

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AFİN CAYLEY-KLEIN DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

NURTEN (BAYRAK) GÜRSES

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AFİN CAYLEY-KLEIN DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

Nurten (BAYRAK) GÜRSES tarafından hazırlanan tez çalışması 13.11.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Filiz KANBAY

Yıldız Teknik Üniversitesi



The image shows five handwritten signatures in blue ink, each placed above a horizontal line. The signatures are: 1. A large, stylized signature (likely Prof. Dr. Salim YÜCE). 2. A signature with a large loop (likely Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU). 3. A signature with a wavy line (likely Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL). 4. A signature that reads 'F. Özdemir' (likely Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR). 5. A signature that reads 'Ari' (likely Doç. Dr. Filiz KANBAY).

ÖNSÖZ

Bu tezde Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelî hareketler araştırılmış ve bu hareketlere ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkibi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkibi, ivme polü, hareketli koordinat sistemi, kanonik izafe sistemi ve Euler-Savary formülü elde edilmiştir.

Bu çalışmanın hayata geçirilmesinde bilgi, tecrübe ve desteğini benden esirgemeyip, her adımda bana büyük bir özenle yol gösteren saygıdeğer ve kıymetli hocam **Prof. Dr. Salim YÜCE**'ye, beni yaşamımın her aşamasında büyük bir fedakârlıkla destekleyen sevgili **aileme** ve her zaman yanımda olan **eşime** en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bunun yanında doktora sürem boyunca *2211 Doğrudan Doktora Bursu* ile tezimi destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkürü borç bilirim.

Kasım, 2014

Nurten (BAYRAK) GÜRSES

*Canım Babam **Hasan Ali BAYRAK** Anısına,*

Bu doktora tezi, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından *2211 Doğrudan Doktora Bursu* ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
ÇİZELGE LİSTESİ	xii
ÖZET	xiii
ABSTRACT.....	xv
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	5
1.3 Orijinal Katkı.....	6
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	7
BÖLÜM 3	
ÖKLİD DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER.....	13
3.1 Türev Denklemleri.....	16
3.2 Hızlar ve Hızların Terkibi	16
3.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri	18
3.4 İvmeler ve İvmelerin Terkibi	22
BÖLÜM 4	
LORENTZ DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER.....	25
4.1 Türev Denklemleri.....	28
4.2 Hızlar ve Hızların Terkibi	28
4.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri	30
4.4 İvmeler ve İvmelerin Terkibi	33

BÖLÜM 5

GALİLE DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER.....	36
5.1 Türev Denklemleri.....	39
5.2 Hızlar ve Hızların Terkibi	40
5.3 Shear Dönme Polü ve Pol Doğruları (Doğru Demeti).....	41
5.4 İvmeler ve İvmelerin Terkibi	44

BÖLÜM 6

CAYLEY-KLEIN DOKUZ DÜZLEM GEOMETRİSİ	46
6.1 Bir Doğru Üzerindeki İki Nokta Arasındaki Uzaklık Ölçümü ve Geometriler.....	48
6.1.1 Parabolik (Öklidyen) uzaklık	49
6.1.2 Eliptik uzaklık	50
6.1.3 Hiperbolik uzaklık	51
6.2 Bir Noktadan Geçen Doğrular Arasındaki Açılı Ölçümü ve Geometriler	54
6.2.1 Eliptik açılı.....	54
6.2.2 Parabolik açılı	55
6.2.3 Hiperbolik açılı.....	56
6.3 CK-Düzlemlerinde Metrik.....	57
6.3.1 Özel durumlar için bazı metrikler	57
6.4 Afin CK-Düzlem Geometrileri.....	57
6.4.1 P_{ϵ} düzleminde iç çarpım	59
6.4.2 P_{ϵ} düzleminde ortogonal baz vektörleri	61
6.4.3 P_{ϵ} düzleminde norm	61
6.4.4 P_{ϵ} düzleminde diklik (ortogonallık).....	61
6.4.5 P_{ϵ} düzleminde metrik fonksiyonu.....	62
6.4.6 P_{ϵ} düzleminde çember.....	62
6.4.7 P_{ϵ} düzleminde trigonometri	63
6.4.8 P_{ϵ} düzleminde dönme	66
6.4.9 P_{ϵ} düzleminde katı hareket.....	68
6.4.10 P_{ϵ} düzleminde iki doğru arasındaki açılı	69
6.4.11 P_{ϵ} düzleminde Schwartz ve üçgen eşitsizlikleri	70
6.4.12 P_{ϵ} düzleminde lineer dönüşüm	70
6.4.13 P_{ϵ} düzleminde eğriler.....	71
6.4.13.1 P_{ϵ} düzleminde yay uzunluğunun bir diğer ifadesi.....	73
6.4.13.2 P_{ϵ} düzleminde birim hızlı eğriler için Frenet vektör alanları	74
6.4.13.3 P_{ϵ} düzleminde eğrilerin eğriliği	75
6.4.13.4 P_{ϵ} düzleminde birim hızlı eğriler için Frenet türev formülleri.....	75
6.4.13.5 P_{ϵ} düzleminde birim çember üzerindeki dönmeler	77
6.4.13.6 P_{ϵ} düzleminde eğriler ile ilgili fiziksel çıkarımlar	77

BÖLÜM 7

AFİN CK-DÜZLEMİNDE (P_{ϵ}) 1-PARAMETRELİ HAREKETLER	81
7.1 Afın CK-Düzleminde (P_{ϵ}) 1-Parametrelili Hareketler	81
7.2 Türev Denklemleri.....	84
7.3 Hızlar ve Hızların Terkibi	85
7.4 Dönme Polü ve Pol Eğrileri	87
7.5 İvmeler ve İvmelerin Terkibi	91

BÖLÜM 8

AFİN CK-DÜZLEMİNDE (P_{ϵ}) HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ.....	95
8.1 Afın CK-Düzleminde (P_{ϵ}) Hareketli Koordinat Sistemi	95
8.2 Türev Denklemleri.....	96
8.3 Hızlar.....	98
8.4 Birbirine Göre Hareket Eden Birçok Düzlem ve Dönme Polü Planı	102

BÖLÜM 9

AFİN CK-DÜZLEMİNDE (P_{ϵ}) EULER-SAVARY FORMÜLÜ.....	106
9.1 Afın CK-Düzleminde (P_{ϵ}) 1-parametrelili Hareketler Altında Kanonik İzafe Sistemi.....	106
9.2 Euler-Savary Formülü.....	110

BÖLÜM 10

SONUÇ VE ÖNERİLER	113
KAYNAKLAR.....	115

EK-A

LORENTZ DÜZLEMİ.....	119
A-1 Lorentz Düzleminde Metrik Özellikler	120
A-2 Lorentz Düzleminde Açık Kavramı, Dönme ve Trigonometri	122

EK-B

GALİLE DÜZLEMİ	128
B-1 Galile Düzleminde Metrik Özellikler	133
B-2 Galile Düzleminde Trigonometri.....	141
ÖZGEÇMİŞ.....	143

SİMGE LİSTESİ

E^2	Öklid düzlemi
L^2	Lorentz düzlemi
G^2	Galile Düzlemi
P_{ϵ}	Afin Cayley-Klein düzlemi
$\langle , \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\langle , \rangle_G$	Galile iç çarpımı
$\langle , \rangle_{\epsilon}$	Afin Cayley-Klein düzleminde iç çarpım
$d_{AB}^{(P)}$	A ve B noktaları arasındaki parabolik uzaklık
$d_{AB}^{(E)}$	A ve B noktaları arasındaki eliptik uzaklık
$d_{AB}^{(H)}$	A ve B noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık
$\delta_{ab}^{(P)}$	a ve b doğruları arasındaki parabolik açı
$\delta_{ab}^{(E)}$	a ve b doğruları arasındaki eliptik açı
$\delta_{ab}^{(H)}$	a ve b doğruları arasındaki hiperbolik açı
E / E'	Öklid düzleminde 1-parametrelî hareket
L / L'	Lorentz düzleminde 1-parametrelî hareket
G / G'	Galile düzleminde 1-parametrelî hareket
$P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$	Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelî hareket
(P)	Hareketli pol eğrisi
(P')	Sabit pol eğrisi
δ_{AB}	A ve B noktaları arasındaki özel uzaklık

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1. 1	Paralellik aksiyomları..... 3
Şekil 3. 1	1-parametrelî düzlemsel hareket.....14
Şekil 3. 2	Koordinat sistemlerinin çakışması durumu..... 14
Şekil 3. 3	$X = P$ noktasında hareketli ve sabit pol eğrileri..... 21
Şekil 4. 1	Lorentz düzleminde 1-parametrelî hareket 25
Şekil 4. 2	Koordinat sistemlerinin çakışması durumu..... 26
Şekil 5. 1	Galile düzleminde 1-parametrelî hareket 36
Şekil 5. 2	Galile düzleminde bazlar arasındaki ilişki..... 38
Şekil 5. 3	Galile düzleminde 1-parametrelî hareketin pol noktaları..... 42
Şekil 6. 1	İki nokta arasındaki parabolik uzaklık 49
Şekil 6. 2	a) İki nokta arasındaki eliptik uzaklık b) Eliptik hareketlerde yansıma . 50
Şekil 6. 3	İki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık 51
Şekil 6. 4	Merkezil izdüşüm I 53
Şekil 6. 5	Merkezil izdüşüm II 53
Şekil 6. 6	Eliptik açı 54
Şekil 6. 7	Parabolik açı 55
Şekil 6. 8	Hiperbolik açı..... 56
Şekil 6. 9	P_{ϵ} düzleminde birim çemberler..... 63
Şekil 6. 10	P_{ϵ} düzleminde trigonometri 63
Şekil 6. 11	P_{ϵ} düzleminde dönmelerin yönü..... 68
Şekil 6. 12	Açı Ölçümü 75
Şekil 7. 1	Hareketli ve sabit pol eğrileri 90
Şekil 8. 1	Hareketli koordinat sistemi 96
Şekil 8. 2	$P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketi 101
Şekil 8. 3	Düzlemlerin dönme açıları 103
Şekil 8. 4	Pol doğrusu..... 104
Şekil 9. 1	Kanonik izafe sistemi 107
Şekil Ek A. 1	Lorentz düzleminde vektörler 122
Şekil Ek A. 2	Lorentz çemberi ve hiperbolik çember 127
Şekil Ek B. 1	Doğrusal (rectilinear) hareket 128
Şekil Ek B. 2	Shear Hareketi..... 130
Şekil Ek B. 3	a) İki nokta arasındaki uzaklık b) İki nokta arasındaki özel uzaklık 135

Şekil Ek B. 4	Galile geometrisinde çember (circle)	137
Şekil Ek B. 5	Galile geometrisinde sıfır yarıçaplı çember.....	137
Şekil Ek B. 6	Galile geometrisinde açı.....	138
Şekil Ek B. 7	Galile düzleminde sonsuz açı	139
Şekil Ek B. 8	Öklid (sol) ve Galile (sağ) geometrilerinde diklik.....	139
Şekil Ek B. 9	Öklid (sol) ve Galile (sağ) düzleminde en kısa uzaklık	140
Şekil Ek B. 10	Galile geometrisinde paralel iki doğru arasındaki uzaklık.....	141
Şekil Ek B. 11	Galile düzleminde birim çember	142
Şekil Ek B. 12	Galile geometrisinde sinüs toplam formülü.....	142

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 6. 1	Cayley-Klein dokuz düzlem geometrisi	47
Çizelge 6. 2	Geometriler ve dualleri	48
Çizelge 6. 3	Özel durumlar için bazı metrikler	58
Çizelge 10. 1	Genelleştirilmiş kompleks sayılar	114

AFİN CAYLEY-KLEIN DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

Nurten (BAYRAK) GÜRSES

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tez on temel bölüm ve iki ek bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmış olup bu bölümde literatür özeti, tezin amacı ve orijinal katkı verilmiştir. İkinci bölümde, tezin bütünü için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde, sırasıyla, bir t zaman parametresine bağlı olarak Öklid, Lorentz ve Galile düzlemlerde 1-parametrelî düzlemsel hareketler ifade edilmiştir. Ayrıca, bu hareketlere ait türev denklemleri, hızlar, pol noktaları, ivmeler ve ivme polü kavramları ele alınmıştır.

Altıncı bölümde, “bir doğru üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık ölçümü” ve “bir noktadan geçen doğrular arasındaki açı ölçümü” kavramlarıyla tanımlanan Cayley-Klein dokuz düzlem geometrisi ayrıntılı bir biçimde tanıtılmıştır. Bu kavramlar eliptik, parabolik, hiperbolik açı ve uzunluk ölçümleri olup düzlemde Cayley-Klein anlamda 9 geometrinin sınıflandırılması I. M. Yaglom un “A simple non-Euclidean Geometry and its Physical Basis” kitabı esas alınarak verilmiştir [16] . Daha sonra *Afin Cayley-Klein düzlem* kavramı verilmiş ve bu düzlemlerde bazı lineer cebir ve diferansiyel geometri kavramları açıklığa kavuşturulmuştur. Bu düzlemler genel olarak P_{ϵ} olarak isimlendirilmiştir.

Yedinci ve daha sonraki temel bölümler tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Yedinci bölümde, Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelî hareketler incelenmiş, bu hareketlere ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkihi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkihi ve ivme polü elde edilmiştir.

Sekizinci bölümde, Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelî hareketler altında hareketli koordinat sistemi ele alınmıştır.

Dokuzuncu bölümde, yedinci ve sekizinci bölümde verilen 1-parametrelî hareketler ve hareketli koordinat sistemi kavramlarından faydalanılarak kanonik izafe sistemi elde edilmiştir. Bu izafe sistem yardımıyla hareket altında yörünge eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren Euler-Savary formülü hesaplanmıştır.

Onuncu bölüm olan son bölümde orijinal bölümlerde elde edilen sonuçlardan bahsedilmiş ve gelecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Tezin ek kısımlarında ise, tez bütününde ihtiyaç duyulan Lorentz ve Galile düzlemlerine ait temel kavramlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kinematik, 1-parametrelî düzlemsel hareket, Cayley-Klein düzlemleri, Hareketli koordinat sistemi, Euler-Savary formülü

1-PARAMETER PLANAR MOTIONS IN AFFINE CAYLEY-KLEIN PLANE

Nurten (BAYRAK) GÜRSES

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis consists of ten fundamental chapters and two appendix chapters.

First chapter is the introduction chapter includes literature review, objective of the thesis and the original contribution. In the second chapter, the basic concepts required for the whole thesis are given. In the third, fourth and fifth chapters, 1-parameter planar motions in Euclidean, Lorentzian and Galilean planes are expressed with respect to the time parameter t , respectively. Furthermore, the derivative formulae, velocities, pole points and accelerations of these motions are discussed.

In the sixth chapter, the nine Cayley-Klein plane geometry defined by the concepts "measure of length between two points on a straight line" and "measure of angle between between two lines" is presented in a detailed manner. These concepts are elliptic, parabolic, hyperbolic angle and distance measurements and the classification of these nine plane geometries as Cayley-Klein sense based on I. M. Yaglom's book: "A simple non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis" [16] is given. Then, *the concept of affine Cayley-Klein planes* and some linear algebra and differential geometry concepts of these planes are clarified. These planes are called P_{ϵ} in general.

The original parts of this thesis are composed of the seventh chapter and the following fundamental chapters.

In the seventh chapter, 1-parameter planar motion in Affine Cayley-Klein plane are examined and the derivative formulae, velocities-the composition of velocities, pole points, accelerations-the composition of accelerations and acceleration poles are obtained with respect to this movement.

In the eighth chapter, the moving coordinate system under the 1-parameter planar motions in Affine Cayley-Klein planes is discussed.

In the ninth section, the canonical relative system is given with the aim of the notions of 1-parameter planar motions and moving coordinate system given in seventh and eighth chapters. By the help of this canonical relative system, the Euler-Savary formula, which gives the relationship between the curvatures of trajectory curves, is calculated.

In the tenth chapter, which is the last chapter of thesis, the original obtained results are mentioned and some suggestions are made for future studies.

In the appendix parts of thesis, the basic concepts of Lorentzian and Galilean planes needed to whole thesis are given.

Keywords: Kinematics, 1-parameter planar motion, Cayley-Klein planes, Moving coordinate system, Euler-Savary formula.

GİRİŞ

Mekanik cisimlerin hareketini, harekete neden olan etkileri ve cisimlerin denge durumlarını inceleyen fiziğin bir alt bölümüdür. Mekanik; statik, kinematik ve dinamik olmak üzere üç kısma ayrılır. Statik, cisimlerin denge durumlarını; kinematik, kütle ve kuvvet kavramları rol oynamaksızın cisimlerin hareketini; dinamik ise hareketi değiştiren etkenleri inceler.

Kinematik; hareketi doğuran nedenleri göz önüne almadan sadece hareketin geometrisini göz önüne alan bilim dalıdır. Kinematikte belirlenmesi gerekenler her an noktanın veya katı cismin yeri (yörüngesi), hızı ve ivmesidir. Kinematik; yol, hız, ivme ve zaman arasında bağıntılar kurar [1-3].

Bu tezde düzlemsel kinematik ele alınmış, *1-parametrelili düzlemsel hareket* temel referans noktası olmuştur.

1.1 Literatür Özeti

Öklid (M.Ö. 330-275) matematikçilerin içinde adı geometri ile en çok özdeşleştirilen Yunan bilim adamıdır [4-5]. Geometriyi ispat ve aksiyomlara dayalı olarak işleyen 13 ciltlik eseri *The Elements (Elementler)* bu alandaki ilk kapsamlı çalışmadır [6-11]. Öklid geometrisinin aksiyomları şunlardır:

1. İki noktadan bir doğru geçer.
2. Bir doğru her iki ucundan sonsuza kadar uzatılabilir.
3. Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir. (Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri çemberdir).

4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5. Paralellik aksiyomu (Playfair's Axiom): Bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir (iki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse, içte meydana gelen açılarının toplamının 180 dereceden küçük olduğu tarafta bu iki doğru kesişir. Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir).

“Paralellik” kavramından kasıt doğrunun dışında alınan bir noktadan geçen doğrunun esas doğruyu kesmemesidir. Hatta kesişmeyen iki doğruya “paralel doğru” denmektedir (Şekil 1.1).

Öklid geometrisinin kurulmasından yaklaşık iki bin yıl sonra paralellik aksiyomu olarak da bilinen 5. aksiyom matematikçiler arasında büyük tartışmaların kaynağı olmuştur. Bu tartışmalar 19. yüzyılın başlarında yeni geometrilerin kurulmasına ilham vermiştir. Böylelikle 5. aksiyom başka aksiyom(lar) ile değiştirilerek yeni *Öklid-dışı geometriler* kurulmaya başlanmıştır [12-15].

Rus matematikçi Nikolai Lobachevsky (1793-1856), Macar matematikçi Janos Bolyai (1802-1860) ve Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Öklid'in 5. aksiyomunu kanıtlamak yerine bir başkası ile değiştirmeyi seçmekle yeni geometriler kurulabileceğini göstermişler, N.Lobachevsky ve J.Bolyai birbirinden bağımsız olarak *Hiperbolik Geometri*'yi bulmuşlardır. Hiperbolik geometride 5. aksiyomun yerini

- Bir doğruya, dışındaki bir noktadan pek çok paralel çizilebilir (bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden küçüktür¹)

aksiyomu almaktadır [12-15].

1854'te ise Alman matematikçi Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) 5. aksiyomun tersini kabul ederek

- Bir noktadan dışındaki bir doğruya hiçbir paralel doğru çizilemez (bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyüktür)

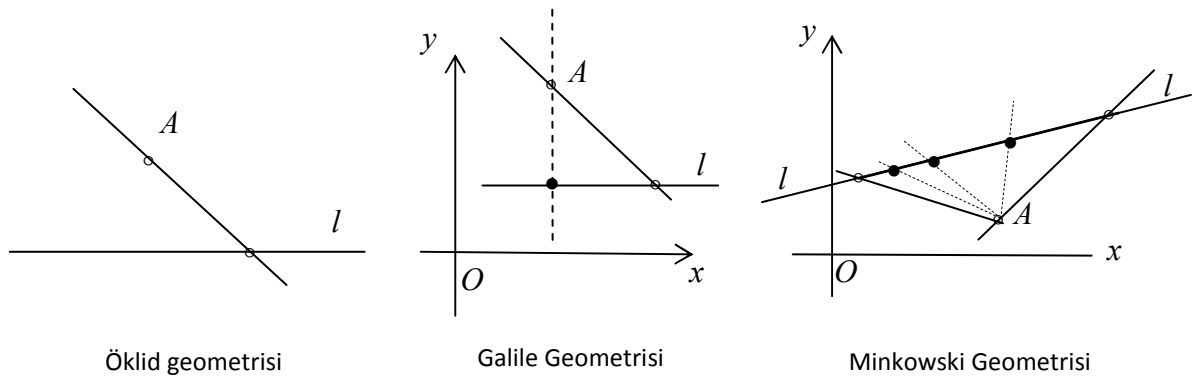
şeklinde ve 2. aksiyomu da

¹ Paralel doğrular kesişmemelerine rağmen asimptot oldukları için birbirlerinden eşit uzaklıkta kalmaz

- Bir doğru sınırsızdır ama sonsuz değildir (yani doğrunun başlangıç ve bitiş noktaları yoktur ama uzunluğu sonludur)

şeklinde değiştirerek *Eliptik (küresel) Geometri*'yi kurmuştur. Riemann'ın aksiyomları tüm doğruların büyük çemberler¹ olduğu kürenin yüzeyindeki geometride gerçekleşmektedir [12-15].

Öklid, Galile ve Minkowski geometrilere bakıldığında; paralellik aksiyomu, sırasıyla, Şekil 1.1 de görüldüğü gibi özetlenebilir.



Şekil 1. 1 Paralellik aksiyomları

Şekil 1.1 de bir l doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir A noktası verilmiştir. A noktasından geçen ve l yi kesen doğru “temel doğru” olarak isimlendirilmektedir. Öklid geometrisine göre A noktasından l doğrusunu kesmeyen bir tek doğru (paralel doğru) geçer. Galile geometrisine göre l doğrusu üzerinde A noktasına paralel olacak biçimde bir tek nokta mevcuttur ve l doğrusunu kesmeyen birden fazla doğru bulunabilir. Minkowski geometrisine göre ise, A noktasından l doğrusunu kesmeyen birden fazla paralel çizilebilir.

20. yüzyılın başında Albert Einstein'ın (1879-1955) geliştirdiği genel görelilik kuramı ile Riemann geometrisi arasındaki uyum, başlangıçta yararsız bulunan Öklid dışı

¹ Büyük çember; merkezi kürenin merkezi olan kürenin yüzeyindeki bir çemberdir. Eliptik geometrideki doğrular iki noktada kesişen büyük çemberlerdir. Bu yüzden hiçbir doğru paralel değildir. Eliptik geometride üçgenin iç açıların toplamı 180° den büyüktür ve üçgenin alanı büyüdükçe açıların toplamı da artar.

geometrilerin üstünlüğünün ilk adımını oluşturmuştur. Ardından David Hilbert'in (1862-1943) sonsuz boyutlu metrik geometrisinin atom kuramının matematiksel yapısını açıklayabileceğinin ortaya çıkmasıyla Öklid dışı geometrilerin önemi daha iyi anlaşılmaya başlanmıştır.

Literatürde düzlem üzerindeki geometrilere bakıldığında, yukarıda sayılan Öklid ve Öklid dışı geometrilere ek olarak birçok düzlemsel geometriye rastlamak mümkündür. I. M. Yaglom tarafından [16] ve [17] de verilen tanımlamalara ve yapılan sınıflandırmalara göre bu geometriler 9 adettir. 1871 yılında Felix Klein (1847-1925) tarafından bu geometrilerin birbirleriyle olan ilişkileri gösterilmiş ve Arthur Cayley (1821-1895) in daha önceki çalışmalarına dayandırılarak *Cayley-Klein geometrileri* olarak isimlendirilmiştir [18-20]. Bu geometriler “bir doğru üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık ölçümü” ve “bir noktadan geçen doğrular arasındaki açı ölçümü” kavramları ile sınıflandırılmış ve genel olarak *Cayley-Klein düzlem geometrileri* olarak adlandırılmıştır. Bu geometrilerden parabolik uzaklık ölçümü ile verilen Öklid, Galile ve Minkowski (Lorentz) geometrileri “*Afin Cayley-Klein Geometrileri*” olarak adlandırılmıştır.

W. Blaschke ve H. R. Müller 1956 yılında E^2 Öklid düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareketi ve bu harekete ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkihi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkihi, ivme polü, hareketli koordinat sistemi, kanonik izafe sistemi ve hareket altında yörünge eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren Euler Savary formülünü elde etmiştir [21-22]. 1991 ve 1992 yıllarında A. A. Ergin E^2 Öklid düzlemi yerine L^2 Lorentz düzlemini alarak 1-parametrelili düzlemsel Lorentz hareketi tanımlamış ve bu hareket esnasındaki hareketli koordinat sistemini incelemiştir [23-24]. L^2 Lorentz düzleminde hareketli koordinat sistemi ve pol noktalarının homotetik hareketlerde karşılığı ise 2001 yılında [25] nolu kaynakta verilmiştir. Lorentz düzleminde kanonik izafe sistemi ve Euler Savary formülü [26-28] nolu kaynaklarda yer alan bilim insanları tarafından literatüre kazandırılmıştır. Euler-Savary formülü birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [29-33].

2013 yılında M. Akar, S. Yüce ve N. Kuruoğlu, 1-parametrelili düzlemsel Galile hareketi ve bu hareket ile ilgili temel kavramları oluşturmuştur [34]. 1-parametrelili düzlemsel

Galile hareketi altında hareketli koordinat sistemi ve Euler Savary formülü M. Akbıyık tarafından çalışılmıştır [35].

1992 ve 1993 yıllarında ise O. Röschel tarafından [36] ve [37] de Afin Cayley-Klein düzleminin projektif yapısı ele alınarak $z = x + Jy$; $J^2 = \{-1, 0, 1\}$ için

$$z^* = ze^{a(t)} + u(t)$$

equiform dönüşümü altında oskülatör çemberlerin yörüngeleri, bu yörüngeler arasındaki ilişki ve Euler-Savary yapısı ele alınmıştır. Ayrıca H. Urban tarafından [38] de Cayley-Klein düzlemlerinde bütünleşik kinematik ilişkileri incelenmiş Euler-Savary ve Bobillier yapısından bahsedilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı; I. M. Yaglom tarafından [16] de bahsedilen Afin Cayley-Klein düzleminde (Öklid, Galile, Lorentz) 1-parametrelili hareketi araştırmak ve bu harekete ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkiibi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkiibi, ivme polü, hareketli koordinat sistemi, kanonik izafe sistemi ve Euler-Savary formülünü elde etmektir.

Bu amaçtan hareketle öncelikle *“bir doğru üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık ölçümü”* ve *“bir noktadan geçen doğrular arasındaki açı ölçümü”* kavramlarıyla tanımlanan Cayley-Klein dokuz düzlem geometrisi ayrıntılı bir biçimde ele alınacaktır. Bu kavramlar eliptik, parabolik, hiperbolik açı ve uzunluk ölçümleri olup düzlemde Cayley-Klein anlamda 9 adet geometrinin sınıflandırılması yapılacaktır. Daha sonra 1-parametrelili düzlemsel hareket tanımlayacağımız *Afin Cayley-Klein düzlem* kavramı verilecek ve bu düzlemde bazı lineer cebir ve diferansiyel geometri kavramları açıklığa kavuşturulacaktır. Afin Cayley-Klein düzlemi genel olarak P_ϵ olarak isimlendirilmiştir [39].

Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareketlerin elde edilmesiyle; $\epsilon=1$ için W. Blaschke ve H. R. Müller tarafından verilen Öklid düzlemindeki 1-parametrelili hareket, $\epsilon=0$ için M. Akar, S. Yüce ve N. Kuruoğlu tarafından verilen Galile düzlemindeki 1-parametrelili hareket ve $\epsilon=-1$ için A.A.Ergin tarafından verilen Lorentz

düzlemindeki 1-parametrelili hareket elde edilmiş olacaktır. Ayrıca Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareketlerin elde edilmesi; Öklid, Galile ve Lorentz düzlemlerindeki hareketlere ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkiibi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkiibi, ivme polü, hareketli koordinat sistemi, kanonik izafe sistemi ve Euler-Savary formülü kavramlarına bir genelleme yapılması anlamı taşımaktadır. Her üç düzlem için ayrı ayrı araştırılan tanım, teorem, eşitlikler ve Euler Savary formülü tek bir adımda literatüre kazandırılacaktır.

1.3 Orijinal Katkı

Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareketlerinin elde edilmesiyle; bu hareketlere ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkiibi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkiibi, ivme polü, hareketli koordinat sistemi, kanonik izafe sistemi ve Euler-Savary formülü kavramlarına bir genelleme yapılması tezin literatüre kazandırdığı orijinal katkıdır. Bu sayede, tek bir adımda 1-parametrelili düzlemsel hareket ve bu harekete bağlı kavramlar elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin orijinal kısmında kullanacağımız bazı temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1 (Afin uzay)

$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V ; K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\text{i)} \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$\text{ii)} \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

özelliklerini sağlayan bir

$$\begin{aligned} f: A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow f(P, Q) \end{aligned}$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir *Afin uzay* denir.

Tanım 2.2 (Öklid uzayı)

V n -boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir Afin uzay olsun. Eğer V bir iç çarpım uzayı ise A ya *Öklid uzayı* denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım 2.3 (Afin Dönüşüm)

K cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 olsun. V_1 ve V_2 ile birleşen Afin uzaylar, sırasıyla, A_1 ve A_2 olmak üzere $f: A_1 \rightarrow A_2$ dönüşümü $P, Q \in A_1$ için

$$\begin{aligned} \psi_p: V_1 &\rightarrow V_2 \\ \mathbf{PQ} &\rightarrow \psi_p(\mathbf{PQ}) = f(P)f(Q) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada ψ_p dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_p dönüşümü lineer ise f ye bir *Afin dönüşüm* denir.

Tanım 2.4 (İzometri)

E_1^n ve E_2^n , sırasıyla, V_1 ve V_2 n -boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsun. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

Afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir *izometri* denir. Her izometri bir Afin dönüşümdür.

Tanım 2.5 (Hareket)

f , n -boyutlu E^n Öklid uzayı üzerinde bir izometri olsun. E^n deki bir dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi; $A \in O(n)$ (yani $AA^T = A^T A = I_n$, $\det A = \pm 1$),

ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. f ye E^n de bir *hareket* adı verilir. Eğer, $\det A = 1$ ise f hareketine *direkt hareket*, $\det A = -1$ ise *karşıt hareket* denir [40].

Tanım 2.6 (Öteleme)

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + t$ olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in t ile belirtilen bir *öteleme*si denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun.

$f: E^n \rightarrow E^n$ izometrisi $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olmak üzere, f nin dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = X + t$$

dir. O halde E^2 de $X = (x_1, x_2)$ noktası ve bu noktanın resim noktası olarak da

$X' = (x'_1, x'_2)$ noktası alınırsa öteleme denklemleri $t = (a, b)$ için

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + a \\ x'_2 = x_2 + b \end{cases}$$

biçiminde verilebilir [40].

Tanım 2.7 (Dönme)

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi için $f(O) = O$ olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa f ye O noktası etrafında E^n nin bir *dönmesi* adı verilir. Eğer hareket direkt hareket ise f ye *direkt dönme*, karşıt hareket ise *karşıt dönme* denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun.

$f: E^n \rightarrow E^n$ izometrisi O noktası etrafındaki bir dönme ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya,

$$X' = AX$$

şeklindedir. Burada $A \in O(n)$ ve $X, X' \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Bu bilgilere ek olarak dönme açısı φ olan orijin etrafındaki dönme hareketinin kutupsal koordinatlardaki denklemleri $X = (x_1, x_2)$ ve bu noktanın resim noktası $X' = (x'_1, x'_2)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \\ x'_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{cases}$$

şeklindedir [40].

Tanım 2.8 (Katı Hareket)

Ötelemeler ve dönmelere *katı hareketler* denir. Bu cins dönüşümler altında her şekil bir konumundan diğer bir konumuna yer değiştirirken şeklin boyutları değişmez. Diğer bir ifadeyle, şeklin herhangi iki noktası arasındaki uzaklık değişmez. Katı hareketler E^2 de $\varphi, a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi + a \\ x'_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi + b \end{cases}$$

formunda bir denkleme sahiptirler. Karşıt olarak bu cins denklemlere sahip dönüşümler birer katı harekettir. Eğer $\varphi = 0$ alınıp a ve b uygun şekilde seçilirse bir öteleme elde edilir. Benzer şekilde $a = b = 0$ alınıp uygun bir φ açısı seçilirse dönme denklemleri elde edilir.

$A = \cos \varphi$, $B = \sin \varphi$, $C = a$, $D = b$ alınırsa $A^2 + B^2 = 1$ olur ve aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} x'_1 &= Ax_1 + Bx_2 + C \\ x'_2 &= -Bx_1 + Ax_2 + D. \end{aligned}$$

Böylece her katı hareket yukarıda verilen denklemlerle ifade edilebilir. Karşıt olarak $A^2 + B^2 = 1$ olan bütün dönüşümler birer katı harekettir [40].

Tanım 2.9 (Simetrik Bilineer Form)

V bir reel vektör uzayı olmak üzere

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ için

- i. $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- ii. $g(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = ag(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + bg(\mathbf{y}, \mathbf{z})$
 $g(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = ag(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bg(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilineer form* denir.

Tanım 2.10

V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer form g olmak üzere,

- i) $\forall \mathbf{x} \in V$ ve $\mathbf{x} \neq 0$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ ise g *pozitif tanımlı*,
- ii) $\forall \mathbf{x} \in V$ ve $\mathbf{x} \neq 0$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$ ise g *negatif tanımlı*,
- iii) $\forall \mathbf{x} \in V$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ise g *pozitif yarı-tanımlı*,
- iv) $\forall \mathbf{x} \in V$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq 0$ ise g *negatif yarı-tanımlı*

denir [41].

Tanım 2.11

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g ve $0 \neq \mathbf{y} \in V$ olmak üzere

$\forall \mathbf{x} \in V$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ise g ye V üzerinde *dejenere* denir.

Aksi durumda g ye V üzerinde *non-dejenere* denir. Yani g -nin non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul $\forall \mathbf{x} \in V$ için $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ iken $\mathbf{y} = 0$ olmasıdır [41].

Tanım 2.12 (Simetrik bilineer formun indeksi)

V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer form g olmak üzere,

$$g|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g *simetrik bilineer formunun indeksi* denir ve ν ile gösterilir [41].

Tanım 2.13

V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma, V reel vektör uzayı üzerinde bir *skaler çarpım (yarı-Öklid metriği)* denir. V üzerindeki bir skaler çarpma g

ise (V, g) ikilisine de *skaler çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı)* denir. Eğer g pozitif tanımlı ise g iç çarpım fonksiyonu olup *Öklid metriği* olarak adlandırılır. Bu durumda (V, g) ikilisine de *Öklid uzayı* denir. Eğer g nin indeksi $\nu=1$ ise g ye *Lorentz (Minkowski) uzayı* denir. Eğer g dejenere ise V vektör uzayına g ye göre *lightlike(dejenere) vektör uzayı* denir [41].

ÖKLİD DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

Bu bölümde, Öklid düzleminde 1-parametrelî düzlemsel hareket tanımlanacaktır. 1-parametrelî düzlemsel hareketin tanımlanmasıyla, bu harekete ait hızlar-hızların terkibi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkibi ve ivme polü kavramları verilecektir [21-22].

