Halka ve Cisimleri

Sadi Baydar

1980

İÇİNDEKİLER

TEZ PROSEDÜRÜ

TEZİN KONUSU	:	HALKA VE CİSİMLER
TEZ AKADEMİK OTORİTESİ	:	İ.D.M.M.A. TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ
KARAR	:	FAKÜLTE PROFESÖRLER KURULU KARAR TARİHİ : 13.2.1980 KARAR NO : 12
TEZ PROFESÖRÜ	:	PROF.DR HİLMİ HACISALİHOĞLU A.Ü - FEN FAKÜLTESİ CEBİR GEOMETRİ KÜRSÜSÜ BAŞKANI
TEZİN YÖNETİCİSİ	:	DOÇENT BEHİÇ ÇAĞAL İ.D.M.M.A. TEMEL BİLİMLER MATEMATİK ÖĞRETİM ÜYESİ
DOKTORA ÖĞRENCİSİ	:	SADİ BAYDAR Z.D.M.M.A. MAT.ÖĞRETİM GÖREVLİSİ
JÜRİ ÜYELERİ	:	

TEZİN ÖZÜ VE YÖNÜ

Bu çalışma, sıralı (n) liler için, halka ve cisim yapılarının genelleştirilmesi ve genişletilmesine ilişkin bir yöntem ile ; bundan elde edilen verilerin, bilinen cebirsel yapılarda denenmesini ve uygulamasını içine almaktadır.

Çalışmada, sıralı çiftler için - kompleks sayılar, dual sayılar "s„ faktörlü sayılar cümlelerini de içeren daha geniş bir GEN HALKA-CİSİM yapısı ; ve

Kompleks sayının, dual sayının, "s„ faktörlü sayının oluşum veya tanım öğeleri : sıra ile i, ϱ , s arasında toplam ($i+\varrho$, $\varrho+s$, $s+i$), ve çarpım ($i.\varrho$; $\varrho.s$; $s.i$) ilişkilerine anlam ve olanak veren kinematik bir yorum yapmak sureti ile, bunlarla bazı cebirsel yapılar elde edilmesi;

Ayrıca bilinen bazı halka ve cisimlerin sınıf haline getirilmesi; bunlar içinde özellikler taşıyan alt sınıflar bulunması yeni sayılabilir.

Çalışmanın 3. bölümünde sıralı (n) liler için tesis edilen GEN HALKA - CİSİM çarpım kuralı verilerinin, matris elemanlara uygulanması halinde halka niteliğinin korunacağı ve bundan elde edilecek sonuçlar üzerinde durulmuştur.

30 ARALIK 1981

ZONGULDAK

L ESSENTIEL ET LA DIRECTION LA THESE

Ce travail contient une manière a propos de la generalisation et l élargissement des constitutions du corp et de l'anneau pour les termes de rang (n) ; et qu il contient, en même temps, l'application et l expérience des donnés obtenu par cela, sur les constitutions l'algébriques connues.

Dans ce travail ; les paires de rang (2), il ya une constitution plus large du GÈNE - ANNEAU - CORPS qui contient aussi les ensembles des nombres en facteur (s), les nombres complexes, et des nombres duals ;

Les éléments de definition ou de naissance des nombres en facteur (s), des nombres complexes, et des nombres duals sont succesivement : i, ς, s ; addition entre eux : ($i+\varsigma$; $\varsigma+s$; $s+i$) et multiplication ($i.\varsigma$; $\varsigma.s$; $s . i$), on a obtenu les constitutions algébrigue en commentant kiné matiquement (cinétiquement)

D'autre part, on peut compter nouvellement une manière de la classification des certains corps et des anneaux, et la decouverte des sous classes qui porte des particularités différentes

Dans la 3^eme^ partie dutravail, on a assuré la liaison avec le sujet : sur la conservation de la propriété d'anneau et ses résultas, en cas l'application des donnes de règle de multiplication appertenant à la GÈNE ANNEAU - CORPS constitués pour les termes de rang (n), aux éléments de matrice.

Le 30 decembre 1981

İÇ İŞLEM - GURUP - HALKA - CİSİM
DIŞ İŞLEM - VEKTÖR UZAYI - MODÜL

.1. İÇ İŞLEM

TANIM : 1.1-(BİR CÜMLEDE İÇ İŞLEM)

Ayni bir E cümlesinin $\forall a \in E$, $b \in E$; a,b elemanlarından , yine E nin bir $c \in E$ elemanının elde edilmesini sağlayan bir kural, bir ilişki ortaya konabiliyorsa, E de bir (T) iç işlemi tanımlanmıştır denir ve aTb=c yazılır. aTb işleminden iki eleman bileşimi olarak bahis edildiği yerler olacaktır.

İç işlem, bir cümlenin a,b elemanları arasında C' yi yaratacak bir cebirsel operasyon tanımlamak demektir. (T) iç işlemi ile cümlenin tüm elemanları arasında bir münasebet belirlenmiş olmaktadır.

TANIM : 1.2-(BİR ELEMANIN BÖLENLERİ, PARÇALARI)

Bir (T) iç işlemi ile cümle içinde, (c) yi aTb=c olarak oluşturan a,b elemanlarına çoğu kez (c) nin parçaları, ya da başka bir iç işlem halinde (c) nin bölenleri denir.

Bir elemanın birden fazla parçaya ayrılabildiği ya da cebirsel bir mütasyonun (bölünerek çoğalma) mümkün olduğu matematiksel bir bünye ortaya konmak istenmektedir.

TANIM : 1.3-(İÇ İŞLEMİN NİTELİKLERİ)

a) İç işlemde assosiativ (birleşimlilik) niteliği: $\forall x,y,z \in E$ için $(xTy)\,Tz = xT(yTz) = xTyTz = v \in E$ ise iç işlemin assosiativ (birleşimlilik) niteliği vardır denir.

b) İç işlemde komutativ (değişimlilik) niteliği: $\forall x,y \in E$ için $xTy = yTx = v$ E ise, T iç işlemi komutativdir (değişimlidir) denir.

c) İç işleme göre regular eleman: $\forall x,y \in E$ için $a\ Tx = aTy$, $x\ Ta = y\ Ta \Longrightarrow x=y$ olan a E elemanına (T) iç işlemine göre E deki regular eleman denir.

d) İç işlemin etkisiz (nötr) elemanı

$\forall x \in E$, x elemanı için $eTx = xTe = x$ olan $e \in E$, (e) elemanı var ise (e) ye T iç işlemine göre E ' min nötr ya da etkisiz elemanı denir.

Bir cümle için T , $\perp$ gibi iki ayrı iç işlem tanımlanması mümkün, ayrıca her iki işlem için de ayrı etkisiz (nötr) eleman var ise, bu elemanların ayrı, ayrı adlandırılması gereği ortadadır. Genellikle Öklid matematiğinde iki iç işlemden birinin nötr elemanına sıfır elemanı , diğerinin nötr (etkisiz) elemanına birim eleman deyimini kullanmak alışkanlık olmuştur.

Her iki elemanın da, geçerli oldukları işlem içinde diğer elemanlarla ilişkilerinde etkisiz oldukları unutulmamalıdır.

e) İç işleme göre ters (invers) eleman

$x \in E$ olan X elemanı için $xTx' = x'Tx = e$ (etkisiz eleman), $x' \in E$, x' elemanı var ise, x' ye (T) iç işlemine göre x in, E deki ters elemanı denir. İki iç işlemin söz konusu olması halinde bu işlemlerden birine göre ters işaretli eleman denmesi usülden olmuştur. T işlemine göre x' ters elemanı için $x' = -x$, başka bir işlemine göre x' ters elemanı için $x' = x^{-1}$ ifadeleri kullanılır. x, x' elemanlarına nötr (etkisiz) elemanın parçaları ya da bölenleri adı verilir.

TEOREM : 1.3.1

Bir (T) iç işlemi için (e) etkisiz elemanı tekdir.

İsbat :

İki e , e' etkisiz elemanın varlığı kabul edildiğinde (T) nin tanımlandığı E cümlesinin bir $x \in E$, x elemanı için

$xTe = eTx = x$ yazılabilir $e' = x$ alınır ise

$e'Te = eTe' = e'$; ayni işlem e' etkisiz elemanı ve e = x olarak yapıdığında

$x\,T\,e' = e'Tx = x \rightarrow eTe' = e'Te = e$; buradan $e = e'$ olur.

TEOREM : 1.3.2

(T) iç işleminin birleşimli olduğu, E cümlesinde bir $x \in E$ elemanın x' ters elemanı ($x' \in E$) tekdir.

İsbat :

x'in x', x'' gibi iki ters (invers) elemanının bulunduğu kabul edildiğinde

$x\,T\,x' = e$ ve $x''\,T\,(xTx') = x''\,Te = x''$ ve birleşimlilik ten :

$(x'' T x)\, T x' = e\, T\, x' = x'$; buradan $x' = x''$ çıkar

TEOREM : 1.3.3

T iç işlemine göre x , x' ters elemanları regulardır.

İsbat :

$x\, T y = x T z \Longrightarrow z = y$ olduğu saptanacaktır

nitekim :

$x' T\, (x T y) = x' (x T z)$, $(x' T x)\, T y = (x' T x)\, T z$,

$e T y = e T z \Longrightarrow y = z$ olur ; aynı işlem x' için de tekrarlanabilir.

TEOREM : 1.3.4

Bir T iç işlemine göre x, y elemanlarının tersleri x', y' var ise, x, y elemanlarından (T) iç işleminin oluşturduğu $(x\, T\, y)$ elemanının tersi vardır. ve bu $(x\, T\, y)$ elemanının $(x\, T\, y)'$ ters elemanı:

$(x\, T\, y)' = y' T\, x'$ dür.

İsbat :

$(y' T\, x')\, T\, (x\, T\, y) = (x\, T\, y)\, T\, (y' T\, x') = e$ olduğunun saptanması gereklidir. Birleşimli bir iç işlem söz konusu olduğundan

$((y' T\, x')\, T x)\, T\, y = (y' T\, (x' T\, x))\, T y = (y' T\, e)\, T\, y = y' T\, y = e$ olur.

aynı yöntemle $(x\, T\, y)\, T\, (y' T\, x') = e$ olacağı doğrulanabilir.

TANIM : 1.4 - (İki iç işlem İZOMORFİZMİ)

T, E (x) cümlesinde bir iç işlem ; $\perp$, $E'(y)$ de farklı bir iç işlem; ve f, E (x) in bir x elemanını, E (y) nin bir y elemanına $f.(x) \rightarrow y$ karşılık getiren bir ilişki

$f.\,(x_1) \rightarrow y_1$, $f.\,(x_2) \rightarrow y_2$; ayrıca

(i) f birebir ve örten ; (ii) $f.(x_1\, T\, x_2) = f.\,(x_1) \perp f.\,(x_2)$

ise : f ye E den E' ye bir izomorfizm ; E ve E' cümlelerine izomorfik cümleler denir.

TANIM : 1.5 : (BİR İŞLEMİN, FARKLI, DİĞER BİR İŞLEM ÜZERİNE DAĞILIMLILIĞI (DİSTRIBUTİVİTE)

$x, y, z \in E$ olarak $(x\, T\, y) \perp z = (x \perp z)\, T\, (y \perp z)$ ise $(\perp)$ işlemi (T) üzerine soldan dağılımlı ;

$z \perp (x\, T\, y) = (z \perp x)\, T\, (z \perp y)$ ise, $(\perp)$ işlemi (T) üzerine sağdan dağılımlıdır denir ; hem sağdan, hem soldan dağılımlı ise, sadece dağılımlıdır denecektir.

TANIM : 2.6 - GURUP

Boş olmayan bir G cümlesi ile, bu cümle için birleşimli ve birim elemanı (nötr eleman) olan; her elemanının tersinin varlığını mümkün kılan (T) iç işlemi ile bir arada (G, T) ikilisine GURUP ; (T) ye de gurup işlemi denir. (T) gurup işlemi değişimli ise (G, T) gurubuna ABEL GURUBU adı verilir.

G cümlesinde (n) sayıda eleman var ise, guruba G = n kudretinde sonlu gurup, aksi halde sonsuz gurup denir.

Ayni (T) iç işlemi ile G nin gurup oluşturan G alt cümlesi var ise (G, T) ikilisine (G, T) gurubunun alt gurubu adı verilir.

TANIM : 2.7 - (İDEMPOTENT ELEMAN)

Bir G cümlesi ve (T) iç işlemi verildiğine göre $x \in G$ için $x \, T \, x = x$ olan x elemanına idempotent eleman denir.

TEOREM : 2.7.5

Bir (G, T) gurubunun idempotent elemanı, birim elemandır.

İsbat :

x, (G, T) gurubunun idempotent elemanı ise yani tanım nedeni ile, $x \, T \, x = x$ dir ; birleşimli G cümlesi için :

$x \, T \, (x \, T \, x) = x \, T \, x$ veya $(x \, T \, x) \, T \, x = x \, T \, x$ den

$(x \, T \, x) = e = x$ olduğu anlaşılır.

TEOREM : 2.7.8

Bir (G, T) gurubunun herhangi iki a, b elemanının (a T b) nin ters elemanı $(a \, T \, b)' = b' \, T \, a'$ dir.

İsbat :

$(a \, T \, b) \, T \, (b' \, T \, a') = a \, T \, (b \, T \, b') \, T \, a' = (a \, T \, e) \, T \, a' = a \, T \, a' = e$

$(b' \, T \, a') \, T \, (a \, T \, b) = b' \, T \, (a' \, T \, a) \, T \, b = (b' \, T \, e) \, T \, b = b' \, T \, b = e$ olur.

.3 - HALKA

TANIM : 3.8 - (HALKA)

H, boş olmayan bir cümle ile H ve T iç işlemi bir abel gurubu teşkil ediyor ise ; ayni zamanda H de birleşimli ve (T) iç işlemi üzerine dağılımlı ikinci bir ($\perp$) iç işlemi var ise, (H, T, $\perp$) üçlüsüne halka denir. ($\perp$) iç işlemi değişimli olduğu takdirde halka değişimli (komutativ) halka ; ayrıca($\perp$)işlemine göre etkisiz (birim) eleman mevcut ise, halka değişimli birimli halka olarak adlandırılır. kısalığın hatırı için tanım aşağıdaki halka aksiyonları denen matematik gereklerle özetlenecektir.

a) (H, T) Abel gurubu zorunlu nitelikleri

(i) (T) : $(x, y) \in H \times H \longrightarrow x\, T\, y \in H$, $\forall x, y \in H$ (kapalılık aksiyo

(ii) $(e\, T\, y)\, T\, z = x\, T\, (y\, T\, z)$, $\forall x, y, z \in H$ (birleşimlilik aksiyomu)

(iii) $x\, T\, e = e\, T\, x = x$, $\forall x \in H$ (etkisiz eleman varlığı)

(iv) $x\, T\, x' = x'\, T\, x = e$, $\forall x \in H$ (ters eleman varlığı)

(v) $x\, T\, y = y\, T\, x$, $\forall x, y \in H$ (değişimlilik niteliği)

b) $\perp$ İkinci işlem zorunlu nitelikleri

(vi) $\perp$: $(x, y) \in H \times H$. $x \perp y \in H$ (kapalılık aksiyomu)

(vii) $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ (birleşimlilik aksiyomu)

(viii) $z \perp (x\, T\, y) = (z \perp x)\, T\, (z \perp y)$ (dağılımlılık aksiyomu)

$(x\, T\, y) \perp z = (x \perp z)\, T\, (y \perp z)$

TEOREM : 3.8.9

θ , (H, T) abel gurubunun etkisiz elemanı ise

$x \perp \theta = \theta \perp x = \theta$ dır

İsbat :

(H, T) nin bir abel gurubu ve $\perp$ işleminin dağılımlı olması neden ile,

$x \perp \theta = x \perp (\theta\, T\, \theta) = (x \perp \theta)\, T\, (x \perp \theta)$ den $(x \perp \theta) = \theta$ ve

$\theta \perp x = (\theta\, T\, \theta) \perp x = (\theta \perp x)\, T\, (\theta \perp x)$ den $(\theta \perp x) = 0$

elde edilir.

TEOREM : 3.8.10

$(H, T, \perp)$ halkasında $x, y \in H$ elemanlarının T işlemine göre inversleri x', y' ise $x \perp y' = x' \perp y = (x \perp y)'$ dir.

İsbat :

(H, T) nin birim elemanı $y\, T\, y' = \theta$ olsun ; (Teorem 3.8.9) a göre

$x \perp (y\, T\, y') = (x \perp y)\, T\, (x \perp y') = \theta$, bu ise $x \perp y'$ nin T iç işlemine göre $(x \perp y)$ nin inversi olduğunu yani $(x \perp y)' = x \perp y'$ olduğunu gösterir.

TEOREM : 3.8.11

$(H, T, \perp)$ halkasında $x, y \in H$ ve x, y nin (H, T) gurubundaki inversleri x', y' ise $x' \perp y' = x \perp y$ dir.

İsbat :

Teorem (3.8.10) nedeni ile

$(x' \perp y)' = x' \perp y' = (x')' \perp y = x \perp y$ bulunur.

TANIM : 3.9 - (SIFIR BÖLENLERİ)

e, (H, T) Abel gurubunun nötr (sıfır) elemanı olarak $(H, \perp)$ gurubunun $x \perp y = e$; $x, y \in H$ olan x, y elemanlarına halkanın sıfır bölenleri adı verilir.

§.4 - CİSİM

TANIM : 4.10 - (CİSİM)

$(C, T, \perp)$ halkasının (C, T) Abel gurubunun (e) sıfır (nötr) elemanının bulunmadığı cümle $C^* = C - (e)$ ile gösterildiğinde (C^*, T) bir gurup ve $\perp$ işlemi T üzerine dağılımlı ise $(C, T, \perp)$ üçlüsüne cisim denir. kısalığın hatırı için, cisim, aşağıda cisim aksiyomları denen matematik gereklerle özetlenecektir.

(C, T) Abel gurubu için gerekler

(i) $(x\ T\ y)\ T\ z = x\ T\ (y\ T\ z)$, $\forall x, y\ z \in C$ (birleşimlilik aksiyomu)

(ii) $(x\ T\ e) = e\ T\ x = x$, $\forall x \in C$, $e \in C$ (nötr eleman varlığı)

(iii) $x\ T\ x' = x'\ T\ x = e$, $\forall x \in C$, $x' \in C$ (ters eleman varlığı)

(iv) $x\ T\ y = y\ T\ x$, $\forall x, y \in C$ (değişimlilik aksiyomu)

$(C^*, \perp)$ gurubu için gerekler

(v) $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$, $\forall x, y, z \in C$ (birleşimlilik aksiyomu)

(vi) $x \perp \varepsilon = \varepsilon \perp x = x$, $\forall x, \varepsilon \in C$ (nötr eleman varlığı)

(vii) $x \perp x^{-1} = x^{-1} \perp x = \varepsilon$, $\forall x, x^{-1} \in C$ (ters eleman varlığı)

ve $(C, T, \perp)$ nin halka olmak zorunluluğu nedeni ile,

(viii) $(x\ T\ y) \perp z = (x \perp z)\ T\ (y \perp z)$ veya

$z \perp (x\ T\ y) = (z \perp x)\ T\ (z \perp y)$ (dağılımlılık aksiyom

TEOREM : 4. 10. 12

$(C, T, \perp)$ cisminde $(C^*, \perp)$ gurubunun ε birim elemanı tekdir.

