

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÜÇ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONU

FERHAT ŞAH

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. FATİH TAŞÇI**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONU

Ferhat ŞAH tarafından hazırlanan tez çalışması 07.09.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Coşkun YAKAR
Gebze Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU
(İSMAİLOV)
Gebze Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Çalışmalarımnda her türlü desteği benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof.Dr. Fatih TAŞÇI'ya, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof.Dr. Mustafa SİVRİ ve Sayın Doç. Dr. Coşkun YAKAR hocalarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Sayın Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU(İSMAİLOV) ve Sayın Prof. Dr. Mustafa BAYRAM hocalarıma en samimi muhabbetlerimle teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bugüne kadar verdikleri emeklerinden dolayı Sayın Prof. Dr. İrfan ŞİAP ve Sayın Prof. Dr. Hasan AKIN hocalarıma şükranlarımı sunarım. Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme, çalışmalarım boyunca tüm anlayışı ve desteği ile yanımda olan sevgili eşime ve değerli arkadaşlarım Müzeyyen ERTÜRK , Ali Serol ERTÜRK ve Mehmet Emin KÖROĞLU'na en içten duygularımla teşekkür ederim.

Eylül, 2015

Ferhat ŞAH

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT.....	xii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	3
1.3 Hipotez.....	3
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Hücresel Dönüşümlerle İlgili Bazı Temel Kavramların Tanımları	4
2.1.1 Ana Kavramlar.....	4
2.2 Bir Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Sınır Şartları.....	10
2.3 İki Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Sınır Şartları	11
2.4 İki Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Komşuluk ve Sınır Şartları.....	13
BÖLÜM 3	
HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN TEMSİLİ MATRİSİNİN ELDE EDİLİŞİ	16
3.1 Bir Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Temsili Matrisin Elde Edilişi.....	16
3.2 İki Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Temsili Matrisin Elde Edilişi	18

BÖLÜM 4

ÜÇ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLER	42
4.1 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Sıfır Sınır Şartı Altında Temsili Matrisinin Elde Edilmesi	44
4.2 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Periyodik Sınır Şartı Altında Temsili Matrisinin Elde Edilmesi	62
4.3 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Sıfır Sınır Şartı Altında Temsili Matrisinin Rankının Hesaplanması	72

BÖLÜM 5

ÜÇ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN BAZI UYGULAMALARI	78
--	----

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER	94
KAYNAKLAR	96
ÖZGEÇMİŞ	99

SİMGE LİSTESİ

D	Mümkün bütün durumların kümesi
E_n	Blok birim matrislerin en genel hali
f	Lokal geçiş fonksiyonu
F	Global geçiş fonksiyonu
F_n	Blok birim matrislerin en genel hali
K	Çekirdek uzayı
K_n	Blok karakteristik matrislerin en genel hali
L_d	d – boyutlu latıs ağı
M_n	Blok karakteristik matrislerin en genel hali
N	Mümkün komşuluk durumları
O_n	Sıfır matrislerin en genel hali
p	Mümkün durumların sayısı
S_s	Karakteristik matrislerin genel hali
S_s^*	Karakteristik matrislerin genel hali
T	Temsili matris
t	Zaman fonksiyonu
V	Vektör uzayı
$x = (x_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}$	İki tarafı sonsuz dizi
x_i^t	t zaman adımındaki i . Hücre
x_0	Başlangıç konfigürasyonu
$\mathbb{Z}_m$	m elemanlı halka
$\mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}}$	İki tarafı sonsuz dizilerin uzayı
$\mathbb{Z}_p$	$(\text{mod } p)$ kalan sınıfları

KISALTMA LİSTESİ

1 D CA	Bir Boyutlu Hücresel Dönüşüm (Cellular Automata)
2 D CA	İki Boyutlu Hücresel Dönüşüm (Cellular Automata)
3 D CA	Üç Boyutlu Hücresel Dönüşüm (Cellular Automata)
T_{RP}	Periyodik sınır şartı altında temsili matris
170P	Periyodik sınır şartı altında 170 kuralı
170N	Sıfır sınır şartı altında 170 kuralı
T_{RN}	Sıfır şartı altında temsili matris
ark	Arkadaşları
CA	(Hücresel Dönüşüm) Cellular Automata
GOE	(Cennetin Bahçesi) Garden of Eden

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Bir boyutlu hücresel dönüşüm için latis kesiti[22].	5
Şekil 2. 2 İki boyutlu hücresel dönüşüm için latis kesiti[22].	5
Şekil 2. 3 Bir boyutlu hücresel dönüşüm için n adımlık evrilme[22].	8
Şekil 2. 4 Bir boyutlu hücresel dönüşümler için sıfır sınır şartı	11
Şekil 2. 5 Bir boyutlu hücresel dönüşümler için periyodik sınır şartı	11
Şekil 2. 6 Bir boyutlu hücresel dönüşümler için yansımali sınır şartı	11
Şekil 2. 7 İki boyutlu hücresel dönüşümler için sıfır (null) sınır şartı.	12
Şekil 2. 8 İki boyutlu hücresel dönüşümler için periyodik (periodic) sınır şartı	12
Şekil 2. 9 İki boyutlu hücresel dönüşümler için yansımali (reflective) sınır şartı	13
Şekil 2. 10 İki boyutlu hücresel dönüşümler için $r = 1$ iken (a) Moore komşuluğu,	13
Şekil 2. 11 İki boyutlu hücresel dönüşümler için $r = 2$ iken (a) Moore komşuluğu, (b) Neumann komşuluğu	14
Şekil 4. 1 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Yerel Kural Fonksiyonu	44
Şekil 4. 2 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Komşuluk Örneği.	46

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3. 1 Komşuluklara göre kural numaraları.....	18
Çizelge 3. 2 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	29
Çizelge 3. 3 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon.....	32
Çizelge 3. 4 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon.....	35
Çizelge 3. 5 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon.....	38
Çizelge 4. 1 2x2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş konfigürasyon.....	47
Çizelge 4. 2 2x2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş konfigürasyon	47
Çizelge 4. 3 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	49
Çizelge 4. 4 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	50
Çizelge 4. 5 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	50
Çizelge 4. 6 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	63
Çizelge 4. 7 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	64
Çizelge 4. 8 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	64
Çizelge 4. 9 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	65
Çizelge 4. 10 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon	65

ÜÇ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONU

Ferhat ŞAH

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fatih TAŞÇI

Bu çalışmanın birinci bölümünde, literatür özeti, tezin amacı ve hipotez verildi. İkinci bölümde ise bir ve iki boyutlu hücresel dönüşümlerin tanımları verildi. Üçüncü bölümde $\mathbb{Z}_2$ üzerinde bir ve iki boyutlu lineer hücresel dönüşümlerin bazı özel kurallar vasıtasıyla temsili matrisleri incelendi. Daha sonra Khan ark. [6] ve Choudhury ark.[4]'nın iki boyutlu lineer hücresel dönüşümler üzerinde periyodik sınır şartı ve sıfır sınır şartı altında yaptıkları çalışmalar incelendi. Elde edilen sonuçlar üç boyutlu hücresel dönüşümler üzerine genişletildi.

Dördüncü bölümde, üç boyutlu hücrese dönüşüm tanımlandı ve özel bir yerel kural belirlendi. Bu yerel kural yardımıyla üç boyutlu hücrese dönüşümlerin periyodik ve sıfır sınır şartı altında temsili matrisleri elde edildi. Bu temsili matrislerin bazı özellikleri incelendi. Ayrıca periyodik sınır şartı altında elde edilen temsili matrisin bazı özel durumları ele alındı. $\mathbb{Z}_m$ üzerinde temsili matrisin terslenebilirliğini belirlemek için önemli bir teorem elde edildi ve bu teorem yardımıyla büyük boyutlu matrislerin rankları hakkında kesin yargıya varıldı.

Son bölümde ise üç boyutlu hücrese dönüşümlerin çekici noktaları, devir uzunluğu ve geçiş uzunluğu ile ilgili bazı uygulamalar verildi.

Anahtar Kelimeler: Hücrese Dönüşümler, Matris Cebiri, Sıfır Sınır Şartı, Periyodik Sınır Şartı, Temsili Matrisler, Çekici Noktalar, Devir Uzunluğu, Transient Uzunluğu

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF THREE DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA

Ferhat ŞAH

Department of Mathematical Engineering

PhD. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Fatih TAŞÇI

In the first section of this study, the literature, the aim of the thesis and the hypothesis were given. In the second section, definitions of one and two dimensional cellular automata were given. In the third section, representation matrix of one and two dimensional linear cellular automata over $\mathbb{Z}_2$ generated by some special rules were investigated. After that, the the papers which Khan et al. [6], and Choudhury et al. [4] studied two dimensional linear cellular automata under the periodic and the null boundary conditions, were investigated. The obtained results were extended to three dimensional cellular automata.

In the fourth section, three dimensional cellular automata was defined and a special local rule was determined. The representation matrices of three dimensional cellular automata were obtained under the null and the periodic boundary conditions with the help of this special local rule. Some properties of this representation matrices were examined. Furthermore, some special cases of the representation matrix, which was obtained under the periodic boundary condition, were handled. An important theorem to determine the reversibility of three dimensional cellular automata over $\mathbb{Z}_m$ was obtained and a final judgment about the rank of large matrices was agreed with the help of this theorem.

In the last section, some applications of attractors, cycle length and transient length for three dimensional cellular automata were given.

Keywords: Cellular Automata, Matrix Algebra, Null Boundary Condition, Periodic Boundary Condition, Representation Matrix, Attractors, Cycle Length, Transient Length.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Hücrel Dönüşüm (cellular automata, kısaca CA) ilk olarak fizik, biyoloji alanlarında ve bilgisayar bilminde modellemeler elde etmek için kullanılmıştır. CA teorisi Ulam ve Von Neumann (1966) [11], tarafından ilk olarak incelendi. Daha sonraları birçok araştırmacı karmaşık bir sistemin davranışlarını modellemek için CA'nın incelenmesine ilgi duydular. Hedlund (1969)[24] sadece matematiksel bir bakışla CA'yı sistematik olarak, Wolfram (1983)[12] polinom cebirlerinin yardımıyla, Pries (1986)[8] polinom cebirlerinin benzer bir türüne dayanarak grup özelliklerini açıklamak için ve Inokuchi ve ark. (1998)[5] 156 kuralı tarafından üretilen bir boyutlu CA'nın davranışlarını gözlemlemek için incelediler.

İki boyutlu CA (2D CA)'ların fizik, biyoloji, matematik ve diğer bilimlerde yaygın uygulama alanlarına sahip olması nedeniyle son yirmi yıldan beri pek çok bilim dalında bu CA'ların incelenmesi hız kazanmıştır. Diğer taraftan iki boyutlu CA (2D CA) için çalışmalara Packard ve Wolfram (1985)[7] de 5 komşuluklu CA'ya bağlı olarak iki boyutlu CA üzerinde bazı gözlemlerde bulunarak başlamışlardır. Das ve ark. (1993)[3]

matris cebirlerinin yardımıyla bir boyutlu CA'nın karakterizasyonunu genişlettiler ve lineer CA'nın teoriksel analizi için yeni bir yöntem takdim ettiler. CA'nın analizini polinom cebirlerine dayandırdılar. Aynı zamanda bu yeni yöntemle hybrid CA'ların analizi yapıldı. Elde edilen karmaşık dinamik sistemin incelenmesi için CA'nın matris karakterizasyonu formülize edildi.

Khan ve ark. (1997)[6] $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde en yakın komşuluklu 2D CA lineer dönüşümleri incelemek için bir çözüm yolu geliştirdiler. İki boyutlu lineer CA ları ayırmak için geliştirdikleri metod ve farklı kurallar ile 2D CA' ların periyodik sınır şartı altında karakterizasyonunu incelediler.

Choudhury ve ark. (1999)[2] $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA'ların özel bir hybrid dönüşümünün karakterizasyonunun en genel halini verdiler. Ayrıca diğer bir çalışmada Choudhury ve Dihidar (2004)[4] matris cebirleri yardımıyla bir boyutlu CA teorisini genişleterek 2D CA' ların karakterizasyonunu elde etmişlerdir.

Ying ve ark. (2009)[13] $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA lar için verilen bir konfigürasyonun hangi durumda "Cennetin Bahçesi (Garden Of Eden)" olacağını belirlediler ve "Cennetin Bahçesi (Garden Of Eden)" sayısını bulmak için bir algoritma verdiler.

Akın ve ark. (2009)[1] $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde 2D CA'ların özel bir hybrid dönüşümünün karakterizasyonunun en genel halini vermişlerdir.

Şiap ve ark. (2011)[9] $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde bazı özel kurallarla 2D CA'ların 2460N ve 2460P özel kurallarının periyodik ve sıfır sınır şart altında bazı karakterizasyonları incelemişlerdir.

İncelenen CA'lara karşılık gelen kural (temsili) matrislerin tersinin olup olmadığı önemli bir problem olarak ortaya çıkmıştır. Eğer ilgili CA'nın kural matrisinin tersi varsa bu durumda bu matrise karşılık gelen CA'ya terslenebilir denir. Eğer CA terslenebilir değilse bu durumda alınan bir konfigürasyonun "Cennetin Bahçesi(Garden Of Eden)" 'nin sayısı araştırılır. Şiap ve ark.(2010)[10]'nın $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde 2460N kuralı ile üretilen 2D CA'ların ön görüntüsü altında verilen herhangi bir konfigürasyonun "Cennetin Bahçesi(Garden Of Eden)" sayısını elde etmişlerdir. Çinkır ve ark. (2011)[18] yılında

$\mathbb{Z}_p$ cismi üzerinde bir boyutlu lineer hücresel dönüşümlerin terslenebilir olup olmadığını $r=2$ için periyodik sınır şartı altında incelemişlerdir. Akin ve ark. (2012)[17] yılında $\mathbb{Z}_p$ cismi üzerinde bir boyutlu lineer hücresel dönüşümlerin terslenebilir olup olmadığını $r=1$ için yansımali (reflektif) sınır şartı altında incelediler.

Bununla birlikte üç boyutlu hücresel dönüşümlerle ilgili çok fazla çalışma olmamıştır. Tsalides ve ark. (1989)[14] üç boyutlu hücresel dönüşümler ve uygulamaları ile ilgili bir çalışma yapmışlardır. R.W.Gerling (1990)[25] yılında yaptığı çalışmada 3D CA ları sınıflandırmıştır.

Jan Hemmingsson (1992)[15] yılında 3D-CA' ların quazi periyodik davranışları üzerinde çalışmalar yapmıştır. S.G.R. Brown ve N.B.Bruce ise (1995)[26] yılında yaptıkları çalışmada 3D CA'ların serbest gelişimini modellemeye çalışmışlardır. E.G. Leubeck ve M.C.M. Degunst (2001)[27] yılında yayınladıkları makalede 3D CA ları kullanarak hücresel bozulmaların analizi üzerinde çalışmışlardır. Alexandra Agapie (2010)[28] yılında özel bir durumdaki 3D CA için sabit dağılımın basit bir formunu vermiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde 3D CA'ların komşuluk durumlarını tanımlayarak, bu komşulukların çeşitli sınır şartları altında elde edilen temsili matrislerin terslenebilirliği hakkında incelemeler yapıp bu temsili matrislere karşılık gelen hücresel dönüşümlerin terslenebilir olup olmadığı durumlar hakkında bilgi verilecek ve bu matrislerin karakterizasyonları üzerinde durulacaktır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada üç boyutlu hücresel dönüşümler ve bu dönüşümlerin komşuluk durumları tanımlanmıştır. Bu komşulukların sıfır ve periyodik sınır şartları altında temsili matrislerini elde edilmiştir. Ayrıca temsili matrislerin terslenebilirliği ile hücresel dönüşümlerin terslenebilirliği arasında birebir bir bağlantı olduğu görülmüştür ve bu durum mevcut tezimizin hipotezini oluşturmuştur.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm oluşturulurken; Cellular Automata: Additive Cellular Automata: Theory and Applications, (1997) [29] isimli kitapdan ve Hücresel Dönüşümlerle Hata Düzeltken Kodlar(2012)[22] adlı tezden faydalanılmıştır.

2.1 Hücresel Dönüşümlerle İlgili Bazı Temel Kavramların Tanımları

2.1.1 Ana Kavramlar

$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ halkası verilsin. $x = (x_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}$ iki taraflı sonsuz bir dizi olsun. Bu şekildeki dizilerin uzayı $\mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}}$ ile gösterilir. Yarıçapı r olan f yerel kuralı $f: \mathbb{Z}_m^{2r+1} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ olmak üzere $f(x_{-r}, \dots, x_r) = \left(\sum_{i=-r}^{i=r} a_i x_i \right) \pmod{m}$ ile tanımlansın. Bu f yerel kuralı ile üretilen $F: \mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}}$ dönüşümüne toplamsal (additive) CA denir. Bu dönüşüm ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Fx = (y_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}, y_n = f(x_{n-r}, \dots, x_{n+r}) = \left(\sum_{i=-r}^{i=r} a_i x_{n+i} \right) (\text{mod } m) \quad . \quad (2.1)$$

3D CA'e giriş yapmadan önce bir boyutlu CA ve iki boyutlu CA üzerinde kısa bir bilgi verelim. $\mathbb{Z}_2$ üzerinde tanımlanan bir boyutlu CA yapısı her birinin değerini 0 veya 1 olarak kabul edilen hücre veya blokların bir örgüsü olarak düşünülebilir (Das ve ark., 1990). [16].

Genellikle karelerden oluşan, ancak üçgen, beşgen, altıgen vb. gibi başka geometrik şekillerde de olabilen bitişik hücrelerin sonsuz bir dizisini (latis ağını) düşünelim. Bu hücre dizisini L_d ile gösterelim. Burada d hücre dizisinin boyutunu göstermektedir.

...	x_{i-1}^t	x_i^t	x_{i+1}^t	...
-----	-------------	---------	-------------	-----

Şekil 2. 1 Bir boyutlu hücresel dönüşüm için latis kesiti[22].

Örneğin $r=1$ (Şekil 2.1) iken reel eksen boyunca yan yana dizilmiş tek biçimli geometrik şekillerin bir dizisi, $r=2$ (Şekil 2.2) için düzleme yayılmış tek biçimli geometrik şekillerin iki boyutlu bir dizisini düşünebiliriz.

