun. Öyleyse, $\sigma(L)$ bir T_0 –uzaydır.

İspat $p, q \in \sigma(L)$ olsun. $q \not\leq p$ olduğunu varsayalım. L, C –latis olduğundan $x \leq p$ ve $x \not\leq q$ olacak şekilde bir $x \in L_*$ vardır. Böylece $p \in V(x)$ ve $q \notin V(x)$ olduğu görülür. Buradan $p \notin \sigma(L) - V(x)$ ve $q \in \sigma(L) - V(x)$ sağlanır. Böylece $\sigma(L)$ bir T_0 –uzaydır.

Önerme 5.1.9 $\sigma(L)$ nin bir T_1 –uzay olması için gerek ve yeter koşul $max(L) = \{p \in \sigma(L) | p \text{ maksimal eleman}\}$ olmak üzere $max(L) = \sigma(L)$ olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$: Önerme 5.1.7 ii şikkından aşıkardır.

$(\Leftarrow)$: $max(L) = \{p \in \sigma(L) | p \text{ maksimal eleman}\}$ olmak üzere $max(L) = \sigma(L)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\{p\} \neq \overline{\{p\}} = V(p)$ ise $q \in V(p) - \{p\}$ olacak şekilde bir q elemanı vardır. Buradan $p \not\leq q$ dur fakat bu kabulümüz ile çelişir. O halde $\{p\} = \overline{\{p\}}$ olmalıdır. Böylece $\sigma(L)$ bir T_1 –uzayıdır.

Tanım 5.1.10 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $U \in \tau$ ve $x \in U$ için $cl(\{x\}) \subseteq U$ sağlanıyorsa (X, τ) uzayına R_0 –uzay denir [25].

Teorem 5.1.11 L, C –latis olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i.* $max(L) = \{p \in \sigma(L) | p \text{ maksimal eleman}\}$ olmak üzere $max(L) = \sigma(L)$ dir.
- ii.* $\sigma(L)$ bir T_1 –uzaydır.
- iii.* $\sigma(L)$ bir R_0 –uzaydır.

İspat $i \Leftrightarrow ii$: Önerme 5.1.9 den aşıkardır. $ii \Leftrightarrow iii$: $T_1 = T_0 + R_0$ olduğundan aşıkardır [25].

5.2 Latis Modüller Üzerinde Zariski Topolojisi

$\sigma(M)$, M nin bütün asal elemanlarının kümesi olsun. N elemanının varyetesi $V^*(N) = \{P \in \sigma(M) | N \leq P\}$ olarak tanımlansın. Böylece aşağıdaki Önerme sağlanır:

Önerme 5.2.1 M latis modülünün bir N elemanı için $V^*(N) = \{P \in \sigma(M) | N \leq P\}$ olmak üzere aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

- i.* $V^*(0_M) = \sigma(M)$ ve $V^*(1_M) = \emptyset$ dir.
- ii.* Herhangi bir indeks kümesi Δ için $\bigcap_{\alpha \in \Delta} V^*(N_\alpha) = V^*(\bigvee_{\alpha \in \Delta} N_\alpha)$ sağlanır.
- iii.* M nin N ve K elemanları için $V^*(N) \cup V^*(K) \subseteq V^*(N \wedge K)$ sağlanır.

İspat i. Aşıkardır.

ii. $P \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} V^*(N_\alpha)$ olsun. Böylece her $\alpha \in \Delta$ için $P \in V^*(N_\alpha)$ sağlanır. Böylece her α için $N_\alpha \leq P$ dir ve buradan $\bigvee_{\alpha \in \Delta} N_\alpha \leq P$ sağlanır. Sonuç olarak $P \in V^*(\bigvee_{\alpha \in \Delta} N_\alpha)$ elde edilir. Terside aynı şekilde gösterilir.

iii. M nin N ve K elemanları için $P \in V^*(N) \cup V^*(K)$ olsun. Buradan $N \leq P$ veya $K \leq P$ sağlanır. Böylece $N \wedge K \leq P$, yani $P \in V^*(N \wedge K)$ elde edilir.

$\zeta^*(M) = \{V^*(N) | N \in M\}$ kümesi bütün kapalı kümelerin ailesi olmak üzere Önerme 5.2.1 aracılığıyla $\sigma(M)$ üzerinde bir topolojinin var olması için gerek ve yeter koşul $\zeta^*(M)$ nin sonlu birleşimler altında kapalı olmasıdır. Bu durum sağlandığında $\sigma(M)$ üzerindeki bu topolojiye Quasi-Zariski topolojisi denir ve τ^* ile gösterilir. $\zeta^*(M)$ üzerinde τ^* topolojisi tanımlanıyorsa L –modül M ye bir zirve L –modül denir.

M latis modülünün herhangi bir N elemanı için yeni bir varyete şu şekilde tanımlansın: $V(N) = \{P \in \sigma(M) | (N :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)\}$. Tanımlanan bu yeni varyeteye göre aşağıdaki Önerme ispatlanacaktır:

Önerme 5.2.2 M bir L –modül olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanır:

- i.* $V(0_M) = \sigma(M)$ ve $V(1_M) = \emptyset$ dir.
- ii.* Herhangi bir indeks kümesi Δ için $\bigcap_{\alpha \in \Delta} V(N_\alpha) = V(\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M) 1_M)$ dir.
- iii.* M nin N ve K elemanları için $V(N) \cup V(K) = V(N \wedge K)$ dir.

İspat i. Aşıkardır.

ii. $P \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} V(N_\alpha)$ olsun. Buradan her $\alpha \in \Delta$ için $P \in V(N_\alpha)$ sağlanır. Her α için $(N_\alpha :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ olur. Böylece $(N_\alpha :_L 1_M)1_M \leq (P :_L 1_M)1_M$ elde edilir. Bu durumda $\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M)1_M \leq P$ olduğu görülür. Böylece $(\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M)1_M) :_L 1_M \leq (P :_L 1_M)$ elde edilir. $P \in V(\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M)1_M)$ olduğu görülür.

$P \in V(\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M)1_M)$ olsun. Öyleyse $(\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M)1_M) :_L 1_M \leq (P :_L 1_M)$ elde edilir. O halde $\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M) \leq (\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M)1_M) :_L 1_M \leq (P :_L 1_M)$ olduğundan $\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha :_L 1_M)1_M \leq P$ elde edilir. Böylece $(N_\alpha :_L 1_M)1_M \leq P$ ve her $\alpha \in \Delta$ için $(N_\alpha :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ sağlanır. Buradan her $\alpha \in \Delta$ için $P \in V(N_\alpha)$ olduğu görülür. Böylece $P \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} V(N_\alpha)$ elde edilir.

iii. M nin N ve K elemanları için $P \in V(N) \cup V(K)$ olsun. Böylece $(N :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ veya $(K :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ elde edilir. Buradan $(N :_L 1_M) \wedge (K :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ sağlanır ve $((N \wedge K) :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ olduğu görülür. Böylece $P \in V(N \wedge K)$ sağlanır.

$P \in V(N \wedge K)$ olsun. Buradan $((N \wedge K) :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ olur. Böylece $(N :_L 1_M) \wedge (K :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ olduğu görülür. $(P :_L 1_M)$, L de asal eleman olduğundan $(N :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ veya $(K :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $P \in V(N) \cup V(K)$ olduğu görülür.

$\zeta(M) = \{V(N) | N \in M\}$ olmak üzere Önerme 5.2.2 aracılığı ile görülür ki $\sigma(M)$ üzerinde bir topoloji tanımlanır. Bu topolojiye Zariski topolojisi denir ve τ ile gösterilir. Bu çalışmanın kalanı boyunca bu topoloji üzerinde çalışılacaktır.

Önerme 5.2.3 M bir L –modül ve $N, K \in M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. Eğer $(N :_L 1_M) = (K :_L 1_M)$ ise $V(N) = V(K)$ sağlanır. Tersi ise N ve K nin asal elemanlar olması halinde doğrudur.
- ii. $V(N) = V((N :_L 1_M)1_M) = V^*((N :_L 1_M)1_M)$ dir. Özellikle, bir $a \in L$ için $V(a1_M) = V^*(a1_M)$ dir.

İspat i. Eğer $(N :_L 1_M) = (K :_L 1_M)$ ise $V(N) = V(K)$ olduğu aşikardır. Tersi için N ve K asal elemanlar olsun. $(N :_L 1_M) \leq (K :_L 1_M)$ ve $(K :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$ olduğundan $(N :_L 1_M) = (K :_L 1_M)$ dir.

ii. $P \in V(N)$ olsun. Buradan $(N :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ ve buradan $(N :_L 1_M)1_M \leq (P :_L 1_M)1_M \leq P$ elde edilir. Böylece $((N :_L 1_M)1_M) :_L 1_M \leq (P :_L 1_M)$ olduğu görülür ve

sonuç olarak $P \in V((N:_L 1_M)1_M)$ sağlanır. Tersini için $P \in V((N:_L 1_M)1_M)$ olsun. Buradan $((N:_L 1_M)1_M:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ dir. $(N:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ elde edilir. Böylece $P \in V(N)$ olduğu görülür. $V(N) = V((N:_L 1_M)1_M)$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi, $V((N:_L 1_M)1_M) = V^*((N:_L 1_M)1_M)$ olduğunu görelim. $P \in V((N:_L 1_M)1_M)$ olsun. Buradan $((N:_L 1_M)1_M:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ olur ve böylece $(N:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $(N:_L 1_M)1_M \leq P$ elde edilir. $P \in V^*((N:_L 1_M)1_M)$ olduğu görülür. Tersini için $P \in V^*((N:_L 1_M)1_M)$ olsun. Buradan $(N:_L 1_M)1_M \leq P$ dir ve $((N:_L 1_M)1_M:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $P \in V((N:_L 1_M)1_M)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $V((N:_L 1_M)1_M) = V^*((N:_L 1_M)1_M)$ eşitliği sağlanır.