İsbat :

iki ε, ε_1 birim elemanın varlığı kabul edildiğinde

$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \perp \varepsilon = \varepsilon \perp \varepsilon_1 = \varepsilon$ olur.

TANIM : 4.11 (CISMIN KARAKTERISTIGI)

(C, T, $\perp$) cisminde (C, T) abel gurubunun etkisiz (sıfır) elemanı e ; (C^*, $\perp$) gurubunun etkisiz eleman (ε) ise, cismin (ε) birim elemanı üzerine (T) işleminin ardışık

$\varepsilon T \varepsilon T \varepsilon \ldots\ldots T \varepsilon$ (p kez) = $p.\varepsilon$ uygulamasının (e) sıfır elemanını verdiği $p.\varepsilon = e$ eşitliğini gerçekleyen p sayısı var ise, p ye cismin karakteristiği denir.

TEOREM : 4.10.13

(C, T, $\perp$) cisminde (C^*, $\perp$) gurubunun herhangi iki a, b $\in C^*$ elemanının birinden ($a \neq e$) , b yi oluşturacak $a \perp x = b$ eşitliğine uyan bir x elemanı vardır ve tektir.

İsbat :

$a \perp x = b$ eşitliğine uyan x elemanını arayalım

$a \in C^*$ olduğundan $a . a^{-1} = \varepsilon$ olan a^{-1} vardır.

$a^{-1} \perp (a \perp x) = a^{-1} \perp b$

$(a^{-1} \perp a) \perp x = \varepsilon \perp x = a^{-1} \perp b$ bulunur.

TEOREM : 4.10.14

(C, T, $\perp$) cisminde (C, T) Abel gurubunun etkisiz elemanı e ise $a \perp b = e$ eşitliği ancak $a = e$ ya da $b = e$ ile mümkündür.

İsbat :

$a \neq e$ olduğu kabul edildiğinde, teorem 3.10.13 nedeniyle $a \perp x = e$ eşitliğine uyan bir x elemanı vardır ve (Teorem : 3.8.9) dan dolayı da $x = e = b$ olmak gerekir.

TEOREM : 4.11.15

(C, T, $\perp$) cisminin karakteristiği $p \neq 0$, p ise , p asal sayıdır.

İsbat :

p, nin asal olmadığı kabul edildiğinde

$p.\varepsilon = (q\varepsilon) \perp (r\varepsilon)$ yazılabilir $p.\varepsilon = e$ olduğundan (Teorem : 4.10.14) den dolayı $q\varepsilon = e$ ya da $r\varepsilon = e$ olmak zorundadır. Bu ise p nin karakteristik sayı olmak tanımına aykırı olur.

.5. DIŞ İŞLEM, VEKTÖR UZAYI, MODÜL

TANIM : 5.12 - (DIŞ İŞLEM)

Boş olmayan bir E (x) cümlesinin her (x) elemanı ile, farklı bir başka E' (α) cümlesinin her (α) elemanı arasında, x elemanını yine E (x) cümlesinin herhangi bir elemanına dönüştürecek (yada karşılık getirecek) bir ilişki kuralı (yada bir yöntem) bulunabiliyorsa E (x) için bir dış işlem tanımlanmıştır denir ve

$E' \times E \rightarrow E$ veya $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \in E$ yazılır. dış işlem ilişkisi cümleler arası (x) notasyonu, elemanlar arası (α, x) veya αx ile gösterilmiş olmaktadır.

$E'(\alpha)$ ya operatörler cümlesi denir, eleman veya cümle olarak dış işlemde başa yazılır.

$E'(\alpha)$ nin E (x) ile ayni olması halinde ($E \times E \rightarrow E$) bu tanıma iç işlem adı verildiği bilinmektedir (Tanım 1.1)

E (x) cümlesinde bir T iç işlemi , ve $E'(\alpha)$ cümlesinde (+) (.) notasyonları ile gösterilecek farklı iki iç işlem tanımlanmış ise, dış işlemin matematik niteliği aşağıdaki aksiyomlarla ortaya konur :

$x, y \in E$; $\alpha, \beta \in E$ olarak ; ε (birim eleman) $\in E'$

(i) $\alpha(x T y) = \alpha x T \alpha y$ (dış işlemin E deki T iç işlem üzerine dağılımı)

(ii) $(\alpha + \beta) x = \alpha x T \beta x$ (E deki (+) iç işleminin dış işlem üzerine dağılımı)

(iii) $(\alpha . \beta) . x = \alpha(\beta x)$ (E deki (.) iç işlemin, dış işlemle birleşimliliği)

(iv) $\varepsilon x = x$ (E deki (.) iç işlemine göre ε birim elemanının ayni zamanda dış işleminde birim elemanı olması)

TANIM : 5.13 - (VEKTÖR UZAYI)

(Tanım 5.12) de verilen dış işlemde, E (x) cümlesinin bir Abel gurubu, $E'(\alpha)$ operatörler cümlesinin değişimli bir cisim olması halinde E (x) cümlesine , $E'(\alpha)$ cümlesi üzerinde bir vektör uzayı denir.

E (x) in (T) işlemi içeriği ile bir Abel gurubu olma zorunluğu ve $E'(\alpha)$ nin değişimli bir cisim olma gereği bir arada mütalaa edildiğinde vektör uzayını aşağıdaki aksiyomlar tanımlar.

$x, y, z, \in E$, $\alpha, \beta \in E'$ ve ε(birim eleman) $\in E'$ olarak

E (x) nin (T) işlemi içeriği ile Abel gurubu gerekleri :

(i) $(x T y) T z = x T (y T z)$, (T nin birleşimlilik zorunluğu)

(ii) $(x T \theta) = \theta T x = x$, (E de θ birim eleman varlığı)

(iii) $x T x = x T x = \theta$ (E de ters eleman varlığı)

(iv) $x T y = y T x$ (T ye göre değişimlilik zorunluğu)

E operatörler cümlesine göre dış işlem gerekleri

(v) $\alpha(x T y) = \alpha x T \alpha y$ (dış işlemin T üzerine dağılımlılığı)

(vi) $(\alpha + \beta) x = \alpha x T \beta x$ ((+) iç işleminin dış işlem üzerine dağılımlılığı)

(vii) $\alpha(\beta x) = (\alpha.\beta)x$, ((.) işlemi ile dış işlemin birleşimliliği)

(viii) $\varepsilon x = x$ ((.) işlem birim elemanının dış işlem birim elemanı olması)

TANIM : 5.14 - (MODÜL)

(Tanım 5.12) de verilen dış işlemde E (x) cümlesinin bir Abel gurubu, ve $E'(\alpha)$ operatörler cümlesinin birimli bir halka olması halinde E (x) cümlesine E üzerinde bir modüldür denir.

(Bibliografya I , II)

§. 1 - R^n DE GEN (HALKA - CİSİM)' LER

TANIM : 1. 1 -(SIRALI (n) Lİ ELEMANLAR CÜMLESİ)

Boş olmayan E_1, E_2,..... E_n cümlelerinin, $x \in E_1$, $y \in E_2$, $z \in E_3$,... x, y, z,..... elemanlarından oluşturulan (x, y, z,....), n elemanlı cümleye bir sıralı (n) li eleman ; E_1, E_2,.... E_n cümlelerinin bütün elemanları kullanılarak elde edilen tüm sıralı (n) li elemanlar cümlesine de, E_1, E_2,...E_n cümlelerinin karteziyen çarpım cümlesi denir ; ve

$(x, y, z,...) \in E_1 \times E_2 \times ..... \times E_n$ yazılır ; cümlenin elemanları ayni bir E cümlesinden (n) kez alınıyor ise, bu defa

$(x, y, z,....) \in E \times E \times ..... \times E = E^n$ ifadesi kullanılır.

Çoğu yerde, belirli ve gerekli amaçlarla, (x, y, z,....) sıralı (n) li elemana, (n) boyutlu uzay elemanının bileşenleri denir.

Cümle, iki E_1 , E_2 cümlelerinin $x \in E_1$, $y \in E_2$, x, y elemanlarından $(x, y) \in E_1 \times E_2$ oluşuyorsa (x, y) cümlesine sıralı çift, ya da sıralı ikili eleman veya iki boyutlu eleman ve x, y terimlerine de ayrı, ayrı iki boyutlu uzay elemanının bileşenleri denecektir.

x, y ayni bir E cümlesinden alınıyor ise

$(x, y) \in E \times E = E^2$ olacaktır.

TANIM : 1.2 - (GENETİK VEYA GEN NİTELİK)

Tanımındaki bazı değişken unsurlara (parametrelere) ya da değişebilir bazı koşullara göre, kendisinden ayni ya da benzer karakterli, matematik uyumlu, kapsamlı kurallar, yapılar üretilebilen cebirsel yapılar GEN veya GENETİK deyimi ile nitelendirilecektir.

TANIM : 1.3- (GEN HALKA - CİSİM)

içerdiği parametrelerin değerlerine veya yapısındaki değişebilir bazı koşullarına göre, kendisinden bir dizi halka üretilebilen cebirsel yapılara GEN HALKA , cisim üretilebilen cebirsel yapılara GEN CİSİM ; hem halka hem cisim üretilebilen yapılara GEN HALKA - CİSİM denecektir.

TEOREM : 1.3.1

R, reel sayılar cümlesini göstermek üzere $x_1, x_2, ... x_n \in R$

$y_1, y_2, ...y_n \in R$; $a = (x_1, x_2, ...x_n) \in R^n$, $b = (y_1, y_2, ...y_n) \in R^n$

olan ve a, b elemanlar arası bir T iç işlemi :

T : $aTb = (x_1, x_2, ...x_n) T (y_1, y_2, ...y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, ...x_n+y_n) \in R^n$

$$z_{k+1} = \sum_{r=1}^{n} \binom{\mp 1}{r=s} x_r . y_s = \sum_{s=1}^{n} \binom{\mp 1}{r=s} y_s . x_r ,$$

($r+s=p.n+k$; $k=0,1,2,\ldots(n-1)$; p, (r+s) in (n) ile bölme işlemind k kalanını veren bölüm sayısıdır)

bağıntısı ile tanımlanan sıralı (n) li elemanlar için $(R^n,T,\perp)$ üçlüs değişimli bir GEN HALKA - CİSİM dir.

Verilen cebirsel yapı (n) nin değişen değerlerine r=s halindeki terim lerin değiştirilebilen +, - işaretlerinin durumuna göre R^n de bir dizi halka ya da cisim tanımlar.

<u>İsbat :</u>

R, reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (+) toplama işlemi- nin özellikleri nedeni ile (R^n,T) ikilisi bir Abel gurubudur.

T : <u>(i) İşlem değişimlidir :</u>

$(x_1,x_2,\ldots x_n)T(y_1,y_2,\ldots y_n)=(y_1,y_2,\ldots y_n)T(x_1,x_2,\ldots x_n) =$

$(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \in R^n$

<u>(ii) işlem birleşimlidir :</u>

$\big((x_1,x_2,\ldots x_n)T(y_1,y_2,\ldots y_n)\big)\ T(u_1,u_2\ldots u_n)=(x_1,x_2\ldots x_n)T\ \big((y_1,y_2\ldots y_n)T(u_1,u_2\ldots$

$=\big((x_1+y_1)+u_1,(x_2+y_2)+u_2,\ldots(x_n+y_n)+u_n\big)=\big(x_1\overset{(+y_1}{+}u_1),x_2+(y_2+u_2),\ldots x_n+(y_n+u_n)\big) \in R^n$

<u>(iii) etkisiz birim elemanı vardır :</u>

$(x_1+x_2,\ldots x_n)T(0,0,\ldots 0)=(x_1+0,x_2+0,\ldots x_n+0)=(x_1,x_2\ldots x_n) \quad e=(0,0,\ldots 0)$

<u>(iv) ters elemanlara maliktir :</u>

$(x_1,x_2\ldots x_n)T(y_1,y_2,\ldots y_n)=(0,0,\ldots 0)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots x_n+y_n)$

$x_1+y_1=0\ y_1= -x_1,x_2+y_2=0,y_2=-x_2,\ldots x_n+y_n=0,\ y_n= -x_n$

R, reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (.) çarpma işleminin özellikleri nedeni ile $(R^n,\perp)$ ikilisi birim elemanlı , birleşimli , T üzer ne dağılımlı bir guruptur.

: <u>(v). $\perp$, işlemi birleşimlidir</u>

$\big((x_1,x_2,\ldots x_n)\perp(y_1,y_2\ldots y_n)\big)\perp(u_1,u_2,\ldots u_n)=(x_1,x_2\ldots x_n)\perp\big((y_1,y_2\ldots y_n)\perp(u_1,u_2\ldots$

olduğu gerçeklenecektir.

$(x_1,x_2,\ldots x_n)\perp(y_1,y_2,\ldots y_n)=(z_1,z_2,\ldots z_n)$ olsun $\binom{\mp 1}{r=s}$ alternatifi dikkat alınmadığı takdirde;

$r=1$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} \cdots & y_1 & y_n \\ y_n & y_{n-1} \cdots & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_n \cdots & y_3 & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n-2} & \cdots & y_n & y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} \cdots & x_1 & x_n \\ x_n & x_{n-1} \cdots & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_{n-1} \cdots & x_3 & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-2} & \cdots & x_n & x_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

ikame edilebildiği gözönüne alındığında

$$(y_1, y_2 \cdots y_n) \perp (u_1, u_2 \cdots u_n) = (v_1, v_2 \cdots v_n)$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} \cdots & y_1 & y_n \\ y_n & y_{n-1} \cdots & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_n \cdots & y_3 & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n-2} & \cdots & y_n & y_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_{n-2} \cdots & u_1 & u_n \\ u_n & u_{n-1} \cdots & u_2 & u_1 \\ u_1 & u_n \cdots & u_3 & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n-2} & \cdots & u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad (z_1, z_2 \cdots z_n) \perp (u_1, u_2, \cdots u_n) = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_{n-2} \cdots & u_1 & u_n \\ u_n & u_{n-1} & u_2 & u_1 \\ u_1 & u_n & u_3 & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n-2} & \cdots & u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$(5)\quad (x_1, x_2, \cdots x_n) \perp (v_1\ v_2 \cdots v_n) = \begin{pmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} \cdots & x_1 & x_n \\ x_n & x_{n-1} \cdots & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_n \cdots & x_3 & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-2} & \cdots & x_n & x_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(2), (3); (4), ve (5) ci ifadelerde yerine konduğunda birleşimlilik özelliği doğrulanmış olur ; $r=s$ olması halinde +, - alternatifleri isbatı etkilemiyecektir.

(vi) <u>İşlemin etkisiz (birim) elemanı vardır :</u>

$(x_1, x_2, \ldots x_n) \perp (0,0 \ldots 1,0) = (0,0, \ldots 1,0) \perp (x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ dir.

(vii) işlem, uygun elemanların ters elemanlarını verir :

$$(x_1,x_2,\ldots.x_n) \perp (y_1,y_2,\ldots y_n)=(0,0,\ldots 1,0) \text{ veya eşdeğeri}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} \ldots\ldots y_1 & y_n \\ y_n & y_{n-1} \ldots\ldots y_2 & y_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ y_{n-2} & \ldots\ldots\ldots\ldots y_n & y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ifadesi (n) değişkenli lineer bir denklem sistemi olduğundan katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması halinde $(x_1,x_2\ldots.x_n)$ ters elemanı vardır.

(viii) işlem dağılımlıdır.

$$\big((x_1,x_2,\ldots.x_n)\ T\ (y_1,y_2,\ldots.y_n)\big) \perp (u_1,u_2,\ldots.u_n) =$$

$$\big((x_1,x_2,\ldots x_n) \perp (u_1,u_2,\ldots u_n)\big)\ T\big((y_1,y_2,\ldots y_n) \perp (u_1,u_2,\ldots.u_n)\big) \text{ dir :}$$

$$(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots.x_n+y_n) \perp (u_1,u_2,\ldots.u_n)=(z_1,z_2,\ldots.z_n)= z_{k+1}$$

$$z_{k+1}= \sum_{r=1}^{n} \begin{pmatrix} \mp 1 \\ r=s \end{pmatrix} (x_r+y_r).u_s = \sum_{r=1}^{n} \begin{pmatrix} \mp 1 \\ r=s \end{pmatrix} x_r.u_s + \sum_{r=1}^{n} \begin{pmatrix} \mp 1 \\ r=s \end{pmatrix} y_r.u_s$$

$$z_{k+1} = \big((x_1,x_2,\ldots x_n) \perp (u_1,u_2\ldots u_n)\big)\ T\big((y_1,y_2,\ldots y_n) \perp (u_1,u_2\ldots u_n)\big) \quad \text{bulunur.}$$

Gen halka cisimin tanım nedeni ile değişimli olduğu açıktır.

TANIM : 2.4 - (C KOMPLEKS HALKA)

(Teorem 1.3.1) de $n=2$ için $x_1, x_2 \in R, y_1, y_2 \in R$ ve $(x_1,x_2) \in R^2$ $(y_1,y_2) \in$ olan, birinci T iç işlemi

$T : (x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2) \in R^2$; ikinci $\perp$ iç işlemi

$\perp : (x_1,x_2) \perp (y_1,y_2)=(z_1,z_2)= z_{k+1}$ $(k=0,1)$

$$z_{k+1} = \sum_{r=1}^{2} \binom{\mp 1}{r=s} x_r . y_s,$$

$(r+s=2.p+k, (k=0,1), p, (r+s)$ in (2) ile bölünme işleminde, $(k=0,1)$ kalanlarını veren bölüm sayısı) daha açık bir şekilde

$z_1=x_1\, y_1 - x_2\, y_2$; $z_2=x_1\, y_2+x_2\, y_1$ olarak R^2 de tanımlanan cümleye C kompleks halka ;

$\mathcal{E} = (1,0)$ elemanına halkanın $\perp$ işlemine göre birim elemanı

$i=(0,1)$; $(0,1)\perp(0,1)=(i)\perp(i)=(i)^2= -(1,0)= -\mathcal{E}$ olan (i) elemanına kompleks birim, ya da (Tanım 3.15-3.16) da açıklanacağı üzere C kompleks halkasının kinematik (transformasyon) faktörü denecektir.

TEOREM : 2.4.2

C kompleks halkası bir cisimdir.

İsbat :

Tanım 2.4'e göre (R^2,T) bir Abel gurubudur ; ve etkisiz elemanı $e=(0,0)$ dır. $(R^2, \perp)$ nin , birleşimli, işleminin T üzerine dağılımlı ve $\mathcal{E}=(1,0)$ birim elemanlı , O nedenle her elemanın tersinin bulunduğu, sıfır böleni elemanları ihtiva etmeyen bir gurup olacağı(Tanım 2.4)den kolayca çıkarılabilir.

