İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ PROFESÖRLER KURULUNUN
13.2.1980 tarih 12 sayılı kararı ile tevcih edilen doktora çalışmasıdır.

DOKTORA TEZİ

HALKALAR CİSİMLER ÜZERİNE

DOKTORA HOCASI VE JÜRİ BAŞKANI : PROF. DR. H. HİLMİ HACISALİHOĞLU
ANKARA GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEB. FAK. DEKANI

DOKTORA YÖNETİCİSİ VE JÜRİ ÜYESİ : DOÇENT BEHİÇ ÇAĞAL
İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ, FEN-EDEB. FAK. ÖĞR. ÜYESİ
DEKAN YARDIMCISI

JÜRİ ÜYESİ : DOÇENT EROL BALKANAY
İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ, FEN-EDEB. FAK. ÖĞR. ÜYESİ

İ Ç İ N D E K İ L E R

TEZ PROSEDÜRÜ

TEZİN KONUSU	:	HALKA VE CİSİMLER
TEZ AKADEMİK OTORİTESİ	:	YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
KARAR	:	FAKÜLTE PROFESÖRLER KURULU KARAR TARİHİ : 13.2.1980 KARAR NO : 12
TEZ PROFESÖRÜ	:	PROF.DR HİLMİ HACISALİHOĞLU A.Ü - FEN FAKÜLTESİ CEBİR GEOMETRİ KÜRSÜSÜ BAŞKANI
TEZİN YÖNETİCİSİ	:	DOÇENT BEHİÇ ÇAĞAL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK ÖĞRETİM ÜYESİ
DOKTORA ADAYI	:	SADİ BAYDAR H.Ü.Z.MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ MAT.ÖĞRETİM GÖREVLİSİ
JÜRİ ÜYELERİ	:	- JÜRİ BAŞKANI Prof.Dr. H.HİLMİ HACISALİHOĞLU GAZİ ÜNİVERSİTESİ-FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ DEKANI - JÜRİ ÜYESİ Doç. BEHİÇ ÇAĞAL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ DEKAN YARDIMCISI - JÜRİ ÜYESİ Doç. EROL BALKANAY YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ ÖĞRETİM ÜYESİ

TEZİN ÖZÜ VE YÖNÜ

Bu çalışma, sıralı (n) liler için, halka ve cisim yapılarının genelleştirilmesi ve genişletilmesine ilişkin bir yöntem ile; bundan elde edilen verilerin, bilinen cebirsel yapılarda denenmesini ve uygulamasını içine almaktadır.

Çalışmada, sıralı çiftler için - kompleks sayılar, dual sayılar "s" faktörlü sayılar cümlelerini de içeren daha geniş bir GEN HALKA-CİSİM yapısı ; ve

Kompleks sayının, dual sayının, "s" faktörlü sayının oluşum veya tanım öğeleri : sıra ile i, ε, s arasında toplam $(i+\varepsilon, \varepsilon+s, s+i)$, ve çarpım $(i.\varepsilon; \varepsilon.s; s.i)$ ilişkilerine anlam ve olanak veren kinematik bir yorum yapmak sureti ile, bunlarla bazı cebirsel yapılar elde edilmesi;

Ayrıca bilinen bazı halka ve cisimlerin sınıf haline getirilmesi; bunlar içinde özellikler taşıyan alt sınıflar bulunması yeni sayılabilir.

Ve sıralı (n) liler için tesis edilen GEN HALKA - CİSİM çarpım kuralı verilerinin, matris elemanlara uygulanması halinde halka niteliğinin korunacağı ve bundan elde edilecek sonuçlar üzerinde durulmuştur.

30 ARALIK 1981
ZONGULDAK

L'ESSENTIEL ET LA DIRECTION DE LA THESE

Ce travail contient une maniére a propos de la generalisation et l élargissement des constitutions du corp et de l' anneau pour les termes de rang (n); et qu il contient, en même temps, l'application et l éxpérience des donnés obtenu par cela, sur les constitutions l'algébriques connues.

Dans ce travail; les paires de rang (2), il ya une constitution plus large du GENE - ANNEAU - CORPS qui contient aussi les ensembles des nombres en facteur (s), les nombres complexes, et des nombres duals;

Les éléments de definition ou de naissance des nombres en facteur (s), des nombres complexes, et des nombres duals sont succesivemen :i, , s; addition entre eux: ($i+\xi$;$\xi+s$; $s+i$) et multiplication ($i.\xi$; $\xi.s$; $s . i$), on a obtenu les constitutions algébrigue en commentant kiné matiquement (cinétiquement)

D'autre part, on peut compter nouvellement une maniére de la classification des certains corps et des anneaux, et la decouverte des sous classes qui porte des particularités différentes

Et, On a assuré la liaison avec le sujet : sur la conservatio de la propriété d'anneau et ses résultas, en cas l'application des donnes de régle de multiplication appertenant a la GENE ANNEAU - CORPS constitués pour les termes de rang (n), sux éléments de matrice.

Le 30 decembre 1981

1.BİRİNCİ KISIM

.1-R^n DE GEN HALKA-CİSİMLER
VE R^2 DE HALKA,CİSİMLER

TANIM: 1.1- SIRALI (n) Lİ ELEMANLAR

Boş olmayan $E_1,E_2,\ldots\ldots E_n$ cümlelerinin $X_1 \in E_1, X_2 \in E_2,\ldots\ldots X_n \in E_n$ elemanlarından oluşturulan $(X_1,X_2,\ldots\ldots X_n)$, n elemanlısına, bir sıralı (n) li; $E_1,E_2,\ldots\ldots E_n$ cümlelerinin bütün elemanları kullanılarak elde edilen tüm sıralı (n) lilerin cümlesine de $E_1,E_2,\ldots\ldots E_n$ cümlelerinin karteziyen çarpım cümlesi denir; ve

$(X_1,X_2,\ldots\ldots X_n) \in E_1 x E_2 x \ldots\ldots x E_n$ yazılır; cümlenin elemanları aynı bir E cümlesinden (n) kez alınıyor ise, bu defa

$(X_1,X_2,\ldots\ldots X_n) \in ExEx\ldots\ldots xE = E^n$ ifadesi kullanılır.

Çoğu yerde, belirli ve gerekli amaçlarla, $(X_1,X_2,\ldots\ldots X_n)$ sıralı (n) liye, (n) boyutlu uzay elemanı ve $X_1,X_2,\ldots\ldots X_n$'e, bu elemanın bileşenleri denir.

Cümle, iki E_1,E_2 cümlelerinin $X_1 \in E_1$, $X_2 \in E_2$, X_1,X_2 bileşenlerinden $(X_1,X_2) \in E_1 x E_2$ oluşuyorsa, (X_1,X_2)'ye sıralı çift; veya ikili eleman, yada iki boyutlu eleman, X_1,X_2 terimlerinede ayrı, ayrı iki boyutlu uzay elemanının bileşenleri denecektir.

X_1,X_2 aynı bir E cümlesinden alınıyor ise
$(X_1,X_2) \in ExE = E^2$ olacaktır.

TANIM: 1.2- MATEMATİK GEN MODEL

Tanımındaki bazı değişken unsurlara (parametrelere) yada değişebilir bazı koşullara göre, kendisiyle aynı, yada benzer karekterli, matematik uyumlu, kapsamlı kurallar, yapılır üretilebilen cebirsel yapılara GEN MODEL denecektir.

TANIM: 1.3- GEN HALKA-CİSİM

İçerdiği parametrelerin değerlerine veya yapısındaki değişebilir bazı koşullarına göre, kendisinden bir dizi halka üretilebilen cebirsel yapılara GEN HALKA; cisim üretilebilen cebirsel yapılara GEN CİSİM; hem halka, hem cisim üretilebilen GEN MODELLER'e GEN HALKA-CİSİM denecektir.

TEOREM : 1.3.1

R, reel sayılar cümlesini göstermek üzere, $X_1, X_2, \ldots, X_n \in R$ ve $(X_1, X_2, \ldots, X_n), (Y_1, Y_2, \ldots Y_n) \in R^n$ olan ve elemanlar arası $(\top), (\perp)$ iç işlemleri, b, r+s'in (n) ile bölümünden elde edilen bölüm sayısını ve (k) kalan sayıyı göstermek üzere:

$$(\top):\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)\top(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2, \ldots, X_n+Y_n) \in R^n$$

$$(\perp):\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)\perp(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = Z_{k+1}$$

$$Z_{k+1} := \sum_{r=1}^{n} \binom{\mp 1}{r=s} X_r \cdot Y_s \quad \left|\ \begin{array}{l} r+s = b.n+k \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{array}\right.$$

bağıntıları ile tanımlanan sıralı (n)'liler için $(R^n, \top, \perp)$ üçlüsü DEĞİŞİMLİ, BİRİMLİ BİR GEN HALKA-CİSİM'dir. Verilen cebirsel yapı, (n) nin değişen değerlerine, r=s halindeki terimlerin değiştirilebilen +,- işaretlerinin durumuna göre bir dizi halka ve cisim de oluşturur.

Teorem için, n=3, n=2 değerleri halinde birer örnek verilmek istenir ise:

n=3: k=0, $Z_1 = X_1Y_2 + X_2Y_1 \mp X_3Y_3$, k=1, $Z_2 = X_1Y_3 \mp X_2Y_2 + X_3Y_1$

k=2, $Z_3 = \mp X_1Y_1 + X_2Y_3 + X_3Y_2$;

n=2: k=0 $Z_1 = \mp X_1Y_1 \mp X_2Y_2$; $Z_2 = X_1Y_2 + X_2Y_1$ olur. (k = 1)

İsbat:

R, reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (+) toplama işleminin özellikleri nedeni ile $(R^n, \top)$ ikilisinin bir Abel gurubu olduğu açıktır.

(T) işlemi (î) değişimlidir; (îî) birleşimlidir; (îîî) etkisiz (birim) elemanı ($\epsilon=0,0,\dots,0$) vardır; (îV) $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ elemanının $(-X_1,-X_2,\dots,-X_n)$ ters elemanı mevcuttur.

$(R^n,\perp)$ ikilisi, birleşimli, dağılımlı, birim elemanlı bir guruptur:

($\perp$) işlemi birleşimlidir.

$[(X_1,X_2,\dots,X_n)\perp(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)]\perp(U_1,U_2,\dots,U_n)=(X_1,X_2,\dots,X_n)\perp$ $[(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)\perp(U_1,U_2,\dots,U_n)]$ olduğu gerçeklenecektir.

$(X_1,X_2,\dots,X_n)\perp(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)=(V_1,V_2,\dots,V_n)$ olsun. $(\overset{\mp 1}{r=s})$ alternatifi dikkate alınmayarak, $Z_{k+1}=\sum_{r=1}^{n} X_r \cdot Y_s \;\Big|\; \begin{matrix} r+s=b.n+k \\ k=0,1,\dots,n-1\end{matrix}$ tanımı yerine

$$\begin{pmatrix} Y_{n-1}, Y_{n-2},\dots Y_1 Y_n \\ Y_n \;.\; Y_{n-1}\dots Y_2 Y_1 \\ Y_1 \quad Y_n \dots\dots Y_3 Y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n-2}\; Y_{n-3}\dots Y_n Y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n-1} X_{n-2}\dots X_1 X_n \\ X_n \quad X_{n-1}\dots X_2 X_1 \\ X_1 \quad X_n \dots\dots X_3 X_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-2} X_{n-3}\dots X_n X_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

ikame edilebildiği gözönüne alındığında

$$(1)\quad (V_1,V_2,\dots V_n)\perp(U_1,U_2,\dots,U_n)=\begin{pmatrix} U_{n-1} U_{n-2}\dots U_1 U_n \\ U_n \quad U_{n-1}\dots U_2 U_1 \\ U_1 \quad U_n \dots U_3 U_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{n-2} U_{n-3}\dots U_n U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} X_{n-2}\dots X_1 X_n \\ X_n \quad X_{n-1}\dots X_2 X_1 \\ X_1 \quad X_n \dots X_3 X_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-2} X_{n-3}\dots X_n X_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

ve $(Y_1,Y_2,\dots Y_n)\perp(U_1,U_2,\dots U_n)=(W_1,W_2,\dots,W_n)$ denir ise:

$$(2)\quad (X_1,X_2,\dots X_n)\perp(W_1,W_2,\dots W_n)=\begin{pmatrix} X_{n-1} X_{n-2}\dots X_1 X_n \\ X_n \quad X_{n-1}\dots X_2 X_1 \\ X_1 \quad X_n \dots X_3 X_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-2} X_{n-3}\dots X_n X_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} U_{n-2}\dots U_1 U_n \\ U_n \quad U_{n-1}\dots U_2 U_1 \\ U_1 \quad U_n \dots U_3 U_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{n-2} U_{n-3}\dots U_n U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

(1) ve (2) deki matris çarpımlarının yapıları itibarı ile değişimli oldukları dikkate alındığında ($\perp$) işleminin birleşimliliği isbatlanmış olur. (Vî) ($\perp$) işleminin etkisiz (birim) elemanı $=(0,0,\dots 1,0)$ dır.

(Vîî) ($\perp$) işleminde, uygun elemanların ters elemanları vardır.

$(X_1,X_2,\ldots,X_n)\perp(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)=(0,0,\ldots,1,0)$ veya eşdeğeri

$$\begin{pmatrix} Y_{n-1}Y_{n-2}\cdots Y_1Y_n \\ Y_n\;\; Y_{n-1}\cdots Y_2Y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{n-2}Y_{n-3}\cdots Y_nY_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ifadesi (n) değişkenli lineer bir denklem sistemi olduğundan katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması halinde $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ nin ters elemanı mevcuttur.

(VIII) ($\perp$) işlemi, (T) üzerine dağılımlıdır.

$$[(X_1,X_2,\ldots,X_n)T(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)]\perp(U_1,U_2,\ldots,U_n)=$$

$$[(X_1,X_2,\ldots,X_n)\perp(U_1,U_2,\ldots,U_n)]\,T\,[(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)\perp(U_1,U_2,\ldots,U_n)]$$

olmalıdır.

$$(X_1+Y_1,X_2+Y_2,\ldots,X_n+Y_n)\perp(U_1,U_2,\ldots,U_n)=(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)=Z_{k+1}$$

$$Z_{k+1}=\sum_{r=1}^{n}\binom{\mp 1}{r=s}(X_r+Y_r)\cdot U_s=\sum_{r=1}^{n}\binom{\mp 1}{r=s}X_r\cdot U_s+\sum_{r=1}^{n}\binom{\mp 1}{r+s}Y_r\cdot U_s\;\Bigg|\;\begin{matrix} r+s=b\cdot n+k \\ k=0,1,\ldots,n-1 \end{matrix}$$

$$Z_{k+1}=[(X_1,X_2,\ldots,X_n)T(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)]\perp(U_1,U_2,\ldots,U_n)=$$

$$[(X_1,X_2,\ldots,X_n)\perp(U_1,U_2,\ldots,U_n)]\,T\,[(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)\perp(U_1,U_2,\ldots,U_n)]$$ ispatlanmış olur. GEN HALKA-CİSİM MODELİ için ($\perp$) işlemi değişimlidir.

TANIM: 1.4- GEN ÇARPIM KURALLARI DİZİSİ

k=0 için $(X_1,X_2,\ldots,X_n)\perp(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ işlemi (g_0) ile

k=1 için $(X_1,X_2,\ldots,X_n)\perp(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ işlemi (g_1) ile

....

k=n-1 " $(X_1,X_2,\ldots,X_n)\perp(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ işlemi (g_{n-1}) ile gösterilecek ve $g_0,g_1,g_2,\ldots,g_{n-1}$ dizisine GEN ÇARPIM KURALLARI DİZİSİ denecektir; bu dizi bir tür matris halkaları sınıfı oluşturmakta kullanılacaktır. (g_1) işlemini bazı yerde kolaylığı nedeni ile ($\circ$) ile göstereceğiz. Matrisler için bilinen klasik çarpım kuralı bu dizi içinde bulunmamaktadır.

2. İKİNCİ KISIM

.2- R^2 DE ÖZEL HALKA VE CİSİMLER

TANIM: 2.5-($\mathbb{C}$) KOMPLEKS HALKA

(Teorem 1.3.1) de n=2 için $(X_1,X_2),(Y_1,Y_2) \in R^2$ ve T,⊥lıç işlemleri:

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2) \in R^2$

(⊥) $(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(Z_1,Z_2)=Z_{k+1}=\sum_{r=1}^{2}(\overset{+1}{\underset{r=s}{-}})X_r.Y_s$ $\left|\begin{matrix} r+s=2.b+k \\ k+0,1 \text{ olarak}\end{matrix}\right.$

ve daha açık bir şekilde

$Z_1=X_1Y_1-X_2Y_2$; $Z_2=X_1Y_2+X_2Y_1$ ile tanımlanan R^2 yada $\mathbb{C}$ ile gösterilen cümleye KOMPLEKS HALKA; $\mathcal{E}=(1,0)$ elemanına $(R^2,T,\perp)$ üçlüsünün (⊥) işlemine göre etkisiz (birim) elemanı $i=(0,1)$;$(0,1).(0,1)=i\perp i$ $=i^2=-(1,0)=-\mathcal{E}$ olan (i) elemanına kompleks birim, yada ilerde açıklanacağı üzere halkanın kinematik (transformasyon) faktörü denecektir.

TEOREM: 2.5.2

$\mathbb{C}$ kompleks halkası bir cisimdir.

İsbat:

Tanım: 2.5'e göre (R^2,T) bir Abel gurubudur; ve etkisiz elemanı $=(0,0)$dır. $(R^2,\perp)$ nin birleşimli, (⊥) işleminin (T) üzerine dağılımlı ve $\mathcal{E}=(1,0)$ birim elemanlı; o nedenle her elemanın tersinin bulunduğu, sıfır böleni elemanları ihtiva etmeyen bir gurup olacağı (Tanım 2.5) den kolayca anlaşılır.

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(1,0)$ da (X_1,X_2)'nin (Y_1,Y_2) ters elemanı

$(Y_1,Y_2)=\left[X_1/(X_1^2+X_2^2)\ ,\ -X_2/(X_1^2+X_2^2)\right]$dir.

TANIM: 2.6- C KOMPLEKS SAYILAR CÜMLESİ

$X_1,X_2 \in R$, ve i; $i.i=i^2=-1$ özge bir çarpan olarak R nin (+),(.) işlemlerinin komunduğu, $(X_1+X_2.i)$ yapısındaki sayılara kompleks sayı; ve bunların cümlesine de (C) kompleks sayılar cümlesi denir.

X_1+X_2i ,$Y_1+Y_2i \in C$ ise bu elemanlar arası (+).(.) işlemi:

$(X_1+X_2 i)+(Y_1+Y_2 i)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)i$

$(X_1+X_2\ ).(Y_1+Y_2.)=(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)i$ olur.

TEOREM: 2.6.3

$₵$ kompleks cismi ile, C kompleks sayılar cümlesi (T),(⊥); ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat

$(X_1,X_2)\in ₵\ ,X_1+X_2 i\in C;\ (X_1,X_2)\rightarrow(X_1+X_2 i)$ ve

$(Y_1,Y_2)\in ₵\ ,Y_1+Y_2 i\in C;\ (Y_1,Y_2)\rightarrow(Y_1+Y_2 i)$ olsun:(T),(+) işlemleri için $(T):(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)$

$(+):(X_1+X_2 i)+(Y_1+Y_2 i)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)i\in C$

$(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\rightarrow(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)i$ ve (⊥),(.) işlemleri için

$(\perp):(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X_1Y_1-X_2Y_2,X_1Y_2+X_2Y_1)\in ₵$

$(.):(X_1+X_2 i).(Y_1+Y_2 i)=(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)i\in C$

$(X_1Y_1-X_2Y_2,X_1Y_2+X_2Y_1)\rightarrow(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)i\ \in\ \ C$ olur.

TANIM: 2.7- ,(S) FAKTÖRLÜ HALKA

(Teorem: 1.3.1) de n=2 için $(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\in R^2$ ve T,⊥ iç işlemleri

$(T):(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\in R^2$

$(\perp):(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(Z_1,Z_2)=Z_{k+1}=\sum^2_{r=1}(\overset{+}{-}1_{r=s})X_r.Y_s$ | $r+s=2b+k$, $k=0,1$ olarak

ve daha açık bir şekilde

$Z_1=X_1Y_1+X_2Y_2,Z_2=X_1Y_2+X_2Y_1$ ile tanımlanan R^2, yada $\$$ ile gösterilen cümleye (s) FAKTÖRLÜ HALKA; $\varepsilon=(1,0)$ elemanına halkanın etkisiz (birim) elemanı; $s=(0,1);(0,1)\perp(0,1)=s.s=s^2=(1,0)=\varepsilon$ olan (s) elemanına faktör birim, yada ilerde açıklanacağı üzere halkanın kinematik (transformasyon) faktörü denecektir.

Halkanın sıfır böleni olan elemanları vardır:

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(1,0)$ da (X_1,X_2) nin (Y_1,Y_2) ters elemanı

$(Y_1,Y_2)=(\ X_1/(X_1^2-X_2^2),\ X_2/(X_1^2-X_2^2));\ X_1=X_2$ olan (X_1,X_2) elemanlarının ters elemanları mevcut olmayacaktır.

TANIM: 2.8–S,(s) FAKTÖRLÜ SAYILAR CÜMLESİ

$X_1, X_2 \in R$ ve s, $s.s=s^2=1$, bir çarpan olarak R nin (+),(.) işlemlerinin korunduğu (X_1+X_2s) yapısındaki sayılara, (s) faktörlü sayılar ve bunların cümlesine s faktörlü sayılar cümlesi denecek S, ile gösterilecektir. $X_1+X_2.s \in S$, $Y_1+Y_2s \in S$ ise (+),(.) işlemleri

$(+):(X_1+X_2s)+(Y_1+Y_2s)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)s$ ve

$(.):(X_1+X_2s).(Y_1+Y_2s)=(X_1Y_1+X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)s$ olacaktır.