...	.	.	.	...
...	$x_{(i-1,j-1)}^t$	$x_{(i-1,j)}^t$	$x_{(i-1,j+1)}^t$	...
...	x_i^1	x_{i+1}^1	$x_{(i,j+1)}^t$	...
...	$x_{(i+1,j-1)}^t$	$x_{(i+1,j)}^t$	$x_{(i+1,j+1)}^t$	...
...	.	.	.	...

Şekil 2. 2 İki boyutlu hücresel dönüşüm için latis kesiti[22].

Her bir hücre $p \geq 2$ olmak üzere p farklı durumda (state) var olabilsin. Burada p -tane durumdan her birinin geriye kalan diğer $p-1$ durumdan farklı olduğunu belirtmemiz gerekir. Yani D mümkün bütün durumların kümesi olmak üzere; $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\} = D$ şeklinde yazılabilir. Bu kümedeki her bir eleman ile renkler, doğal süreçler veya birbirinden kesinlikle ayırt edilebilen olgular arasında birebir eşleşme yapılabilir. Örneğin; $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ kümesindeki mümkün iki durum 0 ve 1 dir. 0=Beyaz (veya ölü), 1=Siyah (veya canlı) şeklinde bir eşleşme yapılabilir. Her hücre doğal sayılar ile eşleşen ayrık zaman adımlarında durumunu güncelleyebilsin.

Eğer $r=1$ kabul edilirse, bu durumda bir hücrenin bir sonraki durumu kendisine ve her iki komşusuna bağlı olarak düşünülebilir. Hücreler yalnız yerel komşuluğa bağlı belirleyici kurallara göre ayrık zaman dilimlerinde gelişme gösterir.

Matematiksel olarak i . hücrenin bir sonraki geçiş durumu $(i-1)$., i . ve $(i+1)$. hücrelerin hali hazırdaki durumunun bir fonksiyonu olarak temsil edilebilir. f yerel kuralı ile üretilen bir CA

$$q_i(t+1) = f(q_i(t), q_{i+1}(t), q_{i-1}(t)) \quad (2.2)$$

olarak verilir (Khan ve ark., 1997)[6].

Eğer bir hücrenin gelecek durum fonksiyonu bir doğruluk tablosu formunda ifade edilirse, sonucun ondalık eşdeğer kısmı, hücrenin kural sayısı olarak adlandırılır.

Komşuluk Durum:	111	110	101	100	011	010	001	000	
Gelecek Durum :	0	1	0	1	1	0	1	0	kural 90
Gelecek Durum :	0	1	1	1	1	0	0	0	kural 120

Yukarıda verdiğimiz iki CA kuralı için 2. ve 3. satırlar $(t+1)$. anda i . hücrenin karşılık gelen durumlarını verirken en üstteki satır t . anda 3 komşu hücrenin mümkün olan tüm sekiz durumunu verir.

Şimdi $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA' ların tanımı verilsin. İki boyutlu $\mathbb{Z}^2$ tamsayı örgüsünü ve $\sigma: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0,1\}$ elemanlı $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ konfigürasyon uzayı göz önüne alınsın. Bir $n \in \mathbb{Z}^2$ noktasındaki σ 'nin değeri σ_n ile tanımlanabilir. $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{Z}^2$ farklı vektörlerinin bir sonlu kümesi ve bir $f: \{0,1\}^s \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonu verilsin.

$F: \Omega \rightarrow \Omega$ genel geçiş dönüşümü $(F\sigma)_n = f(\sigma_{n+u_1}, \dots, \sigma_{n+u_s})$, $n \in \mathbb{Z}^2$ olmak üzere bir CA ile f lokal kuralı (Ω, F) çifti olarak tanımlanır.

Matematiksel olarak (i, j) . hücrenin bir sonraki $(t+1)$ zamandaki durumu o hücreye en yakın olan komşulukların t . zamandaki durumuna bağlıdır. Bu durum aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Khan ve ark., 1997)[6].

$$\begin{aligned} z_{(i,j)}^{(t+1)} &= f(z_{(i,j)}^{(t)}, z_{(i+1,j)}^{(t)}, z_{(i+1,j-1)}^{(t)}, z_{(i,j-1)}^{(t)}, z_{(i-1,j-1)}^{(t)}, z_{(i-1,j)}^{(t)}, z_{(i-1,j+1)}^{(t)}, z_{(i,j+1)}^{(t)}, z_{(i+1,j+1)}^{(t)}) \\ &= (z_{(i,j)}^{(t)} + z_{(i+1,j)}^{(t)} + z_{(i+1,j-1)}^{(t)} + z_{(i,j-1)}^{(t)} + z_{(i-1,j-1)}^{(t)} + z_{(i-1,j)}^{(t)} \\ &\quad + z_{(i-1,j+1)}^{(t)} + z_{(i,j+1)}^{(t)} + z_{(i+1,j+1)}^{(t)}) \pmod{2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Şimdi sonraki bölümlerde kullanacağımız tanımları verelim.

Tanım 2.1.2 Bir hücresel dönüşümde her zaman adımı aynı türden geometrik şekillerin bir dizisinden oluşur. Bu dizilerin her birine o zaman adımındaki *konfigürasyon* denir.

İki boyutlu hücresel dönüşümler için her konfigürasyon (Şekil 2.2) düzleme yayılmış tek biçimli geometrik şekillerin iki boyutlu bir dizisi olarak düşünülebilir ve her güncellenmeden sonra elde edilen yeni konfigürasyon da yine iki boyutlu bir dizidir[22].

...	x_{i-1}^0	x_i^0	x_{i+1}^0	...	$t = 0$
...	x_{i-1}^1	x_i^1	x_{i+1}^1	...	$t = 1$
...					
...	x_{i-1}^n	x_i^n	x_{i+1}^n	...	$t = n$

Şekil 2. 3 Bir boyutlu hüresel dönüşüm için n adımlık evirilme[22].

Şekil 2.3’de bulunan x_i^t ifadesinde i bulunulan hücrenin indisini t ise bulunulan zaman adımını göstermektedir. Genellikle $t = 0$ anı başlangıç konfigürasyonu olarak alınır. Her zaman adımıdaki her bir hücre durumunu mevcut durumu ve belli sayıdaki komşularının durumlarına bağlı olarak yeniden belirler. Yani her bir hücre $t + 1$ zaman adımıda durumunu yeniden belirler. Bu durum güncellemesine *evirilme* denir. Belli bir zaman adımıdaki hücreler durumlarını eşzamanlı (synchronous) ya da eşzamanlı olmadan (asynchronous) evirebilirler. Ancak bu çalışmada evirilme eşzamanlı olarak düşünülecektir.

Tanım 2.1.3 Bir hücre durumunu başka bir duruma evirirken çevresindeki eşit sayıda hücreden etkilenir. Etkileşim halinde bulunulan bu hücrelere *komşu*, sağdaki veya soldaki hücrelerin sayısına da *komşuluk yarıçapı* denir. Komşuluk yarıçapını r ile göstereceğiz[22].

r , komşuluk yarıçapı olmak üzere bir boyutlu hüresel dönüşümler için bir komşulukta toplam $2r + 1$ tane hücre vardır. Bu durumda p bir hücrenin bulunabileceği mümkün durumların sayısı iken toplam p^{2r+1} tane mümkün komşuluk durumu vardır. Mümkün komşuluk durumlarını N ile gösterirsek $N = \mathbb{Z}_p^{2r+1}$ olur. Bu durumda N kümesinin eleman sayısı p^{2r+1} dir. Örneğin; mümkün durumların sayısı $p = 2$ ve komşuluk yarıçapı $r = 1$ olarak alınırsa toplam $2^{(2 \times 1) + 1} = 8$ tane mümkün komşuluk durumu vardır. Bu durumlar

$$N = \{\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 0\}\}$$

şeklindedir.

Her bir hücre durumunu bir nesil sonraki durumuna dönüştürürken bu geçişi belirleyen yerel geçiş fonksiyonu adını verdiğimiz bir kural kullanır. Bu fonksiyonu (kuralı) genel olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.4 $p \geq 2$ mümkün durumlar, r komşuluk yarıçapı ve $t = 0, 1, 2, \dots, n$ ayrık zaman adımları olmak üzere, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ olsun.

$$f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) = x_i^{t+1} = x_{i-1}^t + x_i^t + x_{i+1}^t \pmod{2} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona bir boyutlu hücresele dönüşümler için *yerel geçiş fonksiyonu* denir. Bu tanım d -boyuta genelleştirilebilir.

Geçiş fonksiyonu belirleyici ya da olasılıklı olabilir. Ancak bu çalışmada belirleyici geçiş fonksiyonlarını tercih edeceğiz. Bu fonksiyonların sayısı sonludur ve $p \geq 2$ mümkün durumlar, r komşuluk yarıçapı olmak üzere toplam $p^{p^{2r+1}}$ tanedir[22].

Tanım 2.1.5 $p \geq 2$ mümkün durumlar, r komşuluk yarıçapı ve t ayrık zaman adımları olmak üzere, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ olsun. $f: \mathbb{Z}_p^{2r+1} \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $a_i \in \mathbb{Z}_p$, $i = 1, 2, \dots, 2r+1$ için

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_{i-r}^t, x_{i-r+1}^t, \dots, x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+r}^t) \\ &= a_1 x_{i-r}^t + a_2 x_{i-r+1}^t + \dots + a_r x_{i-1}^t + a_{r+1} x_i^t + a_{r+2} x_{i+1}^t + \dots + a_{2r+1} x_{i+r}^t \pmod{p} \end{aligned} \quad (2.5)$$

funksiyonuyla belirli kurallara lineer kural denir. Bir boyutta toplam p^{2r+1} tane lineer kural vardır.

Aşağıda ard arda vereceğimiz üç tanım tüm hücresele dönüşümler için geçerlidir.

Tanım 2.1.6 Bir hücresele dönüşümde t -zaman adımındaki bir konfigürasyonu $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $t+m$ -zaman adımındaki başka bir konfigürasyona dönüştüren fonksiyona *global geçiş fonksiyonu* denir ve $F = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ ile gösterilir. Burada $n \in \mathbb{Z}^+$ başlangıç dizisindeki hücrelerin sayısı ve $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ ler de yerel geçiş fonksiyonlarıdır.

Matematik diliyle ifade edecek olursak; C tüm konfigürasyonların kümesi olmak üzere $F: C \rightarrow C$, her $c \in C$ için $F(c) = c'$, $c' \in C$ olarak ifade edilebilir[22].

Tanım 2.1.7 Eğer bir başlangıç dizisindeki tüm hücreler aynı yerel geçiş fonksiyonunu kullanarak bir sonraki zaman adımında durumlarını belirliyorlarsa ya da diğer bir ifadeyle global geçiş fonksiyonu tamamen aynı yerel geçiş fonksiyonlarından oluşuyorsa bu hücrel dönüşüme tekbiçimli (uniform) hücrel dönüşüm denir[22].

Tanım 2.1.8 Eğer bir başlangıç dizisindeki hücreler bir sonraki zaman adımında durumlarını belirlerken farklı yerel geçiş fonksiyonları kullanıyorlarsa ya da global geçiş fonksiyonunda bulunan yerel geçiş fonksiyonlarından en az bir tanesi diğerlerinden farklıysa bu hücrel dönüşüme melez (hybrid) hücrel dönüşüm denir[22].

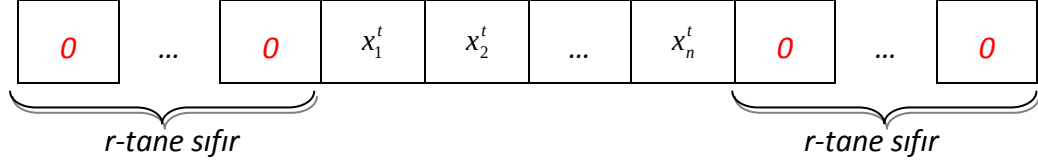
Not: Yukarıda yaptığımız tanımlamalardan sonra d boyutlu bir hücrel dönüşüm; L_d hücrelerin d -boyutlu bir dizisi (latisi), D mümkün durumların kümesi, N mümkün komşuluk durumları ve f yerel geçiş fonksiyonu olmak üzere $CA = [L_d, D, N, f]$ şeklinde bir dördü ile ifade edebilir.

Tanım 2.2 Bir Boyutlu Hücrel Dönüşümler İçin Sınır Şartları

Bir hücrel dönüşümde verilen bir başlangıç dizisinin (konfigürasyonunun) durumunu bir başka duruma evirebilmesi için verilen her hücrenin komşularının belirli olması gerekir. Bu sebeple herhangi bir boyutta evrilmenin olabilmesi için başlangıç dizisi sonlu olmalıdır. Bu durumda verilen bir başlangıç dizisinde sınırda bulunan hücrelerin komşuları tanımlanmalıdır. İlk olarak bir boyutlu hücrel dönüşümler için sınır şartlarını tanımlayacağız.

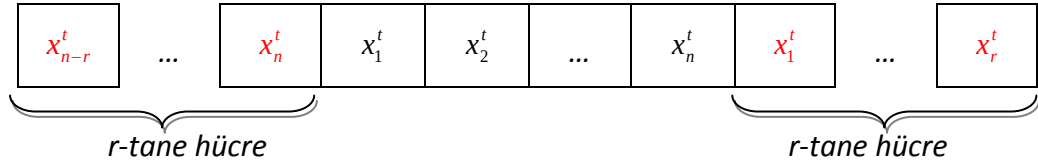
Tanım 2.2.1 $r < n$ komşuluk yarıçapı olmak üzere $C^t = [x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t]$, t -zaman adımındaki konfigürasyon olsun.

i) Eğer her t -zaman adımındaki dizinin sol baştaki teriminin soluna r tane sıfır ve sağ baştaki teriminin yanına da r tane sıfır eklenerek sırasıyla sol ve sağ baştaki hücrelerin sola doğru ve sağa doğru komşulukları belirleniyorsa bu sınır şartına *sıfır sınır şartı (null boundary condition)* denir[22].



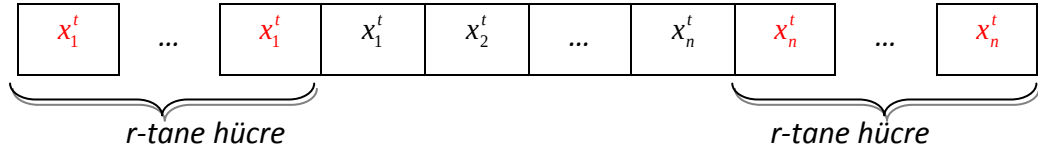
Şekil 2. 4 Bir boyutlu hücresel dönüşümler için sıfır sınır şartı

ii) Eğer her t -zaman adımındaki dizinin sol baştaki terimi ile sağ baştaki terimi bitişikmiş gibi düşünülerek dizinin uç kısmında yer alan hücrelerin r -tane komşusu belirleniyorsa bu sınır şartına *periyodik sınır şartı* (*periodic boundary condition*) denir[22].



Şekil 2. 5 Bir boyutlu hücresel dönüşümler için periyodik sınır şartı

iii) Eğer her t -zaman adımındaki dizinin sol uçtaki hücre değeri sola doğru komşuluk ve sağ uçtaki hücre değeri sağa doğru komşuluk için tekrar ediliyorsa bu sınır şartına *yansımali sınır şartı* (*reflective boundary condition*) denir[22].



Şekil 2. 6 Bir boyutlu hücresel dönüşümler için yansımali sınır şartı

Tanım 2.3 İki Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Sınır Şartları

i) Sıfır (Null) Sınır şartı:

0	0	0	0	0
0	$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$	0
0	$x_{i,j-1}^t$	$x_{i,j}^t$	$x_{i,j+1}^t$	0
0	$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$	0
0	0	0	0	0

Şekil 2. 7 İki boyutlu hücresel dönüşümler için sıfır (null) sınır şartı

ii) Periyodik Sınır Şartı:

$x_{i+1,j+1}^t$	$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$	$x_{i+1,j-1}^t$
$x_{i-1,j+1}^t$	$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$	$x_{i-1,j-1}^t$
$x_{i,j+1}^t$	$x_{i,j-1}^t$	$x_{i,j}^t$	$x_{i,j+1}^t$	$x_{i,j-1}^t$
$x_{i+1,j+1}^t$	$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$	$x_{i+1,j-1}^t$
$x_{i-1,j+1}^t$	$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$	$x_{i-1,j-1}^t$

Şekil 2. 8 İki boyutlu hücresel dönüşümler için periyodik (periodic) sınır şartı

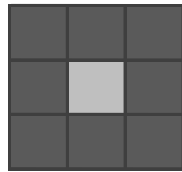
iii)Yansımali (Reflective) Sınır Şartı:

$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$
$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$
$x_{i,j-1}^t$	$x_{i,j-1}^t$	$x_{i,j}^t$	$x_{i,j+1}^t$	$x_{i,j+1}^t$
$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$
$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$

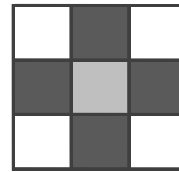
Şekil 2. 9 İki boyutlu hücresel dönüşümler için yansımali (reflective) sınır şartı

Tanım 2.4 İki Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Komşuluk ve Sınır Şartları

İki boyutlu hücresel dönüşümler için sınır şartlarını verdikten sonra, iki boyutlu hücresel dönüşümler için iyi bilinen iki komşuluğu verelim. Bu iki komşuluk aşağıda Şekil 2.10 ve Şekil 2.11’de verilmiştir[22].



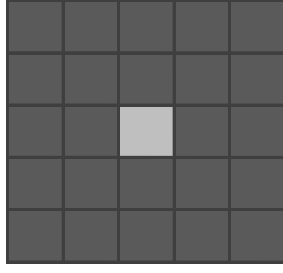
(a)



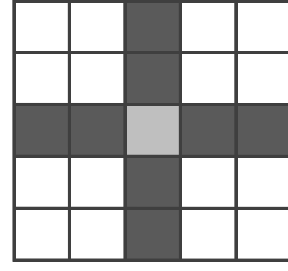
(b)

Şekil 2. 10 İki boyutlu hücresel dönüşümler için $r = 1$ iken (a) Moore komşuluğu,

(b) Neumann komşuluğu



(a)



(b)

Şekil 2. 11 İki boyutlu hücresel dönüşümler için $r=2$ iken (a) Moore komşuluğu, (b) Neumann komşuluğu

Yukarıdaki şekillerde (Şekil 2.10, Şekil 2.11) açık gri renk ile verilen hücre merkez hücreyi koyu gri renk ile verilen hücreler ise komşu hücreleri göstermektedir. Bu iki komşuluk dışında başka komşuluklar da tanımlanabilir.