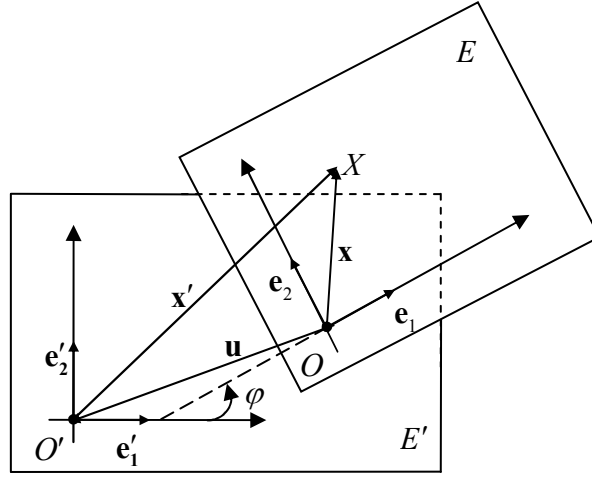
E ve E' ($E = E^2 = E'$) Öklid düzlemlerinde, sırasıyla, $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemlerini tespit edelim. Eğer $t \in I \subset \mathbb{R}$ için, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t)$ ise bu takdirde $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinat sisteminin, $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine göre, yani E düzleminin, E' düzlemi üzerinde hareket ettiği kabul edilir (Şekil 3.1). $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinat sistemine *hareketli koordinat sistemi*, $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine ise *sabit koordinat sistemi* denir. $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{e}'_1$ arasındaki açı φ olmak üzere φ ye *dönme açısı* denir. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin *öteleme vektörü* olmak üzere:

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.1)$$

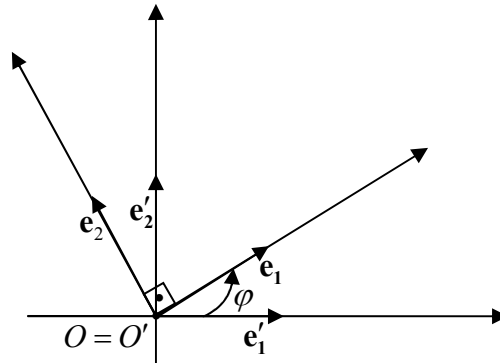
yazılabilir. Eğer,

$$\begin{cases} u_1 = u_1(t) \\ u_2 = u_2(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

fonksiyonları bir t reel parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise, E nin E' ne göre hareketine *1-parametrelili düzlemsel hareket* denir ve $B = E / E'$ ile gösterilir. Buradaki " t " parametresi genel olarak *zaman* parametresi olarak alınır [21-22].



Şekil 3. 1 1-parametrelili düzlemsel hareket



Şekil 3. 2 Koordinat sistemlerinin çakışması durumu

$O = O'$ olduğu zaman (koordinat sistemlerinin başlangıç noktaları çakıştığında), e_1 ve e_2 vektörleri, e'_1 ve e'_2 doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$\begin{cases} e_1 = \cos \varphi e'_1 + \sin \varphi e'_2 \\ e_2 = -\sin \varphi e'_1 + \cos \varphi e'_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

eşitlikleri elde edilir (Şekil 3. 2). Bundan sonra sırf öteleme hareketinden kaçınmak için

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \neq 0 \text{ kabul edilecektir. } \square$$

Düzlemin bir X noktası hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları ve hem de sabit sistemdeki (x'_1, x'_2) koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemde, X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

ve

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{OX} = -\mathbf{OO}' + \mathbf{OX}$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2) \mathbf{e}_2 \quad (3.3)$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme *1-parametrel düzlemsel hareketin vektörel denklemi* denir. Buradan,

$$x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 = (x_1 - u_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2) \mathbf{e}_2$$

eşitliğinin $\mathbf{e}'_1$ ve $\mathbf{e}'_2$ ile iç çarpımı sonucunda,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - u_1) \cos \varphi - (x_2 - u_2) \sin \varphi \\ x'_2 = (x_1 - u_1) \sin \varphi + (x_2 - u_2) \cos \varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi) + (-u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) \\ x'_2 = (x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) + (-u_1 \sin \varphi - u_2 \cos \varphi) \end{cases} \quad (3.4)$$

bulunur. Bu ifadeye $B = E / E'$ hareketinin *kartezyen denklemi* denir. Bu son eşitlik

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_C$$

veya

$$X' = AX + C$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir. Burada $A \in O(2)$ ye *dönme matrisi*¹, C ye *öteleme matrisi* denir [21-22].

3.1 Türev Denklemleri

$B = E / E'$ hareketi esnasında bir $X \in E$ noktasının her iki E ve E' düzlemlerine göre hızlarını araştırmak için önce hareketin türev denklemlerini bulmak gerekmektedir. Bunun için (3.2) denklemlerinin, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türevi alınırsa,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_1 = -\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}'_2 = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi \mathbf{e}'_2) \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}'_1 - \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}'_2 = -\dot{\varphi} (\cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \sin \varphi \mathbf{e}'_2) \end{cases}$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_1 \quad (3.5)$$

yazılabilir. Benzer şekilde (3.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{e}_1 + u_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{e}_2 + u_2 \dot{\mathbf{e}}_2$$

elde edilir. $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nin (3.5) deki değerleri burada yerine yazılırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - u_2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_1 + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_2 \quad (3.6)$$

bulunur. (3.5) ve (3.6) denklemlerine $B = E / E'$ hareketinin *türev denklemleri* denir [21-22].

3.2 Hızlar ve Hızların Terkibi

E düzlemi E' düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda, bu iki hareket esnasında bir noktaya ait hızların nasıl terkip edildiği araştırılabilir.

¹ $B = E / E'$ hareketinin A dönme matrisi ortogonaldır ($A^T = A^{-1}$).

Tanım 3.1

X noktasının E düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası E deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının *relatif (izafi) hız vektörü* denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız vektörü

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

denkleminde $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.7)$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası E de sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hız vektörü sıfırdır [21-22].

Tanım 3.2

X noktasının E' düzlemine göre sahip olduğu hız vektörüne X noktasının *mutlak hız vektörü* denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir. (3.3) denkleminin t ye göre türevi alınır $\mathbf{V}_a$ için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1) \mathbf{e}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\mathbf{e}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2) \mathbf{e}_2 + (x_2 - u_2) \dot{\mathbf{e}}_2.$$

Burada $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nın (3.5) deki değerleri dikkate alınır

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_2 + \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.8)$$

veya

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_2 + \mathbf{V}_r$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_f = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_2 \quad (3.10)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme hız vektörü* denir.

O halde hız vektörlerinin terkbine ait şu teorem verilebilir:

Teorem 3.1

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında $X \in E$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in E$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (3.9)$$

bağıntısı vardır [21-22].

Tanım 3.3

Dönme açısının $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ türevine B hareketinin *açısal hızı* denir.

3.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

B hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalar araştırılmak istenirse, bu noktaların, t anında, yalnız E düzleminde değil aynı zamanda E' düzleminde de sabit olmak zorunda olduğu görülür. O halde $\mathbf{V}_f = 0$ olacağından (3.9) denkleminde

$$-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi} = 0, \quad -\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi} = 0$$

elde edilir. $\dot{\phi} \neq 0$ olduğuna göre bu iki denklem her zaman tek türlü çözülebilir. Bu çözümler p_1 ve p_2 olmak üzere,

$$\begin{cases} p_1 = x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\phi}} \\ p_2 = x_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\phi}} \end{cases} \quad (3.11)$$

şeklinde bulunur [21-22].

Tanım 3.4

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B = E / E'$ hareketinin t anındaki *pol(kutup) noktası, dönme polü veya ani dönme merkezi* denir.

Buradan şu teorem verilebilir:

Teorem 3.2

Açısal hızı sıfır olmayan bir 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır. □

P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızı aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

Bunun için (3.11) denkleminde

$$\dot{u}_1 = (u_2 - p_2)\dot{\phi} \quad , \quad \dot{u}_2 = -(u_1 - p_1)\dot{\phi} \quad (3.12)$$

ifadeleri hesaplanır ve (3.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{V}_f = \{-(x_2 - p_2)\mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{e}_2\}\dot{\phi} \quad (3.13)$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu son ifadesi kullanılarak aşağıdaki iki önemli sonuç çıkarılabilir:

Sonuç 3.1

P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{e}_2$$

vektörü $\mathbf{V}_f$ ye diktir; çünkü

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle = -(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) + (x_1 - p_1)(x_2 - p_2) = 0$$

dır. Yani pol ışını, hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir [21-22].

Sonuç 3.2

$\mathbf{V}_f$ vektörünün uzunluğu için

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_f\| &= \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} \dot{\phi} \\ &= \|\mathbf{PX}\| \dot{\phi} \end{aligned}$$

bağıntısı mevcuttur [21-22].

Teorem 3.3

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında hareketli E düzleminin her X noktası, t anında, P (pol noktası) merkezli ve $\dot{\phi}$ açısal hızlı bir ani dönme hareketi yapar.

X noktası, E düzleminin tamamen keyfi noktası olduğundan aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.4

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi; t anında, hareketli E düzleminin P ani dönme polü etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile dönmesinden oluşur.

Teorem 3.5

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında E düzleminin X noktaları, E' düzleminde yörünge normalleri, P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler.

Tanım 3.5

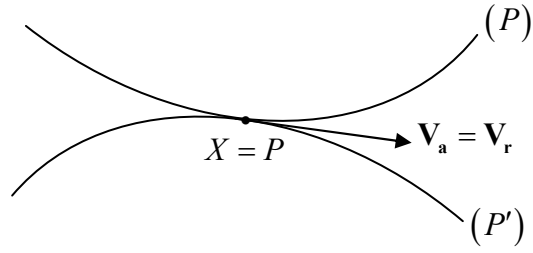
Her t anında bir P dönme polü olacağından B hareketi esnasında P pol noktası her iki E ve E' düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının hareketli E düzlemindeki yeri genel olarak bir eğridir. Bu eğriye *hareketli pol eğrisi* denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' düzlemindeki geometrik yerine ise *sabit pol eğrisi* denir ve (P') ile gösterilir. □

Pol hızları, yani (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P noktasının hızları aşağıdaki gibi elde edilir:

Dönme polünün $\mathbf{V}_f = 0$ olan noktalar olduğu daha önce belirtilmişti. Buna göre Teorem 3.1 den, $X = P$ noktası için

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r$$

bulunur.



Şekil 3. 3 $X = P$ noktasında hareketli ve sabit pol eğrileri

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.6

E' sabit ve E hareketli düzlemlerinde pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır. $\square$

Bu teoremden dolayı, her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P ani dönme polünde birbirine teğettir ve

$$ds' = |\mathbf{V}_a| dt = |\mathbf{V}_r| dt = ds$$

olduğundan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar kat eder.

Buradan bir sonraki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.7

1-parametrel düzlemsel $B = E / E'$ hareketinde E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' sabit düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır [21-22].

Ters Hareket

$B = E / E'$ hareketinin ters hareketinde E düzlemi sabit, E' düzlemi ise hareketli kabul edilmektedir. Bu hareketi $B' = E' / E$ ile gösterelim.

Burada her iki pol eğrisi rollerini değiştirirler yani (P') hareketli pol eğrisi, (P) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. $B' = E' / E$ hareketi, $B = E / E'$ hareketinin tersi yönde döndüğünden açısal hız işaret değiştirir. Böylece $B = E / E'$ hareketinde açısal hız $\dot{\phi}$ iken, $B' = E' / E$ ters hareketinde açısal hız $-\dot{\phi}$ dır.

3.4 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında X noktasının E düzlemine göre olan ivme vektörüne *relatif ivme vektörü* denir. Bu ivme vektörü $\mathbf{V}_r$ relatif hızının t ye göre türevi alınarak bulunur ve $\mathbf{b}_r$ ile gösterilir:

$$\mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{V}}_r = \ddot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{e}_2. \quad (3.14)$$

Burada $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ sabit olarak kabul edilmiştir.

X noktasının E' düzlemine göre olan ivme vektörüne *mutlak ivme vektörü* denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir. Bu ivme vektörü (3.8) denkleminde verilen $\mathbf{V}_a$ vektöründe (3.12) denklemi kullanılıp t ye göre türev alınarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = & \left\{ -(\dot{x}_2 - \dot{p}_2) \mathbf{e}_1 - (x_2 - p_2) \dot{\mathbf{e}}_1 + (\dot{x}_1 - \dot{p}_1) \mathbf{e}_2 + (x_1 - p_1) \dot{\mathbf{e}}_2 \right\} \dot{\phi} \\ & + \left\{ -(x_2 - p_2) \mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1) \mathbf{e}_2 \right\} \ddot{\phi} + \ddot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{x}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada (3.5) denklemindeki $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a = & \left\{ \dot{p}_2 \dot{\phi} - (x_1 - p_1) \dot{\phi}^2 - (x_2 - p_2) \ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{p}_1 \dot{\phi} - (x_2 - p_2) \dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1) \ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_2 \\ & + 2\dot{\phi} \left\{ -\dot{x}_2 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_1 \mathbf{e}_2 \right\} + \mathbf{b}_r \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) denklemindeki

$$\mathbf{b}_f = \left\{ \dot{p}_2 \dot{\phi} - (x_1 - p_1) \dot{\phi}^2 - (x_2 - p_2) \ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{p}_1 \dot{\phi} - (x_2 - p_2) \dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1) \ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_2 \quad (3.16)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme ivme vektörü* ve

$$\mathbf{b}_c = 2\dot{\phi} \left\{ -\dot{x}_2 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_1 \mathbf{e}_2 \right\} \quad (3.17)$$

vektörüne de *Coriolis ivme vektörü* denir [21-22].

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremlerle ifade edilebilir:

Teorem 3.8

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü; sürüklenme ivme vektörü, Coriolis ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Buna göre

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r \quad (3.18)$$

dir [21-22].

Sonuç 3.3

$\mathbf{b}_c$ Coriolis ivmesi ve $\mathbf{V}_r$ relatif hızının iç çarpımı

$$\langle \mathbf{b}_c, \mathbf{V}_r \rangle = 2\dot{\phi}(-\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1\dot{x}_2) = 0$$

olduğundan $\mathbf{b}_c$ Coriolis ivmesi, $\mathbf{V}_r$ relatif hızına diktir. $\square$

E de sabit olmayan bir X noktasının Coriolis ivmesinin sıfır olması ancak ve ancak $\dot{\phi} = 0$ olmasıyla sağlanır. $\dot{\phi} = 0$ ise B hareketi bir kaymadan (ötelemeden) ibarettir. Böylece $\mathbf{b}_c = 0$ ise ivmeler arasında,

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_r$$

bağıntısı bulunur. Yani, ancak bir kayma hareketinde ivmeler hızlar gibi terkip edilirler.

Şimdi bir B hareketinde, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım:

$\mathbf{b}_f = 0$ için

$$\begin{cases} (x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\phi} = \dot{p}_2\dot{\phi} \\ (x_1 - p_1)\ddot{\phi} - (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 = \dot{p}_1\dot{\phi} \end{cases}$$

elde edilir. $\dot{\phi} \neq 0$ olduğundan $(x_1 - p_1)$ ve $(x_2 - p_2)$ ye göre homojen olmayan denklem sisteminin Δ katsayılar determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{vmatrix} = -(\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2) \neq 0$$

dir. Buna göre yukarıdaki sistemin Cramer yöntemi ile bir tek çözümü bulunur.

Tanım 3.6

$\dot{\varphi} \neq 0$ olmak üzere, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan bir tek $Q = (q_1, q_2)$ noktası vardır. Bu noktaya *ivme polü* denir ve ivme polünün koordinatları

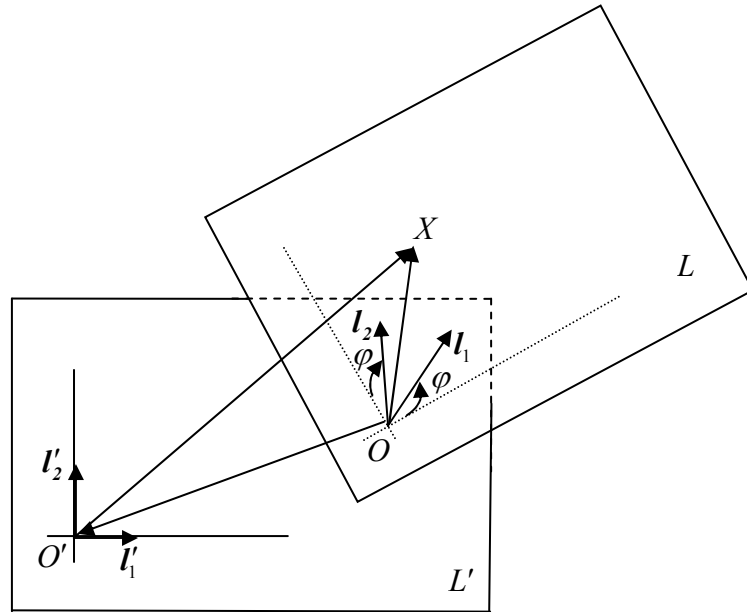
$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + \frac{\dot{\varphi}(\dot{p}_2\dot{\varphi}^2 + \dot{p}_1\ddot{\varphi})}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \\ q_2 &= p_2 - \frac{\dot{\varphi}(\dot{p}_1\dot{\varphi}^2 + \dot{p}_2\ddot{\varphi})}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde bulunur [21-22].

LORENTZ DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

Bu bölümde, A. A. Ergin tarafından verilen Lorentz düzleminde 1-parametrelî düzlemsel hareket tanımlandıktan sonra, bu hareketin hızları-hızların terkibi, pol noktası, ivmeleri-ivmelerin terkibi ve ivme polü elde edilecektir [23].

L ve L' ($L = L' = L^2$), sırasıyla, hareketli ve sabit Lorentz düzlemleri olsun. Bu düzlemlerde tespit edilen, sırasıyla, $\{O; l_1, l_2\}$ hareketli koordinat sistemini $\{O'; l'_1, l'_2\}$ sabit koordinat sistemi üzerinde hareket ettirelim (Şekil 4.1).

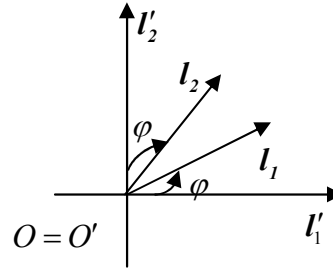


Şekil 4. 1 Lorentz düzleminde 1-parametrelî hareket

I_1 ile I'_1 arasındaki açı φ olmak üzere φ ye *dönme açısı* denir. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin öteleme vektörü olmak üzere

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 I_1 + u_2 I_2 \quad (4.1)$$

yazılabilir. Eğer $u_i = u_i(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ ($1 \leq i \leq 2$) fonksiyonları bir t reel parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise $\{O; I_1, I_2\}$ hareketli koordinat sisteminin $\{O'; I'_1, I'_2\}$ sabit koordinat sistemine göre (L düzleminin L' düzlemine göre) hareketine *Lorentz düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareket* denir ve $B = L/L'$ ile gösterilir. Buradaki " t " parametresi genel olarak *zaman* parametresi olarak alınır [23].



Şekil 4. 2 Koordinat sistemlerinin çakışması durumu

$O = O'$ olduğu zaman, I_1 ve I_2 vektörleri, I'_1 ve I'_2 doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$\begin{aligned} I_1 &= \cosh \varphi I'_1 + \sinh \varphi I'_2 \\ I_2 &= \sinh \varphi I'_1 + \cosh \varphi I'_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

eşitlikleri elde edilir, (Şekil 4. 2). Buradan itibaren sırf öteleme hareketinden kaçınmak

için $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ kabul edilecektir. $\square$

Düzlemin bir X noktası hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları ve hem de sabit sistemdeki (x'_1, x'_2) koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemde, X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = x_1 I_1 + x_2 I_2$$

ve

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X} = x'_1\mathbf{l}'_1 + x'_2\mathbf{l}'_2$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{O}\mathbf{X} = -\mathbf{O}\mathbf{O}' + \mathbf{O}\mathbf{X}$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1)\mathbf{l}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{l}_2 \quad (4.3)$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme 1-parametrel düzlemsel hareketin *vektörel denklemi* denir. Böylece,

$$x'_1\mathbf{l}'_1 + x'_2\mathbf{l}'_2 = (x_1 - u_1)\mathbf{l}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{l}_2$$

eşitliğinin $\mathbf{l}'_1$ ve $\mathbf{l}'_2$ ile iç çarpımı sonucunda¹,

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - u_1)\cosh\varphi + (x_2 - u_2)\sinh\varphi \\ x'_2 = (x_1 - u_1)\sinh\varphi + (x_2 - u_2)\cosh\varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 \cosh\varphi + x_2 \sinh\varphi) + (-u_1 \cosh\varphi - u_2 \sinh\varphi) \\ x'_2 = (x_1 \sinh\varphi + x_2 \cosh\varphi) + (-u_1 \sinh\varphi - u_2 \cosh\varphi) \end{cases} \quad (4.4)$$

bulunur. Bu ifadeye $B = L / L'$ hareketinin *kartezyen denklemi* denir. Bu son eşitlik

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_C$$

veya

$$X' = AX + C$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir. Burada A ya *Lorentz dönme matrisi*², C ye *öteleme matrisi* denir.

¹ Lorentz iç çarpımı Ek A Tanım A. 2 de verilmiştir. Açık kavramı ise Ek A Bölüm A.2 de verilmiştir.

² $B = L / L'$ hareketinin A dönme matrisi ortogonal değildir.

4.1 Türev Denklemleri

$B = L/L'$ hareketi esnasında bir $X \in L$ noktasının her iki L ve L' düzlemlerine göre hızlarını araştırmak için önce bu hareketin türev denklemlerini elde etmek gerekir. Bunun için (4.2) denklemlerinin, $\mathbf{l}'_1$ ve $\mathbf{l}'_2$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türev alınırsa,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} = \dot{\mathbf{l}}_1 = \dot{\phi} \sinh \phi \mathbf{l}'_1 + \dot{\phi} \cosh \phi \mathbf{l}'_2 = \dot{\phi} (\sinh \phi \mathbf{l}'_1 + \cosh \phi \mathbf{l}'_2) \\ \frac{d\mathbf{l}_2}{dt} = \dot{\mathbf{l}}_2 = \dot{\phi} \cosh \phi \mathbf{l}'_1 + \dot{\phi} \sinh \phi \mathbf{l}'_2 = \dot{\phi} (\cosh \phi \mathbf{l}'_1 + \sinh \phi \mathbf{l}'_2) \end{cases}$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\dot{\mathbf{l}}_1 = \dot{\phi} \mathbf{l}_2, \quad \dot{\mathbf{l}}_2 = \dot{\phi} \mathbf{l}_1 \quad (4.5)$$

yazılabilir. Benzer şekilde (4.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{l}_1 + u_1 \dot{\mathbf{l}}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{l}_2 + u_2 \dot{\mathbf{l}}_2$$

elde edilir. $\dot{\mathbf{l}}_1$ ve $\dot{\mathbf{l}}_2$ nin (4.5) deki değerleri son denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 + u_2 \dot{\phi}) \mathbf{l}_1 + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\phi}) \mathbf{l}_2 \quad (4.6)$$

bulunur. (4.5) ve (4.6) denklemlerine $B = L/L'$ hareketinin *türev denklemleri* denir [23].

4.2 Hızlar ve Hızların Terkibi

L düzlemi L' düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli L düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda, bu iki hareket esnasında X noktasının hızlarının nasıl terkip edildiğini araştıracağız.

Tanım 4.1

X noktasının L düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası L deki yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının *relatif (izafi) hız vektörü* denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız vektörü

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{l}_1 + x_2 \mathbf{l}_2$$

denkleminde $\mathbf{l}_1$ ve $\mathbf{l}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{l}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{l}_2 \quad (4.7)$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası L de sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hız vektörü sıfırdır.

Tanım 4.2

X noktasının L' düzlemine göre sahip olduğu hız vektörüne X noktasının *mutlak hız vektörü* denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir. (4.3) denkleminin t ye göre türevi alınır $\mathbf{V}_a$ için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1) \mathbf{l}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\mathbf{l}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2) \mathbf{l}_2 + (x_2 - u_2) \dot{\mathbf{l}}_2.$$

Burada $\dot{\mathbf{l}}_1$ ve $\dot{\mathbf{l}}_2$ nin (4.5) deki değerleri dikkate alınır

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 - (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{l}_1 + \{-\dot{u}_2 - (u_1 - x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{l}_2 + \dot{x}_1 \mathbf{l}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{l}_2 \quad (4.8)$$

veya

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 - (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{l}_1 + \{-\dot{u}_2 - (u_1 - x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{l}_2 + \mathbf{V}_r$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_f = \{-\dot{u}_1 - (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{l}_1 + \{-\dot{u}_2 - (u_1 - x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{l}_2 \quad (4.9)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme hız vektörü* denir.

O halde hızların terkibine ait şu teorem verilebilir:

Teorem 4.1

$B = L / L'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında eğer $X \in L$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in L$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (4.10)$$

bağıntısı vardır [23].

Tanım 4.3

Dönme açısının $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ türevine $B = L / L'$ hareketinin *açısal hızı* denir.

Bundan sonra sırf öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\phi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

4.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi $B = L / L'$ hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım:

Böyle noktalar, t anında, yalnız L düzleminde değil aynı zamanda L' düzleminde de sabit bulunmak zorundadır. O halde $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ olacağından (4.9) denkleminde

$$\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi} = 0, \quad \dot{u}_2 + (u_1 - x_1)\dot{\phi} = 0$$

elde edilir. $\dot{\phi} \neq 0$ olduğundan bu iki denklem her zaman tek türlü çözülebilir. Bu çözümler p_1 ve p_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\phi}} \\ p_2 &= x_2 = u_2 + \frac{\dot{u}_1}{\dot{\phi}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde bulunur [23].

Tanım 4.4

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1 \mathbf{l}_1 + p_2 \mathbf{l}_2$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B = L / L'$ hareketinin t anındaki *pol(kutup) noktası, dönme polü veya ani dönme merkezi* denir.

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.2

Açısal hızı sıfır olmayan $B = L / L'$ hareketi esnasında, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır. $\square$

P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızı aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

Bunun için (4.11) denkleminde

$$\dot{u}_1 = (p_2 - u_2)\dot{\phi} \quad , \quad \dot{u}_2 = (p_1 - u_1)\dot{\phi} \quad (4.12)$$

ifadeleri hesaplanır ve (4.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_f = \{(x_2 - p_2)\mathbf{I}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{I}_2\}\dot{\phi} \quad (4.13)$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu son ifadesi kullanılarak aşağıdaki iki önemli sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1

P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{I}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{I}_2$$

vektörü $\mathbf{V}_f$ ye Lorentz anlamında diktir¹; çünkü

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle_L = \{(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) - (x_1 - p_1)(x_2 - p_2)\}\dot{\phi} = 0$$

dır . Yani pol ışını, hareketin her t anında sürüklenme hızına Lorentz anlamında diktir.

Sonuç 4.2

$\mathbf{V}_f$ vektörünün uzunluğu² için

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_f\|_L &= \sqrt{(x_2 - p_2)^2 - (x_1 - p_1)^2} |\dot{\phi}| \\ &= \|\mathbf{PX}\|_L |\dot{\phi}| \end{aligned}$$

bağıntısı mevcuttur.

¹ Lorentz iç çarpımı Ek A Tanım A. 2 de verilmiştir. Diklik kavramı ise Ek A Tanım A.5 de verilmiştir.

² Lorentz düzlemine bir vektörün uzunluğu (normu) Ek A Tanım A.4 de verilmiştir.

Teorem 4.3

$B = L / L'$ Lorentz anlamında 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında hareketli L düzleminin her X noktası, t anında, P (pol noktası) merkezli ve $\dot{\phi}$ açısal hızlı bir Lorentz dönme hareketi yapar.

Teorem 4.4

$B = L / L'$ Lorentz anlamında 1-parametrelili düzlemsel hareketi; t anında, hareketli L düzleminin P ani dönme polü etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile dönmesinden oluşur.

Teorem 4.5

$B = L / L'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında L düzleminin X noktaları, L' düzleminde yörünge normalleri, P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler.

Tanım 4.5

Her t anında bir P dönme polü olacağından B hareketi esnasında P pol noktası her iki L ve L' düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının hareketli L düzlemindeki yeri genel olarak bir eğridir. Bu eğriye *hareketli pol eğrisi* denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının L' düzlemindeki geometrik yerine ise *sabit pol eğrisi* denir ve (P') ile gösterilir [23].□

Şimdi pol hızlarını, yani (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P noktasının hızlarının araştıralım:

$\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ olduğundan Teorem 4.1 den, $X = P$ noktası için

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r$$

bulunur.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.6

L' sabit ve L hareketli düzlemlerinde pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır.□

Teorem 4.6 dan, her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P ani dönme polünde birbirine teğettir ve

$$ds' = |\mathbf{V}_a| dt = |\mathbf{V}_r| dt = ds$$

olduğundan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar kat eder.

Buradan aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 4.7

Lorentz düzleminde 1-parametrelili $B = L / L'$ hareketi esnasında L düzleminin (P) hareketli pol eğrisi L' sabit düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

4.4 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

$B = L / L'$ Lorentz anlamında 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında, hareketli L düzleminde bir X noktası göz önüne alınsın. X noktasının L düzlemine göre olan ivme vektörüne *relatif ivme vektörü* denir. Bu ivme vektörü $\mathbf{V}_r$ relatif hızının t ye göre türevi alınarak bulunur ve $\mathbf{b}_r$ ile gösterilir:

$$\mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{V}}_r = \ddot{x}_1 \mathbf{l}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{l}_2 . \quad (4.14)$$

Burada $\mathbf{l}_1$ ve $\mathbf{l}_2$ sabit olarak kabul edilmiştir.

X noktasının L' düzlemine göre olan ivme vektörüne *mutlak ivme vektörü* denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir. Bu vektör (4.8) denkleminde verilen $\mathbf{V}_a$ vektöründe (4.12) denklemi kullanılıp t ye göre türev alınarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = & \left\{ (\dot{x}_2 - \dot{p}_2) \mathbf{l}_1 + (x_2 - p_2) \dot{\mathbf{l}}_1 + (\dot{x}_1 - \dot{p}_1) \mathbf{l}_2 + (x_1 - p_1) \dot{\mathbf{l}}_2 \right\} \dot{\phi} \\ & + \left\{ (x_2 - p_2) \mathbf{l}_1 + (x_1 - p_1) \mathbf{l}_2 \right\} \ddot{\phi} + \ddot{x}_1 \mathbf{l}_1 + \dot{x}_1 \dot{\mathbf{l}}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{l}_2 + \dot{x}_2 \dot{\mathbf{l}}_2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada (4.5) denklemindeki $\dot{\mathbf{l}}_1$ ve $\dot{\mathbf{l}}_2$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\mathbf{b}_a = \left\{ -\dot{p}_2\dot{\phi} + (x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{l}_1 + \left\{ -\dot{p}_1\dot{\phi} + (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{l}_2 + 2\dot{\phi} \{ \dot{x}_2 \mathbf{l}_1 + \dot{x}_1 \mathbf{l}_2 \} + \mathbf{b}_r \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) denklemindeki

$$\mathbf{b}_f = \left\{ -\dot{p}_2\dot{\phi} + (x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{l}_1 + \left\{ -\dot{p}_1\dot{\phi} + (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{l}_2 \quad (4.16)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme ivme vektörü* ve

$$\mathbf{b}_c = 2\dot{\phi} \{ \dot{x}_2 \mathbf{l}_1 + \dot{x}_1 \mathbf{l}_2 \} \quad (4.17)$$

vektörüne de *Coriolis ivme vektörü* denir.

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 4.8

$B = L / L'$ Lorentz düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü; sürüklenme ivme vektörü, Coriolis ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Buna göre

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r \quad (4.18)$$

dir [23].

Sonuç 4.3

$\mathbf{b}_c$ Coriolis ivmesi ve $\mathbf{V}_r$ relatif hızının iç çarpımı

$$\langle \mathbf{b}_c, \mathbf{V}_r \rangle_L = 2\dot{\phi} (\dot{x}_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_2 \dot{x}_1) = 0$$

olduğundan $\mathbf{b}_c$ Coriolis ivmesi, $\mathbf{V}_r$ relatif hızına Lorentz anlamında diktir. $\square$

L de sabit olmayan bir X noktasının Coriolis ivmesinin sıfır olması ancak ve ancak $\dot{\phi} = 0$ olmasıyla sağlanır. $\dot{\phi} = 0$ ise B hareketi bir kaymadan (ötelemeden) ibarettir.

Böylece $\mathbf{b}_c = 0$ ise ivmeler arasında,

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_r$$

bağıntısı bulunur. Yani, ancak bir kayma hareketinde ivmeler (4.10) da verilen denklem gibi bir bağıntıya sahip olurlar.

Şimdi bir B hareketinde, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım:

$\mathbf{b}_f = 0$ için

$$\begin{cases} (x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\phi} = \dot{p}_2\dot{\phi} \\ (x_1 - p_1)\ddot{\phi} + (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 = \dot{p}_1\dot{\phi} \end{cases}$$

elde edilir. $\dot{\phi} \neq 0$ olduğundan $(x_1 - p_1)$ ve $(x_2 - p_2)$ ye göre homojen olmayan denklem sisteminin Δ katsayılar determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & \dot{\phi}^2 \end{vmatrix} = \dot{\phi}^4 - \ddot{\phi}^2 \neq 0$$

dır. Buna göre yukarıdaki sistemin Cramer yöntemi ile bir tek çözümü bulunur.

Tanım 4.6

$\dot{\phi} \neq 0$ olmak üzere, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan bir tek $Q = (q_1, q_2)$ noktası vardır. Bu noktaya *ivme polü* denir ve ivme polünün koordinatları

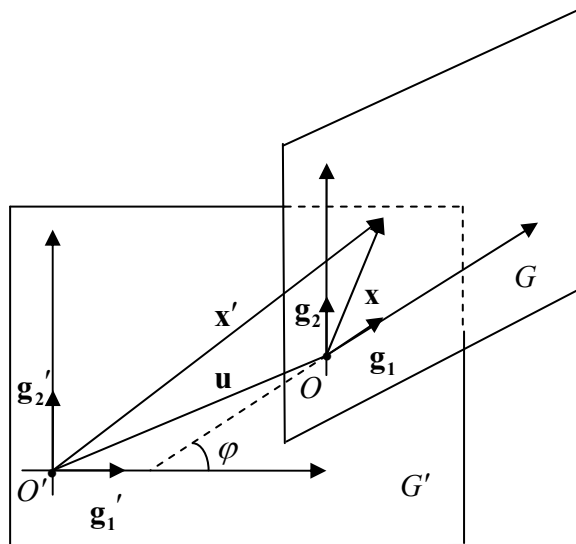
$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + \frac{\dot{\phi}(\dot{p}_2\dot{\phi}^2 - \dot{p}_1\ddot{\phi})}{\dot{\phi}^4 - \ddot{\phi}^2} \\ q_2 &= p_2 + \frac{\dot{\phi}(\dot{p}_1\dot{\phi}^2 - \dot{p}_2\ddot{\phi})}{\dot{\phi}^4 - \ddot{\phi}^2} \end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklindedir [23].

GALİLE DÜZLEMİNDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

Bu bölümde Galile düzleminde 1-parametrelî hareket tanıtılacak ve bu harekete ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkibi, pol noktası, ivmeler-ivmelerin terkibi ve ivme polü kavramları elde edilecektir [34].

G ve G' , sırası ile, hareketli ve sabit Galile düzlemleri olsun. Bu düzlemlerde tespit edilen, sırasıyla, $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ hareketli koordinat sisteminin ve $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2\}$ sabit koordinat sistemi üzerinde hareket ettiğini kabul edelim (Şekil 5.1).



Şekil 5. 1 Galile düzleminde 1-parametrelî hareket

$\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}'_1$ vektörleri arasındaki açı φ olmak üzere bu açıya *shear dönme açısı* denir.

$\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin öteleme vektörü olmak üzere

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2 \quad (5.1)$$

yazılabilir. Eğer $u_i = u_i(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ ($1 \leq i \leq 2$) fonksiyonları bir t reel parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise bu harekete *Galile düzleminde 1-parametrelî düzlemsel hareket* denir ve $B = G / G'$ ile gösterilir.