TEOREM: 2.8.4

$\$$,(s) faktörlü halka ile S, (s) faktörlü sayılar cümlesi T, $\perp$ ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur. ($\$ \rightarrow S$)

İsbat: (Bak: TEOREM 2.6.3)

TANIM: 2.9– DUAL SAYILAR HALKASI

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2) \in R^2$ olan ve (T),($\perp$) iç işlemleri

$(T):(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2) \in R^2$

$(\perp)$ $(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X_1Y_1,X_1Y_2+X_2Y_1) \in R^2$ ile tanımlanan R^2 cümlesi birimli değişimli bir halkadır; buna dual halka denir.

(R^2,T) ikilisinin bir Abel gurubu ve $(R^2,\perp)$ ikilisinin ($\perp$) işlemine göre bir gurub olduğu kolayca gösterilebilir. (T) nin etkisiz (birim-sıfır) elemanı $e=(0,0)$;($\perp$) nin etkisiz (birim) elemanı $i=(1,0)$ dır.

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X_1Y_1,X_1Y_2+X_2Y_1)=(1,0)$ da ters eleman

$(Y_1,Y_2)=(1/X_1,-X_2/X_1^2)$dir; $(0,1)=\varepsilon$,(0,1) $(0,1)=\varepsilon.\varepsilon=\varepsilon^2=(0,0)$ olan (ε) elemanına dual birim veya dual halkanın ilerde açıklanacağı üzere halkanın kinematik (transformasyon) faktörü denecektir.

TANIM: 2.10–(D) DUAL SAYILAR CÜMLESİ

$X_1,X_2 \in R$ ve ε, $\varepsilon.\varepsilon=\varepsilon^2=0$ bir çarpan olarak (+),(.) işlemlerinin korunduğu $(X_1+X_2\varepsilon)$ yapısındaki sayılara, dual sayı ve bunların cümlesine de (D) dual sayılar cümlesi denecektir.

$X_1+X_2\varepsilon$, $Y_1+Y_2\varepsilon \in D$ ise, bu elemanlar arası (+),(.) işlemleri

$(+):(X_1+X_2\varepsilon)+(Y_1+Y_2\varepsilon)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)\varepsilon \in D$

$(\cdot):(X_1+X_2\varepsilon)\cdot(Y_1+Y_2\varepsilon)= X_1Y_1+(X_1Y_2+X_2Y_1)\varepsilon \in D$ dir.

TEOREM: 2.10.5

$\mathbb{D}$, dual sayılar halkası ile D dual sayılar cümlesi, T, $\perp$ ve $(+)$,$(\cdot)$ işlemlerine göre izomorftur. ($\mathbb{D}\to D$)

İsbat: (Bak teorem 2.6.3)

TANIM: 2.11- HELİSEL CÜMLE-HELİSEL CİSİM

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\in R^2$ ve $(T),(\perp)$ iç işlemleri

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\in R^2$

$(\ )$ $(X_1,X_2)\ (Y_1,Y_2)=(X_1Y_1-X_2Y_2,\ X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)$ ile tanımlanan $(R^2,T,\perp)$ üçlüsüne $\mathbb{H}$, HELİSEL HALKA VEYA HELİSEL CİSİM denecektir.

TEOREM: 2.11.6

$\mathbb{H}$'yada (TANIM 2.11) deki $(R^2,T,\perp)$ üçlüsü bir cisimdir.

İsbat:

Reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen $(+)$,$(\cdot)$ işlemlerinin özelliği nedeni ile, (R^2,T)nin bir Abel gurubu, $(R^2,\ )$ ikilisininde değişimli birimli bir gurup olacağı açıktır. (T) işleminin etkisiz (sıfır) elemanı $e=(0,0)$;$(\perp)$ işleminin etkisiz (birim) elemanı $\varepsilon=(1,0)$ olup; $(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X_1Y_1-X_2Y_2,X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)=(1,0)$ da (X_1,X_2) nin (Y_1,Y_2) ters elemanı

$(Y_1,Y_2)=((X_1+X_2)/(X_1^2+X_2^2+X_1X_2),-X_2/(X_1^2+X_2^2+X_1X_2))$ dir; $(R^2,\perp)$ sıfır elemanını içermez; zira

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X_1Y_1-X_2Y_2,X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)=(0,0)$da

$X_1Y_1-X_2Y_2=0$, $X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2=0$ bağıntılarını sağlayan $(Y_1,Y_2)=(0,0)$ veya $(X_1,X_2)=(0,0)$ dan başka bir eleman bulunamaz.

$(0,1)=h;(0,1)\perp(0,1)=h\cdot h=h^2=(-1,1)=hT(-\varepsilon)$ olan h elemanına helisel cismin faktörü veya helisel cismin kinematik (transformasyon) faktörü diyeceğiz.

TANIM: 2.12- H, HELÎSEL SAYILAR CÜMLESİ

$X_1, X_2 \in R$ ve $h \notin R$, $h^2 = h - 1$ bir çarpan olarak R nin (+),(.) işlemlerinin korunduğu $(X_1 + X_2 h)$ yapısındaki sayılara helisel sayılar ve bunların cümlesine de H, helisel sayılar cümlesi denecektir.

$X_1 + X_2 h, Y_1 + Y_2 h \in H$, ise elemanlar arası (+),(.) işlemleri:

$(+)(X_1+X_2h)+(Y_1+Y_2h)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)h \in H$

$(.)(X_1+X_2h).(Y_1+Y_2h)=(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)\ h \in H$ olur.

TEOREM: 2.12.7

$\mathbb{H}$, HELÎSEL cismi ile, H, helisel sayılar cümlesi (T),(⊥) ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur. ($\mathbb{H} \to H$)

İsbat: (Bak: TEOREM: 2.6.3)

TANIM: 2.13- $\mathbb{H}'$, HOMOTETİK CÜMLE, HOMOTETİK HALKA

$(X_1,X_2), Y_1,Y_2) \in R^2$ olan ve (T), (⊥) işlemleri

$(T)\ (X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in R^2$

$(\ )\ (X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X_1Y_1+X_2Y_2, X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2) \in R^2$ ile tanımlanan $(R^2, T, \perp)$ üçlüsüne $\mathbb{H}'$ HOMOTETİK HALKA denecektir.

TEOREM: 2.13.8

$\mathbb{H}'$ homotetik cümlesi bir halkadır.

İsbat:

Reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (+),(.) işlemlerinin özellikleri nedeni ile, (R^2,T) ikilisinin Abel gurubu; $(R^2,\perp)$ ikilisininde değişimli birimli bir gurup olacağı kolayca doğrulanabilir..

(T) işleminin etkisiz (sıfır) elemanı $e=(0,0)$, ⊥ işleminin etkisiz (birim) elemanı $\xi=(1,0)$ olup

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X_1Y_1+X_2Y_2, X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)=(1,0)$ da (X_1,X_2) nin, (Y_1,Y_2) ters elemanı $(Y_1,Y_2)=((X_1-X_2)/(X_1^2-X_2^2-X_1X_2), -X_2/(X_1^2-X_2^2-X_1X_2))$ dir $X_1^2-X_2^2-X_1X_2=0$'ı sağlayan (X_1,X_2) ikililerinin ters elemanı olmayacaktır.

TANIM: 2.14–H', HOMOTETİK SAYI CÜMLESİ

$X_1, X_2 \in R$ ve $h', h'^2 = 1-h'$ bir çarpan olarak (R) nin (+),(.) işlemlerinin korunduğu, (X_1+X_2h') yapısındaki sayılara, homotetik sayı ve bunların cümlesine H' homotetik cümlesi denecektir.

$X_1+X_2h', Y_1+Y_2h' \in H'$ ise bu elemanlar arası (+),(.) işlemleri

$(+)(X_1+X_2h')+(Y_1+Y_2h') = (X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)h' \in H'$

$(.)(X_1+X_2h').(Y_1+Y_2h') = (X_1Y_1+X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)h' \in H'$ olur.

TEOREM: 2.14.9

$\mathcal{H}'$ homotetik halka ile H' homotetik sayılar cümlesi (T),(⊥) ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat: (Bak: TEOREM: 2.6.3)

TANIM: 2.15– R^2 DE $\mathcal{G}(a,b)$ GEN HALKA–CİSİM SINIFI VE

(i) $\mathcal{G}(a,b)$ GEN SAYILAR CÜMLELERİ SINIFI

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2) \in R^2$ ve $a^2+b^2 \neq 0$, $a,b \in R$ önceden seçilmiş parametreler olarak, (T),(⊥) iç işlemleri

$(T):(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in R^2$

$(\perp):(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2) = ((a\mp b)X_1Y_1-bX_2Y_2, (a\mp b)(X_1Y_2+X_2Y_1)) \in R^2$ ile tanımlanan $(R^2,T,\perp)$ üçlüsüne yada $\mathcal{G}(a,b)$ ile gösterilecek halkalar sınıfına R^2 DE GEN HALKA–CİSİM SINIFI denecektir.

TEOREM: 2.15.10

$\mathcal{G}(a,b)$ GEN CÜMLELER sınıfı a,b $(a^2+b^2 \neq 0)$ reel parametreleri ne olursa olsun bir halka; ve a,b nin koşullu değerlerine göre bir cisimdir.

İsbat:

(T) birinci işlem için halka aksiyomları, değişimlilik, birleşimlilik, nitelikleri, etkisiz (sıfır) eleman $e = (0,0)$; ve ters eleman varlığı; (⊥) ikinci işlem için halka aksiyomları, birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık özellikleri etkisiz (birim) elemanın

$\mathcal{E}=(1/(a\mp b),0);(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(1/(a\mp b),0)$ da, (X_1,X_2) nin $(Y_1,Y_2)=\left[X_1/(a\mp b)^2X_1^2+b(a\mp b)X_2^2,-X_2^2,-X_2/(a\mp b)^2X_1^2+b(a+b)X_2^2\right]$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$\mathcal{G}=(0,1/(a\mp b))$, $\mathcal{G}\cdot\mathcal{G}=\mathcal{G}^2=(-b/(a\mp b)^2,0)$ olan $(\mathcal{G})$ elemanına R^2 DE HALKA-CİSİM SINIFININ GEN BİRİMİ adı verilecektir.

$b(a\mp b)>0$ olması halinde sınıf, cisimler sınıfıdır.

(İİ) G_1, GEN SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1,X_2\in R$ ve $a,b\in R$, $a^2+b^2\neq 0$ önceden seçilmiş parametreler ve $g, g\cdot g=g^2=-b/(a\mp b)$ bir çarpan olarak R nin (+),(.) işlemlerinin korunduğu, $G_1=(a\mp b)(X_1+X_2g)$ yapısında sayılara GEN SAYI ve bunların cümlesine de (G_1) GEN SAYI CÜMLELERİ SINIFI denecektir.

$(a\mp b)(X_1+X_2g),(a\mp b)(Y_1+Y_2g)\in G_1$ ise, (+),(.) işlemleri

(+) $(a\mp b)(X_1+X_2g)+(a\mp b)(Y_1+Y_2g)=(a+b)\left[(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)g\right]$

(.) $\left[(a\mp b)(X_1+X_2g)\right]\cdot\left[(a\mp b)(Y_1+Y_2g)\right]=$

$(a\mp b)\left[(a\mp b)X_1Y_1-bX_2Y_2+(a\mp b)(X_1Y_2+X_2Y_1)g\right]$ olacaktır.

TEOREM: 2.15.11

$\mathcal{G}_1(a,b)$ gen halka cisim sınıfı ile $G_1(a,b)$ gen sayı cümleleri sınıfı $T,\perp$ ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur. $\mathcal{G}_1(a,b)\rightarrow G_1(a,b)$

İsbat: (Bak TEOREM: 2.6.3)

TANIM: 2.16- R^2 DE ÖZEL GEN-HALKA CİSİM VE ÖZEL GEN SAYI CÜMLELERİ

(İ) KOMPLEKS CİSİM:

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\left[(a\mp b)X_1Y_1-bX_2Y_2,\ (a\mp b)(X_1Y_2+X_2Y_1)\right]$ ikinci işleminin $a=0$, $b=1$ olarak tanımlanan $\mathcal{G}_1(0,1)$ halkasına $(a(a\mp b)>0)$ kompleks cisim;

(İİ) KOMPLEKS SAYI CÜMLESİ:

$(X_1,X_2)\rightarrow(a\mp b)(X_1+X_2g)$ nin $a=0$, $b=1$ için tanımladığı $g^2=-b/(a\mp b)$; $g^2=-1$, $g=i$; $G_1(0,1)$ cümlesine kompleks sayı cümlesi

(İİİ) DUAL SAYILAR HALKASI

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\left[(a\mp b)X_1Y_1-bX_2Y_2,(a\mp b)(X_1Y_2+X_2Y_1)\right]$ ikinci işleminin $a=1$, $b=0$ koşulu için belirlediği $\mathcal{G}_1(1,0)$ halkasına dual sayılar;

(İV) DUAL SAYILAR CÜMLESİ

$(X_1,X_2) \rightarrow (a\mp b)(X_1+X_2 g)$nin $a=1$, $b=0$ için tanımladığı $g^2=-b/(a\mp b)$, $g^2=0$, $g=\delta$; $\mathcal{G}(1,0)$ cümlesine dual sayılar cümlesi

(V) (S) FAKTÖRLÜ HALKA

R^2 de $\mathcal{G}(a,b)$ GEN HALKA CİSİM SINIFI (İ) ikinci işleminin $a=0, b=-1$ için tanımladığı $\mathcal{G}(0,-1)$ halkasına (s) faktörlü halka;

(Vİ) (S) FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLESİ

$(X_1,X_2) \rightarrow (a-b)(X_1+X_2 g)$ nin $a=0$, $b=-1$ için tanımladığı $g^2=-b/(a-b)$, $g^2=1$, $g=s$; $\mathcal{G}(0,1)$ cümlesine (s) faktörlü sayı cümlesi denir;

3. ÜÇÜNCÜ KISIM

3-(i),(s),(9),(g) KİNEMATİK FAKTÖRLER ETKİNLİKLERİNİN TANIMI

TANIM: 3.17- KİNEMATİK VE HALKA CİSİM KİNEMATİĞİ

Nokta veya nokta sisteminin (zamana bağlı olarak), bazı matematik tanım (ya da kural) veya etkenlerle yer değiştirmelerinin (hareketlerinin) inceleme yöntemlerine KİNEMATİK denir. Kütle ve kuvvet kavramlarına yer vermemesi nedeni ile mekanikten ayrılır. Kinematiği geometrinin mekaniği olarak da tanımlamak mümkündür.

Cebirsel (ya da matematiksel) yapılarla, geometrik kavramlar, tanım veya şekiller arasında bir karşılık (tekabül) kurulabildiğinde, bazı cebirsel işlemlerin, geometride yer değiştirmeler olarak yorumlanabildiği bilinmektedir.

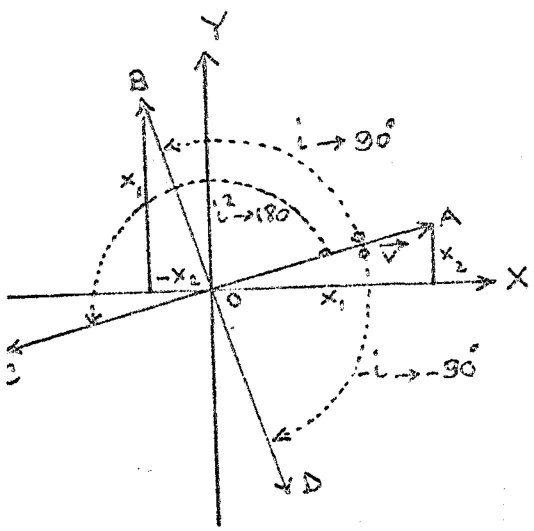
Biz burada yalnızca R^2 de halka, cisim veya matematik yapılar ve bunlar için geçerli iç işlemler ile yönlendirilmiş doğru, nokta, nokta sistemleri (eğriler) ve bunların bazı hareketleri arasında konumuzun amacına yeterli bir karşılık bulunabileceğini yorumlayacağız ve o nedenle buna R^2 de HALKA-CİSİM KİNEMATİĞİ diyeceğiz.

TANIM: 3.18- KİNEMATİK FAKTÖR

Bir halka, cisim elemanı karşılığı geometrik bir nesnenin, halka cisim işlemi sonucuna değişik bir durumu karşılık bulunabiliyorsa, işlem elemanlarından birine kinematik faktör (veya kinematik operatör) geometrik nesnenin hareketine de faktörün etkisi, denecektir.

TANIM: 3.19-(i) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ

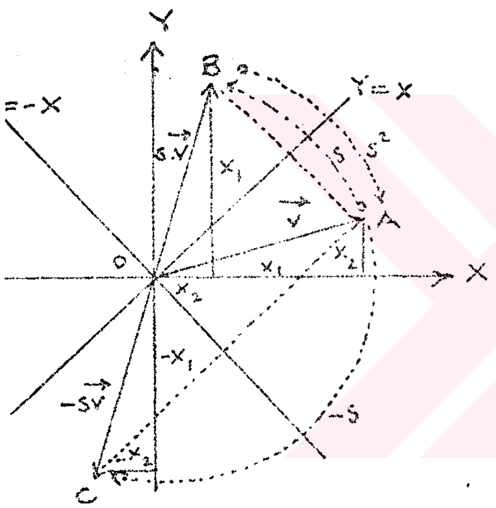
$\vec{v}=X_1+X_2i$, kompleks sayısının, ya da, geometrik gösterimi $\vec{OA}$; $\vec{v}=X_1+X_2i$ vektörünün, (i) nin $i.\vec{v}=i(X_1+X_2i)=-X_2+X_1i$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik gösterimi $i.\vec{v}=-X_2+X_1i=OB$ vektörü nedeni ile (90^o)lik dönme hareketine (i)nin $\vec{v}$ vektörü üzerindeki kinematik etkisi



ve (i) ye de kompleks sayılar cisminin kinematik faktörü denecektir. $i \to 90^\circ$ dönme, $(i)^2 \to 180^\circ$ dönme, $-i \to -90^\circ$ ters yönde dönmeye karşılık olacaktır. (şekil 3.1)

(şekil:3.1)

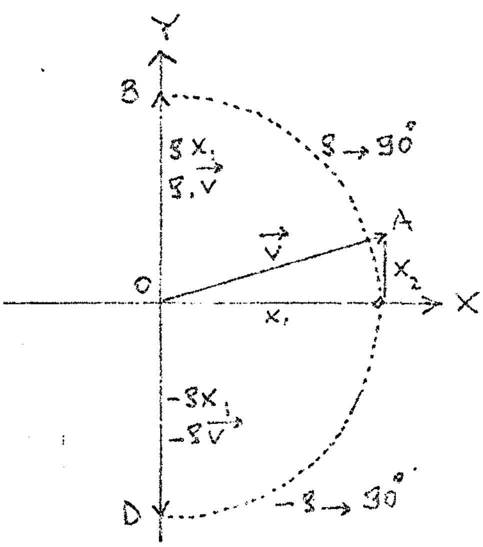
TANIM: 3.19-(s) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ



$\vec{v}=X_1+X_2 s$, (s) faktörlü sayının, ya da geometrik gösterimi $\overrightarrow{OA}=\vec{v}=X_1+X_2 s$ vektörünün (s)nin, $s.\vec{v}=s(X_1+X_2 s)=X_2+X_1 s$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik gösterimi $s.\vec{v}=X_2+X_1 s=\overrightarrow{OB}$ vektörü nedeni ile $Y=X$ açı ortayına göre simetri hareketine, (s) nın $\vec{v}$ vektörü üzerindeki kinematik etkisi ve (s) ye de s faktörlü sayılar halkasının kinematik faktörü denecektir. s, $Y=X$ açı ortayına göre A dan B ye simetri hareketine; $-s$, $Y=-X$ açı ortayına göre $\overline{OA}$ nın simetri hareketine karşılık olur.(şekil:3.2)

(şekil 3.2)

TANIM: 3.20- (ϱ) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ



$\vec{v}=X_1+X_2\varrho$ dual sayısının, ya da geometrik gösterimi $\overrightarrow{OA}=\vec{v}=X_1+X_2\varrho$ vektörünün (ϱ) nun $\varrho.\vec{v}=\varrho(X_1+X_2\varrho)=X_1\varrho$ cebirsel işlem sonucu karşılık geometrik gösterimi $\varrho.\vec{v} \to X_1\varrho=\overrightarrow{OB}$ vektörü nedeni ile, X_1 bileşeninin 90° döndürülmek sureti ile $\overrightarrow{OA}$ vektörünün, $\overrightarrow{OB}$ vektörüne dönüşmesine neden olan dönme hareketine (ϱ) nun $\vec{v}$ vek-

(şekil:3.3)

törü üzerindeki kinematik etkisi ve (ς) ya da dual sayılar halkasının kinematik faktörü denecektir.