Şimdi ise bazı temel cebirsel tanımları vereceğiz:

Tanım 2.4 $A \neq \emptyset$ bir küme ve Δ , A da bir ikili işlem olsun. (A, Δ) cebirsel yapısına aşağıdaki aksiyomaları sağlıyorsa bir grup denir:

- i. Δ , A da bir ikili işlemdir.
- ii. Δ İşleminin A da birleşme özelliği vardır. Yani; $\forall a, b \in A$ için $a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c$
- iii. Δ İşleminin A da birim elemanı vardır. Yani; $\forall a \in A$ için $a \Delta e = e \Delta a = a$ olacak şekilde $\exists e \in A$ vardır.
- iv. Δ işlemine göre A daki her elemanın tersi vardır. Yani; $\forall a \in A$ için $a \Delta a^{-1} = a^{-1} \Delta a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in A$ vardır.

Eğer (A, Δ) bir grup ve $\forall a, b \in A$ için $a \Delta b = b \Delta a$ değişme özelliğinde sağlanıyorsa gruba değişmeli veya abel grubu denir.

Tanım 2.5 $A \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem “+”ve “.” olsun. $(A, +, .)$ cebirsel yapısı $\forall x, y, z \in A$ için,

- a) $(A, +)$ değişmeli bir gruptur;
- b) “.” işleminin A da birleşme özelliği vardır. Yani; $x.(y.z) = (x.y).z$;

c) “.” işleminin “+” işlemi üzerinde soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

Yani, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ şartlarını sağlıyorsa bu yapıya halka denir.

Tanım 2.6 Değişmeli ve birimli bir A halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre tersi varsa A halkasına bir cisim denir.

Tanım 2.7 $A \neq \emptyset$ bir cümle ve F , reel veya karmaşık sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A ya F üzerinde lineer uzay denir:

a) $(A, +)$ bir değişmeli gruptur.

b) $\forall x, y \in A$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$b_1) \alpha \cdot x \in A \text{ dır.}$$

$$b_2) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$b_3) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$b_4) (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$$

$$b_5) 1 \cdot x = x \text{ (Burada } 1, F' \text{ nin birim elemanıdır.)}$$

Tanım 2.8 A, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve B, A' ’nın bir alt kümesi olsun. B kümesi lineer bağımsız ve B, A yı geriyorsa B ye F üzerinde A' ’nın bir bazı (tabanı) denir.

Tanım 2.9 A, F cismi üzerinde sıfırdan farklı bir vektör uzayı olsun. A' ’nın herhangi bir bazındaki vektör sayısına A' ’nın boyutu denir.

Tanım 2.10 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olsun. A matrisinin satır uzayının boyutuna A matrisinin satır rankı denir.

Tanım 2.11 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olsun. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı denir.

BÖLÜM 3

HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN TEMSİLİ MATRİSİNİN ELDE EDİLİŞİ

Bu bölümde hücresel dönüşümlerin karakterize edilmelerinde en önemli etken olan temsili matrisleri nasıl elde edeceğimizi göstereceğiz. Temsili matrislerin elde edilme yöntemi birbirine benzer olduğundan sadece iki boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrisini elde edeceğiz. Bir boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrisleride benzer yolla elde edilebilir. (Hücresel Dönüşümlerle Hata Düzeltken Kodlar(2012)[22] adlı tezden faydalanılmıştır.)

3.1 Bir Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Temsili Matrisin Elde Edilişi

Genel olarak r komşuluk yarıçapı ve p mümkün durumların sayısı için bir boyutlu mümkün lineer kurallar $a_i \in \mathbb{Z}_p$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_{i-r}^t, x_{i-r+1}^t, \dots, x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+r}^t) \\ &= a_1 x_{i-r}^t + a_2 x_{i-r+1}^t + \dots + a_r x_{i-1}^t + a_{r+1} x_i^t + a_{r+2} x_{i+1}^t + \dots + a_{2r+1} x_{i+r}^t \pmod{p} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ile verilebilir. $F = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$, *tek biçimli* (uniform) bir global geçiş fonksiyonu olsun.

Bu durumda periyodik sınır şartı altında F aşağıdaki gibi bir T matrisi ile temsil edilebilir[22].

$$T = \begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} & \dots & a_{i+r} & 0 & \dots & 0 & a_{i-r} & \dots & a_{i-3} & a_{i-2} & a_{i-1} \\ a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \dots & a_{i+r} & 0 & \dots & 0 & a_{i-r} & \dots & a_{i-3} & a_{i-2} \\ a_{i-2} & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \dots & a_{i+r} & 0 & \dots & 0 & a_{i-r} & \dots & a_{i-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+3} & \dots & a_{i+r} & 0 & \dots & 0 & a_{i-r} & \dots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & a_{i+2} \\ a_{i+2} & a_{i+3} & \dots & a_{i+r} & 0 & \dots & 0 & a_{i-r} & \dots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} \\ a_{i+1} & a_{i+2} & a_{i+3} & \dots & a_{i+r} & 0 & \dots & 0 & a_{i-r} & \dots & a_{i-1} & a_i \end{pmatrix}$$

Eğer F *tek biçimli* (uniform) bir kural vektörü ve $n = k \times s$ şeklinde bir bileşik sayı ise T matrisini blok matrisler cinsinden ifade edebiliriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} & \dots & a_{i+r-1} & a_{i+r} \\ a_{i-1} & a_i & \dots & a_{i+r-2} & a_{i+r-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{i-r+1} & a_{i-r+2} & \dots & a_i & a_{i+1} \\ a_{i-r} & a_{i-r+1} & \dots & a_{i-1} & a_i \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{i-r} & a_{i-r+1} & \dots & a_{i-2} & a_{i-1} \\ 0 & a_{i-r} & \dots & a_{i-3} & a_{i-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i-r} & a_{i-r+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i-r} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_{i+r} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{i-1} & a_{i+r} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{i+2} & a_{i+3} & \dots & a_{i+r} & 0 \\ a_{i+1} & a_{i+2} & \dots & a_{i+r-1} & a_{i+r} \end{pmatrix},$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k \times k$, ($k = 2r + 1$) tipinde karesel matrisler olmak üzere;

$$T = \begin{pmatrix} A & O & \dots & O & B \\ O & A & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & A & O \\ C & O & \dots & O & A \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer bu gösterimdeki B ve C matrislerinin tüm bileşenleri sıfır olarak alınırsa sıfır sınır şartı altında matris temsili yapılmış olur.

Ayrıca $X^t = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ bir t zaman adımındaki konfigürasyon olsun. Bu durumda $X^{t+m} = T^m [X^t], (m \in \mathbb{Z}^+)$ şeklinde matris yardımıyla evirilme yapılabilir.

3.2 İki Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Temsili Matrisin Elde Edilişi

Bu bölümde, Khan ve ark.(1997)[6]'nın $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde bazı 2D CA'ların karakterizasyonunu incelerken kullandıkları yöntemler açıklanarak, anlam bütünlüğünün sağlanması ve konunun daha iyi anlaşılabilmesi için bu işlemler biraz daha ayrıntılı olarak incelenmektedir. Khan ve ark. (1997)[6] nin verdiği bu yöntem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

İki boyutlu en yakın komşuluklu lineer CA da, CA'nın belirli bir hücrenin gelecek durumu, hücrenin hali hazırdaki durumundan ve ona en yakın olan sekiz komşu hücreden etkilenir. Farklı bağımlılıklar çeşitli CA kuralları ile hesaplanır. Bu tezde sadece lineer kurallar göz önüne alınmaktadır. Özel bir kural ile bu işlemler yapılabilir.

Çizelge 3. 1 Komşuluklara göre kural numaraları

64	128	256
32	1	2
16	8	4

Çizelge 3. 1 deki merkez kutu, hücrenin hali hazırdaki durumunu ve diğer bütün kutular o hücrenin en yakın sekiz komşuluğunu belirtirler. Her bir kutunun içindeki numara, hali hazırdaki hücrelerin belirli komşulukları ile iş birliği yaparak kendi kural numarasını belirler.

Eğer merkez hücre sadece kendisine bağlı ise bu durum “Kural 1” olarak adlandırılır. Eğer merkez hücre sadece tepesindeki komşu hücreye bağlı ise buna “Kural 128” denir.

Bir hücre, iki veya daha fazla komşu hücreye bağlı ise o zaman kural numarası ilgili hücrelerin sayılarının aritmetik toplamıdır. Örneğin 2D CA Kural 171N (128+32+8+2+1), sıfır sınır şartları altında merkez hücrenin beş komşusuna (üst, sol, sağ, alt ve kendisi) bağlıdır.

2D CA’ ların davranışı bir matematiksel model ile analiz edilir. Hücrelerin satır ve sütun bağımlılıklarını elde etmek için;

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

temel matrisler kullanılır.

Aşağıdaki Teorem, X_t konfigürasyonunun belli bir 2D CA altında ötelemesi ile elde edilen yeni X_{t+1} konfigürasyonunu nasıl tespit edildiğini belirtmesi açısından önemlidir. Ayrıca, 2D CA’ ların karakterizasyonları için de son derece gereklidir.

Teorem 3.3 (1,2,4,8,16,32,64,128,256) kuralları ile elde edilen 2D CA lar X_t konfigürasyonunu öteleyerek, X_{t+1} konfigürasyonunu aşağıdaki şekilde temsil ederler (Khan ve ark., 1997)[6]:

$$\text{Kural 1} \Rightarrow [X_{t+1}] = [X_t],$$

$$\text{Kural 2} \Rightarrow [X_{t+1}] = [X_t][T_2],$$

$$\text{Kural 4} \Rightarrow [X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_2],$$

$$\text{Kural 8} \Rightarrow [X_{t+1}] = [T_1][X_t],$$

$$\text{Kural 16} \Rightarrow [X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_1],$$

$$\text{Kural 32} \Rightarrow [X_{t+1}] = [X_t][T_1],$$

$$\text{Kural 64} \Rightarrow [X_{t+1}] = [T_2][X_t][T_1],$$

$$\text{Kural 128} \Rightarrow [X_{t+1}] = [T_2][X_t],$$

$$\text{Kural 256} \Rightarrow [X_{t+1}] = [T_2][X_t][T_2].$$

İspat:

$$[X_t] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33} \text{ bileşenleri } 0 \text{ veya } 1 \text{ değerini alır.})$$

t zamandaki 3×3 tipinde bir konfigürasyon olsun.

a) $[X_{t+1}]$ 'in $[X_t]$ ye eşit olduğu durum Kural 1 olarak bilinir. Yani;

$$\text{Kural 1: } [X_{t+1}] = [X_t] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

b) $[X_t]$ yi $[T_2]$ ile soldan çarparak bir CA'nın $(t+1)$ inci zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 2 olarak bilinir. Gerçekten,

$$[X_{t+1}] = [X_t][T_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) $[X_t]$ yi $[T_1]$ ile sağdan çarparak bir CA'nın $(t+1)$ inci zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 8 olarak bilinir. Gerçekten,

$$[X_{t+1}] = [T_1][X_t] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) $[X_t]$ yi $[T_1]$ ile önce soldan çarparak ve daha sonra sağdan $[T_2]$ ile çarparak bir CA'nın $(t+1)$. zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 4 olarak bilinir.

Gerçekten,

$$[X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde diğer durumlarda gösterilebilir.

Bu teoremin ispatında başka bir metotta kullanılabilir. Bu da bir kuralı birden fazla hücre ile ilişkilendirerek yani bir veya daha fazla kural ile birleştirerek de elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.4: İkinci bir kural ile oluşturulan bir CA'nın bir sonraki geçiş durumu, ilgili başlangıç kurallarının matrislerinin modül 2 ye göre toplamı olarak temsil edilebilir (Khan ve ark., 1997)[6].

Teoremin ispatı bir örnekle gösterilebilir. Kural 3'ü Kural 1 ve Kural 2' nin parça (modül) 2 ye göre toplamı olarak yazılırsa CA 'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 3=Kural 1+Kural 2, $[X_{t+1}] = [X_t] + [X_t][T_2]$ olarak temsil edilir.

Benzer olarak Kural 170; Kural 2, Kural 8, Kural 32 ve Kural 128 'in modül 2 ye göre toplamı olarak yazılır. Bu durumda CA'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 170=Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve

$$\begin{aligned}
 [X_{t+1}] &= [X_t][T_2] + [T_1][X_t] + [X_t][T_1] + [T_2][X_t] \\
 &= [X_t][T_1 + T_2] + [T_1 + T_2][X_t] \\
 &= [X_t][S] + [S][X_t]
 \end{aligned}$$

(burada $[S] = [T_1 + T_2]$ olduğu kabul edilir.)

Bunu açıklamak için bir örnek ele alalım:

$$[X_t] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3 \text{ tipinde bir konfigürasyon olsun. Şimdi bu konfigürasyonu sıfır}$$

sınır şartlı Kural 3 ile tanımlanan 2D CA altındaki görüntüsünü elde eddim.

Kural 3=Kural 1+Kural 2,

$$\begin{aligned}
 [X_{t+1}] &= [X_t] + [X_t][T_2] \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $[X_t]$ keyfi olarak seçilmiştir. Benzer olarak;

Kural 170=Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve

$$\begin{aligned}
[X_{t+1}] &= [X_t][S] + [S][X_t] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.1.1 Verilen Keyfi Bir R Kuralı İçin 2D CA'ların Temsili Matrislerinin Bulunması

İki boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrislerini incelerken kuralların her birini T ile gösterilen bir dönüşüme çevrilebilir. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Khan ve ark., 1997)[6].

$$T_{m \times n}(X) = (T)_{mn \times mn} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}_{mn \times 1} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_m \end{bmatrix}_{mn \times 1} .$$

Bu T matrisi 2D CA'ların temsil matrisi olarak adlandırılır.

Burada $X_1, X_2, \dots, X_m$ X' in satırları ve $X'_1, X'_2, \dots, X'_m$ de X' in ürettiği bir sonraki durumun yani X' in satırlarıdır.

Biraz sonra vereceğimiz Teorem ile T dönüşümü altında verilen keyfi bir R kuralı için düzgün olarak uygulanmış bütün 2D CA hücreleri formülize edilmeye çalışılacaktır.

Teorem 3.1.2 : Herhangi bir R kuralı için iki boyutlu dönüşüm matrisi aşağıdaki şekilde temsil edilebilir (Khan ve ark., 1997)[6]:

$$T_R = \begin{pmatrix} D & U & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ L & D & U & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & D & U & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & L & D & U \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L & D \end{pmatrix}_{mn \times mn}.$$

Burada D, L, U $n \times n$ tipinden aşağıdaki matrislerden biridir:

$$(0), (I), (T_1), (T_2), (I + T_1), (I + T_2), (S) \text{ ve } (I + S).$$

İspat: Yukarıdaki temsil matrisin ilk sütununu elde etmek için, aşağıda verilen doğal baz kullanılabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Şimdi R kuralı ilk satırdan başlayarak her bir hücreye uygulanır. İspatı yaparken

$$T_{m \times n}(X) = (T)_{mn \times mn} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}_{mn \times 1} = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_m' \end{bmatrix}_{mn \times 1}$$

dönüşümünden faydalanılır. İlk olarak T_R 'nin ilk sütunu elde edilir. Şimdi doğal taban matrisindeki bir bileşeni sağa doğru kaydırılıp elde edilen ikinci doğal taban vektörüne, bir kez daha R kuralı uygulanır. Bu seferde T_R 'nin ikinci kolonu elde edilir. Bu şekilde devam edilirse geriye kalan tüm sütunlar elde edilir.

Teoremin daha iyi anlaşılabilmesi küçük örneklerdeki uygulaması aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.1.3: 3×3 tipindeki 2D CA'nın boyutunu hesap edelim. Bütün hücreler üzerinde uygulanmış Kural 2 ye karşılık gelen T matrisini elde etmek için aşağıdaki adımları takip edilir. Kural 2 ye karşılık gelen T matrisinin 1. sütununu elde etmek için 3×3 tipindeki doğal taban matrisleri kullanılır. Örneğin, T 'nin 1. sütununu elde etmek için aşağıdaki doğal taban matrisi kullanılır.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}.$$

Şimdi 2D CA 'nın bir durumu gibi, doğal taban matrisi dikkate alınarak T_{R_2} 'nin (1.) ilk sütununu elde etmek için Kural 2 uygulanır. Önce Kural 2 hatırlansın.

$$\text{Kural 2; } [X_{t+1}] = [X_t] [T_2] = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix}.$$

Şimdi adımlar uygulayabiliriz. Önce; T dönüşümü düşünölsün. T dönüşümü Kural 2 ye uyarlanabilir.

$$T_{m \times n}(X) = (T)_{mn \times mn} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}_{mn \times 1} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_m \end{bmatrix}_{mn \times 1}$$

$$= (T)_{mn \times mn} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}.$$

Burada a_1, a_2, a_3 X 'in satırları a'_1, a'_2, a'_3 ise X 'in bir sonraki durumu olan X' 'nün satırlarıdır. $a_1 = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}]_{1 \times 3}^T$, $a_2 = [a_{21} \ a_{22} \ a_{23}]_{1 \times 3}^T$, $a_3 = [a_{31} \ a_{32} \ a_{33}]_{1 \times 3}^T$ şeklindedir. Böylece

$$T_{3 \times 3}(X) = (T)_{9 \times 9} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ 0 \\ a_{22} \\ a_{23} \\ 0 \\ a_{32} \\ a_{33} \\ 0 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

elde edilir.

Buradan T dönüşümü yukarıda verilen teoremden faydalanılarak bulunabilir. Yani, aşağıdaki doğal taban matrisini kullanılıp Kural 2 ye karşılık gelen T dönüşümü bulunur.

