

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÇARPIMSAL LATİS MODÜLLER

EMEL ASLANKARAYİĞİT UĞURLU

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL**

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL LATİS MODÜLLER

Emel ASLANKARAYİĞİT UĞURLU tarafından hazırlanan tez çalışması 22.01.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP
Beykent Üniversitesi

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM
Bilgi Üniversitesi

Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL
Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tezde pek çok emeği bulunan ve akademik hayata atılmama sebep olan değeri hocam, eř danışmanım Ünsal TEKİR'e ve danışmanım Kürşat Hakan ORAL'a teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman bana kapısı açık olan hocaların hocası değeri akademisyen Fethi ÇALLIALP' e de teşekkürü bir borç bilirim.

Maddi manevi bütün destekleri için sevgili annem, babam, kardeřlerim ve eřime minnetlerimi sunarım.

Ocak, 2016

Emel ASLANKARAYİĞİT UĞURLU

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	3
BÖLÜM 2	
LATİS VE LATİS MODÜL İÇİN GENEL BİLGİLER.....	5
2.1 Latis İçin Genel Bilgiler	5
2.2 Latis Modül İçin Genel Bilgiler.....	17
BÖLÜM 3	
ÇARPIMSAL LATİS MODÜLLER.....	22
3.1 Çarpımsal Latis Modüllere Genel Bakış	22
3.2 Çarpımsal Latis Modüllerinde Bazı Elemanların İncelenmesi	30
3.3 Çarpımsal Latis Modüllerinde Bazı Elemanların Karakterizasyonları.....	32
3.4 Yeni Bir Çarpma Sayesinde Bulunan Tanım Benzerlikleri.....	36

BÖLÜM 4

ÇARPIMSAL LATİS MODÜL İLE İKİNCİ LATİS MODÜL VE İKİNCİL LATİS MODÜL ARASINDAKİ İLİŞKİ	44
---	----

4.1 İkinci Latis Modül Ve İkincil Latis Modül	44
4.2 Çarpımsal Latis Modül ile İkinci Latis Modül Ve İkincil Latis Modül Arasındaki İlişki.....	53

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	55
KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ.....	58

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}_n$	Tamsayıların $mod n$ kalan sınıfları kümesi
$\Rightarrow$	Gerektirmenin İspatı
$\Leftarrow$	Yeterliliğin İspatı
$A - B$	A kümesinin B kümesinden farkı
$\cap$	Kesişim işlemi
$\cup$	Birleşim işlemi
$\wedge$	İnfimum işlemi
$\vee$	Supremum işlemi
$\sqrt{a}$	a elemanının radikali
$P(A)$	A kümesinin kuvvet kümesi
(a)	$a \in R$ tarafından üretilen ideal
$< m >$	$m \in M$ tarafından üretilen alt modül

KISALTMA LİSTESİ

L	Latis kümesi
M	Modül kümesi
$L(R)$	R nin ideallerinin kümesi
$L(M)$	R –modül M nin alt modüllerinin kümesi
PG –latis	Temel elemanlar tarafından üretilmiş latis
CG –latis	Kompakt elemanlar tarafından üretilmiş latis

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3. 1 L latisinin yapısı	18
Çizelge 3. 2 M latisinin yapısı.....	18
Çizelge 3. 3 Çarpma işleminin değer tablosu	18

ÇARPIMSAL LATİS MODÜLLER

Emel ASLANKARAYİĞİT UĞURLU

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Eş Danışman: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Pek çok bilim adamı cebirin Latis Teorisi alanında yıllarca çalışmıştır. Bu alanda Modül Teorisinin genellemesi olan Latis Modüller konusu da önemli bir yer tutar. Bu tezin amacı, modül teorisindeki çarpımsal modüllerin genellemesi olan çarpımsal latis modüllerinin özelliklerini incelemektir. Ayrıca çarpımsal latis modüllerini, temel elemanlar ve kompakt elemanlar yardımıyla karakterize etmektir. Tezin bir diğer bölümünde ise; latis modülünde asal eleman, zayıf asal eleman, neredeyse asal eleman ve idempotent eleman kavramları tanımlanmıştır. Daha sonra bu elemanlar belli şartlar altında karakterize edilmiştir. Mesela asal elemanlar için olan karakterizasyonu ifade etmek istersek; 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve M çarpımsal sadık PG –latis modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ elemanı için aşağıdakiler denktir:

- (1) N asaldır.
- (2) $(N: 1_M)$ asaldır.
- (3) $N = q1_M$ olacak şekilde bir asal $q \in L$ vardır. (Teorem 3.4.3)

Ayrıca çarpımsal latis modülü üzerinde yeni bir çarpma tanımlanmıştır. Bu çarpma sayesinde; latis modülündeki bazı elemanların tanımlarının, latisteki tanımlarına denk getirilebileceği ispatlanmıştır. Bunun için örnek olarak; latis modülündeki asal eleman tanımının, latisteki formuna nasıl denk geldiğini açıklayalım:

Bilindiği üzere L modülündeki asal eleman tanımı ile PG — L modülündeki asal eleman tanımı birbirinden biraz farklıdır. Bazı özel koşullar altında; L modülündeki asal eleman tanımının, PG — L modülüne denk geldiği gösterilmiştir. Daha açık ifade edecek olursak; 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG — L modül ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG — L modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ için N elemanının M de asal olması için gerek ve yeter koşul $XY \leq N$ olacak şekilde herhangi $X, Y \in M$ için $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olmasıdır. (Teorem 3.4.9)

Yukarıdakine benzer şekilde; L modülünde zayıf asal eleman, neredeyse asal eleman ve idempotent elemanların da tanımları, PG — L modülüne denk getirilmiştir.

Sonuncu bölümde ise ikinci modül ve ikincil modül kavramları genelleştirilerek ikinci L modül ve ikincil L modül kavramları tanıtılmıştır. Bu kavram şu şekilde tanımlanmıştır; M sıfırdan farklı bir L — L modül olsun. Eğer her $a \in L$ için $a1_M = 1_M$ veya $a1_M = 0_M$ oluyorsa M , ikinci L modül olarak adlandırılır. (Tanım 4.1.1) Benzer olarak eğer her $a \in L$ için $a1_M = 1_M$ veya $a^n 1_M = 0_M$ olacak şekilde n pozitif tam sayısı bulunabiliyorsa M , ikincil L modül olarak adlandırılır. (Tanım 4.1.2)

Son olarak; çarpımsal L modül kavramı ile yukarıda tanımlanan bu iki kavram birleştirilince neler elde edilebileceği araştırılmıştır. Böylece şu iki sonuç elde edilmiştir.

- (1) Çarpımsal ve ikincil olan bir L modül, asalımsı L modüldür. (Önerme 4.2.1)
- (2) Çarpımsal ve ikinci olan bir L modül, asal L modüldür. (Önerme 4.2.2)

Anahtar Kelimeler: L modül, çarpımsal L modül, L modül, çarpımsal L modül, PG — L modül, CG — L modül, asal eleman, neredeyse asal eleman, zayıf asal eleman, asalımsı eleman, maksimal eleman, idempotent eleman, ikinci L modül, ikincil L modül.

MULTIPLICATION LATTICE MODULES

Emel ASLANKARAYİĞİT UĞURLU

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Assoc. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Co-Adviser: Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Many scientists have studied on Lattice Theory for many years. The Lattice Modules which is the generalization of Module Theory have an important place in the area. The aim of this thesis is an examination of properties of multiplication lattice module which is the generalization of multiplication module. Moreover, the aim is to obtain a characterization of multiplication lattice module by the help of the defined principal elements and compact elements. In the another part of the thesis, we gave the definitions of prime element, weakly prime element, almost prime element and idempotent element. After then, under specific conditions these elements are characterized. For example, we can explain the characterization of prime element. Let L be a PG –lattice with 1_L compact and M be a faithful multiplication PG –lattice L –module and $N < 1_M$. Then followings are equivalent:

- (1) N is prime.
- (2) $(N :_L 1_M)$ is prime.
- (3) $N = q1_M$ for some prime element q of L . (Theorem 3.4.3)

In addition, we define a new multiplication over the multiplication lattice module. Owing to the multiplication we prove that the definitions of some elements in lattice module can be similar to the definitions of the elements in lattice. For example, let's

explain the definition of prime elements in lattice module can be similar to the definition of prime elements in lattice.

As one know the definition of prime elements in lattice module is different from the definition of prime elements in lattice. Under special conditions, we get that the definition of prime element in lattice module is similar to the definition of prime element in lattice. So, if L is a PG –lattice with 1_L compact and M is a faithful multiplication PG –lattice L –module with 1_M compact and $N < 1_M$, then N is prime in M if and only if whenever X and Y are elements of M such that $XY \leq N$ then either $X \leq N$ or $Y \leq N$. (Theorem 3.4.9)

Similarly, we obtain the previous result for weakly prime elements, almost prime elements and idempotent elements owing to the new defined multiplication.

In the last part, we define second lattice module and secondary lattice module as the generalizations of second module and secondary module. For the explanation of the definitions, one can examine the followings:

A nonzero L –lattice module M is called second if for each $a \in L$, $a1_M = 1_M$ or $a1_M = 0_M$. (Definition 4.1.1) Similarly, if for each $a \in L$, $a1_M = 1_M$ or $a^n 1_M = 0_M$ for some $n > 0$, M is called secondary . (Definition 4.1.2)

When we unify the concepts of the multiplication lattice module and the above defined notions, we research that what we can get. Thus we obtain the following two results:

- (1) Every multiplication and secondary lattice module is primary lattice module. (Proposition 4.2.1)
- (2) Every multiplication and second lattice module is prime lattice module. (Proposition 4.2.2)

Keywords: lattice, multiplicative lattice, lattice module, multiplication lattice module, PG –lattice module, CG –lattice module, prime element, almost prime element, weakly prime element, primary element, maximal element, idempotent element, second lattice module, secondary lattice module.

1.1 Literatür Özeti

Latis Teorisi cebirde önemli yer tutmaktadır, bakınız [1, 2, 3]. Bir latıs yapısı için en bilinen örnek; R birimli, değişmeli bir halka olmak üzere R nin bütün ideallerinin oluşturduğu $L(R)$ kümesidir. $L(R)$ latısı ilerde tanımlayacağımız pek çok latıs yapısına örnek teşkil eder.

İdealler üzerinde toplama işlemini supremum, çarpma işlemini infimum olarak alırsak $L(R)$ kümesinin her alt kümesinin, bir infimum ve supremumu olduğu kolayca görülebilir. Böylece $L(R)$ latısı bir tam latıstır. Dikkat edilirse; en küçük üst sınırı $\{L(R)\} = R$ dir.

1_L elemanı kompakt olan bir L tam latısı üzerinde, (Kompakt eleman için bakınız, Tanım 2.1.16)

(1) Supremumlar üzerinde dağılmalı (yani $a_i, b \in L$ için $b(\bigvee a_i) = \bigvee ba_i$),

(2) Birleşmeli,

(3) Değişmeli,

(4) Çarpımsal birimi, en büyük eleman 1_L ve çarpımsal sıfırı, en küçük eleman 0_L

olacak şekilde bir çarpma mevcutsa L ye **çarpımsal latıs** denir [3]. $L(R)$ idealler tam latisini inceleyecek olursak; gerçekten de $I_\alpha, J, I_1, I_2, I_3 \in L(R)$ için

(1) Supremumlar üzerinde dağılmalı yani $J(\bigvee I_\alpha) = \bigvee JI_\alpha$,

(2) Birleşmeli yani $(I_1 I_2) I_3 = I_1 (I_2 I_3)$,

(3) Değişmeli yani $I_1 I_2 = I_2 I_1$,

(4) $I_\alpha R = I_\alpha$ ve $(0_R)R = (0_R)$ olduğundan çarpımsal birimi, en büyük eleman olan $1_{L(R)} = R$ elemanı kompakt (Benzer şekilde çarpımsal sıfırı en küçük eleman $0_{L(R)} = (0_R)$)

olacağından $L(R)$ latisi çarpımsal latis yapısına da örnek teşkil eder.

D. D. Anderson; $L(R)$ latisini, çarpımsal latisleri ve onun diğer cebirsel sistemler üzerine uygulamalarını incelemiştir, bakınız [3].

Şimdi biraz latis modülünden bahsedelim. Bir çarpımsal latis üzerinde latis modülü tanımlanabilir.

L bir çarpımsal latis ve M de bir tam latis olsun. $l, l_\alpha, b \in L$ ve $B, B_\beta \in M$ olmak üzere L ve M nin elemanları arasında aşağıdaki koşulları sağlayan ve lB ile gösterilen bir çarpma varsa M ye bir L –**latis modül** denir [5].

(1) $(lb)B = l(bB)$;

(2) $(\bigvee_\alpha l_\alpha)(\bigvee_\beta B_\beta) = \bigvee_{\alpha,\beta} l_\alpha B_\beta$;

(3) $1_L B = B$;

(4) $0_L B = 0_M$.

Latis Modüller ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır, bakınız [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

1988 yılında [12] da P. Smith Çarpımsal Modül kavramını tanıtmıştır. M bir R –modül olmak üzere M nin herhangi bir alt modülü N için $N = IM$ olacak şekilde R de bir I ideali bulunabiliyorsa M ye çarpımsal modül denir. Aynı çalışmada Çarpımsal Modül yapısının özellikleri incelenmiştir. Çarpımsal Modüllerle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır, bakınız [12, 13, 14, 15, 16,17].

F.Çallıalp ve U.Tekir ise 2011 de [4] referansında, Çarpımsal Modül yapısını genelleştirerek Çarpımsal Latis Modül kavramını şu şekilde tanımlamıştır: M bir L –latis modül olsun. Eğer her $N \in M$ için $N = a1_M$ olacak şekilde bir $a \in L$ varsa M ye çarpımsal latis modül denir. [4] de yazarlar, çarpımsal modüllerin bazı özellikleri genelleştirilerek çarpımsal latis modüllerinin bazı özelliklerini elde etmiştir.

Ayrıca Çarpımsal Modül yapısı, Shireen Ouda Dakheel in 2010 yılında yayınlanan ‘S-Prime Submodules And Some Related Concepts’ isimli tezinde önemli bir yer tutar. (Bakınız, [18]) Öncelikle [18] de yazar Modül Teoride ikinci modül ve ikincil modül kavramlarını tanıtmış ve bunların özellikleri incelemiştir. Daha sonra ise çarpımsal modül kavramı ile bu yeni tanımladığı modülleri birleştirdiğinde neler elde edilebileceğini göstermiştir. Böylece önemli iki sonuca ulaşmıştır.

(1) Çarpımsal ve ikinci olan bir modül, asal modüldür. (Bakınız, [18])

(2) Çarpımsal ve ikincil olan bir modül, asalımsı modüldür. (Bakınız, [18])

1.2 Tezin Amacı

Biliyoruz ki Grup, Halka ve Modül gibi yapılar modüler yapılardır. Bu tez Non-modüler bir yapı elde edip onun özelliklerini inceleyi amaç edinmiştir. Bunun için çarpımsal modüllerin genellemesi olan çarpımsal latis modüllerinin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, çarpımsal latis modüllerini, temel elemanlar ve kompakt elemanlar yardımıyla karakterize etmektir. Tezin bir diğer bölümünde ise; asal eleman, zayıf asal eleman, neredeyse asal eleman ve idempotent eleman tanımlarını latis modülünde vermektir. Daha sonra çarpımsal latis modülde yeni bir çarpma tanımlamaktır. Bu çarpma sayesinde latis modülündeki bazı tanımların latisdeki formlarıyla aynı olabileceğini göstermektir.

Sonuncu bölümde ise ikinci modül ve ikincil modül kavramları genelleştirerek ikinci latis modül ve ikincil latis modül kavramlarını tanımlamaktır. Son olarak çarpımsal latis modül kavramı ile bu yeni iki kavram birleştirilince neler elde edilebileceğini araştırmaktır.

1.3 Hipotez

Modül teorideki pek çok kavram gibi çarpımsal modül kavramı da latis teoriye genellenebilir. [4] de yazarlar bunu yapmıştır. Bu fikirden yola çıkarak çarpımsal modüldeki kavramlar, genellenerek çarpımsal latis modülünde incelenebilir. Ayrıca çarpımsal modülde ulaşılmış sonuçlara, çarpımsal latis modülünde de ulaşmaya çalışılabilir. Ek olarak; asal eleman, zayıf asal eleman, neredeyse asal eleman ve

idempotent eleman gibi tanımlar çarpımsal latis modülünde incelenebilir. Bu fikirlerden yola çıkarak bu tezde önemli sonuçlar elde edilebilir.

Son olarak ikinci modül ve ikincil modül kavramları da genellenip, ikinci latis modül ve ikincil latis modül kavramları tanıtılabilir. Böylece çarpımsal latis modül kavramı ile ikinci latis modül ve ikincil latis modül kavramları birleşince neler elde edilebileceği araştırabilir.

LATİS VE LATİS MODÜL İÇİN GENEL BİLGİLER

2.1 Latis İçin Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1 : Boştan farklı bir A kümesi üzerinde tanımlanan ' $\leq$ ' (sıralama) bağıntısı aşağıdaki biçimde tanımlanan yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa ise A kümesine **kısmi sıralı (sıralı)** denir.

- (1) Her $a \in A$ için $a \leq a$ dir. (Yansıma Özelliği)
- (2) Herhangi $a, b \in A$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir. (Ters Simetri Özelliği)
- (3) Herhangi $a, b, c \in A$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir. (Geçişme Özelliği)

A kısmi sıralı bir küme ise kısmi sıralama bağıntısını da belirtmek için ' A kısmi sıralı bir kümedir' ifadesi yerine bazen ' $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme' de denir.

Örnek 2.1.2 $P(A)$, boştan farklı bir A kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $(P(A), \subseteq)$ bir kısmi sıralı kümedir.

Tanım 2.1.3 Kısmi sıralı bir kümenin her eleman çifti, küme üzerinde tanımlanan bağıntıya göre karşılaştırılabilir ise bu kümeye **tam sıralı küme** veya **zincir** denir.

Örnek 2.1.4 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ' $\leq$ ' bağıntısı ile tam sıralı bir kümedir.

Tanım 2.1.5 Bir A kısmi sıralı kümesinde $a, b, c \in A$ için $a \leq c$ ve $b \leq c$ ise c elemanına a ve b elemanlarının bir **üst sınırı** denir. Özel olarak,

c , a ve b nin bir üst sınırı iken a ve b elemanlarının her bir d üst sınırı için $c \leq d$ gerçekleşiyor ise bu durumda c elemanına a ve b elemanlarının **en küçük üst sınırı** denir. Kısaca $eküs(a, b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 Bir A kısmi sıralı kümesinde $a, b, e \in A$ için $e \leq a$ ve $e \leq b$ ise e elemanına a ve b elemanlarının bir **alt sınırı** denir. Özel olarak,

e , a ve b nin bir alt sınırı iken a ve b elemanlarının her bir f alt sınırı için $f \leq e$ gerçekleşiyor ise bu durumda e elemanına a ve b elemanlarının **en büyük alt sınırı** denir. Kısaca $ebas(a, b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 Bir A kısmi sıralı kümesinde $a, b \in A$ elemanlarının en küçük üst sınırına a ve b nin **supremumu** denir. $a \vee b$ veya $\sup\{a, b\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8 Bir A kısmi sıralı kümesinde $a, b \in A$ elemanlarının en büyük alt sınırına a ve b nin **infimumu** denir. $a \wedge b$ veya $\inf\{a, b\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9 $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin her iki elemanlı alt kümesi bir supremuma ve infimuma sahipse bu kısmi sıralı kümeye **latis** adı verilir. $L = (A, \leq)$ ile gösterilir.

Örnekler 2.1.10

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinden her biri ' $\leq$ ' bağıntısı ile,

$$\sup\{a, b\} = a \vee b = \max\{a, b\}$$

$$\inf\{a, b\} = a \wedge b = \min\{a, b\}$$

olmak üzere birer latistir.

(2) $(P(X), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi; her $A, B \in P(X)$ için,

$$\sup\{A, B\} = A \vee B = A \cup B$$

$$\inf\{A, B\} = A \wedge B = A \cap B$$

olmak üzere bir latıs oluşturur.

Tanım 2.1.11 $(L, \leq)$ latisinin her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa bu latise **tam latıs** denir [3].

Tanımından kolayca anlaşılacağı gibi bir tam latisin her zaman en büyük elemanı ve en küçük elemanı vardır. Bu en küçük eleman 0_L ve en büyük eleman 1_L ile gösterilir.