$-\varsigma$, X_1 bileşeninin (ς) nun tersi yönündeki $-X_1\varsigma \rightarrow \overrightarrow{OD}$ vektörünü veren -90^o ters dönmeyi; $\overrightarrow{OB}$ nin OX üzerindeki bileşeni sıfır olduğundan, dönmenin söz konusu olamıyacağı nedeni ile $\varsigma.\overrightarrow{v} \rightarrow X_1\varsigma = \overrightarrow{OB}$, $\varsigma.\overrightarrow{OB} = \varsigma^2.\overrightarrow{OA} = 0$, (ς^2), (O) ın cebirsel etkinliğine karşılık olur. (şekil 3.3)

TANIM: 3.21-(h) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ

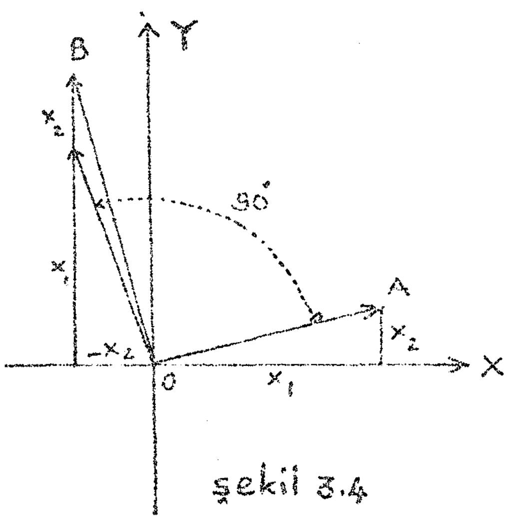
$\overrightarrow{v} = X_1 + X_2.h$ helisel sayısının, yada geometrik gösterimi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v} = X_1 + X_2h$ vektörünün (veya A noktasının), (h) nin

$h.\overrightarrow{v} = h(X_1 + X_2h) = -X_2 + (X_1 + X_2)h$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik gösterimi: $h.\overrightarrow{v} = -X_2 + (X_1 + X_2)h = \overrightarrow{OB}$ vektörü nedeni ile 90^o lik dönme ve $X_2.h$ düşey yükselme hareketine (h) nin, $\overrightarrow{v}$ vektörü üzerindeki kinematik faktörü adı verilecektir. (şekil 3.4)

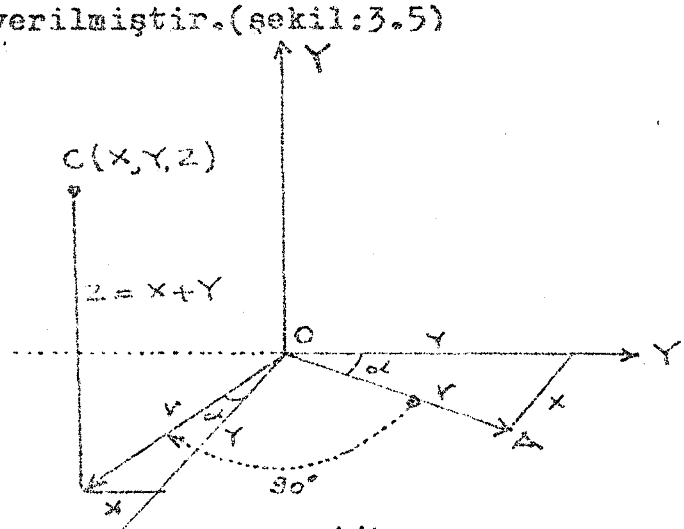
h_2, nin etkisi $-(X_1 + X_2) + X.h$ helisel sayısının geometrik gösterimi vektöre h^3, ün etkisi $-(X_1 + X_2h)$ helisel sayısının geometrik gösterimi $\overrightarrow{OA}$ nın (O) ya göre simetriği vektöre karşılık olacaktır.

A noktasına $A \rightarrow (X,Y)$ veya $\overrightarrow{OA} = X + Yh$ karşılık tutulduğunda, (h) kinematik faktör etkisi $h.OA \rightarrow h(X + Yh) = -Y + (X + Y)h$ sonucuna (C) noktası karşılık tutulursa C(X,Y,Z) olarak

$X = -r \sin\alpha$, $Y = r\cos\alpha$, $Z = r(\sin\alpha + \cos\alpha) = r\sqrt{1 - \sin 2\alpha}$ bağıntıları nedeni ile, A nın (r) yarıçaplı bir daire, veya belirli bir eğri çizmesi halinde, (C) noktasının bir silindir, ya da bir yüzey üzerine dairesel helis veya umumi bir helis çizmesi söz konusu edilebileceğinden bu cisme helisel cümle adı verilmiştir. (şekil: 3.5)



şekil 3.4



şekil 3.5

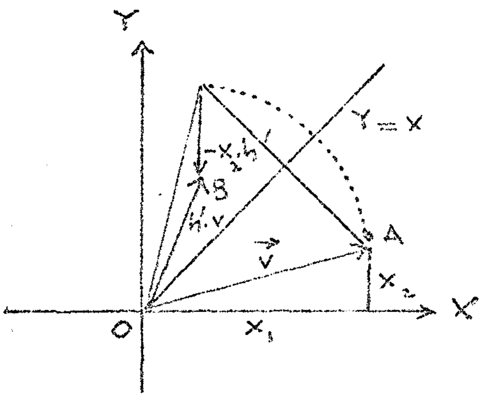
(şekil:3.4) (şekil:3.5)

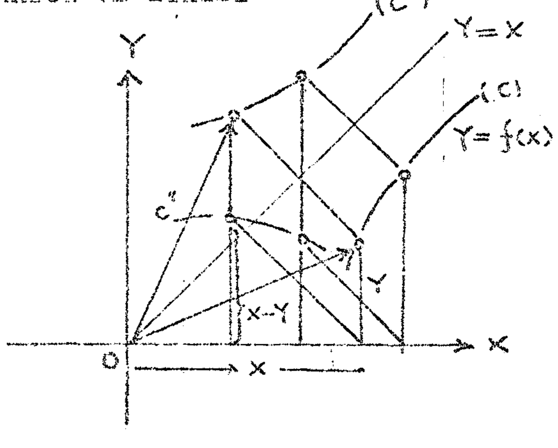
TANIM: 3.22- (h') HOMOTETİK FAKTÖR VE ETKİSİ

$\vec{v}=X_1+X_2h'$, homotetik sayısının, ya da geometrik gösterimi $\vec{OA}=\vec{v}=(X_1+X_2h')$ vektörünün, (h')nün, $h'.\vec{v}=h'.(X_1+X_2h')=X_2+(X_1-X_2)h'$ cebirsel etkimesi sonucu, karşılık gösterimi $h'\vec{v}=X_2+(X_1-X_2)h'=\vec{OB}$ vektörü nedeni ile, A noktasının y=x açı ortayına göre simetrik dönme ve $-X_2.h'$ kadar düşey, alçalma hareketine h'nün $\vec{v}$ üzerindeki kinematik etkisi ve (h') ne de homotetik halkanın, kinematik faktörü denecektir. (şekil 3.6)

h', kinematik faktör etkimesinin R^2 de geometrik yorumu yapılmak istenirse, (şekil 3.7) y=f(x) fonksiyonunun temsil ettiği (C) eğrisinin önce y=x açı ortayı doğrusuna göre (C') simetriği alınmakta, ve daha daha sonra, (C') eğrisine bazı karekteristikleri bozmayan Y=x-y dönüşümü uygulanmış olmaktadır. Belirli koşullarla (C") eğrisinin (C)' nin bir homotetiği olması olasıdır. (şekil:3.7)

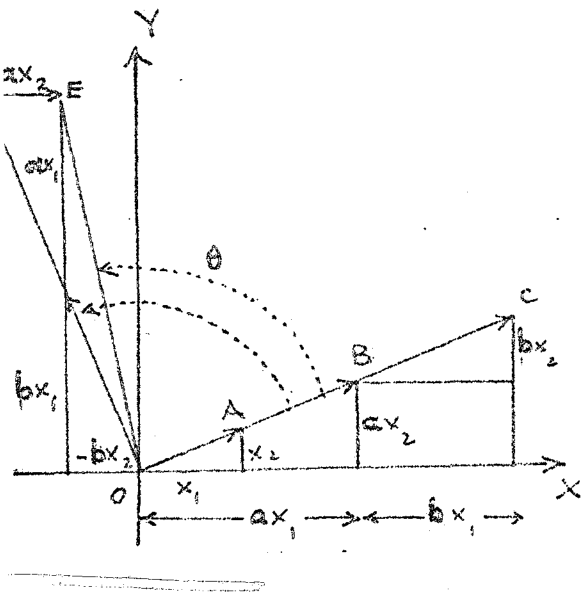
TANIM : 3.20 - (h) HOMOTETİK FAKTÖR VE ETKİSİ





(şekil:3.6) (şekil:3.7)

TANIM: 3.23-(g) KİNEMATİK FAKTÖR VE ETKİSİ



(şekil: 3.8)

$\vec{v}=(a\mp b)(X_1+X_2g)$ gen sayısının, geometrik gösterimi: $\overrightarrow{OA}=X_1+X_2g, \overrightarrow{OB}=a(X_1+X_2g)$

$\overrightarrow{BC}=b(X_1+X_2g)$; $\vec{v}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$\vec{v}=\overrightarrow{OC}=a(X_1+X_2g)\mp b(X_1+X_2g)=(a\mp b)(X_1+X_2g)$

$\vec{v}$ vektörüne (g) nin

$g.\vec{v}=(a\mp b)(X_1g+X_2g^2)$

$g.\vec{v}=(a\mp b)X_1g-bX_2=b(-X_2\mp gX_1)+aX_1g=$

$\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}$ vektörü nedeniyle $\overrightarrow{OC}$'nin 90° lik dönme ve aX_2 kadar yatay ilerleme veya $\overrightarrow{OB}$'nin 90° lik dönme ve aX_1 kadar düşey yükselme bileşik hareketine (g) nin $\vec{v}$ üzerindeki kinematik etkisi ve (g) ye dö-gen halka-cismin R^2 deki kinematik faktörü denecektir. Sonuçta (a) uygun seçilmek sureti ile, R^2 nin tüm vektörlerini belli bir θ açısı kadar döndürerek, $\overrightarrow{OE}$ vektörlerine dönüştürmek mümkün olur; yani (g) düzlemin belirli bir bölgesindeki vektörleri düzlemin belirli tek yönlü vektörlerine dönüştüren bir transformasyon olur.

TANIM: 3.24- R^2 DE KİNEMATİK FAKTÖRLERİN TOPLAMI

$i=g(0,1), s=g(0,1), \varsigma=g(1,0)$ halka faktörlerinin aynı bir $\vec{v}$ vektörüne $i.v$; $s.v$; $\varsigma.v$ kinematik etkileri sonucu vektörlerin

$i.\vec{v}+s.\vec{v}=s.\vec{v}+i.\vec{v}=(i+s).\vec{v}=(s+i).\vec{v}=\vec{v}_1$

$s.\vec{v}+\varsigma\vec{v}=\varsigma.\vec{v}+s.\vec{v}=(s+\varsigma).\vec{v}=(\varsigma+s).\vec{v}=\vec{v}_2$

$i.\vec{v}+\varsigma.\vec{v}=\varsigma.\vec{v}+i.v=(i+\varsigma).\vec{v}=(\varsigma+i).\vec{v}=\vec{v}_3$ toplamlarından elde edilen $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ vektörlerini veren

$i+s=s+i$; $s+\varsigma=\varsigma+s$; $i+\varsigma=\varsigma+i$ kinematik etkiler toplamına, kinematik faktörlerin toplamı denecektir.

TANIM: 3.25- KİNEMATİK FAKTÖRLER ÇARPIMI VEYA KOMPOZE KİNEMATİK FAKTÖRLER

i, s, ϱ, g halka faktörlerinin aynı bir $\overrightarrow{v}$ vektörüne ardarda

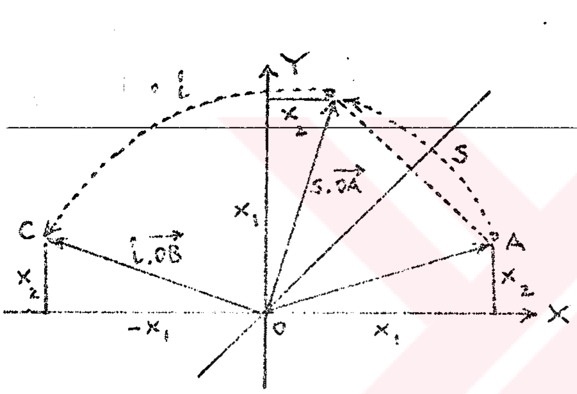
$i.(s.\overrightarrow{v})=(i.s)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}$; $s.(i.\overrightarrow{v})=(s.i).\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1'}$

$i.(\varrho.\overrightarrow{v})=(i.\varrho)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_2}$; $\varrho.(i.\overrightarrow{v})=(\varrho.i).\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_2'}$

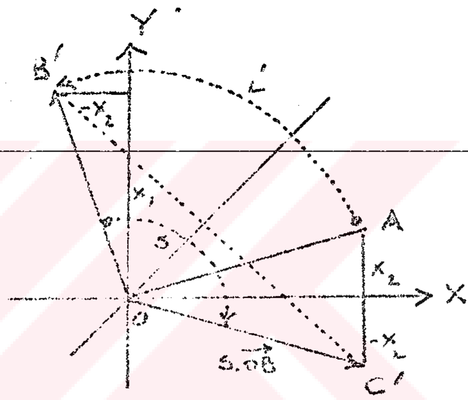
$s.(\varrho.\overrightarrow{v})=(s.\varrho)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_3}$; $\varrho(s.\overrightarrow{v})=(\varrho.s).\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_3'}$ etkileri sonucu elde edilen $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1'}$; $\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2'}$; $\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3'}$ vektörlerini veren $(i.s), (s.i)(i.\varrho), (\varrho.i)$; $(s.\varrho), (\varrho.s)$; kinematik etki bileşimlerine kinematik faktörlerin çarpımı veya kompoze kinematik faktörler denecektir.

TEOREM: 3.25.12

$(i.s)+(s.i)=0$ dır.



(şekil :3.9)



(şekil :3.10)

İsbat:

$\overrightarrow{OA}$ vektörüne (s) ilk, $s.\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$, y=x açıortay doğrusuna göre simetri hareketi ve; $\overrightarrow{OB}$ vektörüne (i) ikinci, $i.\overrightarrow{OB}=i.(s.\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OC}$ hareketi ile $\overrightarrow{OC}$ vektörünü veren (i.s) kompoze kinematik faktörüdür. (şekil:3.9)

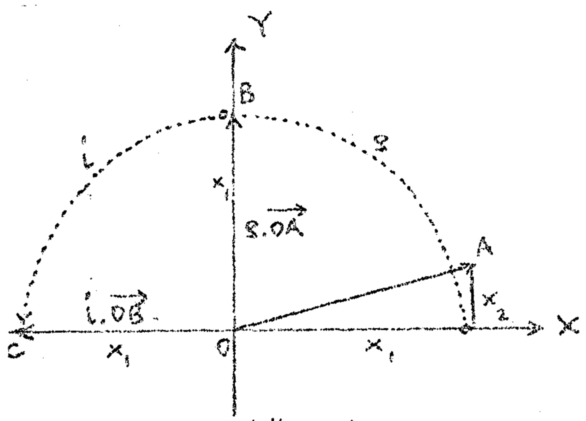
$\overrightarrow{OA}$ vektörüne ilk (i), $i.\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB'}$, 90° lik dönme hareketi ve $\overrightarrow{OB'}$ vektörüne (s) ikinci, $s.\overrightarrow{OB'}=s.(i.\overrightarrow{OA})=(s.i).\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC'}$, y=x açıortay doğrusuna göre simetri hareketi ile $\overrightarrow{OC'}$ vektörünü veren (s.i) kinematik faktörüdür. (şekil: 3.10)

$(i.s).\overrightarrow{OA}+(s.i).\overrightarrow{OA}=\left[(is)+(si)\right].\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC'}=0$ buradan

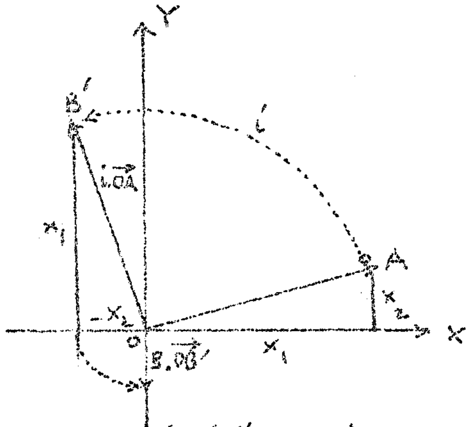
$(i.s)+(s.i)=0$ bulunur.

TEOREM: 3.25.13

$(i.ç)+(ç.i)=-1$ dir.



(şekil 3.11)



(şekil : 3.12)

İsbat:

$\overrightarrow{OA}$ vektörüne (ç) ilk, $ç.\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ izdüşüm hareketi ve $\overrightarrow{OB}$ vektörüne (i) ikinci, $i.\overrightarrow{OB}=i.(ç.\overrightarrow{OA})=(i.ç).\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ hareketi ile, $\overrightarrow{OC}$ vektörünü veren (i.ç) kompoze kinematik faktörüdür.(şekil 3.11)

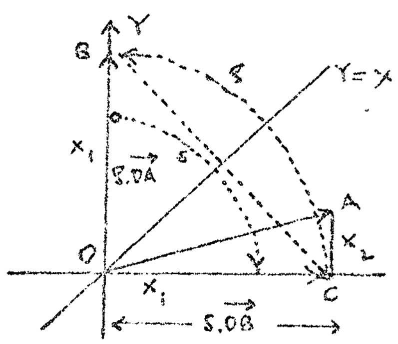
$\overrightarrow{OA}$ vektörüne (i) ilk, $i.\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB'}$ dönme hareketi ve $\overrightarrow{OB'}$ vektörüne (ç) ikinci $ç.\overrightarrow{OB'}=ç.(i.\overrightarrow{OA})=(ç.i)\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC'}$ hareketi ile, $\overrightarrow{OC'}$ vektörünü veren (ç.i) kompoze kinematik faktörüdür. (şekil 3.12)

$(i.ç).OA+(ç.i).OA=\left[(i.ç)+(ç.i)\right].\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC'}=-\overrightarrow{OA}$ nedeni ile

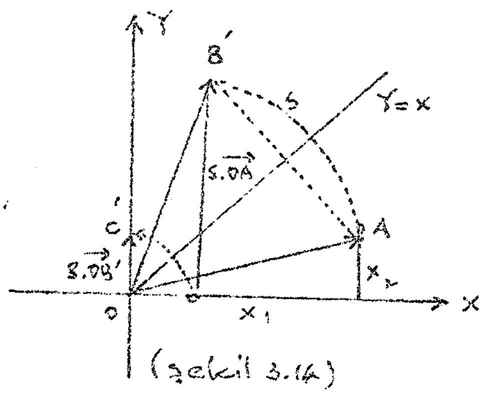
$(i.ç)+(ç.i)=-1$ dir.

TEOREM: 3.25.14

$(s.ç)+(ç.s)=1$ dir.



(şekil 3.13)



(şekil 3.14)

İsbat:

$\overrightarrow{OA}$ vektörüne (ç) ilk, $ç.\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ izdüşüm hareketi, ve $\overrightarrow{OB}$ vektörüne (s) ikinci, $s.\overrightarrow{OB}=s.(ç.\overrightarrow{OA})=(s.ç).\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ simetri hareketi ile $\overrightarrow{OC}$ vektörünü veren $(s.\varsigma)$ kompoze kinematik faktörüdür. (şekil 3.13)

$\overrightarrow{OA}$ vektörüne (s) ilk, $s.\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB'}$ simetri hareketi ve $\overrightarrow{OB'}$ vektörüne (ς) ikinci, $\varsigma.\overrightarrow{OB'}=\varsigma.(s.\overrightarrow{OA})=(\varsigma.s)\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC'}$ izdüşüm hareketi ile $\overrightarrow{OC'}$ vektörünü veren $(\varsigma.s)$ kinematik faktörüdür. (şekil:3.14)

$(s.\varsigma).\overrightarrow{OA}+(\varsigma.s).\overrightarrow{OA}=\left[(s\varsigma)+(\varsigma s)\right].\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA}$ dan

$(s.\varsigma)+(\varsigma.s)=1$ bulunur.

TEOREM : 3.25.15

$k^2=\mp(s.\varsigma),\mp(\varsigma.s),\mp(s.i),\mp(is),\mp(\varsigma.i),\mp(i.\varsigma),\mp(s.g),\mp(i.g),1,0$ cümlesi, kompoze kinematik faktörlerinin toplama işlemi açısından bir Abel gurubu oluşturur.

~~İsbat:~~

$(k^2,+)$ ikilisi bir Abel gurubudur; Kompoze kinematik faktörlerin toplama işlemi için aşağıda verilen tablo incelendiğinde, k^2 cümlesi (+) toplama işlemi açısından: (i) değişimlidir; (ii) birleşimlidir; (iii) etkisiz (sıfır) eleman içerir; (iv) her elemanın ters elemanı vardır.

(+)	$\mp(\varsigma.i)$	$\mp(i.\varsigma)$	$\mp(i.s)$	$\mp(s.i)$	$\mp(s.\varsigma)$	$\mp(\varsigma.s)$
$\mp(\varsigma.i)$	$2\varsigma.i$	-1	$-(s.\varsigma)$	$g(3,-1).i$	$i.s$	o
$\mp(i.\varsigma)$	-1	$2\,i.\varsigma$	$i.g(3,-1)$	$\varsigma.i$	o	$i.s$
$\mp(i.s)$	$s.\varsigma$	$i.g(3,-1)$	$\varsigma.i$	o	$\varsigma.s$	$g(1,1).s$
$\mp(s.i)$	$g(3,-1).i$	$\varsigma.i$	o	$2\,s.i$	$s.g(1,1)$	$s.\varsigma$
$\mp(s.\varsigma)$	$i.s$	o	$\varsigma.s$	$s.g(1,1)$	$2\,s.\varsigma$	1
$\mp(\varsigma.s)$	o	$i.s$	$g(1,1).s$	$s.\varsigma$	1	$2(\varsigma.s)$

Tablo yalnız (+) işaretliler gözönüne alınarak düzenlenmiştir.

$\varsigma+s=s+\varsigma=g(3,-1)$, $\varsigma+i=i+\varsigma=g(1,1)$ ikame edilmiştir.

TEOREM : 3.25.16

$(k^2,+,(.))$ üçlüsü bir halkadır.

İsbat:

$(k^2,+)$ ikilisinin bir Abel gurubu olduğu ortaya konmuştur. $(k^2,(.))$ ikilisinin birleşimli ve (+) üzerine dağılımlı olduğu doğrulanmalıdır. (+) üzerine dağılımlı olduğu aşağıdaki tabloda saptanabilir.

A.B	$\mp(\xi.i)$	$\mp(i.\xi)$	$\mp(i.s)$	$\mp(s.i)$	$\mp(\xi.s)$	$\mp(s.\xi)$
$\mp(\xi.i)$	$-(\xi.i)$	0	$-(\xi.s)$	$(\xi.s)$	$-(\xi.s)$	0
$\mp(i.\xi)$	0	$(-i.\xi)$	$(s.\xi)$	$(-s.\xi)$	0	$(i.\xi)$
$\mp(s.i)$	$(\xi.s)$	$(-s.\xi)$	-1	1	$(\xi.i)$	$(-i.\xi)$
$\mp(i.s)$	$(-\xi.s)$	$(s.\xi)$	1	-1	$(\xi.s)$	$(i.\xi)$
$\mp(\xi.s)$	$(\xi.i)$	0	$(-\xi.i)$	$(\xi.i)$	$(\xi.s)$	0
$\mp(s.\xi)$	0	$(-s.\xi)$	$(\xi.i)$	$(s.\xi)$	0	$(s.\xi)$

Kinematik faktörlerin birleşimli olduğu, daha önce gösterilmiştir. Halka değişimli değildir; birim elemanı vardır. Tablo yalnız (+) işaretliler gözönüne alınarak düzenlenmiştir.

i, ξ, s halka-cisim faktörlerinin bir arada (.) işlemine göre değişimliliği ve birleşimliliği için aşağıdaki tablo geçerlidir.