$P \in V(a1_M)$ olsun. Böylece $(a1_M:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır ve buradan $a1_M \leq P$ dir. Böylece $P \in V^*(a1_M)$ olur. Tersine $P \in V^*(a1_M)$ olsun. Böylece $a1_M \leq P$ dir ve buradan $(a1_M:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ elde edilir. Böylece $P \in V(a1_M)$ olur. Sonuç olarak $V(a1_M) = V^*(a1_M)$ olduğu görülür.

Teorem 5.2.4 Her çarpımsal L –modül M , $\tau^* = \tau$ ile bir zirve L –modüldür.

İspat $N, K \in M$ olmak üzere $P \in V^*(N \wedge K)$ olsun. Buradan $N \wedge K \leq P$ dir ve $((N \wedge K):_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır. Buradan $(N:_L 1_M) \wedge (K:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ olur. $(P:_L 1_M)$, L nin asal elemanı olduğundan $(N:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ veya $(K:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ dir. Buna göre $(N:_L 1_M)1_M \leq (P:_L 1_M)1_M$ veya $(K:_L 1_M)1_M \leq (P:_L 1_M)1_M$ elde edilir ve M çarpımsal L –modül olduğundan $N \leq P$ veya $K \leq P$ dir. Böylece $P \in V^*(N) \cup V^*(K)$ elde edilir.

Bu tez çalışmasının kalanı boyunca her L –modül M için $\sigma(M)$ üzerinde Zariski topolojisinin var olduğu kabul edilecektir. $\sigma(L/Ann(1_M))$, $\sigma(\bar{L})$ ile gösterilecektir. Ayrıca S , $\sigma(M)$ nin bir alt kümesi olmak üzere S kümesinin eleman sayısını $|S|$ ile gösterilecektir. ψ , her $P \in \sigma(M)$ için $\psi(P) = \overline{(P:_L 1_M)}$ şeklinde tanımlanan $\sigma(M)$ den $\sigma(L/Ann(1_M))$ ye bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyona $\sigma(M)$ nin doğal fonksiyonu denir.

Önerme 5.2.5 Doğal fonksiyon $\psi: \sigma(M) \rightarrow \sigma(L/Ann(1_M))$ süreklidir. Ayrıca, $Ann(1_M) \leq a$ sağlayan her $a \in L$ için $\psi^{-1}(V^{\bar{L}}(\bar{a})) = V(a1_M)$ sağlanır.

İspat S , $\sigma(\bar{L})$ nin kapalı bir alt kümesi olsun. Böylece bir $\bar{a} \in \bar{L}$ için $S = V^{\bar{L}}(\bar{a})$ olur. $P \in \psi^{-1}(S)$ olmak üzere $\psi(P) = \overline{(P:_L 1_M)} \in V^{\bar{L}}(\bar{a})$ olması için gerek ve yeter koşul $\bar{a} \leq$

$\overline{(P:_L 1_M)}$ dir. $\bar{a} \leq \overline{(P:_L 1_M)}$ olması için gerek ve yeter koşul $a \leq (P:_L 1_M)$ olmasıdır. $a \leq (P:_L 1_M)$ olması için gerek ve yeter koşul $a1_M \leq P$ dir. $a1_M \leq P$ olması için gerek ve yeter koşul $(a1_M:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ olmasıdır. Buradan $P \in V(a1_M)$ olur. Böylece $V(a1_M)$, $\sigma(M)$ nin bir kapalı kümesi olmak üzere $\psi^{-1}(S) = \psi^{-1}(V^{\bar{L}}(\bar{a})) = V(a1_M)$ sağlanır. Böylece ψ süreklidir.

$\sigma_p(M) = \{P \in \sigma(M) | (P:_L 1_M) = p, p \in \sigma(L)\}$ olmak üzere aşağıdaki Önermeyi ispatlayalım:

Önerme 5.2.6 M bir L –modül ve $P, Q \in \sigma(M)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. Doğal fonksiyon $\psi: \sigma(M) \rightarrow \sigma(L/Ann(1_M))$ bire-birdir.
- ii. $V(P) = V(Q)$ ise $P = Q$ olur.
- iii. $p \in \sigma(L)$ için $|\sigma_p(M)| \leq 1$ sağlanır.

İspat $i \Rightarrow ii$: $\psi: \sigma(M) \rightarrow \sigma(L/Ann(1_M))$ bire-bir olsun. $V(P) = V(Q)$ olduğunu varsayalım. Buradan $\overline{(P:_L 1_M)} = \overline{(Q:_L 1_M)}$ dir. Böylece $\psi(P) = \psi(Q)$ elde edilir. ψ bire-bir olduğundan $P = Q$ sağlanır.

$ii \Rightarrow iii$: Eğer $(P:_L 1_M) = (Q:_L 1_M) = p$ ise $V(P) = V(Q)$ sağlanır. Böylece $P = Q$ olur.

$iii \Rightarrow i$: $\psi(P) = \psi(Q)$ olsun. Öyleyse $\overline{(P:_L 1_M)} = \overline{(Q:_L 1_M)} = \bar{p}$ elde edilir ve böylece $(P:_L 1_M) = (Q:_L 1_M) = p$ olur. $p \in \sigma(L)$ için $|\sigma_p(M)| \leq 1$ olduğundan $P = Q$ elde edilir.

Teorem 5.2.7 M bir L –modül ve $\psi: \sigma(M) \rightarrow \sigma(L/Ann(1_M))$ bir doğal fonksiyon olsun. ψ örten ise ψ hem kapalı hem de açık fonksiyondur.

İspat Önerme 5.2.5 de $Ann(1_M) \leq a$ olacak şekildeki her $a \in L$ için $\psi^{-1}(V^{\bar{L}}(\bar{a})) = V(a1_M)$ olduğu ve $\psi: \sigma(M) \rightarrow \sigma(L/Ann(1_M))$ doğal fonksiyonunun sürekli olduğu elde edilmişti. Böylece Önerme 5.2.3 den $N \leq 1_M$ için $\psi^{-1}(V^{\bar{L}}(\overline{(N:_L 1_M)})) = V((N:_L 1_M)1_M) = V(N)$ dir. ψ örten olduğundan $\psi(V(N)) = V^{\bar{L}}(\overline{(N:_L 1_M)})$ sağlanır. Benzer şekilde $\psi(\sigma(M) - V(N)) = \psi(\psi^{-1}(\sigma(L/Ann(1_M)) - \psi^{-1}(V^{\bar{L}}(\overline{(N:_L 1_M)})))) = \sigma(L/Ann(1_M)) - V^{\bar{L}}(\overline{(N:_L 1_M)})$ elde edilir.

Bir $a \in L$ için $D_a = \sigma(L) - V(a)$ kümesinin $\sigma(L)$ de açık olduğu bilinmektedir. Ayrıca L bir C –latis ise $\{D_a | a \in L_*\}$ kümesinin $\sigma(L)$ için bir taban olduğu incelenmiştir.

Şimdi, bir $a \in L$ için $X_a = \sigma(M) - V(a1_M)$ kümesi tanımlansın. X_a kümesinin $\sigma(M)$ de bir açık küme olduğu aşikardır.

Önerme 5.2.8 M bir L –modül ve $\psi: \sigma(M) \rightarrow \sigma(L/Ann(1_M))$ bir doğal fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. $\psi^{-1}(D_{\bar{a}}) = X_a.$
- ii. $\psi(X_a) \subseteq D_{\bar{a}}.$
- iii. ψ örten ise $\psi(X_a) = D_{\bar{a}}.$
- iv. $a, b \in L$ için $X_{ab} = X_a \cap X_b.$

İspat i. Önerme 5.2.5 aracılığıyla $\psi^{-1}(D_{\bar{a}}) = \psi^{-1}(\sigma(L/Ann(1_M)) - \psi^{-1}(V^{\bar{L}}(\bar{a}))) = \sigma(M) - V(a1_M) = X_a$ elde edilir.

ii. $\psi(X_a) = \psi(\psi^{-1}(D_{\bar{a}})) \subseteq D_{\bar{a}}.$

iii. ii şıkından aşikardır.

iv. Önerme 5.1.3 den $a, b \in L$ için $X_{ab} = \psi^{-1}(D_{\overline{ab}}) = \psi^{-1}(D_{\bar{a}} \cap D_{\bar{b}}) = \psi^{-1}(D_{\bar{a}}) \cap \psi^{-1}(D_{\bar{b}}) = X_a \cap X_b$ sağlanır.

Teorem 5.2.9 L bir C –latis ve M bir L –modül olsun. $\{X_a | a \in L_*\}$ kümesi $\sigma(M)$ üzerindeki Zariski topolojisi için bir taban oluşturur.

İspat $G, \sigma(M)$ nin bir açık kümesi olsun. Böylece $G = \sigma(M) - V(a1_M)$ olacak şekilde bir $a \in L$ vardır. $G = \sigma(M) - V(a1_M) = \sigma(M) - V\left(\left(\bigvee_{a_i \in L_*} a_i\right)1_M\right) = \sigma(M) - V\left(\bigvee_{a_i \in L_*} a_i 1_M\right) = \sigma(M) - \bigcap_{a_i \in L_*} V(a_i 1_M) = \bigcup_{a_i \in L_*} (\sigma(M) - V(a_i 1_M)) = \bigcup_{a_i \in L_*} X_{a_i}$ sağlanır. Böylece $\{X_a | a \in L_*\}$ kümesi $\sigma(M)$ üzerindeki Zariski topolojisi için bir taban oluşturur.

Teorem 5.2.10 L bir C –latis ve M bir L –modül olsun. $\sigma(M)$ nin doğal fonksiyonu örten ise $\sigma(M)$ kompakt uzaydır.