Örnek 2.1.12 (Bakınız, [22]) S , çarpımsal 0_S ve 1_S elemanına sahip bir değişmeli yarı grup olsun. I kümesi S nin $\emptyset \neq I \subseteq S$ olacak şekilde bir alt kümesi iken $IS \subseteq I$ oluyorsa I yı S nin bir ideali olarak tanımlayalım.

(1) S nin herhangi iki ideali I ve J ise $IJ = \{ij : i \in I \text{ ve } j \in J\}$ çarpımı, $I \cup J$ ve $I \cap J$ kümeleri S nin birer idealidir.

(2) $L(S)$, S nin tüm ideallerinin kümesi olmak üzere bir tam latistir.

Tanım 2.1.13 Bir L latisinde her $a, b, c \in L$ için,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (*)$$

sağlanıyorsa L ye **dağılmalı latis** denir [3].

Tanım 2.1.14 Bir L latisinde her $a, b, c \in L$ için,

$$a \leq c \text{ için } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \quad (**)$$

sağlanıyorsa L ye **modüler latis** denir [3].

Örnekler 2.1.15

- (1) Yukarıda 2.1.10 da ilk şıktaki latislerin hepsi dağılmalı latistir. Ancak hiç biri tam latis değildir, çünkü hiç birinin en büyük elemanı yoktur.
- (2) X herhangi bir küme olmak üzere $(P(X), \leq, \cup, \cap)$ yapısı bir dağılmalı latistir.
- (3) L bir tam sıralı küme (zincir) ise her $a \leq b$ olacak şekilde $a, b \in L$ için $a \vee b = b$ ve $a \wedge b = a$ olduğundan her tam sıralı küme bir dağılmalı latistir.
- (4) $x < y$ için $[x, y]$ kapalı aralığı, $\mathbb{R}$ nin tamlık aksiyomu gereğince bir tam latistir. $\mathbb{Q}$ tam latis değildir. Çünkü $\{s \in \mathbb{Q} : s^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ kümesi üstten sınırlı olmasına rağmen bu üst sınırların en küçüğü (supremumu) yoktur.
- (5) Herhangi bir G grubunun tüm normal alt gruplarının ailesi $N(G)$, $N \wedge K = N \cap K$ ve $N \vee K = NK$ işlemleriyle birlikte bir modüler latis oluşturur, gösterelim:
 $N \subseteq H$ olacak şekilde herhangi $H, K, N \in N(G)$ için $(H \wedge K) \vee N \subseteq H \wedge (K \vee N)$ kapsamı her zaman gerçekleşir. Tersine bir $a \in H \wedge (K \vee N)$ ise $a \in H$ ve $a = kn$ olacak şekilde $k \in K$ ve $n \in N$ bulunur. Burada $N \subseteq H$ ve N bir alt grup

olduğundan $k = n^{-1}a \in H$ olup $a = kn \in (H \wedge K) \vee N$, yani $H \wedge (K \vee N) = (H \wedge K) \vee N$ elde edilir.

Tanım 2.1.16 $a \in L$ olsun. Eğer $a \leq \bigvee b_i$ için $a \leq b_{i_1} \vee b_{i_2} \vee \dots \vee b_{i_n}$ olacak şekilde sonlu $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}\}$ alt kümesi bulunabiliyorsa a elemanına **kompakt eleman** denir [3].

Örnek 2.1.17 Çarpımsal olarak 0_S ve 1_S elemanına sahip S , değişmeli yarı grubunu hatırlayalım, bakınız Örnek 2.1.12. $(a) = Sa = \{sa : s \in S\}$ kümesi $a \in S$ tarafından üretilmiş temel ideali ve $L(S)$, S nin tüm ideallerinin kümesini göstermek üzere; (a) elemanı $L(S)$ latisinde kompakt elemandır [22].

Tanım 2.1.18 L bir tam latis ve 1_L elemanı kompakt olsun. $l, l_\alpha, l_1, l_2, l_3 \in L$ olmak üzere L üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir çarpma varsa L ye **çarpımsal latis** denir [3].

- (1) $l_1 l_2 = l_2 l_1$,
- (2) $l_1 (l_2 l_3) = (l_1 l_2) l_3$,
- (3) $l(\bigvee_\alpha l_\alpha) = \bigvee_\alpha l l_\alpha$,
- (4) $1_L l = l$.

Örnek 2.1.19 R birimli değişmeli bir halka olsun. R nin tüm idealler ailesini $L(R)$ ile gösterelim. $I, J \in L(R)$ için $I \wedge J = I \cap J$ ve $I \vee J = I + J$ tanımlayarak ideallerde çarpma işlemi ile $L(R)$ bir modüler çarpımsal latis yapısı oluşturur.

Örnek 2.1.20 $L(S)$ latisi bir çarpımsal latis yapısı oluşturur, bakınız Örnek 2.1.12.

Tanım 2.1.21 L bir çarpımsal latis olsun. Eğer L nin her bir elemanı kompakt elemanlarının bir ailesinin supremumu olarak yazılabiliyorsa L ye **kompakt elemanlarca üretilmiş** bir latis denir ve kısaca **CG –latis** şeklinde ifade edilir [3].

Örnek 2.1.22 Çarpımsal olarak 0_S ve 1_S elemanına sahip S , değişmeli yarı grubunu hatırlayalım. (a) elemanın $L(S)$ de kompakt eleman olduğunu göstermiştik, bakınız Örnek 2.1.17. Bunu genellersek, S nin bir I idealinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul I nin sonlu üretilmiş olmasıdır. Yani $a_1, \dots, a_n \in S$ olmak üzere $I = (a_1, \dots, a_n) = (a_1) \cup \dots \cup (a_n)$ olur. S nin her ideali temel ideallerin bir birleşimi olduğundan $L(S)$ latisi bir CG –latis yapısı oluşturur [3].

Örnek 2.1.23 Örnek 2.1.19 da tanımlı $L(R) = L$ latisinin bir elemanının kompakt olması için gerek ve yeter koşul bu elemanın sonlu üretilmiş olmasıdır. Dolayısıyla 1_L kompakt ve $L(R)$ bir CG –latis yapısı oluşturur.

Çözüm: $J \in L(R)$ kompakt eleman olsun. I sonsuz bir indis kümesi olmak üzere $J = \langle \{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \rangle$ ise $J \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha)$ sağlanır. O halde J kompakt eleman olduğundan $J \subseteq \bigcup_{i=1}^n (a_{\alpha_i})$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Buradan $(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}) \subseteq J \subseteq \bigcup_{i=1}^n (a_{\alpha_i})$ olup $J = (a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n})$ sonlu üretilmiş olarak bulunur.

Tersine $J = (a_1, \dots, a_n)$ sonlu üretilmiş ve K_i ler $L(R)$ de olmak üzere $J \subseteq \bigcup_{i \in I} K_i$ olsun. O halde her $j = 1, \dots, n$ için $a_j \in K_{i_j}$ olur. Böylece $J = (a_1, \dots, a_n) \subseteq \bigcup_{j=1}^n K_{i_j}$ elde edilir. Yani J kompakttır. Dolayısıyla $L(R)$ bir CG –latistir.

Örnek 2.1.24 Her $a \in L$ için $L/a = \{b \in L : a \leq b\}$ ile tanımlanan küme $c \circ d = cd \vee a$ işlemi ile birlikte bir çarpımsal latis oluşturur. Ayrıntılı bilgi için bakınız [1, 2, 3].

Tanım 2.1.25 L (modüler olması gerekmeyen) bir tam latis ve C bir takım kompakt elemanların kümesi olsun. Eğer L nin her elemanı C deki elemanların bir ailesinin supremumu olarak yazılabiliyorsa L ye C –latis adı verilir.

Tezin bu kısmından itibaren L çarpımsal latisi temsil edecektir.

Not 2.1.26 $a, b, c \in L$ için $(a :_L b) = \vee \{x \in L : xb \leq a\}$ ile tanımlanır. Çarpımsal latislerde bölüm ve çarpım işlemlerine ilişkin temel bağıntılar ve özellikler aşağıdaki gibidir:

- (1) $(a :_L b)b \leq a$ dir.
- (2) $xb \leq a$ ise $x \leq (a :_L b)$ dir.
- (3) $b \leq a$ olması için gerek ve yeter koşul $(a :_L b) = 1_L$ olmasıdır.
- (4) $((a \wedge b) :_L c) = (a :_L c) \wedge (b :_L c)$ dir.
- (5) $(a :_L (bc)) = ((a :_L b) :_L c)$ dir.
- (6) $a \leq (a :_L b)$ dir.
- (7) $a \leq (ab :_L b)$ dir.
- (8) $(a :_L c) \vee (b :_L c) \leq ((a \vee b) :_L c)$ dir.
- (9) $(a \wedge b)c \leq (ac) \wedge (bc)$ dir.
- (10) $((a \wedge b) :_L b) = (a :_L b)$ dir.
- (11) $(a :_L (a \vee b)) = (a :_L b)$ dir.

(12) $(a:_L(b \vee c)) = (a:_L b) \wedge (a:_L c)$ dir.

(13) $a \vee c = b \vee c = 1_L$ ise $(ab \vee c) = 1_L$ dir

(14) $a \vee c = 1_L$ ise $(a \wedge b) \vee c = b \vee c$ dir

(15) $i = 1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere $k_i \in \mathbb{N}$ için $(a_1 \vee \dots \vee a_n)^{k_1 + \dots + k_n} \leq a_1^{k_1} \vee \dots \vee a_n^{k_n}$ dir.

Tanım 2.1.27 Bir $e \in L$ elemanı verilsin. Her $a, b \in L$ için,

(1) $a \wedge be = ((a:_L e) \wedge b)e$ ise e elemanına **infimum temel eleman**,

(2) $a \wedge e = (a:_L e)e$ ise e elemanına **zayıf infimum temel eleman**,

(3) $((ae \vee b):_L e) = (b:_L e) \vee a$ ise e elemanına **supremum temel eleman**,

(4) $(ae:_L e) = (0_L:_L e) \vee a$ ise e elemanına **zayıf supremum temel eleman** adı verilir [1].

Tanım 2.1.28 Bir $e \in L$ supremum temel eleman ve infimum temel eleman ise e ye **temel eleman** denir [1].

Tanım 2.1.29 Bir $e \in L$ zayıf supremum temel eleman ve zayıf infimum temel eleman ise e ye **zayıf temel eleman** denir [1].

Özel olarak $a \leq e$ ise $(a:_L e)e = a$ ve $(0_L:_L e) \leq a$ ise $((ae):_L e) = a$ elde edilir.

Tanım 2.1.30 Eğer L nin her bir elemanı temel elemanlarının bir ailesinin supremumu olarak yazılabiliyor ise L ye **temel elemanlarca üretilmiş** bir latis denir ve kısaca **PG –latis** şeklinde ifade edilir [3].

Örnek 2.1.31 Örnek 2.1.19 da tanımlı $L(R) = L$ latisini göz önüne alalım. R nin her temel ideali, $L(R)$ nin bir temel elemanı olduğundan $L(R)$, PG –latis yapısı oluşturur.

Teorem 2.1.32 L deki her zayıf temel eleman kompaktır [3].

İspat a zayıf temel eleman ve $a = \vee a_\alpha$ olsun. a zayıf infimum temel eleman olduğundan $a_\alpha = a \wedge a_\alpha = a(a_\alpha:_L a)$ dır. Buradan $a = \vee a_\alpha = \vee (a(a_\alpha:_L a)) = a(\vee (a_\alpha:_L a))$ elde edilir. Ayrıca a zayıf supremum temel eleman olduğundan $1_L = \vee (a_\alpha:_L a) \vee (0_L:_L a)$ elde edilir. 1_L kompakt olduğundan $1_L = \vee (a_{\alpha_1:_L a}) \vee (a_{\alpha_2:_L a}) \vee \dots \vee (a_{\alpha_n:_L a}) \vee (a_\alpha:_L a) \vee (0_L:_L a)$ olacak şekilde sonlu $\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_n}\}$ kümesi vardır. Böylece $a =$

$a(a_{\alpha_1:L} a) \vee a(a_{\alpha_2:L} a) \vee \dots \vee a(a_{\alpha_n:L} a) \vee a(a_{\alpha:L} a) \vee a(0_L :L a) = a_{\alpha_1} \vee a_{\alpha_2} \vee \dots \vee a_{\alpha_n}$ elde edilir.

Örnek 2.1.33 R değişmeli bir halka olmak üzere L, R nin ideallerinin latisi olsun. R nin her temel ideali, idealler latisi $L(R)$ de bir temel elemandır [3].

İspat $I = (m)$ temel idealini göz önüne alalım. $x \in AI \cap B$ ise $x = am$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Buradan,

$$a \in (B:_L I) \Rightarrow a \in A \cap (B:_L I) \Rightarrow x = am \in (A \cap (B:_L I))I \text{ elde edilir.}$$

Yani I nin infimum temel eleman olduğu görülür. Şimdi $y \in ((A \cup BI):_L I)$ alalım. Buradan,

$$ym \in A \cup BI \Rightarrow ym = a + bm \text{ olacak şekilde } a \in A \text{ ve } b \in B \text{ vardır.}$$

Böylece,

$$a = (y - b)m \Rightarrow y - b \in (A:_L I) \Rightarrow y = (y - b) + b \in (A:_L I) \cup B \text{ olur.}$$

Yani I aynı zamanda supremum temel elemandır. Buradan I temel elemandır. Böylece R nin her temel ideali, idealler latisinde bir temel elemandır.

Not 2.1.34 Yukarıdaki ispatın tersi ancak belli şartlar altında doğrudur.

- (1) $L(R)$ deki bir I elemanının temel eleman olması için gerek ve yeter koşul I nin sonlu üretilmiş ideal ve herhangi maksimal ideal M için R_M nin I_M idealinin sonlu üretilmiş ideal olmasıdır. Bakınız, [23].
- (2) Eğer R yerel halka ise $L(R)$ deki bir I elemanının temel eleman olması için gerek ve yeter koşul I nin temel ideal olmasıdır. Bakınız, [22].

Yukarıdaki Notta ve Örnek 2.1.33 te açıklanan durum yarıgruplar için daha karmaşıktır.

Örnek 2.1.35 Çarpımsal olarak 0_S ve 1_S elemanına sahip S , değişmeli yarı grubunu hatırlayalım, bakınız Örnek 2.1.12. S nin her temel ideali, $L(S)$ nin infimum temel elemanıdır fakat, supremum temel elemanı olmak zorunda değildir [22]. Bakınız Örnek 2.1.36.

İspat S de herhangi temel (a) idealinin infimum temel eleman olduğunu gösterelim:

S deki herhangi J, K idealleri için $(J \cap (K :_L(a)))(a) \subseteq J(a) \cap K$ sağlanır. Diğer taraftan $y \in J(a) \cap K$ alalım. Buradan $y \in K$ ve bir $j \in J$ için $y = ja$ biçimindedir. Buradan $j \in (K :_L(a))$ ve dolayısıyla $y = ja \in (J \cap (K :_L(a)))(a)$ bulunur. Her çarpımsal latiste ters kapsama sağlanacağından $(J \cap (K :_L(a)))(a) = J(a) \cap K$, yani (a) infimum temel elemandır.

Ancak aşağıdaki örnekten görüleceği gibi bir temel idealin zayıf supremum temel eleman olması gerekmez.

Örnek 2.1.36 $S = \{0_S, 1_S, x, y\}$ kümesi üzerinde çarpma işlemi tanımlı olan bir yarıgrup ve $x = x^2, y = y^2, xy = yx = 0_S$ olsun. Bu durumda (x) ve (y) infimum temel elemanlar iken zayıf supremum temel değildir. Çünkü,

$$(0_S :_L(x)) \vee (x) = (x) \vee (y) = (x, y) \neq S = ((x) :_L(x)) = ((x)(x) :_L(x)) \text{ dir.}$$

Burada ilginç olan temel ideal olmayan maksimal (x, y) idealinin infimum temel eleman olmasıdır [22].

Örnek 2.1.37 $L(R)$, her A ideali için $RA = A$ koşulunu sağlayan değişmeli R halkalarının ideallerinin latisi olsun. R birimli olmayan bir halka olsa bile bu çarpma ile $L(R)$ bir tam latistir. $RA = A$ koşulu sebebiyle $1_L = R$, $L(R)$ için çarpımsal birim elemandır. R nin temel idealleri, $L(R)$ latisinde temel elemandır. Ayrıca $L(R)$ zayıf supremum koşulunu sağlar. Dikkat edilirse burada 1_L kompakt değildir [3].

İspat $a \in R$ olmak üzere $A = (a)$ temel idealini seçelim. Herhangi B ideali için $x \in (AB :_L A)$ alalım. O halde $xa = ba$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. Dolayısıyla $x - b \in (0_R :_L A)$ ve $x \in (0_R :_L A) \cup B$ olur. Ters kapsama her zaman geçerli olduğundan A nin zayıf supremum temel eleman olduğu gösterilmiş olur.

Bu halkaya örnek olarak birimli değişmeli halkaların sonsuz direkt toplamı $R = \sum R_\alpha$ verilebilir. Bu örnekte 1_L kompakt eleman değildir.

Örnek 2.1.38 $L[X] = \{\sum_{i=0}^{\infty} A_i : A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \text{ olacak şekilde } A_i \in L\}$ olsun. $L[X]$,

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i \right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i \wedge B_i)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right) \vee \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i \vee B_i)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\bigvee_{j+k=i} A_j B_k\right)$$

işlemlerini tanımlayalım.

- (1) $L[X]$, en küçük elemanı $\sum_{i=0}^{\infty} 0_L$ ve en büyük elemanı $\sum_{i=0}^{\infty} 1_L$ olan bir çarpımsal latistir.
- (2) $L[X]$ in modüler latis olması için gerek ve yeter koşul L nin modüler olmasıdır.
- (3) Herhangi $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ elemanının asal eleman olması için gerek ve yeter koşul $A_0 = A_1 = A_2 = \dots$ elemanlarının asal veya A_0 elemanının asal ve $1_L = A_1 = A_2 = \dots$ eşitliğinin sağlanmasıdır [3].

Örnek 2.1.39 $L_1, \dots, L_n$ ler birer çarpımsal latis olmak üzere $L = L_1 \times \dots \times L_n$ olsun.

$$(a_1, \dots, a_n) \wedge (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \wedge b_1, \dots, a_n \wedge b_n)$$

$$(a_1, \dots, a_n) \vee (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n)$$

$$(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

işlemleriyle birlikte

- (1) L bir çarpımsal latistir.
- (2) L latisi L_i latislerinin hepsinin sağladığı pek çok özelliği gerçekler.
- (3) Özel olarak $A = (A_1, \dots, A_n)$ elemanının (zayıf) infimum (supremum) temel eleman olması için gerek ve yeter koşul her A_i nin (zayıf) infimum (supremum) temel eleman olmasıdır [3].

Önerme 2.1.40 $x \in L$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

- (1) x infimum (supremum) temel eleman ise x bir zayıf infimum (supremum) temel elemandır.
- (2) x in bir zayıf infimum eleman olması için gerek ve yeter koşul $a \leq x$ iken $a = xc$ olacak şekilde bir $c \in L$ bulunmasıdır.

- (3) x in bir zayıf supremum eleman olması için gerek ve yeter koşul $ax \leq bx$ iken $a \leq b \vee (0_L :_L x)$ olmasıdır.
- (4) x in bir supremum eleman olması için gerek ve yeter koşul her $a \in L$ için $a \vee x$ elemanın L/a latisinde zayıf supremum temel eleman olmasıdır.
- (5) L modüler latis ise x in (zayıf) infimum temel eleman olması $a \vee x$ elemanın L/a latisinde (zayıf) infimum temel eleman olmasını gerektirir.
- (6) L modüler latis ise x in temel eleman olması için gerek ve yeter koşul zayıf temel eleman olmasıdır [3].

İspat

(1) Aşıkardır.

(2) x bir zayıf infimum eleman ve $a \leq x$ olsun. O halde $a = a \wedge x = (a :_L x)x$ olduğundan $c = (a :_L x)$ olarak bulunur. Tersine $a \wedge x \leq x$ olduğundan bir $c \in L$ için $a \wedge x = cx$ gerçekleşir. O halde $c \leq (a :_L x)$ olup $a \wedge x \leq (a :_L x)x$ olur.