Not: T dönüşümün temsil matrislerini elde etmek için taban vektörlerinin görüntülerini temsil matrisin sütunları olarak alındığında matris elde edilmiş olur. Yani;

$$T: V \rightarrow W, v \in V \text{ ve } v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \text{ ise } T(v) = a_1 T(e_1) + a_2 T(e_2) + a_3 T(e_3)$$

şeklindedir. Buradan taban vektörlerinin görüntülerini temsil matrisin sütunları olarak alındığında

$$(T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3))_{3 \times 1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = T(v)$$

matrisi elde edilmiş olur ki bu da istenilen matristir. Aşağıdaki doğal taban matrisini kullanarak Kural 2 ye karşılık gelen T dönüşümü bulunabilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}.$$

İlk olarak doğal taban matrisinin görüntüleri temsil matrisin sütunları olarak alındığında ve daha sonra Kural 2 uygulandığında

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümü elde edilir.

Şimdi doğal taban matrisindeki 1 sağa doğru kaydırılıp bir kez daha Kural 2 uygulansın. Bu durumda

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

bulunur.

T dönüşümü elde edilene kadar her seferinde 1 sağa doğru kaydırılıp Kural 2 uygulanırsa

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

olarak bulunur.

Şimdi elde edilen T_{R_2} kuralı (yani Kural 2 ye karşılık gelen T dönüşümü) yazılabilir:

$$(T_{R_2})_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} T_1 & O_3 & O_3 \\ O_3 & T_1 & O_3 \\ O_3 & O_3 & T_1 \end{pmatrix}_{9 \times 9}.$$

Böylece elde edilen bu matris 2D sonlu CA ya karşılık gelen temsili matris denilir. Bu tezde, bazı kurallarla üretilen 3D sonlu CA lar tarafından elde edilen temsili matrislerin bulunması en önemli amaçlardan biridir. Bu temsili matrislerinin elde edilmesini kısaca karakterizasyon olarak ifade etmekteyiz.

Lineer cebirden bildiğimiz gibi T dönüşümünün satır uzayının boyutu bulunurken matrisin boyutundan rankı çıkartılır. Yani; $\text{Boy}(T_{R_2}) = \text{Boy}(V) - \text{Rank}(T_{R_2}) = 9 - 6 = 3$ olur.

Şimdi kural 170 in $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde sıfır ve periyodik sınır şartları altındaki temsili matrislerini birer örnek vererek elde edelim.

Örnek 3.1.4: $m=3$ ve $n=3$ olarak 170N kuralına karşılık gelen temsili matrisi bulalım. Bunun için ilk önce sıfır sınır şartı altında 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170N kuralı uygulansın[23].

Çizelge 3. 2 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	0
0	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0
0	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0
0	0	0	0	0

Şimdi Çizelge 3.2 de 170N kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir:

$$x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} = y_{12}$$

$$x_{12} + x_{23} = y_{13}$$

$$x_{11} + x_{31} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{13} + x_{22} + x_{33} = y_{23}$$

$$x_{21} + x_{32} = y_{31}$$

$$x_{22} + x_{31} + x_{33} = y_{32}$$

$$x_{23} + x_{32} = y_{33} .$$

Şimdi doğal taban matrisini kullanılarak bunlara karşılık gelen T temsili matrisi yazalım.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eğer elde edilen sütun matrisleri sırasıyla bitleştirilirse, bu durumda karşılık gelen temsili matris aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$T_{R_{170N}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} S_3 & I_3 & O_3 \\ I_3 & S_3 & I_3 \\ O_3 & I_3 & S_3 \end{pmatrix}_{9 \times 9}.$$

Örnek 3.1.5 Şimdide kare olmayan bir konfigürasyon yani $m=4, n=3$ alalım. İlk önce sıfır sınır şartı altında 4×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılır ve daha sonra bu hücrelere 170N kuralı uygulanır.

Çizelge 3. 3 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	0
0	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0
0	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0
0	x_{41}	x_{42}	x_{43}	0
0	0	0	0	0

Şimdi Çizelge 3.3 de 170N kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir:

$$x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} = y_{12}$$

$$x_{12} + x_{23} = y_{13}$$

$$x_{11} + x_{31} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{13} + x_{22} + x_{33} = y_{23}$$

$$x_{21} + x_{41} + x_{32} = y_{31}$$

$$x_{22} + x_{31} + x_{42} + x_{33} = y_{32}$$

$$x_{23} + x_{32} + x_{43} = y_{33}$$

$$x_{31} + x_{42} = y_{41}$$

Böylece yukarıdaki örneklerde de olduğu gibi elde edilen sütun matrisleri yan yana eklenirse $m = 4$ ve $n = 3$ için 170N kuralına karşılık gelen temsili matris aşağıdaki şekilde bulunur:

$$T_{R_{170N}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{12 \times 12} = \begin{pmatrix} S_3 & I_3 & O_3 & O_3 \\ I_3 & S_3 & I_3 & O_3 \\ O_3 & I_3 & S_3 & I_3 \\ O_3 & O_3 & I_3 & S_3 \end{pmatrix}_{12 \times 12}.$$

Eğer $m = 4$, $n = 4$ olarak alınırsa temsili matris aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$T_{R_{170N}} = \begin{pmatrix} S_4 & I_4 & O_4 & O_4 \\ I_4 & S_4 & I_4 & O_4 \\ O_4 & I_4 & S_4 & I_4 \\ O_4 & O_4 & I_4 & S_4 \end{pmatrix}_{16 \times 16}.$$

Keyfi m ve n için $(T_{170N})_{mn \times mn}$ temsili matrisinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$(T_{170N})_{mn \times mn} = \begin{pmatrix} S & I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ I & S & I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & S & I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & S & I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S \end{pmatrix}.$$

Blok alt matrislerin her biri $n \times n$ tipinde kare matristir ve S matriside aşağıdaki gibidir:

$$S_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Örnek 3.1.5 $m=3$ ve $n=3$ olarak 170P kuralına karşılık gelen temsili matrisi bulalım. Bunun için ilk önce periyodik sınır şartı altında 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücelere 170P kuralı uygulansın[23]

Çizelge 3. 4 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}
x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}

Çizelge 3.4 de 170P kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir, bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir.

$$x_{13} + x_{31} + x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} + x_{32} = y_{12}$$

$$x_{33} + x_{12} + x_{23} + x_{11} = y_{13}$$

$$x_{31} + x_{23} + x_{11} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{33} + x_{13} = y_{23}$$

$$x_{11} + x_{33} + x_{21} + x_{32} = y_{31}$$

$$x_{31} + x_{12} + x_{33} + x_{22} = y_{32}$$

$$x_{32} + x_{13} + x_{31} + x_{23} = y_{33} .$$

Şimdi doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen T_{170P} temsili matrisi bulunabilir.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bir önceki kesimde olduğu gibi elde edilen sütun matrisleri sırasıyla birbirine eklenirse

$T_{R_{170P}}$ temsili matrisi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} S_3^* & I_3 & I_3 \\ I_3 & S_3^* & I_3 \\ I_3 & I_3 & S_3^* \end{pmatrix}_{9 \times 9}.$$

Örnek 3.1.6 Şimdi kare olmayan bir durumu $m=4$ ve $n=3$ için inceleyelim. O halde ilk önce periyodik sınır şartı altında 4×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170P kuralı uygulanarak temsili matris yazılacaktır.

Çizelge 3. 5 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{43}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{41}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}
x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{43}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{41}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}

Çizelge 3. 5 de 170P kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon düzenlenirse

$$x_{13} + x_{41} + x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} + x_{42} = y_{12}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{23} + x_{43} = y_{13}$$

$$x_{31} + x_{23} + x_{11} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{33} + x_{13} = y_{23}$$

$$x_{41} + x_{33} + x_{21} + x_{32} = y_{31}$$

$$x_{31} + x_{22} + x_{33} + x_{42} = y_{32}$$

$$x_{32} + x_{23} + x_{43} + x_{31} = y_{33}$$

$$x_{43} + x_{11} + x_{42} + x_{31} = y_{41}$$

$$x_{41} + x_{12} + x_{43} + x_{32} = y_{42}$$

$$x_{42} + x_{13} + x_{41} + x_{33} = y_{43} \ .$$

denklemleri elde edilir.

Burada doğal taban matrisi kullanılarak bunlara karşılık gelen $T_{R_{170P}}$ temsili matrisi bulunabilir.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Yukarıdaki gibi düşünülürse, bu durumda temsili matris aşağıdaki gibi bulunur:

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{12 \times 12} = \begin{pmatrix} S_3^* & I_3 & O_3 & I_3 \\ I_3 & S_3^* & I_3 & O_3 \\ O_3 & I_3 & S_3^* & I_3 \\ I_3 & O_3 & I_3 & S_3^* \end{pmatrix}_{12 \times 12}.$$

Genel formu elde edebilmek için $m=4, n=4$ karesel bir konfigürasyon alınırsa 2D CA'nın konfigürasyonunun T dönüşümüne karşılık gelen temsili matrisi

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} S_4^* & I_4 & O_4 & I_4 \\ I_4 & S_4^* & I_4 & O_4 \\ O_4 & I_4 & S_4^* & I_4 \\ I_4 & O_4 & I_4 & S_4^* \end{pmatrix}_{16 \times 16}.$$

olarak bulunur. Şimdi genellemeye gidebiliriz. Verilen herhangi bir m ve n için

$(T_{170P})_{mn \times mn}$ temsili matrisinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$(T_{170P})_{mn \times mn} = \begin{pmatrix} S^* & I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & I \\ I & S^* & I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & S^* & I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & S^* & I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S^* & I \\ I & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S^* \end{pmatrix}.$$

Ayrıntılı bilgi için Choudhury ve Dihidar (2004)[4] bakınız.

Blok alt matrislerin her biri $n \times n$ tipinde kare matristir ve S^* matrisi

$$S^*_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 4

ÜÇ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde üç boyutlu hücresel dönüşümlerin tanımını vereceğiz ve 3D CA'ların komşuluk durumlarını tanımlayarak, bu komşulukların çeşitli sınır şartları altında elde edilen temsili matrisleri ve onların karakterizasyonları üzerinde çalışmalar yapacağız. Elde edilen temsili matrislerin terslenebilirliği hakkında incelemeler yapıp bu temsili matrislere karşılık gelen hücresel dönüşümlerin terslenebilir olup olmadığı durumlar hakkında bilgi vereceğiz.

İlk olarak $\mathbb{Z}_p$ cismi üzerinde 3D-CA'nın tanımını verilecektir. Daha sonra özel bir kural ile sıfır sınır şartı altında temsili matrisleri incelenip genel bir form elde edilecektir. Üç boyutlu $\mathbb{Z}^3$ latisleri ve $\sigma: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_p$ elemanlı $\Omega = \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}^3}$ konfigürasyon uzayı göz önüne alınsın. Bir $n \in \mathbb{Z}^3$ noktasındaki σ 'nin değeri σ_n ile tanımlanır. $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{Z}^3$ farklı elemanların bir sonlu kümesi ve bir $f: \mathbb{Z}_p^s \rightarrow \mathbb{Z}_p$ fonksiyonu verilsin.

$F : \Omega \rightarrow \Omega$ global geçiş fonksiyonu $(F\sigma)_n = f(\sigma_{n+u_1}, \dots, \sigma_{n+u_s})$, $n \in \mathbb{Z}^3$ olmak üzere bir

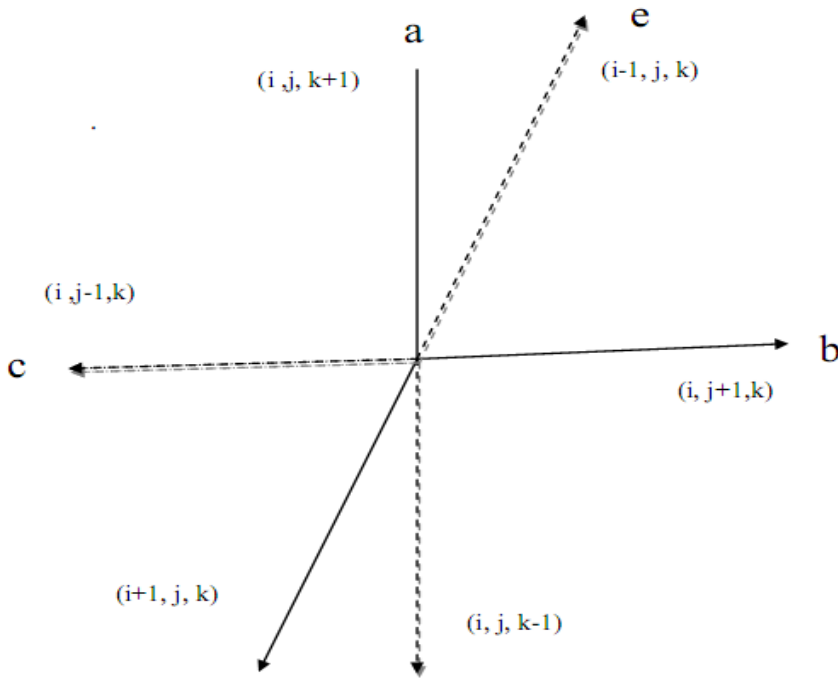
CA ile f lokal kuralı (Ω, F) çifti olarak tanımlanır.

Matematiksel olarak (i, j, k) . hücrenin bir sonraki $(t+1)$. durumu o hücreye en yakın olan komşulukların t . durumuna bağıdır. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
X_{(i,j,k)}^{(t+1)} &= f(X_{(i-1,j-1,k-1)}^{(t)}, X_{(i-1,j,k-1)}^{(t)}, X_{(i-1,j,k+1)}^{(t)}, X_{(i-1,j-1,k)}^{(t)}, X_{(i-1,j-1,k+1)}^{(t)}, \\
&\quad , X_{(i-1,j,k)}^{(t)}, X_{(i-1,j+1,k)}^{(t)}, X_{(i-1,j+1,k-1)}^{(t)}, X_{(i-1,j+1,k+1)}^{(t)}, X_{(i,j-1,k-1)}^{(t)}, X_{(i,j,k-1)}^{(t)}, \\
&\quad , X_{(i,j,k+1)}^{(t)}, X_{(i,j-1,k)}^{(t)}, X_{(i,j-1,k+1)}^{(t)}, X_{(i,j,k)}^{(t)}, X_{(i,j+1,k)}^{(t)}, X_{(i,j+1,k-1)}^{(t)}, X_{(i,j+1,k+1)}^{(t)}, \\
&\quad X_{(i+1,j-1,k-1)}^{(t)}, X_{(i+1,j,k-1)}^{(t)}, X_{(i+1,j,k+1)}^{(t)}, X_{(i+1,j-1,k)}^{(t)}, X_{(i+1,j-1,k+1)}^{(t)}, X_{(i+1,j,k)}^{(t)}, \\
&\quad X_{(i+1,j+1,k)}^{(t)}, X_{(i+1,j+1,k-1)}^{(t)}, X_{(i+1,j+1,k+1)}^{(t)}) \\
&= a_0 \cdot X_{(i-1,j-1,k-1)}^{(t+1)} + a_1 \cdot X_{(i-1,j,k-1)}^{(t+1)} + a_2 \cdot X_{(i-1,j,k+1)}^{(t+1)} + a_3 \cdot X_{(i-1,j-1,k)}^{(t+1)} + \\
&\quad a_4 \cdot X_{(i-1,j-1,k+1)}^{(t+1)} + a_5 \cdot X_{(i-1,j,k)}^{(t+1)} + a_6 \cdot X_{(i-1,j+1,k)}^{(t+1)} + a_7 \cdot X_{(i-1,j+1,k-1)}^{(t+1)} + \\
&\quad a_8 \cdot X_{(i-1,j+1,k+1)}^{(t+1)} + a_9 \cdot X_{(i,j-1,k-1)}^{(t+1)} + a_{10} \cdot X_{(i,j,k-1)}^{(t+1)} + a_{11} \cdot X_{(i,j,k+1)}^{(t+1)} + a_{12} \cdot X_{(i,j-1,k)}^{(t+1)} \\
&\quad + a_{13} \cdot X_{(i,j-1,k+1)}^{(t+1)} + a_{14} \cdot X_{(i,j,k)}^{(t+1)} + a_{15} \cdot X_{(i,j+1,k)}^{(t+1)} + a_{16} \cdot X_{(i,j+1,k-1)}^{(t+1)} + a_{17} \cdot X_{(i,j+1,k+1)}^{(t+1)} + \\
&\quad a_{18} \cdot X_{(i+1,j-1,k-1)}^{(t+1)} + a_{19} \cdot X_{(i+1,j,k-1)}^{(t+1)} + a_{20} \cdot X_{(i+1,j,k+1)}^{(t+1)} + a_{21} \cdot X_{(i+1,j-1,k)}^{(t+1)} + \\
&\quad a_{22} \cdot X_{(i+1,j-1,k+1)}^{(t+1)} + a_{23} \cdot X_{(i+1,j,k)}^{(t+1)} + a_{24} \cdot X_{(i+1,j+1,k)}^{(t+1)} + a_{25} \cdot X_{(i+1,j+1,k-1)}^{(t+1)} + \\
&\quad a_{26} \cdot X_{(i+1,j+1,k+1)}^{(t+1)} \mod p \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_{26} \in \mathbb{Z}_p - \{0\}
\end{aligned}$$

İlk olarak özel olarak seçtiğimiz yerel kuralımızı ifade edelim.

$$\begin{aligned}
x_{(i,j,k)}^{(t+1)} = & a \cdot x_{(i,j,k+1)}^{(t+1)} + b \cdot x_{(i,j+1,k)}^{(t+1)} + c \cdot x_{(i,j-1,k)}^{(t+1)} + d \cdot x_{(i,j,k-1)}^{(t+1)} \\
& + e \cdot x_{(i-1,j,k)}^{(t+1)} + f \cdot x_{(i+1,j,k)}^{(t+1)} \bmod p \\
& (a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}_p - \{0\})
\end{aligned} \tag{4.1}$$



Şekil 4. 1 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Yerel Kural Fonksiyonu

4.1 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Sıfır Sınır Şartı Altında Temsili Matrisinin Elde Edilmesi