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(1,0)$ da (x_1,x_2) nin ters elemanı

$(y_1,y_2)=(x_1/(x_1^2+x_2^2), - x_2/(x_1^2+x_2^2))$ dir.

TANIM : 2.5 - (C KOMPLEKS SAYILAR CÜMLESİ)

$x_1, x_2 \in R$ ve i, $i.i = i^2=-1$ özge bir çarpan olarak R nin (+),(.) işlemlerinin korunduğu, $(x_1+x_2.i)$ yapısında sayılara kompleks sayı ve bunların cümlesine C kompleks sayılar cümlesi denir.

$x_1+x_2.i \in C$, $y_1+y_2.i \in C$ ise, bu elemanlar arası (+) iç işlemi

$(+) : (x_1+x_2.i)+(y_1+y_2.i)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2).i \in C$; (.) çarpma işlemi

$(.) : (x_1+x_2.i).(y_1+y_2.i)=(x_1y_1-x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1).i \in C$ olur.

işlemlerine göre izomorftur.

<u>İsbat</u> :

$(x_1,x_2)\in \not{C}$, $x_1+x_2.i\in C$ ve $(x_1,x_2)\longrightarrow(x_1+x_2.i)$

$(y_1,y_2)\in \not{C}$, $y_1+y_2.i\in C$ ve $(y_1,y_2)\longrightarrow(y_1+y_2.i)$ olsun.

T, (+) iç işlemleri için

$T:\ (x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)\in \not{C}$

$(+):\ (x_1+x_2\ i)+(y_1+y_2.i)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2).i\in C$

$(x_1+y_1,x_2+y_2)\longrightarrow(x_1+y_1)+(x_2+y_2).i$ ve $\perp$,(.) işlemleri için

$(\perp):\ (x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)\in \not{C}$

$(.):\ (x_1+x_2\ i).(y_1+y_2.i)=(x_1y_1-x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1).i\in C$

$(x_1y_1-x_2y_2\ ,\ x_1y_2+x_2y_1)\longrightarrow(x_1y_1-x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1).i\ ;\ \not{C}\longrightarrow C$ olur.

<u>TANIM : 2.6</u> - ($\$$, (s) FAKTÖRLÜ HALKA)

(Teorem : 1.3.1) de $n=2$ için $x_1,x_2\in R, y_1,y_2\in R$ ve

$(x_1,x_2)\in R^2$, $(y_1,y_2)\in R^2$ olan ; birinci (T) iç işlemi

$(T):\ (x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)\in R^2$; ikinci ($\perp$) iç işlemi

$(\perp):\ (x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(z_1,z_2)$, z_{k+1} (k=0,1)

$$z_{k+1}=\sum_{r=1}^{2}\left(\begin{smallmatrix}\mp 1\\ r=s\end{smallmatrix}\right)x_r.y_s$$

(r+s=2p+k,(k=0,1),p, (r+s) in (2 ile bölünme işleminde (k=0,1) kalanlarını veren bölüm tam sayısı) daha açık bir ifade ile

$z=x_1y_1+x_2y_2$, $z_2=x_1y_2+x_2y_1$ olarak R^2 de tanımlanan cümleye (s) faktör halka denecek ve $\$$ notasyonu ile gösterilecektir.

$\mathcal{E}=(1,0)$ elemanına halkanın ($\perp$) işlemine göre birim elemanı,

$S=(0,1)$; $(0,1)\perp(0,1)=(s)\perp(s)=s^2=(1,0)=\mathcal{E}$ olan (s) elemanına ilerde (Tanım 3.17) de açıklanması yapılacağı üzere , s,$\gamma\in$(s) faktörlü halkanın kinematik (transformasyon) faktörü denecektir.

Halkanın sıfır böleni olan elemanları vardır :

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(1,0)$' da (x_1,x_2) nin ters elemanı

$(y_1,y_2)=(x_1/(x_1^2-x_2^2), x_2/(x_1^2-x_2^2))$ $x_1=x_2$ olan (x_1,x_2) elemanlarının ters elemanları mevcut olmayacaktır.

$x_1, x_2 \in R$, ve s, $s.s=s^2=1$ özge bir çarpan olarak, R nin (+), (.) işlemlerinin korunduğu $(x_1+x_2.s)$ yapısındaki sayılara, s faktörlü sayılar ve bunların cümlesine s faktörlü sayılar denecek S ile gösterilecektir.

$x_1+x_2.s \in S$, $y_1+y_2.s \in S$ ise, bu elemanlar arası (+) işlemi

(+) : $(x_1+x_2.s)+(y_1+y_2.s)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)s \in S$; (.) işlemi

(.) : $(x_1+x_2.s).(y_1+y_2.s)=(x_1y_1+x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1).s \in S$ olur.

TEOREM : 2.7.4

\$, (s) faktörlü halka ile S , (s) faktörlü sayılar cümlesi) T, $\perp$ ve (+), (.) işlemlerine göre izomorfturlar.

İsbat :

$(x_1,x_2) \in \$$, $x_1+x_2.s \in S$; $(x_1,x_2) \to x_1+x_2.s$ ve

$(y_1,y_2) \in \$$, $y_1+y_2.s \in S$; $(y_1,y_2) \to y_1+y_2.s$ olsun.

T, (+) işlemleri için

(T) : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2) \in \$$

(+) : $(x_1+x_2.s)+(y_1+y_2.s)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2).s \in S$

$(x_1+y_1,x_2+y_2) \to (x_1+y_1)+(x_2+y_2).s$; ve ($\perp$), (.) işlemleri için

($\perp$) : $(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(x_1y_1+x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1) \in \$$

(.) : $(x_1+x_2.s).(y_1+y_2.s)=(x_1y_1+x_2y_2)+(x_1y_2+x_2.y_1)\ s \in S$

$(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1) \to (x_1y_1+x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\ s$; $\$ \to S$ olur.

TANIM : 2.8 - (Ɖ DUAL SAYILAR HALKASI)

$x_1,x_2 \in R$; $y_1,y_2 \in R$; $(x_1,x_2) \in R^2$, $(y_1,y_2) \in R^2$. olan, (T) iç işlemi :

(T) : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2) \in R^2$; ($\perp$) ikinci iç işlemi :

($\perp$) : $(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_1y_2+x_2y_1) \in R^2$ ile tanımlanan R^2 cümlesi bir halkadır ; buna D dual sayılar halkası denir.

(R^2,T) nin bir Abel gurubu ve $(R^2,\perp)$ nin, $\perp$ işlemine göre birleşimli, dağılımlı bir gurup olduğu gösterilebilir.

(T) nin sıfır elemanı e=(0,0) ; ($\perp$) nin birim elemanı Σ=(1,0) dır.

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_1y_2+x_2y_1)$ = (1,0) da ters eleman

(y_1,y_2)= $(1/x, -x_2/x_1^2)$ dir.

$(0,1)=\varsigma$, $(0,1)\perp(0,1)=\varsigma\perp\varsigma=(\varsigma)^2=(0,0)$ olan ς elemanına dual bir veya dual halkanın - ilerde (Tanım 3.18) de açıklanacağı üzere - kinematik(tr formasyon) faktörü denecektir.

$x_1, x_2 \in R$ ve ς, $\varsigma . \varsigma = \varsigma$ =0 özge bir çarpan R nin (+) , (.) işlemlerinin korunduğu $(x_1+x_2.\varsigma)$ yapısındaki sayılara , dual sayı ve bunların cümlesine D dual sayılar cümlesi denir.

$x_1+x_2.\varsigma \in D$, $y_1+y_2.\varsigma \in D$ ise, bu elemanlar arası (+) işlemi :

(+) : $(x_1+x_2.\varsigma)+(y_1+y_2.\varsigma)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2).\varsigma \in D$; (.) işlemi :

(.) : $(x_1+x_2.\varsigma).(y_1+y_2.\varsigma)=x_1.y_1+(x_1y_2+x_2y_1).\varsigma \in D$ dir.

TEOREM : 2.9.5

(D dual sayılar halkası) ile (D dual sayılar cümlesi) T, ve (+) (.) işlemlerine göre izomorfturlar.

İsbat :

$(x_1,x_2) \in Đ$, $x_1+x_2.\varsigma \in D$; $(x_1,x_2) \longrightarrow (x_1+x_2.\varsigma)$

$(y_1.y_2) \in Đ$ $y_1+y_2.\varsigma \in D$; $(y_1,y_2) \longrightarrow (y_1+y_2.\varsigma)$ olsun

(T), (+) işlemleri için

(T) : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2) \in Đ$

(+) : $(x_1+x_2.\varsigma)+(y_1+y_2.\varsigma)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\varsigma \in D$

$(x_1+y_1,x_2+y_2) \longrightarrow (x_1+y_1)+(x_2+y_2)\,\varsigma$ ve ($\perp$) , (.) işlemleri için

( ) : $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1.y_1,x_1y_2+x_2y_1) \in Đ$

(.) : $(x_1+x_2. \ ).(y_1+y_2. \ )=x_1y_1+(x_1y_2+x_2y_1)\varsigma \in D$; $Đ \longrightarrow D$ olur.

TANIM : 2.9 - (Ħ HELİSEL CÜMLE - HELİSEL CİSİM)

$x_1,x_2 \in R$, $y_1,y_2 \in R$; $(x_1,x_2) \in R^2$, $(y_1,y_2) \in R^2$ olan bir T işlemi :

T : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2) \in R^2$; bir başka $\perp$ işlemi :

$\perp$: $(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2)$ ile tanımlanan R^2 cümlesine Ħ helisel cümle denecektir. Bak : (Şekil :)

TEOREM : 2.9 6

H helisel cümlesi bir cisimdir.

İsbat :

Reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (+), (.) işlemlerinin özellikleri nedeni ile, (R^2,T) nin bir Abel gurubu, $(R^2,\perp)$ ikilisinin de, işlemi birleşimli, T üzerine dağılımlı ve ayrıca değişimli bir gurub olacağı açıktır.

T işleminin etkisiz (sıfır) elemanı e= (0,0), $\perp$ işleminin etkisiz (birim elemanı ε = (1,0) ;

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(1,0)$ da (y_1,y_2) ters eleman :

elemanı içermez ; zira :

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2)=(0,0)$ da

$x_1y_2-x_2y_2=0,\ x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2=0$ bağıntılarını sağlayan $(y_1,y_2)=(0,0)$ veya $(x_1,x_2)=(0,0)$ den başka bir eleman bulunmaz.

$(0,1)=h$; $(0,1)\perp(0,1)=h\perp h=h^2=(-1,1)=hT(-1)$ olan (h) elemanına helisel cismin faktörü veya helisel cismin kinematik faktörü diyeceğiz bak:(şekil

TANIM : 2.10 - (H HELİSEL SAYI CÜMLESİ)

$x_1,x_2\in R$ ve h, $h^2=h-1$ özge bir çarpan olarak R nin (+) , (.) işlemlenin korunduğu $(x_1+x_2.h)$ yapıdaki sayılara helisel sayılar ; ve bunların cümlesine de H, helisel sayı cümlesi adı verilecektir.

$x_1+x_2.h\in H$, $y_1+y_2.h\in H$ ise, bu elemanlar arası (+) işlemi :

$(+)$: $(x_1+x_2.h)+(y_1+y_2.h)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)h$; (.) işlemi :

$(.)$: $(x_1+x_2.h).(y_1+y_2.h)=(x_1y_1-x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2).h\in H$ dir.

TEOREM : 2.10.7

$\mathbb{H}$, helisel cismi ile, H, helisel sayı cümlesi T, $\perp$ ve (+),(.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat :

$(x_1,x_2)\in\mathbb{H},\ x_1+x_2.h\in H$; $(x_1,x_2)\rightarrow x_1+x_2.h$

$(y_1,y_2)\in\mathbb{H},\ y_1+y_2.h\in H$; $(y_1,y_2)\rightarrow y_1+y_2.h$ olsun.

T, (+) işlemleri için

T : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)\in\mathbb{H}$

$(+)$: $(x_1+x_2.h)+(y_1+y_2.h)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\ h\in H$

$(x_1+y_1,x_2+y_2)\rightarrow(x_1+y_1)+(x_2+y_2).h$; ve $\perp$,(.) işlemleri için

$\perp$: $(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2)\in\mathbb{H}$

$(.)$ $(x_1+x_2h).(y_1+y_2.h)=(x_1y_1-x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2).h\in H$

$(x_1y_1-x_2y_2\ ,x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2)\rightarrow(x_1y_1-x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2)\ h$; $\mathbb{H}\rightarrow H$ o

TANIM : 2.11 - ($\mathbb{H}'$ HOMOTETİK CÜMLE, HOMOTETİK HALKA)

$x_1,y_1\in R$, $y_1,y_2\in R$; $(x_1,x_2)\in R^2$, $(y_1,y_2)\in R^2$ olan, ve T işlemi :

(T) : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)\in R^2$; diğer bir $\perp$ işlemi :

cümlelerine $\mathbb{H}'$ homotetik cümle denecektir. Bak : (Şekil :)

TEOREM : 2.11.8

$\mathbb{H}'$ homotetik cümlesi bir halkadır.

İsbat :

Reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (+),(.) işlemlerinin özellikleri nedeni ile (R^2,T) nin bir Abel gurubu ; $(R^2,\perp)$ ikilisinin de $\perp$ işlemi birleşimli , T üzerine dağılımlı birimli ve ayrıca değişimli bir gurup olacağı kolayca doğrulanabilir.

T işleminin etkisiz (sıfır) elemanı $e=(0,0)$, $\perp$ işleminin etkisiz(birim elemanı) $\varepsilon=(1,0)$;

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=(1,0)$ da , (y_1,y_2) ters elemanı

$(y_1,y_2)=\left((x_1-x_2)/(x_1^2-x_2^2-x_1y_2),\ -x_2/(x_1^2-x_2^2-x_1x_2)\right)$ dir. $(R^2,\perp)$ gurubunun $x_1^2-x_2^2-x_1x_2=0$ sağlayan (x_1,x_2) ikililerinin belirlediği elemanın ters elemanı olmayacaktır.

$(0,1)=h'$, $(0,1)\perp(0,1)=h'\perp h'=h'^2=-h'T\varepsilon$ olan h' elemanına $\mathbb{H}'$ homotetik halkasının faktörü veya kinematik faktörü diyeceğiz. Bak : (Şekil :.....)

TANIM : 2.12 - (H HOMOTETİK SAYI CÜMLESİ)

$x_1,x_2\in R$ ve h', $h'.h'=h'^2=1-h'$ özge bir çarpan olarak R nin (+), (.) işlemlerinin korunduğu, $(x_1+x_2.h')$ yapısındaki sayılara homotetik sayı ve bunların cümlesine H' homotetik sayı cümlesi adı verilecektir.

$x_1+x_2.h'\in H'$, $y_1+y_2.h'\in H'$ ise, bu elemanlar arası (+) işlemi :

(+) : $(x_1+x_2.h')+(y_1+y_2.h')=(x_1+y_1)+(x_2+y_2).h'\in H'$;ve (.) işlemi

(.) : $(x_1+x_2.h').(y_1+y_2.h')=(x_1y_1+x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1-y_2y_2)\,h'\in H'$ olur.

TEOREM : 2.12.9

$\mathbb{H}'$ homotetik halka ile, H' homotetik sayılar cümlesi T, $\perp$ ve (+), (.) işlemlerine göre izomorfturlar.

İsbat :

$(x_1,x_2)\in\mathbb{H}'$, $x_1+x_2.h'\in H'$; $(x_1,x_2)\longrightarrow x_1+x_2.h'$

$(y_1,y_2)\in\mathbb{H}'$, $y_1+y_2.h'\in H'$ $(y_1,y_2)\longrightarrow y_1+y_2.h'$ olsun

T, (+) işlemleri için :

T : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)\in\mathbb{H}'$

$(x_1+y_1, x_2+y_2) \longrightarrow (x_1+y_1)+(x_2+y_2)h'$ ve $\perp$, $(.)$ işlemleri için :

$(\perp)$: $(x_1,y_1)\perp(x_2,y_2) = (x_1y_1+x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2) \in \not{H}'$

$(.)$: $(x_1+x_2.h').(y_1+y_2.h') = (x_1y_1+x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2)\,h' \in H'$

$(x_1y_1+x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2) \longrightarrow (x_1y_1+x_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2)\,h'$; $\not{H}' \rightarrow H'$ o

TANIM : 2.13 - (R^2 DE $\not{G}$ (α,β) GEN HALKA - CİSİM SINIFI, VE G (α,β) GEN SAYILAR CÜMLESİ)

a) $\not{G}$ (α,β) GEN CÜMLELER SINIFI

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ ve $\alpha,\beta \in R$ önceden seçilmiş $(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$ parametreler ve $(x_1,x_2) \in R^2$, $(y_1,y_2) \in R^2$ olarak ; RxR nin elemanları arası da bir T işlemi

T : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \in R^2$, ve diğer $\perp$ iç işlemi :

$\perp$: $(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2) = \big((\alpha+\beta)x_1y_1 - \beta x_2y_2,\ (\alpha+\beta)(x_1y_2+x_2y_1)\big)$

tanımları ile belirlenen $\not{G}$ $(\alpha,\beta) \subset RxR$, alt cümlelerine GEN CÜMLELER SINIF denecektir.

TEOREM : 2.13.10

$\not{G}(\alpha,\beta)$ gen cümleler sınıfı α,β $(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$ reel parametreleri ne olursa olsun bir halka ; veya α,β nın koşullu değerlerine göre bir cisimdi

İsbat :

T birinci işlem için halka aksiyomları, değişimlilik birleşimlilik ni telikleri, etkisiz (sıfır) eleman $e=(0,0)$;

$(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(0,0)$ da ters eleman $(y_1,y_2)=(-x_1,-x_2)$

varlığı ; $\perp$ ikinci işlem için halka aksiyomları, birleşimlilik T üzerine dağı lımlılık nitelikleri, etkisiz birim eleman

$\varepsilon = (1/(\alpha\mp\beta),\ 0)$; $(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2) = (1/(\alpha\mp\beta),\ 0)$ da ters elemanın

$(y_1,y_2) = (x_1/((\alpha\mp\beta)^2x_1^2+\beta(\alpha\mp\beta)x_2^2);\ -x_2/((\alpha\mp\beta)^2x_1^2+\beta(\alpha\mp\beta)x_2^2$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$g = (0, 1/(\alpha\mp\beta))$, $g.g = g^2 = (-\beta/(\alpha\mp\beta)^2, 0)$ olan (g) elemanına G HALKA CİSİM SINIFININ GEN BİRİMİ adı verilecektir.