(3), (4) ve (5) nin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

(6) x bir zayıf temel eleman olsun. Herhangi $a, b \in L$ için

$$\begin{aligned} (a \wedge bx) &= x((a \wedge bx) :_L x) = x((a :_L x) \wedge (bx :_L x)) = x((a :_L x) \wedge ((0_L :_L x) \vee b)) \\ &= x(0_L :_L x) \vee ((a :_L x) \wedge b) = x(0_L :_L x) \vee x((a :_L x) \wedge b) = x((a :_L x) \wedge b) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada birinci eşitlik x in zayıf infimum temel eleman olmasından, üçüncü eşitlik zayıf supremum temel eleman olmasından ve dördüncüsü ise L nin modüler olmasından elde edilir.

Şimdi de x in supremum temel eleman olduğunu yani $(xa \vee b) :_L x \leq a \vee (b :_L x)$ olduğunu gösterelim:

x bir zayıf supremum temel eleman olduğundan $x((xa \vee b) :_L x) \leq x(a \vee (b :_L x))$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$x((xa \vee b) :_L x) = (xa \vee b) \wedge x = xa \vee (b \wedge x) = xa \vee x(b :_L x) = x(a \vee (b :_L x)) \text{ dir.}$$

Burada birinci ve üçüncü eşitlik, x in zayıf infimum temel eleman olmasından, ikincisi ise L nin modüler olmasından elde edilir.

Önerme 2.1.41

- (1) x ve y iki infimum temel eleman ise xy de infimum temel elemandır.
- (2) x ve y iki supremum temel eleman ise xy de supremum temel elemandır [3].

İspat

- (1) $(a \wedge (b:_L xy))xy = (a \wedge (b:_L y):_L x)xy = (ax \wedge (b:_L y))y = axy \wedge b$ elde edilir.
- (2) $(a \vee bxy):_L (xy) = (a \vee bxy):_L y):_L x = (a:_L y \vee bx):_L x = (a:_L y):_L x \vee b = a:_L (xy) \vee b$ olarak bulunur.

Tanım 2.1.42 Bir $a \in L$ alalım.

- (1) $a < 1_L$ ise a ya **öz (has) eleman**,
- (2) $a \vee b = 1_L$ ve $ab = 0_L$ olacak şekilde bir $b \in L$ elemanı bulunabiliyor ise a ya **amlanabilir eleman** denir [1].

Tanım 2.1.43 $p \in L$ ve $p < 1_L$ olsun. Her $a, b \in L$ için,

- (1) $ab \leq p$ olması $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyor ise p ye **asal eleman** denir.
- (2) $0_L \neq ab \leq p$ olması $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyor ise p ye **zayıf asal eleman** denir.
- (3) $ab \leq p$ ve $ab \not\leq p^2$ olması $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyor ise p ye **neredeysse asal eleman** denir.
- (4) $a = a^2$ sağlanıyorsa a ya **idempotent** eleman,
- (5) $m \in L, m < 1_L$ elemanı için $m < x \leq 1_L$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in L$ için $x = 1_L$ olması gerekiyor ise m ye **maksimal eleman** denir [7].

Önerme 2.1.44 Çarpımsal latiste her maksimal eleman asal elemandır [2].

İspat m maksimal eleman olsun. $a, b \in L$ için $ab \leq m$ ve $a \not\leq m$ varsayalım. O halde $m \vee a \geq m$ olup, m nin maksimal olmasından $1_L = m \vee a$ elde edilir. Buradan $b = (m \vee a)b = mb \vee ab \leq m$ olur.

Tanım 2.1.45

- (1) Bir $p < 1_L$ elemanı alalım. $ab \leq p$ yı sağlayan her kompakt eleman çifti $a, b \in L$ için $b \not\leq p$ iken bir k pozitif tamsayısı için $a^k \leq p$ ise p ye **asalımsı eleman** denir.
- (2) $a \in L$ için $\sqrt{a} = \bigwedge \{p \in L : p \text{ asal ve } a \leq p\}$ kümesine **a nın radikali** denir.
- (3) $a \in L$ için $\sqrt{a} = a$ ise a ya **radikal eleman** denir.
- (4) q asalımsı ve $\sqrt{q} = p$ asal eleman ise q ya **p –asalımsı eleman** denir [2].

Teorem 2.1.46 Bir elemanın L/d latisinde asal (asalımsı) olması için gerek ve yeter koşul L de asal (asalımsı) olmasıdır [2].

İspat $a, b, c \in L/d$ olsun. $b \circ c \leq a$ olması için gerek ve yeter koşul $bc \leq a$ olması olduğundan a nin L/d de asal (asalımsı) olması için gerek ve yeter koşul L de asal (asalımsı) olmasıdır.

Tanım 2.1.47

- (1) $0_L, 1_L$ de asal eleman ise L ye **tamlık bölgesi**,
- (2) L nin her elemanı temel ise L ye **temel eleman latisi**,
- (3) $L = \{0_L, 1_L\}$ ise L ye **cisim** denir.

Temel eleman latislerinin çeşitli karakterizasyonları için bakınız [25], [26] ve [27].

Bu bölümü bitirirken daha geniş ön bilgi ve notasyon için [2] referansı önemli bir kaynak oluşturur.

2.2 Latis Modül İçin Genel Bilgiler

Bu tezde çarpımsal latis modülleri üzerine çalışacağımız için öncelikle latis modüllerini tanımlayalım.

Tanım 2.2.1 M de bir tam latis olsun. $l, l_\alpha, b \in L$ ve $B, B_\beta \in M$ olmak üzere L ve M nin elemanları arasında aşağıdaki koşulları sağlayan ve lB ile gösterilen bir çarpma varsa M latisine bir L –latis modül denir [5].

- (1) $(lb)B = l(bB)$;
- (2) $(\bigvee_\alpha l_\alpha)(\bigvee_\beta B_\beta) = \bigvee_{\alpha,\beta} l_\alpha B_\beta$;
- (3) $1_L B = B$;
- (4) $0_L B = 0_M$.

Burada M nin en büyük elemanı 1_M ile gösterilmek üzere latis modüller ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır, bakınız [4, 5, 7, 15, 16, 18, 19, 20, 21].

Dikkatle tanıma bakılırsa; her halkanın kendi üzerinde bir modül oluşturduğu gibi, her latis de kendi üzereinde bir latis modül oluşturur.

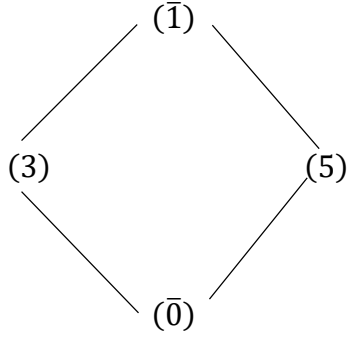
Örnek 2.2.2 R birimli değişmeli bir halka ve M bir R –modül olsun. $L(R)$, R nin bütün ideallerinin oluşturduğu latis ve $L(M)$, M nin bütün alt modüllerinin olmak üzere; $L(M)$ bir $L(R)$ –latis modüldür [3].

Yukarıdaki örneği biraz daha somutlaştıralım:

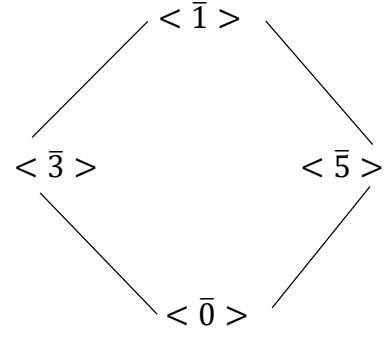
Örnek 2.2.3 $L = L(\mathbb{Z}_{15})$, $\mathbb{Z}_{15}$ halkasının bütün ideallerini ve $M = L(\mathbb{Z}_{15})$, $\mathbb{Z}_{15}$ –modül $\mathbb{Z}_{15}$ nin bütün alt modüllerini temsil etsin. Dolayısıyla,

$L = \{(\bar{0}), (\bar{1}), (\bar{3}), (\bar{5})\}$ ve $M = \{<\bar{0}>, <\bar{1}>, <\bar{3}>, <\bar{5}>\}$ olur. Bu latislerin yapısını aşağıdaki şekil üzerinde görelim.

Çizelge 3. 1 L latisinin yapısı



Çizelge 3. 2 M latis modülünün yapısı



$\cdot : L \times M \rightarrow M$ şeklinde tanımlanan çarpmanın tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 3.3 Çarpma işleminin Değer Tablosu

.	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$
$(\bar{0})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{3})$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$(\bar{5})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$(\bar{1})$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$

Örnek 2.2.4 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{Z}_4$ bir $\mathbb{Z}$ –modüldür. $L = L(\mathbb{Z})$ olarak $\mathbb{Z}$ nin bütün ideallerini ve $M = L(\mathbb{Z}_4)$ olarak ise $\mathbb{Z}_4$ bir $\mathbb{Z}$ –modülünün bütün alt modüllerini alalım. Böylece M bir L –latis modül olur. Gerçekten de;

$I, J, I_\alpha \in L = \{(a) : a \in \mathbb{Z}\}$ ve $N, N_\beta \in M = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ için,

- (1) $(IJ)N = I(JN)$,
- (2) $(\sum I_\alpha)(\sum N_\beta) = \sum I_\alpha N_\beta$,
- (3) $1_L = \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}N = N$,

(4) $0_L = (0)$ olmak üzere $(0)N = (0)$ sağlandığından M, L üzerinde bir latis modüldür.

Örnek 2.2.5 $0_S \in S$ olacak şekilde S , bir değişmeli monoid ve $0_T \in T$ olacak şekilde T , değişmeli bir yarıgrup olsun. Öncelikle $\emptyset \neq I \subseteq S$ için $SI \subseteq S$ oluyorsa I nın S nin bir ideali olarak adlandırıldığını hatırlayalım.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $S \cdot T \rightarrow T$ şeklinde bir çarpma tanımlı olsun. Her $s_1, s_2 \in S$ ve $t \in T$ için;

- $(s_1 s_2)t = s_1(s_2 t),$
- $1_S t = t,$
- $0_S t = 0_T.$

Burada $L = L(S)$ olarak S nin bütün ideallerini ve $M = L(T)$ olarak da T bir bütün ideallerini alalım. Böylece $L(T)$ bir $L(S)$ –latis modüldür [3].

Not 2.2.6 M bir L –latis modül olsun.

(1) $a \in L$ ve $N \in M$ için $(N:_M a) = \bigvee \{X \in M: aX \leq N\},$

(2) $N, K \in M$ için $(N:_L K) = \bigvee \{a \in L: aK \leq N\}$ ile tanımlanır [5].

Tanım 2.2.7 M bir L –latis modül olsun. Bir $N \in M$ elemanı verilsin. Her $b \in L$ ve $B \in M$ için,

(1) $B \wedge bN = ((B:_L N) \wedge b)N$ ise N elemanına **infimum temel eleman** ,

(2) Eğer (1) de $b = 1_L$ alınırsa $B \wedge N = (B:_L N)N$ olur. Bu eşitlik sağlanıyorsa N elemanına **zayıf infimum temel eleman**,

(3) $((bN \vee B):_L N) = (B:_L N) \vee b$ ise N elemanına **supremum temel eleman**,

(4) Eğer (3) de $B = 1_M$ alınırsa $(bN:_L N) = (0_M:_L N) \vee b$ olur. Bu eşitlik sağlanıyorsa ise N elemanına **zayıf supremum temel eleman** adı verilir [4].

Tanım 2.2.8 M bir L –latis modül olsun. Bir $N \in M$ supremum temel eleman ve infimum temel eleman ise N ye **temel eleman** denir [4].

Tanım 2.2.9 M bir L –latis modül olsun. Bir $N \in M$ zayıf supremum temel eleman ve zayıf infimum temel eleman ise N ye **zayıf temel eleman** denir [4].

Tanım 2.2.10 M bir L –latis modül olsun. M deki her eleman temel elemanların supremumu şeklinde yazılabiliyorsa M ye temel elemanlarca üretilmiş latis modül denir ve kısaca **PG –latis modül** olarak ifade edilir [4].

Tanım 2.2.11 M bir L –latis modül olsun. Bir $N \in M$ alalım. $N < 1_M$ ise N ya **öz (has) eleman** denir [1].

Tanım 2.2.12 M bir L –latis modül ve N de M nin bir has elemanı olsun. $a \in L$ ve $X \in M$ olmak üzere,

- (1) $aX \leq N$ iken $X \leq N$ ya da $a \leq (N:_L 1_M)$ oluyorsa N ye **asal eleman** denir.
- (2) $aX \leq N$ ve $X \not\leq N$ iken bir k pozitif tamsayısı için $a^k 1_M \leq N$ (yani $a^k \leq (N:_L 1_M)$) ise N ye **asalımsı eleman** denir.
- (3) $0_M \neq aX \leq N$ iken $X \leq N$ ya da $a \leq (N:_L 1_M)$ oluyorsa N ye **zayıf asal eleman** denir.
- (4) $aX \leq N$ ve $aX \not\leq (N:_L 1_M)N$ iken $X \leq N$ veya $a \leq (N:_L 1_M)$ oluyorsa N elemanına **neredeyse asal eleman** denir.
- (5) Eğer $N = (N:_L 1_M)N$ ise N ye **idempotent eleman** denir.
- (6) Eğer $N < X \leq 1_M$ olduğunda $X = 1_M$ ise N ye **maksimal eleman** denir [4].

Tanım 2.2.13 M bir L –latis modül olsun.

- (1) Eğer 0_M asal eleman ise M ye **asal latis modül** denir.
- (2) Eğer 0_M asalımsı eleman ise M ye **asalımsı latis modül** denir.
- (3) Eğer $M = \{1_M, 0_M\}$ ise M ye **basit latis modül** denir.
- (4) $(1_M:_L 1_M) = 1_L$ ise M ye **sadık latis modül** denir [4].

Not 2.2.14 Açıkça görülebilir ki,

- (1) Her asal eleman zayıf asal elamandır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Bakınız, Örnek 2.2.15.
- (2) Her zayıf asal eleman neredeyse asal elemandır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Bakınız, Örnek 2.2.16.

(3) Her idempotent eleman neredeyse asal elemandır.

(4) Her basit latis modül asal latis modüldür.

Örnek 2.2.15 M bir asal olmayan L –latis modül olsun. Bu modüldeki 0_M elemanı zayıf asal eleman iken asal eleman değildir.

Neredeyse asal eleman olup, zayıf asal olmayan için ise aşağıdaki örneğe bakalım:

Örnek 2.2.16 $\mathbb{Z}$ –modül $\mathbb{Z}_{24}$ ü göz önüne alalım. $L = L(\mathbb{Z})$ ile $\mathbb{Z}$ halkasının bütün ideallerini ve $M = L(\mathbb{Z}_{24})$ ile $\mathbb{Z}_{24}$ modülünün bütün alt modüllerini gösterelim. Böylece M bir L –latis modül olur. $N \in M$ yi özel olarak $\bar{8}$ nin ürettiği devirli alt modül seçelim ve $\langle \bar{8} \rangle = N$ ile gösterelim. Buradan $N = (N :_L 1_M)N$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece N nin neredeyse asal eleman olduğu elde edilir. Diğer taraftan 4 ün ürettiği ideali (4) ile gösterirsek,

$0_M = \langle \bar{0} \rangle \neq (4) \langle \bar{4} \rangle \leq \langle \bar{8} \rangle$ iken $\langle \bar{4} \rangle \not\leq N$ ve $(4) \not\leq (N :_L 1_M)$ olduğundan N zayıf asal eleman olamaz.

Tanım 2.2.17 M bir L –latis modül olsun. $0_M \neq N \in M$ has elemanı olsun. Eğer her $a \in L$ için $aN = a1_M \wedge N$ oluyorsa $N \in M$ ye **saf (pür)** eleman denir.

Tanım 2.2.18 $N \in M$ olsun. Eğer $N \leq \bigvee K_\alpha$ için $N \leq K_{\alpha_1} \vee K_{\alpha_2} \vee \dots \vee K_{\alpha_n}$ olacak şekilde sonlu $\{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, \dots, K_{\alpha_n}\}$ alt kümesi bulunabiliyorsa N elemanına **kompakt eleman** denir.

Tanım 2.2.19 M bir L –latis modül olsun. M deki her eleman kompakt elemanların supremumu şeklinde yazılabiliyorsa M ye kompakt elemanlarca üretilmiş latis modül denir ve kısaca **CG –latis modül** olarak ifade edilir [5].

ÇARPIMSAL LATİS MODÜLLER**3.1 Çarpımsal Latis Modüllere Genel Bakış**

Öncelikle Çarpımsal latis modüllerinde elde edeceğimiz sonuçlarda önemli yer tutan tanımlar ve kullanılan teoremler ile başlamanız uygun olacaktır.

Tanım 3.1.1 $c \in L$ olsun. $a \leq c$ olacak şekilde her $a \in L$ için $a = cd$ şartını sağlayan bir $d \in L$ varsa c elemanına L de **çarpımsal eleman** denir [4].

Tanım 3.1.2 M bir L –latis modül olsun. $K \leq N$ olacak şekilde her $K \in M$ için $K = aN$ şartını sağlayan bir $a \in L$ varsa N elemanına M de **çarpımsal eleman** denir [4].

Önemle belirtilmelidir ki, L de bir a elemanının çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul a nın zayıf infimum temel eleman olmasıdır. Benzer olarak, M de bir N elemanının çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul N nin zayıf infimum temel eleman olmasıdır.

Tanım 3.1.3 M bir L –latis modül olsun. 1_M çarpımsal eleman ise M ye **çarpımsal L –latis modül** denir [4].

Aşağıda Çarpımsal latis modülleri için [4, Theorem 4] de yapılan karakterizasyon verilmiştir. Bu karakterizasyonu ileride kullanacağımız için burada vermek uygun görülmüştür.

Teorem 3.1.4 1_L kompakt olmak üzere L , PG –latis ve M , PG –latis L –modül olsun. Bu durumda M nin bir çarpımsal latis modül olması için gerek ve yeter koşul her maksimal $q \in L$ için aşağıdaki durumlardan en az birini sağlamasıdır.

(1) M deki her Y temel elemanı için, $q_Y \not\leq q$ ve $q_Y Y = 0_M$ olacak şekilde L de bir q_Y temel elemanı vardır.

(2) $b \not\leq q$ ve $b1_M \leq X$ olacak şekilde M de bir X temel elemanı ve L de bir b temel elemanı vardır.

Aşağıdaki teoremi ilerideki ispatlarda çok kullanacağımız için burada vermemiz okuyucular için önemli olacaktır.

Teorem 3.1.5 L , bir PG –latis ve M sadık çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (1) 1_M kompakt elemandır.
- (2) $a, c \in L$ için $a1_M \leq c1_M$ ise $a \leq c$ dir.
- (3) Her $N \in M$ için $N = a1_M$ olacak şekilde bir tek $a \in L$ vardır.
- (4) Herhangi bir has $a \in L$ için $a1_M \neq 1_M$ dir.
- (5) Herhangi bir maksimal $p \in L$ için $p1_M \neq 1_M$ dir.

İspat Bakınız, [4, Theorem 5].

Şimdi bulduğumuz sonuçlara aşağıdaki önerme ile başlayalım.

Önerme 3.1.6 L , bir PG –latis ve 1_M kompakt olmak üzere M , sadık çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Bu durumda $a \in L$ çarpımsal eleman ise $a1_M$ çarpımsal eleman olur.

İspat $K \leq a1_M$ olsun. M çarpımsal modül olduğundan $K = b1_M$ olacak şekilde bir $b \in L$ vardır. Buradan $b1_M \leq a1_M$ olacağından ve 1_M kompakt olduğundan Teorem 3.1.5 ten $b \leq a$ elde edilir. $a \in L$ çarpımsal eleman olduğu için $b = ac$ olacak şekilde $c \in L$ vardır. Böylece $K = b1_M = (ac)1_M = c(a1_M)$ olacağından $a1_M$ çarpımsal eleman olur.

Teorem 3.1.7 L , bir PG –latis ve 1_M kompakt olmak üzere M , sadık çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (1) N nin bir çarpımsal eleman olması için gerek ve yeter koşul her $K \leq N$ için $(K:_L N)(N:_L 1_M) = (K:_L 1_M)$ olmasıdır.
- (2) Her $a \in L$ için $a = (a1_M:_L 1_M)$ dir.
- (3) N nin bir çarpımsal eleman olması için gerek ve yeter koşul $(N:_L 1_M)$ elemanının bir çarpımsal eleman olmasıdır.