İspat $\{X_a | a \in L_*\}$ kümesi $\sigma(M)$ üzerindeki Zariski topolojisi için bir taban olduğundan $\sigma(M) = \bigcup_{i \in \Delta} X_{a_i}$ olacak şekilde bir açık örtülüğü vardır. Böylece $\sigma(L/Ann(1_M)) = \psi(\sigma(M)) = \psi\left(\bigcup_{i \in \Delta} X_{a_i}\right) = \bigcup_{i \in \Delta} \psi(X_{a_i}) = \bigcup_{i \in \Delta} D_{\bar{a}_i}$ sağlanır. Önerme 5.1.4 den

$\sigma(L/Ann(1_M))$ kompakt olduğundan $\sigma(L/Ann(1_M)) = \bigcup_{\substack{a_i \in L_* \\ i \in \Delta^*}} D_{\overline{a_i}}$ olacak şekilde Δ nin sonlu bir alt kümesi Δ^* vardır. Önerme 5.2.8 den $\sigma(M) = \bigcup_{\substack{a_i \in L_* \\ i \in \Delta^*}} X_{a_i}$ elde edilir.

$S, \sigma(M)$ nin bir alt kümesi olsun. S deki bütün elemanların infimumunu $\xi(S)$ ile S nin kapanışını $cl(S)$ ile gösterilecektir.

Önerme 5.2.11 M bir L –modül ve $S \subseteq \sigma(M)$ olsun. Öyleyse $V(\xi(S)) = cl(S)$ dir. Buna göre S nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $V(\xi(S)) = S$ olmasıdır.

İspat $P \in S$ olsun. Buradan $\xi(S) \leq P$ dir ve $(\xi(S):_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $P \in V(\xi(S))$ dir. $S \subseteq V(\xi(S))$ sağlanır. Böylece $cl(S) \subseteq V(\xi(S))$ elde edilir. Şimdi S yi kapsayan en küçük kapalı kümenin $V(\xi(S))$ olduğunu gösterelim. $V(N)$, S yi kapsayan $\sigma(M)$ nin bir kapalı alt kümesi olsun. O halde her $P \in S$ için $(N:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır ve $(N:_L 1_M) \leq (\xi(S):_L 1_M)$ elde edilir. Böylece her $Q \in V(\xi(S))$ için $(N:_L 1_M) \leq (\xi(S):_L 1_M) \leq (Q:_L 1_M)$ elde edilir. Buradan $V(\xi(S)) \subseteq V(N)$ olur. O halde $V(\xi(S))$, S yi kapsayan en küçük kapalı kümedir. $V(\xi(S)) = cl(S)$ sağlanır.

Önerme 5.2.12 M bir L –modül ve $P \in \sigma(M)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. $cl(\{P\}) = V(P)$.
- ii. Bir $Q \in \sigma(M)$ için $Q \in cl(\{P\})$ olması için gerek ve yeter koşul $(P:_L 1_M) \leq (Q:_L 1_M)$ olması için gerek ve yeter koşul $V(Q) \subseteq V(P)$ olmasıdır.
- iii. M bir çarpımsal L –modül olsun. Böylece $\{P\}, \sigma(M)$ nin bir kapalı kümesi olması için gerek ve yeter koşul $P \in \sigma(M)$ maksimal eleman olmasıdır.

İspat i. $cl(\{P\}) = V(\xi(\{P\})) = V(P)$.

ii. Aşıkardır.

iii. $\{P\}$ kümesinin $\sigma(M)$ nin bir kapalı kümesi olduğunu varsayalım. (i) den $V(P) = \{P\}$ dir. Herhangi bir $J \geq P$ şeklindeki asal eleman J için $V(P) = \{P\}$ nin elemanı olacağından P maksimal elemandır. Tersine için $Q \in cl(\{P\})$ olsun. O halde (ii) den $(P:_L 1_M) \leq (Q:_L 1_M)$ dir. M bir çarpımsal L –modül olduğundan $P = (P:_L 1_M)1_M \leq (Q:_L 1_M)1_M = Q$ sağlanır. Böylece $P = Q$ ve $cl(\{P\}) = \{P\}$ sağlanır.

Not: Bir topolojik uzayın her tek nokta kümesi indirgenemez olduğundan tek nokta kümesinin kapanışı indirgenemezdir [26].

Sonuç 5.2.13 $P \in \sigma(M)$ olsun. Böylece $V(P)$, $\sigma(M)$ nin indirgenemez kapalı bir alt kümesidir.

İspat Önerme 5.2.12 ve yukarıdaki nottan aşıkardır.

Önerme 5.2.14 M bir L –modül ve $S \subseteq \sigma(M)$ olsun. Eğer $\xi(S)$, M nin bir asal elemanı ise S indirgenemez bir kümedir. Tersine, S indirgenemez bir küme ise $\zeta = \{(P:_L 1_M) | P \in S\}$, $\sigma(L)$ nin indirgenemez alt kümesidir ve $\xi^*(\zeta) = (\xi(S):_L 1_M)$, L de asal elemandır.

İspat $\xi(S) = Q$, M nin asal elemanı olduğunu varsayalım. Sonuç 5.2.13 den $V(Q) = V(\xi(S)) = cl(S)$ indirgenemezdir. Öyleyse S indirgenemezdir. Tersini için S indirgenemez olduğunu kabul edelim. $\sigma(M)$ nin doğal fonksiyonu ψ sürekli olduğundan S nin ψ fonksiyonu altındaki görüntüsü $\psi(S) = S^*$, $\sigma(\bar{L})$ nin bir indirgenemez alt kümesidir. Önerme 5.1.5 in (iii) şikkından $\xi^*(\zeta) = (\xi(S):_L 1_M)$, L nin asal elemanıdır. ζ ise $\sigma(L)$ nin indirgenemez alt kümesidir.

Teorem 5.2.15 M bir L –modül, $S \subseteq \sigma(M)$ ve $\psi: \sigma(M) \rightarrow \sigma(L/Ann(1_M))$ doğal fonksiyonu örten olsun. S nin indirgenemez kapalı bir alt küme olması için gerek ve yeter koşul bir $P \in \sigma(M)$ için $S = V(P)$ olmasıdır.

İspat Eğer bir $P \in \sigma(M)$ için $S = V(P)$ ise Sonuç 5.2.13 den S indirgenemez kapalı bir alt kümedir. Tersine, S indirgenemez kapalı bir alt küme olsun. Öyleyse Önerme 5.2.14 den bir $N \in M$ için $S = V(N)$ dir ve $(\xi(V(N)):_L 1_M) = (\xi(S):_L 1_M)$, L nin asal elemanıdır. ψ örten olduğundan $(\xi(V(N)):_L 1_M) = (P:_L 1_M)$ olacak şekilde bir $P \in \sigma(M)$ vardır. Önerme 5.2.3, (i) den $V(\xi(V(N))) = V(P)$ dir. Önerme 5.2.11 den $S = V(N)$ olduğundan $S = V(P)$ dir.

Teorem 5.2.16 M bir L –modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $\sigma(M)$ bir T_0 –uzaydır.
- ii. Doğal fonksiyon ψ bire-birdir.
- iii. $P, Q \in \sigma(M)$ için $V(P) = V(Q)$ ise $P = Q$ dur.
- iv. Her $p \in \sigma(L)$ için $|\sigma_p(M)| \leq 1$ dir.

İspat $i \Leftrightarrow iii$: Önerme 5.2.12, (i) şikkından ve Teorem 2.18 den aşıkardır.

$ii \Leftrightarrow iii \Leftrightarrow iv$: Önerme 5.2.6 dan aşıkardır.

Önerme 5.2.17 M bir çarpımsal L –modül olsun. Öyleyse $\sigma(M)$ bir T_1 –uzay olması için gerek ve yeter koşul $Max(M) = \{P \in \sigma(M) | P, M \text{ nin maksimal elemanı}\}$ olmak üzere $Max(M) = \sigma(M)$ olmasıdır.

İspat Önerme 5.2.12 den aşıkardır.

LATİS VE LATİS MODÜLLER ÜZERİNDE T_0 ve T_1 ARASINDAKİ BAZI AYIRMA AKSİYOMLARI

Tezin bu bölümünde asal spektrumları T_0 ve T_1 arasındaki bazı ayırma aksiyomlarını sağlayan latis ve latis modüller karakterize edilmiştir. Bu karakterizasyonların bazıları pm –latis, m –latis, ε –latistir. Benzer şekilde PM –latis modül, μ –latis modül ve ε –latis modüldür. Bu bölümde kaynak olarak *Spec(R) and Separation Axioms Between T_0 and T_1* [31] ve *Rings That Characterize Some Separation Notions* [30], *Primary Decomposition of Elements in Compactly Generated Integral Multiplicative Lattices* [29] makalelerinden faydalanılmıştır.

Tanım 6.1 L bir çarpımsal latis olsun.

- i. Bir $n \in L$ için $n \leq p$ ifadesini sağlayan L nin p asal elemanlarının ailesinin minimaline n nin minimal asal elemanı denir. 0_L nin minimal asal elemanına minimal asal eleman denir [29].
- ii. L , $p_0 < p_1 < \dots < p_k$ şeklindeki asal eleman zincirlerinin maksimal uzunluğu k pozitif tam sayısına L nin boyutu denir ve $\dim(L)$ ile gösterilir [29].

Önerme 6.2 L bir C –latis olsun. a , L latisinin bir has elemanı ise a nın en az bir minimal asal elemanı vardır.