$(s.i).\xi = -\xi$	$(i.s).\xi = \xi$	$(\xi.i).s = -\xi$	$(i.\xi).s = i-\xi$	$(s.\xi).i = i-\xi$	$(\xi.s).i = \xi$

Tanımlanan i, ξ, s ve kompoze $(i.\xi), (\xi.s), (s.i)$ tasvir yada kinematik faktörler ile, bazı yeni sayı cümleleri, vektör uzayları ve modül yapıları oluşturacağız; ve bu çalışmaya Türk Üniversitesinin değerli bir öğretim üyesi Prof.Dr. Sayın BERKİ YURTSEVER'in adını vereceğiz.

Prof.Dr. Sayır BERKİ YURTSEVER, Türk Üniversitesine, matematiğin gelişmesine, matematikçilerin yetişmesine yarım asıra yakın katkıda bulunmuş bir bilim adamı olup; 1914 de İstanbul'da doğmuş, yüksek öğrenimini ve "PARSİEL DİFFERENSİYEL DENKLEMLERİN SONSUZ SERİLERE AÇILIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ" konulu tezini MÜNİH ÜNİVERSİTESİNDE yapmıştır. 1983 de emekli olmuştur.

4. DÖRDÜNCÜ KISIM

.4- BERKİ SAYILARI, BERKİ VEKTÖR UZAYLARI, BERKİ MODÜLLERİ

TANIM: 4.26- BERKİ SAYILARI

$X_1, X_2 \in R$; $(i.\varsigma) \in C\times D$; $(s.i) \in S\times C$; $(\varsigma.s) \in D\times S$ olarak:

$X_1+X_2(i\varsigma)$; $X_1+X_2(\varsigma i)$; $X_1+X_2(\varsigma s)$; $X_1+X_2(s\varsigma)$; $X_1+X_2(si)$; $X_1+X_2(is)$ yapısındaki elemanlara BERKİ sayıları denecek ve $B(is)$, $B(si)$, $B(\varsigma s)$ $B(s\varsigma)$; $B(\varsigma i)$, $B(i\varsigma)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 4.26.17

$X_1+X_2(i\varsigma)$, $Y_1+Y_2(i\varsigma) \in B(i\varsigma)$ Berki elemanları için (+), (.) iç işlemleri

$(+)\ [X_1+X_2(i\varsigma)]+[Y_1+Y_2(i\varsigma)]=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)i\varsigma \in B(i\varsigma)$

$(.)\ [X_1+X_2(i\varsigma)].[Y_1+Y_2(i\varsigma)] = X_1Y_1+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2).i\varsigma$, ile tanımlanıyor ise $B(i\varsigma)$ Berki sayıları değişimli birimli bir halkadır.

Toplam ve çarpımın tanımlanmasında $X_1+X_2\, i\varsigma$, $Y_1+Y_2 i\varsigma$ elemanlarının R, reel sayılar cümlesinin cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktörler için bilinen skalerle değişimlilik

$i.X_1=X_1.i$; $\varsigma X_1=X_1\varsigma$; $i.X_1.\varsigma=X_1.i.\varsigma=i\varsigma.X_1$ ve

$i\varsigma+\varsigma i=-1$ veya $i\varsigma=-1-\varsigma i$, $(i\varsigma).(i\varsigma)=-(i\varsigma)$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat:

$(C\times D,+)$ ikilisi bir Abel gurubudur. $0+0.i\varsigma$ sıfır elemandır. $(X_1+X_2 i\varsigma)$ nun ters elemanı $(-X_1-X_2 i\varsigma)$ dur; değişimli ve birleşimlidir.

$(C\times D,(.))$ ikilisi birleşimli ve dağılımlıdır; birim eleman $1+0.i\varsigma$ dur. $X_1\neq 0$, ve $X_1\neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları vardır.

TEOREM: 4.26.18

$X_1+X_2 i\varsigma \in B(i\varsigma)$, Berki sayılar cümlesi R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat:

$RxB(i\xi)\longrightarrow B(i\xi)$ bağıntısında, $B(i\xi)$ nun Abel gurubu olduğu bilinmektedir. Ve R için $B_1 . B_2 \in B(i\xi)$ ve $b_1, b_2 \in R$ ise, aşağıdaki dış işlemlerin doğrulandığını göstermek zor değildir.

(i) $b_1(B_1+B_2)=b_1B_1+b_1B_2 \in B(i\xi)$

(ii) $(b_1+b_2)\ B_1=b_1B_1+b_2B_1 \in B(i\xi)$

(iii) $(b_1 . b_2)B_1=b_1(b_2B_1) \in B(i\xi)$

(iv) $\varepsilon . B_1=B_1 \longrightarrow B(i\xi)$

TEOREM: 4.26.19

$X_1+X_2(\xi s)$, $Y_1+Y_2(\xi s) \in B(\xi s)$ Berki elemanları için, (+),(.) işlemleri

$\cancel{(+)[X_1+X_2(\xi s)]}+[Y_1+Y_2(\xi s)]=(X_1+Y_1)+(Y_1+Y_2)\xi s \in B(\xi s)$

$(.)[X_1+X_2(\xi s)] . [Y_1+Y_2(\xi s)]=X_1Y_1+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)\xi s \in B(\xi s)$ ile tanımlanıyor ise $B(\xi s)$ Berki sayılar cümlesi halka teşkil eder.

Reel sayılar cümlesinin cebir kurallarının korunduğu ve kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ile

$s\xi+\xi s=1$ veya $s\xi=1-\xi s$, $(s\xi).(s\xi)=(s\xi)$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat: (Bak: TEOREM.4.26.17)

TEOREM: 4.26.20

$X_1+X_2\xi s \in B(\xi s)$ Berki sayılar cümlesi R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat: (Bak:TEOREM.4.26.18)

TEOREM: 4.26.21

$X_1+X_2(si)$, $Y_1+Y_2(si)$ $B(si)$ Berki elemanları için (+),(.) işlemleri

$(+)[X_1+X_2(si)]+[Y_1+Y_2(si)]=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)si \in B(si)$

$(.)[X_1+X_2(si)] . [Y_1+Y_2(si)]= (X_1Y_1+X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)\ si \in B(si)$ ile tanımlanıyor ise $B(si)$ Berki sayılar cümlesi halka teşkil eder.

Reel sayılar cümlesinin cebir kurallarının korunduğu düşünülmüş ve kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ile

$si+is=0$ veya $si=-is$, $(si).(si)=1$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat: (Bak: TEOREM 4.26.17)

TEOREM : 4.26.22

$X_1+X_2si \in B(si)$ Berki sayılar cümlesi R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat : (Bak: TEOREM 4.26.18)

TANIM: 4.27- BERKİ VEKTÖR UZAYLARINDA İÇ ÇARPIM

a) B^n (iꝭ) UZAYINDA İÇ ÇARPIM

(İ) $X=X_1+X_2iꝭ \in B(iꝭ)$ olarak $\bar{X}=X_1+X_2ꝭi=(X_1-X_2)-X_2iꝭ \in B(iꝭ)$ ve $X\bar{X}=X_1^2-X_1X_2$, $\bar{\bar{X}}=X$ özelliklerini veren $\bar{X}$ elemanına X BERKİ SAYISININ EŞLENİĞİ

(İİ) $X=X_1+X_2iꝭ \in B(iꝭ)$ olarak $\cancel{X}=X_2-X_1iꝭ \in B(iꝭ)$ olan $\cancel{X}$ elemanına X BERKİ SAYISININ AKS'I adı ile ortaya konan elemanlarla

(İİİ) $X=X_1+X_2i$, $Y=Y_1+Y_2i \in B(iꝭ)$ elemanları arasında

$\langle X,Y\rangle=X\bar{Y}+\cancel{X}.\bar{\cancel{Y}}=(X_1Y_1+X_2Y_2)+(X_2Y_1-X_1Y_2)+2(X_2Y_1-X_1Y_2)iꝭ \in B(iꝭ)$

bağıntısına iç çarpım denecek ve bu tanım iç çarpım koşullarını gerçekleyecektir.

(İV),(İİİ) den yararlanarak $B^n(iꝭ)$ da iç çarpım

$X=(X_i,)$ $X_i=X_{i1}+X_{i2}iꝭ \in B(iꝭ)$, $X \in B^n(iꝭ)$

$Y=(Y_i,)$ $Y_i=Y_{i1}+Y_{i2}i$ $B(i\ )$, $Y \in B^n(iꝭ)$ olarak

$\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{n} X_i\bar{Y}_i+\cancel{X}_i\bar{\cancel{Y}}_i$ ile tanımlanabilecektir. Böylece

$B^n(iꝭ)xB^n(iꝭ) \rightarrow B(iꝭ)$ eşlemesi yapılmış olmaktadır.

b) B^n(ꝭs) UZAYINDA İÇ ÇARPIM

(İ) $X=X_1+X_2ꝭs \in B(ꝭs)$ olarak $\bar{X}=X_1+X_2sꝭ=(X_1+X_2)-X_2ꝭs \in B(ꝭs)$ ve $X\bar{X}=X_1^2+X_1X_2$; $\bar{\bar{X}}=X$ özelliklerini veren $\bar{X}$ elemanına X, BERKİ SAYISININ EŞLENİĞİ;

(İİ) $X=X_1+X_2ꝭs \in B(ꝭs)$ olmak üzere, $\cancel{X}=X_2-X_1ꝭs \in B(ꝭs)$ olan $\cancel{X}$ elemanına X, BERKİ SAYISININ AKS'I adı ile ortaya konan elemanlarla

(İİİ) $X=X_1+X_2ꝭs$, $Y=Y_1+Y_2ꝭs \in B(ꝭs)$ sayıları arasında

$\langle X,Y\rangle=X.\bar{Y}+\cancel{X}.\bar{\cancel{Y}}=(X_1Y_1+X_2Y_2)\overset{-(X_2Y_1-X_1Y_2)}{+}2(X_2Y_1-X_1Y_2)ꝭs \in B(ꝭs)$ bağıntısına iç çarpım denecek ve bu tanım iç çarpım koşullarını doğrulayacaktır.

(İV),(İİİ) den yararlanarak B^n(ꝭs) de iç çarpım

$X=(X_i,), X_i=X_{i1}+X_{i2}\varrho s \in B(\varrho s), X\in B^n(\varrho s)$

$Y=(Y_i,), Y_i=Y_{i1}+Y_{i2}\varrho s \in B(\varrho s), Y\in B^n(\varrho s)$ olarak

$X,Y=\sum_{i=1}^{n} X_i\bar{\bar{Y}}_i + \bar{X}_i\cdot\bar{Y}_i$ ile tanımlanabilecektir. Böylece

$B^n(\varrho s)xB^n(\varrho s) \to B(\varrho s)$ eşlemesi yapılmış olmaktadır.

TANIM: 4.28- BERKİ VEKTÖR UZAYLARI, BERKİ MODÜLLERİ

$X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots \in R$ reel sayılarla ve $i, \varrho, s, (i\varrho), (\varrho s), (si)$ kinematik faktörlerin lineer kombinezonları olarak, kinematik faktörler arası $(+), (\cdot)$ iç işlemleri altında, halka, yada cisim niteliğinde olabilen

1°) $X_1(\varrho s)+X_2(i\varrho) \in B(\ s,i\ ) \longrightarrow (X_1,X_2)$

2°) $X_1+X_2\varrho+X_3(\varrho s) \in B(1,\varrho,\varrho s) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3)$

3°) $X_1+X_2(\varrho s)+X_3(i\varrho) \in B(1,\varrho s,i\varrho) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3)$

4°) $X_1+X_2\varrho+X_3 si \in B(1,\varrho,si) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3)$

5°) $X_1\varrho+X_3\varrho s+X_3 i\varrho \in B(\varrho,\varrho s,i\varrho) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3)$

6°) $X_1+X_2\varrho+X_3 i+X_4 i\varrho \in B(1,\varrho,i,i\varrho) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3,X_4)$

7°) $X_1+X_2 s+X_3 i+X_3 si \in B(1,s,i,si) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3,X_4)$

8°) $X_1+X_2\varrho+X_3 s+X_4\varrho s \in B(1,\varrho,s,\varrho s) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3,X_4)$

9°) $X_1+X_2 i\varrho+X_3\varrho s+X_4 si \in B(1,i\varrho,\varrho s,si) \longrightarrow (X_1,X_2,X_3,X_4)$

10°) $X_1+X_2\varrho+X_3 i\varrho+X_4 si+X_5\varrho s \in B(1,\varrho,\ldots) \longrightarrow (X_1,X_2,\ldots,X_5)$

11°) $X_1+X_2\varrho+X_3 i+X_4\varrho i+X_5 s\varrho \in B(1,\varrho,i,\ldots) \longrightarrow (X_1,X_2,\ldots,X_5)$

12°) $X_1+X_2\varrho+X_3 s+X_4 i+X_5 si+X_6 i\varrho+X_7\varrho s \in B(1,\ ,s\ldots) \to (X_1,X_2,\ldots,X_7)$

.... cebirsel yapıları ile ifade edilen cümlelere değişik boyuttan, DEĞİŞİK HALKA VE CİSİM ÜZERİNDEN BERKİ VEKTÖR UZAYLARI VE BERKİ MODÜLLERİ denecektir.

TEOREM: 4.28.23

$X_1\varrho s+X_2 i\varrho \in B(\varrho s,i\varrho)$ cümlesi R üzerinden bir vektör uzayı, $B(\varrho s)$ sayı cümlesi üzerinden bir modül oluşturur.

-R üzerinden vektör uzayı oluşturduğuna dair isbat için (Bak TEOREM : 4.26.18)

-$B(\varrho s)$ halkası üzerinden bir modül oluşturduğuna gelince:

$a_1+a_2\varsigma s$, $b_1+b_2\varsigma s \in B(\varsigma s)$; $1+0.\varsigma s=\xi_0 \in B(\varsigma s)$

$X_1\varsigma s+X_2 i\varsigma$, $Y_1\varsigma s+Y_2 i\varsigma \in B(\varsigma s, i\varsigma)$ olsun.

(İ) $(a_1+a_2\varsigma s)(X_1\varsigma s+X_2 i\varsigma)=(a_1+a_2)X_1\varsigma s+a_1X_2 i\varsigma \in B(\varsigma s, i\varsigma)$

(İİ) $(a_1+a_2\varsigma s)\left[(X_1\varsigma s+X_2 i\varsigma)+(Y_1\varsigma s+Y_2 i\varsigma)\right] =$

$\left[(a_1+a_2)X_1\varsigma s+a_1X_2 i\varsigma\right] + \left[(a_1+a_2)Y_1\varsigma s+a_1Y_2 i\varsigma\right] =$

$(a_1+a_2)(X_1+Y_1)\varsigma s+a_1(X_2+Y_2)i\varsigma \in B(\varsigma s, i\varsigma)$

(İİİ) $\left[(a_1+a_2\varsigma s)(b_1+b_1\varsigma s)\right](X_1\varsigma s+X_2 i\ )=(a_1+a_2\varsigma s)\left[(b_1+b_2\varsigma s)(X_1\varsigma s+X_2 i\varsigma)\right]$;

sol yan: $\left[a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2)\varsigma s\right](X_1\varsigma s+X_2 i\varsigma)=$

$(a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2)X_1\varsigma s+a_1b_1X_2 i\varsigma \in B(\varsigma s, i\varsigma)$; sağ yan

$(a_1+a_2\varsigma s)\left[(b_1+b_2)X_1\varsigma s+b_1X_2 i\varsigma\right]=$

$\left[(a_1+a_2)(b_1+b_2)\right].X_1\varsigma s+a_1b_1X_2 i\varsigma \in B(\varsigma s, i\varsigma)$

(İV) $(1+0.\varsigma s)(X_1\varsigma s+X_2 i\varsigma)=X_1\varsigma s+X_2 i\varsigma$ bulunur.

TEOREM: 4.28.24

$(X_1-X_2 i)\varsigma s-(X_1+X_2 i)i\varsigma$, $(Y_1-Y_2 i)\varsigma s-(Y_1+Y_2 i)i\varsigma \in B(i\varsigma, \varsigma s)$ ile ifade edilen elemanlar için, (+),(.) iç işlemleri

(+) $\left[(X_1-X_2 i)\varsigma s-(X_1+X_2 i)i\varsigma\right]+\left[(Y_1-Y_2 i)\varsigma s-(Y_1+Y_2 i)i\varsigma\right]=$

$((X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)i)\varsigma s-((X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)i)i\varsigma$

(.) $((X_1-X_2 i)\varsigma s-(X_1+X_2 i)i\varsigma).((Y_1-Y_2 i)\varsigma s-(Y_1+Y_2 i)i\varsigma)=$

$\left[(X_1Y_1-X_2Y_2)-(X_1Y_2+X_2Y_1)i\right]\varsigma s-\left[(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)i\right] i\varsigma$ ile tanımlanıyorsa $B(i\varsigma, \varsigma s)$ cümlesi değişimli bir cisimdir.

İsbat:

$(B(\varsigma s, i\varsigma),+)$ ikilisi bir Abel gurubudur; $X_1=0$, $X_2=0$ sıfır elemanı oluşturur; değişimli, birleşimli, ters elemanlıdır.

$(B(\varsigma s, i\varsigma),(.))$ ikilisi, birleşimli, (+) üzerine dağılımlıdır.

$X_1=1$, $X_2=1$; $(1-i)\varsigma s-(1+i)\, i\varsigma$ birim elemanı oluşturur.

$(X_1-X_2 i)\varsigma s-(X_1+X_2 i)i\varsigma$, nun ters elemanı

$(1/X_1^2+X_2^2)\left[(X_1+X_2)-(X_1-X_2)i\right]\varsigma s-(1/X_1^2+X_2^2)\left[(X_1+X_2)+(X_1-X_2)i\right]\ i\varsigma$ dur.

Halkanın sıfır böleni elemanı bulunmadığı ve her elemanın da ters mevcut olduğundan bu üçlü bir cisimdir.

TEOREM: 4.28.25

Teorem: 3.28.24 de verilen $B(\varepsilon s, i\varepsilon)$, Berki cismi a) R, reel sayılar cismi üzerinden b) C kompleks sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı oluşturur.

İsbat: (Bak Teorem 4.26.18)

TEOREM: 4.28.26

$X_1+X_2\varepsilon+X_3 si$, $Y_1+Y_2\varepsilon+Y_3 si \in B(1,\varepsilon,si)$ ile ifade edilen elemanlar için (+) toplam, (.) çarpım denilecek iç işlemler:

(+) $(X_1+X_2\varepsilon+X_3 si)+(Y_1+Y_2\varepsilon+Y_3 si)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)\varepsilon+(X_3+Y_3)si$

(.) $(X_1+X_2\varepsilon+X_3 si).(Y_1+Y_2\varepsilon+Y_3 si)=$

$(X_1Y_1+X_3Y_3)+(X_1Y_2+X_2Y_3+X_3Y_1-X_3Y_2)\varepsilon+(X_1Y_3+X_3Y_1)si$ ile tanımlanıyor ise $B(1,\varepsilon,si)$ cümlesi bir halkadır.

Toplam ve çarpım işlemlerinin tanımlanmasında B(1, ,si) elemanlarının R, reel sayılar cümlesinin toplama ve çarpma kurallarını koruduğu, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ve

$\varepsilon^2=0$, $(si).(si)=1$, $\varepsilon si=\varepsilon$, $si\varepsilon=-\varepsilon$ bağıntıları gözönüne alınmıştır

İsbat:

$(B(1,\varepsilon,si),+)$ ikilisi bir Abel gurubudur; değişimli, birleşimli olup, sıfır eleman $(0+0.\varepsilon+0.si)$ dir. Her elemanın tersi vardır.

$(B(1,\varepsilon,si),(.))$ ikilisi, birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır.

$(1+0.\varepsilon+0.si)$ birim elemandır.

$$\left.\begin{matrix} X_1 & 0 & X_3 \\ X_2 & X_1-X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & X_1 \end{matrix}\right| = (X_1^2+X_3^2).(X_1-X_3)\neq 0$$

için $(X_1\neq X_3)$ olan tüm elemanların ters elemanı vardır, ve $(X_1+X_2\varepsilon+X_3 si)$ nin ters elemanı

$(1/(X_1^2+X_2^2)).(X_1-X_2\varepsilon+X_3 si)$ dir.

Halka (.) işlemi açısından değişimli değildir.

TEOREM: 4.28.27

$B(1,\varepsilon,si)$ halkası a) R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) D dual sayılar halkası üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat:

a) Bak: TEOREM: 4.26.18

b) $a_1+a_2\varepsilon$, $b_1+b_2\varepsilon \in D$, $1+0.\varepsilon \in D$

$X_1+X_2\varsigma+X_3si$, $Y_1+Y_2\varsigma+Y_3si \in B(1,\varsigma,si)$ olsun;

(İ) $(a_1+a_2\varsigma).(X_1+X_2\varsigma+X_3si)=a_1X_1+(a_1X_2+a_2X_1+a_2X_3)\varsigma+a_1X_3si$

(İİ) $\left[(a_1+a_2\varsigma)+(b_1+b_2\varsigma)\right](X_1+X_2\varsigma+X_3si)=$

$\left[(a_1+b_1)+(a_2+b_2)\varsigma\right](X_1+X_2\varsigma+X_3si)=$

$(a_1+b_1)X_1+\left[(a_1+b_1)X_2+(a_2+b_2)X_1+(a_2+b_2)X_3\right]\varsigma+(a_1+b_1)X_3si$

diğer taraftan

$(a_1+a_2\varsigma).(X_1+X_2\varsigma+X_3si)+(b_1+b_2\varsigma)(X_1+X_2\varsigma+X_3si)=$

$a_1X_1+(a_1X_2+a_2X_1+a_2X_3)\varsigma+a_1X_3si+b_1X_1+(b_1X_2+b_2X_1+b_2X_3)\varsigma+b_1X_3si$ den

$(a_1+b_1)X_1+\left[(a_1+b_1)X_2+(a_2+b_2)X_1+(a_2+b_2)X_3\right]\varsigma+(a_1+b_1)X_3si$ bulunur.