Eğer $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}'_1$ arasındaki açı $\varphi = \varphi(t)$ alınırsa bu durumda

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}'_1 + \varphi \mathbf{g}'_2 \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}'_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

elde edilir. Bu denklemi iki yolla gösterebiliriz:

Birinci yol:

Burada $\mathbf{g}_1$ vektörüne dik olan vektör y -eksenine paralel vektördür. $\mathbf{g}_2$ ve $\mathbf{g}'_2$ birim vektör olduğundan $\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}'_2$ dır. $\mathbf{g}_1$ vektörü $\mathbf{g}'_1$ ve $\mathbf{g}'_2$ vektörlerinin gerdiği düzlemde olduğundan $\mathbf{g}_1 = \cos \varphi \mathbf{g}'_1 + \sin \varphi \mathbf{g}'_2$ dir. Dolayısıyla (5.2) denklemi elde edilir.

İkinci yol:

Ek B bölümünde verilen (B.2) denklemi yardımıyla

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x\varphi + y \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

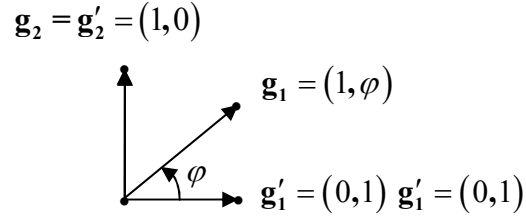
yazılabilir. Dolayısıyla $(1,0)$ ve $(0,1)$ noktası bu son denklemde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

noktası bulunur (Şekil 5.2). Yani $(1,0)$ noktasının dönme altındaki resmi $(1,\varphi)$ ve $(0,1)$ vektörünün dönme altındaki resmi $(0,1)$ elde edilir.



Şekil 5. 2 Galile düzleminde bazlar arasındaki ilişki

Böylece (5.2) denklemi tekrar elde edilmiş olur. Burada sırf ötelemeden kaçınmak için

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \neq 0 \text{ olduğu kabul edilecektir. } \square$$

Düzlemin bir X noktası hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları hem de sabit sistemdeki (x'_1, x'_2) koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemdeki X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2$$

ve

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O'X} = x'_1 \mathbf{g}'_1 + x'_2 \mathbf{g}'_2$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{O'X} = \mathbf{O'O} + \mathbf{OX} = -\mathbf{OO'} + \mathbf{OX}$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1) \mathbf{g}_1 + (x_2 - u_2) \mathbf{g}_2 \quad (5.3)$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme *Galile düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareketin vektörel denklemi* denir. Buradan (5.2) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} x'_1 \mathbf{g}'_1 + x'_2 \mathbf{g}'_2 &= (x_1 - u_1) \mathbf{g}_1 + (x_2 - u_2) \mathbf{g}_2 \\ &= (x_1 - u_1) \mathbf{g}'_1 + [(x_1 - u_1) \varphi + (x_2 - u_2)] \mathbf{g}'_2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - u_1 \\ x'_2 = (x_1 - u_1) \varphi + (x_2 - u_2) \end{cases} \quad (5.4)$$

bulunur. Bu ifadeye $B = G / G'$ hareketinin *kartezyen denklemi* denir. (5.4) eşitliği

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - u_1 \\ x'_2 = \varphi x_1 + x_2 - u_1 \varphi - u_2 \end{cases}$$

veya

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_1 \varphi - u_2 \end{bmatrix}}_C$$

şeklinde yazılabilir. Buradan Galile düzleminde 1-parametrelî düzlemsel hareket

$$X' = AX + C$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir. Burada A matrisine *shear dönme* matrisi denir. Ayrıca A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

olup $A^T \neq A^{-1}$ dir. Dolayısıyla E^2 Öklid düzleminde dönme matrisi ortogonal olmasına rağmen Galile geometrisinde dönme matrisi ortogonal değildir [16].

5.1 Türev Denklemleri

1 parametrelî hareket esnasında bir $X \in G$ noktasının her iki G ve G' düzlemine göre hızlarının bulunması için hareketin türev denklemleri araştırılmalıdır. Bunun için (5.2) denklemlerinde $\mathbf{g}'_1$ ve $\mathbf{g}'_2$ vektörleri sabit kabul ederek t zamanına göre türev alınırsa

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{g}_1}{dt} = \dot{\mathbf{g}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{g}_2 \\ \frac{d\mathbf{g}_2}{dt} = \dot{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.5)$$

bulunur. Benzer şekilde (5.1) denkleminin t ye göre türevi alınıp (5.5) denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + (u_1 \dot{\phi} + \dot{u}_2) \mathbf{g}_2 \quad (5.6)$$

elde edilir. (5.5) ve (5.6) denklemlerine $B = G / G'$ hareketinin türev denklemleri denir [34].

5.2 Hızlar ve Hızların Terkibi

Tanım 5.1

X noktasının G düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası G düzlemindeki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının *relatif (izafi) hız vektörü* denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2$$

denkleminde $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{g}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{g}_2 \quad (5.7)$$

bulunur. Eğer X noktası G düzleminde sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hız vektörü sıfırdır [34].

Tanım 5.2

X noktasının hareket ederken G' düzlemine göre sahip olduğu hıza X noktasının *mutlak hız vektörü* denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir. (5.3) denkleminin t ye göre türevi alınır

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1) \mathbf{g}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\mathbf{g}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2) \mathbf{g}_2 + (x_2 - u_2) \dot{\mathbf{g}}_2$$

şeklinde elde edilir. (5.5) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1) \mathbf{g}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\phi} \mathbf{g}_2 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2) \mathbf{g}_2 \quad (5.8)$$

veya

$$\mathbf{V}_a = -\dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + (-\dot{u}_2 - u_1 \dot{\phi} + x_1 \dot{\phi}) \mathbf{g}_2 + \mathbf{V}_r$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_r = -\dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + (-\dot{u}_2 - u_1 \dot{\phi} + x_1 \dot{\phi}) \mathbf{g}_2 \quad (5.9)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme hız vektörü* denir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.1

$B = G / G'$ 1-parametrel düzlemsel Galile hareketi esnasında $X \in G$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in G$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (5.10)$$

bağıntısı vardır [34].

5.3 Shear Dönme Polü ve Pol Doğruları (Doğru Demeti)

$B = G / G'$ hareketi esnasında $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2\}$ koordinat sistemlerinin her ikisinde de hareket etmeyen yani koordinatları aynı olan noktaları araştıralım:

Böyle noktalar hem G hem de G' düzleminde sabit olup $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ dır. Bu noktaya *pol noktası* veya *anlık shear dönme pol merkezi* denir. Bu durumda (5.9) denklemi kullanılarak $B = G / G'$ hareketinin $P = (p_1, p_2) \in G$ pol noktası; $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ olduğundan

$$-\dot{u}_1 = 0, \quad -\dot{u}_2 - u_1\dot{\phi} + x_1\dot{\phi} = 0 \quad (5.11)$$

elde edilir. Böylece x_1 ve x_2 bilinmeyenlerine göre

$$\begin{cases} 0.x_1 + 0.x_2 = \dot{u}_1 \\ \dot{\phi}x_1 + 0.x_2 = \dot{u}_2 + u_1\dot{\phi} \end{cases}$$

denklem sistemi yazılabilir. Buradan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [A|B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{u}_1 \\ \dot{\phi} & 0 & \dot{u}_2 + u_1\dot{\phi} \end{bmatrix}$$

alınırsa $\text{rank} A = 1$ ve $\text{rank} [A|B] = 2$ olduğu görülür. Bilinmeyen sayısı $n = 2$ olup $n < \text{rank} A$ olduğundan $n - \text{rank} A = 1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır. Buradan

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{u_1(t)\dot{\phi}(t) + \dot{u}_2(t)}{\dot{\phi}(t)} \\ x_2(t) = (p_2(t))(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

bulunur. Böylece

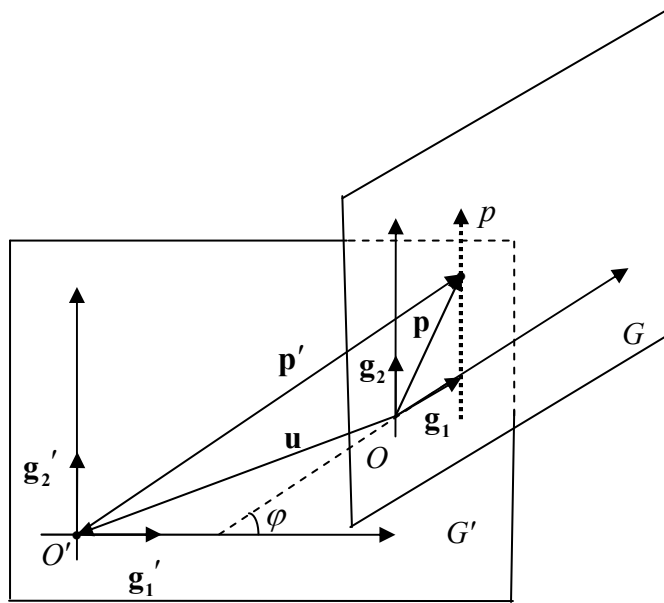
$$\begin{cases} p_1(t) = x_1(t) = u_1(t) + \frac{\dot{u}_2(t)}{\dot{\phi}(t)} \\ p_2(t) = x_2(t) = (p_2(t))(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.12)$$

P pol doğrusu elde edilir. Burada $p_2(t)$ fonksiyonları λ ya göre dizayn edilmektedir.

Ayrıca $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ ve her t için $u_1(t) = c = \text{sabit}$ olduğundan

$$u(t) = (c, u_2(t)) = c\mathbf{g}_1 + u_2\mathbf{g}_2$$

yazılabilir (Şekil 5.3) [34].



Şekil 5. 3 Galile düzleminde 1-parametrelili hareketin pol noktaları

Sonuç 5.1

$B = G / G'$ hareketinin herhangi t anında her iki düzlemdeki değişmez noktaları G düzleminde y -eksenine paralel doğrular üzerindedir. Yani herhangi t anında G düzleminde sadece *pol doğrusu* vardır. Bütün $t \in I$ lar için bu pol doğruları y -eksenine ve birbirine paraleldir. Bu doğrular bir paralel doğru demeti oluşturur [34]. $\square$

(5.11) ve (5.12) denklemleri yardımıyla sürüklenme hız vektörü aşağıdaki şekilde düzenlenirse:

$$\mathbf{V}_f = \{0\mathbf{g}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{g}_2\} \dot{\phi} \quad (5.13)$$

elde edilir.

Şimdi (5.13) denkleminde aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 5.2

$B = G / G'$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{g}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{g}_2$$

pol ışını ile $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızı Galile anlamında diktir¹. Çünkü

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle_G = 0 \cdot (x_1 - p_1) = 0$$

dır. Yani pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir. $B = G / G'$ hareketi altında, $X \in G$ noktasının odakları, normali P dönme polünden geçen yörünge eğrisidir [34].

Sonuç 5.3

$B = G / G'$ hareketi altında, $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızının Galile özel normu²

$$\|\mathbf{V}_f\|_\delta = \|\mathbf{PX}\|_G |\dot{\phi}|$$

dır. Yani, $B = G / G'$ hareketi esnasında $X \in G$ noktalarının bütün yörünge eğrileri, normal doğruları P polünden geçen eğrilerdir. $B = G / G'$ hareketi P pol noktası etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile Galile anlık shear dönmesidir [34-35].

Tanım 5.3

$B = G / G'$ 1-parametrelili düzlemsel Galile hareketi esnasında her t anında pol noktaları olduğundan herhangi bir P noktası G ve G' düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının konumu G hareketli düzleminde genellikle bir eğridir ve bu eğri *hareketli pol eğrisi* diye adlandırılıp (P) ile gösterilir. Ayrıca bu P pol noktasının konumu sabit G' düzleminde de genellikle bir eğri olup bu eğriye de *sabit pol eğrisi* denir ve (P') ile gösterilir.

¹ Galile düzleminde iç çarpım ve diklik kavramı için, sırasıyla, Ek B Tanım B.7 ve Tanım B.13 ye bakınız.

² Galile düzleminde bir vektörün normu ve özel normu için, sırasıyla, Ek B Tanım B.11 ve Tanım B. 12 ye bakınız.

5.4 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

$B = G / G'$ 1-parametrelili düzlemsel Galile hareketi esnasında G düzleminde alınan bir X noktasının G düzlemine göre olan ivme vektörüne *relatif ivme vektörü* denir. Bu ivme vektörü $\mathbf{b}_r$ ile gösterilir ve $\mathbf{V}_r$ relatif hızının t ye göre türevi alınarak

$$\mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{V}}_r = \ddot{x}_1 \mathbf{g}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{g}_2 \quad (5.14)$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ sabit olarak kabul edilmiştir.

X noktasının G' düzlemine göre ivme vektörüne *mutlak ivme vektörü* denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir. Bu vektör (5.8) denkleminde verilen $\mathbf{V}_a$ vektöründe (5.11) ve (5.12) denklemleri kullanılıp t ye göre türev alınarak,

$$\mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = \left\{ (\dot{x}_1 - \dot{p}_1) \mathbf{g}_2 + (x_1 - p_1) \dot{\mathbf{g}}_2 \right\} \dot{\phi} + \left\{ (x_1 - p_1) \mathbf{g}_2 \right\} \ddot{\phi} + \dot{x}_1 \dot{\mathbf{g}}_1 + \dot{x}_2 \dot{\mathbf{g}}_2 + \ddot{x}_1 \mathbf{g}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{g}_2$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikte (5.5) denklemleri kullanılırsa

$$\mathbf{b}_a = \ddot{x}_1 \mathbf{g}_1 + \left\{ (x_1 - p_1) \ddot{\phi} - \dot{p}_1 \dot{\phi} + 2\dot{x}_1 \dot{\phi} + \ddot{x}_1 \right\} \mathbf{g}_2 \quad (5.15)$$

bulunur. (5.15) ifadesindeki

$$\mathbf{b}_f = 0 \cdot \mathbf{g}_1 + \left\{ (x_1 - p_1) \ddot{\phi} - \dot{p}_1 \dot{\phi} \right\} \mathbf{g}_2$$

ve

$$\mathbf{b}_c = 0 \cdot \mathbf{g}_1 + 2\dot{x}_1 \dot{\phi} \mathbf{g}_2$$

ifadelerine, sırasıyla, $B = G / G'$ 1-parametrelili *düzlemsel Galile hareketinin sürüklenme ivmesi* ve *Coriolis ivmesi* denir.

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 5.2

$B = G / G'$ 1-parametrelili düzlemsel Galile hareketi esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü; sürüklenme ivme vektörü, Coriolis ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r \quad (5.16)$$

dir [34].

Sonuç 5.4

$B = G / G'$ hareketi esnasında, $\mathbf{b}_c$ Coriolis ivme vektörü ve $\mathbf{V}_r$ relatif hız vektörü Galile anlamında birbirine diktir. Yani

$$\langle \mathbf{V}_r, \mathbf{b}_c \rangle_G = \langle x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2, 0 \mathbf{g}_1 + 2\dot{x}_1 \dot{\phi} \mathbf{g}_2 \rangle = 0$$

dır. $\square$

Şimdi bir B hareketinde herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım:

Tanım 5.4

$\dot{\phi} \neq 0$ olmak üzere herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan $Q = (q_1, q_2)$ noktaları $\mathbf{b}_r = 0$ için

$$(x_1 - p_1) \ddot{\phi} - \dot{p}_1 \dot{\phi} = 0$$

lineer denklem sisteminden

$$\begin{cases} q_1(t) = p_1(t) + \dot{p}_1(t) \frac{\dot{\phi}(t)}{\ddot{\phi}(t)} \\ q_2(t) = (q_2(t))(\mu), C \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.17)$$

şeklinde çözümüne elde edilirler. Bu noktalar *ivme pol doğrusu* oluşturmaktadır. Burada $q_2(t)$ fonksiyonları μ ye göre dizayn edilmektedir [34].

Sonuç 5.5

$B = G / G'$ hareketi esnasında herhangi t anındaki her iki düzlemde hareket etmeyen sabit noktaları G düzleminde y – eksenine paralel doğrular üzerindedir. Yani, herhangi t anında G düzleminde sadece ivme pol doğrusu vardır. Bütün $t \in I$ lar için bu hareketli pol doğruları y – eksenine ve birbirine paraleldir ve bir paralel doğru demeti oluşturur [34].

CAYLEY-KLEIN DOKUZ DÜZLEM GEOMETRİSİ

Bu bölümde Cayley-Klein düzlem geometrileri tanıtılacak olup, açı ölçümü ve uzaklık ölçümü kavramlarıyla birlikte *“bir doğru üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık ölçümü ve geometriler”* ve *“bir noktadan geçen doğrular arasındaki açı ölçümü ve geometriler”* başlıkları ile Cayley-Klein geometrileri ayrıntılı bir biçimde ele alınacaktır.

Daha sonra *Afin Cayley-Klein düzlem* kavramı verilecek ve bu düzlemde bazı lineer cebir ve diferansiyel geometri kavramları açıklığa kavuşturulacaktır.

Düzlemde Cayley-Klein anlamda geometriler eliptik, parabolik, hiperbolik açı ve uzunluk ölçümleriyle birlikte 9 adet olup, bu geometrilerin sınıflandırılması Çizelge 6.1 de görülmektedir.

1871 yılında Felix Klein (1847-1925) tarafından bu geometrilerin birbirleriyle olan ilişkilerini gösterilmiş ve Arthur Cayley (1821-1895) in daha önceki çalışmalarına dayandırılarak *Cayley-Klein Geometrileri* olarak isimlendirilmiştir [18-20]. Bu geometrilerin en alışlagelmişleri parabolik uzaklık ölçümü ile verilen ve *“Afin Cayley-Klein Geometrileri”* olarak adlandırılan Öklid, Galile ve Minkowski (Lorentz) geometrileridir. Öklid geometrisi dışında kalanlara genel olarak *“Öklid-dışı geometriler”* adı verilmiş olup bu geometrilerden klasikleşmiş olanları Eliptik ve Hiperbolik geometridir.

Çizelge 6.1 de verilen geometriler incelendiğinde; eliptik, hiperbolik ve parabolik uzaklık ölçümü ile verilen geometrilerin, sırasıyla, pozitif, sıfır ve negatif kesit eğrilikli (Gauss eğriliği)¹ yüzeylere işaret ettiği görülmektedir.

F. Klein'e göre, sıfır eğrilikli yüzey üzerindeki Öklid geometrisi pozitif eğrilikli bir yüzey üzerindeki eliptik geometri ile negatif eğrilikli bir yüzey üzerindeki hiperbolik geometri arasında yer alır; yani, Öklid geometrisi, eliptik geometri ile hiperbolik geometrinin limitidir.

İkili Hiperbolik (De-Sitter) geometri ve Co-Hiperbolik (Anti De-Sitter) geometri de genel olarak "*Sabit Eğrilikli Lorentz Geometrileri*" adını almaktadır.

Çizelge 6. 1 Cayley-Klein dokuz düzlem geometrisi

		İki Nokta Arasındaki Uzaklık Ölçümü		
		ELİPTİK UZAKLIK ÖLÇÜMÜ $K > 0$	PARABOLİK UZAKLIK ÖLÇÜMÜ $K = 0$	HİPERBOLİK UZAKLIK ÖLÇÜMÜ $K < 0$
İki Doğru Arasındaki Açık Ölçümü	ELİPTİK AÇI ÖLÇÜMÜ	Eliptik Geometri (Reimann)	<i>Öklid Geometrisi</i>	Hiperbolik Geometri (Lobachevsky)
	PARABOLİK AÇI ÖLÇÜMÜ	Co-Öklidyen Geometri (Anti-Newton Hooke)	<i>Galile Geometrisi</i>	Co-Minkowskian Geometri (Newton Hooke)
	HİPERBOLİK AÇI ÖLÇÜMÜ	Co-Hiperbolik Geometri (Anti De-Sitter)	<i>Minkowski (Lorentz) Geometrisi</i>	İkili Hiperbolik Geometri (De-Sitter)

¹ Bir hiperyüzey üzerindeki 2 boyutlu teğet düzleminin kesit eğriliği; Gauss eğriliği adını alır [41-43].

Bu geometrilerden “*dualite prensibi*” ile yeni geometriler elde edilmiştir. Bu prensipte “*nokta*” ve “*doğru*” kavramları temel teşkil etmektedir. “*Nokta yerine doğru*” ve “*doğru yerine nokta*” alınmasıyla her iki kavram için de bilinenler geçerli olur. Örneğin, “*iki nokta bir doğru belirtir*” kavramı Co-Öklidyen geometride “*iki doğru bir nokta belirtir*” şeklindedir. Bu prensip göz önüne alındığında “*iki nokta arasındaki uzaklık*” kavramının duali “*iki doğru arasındaki açı*” dır. Böylelikle Çizelge 6.1 den hareketle Çizelge 6.2 deki bilgiler verilebilir [44-57].

Çizelge 6. 2 Geometriler ve dualeri

GEOMETRİ	DUALİ
Eliptik Geometri	Eliptik Geometri
Öklid Geometrisi	Co-Öklidyen Geometri
Hiperbolik Geometri	Co-Hiperbolik Geometri
Galile Geometrisi	Galile Geometrisi
Minkowski Geometri	Co-Minkowski Geometri
İkili Hiperbolik Geometri	İkili Hiperbolik Geometri

Çizelge 6.2 den anlaşılacağı üzere Eliptik, Galile ve İkili Hiperbolik (De-Sitter) geometrilerin dualeri kendileridir.

Çizelge 6.1 de “*Parabolik geometri*” nin görülmemesinin sebebi bu tarz bir geometrinin “*Öklid geometrisi*” olarak alınabilmesidir [16].

Bu bölümden itibaren “*Cayley-Klein*” ifadesini “*CK*” olarak kısaltacağız.

6.1 Bir Doğru Üzerindeki İki Nokta Arasındaki Uzaklık Ölçümü ve Geometriler

Bu alt bölümde bir “*l*” doğrusu üzerinde verilen *A* ve *B* gibi iki nokta arasındaki parabolik, eliptik ve hiperbolik olmak üzere üç farklı uzaklık tanımlanacaktır [16].

6.1.1 Parabolik (Öklidyen) uzaklık

Tanım 6.1

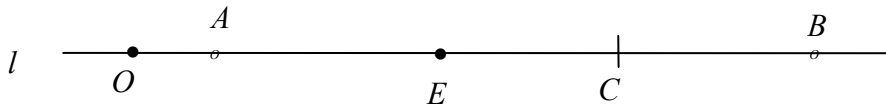
O ve E bir " l " doğrusu üzerinde seçilmiş iki nokta olmak üzere $|OE|$ birim uzunluğu seçilsin. Her $A, B \in l$ nokta çifti arasındaki *parabolik uzaklık*

$$\frac{|AB|}{|OE|}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaklık

$$d_{AB}^{(P)} = \frac{|AB|}{|OE|}$$

biçiminde gösterilir. Burada $|AB| = d(A, B)$ olup A ve B noktaları arasındaki alışılmış Öklid uzaklığıdır.



Şekil 6. 1 İki nokta arasındaki parabolik uzaklık

Şekil 6.1 de görüldüğü gibi AB doğru parçası üzerinde bir C noktası alındığında

$$d_{AB}^{(P)} = d_{AC}^{(P)} + d_{CB}^{(P)}$$

bağıntısı mevcuttur [16].

Örnek 6.1 (Öklid Geometrisi)

Öklid anlamında uzaklığı koruyan dönüşümlere *Öklid hareketleri* denir. Bu dönüşümler dönmeler, ötelemeler, yansımalar ve bunların bileşkeleridir. Bu dönüşümler altında değişmeyenlerin teorisi *Öklid geometrisidir*.

l doğrusu üzerinde Öklid hareketleri Öklid anlamında uzaklığı koruduğu gibi $d_{AB}^{(P)}$ uzaklığını da korurlar. Bu hareketlere genelliği bozmaksızın *parabolik hareketler* de denilebilir. Bu hareketler l doğrusunu sabit bırakan

- l doğrusu boyunca ötelemeler
- Ekseni l doğrusu olan yansımalar

dır.

6.1.2 Eliptik uzaklık

Tanım 6.2

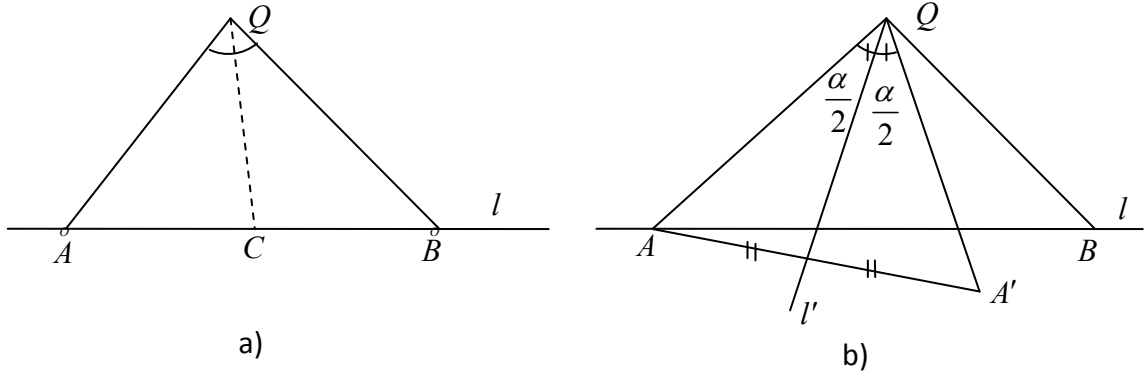
Bir " l " doğrusu üzerine eliptik geometri koymak için " l " doğrusu üzerinde olmayan bir Q noktası seçelim. Her $A, B \in l$ nokta çifti arasındaki *eliptik uzaklık*

$$\angle AQB$$

açısının ölçüsü şeklinde tanımlanır ve

$$d_{AB}^{(E)} = \angle AQB$$

şeklinde gösterilir. Bu açı ölçümü alışılmış Öklid anlamında açı ölçümüdür.



Şekil 6.2 a) İki nokta arasındaki eliptik uzaklık b) Eliptik hareketlerde yansıma

Şekil 6.2 de görüldüğü gibi A, B ve C noktaları l doğrusu üzerinde ardışık üç nokta ise

$$d_{AB}^{(E)} = d_{AC}^{(E)} + d_{CB}^{(E)}$$

bağıntısı mevcuttur [16].

Örnek 6.2 (Eliptik Geometri)

Eliptik uzaklığı koruyan dönüşümlere *eliptik hareketler* denir. Bu dönüşümler

- Tepe noktası Q olan doğru demetinin Q noktası etrafında α açısı kadar dönme dönüşümü (Bu dönüşüm Q noktasını sabit bırakır. Bir A noktasının resmi A' ise $\angle AQA' = \alpha$ olur. Şekil 6.2 b) den görülmektedir.)

- Tepe noktası Q olan doğru demetinin demete ait bir l' doğrusuna göre yansıma dönüşümü (Bir A noktasının resmi A' ise $\angle AQA'$ açısının açıortayı demete ait l' doğrusu olur. Şekil 6.2 b) den görülmektedir.)

Eliptik hareketler altında değişmeyenlerin teorisine *eliptik geometri* denir [16].

6.1.3 Hiperbolik uzaklık

Tanım 6.3

Bir " l " doğrusu üzerinde I ve J noktaları seçilsin. IJ doğru parçası " l " doğrusunun tamamını temsil etmek üzere l doğrusu üzerindeki A ve B noktaları arasındaki *hiperbolik uzaklık*

$$d_{AB}^{(H)} = k \log \frac{AI/AJ}{BI/BJ}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 6. 3 İki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık

Burada k ve logaritmanın tabanının seçilişi keyfidir. k sabiti *birim uzunluğunun* seçilişine bağlı olarak değişmektedir. $\frac{AI/AJ}{BI/BJ}$ ifadesi incelendiğinde;

$\frac{AI/AJ}{BI/BJ} = (A, B; I, J)$ yani A ve B noktalarının IJ doğru parçasını bölme oranı olan

$(A, B; I, J)$ çifte oranı olduğu görülür. AI, AJ, BI ve BJ yönlü doğru parçalarıdır.

Logaritma fonksiyonu sadece pozitif çifte oran değerleri için tanımlı olacağından bu dört noktanın 24 farklı çifte oranından sadece pozitif olanları geçerlidir. Bu durumu sağlamak için A ve B noktalarının IJ doğru parçasının üzerinde seçilmesi gerekmektedir.

A, C ve B noktaları IJ doğru parçası üzerinde ardışık noktalar olsunlar (Şekil 6.3). IJ doğru parçası hiperbolik doğruyu temsil etmek üzere

$$d_{AB}^{(H)} = d_{AC}^{(H)} + d_{CB}^{(H)}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} (A, C; I, J) \cdot (C, B; I, J) &= \frac{AI/AJ}{CI/CJ} \cdot \frac{CI/CJ}{BI/BJ} \\ &= \frac{AI/AJ}{BI/BJ} \\ &= (A, B; I, J) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın logaritması alınarak

$$\log(A, C; I, J) + \log(C, B; I, J) = \log(A, B; I, J)$$

ve buradan da

$$d_{AB}^{(H)} = d_{AC}^{(H)} + d_{CB}^{(H)}$$

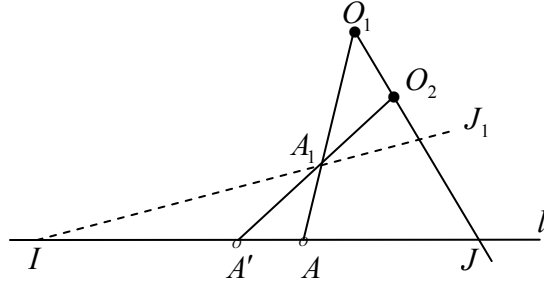
bağıntısı elde edilir [16].

Örnek 6.3 (Hiperbolik geometri)

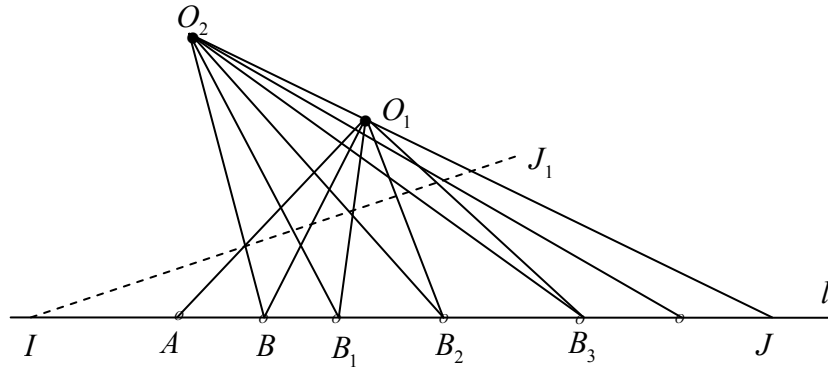
Hiperbolik uzaklığı (IJ doğru parçasına ait çifte oranları) koruyan dönüşümlere *hiperbolik hareketler* denir. Bu dönüşümler

- IJ doğru parçasının S orta noktasına göre yansıma dönüşümü (bu dönüşüm altında A noktasının resmi A' ve B noktasının resmi B' ise $(A, B; I, J) \cdot (A', B'; I, J)$ şeklindedir.)
- IJ dan JI ya olan merkezli izdüşümler

IJ doğru parçasının kendisine olan merkezli izdüşümleri şu şekilde elde edilir: Önce IJ doğru parçası I dan geçen bir IJ_1 doğru parçası üzerine O_1 merkezli bir izdüşümle resmedilir. Ardından IJ_1 doğru parçası da bir diğer O_2 merkezli izdüşümle IJ (kendisine) üzerine resmedilir (Şekil 6.4).



Şekil 6. 4 Merkezil izdüşüm I



Şekil 6. 5 Merkezil izdüşüm II

Bu cins merkezil izdüşümlerle (Şekil 6.5) uzunlukları hiperbolik olarak aynı olan fakat Öklid anlamında aynı olmayan ve AB den elde edilen doğru parçalarının bir dizisi $AB \in IJ \rightarrow BB_1 \in IJ \rightarrow B_1B_2 \in IJ \rightarrow B_2B_3 \in IJ \dots$

olmak üzere

$$AB, BB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$$

biçiminde elde edilir. Şekil 6.5 da görüldüğü gibi IJ hiperbolik doğrusu üzerinde bir A noktasından başlanırsa hiperbolik uzunluk anlamında

$$AB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$$

olur ve B_i noktalarının hepsi IJ doğru parçasının içinde kalır. Yani IJ hiperbolik doğrusu sonsuzdur. $B \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \dots I$ yaklaşımında B noktası I ya giderse $BI \rightarrow 0$ olacağından

$$(A, B; I, J) = \frac{AI/AJ}{BI/BJ} = d_{AB}^{(H)} \rightarrow \infty$$

olur [16].

Hiperbolik hareketler altında değişmeyenlerin teorisine *hiperbolik geometri* denir [16].

6.2 Bir Noktadan Geçen Doğrular Arasındaki Açı Ölçümü ve Geometriler

Bu alt bölümde bir “ l ” doğrusu üzerinde verilen “iki nokta arasındaki uzaklıklar” kavramının duali olarak ifade ettiğimiz “bir noktadan geçen doğrular arasındaki açılar” kavramı ele alınacaktır. Noktalar arasındaki üç farklı uzaklık ölçümü benzer biçimde doğrular arasındaki üç farklı açı ölçümü tanımları verilecektir [16].

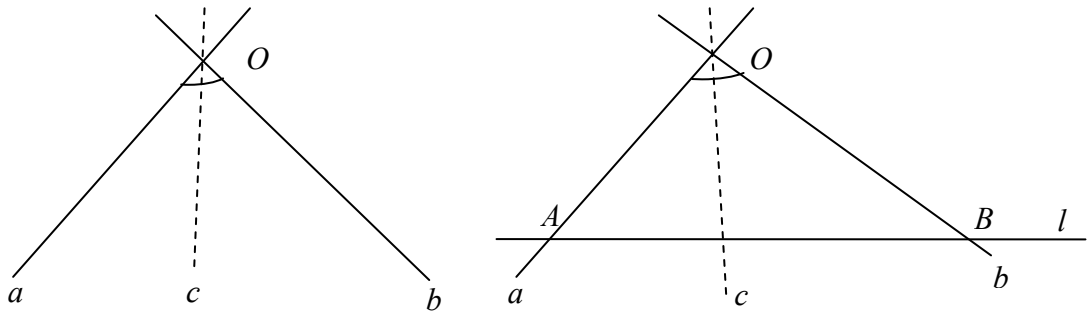
6.2.1 Eliptik açı

Tanım 6.4

Tepe noktası O olan bir doğru demetinin a ve b gibi iki ışını arasındaki *eliptik açı* alışılmış Öklid anlamında açı olup bu açının ölçüsü $\delta_{ab}^{(E)}$ biçiminde gösterilir ve

$$\delta_{ab}^{(E)} = \angle aOb$$

olarak tanımlanır [16].



Şekil 6. 6 Eliptik açı

Örnek 6.4 (Eliptik geometri)

Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2 den hareketle eliptik geometrinin eliptik uzaklık ve eliptik açı ölçümü ile tanımlandığını ve dualinin kendisi olduğu görülmektedir. O halde tepe noktası O olan bir doğru demetine ait iki ışının bir l doğrusunu kestiği noktalar A, B ise eliptik uzaklık ve eliptik açı ölçümü kullanıldığında $\delta_{ab}^{(E)} = d_{AB}^{(E)}$ olduğu görülür (Şekil 6.6) [16]. (Örnek 6.2 de eliptik geometri ayrıntılı bir biçimde görülebilir.)

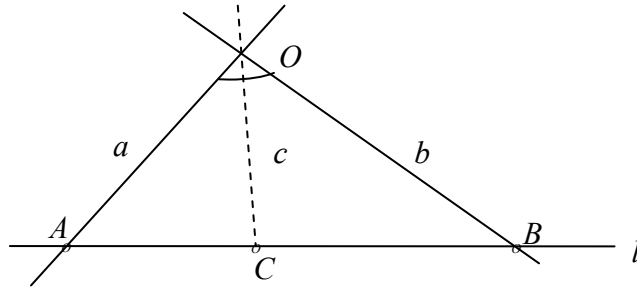
6.2.2 Parabolik açı

Tanım 6.5

Tepe noktası O olan bir doğru demetinin a ve b gibi iki ışını arasındaki *parabolik açı* $\delta_{ab}^{(P)}$ biçiminde gösterilip, O dan geçmeyen ve demetin a ve b ışınlarını sırasıyla A ve B noktalarında kesen bir l doğrusu için (Şekil 6.7)

$$\delta_{ab}^{(P)} = |AB|$$

olarak tanımlanır. Burada $|AB|$ alışılmış Öklid uzaklığıdır [16].