(4) $a1_M$ nin bir çarpımsal eleman olması için gerek ve yeter koşul a nın bir çarpımsal eleman olmasıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$: N bir çarpımsal eleman ve $K \leq N$ olsun. N çarpımsal olduğundan $K = bN$ olacak şekilde $b \in L$ vardır. Buradan M çarpımsal modül olduğundan,

$$K = bN = (bN:_L N)N = (bN:_L N)(N:_L 1_M)1_M = (K:_L 1_M)1_M \text{ olur.}$$

Böylece Teorem 3.1.5 (2) den $(K:_L N)(N:_L 1_M) = (K:_L 1_M)$ elde edilir.

$\Leftarrow$: Her $K \leq N$ için,

$$K = (K:_L 1_M)1_M = (K:_L N)(N:_L 1_M)1_M = (K:_L N)N$$

olduğundan N çarpımsal elemandır.

(2) M çarpımsal olduğundan $a1_M = (a1_M:_L 1_M)1_M$, dolayısıyla Teorem 3.1.5 (2) den her $a \in L$ için $a = (a1_M:_L 1_M)$ dir.

(3) $\Rightarrow$: N bir çarpımsal eleman olsun. Eğer $a \leq (N:_L 1_M)$ ise (2) den $a = (a1_M:_L 1_M)$ olur. Buradan (1) durumunu kullanarak $a = (a1_M:_L 1_M) = (a1_M:_L N)(N:_L 1_M)$ yazabiliriz. Böylece $a = c(N:_L 1_M)$ olacak şekilde $c = (a1_M:_L N)$ bulunmuş olur, yani $(N:_L 1_M)$ çarpımsaldır.

$\Leftarrow$: $(N:_L 1_M)$ bir çarpımsal eleman olsun. Buradan Önerme 3.1.6 dan $(N:_L 1_M)1_M = N$ çarpımsal elemandır.

(4) $\Rightarrow$: $N = a1_M$ bir çarpımsal eleman olsun. Böylece (3) ten $a = (N:_L 1_M) = (a1_M:_L 1_M)$ çarpımsal elemandır.

$\Leftarrow$: $a \in L$ bir çarpımsal eleman olsun. Önerme 3.1.6 dan $N = a1_M$ bir çarpımsal elemandır.

Önerme 3.1.8 M bir çarpımsal L –latis modül olsun. Eğer L , Noetherian (Artinian) latis ise M de Noetherian (Artinian) L –latis modül olur.

İspat L , Noetherian latis ve $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ olsun. Buradan L de $(N_1:_L 1_M) \leq (N_2:_L 1_M) \leq \dots$ zincirini elde ederiz. L latisi Noetherian olduğundan $(N_k:_L 1_M) = (N_{k+1}:_L 1_M) = \dots$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. Buradan $(N_k:_L 1_M)1_M = (N_{k+1}:_L 1_M)1_M =$

... yazabiliriz. Böylece M çarpımsal olduğundan $N_k = N_{k+1} = \dots$ elde edilir (İspat benzer olarak L nin Artinian olduğu durum için de yapılabilir).

Tanım 3.1.9 M bir L –latis modül ve $K \in M$ has olsun. Her $K \vee N = 1_M$ olacak şekilde her $N \in M$ için $N = 1_M$ oluyorsa K elemanına **küçük eleman** denir.

Tanım 3.1.10 M bir L –latis modül olsun. Eğer M nin her has elemanı küçük eleman ise M ye **oyuklu L –latis modül** denir.

Teorem 3.1.11 L, PG –latis ve 1_M kompakt olmak üzere M , sadık çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Bu durumda M nin bir hollow L –latis modül olması için gerek ve yeter koşul L nin bir oyuklu L –latis modül olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: M bir oyuklu L –latis modül olsun. Bir $b \in L$ için $a \vee b = 1_L$ olacak şekilde L de $a < 1_L$ alalım. Buradan $(a \vee b)1_M = a1_M \vee b1_M = 1_M$ olur. $a < 1_L$ olduğundan $a1_M < 1_M$ olur. Hipotezimizden $b1_M = 1_M$, dolayısıyla Teorem 3.1.5 (2) den $b = 1_L$ dir. Böylece a elemanı L de küçük elemandır.

$\Leftarrow$: L bir oyuklu L –latis modül olsun. Bir $K \in M$ için $N \vee K = 1_M$ olacak şekilde M de $N < 1_M$ alalım. M çarpımsal olduğundan $N = (N:_L 1_M)1_M$ ve $K = (K:_L 1_M)1_M$ dir. Buradan,

$$1_M = N \vee K = (N:_L 1_M)1_M \vee (K:_L 1_M)1_M = [(N:_L 1_M) \vee (K:_L 1_M)]1_M \text{ elde edilir.}$$

Böylece Teorem 3.1.5 (2) den $(N:_L 1_M) \vee (K:_L 1_M) = 1_L$ olur. $N = (N:_L 1_M)1_M < 1_M$ olduğundan $(N:_L 1_M) < 1_L$ dir. Hipotezden $(K:_L 1_M) = 1_L$ olur. Böylece $K = 1_M$, yani N küçük elemandır.

Teorem 3.1.12 L, PG –latis ve 1_M kompakt olmak üzere M , sadık çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Bu durumda N nin M de bir küçük eleman olması için gerek ve yeter koşul $N = a1_M$ olacak şekilde L de bir a küçük elemanın olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: $N \in M$ küçük eleman olsun. M çarpımsal olduğundan $N = a1_M$ olacak şekilde L de has a elemanı vardır. Bir $b \in L$ için $a \vee b = 1_L$ olsun. Buradan

$$N \vee b1_M = a1_M \vee b1_M = (a \vee b)1_M = 1_M \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla hipotezden $b1_M = 1_M$ olur. Böylece Teorem 3.1.5 den $b = 1_L$ elde ederiz. Sonuç olarak a küçük elemandır.

$\Leftarrow$: $a \in L$ küçük eleman olmak üzere $N = a1_M$ ve bir $K \in M$ için $N \vee K = a1_M \vee K = 1_M$ olsun. M çarpımsal olduğundan $K = b1_M$ olacak şekilde bir $b \in L$ vardır. Böylece $(a \vee b)1_M = a1_M \vee K = 1_M$ elde edilir. Buradan Teorem 3.1.5 (2) den $a \vee b = 1_L$ dir. Hipotezden $b = 1_L$ olur. Sonuç olarak $K = 1_M$, yani $a1_M$ bir küçük elemandır.

Asal eleman tanımını hatırlayacak olursak kolayca görülebilir ki, 0_M elemanının asal eleman olması için gerek ve yeter koşul her $0_M \neq N \in M$ için $(0_{M:L} 1_M) = (0_{M:L} N)$ olmasıdır.

Tanım 3.1.13 M bir L –latis modül olsun. Eğer M deki her $N < 1_M$ için $(0_{M:L} 1_M) = (N_{:L} 1_M)$ oluyorsa M ye **eş-asal latis modül** denir.

Önerme 3.1.14 Her çarpımsal eş-asal latis modül basittir.

İspat M bir eş-çarpımsal asal L –latis modül olsun. $N < 1_M$ olacak şekilde bir $N \in M$ alalım. M eş-asal latis modül olduğundan $(0_{M:L} 1_M) = (N_{:L} 1_M)$ dir. M çarpımsal olduğundan $0_M = (0_{M:L} 1_M)1_M = (N_{:L} 1_M)1_M = N$ elde ederiz. Böylece M basittir.

Tanım 3.1.15 L, PG –latis ve M, PG –latis L –modül olsun. $p \in L$ maksimal eleman olmak üzere, M de her X temel elemanı ve L de q_x temel elemanı için $q_x X = 0_M$ ve $q_x \not\leq p$ olacak şekilde varsa M ye **p –burulmalı latis modül** denir.

Tanım 3.1.16 L, PG –latis ve M, PG –latis L –modül olsun. $p \in L$ de maksimal eleman olmak üzere, $q1_M \leq Z$ ve $q \not\leq p$ olacak şekilde L de q temel elemanı ve M de Z temel elemanı varsa M ye **p –devirli latis modül** denir.

Teorem 3.1.17 L, PG –latis ve M, PG –latis L –modül olsun. $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ kümesi $\bigvee_{\alpha \in \Delta} N_\alpha = N \in M$ olacak şekilde M de bir elemanlar ailesi olsun. Bu durumda $a = \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha_{:L} N)$ olmak üzere $(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ olur. Eğer N_α lar çarpımsal eleman ise aşağıdaki koşulların hepsi denktir:

- (1) N çarpımsal elemandır.
- (2) Her $H \leq N$ için $H = aH$ dir.
- (3) $X \leq N$ olacak şekildeki her X temel elemanı için $1_L = a \vee \text{ann}(X)$ dir.
- (4) M de her K elemanı ve $X \leq N$ olacak şekildeki her X temel elemanı için,

$$(N_{:L} K) \vee \text{ann}(X) = \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_\alpha_{:L} K) \vee \text{ann}(X) \text{ olur.}$$

İspat (1) $\Rightarrow$ (2): $a = \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} N)$ olsun. Buradan $aN = \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} N)N = N$ elde edilir. N çarpımsal eleman olduğundan $H \leq N$ için $H = hN$ olacak şekilde $h \in L$ vardır. Böylece $aH = ahN = h(aN) = hN = H$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): $X \leq N$ olacak şekildeki her X temel elemanı için $1_L \neq \text{ann}(X) \vee a$ olduğunu kabul edelim. O halde $\text{ann}(X) \vee a \leq p$ olacak şekilde bir maksimal $p \in L$ vardır. $X = aX \leq pX \leq X$ olduğundan $pX = X$ elde ederiz. Buradan $1_L = (pX:L X) = p \vee \text{ann}(X)$ olur. Sonuç olarak $\text{ann}(X) \leq a \vee \text{ann}(X) \leq p$ olduğundan bir çelişki elde ederiz.

(3) $\Rightarrow$ (2): $X \leq N$ olacak şekildeki bir X temel elemanı için $1_L = a \vee \text{ann}(X)$ olsun. Böylece $X = (a \vee \text{ann}(X))X = aX$ olduğundan her $H \leq N$ için $H = aH$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4): Durum (3) ü kabul edelim. $\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} K)K \leq \bigvee_{\alpha \in \Delta} N_{\alpha} = N$ olduğundan, $\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} K) \leq (\bigvee_{\alpha \in \Delta} N_{\alpha:L} K) = (N:L K)$ elde ederiz. Böylece $X \leq N$ olacak şekildeki her X temel elemanı için $\bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} K) \vee \text{ann}(X) \leq (N:L K) \vee \text{ann}(X)$ olur.

Tersine, $w_1 \leq (N:L K)$, $w_2 \leq \text{ann}(X)$ ve $w_1 \vee w_2 \leq (N:L K) \vee \text{ann}(X)$ olacak şekilde L de w_1, w_2 temel elemanlarını seçelim. Buradan $1_L = a \vee \text{ann}(X) = \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} N) \vee \text{ann}(X)$ elde edilir. Böylece $w_1 = \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} N) w_1 \vee \text{ann}(X) w_1$ olur. $w_1 K \leq N$ olduğundan $(N_{\alpha:L} N) w_1 K \leq (N_{\alpha:L} N) N \leq N_{\alpha}$, yani $(N_{\alpha:L} N) w_1 \leq (N_{\alpha:L} N)$ olur. Bu durumdan

$$\begin{aligned} w_1 \vee w_2 &= \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} N) w_1 \vee \text{ann}(X) w_1 \vee w_2 \\ &\leq \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} K) \vee \text{ann}(X) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $(N_{\alpha:L} K) \vee \text{ann}(X) \leq \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} K) \vee \text{ann}(X)$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (3): Eğer $K = N$ alırsak $1_L = (N:L N) \vee \text{ann}(X) = a \vee \text{ann}(X)$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1): $X \leq N$ olacak şekildeki her X temel elemanı için $1_L = a \vee \text{ann}(X)$ olsun. N nin p –burulmalı olmadığını kabul edelim. O halde $\text{ann}(X) = (0_M:L X) \leq p$ ve $X \leq N$ olacak şekilde X temel elemanı vardır. $1_L = a \vee \text{ann}(X)$ olduğundan $a = \bigvee_{\alpha \in \Delta} (N_{\alpha:L} N) \not\leq p$ elde ederiz. Buradan $(N_{\alpha:L} N) \not\leq p$ olacak şekilde $\alpha \in \Delta$ vardır. Böylece $b \leq (N_{\alpha:L} N)$ ve $b \not\leq p$ olacak şekilde L de b temel elemanı vardır. N_{α} çarpımsal eleman olduğundan ve p –burulmalı olmadığından Teorem 3.1.4 den N_{α} , p –devirli olur. Gerçekten de eğer N_{α}, p –burulmalı ise bir c temel elemanı için $c \not\leq p$ ve $cN_{\alpha} =$

0_M olur. Dolayısıyla $bN \leq N_\alpha$ olduğundan $bcN \leq cN_\alpha = 0_M$ elde edilir. Buradan $bc \leq (0_M :_L N)$ olur. Böylece $Y \leq N$ olacak şekilde her Y temel elemanı ve $bc \not\leq p$ olacak şekilde her c temel elemanı için $bcY = 0_M$ elde edilir. N, p –burulmalı olmadığından bu bir çelişkidir. Sonuç olarak N_α, p –devirli olur. Böylece $Y_\alpha \leq N_\alpha$ olacak şekilde Y_α temel elemanı ve $d \not\leq p$ olacak şekilde d temel elemanı için $dN_\alpha \leq Y_\alpha$ elde edilir. Buradan $bN \leq N_\alpha$, dolayısıyla $bdN \leq dN_\alpha \leq Y_\alpha$ ve $bd \not\leq p$ olur. Sonuç olarak N, p –devirli elde edilir.

Bilindiği üzere Nakaya Lemma Modül Teoride önemli bir yer tutar. Aşağıdaki teoremden Nakayama Lemma’ yı latis modüllerine genişlettik.

Teorem 3.1.18 (Çarpımsal latis modüller için Nakayama Lemma): M , sıfırdan farklı çarpımsal PG –latis L –modül ve a, L de her q maksimal elemanı için $a \leq q$ şartını sağlayan bir eleman olsun. Bu durumda $a1_M < 1_M$ olur.

İspat a, L de her q maksimal elemanı için $a \leq q$ şartını sağlayan bir eleman olsun. $a1_M = 1_M$ olduğunu kabul edelim. M çarpımsal olduğundan her temel $X \in M$ elemanı için $X = b1_M$ olacak şekilde bir $b \in L$ vardır. Böylece $X = b1_M = ab1_M = aX$ olur. Buradan her X temel elemanı için $1_L = (aX :_L X) = a \vee (0_M :_L X)$ elde edilir. Şimdi temel eleman olan $0_M \neq X \in M$ yi göz önüne alalım. $(0_M :_L X) < 1_L$ olduğundan $(0_M :_L X) \leq p$ olacak şekilde maksimal bir $p \in L$ vardır. Hipotezimizden $a \leq p$ olduğundan $1_L = (aX :_L X) = a \vee (0_M :_L X) \leq p$, yani çelişki elde edilir. Sonuç olarak $a1_M < 1_M$ dir.

Önerme 3.1.19 L bir PG –latis ve M , bir çarpımsal PG –latis L –modül olsun. $(0_M :_L 1_M) \leq p$ olacak şekilde L de bir p asal elemanı olsun. Bu durumda $a \in L$ için $a1_M \leq p1_M$ ise $a \leq p$ veya $p1_M = 1_M$ olur.

İspat Bir $a \in L$ için $a1_M \leq p1_M$ ise M de her X temel elemanı için $aX \leq p1_M$ olur. Böylece [4, Theorem 6] dan $a \leq p$ veya $X \leq p1_M$ olmalıdır. Eğer $a \not\leq p$ ise her X temel elemanı için $X \leq p1_M$ olur. Sonuç olarak $p1_M = 1_M$ elde edilir.

Aşağıdaki önermede maksimal elemanlar karakterize edilecektir.

Önerme 3.1.20 L bir PG –latis ve M bir çarpımsal PG –latis L –modül olsun. Bu durumda $K \in M$ nin maksimal olması için gerek ve yeter koşul $K = p1_M < 1_M$ olacak şekilde bir maksimal $p \in L$ olmasıdır.

İspat $\Leftarrow$: Eğer $K = p1_M < 1_M$ olacak şekilde bir maksimal $p \in L$ varsa [4, Proposition 4] den $K \in M$ maksimaldir.

$\Rightarrow$: $K \in M$ maksimal ve $(K :_L 1_M) = q$ olsun. M çarpımsal olduğundan $K = q1_M$ yazabiliriz. $(K :_L 1_M) = q$ nun maksimal eleman olduğunu gösterelim. Eğer q maksimal değilse $q < p$ olacak şekilde L de bir p maksimal elemanı vardır. Buradan $p1_M \not\leq K$ olur. Çünkü $p1_M \leq K$ olsaydı, $p \leq (K :_L 1_M) = q$ çelişkisi oluşurdu. Böylece $1_M = K \vee p1_M = (q \vee p)1_M = p1_M$ elde edilir. Buradan M deki her X temel elemanı için $X = pX$ olur. Dolayısıyla $1_L = (pX :_L 1_M) = p \vee (0_M :_L X)$ dir. Bu ise $(0_M :_L X) \not\leq p$ olmasını ima eder. Böylece $p_x \leq (0_M :_L X)$ ve $p_x \not\leq p$ olacak şekilde L de p_x temel elemanı vardır. Eğer $X \not\leq K$ olacak şekilde bir temel $X \in M$ alırsak $X \vee K = 1_M$ olur. Böylece $p_x X \vee p_x K = p_x 1_M$, dolayısıyla $p_x K = p_x 1_M \leq K$ elde edilir. Sonuç olarak $p_x \leq (K :_L 1_M) = q < p$ olur, bu ise $p_x \not\leq p$ ile çelişir.

Aşağıdaki teoremden Teorem 3.1.4 deki karakterizasyona benzer bir karakterizasyon elde edeceğiz.

Teorem 3.1.21 1_L kompakt olmak üzere L, CG –latis ve M, PG –latis L –modül olsun. Bu durumda M nin bir çarpımsal latis modül olması için gerek ve yeter koşul her maksimal $q \in L$ için aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

(1) M deki her Y temel elemanı için $q_Y \not\leq q$ ve $q_Y Y = 0_M$ olacak şekilde L de bir q_Y kompakt elemanı vardır.

(2) $b \not\leq q$ ve $b1_M \leq X$ olacak şekilde M de bir X temel elemanı ve L de bir b kompakt elemanı vardır.

İspat $\Rightarrow$: M bir çarpımsal latis L –modül olsun. $q1_M$ için iki durum vardır:

Durum 1: $q1_M = 1_M$ olacak şekilde q maksimal elemanı L de vardır. Buradan M de her Y temel elemanı için $Y = a1_M$ olacak şekilde bir $a \in L$ mevcuttur. O halde $Y = a1_M = aq1_M = qY$ olur. Böylece $1_L = (qY :_L Y) = q \vee (0_M :_L Y)$ elde edilir. Dolayısıyla $(0_M :_L Y) \not\leq q$ olur. Sonuç olarak $q_Y \leq (0_M :_L Y)$ ve $q_Y \not\leq q$ olacak şekilde q_Y kompakt elemanı vardır.

Durum 2: $q1_M < 1_M$ olsun. Bu durumda $j \in L$ için $X = j1_M \not\leq q1_M$ ve $j \not\leq q$ olacak şekilde M de bir X temel elemanı vardır. Böylece $b \leq j$ ve $b \not\leq q$ olacak şekilde L de b kompakt elemanı vardır. Sonuç olarak $b1_M \leq j1_M = X$ elde ederiz.

$\Leftarrow$: $N \in M$ ve $a = (N :_L 1_M)$ olsun. $a1_M = (N :_L 1_M) 1_M \leq N$ olduğu açıktır. $Y \leq N$ olacak şekilde M de Y temel elemanını seçelim. $(a1_M :_L Y) = 1_L$ olduğunu gösterelim:

$(a1_M :_L Y) \leq q$ olacak şekilde bir q maksimal elemanının L de olduğunu kabul edelim. Burada iki durum söz konusudur:

Durum 1: Kabul edelim (1) sağlansın. Bu durumda M deki her Y temel elemanı için $q_Y Y = 0_M$ ve $q_Y \not\leq q$ olacak şekilde L de bir q_Y kompakt elemanı vardır. Buradan $q_Y \leq (0_M :_L Y) \leq (a1_M :_L Y) \leq q$ olur. Bu ise çelişkidir.