İspat $\Omega = \{p \in \sigma(L) | a \leq p\}$ kümesi a elemanını kapsayan asal elemanların kümesi olsun. a yı kapsayan bir maksimal eleman, dolayısıyla asal bir eleman vardır. Böylece Ω boş kümeden farklıdır. $\geq$ ters kapsamanın verdiği sıralama bağıntısını kullanarak Ω kümesi üzerinde Zorn Lemma' yı uygulayalım. a yı kapsayan asal elemanların bir zinciri $\Delta = \{p_i \in \Omega | i \in I\}$ olsun. $p = \bigwedge_{i \in I} p_i$ elemanının a elemanını kapsayan bir asal eleman

olduğunu görelim. p elemanının a yı kapsadığı açıktır. Şimdi $x, y \in L$ için $xy \leq p$ ve $x \not\leq p$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse bir $k \in I$ için $x \not\leq p_k$ dir. Zincirdeki bir p_j asal elemanı için $p_j \leq p_k$ veya $p_k \leq p_j$ sağlanır. Eğer $p_j \leq p_k$ ise $xy \leq p_j$ iken $x \leq p_j$ veya $y \leq p_j$ dir. Eğer $p_j \leq p_k$ ise $x \not\leq p_k$ olduğundan $x \not\leq p_j$ dir. p_j asal eleman ve $xy \leq p_j$, $x \not\leq p_j$ olduğundan $y \leq p_j$ dir. Böylece $y \leq p$ elde edilir. Şu halde p , zincirin Ω kümesindeki bir üst sınırıdır ve Zorn Lemma' ya göre bir minimal elemanı vardır.

Tanım 6.3 1_M kompakt eleman olsun.

- i. Bir $N \in M$ için $N \leq P$ ifadesini sağlayan P asal elemanlarının ailesinin minimaline N nin minimal asal elemanı denir. 0_M nin minimal asal elemanına minimal asal eleman denir [33].
- ii. $M, P_0 < P_1 < \dots < P_k$ şeklindeki asal eleman zincirlerinin maksimal uzunluğu k pozitif tam sayısına M nin boyutu denir ve $\dim(M)$ ile gösterilir [33].

Önerme 6.4 M bir L – modül olsun. N, M latis modülünün bir has elemanı ve P, N yi kapsayan bir asal eleman ise N nin P de kapsanan bir minimal asal elemanı vardır.

İspat $\Omega = \{P \in \sigma(M) | N \leq P\}$ kümesi N elemanını kapsayan ve P de kapsanan bütün asal elemanların kümesi olsun. O halde $P \in \Omega$ dır ve böylece Ω boş kümeden farklıdır. $\geq$ ters kapsamanın verdiği sıralama bağıntısını kullanarak Ω kümesi üzerinde Zorn Lemma' yı uygulayalım. N yi kapsayan ve P de kapsanan asal elemanların bir zinciri $\Delta = \{P_i \in \Omega | i \in I\}$ olsun. $P' = \bigwedge_{i \in I} P_i$ elemanının N elemanını kapsayan bir asal eleman olduğunu görelim. P' elemanının N yi kapsadığı açıktır. Şimdi $a \in L$ ve $K \in M$ için $aK \leq P'$ ve $a \not\leq (P' :_L 1_M) = (\bigwedge_{i \in I} P_i :_L 1_M) = \bigwedge_{i \in I} (P_i :_L 1_M)$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse bir $k \in I$ için $a \not\leq (P_k :_L 1_M)$ dir. Zincirdeki bir P_j asal elemanı için $P_j \leq P_k$ veya $P_k \leq P_j$ sağlanır. Eğer $P_k \leq P_j$ ise $aK \leq P_j$ iken $a \leq (P_j :_L 1_M)$ veya $K \leq P_j$ dir. Eğer $P_j \leq P_k$ ise $a \not\leq (P_k :_L 1_M)$ olduğundan $a \not\leq (P_j :_L 1_M)$ dir. P_j asal eleman olduğundan ve $aK \leq P_j$, $a \not\leq (P_j :_L 1_M)$ olduğundan $K \leq P_j$ dir. Böylece $K \leq P'$ elde edilir. Şu halde P' zincirin Ω kümesindeki bir üst sınırıdır ve Zorn Lemma' ya göre bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal eleman Q olsun. $Q \in \Omega$ olduğu için $N \leq Q \leq P$ olacak şekilde bir Q' asal elemanı varsa, $Q' \in \Omega$ ve $Q \leq Q'$ olur. $Q \in \Omega$ maksimal olduğundan $Q = Q'$ olur. Böylece Q, N nin minima asal elemanıdır.

Sonuç 6.5. Bir L –modül M nin her asal elemanı bir minimal asal elemanı içerir.

$\sigma(L)$ üzerindeki Zariski topolojisi ile $cl(\{p\}) = V(p)$ olduğundan p nin kabuğunun $\widetilde{\{p\}} = \widehat{\{p\}} - \{p\} = \{q \in \sigma(L) | p \in V(q) \text{ ve } p \neq q\}$ kümesi olduğu açıktır. Ayrıca $V(p) = \{p\}' \cup \{p\}$ ve $p \notin \{p\}'$ olduğundan $\{p\}' = V(p) - \{p\} = \{q \in \sigma(L) | p < q\}$ sağlanır.

Bu topolojide $\{p\}$ tek nokta kümesinin kapalı bir küme olması için gerek ve yeter koşul p elemanının L de maksimal eleman olmasıdır.

Şimdi $\sigma(M)$ üzerindeki Zariski topolojisi için benzer durumları inceleyelim.

Bölüm 5.2 deki tanımlar ile bir $P \in \sigma(M)$ için $cl(\{P\}) = V(P) = \{Q \in \sigma(M) | (P;_L 1_M) \leq (Q;_L 1_M)\}$ olduğundan P elemanının kabuğu $\widetilde{\{P\}} = \widehat{\{P\}} - \{P\} = \{Q \in \sigma(M) | P \in V(Q) \text{ ve } P \neq Q\}$ kümesidir. Bir $P \in \sigma(M)$ nin türev kümesi ise $\{P\}' = V(P) - \{P\} = \{Q \in \sigma(M) | (P;_L 1_M) \leq (Q;_L 1_M) \text{ ve } P \neq Q\}$ kümesidir. Bu topolojik uzayda $\{P\}$ kapalı bir küme ise P, M de maksimal elemanıdır. Tersine ise M latis modülü çarpımsal latis modül kabul edildiğinde doğrudur.

Bu bölüm boyunca 1_L ve 1_M elemanları kompakt elemanlar olarak kabul edilecektir.

Öncelikle üzerinde çalışılacak T_0 ve T_1 arasındaki bazı ayırma aksiyomlarını tanımlayalım:

6.1 Latis Üzerinde T_0 ve T_1 Arasındaki Bazı Ayırma Aksiyomları

Tanım 6.1.1 Bir L latisinin her asal elemanı tek bir maksimal eleman tarafından kapsanırsa L ye pm –latis denir.

Önerme 6.1.2 $\sigma(L)$ nin bir $T(\beta)$ –uzay olması için gerek ve yeter koşul L nin pm –latis olması ve $\dim(L) \leq 1$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sigma(L)$ bir $T(\beta)$ –uzay olsun. L nin pm –latis olmadığını varsayalım. Öyleyse iki farklı maksimal eleman k ve t tarafından kapsanan bir p asal elemanı vardır, yani $p < k$ ve $p < t$ dir. Bu durumda $k, t \in V(p)$ dir. $p \neq k$ ve $p \neq t$ olduğundan $k, t \in \{p\}'$ elde edilir. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir $T(\beta)$ –uzay olması ile çelişir. $\dim(L) \geq 2$ olduğunu varsayalım. O halde $p < q < k$ olacak şekilde L nin p, q, k asal elemanları vardır. Öyleyse $q, k \in \{p\}'$ olur. Bu ise $\sigma(L)$ nin $T(\beta)$ –uzay olması ile çelişir.

($\Leftarrow$): L bir pm –latis ve $\dim(L) \leq 1$ olsun. $\sigma(L)$ nin bir $T(\beta)$ –uzay olmadığını varsayalım. O halde bir p asal elemanı için $\{p\}' \neq \emptyset$ ve $\{p\}'$ tek nokta kümesi değildir. Bu durumda $q, k \in \{p\}'$ olacak şekilde iki farklı q, k asal elemanları vardır. Öyleyse $p < q$ ve

$p < k$ sağlanır. $\dim(L) \leq 1$ olduğundan q ve k asalları maksimal elemanlardır. Bu ise L nin bir pm –latis olması ile çelişir.

Tanım 6.1.3 Bir L latisinin her asal elemanı tek bir minimal asal elemanı kapsıyorsa L ye m –latis denir.

Önerme 6.1.4 L bir C –latis olsun. Buradan $\sigma(L)$ nin bir $T(\beta')$ –uzay olması için gerek ve yeter koşul L nin m –latis olması ve $\dim(L) \leq 1$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sigma(L)$ bir $T(\beta')$ –uzay olsun. L nin bir m –latis olmadığını kabul edelim. Öyleyse iki farklı minimal asal eleman u ve v yi içeren bir p asal elemanı vardır, yani, $u < p$ ve $v < p$ dir. Böylece $p \in V(u)$ ve $p \in V(v)$. $p \neq u$ ve $p \neq v$ olduğundan $u, v \in \widetilde{\{p\}} = \widetilde{\{p\}} \setminus \{p\}$ elde edilir. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir $T(\beta')$ –uzay olması ile çelişir. Öyleyse L bir m –latis olmalıdır. Şimdi $\dim(L) \geq 2$ olduğunu kabul edelim. O halde $p < q < k$ olacak şekilde $p, q, k \in \sigma(L)$ vardır. Böylece $k \in V(p)$ ve $k \in V(q)$ sağlanır. Sonuç olarak $p, q \in \widetilde{\{k\}}$ elde edilir. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir $T(\beta')$ –uzay olması ile çelişir. O halde $\dim(L) \leq 1$ olmalıdır.