Şekil 6. 7 Parabolik açı

Örnek 6.5 (Galile geometrisi)

Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2 den Galile geometrisinin dualinin kendisi olduğu açıktır. Parabolik uzaklık ve parabolik açı ile birlikte tanımlanan Galile geometrisi için $|OE| = 1$ seçilmesi halinde $\delta_{ab}^{(P)} = d_{AB}^{(P)}$ olduğu açıktır¹ [16].

¹ Ek-B Tanım B.18 den açıkça görülmektedir.

6.2.3 Hiperbolik açı

Tanım 6.6

O noktasından geçen i, j, a ve b doğrularını alalım. a ve b doğruları arasındaki *hiperbolik açı*

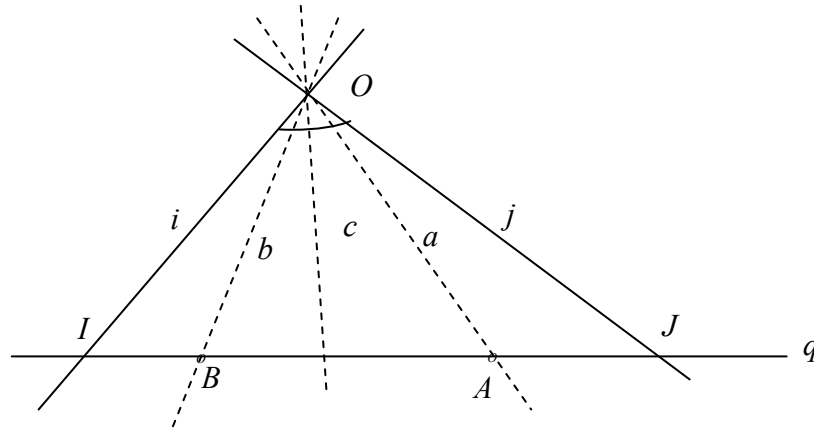
$$\delta_{ab}^{(H)} = k \log \left(\frac{\sin \angle(a, i)}{\sin \angle(a, j)} : \frac{\sin \angle(b, i)}{\sin \angle(b, j)} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada k ve logaritmanın tabanının seçilişi keyfidir. k sabiti *birim uzunluğunun* seçilişine bağlı olarak değişmektedir. Bu eşitlikte alınan açılar pozitif yönlüdür. Dikkat edilirse $\frac{\sin \angle(a, i)}{\sin \angle(a, j)} : \frac{\sin \angle(b, i)}{\sin \angle(b, j)}$ ifadesinin a, b, i ve j doğrularının

çifte oranı yani,

$$\frac{\sin \angle(a, i)}{\sin \angle(a, j)} : \frac{\sin \angle(b, i)}{\sin \angle(b, j)} = (a, b : i, j)$$

olduğu görülür. $\delta_{ab}^{(H)}$ nın tanımlanabilmesi için bu çifte oranın sıfırdan büyük olması gerekir [16].



Şekil 6. 8 Hiperbolik açı

Örnek 6.6 (İkili Hiperbolik geometri)

Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2 den İkili hiperbolik geometrinin dualinin kendisi olduğu açıktır. a, b, i ve j doğrularının çifte oranı Şekil 6.8 da görülen O dan geçmeyen bir q

doğrusu üzerindeki A, B, I, J noktalarının çifte oranıdır. O halde $\delta_{ab}^{(H)} = d_{AB}^{(H)}$ olduğu açıktır [16].

6.3 CK-Düzlemlerinde Metrik

CK-düzlemlerinde metrik fonksiyonu t :zaman ve x :konum koordinatlarına göre verilmektedir. Metriğin işareti $(1, \epsilon)$ ve K kesit eğriliği (Gauss eğriliği) olmak üzere $\{t, x\}$ koordinatları için genel metrik

$$ds^2 = \frac{(1 + K \epsilon x^2) dt^2 + (1 + K t^2) \epsilon dx^2 - 2K \epsilon t x dt dx}{(1 + K(t^2 + \epsilon x^2))^2}$$

şeklindedir [52].

6.3.1 Özel durumlar için bazı metrikler

$\{t, x\}$ koordinatları için metriğin işaretinde bulunan ϵ ile Gauss eğriliği K ; $\{-1, 0, 1\}$ değerlerini aldığı anda oluşan metrikler Çizelge 6.3 de gösterildiği gibi verilebilir.

6.4 Afin CK-Düzlem Geometrileri

Üç farklı uzaklık ölçümü ve üç farklı açı ölçümüne ait temel özellikler ve bu özellikler ile birlikte oluşan geometrilere örnekler verdik. Şimdi Çizelge 6. 1 de tanımlanan 9 farklı geometriden düzlemde “Afin CK-geometrileri” olarak adlandırılan Öklid, Galile ve Minkowski (Lorentz) geometrilerini inceleyelim. Buradan itibaren Öklid, Galile ve Minkowski düzlemini $K = 0$ sabit Gauss eğriliği ile birlikte $\epsilon = -1, 0, 1$ için kısaca P_ϵ düzlemi olarak tek çatı altında toplayacağız.

Çizelge 6.3 den görüldüğü gibi $K = 0$ olmak üzere

- $\epsilon = 1$ için Öklid metriği $ds^2 = dt^2 + dx^2$,
- $\epsilon = 0$ için Galile metriği $ds^2 = dt^2$,
- $\epsilon = -1$ için Minkowski metriği $ds^2 = dt^2 - dx^2$

elde edilir.

Çizelge 6. 3 Özel durumlar için bazı metrikler

METRİKLER				
		İki Nokta Arasındaki Uzaklık Ölçümü		
		ELİPTİK $K = 1$	PARABOLİK $K = 0$	HİPERBOLİK $K = -1$
İki Doğru Arasındaki Açık Ölçümü	ELİPTİK $\epsilon = 1$	$ds^2 = \frac{(1+x^2)dt^2 + (1+t^2)dx^2 - 2txdt dx}{(1+t^2+x^2)^2}$	$ds^2 = dt^2 + dx^2$	$ds^2 = \frac{(1-x^2)dt^2 + (1-t^2)dx^2 + 2txdt dx}{(1-t^2-x^2)^2}$
	PARABOLİK $\epsilon = 0$	$ds^2 = \frac{dt^2}{(1+t^2)^2}$	$ds^2 = dt^2$ özel doğrular için $ds^2 = dx^2$	$ds^2 = \frac{dt^2}{(1-t^2)^2}$
	HİPERBOLİK $\epsilon = -1$	$ds^2 = \frac{(1-x^2)dt^2 - (1+t^2)dx^2 + 2txdt dx}{(1+t^2-x^2)^2}$	$ds^2 = dt^2 - dx^2$	$ds^2 = \frac{(1+x^2)dt^2 - (1-t^2)dx^2 - 2txdt dx}{(1-t^2+x^2)^2}$

Böylece

$$ds^2 = \begin{bmatrix} dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dx \end{bmatrix}$$

yani

$$ds^2 = dt^2 + \epsilon dx^2 \quad (6.1)$$

yazılabilir. Galile metriği dejenere olduğundan bir diğer metrik

$$dL^2 = \begin{cases} dx^2 + \frac{1}{\epsilon} dt^2, & \epsilon \neq 0 \\ dx^2, & \epsilon = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

alınabilir. Burada $\epsilon = -\left(\frac{c_{ışık}}{c_{max}}\right)^2$ şeklinde fiziksel bir anlam içermektedir. i kompleks

birim olmak üzere $c_{max} = ic_{ışık}$ olduğunda Öklid, $c_{max} = \infty$ durumunda Galile, $c_{max} = c_{ışık}$ durumunda ise Lorentz fizik kanunları geçerlidir [52].

6.4.1 P_ϵ düzleminde iç çarpım

Tanım 6.7

P_ϵ düzleminde $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ olmak üzere $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ noktaları alalım. Bu iki nokta için P_ϵ düzleminde iç çarpım $\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$ şeklinde gösterilir ve

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\epsilon = x_1 y_1 + \epsilon x_2 y_2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

olarak tanımlanır. Bu iç çarpım incelendiğinde

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\epsilon = \begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2; & \epsilon = 1 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_0 = x_1 y_1 & ; \quad \epsilon = 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{-1} = x_1 y_1 - x_2 y_2; & \epsilon = -1 \end{cases}$$

olduğu görülür. Bu dönüşümün matrisi $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$ şeklinde olup

$$\langle x, y \rangle = x^T B y \quad (6.4)$$

olarak yazılabilir [39].

Not 6.1

$\epsilon = 0$ için P_ϵ düzleminde

- y eksenine paralel olan vektörlere *özel vektör* denir.
- $x = (0, x_2), y = (0, y_2) \in P_\epsilon$ özel vektörlerinin Galile özel iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ ile gösterilir ve

$$\langle x, y \rangle_0 = \langle x, y \rangle_\delta = x_2 y_2$$

olarak tanımlanır.

İç Çarpımın Özellikleri

Her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in P_\epsilon$ ve $a \in \mathbb{R}$ skaler sayısı için

i) Simetri özelliği: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ dir.

ii) Bilineerlik özelliği: $\langle ax, y \rangle_\epsilon = ax_1 y_1 + \epsilon ax_2 y_2 = a(x_1 y_1 + \epsilon x_2 y_2) = a \langle x, y \rangle_\epsilon$

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + \epsilon(x_2 + y_2)z_2 = (x_1 z_1 + \epsilon x_2 z_2) + (y_1 z_1 + \epsilon y_2 z_2) \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

dir.

iii) Yarı pozitif tanımlılık özelliği: $\langle x, x \rangle_\epsilon = x_1^2 + \epsilon x_2^2$ iken

- Eğer $\langle x, x \rangle_G = x_1^2 = 0$ ise $x_1 = 0$ olup $x \neq 0$ olabilir. Bu özelliği sağlayan her $x \in P_\epsilon$ vektörü için $\langle x, v \rangle_\epsilon = 0$ olacak şekilde bütün $v \in P_\epsilon$ vektörlerinin kümesi bir Öklid doğrudur.

- Eğer $\langle x, x \rangle_L = x_1^2 - x_2^2$ ise $\begin{cases} \langle x, x \rangle_L > 0 \text{ ve } x \neq 0 \text{ ise } x \text{ spacelike vektör} \\ \langle x, x \rangle_L = 0 \text{ ve } x \neq 0 \text{ ise } x \text{ null vektör} \\ \langle x, x \rangle_L < 0 \text{ ise } x \text{ timelike vektör} \end{cases}$

olarak sınıflandırılır¹.

6.4.2 P_ϵ düzleminde ortogonal baz vektörleri

Tanım 6.8

P_ϵ düzleminde $\{\mathbf{c}_1 = (1, 0), \mathbf{c}_2 = (0, 1)\}$ vektörlerine *ortogonal baz vektörleri* denir.

6.4.3 P_ϵ düzleminde norm

Tanım 6.9

P_ϵ düzleminde her $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in P_\epsilon$ vektörünün normu $\|\mathbf{x}\|_\epsilon$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{x}\|_\epsilon = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_\epsilon} = \sqrt{x_1^2 + \epsilon x_2^2}$$

şeklinde tanımlanır. $\|\mathbf{x}\|_\epsilon = 1$ ise $\mathbf{x}$ vektörüne *birim vektör* denir.

Not 6.2

$\epsilon = 0$ için P_ϵ düzleminde $\mathbf{x} = (0, x_2) \in P_\epsilon$ özel vektörlerinin normu $\|\mathbf{x}\|_0 = \|\mathbf{x}\|_\delta$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{x}\|_\delta = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_\delta} = |x_2|$$

şeklinde tanımlanır² [16].

6.4.4 P_ϵ düzleminde diklik (ortogonalite)

Tanım 6.10

P_ϵ düzleminde her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P_\epsilon$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\epsilon = 0$$

olması durumunda $\mathbf{y}$ vektörüne $\mathbf{x}$ vektörünün *diki (ortogonalı)* denir ve $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ ile gösterilir. P_ϵ düzleminde self-ortogonal vektörlere *izotropik vektör* denir ve

¹ Lorentz düzleminde vektörlerin sınıflandırılması Ek A Tanım A.3 de verilmiştir.

² Galile düzleminde bir vektörün özel normu Ek B Tanım B.12 de verilmiştir.

- $\epsilon = 1$ için sıfır vektörü,
- $\epsilon = 0$ ve $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_G \neq 0$ için $\mathbf{y} = (0, y_2)$ olacak biçimdeki tüm dikey vektörler,
- $\epsilon = -1$ için sıfır vektörü ile birlikte $(\pm 1, 1)$ vektörlerine paralel olan vektörler

izotropiktir.

6.4.5 P_ϵ düzleminde metrik fonksiyonu

Tanım 6.11

P_ϵ düzleminde $A = (x_1, x_2)$ ve $B = (y_1, y_2)$ noktaları arasındaki *metrik fonksiyonu*¹ d_{AB}

ile gösterilir ve $d_{AB} = \|\mathbf{AB}\|_\epsilon = \sqrt{|\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_\epsilon|}$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$ olmak üzere

$$d_{AB} = \sqrt{|(y_1 - x_1)^2 + \epsilon (y_2 - x_2)^2|}$$

formülü elde edilir. Eğer bu noktalar arasındaki metrik fonksiyonu sıfır ise, bu iki noktaya *çakışık* denir.

6.4.6 P_ϵ düzleminde çember

Tanım 6.12

P_ϵ düzleminde sabit bir O noktasına uzaklıkları mutlak değerce sabit ve r olan $M(x, y)$ noktalarının kümesine *çember* denir ve S ile gösterilir. Burada $O(a, b)$ noktasına S çemberinin *merkezi* ve negatif olmayan r sayısına da çemberin *yarıçapı*

denir. $d_{OM} = \sqrt{|(x - a)^2 + \epsilon (y - b)^2|}$ olduğundan

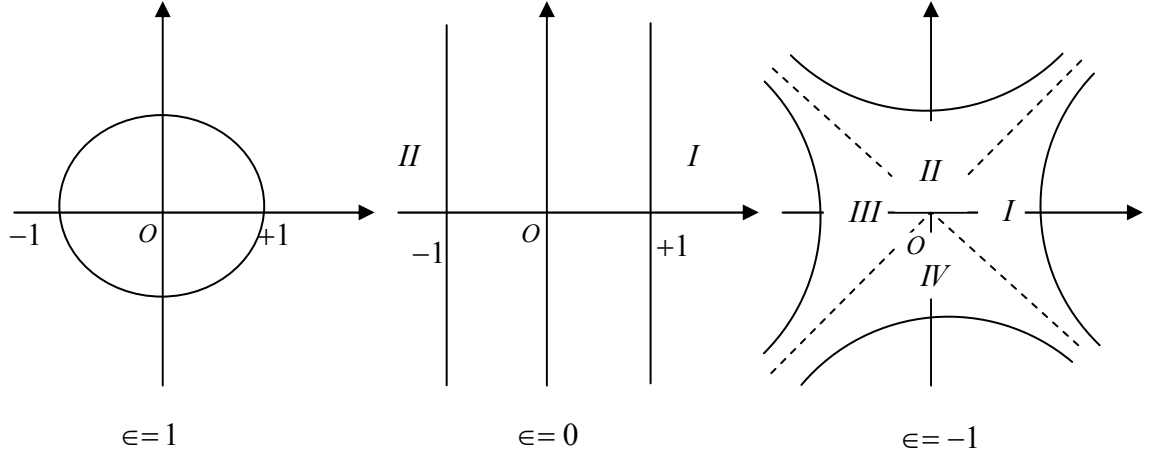
$$d_{OM}^2 = (x - a)^2 + \epsilon (y - b)^2 = r^2$$

¹ $\epsilon = 0$ için Galile düzleminde işaretli uzaklık Ek-B Tanım B.15 de işaretli özel uzaklık Tanım B.16 da verilmiştir.

dir. Böylece S çemberi

$$(x-a)^2 + \epsilon(y-b)^2 = r^2$$

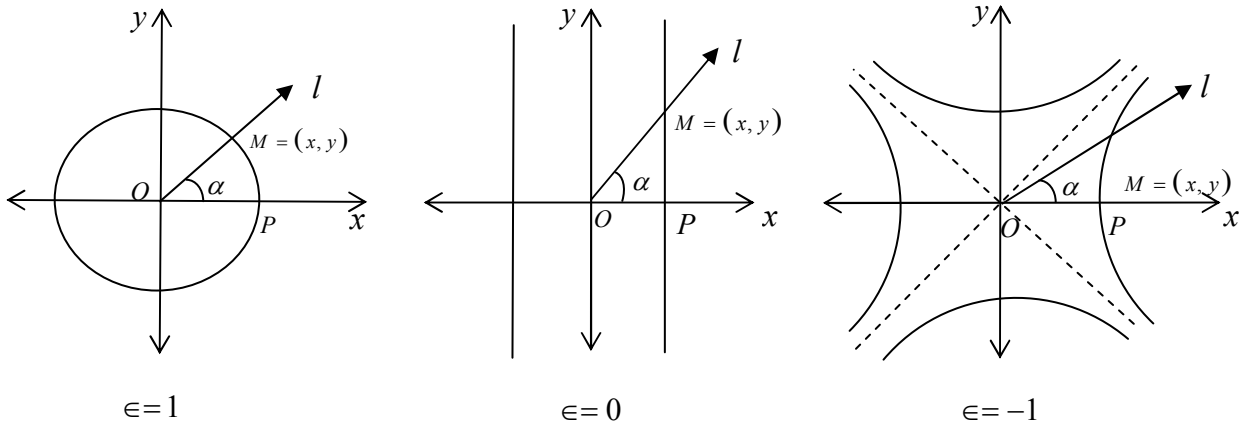
olarak tanımlanabilir.



Şekil 6. 9 P_ϵ düzleminde birim çemberler

6.4.7 P_ϵ düzleminde trigonometri

S , O merkezli birim çember ve $M=(x,y)$ S üzerinde bir nokta olsun. l , OM doğrusunu ve α , δ_{Ol} açısını gösterebilir.



Şekil 6. 10 P_ϵ düzleminde trigonometri

P_{ϵ} düzleminde $\cos_{\epsilon} \varphi$ ve $\sin_{\epsilon} \varphi$ trigonometrik fonksiyonları

$$\cos_{\epsilon} \varphi = \begin{cases} \cos \varphi, & \epsilon = 1 \\ \cos g\varphi = 1, & \epsilon = 0 \\ \cosh \varphi, & \epsilon = -1 \end{cases}, \quad \sin_{\epsilon} \varphi = \begin{cases} \sin \varphi, & \epsilon = 1 \\ \sin g\varphi = \varphi, & \epsilon = 0 \\ \sinh \varphi, & \epsilon = -1 \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca seri açılımları

$$\cos_{\epsilon} \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-\epsilon)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin_{\epsilon} \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-\epsilon)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

olarak yazılabilir. Bunun yanında

$$\tan_{\epsilon} \varphi = \frac{\sin_{\epsilon} \varphi}{\cos_{\epsilon} \varphi}$$

ve

$$\sqrt{-\epsilon} = J = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$e^{J\varphi} = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\epsilon \sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$e^{J\varphi} = \cos_{\epsilon} \varphi + J \sin_{\epsilon} \varphi$$

olup

$$e^{J\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(J\varphi)^n}{n!} = 1 + J\varphi + \frac{(J\varphi)^2}{2!} + \frac{(J\varphi)^3}{3!} + \frac{(J\varphi)^4}{4!} + \frac{(J\varphi)^5}{5!} + \dots$$

şeklinde seri açılımı yazılabilir. Bu seri açılımını incelersek

$$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J^3 = J^2 J = \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\epsilon J$$

$$J^4 = J^2 J = \epsilon^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} e^{J\varphi} &= \left(1 - \epsilon \frac{\varphi^2}{2!} + \epsilon^2 \frac{\varphi^4}{4!} - \epsilon^4 \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) + J \left(\varphi - \epsilon \frac{\varphi^3}{3!} + \epsilon^2 \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\epsilon)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + J \sum_{n=0}^{\infty} (-\epsilon)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

olup

$$e^{J\varphi} = \cos_{\epsilon} \varphi + J \sin_{\epsilon} \varphi$$

elde edilir.

P_{ϵ} düzleminde trigonometrik özellikler

P_{ϵ} düzleminde trigonometrik özellikler aşağıdaki şekilde verilebilir:

- $\cos_{\epsilon}^2 \varphi + \sin_{\epsilon}^2 \varphi = 1$
- $\cos_{\epsilon} (\varphi + \theta) = \cos_{\epsilon} \varphi \cos_{\epsilon} \theta - \sin_{\epsilon} \varphi \sin_{\epsilon} \theta$
- $\sin_{\epsilon} (\varphi + \theta) = \sin_{\epsilon} \varphi \cos_{\epsilon} \theta + \cos_{\epsilon} \varphi \sin_{\epsilon} \theta$
- $\tan_{\epsilon} (\varphi + \theta) = \frac{\tan_{\epsilon} \varphi + \tan_{\epsilon} \theta}{1 - \tan_{\epsilon} \varphi \tan_{\epsilon} \theta}$
- $\cos_{\epsilon} \varphi = \left(1 + \tan_{\epsilon}^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}}$
- $\frac{d}{d\varphi} \cos_{\epsilon} \varphi = -\sin_{\epsilon} \varphi$
- $\frac{d}{d\varphi} \sin_{\epsilon} \varphi = \cos_{\epsilon} \varphi$
- $\frac{d}{d\varphi} \tan_{\epsilon} \varphi = 1 + \tan_{\epsilon}^2 \varphi$
- $\frac{d}{d\varphi} e^{J\varphi} = J e^{J\varphi}$

$$\bullet e^{J(\varphi+\theta)} = e^{J\varphi} e^{J\theta}$$

$$\left(e^{J\varphi} e^{J\theta} = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\epsilon \sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \theta & -\epsilon \sin_{\epsilon} \theta \\ \sin_{\epsilon} \theta & \cos_{\epsilon} \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} (\varphi + \theta) & -\epsilon \sin_{\epsilon} (\varphi + \theta) \\ \sin_{\epsilon} (\varphi + \theta) & \cos_{\epsilon} (\varphi + \theta) \end{bmatrix} = e^{J(\varphi+\theta)} \right)$$

6.4.8 P_{ϵ} düzleminde dönme

P_{ϵ} düzleminde O orjin noktası etrafında $\varphi > 0$ açısı kadar dönmeden ibaret olan dönme hareketinin kutupsal koordinatlardaki denklemlerini bulalım. $X(r, \theta)$ noktasının resmi $X'(r', \theta')$ ise

$$r' = r \text{ ve } \theta' = \theta + \varphi$$

dir. X ve X' noktalarının koordinatları, sırasıyla, $X = (x_1, x_2)$ ve $X' = (x'_1, x'_2)$ ise yukarıdaki denklemden

$$\begin{cases} x_1 = r \cos_{\epsilon} \theta \\ x_2 = r \sin_{\epsilon} \theta \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} x'_1 = r' \cos_{\epsilon} \theta' \\ x'_2 = r' \sin_{\epsilon} \theta' \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} x'_1 &= r \cos_{\epsilon} (\theta + \varphi) = r (\cos_{\epsilon} \theta \cos_{\epsilon} \varphi - \epsilon \sin_{\epsilon} \theta \sin_{\epsilon} \varphi) \\ &= \underbrace{r \cos_{\epsilon} \theta \cos_{\epsilon} \varphi}_{x_1} - \underbrace{\epsilon r \sin_{\epsilon} \theta \sin_{\epsilon} \varphi}_{x_2} \\ x'_2 &= r \sin_{\epsilon} (\theta + \varphi) = r (\sin_{\epsilon} \theta \cos_{\epsilon} \varphi + \cos_{\epsilon} \theta \sin_{\epsilon} \varphi) \\ &= \underbrace{r \sin_{\epsilon} \theta \cos_{\epsilon} \varphi}_{x_2} + \underbrace{r \cos_{\epsilon} \theta \sin_{\epsilon} \varphi}_{x_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos_{\epsilon} \varphi - \epsilon x_2 \sin_{\epsilon} \varphi \\ x'_2 &= x_1 \sin_{\epsilon} \varphi + x_2 \cos_{\epsilon} \varphi \end{aligned} \tag{6.5}$$

dir. Matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\epsilon \sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\mathbf{x}' = e^{J\varphi} \mathbf{x}$$

yazılabilir. (6.5) denklemleri; dönme açısı φ olan O orjin noktası etrafındaki dönmelerin denklemleri olup $e^{J\varphi}$ ye *dönme matrisi* denir.

Diğer taraftan, (6.3) denklemiyle verilen bilineer form altında dönmeler korunur. Yani

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\epsilon} = \langle e^{J\varphi} \mathbf{x}, e^{J\varphi} \mathbf{y} \rangle_{\epsilon} \text{ dir. Gerçekten;}$$

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, y_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2) \in P_{\epsilon} \text{ için}$$

$$e^{J\varphi} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\epsilon \sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = (\cos_{\epsilon} \varphi x_1 - \epsilon \sin_{\epsilon} \varphi y_1, \sin_{\epsilon} \varphi x_1 + \cos_{\epsilon} \varphi y_1)$$

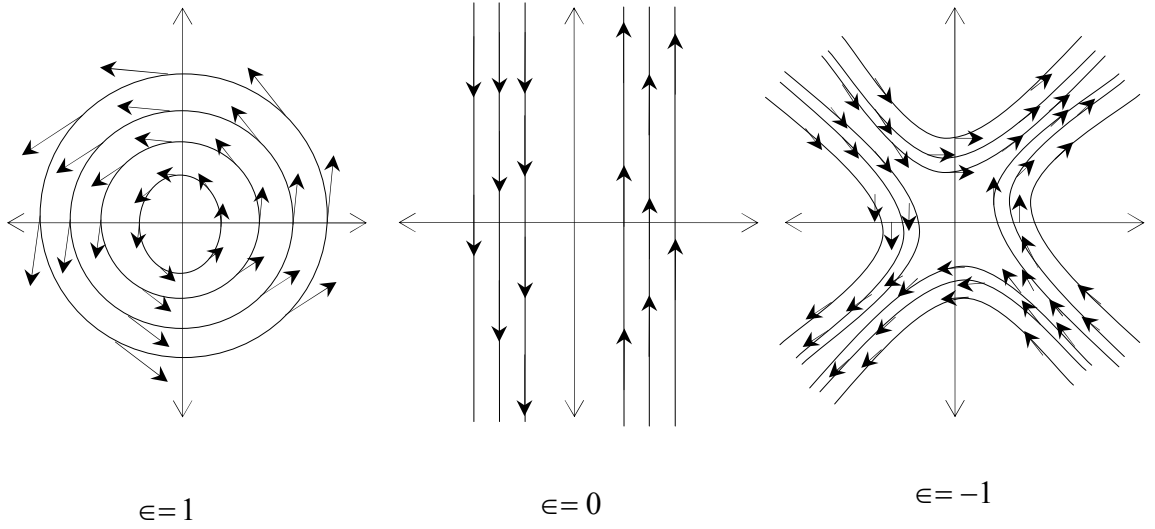
$$e^{J\varphi} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\epsilon \sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = (\cos_{\epsilon} \varphi x_2 - \epsilon \sin_{\epsilon} \varphi y_2, \sin_{\epsilon} \varphi x_2 + \cos_{\epsilon} \varphi y_2)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle e^{J\varphi} \mathbf{x}, e^{J\varphi} \mathbf{y} \rangle_{\epsilon} &= \cos_{\epsilon}^2 \varphi x_1 x_2 - \epsilon \cos_{\epsilon} \varphi \sin_{\epsilon} \varphi x_1 y_2 - \epsilon \cos_{\epsilon} \varphi \sin_{\epsilon} \varphi x_2 y_1 + \epsilon^2 \sin_{\epsilon}^2 \varphi y_1 y_2 \\ &\quad + \epsilon \sin_{\epsilon}^2 \varphi x_1 x_2 + \epsilon \sin_{\epsilon} \varphi \cos_{\epsilon} \varphi x_1 y_2 + \epsilon \sin_{\epsilon} \varphi \cos_{\epsilon} \varphi x_2 y_1 + \epsilon \cos_{\epsilon}^2 \varphi y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 \underbrace{(\cos_{\epsilon}^2 \varphi + \epsilon \sin_{\epsilon}^2 \varphi)}_1 + \epsilon y_1 y_2 \underbrace{(\cos_{\epsilon}^2 \varphi + \epsilon \sin_{\epsilon}^2 \varphi)}_1 \\ &= x_1 x_2 + \epsilon y_1 y_2 \end{aligned}$$

$$\langle e^{J\varphi} \mathbf{x}, e^{J\varphi} \mathbf{y} \rangle_{\epsilon} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\epsilon} \quad (6.6)$$

elde edilir. Şekil 6. 2 de P_{ϵ} düzleminde dönmelerin yönü gösterilmiştir [39].



Şekil 6. 11 P_ϵ düzleminde dönmelerin yönü

6.4.9 P_ϵ düzleminde katı hareket

P_ϵ düzleminde O orjin noktası etrafında $\varphi > 0$ açısı kadar dönme ve ötelemeden ibaret olan katı hareketin denklemlerini bulalım. X noktasının resmi X' olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için katı hareket

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos_\epsilon \varphi - x_2 \sin_\epsilon \varphi + a \\ x'_2 = x_1 \sin_\epsilon \varphi + x_2 \cos_\epsilon \varphi + b \end{cases}$$

şeklindedir. Bu son eşitlik

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos_\epsilon \varphi & -\epsilon \sin_\epsilon \varphi \\ \sin_\epsilon \varphi & \cos_\epsilon \varphi \end{bmatrix}}_{e^{J\varphi}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_C$$

olmak üzere

$$X' = e^{J\varphi} X + C$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir. Burada $e^{J\varphi}$ ifadesine *dönme matrisi* C ye *öteleme matrisi* denir. Bu eşitlik literatürde *direkt kongruens* olarak da isimlendirilmektedir [39].

6.4.10 P_ϵ düzleminde iki doğru arasındaki açı

P_ϵ düzleminde iki doğru arasındaki açının ölçümü $\epsilon=1$, $\epsilon=0$ ve $\epsilon=-1$ için, sırasıyla, eliptik, parabolik ve hiperboliktir. Bu açı ölçümlerinin özellikleri, sırasıyla, Tanım 6.4, 6.5 ve 6.6 da verilmiştir.

P_ϵ düzleminde iki vektör arasındaki açı

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ P_ϵ düzleminde uçları birim çemberin merkezinde ve aynı bölgede yer alan (aynı tipten) ve izotropik olmayan iki vektör olsun. $\mathbf{x}$ vektörünü $\mathbf{y}$ vektörüne taşıyan bir φ açılı dönmeyi araştırırken $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin birimleştirilmiş hallerini kullanacağız. Bunun için $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\epsilon}$ ve $\tilde{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_\epsilon}$ birim vektörlerini ele alalım. $\mathcal{G} = (\pm 1, 0)$

olmak üzere

$$\tilde{\mathbf{x}} = e^{J\theta_1} \mathcal{G}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = e^{J\theta_2} \mathcal{G}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = e^{J\varphi} \tilde{\mathbf{x}}$$

şeklinde yazılabilir. $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ olmak üzere

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle_\epsilon = \langle e^{J\theta_1} \mathcal{G}, e^{J\theta_2} \mathcal{G} \rangle_\epsilon = \langle e^{J\theta_1} \mathcal{G}, e^{J\varphi} e^{J\theta_1} \mathcal{G} \rangle_\epsilon$$

yazılabilir. (6.6) denkleminde

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle_\epsilon = \langle \mathcal{G}, e^{J\varphi} \mathcal{G} \rangle_\epsilon$$

yazılabilir. (6.4) denklemi göz önüne alınırsa bilinear formun matrisi $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$ olmak

üzere

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle_\epsilon = \langle \mathcal{G}, e^{J\varphi} \mathcal{G} \rangle_\epsilon = \mathcal{G}^T B e^{J\varphi} \mathcal{G}$$

yazılabilir. $\mathcal{G} = (\pm 1, 0)$ için

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle_\epsilon = [\pm 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos_\epsilon \varphi & -\epsilon \sin_\epsilon \varphi \\ \sin_\epsilon \varphi & \cos_\epsilon \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \cos_\epsilon \varphi$$

elde edilir. $-\cos_{\epsilon}\varphi$ ifadesi sadece $\epsilon = -1$ ve $\tilde{\mathbf{x}}$ ve $\tilde{\mathbf{y}}$ vektörleri timelike vektörler iken

gerçeklenir. O halde aynı tipten iki vektör arasındaki açı $\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle_{\epsilon} = \left\langle \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\epsilon}}, \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_{\epsilon}} \right\rangle_{\epsilon}$ olmak

üzere

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\epsilon} = \|\mathbf{x}\|_{\epsilon} \|\mathbf{y}\|_{\epsilon} \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle_{\epsilon} = \pm \|\mathbf{x}\|_{\epsilon} \|\mathbf{y}\|_{\epsilon} \cos_{\epsilon}\varphi$$

şeklinde verilebilir. Yine negatif olma durumu sadece $\epsilon = -1$ ve vektörler timelike iken gerçekleşir [39].

6.4.11 P_{ϵ} düzleminde Schwartz ve üçgen eşitsizlikleri

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ P_{ϵ} düzleminde aynı bölgede yer alan (aynı tipten) iki vektör olsun. Schwartz ve üçgen eşitsizlikleri aşağıdaki şekilde verilir:

Schwartz eşitsizliği:

$$\epsilon = 1 \text{ için } |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

$$\epsilon = 0 \text{ için } |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

$$\epsilon = -1 \text{ için } |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \geq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Üçgen Eşitsizliği

$$\epsilon = 1 \text{ için } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$\epsilon = 0 \text{ için } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$\epsilon = -1 \text{ için } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

6.4.12 P_{ϵ} düzleminde lineer dönüşüm

Tanım 6.13 (Lineer Dönüşüm)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in P_{\epsilon}$ olmak üzere J dönüşümü

$$J : P_{\epsilon} \longrightarrow P_{\epsilon}$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow J(\mathbf{x}) = J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-\epsilon x_2, x_1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm lineerdir. Gerçekten;

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in P_{\epsilon} \text{ ve } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} J(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix} \\ &= (-\epsilon(ax_2 + by_2), ax_1 + by_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} aJ(\mathbf{x}) + bJ(\mathbf{y}) &= a(-\epsilon x_2, x_1) + b(-\epsilon y_2, y_1) \\ &= (-\epsilon ax_2, ax_1) + (-\epsilon by_2, by_1) \\ &= (-\epsilon(ax_2 + by_2), ax_1 + by_1) \end{aligned}$$

olup $J(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aJ(\mathbf{x}) + bJ(\mathbf{y})$ dir.

Ayrıca J dönüşümü P_{ϵ} düzlemindeki her $\mathbf{x}$ vektörünü $J(\mathbf{x})$ ortogonaline dönüştürür. Gerçekten;

$$\langle \mathbf{x}, J(\mathbf{x}) \rangle = \langle (x_1, x_2), (-\epsilon x_2, x_1) \rangle = -\epsilon x_1 x_2 + \epsilon x_2 x_1 = 0$$

şeklinde gösterilebilir.

Not 6.3

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ olmak üzere $\mathbf{x}$ self-ortogonal (izotropik) olmayan bir vektör olsun. O halde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbf{y} = \lambda J(\mathbf{x}) \tag{6.7}$$

şeklindedir. Yani $\mathbf{y}$ vektörü $\mathbf{x}$ vektörünün J dönüşümü altındaki görüntüsüyle lineer bağımlıdır.

6.4.13 P_{ϵ} düzleminde eğriler

Tanım 6.14 (Eğri)

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow P_{\epsilon}$$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha(I) \subset P_{\epsilon}$ kümesine P_{ϵ} Afın CK-düzleminde *diferansiyellenebilir bir eğri* denir.

Tanım 6.15 (Yay uzunluğu)

$\alpha : I \longrightarrow P_{\epsilon}$ eğrisinin $a, b \in I$ için $\alpha(a)$ dan $\alpha(b)$ ye yay uzunluğu fonksiyonu,

$$L(a, b) = \int_a^b \|\alpha'(u)\|_{\epsilon} du$$

şeklinde tanımlanır [39].