$\not{G}(\alpha,\beta)$ halka cisim sınıfı, $\perp$ işlemine göre değişimlidir ve $\beta(\alpha\mp\beta) > 0$ olması halinde bir cisimdir.

b) G (α,β) GEN SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$x_1, x_2 \in R$; $\alpha,\beta \in R$ ve $(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametrel ve g, $g.g = g^2 = -\beta/(\alpha\mp\beta)$ özge bir çarpan olarak R nin (+), (.) işlemleri korunduğu ;

$G = (\alpha\mp\beta)(x_1+x_2.g)$ yapısındaki sayılara GEN SAYI ve bu sayıları

$(+)\quad (\alpha+\beta)(x_1+x_2\, g)+(\alpha+\beta)(y_1+y_2 \ldots$

ve (.) işlemi :

$$\left[(\alpha\mp\beta)(x_1+x_2.g)\right]\left[(\alpha\mp\beta)(y_1+y_2.g)\right]=$$

$$(\alpha\mp\beta)\left[(\alpha\mp\beta)x_1y_1-\beta(x_2y_2)+(\alpha\mp\beta)(x_1y_2+x_2y_1)g\right]\in G(\alpha,\beta) \text{ olur.}$$

TEOREM : 2.13.11

$\phi(\alpha,\beta)$ gen halka cisim sınıfı ile $G(\alpha,\beta)$ gen sayı cümleleri sınıfı $T, \perp$ ve (+), (.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat :

$(x_1,x_2)\in\phi(\alpha,\beta)$; $(\alpha\mp\beta)(x_1+x_2.g)\in G(\alpha,\beta)$;

$(x_1,x_2)\rightarrow(\alpha\mp\beta)(x_1+x_2.g)$ ve

$(y_1,y_2)\in\phi(\alpha,\beta)\ (y_1+y_2.g)$ olsun ; T , (+) işlemleri için :

T : $(x_1,x_2)T(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)\in\phi(\alpha,\beta)$

$+$: $(\alpha\mp\beta)(x_1+x_2.g)+(\alpha\mp\beta)(y_1+y_2.g)=(\alpha\mp\beta)\left[(x_1+y_1)+(x_2+y_2).g\right]\in G(\alpha,\beta$

$(x_1+y_1,\ x_2+y_2)\rightarrow(\alpha\mp\beta)\left[(x_1+y_1)+(x_2+x_2).g\right]$; $\perp$,(.) işlemleri için

$\perp$: $(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=\left((\alpha\mp\beta)x_1y_1-\beta x_2y_2,\ (\alpha\mp\beta)(x_1y_2+x_2y_1)\right)$

(.): $\left[(\alpha\mp\beta)(x_1+x_2.g)\right].\left[(\alpha\mp\beta)(y_1+y_2.g)\right]=$

$(\alpha\mp\beta)^2\left[x_1y_1+x_2y_2.g^2+(x_1y_2+x_2y_1)g\right]=$, $(g^2=-\beta/(\alpha\mp\beta)$ konularak

$(\alpha\mp\beta)\left[(\alpha\mp\beta)x_1y_1-\beta x_2y_2+(\alpha\mp\beta)(x_1y_2+x_2y_1)g\right]$;

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)\rightarrow\left[(\alpha\mp\beta)(x_1+x_2.g)\right].\left[(\alpha\mp\beta)(y_1+y_2g)\right]$;

$\phi(\alpha,\beta)\rightarrow G(\alpha,\beta)$ olur.

C) ÖZEL GEN - HALKA , CİSİMLERİ , VE ÖZEL GEN SAYI CÜMLELERİ

A - (i) KOMPLEKS CİSİM :

$(x_1,x_2)\perp(y_1,y_2)=\left((\alpha+\beta)x_1y_1-\beta x_2y_2,(\alpha+\beta)(x_1y_2+x_2y_1)\right)$ ikinci işl minin $\alpha=0$, $\beta=1$ $(\alpha^2+\beta^2\neq0)$ olarak tanımlanan $\phi(0,1)$ halkasına $(\beta(\alpha+\beta)>0)$ kompleks cisim denir.

(ii) KOMPLEKS SAYI CÜMLESİ

$(x_1,x_2)\rightarrow(\alpha+\beta)(x_1+x_2.g)$ nin $\alpha=0,\beta=1$ $(\alpha^2+\beta^2\neq0)$ için tanımladı $g^2=-\beta/(\alpha+\beta)$; $g^2=-1$, $g=i$; $G(0,1)$ cümlesine kompleks sayı cümlesi de

B - (i) DUAL SAYILAR HALKASI

$(x_1,x_2)\rightarrow\left((\alpha+\beta)x_1y_1-\beta x_2y_2,\ (\alpha+\beta)(x_1y_2+x_2y_1)\right)$ ikinci işlem tanımladığı $\alpha=1$, $\beta=0$ $(\alpha^2+\beta^2\neq0)$ koşulu için $\phi(1,0)$ halkasına dual sayıl

(ii) DUAL SAYILAR CÜMLESİ

$(x_1,x_2) \longrightarrow (\alpha+\beta)(x_1+x_2.g)$ nin $\alpha=1$, $\beta=0$ $(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$ için t[a]nımladığı $g^2=-\beta/(\alpha+\beta)$, $g^2=0$, $g=\varepsilon$; G (1,0) cümlesine dual sayılar cümlesi denir.

C- (i) (S) FAKTÖRLÜ HALKA

$(x_1,x_2) \perp (y_1,y_2) = \left((\alpha-\beta)x_1y_1-\beta x_2y_2,\ (\alpha-\beta)(x_1y_2+x_2y_1)\right)$ ikinc[i] işleminin $\alpha=0$, $\beta=-1$, $(\alpha^2+\beta^2=0)$ için tanımladığı $\mathbb{C}$ (0,-1) halkasına(s) faktörlü halka denir.

(ii) (s) FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLESİ

$(x_1,x_2) \longrightarrow (\alpha-\beta)(x_1+x_2.g)$ nin $\alpha=0$, $\beta=-1$ $(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$ için tanımladığı, $g^2=-\beta/(\alpha-\beta)$, $g^2=1$, $g=s$; G (0,-1) cümlesine (s) fakt[ör]lü sayı cümlesi denir.

TANIM : 3.14 - (KİNEMATİK VE HALKA CİSİM KİNEMATİĞİ)

Nokta veya nokta sisteminin (zamana bağlı olarak) , bazı matematik tanı (ya da kural) veya etkenlerle yer değiştirmelerinin, (hareketlerinin) i celeme yöntemlerine KİNEMATİK denir. Kütle ve kuvvet kavramlarına yer vermemesi n deni ile mekanikten ayrılır. Kinematiği, geometrinin mekaniği olarak da tanımlama da mümkündür. (BİBL . III)

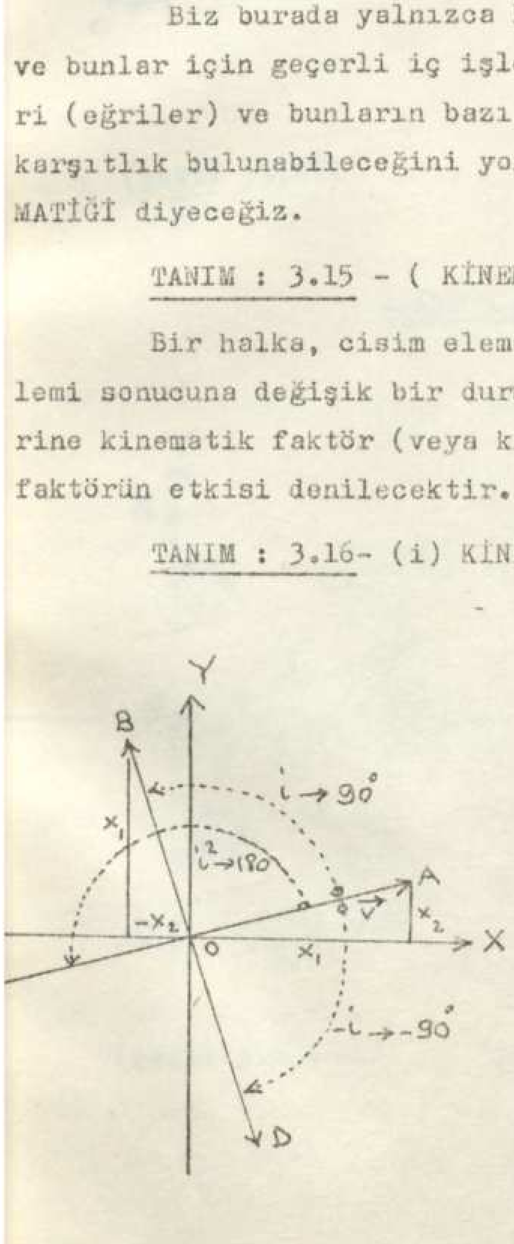
Cebirsel (ya da matematiksel) yapıtlarla, geometrik kavramlar, tanım vey şekiller arasında bir karşıtlık (tekabül) kurulabildiğinde, bazı cebirsel işlemle rin, geometride yer değiştirmeler olarak yorumlanabildiği bilinmektedir.

Biz burada yalnızca R^2 de halka, cisim veya modül gibi matematik yapıtlar ve bunlar için geçerli iç işlemler ile yönlendirilmiş doğru, nokta, nokta sisteml ri (eğriler) ve bunların bazı hareketleri arasında konumuzun amacına yeterli bir karşıtlık bulunabileceğini yorumlayacağız ve o nedenle buna R^2 de HALKA-CİSİM KİN MATİĞİ diyeceğiz.

TANIM : 3.15 - (KİNEMATİK FAKTÖR)

Bir halka, cisim elemanı karşılığı geometrik bir nesnenin, halka cisim iş lemi sonucuna değişik bir durumu karşılık bulunabiliyorsa, işlem elemanlarından b rine kinematik faktör (veya kinematik operatör) geometrik nesnenin hareketine de faktörün etkisi denilecektir.

TANIM : 3.16- (i) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ



$v = x_1 + x_2.i$, kompleks sayısının, ya da geometrik im gesi $\overrightarrow{OA} = \vec{v} = x_1 + x_2.i$ vektörünün, (i) nin $i.v = i.(x_1 + x_2.i) = -x_2 + x_1.i$ cebirsel işlem sonucu, ka şılık geometrik imgesi $i.\vec{v} = -x_2 + x_1.i = \overrightarrow{OB}$ vektörü ne ni ile (90°) lik dönme hareketine, (i) nin v vektö üzerindeki kinematik etkisi ve (i) ye de kompleks yılar cisminin kinematik faktörü denecektir.

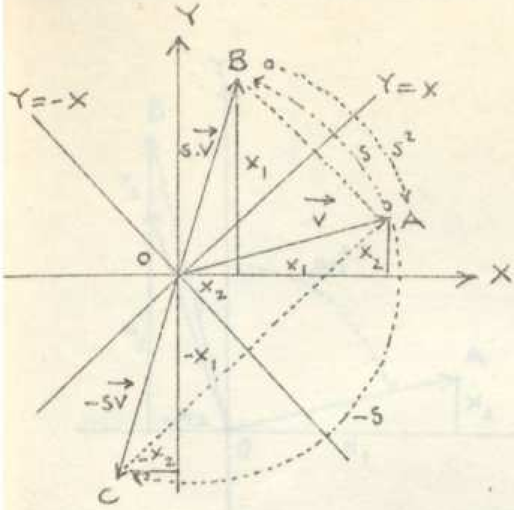
$i \to 90°$ dönme

$(i)^2.\vec{v} = -\vec{v} = -x_1 - x_2 i = \overrightarrow{OC}$

$(i)^2 \to 180°$ dönme

$-i \to -90°$ ters yönde dönme hareketlerine karşıl olacaktır. (şekil :3.1°)

(şekil : 3.1°)

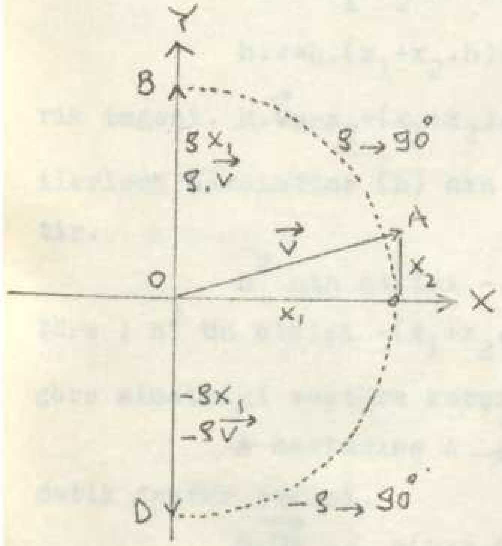


(şekil :3.2°)

$v=x_1+x_2.s$, s faktörlü sayının, ya da geometrik imgesi $\vec{OA}=\vec{v}=x_1+x_2.s$ vektörünün, (s) nin $s.v=s(x_1+x_2.s)=x_2+x_1.s$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik imgesi $s.\vec{v}=x_2+x_1s=\vec{OB}$ vektörü nedeni ile y=x açı ortayına göre simetri hareketine, (s) nin v vektörü üzerindeki kinematik etkisi ve (s) ye de s faktörlü sayılar halkasının kinematik faktörü denecektir.

s $\longrightarrow$ y=x açı ortayına göre A dan B ye simetri hareketine, $s^2=1 \longrightarrow$ y= x açı ortayına göre B den A ya simetri hareketine ; $-s \longrightarrow$ y=-x açı ortayına göre OA nın simetri hareketine karşılık olur. (şekil : 3.2°)

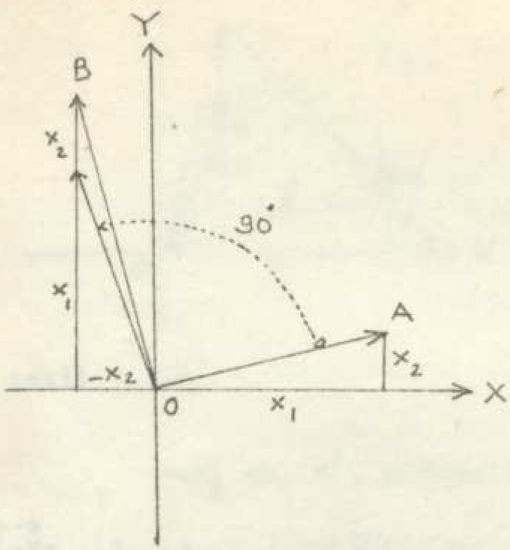
TANIM : 3.18 - (ς) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ



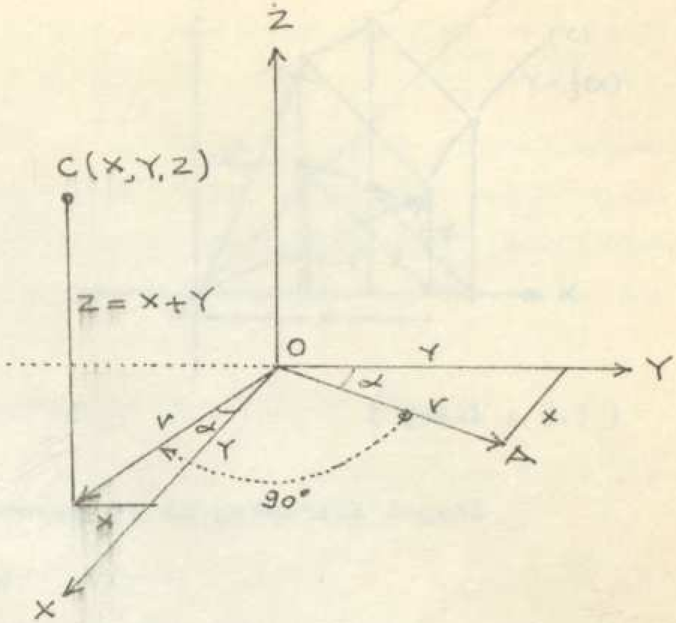
(şekil 3.3°)

$v=x_1+x_2.\varsigma$ dual sayısının, ya da geometrik imgesi $\vec{OA}=\vec{v}=x_1+x_2.\varsigma$ vektörünün (ς) nun $\varsigma.\vec{v}=\varsigma(x_1+x_2.\varsigma)=x_1.\varsigma$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik imgesi $\varsigma.\vec{v} \rightarrow x_1.\varsigma=\vec{OB}$ vektörü nedeni ile x_1, bileşeninin 90^0 döndürülmek suretile $\vec{OA}$ vektörünün, $\vec{OB}$ vektörüne dönüşmesine neden olan dönme hareketine (ς) nun $\vec{v}$ üzerindeki kinematik etkisi ve (ς) ya da dual sayılar halkasının kinematik faktörü denecektir.

$-\varsigma$, x_1 bileşeninin, ς nun tersi yönündeki $-x_1\varsigma \longrightarrow \vec{OD}$ vektörüne veren -90^0 ters dönmeyi; $\vec{OB}$ nın OX üzerindeki bileşeni sıfır olduğundan dönmenin söz konusu olamayacağı nedeni ile $\varsigma.\vec{v} \longrightarrow x_1.\varsigma=\vec{OB}$, $\varsigma.\vec{OB}=\varsigma^2.\vec{OA}=0$, $\varsigma^2 \longrightarrow (0)$'ı cebirsel etkinliğine karşılık olur. (şekil 3.3^0)



(şekil 3.4^0)



(şekil 3.5^0)

$v=x_1+x_2.h$, helisel sayısının, ya da geometrik imgesi

$\vec{OA}=\vec{v}=x_1+x_2.h$ vektörünün, (veya A noktasının), h 'nin

$h.v=h.(x_1+x_2.h)=-x_2+(x_1+x_2)\,h$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik imgesi. $h.\vec{v}=-x_2+(x_1+x_2).h=\vec{OB}$ vektörü nedeni ile, 90^0 lik dönme ve $x_2.h$ düşey ilerleme hareketine (h) nın $\vec{v}$ vektörü üzerindeki kinematik faktörü adı verilecektir.

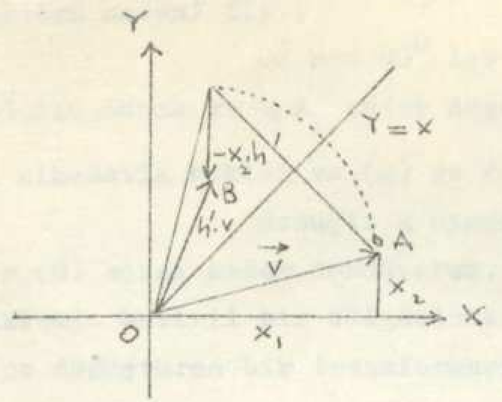
h^2 nin etkisi $-(x_1+x_2)+x.h$, helisel sayısının geometrik imgesi vektöre ; h^3 ün etkisi $-(x_1+x_2.h)$ helisel sayısının geometrik imgesi $\vec{OA}$ nın (o) ya göre simetriği vektöre karşılık olacaktır (şekil : 3.4^0)

A noktasına $A \to (x,y)$ veya $\vec{OA} \to x+y.h$ karşılık tutulduğunda, h kinematik faktör etkisi.