(İİİ) $\left[(a_1+a_2\varsigma)(b_1+b_2\varsigma)\right](X_1+X_2\varsigma+X_3si)=$

$(a_1+a_2\ \ )\left[(b_1+b_2\varsigma)(X_1+X_2\varsigma+X_3si)\right]$ dir. Zira eşitliğin sol yanı

$\left[a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)\varsigma\right](X_1+X_2\varsigma+X_3si)=$

$a_1b_1X_1+\left[a_1b_1X_2+(a_2b_1+a_1b_2)(X_1+X_3)\right]\varsigma+a_1b_1X_3si$; eşitliğin sağ yanı: $(a_1+a_2\varsigma)\left[b_1X_1+(b_1X_2+b_2X_1+b_2X_3)\varsigma+b_1X_3si\right]=$

$a_1b_1X_1+\left[a_1b_1X_2+(a_2b_1+a_1b_2)(X_1+X_3)\right]\varsigma+a_1b_1si$ bulunur.

(İV) $(1+0.\varsigma).(X_1+X_2\varsigma+X_3si)=X_1+X_2\varsigma+X_3si$ olur.

TEOREM: 4.28.28

$X_1+X_2\varsigma+X_3i\varsigma$, $Y_1+Y_2\varsigma+Y_3i\varsigma \in B(1,\varsigma,i\varsigma)$ ile ifade edilecek elemanlar için (+) toplam, (.) çarpım denilecek iç işlemler:

(+) $(X_1+X_2\varsigma+X_3i\varsigma)+(Y_1+Y_2\varsigma+Y_3i\varsigma)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)\varsigma+(X_3+Y_3)i\varsigma$

(.) $(X_1+X_2\varsigma+X_3i\varsigma).(Y_1+Y_2\varsigma+Y_3i\varsigma)=$

$X_1Y_1+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_3)\varsigma+(X_1Y_3+X_3Y_1-X_3Y_3)i\varsigma$, ile tanımlanıyor ise $B(1,\varsigma,i\varsigma)$ cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

Toplam ve çarpımın tanımlanmasında, $B(1,\varsigma,i\varsigma)$ nun elemanları için, R reel sayılar cümlesinin cebir kurallarının korunduğu düşünülmüş, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ve

$\varsigma^2=0$, $\varsigma.(\varsigma i)=0$, $\varsigma i+i\varsigma=-1$, $(i\varsigma).(i\varsigma)=-(i\varsigma)$

bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat:

$(B(1,\varsigma,i\varsigma),+)$ ikilisi bir Abel gurubudur; değişimli, birleşimli olup, sıfır eleman $(0+0.\varsigma+0.i\varsigma)$dur; Ters elemanı vardır.

TÜRDOK TEZ ÖZ FORMU

KEY WORDS

ANAHTAR KELİMELER

(Konuyu içeren kelimelerin Türkçe ve İngilizce verilmesi)°

TEZİN KONUSU (ait olduğu bilim dalı)	mate
Tezin adı	HALKALAR CİSİMLER ÜZERİNE.
Tezin adının İngilizce çevirisi	
Tezin cinsi (Dr.,Doç., Uzmanlık tezi)	Dok.
Tezin yazarının soyadı ve adı	BAYDAR, Sadi
Tezin sunulduğu Üniversite, Fakülte, Akademi ve diğer Kuruluşlar	Yıldız Ünv. Fen-Edebiyat Fak., 1980
Tezin kabul tarihi, yayınlanmışsa; basım yeri, yayınlıyan, basım tarihi	
Tezin yöneticisinin akademik unvanı ve adı	Doç. Behiç Çağal
Sayfa sayısı : 62	Özet dili (Tür., İng., Fr., v.s.) Tü., Fr.
Yararlanılan kaynak sayısı; kaynakça, bibliyografya veya referans sayısı :	Trey.
Seri kaydı	

☐ Yayınlanmış (Kitap olarak) ☒ Metin teksirdir ☐ Daktilo olarak çoğaltılmıştır.

DİKKAT : Tezin bir kopyesinin gönderilmesi gereklidir. Gönderilmemesi halinde teze nasıl ulaşılacağının bildirilmesi; Kuruluş veya kütüphane adı : TÜBİTAK

Tezin yalnızca yazarda olması halinde adresi :

Ayrı basımların gönderilmemesi rica olunur.

° Örneğin : Tezin adı Antibiyotikler ise ve kapsamında bu isimle yeterince belirlenemiyorsa yani kapsamında Antibiyotiklerin kullanılması, yan etkileri, pazarlaması ve imalatı varsa, özellikle konunun iyice belirlenebilmesi için Antibiyotikler altında verilecek kelimelerle Antibiyotiklerin kullanımı, yan etkisi, imalatı ve pazarlaması konuyu içeren anahtar kelimeler olarak verilmelidir. Ancak bundan sonradır ki tezin konusunun içeriğine ulaşılabilir. Bu işlem ise yalnızca tez yazarı tarafından yapıldığı zaman sağlıklı olacaktır. Böylece konuya yaklaşım araştırması için kolaylaşacak ve konu indeksi buna göre hazırlanacaktır.

$$\begin{array}{cccc|}
X_1 & -X_3 & -X_3 & 0 \\
X_2 & X_1-X_4 & -X_4 & X_3 \\
X_3 & 0 & X_1 & -X_3 \\
X_4 & -X_3 & X_2 & X_1-X_4
\end{array} = (X_1^2+X_3^2)+(X_2X_3-X_1X_4)^2=P^2$$

yi göstermekte olup, $X_1 \neq X_4$, $X_3 \neq -X_2$ olan tüm elemanların ters elemanları bulunacaktır.

TEOREM: 4.28.31

B(1,ϛ,i,ϛi) halkası a) R, reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) C kompleks sayılar cismi üzerinden sağdan ve soldan bir vektör uzayı c) D, dual sayılar halkası üzerinden sağdan ve soldan bir modül d) B(ϛi) veya B(iϛ) Berki sayı cümlesi üzerinden sağdan ve soldan bir modül teşkil eder.

a) Bak: TEOREM: 4.26.18

b) a_1+a_2i, $b_1+b_2i \in C$; c) $a_1+a_2ϛ$, $b_1+b_2ϛ \in D$;

d) $a_1+a_2ϛi$, $b_1+b_2ϛi$ alarak bak TEOREM: 4.28.27

TEOREM: 4.28.32

$X_1+X_2iϛ+X_3ϛs+X_4si$, $Y_1+Y_2iϛ+Y_3ϛs+X_4si \in B(1,iϛ,ϛs,si)$ yapısındaki elemanlar için (+) toplam, (.) çarpım denecek iç işlemler:

$(+)(X_1+X_2iϛ+X_3ϛs+X_4si)+(Y_1+Y_2iϛ+Y_3ϛs+Y_4si)=$

$(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)iϛ+(X_3+Y_3)ϛs+(X_4+Y_4)si$ ve

$(.)(X_1+X_2iϛ+X_3ϛs+X_4si).(Y_1+Y_2iϛ+Y_3ϛs+Y_4si)=$

$(X_1Y_1-X_3Y_4-X_4Y_2+X_4Y_4)+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2-X_3Y_4+X_4Y_3)iϛ+$

$(X_1Y_3-X_2Y_4+X_3Y_1+X_4Y_2)ϛs+(X_1Y_4-X_2Y_4+X_4Y_1+X_4Y_3)si$ ile tanımlanıyor ise B(1,iϛ,ϛs,si) cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

Toplam ve çarpım işlemlerinin tanımlanmasında B(1,iϛ,ϛs,si) cümlesi elemanlarının reel sayılar cümlesinin toplama ve çarpma kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ve

$ϛ^2=0$, $i^2=-1$, $s^2=1$, $ϛi+iϛ=-1$, $ϛs+sϛ=1$, $si+si=0$

bağıntıları ve kompoze kinematik faktörler çarpım tablosu gözönünde bulundurulmuştur.

$(B(1,\varepsilon,i\varepsilon),(\cdot))$ ikilisi birleşimli, $(+)$ üzerine dağılımlıdır. $(1+0.\varepsilon+0\ i\varepsilon)$ birim elemandır; $(X_1+X_2\varepsilon+X_3 i\varepsilon)$ nun ters elemanı

$(1/X_1)-[X_2/X_1(X_1-X_3)]\varepsilon-[X_3/X_1(X_1-X_3)]\ i\varepsilon$ dur. Halka değişimli değildir.

TEOREM: 4.28.29

$B(1,\varepsilon,i\varepsilon)$ halkası a) Reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) D, dual sayılar halkası üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat:

a) Bak: TEOREM: 4.26.18

b) Bak: TEOREM: 4.28.27 b

TEOREM: 4.28.30

$X_1+X_2\varepsilon+X_3 i+X_4\varepsilon i$, $Y_1+Y_2\varepsilon+Y_3 i+Y_4\varepsilon i \in B(1,\varepsilon,i,\varepsilon i)$ ile ifade edilen elemanlar için $(+)$ toplam, $(\cdot)$ çarpım denilecek iç işlemler:

$(+)$ $(X_1+X_2\varepsilon+X_3 i+X_4\varepsilon i)+(Y_1+Y_2\varepsilon+Y_3 i+Y_4\varepsilon i)=$

$(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)\varepsilon+(X_3+Y_3)i+(X_4+Y_4)\ \varepsilon i$ ve

$(\cdot)$ $(X_1+X_2\varepsilon+X_3 i+X_4\varepsilon i)\cdot(Y_1+Y_2\varepsilon+Y_3 i+Y_4\varepsilon i)=$

$(X_1Y_1-X_3Y_2-X_3Y_3)+(X_2Y_1+X_1Y_2-X_4Y_2-X_4Y_3+X_3Y_4)\varepsilon+(X_3Y_1+X_1Y_3+X_3Y_4)i+$

$(X_4Y_1-X_3Y_2+X_2Y_3+X_1Y_4-X_4Y_4)\varepsilon i$ ile tanımlanıyor ise $B(1,\varepsilon,i,\varepsilon i)$ cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

Toplam ve çarpım tanımlanmasında B(1, ,i, i) elemanlarının R reel sayılar cümlesinin toplama, çarpma kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ve

$\varepsilon^2=0$, $i^2=-1$, $(\varepsilon i)\cdot(\varepsilon i)=-(\varepsilon i)$, $\varepsilon i=-1-i\varepsilon$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat:

$(B(1,\varepsilon,i,\varepsilon i),+)$ ikilisi bir Abel gurubudur; değişimli, birleşimli olup, $(0+0.\varepsilon+0.i+0.i\varepsilon)$ sıfır elemandır; her elemanın ters elemanı vardır. $(B(1,\varepsilon,i,\varepsilon i),(\cdot))$ ikilisi birleşimli, $(+)$ üzerine dağılımlıdır; birim eleman $(1+0.\varepsilon+0.i+0.\varepsilon i)$ dir.

$(X_1+X_2\varepsilon+X_3 i+X_4\varepsilon i)$ nin ters elemanı

$((X_1-X_4)+X_2\varepsilon-X_3 i+X_4\varepsilon i)/P$ dir. P burada

İsbat:

(B(1,iς,ςs,si),+) ikilisinin Abel gurubu olduğu açıktır.

(B(1,iς,ςs,si),(.)) ikilisi birleşimli, (+) üzerine dağılımlıdır.

$$\begin{vmatrix} X_1 & -X_4 & 0 & X_4-X_3 \\ X_2 & X_1-X_2 & X_4 & -X_3 \\ X_3 & X_4 & X_1+X_3 & -X_2 \\ X_4 & 0 & X_4 & (X_1-X_2) \end{vmatrix} = (X_1-X_2+X_4)^2 . (X_1+X_3-X_4) . (X_1-X_4) \neq 0$$

olan elemanların ters elemanı vardır.

1+0.i +0. s+0.si birim elemandır.

TEOREM: 4.28.33

B(1,iς,ςs,si) cümlesi a) R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) D, dual sayılar cümlesi üzerinden bir modül c)B(iς),B(ςs) B(si) Berki sayıları çümlesi üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat: TEOREM 4.28.31

5. BEŞİNCİ KISIM

GEN ÇARPIM KURALLI KARE MATRİS HALKALARI

TEOREM: 5.29.34

$(X_{uv}),(Y_{uv})(u=1,2,\ldots n);(v=1,2,\ldots n)$ matris elemanları olarak (+) toplama, (gk) çarpma (gen çarpım kuralları dizisi) iç işlemleri:

(+) $(X_{uv})+(Y_{uv})=(X_{uv}+Y_{uv}),\quad (u=1,2,\ldots n),(v=1,2,\ldots n)$

(.) $(X_{uv})gk(Y_{uv})=(Z^{k}_{uv})=\sum_{r=1}^{n}X_{ur}\cdot Y_{sv}\quad \Big|\ r+s=np+k,\ k=0,1,\ldots n-1$

ile tanımlanıyorsa (X_{uv}) matrisleri $k=0,1,\ldots n-1$ değerleri için ayrı ayrı halka oluşturur.

İsbat:

$k=1$ için, (nxn) matrislerinde yapacağız. (r+s) indisler toplamının (n)'e bölünmesinden (1) kalanı elde edilecek, başka bir deyimle (r+s) toplamı, toplamı oluşturan her terimde (n+1) edecektir. (g_1) işlemini kolaylık olsun diye (o) ile gösterelim. (o) işleminin yalnızca birleşimli olduğunu göstermekle yetinecek, (g_1)'e veya (o) çarpımına çapraz kural ve bu işlemle oluşan (nxn)matris halkalarına da, çapraz kurallı matris halkaları denecektir.

Örneğin, (2x2) matrisleri için halka oluşturan

$$\begin{pmatrix}X_{11}X_{12}\\X_{21}X_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Y_{11}Y_{12}\\Y_{21}Y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22}\\X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22}\end{pmatrix}$$ klasik çarpım (g_0)lı çarpım

kuralı yanında, (o) çapraz çarpım kuralı da

$$\begin{pmatrix}X_{11}X_{12}\\X_{21}X_{22}\end{pmatrix}o\begin{pmatrix}Y_{11}Y_{12}\\Y_{21}Y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11}Y_{21}+X_{12}Y_{11} & X_{11}Y_{22}+X_{12}Y_{12}\\X_{21}Y_{21}+X_{22}Y_{11} & X_{21}Y_{22}+X_{22}Y_{12}\end{pmatrix}$$ işlemi ile bir halka oluşturacaktır.

$\left[(X_{uv})o(Y_{uv})\right]o(W_{uv})=(X_{uv})o\left[(Y_{uv})o(W_{uv})\right]$ isbatlanacaktır.

$(X_{uv})o(Y_{uv})=\sum_{r=1}^{n} X_{ur}Y_{(n+1-r)v}\ \Big|\ (u=1,2,\ldots n),\ v=1,2,\ldots n)$ ile tanımlandığını gözönünde tutarak

$(X_{uv})o(Y_{uv})=(A_{uv}),(Y_{uv})o(W_{uv})=(B_{uv})$ olsun.

$(Z_{uv})=(A_{uv})\circ(W_{uv})=(X_{uv})\circ(B_{uv})$ olduğunu göstereceğiz.

(Z_{uv}) matrisinin u.cu satır, t.ci sütun elemanı

$Z_{ut}=\sum_{r=1}^{n} A_{ur}W_{(n+1-r)t}$ veya

$A_{u1}=\sum_{r=1}^{n}X_{ur}\cdot Y_{(n+1-r)1}$, $A_{u2}=\sum_{r=1}^{n}X_{ur}\cdot Y_{(n+1-r)2}$, ...

$A_{un}=\sum_{r=1}^{n}X_{ur}\cdot Y_{(n+1-r)n}$

$Z_{nt}=\ {}^{n}_{r=1}X_{ur}\cdot Y_{(n+1-r)1}W_{nt}+Y_{(n+1-r)2}W_{(n-1)t}+\dots\dots\dots\dots+$

$Y_{(n+1-r)n}\ W_{1t}$ veya

$Z_{ut}=\sum_{r=1}^{n}\ \sum_{p=1}^{n}X_{ur}\cdot Y_{(n+1-r)p}\cdot W_{(n+1-p)t}$ olur; bu sonuçla

(B_{uv})'nin (t).ci sütun elemanları

$B_{uv}=\sum_{p=1}^{n}Y_{up}\cdot W_{(n+1-p)t}$

$B_{1t}=\sum_{p=1}^{n}Y_{1p}\cdot W_{(n+1-p)t}$, $B_{zt}=\sum_{p=1}^{n}Y_{zp}\cdot W_{(n+1-p)t}$, ...

$B_{nt}=\sum_{p=1}^{n}Y_{np}\cdot W_{(n+1-p)t}$.

$Z_{uv}=\sum_{p=1}^{n}W_{(n+1-p)t}\cdot\left[X_{un}Y_{1p}+X_{u(n-1)}Y_{zp}+\dots\dots\dots+X_{u1}Y_{np}\right]$

$Z_{uv}=\sum_{p=1}^{n}\ \sum_{r=1}^{n}X_{ur}\cdot Y_{(n+1-r)p}\cdot W_{(n+1-p)t}$ sonucu karşılaştırıldığında (o) işleminin birleşimliliği gösterilmiş olur. k=1, g_k veya (o) çapraz çarpım kuralı ile oluşan kare matris halkalarını M_1^n ile göstereceğiz. Halkanın (o) işlemine göre ε_1^n etkisiz (birim) elemanı

$$\varepsilon_1^n=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots\dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 0 & \dots\dots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

dır. Teorem daha somut, daha aritmetik bir biçimde anlatılmak istenirse, örneğin k=2, n=3 için

$$(X_{uv})=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ X_{21} & X_{22} & X_{23}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33}\end{pmatrix},\quad (Y_{uv})=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13}\\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23}\\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{pmatrix}$$ olsun.

$(X_{uv})\ g_2(Y_{uv})=(Z^2_{uv})=\sum_{r=1}^{3}X_{ur}\cdot Y_{sv}\ \Big|\ r+s=3p+2;(u=1,2,3),(v=1,2,3)$

daha açık şekilde

$$(X_{uv})g_2(Y_{uv})=(Z^2_{uv})=\begin{pmatrix} X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{31}+X_{13}Y_{21} & X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{32}+X_{13}Y_{22}\cdots\cdots \\ X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{31}+X_{23}Y_{21} & X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{32}+X_{23}Y_{22}\cdots\cdots \\ X_{31}Y_{11}+X_{32}Y_{31}+X_{33}Y_{21} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

dur. (g_2) işleminin birleşimli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$\left[(X_{uv})g_2(Y_{uv})\right]g_2(W_{uv})=(X_{uv})g_2\left[(Y_{uv})g_2(W_{uv})\right]$ doğrulanmalıdır.

$(X_{uv})g_2(Y_{uv})=A_{uv}$; $A_{11}=X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{31}+X_{13}Y_{21}$; $A_{12}=X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{32}+X_{13}Y_{22}$;

$A_{13}=\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(A_{uv})g_2(W_{uv})=Z_{uv}$; $Z_{11}=(X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{31}+X_{13}Y_{21})W_{11}+(X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{32}+X_{12}Y_{22})W_{31}+A_{13}\cdot W_{21}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(Y_{uv})g_2(W_{uv})=B_{uv}$; $B_{11}=Y_{11}W_{11}+Y_{12}W_{31}+Y_{13}W_{21}$; $B_{21}=Y_{21}W_{11}+Y_{22}W_{31}+Y_{23}W_{21}$;

$\cancel{B_{31}=}\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(X_{uv})g_2(B_{uv})=Z_{uv}$; $Z_{11}=X_{11}(Y_{11}W_{11}+Y_{12}W_{31}+W_{21}Y_{31})+X_{12}(Y_{31}W_{11}+Y_{32}W_{31}+Y_{33}W_{21})+X_{13}\cdot B_{31}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

her iki halde de Z_{11} elemanlarının eşitliği görülecektir; aynı işlemler diğer elemanlar için de tekrarlanabilir. Bu halkayı M^3_2 ile göstereceğiz. Halkanın birim elemanı $\mathcal{E}^3_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ dır. Örneğin n=4 k=2 için M^4_2 halkanın birim elemanı $\mathcal{E}^4_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ olur.

M^n_k matris halkalar sınıfı $2+3+4+\cdots\cdots+n=(n-1)(n+2)/2$ sayıda halka ihtiva eder. Klasik çarpım kurallı matris halkaları (n=2 hariç) bu sınıfın elemanı değildir.

TEOREM: 5.29.35

X_{uv} R, m_k R; g_k $(k=0,1,2,\ldots\ldots n-1)$ gen çarpım kuralları dizisi $(X)=(X_{uv})$; $Y=(Y_{uv})$ $(u=1,2,\ldots\ldots n)$, $(v=1,2,\ldots\ldots n)$; $(n\mathrm{x}n)$ matrisleri olarak

$(\top)$, $(\perp)$ iç işlemleri :

$(\top)$: $(X)\top(Y)=(X_{uv})\top(Y_{uv})=(X_{uv}+Y_{uv})$

$(\perp)$: $(X)\ (Y)=(X_{uv})\ (Y_{uv})=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(X_{uv})g_k(Y_{uv})=Z_{uv}$, ya da değişimlilik söz konusu olmaksızın daha pratik bir yazım şekli ile

$(X)\perp(Y)=(X_{uv})\perp(Y_{uv})=(X_{uv})(\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot g_k)(Y_{uv})$ ile tanımlanan (X) matrisleri (m_k) değişen değerlerine (parametresine) göre halkalar dizisi oluşturur. Halka değişimli olmayan birimli bir halkadır.