Durum 2: Kabul edelim (2) sağlansın. Bu durumda $b1_M \leq X$ olacak şekilde M de X temel elemanı ve L de b kompakt elemanı vardır. Buradan her $N \in M$ için $bN \leq b1_M X$ olur. X bir temel eleman olduğu için $bN = (bN :_L X)X$ eşitliği yazılabilir. Bu durumda $b(bN :_L X) 1_M \leq (bN :_L X)X = bN \leq N$ dolayısıyla, $b(bN :_L X) \leq a = (N :_L 1_M)$ olur. Böylece $b^2 Y \leq b^2 N = b(bN :_L X)X \leq aX \leq a1_M$ elde edilir. Bu ise $b^2 \leq (a1_M :_L Y) \leq q$ anlamına gelir. Böylece q bir maksimal eleman olduğundan (dolayısıyla asal) $b \leq q$ ilişkisi elde edilir.

3.2 Çarpımsal Latis Modüllerinde Bazı Elemanların İncelenmesi

Öncelikle Çarpımsal Latis Modülünün tanımını hatırlayalım.

Tanım 3.2.1 M bir L –latis modül olsun. Eğer her $N \in M$ için $N = a1_M$ olacak şekilde bir $a \in L$ varsa M ye **çarpımsal latis modül** denir [4].

Aşağıdaki önermeyi çok kez kullandığımız için vermekte yarar görüyoruz.

Önerme 3.2.2 M bir L –latis modül olsun. M nin bir çarpımsal latis modül olması için gerek ve yeter koşul her $N \in M$ için $N = (N :_L 1_M)1_M$ olmasıdır.

İspat Bakınız [4, Proposition 3].

Bölüm 2.2 den saf eleman, idempotent eleman, neredeyse asal eleman vb. tanımlara bakılabilir.

Önerme 3.2.3 M çarpımsal L –latis modül ve $N \in M$ olsun. Eğer N saf eleman ise N idempotent eleman dolayısıyla neredeyse asal elemandır.

İspat N saf olsun. O halde $(N:_L 1_M)N = (N:_L 1_M)1_M \wedge N$ yazılabilir. M çarpımsal olduğundan $(N:_L 1_M)1_M \wedge N = N \wedge N = N$ yazılabilir. Böylece $(N:_L 1_M)N = N$ olur yani, N idempotent elemandır. Her idempotent eleman neredeyse asal olduğundan N neredeyse asal elemandır.

M bir L –latis modül olsun. Her $c \in L$ ve her $N \leq D \in M$ için $c \circ D = cD \vee N$ ile bir çarpma tanımlayalım. Bu durumda $M/N = \{B \in M: N \leq B\}$ ailesi de bir L –latis modül olur.

Önerme 3.2.4 M bir L –latis modül ve $N \in M$ bir has eleman olsun. Bu durumda N nin M de neredeyse asal eleman olması için gerek ve yeter koşul N nin $M/(N:_L 1_M)N$ de zayıf asalımsı eleman olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: $N \in M$ neredeyse asal eleman olsun. $0_{M/(N:_L 1_M)N} \neq r \circ X = rX \vee (N:_L 1_M)N \leq N$ olacak şekilde $r \in L$ ve $X \in M/(N:_L 1_M)N$ elemanlarını seçelim. Burada iki durum karşımıza çıkar:

Durum 1: $(N:_L 1_M)N = N$ olsun. Bu durumda $N = (N:_L 1_M)N = 0_{M/(N:_L 1_M)N} \neq r \circ X = rX \vee (N:_L 1_M)N \leq N$ olur. Bu ise çelişki oluşturur.

Durum 2: $(N:_L 1_M)N < N$ olsun. $0_{M/(N:_L 1_M)N} \neq r \circ X = rX \vee (N:_L 1_M)N \leq N$ olduğundan $rX \not\leq (N:_L 1_M)N$ dir. Çünkü $rX \leq (N:_L 1_M)N$ olsaydı, $r \circ X = rX \vee (N:_L 1_M)N = (N:_L 1_M)N = 0_{M/(N:_L 1_M)N}$ olacağından çelişki elde edilirdi. Böylece $rX \leq N$, $rX \not\leq (N:_L 1_M)N$ ve N neredeyse asal eleman olduğundan $X \leq N$ veya $r \leq (N:_L 1_M) = (N:_L 1_{M/(N:_L 1_M)N})$ olmalıdır.

Sonuç olarak N , elemanı $M/(N:_L 1_M)N$ de bir zayıf asal elemandır.

$\Leftarrow$: $N \in M/(N:_L 1_M)N$ bir zayıf asal eleman olsun. $rX \leq N$ ve $rX \not\leq (N:_L 1_M)N$ olacak şekilde $r \in L$ ve $X \in M$ elemanlarını seçelim. $rX \not\leq (N:_L 1_M)N$ ve $r \circ X = rX \vee (N:_L 1_M)N$ olduğundan $r \circ X \neq (N:_L 1_M)N$, yani $r \circ X \neq 0_{M/(N:_L 1_M)N}$ elde edilir. Ayrıca $rX \leq N$ olması $r \circ X \leq N$ yi ima eder. Böylece $N \in M/(N:_L 1_M)N$ bir zayıf asal eleman

olduğundan $X \leq N$ veya $r \leq (N:_L 1_{M/(N:_L 1_M)N}) = (N:_L 1_M)$ elde edilir. Sonuç olarak, N elemanı M de bir neredeyse asal elemandır.

Teorem 3.2.5 M bir L –latis modül ve $K \leq N$ olacak şekilde $N, K \in M$ olsun. Bu durumda N elemanı M de neredeyse asal eleman ise N elemanı aynı zamanda M/K da neredeyse asal eleman olur.

İspat $N \in M$ neredeyse asal eleman olsun. $r \circ X \leq N$ ve $r \circ X \not\leq (N:_L 1_{M/K}) \circ N$ olacak şekilde $r \in L$ ve $X \in M/K$ elemanlarını seçelim. Öncelikle $rX \not\leq (N:_L 1_M)N$ olduğunu gösterelim. $rX \leq (N:_L 1_M)N$ olduğunu kabul edelim. Buradan $rX \vee K \leq (N:_L 1_M)N \vee K$, yani $r \circ X \leq (N:_L 1_M)N \circ N = (N:_L 1_{M/K}) \circ N$ elde edilir. Fakat ilk kabulümüz ile çeliştığımızden $rX \not\leq (N:_L 1_M)N$ olmalıdır. Ayrıca $r \circ X \leq N$ olduğundan $rX \leq N$ yazılabilir. Böylece N neredeyse asal eleman olduğundan $X \leq N$ veya $r \leq (N:_L 1_M) = (N:_L 1_{M/K})$ elde edilir. Sonuç olarak, N elemanı M/K da neredeyse asal elemandır.

M de $K \leq N$ olacak şekilde N ve K elemanlarını seçelim. Bu durumda N nin asal eleman olması için gerek ve yeter şart N nin M/K da asal eleman olmasıdır. Bu durumun bir tarafı neredeyse asal eleman için Teorem 3.2.5 te ispatlanmıştır. Teoremin tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekten görebiliriz:

Örnek 3.2.6 M bir L –latis modül ve N, M de neredeyse asal olmayan eleman olsun. Fakat $N = 0_{M/N}$ elemanı M/N nin bir zayıf asal (ve dolayısıyla neredeyse asal) elemanı olur.

3.3 Çarpımsal Latis Modüllerinde Bazı Elemanların Karakterizasyonları

Bu bölümde Bölüm 2.2 de tanımlanan bazı elemanlar karakterize edilecektir. Ayrıca bazı sonuçlar elde edilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız.

Lemma 3.3.1 M bir C –latis L – modül ve $N_1, N_2 \in M$ olsun. Bir $B \in M$ için aşağıdaki özellik sağlansın:

$$H \leq B \text{ olacak şekilde kompakt } H \in M \text{ için } H \leq N_1 \text{ veya } H \leq N_2 \text{ dir. (*)}$$

Bu durumda $B \leq N_1$ veya $B \leq N_2$ olur.

İspat $B \not\leq N_1$ ve $B \not\leq N_2$ olduğunu kabul edelim. B kompakt elemanların bir supremumu olduğundan $H_1 \leq B, H_1 \not\leq N_1$ ve $H_2 \leq B, H_2 \not\leq N_2$ olacak şekilde M de H_1, H_2 kompakt elemanları vardır. $H = H_1 \vee H_2$ da kompakt olduğundan (*) koşulundan $H \leq N_1$ veya $H \leq N_2$ olur. Bu ise çelişki oluşturur. Sonuç olarak $B \leq N_1$ veya $B \leq N_2$ elde edilir.

Teorem 3.3.2 L bir C –latis, M bir C –latis L –modül ve $N \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (1) N zayıf asal elemandır.
- (2) $a \not\leq (N :_L 1_M)$ olacak şekilde $a \in L$ için $(N :_M a) = N$ veya $(N :_M a) = (0_{M:M} a)$ dır.
- (3) Her $a \in L_*$ ve her $K \in M_*$ için $0_M \neq aK \leq N$ iken $a \leq (N :_L 1_M)$ veya $K \leq N$ olur.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) : N zayıf asal eleman olsun. $H \leq B = (N :_M a)$ ve $a \not\leq (N :_L 1_M)$ olacak şekilde M de bir H kompakt elemanı olsun. Buradan $aH \leq N$ elde edilir. aH için iki durum söz konusudur:

Durum 1: $aH = 0_M$ olsun. Buradan $H \leq (0_{M:M} a)$ olur.

Durum 2: $aH \neq 0_M$ olsun. Böylece $aH \leq N, a \not\leq (N :_L 1_M)$ ve N zayıf asal olduğundan $H \leq N$ elde edilir.

Sonuç olarak Lemma 3.3.1 den $(N :_M a) \leq (0_{M:M} a)$ veya $(N :_M a) \leq N$ olur. Böylece $(N :_M a) = (0_{M:M} a)$ veya $(N :_M a) = N$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Kabul edelim ki (2) sağlansın. Bir $a \in L_*$ ve $K \in M_*$ için $0_M \neq aK \leq N$ ve $a \not\leq (N :_L 1_M)$ olsun. $K \leq N$ olduğunu gösterelim. Kabulumüzden $aK \leq N$ olduğundan $K \leq (N :_M a)$ olur. Burada iki durum karşımıza çıkar:

Durum 1: Eğer $(N :_M a) = N$ ise $K \leq N$ olur.

Durum 2: Eğer $(N :_M a) = (0_{M:M} a)$ ise $aK = 0_M$ olur. Bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak $K \leq N$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Kabul edelim ki (3) sağlansın. Bir $a \in L$ ve $K \in M$ için $aK \leq N$, $a \not\leq (N:_L 1_M)$ ve $K \not\leq N$ olsun. Ayrıca $x_1 \leq a$, $x_1 \not\leq (N:_L 1_M)$ ve $Y_1 \leq K$, $Y_1 \not\leq N$ olacak şekilde $x_1 \in L_*$ and $Y_1 \in M_*$ seçelim. $x_2 \leq a$ ve $Y_2 \leq K$ kompakt elemanlarını da sırasıyla L ve M den seçelim. Burada kabulümüzden $(x_2 \vee x_1)(Y_2 \vee Y_1) = 0_M$ olur, yani $x_2 Y_2 = 0_M$ dir. Böylece $aK = 0_M$ elde edilir. Sonuç olarak N zayıf asal elemandır.

Teorem 3.3.3 L bir C –latis, M bir C –latis L – modül ve $N \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) N neredeyse asal elemandır.

(2) $a \not\leq (N:_L 1_M)$ olacak şekilde $a \in L$ için $(N:_M a) = N$ veya $(N:_M a) = ((N:_L 1_M)N:_M a)$ dir.

(3) Her $a \in L_*$ ve her $K \in M_*$ için $aK \leq N$ ve $aK \not\leq (N:_L 1_M)N$ iken $a \leq (N:_L 1_M)$ veya $K \leq N$ olur.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) : N neredeyse asal eleman olsun. $H \leq B = (N:_M a)$ ve $a \not\leq (N:_L 1_M)$ olacak şekilde M de bir H kompakt elemanı seçelim. Bu durumda $aH \leq N$ elde edilir. Buradan iki durum söz konusudur:

Durum 1: $aH \leq (N:_L 1_M)N$ olsun. Buradan $H \leq ((N:_L 1_M)N:_M a)$ olur.

Durum 2: $aH \not\leq (N:_L 1_M)N$ olsun. $aH \leq N$, $a \not\leq (N:_L 1_M)$ ve N neredeyse asal olduğundan $H \leq N$ elde edilir.

Böylece Lemma 3.3.1 den $(N:_M a) \leq ((N:_L 1_M)N:_M a)$ veya $(N:_M a) \leq N$ olur. Sonuç olarak $(N:_M a) = ((N:_L 1_M)N:_M a)$ veya $(N:_M a) = N$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Kabul edelim ki (2) sağlansın. Bir $a \in L_*$ ve $K \in M_*$ için $aK \leq N$ ve $aK \not\leq (N:_L 1_M)N$ olsun. $a \not\leq (N:_L 1_M)$ olduğunu varsayalım. Şimdi $K \leq N$ olduğunu gösterelim. Kabulümüzden $aK \leq N$ olduğundan $K \leq (N:_M a)$ elde edilir. Burada iki durum karşımıza çıkar:

Durum 1: Eğer $(N:_M a) = N$ ise $K \leq N$ olur.

Durum 2: Eğer $(N:_M a) = ((N:_L 1_M)N:_M a)$ ise $K \leq ((N:_L 1_M)N:_M a)$ olur. Böylece $aK \leq ((N:_L 1_M)N)$ çelişkisi elde edilir.

Sonuç olarak $K \leq N$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Kabul edelim ki (3) sağlansın. Bir $a \in L$ ve $K \in M$ için $aK \leq N$, $aK \not\leq (N:_L 1_M)N$ olsun. $a \not\leq (N:_L 1_M)$ ve $K \not\leq N$ olduğunu varsayalım. Şimdi $x_1 \leq a$, $x_1 \not\leq (N:_L 1_M)$ ve $Y_1 \leq K$, $Y_1 \not\leq N$ olacak şekilde $x_1 \in L_*$ ve $Y_1 \in M_*$ seçelim. Ayrıca $x_2 \leq a$ ve $Y_2 \leq K$ kompakt elemanlarını da sırasıyla L ve M den seçelim. Burada kabulümüzden $(x_2 \vee x_1)(Y_2 \vee Y_1) \leq (N:_L 1_M)N$ olur, yani $x_2 Y_2 \leq (N:_L 1_M)N$ elde edilir. Böylece $aK \leq (N:_L 1_M)N$ çelişkisi oluşur. Sonuç olarak N neredeyse asal elemandır.

Lemma 3.3.4 L bir C –latis, M bir çarpımsal C –latis L – modül ve $N \in M$ olsun. N neredeyse asal eleman ise $\sqrt{((N:_L 1_M)N:_L 1_M)} N = (N:_L 1_M)N$ dir.

İspat Öncelikle $(N:_L 1_M)^2 \leq ((N:_L 1_M)N:_L 1_M)$ olduğunu gösterelim: M çarpımsal olduğundan gerçekten $(N:_L 1_M)(N:_L 1_M)1_M = (N:_L 1_M)N$, yani $(N:_L 1_M)(N:_L 1_M) \leq ((N:_L 1_M)N:_L 1_M)$ olur.

Şimdi $a \leq \sqrt{((N:_L 1_M)N:_L 1_M)}$ olacak şekilde kompakt bir $a \in L$ seçelim.

Eğer $a \leq (N:_L 1_M)$ ise $a(N:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M)^2 \leq ((N:_L 1_M)N:_L 1_M)$ olur. Böylece $aN = a(N:_L 1_M)1_M \leq ((N:_L 1_M)N:_L 1_M)1_M = (N:_L 1_M)N$ elde ederiz.

Eğer $a \not\leq (N:_L 1_M)$ ise Teorem 3.3.3(2) den $(N:_M a) = ((N:_L 1_M)N:_M a)$ veya $(N:_M a) = N$ olmak üzere iki durum karşımıza çıkar:

Durum 1: $(N:_M a) = ((N:_L 1_M)N:_M a)$ olsun. Her zaman $N \leq (N:_M a)$ olduğundan $a(N:_M a) = a((N:_L 1_M)N:_M a) \leq (N:_L 1_M)N$ elde ederiz.

Durum 2: $(N:_M a) = N$ olsun. $a^n \leq ((N:_L 1_M)N:_L 1_M)$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı n olsun. $n = 1$ için $a1_M \leq (N:_L 1_M)N \leq N$ olacağından çelişki elde edilir. $n \geq 2$ olsun. $k \leq n - 1$ için $a^k 1_M \leq (N:_L 1_M)N \leq N$ ve $a^k 1_M \not\leq (N:_L 1_M)N$ olur. Buradan $a^{n-1} 1_M \leq (N:_M a) = N$ ve $a^{n-1} 1_M \not\leq (N:_L 1_M)N$ elde ederiz. Burada $n = 2$ için yine çelişki elde ederiz. $n \geq 3$ olsun. $a(a^{n-2} 1_M) \leq N$ ve $a(a^{n-2} 1_M) \not\leq (N:_L 1_M)N$ olur. Böylece N neredeyse asal eleman olduğundan $a \leq (N:_M a)$ veya $a^{n-2} 1_M \leq N$ elde ederiz. Bu şekilde devam ederek $a \leq (N:_L 1_M)$ çelişkisini buluruz. Böylece $\sqrt{((N:_L 1_M)N:_L 1_M)} N \leq (N:_L 1_M)N$ elde ederiz.

Diğer taraftan, $a \leq (N:_L 1_M)$ olacak şekilde kompakt bir $a \in L$ seçelim. Buradan $a^k 1_M \leq a1_M \leq N$ olduğundan $a^k \leq (N:_L 1_M)$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı

k vardır. Böylece $a^{k+1}1_M \leq a^k N \leq (N:_L 1_M)N$ yani $a^{k+1} \leq ((N:_L 1_M)N:_L 1_M)$ olur. Sonuç olarak $a \leq \sqrt{((N:_L 1_M)N:_L 1_M)}$ elde ederiz.

3.4 Yeni Bir Çarpma Sayesinde Bulunan Tanım Benzerlikleri

Bu bölümde öncelikle bazı elemanların (asal, asalımsı, zayıf asal ve neredeyse asal eleman) önceki bölümden farklı bir şekilde karakterizasyonları yapılacaktır. Aşağıdaki Lemmadan pek çok yerde yararlanıldığı için öncelikle onu ispatlayalım.

Lemma 3.4.1 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda her $a \in L$ için $(aN:_L 1_M) = a(N:_L 1_M)$ olur.

İspat M çarpımsal olduğundan $a(N:_L 1_M)1_M = aN = (aN:_L 1_M)1_M$ olur. Bu durumda [4, Theorem 5] den $a(N:_L 1_M) = (aN:_L 1_M)$ elde ederiz.

Şimdi asal eleman için [4] de ispatlanmış Teoremi, biz de asalımsı eleman için göstereceğiz. Bu teorem daha sonra Teorem 3.4.4 asalımsı elemanları karakterize ederken kullanılacaktır.

Teorem 3.4.2 L , CG –latis ve M , çarpımsal PG –latis L –modül olsun. $a \in L, X \in M$ olmak üzere p elemanı $(0_M:_L 1_M) \leq p$ olacak şekilde L de asalımsı eleman olsun. Bu durumda $aX \leq p1_M$ ise $X \leq p1_M$ veya $a \leq \sqrt{p}$ olur.

İspat M deki X elemanını temel eleman kabul edebiliriz. $aX \leq p1_M$ ve $a \not\leq \sqrt{p}$ olsun. $(p1_M:_L X) = 1_L$ olduğunu gösterelim. $(p1_M:_L X) \leq q$ olacak şekilde L de bir maksimal q elemanı var olsun. Burada Teorem 3.1.21 den iki durum karşımıza çıkar:

Durum 1: Eğer $q_X \not\leq q$ ve $q_X X = 0_M$ olacak şekilde kompakt $q_X \in L$ var ise $q_X \leq (0_M:_L X) \leq (p1_M:_L X) \leq q$ olur, dolayısıyla çelişki oluşur.