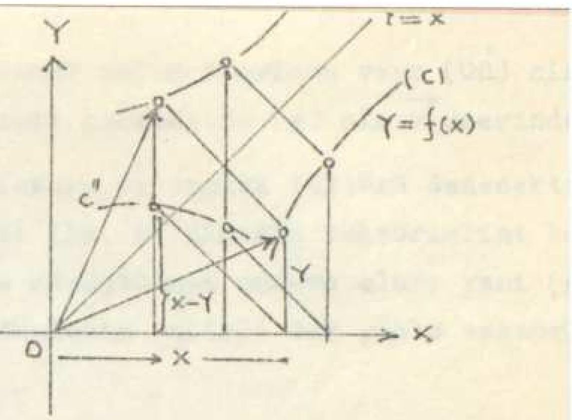
$h.\vec{OA} \to h(x+y.h)=-y+(x+y).h$ sonucuna (C) noktası karşılık tutulur ise, c(X,Y,Z) olarak

$X=-r\sin\alpha$, $Y= r\cos\alpha$, $Z= r(\sin\alpha+\cos\alpha) =-\sqrt{2}r\cos\alpha$

bağıntıları nedeni ile, A nın (r) yarıçaplı bir daire, veya belirli bir eğri çizmesi halinde C noktasının bir silindir ya da bir yüzey üzerine dairesel helis ya da umumî bir helis çizmesi söz konusu edilebileceğinden, bu cisme helisel cümle adı verilmiştir. (şekil 3.5^0) (BİBL. IV)



(şekil : 3.6°)



(Şekil : 3.7)

$v = x_1 + x_2 h'$, homotetik sayısının, ya da geometrik imgesi

$\vec{OA} = \vec{v} = (x_1 + x_2 . h')$ vektörünün, (h') nün

$h' . \vec{v} = h' . (x_1 + x_2 . h') = x_2 + (x_1 - x_2) h'$, cebirsel etkimesiz sonucu; karşılık img

$h' \vec{v} = x_2 + (x_1 - x_2) h' = \vec{OB}$ vektörü nedeni ile, A noktasının y=x açı ortayı

göre simetrik dönme ve $- x_2 . h'$ kadar düşey ilerleme hareketine h' nün $\vec{v}$ üzerindel

kinematik etkisi ve (h') ne de homotetik halkanın kinematik faktörü denecektir (şekil : 3.6°)

h' kinematik faktör etkimesinin R^2 de geometrik yorumu yapılmak isten (şekil 3.7) y=f (x) fonksiyonunun temsil ettiği (c) eğrisinin önce , y=x açı ortay doğrusuna göre (c') simetriği alınmakta, ve daha sonra (c') eğrisine bazı kara teristikleri bozmayan Y=x-y dönüşümü uygulanmış olmaktadır.
Belirli koşullarla (c'') nün (c) nin bir homotetiği olması olasıdır. (şekil : 3.

TANIM : 3.21 - (g) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ

$\vec{v} = (\alpha \mp \beta)(x_1 + x_2 . g)$ gen sayısının, geometrik imgesi :

$\vec{OA} = x_1 + x_2 . g$, $\vec{OB} = \alpha (x_1 + x_2 . g)$

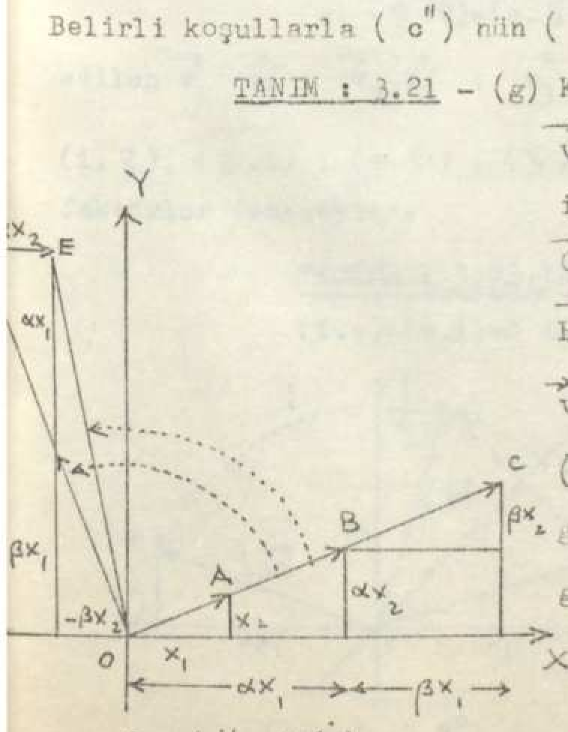
$\vec{BC} = \beta(x_1 + x_2 . g)$; $\vec{v} = \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$

$\vec{v} = \vec{OC} = \alpha(x_1 + x_2 . g) \mp \beta(x_1 + x_2 . g) = (\alpha \mp \beta)(x_1 + x_2 . g)$

$(\vec{v})$ vektörüne (g) nin

$g . \vec{v} = (\alpha \mp \beta)(x_1 . g + x_2 . g^2)$

$g . v = (\alpha \mp \beta) . x_1 . g - x_2 \beta =$



(şekil : 3.8)

vektörü nedeni ile :

OC nin 90^0 lik dönme ve αx_2 kadar yatay ilerleme veya $(\overrightarrow{OB})$ nin 90^0 lık dönme ve αx_1 kadar düşey ilerleme bileşik hareketine (g) nin $\vec{v}$ üzerindeki kinematik etkisi ve (g) ye de gen sayılı halkanın kinematik faktörü denecektir.

Sonuçta α uygun seçilmek sureti ile, R^2 nin tüm vektörlerini bir (θ) açısı kadar döndürerek, OE vektörlerine dönüştürmek mümkün olur; yani (g) düzlemin belirli bir bölgesindeki vektörleri, düzlemin belirli tek yönlü vektörlerine dönüştüren bir transformasyon olur.

TANIM : 3.22- (R^2 DE KİNEMATİK FAKTÖRLERİN TOPLAMI)

$i= g(0,1)$, $s=g(0,-1)$, $\varrho=g(1,0)$ halka faktörlerinin ayni bir $\vec{v}$ vektörüne, $i.\vec{v}$, $s.\vec{v}$, $\varrho.\vec{v}$ kinematik etkileri sonucu vektörlerin.

$$i.\vec{v}+s.\vec{v} = s.\vec{v}+i.\vec{v} = (i+s).\vec{v} = (s+i).\vec{v} = \vec{v}_1$$

$$s.\vec{v}+\varrho.\vec{v} = \varrho.\vec{v}+s.\vec{v} = (s+\varrho).\vec{v} = (\varrho+s).\vec{v}=\vec{v}_2$$

$$i.\vec{v}+\varrho.\vec{v} = \varrho.\vec{v}+i.\vec{v} = (i+\varrho).\vec{v} = (\varrho+i).\vec{v} = \vec{v}_3$$

toplamlarından elde edilen $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ vektörlerini veren

$i+s = s+i$, $s+\varrho = \varrho+s$, $i+\varrho = \varrho+i$ kinematik etkiler toplamına , kinematik faktörlerin toplamı denecektir.

TANIM : 3.23 - (R^2 DE KOMPOZE KİNEMATİK FAKTÖRLER)

i, s, ϱ ,g halka faktörlerinin ayni bir v vektörüne ard arda

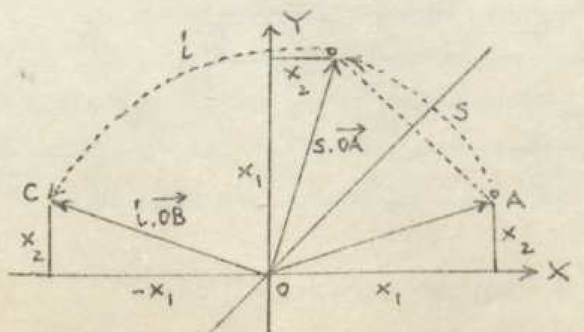
$$i.(s.\vec{v})=(i.s).\vec{v}=\vec{v}_1 \;,\; s.(i.\vec{v})=(s.i).\vec{v}=\vec{v}_1{}'$$

$$i.(\varrho.\vec{v})=(i.\varrho).\vec{v}=\vec{v}_2 \;,\; \varrho.(i.\vec{v})=(\varrho.i).\vec{v}=\vec{v}_2{}'$$

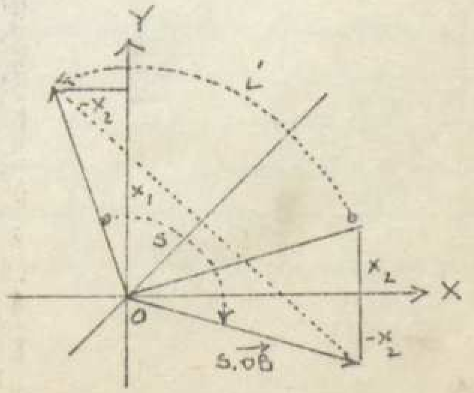
$$s.(\varrho.\vec{v})=(s.\varrho).\vec{v}=\vec{v}_3 \;,\; \varrho.(s.\vec{v})=(\varrho.s).\vec{v}=\vec{v}_3{}'$$ etkileri sonucu elde edilen $\vec{v}_1$, $\vec{v}_1{}'$; $\vec{v}_2$, $\vec{v}_2{}'$; $\vec{v}_3$, $\vec{v}_3{}'$ vektörlerini veren (i.s) , (s.i) ; $(i.\varrho)$, $(\varrho.i)$; $(s.\varrho)$, $(\varrho.s)$ kinematik etki bileşimlerine kompoze kinematik faktörler denecektir.

TEOREM : 3.23.12

(i.s)+(s.i)=0 dır.



(şekil :3.9^0)



(şekil :3.10^0)

hareketi ve

$\overrightarrow{OB}$ vektörüne (i) ikinci i. $\overrightarrow{OB}$ = i. (s. $\overrightarrow{OA}$) = (i.s), $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OC}$ hareketi ile $\overrightarrow{OC}$ vektörünü veren (i.s) kompoze kinematik faktörüdür (Şekil : 3,9)

$\overrightarrow{OA}$ vektörüne ilk (i), i. $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OB'}$, 90° lık dönme hareketi, ve

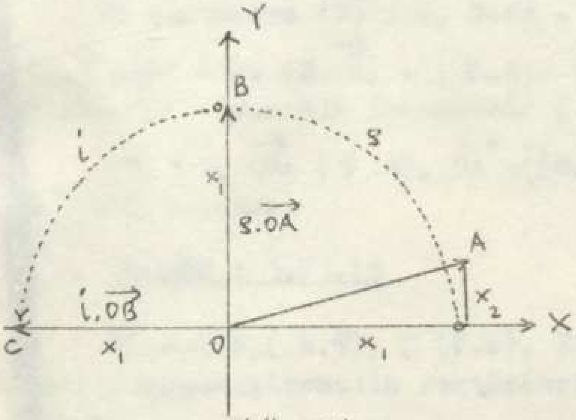
$\overrightarrow{OB'}$ vektörüne (s) ikinci s.$\overrightarrow{OB'}$=s. (i.$\overrightarrow{OA}$) = (s.i), $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OC'}$, y=x açıortay doğrusuna göre simetri hareketi ile $\overrightarrow{OC'}$ vektörünü veren (s.i) kinematik faktörüdür (Şekil : 3,10)

(i.s). $\overrightarrow{OA}$ + (s.i) $\overrightarrow{OA}$ =((i.s) + (s.i)). $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OC}$+$\overrightarrow{OC'}$=$\overrightarrow{0}$ buradan

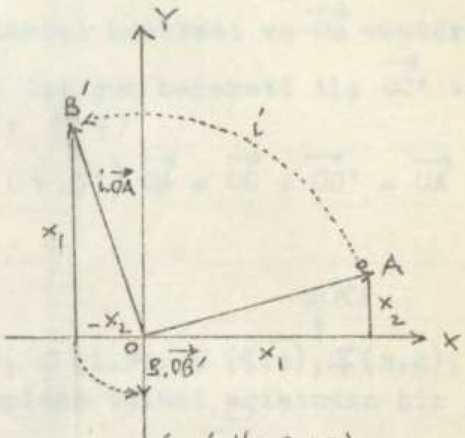
(i.s) + (s.i) = 0 bulunur.

<u>TEOREM : 3.23.13</u>

(i.ς) + (ς.i) = - 1 dir.



(şekil 3.11)



(şekil : 3.12)

<u>İsbat :</u>

$\overrightarrow{OA}$ vektörüne (ς) ilk, ς.$\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OB}$ izdüşüm hareketi ve $\overrightarrow{OB}$ vektörüne (i) ikinci

i. $\overrightarrow{OB}$ = i. (ς .$\overrightarrow{OA}$) = (i.ς). $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OC}$ hareketi ile $\overrightarrow{OC}$ vektörünü veren (i.ς) kompoze kinematik faktörüdür (Şekil : 3,11)

$\overrightarrow{OA}$ vektörüne (i) ilk i.$\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OB'}$ dönme hareketi ve $\overrightarrow{OB'}$ vektörüne (ς) ikinci

ς . $\overrightarrow{OB'}$ = ς . (i.$\overrightarrow{OA}$) = (ς.i) $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OC'}$ hareketi ile $\overrightarrow{OC'}$ vektörünü veren (ς.i) kompoze kinematik faktörüdür (Şekil : 3.12)

(i.ς). $\overrightarrow{OA}$ + (ς.i). $\overrightarrow{OA}$ = ((i.ς) + (ς.i)). $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OC}$ + $\overrightarrow{OC'}$ = - $\overrightarrow{OA}$ nedeni ile (i.ς) + (ς.i) = - 1 olur.

TEOREM : 3.23.16

$(K^2, +, (\cdot))$ üçlüsü bir halkadır.

İsbat :

$(K^2, +)$ ikilisinin bir Abel gurubu olduğu ortaya konmuştur; $(k^2, (.))$ ikilisinin birleşimli ve (+) üzerine dağılımlı olduğu doğrulanmalıdır. Kinematik faktörlerin etkimelerinin birleşimli olduğu gösterilmiştir. (+) üzerine dağılımlı olduğu aşağıdaki tabloda saptanabilir.

Halka değişimli değildir; fakat birim elemanı vardır.

B

A.B	∓(ϱ.i)	∓(i.ϱ)	∓(i.s)	∓(s.i)	∓(ϱ.s)	∓(s.ϱ)
∓(ϱ.i)	−(ϱ.i)	0	−(ϱ.s)	(ϱ.s)	−(ϱ.s)	0
∓(i.ϱ)	0	(−i.ϱ)	(s.ϱ)	(−s.ϱ)	0	(i.ϱ)
∓(s.i)	(ϱ.s)	(−s.ϱ)	−1	1	(ϱ.i)	(−i.ϱ)
∓(i.s)	(−ϱ.s)	(s.ϱ)	1	−1	(ϱ.s)	(i.ϱ)
∓(ϱ.s)	(ϱ.i)	0	(−ϱ.i)	(ϱ.i)	(ϱ.s)	0
∓(s.ϱ)	0	(−s.ϱ)	(ϱ.i)	(s.ϱ)	0	(s.ϱ)

Tablo yalnız (+) işaretler gözönüne alınarak düzenlenmiştir.

(i,ϱ,s)'in bir arada (.) işlemine göre değişimliliği için aşağıdaki tablo geçerlidir.

ϱ.(s.i) = ϱ	s.(i.s) = −ϱ	s.(ϱ.i) = i−ϱ	s.(i.ϱ) = −ϱ	i.(s.ϱ) = ϱ	i.(ϱs) = i−ϱ
(s.i).ϱ = −ϱ	(i.s).ϱ = ϱ	(ϱ.i).s = −ϱ	(i.ϱ).s = i−ϱ	(s.ϱ).i = i−ϱ	(ϱ.s).i = ϱ

Tanımlanan i, ϱ, s ve kompoze (i. ϱ), (ϱ.s), (s.i) tasvir ya da kinematik faktörlerde bazı yeni sayı cümleleri vektör uzayları ve modül yapıları oluşturacak. Ve bu çalışmaya, Türk Üniversitesinin değerli bir Öğretim Üyesi bir Profesörünün adını vereceğiz.

TANIM : 3.24. (BERKİ (*) SAYILARI, BERKİ (*) VEKTÖR UZAYLARI)

$X_1, X_2 \in R$; $(i.\varrho) \in C \times D$; $(\varrho S) \in D \times S$; $(s.i) \in S \times C$ olarak $[X_1 + X_2 (i\varrho)]$, $[X_1 + X_2 (\varrho i)]$; $[X_1 + X_2 (\varrho s)]$, $[X_1 + X_2 (s\varrho)]$; $[X_1 + X_2 (si)]$, $[X_1 + X_2 (is)]$ cebirsel yapısındaki elemanlara BERKİ sayıları denecek ve B (is), B (si); B (ϱs), B (sϱ); B (ϱi), B (iϱ) ile gösterilecektir.

TEOREM : 3. 24. 17

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $i.\varrho \in C \times D$ olarak $X_1 + X_2 (i\varrho) \in B (i\varrho)$; $Y_1 + Y_2 (i\varrho) \in B (i\varrho)$ elemanları için (+) toplama ve (.) çarpma denilecek işlemleri :

$$(+) : (X_1 + X_2 i\varrho) + (Y_1 + Y_2 i\varrho) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)(i\varrho)$$

(Toplam ve çarpımın tanımlanmasında $(X_1 + X_2 i)$, $(Y_1 + Y_2 i)$ elemanlarının, R veel sayılar cümlesinin cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinemat faktörler için bilinen skalerle değişimlilik

$$i. X_1 = X_1 . i; \quad \varsigma . X_1 = X_1 . \varsigma ; \quad i . X_1 . \varsigma = X_1 (i\varsigma) = (i.\varsigma) . X_1 \text{ ve}$$

$$i.\varsigma + \varsigma.i = -1 \text{ veya } i.\varsigma = -1 - \varsigma i, \quad (i.\varsigma).(i.\varsigma) = -(i.\varsigma)$$

bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.)

(*) Büyük ve zarif insan vasıfları, Türk Matematik çalışmalarına önemli katkıları (ODTÜ - Türkiye'de matematik çalışmaları- Erdal İnönü Yayın No: 26,)ile her zaman ihtiramla şükranla anacağım aziz hocam Prof. Dr. BERKİ YURTSEVER'e ithaf

---

İsbat :

(C x D, +) ikilisi bir Abel gurubudur. $(0 + 0. i\varsigma)$ sıfır elemandır. $(X_1 + X_2 i\varsigma)$ nun ters elemanı $(- X_1 - X_2 i\varsigma)$ dur; değişimli ve birleşimlidir.

(C x D, (.)) ikilisi birleşimli ve dağılımlıdır, birim eleman $(1+0.i\varsigma)$ d $X_1 \neq 0$, ve $X_1 \neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcuttur.

TEOREM : 3.24.18

$(X_1 + X_2 i\varsigma) \in B (i\varsigma)$, Berki sayılar cümlesi (R) veel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat :

$b_1 \in B (i\varsigma)$, $b_2 \in B (i\varsigma)$, $\alpha, \beta \in R$ $1 \in R$, $(1 + o. i) \in B (i\varsigma)$ ise

(i) $\alpha(b_1 + b_2) = \alpha b_1 + \alpha b_2 \in B (i\varsigma)$

(ii) $(\alpha+\beta) b_1 = \alpha b_1 + \beta b_1 \in B (i\varsigma)$

(iii) $(\alpha.\beta) b_1 = \alpha(\beta b_1) \in B (i\varsigma)$

(iv) $\xi . b_1 = b_1 \in B (i\varsigma)$

$R \times B (i\varsigma) \longrightarrow B (i\varsigma)$ olur.