($\Leftarrow$): L bir m –latis ve $\dim(L) \leq 1$ olsun. $\sigma(L)$ nin bir $T(\beta')$ –uzay olmadığını kabul edelim. O halde bir $p \in \sigma(L)$ için $\widetilde{\{p\}} \neq \emptyset$ ve tek nokta kümesi değildir. O halde $k, t \in \widetilde{\{p\}}$ olacak şekilde L nin k, t asal elemanları vardır. Bu durumda $k < p$ ve $t < p$ sağlanır. $\dim(L) \leq 1$ olduğundan k ve t minimal asal elemanlardır. Bu ise L nin bir m –latis olması ile çelişir.

Tanım 6.1.5 $m, n; L$ nin maksimal elemanları ve $k, t; L$ nin minimal asal elemanları olsun. $\rho_{\subset}(m, n) = \{p \in \sigma(L) | p < m \wedge n\}$ ve $\rho_{\sup}(k, t) = \{p \in \sigma(L) | k < p \text{ ve } t < p\}$ kümeleri şeklinde tanımlanır.

Tanım 6.1.6 L nin farklı maksimal elemanları m, n ve farklı minimal asal elemanları k, t için $\rho_{\subset}(m, n)$ ve $\rho_{\sup}(k, t)$ kümeleri boş küme veya tek nokta kümesi ise L ye ε –latis denir.

Önerme 6.1.7 L bir C –latis olsun. $\sigma(L)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olması için gerek ve yeter koşul L nin ε –latis olması ve $\dim(L) \leq 2$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sigma(L)$ bir $T(\varepsilon)$ –uzay olsun. L nin ε –latis olmadığını kabul edelim. Öyleyse L nin herhangi farklı maksimal elemanları m, n ve herhangi farklı minimal asal elemanları

k, t için $\rho_{\subset}(m, n)$ veya $\rho_{\sup}(k, t)$ kümesi boş küme ve tek nokta kümesi değildir. Şimdi $\rho_{\subset}(m, n)$ nin ne boş küme ne de tek nokta kümesi olduğunu varsayalım. O halde $p, q \in \rho_{\subset}(m, n)$ olacak şekilde L nin iki farklı asal elemanı vardır. Böylece $p < m \wedge n$ ve $q < m \wedge n$ sağlanır. Buradan $p < m, p < n$ ve $q < m, q < n$ elde edilir. Böylece $m, n \in \{p\}'$ ve $m, n \in \{q\}'$ olur. Sonuç olarak $m, n \in \{p\}' \cap \{q\}'$ elde edilir. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olması ile çelişir. $\rho_{\sup}(k, t)$ nin ne boş küme ne de tek nokta kümesi olduğunu varsayalım. O halde $u, v \in \rho_{\sup}(k, t)$ olacak şekilde L nin iki farklı u ve v asal elemanı vardır. Öyleyse $k < u, t < u$ ve $k < v, t < v$ dir. Böylece $u, v \in \{k\}' \cap \{t\}'$ sağlanır. Bu bir çelişkidir. O halde L nin ε –latis olması gerekir. $\dim(L) \geq 3$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p < q < k < t$ olacak şekilde p, q, k, t asal elemanları vardır. Böylece $k, t \in \{p\}' \cap \{q\}'$ sağlanır. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olması ile çelişir.

($\Leftarrow$): L bir ε –latis ve $\dim(L) \leq 2$ olsun. $\sigma(L)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olmadığını varsayalım. O halde herhangi farklı p ve q asal elemanları için $\{p\}' \cap \{q\}' \neq \emptyset$ ve tek nokta kümesi değildir. Öyleyse $k, t \in \{p\}' \cap \{q\}'$ olacak şekilde farklı k ve t asal elemanları vardır. Buradan $p < k, p < t$ ve $q < k, q < t$ sağlanır. Eğer p ve q minimal asal elemanlar ise $k, t \in \rho_{\sup}(p, q)$ olur. Bu ise L bir ε –latis olması ile çelişir. Eğer p ve q minimal asal elemanlar değil ise $u < p$ ve $v < q$ olacak şekilde minimal asal elemanlar vardır. Buradan $u < p < k, u < p < t$ ve $v < q < k, v < q < t$ elde edilir. $\dim(L) \leq 2$ olduğundan k ve t elemanları maksimal elemanlardır. $p < k \wedge t$ ve $q < k \wedge t$ olduğu açıktır. Eğer $p = k \wedge t$ veya $q = k \wedge t$ ise $k \leq p$ veya $t \leq p$ veya $k \leq q$ veya $t \leq q$ elde edilir. Bu ise k ve t nin maksimal olması ile çelişir. O halde $p < k \wedge t$ ve $q < k \wedge t$ elde edilir. Böylece $p, q \in \rho_{\subset}(k, t)$ sağlanır. Bu L nin bir ε –latis olması ile çelişir.

Tanım 6.1.8 p, L nin maksimal olmayan asal elemanı olsun. $\{p\}'$ kümesinin her eleman çifti a, b için $a \vee b = 1_L$ sağlanıyorsa L ye u –latis denir.

Önerme 6.1.9 L, u –latis ve $\dim(L)$ sonlu olsun. Böylece $\sigma(L)$ bir T_{UD} –uzaydır.

İspat $p \in \sigma(L)$ ve $\beta, \{p\}'$ kümesinin minimal asal elemanlarının kümesi olsun. $x \in \{p\}'$ olsun. Öyleyse $p < x$ dir. Bu durumda $p < q \leq x$ olacak şekilde bir $q \in \beta$ vardır. Öyleyse $x \in V(q)$ elde edilir. Böylece $x \in \bigcup_{q \in \beta} V(q)$ sağlanır. Tersini için $y \in \bigcup_{q \in \beta} V(q)$ olsun. O halde bir $q \in \beta$ için $y \in V(q)$ elde edilir. Burada $q \leq y$ sağlanır. $p < q$ olduğundan $p < y$ dir. Böylece $y \in \{p\}'$ sağlanır. Sonuç olarak, $\{p\}' = \bigcup_{q \in \beta} V(q)$ elde edilir. Şimdi her $q_1, q_2 \in \beta$ için $V(q_1) \cap V(q_2) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $V(q_1) \cap V(q_2) \neq \emptyset$ olduğunu

kabul edelim. O halde bir $t \in V(q_1) \cap V(q_2)$ vardır. O halde $q_1 \leq t$ ve $q_2 \leq t$ sağlanır. Böylece $q_1 \vee q_2 \leq t$ elde edilir. Bu durumda $t = 1_L$ elde edilir. Bu ise $t < 1_L$ olması ile çelişir.

Tanım 6.1.10 Bir L latisinin her asal fakat maksimal olmayan elemanı onu has olarak kapsayan asal elemanların infimumlarından farklı ise latise d –latis denir.

Önerme 6.1.11 $\sigma(L)$ nin bir T_D –latis olması için gerek ve yeter koşul L nin bir d –latis olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sigma(L)$ bir T_D –uzay olsun. L nin bir d –latis olmadığını kabul edelim. O halde onu has olarak kapsayan asal elemanların infimumuna eşit olacak şekilde bir maksimal olmayan asal p elemanı vardır, yani $p = \bigwedge_{p < q} q$ sağlanır. $\sigma(L)$ bir T_D –uzay olduğundan $\{p\}' = V(a)$ olacak şekilde bir $a \in L$ vardır. O halde her $q \in \{p\}'$ için $a \leq q$ sağlandığından $a \leq \bigwedge_{q \in \{p\}'} q = p$ elde edilir. Böylece $p \in V(a)$ olur (Çelişki).

($\Leftarrow$): L bir d –latis olsun. $p \in \sigma(L)$ olsun. Eğer p maksimal eleman ise ispat açıktır. p elemanının maksimal olmadığını kabul edelim. L bir d –latis olduğundan $p \neq \bigwedge_{p < q} q$ sağlanır. Fakat $p < \bigwedge_{p < q} q$ olduğundan $V(\bigwedge_{p < q} q) \subseteq V(p)$ sağlanır. $p \notin V(\bigwedge_{p < q} q)$ olduğundan $V(\bigwedge_{p < q} q) \subseteq \{p\}'$ elde edilir. Şimdi, $k \in \{p\}'$ olsun. Öyleyse $p < k$ dir ve buradan $\bigwedge_{p < q} q \leq k$ dir. Böylece $k \in V(\bigwedge_{p < q} q)$ elde edilir.

Tanım 6.1.12 Bir L latisinin herhangi farklı iki minimal asal elemanı en çok bir maksimal eleman tarafından kapsanıyorsa L ye y –latis denir.

Önerme 6.1.13 L bir C –latis olsun. $\sigma(L)$ nin bir T_Y –uzay olması için gerek ve yeter koşul L nin bir y –latis olması ve $\dim(L) \leq 1$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sigma(L)$ bir T_Y –uzay olsun. L nin bir y –latis olmadığını varsayalım. Öyleyse iki farklı minimal asal eleman p ve q yu kapsayan iki farklı maksimal eleman m ve n vardır. Yani $p < m, p < n$ ve $q < m, q < n$ dir. Bu durumda $m, n \in V(p) = cl(\{p\})$ ve $m, n \in V(q) = cl(\{q\})$ sağlanır. Böylece $m, n \in cl(\{p\}) \cap cl(\{q\})$ elde edilir. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir T_Y –uzay olması ile çelişir. Şimdi $\dim(L) \geq 2$ olduğunu varsayalım. O halde $p < q < k$ olacak şekilde $p, q, k \in \sigma(L)$ vardır. Öyleyse $q, k \in V(p) \cap V(q)$, yani $q, k \in cl(\{p\}) \cap cl(\{q\})$ sağlanır. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir T_Y –uzay olması ile çelişir.