Tanım 6.16 (Regüler Eğri)

$\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\|_{\epsilon} \neq 0$ ise α eğrisi regülerdir. P_{ϵ} düzleminde bu ifade incelenirse $\epsilon=1$ için Öklid düzleminde regüler bir eğrinin tanjant vektörü asla sıfır olamayacağı sonucu çıkarılır.

$\epsilon=0$ için teğet vektörler sıfırdan farklıdır. Ayrıca $(0,1)$ vektörüne paralel değildir.

$\epsilon=-1$ için teğet vektörler sıfırdan farklı olmakla birlikte $(\pm 1, 1)$ vektörlerine paralel değildir. Örneğin bir regüler eğrinin teğeti bazı noktalarda $(-1, 1)$ ve $(1, 1)$ noktaları arasında yatıyorsa, o zaman eğrinin tüm teğetleri bu vektörler arasında yatar.

Bir regüler eğrinin yay uzunluğu parametreden bağımsız olduğundan “*yay uzunluğuna göre parametrelendirme*” yapılabilir.

Tanım 6.17 (Birim Hızlı Eğri)

$\alpha : I \longrightarrow P_{\epsilon}$ eğrisi s yay parametresi ile verilsin. α nın birim hızlı bir eğri olması için gerekli ve yeterli koşul $\|\alpha'(s)\|_{\epsilon} = 1$ olmasıdır.

6.4.13.1 P_{ϵ} düzleminde yay uzunluğunun bir diğer ifadesi

P_{ϵ} düzleminde bir eğrinin yay uzunluğu (6.2) denklemiyle verilen metrik yardımıyla (zaman, konum) koordinatlarına göre $\int dL$ şeklinde yani

$$\int dL = \begin{cases} \int \sqrt{dx^2 + \frac{1}{\epsilon} dt^2}, \epsilon \neq 0 \\ \int \sqrt{dx^2}, \epsilon = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

olarak tanımlanır.

Bu tanım yardımıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ P_{ϵ} düzleminde uçları birim çemberin merkezinde ve aynı bölgede yer alan (aynı tipten) iki vektör arasındaki φ açısı aşağıdaki şekilde tarif edilebilir:

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri izotropik olmasın. Şekil 6. 12 de gösterilen yatay eksen zaman eksenini dikey eksen konum eksenini olarak alalım. $\mathbf{x}$ vektörünü $\mathbf{y}$ vektörüne taşıyan φ açısı

$$\text{Hız} = \frac{\text{yol}}{\text{zaman}} = v$$

olmak üzere

$$\varphi = \frac{\mathbf{x} \text{ ve } \mathbf{y} \text{ arasındaki dairesel yay uzunluğu}}{\text{Çemberin yarıçapı}} = \tan_{\epsilon} v$$

şeklinde ölçülür. Çemberin yarıçapı r olmak üzere $t^2 + \epsilon x^2 = r^2$ sağlanır ve φ açısı

$$\varphi = \frac{1}{r} \int dL$$

olarak yazılır. (6.8) denkleminde

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{r} \int \sqrt{dx^2 + \frac{1}{\epsilon} dt^2}, \epsilon \neq 0 \\ \frac{1}{r} \int \sqrt{dx^2}, \epsilon = 0 \end{cases} = \begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - \epsilon x^2}}, \epsilon \neq 0 \\ \frac{1}{r} \int dx^2, \epsilon = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\epsilon}} \sin_{\epsilon}^{-1} \frac{\sqrt{-\epsilon}x}{r}, & \epsilon \neq 0 \\ \frac{x}{r} & , \epsilon = 0 \end{cases}$$

olup

$\epsilon \neq 0$ için	$\epsilon = 0$ için
$\begin{cases} t = r \cos_{\epsilon} \sqrt{-\epsilon} \varphi \\ \sqrt{-\epsilon}x = r \sin_{\epsilon} \sqrt{-\epsilon} \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} t = r \\ x = r\varphi \end{cases}$

olarak elde edilir. (t, x) koordinatlarından (x, y) koordinatlarına geçilirse

$$\begin{cases} x = r \sin_{\epsilon} \varphi \\ y = r \cos_{\epsilon} \varphi \end{cases}$$

şeklinde kutupsal koordinatlar yazılımı elde edilir.

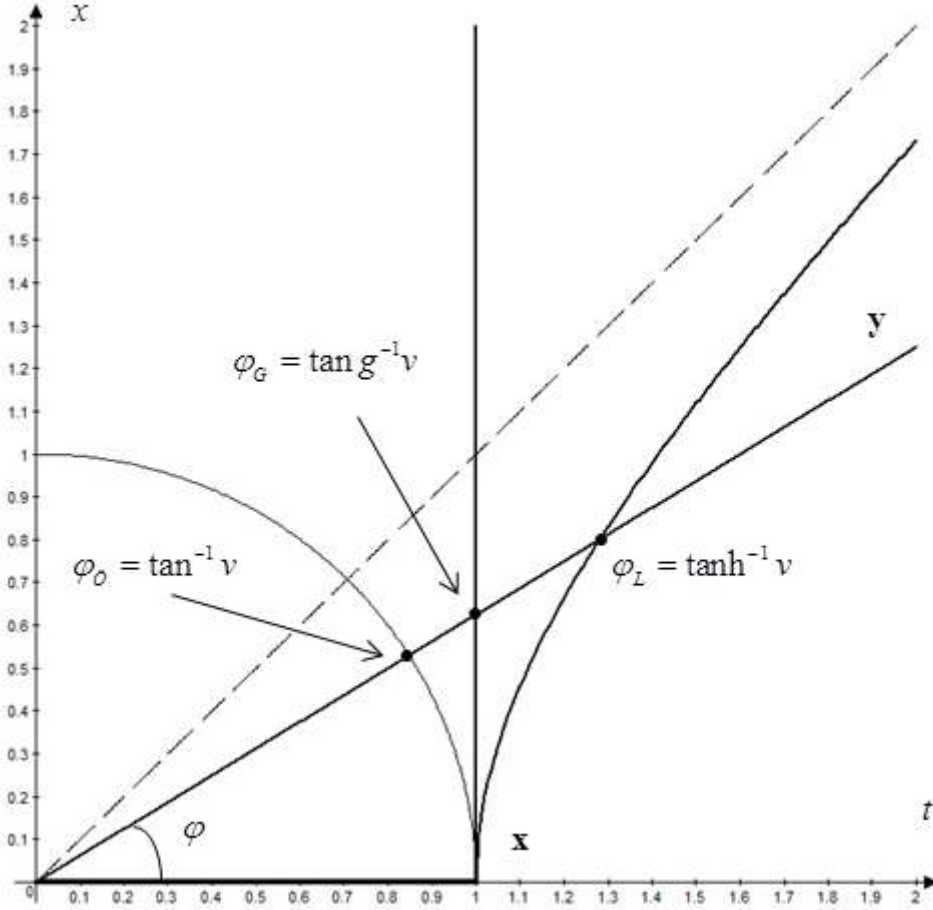
6.4.13.2 P_{ϵ} düzleminde birim hızlı eğriler için Frenet vektör alanları

Tanım 6.18 (Frenet vektör alanları)

P_{ϵ} düzleminde $\alpha : I \longrightarrow P_{\epsilon}$ birim hızlı eğrisi s yay parametresi ile verilsin. T ve N , sırasıyla, α eğrisinin teğet vektör alanı ve normal vektör alanı olmak üzere $\{T, N\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin Frenet çatısı denir. Burada T ve N vektörleri Frenet vektörü olarak isimlendirilir. Bu vektörler

$$\begin{cases} T(s) = \alpha'(s) \\ N(s) = JT(s) \end{cases} \quad (6.9)$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 6. 12 Açı Ölçümü

6.4.13.3 P_ϵ düzleminde eğrilerin eğriliği

Tanım 6.19 (Eğrilik)

P_ϵ düzleminde $\alpha : I \longrightarrow P_\epsilon$ eğrisi verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği

$$\kappa(s) = \frac{\langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle_\epsilon}{\|\alpha'(s)\|_\epsilon} \quad (6.10)$$

ile tanımlanır. Eğer α eğrisi birim hızlı ise $\kappa(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle_\epsilon$ olduğu açıktır.

6.4.13.4 P_ϵ düzleminde birim hızlı eğriler için Frenet türev formülleri

Teorem 6.1 (Frenet türev formülleri)

P_ϵ düzleminde $\alpha : I \longrightarrow P_\epsilon$ birim hızlı eğrisi s yay parametresi ile verilsin. $\{T, N\}$

Frenet çatısı olmak üzere, α eğrisinin *Frenet türev formülleri*

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s) \\ N'(s) = -\epsilon \kappa(s) T(s) \end{cases} \quad (6.11)$$

biçimindedir. Burada $\kappa(s)$, α eğrisinin eğrilik fonksiyonudur.

İspat:

P_ϵ düzleminde $\alpha: I \longrightarrow P_\epsilon$ birim hızlı eğrisi s yay parametresi ile verilsin.

$\|\alpha'(s)\|_\epsilon = 1$ olmasından $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_\epsilon = \pm 1$ yazılabilir. Buradan türev alınırsa

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle'_\epsilon = 2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle_\epsilon = 0$$

olup $\alpha'' \perp \alpha'$ yazılabilir. (6.7) denkleminde $\alpha'' = \lambda J\alpha'$ olacak biçimde $\lambda \in \mathbb{R}$ bulunabilir. Birim hızlı eğriler için (6.10) denklemi $\kappa(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle_\epsilon$ şeklinde yazılabileceğinden yukarıdaki bilgilerle λ reel sayısının aslında α eğrisinin eğriliği olan $\kappa(s)$ e karşılık geldiği görülür. O halde (6.9) denklemlerini de kullanarak

$$\begin{aligned} \alpha''(s) = \kappa(s) J\alpha'(s) &\Rightarrow T'(s) = \kappa(s) JT(s) \\ &\Rightarrow T'(s) = \kappa(s) N(s) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} N(s) = JT(s) &\Rightarrow JN(s) = J(JT(s)) \\ &\Rightarrow JN(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\epsilon T(s) \end{aligned}$$

olup

$$N'(s) = \kappa(s) JN(s) = -\epsilon \kappa(s) T(s)$$

biçiminde elde edilir. Sonuç olarak P_ϵ düzleminde birim hızlı eğriler için (6.11) denklemleri ile verilen Frenet türev formüllerine ulaşılmış olur.

Tanım 6.20

$\alpha: I \longrightarrow P_\epsilon$, P_ϵ düzleminde birim hızlı bir eğri olsun. T, N vektör alanları ile κ, τ fonksiyonunun her birine, α eğrisinin Frenet elemanları denir.

6.4.13.5 P_ϵ düzleminde birim çember üzerindeki dönmeler

Bu alt bölümde P_ϵ düzleminde birim çember üzerindeki dönmeleri inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned}\alpha: I &\longrightarrow P_\epsilon \\ \varphi &\longrightarrow \alpha(\varphi) = (\alpha_1(\varphi), \alpha_2(\varphi))\end{aligned}$$

olmak üzere P_ϵ düzleminde

$$(\alpha_1(\varphi))^2 + \epsilon (\alpha_2(\varphi))^2 = \pm 1 \quad (6.12)$$

birim çemberini ele alalım. (6.12) denkleminin türevi alınırsa

$$\alpha_1 \alpha_1' + \epsilon \alpha_2 \alpha_2' = 0$$

olarak bulunur. Buradan $\alpha \perp \alpha'$ olduğu açıktır. O halde (6.7) denkleminde $\alpha' = \lambda J(\alpha)$ olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Eğer φ yay parametresi ise $\lambda = \pm 1$ dir ($\lambda = -1$ durumu için $\lambda = 1$ de φ yerine $-\varphi$ koyulur). Buradan tüm reel φ sayıları için

$$\alpha(\varphi) = e^{J\varphi} \alpha(0)$$

şeklinde yazılabilir. $e^{J\varphi}$ nın φ açılı dönme matrisi olduğu daha önce belirtilmişti. φ açısı $\alpha(0)$ dan $\alpha(\varphi)$ yay uzunluğuna eşittir. Bu kavram Bölüm 6.1 ve Bölüm 6.2 verilmiş olup “ P_ϵ düzleminde açının ölçüsü gördüğü yayın uzunluğudur” şeklinde özetlenebilir.

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 6.1

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ P_ϵ düzleminde uçları birim çemberin merkezinde olan ve aynı bölgede yer alan iki vektör olsun. O halde $\mathbf{x}$ vektörünü $\mathbf{y}$ vektörüne taşıyan bir φ açılı dönme vardır. Bu dönme $\epsilon = 1$ için 2π -nin katlarında değişir. $\epsilon = 0$ ve $\epsilon = -1$ için ise bir tek φ vardır.

6.4.13.6 P_ϵ düzleminde eğriler ile ilgili fiziksel çıkarımlar

Bu alt bölümde, P_ϵ düzleminde $\epsilon = 0$ ve $\epsilon = -1$ için hareket eden bir parçacığın zaman içinde aldığı yolu veren eğri (wordline) ele alınacak ve bu eğrinin eğriliğine karşılık gelen fiziksel çıkarımlar yapılacaktır.

$\epsilon = 0$ için Newton Mekaniği:

Bir doğru üzerinde hareket eden bir parçacığın zamana bağlı konumu, t :zaman ve x :konum olmak üzere $\{t, x\}$ koordinatlarına göre $x = f(t)$ ile verilsin. Bu parçacığın Newton mekaniğinde yani $\epsilon = 0$ için P_0 düzleminde aldığı yol

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

eğrisi ile ifade edilebilir. $\alpha(t)$ incelenirse

$$\alpha'(t) = (1, f'(t)) \Rightarrow \|\alpha'(t)\|_{\epsilon} = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\epsilon}} = \sqrt{1 + \epsilon (f'(t))^2}$$

şeklinde olduğu, yani $\epsilon = 0$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ eşitliğinden birim hızlı bir eğri olduğu görülür. t nin yay parametresi olduğu açıktır.

Şimdi Frenet vektörlerini bularak α eğrisinin eğriliğini inceleyelim:

(6.9) denkleminde α eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{cases} T(t) = (1, f'(t)) \\ N(t) = J(T(t)) = (-\epsilon f'(t), 1) \Rightarrow N(t) = (0, 1) \end{cases}$$

olarak bulunur. $T'(t)$ türevi incelenirse

$$T'(t) = (1, f'(t))' = (0, f''(t)) = f''(t)(0, 1) = f''(t)N(t)$$

şeklindedir. (6.11) denkleminde verilen Frenet türev formüllerinden

$$\kappa(t) = f''(t)$$

elde edilir. Bu eşitliğin fiziksel anlamı şöyledir: *Newton mekaniğinde hareket eden bir parçacığın ivmesi, zaman içinde aldığı yolu veren eğrinin eğriliğe karşılık gelmektedir.*

Yukarıda bulunan sonuçlar P_0 düzleminde

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)); \quad \|\alpha'(t)\|_{\epsilon} = |\alpha_1'(t)| = 1$$

olacak biçimde herhangi bir birim hızlı eğriye uygulanırsa $\alpha_1(t) = \pm t + a$, $a \in \mathbb{R}$ olup buradan

$$\alpha(t) = (\pm t + a, f(t))$$

elde edilir. Fiziksel olarak $\alpha_1(t) = t + a$ olması parçacığın zaman içinde ileri yol aldığını, $\alpha_1(t) = -t + a$ olması da parçacığın zaman içinde geriye doğru yol aldığını gösterir [39].

P_0 düzleminin (t, x) noktaları Newton mekaniğe göre *olaylar* olarak adlandırılır.

$\epsilon = -1$ için Rölativistik Mekanik

Bir doğru üzerinde hareket eden bir parçacığın zamana bağlı konumu, t :zaman ve x :konum olmak üzere $\{x, t\}$ laboratuvar çatısına göre $x = f(t)$ ile verilsin. P_{-1} düzleminin (x, t) noktaları Rölativistik mekaniğe göre *olaylar* olarak adlandırılır. Dolayısıyla $\{x, t\}$ laboratuvar çatısı alındığında x , başlangıç gözlemcisi tarafından bir olayın *uzay koordinatı* ve t de *zaman koordinatıdır*.

Parçacığın rölativistik mekanikte yani $\epsilon = -1$ için P_{-1} düzleminde aldığı yol

$$\alpha(t) = (f(t), t)$$

eğrisi ile ifade edilebilir. Başlangıç gözlemcileri için $\alpha(t) = (0, t)$ biçimindedir.

$$\alpha'(t) = (f'(t), 1) \Rightarrow \|\alpha'(t)\|_{\epsilon} = \sqrt{(f'(t))^2 - 1} \neq 1$$

olduğundan, α eğrisi birim hızlı bir eğri olmayıp, t yay parametresi değildir. α eğrisinin yay parametresi *uygun zaman (proper time) parametresi*¹ olarak isimlendirilir (Birden fazla parametre (zaman) var olup yay parametresi *uygun zamana* karşılık gelmektedir). α eğrisinin uygun zaman parametresini τ olarak alalım. $v = f'(t)$ olacak biçimde seçilsin. O halde Tanım 6.15 den

$$\tau = \int_0^t \|\alpha'(t)\|_{\epsilon} dt \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2}$$

¹ Bu zaman parametresi, parçacık tarafından taşınan bir saatle kaydedilen bir zaman olarak düşünülebilir.

şeklindedir. α eğrisinin regüler $\left(\|\alpha'(t)\|_{\epsilon} = \sqrt{|v^2 - 1|} \neq 0\right)$ olabilmesi için $|v| < 1$

koşulunun sağlanması gerekmektedir. Buradan $\sqrt{1-v^2} < 1$ dir. Böylece laboratuvar çatısında τ zamanının t zamanından daha yavaş olduğu söylenebilir. Bu da *ikizler paradoksu*¹ ya da *saat paradoksu* adı verilen paradoksa yol açmaktadır.

Rölativistik mekanikte eğriliğin fiziksel bir anlamı mevcuttur, öyle ki; *hareketli bir parçacık üzerinde yol alan bir gözlemcinin ivmesi eğriliğe karşılık gelmektedir*. Bu ivme *uygun zamanlı ivme* olarak adlandırılır.

Laboratuvar çatısına göre eğrilik incelendiğinde

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde karşımıza çıkar. Başlangıç anında gözlemciler $\kappa(\tau) = 0$ ivmesine sahip olup bu gözlemciler için $T(\tau)$ sabittir [39].

¹ http://tr.wikipedia.org/wiki/Zamanda_yolculuk

AFİN CK-DÜZLEMİNDE (P_ϵ) 1- PARAMETRELİ HAREKETLER

Tezin ilk orijinal kısmını oluşturan bu bölümde, P_ϵ düzleminde 1-parametrelî düzlemsel hareket ele alınacaktır. Bu hareket $\epsilon=1$ için Bölüm 3 de verilen Öklid düzlemindeki 1-parametrelî harekete, $\epsilon=-1$ için Bölüm 4 de verilen Lorentz düzlemindeki 1-parametrelî harekete ve $\epsilon=0$ için Bölüm 5 de verilen Galile düzlemindeki 1-parametrelî harekete karşılık gelmektedir. Böylece P_ϵ düzlemine genellenen 1-parametrelî düzlemsel harekete ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkihi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkihi ve ivme polü kavramları tek bir adımda elde edilecektir. Burada elde edilen orijinal sonuçlar [58] nolu makalede yayınlanmıştır.

7.1 Afın CK-Düzleminde (P_ϵ) 1- Parametrelî Hareketler

P_ϵ ve P'_ϵ iki Afın CK-düzlemi olsun. Bu düzlemlerde, sırasıyla, $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2\}$ koordinat sistemlerini ele alalım. Eğer $t \in I \subset \mathbb{R}$ için,

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(t), \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_2(t)$$

ise bu durumda $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ koordinat sisteminin, $\{O'; \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2\}$ koordinat sistemine göre hareket ettiğini kabul edeceğiz. $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ koordinat sistemini *hareketli koordinat sistemi*, $\{O'; \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2\}$ koordinat sistemini ise *sabit koordinat sistemi* olarak adlandıralım.

Dolayısıyla P_ϵ düzlemi, P'_ϵ düzlemi üzerinde hareket ediyor olarak kabul edilebilir.

$\mathbf{c}_1$ ile $\mathbf{c}'_1$ arasındaki açı φ olmak üzere φ ye *dönme açısı* denir. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin *öteleme vektörü* olmak üzere

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{c}_1 + u_2 \mathbf{c}_2 \quad (7.1)$$

yazılabilir. Eğer,

$$u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \varphi = \varphi(t)$$

fonksiyonları bir t reel parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise, P_ϵ düzleminin P'_ϵ düzlemine göre hareketine *1-parametrelî düzlemsel hareket* denir ve $B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ ile gösterilir. Buradaki “ t ” parametresi genel olarak *zaman* parametresi olarak alınır. Dönme açısının $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ türevine B hareketinin *açısal hızı* denir. Bundan sonra sırf öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\varphi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

$O = O'$ özel durumu için $\mathbf{c}_i$ ve $\mathbf{c}'_i$ ($i=1,2$) vektörleri arasında (bu vektörler aynı bölgededir.)

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \cos_\epsilon \varphi \mathbf{c}'_1 + \sin_\epsilon \varphi \mathbf{c}'_2 \\ \mathbf{c}_2 = -\sin_\epsilon \varphi \mathbf{c}'_1 + \cos_\epsilon \varphi \mathbf{c}'_2 \end{cases} \quad (7.2)$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu eşitlikleri P_ϵ düzleminde kutupsal koordinatlarıyla verilen bir $X = (x_1, x_2) = (r \cos_\epsilon \theta, r \sin_\epsilon \theta)$ noktasının φ kadar dönmesini kullanarak hesaplanmaktadır. Yani (6.5) denklemi yardımıyla $\mathbf{c}'_1$ ve $\mathbf{c}'_2$ vektörlerinin uç noktalarının koordinatları, sırasıyla, $(1,0)$ ve $(0,1)$ olmak üzere bu noktaların (6.5) ifadesi ile verilen dönme altında resmini araştırılabilir. Bu durumda $(1,0)$ ve $(0,1)$ noktalarının dönmesiyle $\mathbf{c}_1$ ve $\mathbf{c}_2$ vektörlerinin uç noktaları aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \cos_\epsilon \varphi & -\sin_\epsilon \varphi \\ \sin_\epsilon \varphi & \cos_\epsilon \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup, buradan

$$\mathbf{c}_1 = (\cos_\epsilon \varphi, \sin_\epsilon \varphi) = \cos_\epsilon \varphi \mathbf{c}'_1 + \sin_\epsilon \varphi \mathbf{c}'_2$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alırsak

$$\mathbf{c}_2 = (-\sin_{\epsilon} \varphi, \cos_{\epsilon} \varphi) = -\sin_{\epsilon} \varphi \mathbf{c}'_1 + \cos_{\epsilon} \varphi \mathbf{c}'_2$$

elde edilir. Yani $(1,0)$ noktasının dönme altındaki resmi $(\cos_{\epsilon} \varphi, \sin_{\epsilon} \varphi)$ ve $(0,1)$ noktasının dönme altındaki resmi $(-\sin_{\epsilon} \varphi, \cos_{\epsilon} \varphi)$ şeklindedir. Böylece (7.2) denklemi

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \cos_{\epsilon} \varphi \mathbf{c}'_1 + \sin_{\epsilon} \varphi \mathbf{c}'_2 \\ \mathbf{c}_2 = -\sin_{\epsilon} \varphi \mathbf{c}'_1 + \cos_{\epsilon} \varphi \mathbf{c}'_2 \end{cases}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Şimdi $B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinin vektörel ve kartezyen denklemlerini bulalım:

Düzlemin bir X noktası, hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları ve hem de sabit sistemdeki (x'_1, x'_2) koordinatları yardımıyla göz önüne alındığı takdirde her iki sistemde X noktasına ait konum vektörleri için

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{O}\mathbf{X} = x_1 \mathbf{c}_1 + x_2 \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X} = x'_1 \mathbf{c}'_1 + x'_2 \mathbf{c}'_2 \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{O}\mathbf{X} = -\mathbf{OO}' + \mathbf{O}\mathbf{X}$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} \tag{7.3}$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme *Afin CK-düzleminde* $B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrel düzlemsel hareketinin vektörel denklemi denir. Buradan $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2)$ için

$$x'_1 \mathbf{c}'_1 + x'_2 \mathbf{c}'_2 = (x_1 - u_1) \mathbf{c}_1 + (x_2 - u_2) \mathbf{c}_2$$

eşitliğinde (7.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - u_1) \cos_{\epsilon} \varphi - (x_2 - u_2) \sin_{\epsilon} \varphi \\ x'_2 = (x_1 - u_1) \sin_{\epsilon} \varphi + (x_2 - u_2) \cos_{\epsilon} \varphi \end{cases}$$

denklemleri ya da kısaca

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 \cos_{\epsilon} \varphi - x_2 \sin_{\epsilon} \varphi) + (-u_1 \cos_{\epsilon} \varphi + u_2 \sin_{\epsilon} \varphi) \\ x'_2 = (x_1 \sin_{\epsilon} \varphi + x_2 \cos_{\epsilon} \varphi) + (-u_1 \sin_{\epsilon} \varphi - u_2 \cos_{\epsilon} \varphi) \end{cases}$$

ifadesi bulunur. Bu ifadeye *Afin CK-düzleminde* $B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ *1-parametrelili düzlemsel hareketinin kartezyen denklemi* denir. Bu son eşitlik

$$\begin{cases} a_0 = a_0(t) = -u_1 \cos_{\epsilon} \varphi + u_2 \sin_{\epsilon} \varphi \\ b_0 = b_0(t) = -u_1 \sin_{\epsilon} \varphi - u_2 \cos_{\epsilon} \varphi \end{cases}$$

için

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde veya

$$A = \begin{bmatrix} \cos_{\epsilon} \varphi & -\sin_{\epsilon} \varphi \\ \sin_{\epsilon} \varphi & \cos_{\epsilon} \varphi \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$X' = AX + C$$

matris formunda yazılabilir. Burada A ya *Afin CK-düzleminde dönme matrisi*¹, C ye *öteleme matrisi* denir.

7.2 Türev Denklemleri

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketi esnasında bir $X \in P_{\epsilon}$ noktasının her iki P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerine göre hızlarını bulmak için önce hareketin türev denklemleri bulunmalıdır. Bunun için

¹ $B = L / L'$ hareketinin A dönme matrisi ortogonal değildir.

(7.2) denklemlerinde, $\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türev alınır¹,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{c}_1}{dt} = \dot{\mathbf{c}}_1 &= -\epsilon \dot{\phi} \sin_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_1 + \dot{\phi} \cos_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_2 = \dot{\phi} (-\epsilon \sin_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_1 + \cos_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_2) \\ \frac{d\mathbf{c}_2}{dt} = \dot{\mathbf{c}}_2 &= -\epsilon \dot{\phi} \cos_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_1 - \dot{\phi} \sin_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_2 = -\epsilon \dot{\phi} (\cos_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_1 + \sin_{\epsilon} \phi \mathbf{c}'_2)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\dot{\mathbf{c}}_1 = \dot{\phi} \mathbf{c}_2, \quad \dot{\mathbf{c}}_2 = -\epsilon \dot{\phi} \mathbf{c}_1 \quad (7.4)$$

yazılabilir.

Benzer şekilde (7.1) denkleminin t ye göre türevi alınır,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{c}_1 + u_1 \dot{\mathbf{c}}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{c}_2 + u_2 \dot{\mathbf{c}}_2$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (7.4) denklemleri kullanılırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - \epsilon \dot{\phi} u_2) \mathbf{c}_1 + (\dot{u}_2 + \dot{\phi} u_1) \mathbf{c}_2 \quad (7.5)$$

bulunur. (7.4) ve (7.5) denklemlerine *Afin CK-düzleminde* $B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrelili düzlemsel hareketinin türev denklemleri denir.

7.3 Hızlar ve Hızların Terkibi

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrelili hareketi esnasında, bir X noktası hareketli P_{ϵ} düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda, X noktasının hızları araştırılabilir.

Tanım 7.1

X noktasının P_{ϵ} düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası P_{ϵ} düzlemindeki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının *relatif (izafi) hızı* denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız vektörü

¹ P_{ϵ} düzleminde trigonometrik özellikler alt bölüm 6.4.7 de verilmiştir.

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{c}_1 + x_2 \mathbf{c}_2$$

denkleminde $\mathbf{c}_1$ ve $\mathbf{c}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{c}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{c}_2 \quad (7.6)$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası P_ϵ düzleminde sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hızı sıfırdır.

Tanım 7.2

X noktasının P'_ϵ düzlemine göre sahip olduğu hız vektörüne X noktasının *mutlak hız vektörü* denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir. (7.3) denkleminin t ye göre türevi alınırsa mutlak hız vektörü:

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1) \mathbf{c}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\mathbf{c}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2) \mathbf{c}_2 + (x_2 - u_2) \dot{\mathbf{c}}_2$$

şeklinde elde edilir. Burada (7.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + \epsilon \dot{\phi}(u_2 - x_2)\} \mathbf{c}_1 + \{-\dot{u}_2 + \dot{\phi}(-u_1 + x_1)\} \mathbf{c}_2 + \dot{x}_1 \mathbf{c}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{c}_2 \quad (7.7)$$

elde edilir. (7.6) denkleminin verilen relatif hız vektörü yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + \epsilon \dot{\phi}(u_2 - x_2)\} \mathbf{c}_1 + \{-\dot{u}_2 + \dot{\phi}(-u_1 + x_1)\} \mathbf{c}_2 + \mathbf{V}_r$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_f = \{-\dot{u}_1 + \epsilon \dot{\phi}(u_2 - x_2)\} \mathbf{c}_1 + \{-\dot{u}_2 + \dot{\phi}(-u_1 + x_1)\} \mathbf{c}_2 \quad (7.8)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme hız vektörü* denir.

Buradan hız vektörleri arasındaki bağıntıyı veren şu teorem verilebilir:

Teorem 7.1

$B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında herhangi bir $X \in P_\epsilon$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (7.9)$$

bağıntısı vardır.

7.4 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Açısal hızı sıfır olmayan $B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalar araştırıldığı takdirde böyle noktaların yalnız hareketli P_{ϵ} düzleminde değil aynı zamanda sabit P'_{ϵ} düzleminde de sabit noktalar olduğu karşımıza çıkar. Bu nokta genel düzlemsel hareketler için, hareket etmeyen yani $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2\}$ koordinat sistemlerinin her ikisinde de koordinatları aynı olan bir noktadır. Bu noktaya *pol noktası* veya *anlık dönme pol merkezi* denir. Buradan $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ için (7.8) denkleminde

$$\begin{cases} -\dot{u}_1 + \epsilon(u_2 - x_2)\dot{\phi} = 0 \\ -\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklemler

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + \epsilon \dot{\phi} \cdot x_2 = -\dot{u}_1 + \epsilon u_2 \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = u_1 \dot{\phi} + \dot{u}_2 \end{cases} \quad (7.10)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi ve ilaveli matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \dot{\phi} \\ \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [A|B] = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \dot{\phi} & | & -\dot{u}_1 + \epsilon u_2 \dot{\phi} \\ \dot{\phi} & 0 & | & u_1 \dot{\phi} + \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

olarak alınabilir. Bu sistemin $\det A = -\epsilon(\dot{\phi})^2 \neq 0$ olması durumunda tek çözümü mevcuttur. Diğer bir deyişle $\dot{\phi} \neq 0$ olduğundan sistem $\epsilon \neq 0$ için tek çözüme sahiptir.

Buradan $\epsilon = \pm 1$ için sistemin

$$\begin{cases} x_1 = p_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\phi}} \\ \epsilon x_2 = \epsilon p_2 = \epsilon u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\phi}} \end{cases} \quad (7.11)$$

olacak biçimde bir çözümü bulunur. Burada $P = (p_1, p_2)$ pol noktasıdır.

(7.10) sistemi $\epsilon = 0$ için incelendiğinde çözümün

$$\begin{cases} p_1 = x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\phi}} \\ p_2 = x_2 = (p_2(t))(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

olduğu yani p_2 bileşeninin t ve λ ya bağlı sonsuz çözümü olduğu görülür ($p_2(t)$ fonksiyonları λ ya göre dizayn edilmektedir). Böylece $\epsilon=0$ için P pol doğrusu belirtmektedir. Ayrıca yine $\epsilon=0$ için $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ alındığında her t için $u_1(t) = k = \text{sabit}$ olduğundan

$$u(t) = (k, u_2(t)) = k\mathbf{c}_1 + u_2\mathbf{c}_2$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi sürüklenme hız vektörünü yukarıda verdiğimiz bilgiler doğrultusunda tekrar düzenleyelim:

(7.11) denkleminde elde edilen

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\epsilon \dot{\phi} p_2 + u_2 \dot{\phi} \\ \dot{u}_2 = \dot{\phi} p_1 - u_1 \dot{\phi} \end{cases}$$

değerleri (7.8) denkleminde yerine yazılırsa $B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ hareketinin sürüklenme hız vektörü $\mathbf{V}_f$

$$\mathbf{V}_f = \{-\epsilon(x_2 - p_2)\mathbf{c}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{c}_2\} \dot{\phi} \quad (7.12)$$

şeklinde tekrar düzenlenebilir.

Sürüklenme hızının (7.12) eşitliğiyle verilen ifadesinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 7.1

$B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{c}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{c}_2$$

pol ışını ile (7.12) denkleminde verilen sürüklenme hız vektörü birbirine diktir.

Gerçekten;

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle_{\epsilon} = -\epsilon(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) + \epsilon(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) = 0$$

dir. Yani pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

Sonuç 7.2

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrelî düzlemsel hareketi esnasında, $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızının normu

$$\|\mathbf{V}_f\|_{\epsilon} = \|\mathbf{PX}\|_{\epsilon} |\dot{\phi}|$$

dir. Gerçekten de (7.12) denkleminde

$$\mathbf{V}_f = \dot{\phi}(-\epsilon(x_2 - p_2), (x_1 - p_1))$$

şeklinde alınırsa,

$$\|\mathbf{V}_f\|_{\epsilon} = \begin{cases} \sqrt{\epsilon^2 (x_2 - p_2)^2 + \epsilon (x_1 - p_1)^2} |\dot{\phi}|, & \epsilon = \pm 1 \\ |x_1 - p_1| |\dot{\phi}|, & \epsilon = 0 \end{cases}$$

bulunur. Ayrıca

$$\|\mathbf{PX}\|_{\epsilon} = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \epsilon (x_2 - p_2)^2}$$

olduğundan

$$\|\mathbf{V}_f\|_{\epsilon} = \|\mathbf{PX}\|_{\epsilon} |\dot{\phi}|$$

elde edilir.

Teorem 7.2

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrelî düzlemsel hareketi esnasında, P_{ϵ} düzleminin her X noktası, t anında, P merkezli ve $\dot{\phi}$ açısal hızlı bir dönme hareketi (ani dönme hareketi) yapar.

Teorem 7.3

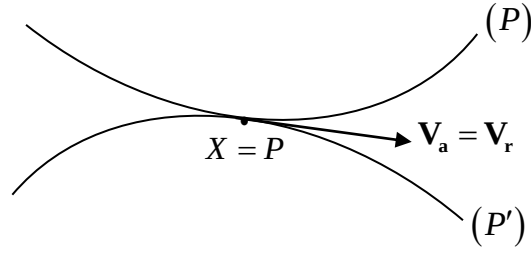
$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrelî düzlemsel hareketi esnasında; t anında, hareketli P_{ϵ} düzleminin P ani dönme polü etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile dönmesinden ibarettir.

Teorem 7.4

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinde; hareketli P_{ϵ} düzleminin X noktaları, P'_{ϵ} sabit düzleminde normalleri (yörünge normalleri) P dönme polünden geçen yörüngeler çizer.

Tanım 7.3

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrel düzlemsel hareketi esnasında her t anında pol noktaları olduğundan herhangi bir P noktası P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının konumu P_{ϵ} hareketli düzleminde genellikle bir eğridir ve bu eğri *hareketli pol eğrisi* olarak adlandırılıp (P) ile gösterilir. Benzer biçimde, P pol noktasının P'_{ϵ} düzlemindeki geometrik yeri *sabit pol eğrisi* olarak adlandırılıp (P') ile gösterilir.