TEOREM : 3.24.19

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $\varsigma s \in D \times S$ olarak, $X_1 + X_2 (\varsigma s) \in B (\varsigma s)$; $Y_1 + Y_2 (\varsigma s) \in B (\varsigma s)$ elemanları için (+) toplama ve (.) çarpma denilen işlemler.

(+) $(X_1 + X_2 \varsigma s) + (Y_1 + Y_2 \varsigma s) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) \varsigma s$

(.) $(X_1 + X_2 \varsigma s) + (Y_1 + Y_2 \varsigma s) = X_1 Y_1 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2) \varsigma s$

ile tanımlanıyor ise $B (\varsigma s.)$ be.ki sayılar cümlesi bir halka teşkil eder.

faktörler için bilinen skalerle değişimlilik.

$S. X_1 = X_1 S$; $\mathcal{S}. X_1 = X_1 . \mathcal{S}$; $S. X_1 . \mathcal{S} = X_1 (S\mathcal{S}) = (S\mathcal{S}) X_1$ ve

$S\mathcal{S} + \mathcal{S}S = 1$ veya $S\mathcal{S} = 1 - \mathcal{S}S$, $(S\mathcal{S}) . (S\mathcal{S}) = S\mathcal{S}$ bağıntıları gözön bulundurulmuştur.)

İsbat :

(D x S, +) ikilisi bir Abel gurubudur; ($0 + 0, \mathcal{S}S$) sıfır elemandır; ($X_1 + X_2 \mathcal{S}S$) in ters elemanı ($- X_1 - X_2 . \mathcal{S}S$) dir; değişimli ve birleşimlidir.

(D x S, (.)) ikilisi birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır. Birim eleman ($1 + 0 \mathcal{S} s$) dir. $X_1 \neq 0$ ve $X_1 \neq - X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcuttur.

TEOREM : 3.24.20

$(X_1 + X_2 \mathcal{S}S) \in B (\mathcal{S}S)$, Berki sayılar cümlesi (R) veel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat :

(Bak Teorem 3.24,18)

TEOREM : 3.24.21

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $s\, i \in S \times C$ olarak, $X_1 + X_2 . (si) \in B (s i)$ $Y_1 + Y_2 (si) \in B (si)$ elemanları için (+) toplama, ve (.) çarpma denilecek işlemler :

(+) $(X_1 + X_2 s i) + (Y_1 + Y_2 si) = (X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)$ tanımlanıyor ise B (si), berki sayılar cümlesi bir halka teşkil eder.

(Toplam ve çarpımın tanımlanmasında ($X_1 + X_2$ si),($Y_1 + Y_2$ si) elemanla R veel sayılar cümlesinin cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktör için bilinen skalerle değişimlilik

$S. X_1 = X_1 S$; $i. X_1 = X_1 . i$ $S.X_1.i = X_1 (S.i) = (si) X_1$ ve

$S\dot{I} + is = 0$ veya $si = - is$, ve $(si) . (si) = 1$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat :

(S x C, +) ikilisi bir Abel gurubudur; (0+0.si) sıfır elemandır; ($X_1 + X_2$ si) nın ters elemanı ($- X_1 - X_2$ si)dir; değişimli ve birleşimlidir.

(S x C, (.)) ikilisi birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır. Birim eleman (1 + 0. si) dir. $X_1 \neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcuttu

TEOREM : 3.24.22

B (si), berki halkası ($\mathcal{S}$) s faktörlü sayılar halkasına +, T ; ve (.), $\perp$; işlemleri üzerinden izomorftur.

İsbat :

(Bak Tanım : 2,7)

bir vektör uzayı oluşturur.

İsbat :

(Bak Teorem 2.24,18)

TANIM : 3,25 - BERKİ VEKTÖRLERİ)

$X_1, X_2, \ldots\ldots X \in R$, $i, ϛ, s$ kinematik faktör ve $iϛ$, $ϛs$, si kompoze kinematik faktörler olarak, elemanlar arası iki iç işlemi belirlenebilir.

1) $(X_1 ϛS + X_2\, iϛ) \in B\ (ϛs\, ,\ iϛ)$

2) $((X_1 - X_2\, i) ϛs - (X_1 + X_2\, i)\ iϛ) \in B\ (i,\ ϛs,\ iϛ)$

3) $(X_1 + X_2 ϛ + X_3\, si) \in B\ (1, ϛ, si)$

4) $(X_1 ϛ + X_2 ϛs + X_3\, iϛ) \in B\ (ϛ, ϛs,\ iϛ)$

5) $(X_1 + X_2 ϛs + X_3\, iϛ) \in B\ (1, ϛs,\ iϛ)$

6) $(X_1 + X_2\, s + X_3\, i + X_4\, si) \in B\ (1, s, i, si)$

7) $(X_1 + X_2 ϛ + X_3\, s + X_4\, sϛ) \in B\ (1, ϛs,\ sϛ)$

8) $(X_1 + X_2 ϛ + X_3\, i + X_4 ϛi) \in B\ (1, ϛ, i, ϛi)$

9) $(X_1 + X_2\, iϛ + X_3 ϛs + X_4\, si) \in B\ (1,\ iϛ, ϛs,\ si)$

10) $(X_1 + X_2 ϛ + X_3\, iϛ + X_4\, si + X_5 ϛs) \in B (1, ϛ, iϛ, si, ϛs)$

11) $(X_1 + X_2 ϛ + X_3\, i + X_4 ϛi + X_5\, sϛ) \in B\ (1, ϛ, i, ϛi, sϛ)$

12) $(X_1 + X_2 ϛ + X_3\, S + X_4\, i + X_5\, si + X_6\, iϛ + X_7 ϛs \in B (1, ϛ, S, i, ..)$

Cebirsel, yapısındaki veya i, ϛ, s, iϛ , ϛs, si kinematik faktörlerin lineer kombine şeklinde ifade edilebilecek elemanlara <u>değişik boyuttan Berki vektörleri</u> denecekti

Bu vektörlerin tamamının, bir kaç örneği aşağıda verilecek (+) toplama ve çarpma denecek işlemlerin tanımı ile halka ve R üzerinden vektör uzayı, ve R den farklı halkalar üzerinden dahi bazılarının yine vektör uzayı ve modül oluşturacakl görülecektir.

TEOREM : 3.25.24

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $ϛS \in D \times S$; $iϛ \in C \times D$ olarak $(X_1 ϛs + X_2\, iϛ) \in B\ (ϛs,\ iϛ)$; $(Y_1 ϛS + Y_2\, iϛ) \in B\ (ϛS,\ iϛ)$ ile ifade edilen elemanlar içi (+) toplama, (.) çarpma denilecek işlemler :

$(+)\ (X_1 ϛS + X_2\, iϛ) + (Y_1 ϛS + Y_2\, iϛ) = (X_1 + Y_1) ϛS + (X_2 + Y_2)\, iϛ$

$(.)\ (X_1 ϛS + X_2\, iϛ) . (Y_1 ϛS + Y_2\, iϛ) = X_1 Y_1 (ϛS) - X_2 Y_2 (iϛ)$ ile tanımla nıyor ise, B (ϛs, iϛ) Berki vektörleri cümlesi değişimli bir cisimdir.

(Toplam ve çarpımın tanımlanmasında $(X_1 ϛS + Y_2\, iϛ)$, $(Y_1 ϛS + Y_2\, iϛ)$ elemanlarının, R veel sayılar cümlesi cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinem faktörler için bilinen skalerlerle değişimlilik ve

$ϛi + iϛ = -1$; $ϛS + Sϛ = 1$, $Sϛ + iϛ = 0$ $(ϛS).(is) = (iϛ).(ϛs) = 0$ bağıntıları gözönünde tutulmuştur.

(B (ϱs, iϱ) , +) ikilisi bir Abel gurubudur. 0.ϱs + 0. iϱ = 0 sıfır elemandır. ($X_1 \varrho s + X_2 i\varrho$) nun ters elemanı ($- X_1 \varrho s - X_2 i\varrho$) dur. değişimli ve birleşimlidir.

(B (ϱs, iϱ) , (.)) ikilisi, birleşimli, (+) üzerine dağılımlı olup birim elemanı (ϱs - iϱ) dur. Abel gurubunun etkisiz (sıfır) elemanını içermez. Her ($X_1 \varrho s + X_2 i\varrho$) elemanının ($X_1^2 + X_2^2 \neq 0$) ($1/X_1$) ϱs + ($1/X_2$)iϱ ters elemanı vardır. ve (.) işlem değişimlidir.

TEOREM : 3.25.25

B (ϱs, iϱ) , Berki vektörleri R üzerinden bir vektör uzayı, ve B (ϱs) , Berki sayı cümlesi üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat :

a) (Bak : Teorem 3.24,18

b) $(\alpha_1 + \alpha_2 \varrho s) \in B(\varrho s)$, $(\beta_1 + \beta_2 \varrho s) \in B(\varrho s)$, $(1 + 0.\varrho s) \in B(\varrho s)$

$(X_1 \varrho s + X_2 i\varrho) \in B(\varrho s, i\varrho)$, $(Y_1 \varrho s + Y_2 i\varrho) \in B(\varrho s, i\varrho)$ ols

(i) $(\alpha_1 + \alpha_2 \varrho s)(X_1 \varrho s + X_2 i\varrho) = (\alpha_1 + \alpha_2) X_1 \varrho s + \alpha_1 X_2 i\varrho \in B(\varrho s, i\varrho)$

(ii) $(\alpha_1 + \alpha_2 \varrho s)\left[(X_1 \varrho s + X_2 i\varrho) + (Y_1 \varrho s + Y_2 i\varrho)\right] =$

$\left[(\alpha_1 + \alpha_2) X_1 \varrho s + \alpha_1 X_2 i\varrho\right] + \left[(\alpha_1 + \alpha_2) Y_1 \varrho s + \alpha_1 Y_2 i\varrho\right] =$

$\left[(\alpha_1 + \alpha_2)(X_1 + Y_1)\varrho s + \alpha_1 . (X_2 + Y_2) . i\varrho\right] \in B(\varrho s, i\varrho)$

(iii) $((\alpha_1 + \alpha_2 \varrho s) . (\beta_1 + \beta_2 \varrho s)) . (X_1 \varrho s + X_2 . i\varrho) = (\alpha_1 + \alpha_2 \varrho s)\left[(\beta_1 + \beta_2 \varrho s)(X_1 \varrho s + X_2 i\varrho)\right]$; sol yan

$\left[\alpha_1 \beta_1 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)\varrho s\right](X_1 \varrho s + X_2 . i\varrho) =$

$\left[(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) X_1 \varrho s + \alpha_1 \beta_1 X_2 . i\varrho\right] \in B(\varrho s, i\varrho)$

Sağ yan

$(\alpha_1 + \alpha_2 \varrho s)\left[(\beta_1 + \beta_2) X_1 \varrho s + \beta_1 X_2 i\varrho\right] =$

$\left[(\alpha_1 + \alpha_2) . (\beta_1 + \beta_2)\right] . X_1 \varrho s + \alpha_1 \beta_1 X_2 i\varrho \in B(\varrho s, i\varrho)$

(iv) $(1 + 0 \varrho s) . (X_1 \varrho s + X_2 i\varrho) = X_1 (\varrho s) + X_2 (i\varrho)$ bulunur.

TEOREM : 3.25.26

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $i \in C$; $i\varrho \in C \times D$; $\varrho s \in D \times S$

$((X_1 - X_2 i)\varrho s - (X_1 + X_2 i) i\varrho) \in B(\varrho s, i\varrho)$

$((Y_1 - Y_2 i)\varrho s - (Y_1 + Y_2 i) . i\varrho) \in B(\varrho s, i\varrho)$ ile ifade edilen elemanlar için (+) toplam, (.) çarpım denecek iş işlemler:

$$((X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)\,i)\mathcal{S}s-((X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)\,i)\,i\mathcal{S}$$

$$(.)\ \left[(X_1-X_2\,i)\mathcal{S}s-(X_1+X_2\,i)\,i\mathcal{S}\right].\left[(Y_1-Y_2\,i)\mathcal{S}s-(Y_1+Y_2\,i)\,i\right.$$

$$\left[(X_1Y_1-X_2Y_2)-(X_1Y_2+X_2Y_1)\,i\right]\mathcal{S}s-\left[(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)i\right]\,i$$

ile tanımlanıyor ise B ($\mathcal{S}$s, i$\mathcal{S}$) cümlesi değişimli bir cisimdir.

(Toplam ve çarpımın tanımlanmasında

$(X_1-X_2\,i)\mathcal{S}s-(X_1+X_2\,i)\,i\mathcal{S}$; $(Y_1-Y_2\,i)\mathcal{S}s-(Y_1+Y_2\,i)\ i\mathcal{S}$ e manlarının R, veel sayılar cümlesinin cebir kurallarını koruduğu ve kinematik fakt lerin skalerlerle değişimlilik özelliği ile

$(\mathcal{S}s).(\mathcal{S}s)=\mathcal{S}s$, $(i\mathcal{S}).(i\mathcal{S})=-i\mathcal{S}$; $(\mathcal{S}s).(i\mathcal{S})=(i\mathcal{S})(\mathcal{S}s)=0$ bağıntıları gözönünde tutulmuştur.

<u>İsbat :</u>

(B ($\mathcal{S}$s, i$\mathcal{S}$) , +) ikilisi bir Abel gurubudur; $X_1=0$, $X_1=0$ sıfır elemanı oluşturur; değişimli, birleşimli, ters elemanlıdır.

(B ($\mathcal{S}$s, i$\mathcal{S}$) , (.)) ikilisi, birleşimli, (+) üzerine dağılımlıdır.

$X_1=1$, $X_2=1$, $(1-i)\mathcal{S}s-(1+i)\ i\mathcal{S}$ birim elemanı oluşturur.

$(X_1-X_2\,i)\mathcal{S}s-(X_1+X_2\,i)\ i\mathcal{S}$, nun ters elemanı

$$\left[((X_1+X_2)-(X_1-X_2)\,i)/X_1^2+X_2^2\right]\mathcal{S}s-\left[((X_1+X_2)+(X_1-X_2)\,i)/X_1^2+X_2^2\right]\ i\mathcal{S}\ \text{du}$$

Halkanın sıfır böleni elemanı bulunmadığı ve her elemanın da ters elemanı mevcut olduğundan bu üçlü bir cisimdir.

<u>TEOREM : 3.25,27</u>

B ($\mathcal{S}$s, i$\mathcal{S}$), Berki cismi a) R veel sayılar cismi üzerinden b) C kompleks sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı oluşturur.

<u>İsbat :</u>

a) Bak (Teorem : 3.24,18)
b) Bak (Teorem : 3.25,25)

<u>TEOREM : 3.25,28</u>

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \in R$; $\mathcal{S} \in D$, (si) $\in S \times C$, olarak

$(X_1+X_2\mathcal{S}+X_3\,si) \in B\ (\mathcal{S}, si)$, $(Y_1+Y_2\mathcal{S}+Y_3\,si) \in B\ (\mathcal{S}, si)$

ile ifade edilen elemanlar için (+) toplam, çarpım (.) denilecek iç işlemler.

(+) $(X_1+X_2\mathcal{S}+X_3\,si)+(Y_1+Y_2\mathcal{S}+Y_3\,si)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)\mathcal{S}+(X_3+Y_3)\,si$

(.) $(X_1+X_2\mathcal{S}+X_3\,si).(Y_1+Y_2\mathcal{S}+Y_3\,si)=$

($(X_1Y_1+X_3Y_3)+(X_1Y_2+X_2Y_3+X_3Y_1-X_3Y_2)\mathcal{S}+(X_1Y_3+X_3Y_1)\,si$ ile tanımlanıyor ise B ($\mathcal{S}$, si) cümlesi bir halkadır.

(Toplam ve çarpım işlemlerinin tanımlanmasında ($X_1 + X_2 \xi + X_3$ si), ($Y_1 + Y_2 \xi + Y_3$ elemanlarının R, veel sayılar cümlesinin toplama ve çarpma kurallarını koruduğu düşünülmüş ve kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliği ile,

$\xi^2 = 0$, (si) . (si) = 1, ξ(si) = ξ, (si) . ξ = $-\xi$ bağıntıları gözönüne alınmıştır.

<u>İsbat :</u>

(B (ξ, si), +) ikilisi bir Abel gurubudur; değişimli birleşimli o sıfır eleman (0 + 0.ξ + 0. si) dir. Her elemanın tersi vardır.

B (ξ, si, (.)) ikilisi, birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır. (1 + 0.ξ + 0. si) birim elemandır.

$$\begin{vmatrix} X_1 & 0 & X_3 \\ X_2 & X_1 - X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & X_1 \end{vmatrix} = (X_1^2 + X_3^2) . (X_1 - X_3) = \neq 0 \text{ için } (X_1 \neq X$$

olan tüm elemanların ters elemanı vardır. ve :

($X_1 + X_2 \xi + X_3$ si) $\in$ B (ξ, si) nin ters elemanı,

($1 / (X_1^2 + X_2^2)$) . ($X_1 + X_2 \xi + X_3$ si) dir.

Halka (.) işlemi açısından değişimli değildir.

<u>TEOREM : 3. 25,29</u>

B (ξ, si) halkası, a) R veel sayılar cismi üzerinden bir vektör uz b) D dual sayılar halkası üzerinden bir modül oluşturur.

<u>İsbat :</u>

a) Bak Teorem (3.24,18)

$(X_1 + X_2 \varsigma + X_3 \cdot si) \in B\ (\varsigma, si)$, $(Y_1 + Y_2 \varsigma + Y_3 \cdot si) \in B\ (\varsigma, si)$ olsun :

(i) $(\alpha_1 + \alpha_2 \varsigma) \cdot (X_1 + X_2 \varsigma + X_3 \cdot si) = \alpha_1 \cdot X_1 + (\alpha_1 \cdot X_2 + \alpha_2 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_3) \varsigma + \alpha_1 \cdot X_3$

(ii) $\left[(\alpha_1 + \alpha_2 \varsigma) + (\beta_1 + \beta_2 \varsigma)\right] (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si) =$

$\left[(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)\varsigma\right] (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si) =$

$(\alpha_1 + \beta_1)\ X_1 + \left[(\alpha_1 + \beta_1)\ X_2 + (\alpha_2 + \beta_2)\ X_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\ X_3\right]\varsigma + (\alpha_1 + \beta_1$

diğer taraftan.

$(\alpha_1 + \alpha_2 \varsigma) \cdot (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si) + (\beta_1 + \beta_2 \varsigma) \cdot (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si) =$

$\alpha_1 \cdot X_1 + (\alpha_1\ X_2 + \alpha_2 \cdot X_1 + \alpha_2 X_3) \varsigma + \alpha_1\ X_3\ si + \beta_1 \cdot X_1 + (\beta_1 \cdot X_2 + \beta_2 \cdot X_1 + \beta_2\ X_3)\varsigma + \beta_1\ X$

den.