($\Leftarrow$): L bir y –latis ve $\dim(L) \leq 1$ olsun. $\sigma(L)$ nin bir T_Y –uzay olmadığını varsayalım. O halde iki farklı asal eleman p ve q için $cl(\{p\}) \cap cl(\{q\}) \neq \emptyset$ ve tek nokta kümesi değildir. Öyleyse $k, t \in cl(\{p\}) \cap cl(\{q\})$ olacak şekilde iki farklı asal eleman k ve t vardır. Bu durumda $p \leq k, p \leq t$ ve $q \leq k, q \leq t$ dir. Ayrıca $p \neq k$ ve $p \neq t$ dir. Eğer $p = k$ veya $p = t$ olsaydı $q < p$ elde edilirdi. $\dim(L) \leq 1$ olduğundan p bir maksimal eleman olurdu. Bu durumda $V(p) = \{p\}$ ve buradan da $cl(\{p\}) \cap cl(\{q\}) = \{p\}$ olurdu. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Benzer şekilde $q \neq k$ ve $q \neq t$ sağlanır. Böylece $p < k, p < t$ ve $q < k, q < t$ elde edilir. $\dim(L) \leq 1$ olduğundan k ve t maksimal elemanlardır. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Böylece $\sigma(L)$ bir T_Y –uzay olmalıdır.

Önerme 6.1.14 L bir C –latis olsun. $\sigma(L)$ nin bir T_{YS} –uzay olması için gerek ve yeter koşul L nin bir m –latis olması ve $\dim(L) \leq 1$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sigma(L)$ bir T_{YS} –uzay olsun. L nin bir m –latis olmadığını varsayalım. O halde iki farklı minimal asal eleman u ve v yi içeren bir p asal elemanı vardır. Öyleyse $u < p$ ve $v < p$ dir. O halde $p \in V(u) = cl(\{u\})$ ve $p \in V(v) = cl(\{v\})$ dir. Böylece $p \in cl(\{u\}) \cap cl(\{v\})$ dir. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir T_{YS} –uzay olması ile çelişir. Şimdi $\dim(L) \geq 2$ olduğunu varsayalım. O halde $p < q < k$ olacak şekilde $p, q, k \in \sigma(L)$ vardır. Öyleyse $k \in V(p) \cap V(q)$, yani $k \in cl(\{p\}) \cap cl(\{q\})$ sağlanır. Bu ise $\sigma(L)$ nin bir T_{YS} –uzay olması ile çelişir.

($\Leftarrow$): L bir m –latis ve $\dim(L) \leq 1$ olsun. $p, q; L$ nin iki farklı asal elemanı olsun. $cl(\{p\}) \cap cl(\{q\}) \neq \emptyset$ ve $cl(\{p\}) \cap cl(\{q\}) \neq \{p\}$ olsun. O halde bir $k \in cl(\{p\}) \cap cl(\{q\})$ vardır. Öyleyse $k \neq p$ ve $p < k, q \leq k$ sağlanır. $\dim(L) \leq 1$ olduğundan p minimal asal elemandır. L bir m –latis olduğundan $q = k$ elde edilir. Böylece $cl(\{p\}) \cap cl(\{q\}) = \{q\}$ sağlanır.

6.2 Latis Modüller Üzerinde T_0 ve T_1 Arasındaki Bazı Ayırma Aksiyomları

Tanım 6.2.1 Bir L –modül M nin her asal elemanı tek bir maksimal eleman tarafından kapsanırsa M ye PM –modül denir.

Önerme 6.2.2 M bir L –modül olsun. Eğer $\sigma(M)$ bir $T(\beta)$ –uzay ise aşağıdakiler sağlanır:

- i. M bir PM –modüldür.

ii. $\dim(M) \leq 1$ dir.

İspat $\sigma(M)$ bir $T(\beta)$ –uzay olsun.

- i.* M nin bir PM –modül olmadığını varsayalım. Öyleyse iki farklı maksimal eleman N ve K tarafından kapsanan bir P asal elemanı vardır, yani $P < N$ ve $P < K$ dir. $(P:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M)$ ve $(P:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ olduğundan $N, K \in \{P\}'$ elde edilir. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir $T(\beta)$ –uzay olması ile çelişir.
- ii.* $\dim(M) \geq 2$ olduğunu varsayalım. O halde $P < N < K$ olacak şekilde M nin P, N, K asal elemanları vardır. Öyleyse $(P:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ dir. Böylece $N, K \in \{P\}'$ olur (Çelişki).

Tanım 6.2.3 Bir L –modül M nin her asal elemanı tek bir minimal asal elemanı kapsıyorsa M ye μ –modül denir.

Önerme 6.2.4 M bir L –modül olsun. Eğer $\sigma(M)$ bir $T(\beta')$ –uzay ise aşağıdakiler sağlanır:

- i.* M bir μ –modüldür.
- ii.* $\dim(M) \leq 1$ dir.

İspat $\sigma(M)$ bir $T(\beta)$ –uzay olsun.

i. M bir μ –modül olmadığını varsayalım. Öyleyse iki farklı minimal asal eleman K ve T yi kapsayan bir P asal elemanı vardır, yani $K < P$ ve $T < P$ dir. Öyleyse $(K:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ ve $(T:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $P \in V(K)$ ve $P \in V(T)$. Buradan $K, T \in \{\widetilde{P}\} = \{\widetilde{P}\} \setminus \{P\}$ elde edilir. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir $T(\beta')$ –uzay olması ile çelişir. Öyleyse M bir μ –latis olmalıdır.

ii. $\dim(M) \geq 2$ olduğunu kabul edelim. O halde $P < N < K$ olacak şekilde $P, N, K \in \sigma(M)$ vardır. Öyleyse $(P:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ dir. Böylece $K \in V(N)$ ve $K \in V(P)$ dir. Sonuç olarak $P, N \in \{\widetilde{K}\}$ elde edilir. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir $T(\beta')$ –uzay olması ile çelişir. O halde $\dim(M) \leq 1$ olmalıdır.

Tanım 6.2.5 M bir L –modül olsun. N, K ; M nin maksimal elemanları ve U, V ; M nin minimal asal elemanları olsun.

$$\rho(N, K) = \{P \in \sigma(M) | (P:_L 1_M) \leq ((N \wedge K):_L 1_M) \text{ ve } P \neq N \wedge K\} \text{ ve}$$

$$\delta(U, V) = \{P \in \sigma(M) | P \in \{U\}' \text{ ve } P \in \{V\}'\} \text{ kümeleri şeklinde tanımlanır.}$$

Tanım 6.2.6 M nin farklı maksimal elemanları N, K ve farklı minimal asal elemanları U, V için $\rho(N, K)$ ve $\delta(U, V)$ kümeleri boş küme veya tek nokta kümesi ise M ye ε –modül denir.

Önerme 6.2.7 M bir çarpımsal latis L –modül olsun. $\sigma(M)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olması için gerek ve yeter koşul M nin ε –modül olması ve $\dim(M) \leq 2$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\sigma(M)$ bir $T(\varepsilon)$ –uzay olsun. M nin ε –modül olmadığını kabul edelim. Öyleyse M nin herhangi farklı maksimal elemanları N, K ve herhangi farklı minimal asal elemanları U, V için $\rho(N, K)$ veya $\delta(U, V)$ kümesi boş küme ve tek nokta kümesi değildir. Şimdi $\rho(N, K)$ nin ne boş küme ne de tek nokta kümesi olduğunu varsayalım. O halde $P, Q \in \rho(N, K)$ olacak şekilde M nin iki farklı asal elemanı vardır. Böylece $(P :_L 1_M) \leq ((N \wedge K) :_L 1_M)$, $P \neq N \wedge K$ ve $(Q :_L 1_M) \leq ((N \wedge K) :_L 1_M)$, $Q \neq N \wedge K$ sağlanır. $(P :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M) \wedge (K :_L 1_M)$ ve $(Q :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M) \wedge (K :_L 1_M)$ sağlandığından $(P :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$, $(P :_L 1_M) \leq (K :_L 1_M)$ ve $(Q :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$, $(Q :_L 1_M) \leq (K :_L 1_M)$ elde edilir. M bir çarpımsal latis L –modül olduğundan $P < N$, $P < K$ ve $Q < N$, $Q < K$ elde edilir. Böylece $N, K \in \{P\}'$ ve $N, K \in \{Q\}'$ olur. Sonuç olarak $N, K \in \{P\}' \cap \{Q\}'$ elde edilir. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olması ile çelişir. Şimdi $\delta(U, V)$ nin ne boş küme ne de tek nokta kümesi olduğunu varsayalım. O halde $S, T \in \delta(U, V)$ olacak şekilde M nin iki farklı asal elemanı vardır. Öyleyse $S \in \{U\}'$, $T \in \{U\}'$ ve $S \in \{V\}'$, $T \in \{V\}'$ dür. Böylece $S, T \in \{U\}' \cap \{V\}'$ sağlanır. Bu bir çelişkidir. O halde M nin ε –modül olması gerekir. $\dim(M) \geq 3$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $P < Q < S < T$ olacak şekilde P, Q, S, T asal elemanları vardır. Öyleyse $(P :_L 1_M) \leq (Q :_L 1_M) \leq (S :_L 1_M) \leq (T :_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $S, T \in \{P\}' \cap \{Q\}'$ sağlanır. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olması ile çelişir.