İsbat:

Kolay ve somut bir yol olarak, teoremin $n=2$, $n=3$ için doğrulandığını göstereceğiz. $n=2$ halinde:

$(\perp)$ işleminin birleşimli olduğunu göstermek yeterlidir. $(\perp)$ işleminin ayrıntılı açık ifadesi

$$Z=Z_{uv}=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{1} m_k(X_{uv})g_k(Y_{uv})=$$

$$Z_{uv}=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}=m_o\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}g_o\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}+m_1\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}g_1\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_o(X_{11}Y_{11}\mp X_{12}Y_{21})+m_1(X_{11}Y_{21}\mp X_{12}Y_{11}) & m_o(X_{11}Y_{12}\mp X_{12}Y_{22})+m_1(X_{11}Y_{22}\mp X_{12}Y_{12}) \\ m_o(X_{21}Y_{11}\mp X_{22}Y_{21})+m_1(X_{21}Y_{21}\mp X_{22}Y_{11}) & m_o(X_{21}Y_{12}\mp X_{22}Y_{22})+m_1(X_{21}Y_{22}\mp X_{22}Y_{12}) \end{pmatrix}$$

bulunur. Daha özet cebirsel yapısı

$(Z_{uv})=\sum_{k=1}^{2} m_o(X_{uk}Y_{rv})+m_1(X_{uk}Y_{sv}) \mid k+r=2p,\ k+s=3$ olur;

$k+r$, $n=2$ ile bölünmesinden (0) kalanını, $k+s$, $n=2$ ile bölünmesinden (1) kalanını verecektir.

Burada g_o'ın, $(2x2)$ de bilinen klasik matris çarpımını $(\cdot)$; (g_1)'ın $(2x2)$de çapraz çarpımı (o) ifade ettiği açıktır.

$(\perp)$ işleminin birleşimli olduğunu göstermek için öncelikle $(\cdot)$,(o) işlemlerinin aralarında birleşimli olduğunu isbatlamamız gerekmektedir; yani

$$\left[\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}\right] o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\right]$$

doğrulanması demektir. Eşitliğin sol yanı:

$$\left[\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}\right] o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22} \\ X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22} \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} (X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21})u_{21}+(X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22})u_{11} & (X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21})u_{22}+(X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22})u_{12} \\ (X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21})u_{21}+(X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22})u_{11} & (X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21})u_{22}+(X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22})u_{12} \end{pmatrix}$$

Eşitliğin sağ yanı:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{bmatrix} (Y_{11}u_{21}+Y_{12}u_{11}) & (Y_{11}u_{22}+Y_{12}u_{12}) \\ (Y_{21}u_{21}+Y_{22}u_{11}) & (Y_{21}u_{22}+Y_{22}u_{12}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} X_{11}(Y_{11}u_{21}+Y_{12}u_{11})+X_{12}(Y_{21}u_{21}+Y_{22}u_{11}) & X_{11}(Y_{11}u_{22}+Y_{12}u_{12})+X_{12}(Y_{21}u_{22}+Y_{22}u_{12}) \\ X_{21}(Y_{11}u_{21}+Y_{12}u_{11})+X_{22}(Y_{21}u_{21}+Y_{22}u_{11}) & X_{21}(Y_{11}u_{22}+Y_{12}u_{12})+X_{22}(Y_{21}u_{22}+Y_{22}u_{12}) \end{pmatrix}$$

sonuçları ile iki yanın eşitliği gösterilmiş olur; buna göre

$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ ise

$(X\perp Y)\perp u = X\perp(Y\perp u)$' olduğunu kanıtlayacağız..

$(X\perp Y)=m_o(X)\cdot(Y)+m_1(X)\circ(Y)$ olduğuna göre eşitliğin sol yanı:

$(X\perp Y)\perp u=m_o(X)\cdot(Y\perp u)+m_1(X)\circ(Y\perp u)$

$(X\perp Y)\perp u=\left[m_o(X)(\cdot)+m_1(X)(\circ)\right]\left[m_o(Y)\cdot(u)+m_1(Y)\circ(u)\right]$

$(X\perp Y)\perp u=m_o^2(X)\cdot(Y)\cdot(u)+m_om_1(X)\cdot(Y\circ u)+$

$m_om_1(X)\circ(Y\cdot u)+m_1^2(X)\circ(Y\circ u)$, diğer taraf

$X\perp(Y\perp u)=(X)\perp\left[m_o(Y\cdot u)+m_1(Y\circ u)\right]$

$X\perp(Y\perp u)=m_o(X)\left[m_o(Y\cdot u)+m_1(Y\circ u)\right]+m_1(X)\circ\left[m_o(Y\cdot u)+m_1(Y\circ u)\right]$

$=m_o^2(X)\cdot(Y\cdot u)+m_om_1(X)\cdot(Y\circ u)+$

$m_om_1(X)\circ(Y\cdot u)+m_1^2(X)\circ(Y\circ u)$ sonuçlarıyla $(\cdot)$ ve $(\circ)$ işlemlerinin birleşimliliği gözönünde tutulduğunda $(\perp)$ işleminin birleşimliliği kanıtlanmış olur.

m_o, m_1'in değişen değerlerine göre (T),$(\perp)$ işlemleri değişik halkalar tanımlar ve halkalar bir sınıf teşkil eder; $m_o, m_1 \in R$ olarak R içinde m_o,m_1 ikili permütasyon adedi sonsuz olacağından (2x2) gen çarpım kurallı matris kombinezonları diyeceğimiz halka sınıfında sonsuz sayıda halka bulunur. Halkaların birim elemanı $(\mp)$ işaretleri de gözönüne alındığında

$\mathcal{E}= 1/(m_o^2\mp m_1^2)\begin{pmatrix} m_o\mp m_1 \\ m_1\mp m_o \end{pmatrix}$dır. $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ nin ters elemanı

$P=(m_o^2+m_1^2)(X_{11}Y_{22}-X_{12}X_{21})$ göstermek üzere:

$Y_{11}=[m_o(m_oX_{22}+m_1X_{21})-m_1(m_oX_{12}+m_1X_{11})]/P$

$Y_{12}=[-m_o(m_oX_{12}+m_1X_{11})-m_1(m_oX_{22}+m_1X_{21})]/P$

$Y_{21}=[-m_o(m_oX_{21}-m_1X_{22})+m_1(m_oX_{11}-m_1X_{12})]/P$

$Y_{22}=[m_o(m_oX_{11}-m_1X_{12})+m_1(m_oX_{21}-m_1X_{22})]/P$ olur.

$n=3$ halinde, gen çarpım kurallı matris kombinezonları halka sınıfını ve bir elemanını aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz.

$(Z_{uv})=\sum_{k=1}^{3} m_o(X_{uk}Y_{rv})+m_1(X_{uk}Y_{sv})+m_2(X_{uk}Y_{tv})$

$(k+r)$ nin (n) ile bölümü (0) kalanını, $(k+s)$'in (n) ile bölümü (1) kalanını, $(k+t)$'nin (n) ile bölümü (2) kalanını verecektir.

Halkanın $(\perp)$ işlemine göre (ξ) etkisiz birim elemanı

$L_o=m_1m_2-m_o^2$; $L_1=m_om_2-m_1^2$; $L_2=m_om_1-m_2^2$.

$N=m_oL_o+m_1L_1+m_2L_2$ ile gösterildiğinde

$$=(1/N)\begin{pmatrix} L_2L_oL_1 \\ L_oL_1L_2 \\ L_1L_2L_o \end{pmatrix}$$ olur. Örneğin:

$m_o=1 \quad m_1=0 \quad m_2=0$ için birim eleman: $\xi=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$m_o=0 \quad m_1=1 \quad m_2=0$ için birim eleman: $\xi=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ ve $m_o=0$, $m_1=0$, $m_2=1$ için

$\xi=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ bulunur.

TEOREM: 5.29.35 ile ortaya konan gen çarpım kurallı, matris kombinezonları cümlesi değişimli olmayan birimli halkalar olmakta (2x2). kombinezonları hariç, klasik çarpım kurallı matris halkaları bu sınıfa ait bulunmamaktadır.

Bu sınıfda $m_o, m_1, \ldots, m_{n-1} \in R$ değer takımı için $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}=2^n-1$ sayıda halka bulunmaktadır. $\binom{n}{k}$ burada n sayıda $m_o, m_1, \ldots, m_1, \ldots, m_{n-1}$ elemanlarının (k) lı kombinezonlarını ifade etmektedir. Örneğin (2x2) matrisleri ve m_o, m_1 takımı için kombinezon sayısı (3)dür. R içinde (n) elemanlı $m_o, m_1, \ldots, m_{n-1}$ değer takım kombinezonları sonsuz sayıda olduğundan (nxn) matrisleri kombinezonları halka sınıfında sonsuz sayıda halka var demektir.

TANIM: 5.30- GEN ÇARPIMLI (2x2) MATRİS KOMBİNEZONLARI CİSİMLER ALT SINIFI VE QUATERNİONLAR CİSİMİ

a) CİSİMLER ALT SINIFI

TEOREM : 5.29.35'in n=2 için (2x2) matrisleri konusunda isbat edilen gen çarpım kurallı

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m_o(X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21})+m_1(X_{11}Y_{21}-X_{12}Y_{11}) & m_o(X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22})+m_1(X_{11}Y_{22}\mp X_{12}Y_{12}) \\ m_o(X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21})+m_1(X_{21}Y_{21}-X_{22}Y_{11}) & m_o(X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22})+m_1(X_{21}Y_{22}\mp X_{22}Y_{12}) \end{pmatrix}$$

matris kombinezonları sınıfının

$m_o^2+m_1^2\neq 0$ ve $m_o^2-m_1^2\neq 0$, $X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}\neq 0$ koşullarının belirlediği sınıfa gen çarpım kurallı (2x2) matris kombinezonları sınıfının cisimler alt cümlesi diyeceğiz.

Z_{12}, Z_{22} elemanlarını belirleyen ifadede (-) halin alınması takdirinde cisimler sınıfının (ξ) birim elemanı

$$\xi = (1/m_o^2+m_1^2)\begin{pmatrix} m_o & -m_1 \\ m_1 & m_o \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\text{' nin ters elemanının}$$

$P=(m_o^2-m_1^2)(X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21})\neq 0$ olarak n=2 isbatında gösterilen

$Y_{11}=\left[m_o(m_oX_{22}+m_1X_{21})+m_1(m_oX_{12}+m_1X_{11})\right]/P$

$Y_{12}=\left[-m_o(m_oX_{12}+m_1X_{11})-m_1(m_oX_{22}+m_1X_{21})\right]/P$

.... olacağı bilinmektedir.

b) QUATERNİONLAR

Gen çarpım kurallı (2x2) matris kombinezonları cisimler alt sınıfının (-) koşulunda $m_o=1$, $m_1=0$ değerleri ve $X_{11}=A+C\hat{I}$, $X_{12}=B+D\hat{I}$ $X_{21}=-B+D\hat{I}$, $X_{22}=A-C\hat{I}$ elemanlarının belirlediği cisime QUATERNİON denir. W.R.HAMİLTON tarafından (İrlandalı matematikçi) 1844 de tebliğ edilmiştir.

Cismin birim elemanı $\xi=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$'nin $\begin{pmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{pmatrix}$ ters elemanı

$P=A^2+B^2+C^2+D^2$ olarak $Y_{11}=(A-C\hat{I})/P$; $Y_{12}=-(B+D\hat{I})/P$

$Y_{21}=-(-B+D\hat{I})/P$; $Y_{22}=(A+C\hat{I})/P$ dır.

c) QUATERNİON SINIFI

Gen çarpım kurallı (2x2) matris kombinezonları cisimler sınıfının (-) koşulunda $X_{11}=m_oA+m_1i$, $X_{12}=m_1i+m_oD$, $X_{21}=m_1i-m_oD$, $X_{22}=m_oA-m_1i$ elemanlarının oluşturduğu matrisler cismine quaternionlar sınıfı denecektir.

Quaternion sınıfının birim elemanı $\xi=\begin{pmatrix}m_o&-m_1\\m_1&m_o\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{pmatrix}$ ters elemanı $P=(m_o^2+m_1^2)\left[m_o^2(A^2+D^2)+2m_1^2\right]$ olarak

$$Y_{11}=\left\{m_o\left[(m_o^2-m_1^2)A-2m_om_1D\right]-m_1(m_o^2+m_1^2)i\right\}/P$$
$$Y_{12}=\left\{-m_o\left[(m_o^2-m_1^2)D+2m_om_1A\right]+m_1(m_o^2+m_1^2)i\right\}/P$$
$$Y_{21}=\left\{m_o\left[(m_o^2-m_1^2)D+2m_om_1A\right]+m_1(m_o^2+m_1^2)i\right\}/P$$
$$Y_{22}=\left\{m_o\left[(m_o^2-m_1^2)A-2m_om_1D\right]+m_1(m_o^2+m_1^2)i\right\}/P$$ bulunur.

TEOREM: 5.29.36

$X_{uv}, Y_{uv}, m_o, m_1 \in R$ ve (X_{uv}), (Y_{uv}), (2x2) matrisleri olarak

(T), (Δ) iç işlemleri:

$$(T)\quad\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11}+Y_{11}&X_{12}+Y_{12}\\X_{21}+Y_{21}&X_{22}+Y_{22}\end{pmatrix}$$

$$(\Delta)\quad\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_oX_{11}Y_{11}+m_1(X_{11}Y_{21}+X_{12}Y_{11})&m_oX_{11}Y_{12}+m_1(X_{11}Y_{22}+X_{12}Y_{12})\\m_oX_{21}Y_{11}+m_1(X_{21}Y_{21}+X_{22}Y_{11})&m_oX_{21}Y_{12}+m_1(X_{21}Y_{22}+X_{22}Y_{12})\end{pmatrix}$$

veya

$$\Delta'\quad\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\Delta'\begin{pmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_oX_{12}Y_{21}+m_1(X_{11}Y_{21}+X_{12}Y_{11})&m_oX_{12}Y_{12}+m_1(X_{12}Y_{22}+X_{22}Y_{12})\\m_oX_{22}Y_{21}+m_1(X_{21}Y_{21}+X_{22}Y_{11})&m_oX_{22}Y_{22}+m_1(X_{21}Y_{22}+X_{22}Y_{12})\end{pmatrix}$$

ile tanımlanmış ise (X) matris cümlesi değişimli olmayan birimli halka dizisi oluşturur.

İsbat:

Yalnız (Δ) tanımı için birleşimlilik kanıtlanacak, istenirse (Δ') benzer yolla doğrulanabilecektir.

$$\left[\begin{pmatrix} X_{11} X_{12} \\ X_{21} X_{22} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} Y_{11} Y_{12} \\ Y_{21} Y_{22} \end{pmatrix}\right] \triangle \begin{pmatrix} u_{11} u_{12} \\ u_{21} u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} X_{12} \\ X_{21} X_{22} \end{pmatrix} \triangle \left[\begin{pmatrix} Y_{11} Y_{12} \\ Y_{21} Y_{22} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} u_{11} u_{12} \\ u_{21} u_{22} \end{pmatrix}\right] = \begin{matrix} z_{11} z_{12} \\ z_{21} z_{22} \end{matrix}$$

eşitliğin her iki yanında bir elemanın örneğin (z_{11})'in eşitliğini ayrıntılı olarak gösterecek, diğerlerinin eşitliğini isteyen okuyucuya bırakacağız. Eşitliğin sol yanında (z_{11}) elemanı

$z_{11} = m_o[m_o X_{11} Y_{11} + m_1(X_{11} Y_{21} + X_{12} Y_{11})]\ u_{11} + m_1\{[m_o X_{11} Y_{11} + m_1(X_{11} Y_{21} + X_{12} Y_{11}]u_{21}$
$[m_o X_{11} Y_{12} + m_1(X_{11} Y_{22} + X_{12} Y_{12})]u_{11}\}$, eşitliğin sağ yanında (z_{11}) eleman

$z_{11} = m_o X_{11}[m_o Y_{11} u_{11} + m_1(Y_{11} u_{21} + Y_{12} u_{11})] + m_1\{X_{11}[m_o Y_{21} u_{11} + m_1(Y_{21} u_{21} + Y_{22} u_{11})]$
$X_{12}[m_o Y_{11} u_{11} + m_1(Y_{11} u_{21} + Y_{12} u_{11})]\}$ eşit ifadeler ile belirlenmiştir.

işleminin (Σ) birim elemanı $\Sigma = (1/m_1^2)\begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ m_1 & -m_o \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} Y_{11} Y_{12} \\ Y_{21} Y_{22} \end{pmatrix}$

~~ters eleman~~ $P = m_1^2(X_{12} X_{21} - X_{11} X_{22})$ yi göstermek üzere

$Y_{11} = -X_{11}/P$; $Y_{12} = (m_o X_{11} + m_1 X_{21})/m_1 P$, $Y_{21} = (m_o X_{11} + m_1 X_{12})/m_1 P$

$X_{22} = -[m_o(m_o X_{11} + m_1 X_{12}) + m_1(m_o X_{21} + m_1 X_{22})]\ /m_1^2\ P$ olur.

TEOREM: 5.29.36 ile verilen m_o, m_1 parametrelerine bağlı olarak ortaya konan (2x2) matris halkalar sınıfına DUAL ÇARPIMLI (2x2) MATRİS KOMBİNEZONLARI HALKA SINIFI denecektir.

TANIM: 5.30-(2x2) MATRİSLERİNDE DUAL CİSİMLER SINIFI

TEOREM: 5.29.36 daki dual çarpımlı (2x2) matris kombinezonları halka sınıfında $m_o \neq 0$, $m_1 \neq 0$ ve

$X_{11} = A + Bi$, $X_{12} = C + Di$, $X_{21} = C - Di$, $X_{22} = -A + Bi$ koşullarının belirlediği sınıfa (2x2) matrislerinde dual cisimler sınıfı denecektir.

6. ALTINCI KISIM

R^2 DE CİSİMLERİ VE HALKALARI SINIFLAMA YÖNTEMİ VE R^2 DE QUATERNİON, FORM QUATERNİON, DEFORM QUATERNİON MİNUMUM QUATERNİON

TANIM: 6.31- R^2 DE CİSİMLER VE HALKALAR SINIFI

R^2 de, elemanları bir dizi cisim veya halka olan cümleye cisimler sınıfı veya halkalar sınıfı denecektir.

TEOREM: 6.31.37

$(X_1,X_2),(Y_1Y_2) \in R^2$ ve $m,n \in R$, $(m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak $(T),(\perp)$ iç işlemleri:

$(T):(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,\ X_2+Y_2) \in R^2$

$(\perp):(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=[m(X_1Y_1-X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1),n(X_1Y_1-X_2Y_2)+m(X_1Y_2+X_2Y_1)]$

ile tanımlanan R^2 (m,n) cümleleri birimli, değişimli cisimlerdir.

İsbat:

(T) iç işleminin gerekli koşulları sağladığı açıktır. $(\perp)$ iç işleminin birleşimlilik ve (T) üzerine dağılımlılık değişimlilik nitelikleri teoremin hipotezinden kolayca gösterilebilir.

$(\perp)$ işleminin birim elemanı $\xi=(m/(m^2+n^2),-n/(m^2+n^2))$

$(R^2(m,n),\perp)$ gurubu (T) nin $e=(0,0)$ elemanını içermez; zira:

$\forall (X_1,X_2) \in R^2$ (m,n) için $(R^2(m,n),T,\perp)$ üçlüsü

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\xi=(m/(m^2+n^2),-n/(m^2+n^2))$ olan bir (Y_1,Y_2) nin varlığını gerektirir ki bu,

$Y_1=((m^2-n^2)X_1-2mnX_2)/(m^2+n^2)^2.(X_1^2+X_2^2)$

$Y_2=-((m^2-n^2)X_2+2mnX_1)/(m^2+n^2)^2.(X_1^2+X_2^2)$dur.

$(X_1,X_2)=(0,0)$ elemanı için (Y_1,Y_2) mevcut olmadığından $(\perp)$ işlemine göre $(0,0) \notin (R^2(m,n),\perp)$ dır.

Bu teorem ile cisimler cümlesi olduğu saptanan R^2 (m,n) cümlesine KOMPLEKS CİSİMLER SINIFI denecek ve $\mathbb{C}(m,n)$ notasyonu ile gösterilecektir.

TANIM: 6.32-KOMPLEKS SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in R$ $(m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak: $(mX_1-nX_2)+(nX_1+mX_2)i$, yapılı sayılara kompleks sayı cümleleri sınıfı adı verilecek ve $C(m,n)$ ile ifade edilecektir.

TEOREM: 6.32.38

$\mathbb{C}(m,n)$ cisim sınıfı ile $C(m,n)$ kompleks sayı çümleleri sınıfı (T),$(\perp)$ ve $(+)$,$(\circ)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$(X_1,X_2) \in \mathbb{C}(m,n) \rightarrow (mX_1-nX_2)+(nX_1+mX_2)i \in C(m,n)$

$(Y_1,Y_2) \in \mathbb{C}(m,n) \rightarrow (mY_1-nY_2)+(nY_1+mY_2)i \in C(m,n)$ olsun

(T),$(+)$ işlemleri açısından:

$(T)(X_1,X_2)T(Y_1Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2) \in \mathbb{C}(m,n)$

$(+)\left[(mX_1-nX_2)+(nX_1+mX_2i)\right]+\left[(mY_1-nY_2)+(nY_1+mY_2)i\right]=$

$m(X_1+Y_1)-n(X_2+Y_2)+\left[n(X_1+Y_1)+m(X_2+Y_2)\right]i$

$(X_1+Y_1,X_2+Y_2) \rightarrow m(X_1+Y_1)-n(X_2+Y_2)+\left[m(X_1+Y_1)+m(X_2+Y_2)\right]i$

$(\perp)$,$(\circ)$ işlemleri açısından:

$(\perp)(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\left[m(X_1Y_1-X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1),n(Y_1Y_1-X_2Y_2)+m(X_1Y_2+X_2Y_1)\right]$

$(\circ)\left[(mX_1-nX_2)+(nX_1+mX_2)i\right]\circ\left[(mY_1-nY_2)+(nY_1+mY_2)i\right]=$

$m\left[m(X_1Y_1-X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1)\right]-n\left[n(X_1Y_1-X_2Y_2)+m(X_1Y_2+X_2Y_1)\right]+$

$\left\{n\left[m(X_1Y_2-X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1)\right]+m\left[n(X_1Y_1-X_2Y_2)+m(X_1Y_2+X_2Y_1)\right]\right\}i$ olur.

Bu sonuçla $(\perp)$,$(\circ)$ işlemlerinin izomorf olduğu anlaşılır.