$(\alpha_1 + \beta_1) \cdot X_1 + \left[(\alpha_1 + \beta_1)\ X_2 + (\alpha_2 + \beta_2)\ X_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\ X_3\right]\varsigma + (\alpha_1 + \beta_1)\ X_3\ si$

bulunur.

(iii) $\left[(\alpha_1 + \alpha_2 \varsigma)\ (\beta_1 + \beta_2 \varsigma)\right] (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si) =$

$(\alpha_1 + \alpha_2 \varsigma) \left[(\beta_1 + \beta_2 \varsigma) \cdot (X_1 + X_2 \varsigma + X_3 \cdot si)\right]$ dir. Zira :

eşitliğin sol yanı :

$\left[\alpha_1 \beta_1 + (\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2)\varsigma\right](X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si) =$

$\alpha_1 \beta_1 \cdot X_1 + \left[\alpha_1 \beta_1\ X_2 + (\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2)\ (X_1 + X_3)\right]\varsigma + \alpha_1 \beta_1 \cdot X_3\ si$

Eşitliğin sağ yanı :

$(\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \varsigma)\left[\beta_1\ X_1 + (\beta_1\ X_2 + \beta_2\ X_1 + \beta_2\ X_3)\varsigma + \beta_1\ X_3\ si\right] =$

$\alpha_1 \beta_1\ X_1 + \left[(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \cdot (X_1 + X_3)\right]\varsigma + \alpha_1 \beta_1\ X_3$ si bulunur.

(iv) $(1 + 0 . \varsigma) \cdot (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si) = X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ si$ olur.

TEOREM : 3.25.30

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \in R$, $\varsigma \in D$, $i\varsigma \in C \times D$ olarak

$(X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ i\varsigma) \in B\ (1, \varsigma, i\varsigma)$, $(Y_1 + Y_2 \varsigma + Y_3\ i\varsigma) \in B\ (1, \varsigma, i\varsigma)$ il

ifade edilecek elemanlar için (+) toplam (.) çarpım denilecek iç işlemler :

$(+) : (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ i\varsigma) + (Y_1 + Y_2 \varsigma + Y_3\ i\varsigma) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)\varsigma + (X_3 + Y_3$

$(\cdot) : (X_1 + X_2 \varsigma + X_3\ i\varsigma) \circ (Y_1 + Y_2 \varsigma + Y_3\ i\varsigma) =$

$X_1\ Y_1 + (X_1\ Y_2 + X_2\ Y_1 - X_2\ Y_3)\varsigma + (X_1\ Y_3 + X_3\ Y_1 - X_3\ Y_3)\ i\varsigma$, ile tanım-
lanıyor ise B (1, , i) cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

$_1 \; _2 \; _3 \; 1 \; _2 \; _3$
cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş, ve kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliği ile

$\varsigma^2 = 0$, $\varsigma.(\varsigma i) = 0$, $\varsigma i + i\varsigma = -1$, $(i\varsigma) \circ (i\varsigma) = -i\varsigma$ bağıntıları gözönüne bulundurulmuştur.)

İsbat :

$(B(1, \varsigma, i\varsigma), +)$ ikilisi bir Abel gurubudur; değişimli birleşimli olup, sıfır eleman $(0 + 0.\varsigma + 0.\, i\varsigma)$ dur; ters elemanı vardır.

$(B(1, \varsigma, i\varsigma), (.))$ ikilisi birleşimli, (+) üzerine dağılımıdır.
$(1 + 0.\varsigma + 0.(i\varsigma))$, birim elemandır.
$(X_1 + X_2\varsigma + X_3 i\varsigma)$ nun ters elemanı
$(1/X_1) - [X_2 / X_1 (X_1 - X_3)]\varsigma - [X_3 / X_1(X_1 - X_3)] i\varsigma$ dur.
halka değişimli değildir.

TEOREM : 3.25.31

$B(1, \varsigma, i\varsigma)$ halkası , a) Reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı, b) D, dual sayılar halkası üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat :

a) Bak (Teorem : 3.25,18
b) Bak (Teorem : 3.25,29

TEOREM : 3.25.32

$X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \in R$, $i\varsigma \in C \times D$, $i \in C$, $\varsigma \in D$ olarak

$(X_1 + X_2.\varsigma + X_3 i + X_4 \varsigma i) \in B\ (1, \varsigma, i, \varsigma i)$

$(Y_1 + Y_2\varsigma + Y_3 i + Y_4 \varsigma i) \in B\ (1, \varsigma, i, \varsigma i)$ ile ifade edilen elemanlar için, (+) toplam, (.) çarpım denilecek iç işlemler :

$(+) : (X_1 + X_2.\varsigma + X_3 i + X_4\varsigma i) + (Y_1 + Y_2\varsigma + Y_3 i + Y_4\varsigma i) =$

$(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)\varsigma + (X_3 + Y_3) i + (X_4 + Y_4)\varsigma i$ ve

$(.) : (X_1 + X_2\varsigma + X_3 i + X_4\varsigma i) . (Y_1 + Y_2\varsigma + Y_3 i + Y_4\varsigma i) =$

$(X_1 Y_1 - X_3 Y_2 - X_3 Y_3) + (X_2 Y_1 + X_1 Y_2 - X_4 Y_2 - X_4 Y_3 + X_3 Y_4)\varsigma +$

$(X_3 Y_1 + X_1 Y_3 - X_3 Y_4)\, i + (X_4 Y_1 - X_3 Y_2 + X_2 Y_3 + X_1 Y_4 - X_4 Y_4)\varsigma i$ i

tanımlanıyor ise $B(1, \varsigma, i, \varsigma i)$ cümlesi bir halkadır. Ve değişimli değildir.

$(Y_1 + Y_2 \mathcal{S} + Y_3\, i + Y_4 \mathcal{S}\, i)$ elemanlarının R veel sayılar cümlesinin toplama, çarpma cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliğ ile,

$\mathcal{S}^2 = 0,\ i^2 = -1,\ (\mathcal{S}i)(\mathcal{S}i) = -\mathcal{S}i,\ \mathcal{S}i = -1 - i\mathcal{S}$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat :

$(B(1, \mathcal{S}, i, \mathcal{S}i), (+))$ ikilisi, bir Abel gurubudur; değişimli birleşimli olup, sıfır elemanı $(0 + 0.\mathcal{S} + 0.\ i + 0.\mathcal{S}i)$ dir. Her elemanın ters elemanı vardır

$(B(1, \mathcal{S}, i, \mathcal{S}i), (.))$ ikilisi, birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır. Birim elemanı $(1 + 0.\mathcal{S} + 0.i + 0.\mathcal{S}i)$ dir.

$$\begin{vmatrix} X_1 & -X_3 & X_3 & 0 \\ X_2 & (X_1 - X_4) & -X_4 & X_3 \\ X_3 & 0 & X_1 & -X_3 \\ X_4 & -X_3 & X_2 & (X_1 - X_4) \end{vmatrix} = \left[(X_1^2 + X_3^2) + (X_2 \cdot X_3 \mp X_1 \cdot X_4)\right]^2 = P^2$$

$(X_1^2 + X_3^2) \neq 0$ ve $X_1 \neq X_4$, $X_3 \neq -X_2$

olan tüm elemanların ters elemanları vardır.

$(X_1 + X_2\mathcal{S} + X_3\, i + X_4 \mathcal{S}\, i)$ nin ters elemanı :

$\left[(X_1 - X_4) + X_2\mathcal{S} - X_3\, i + X_4 \mathcal{S}\, i\right] / P$ dir.

TEOREM : 3.25,33

$B(1, \mathcal{S}, i, \mathcal{S}i)$ halkası a) R, veel sayılar cismi üzerinden vektör uzayı b) C, kompleks sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı c) D, dual sayılar halkası üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat :

a) Bak (Teorem : 3.25,18)

b) $(\alpha_1 + \alpha_2\ i) \in C,\ (\beta_1 + \beta_2 \cdot i) \in C$ olarak bak (Teorem 3.25,29)

c) Bak (Teorem : 3.25,29)

TEOREM : 3.25,34

$X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in R$, $(i.s) \in C \times S$ olarak

$(X_1 + X_2\, s + X_3\, i + X_4\, is)\ B(1, s, i, is)$, $(Y_1 + Y_2\, s + Y_3\, i + Y_4\, is) \in B(1, s, i, is)$

ile ifade edilen elemanlar için (+) toplam (.) çarpım denilecek iç işlemler :

$(+)\ (X_1 + X_2\, s + X_3\, i + X_4\, is) + (Y_1 + Y_2\, s + Y_3\, i + Y_4\, is) =$

$(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)\, s + (X_3 + Y_3)\, i + (X_4 + Y_4)\, is ,$

$(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - X_3 Y_3 + X_4 Y_4) + (X_2 Y_1 + X_1 Y_2 + X_4 Y_3 - X_3 Y_4) s +$

$(X_3 Y_1 + X_4 Y_2 + X_1 Y_3 - X_2 Y_4) i + (X_4 Y_1 + X_3 Y_2 - X_2 Y_3 + X_1 Y_4) is$, ile

anımlanıyor ise B (1,s,i, is) cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

(Toplam ve çarpımın tanımlanmasında

$(X_1 + X_2 s + X_3 i + X_4 is)$, $(Y_1 + Y_2 s - Y_3 i + Y_4 is)$ elemanlarının

veel sayılar cümlesinin cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktörler
çin bilinen skalerlerle değişimlilik ve

$s^2 = 1$, $i^2 = -1$, $(si).(si) = 1$, $is + si = 0$ bağıntıları gözönünde
ulundurulmuştur.

<u>İsbat :</u>

(B (1,s,i,si), (+)) ikilisi bir Abel gurubudur.

(0 + 0.s + 0.i + 0.is) sıfır elemandır. $(X_1 + X_2 s + X_3 i + X_4 is)$in ters
lemanı$(-X_1 - X_2 s - X_3 i - X_4 is)$dir. İkili, değişimli bilreşimlidir.

(B (1,s,i, si) , (.)) ikilisi birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır. Birim
leman (1 + 0.s + 0.i + 0. si) dir.

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & -X_3 & X_4 \\ X_2 & X_1 & X_4 & -X_3 \\ X_3 & X_4 & X_1 & -X_2 \\ X_4 & X_3 & -X_2 & X_1 \end{vmatrix} = 2(X_1 X_3 + X_2 X_4)^2 - 2(X_1 X_4 + X_2 X_3)^2 + (X_1^2 - X_2^2)^2 + (X_3^2 - X_4^2)^2$$

$$= \left[(X_1^2 - X_2^2) + (X_3^2 - X_4^2)\right]^2 = P^2 \text{ den}$$

$X_1 \neq X_2$, $X_3 \neq X_4$ olan elemanların ters elemanları vardır.

$(X_1 + X_2 s + X_3 i + X_4 is)$ ' in ters elemanı

$(X_1 + X_2 s - X_3 i + X_4 is) / P$ dir.

<u>TEOREM : 3.25.35</u>

B (1,s,i, si) halkası a) R, veel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı
) S, s faktörlü sayılar cümlesi üzerinden bir modül ve c) C, kompleks sayılar
ismi üzerinden bir vektör uzayı oluşturur.

<u>İsbat :</u>

Bak (Teorem : 3.25,18 - 3.25,29)

<u>TEOREM : 3.25.36</u>

$X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in R$, $i\varsigma \in C \times D$, $\varsigma s \in D \times S$, $si \in S \times C$
larak.

$(Y_1 + Y_2\, i\varsigma + Y_3\, \varsigma s + Y_4\, si) \in B (1, i\varsigma , \varsigma s, si)$ yapısındaki elemanlar için, toplam (+) , çarpım (.) denilecek iç işlemler :

(+) $(X_1 + X_2\, i\varsigma + X_3\, \varsigma s + X_4\, si) + (Y_1 + Y_2\, i\varsigma + Y_3\, \varsigma s + Y_4\, si) =$

$(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)\, i\varsigma + (X_3 + Y_3)\, \varsigma s + (X_4 + Y_4)\, si$ ve

(.) $(X_1 + X_2\, i\varsigma + X_3\, \varsigma s + X_4\, si) \cdot (Y_1 + Y_2\, i\varsigma + Y_3\, \varsigma s + Y_4\, si) =$

$(X_1 Y_1 - X_3 Y_4 - X_4 Y_2 + X_4 Y_4) + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1 - X_2 Y_2 - X_3 Y_4 + X_4 Y_3)$ i

$(X_1 Y_3 - X_2 Y_4 + X_3 Y_1 + X_4 Y_2)\, \varsigma s + (X_1 Y_4 - X_2 Y_4 + X_4 Y_1 + X_4 Y_3)$ si, il

tanımlanıyor ise $B (1, i\varsigma, \varsigma s, si)$ cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

(Toplam ve çarpım işlemlerinin tanımlanmasında $(X_1 + X_2\, i\varsigma + X_3\, \varsigma s + X_4\, si)$, $(Y_1 + Y_2\, i\varsigma + Y_3\, \varsigma s + Y_4\, si)$ elemanlarını R, veel sayılar cümlesinin toplama ve çarpma kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ile,

$\varsigma^2 = 0,\ i^2 = -1 ,\ S^2 = 1, \varsigma i + i\varsigma = -1, \varsigma s + s\varsigma = 1,\ si + is = 0$

bağıntıları ve kompoze kinematik faktörler çarpımı tablosu gözönüne alınmıştır.)

<u>İsbat :</u>

$(B (1, i\varsigma, \varsigma s, si) ,(+))$ ikilisinin Abel gurubu olduğu açıktır. değişimli, birleşimli olup, sıfır elemanı $(0 + 0.\, i\varsigma + 0.\, \varsigma s + 0.\, si)$ dir. Her elemanın tersi vardır.

$(B (1, i\varsigma , \varsigma s, si) , (.))$ ikilisi birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır. $(1 + 0.\, i\varsigma + 0.\, \varsigma s + 0.\, si)$ birim elemandır.

$$\begin{vmatrix} X_1 & -X_4 & 0 & X_4 - X_3 \\ X_2 & (X_1-X_2) & X_4 & -X_3 \\ X_3 & X_4 & X_1+X_3 & -X_2 \\ X_4 & 0 & X_4 & (X_1-X_2) \end{vmatrix} = (X_1 - X_2 + X_4)^2 \cdot (X_1 + X_3 - X_4) \cdot (X_1 - X_4) \neq 0$$

olan tüm elemanların ters elemanları vardır.

<u>TEOREM : 3.25.37</u>

$B (1, i\varsigma , \varsigma s, si)$ cümlesi, a) R, veel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) D, dual sayılar cümlesi üzerinden bir modül c) $B (i\varsigma)$, $B (\varsigma s)$, $B(\varsigma, i)$ sayıları cümlesi üzerinden bir modül oluşturur.

TANIM : 4.26 - (R^2 DE cisimler vE HALKALAR SINIFI)

R^2 de, elemanları bir dizi cisim veya halka olan cümleye cisimler sınıfı veya halkalar sınıfı denecektir.

TEOREM : 4.26. 38:

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $(X_1, X_2) \in R^2$, $(Y_1, Y_2) \in R^2$; $\lambda, \mu \in R$, önceden seçilm parametreler $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ olarak, (T), $(\perp)$ iç işlemleri :

(T) : $(X_1, X_2)\, T\, (Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$ ve

$(\perp)$: $(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [\lambda(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) - \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1),$

$\mu(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)]$ ile tanımlanan $R^2(\lambda, \mu)$ cümleleri değişimli cisimlerdir.

İsbat :

(T) iç işleminin gerekli koşulları saptadığı açıktır. $(\perp)$ iç işleminin birleşimlilik ve (T) üzerine dağılımlılık değişimlilik nitelikleri teoremin hipotezinden kolayca gösterilebilir.

$(\perp)$ işleminin birim elemanı : $\varepsilon = (\lambda/(\lambda^2 + \mu^2), -\mu/(\lambda^2 + \mu^2))$

$(R^2(\lambda,\mu), \perp)$ gurubu, (T) nin e = (0,0) elemanını içermez Zira, $\forall(X_1, X_2) \in R^2(\lambda,\mu)$ için $(R^2(\lambda,\mu), T, \perp)$ üçlüsü

$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [\lambda(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) - \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1),$

$\mu(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)] = \varepsilon =$

$= (\lambda/(\lambda^2 + \mu^2), -\mu/(\lambda^2 + \mu^2))$ olan bir $(Y_1, Y_2) \in R^2(\lambda,\mu)$ nun varlığını gerektirir ki bu

$Y_1 = ((\lambda^2 - \mu^2) X_1 - 2\lambda\mu X_2) / (X_1^2 + X_2^2) \cdot (\lambda^2 + \mu^2)^2$

$Y_2 = -((\lambda^2 - \mu^2) X_2 + 2\lambda\mu X_1) / (X_1^2 + X_2^2)(\lambda^2 + \mu^2)^2$ dur.

$(X_1, X_2) = (0,0)$ elemanı için (Y_1, Y_2) mevcut olmadığından $(\perp)$ işlemine göre $(0,0) \notin (R^2(\lambda,\mu), \perp)$ dır.

Bu teorem ile cisimler cümlesi olduğu saptanan $R^2(\lambda,\mu)$ cümlesine KOMPLEKS CİSİMLER SINIFI denecek ve $\mathbb{C}(\lambda,\mu)$ notasyonu ile gösterilecektir.

TANIM : 4.27 - (KOMPLEKS SAYI CÜMLELERİ SINIFI)

$X_1, X_2 \in R$ ve $\lambda, \mu \in R$ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olacak.

$(\lambda X_1 - \mu X_2) + (\mu X_1 + \lambda X_2)\, i$, yapılı sayılara kompleks sayı cümleleri sınıfı adı verilecek ve $C(\lambda,\mu)$ ile ifade edilecektir.

$- Y_1 + Y_2 i$) nin ($Y_1 + Y_2 i$) nin eşleniğinin ters işaretlisi olmak gibi
yapısal bir özellik sergilediği görülmektedir, quaternion için tanımlanan işlemlerin
u yapı özelliğini koruduğunu bilmekteyiz.

TANIM : 4.29 : (SİMÜLATÖR QUATERNİON)

R^2 de, cisim teşkil eden, ve tanımlanan iç işlemleri karşısında elemanları
belirli bir yapı özelliğini koruyan cümlelere simulatör quaternionlar denecektir.

TEOREM : 4. 29,40

$X_1, X_2 \in R$; ve $\lambda, \mu \in R$ ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$) önceden seçilmiş parametreler
olarak,

($\lambda X_1 + \mu X_2$, $\lambda X_2 - \mu X_1$) $\in \mathbb{C}(\lambda, \mu)$ cisimler sınıfına dahil elemanların
elemanların oluşturduğu $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ nün alt sınıfı simulatör quaternion sınıfı oluşturur.

İsbat :

$\mathbb{C}(\lambda, \mu)$, cisimler sınıfına dahil olarak tanımlanan ($\lambda X_1 + \mu X_2$,
$\lambda X_2 - \mu X_1$) elemanlar cümlesinin $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ nin iç işlemleri muvacehesinde yapısal
özelliğini koruduğunu saptamak gereklidir.