Durum 2: Eğer $b \not\leq q$ ve $b1_M \leq Y$ olacak şekilde M de bir Y temel elemanı ve L de bir b kompakt elemanı var ise $bX \leq b1_M \leq Y$ olur. Y temel eleman olduğundan $bX = (bX:_L Y)Y$ dir. $(bX:_L Y) = s$ olsun. Buradan $abX = asY$ olur. Y supremum temel

eleman olduğundan $(abY :_L Y) = as \vee (0_M :_L Y)$ yazabiliriz. Y infimum temel eleman olduğundan $abX = (abX :_L Y)Y$ elde edilir. $(abX :_L Y) = c$ olsun. $cY = abX \leq bp1_M \leq pY$ olduğundan $c \vee (0_M :_L Y) = (cY :_L Y) \leq (pY :_L Y) = p \vee (0_M :_L Y)$ olur. $b(0_M :_L Y)1_M = (0_M :_L Y)b1_M \leq (0_M :_L Y)Y = 0_M$ olduğundan $b(0_M :_L Y) \leq (0_M :_L 1_M) \leq p$ dir. Böylece $bc \vee b(0_M :_L Y) \leq bp \vee b(0_M :_L Y) \leq p$ elde edilir. Dolayısıyla $bc \leq p$ dir. Diğer taraftan $c = (abX :_L Y) = (asY :_L Y) = as \vee (0_M :_L Y)$, yani $abs \leq abs \vee b(0_M :_L Y) = bc \leq p$ olur. Eğer $b \leq \sqrt{p}$ ise b kompakt olduğundan $i = 1, 2, \dots, m$ için $a_i^{n_i} \leq p$ olmak üzere $b \leq a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m$ olur. Bu durumda $k = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ için $b^k \leq a_1^k \vee a_2^k \vee \dots \vee a_m^k$ elde edilir. Buradan $b^k \leq p \leq (p1_M :_L X) \leq q$ olur. Fakat q maksimal olduğundan $b \leq q$ çelişkisi oluşur. Böylece $b \not\leq \sqrt{p}$ olur. Buradan $a \not\leq p, b \not\leq \sqrt{p}$ ve p asalımsı olduğundan $s \leq p$ elde edilir. Dolayısıyla $bX = sY \leq pY \leq p1_M$, yani $b \leq (p1_M :_L X) \leq q$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $X \leq p1_M$ olması gerekir.

Önümüzdeki dört teoremde sırasıyla asal, asalımsı, zayıf asal ve neredeyse asal elemanlar karakterize edilecektir. Bakınız, Teorem 3.4.3, Teorem 3.4.4, Teorem 3.4.5 ve Teorem 3.4.6.

Teorem 3.4.3 $L, 1_L$ kompakt olacak şekilde PG –latis ve M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ elemanı için aşağıdakiler denktir:

- (1) N asaldır.
- (2) $(N :_L 1_M)$ asaldır.
- (3) $N = q1_M$ olacak şekilde L de bir q asal elemanı vardır.

İspat [4, Corollary 3] ile birlikte kolayca ispatlanır.

Teorem 3.4.4 L, CG –latis ve M , çarpımsal PG –latis L –modül olsun. $N < 1_M$ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

- (1) N asalımsı elemandır.
- (2) $(N :_L 1_M)$ asalımsı elemandır.
- (3) $N = p1_M$ ve $(0_M :_L 1_M) \leq p$ olacak şekilde L de bir p asalımsı elemanı vardır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3): Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1): $aX \leq N$ ve $X \not\leq N$ olacak şekilde $a \in L$ ve $X \in M$ seçelim. $N = p1_M$ ve $(0_M :_L 1_M) \leq p$ olacak şekilde L de bir p asalımsı elemanı olduğundan $aX \leq p1_M$ ve $X \not\leq p1_M$ olur. Teorem 3.4.2 ten $a \leq \sqrt{p}$, yani bir k pozitif tam sayısı için $a^k \leq p$ olur. Böylece $a^k \leq (p1_M :_L 1_M) = (N :_L 1_M)$ elde edilir.

Teorem 3.4.5 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ elemanı için aşağıdakiler denktir:

- (1) N zayıf asaldır.
- (2) $(N :_L 1_M)$ zayıf asaldır.
- (3) $N = q1_M$ olacak şekilde L de bir p zayıf asal elemanı vardır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) : N bir zayıf asal eleman olsun. L de a ve b elemanlarını $0_L \neq ab \leq (N :_L 1_M)$ olacak şekilde seçelim. Buradan $ab1_M \leq N$ yazılabileceği açıktır. O halde M sadık ve $0_L \neq ab$ olduğundan $0_M \neq ab1_M$ elde ederiz. Bu durumda N zayıf asal olduğundan $a \leq (N :_L 1_M)$ veya $b1_M \leq N$ olmalıdır. Böylece $(N :_L 1_M)$ elemanı zayıf asaldır.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $(N :_L 1_M)$ elemanı L de zayıf asal olsun. $0_M \neq rX \leq N$ olacak şekilde $r \in L$ ve $X \in M$ seçelim. Lemma 3.4.1 ten $r(X :_L 1_M) = (rX :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$ olur. Ayrıca $r(X :_L 1_M) \neq 0_L$ dir. Çünkü $r(X :_L 1_M) = 0_L$ olsaydı, $rX = r(X :_L 1_M)1_M = 0_L1_M = 0_M$ çelişkisi elde edilirdi. $(N :_L 1_M)$ zayıf asal olduğundan $r \leq (N :_L 1_M)$ veya $(X :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$ olur. Burada M nin çarpımsal olduğunu kullanırsak $r \leq (N :_L 1_M)$ veya $X = (X :_L 1_M)1_M \leq (N :_L 1_M)1_M = N$ elde ederiz. Böylece N zayıf asal eleman olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $q = (N :_L 1_M)$ seçilirse kolayca gösterilir.

(3) $\Rightarrow$ (2) : L de bir q zayıf asal elemanı için $N = q1_M$ olsun. $0_L \neq ab \leq (N :_L 1_M)$ olacak şekilde $a, b \in L$ seçelim. Lemma 3.4.1 ten $ab \leq (N :_L 1_M) = (q1_M :_L 1_M) = q(1_M :_L 1_M) = q$ elde ederiz. Böylece $0_L \neq ab \leq q$ dir. q zayıf asal olduğundan $a \leq q$ veya $b \leq q$ olur. Buradan $a1_M \leq q1_M = N$ veya $b1_M \leq q1_M = N$, yani $a \leq (N :_L 1_M)$ veya $b \leq (N :_L 1_M)$ olur. Sonuç olarak $(N :_L 1_M)$ zayıf asal elemandır.

Teorem 3.4.6 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ elemanı için aşağıdakiler denktir:

- (1) N neredeyse asaldır.
- (2) $(N :_L 1_M)$ neredeyse asaldır.
- (3) $N = q1_M$ olacak şekilde L de bir q neredeyse asal elemanı vardır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) : N bir neredeyse asal eleman olsun. $ab \leq (N :_L 1_M)$ ve $ab \not\leq (N :_L 1_M)^2$ olacak şekilde $a, b \in L$ seçelim. Buradan $ab1_M \leq N$ ve $ab1_M \not\leq (N :_L 1_M)N$ olur. Gerçekten $ab1_M \leq (N :_L 1_M)N$ olsaydı, Lemma 3.4.1 ten $ab \leq ((N :_L 1_M)N :_L 1_M) = (N :_L 1_M)(N :_L 1_M) = (N :_L 1_M)^2$ çelişisini elde ederdik. Sonuç olarak N neredeyse asal olduğundan $a \leq (N :_L 1_M)$ veya $b1_M \leq N$ olmalıdır. Böylece $(N :_L 1_M)$ elemanı L de neredeyse asaldır.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $(N :_L 1_M)$ elemanı L de neredeyse asal olsun. $rX \leq N$ ve $rX \not\leq (N :_L 1_M)N$ olacak şekilde $r \in L$ ve $X \in M$ seçelim. Lemma 3.4.1 ten $r(X :_L 1_M) = (rX :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$ olur. Ayrıca $r(X :_L 1_M) \not\leq (N :_L 1_M)^2$ dir. Eğer

$$r(X :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)^2 = ((N :_L 1_M)N :_L 1_M) \text{ olsaydı,}$$

$$rX = r(X :_L 1_M)1_M \leq ((N :_L 1_M)N :_L 1_M)1_M = (N :_L 1_M)N \text{ çelişkisi elde edilirdi.}$$

$(N :_L 1_M)$ neredeyse asal olduğundan $r \leq (N :_L 1_M)$ veya $(X :_L 1_M) \leq (N :_L 1_M)$ dir. M çarpımsal olduğundan $X = (X :_L 1_M)1_M \leq (N :_L 1_M)1_M = N$ olur. Böylece $r \leq (N :_L 1_M)$ veya $X \leq N$ elde ederiz. Sonuç olarak N neredeyse asal elemandır.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $q = (N :_L 1_M)$ seçilirse kolayca gösterilir.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Bir neredeyse asal $q \in L$ için $N = q1_M$ olsun. $ab \leq (N :_L 1_M)$ ve $ab \not\leq (N :_L 1_M)^2$ olacak şekilde $a, b \in L$ seçelim. Lemma 3.4.1 ten $ab \leq (N :_L 1_M) = (q1_M :_L 1_M) = q(1_M :_L 1_M) = q$ olur. Böylece $ab \leq q$ dir. q neredeyse asal olduğundan $a \leq q$ veya $b \leq q$ elde ederiz. Buradan $a1_M \leq q1_M = N$ veya $b1_M \leq q1_M = N$ yani $a \leq (N :_L 1_M)$ veya $b \leq (N :_L 1_M)$ dir. Sonuç olarak $(N :_L 1_M)$ neredeyse asal elemandır.

Şimdi bir latis modülü üzerinde yeni bir çarpma tanımlayalım.

Tanım 3.4.7 M bir çarpımsal L –latis modül ve $a, b \in L$ olmak üzere $N = a1_M, K = b1_M$ elemanları M de iki eleman olsun. Bu durumda N ve K elemanlarının çarpımı $NK, NK = (a1_M)(b1_M) = ab1_M$ ile tanımlanır.

Bu çarpma iyi tanımlıdır, bunun için aşağıdaki Önerme incelenebilir.

Önerme 3.4.8 M bir çarpımsal L –latis modül ve $a, b \in L$ olmak üzere $N = a1_M, K = b1_M$ elemanları M de iki eleman olsun. Bu durumda NK çarpımı N ve K elemanlarının ifade edilişinden bağımsızdır.

İspat $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ elemanları için $N = a_11_M = a_21_M$ ve $K = b_11_M = b_21_M$ olsun. Bu durumda,

$NK = (a_1b_1)1_M = a_1(b_11_M) = a_1(b_21_M) = b_2(a_11_M) = b_2(a_21_M) = (a_2b_2)1_M$ elde edilir. Sonuç olarak NK çarpımı N ve K nın ifadelerinden bağımsızdır.

Aşağıdaki teoremden, bu yeni tanımlanan çarpma ve önceden asal eleman için yapılan karakterizasyon sayesinde çok önemli bir sonuç bulunmuştur:

- Latisde asal eleman tanımının ifadesiyle latis modülündeki ifadesi bazı özel şartlar altında aynı formdadır; gösterelim.

Teorem 3.4.9 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ için N elemanın M de asal olması için gerek ve yeter koşul $XY \leq N$ olacak şekilde herhangi $X, Y \in M$ için $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: N elemanı M de asal olsun. Herhangi $X, Y \in M$ için $XY \leq N$ iken $X \not\leq N$ ve $Y \not\leq N$ olsun. Ayrıca $X = (X:L 1_M)1_M$ ve $Y = (Y:L 1_M)1_M$ olduğundan $XY = (X:L 1_M)(Y:L 1_M)1_M$ elde ederiz. M çarpımsal olduğu için $(X:L 1_M) \not\leq (N:L 1_M)$ ve $(Y:L 1_M) \not\leq (N:L 1_M)$ olur (aksi hal çelişki oluşturur). Bu durumda Teorem 3.4.3 ten $(N:L 1_M)$ nin L de asal olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $(X:L 1_M)(Y:L 1_M) \not\leq (N:L 1_M)$ elde ederiz. Bunlara ek olarak, $XY = (X:L 1_M)(Y:L 1_M)1_M \leq N$, yani $(X:L 1_M)(Y:L 1_M) \leq (N:L 1_M)$ çelişkisi oluşur. Böylece $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olmalıdır.

$\Leftarrow$: $XY \leq N$ olacak şekilde herhangi $X, Y \in M$ için $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olduğunu kabul edelim. N elemanın M de asal olduğunu ispatlamak için Teorem 3.4.3 ten $(N:{}_L 1_M)$ nin L de asal olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $r_1 r_2 \leq (N:{}_L 1_M)$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in L$ seçelim. $X = r_1 1_M$ ve $Y = r_2 1_M$ olsun. Buradan $XY = r_1 r_2 1_M \leq N$ yazabiliriz. Kabulümüzden $r_1 1_M = X \leq N$ veya $r_2 1_M = Y \leq N$ yani $r_1 \leq (N:{}_L 1_M)$ veya $r_2 \leq (N:{}_L 1_M)$ elde ederiz. Sonuç olarak $(N:{}_L 1_M)$ elemanı L de asal, dolayısıyla N elemanı M de asaldır.

Önceki Teoremde gösterilen önemli sonuç önümüzdeki dört Teoremde; sırasıyla zayıf asal eleman, neredeyse asal eleman ve idempotent eleman için de gösterilmiştir.

Teorem 3.4.10 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ için N elemanının M de zayıf asal olması için gerek ve yeter koşul $0_M \neq XY \leq N$ olacak şekilde herhangi $X, Y \in M$ için $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: N elemanı M de zayıf asal olsun. Herhangi $X, Y \in M$ için $0_M \neq XY \leq N$ iken $X \not\leq N$ ve $Y \not\leq N$ olsun. Ayrıca $X = (X:{}_L 1_M) 1_M$ ve $Y = (Y:{}_L 1_M) 1_M$ olduğundan $XY = (X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) 1_M$ elde ederiz. M çarpımsal olduğu için $(X:{}_L 1_M) \not\leq (N:{}_L 1_M)$ ve $(Y:{}_L 1_M) \not\leq (N:{}_L 1_M)$ olur (aksi hal çelişki oluşturur). Bu durumda Teorem 3.4.5 den $(N:{}_L 1_M)$ nin L de zayıf asal olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $(X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) \not\leq (N:{}_L 1_M)$ veya $(X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) = 0_L$ şeklinde iki durum elde ederiz. Bu durumda

Durum 1: $(X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) \not\leq (N:{}_L 1_M)$ olsun. Buradan

$$Y = (X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) 1_M \leq N, \text{ yani } (X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) \leq (N:{}_L 1_M) \text{ çelişkisi oluşur.}$$

Durum 2: $(X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) = 0_L$ olsun. Bu durumda

$$XY = (X:{}_L 1_M)(Y:{}_L 1_M) 1_M = 0_L 0_M = 0_M \text{ çelişkisi oluşur.}$$

Sonuç olarak $X \leq N$ veya $Y \leq N$ elde ederiz.

$\Leftarrow$: $0_M \neq XY \leq N$ olacak şekilde herhangi $X, Y \in M$ için $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olduğunu kabul edelim. N elemanın M de zayıf asal olduğunu ispatlamak için Teorem 3.4.5 den

$(N:_L 1_M)$ nin L de zayıf asal olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $0_L \neq r_1 r_2 \leq (N:_L 1_M)$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in L$ seçelim. $X = r_1 1_M$ ve $Y = r_2 1_M$ olsun. Buradan $0_M \neq XY = r_1 r_2 1_M \leq N$ yazabiliriz. Gerçekten de eğer $XY = r_1 r_2 1_M = 0_M$ olsaydı, $r_1 r_2 \leq \text{ann}(M) = 0_L$ çelişkisi elde edilirdi. Kabulümüzden $r_1 1_M = X \leq N$ veya $r_2 1_M = Y \leq N$, yani $r_1 \leq (N:_L 1_M)$ veya $r_2 \leq (N:_L 1_M)$ elde ederiz. Sonuç olarak $(N:_L 1_M)$ elemanı L de zayıf asal, dolayısıyla N elemanı M de zayıf asaldır.

Teorem 3.4.11 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda bir $N < 1_M$ için N elemanın M de neredeyse asal olması için gerek ve yeter koşul $XY \leq N$ ve $XY \not\leq (N:_L 1_M)N$ olacak şekilde herhangi $X, Y \in M$ için $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: N elemanı M de neredeyse asal olsun. Herhangi $X, Y \in M$ için $XY \leq N$ ve $XY \not\leq (N:_L 1_M)N$ iken $X \not\leq N$ ve $Y \not\leq N$ olsun. Ayrıca $X = (X:_L 1_M)1_M$ ve $Y = (Y:_L 1_M)1_M$ olduğundan $XY = (X:_L 1_M)(Y:_L 1_M)1_M$ elde ederiz. M çarpımsal olduğu için $(X:_L 1_M) \not\leq (N:_L 1_M)$ ve $(Y:_L 1_M) \not\leq (N:_L 1_M)$ olur (aksi hal çelişki oluşturur). Bu durumda Teorem 3.4.6 den $(N:_L 1_M)$ nin L de neredeyse asal olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $(X:_L 1_M)(Y:_L 1_M) \not\leq (N:_L 1_M)$ veya $(X:_L 1_M)(Y:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M)^2$ şeklinde iki durum elde ederiz.

Durum 1: $(X:_L 1_M)(Y:_L 1_M) \not\leq (N:_L 1_M)$ olsun. Buradan

$$XY = (X:_L 1_M)(Y:_L 1_M)1_M \leq N, \text{ yani}$$

$$(X:_L 1_M)(Y:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M) \text{ çelişkisi oluşur.}$$

Durum 2: $(X:_L 1_M)(Y:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M)^2$ olsun. Lemma 3.4.1 ten,

$$(X:_L 1_M)(Y:_L 1_M) \leq (N:_L 1_M)^2 = ((N:_L 1_M)N:_L 1_M) \text{ olur.}$$

M çarpımsal olduğundan $(X:_L 1_M)(Y:_L 1_M)1_M \leq ((N:_L 1_M)N:_L 1_M)1_M$, yani

$$XY \leq (N:_L 1_M)N \text{ çelişkisi oluşur.}$$

Sonuç olarak $X \leq N$ veya $Y \leq N$ elde ederiz.

$\Leftarrow$: $XY \leq N$ ve $XY \not\leq (N:_L 1_M)N$ olacak şekilde herhangi $X, Y \in M$ için $X \leq N$ veya $Y \leq N$ olduğunu kabul edelim. N elemanın M de neredeyse asal olduğunu ispatlamak için Teorem 3.4.6 den $(N:_L 1_M)$ nin L de neredeyse asal olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunun için $r_1 r_2 \leq (N :_L 1_M)$ ve $r_1 r_2 \not\leq (N :_L 1_M)^2$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in L$ seçelim. $X = r_1 1_M$ ve $Y = r_2 1_M$ olsun. Buradan $XY = r_1 r_2 1_M \leq N$ ve $XY = r_1 r_2 1_M \not\leq (N :_L 1_M)N$ yazabiliriz. Gerçekten $XY = r_1 r_2 1_M \leq (N :_L 1_M)N$ olsaydı Lemma 3.4.1 ten $r_1 r_2 \leq ((N :_L 1_M)N :_L 1_M) = (N :_L 1_M)^2$ çelişkisi elde edilirdi. Kabulümüzden $r_1 1_M = X \leq N$ veya $r_2 1_M = Y \leq N$, yani $r_1 \leq (N :_L 1_M)$ veya $r_2 \leq (N :_L 1_M)$ elde ederiz. Sonuç olarak $(N :_L 1_M)$ elemanı L de neredeyse asal, dolayısıyla N elemanı M de neredeyse asaldır.

Önerme 3.4.12 1_L kompakt olacak şekilde L bir PG –latis ve 1_M kompakt olacak şekilde M çarpımsal sadık PG –latis L –modül olsun. Bu durumda N elemanının M de idempotent olması için gerek ve yeter koşul $N^2 = N$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: N idempotent olduğundan $N = (N :_L 1_M)N$ dir. M çarpımsal olduğundan

$$N^2 = NN = (N :_L 1_M)1_M(N :_L 1_M)1_M = (N :_L 1_M)^2 1_M \text{ elde edilir.}$$

Lemma 3.4.1 ten ve M nin çarpımsal olmasından

$$\begin{aligned} N &= (N :_L 1_M)N = ((N :_L 1_M)N :_L 1_M)1_M \\ &= (N :_L 1_M)(N :_L 1_M)1_M = (N :_L 1_M)^2 1_M \text{ yazılabilir.} \end{aligned}$$

Böylece $N^2 = (N :_L 1_M)^2 1_M = N$ dir.