Şekil 7. 1 $X = P$ noktasında hareketli ve sabit pol eğrileri

Şimdi pol hızlarını yani (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P noktasının hızlarını araştıralım.

Daha önceden dönme polünü $V_f = 0$ ile karakterize ettiğimizden (7.9) bağıntısı yardımıyla $X = P$ için

$$V_a = V_r = \dot{p}_1 c_1 + \dot{p}_2 c_2$$

elde edilir.

Böylelikle aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 7.5

P'_ϵ sabit ve P_ϵ hareketli düzlemlerindeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları aynıdır. $\square$

$B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ hareketi esnasında Teorem 7.5 den dolayı her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P pol noktasında birbirine teğettir ve skaler yay elementleri için

$$ds' = \|\mathbf{V}_a\|_\epsilon dt = \|\mathbf{V}_r\|_\epsilon dt = ds \quad (7.13)$$

eşitliği vardır. Buradan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar kat eder.

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 7.6

$B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ 1-parametrel düzlemsel hareketi esnasında P_ϵ düzleminin hareketli (P) pol eğrisi P'_ϵ düzleminin sabit (P') pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

7.5 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

Bu alt bölümde $B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ 1-parametrel düzlemsel hareketi esnasında relatif, mutlak, sürüklenme ve Coriolis ivme vektörleri tanımlanacaktır.

$B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ 1-parametrel düzlemsel hareketi esnasında X noktasının P_ϵ düzlemine göre olan ivme vektörüne *relatif ivme vektörü* denir ve $\mathbf{b}_r$ ile gösterilir. (7.6) denkleminde verilen $\mathbf{V}_r$ relatif hız vektöründe $\mathbf{c}_1$ ve $\mathbf{c}_2$ sabit olarak kabul edilip t ye göre türev alınırsa relatif ivme vektörü

$$\mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{V}}_r = \ddot{x}_1 \mathbf{c}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{c}_2 \quad (7.14)$$

şeklinde bulunur.

X noktasının P'_ϵ düzlemine göre olan ivme vektörüne *mutlak ivme vektörü* denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir. O halde $\mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a$ olarak alınabilir. (7.7) denkleminin t ye göre türevi alınarak;

$$\mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = -\epsilon \dot{\phi}(\dot{x}_2 - \dot{p}_2)\mathbf{c}_1 - \epsilon \dot{\phi}(x_2 - p_2)\dot{\mathbf{c}}_1 + \dot{\phi}(\dot{x}_1 - \dot{p}_1)\mathbf{c}_2 + \dot{\phi}(x_1 - p_1)\dot{\mathbf{c}}_2 - \epsilon \ddot{\phi}(x_2 - p_2)\mathbf{c}_1 + \ddot{\phi}(x_1 - p_1)\mathbf{c}_2 + \ddot{x}_1\mathbf{c}_1 + \dot{x}_1\dot{\mathbf{c}}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{c}_2 + \dot{x}_2\dot{\mathbf{c}}_2$$

elde edilir. Buradan (7.4) numaralı türev denklemleri dikkate alınırsa

$$\mathbf{b}_a = -\epsilon \dot{\phi}(\dot{x}_2 - \dot{p}_2)\mathbf{c}_1 - \epsilon (\dot{\phi})^2(x_2 - p_2)\mathbf{c}_2 + \dot{\phi}(\dot{x}_1 - \dot{p}_1)\mathbf{c}_2 - \epsilon (\dot{\phi})^2(x_1 - p_1)\mathbf{c}_1 - \epsilon \ddot{\phi}(x_2 - p_2)\mathbf{c}_1 + \ddot{\phi}(x_1 - p_1)\mathbf{c}_2 + \ddot{x}_1\mathbf{c}_1 + \dot{\phi}\dot{x}_1\mathbf{c}_2 + \ddot{x}_2\mathbf{c}_2 - \epsilon \dot{\phi}\dot{x}_2\mathbf{c}_1$$

ve en sade biçimde

$$\mathbf{b}_a = \epsilon \left\{ \dot{\phi}\dot{p}_2 - (\dot{\phi})^2(x_1 - p_1) - \ddot{\phi}(x_2 - p_2) \right\} \mathbf{c}_1 + \left\{ -\dot{\phi}\dot{p}_1 - \epsilon (\dot{\phi})^2(x_2 - p_2) + \ddot{\phi}(x_1 - p_1) \right\} \mathbf{c}_2 + \ddot{x}_1\mathbf{c}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{c}_2 - \epsilon \dot{\phi}\dot{x}_2\mathbf{c}_1 + \dot{\phi}\dot{x}_1\mathbf{c}_2 - \epsilon \dot{\phi}\dot{x}_2\mathbf{c}_1 + \dot{\phi}\dot{x}_1\mathbf{c}_2 \quad (7.15)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{b}_f = \epsilon \left\{ \dot{\phi}\dot{p}_2 - (\dot{\phi})^2(x_1 - p_1) - \ddot{\phi}(x_2 - p_2) \right\} \mathbf{c}_1 + \left\{ -\dot{\phi}\dot{p}_1 - \epsilon (\dot{\phi})^2(x_2 - p_2) + \ddot{\phi}(x_1 - p_1) \right\} \mathbf{c}_2 \quad (7.16)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme ivme vektörü*

$$\mathbf{b}_c = 2\dot{\phi} \{ -\epsilon \dot{x}_2\mathbf{c}_1 + \dot{x}_1\mathbf{c}_2 \} \quad (7.17)$$

vektörüne de X noktasının *Coriolis ivme vektörü* denir.

Eğer, x_1, x_2 sayıları sabit ise $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2$ türevleri sıfır olur. O halde P_ϵ düzleminde bir X noktası alındığında, bu noktanın ivmesinden bahsedilirken sürüklenme ivmesi kastedilmektedir.

Buradan ivmelerin terkihi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 7.7

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü, Coriolis ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r$$

dir.

Sonuç 7.3

$B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketi esnasında, $\mathbf{b}_c$ Coriolis ivme vektörü ve $\mathbf{V}_r$ relatif hız vektörü birbirine diktir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_r, \mathbf{b}_c \rangle_{\epsilon} &= \langle \dot{x}_1 \mathbf{c}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{c}_2, 2\dot{\phi} \{ -\epsilon \dot{x}_2 \mathbf{c}_1 + \dot{x}_1 \mathbf{c}_2 \} \rangle_{\epsilon} \\ &= -2 \epsilon \dot{\phi} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2 \epsilon \dot{\phi} \dot{x}_1 \dot{x}_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Not 7.1

(7.17) denkleminde, P_{ϵ} düzleminde sabit olmayan bir X noktasının Coriolis ivmesi ancak ve ancak $\dot{\phi} = 0$, yani B hareketi bir kayma (öteleme) olduğu zaman t nin bütün değerleri için sıfır olur. Bu durumda ivmeler; hızlar gibi

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_r$$

eşitliğine sahip olurlar. $\square$

Şimdi bir $B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinde herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım.

(7.16) denkleminde $\mathbf{b}_f = 0$ alınarak, $\dot{\phi} \neq 0$ için $(x_1 - p_1)$ ve $(x_2 - p_2)$ büyüklüklerine göre

$$\begin{cases} \epsilon (\dot{\phi})^2 (x_1 - p_1) + \epsilon \ddot{\phi} (x_2 - p_2) = \epsilon \dot{\phi} \dot{p}_2 \\ \ddot{\phi} (x_1 - p_1) - \epsilon (\dot{\phi})^2 (x_2 - p_2) = \dot{p}_1 \dot{\phi} \end{cases} \quad (7.18)$$

homojen olmayan lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} \epsilon (\dot{\phi})^2 & \epsilon \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\epsilon (\dot{\phi})^2 \end{vmatrix} = -\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 - \epsilon (\ddot{\phi})^2$$

şeklinde olup, $\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 + \epsilon (\ddot{\phi})^2 \neq 0$ için tek çözümü mevcuttur. Buradan

$$\begin{cases} (x_1 - p_1) = \frac{\begin{vmatrix} \epsilon \dot{\phi} \dot{p}_2 & \epsilon \ddot{\phi} \\ \dot{p}_1 \dot{\phi} & -\epsilon (\dot{\phi})^2 \end{vmatrix}}{-\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 - \epsilon (\ddot{\phi})^2} = \frac{\dot{\phi} (\epsilon \ddot{\phi} \dot{p}_1 + \epsilon^2 (\dot{\phi})^2 \dot{p}_2)}{\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 + \epsilon (\ddot{\phi})^2} \\ (x_2 - p_2) = \frac{\begin{vmatrix} \epsilon (\dot{\phi})^2 & \epsilon \dot{\phi} \dot{p}_2 \\ \ddot{\phi} & \dot{p}_1 \dot{\phi} \end{vmatrix}}{-\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 - \epsilon (\ddot{\phi})^2} = \frac{-\dot{\phi} (\epsilon (\dot{\phi})^2 \dot{p}_1 - \epsilon \ddot{\phi} \dot{p}_2)}{\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 + \epsilon (\ddot{\phi})^2} \end{cases}$$

olup

$$\begin{cases} q_1(t) = x_1(t) = p_1(t) + \frac{\dot{\phi} (\epsilon \ddot{\phi} \dot{p}_1 + \epsilon^2 (\dot{\phi})^2 \dot{p}_2)}{\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 + \epsilon (\ddot{\phi})^2}(t) \\ q_2(t) = x_2(t) = p_2(t) - \frac{\dot{\phi} (\epsilon (\dot{\phi})^2 \dot{p}_1 - \epsilon \ddot{\phi} \dot{p}_2)}{\epsilon^2 (\dot{\phi})^4 + \epsilon (\ddot{\phi})^2}(t) \end{cases}$$

$Q = (q_1, q_2)$ ivme polünün koordinatları bulunmuş olur. $\epsilon = 0$ için (7.18) denkleminde elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü

$$\begin{cases} q_1(t) = p_1(t) + \dot{p}_1(t) \frac{\dot{\phi}(t)}{\ddot{\phi}(t)} \\ q_2(t) = (q_2(t))(\mu), \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $q_2(t)$ fonksiyonları μ ya göre dizayn edilmektedir.

AFİN CK-DÜZLEMİNDE (P_{ϵ}) HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ

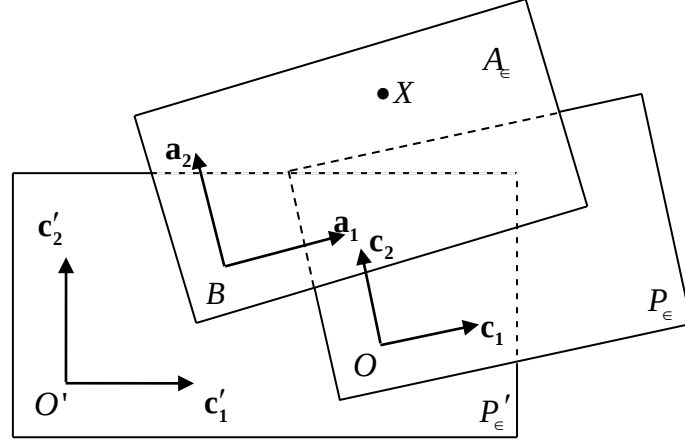
Bu ikinci orijinal bölümde, 7. Bölümde verilen P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerine göre hareketli bir A_{ϵ} düzlemi alınacak ve A_{ϵ} düzlemi üzerinde bir noktanın hareketi incelenecektir. P_{ϵ} hareketli düzlemi $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ koordinat sistemi ile P'_{ϵ} sabit düzlemi ise $\{O'; \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2\}$ koordinat sistemi ile verilsin. 1-parametrelili $B = P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ düzlemsel Afin CK-hareketi esnasında P_{ϵ} hareketli düzleminde alınan bir nokta P'_{ϵ} sabit düzlemine göre izafe edilmiştir. Tersine aynı işlemler P'_{ϵ} düzlemini hareketli P_{ϵ} düzlemini sabit alınarak bulunmuştur. Böylece Afin CK-düzleminde genellenen *1-parametrelili düzlemsel harekete ait hareketli koordinat sistemi* tek bir adımda elde edilecektir. Bu bölümde elde edilen orijinal sonuçlar makale formatında hazırlanarak bir dergiye sunulmuştur [59].

8.1 Afin CK-Düzleminde (P_{ϵ}) Hareketli Koordinat Sistemi

P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerine göre hareketli bir A_{ϵ} düzlemi alarak bu düzlem üzerinde bir noktanın hareketini inceleyelim:

A_{ϵ} hareketli düzlemi $\{B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ koordinat sistemi ile verilsin. A_{ϵ} düzleminin P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerine göre hareketi daha önce verilen P_{ϵ} düzleminin P'_{ϵ} düzlemine göre

hareketine benzer biçimde gösterilebilir. Burada φ ve φ' açılarını, sırasıyla, A_ϵ / P_ϵ ve A_ϵ / P'_ϵ 1-parametrelî düzlemsel hareketlerinin dönme açısı olduğunu kabul edelim.



Şekil 8. 1 Hareketli koordinat sistemi

Bu kısımdan itibaren diferansiyel yazış tarzı kullanılarak bir noktanın veya vektörün P_ϵ düzlemine göre değişimini " $d...$ " ve P'_ϵ düzlemine göre değişimini de " $d'...$ " ile göstereceğiz.

8.2 Türev denklemleri

$B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ hareketinin türev denklemleri (7.4) ve (7.5) denklemlerinde bulunmuştu.

Bu denklemlere benzer olarak A_ϵ / P_ϵ hareketinin türev denklemleri elde edelim:

$t=0$ anında $\{B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ve $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ koordinat sistemlerinin başlangıç noktalarının aynı olduğu kabul edilerek $\mathbf{a}_1$ ile $\mathbf{c}_1$ arasındaki açı φ olmak üzere (7.2) denkleminde

$$\mathbf{a}_1 = \cos_\epsilon \varphi \mathbf{c}_1 + \sin_\epsilon \varphi \mathbf{c}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -\sin_\epsilon \varphi \mathbf{c}_1 + \cos_\epsilon \varphi \mathbf{c}_2$$

yazılabilir. Burada $d\varphi$ sonsuz küçük dönme açısı yani, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ açısal hızdır. t ye göre

türev alınırsa (7.5) denklemleri yardımıyla

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = d\varphi \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = -\epsilon d\varphi \mathbf{a}_1 \end{cases} \quad (8.1)$$

bulunur. $\mathbf{BO} = \mathbf{b} = b_1 \mathbf{a}_1 + b_2 \mathbf{a}_2$ olmak üzere bu bağıntının t ye göre türevi alınır ve burada $d\mathbf{a}_1$ ve $d\mathbf{a}_2$ nin değerleri yerine yazılırsa

$$d\mathbf{b} = (db_1 - \epsilon d\varphi b_2) \mathbf{a}_1 + (db_2 + d\varphi b_1) \mathbf{a}_2 \quad (8.1')$$

elde edilir.

Benzer biçimde A_ϵ / P'_ϵ hareketinin türev denklemlerini elde edelim:

$t=0$ anında $\{B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2\}$ koordinat sistemlerinin başlangıç noktalarının çakıştığını kabul edilerek $\mathbf{a}_1$ ile $\mathbf{c}'_1$ arasındaki açı φ' olmak üzere (7.2) denkleminde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \cos_\epsilon \varphi' \mathbf{c}'_1 + \sin_\epsilon \varphi' \mathbf{c}'_2 \\ \mathbf{a}_2 &= -\epsilon \sin_\epsilon \varphi' \mathbf{c}'_1 + \cos_\epsilon \varphi' \mathbf{c}'_2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $d'\varphi'$ sonsuz küçük dönme açısı yani, $\varphi' = \frac{d'\varphi'}{dt}$ açısal hızdır. t ye göre türev alınır

$\mathbf{BO}' = \mathbf{b}' = b'_1 \mathbf{a}_1 + b'_2 \mathbf{a}_2$ olmak üzere (7.4) ve (7.5) denklemleri yardımıyla

$$\begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = d\varphi' \mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = -\epsilon d\varphi' \mathbf{a}_1 \\ d'\mathbf{b}' = (db'_1 - \epsilon d\varphi' b'_2) \mathbf{a}_1 + (db'_2 + d\varphi' b'_1) \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (8.2)$$

eşitlikleri elde edilir. Kısalık için

$$\begin{cases} d\varphi = \tau \\ db_1 - \epsilon d\varphi b_2 = \sigma_1 \\ db_2 + d\varphi b_1 = \sigma_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} d\varphi' = \tau' \\ db'_1 - \epsilon d\varphi' b'_2 = \sigma'_1 \\ db'_2 + d\varphi' b'_1 = \sigma'_2 \end{cases} \quad (8.3)$$

ve $d'\mathbf{b} = d'\mathbf{b}'$ şeklinde ifade edeceğiz.

Tanım 8.1

(8.3) denkleminde verilen σ_1, σ_2 ve τ büyüklüklerine, A_ϵ / P_ϵ 1-parametrelili düzlemsel hareketine; σ'_1, σ'_2 ve τ' büyüklüklerine ise A_ϵ / P'_ϵ 1-parametrelili düzlemsel hareketine ait *Pfaff formları (lineer diferansiyel form)* denir.

Böylece A_ϵ nın P_ϵ düzlemine göre A_ϵ / P_ϵ hareketinin türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = \tau \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = -\epsilon \tau \mathbf{a}_1 \\ d\mathbf{b} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (8.4)$$

ve A_ϵ nın P'_ϵ düzlemine göre A_ϵ / P'_ϵ hareketinin türev denklemleri

$$\begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = \tau' \mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = -\epsilon \tau' \mathbf{a}_1 \\ d'\mathbf{b}' = \sigma'_1 \mathbf{a}_1 + \sigma'_2 \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (8.5)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

8.3 Hızlar

A_ϵ düzleminde koordinatları (x_1, x_2) olan bir X noktasının P_ϵ ve P'_ϵ düzlemlerindeki hızlarını bulalım.

$$\mathbf{BX} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$$

olmak üzere Şekil 8.1 den

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = \mathbf{OB} + \mathbf{BX} = -\mathbf{b} + x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$$

ve

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O'X} = \mathbf{O'B} + \mathbf{BX} = -\mathbf{b}' + x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$$

yazılabilir. Buradan X in P_ϵ düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{x} = -d\mathbf{b} + x_1 d\mathbf{a}_1 + dx_1 \mathbf{a}_1 + x_2 d\mathbf{a}_2 + dx_2 \mathbf{a}_2$$

olup (8.4) türev denklemleri yardımıyla

$$d\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma_1 - \epsilon \tau x_2) \mathbf{a}_1 + (dx_2 - \sigma_2 + \tau x_1) \mathbf{a}_2 \quad (8.6)$$

yazılabilir. Buradan X noktasının P_ϵ düzlemine göre hız vektörü

$$\mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

bulunur. Bu vektöre X noktasının *relatif (izafi) hız vektörü* denir. Eğer $\mathbf{V}_r = 0$ veya $d\mathbf{x} = 0$ ise X noktası P_ϵ da tespit edilmiştir. O halde X in P_ϵ düzleminde sabit olma şartları

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma_1 + \epsilon \tau x_2 \\ dx_2 = \sigma_2 - \tau x_1 \end{cases} \quad (8.7)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde X in P'_ϵ düzlemine göre değişimi için (8.5) denklemleri yardımıyla

$$d'\mathbf{x} = d'\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma'_1 - \epsilon \tau' x_2) \mathbf{a}_1 + (dx_2 - \sigma'_2 + \tau' x_1) \mathbf{a}_2 \quad (8.8)$$

deşitliğı yazılabilir. Buradan X in *mutlak hız vektörü*

$$\mathbf{V}_a = \frac{d'\mathbf{x}}{dt}$$

elde edilir. $\mathbf{V}_a = 0$ veya $d'\mathbf{x} = 0$ ise X noktası P'_ϵ da sabittir. O halde X in P'_ϵ düzleminde sabit olma şartları için

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma'_1 + \epsilon \tau' x_2 \\ dx_2 = \sigma'_2 - \tau' x_1 \end{cases} \quad (8.9)$$

yazılabilir.

X noktası P_ϵ da sabit tutulduğunda

$$\mathbf{V}_f = \frac{d_f \mathbf{x}}{dt}$$

sürüklenme hız vektörü X noktasının P'_ϵ düzlemine göre $d_f \mathbf{x}$ değişimine karşılık gelir.

Buna göre (8.7) deki şartlar (8.8) de yerine yazılırsa

$$d_t \mathbf{x} = \left[(\sigma_1 - \sigma'_1) - (\tau' - \tau)x_2 \right] \mathbf{a}_1 + \left[(\sigma_2 - \sigma'_2) + (\tau' - \tau)x_1 \right] \mathbf{a}_2 \quad (8.10)$$

ilişkisi elde edilir. Böylece (8.6), (8.8) ve (8.10) denklemlerinden

$$d' \mathbf{x} = d_t \mathbf{x} + d \mathbf{x}$$

olduğu görülür. Böylece P_ϵ / P'_ϵ hareketi için verilen hızlar arasındaki Teorem 7.1 de verilen bağıntı korunur.

Şimdi P_ϵ ve P'_ϵ düzlemleri sabit kabul edilerek A_ϵ / P_ϵ ve A_ϵ / P'_ϵ hareketlerindeki hızlara bakalım:

A_ϵ / P_ϵ hareketinde

$\tilde{\mathbf{V}}_a$: X noktasının A_ϵ / P_ϵ hareketine göre hız vektörü

$\tilde{\mathbf{V}}_r$: X noktasının kendi düzlemine (A_ϵ düzlemine) göre hız vektörü

$\tilde{\mathbf{V}}_f$: X sabit iken X in P_ϵ ye göre hız vektörü (yani A_ϵ nın P_ϵ ye göre hızı)

ve benzer biçimde A_ϵ / P'_ϵ hareketinde

$\tilde{\mathbf{V}}'_a$: X noktasının A_ϵ / P'_ϵ hareketine göre hız vektörü

$\tilde{\mathbf{V}}'_r$: X noktasının kendi düzlemine (A_ϵ düzlemine) göre hız vektörü

$\tilde{\mathbf{V}}'_f$: X sabit iken X in P'_ϵ ye göre hız vektörü (yani A_ϵ nın P'_ϵ ye göre hızı)

olmak üzere (7.6), (7.7) ve (7.8) denklemlerinden A_ϵ / P_ϵ hareketi için

$$\tilde{\mathbf{V}}_a = \tilde{\mathbf{V}}_f + \tilde{\mathbf{V}}_r$$

ve

A_ϵ / P'_ϵ hareketi için

$$\tilde{\mathbf{V}}'_a = \tilde{\mathbf{V}}'_f + \tilde{\mathbf{V}}'_r$$

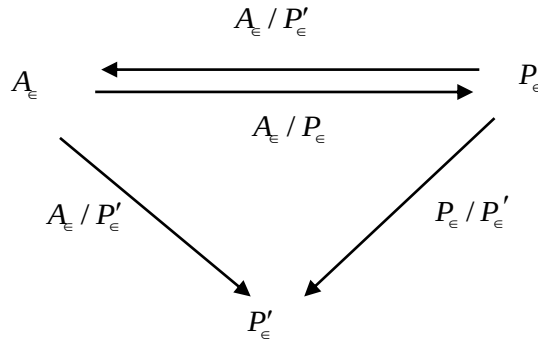
elde edilir.

Teorem 8.1

$P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinin $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hız vektörü, $A_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketindeki sürüklenme hız vektörü $\tilde{\mathbf{V}}'_f$ ile $A_{\epsilon} / P_{\epsilon}$ hareketindeki sürüklenme hız vektörü $\tilde{\mathbf{V}}_f$ in farkı olarak

$$\mathbf{V}_f = \tilde{\mathbf{V}}'_f - \tilde{\mathbf{V}}_f = \left[(\sigma_1 - \sigma'_1) - \epsilon (\tau' - \tau) x_2 \right] \mathbf{a}_1 + \left[(\sigma_2 - \sigma'_2) + (\tau' - \tau) x_1 \right] \mathbf{a}_2$$

şeklinde elde edilir. $P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketini $P_{\epsilon} / A_{\epsilon}$ ters hareketi ve $A_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinin bileşkesi olarak karakterize edilmektedir.



Şekil 8. 2 $P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketi

İspat:

(8.7) ve (8.9) denklemlerinde verilen sabit olma koşulları göz önünde bulundurulduğunda $A_{\epsilon} / P_{\epsilon}$ ve $A_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketlerinin sürüklenme hız vektörleri, sırasıyla,

$$\tilde{\mathbf{V}}_f = (-\sigma_1 - \epsilon \tau x_2) \mathbf{a}_1 + (-\sigma_2 + \tau x_1) \mathbf{a}_2 \quad (8.11)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{V}}'_f = (-\sigma'_1 - \epsilon \tau' x_2) \mathbf{a}_1 + (-\sigma'_2 + \tau' x_1) \mathbf{a}_2 \quad (8.12)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemler yardımıyla $P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinin sürüklenme hız vektörü

$$\mathbf{V}_f = \tilde{\mathbf{V}}_f' - \tilde{\mathbf{V}}_f = \left[(\sigma_1 - \sigma_1') - \epsilon (\tau' - \tau) x_2 \right] \mathbf{a}_1 + \left[(\sigma_2 - \sigma_2') + (\tau' - \tau) x_1 \right] \mathbf{a}_2$$

bulunur. Son eşitliği düzenlersek

$$\mathbf{V}_f = \left[(\sigma_1 - \sigma_1') - \epsilon (\tau' - \tau) x_2 \right] \mathbf{a}_1 + \left[(\sigma_2 - \sigma_2') + (\tau' - \tau) x_1 \right] \mathbf{a}_2$$

elde edilir. Böylece (8.10) denklemi yeniden elde edilmiş olur.

8.4 Birbirine Göre Hareket Eden Birçok Düzlem ve Dönme Polü Planı

Birbirine göre hareket eden ve ikişer ikişer 1-parametrelî düzlemsel hareket meydana getiren A_ϵ, P_ϵ ve P_ϵ' üç düzlemini ele aldık. Belirli bir t anında (A_ϵ, P_ϵ) , $(A_\epsilon, P_\epsilon')$ ve $(P_\epsilon, P_\epsilon')$ düzlem çiftlerinin her biri belirli bir dönme polüne sahiptir ve ani dönme hareketleri birer açısal hız ile meydana gelir. Buna göre birbirine göre hareket eden üç düzlem bir *üç-üyeli kinematik zinciri* meydana getirir.

A_ϵ / P_ϵ hareketinin $Q = (q_1, q_2)$ polünün koordinatları (8.11) denkleminde $\tilde{\mathbf{V}}_f = 0$ alınarak

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\sigma_2}{\tau} \\ \epsilon q_2 = -\frac{\sigma_1}{\tau} \end{cases} \quad (8.14)$$

şeklinde bulunur.

A_ϵ / P_ϵ' hareketinin $Q' = (q_1', q_2')$ polünün koordinatları ise (8.12) denkleminde $\tilde{\mathbf{V}}_f' = 0$ alınarak

$$\begin{cases} q_1' = \frac{\sigma_2'}{\tau'} \\ \epsilon q_2' = -\frac{\sigma_1'}{\tau'} \end{cases} \quad (8.15)$$

şeklinde bulunur.

$P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinin $P=(p_1, p_2)$ dönme polü $\mathbf{BP} = p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2$ olmak üzere (8.10') denkleminle verilen $d_f\mathbf{x}$ sürüklenme hızının sıfır olmasıyla bulunur. Böylece $d_f\mathbf{x}=0$ alınarak yani $\mathbf{V}_f = \mathbf{V}'_f$ olup

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma'_1) - (\tau' - \tau)x_2 = 0 \\ (\sigma_2 - \sigma'_2) + (\tau' - \tau)x_1 = 0 \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 - (\tau' - \tau) \cdot x_2 = \sigma'_1 - \sigma_1 \\ (\tau' - \tau) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = \sigma'_2 - \sigma_2 \end{cases}$$

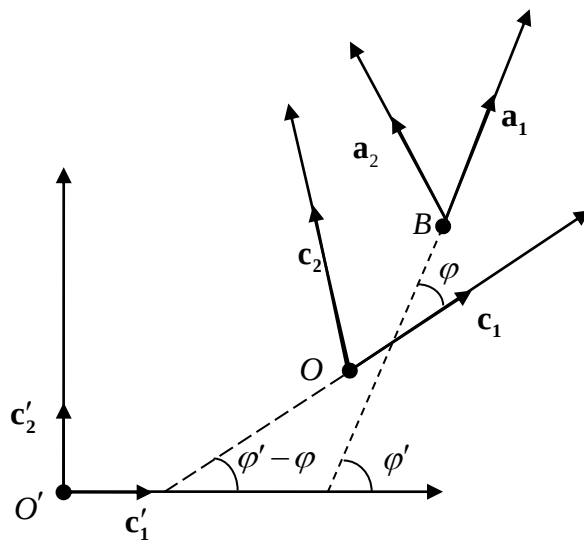
şeklinde yazılabilir. $P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketi için açısal hız

$$\frac{d(\varphi' - \varphi)}{dt} = \frac{d\varphi' - d\varphi}{dt} = \frac{\tau' - \tau}{dt}$$

olduğundan $\tau' - \tau \neq 0$ dır (Şekil 8.2). Dolayısıyla sistem

$$\begin{cases} p_1 = x_1 = \frac{\sigma'_2 - \sigma_2}{\tau' - \tau} \\ \epsilon p_2 = \epsilon x_2 = -\frac{\sigma'_1 - \sigma_1}{\tau' - \tau} \end{cases} \quad (8.16)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir.

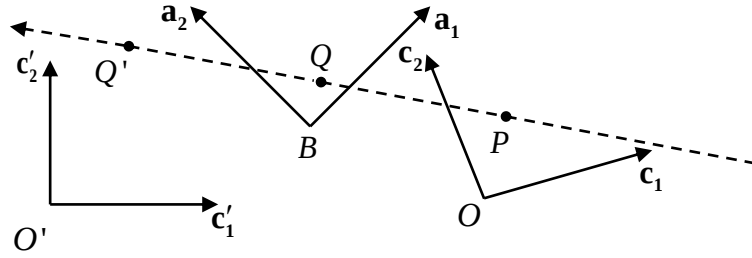


Şekil 8. 3 Düzlemlerin dönme açıları

Böylelikle (8.14) (8.15) ve (8.16) denklemleriyle dönme pollerinin koordinatları gösterilmiş olur.

Teorem 8.2 Üç Afin CK-düzlemi ikişer ikişer birbirine göre 1-parametrelî düzlemsel hareket meydana getirirse, her t anında üç relatif dönme polü vardır.

Teorem 8.3 Üç Afin CK-düzlemi ikişer ikişer birbirine göre 1-parametrelî düzlemsel hareket meydana getirirse, her t anında P , Q ve Q' pol noktaları bir doğru üzerinde bulunur. Bu doğruya *pol doğrusu* denir (Şekil 8.2).



Şekil 8. 4 Pol doğrusu

İspat:

$Q, Q',$ ve P pol noktalarının oluşturduğu doğrular, sırasıyla, QQ', PQ' ve PQ olsun.

$$QQ' \text{ doğrusunun eğimi: } \frac{q'_2 - \epsilon q_2}{q'_1 - q_1}$$

$$PQ' \text{ doğrusunun eğimi: } \frac{p_2 - \epsilon q'_2}{p_1 - q'_1}$$

$$PQ \text{ doğrusunun eğimi: } \frac{p_2 - \epsilon q_2}{p_1 - q_1}$$

şeklindedir. (8.14) (8.15) ve (8.16) denklemlerinden

$$\frac{q'_2 - \epsilon q_2}{q'_1 - q_1} = \frac{p_2 - \epsilon q'_2}{p_1 - q'_1} = \frac{p_2 - \epsilon q_2}{p_1 - q_1} = \frac{\sigma_1 \tau' - \sigma_1' \tau}{\sigma_2' \tau - \sigma_2 \tau'}$$

olduğu görülür. Buradan P, Q ve Q' pol noktaları aynı doğru üzerindedir.

Not 8.1

$P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinin P dönme polü, A_{ϵ} düzleminin P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerine göre hareketinde hız vektörleri aynı olan bir noktadır. Ayrıca, $A_{\epsilon} / P_{\epsilon}$ hareketinde A_{ϵ} düzlemindeki noktalar Q polü etrafında ani dönme hareketi meydana getirirler (Teorem 7.2). Bir X noktasının yörüngesine ait teğet QX pol ışınına diktir (Sonuç 7.1). Benzer şekilde $A_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinde A_{ϵ} düzlemi t anında Q' polü etrafında ani dönme hareketi yapar ve bir X noktasının yörünge teğeti $Q'X$ pol ışınına diktir. Buradan $X = P$ alınırsa, P noktasının QQ' doğrusu üzerinde bulunması gerekir (Şekil 8.4).

Sonuç 8.1

Genel olarak, n ikiye ikiye her defasında birbirine göre düzlemsel hareket yapan n düzlem n -üyeli kinematik zincir oluşturur. Bu hareketlerin her biri t (zaman) reel parametresine bağlı ise her t değerine karşılık $\binom{n}{2}$ sayıda relatif dönme polü mevcuttur.

AFİN CK-DÜZLEMİNDE (P_{ϵ}) EULER-SAVARY FORMÜLÜ

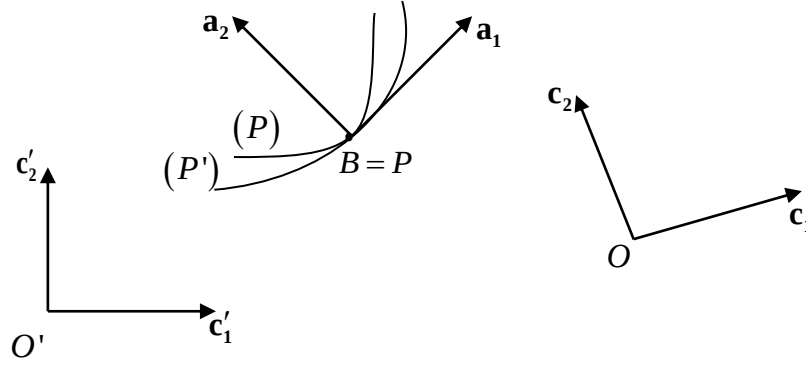
Bu üçüncü orijinal bölümde, 7. bölümde verilen Afin CK-düzleminde 1-parametrelili hareketler ve 8. bölümde verilen hareketli koordinat sistemi yardımıyla 1-parametrelili hareketler altında kanonik izafe sistemi elde edilecek ve ardından $P_{\epsilon} / P'_{\epsilon}$ hareketinde, hareketli P_{ϵ} düzleminin noktaları tarafından P'_{ϵ} düzleminde çizilmiş olan yörünge eğrilerinin eğrilik durumlarını inceleyen Euler-Savary formülü literatüre kazandırılacaktır. Bu bölümde elde edilen orijinal sonuçlar makale formatında hazırlanarak bir dergiye sunulmuştur [59].

9.1 Afin CK-Düzleminde 1-Parametrelili Hareketler Altında Kanonik İzafe Sistemi

Bir önceki bölümde, $\{O; \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ koordinat sistemi ile verilen P_{ϵ} ve $\{O'; \mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2\}$ koordinat sistemi ile verilen P'_{ϵ} düzlemlerini ele alarak bu düzlemlere göre hareketli A_{ϵ} düzleminin hareketini inceledik. A_{ϵ} düzlemini $\{B, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ koordinat sistemi ile ele almıştık. Bu bölümde;

- i) Sistemin B başlangıcı bir P ani dönme polü ile çakışacak şekilde ($B = P$),
- ii) $\{B, \mathbf{a}_1\}$ eksen pol teğeti ile yani (P) ve (P') pol eğrilerinin ortak teğeti ile çakışacak şekilde,

olarak özel bir $\{B, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ koordinat sistemi üzerinde çalışacağız.



Şekil 9. 1 Kanonik izafe sistemi

i) şartı göz önüne alındığında P başlangıç noktası olduğundan $p_1 = p_2 = 0$ elde edilir.