TANIM: 6.33-FORM QUATERNİON

R^2 de, cisim teşkil eden ve tanımlanamış işlemleri karşısında elemanları belirli bir yapı özelliğini koruyan cümlelere form quaternionlar denecektir.

TEOREM: 6.33.39

$X_1, X_2, m, n \in R$; m, n önceden seçilmiş $(m^2+n^2 \neq 0)$ parametreler olarak, $(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) \in \mathbb{C}(m,n)$ cisimler sınıfına dahil elemanların oluşturduğu $\mathbb{C}(m,n)$ nin alt sınıfı form quaternion sınıfı oluşturur.

İsbat:

$\mathbb{C}(m,n)$ cisimler sınıfına dahil olarak tanımlanan

(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) elemanlar cümlesinin $\mathbb{C}(m,n)$ nin iç işlemleri muvacehesinde yapısal özelliğini koruduğunu saptamak gereklidir.

(T) iç işlem karşısında

$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)T(mY_1+nY_2, mY_2-nY_1)=$

$[m(X_1+Y_1)+n(X_2+Y_2),\ m(X_2+Y_2)+n(X_1+Y_1)]$ ve $(\perp)$ iç işlemi

$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)\perp(mX_1-nY_2), mY_2-nY_1)=$

$(m^2+n^2)[m(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1),\ m(X_1Y_2+X_2Y_1)+n(X_1Y_1-X_2Y_2)]$ veya

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\in\mathbb{C}(m,n)$

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X,Y)$ olduğu takdirde

$[(mX_1+hX_2, mX_2-nX_1)\perp(mY_1+nY_2, mY_2-nY_1)]=$

$[(m^2-n^2)X+2mnY,\ (m^2-n^2)Y-2mnX]$ olduğunu görürüz.

TANIM: 6.34- MİNUMUM QUATERNİON

$\mathbb{C}^2(m,n)$ kompleks cisimler sınıfı içinde tanımlanabilir form quaternionlara MİNUMUM QUATERNİONLAR denecektir.

CxC den daha küçük boyutta bir form quaternion tanımı mümkün olmadığından minumum deyimi kullanılmıştır.

TEOREM: 6.34.40

Teorem 6.33.39 da $(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)\in\mathbb{C}(m,n)$ form quaternionlar sınıfının

$m^2+n^2=1$, $m>1$ veya $m<-1$ koşullarının belirlediği alt sınıflar minumum quaternionlardır.

İsbat:

Teoremin hipotezini oluşturan koşullarda örneğin

$m=\sqrt{2}$, $n=i$, $(m^2+n^2=1)$ değerleri için

$(mX_1+nX_2,\ mX_2-nX_1)$ form quaternion

$(\sqrt{2}X_1+X_2i,\ \sqrt{2}X_2-X_1i)$ olarak ve yine örneğin $m=\sqrt{3}$, $n=\sqrt{2}\,i$ için $(\sqrt{3}X_1+\sqrt{2}X_2i,\ \sqrt{3}X_2-\sqrt{2}X_1i)$ olarak C^2de tanımlanmış olur. Ve bunlar $\mathbb{C}(m,n)$ cisimler sınıfının birer elemanı olan cisim cümleleridir.

Bu sınıfı $Q_2(m,n)$ veya $Q_2(m^2+n^2=1)$ ile göstereceğiz.

TANIM: 6.35-(S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2) \in R^2$ ve m,n R, $(m^2+n^2\neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak T, $\perp$ iç işlemleri

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2) \in R^2$ ve

($\perp$) $(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=[m(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1),n(X_1Y_1+X_2Y_2)+m(X_1Y_2+X_2Y_1)]$

ile tanımlanan R^2 (m,n) cümleleri (S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI Teşkil eder.

İsbat:

İç işlemleri teoremin hipotezi ile tanımlanan R^2 (m,n) cümlelerinin ~~bir~~ halka olduğu, daha sonra, m,n'nin belirli değerleri için, m,n nin değişik değerlerine göre teşkil olunan halka sınıfı içinde, (s) faktörlü halkanın bulunduğunu göstermek gerekmektedir.

(T) iç işleminin, Abel gurubunun gerektirdiği koşulları sağladığı açıktır. Sıfır eleman $e=(0,0)$dır.

($\perp$) iç işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık nitelikleri hipotezden ayrıca görülebilmektedir. ($\perp$) nin etkisiz (birim) elemanı $\xi=(m/(m^2-n^2), -n/(m^2-n^2))$ dir. ($\perp$) işlemine göre

$\forall(X_1,X_2) \in R^2(m,n)$ nin, (Y_1,Y_2) ters elemanı :

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(m/(m^2-n^2), -n/(m^2-n^2))$ den

$Y_1=[(m^2+n^2)X_1+2mnX_2]/(m^2-n^2)^2\,(X_1^2-X_2^2)$

$Y_2=-[(m^2+n^2)X_2+2mnX_1]/(m^2-n^2)^2\,(X_1^2-X_2^2)$ olur. $X_1\neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcut olur.

(S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI denen bu matematik yapılar m=1, n=0 için $\$(1,0)$,(s) faktörlü halkayı tanımlar.

TANIM: 6.35-(S) FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLELERİ SINIFI

X_1,X_2, $m,n\in R$; $(m^2+n^2\neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak: $(mX_1+nX_2)+(nX_1+mX_2)s$, $(s^2=1)$ yapısındaki sayılara (s) faktörlü sayı cümleleri sınıfı denecek ve s(m,n) ile ifade edilecektir.

TEOREM: 6.35.41

$\$(m,n)$ halkalar sınıfı ile $S(m,n),(s)$ faktörlü sayı cümleleri sınıfı, $T, \perp$ ve $(+),(\cdot)$ işlemlerine göre izomorfturlar.

İsbat: (Bak TEOREM)

TANIM: 6.36- DEFORM QUATERNİON

R^2 de cisim teşkil etmeyip, halka niteliğinde ve tanımlanan iç işlemler karşısında, elemanları belirli bir yapı özelliğini koruyan cümlelere DEFORM QUATERNİON'lar denecektir.

TEOREM: 6.36.42

$X_1, X_2; m,n \in R$, ($m^2+n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler) olarak $\cancel{(mX_1-nX_2, mX_2-nX_1)}$ yapıda olup, $\$(m,n)$ halkalar sınıfına dahil elemanların cümlesi deform quaternion tanımlar.

İsbat:

$\$(m,n)$ halkalar sınıfına dahil olduğundan cisim değil, halkadır ve $\$(m,n)$ nin (T), ($\perp$) işlemleri karşısında (mX_1-nX_2, mX_2-nX_1) yapısal özelliğinin korunduğu gösterilmelidir. Nitekim

(T) $(mX_1-nX_2, mX_2-nX_1)\ T\ (mY_1-nY_2, mY_2-nY_1) =$

$\left[m(X_1+Y_1)-n(X_2+Y_2),\ m(X_2+Y_2)-n(X_1+Y_1)\right]$

($\perp$) $(mX_1-nX_2, mX_2-nX_1) \perp (mY_1-nY_2, mY_2-nY_1) =$

$(m^2-n^2)\left[m(X_1Y_1+X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1),\ m(X_1Y_2+X_2Y_1)-n(X_1Y_1+X_2Y_2)\right]$ ve

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2) \in \$(m,n);\ (X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=(X,Y)$ ise

$(mX_1-nX_2,\ mX_2-nX_1)\perp(mY_1-nY_2,\ mY_2-nY_1)=$

$\left[(m^2+n^2)X-2mnY,\ (m^2+n^2)Y-2mnX\right]$ olacağını kaydedelim.

TANIM: 6.37- AQUATERNİON

C^2 kompleks sayılar cümlesi içinde, tanımlanabilir deform quaternionlara AQUATERNİON denecektir.

Tanım, geçerli iç işlemler karşısında elemanların yapı özelliğini koruyan C^2 de cisim olmayan bir halka realize ettiğinden, quaternion olmadığını anlatmak amacı ile aquaternion deyimi tercih edilmiştir.

TEOREM: 6.37.43

$(mX_1-nX_2, mX_2-nX_1) \in \$(m,n)$ deform quaternion sınıfının $m^2-n^2=-1$

ve $-1<n<1$ için, m,n değerlerinin tayin edeceği $\$(m,n)$ halkaları AQUATERNİONLAR SINIFI oluşturur.

İsbat:

Teoremin hipotezini oluşturan koşullarda örneğin

$n=1/2$, $m=\mp(\sqrt{3}/2)i$, $(m^2-n^2=-1)$ değerleri için

$[(\mp\sqrt{3}/2)iX_1-(1/2)X_2,\ (\mp\sqrt{3}/2)iX_2-(1/2)X_1]$ olarak ve yine örneğin

$n=1/3$, $m=(\mp 2\sqrt{2}/3)i$ $(m^2-n^2)=-1$ değerleri için

$[(\mp 2\sqrt{2}/3)iX_1-(1/3)X_2,\ (\mp 2\sqrt{2}/3)iX_2-(1/3)X_1]$ olarak C^2 de tanımlanmış olur ve bunlar deform quaternionlar sınıfının bir alt sınıfını oluştururlar.

Aquaternion sınıflarını da $Q_2^a(m,n)$, Q_2^a $(m^2-n^2=-1)$ ile ifade edeceğiz.

TANIM: 6.38- DUAL HALKALAR SINIFI

Çarpmada, içerdiği parametrelerin değerlerine göre R^2 de bir dizi halka oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda Dual sayılar halkasını tanımlayan halka dizisine dual halkalar sınıfı denilecek ve $\mathbb{D}(m,n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.38.44-

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\in R^2$ ve $m,n\in R$ $(m^2+n^2\neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak, $T,\perp$ iç işlemleri :

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\in R^2$

($\perp$) $(X_1,X_2)\ (Y_1,Y_2)=[mX_1Y_1,nX_1Y_1+m(X_1Y_2+X_2Y_1)]\in R^2$ ile, tanımlanan R^2 (m,n) cümleleri Dual halkalar sınıfını teşkil eder.

İsbat:

İç işlemleri teoremin hipotezi ile tanımlanan R^2 (m,n) cümlelerinin önce bir halka olduğu, daha sonra m,n nin belirli değerleri için, m,n nin değişik değerlerine göre teşkil olunan halka sınıfı içinde dual sayılar halkasının bulunduğunu göstermek gerekmektedir.

($\perp$) iç işleminin, birleşimlilik ve (T) üzerine dağılımlılık niteliği hipotezden görülebilir; (T) iç işleminin ise Abel gurubunun gerektirdiği koşulları sağladığı açıktır.

($\perp$) nin etkisiz birim elemanı $\xi=(1/m,-n/m^2)$ ve dual birim $\varsigma=(0,\ 1/m)$ dir; ( ) işlemine göre, (X_1,X_2)nin (Y_1,Y_2) ters elemanı

$Y_1=1/m^2X_1$, $Y_2=-(2nX_1+mX_2)/m^3X_1$ olur; $X_1\neq 0$ olan elemanların ters elemanları mevcuttur.

Dual sayı halkaları sınıfı denen bu matematik yapılar m=1, n=0; (1,0) dual sayılar halkasını tanımlar.

TANIM: 6.39- DUAL SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1,X_2,m,n\in R$ ($m^2+n^2\neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak), $mX_1+(mX_2+nX_1)\varsigma$ yapılı sayılara, dual sayı cümleleri sınıfı denecek ve $D(m,n)$ ile ifade edilecektir.

TEOREM: 6.39.45

$\mathbb{D}(m,n)$ dual halkalar sınıfı ile $D(m,n)$ dual sayı cümleleri sınıfı, (T),($\perp$) ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$(X_1,X_2)\in\mathbb{D}(m,n)\rightarrow mX_1+(mX_2+nX_1)\varsigma\in D(m,n)$

$(Y_1,Y_2)\in\mathbb{D}(m,n)\rightarrow mY_1+(mY_2+nY_1)\varsigma\in D(m,n)$ olarak (T),(+) işlemleri açısından

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\in\mathbb{D}(m,n)$

(+) $[mX_1+(mX_2+nX_1)\varsigma]+[mY_1+(mY_2+nY_1)\varsigma]=$

$m(X_1+Y_1)+[m(X_2+Y_2)+n(X_1+Y_1)]\varsigma$ ve ($\perp$),(.) işlemleri açısından

($\perp$) $(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=[mX_1Y_1,\ nX_1Y_1+m(X_1Y_2+X_2Y_1)\varsigma]$

$[mX_1+(mX_2+nX_1)\varsigma]\cdot[mY_1+(mY_2+nY_1)\varsigma]=$

$m(mX_1Y_1)+[m(nX_1Y_1+m(X_1Y_2+X_2Y_1))+n(X_1Y_1)]\varsigma$ sonuçları izomorfizmi

$(a,0)\rightarrow a(m+n\varsigma)$; ve $(0,b)\rightarrow mb\varsigma$ dur.

TANIM: 6.39- DUAL DEFORM QUATERNİON

Eleman yapıları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında elemanların yapı özelliğini koruyan ve paremetrelerin özel bir durumunda dual sayılar halkasını veren cisim olmayan halka nitelikli cümlelere DUAL DEFORM QUATERNİON denecektir.

TEOREM: 6.39.45

X_1, X_2, $m,n \in R$ $(m^2+n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak $(mX_1, mX_2-nX_1) \in \mathbb{D}(m,n)$ dual halka sınıfları deform quaternionlardır.

İsbat:

Sadece $\mathbb{D}(m,n)$ halka sınıfının iç işlemleri karşısında, eleman niteliğinin korunduğu ve m,n nin değerleri için dual sayılar halkasını belirlediği saptanacaktır. (T) ve $(\perp)$ iç işlemleri :

(T) $(mX_1, mX_2-nX_1)T(mY_1, mY_2-nY_1)=$

$[m(X_1+Y_1),\ m(X_2+Y_2)-n(X_1-Y_1)]$

$(\perp)$ $(mX_1, mX_2-nX_1)\perp(mY_1,\ mY_2-nY_1)=$

$m^2[mX_1Y_1,\ m(X_1Y_2+X_2Y_1)-nX_1Y_1)]$ dur ve bu sonuçla (T), $(\perp)$ iç işlemleri ile elemanların yapı özelliğinin korunduğu görülmektedir.

TANIM: 6.40- DUAL AQUATERNİON

C^2 de, tanımlanabilir dual deform quaternionlara dual aquaternion denecektir.

TEOREM: 6.40.46

Teorem 6.39.46 da a) $m^2=-1$, $n \in R$; b) $n=-1$, $m \in R$ değerlerinin tanımladığı dual deform quaternionları aquaterniondur.

İsbat:

a) $m^2=-1$ veya $m=\mp i$, $n=1 \in R$, $n \in R$ için

$(mX_1, mX_2-nX_1) \rightarrow (\mp iX_1, \mp iX_2-X_1)$ ve

b) $n^2=-1$, veya $n=\mp i$, $m \in R$ (örneğin $m=1$) için

$(mX_1, mX_2-nX_1) \rightarrow (X_1, X_2-X_1 i)$ C^2 de tanımlanmış olacaktır.

TANIM: 6.41- HELİSEL CİSİMLER SINIFI

Çarpımda içerdiği parametrelerin değerlerine göre R^2 de bir dizi cisim oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda, helisel cismi tanımlayan cisimler dizisine HELİSEL CİSİMLER SINIFI denecek ve $\mathbb{H}(m,n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.41.47

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $m,n \in R$ $(m^2+n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak$)$ (T), $(\perp)$ iç işlemleri:

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2) \in R^2$

$$(\perp)\ (X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\begin{bmatrix}(m-n/2)(X_1Y_1-X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2), \\ n(X_1Y_1-X_2Y_2)+(m+n/2)(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)\end{bmatrix}$$ ile

tanımlanan R^2 (m,n) cümleleri değişimli HELİSEL CİSİMLER SINIFI dır.

İsbat:

(T),($\perp$) işlemleri ile bu cümlelerin cisim olduğu ve, m,n parametrelerin belirli durumunda helisel sayılar cismini içerdiği gösterilecektir. Önce cisim aksiyomlarının gerçeklendiğini gösterelim: (T) işleminin gerekli koşulları saptadığı açıktır.($\perp$) işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık niteliği hipotezden kolayca görülebilir.

($\perp$) nin birim elemanı:

$\Sigma = (m+n/2)(m^2+3n^2/4),\ -n/(m^2+3n^2/\ )$

$(R^2(m,n),\perp)$ ikilisi, (T) nin sıfır elemanını içermez; zira

$\forall (X_1,X_2) \in R^2(m,n)$ için, $(R^2(m,n),T,\perp)$ üçlüsü

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=[(m+n/2)(m^2+3n^2/4)\ ,\ -n/(m^2+3n^2/4)]$den

$Y_1=[(m^2-3n^2/4+mn)X_1+(m^2-3n^2/4-mn)X_2]/(m^2+3n^2/4)(X_1^2+X_2^2+X_1X_2)$

$Y_2=[-2mnX_1-(m^2-3n^2/4+mn)X_2]/(m^2+3n^2/4)(X_1^2+X_2^2+X_1X_2)$ olan bir

$(Y_1,Y_2) \in R^2(m,n)$ nin varlığını gerektirir. Burada yalnız $(X_1,X_2)=(0,0)$ olduğu takdirde (Y_1,Y_2) mevcut değildir. Sıfır elemanı içermeyen ve her elemanın tersinin bulunduğu bu halka bir cisimdir ve $\mathbb{H}(m,n)$ ile gösterilecektir.

(m=1, n=0) için $\mathbb{H}$ (m,n) HELİSEL CİSİMLER SINIFI, helisel cismi tanımlar $\mathbb{H}(1,0) \to \mathbb{H}$ dir.

TANIM: 6.42- HELİSEL SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1,X_2,\ m,n \in R$, ($m^2+n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak)

$(m-n/2)X_1-nX_2+[(m+n/2)X_2+nX_1].h$, ($h^2=h-1$ yapısında ve R reel sayılar cümlesinin (+),(.) işlemlerini koruduğu sayılara helisel sayı cümleleri sınıfı denecek ve H(m,n) ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.42.48

$\mathbb{H}(m,n)$ helisel cisimler sınıfı ile $H(m,n)$ helisel sayı cümleleri sınıfı, (T),($\perp$) ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$(X_1,X_2)\in \mathbb{H}(m,n) \longrightarrow (m-n/2)X_1-nX_2+\left[(m+n/2)X_2+nX_1\right]h \in H(m,n)$

$(Y_1,Y_2)\in \mathbb{H}(m,n) \longrightarrow (m-n/2)Y_1-nY_2+\left[(m+n/2)Y_2+nY_1\ h\right] \in H(m,n)$ olsun.

(T),(+) işlemleri yönünden karşılığı kurmak kolaydır.

($\perp$),(.) işlemleri için

$$(\perp)\quad (X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\begin{bmatrix}(m-n/2)(X_1Y_1-X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2), \\ n(X_1Y_1-X_2Y_2)+(m+n/2)(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)\end{bmatrix}=(X,Y)$$

$$(.)\quad \left\{(m-n/2)(X_1-nX_2+\left[(m+n/2)X_2-nX_1\right]h\right\}.\left\{(m-n/2)Y_1-nY_2+\left[(m+n/2)Y_2-nY_1\right]h\right\}=$$

$(m-n/2)X-nY+\left[(m+n/2)X+nY\right].h$ olur ve işlemlerin izomorf olduğu anlaşılır.

TANIM: 6.43- $\mathbb{H}(m,n)$ DE FORM QUATERNİONLAR

Elemanları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında elemanlarının yapı özelliğinin korunduğu ve parametrelerin özel durumunda, helisel cismi veren cisimlere *HELİSEL FORM QUATERNİON* denecektir.

TEOREM: 6.43.48

$X_1,X_2,m,n \in R$, $(m^2+n^2\neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak $\left[(m+n/2)X_1+nX_2,(m-n/2)X_2-nX_1\right]\in \mathbb{H}(m,n)$ helisel cisimler sınıfına dahil alt cümle, bir form quaterniondur.

İsbat:

(T),($\perp$) işlemleri karşısında özel yapıdaki elemanın özelliğinin korunduğu ve m,n nin belirli bir hali için H helisel cismi tanımladığı saptanacaktır.

(T) işlemi ile, elemanın yapı özelliğinin korundugunu görmek kolaydır. ($\perp$) işlemi karşısında:

$$\left[(m+n/2)X_1+nX_2,(m-n/2)X_2-nX_1\right]\perp\left[(m+n/2)Y_1+nY_2,(m-n/2)Y_2-nY_1\right]=$$

$$(m^2+3n^2/4)\begin{bmatrix}(m+n/2)(X_1Y_1-X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2), \\ (m-n/2)(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)-n(X_1Y_1-X_2Y_2)\end{bmatrix}$$ olup,

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\in \mathbb{H}(m,n)$ ve $(X_1,X_2)\perp(Y_1Y_2)=(X,Y)$ ise

$[(m+n/2)X_1+nX_2,(m-n/2)X_2-nX_1]\perp[(m+n/2)Y_1+nY_2,(m-n/2)Y_2-nY_1]=$
$[(m^2+mn-3n^2/4)X-2mnY,\ (m^2-mn-3n^2/4)Y-2mnX]$ olacagını ve elemanın yapı özelliğinin korunduğunu söyleyeceğiz.

Ve $m=1$, $n=0$ için, bu sınıf doğrudan helisel cismi tanımlar. $\mathbb{H}(1,0)$

TANIM: 6.44- HELİSEL QUATERNİON

C^2 de tanımlanabilir, helisel form quaterniona helisel quaternion denecektir.

TEOREM: 6.44.49

Teorem: 6.43.48 de, $(m^2+3n^2/4)=1$, $m>1$, $m<-1$ koşulları ile m,n değerlerinin belirlediği $\mathbb{H}(m,n)$ form quaternionları C^2 de helisel quaternionlardır.

İsbat:

$m^2+3n^2/4=1$ de örneğin $m=2$, $n=\mp 2i$ değerleri ile

$[(m+n/2)X_1+nX_2,(m-n/2)X_2-nX_1]$ form quaternionun belirleyeceği

$[2X_1\mp(X_1+2X_2)i,\ 2X_2\pm(X_2+2X_1)i]$ ve yine örneğin:

$m=5$, $n=\mp 4/\sqrt{3}$ değerlerinin tanımlayacağı,

$[(5\mp 2\sqrt{3}i)X_1\mp(4/\sqrt{3})iX_2,(5\mp 2\sqrt{3}i)X_2\mp(4/\sqrt{3})iX_1]$, C^2 de helisel form quaternionlardır.