$\Leftarrow$: $N^2 = N$ olsun. Yukarıdaki gibi $N = N^2 = (N :_L 1_M)^2 1_M = (N :_L 1_M)N$, yani $N = (N :_L 1_M)N$ elde ederiz. Sonuç olarak N idempotent elemandır.

ÇARPIMSAL LATİS MODÜL İLE İKİNCİ LATİS MODÜL VE İKİNCİL LATİS MODÜL ARASINDAKİ İLİŞKİ

4.1 İkinci Latis Modül Ve İkincil Latis Modül

S. O. Dakheel [18] de, ikinci ve ikincil modüllerini tanıtmıştır. Bu modüller ile ilgili pek çok özellik bu çalışmada incelenmiştir. Biz de bu bölümde sözü edilen iki kavramı genişleterek latıs modül formlarını tanımlayacağız. [18] de incelen özellikleri bu tanımladığımız yeni kavramlar için inceleyeceğiz. Öncelikle bu iki kavramı latıs modüllerinde tanımlayalım:

Tanım 4.1.1 M sıfırdan farklı bir L –latıs modül olsun. Her $a \in L$ için $a1_M = 1_M$ veya $a1_M = 0_M$ oluyorsa M ye **ikinci latıs modül** denir.

Tanım 4.1.2 M sıfırdan farklı bir L –latıs modül olsun. Her $a \in L$ için $a1_M = 1_M$ veya $a^n 1_M = 0_M$ olacak şekilde n pozitif tam sayısı bulunabiliyorsa M ye **ikincil latıs modül** denir.

Örnek 4.1.3 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olsun. $\mathbb{Q}$ nun bir $\mathbb{Z}$ –modül olduğunu biliyoruz. $\mathbb{Z}$ nin bütün ideallerinin kümesini $L = L(\mathbb{Z})$ ve $\mathbb{Q}$ nun bütün alt modüllerinin kümesini $M = L(\mathbb{Q})$ ile gösterelim. Böylece M bir L –latıs modül olarak ikinci latıs modül yapısı oluşturur. Çünkü bütün $n \in \mathbb{Z}$ için $(n\mathbb{Z})\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ veya $(n\mathbb{Z})\mathbb{Q} = 0$ olur.

Uyarı 4.1.4 Her ikinci latıs modül, bir ikincil latıs modüldür. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 4.1.5 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{Z}_4$ bir $\mathbb{Z}$ –modüldür. $\mathbb{Z}$ nin bütün ideallerinin kümesini $L = L(\mathbb{Z})$ ve $\mathbb{Z}_4$ ün bütün alt modüllerinin kümesini $M = L(\mathbb{Z}_4)$ ile gösterelim. Böylece M, L –latis modül olarak ikincil latis modül yapısı oluşturur, fakat bu latis modül ikinci latis modül değildir.

Bir latis modül ikinci latis modül veya ikincil latis modül olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 4.1.6 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini göz önüne alalım. $\mathbb{Z}$ nin bütün ideallerinin kümesini $L = L(\mathbb{Z})$ ile gösterelim. Böylece L bir L –latis modül olarak ne ikinci latis modül ne de ikincil latis modüldür.

Önerme 4.1.7 L bir CG –latis ve M sıfırdan farklı bir L –latis modül olsun. L deki her kompakt a elemanı için $a1_M = 1_M$ veya $a1_M = 0_M$ oluyorsa M ikinci latis modül olur.

İspat $r \in L$ olsun. L bir CG –latis olduğundan $r = \bigvee_i c_i$ olacak şekilde L de c_i kompakt elemanları vardır. Buradan $r1_M = (\bigvee_i c_i)1_M = \bigvee_i c_i 1_M$ elde edilir. Hipotezimizden iki durum söz konusudur:

Durum 1: L de c_i kompakt elemanları için $c_i 1_M = 0_M$ olsun. Buradan $r1_M = (\bigvee_i c_i)1_M = \bigvee_i c_i 1_M = 0_M$ dır.

Durum 2: Her kompakt $c_i \in L$ için $c_i 1_M = 1_M$ olsun. Bu durumda $r1_M = (\bigvee_i c_i)1_M = \bigvee_i c_i 1_M = 1_M$ dır.

Sonuç olarak, her $r \in L$ için $r1_M = 1_M$ veya $r1_M = 0_M$ olduğundan M ikinci latis modüldür.

Önerme 4.1.8 M bir ikinci L –latis modül olsun. Buradan $\text{ann}(M) = (0_M :_L 1_M) = p$ elemanı L de asal elemandır. Bu durumda M ye **p –ikinci latis modül** denir.

İspat M bir ikinci L –latis modül olsun. $\text{ann}(M) = p$ elemanın L de has eleman olduğu açıktır. $a, b \in L$ için $ab \leq p$ ve $b \not\leq p$ olsun. Buradan $b1_M \neq 0_M$ olur. M bir ikinci L –latis modül olduğundan $b1_M = 1_M$ olmalıdır. Böylece $ab1_M = 0_M$ ve $b1_M = 1_M$ olduğundan $a1_M = 0_M$ yani $a \leq p$ elde edilir. Sonuç olarak p asal elemandır.

Önerme 4.1.9 M bir ikincil L –latis modül olsun. Buradan $\text{ann}(M)$ elemanı L de asalımsı elemandır.

İspat M bir ikincil L –latis modül olsun. $a, b \in L$ için $ab \leq \text{ann}(M)$ ve $b \not\leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $a \leq p$ olduğunu gösterelim. $ab \leq \text{ann}(M)$ ve $b \not\leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olması $ab1_M = 0_M$ ve her n pozitif tam sayısı için $(b)^n 1_M \neq 0_M$ olmasını ima eder. Bu durumda M bir ikincil L –latis modül olduğu için $b1_M = 1_M$ elde edilir. Böylece $ab1_M = a1_M = 0_M$, yani $a \leq p$ elde edilir. Sonuç olarak $\text{ann}(M)$ asalımsı elemandır.

Önerme 4.1.10 L bir CG –latis ve M bir ikincil L –latis modül olsun. Buradan $\sqrt{\text{ann}(M)} = p$ elemanı L de asal elemandır. Bu durumda M ye **p –ikincil latis modül** denir.

İspat L bir CG –latis ve M bir ikincil L –latis modül olsun. Önerme 4.1.9 dan $\text{ann}(M)$ bir asalımsı elemandır. Böylece [18, Lemma 2.1] den $\sqrt{\text{ann}(M)}$ asal elemandır.

Önerme 4.1.11 L bir tamlık bölgesi ve M sıfırdan farklı bir L –latis modül olsun. Bu durumda M nin $\text{ann}(M) = 0_L$ olacak şekilde bir ikinci L –latis modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $\sqrt{\text{ann}(M)} = 0_L$ olacak şekilde bir ikincil L –latis modül olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$ M bir ikinci L –latis modül olduğundan, M nin bir ikincil L –latis modül olduğu açıktır. Ayrıca L bir tamlık bölgesi olduğu için $\sqrt{\text{ann}(M)} = \sqrt{0_L} = 0_L$ elde edilir.

$\Leftarrow$ M , $\sqrt{\text{ann}(M)} = 0_L$ olacak şekilde bir ikincil L –latis modül olsun. $a1_M \neq 1_M$ olacak şekilde bir $a \in L$ seçelim. M ikincil L –latis modül olduğundan bir n pozitif tam sayısı $a^n 1_M = 0_M$ olacak şekilde vardır. Böylece $a \leq \sqrt{\text{ann}(M)} = 0_L$ olur. Buradan $a1_M = 0_M$ olacağından M nin bir ikinci L –latis modül olduğu elde edilir. Ayrıca kolayca $\text{ann}(M) = 0_L$ olduğu görülebilir.

Önerme 4.1.12 L bir CG –latis, M bir L –latis modül ve $N \in M$ pür eleman olsun. Eğer M bir p –ikincil L –latis modül ise $[N, 1_M]$ ve $[0_M, N]$ latis modülleri de birer p –ikincil L –latis modül olur.

İspat M nin bir p –ikincil L –latis modül olduğunu kabul edelim. Bir $s \in L$ seçelim. M bir ikincil L –latis modül olduğundan iki durum karşımıza çıkar:

Durum 1: $s1_M = 1_M$ olsun. Bu durumda,

$$s \cdot 1_{[N, 1_M]} = s \cdot 1_M = s1_M \vee N = 1_M \vee N = 1_M \text{ elde edilir.}$$

Durum 2: $s^t 1_M = 0_M$ olacak şekilde bir t pozitif tam sayısı vardır. Bu durumda,

$$s^t \cdot 1_{[N, 1_M]} = s^t \cdot 1_M = s^t 1_M \vee N = 0_M \vee N = N = 0_{[N, 1_M]} \text{ elde edilir.}$$

Böylece $[N, 1_M]$ bir ikincil L –latis modül olur.

Şimdi $\sqrt{\text{ann}([N, 1_M])} = p$ olduğunu yani $\sqrt{\text{ann}([N, 1_M])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ eşitliğini gösterelim:

$\sqrt{\text{ann}(M)} \leq \sqrt{\text{ann}([N, 1_M])}$ olduğu açıktır. $r \leq \sqrt{\text{ann}([N, 1_M])}$ olacak şekilde bir kompakt $r \in L$ seçelim. r kompakt olduğundan $r^n \cdot 1_{[N, 1_M]} = 0_{[N, 1_M]}$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. Buradan $r^n 1_M \vee N = N$ olur. Böylece $r^n 1_M \leq N$ elde edilir. $r \not\leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olduğunu varsayalım. M bir ikincil latis modül olduğundan $r 1_M = 1_M$ olur. Böylece $1_M = r 1_M \leq N$, yani $1_M = N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $r \leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olmalıdır. Sonuç olarak $\sqrt{\text{ann}([N, 1_M])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ elde edilir.

$[0_M, N]$ nin p -ikincil L –latis modül olduğunu göstermek için bir $a \in L$ seçelim. N saf eleman olduğundan $aN = a 1_M \wedge N$ yazılabilir. M nin ikincil latis modül olmasından $a 1_M = 1_M$ veya $a^n 1_M = 0_M$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. Bu ise $aN = N$ veya $a^n N = a^n 1_M \wedge N = 0_M$ olması anlamına gelir. Böylece $a \cdot 1_{[0_M, N]} = a \cdot N = aN \vee 0_M = aN = N = 1_{[0_M, N]}$ veya $a^n \cdot 1_{[0_M, N]} = a^n \cdot N = a^n N \vee 0_M = a^n N = 0_M = 0_{[0_M, N]}$ elde edilir. Sonuç olarak $[0_M, N]$ bir ikincil latis modüldür.

Şimdi $\sqrt{\text{ann}([0_M, N])} = p$ olduğunu yani $\sqrt{\text{ann}([0_M, N])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ eşitliğini gösterelim:

$\sqrt{\text{ann}(M)} \leq \sqrt{\text{ann}([0_M, N])}$ olduğu açıktır. $c \leq \sqrt{\text{ann}([0_M, N])}$ olacak şekilde bir kompakt $c \in L$ seçelim. c kompakt olduğundan $c^k \cdot N = c^k N = 0_{[0_M, N]} = 0_M$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı vardır. N pür eleman olduğundan $c^k N = c^k 1_M \wedge N = 0_M$ yazılabilir. $c \not\leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olduğunu varsayalım. M bir ikincil latis modül olduğundan $c 1_M = 1_M$, dolayısıyla $c^k 1_M = 1_M$ elde edilir. Buradan $0_M = c^k N = N \wedge c^k 1_M = N \wedge 1_M = N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $c \leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olmalıdır. Sonuç olarak $\sqrt{\text{ann}([0_M, N])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ elde edilir.

Önerme 4.1.13 M sıfırdan farklı bir L –latis modül ve $N \in M$ saf eleman olsun. M nin bir p –ikinci L –latis modül olması için gerek ve yeter koşul $[0_M, N]$ ve $[N, 1_M]$ nin birer p –ikinci L –latis modül olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: M bir p –ikinci L –latis modül olsun. Bir $a \in L$ seçelim. N saf olduğundan $aN = a1_M \wedge N$ yazılabilir. M ikinci latis modül olduğundan $a1_M = 1_M$ veya $a1_M = 0_M$ olur. Bu ise $aN = N$ veya $aN = 0_M$ olmasını ima eder. Böylece $[0_M, N]$ bir ikinci latis modüldür. Şimdi $ann(M) = ann([0_M, N])$ olduğunu gösterelim:

Öncelikle $ann(M) \leq ann([0_M, N])$ olduğu açıktır. $r \leq ann([0_M, N])$ olacak şekilde bir $r \in L$ seçelim. Buradan $rN = 0_M$ elde edilir. $r \not\leq ann(M)$ olduğunu varsayalım. M bir ikinci latis modül olduğundan $r1_M = 1_M$ olur. Buradan $0_M = rN = N \wedge r1_M = N \wedge 1_M = N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $r \leq ann(M)$ olmalıdır. Sonuç olarak $ann(M) = ann([0_M, N])$ elde edilir.

$[N, 1_M]$ bir p –ikinci L –latis modül olduğunu gösterelim:

$t \in L$ olsun. M ikinci latis modül olduğu için $t1_M = 1_M$ veya $t1_M = 0_M$ olur.

Durum 1: Eğer $t1_M = 1_M$ ise $t \cdot 1_{[N, 1_M]} = t \cdot 1_M = t1_M \vee N = 1_M \vee N = 1_M = 1_{[N, 1_M]}$ olur.

Durum 2: Eğer $t1_M = 0_M$ ise $t \cdot 1_{[N, 1_M]} = t \cdot 1_M = t1_M \vee N = 0_M \vee N = N = 0_{[N, 1_M]}$ olur. Böylece $[N, 1_M]$ bir ikinci latis modüldür.

Son olarak $ann(M) = ann([N, 1_M])$ olduğunu gösterelim:

$ann(M) \leq ann([N, 1_M])$ olduğu açıktır. $s \leq ann([N, 1_M])$ olacak şekilde bir $s \in L$ seçelim. Buradan $s \cdot 1_{[N, 1_M]} = 0_{[N, 1_M]}$ elde edilir. Dolayısıyla $s1_M \vee N = N$ yani $s1_M \leq N$ dir. $s \not\leq ann(M)$ olduğunu varsayalım. M bir ikinci latis modül olduğundan $s1_M = 1_M$ olur. Buradan $1_M = s1_M \leq N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $s \leq ann(M)$ olmalıdır. Sonuç olarak $ann(M) = ann([N, 1_M])$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $ann([0_M, N]) = ann([N, 1_M]) = p$ olmak üzere $[0_M, N]$ ve $[N, 1_M]$ latis modüllerinin birer ikinci L –latis modül olduğunu kabul edelim. $r \in L$ olsun. Bu durumda iki durum söz konusudur:

Durum 1: $r \leq \text{ann}([0_M, N]) = \text{ann}([N, 1_M])$ ise $rN = 0_M$ ve $r \cdot 1_{[N, 1_M]} = r \cdot 1_M = r1_M \vee N = N$ olur. Buradan $r1_M \leq N$ elde edilir. Böylece $0_M = rN = N \wedge r1_M = r1_M$ elde edilir.

Durum 2: $r \not\leq \text{ann}([0_M, N]) = \text{ann}([N, 1_M])$ ise $[0_M, N]$ bir ikinci L –latis modül olduğundan $rN = N$ olur. N pür eleman olduğu için $N = rN = N \wedge r1_M$ yani $N \leq r1_M$ dir. $[N, 1_M]$ bir ikinci L –latis modül ve $r \not\leq \text{ann}([N, 1_M])$ olduğundan $r \cdot 1_{[N, 1_M]} = r1_M \vee N = 1_{[N, 1_M]} = 1_M$ yazılabilir. Böylece $r1_M = 1_M$ elde edilir.

Sonuç olarak M nin bir ikinci L –latis modül olduğu ispatlanmış olur. Şimdi $\text{ann}(M) = p$ olduğunu gösterelim:

Öncelikle $\text{ann}(M) \leq \text{ann}([N, 1_M])$ olması açıktır. $s \leq \text{ann}([N, 1_M])$ olacak şekilde bir $s \in L$ seçelim. Buradan $s \cdot 1_{[N, 1_M]} = 0_{[N, 1_M]}$ yani $s \cdot 1_M = N$ dir. Böylece $s1_M \vee N = N$ dolayısıyla $s1_M \leq N$ olur. $s \not\leq \text{ann}(M)$ olduğunu varsayalım. M bir ikinci latis modül olduğundan $s1_M = 1_M$ olur. Buradan $1_M = s1_M \leq N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $s \leq \text{ann}(M)$ olmalıdır. Sonuç olarak $\text{ann}(M) = \text{ann}([N, 1_M])$ elde edilir.

Önerme 4.1.14 L bir CG –latis, M bir L –latis modül ve $N \in M$ saf eleman olsun. Eğer M bir p –ikincil L –latis modül ise $[N, 1_M]$ ve $[0_M, N]$ latis modülleri de birer p –ikincil L –latis modül olur.

İspat M bir p –ikincil L –latis modül olsun. Bir $s \in L$ seçelim. O halde M bir ikincil L –latis modül olduğundan iki durum vardır:

Durum 1: $s1_M = 1_M$ olsun. Bu durumda,

$$s \cdot 1_{[N, 1_M]} = s \cdot 1_M = s1_M \vee N = 1_M \vee N = 1_M \text{ elde edilir.}$$

Durum 2: $s^t 1_M = 0_M$ olacak şekilde bir t pozitif tam sayısı var olsun. Bu durumda,

$$s^t \cdot 1_{[N, 1_M]} = s^t \cdot 1_M = s^t 1_M \vee N = 0_M \vee N = N = 0_{[N, 1_M]} \text{ elde edilir.}$$

Böylece $[N, 1_M]$ bir ikincil L –latis modül olur.

Şimdi $\sqrt{\text{ann}([N, 1_M])} = p$ olduğunu yani $\sqrt{\text{ann}([N, 1_M])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ eşitliğini gösterelim:

$\sqrt{\text{ann}(M)} \leq \sqrt{\text{ann}([N, 1_M])}$ olduğu açıktır. $r \leq \sqrt{\text{ann}([N, 1_M])}$ olacak şekilde bir kompakt $r \in L$ seçelim. r kompakt olduğundan $r^n \cdot 1_{[N, 1_M]} = 0_{[N, 1_M]}$ olmak üzere bir n pozitif tamsayısı vardır. Buradan $r^n 1_M \vee N = N$ olur. Böylece $r^n 1_M \leq N$ elde edilir. $r \not\leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olduğunu varsayalım. M bir ikincil latis modül olduğundan $r 1_M = 1_M$ olur. Böylece $1_M = r 1_M \leq N$, yani $1_M = N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $r \leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olmalıdır. Sonuç olarak $\sqrt{\text{ann}([N, 1_M])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ elde edilir.

Şimdi $[0_M, N]$ nin p –ikincil L –latis modül olduğunu göstermek için bir $a \in L$ seçelim. N pür eleman olduğundan $aN = a 1_M \wedge N$ yazılabilir. M ikincil latis modül olduğu için $a 1_M = 1_M$ veya $a^n 1_M = 0_M$ olacak şekilde n pozitif tam sayısı vardır. Buradan $aN = N$ veya $a^n N = a^n 1_M \wedge N = 0_M$ elde edilir. Bu ise

$a \cdot 1_{[0_M, N]} = a \cdot N = aN \vee 0_M = aN = N = 1_{[0_M, N]}$ veya $a^n \cdot 1_{[0_M, N]} = a^n \cdot N = a^n N \vee 0_M = a^n N = 0_M = 0_{[0_M, N]}$ olmasını ima eder. Sonuç olarak $[0_M, N]$ bir ikincil latis modüldür.