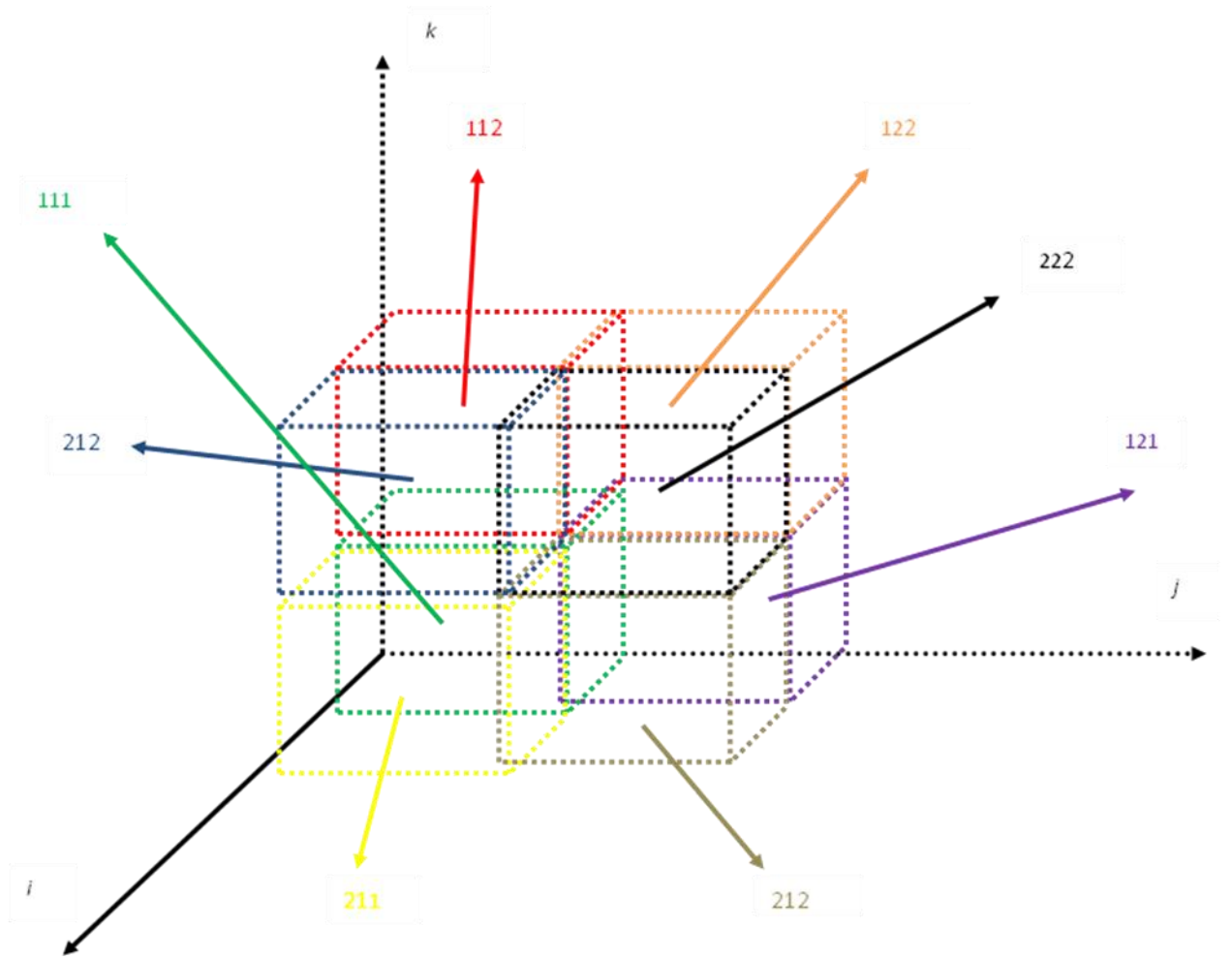
Tezin bu bölümünde yukarıda özel olarak tanımladığımız yerel kural tarafından üretilen $\mathbb{Z}_p$ üzerindeki 3D CA'ların sıfır sınır şartı altında temsili matrisleri incelenip genel durumu ifade edilecektir. Bir ve iki boyutlu hücresel dönüşümlerin bazı özel kurallar için temsili matrisinin nasıl bulunacağını ayrıntılı olarak gösterdik. Şimdi $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bazı özel kurallar için 3D CA'ların temsili matrisleri elde edilip, genel durumu ifade edilecektir.

Şimdi özel olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altında karşılık gelen temsili matrisin en genel halini bulmak için m, n ve s durumlarının bazı özel durumlarını inceleyip daha sonra en genel halini ifade edelim

$$\begin{aligned}
 x_{(i,j,k)}^{(t+1)} &= a \cdot x_{(i,j,k+1)}^{(t+1)} + b \cdot x_{(i,j+1,k)}^{(t+1)} + c \cdot x_{(i,j-1,k)}^{(t+1)} + d \cdot x_{(i,j,k-1)}^{(t+1)} \\
 &\quad + e \cdot x_{(i-1,j,k)}^{(t+1)} + f \cdot x_{(i+1,j,k)}^{(t+1)} \pmod{p} \\
 &\quad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_p - \{0\})
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Örnek 4.1.1 Bu örnekte $m=2, n=2$ ve $s=2$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altında karşılık gelen temsili matrisimizi elde edelim.

Bunun için ilk önce sıfır sınır şartı altında $2 \times 2 \times 2$ tipindeki hücrelerden oluşmuş 3-D sonlu CA'nın konfigürasyonunu yazalım. Daha sonra bu hücrelere yerel kuralı uygulayalım.



Şekil 4. 2 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümler İçin Komşuluk Örneği

Yukarıdaki şekilde verilen sıfır sınır şartlı sonlu konfigürasyonun belirlediğimiz özel yerel kuralı ile üretilen 3-D sonlu CA altında elde edilen yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Çizelge 4. 1 2x2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş konfigürasyon

0	0	0	0
0	x_{212}	x_{222}	0
0	x_{211}	x_{221}	0
0	0	0	0

Çizelge 4. 2 2x2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş konfigürasyon

0	0	0	0
0	x_{112}	x_{122}	0
0	x_{111}	x_{121}	0
0	0	0	0

Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2. de verilen sıfır sınır şartlı sonlu konfigürasyonun özel yerel kural ile üretilen 3D sonlu CA altında elde edilen yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$b.x_{222} + d.x_{211} + e.x_{112} = y_{212}$$

$$c.x_{212} + d.x_{221} + e.x_{122} = y_{222}$$

$$a.x_{212} + b.x_{221} + e.x_{111} = y_{211}$$

$$a.x_{222} + c.x_{211} + e.x_{121} = y_{221}$$

$$f.x_{212} + b.x_{112} + d.x_{111} = y_{112}$$

$$f.x_{222} + c.x_{112} + d.x_{121} = y_{122}$$

$$f.x_{211} + a.x_{112} + b.x_{121} = y_{111}$$

$$f.x_{221} + a.x_{122} + c.x_{111} = y_{121}$$

Burada doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen T dönüşümleri bulunarak özel yerel kuralı ile üretilen 3-D sonlu CA'nın temsili matrisi elde edilecektir.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ a \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \\ d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e \\ 0 \\ d \\ b \\ 0 \end{pmatrix},$$

Buradan elde edilen matris;

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} 0 & b & d & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & d & 0 & e & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & b & d & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 & c & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & f & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & a & c & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}$$

$$= \begin{pmatrix} S_2(c,b) & d.I_2 & e.I_2 & O_2 \\ a.I_2 & S_2(c,b) & O_2 & e.I_2 \\ f.I_2 & O_2 & S_2(c,b) & d.I_2 \\ O_2 & f.I_2 & a.I_2 & S_2(c,b) \end{pmatrix}_{8 \times 8 \times 8}$$

$$S_2(c,b) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{alt matris bu şekildedir.}$$

Örnek 4.1.2 $m=3, n=3$ ve $s=3$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altın da karşılık gelen temsili matrisi elde edelim.

Bunun için ilk önce sıfır sınır şartı altında $3 \times 3 \times 3$ tipindeki hücrelerden oluşmuş 3-D sonlu CA'nın konfigürasyonunu yazalım. Daha sonra bu hücrelere yerel kuralımızı uygulayalım.

Çizelge 4. 3 $3 \times 3 \times 3$ tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{313}	x_{323}	x_{333}	0
0	x_{312}	x_{322}	x_{332}	0
0	x_{311}	x_{321}	x_{331}	0
0	0	0	0	0

Çizelge 4. 4 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{213}	x_{223}	x_{233}	0
0	x_{212}	x_{222}	x_{232}	0
0	x_{211}	x_{221}	x_{231}	0
0	0	0	0	0

Çizelge 4. 5 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{113}	x_{123}	x_{133}	0
0	x_{112}	x_{122}	x_{132}	0
0	x_{111}	x_{121}	x_{131}	0
0	0	0	0	0

Çizelge4.3,Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5 de verilen sıfır sınır şartlı sonlu konfigürasyonun özel yerel kural ile üretilen 3D sonlu CA altında elde edilen yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$b.x_{323} + d.x_{312} + e.x_{213} = y_{313}$$

$$b.x_{333} + c.x_{313} + d.x_{322} + e.x_{223} = y_{323}$$

$$c.x_{323} + d.x_{332} + e.x_{233} = y_{333}$$

$$b.x_{322} + d.x_{311} + a.x_{313} + e.x_{212} = y_{312}$$

$$b.x_{332} + c.x_{312} + d.x_{321} + a.x_{323} + e.x_{222} = y_{322}$$

$$c.x_{322} + d.x_{331} + a.x_{333} + e.x_{232} = y_{332}$$

$$b.x_{321} + a.x_{312} + e.x_{211} = y_{311}$$

$$b.x_{331} + c.x_{311} + a.x_{322} + e.x_{221} = y_{321}$$

$$c.x_{321} + a.x_{332} + e.x_{231} = y_{331}$$

$$b.x_{223} + d.x_{212} + e.x_{113} + f.x_{313} = y_{213}$$

$$b.x_{233} + c.x_{213} + d.x_{222} + e.x_{123} + f.x_{323} = y_{223}$$

$$c.x_{223} + d.x_{232} + e.x_{133} + f.x_{333} = y_{233}$$

$$b.x_{222} + a.x_{213} + d.x_{211} + e.x_{112} + f.x_{312} = y_{212}$$

$$b.x_{232} + c.x_{212} + d.x_{221} + a.x_{223} + e.x_{122} + f.x_{322} = y_{222}$$

$$c.x_{222} + d.x_{231} + a.x_{233} + e.x_{132} + f.x_{332} = y_{232}$$

$$b.x_{221} + a.x_{212} + e.x_{111} + f.x_{311} = y_{211}$$

$$b.x_{231} + c.x_{211} + a.x_{222} + e.x_{121} + f.x_{321} = y_{221}$$

$$c.x_{221} + a.x_{232} + e.x_{131} + f.x_{331} = y_{231}$$

$$b.x_{123} + d.x_{112} + f.x_{213} = y_{113}$$

$$b.x_{133} + c.x_{113} + d.x_{122} + f.x_{223} = y_{123}$$

$$c.x_{123} + d.x_{132} + f.x_{233} = y_{133}$$

$$b.x_{122} + d.x_{111} + a.x_{113} + f.x_{212} = y_{112}$$

$$b.x_{132} + c.x_{112} + d.x_{121} + a.x_{123} + f.x_{222} = y_{122}$$

$$c.x_{122} + d.x_{131} + a.x_{133} + f.x_{232} = y_{132}$$

$$b.x_{121} + a.x_{112} + f.x_{211} = y_{111}$$

$$b.x_{131} + c.x_{111} + a.x_{122} + f.x_{221} = y_{121}$$

$$c.x_{121} + a.x_{132} + f.x_{231} = y_{13}$$

Burada doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen T dönüşümleri bulunarak özel yerel kuralı ile üretilen 3-D sonlu CA'nın temsili matrisi elde edilecektir.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

biçimindedir. Buradan elde edilen matris aşağıdaki gibidir:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} S_3(c,b) & d.I_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ a.I_3 & S_3(c,b) & d.I_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & a.I_3 & S_3(c,b) & O_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ f.I_3 & O_3 & O_3 & S_3(c,b) & d.I_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & f.I_3 & O_3 & a.I_3 & S_3(c,b) & d.I_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 & d.I_3 & S_3(c,b) & O_3 & O_3 & e.I_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 & O_3 & S_3(c,b) & d.I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 & a.I_3 & S_3(c,b) & d.I_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 & a.I_3 & S_3(c,b) \end{pmatrix}_{27 \times 27}$$

$$S_3(c,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{alt matris bu şekildedir.}$$

Genel olarak keyfi $m \geq 2$ ve $n \geq 2$ doğal sayıları için düzenlenen sıfır sınır şartlı $m \times n \times s$ tipli 3-D sonlu CA konfigürasyonunun seçtiğimiz özel yerel kuralı ile üretilen 3-D sonlu CA dönüşümüne karşılık gelen temsili matrisi alt blok matrislere ayırarak ifade edip yazalım. Yani yukarıdaki 27×27 tipindeki matrisimizi alt matrislere ayırarak isimlendirelim.

$$M_3 = \begin{pmatrix} S_3(c,b) & d.I_3 & O_3 \\ a.I_3 & S_3(c,b) & d.I_3 \\ O_3 & a.I_3 & S_3(c,b) \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} e.I_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & e.I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & e.I_3 \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} f.I_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & f.I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & f.I_3 \end{pmatrix}, \quad O_3 = \begin{pmatrix} O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 \end{pmatrix}$$

Son olarak yukarıdaki matrisi blok matris olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} M_3 & EI_3 & O_3 \\ FI_3 & M_3 & EI_3 \\ O_3 & FI_3 & M_3 \end{pmatrix}_{27 \times 27}$$

Genelleme yapmak için $m = 4$, $n = 4$ ve $s = 4$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altın da karşılık gelen temsili matrisi ve onun blok ve alt matrislerini ifade edelim.

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & O_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ fI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & O_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & O_4 & O_4 & O_4 & eI_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) & dI_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(c,b) \end{pmatrix}_{64 \times 64}$$

$$S_4(c,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad \text{alt matris bu şekildedir.}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} S_4(c,b) & d.I_4 & O_4 & O_4 \\ a.I_4 & S_4(c,b) & d.I_4 & O_4 \\ O_4 & a.I_4 & S_4(c,b) & d.I_4 \\ O_4 & O_4 & a.I_4 & S_4(c,b) \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} e.I_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & e.I_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & e.I_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & e.I_4 \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} f.I_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & f.I_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & f.I_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & f.I_4 \end{pmatrix}, \quad O_4 = \begin{pmatrix} O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \end{pmatrix}$$

Son olarak yukarıdaki matrisi blok matris olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} M_4 & E_4 & O_4 & O_4 \\ F_4 & M_4 & E_4 & O_4 \\ O_4 & F_4 & M_4 & E_4 \\ O_4 & O_4 & F_4 & M_4 \end{pmatrix}_{64 \times 64}$$

Şimdi $m=5, n=5$ ve $s=5$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altın da karşılık gelen blok matrisi ifade edelim:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} M_5 & E_5 & O_5 & O_5 & O_5 \\ F_5 & M_5 & E_5 & O_5 & O_5 \\ O_5 & F_5 & M_5 & E_5 & O_5 \\ O_5 & O_5 & F_5 & M_5 & E_5 \\ O_5 & O_5 & O_5 & F_5 & M_5 \end{pmatrix}_{125 \times 125}$$

Genelleme yapmak için matrisin kare olmayan yani, $m=3, n=2$ ve $s=2$ olarak seçtiği miz yerel kurala sıfır sınır şartı altın da karşılık gelen temsili matrisi ve onun blok ve alt matrislerini ifade edelim.

$$M_2 = \begin{pmatrix} S_2(c,b) & d.I_2 \\ a.I_2 & S_2(c,b) \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} e.I_2 & O_2 \\ O_2 & e.I_2 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} f.I_2 & O_2 \\ O_2 & f.I_2 \end{pmatrix}$$

Son olarak yukarıdaki matrisi blok matris olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} M_2 & E_2 & O_2 \\ F_2 & M_2 & E_2 \\ O_2 & F_2 & M_2 \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

Şimdide $m=3, n=2$ ve $s=4$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altın da karşılık gelen temsili matrisi ve onun blok ve alt matrislerini ifade edelim.

$$M_4 = \begin{pmatrix} S_2(c,b) & d.I_2 & O_2 & O_2 \\ a.I_2 & S_2(c,b) & d.I_2 & O_2 \\ O_2 & a.I_2 & S_2(c,b) & d.I_2 \\ O_2 & O_2 & a.I_2 & S_2(c,b) \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} e.I_2 & O_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & e.I_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & e.I_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & O_2 & e.I_2 \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} f.I_2 & O_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & f.I_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & f.I_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & O_2 & f.I_2 \end{pmatrix}, \quad O_4 = \begin{pmatrix} O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \end{pmatrix}$$

Son olarak yukarıdaki matrisi blok matris olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} M_4 & E_4 & O_4 \\ F_4 & M_4 & E_4 \\ O_4 & F_4 & M_4 \end{pmatrix}_{24 \times 24}$$

Şimdi $m \geq 2$ ve $n \geq 2$ doğal sayıları için düzenlenen matrisin en genel halini aşağıdaki şekilde verelim:

$$(T_{RN})_{mns \times mns} = \begin{pmatrix} M_s & E_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ F_s & M_s & E_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & F_s & M_s & E_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & O_s & F_s & M_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & M_s & E_s & O_s \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & F_s & M_s & E_s \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & F_s & M_s \end{pmatrix}_{mns \times mns}$$

Alt matrislerin en genel halleri aşağıdaki gibidir:

$$M_s = \begin{pmatrix} S_n(c,b) & d.I_n & O_n & \cdots & O_n & O_n \\ a.I_n & S_n(c,b) & d.I_n & \cdots & O_n & O_n \\ O_n & a.I_n & S_n(c,b) & \cdots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & S_n(c,b) & d.I_n \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & a.I_n & S_n(c,b) \end{pmatrix}_{ns \times ns}$$

$$E_s = \begin{pmatrix} e.I_n & O_n & O_n & \cdots & O_n & O_n \\ O_n & e.I_n & O_n & \cdots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & e.I_n & \cdots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & e.I_n & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & O_n & e.I_n \end{pmatrix}_{ns \times ns}$$

$$F_s = \begin{pmatrix} f.I_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & f.I_n & O_s & \dots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & f.I_n & \dots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \dots & f.I_n & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & f.I_n \end{pmatrix}_{ns \times ns}$$

$e.I_n$ ve $f.I_n$ blok birim matrisler ve O_n blok sıfır matris olmak üzere $S_n(c,b)$

matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$S_n(c,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

4.2 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Periyodik Sınır Şartı Altında Temsili

Matrisinin Elde Edilmesi

Bir önceki çalışmada sıfır sınır şartı altında üç boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrislerini ve onların terslenebilirliğini inceledik. Şimdi ise periyodik sınır şartı altında üç boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrislerini elde edeceğiz. Bu çalışmada kullanacağımız yerel kural sıfır sınır şartı altındaki yerel kural ile aynı olacaktır.