TANIM: 6.45- $\mathbb{H}(m,n)$ HOMOTETİK HALKALAR SINIFI

Çarpmada içerdiği parametrelerin değerlerine göre, R^2 de bir dizi halka oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda, [illegible] halkayı tanımlayan halkalar dizisine, HOM[illegible] [illegible] necek ve $\mathbb{H}(m,n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.45.50

$(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\in R^2$ ve m,n [illegible] parametreler olarak $(m^2+n^2\neq 0)$ iç işlemleri

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\in R^2$

$(\ )$ $(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=[(m+n/2)(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_{[illegible]}+X_2Y_1-X_2Y_2),$
$n(X_1Y_1+X_2Y_2)+(m-n/2)[illegible]+X_2Y_1-X_2Y_{[illegible]}]$ ile

tanımlanan $R^2(m,n)$ cümleleri [illegible]

İsbat:

(T) iç işleminin gerekli koşulları saptadığı açıktır; etkisiz birim elemanı $e=(0,0)$dır; ($\perp$) işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık ve değişimlilik niteliği teoremin hipotezinden kolayca çıkarılabilir. ($\perp$) nin birim elemanı :

$\varepsilon=[(m-n/2)(m^2-5n^2/4),-n/(m^2-5n^2/4)]$; (X_1,X_2)nin (Y_1,Y_2) ters elemanı

$Y_1=[(m^2-mn+3n^2/4)X_1-(m^2-n^2/4)X_2]/(m^2-5n^2/4)^2(X_1^2-X_2^2-X_1X_2)$

$Y_2=-[(m^2-mn+3n^2/4)X_2+mnX_1]/(m^2-5n^2/4)(X_1^2-X_2^2-X_1X_2)$ bulunur.

$m=1$, $n=0$ için $\mathbb{H}'(1,0)$ bilinen homotetik halka tanımlanır.

TANIM: 6.46- HOMOTETİK SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in R$, ($m^2+n^2\neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak) $(m+n/2)X_1+nX_2+[(m-n/2)X_2+nX_1].h'$, ($h'^2=1-h'$) yapısında ve R reel sayılar cümlesinin (+),(.) işlemlerinin konunduğu sayılara homotetik sayı cümleleri sınıfı denecek ve $H'(m,n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.46.51

$\mathbb{H}'(m,n)$ homotetik halkalar sınıfı ile $H'(m,n)$ homotetik sayı cümleleri sınıfı (T),($\perp$) ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$(X_1,X_2)\in \mathbb{H}'(m,n) \to (m+n/2)X_1+nX_2+[(m-n/2)X_2+nX_1].h'$

$(Y_1,Y_2)\in \mathbb{H}'(m,n) \to (m+n/2)Y_1+nY_2+[(m-n/2)Y_2+nY_1].h'$ olsun

(T),(+) işlemleri için

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\in \mathbb{H}'(m,n)$

(+) $[(m+n/2)X_1+nX_2+((m-n/2)X_2+nX_1)h']+[(m+n/2)Y_1+nY_2+((m-n/2)Y_2+nY_1)h']=$

$(m+n/2)(X_1+Y_1)+n(X_2+Y_2)+[(m-n/2)(X_2+Y_2)+n(X_1+Y_1)].h'$ ve

($\perp$),(.) işlemleri için

($\perp$) $(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\left[\begin{array}{l}(m+n/2)(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2),\\ n(X_1Y_1+X_2Y_2)+(m-n/2)(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)\end{array}\right]=(X,Y)$

(.) $[(m+n/2)X_1+nX_2+((m-n/2)X_2+X_1)h'].[(m+n/2)Y_1+nY_1+((m-n/2)Y_2+Y_1)h']=$

$(m+n/2)X+nY+[(m-n/2)Y+nX].h'$ olur. Bu sonuçlar her iki sınıfın iç işlemlerine göre izomorf olduğunu gösterir.

$m=1$, $n=0$ $\mathbb{H}'(1,0)=\mathbb{H}'$ bilinen homotetik halkayı tanımlar.

TANIM: 6.47- $\mathbb{H}'(m,n)$ DE DEFORM QUATERNİON

Elemanları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında, elemanlarının yapı özelliğini koruyan, ve parametrelerin özel bir durumunda homotetik halkayı veren-cisim olmayan halka nitelikli cümlelere $\mathbb{H}'(m,n)$ de DEFORM QUATERNİONLAR denecektir.

TEOREM: 6.47.52

$X_1, X_2, m, n \in R$ ($m^2+n^2 \neq 0$) önceden seçilmiş parametreler olarak) $[(m-n/2)X_1-nX_2, (m+n/2)X_2-nX_1]$ yapısında olup $\mathbb{H}'(m,n)$ helisel halkalar sınıfına dahil elemanların oluşturduğu halka bir deform quaterniondur.

İsbat:

$\mathbb{H}'(m,n)$ nin iç işlemleri karşısında elemanların yapı özelliğinin korunduğu ve m,n nin belirli değeri için $\mathbb{H}'$ homotetik halkayı belirlediği saptanacaktır. (1) çarpım işlemi karşısında:

$$[(m-n/2)X_1-nX_2, (m+n/2)X_2-nX_1] \cdot [(m-n/2)Y_1-nY_2, (m+n/2)Y_2-nY_1] =$$

$$(m-5n^2/4) \begin{cases} (m-n/2)(X_1Y_1+X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2), \\ (m+n/2)(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)-n(X_1Y_1+X_2Y_2) \end{cases}$$

olarak eleman yapı özelliğinin korunduğu ve $m=1$, $n=0$ için bu sınıfın H' homotetik halkayı oluşturduğu görülmektedir.

TANIM: 6.48- HOMOTETİK AQUATERNİON

$\mathbb{C}^2$ de tanımlanabilir $\mathbb{H}'(m,n)$ deform quaterniona homotetik aquaternion denecektir.

TEOREM: 6.48.53

Teorem 6.47.52 de $(m^2-5n^2/4)=1$ ve $-1 < m < 1$ koşulları ile m,n nin belirlediği $\mathbb{H}'(m,n)$ deform quatern[illegible] homotetik aquaternionlardır.

İsbat:

$(m^2-5n^2/4)=1$ de örneğin $m=2/3$, $n=(2/3)i$ değerleri ile $[(m-n/2)X_1-nX_2, (m+n/2)X_2-nX_1]$ deform quaternionun belirlediği $[(2/3-1/3i)X_1-(2/3)X_2 i, (2/3+1/3i)X_2-(2/3)X_1 i]$, $\mathbb{C}^2$ de homotetik

7. YEDİNCİ KISIM

SINIFLAMA YÖNTEMİ İLE BERKİ HALKA VE CİSİMLERİ

TANIM: 7.49- BERKİ HALKA VE CİSİMLERİ

SxC, CxD, DxS cümlelerinde, halka ve cisim oluşturabilir, iç işlemlerin tanımlanabilmesi halinde bileşenleri S,Ç,D den alınan iki bileşenli elemanlar cümlesine BERKİ HALKA veya CİSİMLERİ denecektir.

TEOREM: 7.49.54

$X_1, X_2 Y_1 Y_2 \in R$; $z_1 = X_1 s \in S$, $z_2 = X_2 i \in C$, $(X_1 s, X_2 i) \in SxC$ ve

$W_1 = Y_1 s \in S$, $W_2 = Y_2 i \in C$; $(Y_1 s, Y_2 i) \in SxC$ olarak iç işlemleri

(T) $(z_1, z_2)T(W_1, W_2) = (X_1 s, X_2 i)T(Y_1 s, Y_2 i) = [(X_1 + Y_1)s, (X_2 + Y_2)i] \in SxC$

($\perp$) $(z_1, z_2)\perp(W_1, W_2) = \begin{bmatrix}(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)s + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)i, \\ (X_1 Y_1 + X_2 Y_2)i - (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)s\end{bmatrix}$ ile tanımlanan

(SxC) çarpım cümlesi değişimli bir cisimdir. Bu cisim $\mathbb{B}(s,i)$ ile gösterilecektir.

İsbat:

(SxC,T) ikilisi bir abel gurubudur, değişimli, birleşimlidir. Sıfır eleman $\mathcal{C} = (0,0)$ ve $(X_1 s, X_2 i)$ nin ters elemanı $(-X_1 s, -X_2 i)$ dır.

($\perp$) $(z_1, z_2)\perp(W_1, W_2) = (X_1 s, X_2 i)\perp(Y_1 s, Y_2 i) =$

$\begin{bmatrix}(X_1 Y_1 - X_2 Y_2)s + (X_1 Y_2 si - X_2 Y_1 is)i, \\ (X_1 Y_1 - X_2 Y_2)i - (X_1 Y_2 si - X_2 Y_1 is)s\end{bmatrix}$ den

$si = -is$, $i^2 = -1$, $s^2 = 1$ eşitlikleri gözönüne alındığında

$(X_1 s, X_2 i)\perp(Y_1 s, Y_2 i) = [((X_1 - X_2)Y_1 - (X_1 + X_2)Y_2)s, ((X_1 + X_2)Y_1 + (X_1 - X_2)Y_2)i]$

sonuç işlemine göre (SxC, $\perp$) ikilisinin birleşimli, (T) üzerine dağılımlı olduğu; $\xi = (s/2, -i/2)$ birim elemanına malik olduğu ve (X_1, X_2) nin (Y_1, Y_2) ters elemanının

$(Y_1, Y_2) = [-X\ s/2(X_1^2 + Y_2^2), -X_1 i/2(X_1^2 + Y_1^2)]$ mevcut bulunduğu ve $\mathcal{C} = (0,0)$ sıfır elemanını içermediği kolayca görülebilir.

Aynı yol ve yöntemle $(X_1 i, X_2 s) \in$ CxS'ninde bir cisim olduğu tekrarlanabilir.

TEOREM: 7.49.55

$\mathbb{B}(s,i)$ cismi $\mathbb{C}(m,n)$ kompleks cisimler sınıfının m=1, n=1 (1,1) cismine T, $\perp$ toplama çarpma iç işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$(X_1,X_2)\in \mathbb{C}(1,1)$, $(X_1s,X_2i)\in \mathbb{B}(s,i)$; $(X_1,X_2)\longrightarrow(X_1s,X_2i)$

$(Y_1,Y_2)\in \mathbb{C}(1,1)$, $(Y_1s,Y_2i)\in \mathbb{B}(s,i)$; $(Y_1,Y_2)\longrightarrow(Y_1s,Y_2i)$ olsun

$\mathbb{C}(1,1)$ de (T) toplama işlemi ve $\mathbb{B}(s,i)$ de (T) toplama işlemi

(T) $(X_1,X_2)T(Y_1,Y_2)=(X_1+Y_1,X_2+Y_2)\in\mathbb{C}(1,1)$

(T) $(X_1s,X_2i)T(Y_1s,Y_2i)=[(X_1+Y_1)s,(X_2+Y_2)i]\in\mathbb{B}(s,i)$

$\mathbb{C}(1,1)$ ve $\mathbb{B}(s,i)$ de ($\perp$) çarpma işlemleri

($\perp$)$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=[(X_1Y_1-X_2Y_2)-(X_1Y_2+X_2Y_1),(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)]$

($\perp$)$(X_1s,X_2i)\ (Y_1s,Y_2i)=$

$[((X_1Y_1-X_2Y_2)-(X_1Y_2+X_2Y_1))s,\ ((X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1))i]$ bu sonuçla

$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)\longrightarrow(X_1s,X_2i)\perp(Y_1s,Y_2i)$ olur.

$\mathbb{C}(1,1)$ de birim eleman $\Sigma=(1/2,-1/2)$

$\mathbb{B}(s,i)$ de birim eleman $\Sigma=(s/2,-i/2)$ ve $\mathbb{C}(1,1)$ de ters eleman

$(Y_1,Y_2)=[-X_2/2(X_1^2+X_2^2),\ -X_1/2(X_1^2+X_2^2)]$ ve $\mathbb{B}(s,i)$ de ters eleman

$(Y_1s,Y_2i)=[-X_2s/2(X_1^2+X_2^2),\ -X_1i/2(X_1^2+X_2^2)]$ dir.

TEOREM: 7.49.56

$\mathbb{B}(s,i)$ cismi ile $B(i,\varsigma s,i\varsigma)=(X_1-X_2i)\varsigma s-(X_1+X_2i)i\varsigma$ vektör uzayı kendi (T), ($\perp$) toplama ve çarpma iç işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

Karşılıkların ortaya konarak her iki cümlede (T),($\perp$) iç işlemlerinin uygulanması yeterlidir.

TANIM: 7.50- $\mathbb{B}(s,i)$ DE FORM QUATERNİON

Elemanları, m,n parametrelerine göre özel bir yapıda olup iç işlemler karşısında elemanların yapı özelliğinin korunduğu ve parametrelerin özel durumunda $\mathbb{B}(s,i)$ cismini veren cisimler sınıfına $\mathbb{B}(s,i)$ DE FORM QUATERNİONLAR denecektir ve bu sınıf $\mathbb{B}(m,n,s,i)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 7.50.57

$X_1, X_2, m, n \in R$; ($m^2+n^2 \neq 0$, $m \neq n(1 \mp \sqrt{2})$, $m = n(-1 \mp \sqrt{2})$ önceden seçilmiş parametreler olarak) elemanları .

$[(mX_1-nX_2)s,\ (nX_1+mX_2)i]$ yapısında olup, $T, \perp$ iç işlemleri $฿(s,i)$ nin işlemleri olarak tanımlanan cümle $฿(s,i)$ DE FORM QUATERNİON dur.

İsbat:

$[(mX_1-nX_2)s,\ (nX_1+mX_2)i]$ elemanlarının $฿(s,i)$ işlemleri muvacehesinde cisim olduğunu, yapı özelliğinin korunduğunu ve m,n nin özel değerleri için $฿(s,i)$ yi tanımladığını kanıtlayacağız.

Söz konusu elemanlar için $฿(s,i)$ .nin (T),($\perp$) iç işlemleri

$$(T)\ [(mX_1-nX_2)s,\ (nX_1+mX_2)i]\ T\ [(mY_1-nY_2)s, (nY_1+mY_2)i] =$$
$$\{[m(X_1+Y_1)-n(X_2+Y_2)]\ s,\ [n(X_1+Y_1)+m(X_2+Y_2)\ \ i]\}$$

($\perp$) $m^2-n^2-2mn=P$, $m^2-n^2+2mn=k$ olarak

$$[(mX_1-nX_2)s, (nX_1+mX_2)i] \perp [(mY_1-nY_2)s,\ (nY_1+mY_2)i] =$$
$$\{[(PX_1-kX_2)Y_1-(PX_1+kX_2)Y_2]s,\ [(PX_1+kX_2)Y_1+(PX_1-kX_2)Y_2]\, i\}$$ olduğuna göre, toplama ve çarpmada elemanın m,n parametrelerine göre yapısal özelliğini koruduğu ve

$[฿(m,n,s,i), T]$ ikilisinin Abel gurubu niteliği taşıdığı, $[฿(m,n,s,i), \perp]$ ikilisinin ise birleşimli ve (T) üzerine dağılımlı olduğu açıktır.

$฿(m,n,s,i)$, nın ($\mathcal{E}$) birim elemanı

$\mathcal{E} = [(m+n)s/2P\ ,\ -(m-n)i/2k]$ ve $[(mX_1-nX_2)s, (nX_1+mX_2)i]$ nın (Y_1, Y_2) ters elemanının

$$Y_1 = (mPX_1-nkX_2)s/2(P^2X_1^2+k^2X_2^2)$$

$$Y_2 = (m^2+n^2)(nkX_1+mPX_2)i/2(P^2X_1^2+k^2X_2^2)$$ olduğu ve

$P \neq 0 \rightarrow m \neq n(1 \mp 2)$; $k \neq 0 \rightarrow m = n(-1 \mp 2)$ olan bütün sınıfların birer cisim olacağı açıktır.

TEOREM: 7.50.58

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$, $z_1 = X_1 i - X_2 s$, $z_2 = X_2 i + X_1 s$ (CxS)

$W_1 = Y_1 i - Y_2 s$, $W_2 = Y_2 i + Y_1 s$; $\in (CxS)$, $(X_1 i - X_2 s, X_2 i + X_1 s) \in (CxS)^2$ olan ve iç işlemleri:

(T) $(X_1 i - X_2 s,\ X_2 i + X_1 s) T (Y_1 i - Y_2 s,\ Y_2 i + Y_1 s) =$

$[(X_1+Y_1)i-(X_2+Y_2)s,\ (X_2+Y_2)i+(X_1+Y_1)s] \in (CxS)^2$

$(\perp)(z_1,z_2)\perp(W_1,W_2) = [(X_1Y_1-X_2Y_2)i-(X_1Y_2+X_2Y_1)s,(X_1Y_1-X_2Y_2)s+(X_1Y_2+X_2Y_1)i]$

ile tanımlanan $(CxS)^2, T, \perp)$ üçlüsü bir BERKİ CİSMİDİR.

İsbat:

$((CxS)^2, T)$ ikilisi tanım nedeniyle bir Abel gurubudur, birleşimli değişimlidir, $e=(0,0)$ sıfır elemandır; $(\perp)$ işleminin

$(z_1,z_2)\perp(W_1,W_2)=(X_1 i-X_2 s, X_2 i+X_1 s)\perp(Y_1 i-Y_2 s,\ Y_2 i+Y_1 s)=$

$[(X_1Y_1-X_2Y_2)i-(X_1Y_2+X_2Y_1)s,(X_1Y_2+X_2Y_1)i+(X_1Y_1-X_2Y_2)s]$ olduğu gözönüne alındığında, $[(CxS)^2,\perp]$ikilisinin birleşimli ve (T) üzerine dağılımlı olduğu ve (ξ) birim elemanının $\xi=(-i/2,-s/2)$ve $(X_1 i-X_2 s, X_2 i+X_1 s)$ elemanının tersi elemanın

$[-(X_1 i+X_2 s)/4(X_1^2+X_2^2),(X_2 i-X_1 s)/4(X_1^2+X_2^2)]$ olduğu kolayca görülür.

TEOREM: 7.50.59

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$, $z_1=X_1\varrho-X_2 i$, $z_2=X_2\varrho+X_1 i \in (DxC)$

$W_1=Y_1\varrho-Y_2 i$, $W_2=Y_2\varrho+Y_1 i \in (DxC)$, $(X_1\varrho-X_2 i,\ X_2\varrho+X_1 i) \in (DxC)^2$ olarak (T),$(\perp)$ iç işlemleri:

(T) $(X_1\varrho-X_2 i,\ X_2\varrho-X_1 i)T(Y_1\varrho-Y_2 i,\ Y_2\varrho+Y_1 i)=$

$[(X_1+Y_1)\varrho-(X_2+Y_2)i,\ (X_2+Y_2)\varrho+(X_1+Y_1)i]$ ve

$(\perp)$ (z_1,z_2) $(W_1,W_2)=$

$[(X_1Y_1-X_2Y_2)\varrho-(X_1Y_2+X_2Y_1)i,\ (X_1Y_1-X_2Y_2)i+(X_1Y_2+X_2Y_1)\varrho]$ile tanımlanan $[(DxC)^2,T,\perp]$üçlüsü bir BERKİ CİSMİ, yapısı itibarı ile de bir form quaterniondur.

İsbat: (Bak TEOREM.7.50.58)

(BİB.) BİBLİOGRAFYA

NO	KİTABIN ADI	YAYIN YERİ - YILI	YAZARI
(I)	LİNEER CEBİR	DİYARBAKIR ÜNİV.YAY. Matematiki - 1977	H.HİLMİ HACI SALİHOĞLU A.Ü Fen Fak.Ceb.Geo.KÜRS. Başkanı
(II)	İNTRODUCTİON A L'AL EGBRE-ET L'ANALYSE MODERN	DUNOT - Paris 1963	MARC ZAMANSKY Prof.et Doyen da la fac. des sciences de l'üni. Paris
(III)	KİNEMATİK DERSLERİ	A.ÜNİV.FEN FAK.YAY. um 96,mat 27 . 1963	H.R.MÜLLER A.Ü.Fen Fak MAt. Prof.
(IV)	ANALİZ DERSLERİ	MİL. EĞİT.BAK.YAY. 1945	C.J.DE LA VALLEE POUSSİNE Louvain Üniv. Prof. Çev : Ratip Berker
(V)	LİNEER TRANSFORMAS yonlar	Öğr.Der.Not.1947	H.L.HAMBURGER A.Ü Fen Fak. Prof Çev : Berki Yurtsever
(VI)	LİNEAR ALGEBRA	Güven Kitabevi	SEY mour Lipschutz
(VII)	YÜKSEK DİFFERENSİYEL GEOMETRİ	FIRAT ÜNİVERSİTESİ	Prof. Dr. H.HİLMİ HACISALİHOĞLU

DOKTORA ADAYI

SADİ BAYDARIN ÖZGEÇMİŞ NOTU

1- 1929 Seydişehir doğumludur.
Evli ve üç Çocukludur.

2- 1950 Fen Fakültesi Matematik bölümü mezunudur.

3- 1950 - 1968 Aralığında Milli Eğitim Bakanlığı emrinde;

- 1950 - 1957 Ankara Atatürk Lisesi, Kars Lisesi, Niğde Lisesi Matematik Öğretmeni, Lise Müdür Yardımcısı, Lise Müdürü

- 1958 - 1961 Kıbrıs Namık Kemal Lisesi Matematik Öğretmeni ve Müdürü

- 1961 - 1965 Konya, Isparta Maarif Müdürü

- 1965 - 1969 T.E.D. Zonguldak Kolej Müdürü

- 1969 - 1976 Türkiye Elektrik Kurumu Teknik Eğitim Müdürü, Teknik Başmüşavir

- 1976 - Emekli ve 1977 - 1978 K.B.İ Eğitim Danışmanı

- 1979 - 1982 Z.D.M.M.A. Öğretim Görevlisi vazifelerini yapmıştır.