($\Leftarrow$): M bir ε –modül ve $\dim(M) \leq 2$ olsun. $\sigma(M)$ nin bir $T(\varepsilon)$ –uzay olmadığını varsayalım. O halde bazı farklı P, Q asal elemanları için $\{P\}' \cap \{Q\}' \neq \emptyset$ ve tek nokta kümesi değildir. Öyleyse $N, K \in \{P\}' \cap \{Q\}'$ olacak şekilde farklı asal elemanları vardır. Böylece $(P :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$, $(P :_L 1_M) \leq (K :_L 1_M)$ ve $(Q :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$, $(Q :_L 1_M) \leq (K :_L 1_M)$ sağlanır. M bir çarpımsal latis L –modül olduğundan $P < N$, $P < K$ ve $Q < N$, $Q < K$ elde edilir. Eğer P, Q minimal asal elemanlar ise $N, K \in \delta(P, Q)$ olur. Bu ise M bir ε –modül olması ile çelişir. Eğer P, Q minimal asal elemanlar değil ise $U < P$ ve $V < Q$ olacak şekilde minimal asal elemanlar vardır. Buradan $U < P < N$, $U < P <$

K ve $V < Q < N, V < Q < K$ elde edilir. $\dim(M) \leq 2$ olduğundan N ve K elemanları maksimal elemanlardır. $P \leq N \wedge K$ ve $Q \leq N \wedge K$ olduğu açıktır. Eğer $P = N \wedge K$ ve $Q = N \wedge K$ ise $U < P < N \wedge K < K$ veya $V < Q < N \wedge K < K$ elde edilir. Bu ise $\dim(M) \leq 2$ olması ile çelişir. O halde $P < N \wedge K$ ve $Q < N \wedge K$ elde edilir. Böylece $P, Q \in \rho(N, K)$ sağlanır. Bu M nin bir ε –modül olması ile çelişir.

Tanım 6.2.8 Bir L –modül M nin her asal fakat maksimal olamayan elemanı onu has olarak kapsayan asal elemanların infimumlarından farklı ise M ye D –modül denir.

Önerme 6.2.9 M bir L –modül olsun. Eğer $\sigma(M)$ bir T_D –uzay ise M bir D –modüldür. Ters M nin çarpımsal L –modül olduğu durumda doğrudur.

İspat $\sigma(M)$ bir T_D –uzay olsun. M nin bir D –modül olmadığını kabul edelim. O halde onu has olarak kapsayan asal elemanların infimumuna eşit olacak şekilde bir maksimal olmayan asal P elemanı vardır, yani $P = \bigwedge_{P < Q} Q$ sağlanır. $\sigma(M)$ bir T_D –uzay olduğundan $\{P\}' = V(K)$ olacak şekilde bir $K \in M$ vardır. O halde her $Q \in \{P\}'$ için $(K :_L 1_M) \leq (Q :_L 1_M)$ sağlandığından $(K :_L 1_M) \leq \bigwedge_{Q \in \{P\}'} (Q :_L 1_M) = (\bigwedge_{Q \in \{P\}'} Q :_L 1_M) \leq (\bigwedge_{Q < P} Q :_L 1_M) = (P :_L 1_M)$ elde edilir. Böylece $P \in V(K)$ olur (Çelişki).

Tersi için M bir çarpımsal D –modül olsun. $P \in \sigma(M)$ olsun. Eğer P maksimal eleman ise ispat açıktır. P elemanının maksimal olmadığını kabul edelim. M bir D –modül olduğundan $P \neq \bigwedge_{P < Q} Q$ sağlanır. Fakat $P < \bigwedge_{P < Q} Q$ olduğundan $V(\bigwedge_{P < Q} Q) \subseteq V(P)$ sağlanır. $P \notin V(\bigwedge_{P < Q} Q)$ dur. Eğer $P \in V(\bigwedge_{P < Q} Q)$ olsaydı $(\bigwedge_{Q < P} Q :_L 1_M) \leq (P :_L 1_M)$ sağlanırdı ve M bir çarpımsal L –modül olduğundan $\bigwedge_{P < Q} Q \leq P$ olurdu (Çelişki). Böylece $V(\bigwedge_{P < Q} Q) \subseteq \{P\}'$ elde edilir. Şimdi, $K \in \{P\}'$ olsun. Öyleyse $(P :_L 1_M) \leq (K :_L 1_M)$ dir ve M bir çarpımsal L –modül olduğundan $P < K$ sağlanır. Böylece $\bigwedge_{P < Q} Q \leq K$ dir ve buradan $(\bigwedge_{Q < P} Q :_L 1_M) \leq (K :_L 1_M)$ dir. Böylece $K \in V(\bigwedge_{P < Q} Q)$ elde edilir.

Önerme 6.2.10 M bir L –modül olsun. Eğer $\sigma(M)$ bir T_{DD} –uzay ise aşağıdakiler sağlanır:

- i. M bir μ –modüldür.
- ii. $\dim(M) \leq 1$ dir.

İspat $\sigma(M)$ bir T_{DD} –uzay olsun.

i. M nin bir μ –modül olmadığını kabul edelim. Öyleyse iki farklı minimal asal eleman U ve T yi içeren bir P asal elemanı vardır, yani $U < P$ ve $T < P$ dir. Öyleyse $(U:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ ve $(T:_L 1_M) \leq (P:_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $P \in \{U\}' \cap \{T\}'$ elde edilir. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir T_{DD} –uzay olması ile çelişir.

ii. $\dim(M) \geq 2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $P < Q < K$ olacak şekilde P, Q, K asal elemanları vardır. Öyleyse $(P:_L 1_M) \leq (Q:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ sağlanır. Böylece $K \in \{P\}' \cap \{Q\}'$ sağlanır. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir T_{DD} –uzay olması ile çelişir.

Tanım 6.2.11 Bir L –modül M nin herhangi farklı iki minimal asal elemanı en çok bir maksimal eleman tarafından kapsanıyorsa M ye Y –modül denir.

Önerme 6.2.12 M bir L –modül olsun. Eğer $\sigma(M)$ bir T_Y –uzay ise M bir Y –modüldür ve $\dim(M) \leq 1$ dir. Tersi M nin çarpımsal L –modül olduğu durumda doğrudur.

İspat $\sigma(M)$ bir T_Y –uzay olsun. M nin bir Y –modül olmadığını varsayalım. Öyleyse iki farklı minimal asal eleman P ve Q yu kapsayan iki farklı maksimal eleman N ve K vardır. Yani $P < N, P < K$ ve $Q < N, Q < K$ dir. Öyleyse $(P:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M), (P:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ ve $(Q:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M), (Q:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ sağlanır. Bu durumda $N, K \in V(P) = cl(\{P\})$ ve $N, K \in V(Q) = cl(\{Q\})$ sağlanır. Böylece $N, K \in cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\})$ elde edilir. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir T_Y –uzay olması ile çelişir. Şimdi $\dim(M) \geq 2$ olduğunu varsayalım. O halde $P < Q < T$ olacak şekilde $P, Q, T \in \sigma(M)$ vardır. O halde $(P:_L 1_M) \leq (Q:_L 1_M) \leq (T:_L 1_M)$ dir. Öyleyse $Q, T \in V(P) \cap V(Q)$, yani $Q, T \in cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\})$ sağlanır. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir T_Y –uzay olması ile çelişir.

Tersi için M bir çarpımsal L –modül olsun. M bir Y –modül ve $\dim(M) \leq 1$ olsun. $\sigma(M)$ nin bir T_Y –uzay olmadığını varsayalım. O halde iki farklı asal eleman P ve Q için $cl(\{P\}) \neq \emptyset$ ve tek nokta kümesi değildir. Öyleyse $N, K \in cl(\{P\})$ olacak şekilde iki farklı asal eleman N, K vardır. Öyleyse $(P:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M), (P:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ ve $(Q:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M), (Q:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ sağlanır. M bir çarpımsal L –modül olduğundan $P \leq N, P \leq K$ ve $Q \leq N, Q \leq K$ olur. Ayrıca $P \neq N$ ve $P \neq K$ dir. Eğer $P = N$ veya $P = K$ olsaydı $Q < P$ elde edilirdi. $\dim(M) \leq 1$ olduğundan P bir maksimal eleman olurdu. Bu durumda $V(P) = \{P\} = cl(\{P\})$ ve buradan $cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\}) = \{P\}$ olurdu. Bu ise M nin bir Y –modül olması ile çelişir. Benzer şekilde $Q \neq N$ ve $Q \neq K$ sağlanır. Böylece $P < N, P < K$ ve $Q < N, Q < K$ elde edilir. $\dim(M) \leq 1$ olduğundan

N ve K maksimal elemanlardır. Bu ise M nin bir Y –modül olması ile çelişir. Böylece $\sigma(M)$ bir T_Y –uzay olmalıdır.

Önerme 6.2.13 M bir L –modül olsun. Eğer $\sigma(M)$ bir T_{YS} –uzay ise M bir μ –modüldür ve $\dim(M) \leq 1$ dir. Tersine M nin çarpımsal L –modül olduğu durumda doğrudur.

İspat $\sigma(M)$ bir T_{YS} –uzay olsun. M nin bir μ –modül olmadığını varsayalım. O halde iki farklı minimal asal eleman Q ve T yi kapsayan bir P asal elemanı vardır. O halde $p \in V(Q) \cap V(T)$ elde edilir. Böylece $p \in cl(\{Q\}) \cap cl(\{T\})$ dır. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir T_{YS} –uzay olması ile çelişir. Şimdi $\dim(M) \geq 2$ olduğunu varsayalım. O halde $P < Q < T$ olacak şekilde $P, Q, T \in \sigma(M)$ vardır. Böylece $(P:1_M) \leq (Q:1_M) \leq (T:1_M)$ dir. Öyleyse $T \in V(P) \cap V(Q)$, yani $T \in cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\})$ sağlanır. Bu ise $\sigma(M)$ nin bir T_{YS} –uzay olması ile çelişir.