Buradan (8.16) denkleminde $\sigma_1 = \sigma'_1$, $\sigma_2 = \sigma'_2$ elde edilir. Böylece (8.4) ve (8.5) denklemlerinden

$$d\mathbf{b} = d\mathbf{p} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 = d'\mathbf{p} = d\mathbf{b}' \quad (9.1)$$

yazılabilir. Bu denklem ile pol teğeti verilmiş olur. $d\mathbf{b} = d'\mathbf{b}$ eşitliği $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_a$ olması demektir. Yani sürüklenme hızı $\mathbf{V}_f = 0$ olur. Buradan (P) ve (P') pol eğrilerinin skalar yay elementleri için (7.14) denkleminde verilen

$$ds' = \|\mathbf{V}_a\|_\epsilon dt = \|\mathbf{V}_r\|_\epsilon dt = ds$$

eşitliği gerçekleşmiş olur. Yani, (P) ve (P') pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

Ayrıca ii) şartından yani pol teğeti $\mathbf{a}_1$ ile çakışmasından (9.1) denkleminde $\mathbf{a}_2$ nin katsayısı sıfır olmalıdır. Buradan

$$\sigma_2 = \sigma'_2 = 0$$

bulunur. Böylece (8.4) ve (8.5) türev denklemleri daha basit hale gelir. Kısalık maksadıyla $\sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma$ alınarak $\{P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ kanonik izafe sistemine ait türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = \tau \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = -\epsilon \tau \mathbf{a}_1 \\ d\mathbf{p} = \sigma \mathbf{a}_1 \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = \tau' \mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = -\epsilon \tau' \mathbf{a}_1 \\ d'\mathbf{p} = \sigma \mathbf{a}_1 \end{cases} \quad (9.2)$$

şeklinde elde edilir.

Buradaki σ, τ ve τ' diferansiyel formları şu anlamları taşır:

$$(7.14) \text{ denkleminde } ds = \|\mathbf{V}_r\|_{\epsilon} dt \text{ olmak üzere } ds = \sigma \text{ dır. Gerçekten; } s = \int \left\| \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right\|_{\epsilon} dt$$

olup (9.1) denkleminde

$$ds = \left\| \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right\|_{\epsilon} dt = \left\| \frac{\sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2}{dt} \right\|_{\epsilon} dt$$

şeklindedir. i) ve ii) şartlarından elde edilen ifadeler yukarıdaki eşitlikte kullanıldığında $ds = \sigma$ elde edilir. Yani σ , (P) ve (P') pol eğrilerinin skalar yay elementidir.

τ ; kotengenz açısı, (P) nin komşu iki teğeti arasındaki açıdır. Dolayısıyla (P) nin P noktasındaki eğriliği

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\tau}{\sigma}$$

olup (P) pol eğrisinin eğrilik yarıçapı için

$$r = \frac{\sigma}{\tau} \quad (9.3)$$

yazılabilir.

Aynı şekilde τ' ; kotengenz açısı, (P') nin komşu iki teğeti arasındaki açıdır. Buradan (P') nin P noktasındaki eğriliği

$$\frac{d\varphi'}{ds} = \frac{\tau'}{\sigma}$$

olup (P') pol eğrisinin eğrilik yarıçapı için

$$r' = \frac{\sigma}{\tau'} \quad (9.4)$$

yazılabilir.

Hareketli P_{ϵ} düzlemi dt zaman aralığında P polü etrafında sabit P'_{ϵ} düzlemine göre $d\phi = \tau' - \tau$ sonsuz küçük ani dönme açısı ile döner. Böylece hareketli P_{ϵ} düzleminin sabit P'_{ϵ} düzlemine göre açısal hızı

$$\frac{\tau' - \tau}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = \dot{\phi} = \omega \quad (9.5)$$

bulunur. Böylece (9.3), (9.4) ve (9.5) denklemlerinden

$$\frac{\tau' - \tau}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \quad (9.6)$$

elde edilir. P_{ϵ} düzleminin P'_{ϵ} düzlemine nazaran ani dönme hareketinin açısal hızı genellikle ω ile gösterilir. Eğer $\ddot{\phi} = \dot{\omega}$ ise ω , P_{ϵ} düzleminin P'_{ϵ} düzlemine göre açısal ivmesidir.

$\mathbf{a}_1$ teğet birim vektörünün yönünün (P) ve (P') pol eğrilerinin zaman göre çizilişi ile tespit edilen yönde verilmiş olsun. Yani $\frac{ds}{dt} > 0$ olacak şekilde seçilsin. Eğrilerin oluşum hareketi ile $\mathbf{a}_1$ in hareketi hep aynı yönde olduğundan r pozitifdir. Benzer şekilde r' de pozitifdir.

Şimdi 8. bölümde verilen bilgiler doğrultusunda A_{ϵ} düzleminde alınan bir X noktasının kanonik izafe sisteminde P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerine göre (8.6) ve (8.8) denklemleriyle verilen değişimlerini tekrar elde edelim.

Bu değişimler, P_{ϵ} ve P'_{ϵ} düzlemlerinde sırasıyla:

$$d\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma - \epsilon \tau x_2) \mathbf{a}_1 + (dx_2 + \tau x_1) \mathbf{a}_2$$

ve

$$d'\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma - \epsilon \tau' x_2) \mathbf{a}_1 + (dx_2 + \tau' x_1) \mathbf{a}_2$$

şeklindedir. $d\mathbf{x} = 0$ ise, yani

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma + \epsilon \tau x_2 \\ dx_2 = -\tau x_1 \end{cases} \quad (9.7)$$

sağlanıyorsa X noktası P_ϵ düzleminde, benzer biçimde $d'\mathbf{x}=0$ ise, yani

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma + \epsilon \tau' x_2 \\ dx_2 = -\tau' x_1 \end{cases} \quad (9.8)$$

sağlanıyorsa X noktası P'_ϵ düzleminde sabittir. Bu durumda sürüklenme hızı

$$d_t \mathbf{x} = d'\mathbf{x} - d\mathbf{x} = (\tau' - \tau)(\epsilon x_2 \mathbf{a}_1 - x_1 \mathbf{a}_2)$$

şeklinde elde edilir.

9.2 Euler-Savary Formülü

Şimdi P_ϵ / P'_ϵ hareketinde, hareketli P_ϵ düzleminin noktaları tarafından P'_ϵ düzleminde çizilmiş olan yörünge eğrilerinin eğrilik durumlarını inceleyeceğiz. P_ϵ düzleminde alınan bir X noktasının P'_ϵ düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin t anına karşılık gelen eğrilik çemberinin M' merkezini arayacağız. Kanonik izafe sisteminde P_ϵ ve P'_ϵ düzlemlerindeki X ve M' noktalarının koordinatları, sırasıyla, (x_1, x_2) ve (m'_1, m'_2) olsun. X , M' noktaları ve P dönme polü, her t anında X noktasına ait anlık yörünge normalinde yer alır. Böylece

$$\mathbf{PX} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$$

ve

$$\mathbf{PM}' = m'_1 \mathbf{a}_1 + m'_2 \mathbf{a}_2$$

vektörleri P polünden geçen aynı yönlü vektörlerdir. Dolayısıyla

$$x_1 : x_2 = m'_1 : m'_2$$

veya

$$x_1 m'_2 - m'_1 x_2 = 0 \quad (9.9)$$

yazılabilir. (9.7) ve (9.8) sabit kalma koşullarına göre X noktası P_{ϵ} düzleminde sabit olduğundan

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma + \epsilon \tau x_2 \\ dx_2 = -\tau x_1 \end{cases} \quad (9.10)$$

ve M' noktası P'_{ϵ} düzleminde sabit olduğundan

$$\begin{cases} dm'_1 = \sigma + \epsilon \tau' m'_2 \\ dm'_2 = -\tau' m'_1 \end{cases} \quad (9.11)$$

bulunur. (9.9) denkleminin diferansiyeli alınır; (9.10) ve (9.11) şartları göz önüne alınırsa

$$dx_1 m'_2 + x_1 dm'_2 - dm'_1 x_2 - m'_1 dx_2 = 0$$

veya

$$\sigma(m'_2 - x_2) - (\tau' - \tau)(x_1 m'_1 + \epsilon x_2 m'_2) \quad (9.12)$$

elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçilirse a ve a' , sırasıyla, P noktasından X ve M' noktaları arasındaki uzaklıkları ve α , $PX(PM')$ pol ışını ile pol eğrilerinin ortak teğeti arasındaki açıyı göstermek üzere

$$\begin{cases} x_1 = a \cos_{\epsilon} \alpha \\ x_2 = a \sin_{\epsilon} \alpha \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} m'_1 = a' \cos_{\epsilon} \alpha \\ m'_2 = a' \sin_{\epsilon} \alpha \end{cases}$$

olduğundan (9.12) denkleminde

$$\sigma(a' \sin_{\epsilon} \alpha - a \sin_{\epsilon} \alpha) - (\tau - \tau') aa' \underbrace{(\cos^2_{\epsilon} \alpha + \epsilon \sin^2_{\epsilon} \alpha)}_1 = 0$$

veya

$$\sigma \sin_{\epsilon} \alpha (a' - a) - (\tau - \tau') aa' = 0$$

yazılabilir. (9.6) denklemi $ds = \sigma$ eşitliği göz önüne alınarak yukarıdaki denklemde kullanılırsa

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right) \sin_{\epsilon} \alpha = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{d\phi}{ds} \quad (9.14)$$

elde edilir. Burada r ve r' sırasıyla (P) ve (P') pol eğrilerinin daha önce bahsedilen eğrilik yarıçaplarıdır.

Tanım 9.1

(9.14) denklemine *Afin CK-düzleminde bir parametrelili hareketler için Euler-Savary formülü* denir. Bu formül X ve M' noktaları arasındaki karşılıklı ilişkiyi ifade eder.

Teorem 9.1

P_ϵ ve P'_ϵ , sırasıyla, hareketli ve sabit Afin CK-düzlemleri olmak üzere $B = P_\epsilon / P'_\epsilon$ bir parametrelili hareketi esnasında P_ϵ düzlemindeki bir X noktası, P'_ϵ düzlemindeki ani eğrilik merkezi M' olan bir yörünge çizer. Benzer şekilde P'_ϵ / P_ϵ ters hareketinde P'_ϵ düzlemindeki bir M' noktası, P_ϵ düzlemindeki ani eğrilik merkezi X olan bir yörünge çizer. X ve M' noktaları arasındaki bu karşılıklı ilişki (9.14) Euler-Savary formülü

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right) \sin_\epsilon \alpha = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{d\phi}{ds}$$

ile verilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Afin Cayley-Klein düzleminde 1-parametrelili düzlemsel hareketlerin elde edilmesiyle; Öklid, Galile ve Lorentz düzlemlerinde ayrı ayrı çalışılan 1-parametrelili düzlemsel hareketin ve bu hareketlere ait türev denklemleri, hızlar-hızların terkibi, pol noktaları, ivmeler-ivmelerin terkibi, ivme polü, hareketli koordinat sistemi, kanonik izafe sistemi ve Euler-Savary formülü kavramlarının bir genelleme halinde literatüre kazandırılması amacına ulaşılmıştır. Tezin orijinal bölümlerini oluşturan 7. , 8. ve 9. bölümlerde verilen bu kavram ve sonuçlar [58] ve [59] nolu makalelerde verilmiştir.

Bilindiği gibi kompleks sayılar Öklid düzlemi üzerindeki noktalar tarafından belirlenmektedir. Öklid düzlemi ve kompleks sayılar düzlemi arasındaki bu *eşlik ilişkisinin* literatürde benzer şekilde *Lorentz düzlemi-Hiperbolik sayılar düzlemi* ve *Galile düzlemi-Dual sayılar düzlemi* arasında da var olduğu elde edilmiştir.

Çizelge 6.1 de verilen düzlemsel geometriler incelendiğinde Çizelge 10.1 de gösterilen *eliptik kompleks, parabolik kompleks ve hiperbolik kompleks sayı sistemleri* karşımıza çıkmaktadır. Bu sayı sistemleri “*genelleştirilmiş kompleks sayılar (p-kompleks sayılar)*” olarak isimlendirilmekte ve

$$\mathbb{C}_p = \{x + Jy : x, y \in \mathbb{R}, J^2 = p\}$$

ile gösterilmektedir. $\mathbb{C}_J$ düzlemi ise

$$\mathbb{C}_J = \{x + Jy : x, y \in \mathbb{R}, J^2 = p, p \in \{-1, 0, 1\}\} \subset \mathbb{C}_p$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Çizelge 10. 1 Genelleştirilmiş kompleks sayılar

		İki Nokta Arasındaki Uzaklık Ölçümü			
		ELİPTİK UZAKLIK ÖLÇÜMÜ	PARABOLİK UZAKLIK ÖLÇÜMÜ	HİPERBOLİK UZAKLIK ÖLÇÜMÜ	
İki Doğru Arasındaki Açı Ölçümü	ELİPTİK AÇI ÖLÇÜMÜ	Eliptik Geometri (Reimann)	Öklid Geometrisi	Hiperbolik Geometri (Lobachevsky)	$\Rightarrow$ Eliptik Kompleks Sayı Sistemi
	PARABOLİK AÇI ÖLÇÜMÜ	Co-Ökliden Geometri (Anti-Newton Hooke)	Galile Geometrisi	Co-Minkowskian Geometri (Newton Hooke)	$\Rightarrow$ Parabolik Kompleks Sayı Sistemi
	HİPERBOLİK AÇI ÖLÇÜMÜ	Co-Hiperbolik Geometri (Anti De-Sitter)	Minkowski (Lorentz) Geometrisi	İkili Hiperbolik Geometri (De-Sitter)	$\Rightarrow$ Hiperbolik Kompleks Sayı Sistemi

Bu bilgilerden hareketle Öklid düzlemi ve kompleks sayılar düzlemi arasındaki bahsettiğimiz *eşlik ilişkisi* P_{ϵ} düzlemi ile $\mathbb{C}_J$ düzlemi arasında da söz konusudur. Böylece daha sonraki çalışmalarda bu ilişki kullanılarak bu tezde elde edilen orijinal kavram, bulgu ve sonuçlar $\mathbb{C}_J$ düzleminde de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Garnier, R., (1956). Cours de cinématique, Gauthier-Villar, Paris, 38.
- [2] Dijkman, E.A., (1976). Motion Geometry of Mechanism, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Hall, A. S. Jr., (1986). Kinematics and Linkage Design , Waveland Press, Inc., Prospect Heights, Illinois, (Originally published by Prentice-Hall, Inc., 1961).
- [4] Öklid, <http://tr.wikipedia.org/wiki/%C3%96klid>, 07.10.2014.
- [5] Ökliden geometri, http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_geometry, 07.10.2014.
- [6] The Thirteen Books of Euclid's Elements, http://www.wilbourhall.org/pdfs/heath_euclid_ii.pdf, 07.10.2014
- [7] Euclid's Elements, <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Euc.+1>, 07.10.2014.
- [8] Euclid's Elements, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>, 07.10.2014.
- [9] Euclid's Elements Book I, <http://sites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1470783.files/Euclid.pdf>, 07.10.2014.
- [10] Euclid's Elements Book I, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/book1/book1.html>, 07.10.2014.
- [11] Euclid's Elements Book I, <http://math.furman.edu/~jpoole/euclidselements/eubk1/defposcn.htm#postulates>, 07.10.2014.
- [12] Öklid dışı geometriler, http://www.matematikciyiz.biz/Arast%C4%B1rmalardan_Secmeler/oklit_disi_geometriler.htm, 07.10.2014.
- [13] Öklid dışı geometriler, http://en.wikipedia.org/wiki/Non-Euclidean_geometry, 07.10.2014.

- [14] Öklid dışı geometriler, <http://akifaltundal.net/tur/content/view/52/345/1/5/>, 07.10.2014.
- [15] Öklid dışı geometriler, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html, 07.10.2014.
- [16] Yaglom, I.M., (1979). A simple non-Euclidean Geometry and its Physical Basis, Springer-Verlag, New York.
- [17] Yaglom, I.M., (1968). Complex Number in Geometry, Academic Press Inc.
- [18] Klein, F., (1928). Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie, Springer, Berlin.
- [19] Klein, F., (1921). Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie, Gesammelte Math Abd.
- [20] Klein, F., (1926). Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, Berlin.
- [21] Blaschke, W. and Müller, H.R., (1956). Ebene Kinematik, Verlag Oldenbourg, München.
- [22] Müller, H.R. (1963). Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [23] Ergin, A. A., (1991). "On the one-parameter Lorentzian motion", Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Series A 40, 59-66.
- [24] Ergin, A. A., (1992). "Three Lorentzian Planes Moving With Respect To One Another And Pole Points", Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Series A 41, 79-84.
- [25] Tutar, A., Kuruoğlu, N., Düldül, M., (2001). "On the Moving Coordinate System and Pole Points on the Lorentzian Plane", International Journal of Applied Mathematics, 7(4):439-445.
- [26] Ergüt, M., Aydın, A. P. and Bildik, N. (1988). "The Geometry of the Canonical Relative System and the One-Parameter Motions in 2-dimensional Lorentzian Space", The Journal of Firat University, 3(1):113-122.
- [27] Ergüt, M., Aydın, A. P. and Bildik, N., (1989). "The Curvature of the Trajectory curves of the pole curves P, P' and the point correspondence $X \leftrightarrow X'$ in 2-dimensional Lorentzian Plane L^2 ", The Journal of Firat University, 4(1):2-33.
- [28] Aytun, I., (2002). 1-Parametrelili Lorentziyen Düzlem Hareketi için Euler-Savary Formülü ve Lorentziyen Geometrik Yorumu, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.
- [29] Dooner, D. B. and Griffis, M. W., (2007). "On the Spatial Euler-Savary Equations for Envelopes", Journal of Mechanical Design, 129(8): 865-875.
- [30] Ikawa, T., (2003). "Euler-Savary's Formula on Minkowski Geometry", Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 8(2):31-36.
- [31] Buckley, R. and Whitfield, E. V., (1949). "The Euler-Savary Formula", The Mathematical Gazette, 33(306): 297-299.
- [32] Sandor, G. N., Xu, Y. and Weng, T.-C., (1990). "A Graphical Method for Solving the Euler-Savary Equation", Mechanism and Machine Theory, 25(2):141-147.

- [33] Sandor, G. N., Arthur, G. E. and Raghavacharyulu, E., (1985). "Double Valued Solutions of the Euler-Savary Equation and Its Counterpart in Bobillier's Construction", *Mechanism and Machine Theory*, 20(2): 145-178.
- [34] Akar, M., Yüce, S. and Kuruoğlu, N. (2013). "One-Parameter-Planar Motion in the Galilean Plane" *International Electronic Journal of Geometry (IEJG)*, 6(1):79-88.
- [35] Akbıyık, M., (2012). *Galilean Düzlemde Hareketli Koordinat Sistemi ve Euler-Savary Formülü*, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [36] Röschel, O., (1992). "Zur Krümmungsverwandtschaft von zwangsläufigen in affinen CK-Ebenen I", *Journal of Geometry*, 44(1-2):160-170.
- [37] Röschel, O., (1993). "Zur Krümmungsverwandtschaft von zwangsläufigen in affinen CK-Ebenen II", *Journal of Geometry*, 47(1-2):131-140.
- [38] Urban, H., (1992). *Einheitliche Grundlegung der Kinematik der Cayley/Klein Ebenen*, Dissertation, TU, München.
- [39] Helzer, G., (2000). "Special Relativity with Acceleration", *The American Mathematical Monthly*, 107(3): 219-237.
- [40] Hacısalihoğlu, H. H., (1998). *Dönüşümler ve Geometrilere*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- [41] O'Neill, B., (1983). "Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity", Academic Press, New York.
- [42] Hacısalihoğlu, H. H., (2004). *Diferansiyel Geometri 3.Cilt*, Hacısalihoğlu Yayınları.
- [43] Kesit eğriliği, http://en.wikipedia.org/wiki/Sectional_curvature, 25.12.2013.
- [44] Röschel, O., (1990). "Hyperosculierende Logarithmische Spiralen in Affinen CK-Ebenen", *Journal of Geometry*, 38(1-2):165-170.
- [45] Sanjuan, M. A. F., (1984). "Group Contraction and Nine Cayley-Klein Geometries" *International Journal of Theoretical Physics*, 23(1).
- [46] Herranz, F. J., and Santader, M., (1998). "Homogeneous phase spaces: The Cayley-Klein framework", <http://arxiv.org/pdf/physics/9702030v1.pdf>, 26.03.13.
- [47] Coxeter, H.S.M., (1998). *Non-Euclidean Geometry*, Mathematical Association of America, 6. Edition.
- [48] Herranz, F. J., Ortega, R. and Santader, M., (1999). "Trigonometry of Spacetimes: a new self dual approach to a curvature/signature (in)dependent trigonometry", <http://arxiv.org/pdf/math-ph/9910041v1.pdf>, 26.03.13.
- [49] Es, H., (2003). *Hareketler ve Dokuz Farklı Geometri*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [50] McRae, A.S., (2006). "The Gauss Bonnet theorem for Cayley-Klein Geometries of dimension two" *New York Journal of Mathematics*, 12: 143-155.
- [51] Silagadze, Z. K., (2008). "Relativity without Tears" *Acta Physica Polonica B*, 39(4).

- [52] Salgado, R. (2006). "Space-Time Trigonometry" AAPT Topical Conference: Teaching General Relativity to Undergraduates, AAPT Summer Meeting, Syracuse, NY.
- [53] McRae, A.S., (2009). "Clifford Fibrations and Possible Kinematics", Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 5:072.
- [54] Spirova, M., (2009). "Propellers in Affine Cayley-Klein Planes", J. Geom. 93:164-167.
- [55] Gramov, N. A., (1990). "Transitions: Contractions and Analytical Continuations of the Cayley-Klein Groups", Int. J. Theor. Phys, 29(N6):607-620.
- [56] Urban, H., (1994). "Über drei zwangsläufig gegeneinander bewegte Cayley/Klein-Ebenen", Geometriae Dedicata, 53:187-199.
- [57] Kisil, V. V., (2012). Geometry of Möbius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of $SL_2(\mathbb{R})$, Imperial College Press, London.
- [58] (Bayrak) Gürses, N., and Yüce, S., (2014). "One-Parameter Planar Motions in Affine Cayley-Klein Planes", European Journal of Pure and Applied Mathematics, 7(3): 335-342.
- [59] (Bayrak) Gürses, N, and Yüce, S., (2014), "The Moving Coordinate System and Euler-Savary Formula for One Parameter Planar Motions in Affine Cayley-Klein Planes", (gönderildi).
- [60] Sternberg, S., (2003). Semi Riemann Geometry and General Relativity,
http://www.math.harvard.edu/~shlomo/docs/semi_riemannian_geometry.pdf, 26.03.2013.
- [61] Hayter, R., (2008). The Hyperbolic Plane-A Strange New Universe,
http://www.maths.dur.ac.uk/Ug/projects/highlights/CM3/Hayter_Hyperbolic_report.pdf , 26.03.2013.
- [62] Lounesto, P., (2001). Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series (286), 2nd Edition.
- [63] Ranzan, C., (2009). "The Lorentz Transformations Applied to Aether-Space", Physics Essays 23(3):520.
- [64] Birman, G.S. and Nomizu, K., (1984). "Trigonometry in Lorentzian geometry." Am. Math. Mont. 91(9):543-549.
- [65] Nešović, E. and Petrovic Torgasev M., (2003). "Some trigonometric relations in the Lorentzian plane", Kragujevac J. Math. 25:219-225.
- [66] Nešović, E., (2005). "Hyperbolic angle function in the Lorentzian plane", Kragujevac J. Math. 28: 139–144.
- [67] Ratcliffe, J.G., (2006). Foundation of Hyperbolic Manifolds, Springer, Second Edition.
- [68] Cannon, J. W., Floyd, W.J., Kenyon, R. and Parry, W. R., (1997). "Hyperbolic Geometry" Flavors of Geometry MSRI Publications, 31.

LORENTZ DÜZLEMİ

Bu ek bölümde Lorentz düzlemine ait tez bütününde ihtiyaç duyulan temel kavramlar ve bu kavramlarla ilgili temel özellikler verilecektir [60-68].

Lorentz dönüşümleri

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} + a \\ y' = \frac{-vx+y}{\sqrt{1-v^2}} + b \end{cases}$$

olup bu dönüşümler altında değişmeyenlerin teorisine *Lorentz geometrisi* denir. Bu geometrik sistem *Minkowski geometrisi* olarak da bilinmektedir. İlk olarak Alman matematikçi ve fizikçi H. Minkowski (1864-1909) tarafından rölativistik mekaniğe bağlı olayların açıklanması amacıyla araştırılmıştır [16].

Tanım A.1

$\mathbb{R}^2$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\mathbf{x}=(x_1, x_2), \mathbf{y}=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{R}^2$ Afin uzayına *Öklid düzlemi* denir ve E^2 ile gösterilir.

A-1 Lorentz Düzleminde Metrik Özellikler

Tanım A.2 (iç çarpım)

$\mathbb{R}^2$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

biçiminde tanımlı Lorentz iç çarpımı alınırsa $\mathbb{R}^2$ Afin uzayı, *Lorentz düzlemi* olarak isimlendirilir ve L^2 ile gösterilir.

Öklid iç çarpımı pozitif tanımlı olduğundan, E^2 Öklid uzayında vektörlerin karakterleri aynıdır. Fakat, Lorentz iç çarpımı ile donatılmış L^2 Lorentz düzleminde vektörler; timelike, spacelike ve lightlike (veya null) vektörler olarak sınıflandırılır. Bu sınıflandırma, Lorentz geometrisinde son derece önemlidir.

Bu sınıflandırma aşağıdaki şekilde verilebilir:

Tanım A.3 (Vektörlerin sınıflandırılması)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ olsun. Eğer

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L > 0$ veya $\mathbf{x} = 0$ ise $\mathbf{x}$ e spacelike vektör,
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L < 0$ ise $\mathbf{x}$ e timelike vektör,
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L = 0$ ve $\mathbf{x} \neq 0$ ise $\mathbf{x}$ e lightlike (null) vektör

denir (Şekil Ek A.1).

Tanım A.4 (Norm)

$\mathbf{x} \in L^2$ için $\mathbf{x}$ vektörünün normu,

$$\|\mathbf{x}\|_L = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L|}$$

olarak tanımlanır.

Buna tanıma göre

- $\mathbf{x}$ timelike ve $\|\mathbf{x}\|_L = 1$ ise $\mathbf{x}$ vektörüne *birim timelike vektör*

- $\mathbf{x}$ spacelike ve $\|\mathbf{x}\|_L = 1$ ise $\mathbf{x}$ vektörüne *birim spacelike vektör*

denir.

Teorem A.1

$\mathbf{x} \in L^2$ için $\|\mathbf{x}\|_L > 0$ dır. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{x}$ in bir (lightlike null) vektör olmasıdır. Ayrıca

- $\mathbf{x}$ bir timelike vektör ise $\|\mathbf{x}\|_L^2 = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L$ dır.
- $\mathbf{x}$ bir spacelike vektör ise $\|\mathbf{x}\|_L^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L$ dır.

Tanım A.5 (Diklik)

L^2 Lorentz düzleminde $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerini alalım. Eğer $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = 0$ ise $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerine *Lorentz anlamında diktir* denir.

Teorem A.2

L^2 Lorentz düzleminde iki timelike (veya spacelike) vektör dik olamaz.

Sonuç A.1

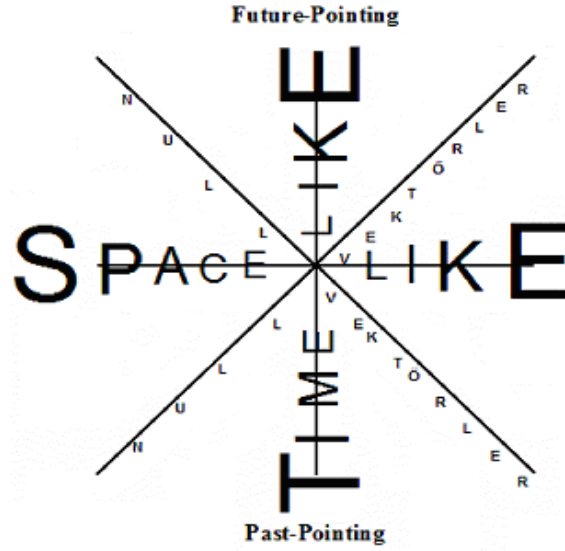
L^2 Lorentz düzleminde iki vektörün dik olması için birinin timelike diğ erinin spacelike olması gerekir.

Tanım A.6

$\mathbf{x} \in L^2$ timelike vektör olsun. $\mathbf{e} = (0, 1)$ olmak üzere,

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e} \rangle_L < 0$ ise $\mathbf{x}$ vektörüne *future pointing timelike vektör*,
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e} \rangle_L > 0$ ise $\mathbf{x}$ vektörüne *past pointing timelike vektör*

denir (Şekil Ek A.1).



Şekil Ek A. 1 Lorentz düzleminde vektörler

Lemma A.1

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^2$ future pointing timelike vektörler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \leq 0$
- $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, future pointing timelike vektördür (Kapalılık).
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \geq \|\mathbf{x}\|_L \|\mathbf{y}\|_L$ (Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_L \geq \|\mathbf{x}\|_L + \|\mathbf{y}\|_L$ (Lorentz uzayında üçgen eşitsizliği)

A-2 Lorentz Düzleminde Açı Kavramı, Dönme ve Trigonometri

Düzlemsel, küresel ve uzay hareketlerinde en önemli kavram açı kavramıdır. Lorentz geometride açı kavramı, Öklid geometrisinden tamamen olup, bu farklılık vektörlerin Tanım A.3 de verilen sınıflandırılmasından ortaya çıkmaktadır.

Öklid düzleminde dönme ve ötelemenin birleşiminden oluşan hareketi ele alalım. Bu hareket dik koordinat sisteminde

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & a \\ \sin t & \cos t & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile ifade edilmektedir. Benzer şekilde Lorentz düzlemi için hareket

$$G = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & a \\ \sinh u & \cosh u & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A; u, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde verilen grup yardımıyla tanımlanır. Lorentz düzlem geometrisi bu grubun matrisleri altında değişmez kalanları inceler. A matrisi iç çarpımı, yönlendirmeyi ve zaman yönlendirilmesini korur.

Tanım A.7 (Dönme matrisi)

L^2 düzleminde dönme hareketinin matrisi

$$A(u) = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir. $A(u)$ matrisi spacelike vektörü spacelike vektöre, timelike vektörü timelike vektöre dönüştürür ve uzunluğu korur.

Buna ek olarak

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Öklid anlamda bir noktayı $y = x$ doğrusuna göre simetriğine dönüştüren matris olarak tanımlanırsa $B(u) = A(u)D$ şeklinde alınan $B(u)$ matrisi

$$B(u) = \begin{pmatrix} \sinh u & \cosh u \\ \cosh u & \sinh u \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. $B(u)$ matrisinin taşıdığı özellikler aşağıdaki tanımda verilmiştir:

Tanım A.8

L^2 düzleminde

$$B(u) = \begin{pmatrix} \sinh u & \cosh u \\ \cosh u & \sinh u \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $B(u)$ matrisi spacelike vektörü timelike vektöre, timelike vektörü spacelike vektöre dönüştürür ve uzunluğu korur.

Tanım A.9 (Future (veya past) pointing timelike iki birim vektör arasındaki açı)

V ve W , L^2 de iki birim future (veya past)-pointing timelike vektör ise, V den W ya yönlendirilmiş açı $A(u)V = W, u \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlıdır.

Bu tanımdan $V = (v_1, v_2)$ ve $W = (w_1, w_2)$ iki birim future (veya past)-pointing timelike vektör ise

$$\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = v_1 \cosh u + v_2 \sinh u \quad \text{ve} \quad w_2 = v_1 \sinh u + v_2 \cosh u$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle_L &= \langle (v_1, v_2), (v_1 \cosh u + v_2 \sinh u, v_1 \sinh u + v_2 \cosh u) \rangle_L \\ &= v_1^2 \cosh u + v_1 v_2 \sinh u - v_1 v_2 \sinh u - v_2^2 \cosh u \\ &= \cosh u \underbrace{(v_1^2 - v_2^2)}_{-1} \end{aligned}$$

olup $\langle V, W \rangle_L = -\cosh u$ elde edilir.

Sonuç A.3

V ve W , L^2 de iki birim future(veya past)-pointing timelike vektör ise

$$\begin{cases} \langle V, W \rangle_L = -\cosh u \\ \langle V, DW \rangle_L = -\sinh u \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım A.10 (Future pointing ve past pointing timelike iki birim vektör arasındaki açı)

V ve W L^2 de, sırasıyla, birim future-pointing ve birim past-pointing timelike vektörler ise, V den $-W$ ya yönlendirilmiş açı $-A(-u)V = -W, u \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlıdır.

Sonuç A.4

V ve W , L^2 de, sırasıyla, birim future-pointing ve birim past-pointing timelike vektör ise

$$\begin{cases} \langle V, W \rangle_L = \cosh u \\ \langle V, DW \rangle_L = \sinh u \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım A.11 (İki spacelike birim vektör arasındaki açı)

$V = (v_1, v_2)$ ve $W = (w_1, w_2)$ L^2 de iki birim spacelike vektör olsun. V den W ya yönlendirilmiş açı için aşağıdaki ifadeler tanımlanmaktadır:

- $\text{sgn}(v_1) = \text{sgn}(w_1)$ ise $A(u)V = W, u \in \mathbb{R}$
- $\text{sgn}(v_1) \neq \text{sgn}(w_1)$ ise $A(u)V = -W, u \in \mathbb{R}$

Sonuç A.5

$V = (v_1, v_2)$ ve $W = (w_1, w_2)$ L^2 de iki birim spacelike ise

- $\text{sgn}(v_1) = \text{sgn}(w_1)$ ise $\langle V, W \rangle_L = \cosh u$ ve $\langle V, DW \rangle_L = \sinh u$
- $\text{sgn}(v_1) \neq \text{sgn}(w_1)$ ise $\langle V, W \rangle_L = -\cosh u$ ve $\langle V, DW \rangle_L = -\sinh u$

şeklindedir.

Tanım A.12 (Spacelike ve timelike iki birim vektör arasındaki açı)

L^2 de $V = (v_1, v_2)$ birim spacelike vektör, $W = (w_1, w_2)$ birim timelike vektör olsun. V den W ya yönlendirilmiş açı için aşağıdaki ifadeler tanımlanmaktadır:

- $\text{sgn}(v_1) = \text{sgn}(w_2)$ ise $B(u)V = W, u \in \mathbb{R}$
- $\text{sgn}(v_1) \neq \text{sgn}(w_2)$ ise $-B(u)V = W, u \in \mathbb{R}$

Sonuç A.6

L^2 de $V = (v_1, v_2)$ birim spacelike vektör, $W = (w_1, w_2)$ birim timelike vektör ise

- $\text{sgn}(v_1) = \text{sgn}(w_2)$ ise $\langle V, W \rangle_L = \sinh u$ ve $\langle V, DW \rangle_L = \cosh u$
- $\text{sgn}(v_1) \neq \text{sgn}(w_2)$ ise $\langle V, W \rangle_L = -\sinh u$ ve $\langle V, DW \rangle_L = -\cosh u$

şeklindedir.