İlk olarak özel olarak seçtiğimiz yerel kuralı tekrar ifade edelim.

$$\begin{aligned}
x_{(i,j,k)}^{(t+1)} = & a.x_{(i,j,k+1)}^{(t+1)} + b.x_{(i,j+1,k)}^{(t+1)} + c.x_{(i,j-1,k)}^{(t+1)} + d.x_{(i,j,k-1)}^{(t+1)} \\
& + e.x_{(i-1,j,k)}^{(t+1)} + f.x_{(i+1,j,k)}^{(t+1)} \mod p \\
& (a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}_p - \{0\})
\end{aligned}$$

Şimdi periyodik sınır şartı altında üç boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrisinin özel halini küçük bir örnekte görelim. Daha sonra temsili matrisin $m, n, s \geq 3$ olduğu durumlardaki en genel halini verelim.

Örnek 4.2.1 $m=3, n=3$ ve $s=3$ alarak seçtiğimiz yerel kurala periyodik sınır şartı altın da karşılık gelen temsili matrisi elde edelim.

Bunun için ilk önce periyodik sınır şartı altında $3 \times 3 \times 3$ tipindeki hücrelerden oluşmuş 3-D sonlu CA'nın konfigürasyonunu yazalım. Daha sonra bu hücrelere yerel kuralı uygulayalım.

Çizelge 4. 6 $3 \times 3 \times 3$ tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{131}	x_{111}	x_{121}	x_{131}	x_{111}
x_{133}	x_{113}	x_{123}	x_{133}	x_{113}
x_{132}	x_{112}	x_{122}	x_{132}	x_{112}
x_{131}	x_{111}	x_{121}	x_{131}	x_{111}
x_{133}	x_{113}	x_{123}	x_{133}	x_{113}

Çizelge 4. 7 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

X_{331}	X_{311}	X_{321}	X_{331}	X_{311}
X_{333}	X_{313}	X_{323}	X_{333}	X_{313}
X_{332}	X_{312}	X_{322}	X_{332}	X_{312}
X_{331}	X_{311}	X_{321}	X_{331}	X_{311}
X_{333}	X_{313}	X_{323}	X_{333}	X_{313}

Çizelge 4. 8 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

X_{231}	X_{211}	X_{221}	X_{231}	X_{211}
X_{233}	X_{213}	X_{223}	X_{233}	X_{213}
X_{232}	X_{212}	X_{222}	X_{232}	X_{212}
X_{231}	X_{211}	X_{221}	X_{231}	X_{211}
X_{233}	X_{213}	X_{223}	X_{233}	X_{213}

Çizelge 4. 9 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{131}	x_{111}	x_{121}	x_{131}	x_{111}
x_{133}	x_{113}	x_{123}	x_{133}	x_{113}
x_{132}	x_{112}	x_{122}	x_{132}	x_{112}
x_{131}	x_{111}	x_{121}	x_{131}	x_{111}
x_{133}	x_{113}	x_{123}	x_{133}	x_{113}

Çizelge 4. 10 3x3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{331}	x_{311}	x_{321}	x_{331}	x_{311}
x_{333}	x_{313}	x_{323}	x_{333}	x_{313}
x_{332}	x_{312}	x_{322}	x_{332}	x_{312}
x_{331}	x_{311}	x_{321}	x_{331}	x_{311}
x_{333}	x_{313}	x_{323}	x_{333}	x_{313}

Çizelge 4.6,Çizelge 4.7,Çizelge 4.8,Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10 de verilen periyodik sınır şartlı sonlu konfigürasyonun özel yerel kural ile üretilen 3D sonlu CA altında elde edilen yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$b.x_{323} + d.x_{312} + c.x_{333} + a.x_{311} + e.x_{213} + f.x_{113} = y_{313}$$

$$b.x_{333} + d.x_{322} + c.x_{313} + a.x_{321} + e.x_{223} + f.x_{123} = y_{323}$$

$$b.x_{313} + d.x_{332} + c.x_{323} + a.x_{331} + e.x_{233} + f.x_{113} = y_{333}$$

$$b.x_{322} + d.x_{311} + c.x_{332} + a.x_{313} + e.x_{212} + f.x_{112} = y_{312}$$

$$b.x_{332} + d.x_{321} + c.x_{312} + a.x_{323} + e.x_{222} + f.x_{122} = y_{322}$$

$$b.x_{312} + d.x_{331} + c.x_{322} + a.x_{333} + e.x_{232} + f.x_{132} = y_{332}$$

$$b.x_{321} + d.x_{313} + c.x_{331} + a.x_{312} + e.x_{211} + f.x_{111} = y_{311}$$

$$b.x_{331} + d.x_{323} + c.x_{311} + a.x_{322} + e.x_{221} + f.x_{121} = y_{321}$$

$$b.x_{311} + d.x_{333} + c.x_{321} + a.x_{332} + e.x_{231} + f.x_{131} = y_{331}$$

$$b.x_{223} + d.x_{212} + c.x_{233} + a.x_{211} + e.x_{113} + f.x_{313} = y_{213}$$

$$b.x_{233} + d.x_{222} + c.x_{213} + a.x_{221} + e.x_{123} + f.x_{323} = y_{223}$$

$$b.x_{213} + d.x_{232} + c.x_{223} + a.x_{231} + e.x_{133} + f.x_{333} = y_{233}$$

$$b.x_{222} + d.x_{211} + c.x_{232} + a.x_{213} + e.x_{112} + f.x_{312} = y_{212}$$

$$b.x_{232} + d.x_{221} + c.x_{212} + a.x_{223} + e.x_{122} + f.x_{322} = y_{222}$$

$$b.x_{212} + d.x_{231} + c.x_{222} + a.x_{233} + e.x_{132} + f.x_{332} = y_{232}$$

$$b.x_{221} + d.x_{213} + c.x_{231} + a.x_{212} + e.x_{111} + f.x_{311} = y_{211}$$

$$b.x_{231} + d.x_{223} + c.x_{211} + a.x_{222} + e.x_{121} + f.x_{321} = y_{221}$$

$$b.x_{211} + d.x_{233} + c.x_{221} + a.x_{232} + e.x_{131} + f.x_{331} = y_{231}$$

$$b.x_{123} + d.x_{112} + c.x_{133} + a.x_{111} + e.x_{313} + f.x_{213} = y_{113}$$

$$b.x_{133} + d.x_{122} + c.x_{113} + a.x_{121} + e.x_{323} + f.x_{223} = y_{123}$$

$$b.x_{113} + d.x_{132} + c.x_{123} + a.x_{131} + e.x_{333} + f.x_{233} = y_{133}$$

$$b.x_{122} + d.x_{111} + c.x_{132} + a.x_{113} + e.x_{312} + f.x_{212} = y_{112}$$

$$b.x_{132} + d.x_{121} + c.x_{112} + a.x_{123} + e.x_{322} + f.x_{222} = y_{122}$$

$$b.x_{112} + d.x_{131} + c.x_{122} + a.x_{133} + e.x_{332} + f.x_{232} = y_{132}$$

$$b.x_{121} + d.x_{113} + c.x_{131} + a.x_{112} + e.x_{311} + f.x_{211} = y_{111}$$

$$b.x_{131} + d.x_{123} + c.x_{111} + a.x_{122} + e.x_{321} + f.x_{221} = y_{121}$$

$$b.x_{111} + d.x_{133} + c.x_{121} + a.x_{132} + e.x_{331} + f.x_{231} = y_{131}$$

Burada doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen T dönüşümleri bulunarak yerel kural ile üretilen 3-D sonlu CA'nın temsili matrisi elde edilecektir. Buradan elde edilen matris aşağıdaki gibidir:

$$T_{RP} = \begin{pmatrix} S_3^*(c,b) & d.I_3 & a.I_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 & O_3 \\ a.I_3 & S_3^*(c,b) & d.I_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 \\ d.I_3 & a.I_3 & S_3^*(c,b) & O_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 \\ f.I_3 & O_3 & O_3 & S_3^*(c,b) & d.I_3 & a.I_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & f.I_3 & O_3 & a.I_3 & S_3^*(c,b) & d.I_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & f.I_3 & d.I_3 & a.I_3 & S_3^*(c,b) & O_3 & O_3 & e.I_3 \\ e.I_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 & O_3 & S_3^*(c,b) & d.I_3 & a.I_3 \\ O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & O_3 & a.I_3 & S_3^*(c,b) & d.I_3 \\ O_3 & O_3 & e.I_3 & O_3 & O_3 & f.I_3 & d.I_3 & a.I_3 & S_3^*(c,b) \end{pmatrix}_{27 \times 27}$$

$$= \begin{pmatrix} K_3 & E_3 & F_3 \\ E_3 & K_3 & E_3 \\ E_3 & E_3 & K_3 \end{pmatrix}_{27 \times 27}$$

Burada K_3, E_3, F_3 blok matrislerdir.

$$K_3 = \begin{pmatrix} S_3(c,b) & d.I_3 & O_3 \\ a.I_3 & S_3(c,b) & d.I_3 \\ O_3 & a.I_3 & S_3(c,b) \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} e.I_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & e.I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & e.I_3 \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} f.I_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & f.I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & f.I_3 \end{pmatrix}, \quad O_3 = \begin{pmatrix} O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 \end{pmatrix}$$

$$S_3^*(c,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \text{ blok alt matrisi bu şekildedir.}$$

Genelleme yapmak için $m = 4$, $n = 4$ ve $s = 4$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza periyodik sınır şartı altın da karşılık gelen temsili matrisi ifade edelim.

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & aI_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 \\ dI_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & O_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 \\ fI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & aI_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & dI_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & O_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & aI_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & dI_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & O_4 & O_4 & aI_4 & eI_4 \\ eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 & aI_4 \\ O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & O_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 & O_4 \\ O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & dI_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) & dI_4 \\ O_4 & O_4 & O_4 & eI_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & O_4 & fI_4 & dI_4 & O_4 & aI_4 & S_4^*(c,b) \end{pmatrix}_{64 \times 64}$$

Şimdi yukarıdaki matrisimizi blok matris olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} K_4 & E_4 & O_4 & F_4 \\ F_4 & K_4 & E_4 & O_4 \\ O_4 & F_4 & K_4 & E_4 \\ E_4 & O_4 & F_4 & K_4 \end{pmatrix}_{64 \times 64}$$

$$S_4(c,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & c \\ c & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & b \\ b & 0 & c & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad \text{alt matris bu şekildedir.}$$

Şimdi matrisin $m, n, s \geq 3$ olduğu durumlardaki en genel halini aşağıdaki şekilde verelim:

$$(T_{RP})_{mns \times mns} = \begin{pmatrix} K_s & E_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & F_s \\ F_s & K_s & E_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & F_s & K_s & E_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & O_s & F_s & K_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & K_s & E_s & O_s \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & F_s & K_s & E_s \\ E_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & F_s & K_s \end{pmatrix}_{mns \times mns}$$

Alt matrislerin en genel halleri aşağıdaki gibidir:

$$K_s = \begin{pmatrix} S_n^*(c,b) & d.I_n & O_n & \cdots & O_n & a.I_n \\ a.I_n & S_n^*(c,b) & d.I_n & \cdots & O_n & O_n \\ O_n & a.I_n & S_n^*(c,b) & \cdots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & S_n^*(c,b) & d.I_n \\ d.I_n & O_n & O_n & \cdots & a.I_n & S_n^*(c,b) \end{pmatrix}_{ns \times ns}.$$

$$E_s = \begin{pmatrix} e.I_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & e.I_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & e.I_n & \dots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \dots & e.I_n & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & e.I_n \end{pmatrix}_{ns \times ns}.$$

$$F_s = \begin{pmatrix} f.I_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & f.I_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & f.I_n & \dots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \dots & f.I_n & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & f.I_n \end{pmatrix}_{ns \times ns}$$

.

$$O_s = \begin{pmatrix} O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \dots & O_n & O_n \end{pmatrix}_{ns \times ns}$$

$e.I_n$ ve $f.I_n$ blok birim matrisler ve O_n blok sıfır matris olmak üzere $S_n(c, b)$

matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$S_n^*(c, b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c \\ c & 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Şimdi $m = n = s = 2$ olduğu özel durumda temsili matrisin en genel hali aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} (T_{RP})_{8 \times 8} &= \begin{pmatrix} S_2^{**}(b, c) & (a+d)I_2 & (e+f)I_2 & O_2 \\ (a+d)I_2 & S_2^{**}(b, c) & O_2 & (e+f)I_2 \\ (e+f)I_2 & O_2 & S_2^{**}(b, c) & (a+d)I_2 \\ O_2 & (e+f)I_2 & (a+d)I_2 & S_2^{**}(b, c) \end{pmatrix}_{8 \times 8} \\ &= \begin{pmatrix} L_2 & (E+F)I_2 \\ (E+F)I_2 & L_2 \end{pmatrix}_{8 \times 8}. \end{aligned}$$

$$S_2^{**}(b, c) = \begin{pmatrix} 0 & b+c \\ b+c & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \text{ blok alt matris bu şekildedir.}$$

Alt matrislerin en genel halleri aşağıdaki gibidir:

$$L_2 = \begin{pmatrix} S_2^{**}(b, c) & (a+d)I_2 \\ (a+d)I_2 & S_2^{**}(b, c) \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (E+F)I_2 = \begin{pmatrix} (e+f)I_2 & O_2 \\ O_2 & (e+f)I_2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

4.3 Üç Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Sıfır Sınır Şartı Altında Temsili Matrisinin Rankının Hesaplanması

Üç boyutlu hücresel dönüşümlerin terslenebilirliği oldukça zor bir problemdir. Eğer temsili matris terslenebilirse, hücresel dönüşümde terslenebilir. K. Morita hücresel dönüşümlerin terslenebilirliğinin özelliklerini incelemiştir. Z. Çinkır ve ark. Periyodik sınır şartı altında $\mathbb{Z}_m$ cismi üzerinde hücresel dönüşümlerin terslenebilme problemiyle ilgilenmişlerdir. Yine H. Akın ve ark. $\mathbb{Z}_m$ cismi üzerinde yansılmalı(reflektif) sınır şartı altında hücresel dönüşümlerin terslenebilme problemiyle ilgilenmişlerdir. Şimdi vereceğimiz teorem 3D-CA'nın sıfır sınır şartı altında terslenebilirliğini belirlemek için bize çok önemli bir algoritma verecektir.

Teorem 4.3.1 $n, m, s \geq 2$ ($n, m, s \in \mathbb{Z}^+$) için, $(T_{RN})_{mns \times mns}$ temsili matrisi aşağıdaki gibidir:

$$(T_{RN})_{mns \times mns} = \begin{pmatrix} M_s & E_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ F_s & M_s & E_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & F_s & M_s & E_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & O_s & F_s & M_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & M_s & E_s & O_s \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & F_s & M_s & E_s \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & F_s & M_s \end{pmatrix}_{mns \times mns}.$$

M_s, E_s, F_s ve O_s blok matrislerini daha önce tanımlamıştık.

$(T_{RN})_{mns \times mns}$ 'nin rankı ;

$$(m-1)ns + rank(\lambda_{2m-1})$$

dir ki burada λ_{2m-1} aşağıdaki rekürans bağlantısını sağlar:

$$\lambda_1(S) = M, \lambda_0(S) = F$$

$$m \geq 2, \lambda_{2m-1}(S) = -E^{-1}M \lambda_{2m-3}(S) + \lambda_{2m-4}(S),$$

$$m \geq 3, \lambda_{2m-4}(S) = -E^{-1}F \lambda_{2m-5}(S) . \quad (4.2)$$

İspat: $m \geq 2$ üzerinden tümevarım metodunu uygulayacağız. $m = 2$ için

$$T = \begin{pmatrix} M & EI \\ FI & M \end{pmatrix}$$

blok matrisine sahibiz. Şimdi blok matrisimizin rankını hesaplamak istersek R_1 ve R_2 blok matrislerin satırları olmak üzere birinci satırı $-E^{-1}M$ ile çarpıp ikinci satıra eklersek

$$\begin{pmatrix} M & EI \\ -E^{-1}M^2 + F = \lambda_3(S) & O \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Bu durumda T 'nin rankı $-E^{-1}M^2 + F = \lambda_3(S)$ 'e bağlıdır. $m = 3$ için

$$T = \begin{pmatrix} M & EI & O \\ FI & M & EI \\ O & FI & M \end{pmatrix}$$

blok matrisine sahibiz. Şimdi blok matrisin rankını hesaplamak istersek ikinci satırı $-E^{-1}M$ ile çarpıp üçüncü satıra eklersek

$$\begin{pmatrix} M & EI & O \\ FI & M & EI \\ -E^{-1}FM = \lambda_2(S) & -E^{-1}M^2 + F = \lambda_3(S) & O \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Daha sonra yeni elde ettiğimiz matriste birinci satırı $-E^{-1}\lambda_3(S)$ ile çarpıp üçüncü satıra eklersek

$$\begin{pmatrix} M & EI & O \\ FI & M & EI \\ -E^{-1}\lambda_3(S)M + \lambda_2(S) = \lambda_5(S) & O & O \end{pmatrix}$$

Bu durumda T 'nin rankı $-E^{-1}\lambda_3(S)M + \lambda_2(S) = \lambda_5(S)$ 'e bağlıdır.