Son olarak $\sqrt{\text{ann}([0_M, N])} = p$ olduğunu yani $\sqrt{\text{ann}([0_M, N])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ eşitliğini gösterelim:

$\sqrt{\text{ann}(M)} \leq \sqrt{\text{ann}([0_M, N])}$ olduğu açıktır. $c \leq \sqrt{\text{ann}([0_M, N])}$ olacak şekilde bir kompakt $c \in L$ seçelim. c kompakt olduğundan $c^k \cdot N = c^k N = 0_{[0_M, N]} = 0_M$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. N pür eleman olduğundan $c^k N = c^k 1_M \wedge N = 0_M$ olur. $c \not\leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olduğunu varsayalım. M bir ikincil latis modül olduğundan $c 1_M = 1_M$, dolayısıyla $c^k 1_M = 1_M$ elde edilir. Buradan $0_M = c^k N = N \wedge c^k 1_M = N \wedge 1_M = N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $c \leq \sqrt{\text{ann}(M)}$ olmalıdır. Sonuç olarak $\sqrt{\text{ann}([0_M, N])} = \sqrt{\text{ann}(M)}$ elde edilir.

Önerme 4.1.15 M sıfırdan farklı bir L -latis modül ve $N \in M$ saf eleman olsun. M nin bir p –ikinci L –latis modül olması için gerek ve yeter koşul $[0_M, N]$ ve $[N, 1_M]$ nin birer p –ikinci L –latis modül olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: M bir p –ikinci L –latis modül olsun. Bir $a \in L$ seçelim. N pür olduğundan $aN = a 1_M \wedge N$ dir. M ikincil latis modül olduğu için $a 1_M = 1_M$ veya $a 1_M = 0_M$ olur.

Buradan $aN = N$ veya $aN = 0_M$ elde edilir. Böylece $[0_M, N]$ bir ikinci latis modüldür. Şimdi $\text{ann}(M) = \text{ann}([0_M, N])$ olduğunu gösterelim:

Öncelikle $\text{ann}(M) \leq \text{ann}([0_M, N])$ olduğu açıktır. $r \leq \text{ann}([0_M, N])$ olacak şekilde bir $r \in L$ seçelim. Buradan $rN = 0_M$ elde edilir. $r \not\leq \text{ann}(M)$ olduğunu varsayalım. M bir ikinci latis modül olduğundan $r1_M = 1_M$ olur. Buradan $0_M = rN = N \wedge r1_M = N \wedge 1_M = N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $r \leq \text{ann}(M)$ olmalıdır. Sonuç olarak $\text{ann}(M) = \text{ann}([0_M, N])$ elde edilir.

$[N, 1_M]$ bir p –ikinci L –latis modül olduğunu gösterelim:

$t \in L$ olsun. M ikinci latis modül olduğu için $t1_M = 1_M$ veya $t1_M = 0_M$ dir. Eğer $t1_M = 1_M$ ise $t \cdot 1_{[N, 1_M]} = t \cdot 1_M = t1_M \vee N = 1_M \vee N = 1_M = 1_{[N, 1_M]}$ olur. Eğer $t1_M = 0_M$ ise $t \cdot 1_{[N, 1_M]} = t \cdot 1_M = t1_M \vee N = 0_M \vee N = N = 0_{[N, 1_M]}$ elde edilir. Böylece $[N, 1_M]$ bir ikinci latis modüldür.

Son olarak $\text{ann}(M) = \text{ann}([N, 1_M])$ olduğunu gösterelim:

$\text{ann}(M) \leq \text{ann}([N, 1_M])$ olduğu açıktır. $s \leq \text{ann}([N, 1_M])$ olacak şekilde bir $s \in L$ seçelim. Buradan $s \cdot 1_{[N, 1_M]} = 0_{[N, 1_M]}$ elde edilir. Dolayısıyla $s1_M \vee N = N$, yani $s1_M \leq N$ dir. $s \not\leq \text{ann}(M)$ olduğunu varsayalım. M bir ikinci latis modül olduğundan $s1_M = 1_M$ olur. Buradan $1_M = s1_M \leq N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $s \leq \text{ann}(M)$ olmalıdır. Sonuç olarak $\text{ann}(M) = \text{ann}([N, 1_M])$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $\text{ann}([0_M, N]) = \text{ann}([N, 1_M]) = p$ olacak şekilde $[0_M, N]$ ve $[N, 1_M]$ latis modüllerinin birer ikinci L –latis modül olduğunu kabul edelim. $r \in L$ olsun. Bu durumda iki durum söz konusudur:

Durum 1: $r \leq \text{ann}([0_M, N]) = \text{ann}([N, 1_M])$ ise $rN = 0_M$ ve $r \cdot 1_{[N, 1_M]} = r \cdot 1_M = r1_M \vee N = N$ olur. Buradan $r1_M \leq N$ dir. Böylece $0_M = rN = N \wedge r1_M = r1_M$ olur.

Durum 2: $r \not\leq \text{ann}([0_M, N]) = \text{ann}([N, 1_M])$ ise $[0_M, N]$ bir ikinci L –latis modül olduğundan $rN = N$ dir. N pür eleman olduğu için $N = rN = N \wedge r1_M$, yani $N \leq r1_M$ dir. $[N, 1_M]$ bir ikinci L –latis modül ve $r \not\leq \text{ann}([N, 1_M])$ olması $r \cdot 1_{[N, 1_M]} = r1_M \vee N = 1_{[N, 1_M]} = 1_M$ eşitliğini ima eder. Böylece $r1_M = 1_M$ elde edilir. Sonuç olarak M nin bir ikinci L –latis modül olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $\text{ann}(M) = p$ olduğunu gösterelim:

$\text{ann}(M) \leq \text{ann}([N, 1_M])$ olması açıktır. $s \leq \text{ann}([N, 1_M])$ olacak şekilde bir $s \in L$ seçelim. Buradan $s \cdot 1_{[N, 1_M]} = 0_{[N, 1_M]}$ yani $s \cdot 1_M = N$ dir. Böylece $s1_M \vee N = N$ dolayısıyla $s1_M \leq N$ olur. $s \not\leq \text{ann}(M)$ olduğunu varsayalım. M bir ikinci latis modül olduğundan $s1_M = 1_M$ dir. Buradan $1_M = s1_M \leq N$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $s \leq \text{ann}(M)$ olmalıdır. Sonuç olarak $\text{ann}(M) = \text{ann}([N, 1_M])$ elde edilir.

Tanım 4.1.16 M bir L –latis modül ve $N \neq 1_M$ olsun. Her $r \in L$ ve $X \in M$ için $r^2X \leq N$ iken $rX \leq N$ oluyorsa N ye **yarı asal eleman** denir.

Uyarı 4.1.17 N, M de bir has eleman olsun. N nin yarı asal olması için gerek ve yeter koşul $r \in L, X \in M$ ve k pozitif tam sayı olmak üzere $r^kX \leq N$ iken $rX \leq N$ olmasıdır.

M bir L –latis modül olsun. M de her asal elemanın yarı asal eleman olduğunu kolayca gösterebiliriz. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki önermede eğer M yi çarpımsal ve ikincil latis modül alırsak bunun tersinin de doğru olduğunu gösterdik.

Önerme 4.1.18 M bir çarpımsal ve ikincil L –latis modül olsun. $1_M \neq N \in M$ için N nin yarı asal olması için gerek ve yeter koşul N nin asal olmasıdır.

İspat N nin yarı asal olduğunu kabul edelim. $rX \leq N$ olmak üzere $r \in L$ ve $X \in M$ seçelim. M ikincil latis modül olduğundan $r1_M = 1_M$ veya $r^n1_M = 0_M$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. Şimdi bu iki durumu inceleyelim:

Durum 1: Eğer $r1_M = 1_M$ ise M çarpımsal olduğundan $X = rX$ elde edilir. Böylece $X = rX \leq N$ olur.

Durum 2: Eğer $r^n1_M = 0_M$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı var ise $r^n1_M \leq N$ olur. O halde N nin yarı asal olmasından $r1_M \leq N$ elde edilir.

Sonuç olarak N bir asal elemandır. İspatın diğer yönü açıktır.

4.2 Çarpımsal Latis Modül ile İkinci Latis Modül ve İkincil Latis Modülleri Arasındaki İlişki

S. O. Dakheel [18] de, çarpımsal modül kavramı ile ikinci modül ve ikincil modül kavramlarını birleştiren iki sonucu elde etmiştir.

- Her çarpımsal ikinci modül asal modüldür [18].
- Her çarpımsal ikincil modül asalımsı modüldür [18].

Biz de Bölüm 4.1 de tanıttığımız ikinci latis modül ve ikincil latis modül kavramlarını çarpımsal latis modül kavramı ile birleştiren neler elde edebileceğimizi araştırdık.

Önerme 4.2.1 Her çarpımsal ikincil latis modül bir asalımsı latis modüldür.

İspat M bir çarpımsal ikincil L –latis modül olsun. $rX = 0_M$ olacak şekilde bir $r \in L$ ve $X \in M$ seçelim. $r \notin \sqrt{\text{ann}(M)}$ olduğunu kabul edelim. M ikincil latis modül olduğundan $r1_M = 1_M$ elde edilir. Ayrıca M çarpımsal latis modül olduğundan $rX = X$ olur. Böylece $X = 0_M$ elde edilir. Sonuç olarak M asalımsı latis modüldür.

Önerme 4.2.2 Her çarpımsal ikinci latis modül bir asal latis modüldür.

İspat M bir çarpımsal ikinci L –latis modül olsun. M çarpımsal latis modül olduğundan her $N \in M$ için $N = a1_M$ olacak şekilde bir $a \in L$ vardır. Ayrıca M ikinci latis modül olduğundan $a1_M = 1_M$ veya $a1_M = 0_M$ olur. Buradan her $N \in M$ için $N = 1_M$ veya $N = 0_M$ yani M basit latis modüldür. 2.2.14 den her basit latis modül asal latis modül olduğundan M asaldır.

Yukarıdaki Önerme, [18] de modül yapısında incelenmiş ve her çarpımsal ikinci modülün asal modül olduğu ispatlanmıştır.

Tanım 4.2.3 L bir tamlık bölgesi ve M bir sıfırdan farklı L –latis modül olsun. Her $0_L \neq r \in L$ için $r1_M = 1_M$ ise M ye **bölünebilir latis modül** denir.

Tanım 4.2.4 M bir sıfırdan farklı L –latis modül olsun. Eğer $r1_M = 0_M$ olacak şekilde bir $0_L \neq r \in L$ varsa M ye **burulmalı latis modül** denir.

Önerme 4.2.5 L bir tamlık bölgesi ve M bir ikincil L –latis modül olsun. Bu durumda M bölünebilir latis modüldür veya burulmalı latis modüldür.

İspat M nin bölünebilir olmadığını kabul edelim. O halde bir $0_L \neq r \in L$ için $r1_M \neq 1_M$ olmalıdır. M ikincil latis modül olduğundan $r^n 1_M = 0_M$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. $0_L \neq r$ ve L tamlık bölgesi olduğundan $r^n \neq 0_L$ elde edilir. Böylece $s1_M = 0_M$ olacak şekilde $0_L \neq r^n = s \in L$ bulunmuş olur. Sonuç olarak M burulmalıdır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak, tezin amaç bölümünde söz edilen non-modüler yapı elde edilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Çarpımsal Modül kavramının genellemesi olan Çarpımsal Latis Modülün özellikleri üzerine çalışılmıştır. Ayrıca çarpımsal latis modülleri, temel elemanlar ve kompakt elemanlar yardımıyla karakterize edilmiştir. Tezin sonraki bir bölümünde ise; asal eleman, zayıf asal eleman, neredeyse asal eleman ve idempotent eleman tanımları latis modülünde verilmiştir. Daha sonra yeni bir çarpma tanımlayarak bu tanımların, bazı özel şartlar altında latis modülündeki formları ile latisteki formlarının aynı olabileceği gösterilmiştir. Burada açık problem olarak; çarpımsal latis modülünde asalımsı eleman ve pür eleman gibi bazı elemanların latis modülündeki tanımlarının, latisteki tanımlarına denk gelip gelmeyeceği araştırılabilir.

Sonuncu bölümde ise ikinci modül ve ikincil modül kavramları genelleştirilerek ikinci latis modül ve ikincil latis modül kavramları tanımlanmıştır. Çarpımsal latis modül kavramı ile bu yeni iki kavram birleştirilince şu iki sonuç elde edilmiştir.

- 1) Çarpımsal ve ikinci olan bir latis modül, asal latis modüldür.
- 2) Çarpımsal ve ikincil olan bir latis modül, asalımsı latis modüldür.

- [1] R.P. Dilworth, (1962). "Abstract commutative ideal theory, Pacific Journal of Mathematics", 12:481-498.
- [2] D.D.Anderson, (1976). "Abstract Commutative Ideal Theory Without Chain Condition", Algebra Universalis, 6:131-145.
- [3] D.D.Anderson, (1974). Multiplicative lattice, Ph.D Thesis, University of Chicago.
- [4] F.Çallıalp and U.Tekir, (2011). "Multiplication Lattice Modules", Iranian Journal of Science and Technology, A4: 309-313.
- [5] H.M.Nakkar and I.A.Al-Khouja, (1985). "Nakayama's lemma and the principal elements in lattice modules over multiplication lattices", R. J. of Aleppo University, 7:1-16.
- [6] D. Scott Culhan, (2005). Associated Primes and Primal Decomposition in modules and Lattice modules, and their duals, Thesis, University of California, Riverside.
- [7] Eaman A. Al-Khouja, (2003). "Maximal Elements and Prime elements in Lattice Modules", Damascus University for Basic Sciences, 19: 9-20.
- [8] H.M.Nakkar, (1974). "Localization in multiplicative lattice modules", (Russian), Mat. Issled., 2(32):88-108.
- [9] H.M.Nakkar and I.A.Al-Khouja, (1989). "Multiplication elements and Distributive and Supporting elements in Lattice Modules", R.J. of Aleppo University, 11: 91-110.
- [10] H.M.Nakkar and I.A.Al-Khouja, (1985). "Nakayama's Lemma and the principal elements in Lattice Modules over multiplicative lattices", R.J. of Aleppo University, 7:1-16.
- [11] H.M.Nakkar and D.D.Anderson, (1988). "Associates and weakly associated prime elements and primary decomposition in lattice modules", Algebra Universalis, 25:196-209 .
- [12] P. Smith, (1988). "Some remarks on multiplication modules", Arch. Math., 50: 223-235.

- [13] S.E. Atani, F.Çallıalp and U.Tekir, (2007). "A short note on the primary submodules of multiplication modules", *International Journal of Algebra*, (8): 381 – 384.
- [14] H. Ansari-Toroghy, F. Farshadifar, (2012). "On the dual notion of prime submodules", *Algebras Colloquium* 19(1):1109-1116.
- [15] M. M. Ali and D. J. Smith, (2004). "Pure submodules of multiplication modules", *Beitrage zur Algebra and Geometrie*, 45(1): 61-74.
- [16] M. M. Ali and R. I. Khalaf (2010). "Dual notions of prime modules", *Ibn al-Haitam Journal for pure and appl. Sci.* (23).
- [17] H. Ansari-Toroghy and F. Farshadifar, (2007). "The dual notion of multiplication module", *Taiwanese Journal of Math.* (11)4: 1189-1201.
- [18] Shireen Ouda Dakheel, (2010). S-prime submodules and some related concepts, Master Thesis, University of Baghdad, Republic of Iraq.
- [19] F. Callıalp, U. Tekir and E. Aslankarayigit (2014). "On multiplication lattice modules", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(4): 571-579.
- [20] H. Ansari-Toroghy and F. Farshadifar, (2011). "On Multiplication and comultiplication modules", *Acta Mathematica Scientia*, 31B(2):694-700.
- [21] E.W.Johnson and Johnny A. Johnson. (2003). "Lattice Modules over Element Domains", *Comm. in Algebra*, 31(7):3505-3518.
- [22] D.D. Anderson and E.E Johnson, (1984). "Ideal Theory in Commutative Semigroups", *Semigroup Form*, 30:127-158.
- [23] McCarthy P.J., (1971). "Principal Elements of lattices of ideals", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 30:43-45.
- [24] Johnny A. Johnson, (1983). "The Structure of a Class of r-Lattices", *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 32(2): 89-94.
- [25] Jayaram, C. (2002). "Prime elements in multiplicative lattices", *Algebra Universalis*, 48:117-127.
- [26] C. Jayaram and E.W. Johnson, (1997). "Strong compact element in multiplicative lattices", *Czechoslovak Mathematical Journal*, 47(122):105-112.
- [27] C., Jayaram, (2002). "Primary elements in prüfer lattices", *Czechoslovak Mathematical Journal*, 52:585-593.
- [28] Anderson D.D and Jayaram, C. (1996). "Principal element lattices", *Czechoslovak Mathematical Journal*, 48:99-109.
- [29] Callıalp F., Tekir U., Aslankarayigit Ugurlu E., and Oral, K. H., (2014). "Second and Secondary Lattice Modules", *The Scientific World Journal*, 291924:1-4.
- [30] F. Callıalp, C. Jayaram, and U. Tekir, (2012). "Weakly prime elements in multiplicative lattices", *Communications in Algebra*, 40(8):2825–2840.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Emel ASLANKARAYİĞİT UĞURLU
Doğum Tarihi ve Yeri : 01.08.1986 / OSMANİYE
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : emel.aslankarayigit@marmara.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	YTÜ	2016
Y.Lisans	Teorik Matematik	Marmara Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	Marmara Üniversitesi	2009
Lise	Sayısal	TOBB Osmaniye Fen Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012-	Marmara Üniversitesi	Araş. Gör.

YAYINLARI

Makale

- [1] Callialp F., Tekir U., Aslankarayigit E., (2014). "On multiplication lattice modules", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43 (4), Cilt 2014, 571-579.
- [2] Callialp F., Tekir U., Aslankarayigit Ugurlu E., and Oral, K. H., (2014). "Second and Secondary Lattice Modules", The Scientific World Journal, 291924:1-4.
- [3] Aslankarayigit Ugurlu E., Callialp F. and Tekir U., (2015). "Prime, Weakly Prime and Almost Prime Elements in Multiplication Lattice Module" (*Hakemde*)
- [4] Callialp F., Tekir U. and Aslankarayigit Ugurlu E., (2015). "Pure and Dual Notions of Prime Elements in Comultiplication Lattice modules" (*Hakemde*)
- [5] Yetkin E., Aslankarayigit Ugurlu E. and Ulucak G., (2015). "On Phi-2-Absorbing and Phi-2-Absorbing Primary Elements in Multiiplicative Lattices", Palestine Journal of Mathematics (*Baskıda*).
- [6] Badawi A., Tekir U. Aslankarayigit Ugurlu E., Ulucak G. And Yetkin Celikel E. "Generalizations of 2-absorbing primary ideals of commutative rings", Turkish Journal of Mathematics, (*Baskıda*).

Bildiri

- [1] A. Ugurlu E., Callialp, F. & Tekir U., (2015). "Characterization of Lattice Modules Some Elements", Second International Conference on Mathematics and Statistics (ICMS'15). Sharjah, UAE.
- [2] Callialp, F., A. Ugurlu E., & Tekir U., (2015). "A Study on Dual Notions of Prime Element", Second International Conference on Mathematics and Statistics (ICMS'15). Sharjah, UAE.
- [3] Yesilot, G., Ulucak, G. and A. Ugurlu E., (2015). "A Note on 2-Absorbing Delta Primary Ideals", Second International Conference on Mathematics and Statistics (ICMS'15). Sharjah, UAE.
- [4] A. Ugurlu E., Tekir U. and Callialp, F. (2014). "Nakayama Lemma for Multiplication Lattice Module", I. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı (TKMD). Kocaeli, Türkiye.
- [5] Callialp F., Tekir U. and A. Ugurlu E., (2014). "On multiplication Lattice Modules", Third Seminar on Algebra and Its Applications. Ardabil, Iran.
- [6] A. Ugurlu E., Tekir U. and Callialp F., (2014). "Second and Secondary Lattice Modules", 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications(IECMSA-2014). Viyana, Avusturya.
- [7] A. Ugurlu E., Callialp, F. & Tekir U., (2014). "The Elements of Multiplication Lattice Modules", The V Congress of the Mathematicians of Macedonia. Ohrid, Makedonya.

- [8] Aslankarayigit E., Callialp, F. & Tekir U., (2013). "Prime Element and Primary Element in Multiplication Lattice Module", International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences (IWBCMS). Elbasan, Arnavutluk.
- [9] Aslankarayigit E., Callialp, F. & Tekir U., (2013). "On multiplication Lattice Module", 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications(IECMSA-2013). Saraybosna, Bosna-Hersek.
- [10] Ulucak, G., Sengelen Sevim E. and Aslankarayigit E., (2013). "A Note On Modules Over Commutative Rings", 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications(IECMSA-2013). Saraybosna, Bosna-Hersek.