Sonuç A.7

Yukarıdaki sonuçlardan görüleceği gibi iki vektör arasındaki hiperbolik açı tanımlanırken vektörler birim vektör olarak alınmaktadır. $\|V\|_L \neq 0$ ve $\|W\|_L \neq 0$ keyfi

uzunluklu vektörler olmak üzere $u = \frac{V}{\|V\|_L}$ birim vektör olduğundan $\cosh u$ ve $\sinh u$

fonksiyonları için

$$\begin{cases} \cosh u = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\|_L \|W\|_L} \\ \sinh u = \frac{\langle V, DW \rangle}{\|V\|_L \|W\|_L} \end{cases}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Tanım A.13 (Çember)

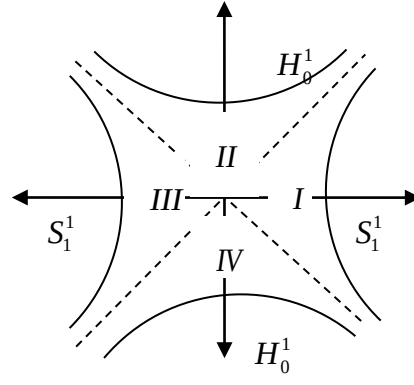
$P \in L^2$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$H_0^1 = \left\{ Q \in L^2 \mid \langle \mathbf{PQ}, \mathbf{PQ} \rangle_L = r^2 \right\}$$

kümesinin oluşturduğu eğriye P merkezli r yarıçaplı *timelike Lorentz çemberi*,

$$S_1^1 = \left\{ Q \in L^2 \mid \langle \mathbf{PQ}, \mathbf{PQ} \rangle_L = -r^2 \right\}$$

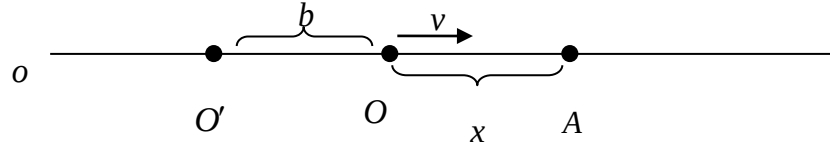
kümesinin oluşturduğu eğriye ise, P merkezli r yarıçaplı *spacelike Lorentz çemberi* denir (Şekil Ek A.2).



Şekil Ek A. 2 Lorentz çemberi ve hiperbolik çember

GALİLE DÜZLEMİ

Bu ek bölümde Galile düzlemine ait tez bütününde ihtiyaç duyulan temel kavramlara yer verilecektir [16].



Şekil Ek B. 1 Doğrusal (rectilinear) hareket

$\{x\}$ ve $\{x'\}$ iki referans çatısı ve $\{x\}$ koordinat sisteminin O orijini v sabit hızı ile $\{x'\}$ koordinat sistemine göre hareket etsin (Şekil Ek B.1). Yani , t anında O noktasının $\{x'\}$ referans çatısına göre $b(t)$ koordinatı $b(t)=b+vt$ ile verilsin. Burada t zamanı göstermektedir ve b , $t=0$ anında O orijin noktasının $\{x'\}$ koordinatıdır. A noktasının x ve x' koordinatları arasındaki ilişki $x'=x+b(t)$ olduğundan $x'=x+b+vt$ elde edilir. Ayrıca $t'=t+a$ olacağından

$$x' = x + vt + b$$

$$t' = t + a$$

bulunur. t zaman parametresi yerine x , x konum parametresi yerine y alınırsa

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüme doğrusal (*rectilinear*) hareketler için Galile dönüşümleri denir [16].

Tanım B.1

Doğrusal hareketler için Galile dönüşümleri altında değişmeyenlerin teorisine *Galileo'nun Görecelik Prensiplerinin Geometrisi* veya *iki boyutlu Galile geometrisi* denir ve G^2 ile gösterilir [16].

Doğrusal hareketler için Galile dönüşümleri

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y \end{cases} \quad (\text{veya} \quad \begin{cases} x_1 = x + vt \\ t_1 = t \end{cases}) \quad (\text{B.2})$$

dönüşümü (o doğrusunda hareket eden $\{y_1\}$ koordinat sisteminin O_1 orijinin v sabit hızlı düzgün hareketini tarif eder) ve

$$\begin{cases} x' = x_1 + a \\ y' = y_1 + b \end{cases} \quad (\text{veya} \quad \begin{cases} x' = x_1 + b \\ t' = t_1 + a \end{cases}) \quad (\text{B.3})$$

dönüşümünden (O_1 in O' noktasına bir ötelemesini tarif eder) oluşur. (B.3) eşitliğinin geometrik anlamı bir *öteleme* iken (B.2) dönüşümü y eksen yönünde v katsayılı bir *shear* (kayılma) belirtir¹ (Şekil Ek B.2) [16].

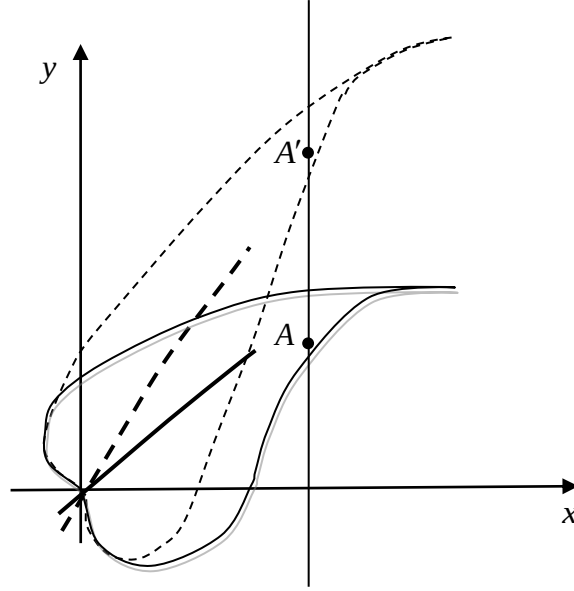
Teorem B.1

(B.1) eşitliğiyle verilen Galile Dönüşümleri

- a) Doğruları doğrular üzerine
- b) Paralel doğruları paralel doğrular üzerine

¹ İki boyutlu Öklid geometri ve iki boyutlu Galile geometrisi arasındaki temel fark, Öklid geometrisinin hareketleri dönme ve öteleme dönüşümlerinden oluşurken Galile geometrisinde hareketlerinin öteleme ve shear dönüşümlerinden oluşmasıdır [16].

- c) Doğrudan AB ve CD doğru parçalarını $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$ özelliğine sahip $A'B'$ ve $C'D'$ doğrudan doğru parçaları üzerine
- d) F cismini aynı alanlı F' cismi üzerine dönüştürür [16].



Şekil Ek B. 2 Shear Hareketi

Yani doğrular, paralel doğrular, doğrudan doğru parçalarının oranları ve cisimlerin alanları sadece Öklid geometride değil ayrıca Galile geometrisinde de önemlidir.

Ayrıca herhangi bir (B.1) dönüşümü y eksenine paralel her doğruyu y eksenine paralel bir diğer doğru içine alır. Böylece Öklid geometride y eksenine paralel doğrular ifadesi geometrik öneme sahip değil iken Galile geometrisinde bütün diğer doğrulardan farklı öneme sahiptir [16].

Tanım B.2

Oy – eksenine paralel olan doğrulara *özel doğru (special line)* denir [16].

Tanım B.3

Oy – eksenine paralel olmayan doğrulara *sıradan doğru (ordinary line)* denir [16].

Not B.1

Ox – eksenine paralel doğrular sıradan doğrulardan ayrılmaz [16].

Tanım B.4 (Afin Uzay)

G^2 iki boyutlu Galile geometrisi;

I. Her bir $A \in G^2$ noktası ve $\alpha \in \mathbb{R}^2$ vektörü için $\mathbf{AB} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $B \in G^2$ noktası vardır.

II. Herhangi üç $A, B, C \in G^2$ noktası için $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$ dir.

özelliklerini sağladığından bir *Afin uzaydır* [16].

Tanım B.5 (İç işlem)

Galile geometrisinde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ olmak üzere

$$+ : G^2 \times G^2 \rightarrow G^2 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

iç işlemi;

I. Değişme: Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ için $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

II. Birleşme: Her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^2$ için $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

III. Etkisiz eleman: Her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ olacak şekilde bir $\mathbf{0} \in G^2$ vektörü

IV. Ters eleman: Her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir $\mathbf{x}' \in G^2$ vektörü

özelliklerini sağladığından G^2 iki boyutlu Galile geometrisi “+” (toplama) işlemine göre bir *Abel grubudur* [16].

Tanım B.6 (Dış işlem)

Galile geometrisinde $(G^2, +)$ bir abel grup $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisim olduğundan her $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G^2$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\odot : \mathbb{R} \times G^2 \rightarrow G^2 \\ (a, \mathbf{x}) \rightarrow a \odot \mathbf{x}$$

dış işlemi;

I. Her $\mathbf{x}$ vektörü için $1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{R}$

II. Her $\mathbf{x}$ vektörü ve $a, b \in \mathbb{R}$ sayısı için $a \odot (b \odot \mathbf{x}) = (ab) \odot \mathbf{x}$

III. Her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için ve her $a, b \in \mathbb{R}$ sayısı için $(a+b) \odot \mathbf{x} = a \odot \mathbf{x} + b \odot \mathbf{x}$

IV. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ ve $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $a \odot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \odot \mathbf{x} + a \odot \mathbf{y}$

özelliklerini sağladığından G^2 iki boyutlu Galile geometrisi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Ayrıca $\{\mathbf{g}_1 = (1, 0), \mathbf{g}_2 = (0, 1)\}$ vektör sistemi lineer bağımsız ve germe aksiyomunu sağladığından G^2 vektör uzayının bir bazıdır. Dolayısıyla $\text{boy } G^2 = 2$ dir [16].

Tanım B.7 (İç çarpım)

iki boyutlu Galile geometrisinde $\mathbf{x} = (x_1, y_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2) \in G^2$ olmak üzere Galile iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ şeklinde gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = x_1 x_2$$

olarak tanımlanır [16].

İç çarpımın özellikleri

i) Simetri özelliği: Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ vektörü için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_G$ dir.

ii) Bilineerlik özelliği: Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ vektörü ve $a \in \mathbb{R}$ skaler sayısı için

$$\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = (ax_1)x_2 = a(x_1x_2) = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G$$

ve her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektörü için

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_G + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G \text{ ve } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle_G = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_G$$

dir.

iii) Yarı pozitif tanımlılık özelliği: Her $\mathbf{x} = (x_1, y_1) \in G^2$ için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_G = x_1^2$ elde edilir.

Eğer $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_G = 0$ ise $x_1 = 0$ olup $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olabilir. Her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_G = 0$ olacak şekilde bütün $\mathbf{v} \in G^2$ vektörlerinin kümesi bir Öklid doğrudur [16].

Örnek B.1

$\mathbf{g}_1=(1,0), \mathbf{g}_2=(0,1)$ için $\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle_G = 1.1=1$ ve $\langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 \rangle_G = 0.0=0$ bulunur.

Tanım B.8

G^2 Galile geometrisinde $\mathbf{g}_2$ vektörüne paralel olan vektörlere *özel vektör* denir [16].

Tanım B.9 (Özel İç Çarpım)

İki boyutlu Galile geometrisinde $\mathbf{x}=(0, y_1), \mathbf{y}=(0, y_2) \in G^2$ özel vektörlerinin Galile özel iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ ile gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\delta = y_1 y_2$$

olarak tanımlanır [16].

Tanım B.10

G^2 Galile geometrisinde $\{\mathbf{g}_1=(1,0), \mathbf{g}_2=(0,1)\}$ vektörlerine *ortogonal baz vektörleri* denir.

B-1 Galile Düzleminde Metrik Özellikler

Tanım B. 11 (Norm)

Galile düzleminde her $\mathbf{a}=(x_1, y_1) \in G^2$ vektörünün normu $\|\mathbf{a}\|_G$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G} = |x_1|$$

şeklinde tanımlanır. $\|\mathbf{a}\|_G = 1$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne *birim vektör* denir [16].

Tanım B.12 (Özel Norm)

Galile geometrisinde $\mathbf{a}=(0, y_1) \in G^2$ özel vektörlerinin normu $\|\mathbf{a}\|_\delta$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_\delta = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_\delta} = |y_1|$$

şeklinde tanımlanır [16].

Tanım B.13 (Diklik)

Galile geometrisinde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G^2$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_G = 0$$

olması $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G \neq 0$ için $\mathbf{b} = (0, y_2)$ olduğunda sağlanır. Bu durumda $\mathbf{b}$ vektörüne $\mathbf{a}$ vektörünün *diki* denir ve $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ile gösterilir [16].

Tanım B.14 (İki Nokta Arasındaki Uzaklık)

Öklid geometride biliyoruz ki $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık d_{AB} ile gösterilir ve $d_{AB} = \|\mathbf{AB}\| = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ olmak üzere

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\text{B.4})$$

formülü ile tanımlanır. Eğer bu noktalar arasındaki uzaklık sıfır ise, bu iki noktaya çakışık denir. Ayrıca $l \dots y = kx + s$ ve $l_1 \dots y = k_1x + s_1$ denklemleri iki l ve l_1 doğruları arasındaki açı

$$\tan \delta_{l_1} = \frac{k_1 - k}{kk_1 + 1} \quad (\text{B.5})$$

formülü ile tanımlanır. $k_1 = k$ ise l ve l_1 paraleldir ve bu durumda bu iki doğru arasındaki açı sıfıra eşittir. Bu durumda iki doğru arasındaki uzaklık

$$d_{l_1} = \frac{|s_1 - s|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (\text{B.6})$$

ile tanımlanır. (B.6) formülü eğer (B.5) açısı sıfır ise tanımlıdır ve iki doğru ancak ve ancak d uzaklığı sıfır ve δ açısı sıfır olduğunda kesişir [16].

Tanım B.15 (İki Nokta Arasındaki Uzaklık)

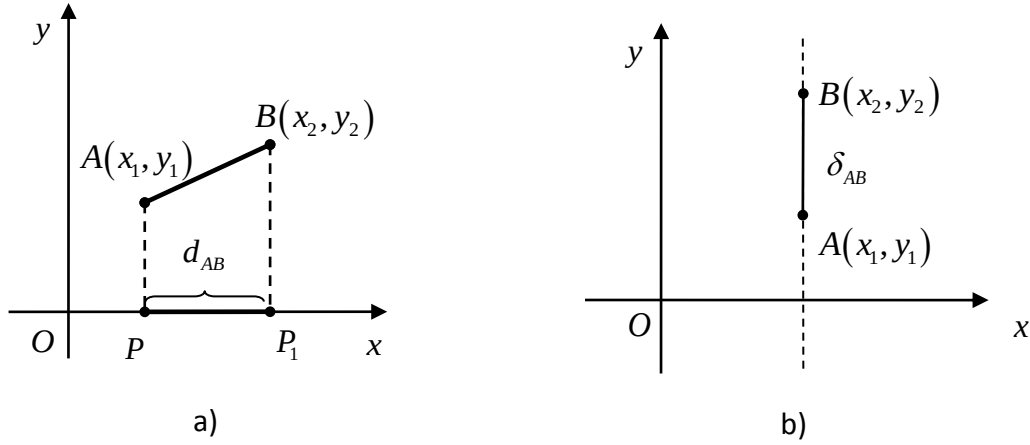
$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2) \in G^2$ noktaları arasındaki uzaklık d_{AB} ile gösterilir ve

$$d_{AB} = \|\mathbf{AB}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_G}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ olmak üzere işaretli uzaklık

$$d_{AB} = x_2 - x_1 \quad (\text{B.7})$$

uzaklığına eşittir, yani AB doğru parçasının x -ekseni üzerindeki PP_1 dik izdüşümünün işaretli uzunluğuna eşittir (Şekil Ek B.3).



Şekil Ek B. 3 a) İki nokta arasındaki uzaklık b) İki nokta arasındaki özel uzaklık

Not B.2

(B.7) eşitliğinin tanımlanabilmesi için bu eşitliğin Galile dönüşümleri altında değişmemesi gerekir. Gerçekten, (B.1) hareketi altında A noktasının x_1 koordinatı $x'_1 = x_1 + a$ ya dönüştüğü için A ve B in apsisleri farkı bu hareket altında değişmez [16].

Tanım B.16 (İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık)

Eğer A ve B noktaları arasındaki uzaklık sıfır ise, yani $x_1 = x_2$ ise, A ve B aynı özel doğru üzerindedir (Şekil Ek B.3). Böyle noktalar için işaretli özel uzaklık $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (0, y_2 - y_1)$ olmak üzere

$$\delta_{AB} = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_\delta} = y_2 - y_1 \quad (\text{B.8})$$

ile tanımlanır (Burada $y_2 > y_1$ dir) [16].

Gerçekten, eğer $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ in apsisleri kesişirse ($x_2 = x_1$) bu durumda (B.1) hareketi bu noktaları $x'_1 = x'_2 = x_1 + a$ ve

$$\begin{cases} y_1' = vx_1 + y_1 + b \\ y_2' = vx_1 + y_2 + b \end{cases}$$

ile $A'(x_1', y_1')$ ve $B(x_2', y_2')$ noktalarına dönüştürür. Böylece

$$\begin{aligned} y_2' - y_1' &= (vx_1 + y_2 + b) - (vx_1 + y_1 + b) \\ &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $y_2 - y_1$ farkı Galile hareketi altında değişmez ve Galile geometrisinde geometrik bir özelliktir. Ayrıca $x_1 \neq x_2$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} y_2' - y_1' &= (vx_2 + y_2 + b) - (vx_1 + y_1 + b) \\ &= y_2 - y_1 + v(x_2 - x_1) \\ &\neq y_2 - y_1 \end{aligned}$$

olup

$$y_2' - y_1' \neq y_2 - y_1$$

bulunur [16].

Not B.3

Galile geometrisinde iki A ve B noktasının çakışması için d_{AB} uzaklığının ve δ_{AB} özel uzaklığının sıfır olması gerekir [16].

Tanım B.17 (Merkezil Çember)

Sabit bir Q noktasına uzaklıkları mutlak değerce sabit ve r olan $M(x, y)$ noktalarının kümesine *çember (circle)* denir ve S ile gösterilir. Burada $Q(a, b)$ noktasına S *çemberinin merkezi* ve negatif olmayan r sayısına da *çemberin yarıçapı* denir.

$$d_{QM} = x - a$$

olduğu için

$$d_{QM}^2 = r^2$$

dir. Böylece S çemberi

$$(x - a)^2 = r^2$$

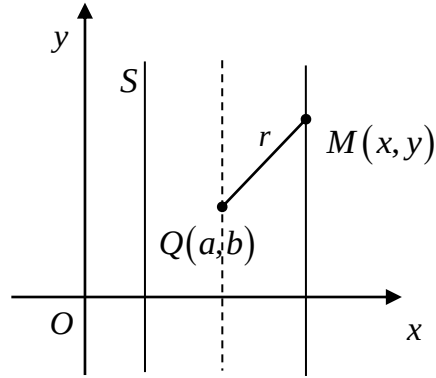
veya

$$x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0$$

veya $p = -a, q = a^2 - r^2$ olmak üzere

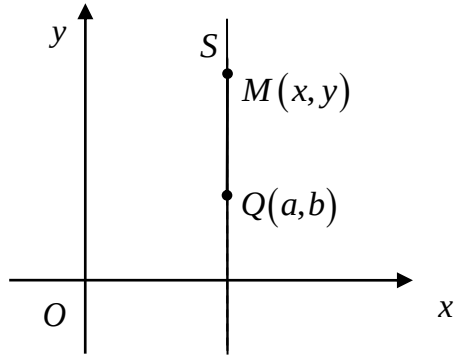
$$x^2 + 2px + q = 0 \quad (\text{B.9})$$

olarak tanımlanabilir. Ayrıca Q merkezli r yarıçaplı S çemberi; Q dan Öklid uzaklığı r olan iki özel doğrudan oluşur (Şekil Ek B.4) [16].



Şekil Ek B. 4 Galile geometrisinde çember (circle)

Eğer $r = 0$ ise bu durumda bu iki özel doğru çakışır (Şekil Ek B.5) [16].



Şekil Ek B. 5 Galile geometrisinde sıfır yarıçaplı çember

Not B.4

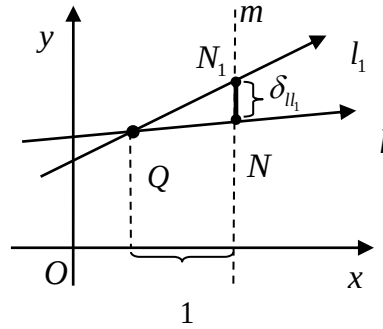
S çemberi, bir yarıçap tanımlarken (yarıçap, iki eş özel doğru arasındaki Öklid uzaklığın yarısına eşit) Q noktasından geçen özel doğrunun noktaları sayısınca (sonsuz sayıda) merkeze sahiptir [16].

Tanım B.18

l ve l_1 arasındaki açıyı belirlemek için Q kesişim noktasının 1 birim sağına m özel doğrusunu çizelim. Eğer m özel doğrusu l ve l_1 doğrularını sırasıyla N ve N_1 noktalarında kesiyor ise

$$\delta_{ll_1} = NN_1 = \delta_{NN_1}$$

bulunur (Şekil Ek B.6) [16].



Şekil Ek B. 6 Galile geometrisinde açı

Eğer l ve l_1 in denklemleri, sırası ile $y = kx + s$ ve $y = k_1x + s_1$ ve $Q = (x_0, y_0)$ ise m özel doğrusunun denklemi $x = x_0 + 1$ dir. Böylece

$$N = (x_0 + 1, k(x_0 + 1) + s)$$

ve

$$N_1 = (x_0 + 1, k_1(x_0 + 1) + s_1)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \delta_{ll_1} &= \delta_{NN_1} \\ &= [k_1(x_0 + 1) + s_1] - [k(x_0 + 1) + s] \\ &= [k_1x_0 + s_1 - kx_0 + s] - [k_1 - k] \end{aligned}$$

ve $Q(x_0, y_0)$ noktası l ve l_1 üzerinde olduğundan

$$\delta_{ll_1} = k_1 - k$$

bulunur [16].

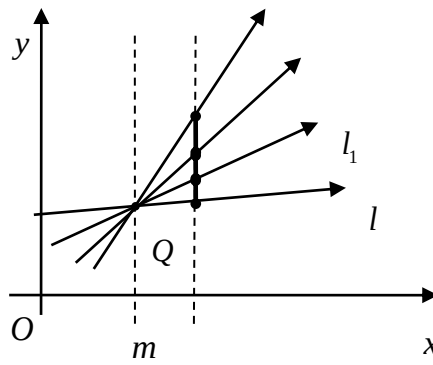
Tanım B.19

Bir $Q=(x_0, y_0)$ noktasında kesişen $y=kx+s$ ve $y=k_1x+s_1$ doğruları arasındaki açı

$$\delta_{l_1} = k_1 - k \quad (\text{B.10})$$

formülü ile tanımlanır [16].

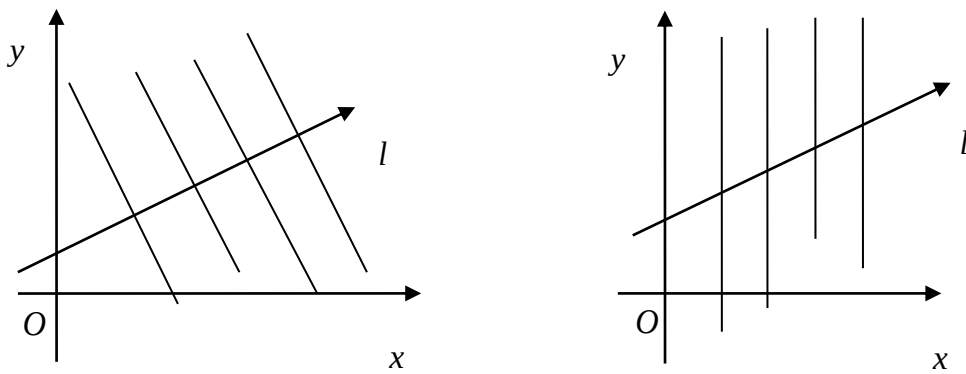
Eğer l_1 doğrusu Q etrafında Q noktasından geçen m özel doğrusuna yaklaşacak şekilde saatin tersi yönde döndürülürse, δ_{l_1} açısı sonsuz büyür ve $\delta_{l_1} = \infty$ olur (Şekil B.7) [16].



Şekil Ek B. 7 Galile düzleminde sonsuz açı

Tanım B.20 (İki Doğru Arasındaki Dik Açı)

Galile geometrisinde özel doğrular ile sıradan doğrular arasındaki açığa *dik açı* denir ve özel doğrulara *sıradan doğruların dikleri* denir (Şekil Ek B.8).



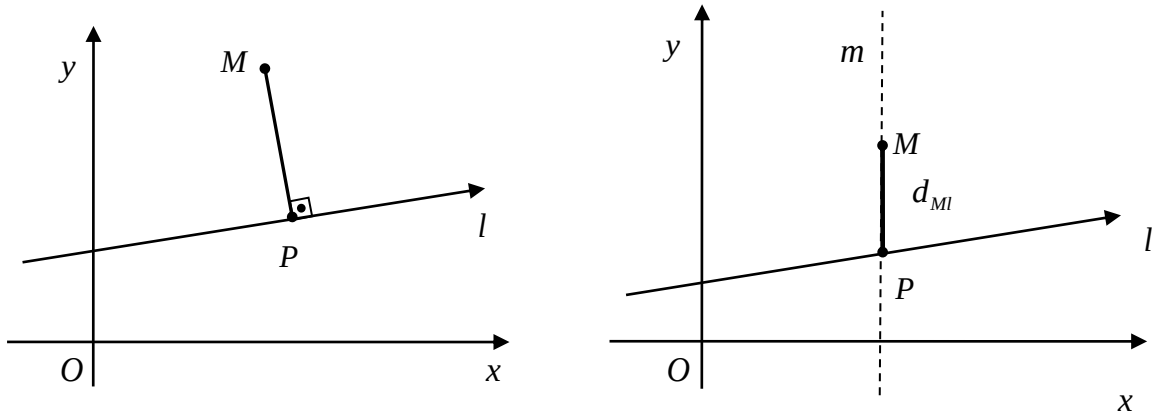
Şekil Ek B. 8 Öklid (sol) ve Galile (sağ) geometrilerinde diklik

Tanım B.21 (Paralel Doğrular Arasındaki Açık)

Eğer l ve l_1 doğruları birbirine paralel ise bu durumda (B.10) denklemi yani l ve l_1 doğruları arasındaki açı sıfır bulunur [16].

Tanım B.22 (Bir Noktadan Bir Doğruya Uzaklık)

Bir M noktasından bir l doğrusuna uzaklık, M den geçen özel doğru ile hesaplanır (Şekil Ek B.9) [16].



Şekil Ek B. 9 Öklid (sol) ve Galile (sağ) düzleminde en kısa uzaklık

Gerçekten, Öklid geometride bir $M(x_0, y_0)$ noktasından bir l doğrusuna uzaklık, M den l üzerindeki M ye en yakın bir P noktasına uzaklık olarak tanımlanır. Galile geometrisinde de bu tanımlı kullanırsak M ye en yakın l üzerindeki P noktası M den sıfır uzaklıktadır, $d_{MP} = 0$ dir. Bu nedenle M den l ye uzaklığı M den P ye özel uzaklık ile ölçmeye götürür:

$$d_{Ml} = \delta_{MP}.$$

Eğer l nin denklemi $y = kx + s$ ise bu durumda P nin koordinatları $(x_0, kx_0 + s)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} -MP &= -\delta_{MP} = y_0 - (kx_0 + s) \\ -d_{Ml} &= y_0 - kx_0 - s \end{aligned} \tag{B.11}$$

elde edilir [16].

Tanım B.23 (Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık)

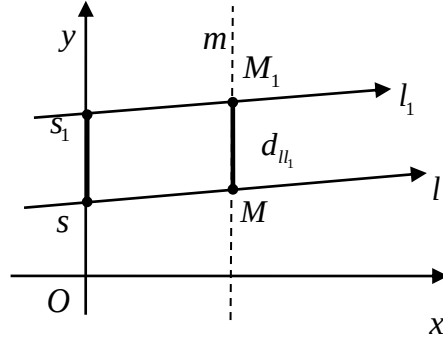
Eğer l ve l_1 doğrusu paralel ise bu durumda l ve l_1 doğrusu arasındaki d_{ll_1} uzaklığı, bir özel doğruya ait l ve l_1 doğruları arasındaki yönlendirilmiş MM_1 doğru parçasının uzunluğu olarak tanımlayabiliriz. Bu tanım gerçekten anlamlıdır, çünkü (B.1) hareketi özel doğruları özel doğrulara götürür [16].

Tanım B.24

$y = kx + s$ ve $y = kx + s_1$ denklemleri l ve l_1 doğruları arasındaki uzaklık

$$d_{ll_1} = s_1 - s \quad (\text{B.12})$$

ile tanımlanır (Şekil Ek B.10).



Şekil Ek B. 10 Galile geometrisinde paralel iki doğru arasındaki uzaklık

B-2 Galile Düzleminde Trigonometri

S , O merkezli birim çember ve $M = (x, y)$, S üzerinde bir nokta olsun. l , OM doğrusunu ve α , δ_{Ol} açısını gösterebilirsin (Şekil Ek B.11).

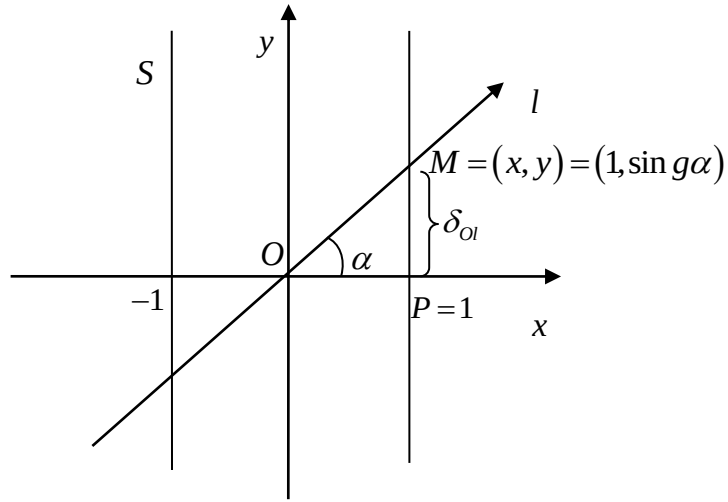
Böylece

$$\cos g\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{B.13})$$

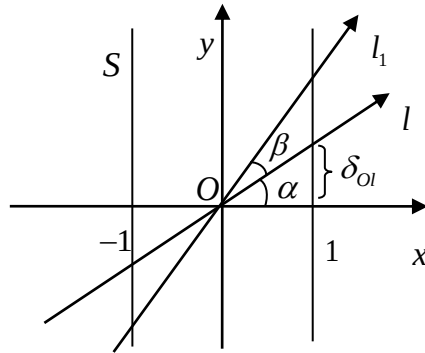
ve

$$\sin g\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{\delta_{Ol}}{1} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

bulunur. l doğrusu ile aralarındaki açı β olacak şekilde l_1 doğrusu verilsin. Bu durumda Şekil Ek B. 12 den görüldüğü gibi



Şekil Ek B. 11 Galile düzleminde birim çember



Şekil Ek B. 12 Galile geometrisinde sinüs toplam formülü

$$\cos g(\alpha + \beta) = 1$$

$$\begin{aligned} \sin g(\alpha + \beta) &= \alpha + \beta \\ &= \alpha \cdot 1 + 1 \cdot \beta \end{aligned}$$

olduğundan

$$\cos g(\alpha + \beta) = \cos g\alpha \cos g\beta$$

$$\sin g(\alpha + \beta) = \sin g\alpha \cos g\beta + \cos g\alpha \sin g\beta$$

yazılabilir [16].

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nurten (BAYRAK) GÜRSES
Doğum Tarihi ve Yeri : 09.06.1987, Düzce
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : nbayrak@yildiz.edu.tr, nurtenbayrak@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik ABD	Sakarya Üniversitesi/Sakarya	2011
Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi/Ankara	2009
Lise	Fen Bilimleri	Mithatpaşa Şükrü Ayna Y.D.A. Lisesi/ Sakarya	2005

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014-halen	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	Araştırma Görevlisi
2011-2014	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

SCI/SCI-Exp. Kapsamındaki Dergi

1. Ersoy S., **Bayrak N.**, Bobillier Formula for One Parameter Motions in the Complex Plane, J. Mech. and Robotics, Vol. 0, Issue 4, pp. 245011-24, (2012) **(SCI-Exp)**

Uluslararası Hakemli Dergi

1. **(Bayrak) Gürses, N.**, Yüce, S., One Parameter Planar Motion in Affine Cayley-Klein Planes, European Journal of Pure And Applied Mathematics, Vol 7, No:3, 2014, 335-342, (2014).
2. **Bayrak, N.**, Yüce, S., Yüce, M. K. , The Investigation of the Viewpoint of Academic Staff and Graduate Students in Teaching Geometry in Elementary School. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116, 2115-2119, (2014).
3. Ersoy, S., **Bayrak, N.**, Lorentzian Bobillier Formula, Applied Mathematics E-Notes, Issue 13, pp. 25-35, (2013).
4. Bektaş, Ö., **Bayrak Gürses, N.**, Yüce, S. Osculating Spheres of a Semi Real Quaternionic Curve in E_2^4 , European Journal of Pure and Applied Mathematics, 7(1), 86-96, (2013).

Bildiri

Ulusal Bildiri:

1. **Bayrak Gürses N.**, Bektaş Ö., Yüce, S. , Quaternionic Focal Curves in E^4 , XI. Geometri Sempozyumu, (2013).

Uluslararası Bildiri

1. **(Bayrak) Gürses, N.**, Yüce, S. , One Parameter Planar Motions in Affine Cayley-Klein Planes, , 33nd Colloquim on Combinatorics, Germany (2014).
2. **(Bayrak) Gürses, N.**, Akbıyık, M., Yüce, S., Galilean Bobillier Formula for One Parameter Planar Motions, 33nd Colloquim on Combinatorics, Germany (2014).
3. Bektaş, Ö., **Bayrak Gürses, N.**, Yüce, S., Quaternionic Osculating Curves in Semi Euclidean Space E_2^4 , 2nd International Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA), pp. 281-282, (2013).
4. **Bayrak Gürses, N.**, Bektaş, Ö., Akbıyık, M. ,Yüce, S., On the Osculating Spheres of a Dual Quaternionic and Dual Split Quaternionic Curve, 2nd International Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA) , pp. 275-276, (2013).
5. **Bayrak Gürses, N.**, Bektaş Ö., Yüce, S., Semi Real Quaternionic Focal Curves in Semi Euclidean Space E_2^4 , International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, (2013).
6. Bektaş, Ö., **Bayrak Gürses, N.**, Yüce, S., Quaternionic Osculating Curves in Euclidean Space, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, (2013).
7. Bektaş, Ö., **Bayrak Gürses, N.**, Yüce, S., Osculating Spheres of Semi Real Quaternionic Curves in E_2^4 , International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, (2013).
8. **Bayrak, N.**, Yüce, S., Yüce, M. K, An investigation of the Viewpoint of Academic Staff in Teaching Geometry in Elementary School, World Conference on Educational Sciences, Rome, Italy (2013).

9. Ersoy S., **Bayrak N.**, Bobillier Formula for One Parameter Motions in the Complex Plane, 1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, (2012).
10. **Bayrak, N.**, Bektaş, Ö., Yüce, S., Special Smarandache Curves in $E^{1,3}$, International Conference on Applied Analysis and Algebra, (2012).
11. Ersoy, S., **Bayrak, N.**, Lorentzian Bobillier Formula, VI International Meeting on Lorentzian Geometry, Granada, Spain, (2011).

ÖDÜLLERİ

1. YTÜ 2012 Yayın Teşvik Ödülü

TEMSİLCİLİKLER

1. YTÜ Üniversite Araştırma Görevlileri Temsilcisi (2014)
2. YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi Temsilcisi (2011-2014)
3. YTÜ Üniversite Araştırma Görevlileri Temsilcisi Yardımcısı (2011-2013)

KURUL ÜYELİKLERİ

1. YTÜ Araştırma Görevlileri Temsilciler Konseyi Yönetim Kurulu Başkanı (2014)
2. YTÜ Araştırma Görevlileri Temsilciler Konseyi Yönetim Kurulu Başkan Yardımcısı (2011-2013)
3. YTÜ Araştırma Görevlileri Temsilcileri Konseyi Yönetim Kurulu Üyesi (2011-2013)

BİLDİRİSİZ KONFERANSLAR

1. XII. Geometri Sempozyumu, 23-26 Haziran 2014, Bilecik/Türkiye
2. International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA 2011), June 29-July 02, 2011, Turkey

AKADEMİK FAALİYETLER

1. International Conference on Applied Analysis and Algebra, (ICAAA2011), June 29-July 02, 2011, Istanbul/Turkey (Lokal Komite Üyesi)
2. International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA2012), June 20-24, 2012, Istanbul/Turkey (Lokal Komite Üyesi)