T 'nin $m-1$ inci satırı $(0,0,\dots,\lambda_0(S),\lambda_1(S),E)$ bulunur. $m-1$ inci satırını $-E^{-1}\lambda_1(S)$ ile çarpıp son satıra eklersek son satır $(0,0,\dots,\lambda_2(S),\lambda_3(S),0)$ olarak elde edilir. Şimdi yeni matrisin $m-2$ inci satırını $-E^{-1}\lambda_3(S)$ ile çarpıp son satıra eklersek son satır $(0,0,\dots,\lambda_4(S),\lambda_5(S),0,0)$ olarak bulunur. Elde ettiğimiz yeni matrisin ikinci satırını $-E^{-1}\lambda_{2m-5}(S)$ ile çarpıp son satıra eklersek $(\lambda_{2m-4}(S),\lambda_{2m-3}(S),0,0,\dots,0)$ elde ederiz. Son olarak, yeni matrisin birinci satırını $-E^{-1}\lambda_{2m-3}(S)$ ile çarpıp son satıra eklersek son satır $(\lambda_{2m-1}(S),0,0,0,\dots,0)$ olarak bulunur. Böylece yeni matris

$$(T_{RN})_{mns \times mns} = \begin{pmatrix} M_s & E_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ F_s & M_s & E_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & F_s & M_s & E_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ O_s & O_s & F_s & M_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & M_s & E_s & O_s \\ O_s & O_s & O_s & O_s & \cdots & F_s & M_s & E_s \\ \lambda_{2m-1}(S) & O_s & O_s & O_s & \cdots & O_s & O_s & O_s \end{pmatrix}_{mns \times mns}$$

şeklinde elde edilir ve açıkça bellidir ki $\text{rank}(T) = \text{rank}(T')$ olur. Ayrıca A matrisini incelersek kolaylıkla görebiliriz ki A matrisi terslenebilirdir ve dolayısıyla rankı indirgenemezdir. Böylece T 'nin çekirdeğinin boyutu $\lambda_{2m-1}(S)$ 'in çekirdeğinin boyutuna eşittir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.3.1 Bu örnekte $m=2, n=2$ ve $s=2$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altında karşılık gelen temsili matrisin rankını hesaplayalım.

İlk olarak temsili matrisi aşağıdaki gibi verelim:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} 0 & b & d & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & d & 0 & e & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & b & d & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 & c & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & f & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & a & c & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}$$

$$= \begin{pmatrix} S_2(c,b) & d.I_2 & e.I_2 & O_2 \\ a.I_2 & S_2(c,b) & O_2 & e.I_2 \\ f.I_2 & O_2 & S_2(c,b) & d.I_2 \\ O_2 & f.I_2 & a.I_2 & S_2(c,b) \end{pmatrix}_{8 \times 8}$$

$$S_2(c,b) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, d.I_2 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}, e.I_2 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}_{2 \times 2},$$

$$f.I_2 = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}_{2 \times 2}, a.I_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Yukarıdaki temsili matrisi blok matris olarak bir kademe daha yazmak istersek

$$M_2 = \begin{pmatrix} S_2(c,b) & d.I_2 \\ d.I_2 & S_2(c,b) \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} e.I_2 & O_2 \\ O_2 & e.I_2 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} f.I_2 & O_2 \\ O_2 & f.I_2 \end{pmatrix},$$

Şimdi matrisi blok matrisler olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} M_2 & E_2 \\ F_2 & M_2 \end{pmatrix}$$

Bu blok matrisin rankını hesaplamak istersek;

R_1 ve R_2 blok matrislerin satırları olmak üzere; $-F_2 R_1 + M_2 R_2 \rightarrow R_2$ işlemini yaparsak en son elde ettiğimiz matris aşağıdaki gibi olur:

$$T'_{RN} = \begin{pmatrix} M_2 & E_2 \\ 0 & -F_2 E_2 + M_2^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir ve blok matrisin 1. Satırındaki E_2 blok matrisi birim matris olduğundan bu matrisin rankı yani;

$$\text{rank}(T'_{RN}) = 4 + \text{rank}(-F_2 E_2 + M_2^2) \text{ olarak bulunur.}$$

$$-F_2 E_2 + M_2^2 = \begin{pmatrix} bc+ad-fe & 0 & 0 & 2bd \\ 0 & bc+ad-fe & 2cd & 0 \\ 0 & 2ab & bc+ad-fe & 0 \\ 2ac & 0 & 0 & bc+ad-fe \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

olarak bulunur.

Burada özel olarak $a = b = c = 1, d = e = f = 2$ alınırsa ve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_3$ seçilirse;

$$\begin{aligned} m \geq 2, \lambda_{2m-1}(S) &= -E^{-1}M\lambda_{2m-3}(S) + \lambda_{2m-4}(S), \\ \lambda_3(S) &= -E^{-1}M\lambda_1(S) + \lambda_0(S) \\ &= -E^{-1}M^2 + F \end{aligned}$$

$$\lambda_1(S) = M, \lambda_0(S) = F$$

$$(T_{RN})_{8 \times 8} = (m-1)ns + rank\lambda_{2m-1}(S) = (2-1)2.2 + rank\lambda_3(S) = 4 + 4 = 8.$$

olarak bulunur bu da matrisin terslenebilir olduğunu ve dolayısıyla ona karşılık gelen hücresel dönüşümünde terslenebilir olduğunu bize söyler. Tabi matrisin rankı seçilen cisimler ve onların elemanlarına verilen değerlere göre değişir.

Şimdi özel olarak $a = b = c = d = e = f = 1$ alınırsa ve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_3$ seçilirse;

$$rank(T'_{RN}) = 4 + rank(-F_2E_2 + M_2^2) = 6$$

Aynı matrisin rankını yukarıdaki teorem vasıtasıyla kolaylıkla söyleyebiliriz:

$$(T_{RN})_{8 \times 8} = (m-1)ns + rank\lambda_{2m-1}(S) = (2-1)2.2 + rank\lambda_3(S) = 4 + 2 = 6$$

olarak bulunur buda matrisin terslenebilir olmadığını ve dolayısıyla ona karşılık gelen hücresel dönüşümünde terslenebilir olmadığını söyler.

BÖLÜM 5

ÜÇ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN BAZI UYGULAMALARI

Bu bölüm oluşturulurken; Cellular Automata: Additive Cellular Automata: Theory and Applications, (1997) [15] isimli kitapdan ve [30] nolu çalışmadan faydalanılmıştır. Bu bölümde T geçiş matrisinin minimal polinomunu bulacağız ve bu minimal polinom yardımıyla devir ve transient uzunluklarını belirleyeceğiz. Ayrıca T geçiş matrisinin çekici noktalarını belirleyeceğiz. Bu uygulamalara geçmeden önce devir (cycle) uzunluğu, geçiş (transient) uzunluğu ve çekici nokta tanımlarını verelim.

Tanım 5.1 X_0 başlangıç konfigürasyonu olsun. Bir $t \in N$ için $X_t = T^t X_0$ dir. Eğer $T^t X_0 = 0$ olacak şekilde bir $t \in N$ yoksa bütün mümkün konfigürasyonların sayısı sonlu olduğundan bazı i, j sayıları için $T^i X_0 = T^j X_0$ olur. $(i, j) < (k, l) \Leftrightarrow i < k$ ya da $i = k, j < l$ böyle bir durumda $T^t X_0 = T^{t+c} X_0$ şartını sağlayan en küçük (t, c) sayı çifti vardır.

$T^t X_0 = T^{t+c} X_0$ ifadesinde ki $t \in N$ sayısına X_0 konfigürasyonu üzerindeki geçiş (transient) uzunluğu, $c \in N$ sayısınınada X_0 konfigürasyonu üzerindeki devir (cycle) uzunluğu denir.

Tanım 5.2 Belli bir zaman adımımda kendisine dönen konfigürasyona çekici nokta (attractor) denir. Başka birdeyişle, bir hücrel dönüşüm konfigürasyon ağacında, ağacın kökü olarak görülebilecek konfigürasyondur.

Tanım 5.3 Başlangıç konfigürasyonu ile başladıktan sonra, belli bir zaman adımımda konfigürasyonun kendisine dönene kadar ulaşılan konfigürasyonlara en son elde edilen konfigürasyonun basin'i denir ve bu süre zarfında elde edilen bu diyagrama Durum-Geçiş Diyagramı (State-Transition Diagram) denir.

Örnek 5. 4: Yerel kural $\langle 102, 102, 60, 60 \rangle$ olsun ve bu yerel kurala sıfır sınır şartı altında karşılık gelen karakteristik matris aşağıdaki gibi verilsin:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} .$$

$\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde $2^4 = 16$ tane vektörden herhangi birini keyfi olarak seçerek eğer varsa çekici noktaları, geçiş uzunluğunu, devir uzunluğunu ve basin leri bulmaya çalışalım.

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 10 \text{ keyfi vektörünü ele alalım.}$$

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 15$$

Karakteristik matrisle yeni elde ettiğimiz vektörü tekrar çarpıyoruz. Bu durum bir döngü elde edinceye kadar devam edecek.

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 0$$

Sıfır vektörünü bulduğumuz için duruyorum. Şimdi yeni bir keyfi vektör ele alıyorum.

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 5$$

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 15$$

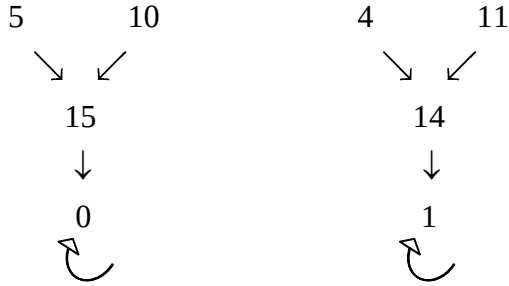
Yukarıda görüldüğü gibi $15 \rightarrow 0$ ' a gidecek. Dolayısıyla yeni bir vektör seçiyorum.

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 4$$

$$T_{RN}.F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 14$$

$$T_{RN}.F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 1$$

1 vektörü ise tekrar kendine dönecek. Şimdi Durum-Geçiş Diyagramı(State-Transition Diagram) çizelim.



Sıfır –Ağacı (Zero- Tree)



$n = 4$, $rank = 3$, Ulaşılamayan Durumlar = 2,3,4,5,10,11,12,13

Devirsel Durumlar = (0,1,8,9),

Çekici Noktalar = 0,1,8,9

0 – basin = (0,5,10,15)

1 – basin = (1,4,11,14)

Minimal polinom $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$. Buradan geçiş uzunluğunun 2 devir uzunluğunun 1 olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca karakteristik polinom $x^4 + x^2$ olarak bulunur.

Örnek 5.5 Yerel kuralımız $\langle 102, 60, 90, 60 \rangle$ olsun ve bu yerel kurala sıfır sınır şartı altında karşılık gelen karakteristik matris aşağıdaki gibi verilsin:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

$\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde $2^4 = 16$ tane vektörden herhangi birini keyfi olarak seçerek eğer varsa çekici noktaları, geçiş uzunluğunu, devir uzunluğunu ve basin leri bulmaya çalışalım.

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 10 \text{ keyfi vektörünü ele alalım.}$$

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 13$$

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 1$$

Benzer şekilde devam edilirse;

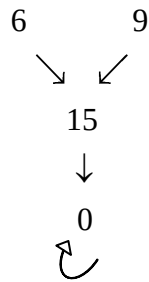
$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 3$$

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 2$$

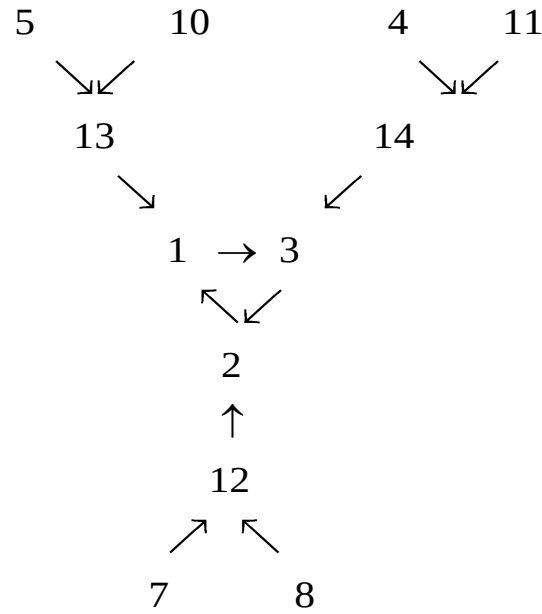
ve son olarak

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \rightarrow 1.$$

Başka bir keyfi vektör seçtiğimizde aynı durum söz konusudur. O halde bu karakteristik matrise karşılık gelen Durum-Geçiş Diyagramı(State-Transition Diagram)çizelim:



Sıfır –Ağacı (Zero- Tree)



$n = 4$, $rank = 3$, Ulaşılamayan Durumlar = 4,5,6,7,8,9,10,11

Devirsel Durumlar = $\{1, 2, 3\}$ ve $\{0\}$,

Çekici Noktalar = 0

0 – basin = (0,5,10,15)

1 – basin = (1,4,11,14)

Minimal polinom $x^4 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x + 1)$ olur buradan geçiş uzunluğu 2, devir uzunluğu 3 $x^2 + x + 1 \mid x^3 + 1$ olarak bulunur. Ayrıca karakteristik polinom $x^4 + x^3 + x^2$ olarak bulunur.

Örnek 5.6 $m=2, n=2$ ve $s=2$ olarak seçtiğimiz yerel kuralımıza sıfır sınır şartı altında karşılık gelen temsili matris aşağıdaki gibidir:

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} 0 & b & d & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & d & 0 & e & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & b & d & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 & c & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & f & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & a & c & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}.$$

Buradan özel olarak $a=c=d=e=f=1$ ve $b=0$ alınır ve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_3$ seçilirse;

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}$$

elde edilir.

$\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde $2^8 = 256$ tane vektörden herhangi birini keyfi olarak seçerek eğer varsa çekici noktaları, geçiş uzunluğunu, devir uzunluğunu ve basin leri bulmaya çalışalım.

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \rightarrow 1 \text{ keyfi vektörünü seçelim.}$$

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \rightarrow 20$$

$$T_{RN} \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \rightarrow 0$$

Benzer şekilde devam edersek bazı sonuçları aşağıdaki gibi yazalım:

$1 \rightarrow 20 \rightarrow 0$	$11 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$21 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
$2 \rightarrow 41 \rightarrow 0$	$12 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$22 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
$3 \rightarrow 61 \rightarrow 0$	$13 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$23 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
$4 \rightarrow 65 \rightarrow 0$	$14 \rightarrow 238 \rightarrow 0$	$24 \rightarrow 199 \rightarrow 0$
$5 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$15 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$25 \rightarrow 211 \rightarrow 0$
$6 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$16 \rightarrow 65 \rightarrow 0$	$26 \rightarrow 238 \rightarrow 0$
$7 \rightarrow 124 \rightarrow 0$	$17 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$27 \rightarrow 250 \rightarrow 0$
$8 \rightarrow 134 \rightarrow 0$	$18 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$28 \rightarrow 134 \rightarrow 0$
$9 \rightarrow 146 \rightarrow 0$	$19 \rightarrow 124 \rightarrow 0$	$29 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
$10 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$20 \rightarrow 0$	$30 \rightarrow 175 \rightarrow 0$
$31 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$41 \rightarrow 0$	$51 \rightarrow 238 \rightarrow 0$
$32 \rightarrow 146 \rightarrow 0$	$42 \rightarrow 61 \rightarrow 0$	$52 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
$33 \rightarrow 134 \rightarrow 0$	$43 \rightarrow 41 \rightarrow 0$	$53 \rightarrow 134 \rightarrow 0$
$34 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$44 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$54 \rightarrow 187 \rightarrow 0$
$35 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$45 \rightarrow 65 \rightarrow 0$	$55 \rightarrow 175 \rightarrow 0$
$36 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$46 \rightarrow 124 \rightarrow 0$	$56 \rightarrow 85 \rightarrow 0$
$37 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$47 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$57 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
$38 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$48 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$58 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
$39 \rightarrow 238 \rightarrow 0$	$49 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$59 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
$40 \rightarrow 20 \rightarrow 0$	$50 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$60 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
$61 \rightarrow 0$	$71 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$81 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
$62 \rightarrow 61 \rightarrow 0$	$72 \rightarrow 146 \rightarrow 0$	$82 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
$63 \rightarrow 41 \rightarrow 0$	$73 \rightarrow 134 \rightarrow 0$	$83 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
$64 \rightarrow 20 \rightarrow 0$	$74 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$84 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
$65 \rightarrow 0$	$75 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$85 \rightarrow 0$
$66 \rightarrow 61 \rightarrow 0$	$76 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$86 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
$67 \rightarrow 41 \rightarrow 0$	$77 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$87 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
$68 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$78 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$88 \rightarrow 211 \rightarrow 0$
$69 \rightarrow 65 \rightarrow 0$	$79 \rightarrow 238 \rightarrow 0$	$89 \rightarrow 199 \rightarrow 0$
$70 \rightarrow 124 \rightarrow 0$	$80 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$90 \rightarrow 250 \rightarrow 0$