Tersi için M bir çarpımsal L –modül olsun. M bir μ –latis ve $\dim(M) \leq 1$ olsun. $P, Q; M$ nin iki farklı asal elemanı olsun. $cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\}) \neq \emptyset$ ve $cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\}) \neq \{P\}$ olsun. O halde bir $K \in cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\})$ vardır. Öyleyse $K \neq P$ ve $(P:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M), (Q:_L 1_M) \leq (K:_L 1_M)$ sağlanır. M bir çarpımsal L –modül olduğundan $P < K$ ve $Q \leq K$ elde edilir. $\dim(M) \leq 1$ olduğundan P minimal asal elemandır. M bir μ –latis olduğundan $Q = K$ elde edilir. Böylece $cl(\{P\}) \cap cl(\{Q\}) = \{Q\}$ sağlanır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak literatürde tanımlanmış olan eş çarpımsal modül kavramı latis modüller üzerine aktarılmıştır.

Diğer bölümde halka ve modül yapılarının asal idealleri ve asal alt modülleri üzerinde kurulan Zariski topolojisi, latis ve latis modüllerin asal elemanlarının kümeleri üzerinde kurulmuştur. Bu topolojilerin T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarını sağlamaları için gereken şartlar incelenmiştir.

Son olarak kurulan bu topolojilerin T_0 ve T_1 arasındaki bazı ayırma aksiyomları sağlayan latis ve latis modüller karakterize edilmiştir.

Latis modüller üzerinde kurulan Zariski topolojisi, eş çarpımsal latis modüller üzerinde kurulabilir. Ayrıca T_0 ve T_1 arasındaki bazı ayırma aksiyomları incelenebilir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Anderson, D.D., (1976). "Abstract Commutative Ideal Theory without Chain Condition", *Algebra Universalis*, 6:131-145.
 - [2] Dilworth, R.P., (1962). "Abstract Commutative Ideal Theory", *Pacific J. Math.*, 12:481- 498.
 - [3] Alarcon, F., Anderson, D.D. ve Jayaram, C., (1995). "Some Results on Abstract Commutative Ideal Theory", *Periodica Mathematica Hungaria*, 30(1):1-26.
 - [4] Jayaram, C. ve Johnson, E. W., (1995). "Some Results on Almost Principal Element Lattices", *Period. Math. Hungar*, 31:33-42.
 - [5] Jayaram, C. ve Johnson, E. W., (1995). " s –Prime Elements in Multiplicative Lattices" *Period. Math. Hungar*, 31:201-208.
 - [6] Jayaram, C. ve Johnson, E. W., (1997). "Dedekind Lattice", *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, 63:367-378.
 - [7] Jayaram, C. ve Johnson, E. W., (1997). "Strong Compact Elements in Multiplicative Lattices", *Czechoslovak Math. J.*, 47(122):105-112.
 - [8] Jayaram, C. ve Johnson, E. W., (1998). " σ –Elements in Multiplicative Lattices", *Czechoslovak Math. J.*, 48(123):641-651.
 - [9] Jayaram, C., (2002). " l –Prime Elements in Multiplicative Lattices", *Algebra Universalis*, 48:117-127.
 - [10] Jayaram, C., (2003). "Laskerian Lattices", *Czechoslovak Math. J.*, 53(128):351-363.
 - [11] Nakkar, H. M. ve Al-Khouja, I. A., (1985). "Nakayama's Lemma and The Principal Elements in Lattice Modules over Multiplicative Lattices", *R. J. of Aleppo University*, 7:1-16.
 - [12] Scott Culhan, D., (2005). *Associated Primes and Primal Decomposition in Modules and Lattice Modules, and Their Duals*, Phd. Thesis, University of California Riverside.
 - [13] Johnson, E. W. ve Johnson, J. A., (2003). "Lattice Modules over Principal Element Domains", *Comm. in Algebra*, 31(7):3505-3518.
 - [14] Al-Khouja, E. A., (2003). "Maximal Elements and Prime elements in Lattice Modules", *Damascus University for Basic Sciences* 19:9-20.

- [15] Çallıalp, F. ve Tekir, U., (2011). "Multiplication Lattice Modules", Iranian Journal of Science and Technology, 4:309-313.
- [16] Nakkar, H. M. ve Al-Khouja, I. A., (1989). "Multiplication Elements and Distributive and Supporting Elements in Lattice Modules", R. J. of Aleppo University, 11: 91-110.
- [17] Whitman, D.G., (1971). "On Ring Theoretic Lattice Modules", Fundam. Math., 70:221-229.
- [18] Ansari-Toroghy, H. ve Farshadifar, F., (2008). "Comultiplication Modules and Related Results", Honam Math. J., 30(1):91-99.
- [19] Ansari-Toroghy, H. ve Farshadifar, F., (2011). "On Multiplication and Comultiplication Modules", Acta Mathematica Scientia, 31B(2),694-700.
- [20] Shaniafi, Y. ve Smith, P. F., (2011). "Comultiplication Modules over Commutative Rings", J. Commut. Algebra 3(1):1-29.
- [21] Ansari-Toroghy, H. ve Farshadifar, F., (2007). "The Dual Notion of Multiplication Modules", Taiwanese J. Math., 4(11):1189-1201.
- [22] Thakare, N.K., Manjarekar, C.S. ve Maeda, S., (1988). "Abstract Spectral Theory. II: Minimal Characters and Minimal Spectrums of Multiplicative Lattices", Acta Sci. Math., 52:53-67.
- [23] Çallıalp, F. ve Tekir, U., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [24] Atiyah M.F. ve Macdonald I.G., (1969). "Introduction To Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company.
- [25] Pena, A., Ruza, L.M. ve Vielma, J., (2009). "Seperation Axioms and Their Prime Spectrum of Commutative Semirings", Revista Notas de Matematica 5(2):66-82.
- [26] Lu., C.P., (1999). "The Zariski Topology on The Prime Spectrum of a Module", Houston Journal of Math., 25(3):417-432.
- [27] Tekir, U., (2009). "The Zariski Topology on the Prime Spectrum of a Module over Noncommutative Rings", Algebra Colloquium, 16(4):691-698.
- [28] Kelley, J.L., (1955). General Topology, Sheridan Books, Inc., Ann Arbor, MI, United States of America.
- [29] Murata, K., (1970). "Primary Decomposition of Elements in Compactly Generated Integral Multiplicative Lattices", Osaka J. Math., 7:97-115.
- [30] Avila, J.A., (2005). " $Spec(R)$ and Separation Axioms Between T_0 and T_1 ", Divulg. Math., 13:90-98.
- [31] Avila, J.A., (2006). "Rings That Characterize Some Separation Notions", Algebra Universalis, 6: 131-145.
- [32] Nakkar, H. M. ve Anderson, D. D., (1988). "Associates and Weakly Associated Prime Elements and Primary Decomposition in Lattice Modules", Algebra Universalis, 25:196-209.

- [33] Roman, S., (2008). Lattices and Ordered Sets, Springer Science Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York.
- [34] Anderson, D.D., (1974)., Multiplicative Lattice, Ph.D Thesis, University of Chicago.
- [35] Manjarekar, C. S. ve Bingi, A. V. (2014)., “An Element Prime to and Primary to Another Element in Lattice Modules”, International Journal of Algebra, 8(10): 451-458.
- [36] Çallıalp, F., Tekir, U. ve Aslankarayiğit, E., (2014)., “On multiplication lattice modules”, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(4):571 – 579.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Gülşen ULUCAK
Doğum Tarihi ve Yeri	:30.07.1986\ÜSKÜDAR
Yabancı Dili	:İngilizce
E-posta	:gulsenulucak@gtu.edu.tr\gulsenulucak58@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	Marmara Üniversitesi	2009
Lise	Fen-Matematik	Yakacık Lisesi	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012	Gebze Teknik Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Atani, S. E., Ulucak, G. ve Tekir, Ü., (2013). “ The Zariski Topology on Semimodules”, The Journal of Advanced Research in Pure Mathematics , 5(4):80-90.
2. Callialp, F. , Tekir, U. ve Ulucak, G., (2015). “Comultiplication lattice modules”, Iranian Journal of Science & Technology, 39A2: 213-220.
3. Akca, F.K. ve Ulucak, G., (2015). ”Uniformly Primary Elements of Multiplicative Lattices”, International Mathematical Forum, 10(4),157-163.
4. Ulucak, G., Tekir, U. ve Shum, K.P., (2015). “On $\text{Spec}(M)$ and Separation Axioms Between T_0 and T_1 ”, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 39:717–725.
5. Ulucak, G., Tekir, U. ve Oral, K.H., (2015). “Separation Axioms Between T_0 and T_1 on Lattices and Lattice Modules”, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, (Kabul edildi).

Bildiri

1. Ulucak, G., Atani, S.E. ve Tekir, Ü., “A Study on Semimodules”, 1. Western Balkan Conference of Mathematical Sciences (Elbasan, 30 Mayıs-1 Haziran 2013).
2. Ulucak, G., Sevim, E.S. ve Aslankarayigit, E., “A Note on Modules Over Commutative Rings”, 2. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-26-29 Ağustos 2013).
3. Ulucak, G. ve Tekir, U., “ $\text{Spec}(M)$ and Separation Axioms Between T_0 and T_1 ”, 5. Congress of Mathematicians of Macedonia in the Algebra Section (CMM 2014), 23-28 Eylül 2014.
4. Ulucak, G., Çallıalp, F. ve Tekir, U., “Spectrum of L module M ”, 3. International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2014), 25-28 Ağustos, 2014, Viyana, Avusturya.
5. Ulucak, G. ve Tekir, U., “Separation Axioms Between T_0 and T_1 on Lattices and Lattice Modules”, The Second International Conference on Mathematics and Statistics, AUS-ICMS '15, 2–5 Nisan, 2015.
6. Ulucak, G., Tekir, U. ve Oral, K.H., “ A Note on Lattice Modules”, The International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2015), 25-28 Ağustos, 2015, Van, Türkiye.