$91 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$101 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$111 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
$92 \rightarrow 146 \rightarrow 0$	$102 \rightarrow 238 \rightarrow 0$	$112 \rightarrow 199 \rightarrow 0$
$93 \rightarrow 134 \rightarrow 0$	$103 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$113 \rightarrow 211 \rightarrow 0$
$94 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$104 \rightarrow 0$	$114 \rightarrow 238 \rightarrow 0$
$95 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$105 \rightarrow 20 \rightarrow 0$	$115 \rightarrow 250 \rightarrow 0$
$96 \rightarrow 134 \rightarrow 0$	$106 \rightarrow 41 \rightarrow 0$	$116 \rightarrow 134 \rightarrow 0$
$97 \rightarrow 146 \rightarrow 0$	$107 \rightarrow 61 \rightarrow 0$	$117 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
$98 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$108 \rightarrow 65 \rightarrow 0$	$118 \rightarrow 175 \rightarrow 0$
$99 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$109 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$119 \rightarrow 187 \rightarrow 0$
$100 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$110 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$120 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
$121 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$131 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$141 \rightarrow 187 \rightarrow 0$
$122 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$132 \rightarrow 41 \rightarrow 0$	$142 \rightarrow 134 \rightarrow 0$
$123 \rightarrow 124 \rightarrow 0$	$133 \rightarrow 61 \rightarrow 0$	$143 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
$124 \rightarrow 0$	$134 \rightarrow 0$	$144 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
$125 \rightarrow 20 \rightarrow 0$	$135 \rightarrow 20 \rightarrow 0$	$145 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
$126 \rightarrow 41 \rightarrow 0$	$136 \rightarrow 238 \rightarrow 0$	$146 \rightarrow 0$
$127 \rightarrow 61 \rightarrow 0$	$137 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$147 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
$128 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$138 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$148 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
$129 \rightarrow 124 \rightarrow 0$	$139 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$149 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
$130 \rightarrow 65 \rightarrow 0$	$140 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$150 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
$151 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$161 \rightarrow 238 \rightarrow 0$	$171 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
$152 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$162 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$172 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
$153 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$163 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$173 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
$154 \rightarrow 134 \rightarrow 0$	$164 \rightarrow 187 \rightarrow 0$	$174 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
$155 \rightarrow 146 \rightarrow 0$	$165 \rightarrow 175 \rightarrow 0$	$175 \rightarrow 0$
$156 \rightarrow 238 \rightarrow 0$	$166 \rightarrow 146 \rightarrow 0$	$176 \rightarrow 187 \rightarrow 0$
$157 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$167 \rightarrow 134 \rightarrow 0$	$177 \rightarrow 175 \rightarrow 0$
$158 \rightarrow 199 \rightarrow 0$	$168 \rightarrow 124 \rightarrow 0$	$178 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
$159 \rightarrow 211 \rightarrow 0$	$169 \rightarrow 104 \rightarrow 0$	$179 \rightarrow 134 \rightarrow 0$
$160 \rightarrow 250 \rightarrow 0$	$170 \rightarrow 85 \rightarrow 0$	$180 \rightarrow 250 \rightarrow 0$

$181 \rightarrow 238 \rightarrow 0$
 $182 \rightarrow 211 \rightarrow 0$
 $183 \rightarrow 199 \rightarrow 0$
 $184 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
 $185 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
 $186 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
 $187 \rightarrow 0$
 $188 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
 $189 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
 $190 \rightarrow 85 \rightarrow 0$

$191 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
 $192 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
 $193 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
 $194 \rightarrow 85 \rightarrow 0$
 $195 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
 $196 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
 $197 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
 $198 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
 $199 \rightarrow 0$
 $200 \rightarrow 250 \rightarrow 0$

$201 \rightarrow 238 \rightarrow 0$
 $202 \rightarrow 211 \rightarrow 0$
 $203 \rightarrow 199 \rightarrow 0$
 $204 \rightarrow 187 \rightarrow 0$
 $205 \rightarrow 175 \rightarrow 0$
 $206 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
 $207 \rightarrow 134 \rightarrow 0$
 $208 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
 $209 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
 $210 \rightarrow 20 \rightarrow 0$

$211 \rightarrow 0$
 $212 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
 $213 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
 $214 \rightarrow 85 \rightarrow 0$
 $215 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
 $216 \rightarrow 187 \rightarrow 0$
 $217 \rightarrow 175 \rightarrow 0$
 $218 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
 $219 \rightarrow 134 \rightarrow 0$
 $220 \rightarrow 250 \rightarrow 0$

$221 \rightarrow 238 \rightarrow 0$
 $222 \rightarrow 211 \rightarrow 0$
 $223 \rightarrow 199 \rightarrow 0$
 $224 \rightarrow 238 \rightarrow 0$
 $225 \rightarrow 250 \rightarrow 0$
 $226 \rightarrow 199 \rightarrow 0$
 $227 \rightarrow 211 \rightarrow 0$
 $228 \rightarrow 175 \rightarrow 0$
 $229 \rightarrow 187 \rightarrow 0$
 $230 \rightarrow 134 \rightarrow 0$

$231 \rightarrow 146 \rightarrow 0$
 $232 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
 $233 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
 $234 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
 $235 \rightarrow 85 \rightarrow 0$
 $236 \rightarrow 41 \rightarrow 0$
 $237 \rightarrow 61 \rightarrow 0$
 $238 \rightarrow 0$
 $239 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
 $240 \rightarrow 175 \rightarrow 0$

$251 \rightarrow 20 \rightarrow 0$
 $252 \rightarrow 104 \rightarrow 0$
 $253 \rightarrow 124 \rightarrow 0$
 $254 \rightarrow 65 \rightarrow 0$
 $255 \rightarrow 85 \rightarrow 0$

1-21-40-60-64-84-105-125-135-147-174-186-198-210-239-251

↓

20

↓

0

2-22-43-63-67-87-106-126-132-144-173-185-197-209-236-248

↓

41

↓

0

3-23-42-62-66-86-107-127-133-145-172-184-196-208-237-249

↓

61

↓

0

4-16-45-57-69-81-108-120-130-150-171-191-195-215-234-254

↓

65

↓

0

5-17-44-56-68-80-109-121-131-151-170-190-194-214-235-255

↓

85

↓

0

6-18-47-59-71-83-110-122-128-148-169-189-193-213-232-252

↓

104

↓

0

7-19-46-58-70-82-111-123-129-149-168-188-192-212-233-253

↓

124

↓

0

8-28-33-53-73-93-96-116-142-154-167-179-207-219-230-242

↓

134

↓

0

9-29-32-52-72-92-97-117-143-155-166-178-198-206-218-231-243

↓

146

↓

0

10-30-35-55-75-95-98-118-140-152-165-177-205-217-228-240

↓

175

↓

0

11-31-34-54-74-91-99-119-141-153-164-176-204-216-229-241

↓

187

↓

0

12 – 24 – 37 – 49 – 77 – 89 – 100 – 112 – 138 – 158 – 163 – 183 – 203 – 223 – 226 – 246

↓

199

↓

0

13 – 25 – 36 – 48 – 76 – 88 – 101 – 113 – 139 – 159 – 162 – 182 – 202 – 222 – 227 – 247

↓

211

↓

0

14 – 26 – 39 – 51 – 79 – 91 – 102 – 114 – 136 – 156 – 161 – 181 – 201 – 221 – 224 – 244 – 251

↓

238

↓

0

15 – 27 – 38 – 50 – 78 – 90 – 103 – 115 – 137 – 157 – 160 – 180 – 200 – 220 – 225 – 245

↓

250

↓

0

Bu şekilde devam edersek 2 geçişden sonra her eleman sıfıra gidecek.

$$T_{RN} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{8 \times 8}.$$

Minimal polinom x^8 dir ve buradan geçiş uzunluğu 2 , devir uzunluğu 0 bulunur. Ayrıca çekici noktalar 0 dir ve bütün konfigürasyonlar 0'ın basinleridir. Karakteristik polinom x^8 .

Not: Yukarıdaki matrisimizin çekirdeğini incelersek ;

$$K = \{(10000110), (00010100), (01101000), (00101001)\}$$

elde edilir. Buradan vektör uzayının elemanlarını elde edersek aşağıdaki gibi bir sonucu elde ederiz ki burada dikkat edilmesi gereken konu elemanlarının her birinin, bir köke karşılık gelmesidir.

$$V = \left\{ \begin{array}{l} 00000000, 10000110(134), 00010100(20), 01101000(104), \\ 00101001(41), 10010010(146), 11101110(238), 10101111(175), \\ 01111100(124), 01000001(65), 00111101(61), 11111010(250), \\ 01010101(85), 11000111(199), 10111011(189), 11010011(211) \end{array} \right\}$$

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Hücrel dönüşüm(CA), birçok bilim dalında incelenen bir kavramdır. Fizik ve biyoloji alanında ve bilgisayar bilimleri gibi birçok alanda olayları modellemek için CA kavramı farklı yönleriyle incelenmiştir. Örneğin hücrel dönüşümler karmaşık sistemlerin davranışlarını incelemek için kullanılırlar. CA, son yıllarda, bilgisayar biliminde kullanılmaya başlandı (Choudhury ve ark., 2004). Sistem dizayncıları yazılım tabanlarından çeşitli karmaşık fonksiyonları silikon tabanlı donanım bloklarına yerleştirmeyi deniyorlar.

Son yıllarda popüler olan CA'nın karakteristik özellikleri için birçok makale yazılmıştır. (Khan ve ark., 1997; Choudhury ve ark., 2004; Siap ve ark., 2009)

Bu tez de daha önce bir ve iki boyutlu hücrel dönüşümlerde yapılan çalışmalar üç boyutlu hücrel dönüşüme genişletilmiştir. Bu çalışmada daha çok CA kavramının, bazı özel yerel kurallar tarafından sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında üretilen temsili matrislerinin elde edilişi incelendi.

İlk olarak üç boyutlu hücresel dönüşümlerin sıfır sınır şartı altında elde edilen temsili matrisin terslenebilirliği hakkında incelemeler yapıldı. Bunun üzerinden temsili matrise karşılık gelen hücresel dönüşümlerin terslenebilir olup olmadığı durumları bulmamıza yarayan çok önemli bir teorem verildi. Bu teorem sayesinde çok büyük matrislerin terslenebilirliği hakkında bilgi sahibi olundu. Daha sonra üç boyutlu hücresel dönüşümlerin periyodik sınır şartı altındaki temsili matrisini elde edildi. En sonunda ise üç boyutlu hücresel dönüşümlerin sıfır sınır şartı altında bazı uygulamaları verildi.

Bu çalışmada genellikle $\mathbb{Z}_p$ cisimleri üzerinde 3D CA'ların temsili matrislerinin elde edilişi üzerinde duruldu. Bu temsili matrisler bazı özel kurallar için sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında incelendi. İleriye dönük olarak, CA temsili matrislerin elde edilişi farklı cisim ve halkalar için tekrar incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Akin, H. ,Siap, İ., Sah, F., (2009). “Two dimensional hybrid cellular automata over ternary fields”, Proceedings of the Third International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization Sharjah, U.A.E, january 20-22, (2009).
- [2] Chattopadhyay, P., Choudhury, P. P., Dıhıdar, K., (1999). “Characterisation of a particular hybrid transformation of two-dimensional cellular automata”, Computers and Mathematics with Applications 38: 207–216
- [3] Das, A.K., Chaudhuri, . P.P., (1993). “Vector space theoretic analysis of additive cellular automata and its applications for pseudo-exhaustive test pattern generation”, IEEE Trans. on Computers 42 (3): 340–352
- [4] Dıhıdar, K., Choudhury, P. P., (2004). " Matrix algebraic formulae concerning some exceptional rules of two dimensional cellular automata", Inf. Sci. 165: 91–101
- [5] Inokuchi, S., (1998). “ On behaviors of cellular automata with rule 156”, Bull. Inform. Cybernet. 30 (1) : 121–131
- [6] Khan, A. R., Choudhury, P. P., Dıhıdar, K., Mitra, S., Sarkar, P. ,(1997). “Vlsi architecture of a cellular automata”, Comput. Math. Applic. 33: 79–94

- [7] Packard, N. H., Wolfram, S., (1985). "Two-dimensional cellular automata", Journal of Statistical Physics 38: (5/6), 901–946
- [8] Pries, W., Thanailakis, A., Card, H.C., (1986). "Group properties of cellular automata and VLSI applications", IEEE Trans. on Computers c-35 (12): 1013–1024
- [9] Siap, İ., Akin, H., Sah, F., (2011). "Characterization of two dimensional cellular automata over ternary fields", Journal of the Franklin Institute 348: 1258–1275
- [10] Siap, İ., Akin, H., Sah, F., (2010). "Garden of eden configurations for 2D cellular automaton with rule 2460N", Information Sciences 180: 3562–3571
- [11] Von Neumann, j., (1966). "The theory of self-reproducing automata", (edited by a.w.burks), Univ. of illinois Press, Urbana
- [12] Wolfram, S., (1983). "Statistical mechanics of cellular automata", Rev. Mod. Phys. 55 (3): 601–644
- [13] Ying, Z., Zhong, Y., Pei-min, D., (2009). "On behavior of two-dimensional cellular automata with an exceptional rule", Information Sci. 179 (5): 613-622
- [14] P. Tsalides, P., Hicks, P.J., and York, T.A., (1989). "Three-dimensional cellular automata and VLSI applications", IEE Proceedings, 136(6): 490 - 495
- [15] Hemmingsson, J.A., (1992). "Totalistic three-dimensional cellular automaton with quasiperiodic behaviour" Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 183(3): 255-261
- [16] Das, A.K. , Chaudhuri, P.P., (1990). "Efficient Characterization of Cellular Automata", Proc. IEE (Pan E), 137: 81-87
- [17] Akin, H. ,Siap, İ., Sah, F., (2012). "On 1D reversible cellular automata with reflective boundary over the prime field of order p", Int. J. Mod. Phys. C, 23 (1): 1-13
- [18] Cinkir, Z., Akin, H. ,Siap, İ., (2011). "Reversibility of 1D cellular automata with periodic boundary over finite fields $\mathbb{Z}_p$ ", Journal of Statistical Physics, 143 (4): 807-823
- [19] Martin del Rey, A.,Rodriguez Sanchez,G., (2011). "Reversibility of linear cellular automata", Applied Mathematics and Computation, 217 (21): 8360-8366
- [20] Morita, K., (2008). "Reversible computing and cellular automata-A survey", Theor. Comput. Sci. 395:101–131
- [21] Sah, F., Siap, İ., Akin, H. , (2012). "Characterization of three dimensional cellular automata over $\mathbb{Z}_m$ ", AIP Conf. Proc. 1470: 138, (2012).
- [22] Köroğlu, M. E., (2012). "Hücresel Dönüşümlerle Hata Düzeltken Kodlar", Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

- [23] Şah, F.,(2009). “İki Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Cebirsel Yapısı”, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa, (2009).
- [24] Hedlund,G.A., (1969). “Endomorphisms and automorphisms of full shift dynamical system “, Math. Syst. Theor. 3: 320–375
- [25] Gerling, R.W., (1989) “Classification of three-dimensional cellular automata” , Physica A, 162: 187-195
- [26] Brown, S.G.R,Bruce, N.B.,(1995). “Three-dimensional cellular automaton models of microstructural evolution during solidification”, Journal of Materials Science. 30 (5): 1144-1150
- [27] Leubeck, E.G., Degunst, MC.M., (2001), “A stereological method for the analysis of cellular lesions in tissue sections using three-dimensional cellular automata”, Mathematical and Computer Modelling, 33: 1387-1400
- [28] Agapie, A., (2010), “Simple form of the stationary distribution for 3D cellular automata in a special case”, Physica A, 389: 2495–2499
- [29] Chaudhuri,P.P., Chaudhuri,D.R., Nandi, S. ,Chattopadhyay,S.,(1997). “Additive Cellular Automata: Theory and Applications”, IEEE Press, New York
- [30] Sah, F., Tascı,F., Akin, H., (2015). “Attractors and three dimensional cellular automata over Z_m ”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling(ICAAMM) 8-12 June Istanbul, (2015).

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ferhat ŞAH
Doğum Tarihi ve Yeri : 21/01/1983-CEYHAN
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ferhat@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Harran Üniversitesi	2009
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi	2006
Lise	Fen	Süper Lise	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2007-2009	Adıyaman Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2009-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Siap, İ., Akın, H., Sah, F., (2011). Characterization of two dimensional cellular automata over ternary fields, Journal of the Franklin Institute 348: 1258–1275
2. Siap, İ., Akın, H., Sah, F., (2010). Garden of eden configurations for 2D cellular automaton with rule 2460N, Information Sciences 180 : 3562–3571
- 3 Akın, H. ,Siap, İ., Sah, F., (2012). On 1D reversible cellular automata with reflective boundary over the prime field of order p, Int. J. Mod. Phys. C, 23 (1): 1-13
- 4 Sah, F., Siap, İ., Akın, H., (2012). Characterization of three dimensional cellular automata over Z_m , AIP Conf. Proc. 1470: 138
(Tez kapsamında yapılan makale)
- 5 H. Akın, İ. Şiap, F. Şah, Characterization of two–dimensional hybrid cellular automata over ternary fields, (submitted).

Bildiri

1. Akın, H. ,Siap, İ., Sah, F., (2009). Two dimensional hybrid cellular automata over ternary fields, Proceedings of the Third International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization Sharjah, U.A.E, january 20-22, (2009).
2. Sah, F., Siap, İ., Akın, H., (2012) Characterization of three dimensional cellular automata over Z_m , First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012), October 18–21, Gümüşhane, (2012)

- 3 Sah, F., Tascı,F., Akin, H., (2015). Attractors and three dimensional cellular automata over Z_m , Internetal Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling(ICAAMM) 8-12 June Istanbul,(2015). **(Tez kapsamında yapılan bildiri)**
- 4 Akin, H. ,Siap, İ., Sah,F., (2009).Two Dimensional Hybrid Cellular automata over ternary fields, Third International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimzation (ICMSAO09), 22 – 24 January, Sharjah, UAE.
- 5 Sah, F., Akin, H., Siap, I., (2011). On 1D Reversible Cellular Automata with Reflective Boundary over Finite Fields Z_p , International Conference on Applied Analysis and Algebra, pp. 309–391, 29–30 June and 1–2 July , Istanbul, Turkey.
- 6 Siap, I. Akin, H. Sah, F.,(2010). Z_3 cismi üzerinde iki boyutlu melez hücresel dönüşümlerin karakterizasyonu, 5. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, sayfa 98, 3–4, Haziran ,Ankara, Turkey.

Proje

1. Proje Adı: Behavior and algebraic structures of 2–dimensional cellular automata over fields and rings
Proje Yürütücüsü: Prof.Dr. Hasan AKIN
Diğer Katılımcılar: İrfan ŞİAP, Selman UĞUZ
Araştırmacı: Ferhat ŞAH
Destekleyen Kurum/TUBİTAK/ Araştırma Projesi 1001
Proje No: TBAG-110T713

ÖDÜLLERİ

1. YTÜ-UBYT (Yıldız Teknik Üniversitesi Uluslararası Bilimsel Yayınları Teşvik Desteği), 2013.