T, iç işlem karşısında :

$$(\lambda X_1 + \mu X_2, \lambda X_2 - \mu X_1) \; T \; (\lambda Y_1 + \mu Y_2, \lambda Y_2 - \mu Y_1) =$$

$$[\lambda(X_1 + Y_1) + \mu(X_2 + Y_2) \; , \; \lambda(X_2 + Y_2) - \mu(X_1 + Y_1)] \text{ ve}$$

($\perp$)iç işlemi karşısında :

$$(\lambda X_1 + \mu X_2, \lambda X_2 - \mu X_1) \perp (\lambda Y_1 - \mu Y_2 \; , \; \lambda Y_2 - \mu Y_1) =$$

$$(\lambda^2 + \mu^2).[\lambda(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1), \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) - \mu(X_1 Y_1 - X_2 Y_2)] \text{ ve}$$

$$(X_1, X_2) \in \mathbb{C}(\lambda, \mu), \quad (Y_1, Y_2) \in \mathbb{C}(\lambda, \mu)$$

$(X_1, Y_2) \perp (Y_1, Y_2) = (X, Y)$ olduğu takdirde

$$(\lambda X_1 + \mu X_2 \; , \; \lambda X_2 - \mu X_1) \perp (\lambda Y_1 + \mu Y_2 \; , \; \lambda Y_2 - \mu Y_1) =$$

$((\lambda^2 + \mu^2) X + 2\lambda\mu Y, \; (\lambda^2 - \mu^2) Y - 2\lambda\mu X)$ olduğunu görürüz.

TANIM : 4.30 - (MİNUMUM QUATERNİON)

C^2 kompleks sayılar cümlesinde içinde tanımlanabilir simulatör uaternionlar
minumum quaternionlar denecektir.

C x C den daha küçük boyutta bir simülator quaternion tanımı mümkün olmadığından minumum deyimi kullanılmıştır.

Teorem 4.29,40 da, $(\lambda X_1 + \mu X_2 , \lambda X_2 - \mu X_1) \in \mathcal{C}(\lambda,\mu)$ simulatör
quaternionlar sınıfının
$\lambda^2 + \mu^2 = 1$, $\lambda > 1$ veya $\lambda < -1$ koşullarının belirlediği alt sınıfları
minumum quaternionlardır.

İsbat :

Teoremin hipotezni oluşturulan koşullarda, örneğin
$\lambda = \sqrt{2}$, $\mu = i$, $(\lambda^2 + \mu^2 = 1)$ değerleri için
$(\lambda X_1 + \mu X_2 , \lambda X_2 - \mu X_1)$, simulatör quaternion
$(\sqrt{2} X_1 + X_2 \cdot i , \sqrt{2} X_2 - X_1 i)$ olarak; ve yine örneğin $\lambda = \sqrt{3}$, $\mu = \sqrt{2} i$
için, $(\lambda X_1 + \mu X_2 , \lambda X_2 - \mu X_1)$, simulatör uaternion
$(\sqrt{3} X_1 + \sqrt{2} X_2 i , \sqrt{3} X_2 - \sqrt{2} X_1 i)$ olarak, C^2 de tanımlanmış olur
ve bunlar $\mathcal{C}(\lambda,\mu)$ cisimler sınıfının birer elemanı olan cisim cümleleridir.

Teoremin hipotezi koşullar için minumum quaternionlar bir sınıf oluştururla
bu sınıfı $Q_2(\lambda,\mu)$ veya $Q_2(\lambda^2 + \mu^2 = 1)$ ile göstereceğiz.

TANIM : 4.31 : ((S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI)

İçerdiği parametrelerin değerlerine göre $\mathbb{R}^2$ de bir dizi halka oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda (S) FAKTÖRLÜ HALKAYI tanımlayan halkalar dizisine, (S) FAKTÖRLÜ HALKALAR sınıfı denilecek ve $\$(\lambda,\mu)$ ile gösterilecektir.

TEOREM : 4.31.42

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $(X_1, X_2) \in R^2$ ve $(Y_1, Y_2) \in R^2$, $\lambda,\mu \in R$ önceden seçilmiş parametreler olarak $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$; T, iç işlemleri

$$(T) : (X_1, X_2) \, T \, (Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1 , X_2 + Y_2) \in R^2 \text{ ve}$$

$$(\perp) : (X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [\lambda(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) ,$$
$$\mu(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)]$$ ile tanımlanan $R^2(\lambda,\mu)$
cümleleri (S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI teşkil eder.

İsbat :

İç işlemleri teoremin hipotezi ile tanımlanan $R^2(\lambda,\mu)$ cümlelerinin önce bir halka olduğu, daha sonra , λ,μ nün belirli değerleri için, , λ,μ nün değişik değerlerine göre teşkil olunan halka sınıfı içinde, (S) faktörlü halkanın bulunduğu şu göstermek gerekmektedir.

T iç işleminin, Abel gurubunun gerektirdiği koşulları sağladığı açıktır; sıfır eleman e = (0, 0) dır.

$\perp$ iç işleminin birleşimlilik, T üzerine dağılımlılık nitelikleri hipotezde kolayca görülebilmektedir.

($\perp$) nın etkisiz (birim) elemanı $\xi = (\lambda/(\lambda^2-\mu^2), -\mu/(\lambda^2-\mu^2))$

dir.

($\perp$) işlemine göre $\forall (X_1, X_2) \in R^2 (\lambda, \mu)$ nin, (Y_1, Y_2) ters elemanı:

$$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [\lambda(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1), \mu(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)] = (\lambda/(\lambda^2-\mu^2), -\mu/(\lambda^2-\mu^2))$$ den

$$Y_1 = [(\lambda^2+\mu^2) X_1 + 2\lambda\mu X_2] / (\lambda^2-\mu^2)^2 . (X_1^2 - X_2^2)$$

$$Y_2 = -((\lambda^2+\mu^2) X_2 + 2\lambda\mu X_1) / (\lambda^2-\mu^2)^2 . (X_1^2 - X_2^2)$$ olur. $X_1 \neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcut olacaktır.

($\$$) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI denen bu matematik yapılar, $\lambda = 1, \mu = 0$ için $\$(1,0)$, (S) faktörlü halkayı tanımlar

<u>TANIM : 4.32</u> - (S FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLELERİ SINIFI)

$X_1, X_2 \in R$ ve $\lambda, \mu \in R$ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$(\lambda X_1 + \mu X_2) + (\mu X_1 + \lambda X_2) S$, $(S^2 = 1)$ yapısındaki sayılara S faktörlü sayı cümleleri sınıfı adı verilecek ve $S(\lambda, \mu)$ ile ifade edilecektir.

<u>TEOREM : 4.32.43</u>

$\$(\lambda, \mu)$ halkalar sınıfı ile $S(\lambda, \mu)$, S faktörlü sayı cümleleri sınıfı T, $\perp$ ve (+), (.) işlemlerine göre izomorfturlar.

<u>İsbat :</u>

Bak (Teorem ....)

<u>TANIM : 4.33</u> - (DEFORM QUATERNİONLAR)

R^2 de cisim teşkil etmeyip, halka niteliğinde ve tanımlanan iç işlemleri karşısında, elemanları belirli bir yapı özelliğini koruyan cümlelere DEFORM QUATERNİONLAR denecektir.

<u>TEOREM : 4.33.44</u>

$X_1, X_2 \in R$; $\lambda, \mu \in R$, $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$(\lambda X_1 - \mu X_2, \lambda X_2 - \mu X_1)$ yapıda olup, $\$(\lambda, \mu)$ halkalar sınıfına dahil elemanların cümlesi deform quaternion tanımlar.

<u>İsbat :</u>

$\$(\lambda, \mu)$ halkalar sınıfına dahil olduğundan cisim değil halkadır ve $\$(\lambda, \mu)$ nün, T, $\perp$ işlemleri karşısında

$(\perp)$ nın etkisiz (birim) elemanı ... dir.

$(\perp)$ işlemine göre $\forall (X_1, X_2) \in R^2$ (λ, μ) nin, (Y_1, Y_2) ters elemanı:

$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [\lambda(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1), \mu(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)] = (\lambda/(\lambda^2 - \mu^2), -\mu/(\lambda^2 - \mu^2))$, den

$Y_1 = [(\lambda^2 + \mu^2) X_1 + 2\lambda\mu X_2)] / (\lambda^2 - \mu^2)^2 . (X_1^2 - X_2^2)$

$Y_2 = -((\lambda^2 + \mu^2) X_2 + 2\lambda\mu X_1) / (\lambda^2 - \mu^2)^2 . (X_1^2 - X_2^2)$ olur. $X_1 \neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcut olacaktır.

(\$) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI denen bu matematik yapılar, $\lambda = 1, \mu = 0$ için $\$(1,0)$, (S) faktörlü halkayı tanımlar

TANIM : 4.32 - (S FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLELERİ SINIFI)

$X_1, X_2 \in R$ ve $\lambda, \mu \in R$ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$(\lambda X_1 + \mu X_2) + (\mu X_1 + \lambda X_2) S$, $(S^2 = 1)$ yapısındaki sayılara S faktörlü sayı cümleleri sınıfı adı verilecek ve $S(\lambda, \mu)$ ile ifade edilecektir

TEOREM : 4.32.43

$\$(\lambda, \mu)$ halkalar sınıfı ile $S(\lambda, \mu)$, S faktörlü sayı cümleleri sınıfı T, $\perp$ ve (+), (.) işlemlerine göre izomorfturlar.

İsbat :

Bak (Teorem ....)

TANIM : 4.33 - (DEFORM QUATERNİONLAR)

R^2 de cisim teşkil etmeyip, halka niteliğinde ve tanımlanan iç işlemleri karşısında, elemanları belirli bir yapı özelliğini koruyan cümlelere DEFORM QUATERNİONLAR denecektir.

TEOREM : 4.33.44

$X_1, X_2 \in R$; $\lambda, \mu \in R$, $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$(\lambda X_1 - \mu X_2, \lambda X_2 - \mu X_1)$ yapıda olup, $\$(\lambda, \mu)$ halkalar sınıfına dahil elemanların cümlesi deform quaternion tanımlar.

İsbat :

$\$(\lambda, \mu)$ halkalar sınıfına dahil olduğundan cisim değil halkadır ve $\$(\lambda, \mu)$ nün, T , $\perp$ işlemleri karşısında

Nitekim

(T) : $(\lambda X_1 - \mu X_2 \,,\, \lambda X_2 - \mu X_1)\; T \;(\lambda Y_1 - \mu Y_2 \,,\, \lambda Y_2 - \mu Y_1) =$

$= (\lambda(X_1 + Y_1) - \mu(X_2 + Y_2) \,,\, \lambda(X_2 + Y_2) - \mu(X_1 + Y_1))$

$(\perp)$: $(\lambda X_1 - \mu X_2 \,,\, \lambda X_2 - \mu X_1) \perp (\lambda Y_1 - \mu Y_2 \,,\, \lambda Y_2 - \mu Y_1) =$

$= (\lambda^2 - \mu^2)\left[\lambda(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) - \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) \,,\, \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) - \mu(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)\right]$ ve

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \$(\lambda,\mu)$; $(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (X, Y)$ is

$(\lambda X_1 - \mu X_2 \,,\, \lambda X_2 - \mu X_1) \perp (\lambda Y_1 - \mu Y_2 \,,\, \lambda Y_2 - \mu Y_1) =$

$[(\lambda^2 + \mu^2) X - 2\lambda\mu Y \,,\, (\lambda^2 + \mu^2) Y - 2\lambda\mu X]$ olacağını kaydedelim

TANIM : 4.34 - (A QUATERNİON)

C^2 kompleks sayılar cümlesi içinde, tanımlanabilir.deform quaternianlara, aquaternionlar denecektir.

Tanım, geçerli iç işlemler karşısında elemanların yapı özelliğini koruya C^2 de cisim olmayan bir halka ve alize ettiğinden, uaternion olmadığını anlatmak amacı ile a uaternion deyimi tercih edilmiştir.

TEOREM : 4.34.45

$(\lambda X_1 - \mu X_2 \,,\, \lambda X_2 - \mu X_1) \in \$(\lambda,\mu)$ deform quatérnionlar sınıfının $\lambda^2 - \mu^2 = -1$ ve $-1 < \mu < 1$ için λ, μ değerlerinin tayin edeceği $\$(\lambda,\mu)$ halkaları AQUATERNİONLAR SINIFI oluşturur.

İsbat :

Teoremin hipotezini oluşturan koşullarda örneğin

$\mu = 1/2$, $\lambda = \mp(\sqrt{3}/2).i$ $(\lambda^2 - \mu^2 = -1)$ değerleri için

$(\lambda X_1 - \mu X_2 \,,\, \lambda X_2 - \mu X_1)$, deform Quaternionu

$(\mp\sqrt{3}/2)\, i\, X_1 - (1/2)\, X_2 \,,\, (\mp\sqrt{3}/2)\, i.X_2 - (1/2)\, X_1$ olarak ve

yine örneğin

$\mu = 1/3$, $\lambda = (\mp 2\sqrt{2}/3)\, i$ $(\lambda^2 - \mu^2 = -1)$ değerleri için

$(\lambda X_1 - \mu X_2 \,,\, \lambda X_2 - \mu X_1)$ deform Quaternionu

$(\mp 2\sqrt{2}/3)\, i\, X_1 - (1/3)\, X_2 \,,\, (\mp 2\sqrt{2}/3)\, i\, X_2 - (1/3)\, X_1$ olarak

C^2 de tanımlanmış olur ve bunlar deform Quaternionlar

AQuaternion sınıflarını da $\mathcal{Q}_2(\lambda,\mu)$ veya $\mathcal{Q}_2(\lambda,\mu)$ ile ifade edeceğiz.

TANIM 4.35 - (DUAL HALKALAR SINIFI)

Çarpmada, içerdiği parametrelerin değerlerine göre R^2 de bir dizi halka oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda Dual sayılar halkasını tanımlayan halkalar dizisine dual sayılar halkalar sınıfı denilecek ve $\mathbb{D}(\lambda,\mu)$ ile gösterilecektir.

TEOREM : 4.35.46

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R, (X_1,X_2)(Y_1,Y_2) \in R^2$ ve $\lambda,\mu \in R$ ($\lambda^2+\mu^2 \neq 0$) önceden seçilmiş parametreler olarak T, iç işlemleri

$$(T) : (X_1, X_2) \; T \; (Y_1 , Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$$

$$(\perp) : (X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (\lambda X_1 Y_1 , \mu X_1 Y_1 + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)) \in R^2$$

ile tanımlanan $R^2(\lambda,\mu)$ cümleleri Dual halkalar sınıfını teşkil eder

İsbat :

İç işlemleri teoremin hipotezi ile tanımlanan $R^2(\lambda,\mu)$ cümlelerinin önce bir halka olduğu daha sonra λ,μ nün belirli değerleri için, λ,μ nün değişik değerlerine göre teşkil olunan halka sınıfı içinde dual sayılar halkasının bulunduğunu göstermek gerekmektedir.

T iç işleminin, Abel gurubunun gerektirdiği koşulları sağladığı açıktır ; sıfır eleman e = (0, 0) dır.

$\perp$ iç işleminin birleşimlilik, T üzerine dağılımlılık nitelikleri hipotezden kolayca görülebilir.

$\perp$ nin etkisiz birim elemanı ($\xi = 1/\lambda , -\mu/\lambda^2$) ve dual birim ($\varepsilon = (0,1/$ dir.

$\perp$ işlemine göre $\forall(X_1 , X_2) \in R^2(\lambda,\mu)$ nün (Y_1,Y_2) ters elemanı :

$$Y_1 = 1/\lambda^2 X_1$$

$Y_2 = -(2\mu X_1 + \lambda X_2) / \lambda^3 X_1$ olur; $X_1 \neq 0$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcut olacaktır.

Dual sayı halkaları sınıfı denen bu matematik yapılar $\lambda = 1$, $\mu = 0$ için $\mathbb{D}(1, 0)$, dual sayılar halkasını tanımlar.

TANIM : 4.36 - (DUAL SAYI CÜMLELERİ SINIFI)

$X_1, X_2 \in R$ ve $\lambda,\mu \in R$ ($\lambda^2+\mu^2 \neq 0$) önceden seçilmiş para metreler olarak,

$\lambda X_1 + (\lambda X_2 + \mu X_1)\varepsilon$ yapılı sayılara, dual sayı cümleleri sınıfı denec ve $D(\lambda,\mu)$ ile ifade edilecektir.

$\mathbb{D}(\lambda,\mu)$ dual halkalar sınıfı ile $D(\lambda,\mu)$ dual sayı cümleleri sınıf T, $\perp$, ve $(+)$, $(.)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat :

$$(X_1, X_2)\in\mathbb{D}(\lambda,\mu)\longrightarrow \lambda X_1 + (\lambda X_2 + \mu X_1)\varrho\in D(\lambda,\mu)$$

$$(Y_1, Y_2)\in\mathbb{D}(\lambda,\mu)\longrightarrow Y_1 + (\lambda Y_2 + \mu Y_1)\varrho\in D(\lambda,\mu)$$ olsun

(T), $(+)$ işlemleri açısından

T : $(X_1, X_2)\,T\,(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_1 + Y_2)\in\mathbb{D}(\lambda,\mu)$

$(+)$: $\left[\lambda X_1 + (\lambda X_2 + \mu X_1)\varrho\right] + \left[\lambda Y_1 + (\lambda Y_2 + \mu Y_1)\varrho\right] =$

$\lambda(X_1 + Y_1) + \left[\lambda(X_2 + Y_2) + \mu(X_1 + Y_1)\right]\varrho\in D(\lambda,\mu)$

$(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2)\rightarrow\lambda(X_1 + Y_1) + \left[\lambda(X_2 + Y_2) + \mu(X_1 + Y_1)\right]\varrho$ ve

$(\perp)$, $(.)$ işlemleri açısından

$(\perp)$: $(X_1, Y_2)\perp(Y_1, Y_2) = (\lambda X_1 Y_1, \mu X_1 Y_1 + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1))$

$(.)$: $\left[\lambda X_1 + (\lambda X_2 + \mu X_1)\varrho\right].\left[\lambda Y_1 + (\lambda Y_2 + \mu Y_1)\varrho\right] =$

$\lambda(\lambda X_1 Y_1) + \left[\lambda(\mu X_1 Y_1 + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)) + \mu(X_1 Y_1)\right]\varrho$

$(\lambda X_1 Y_1, \mu X_1 Y_1 + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1))\longrightarrow$

$\lambda(\lambda X_1 Y_1) + \left[\lambda(\mu X_1 Y_1 + \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)) + \mu(\lambda X_1 Y_1)\right]\varrho$ bulunur.

$(a, 0)\rightarrow a.(\lambda + \mu\varrho)$; ve $(0, b)\longrightarrow\lambda b\varrho$ dur.

TANIM : 4.37 : (DUAL DEFORM QUATERNİON)

Eleman yapıları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında elemanların yapı özelliğini koruyan, ve parametrelerin özel bir durumun da dual sayılar halkasını veren - cisim olmayan halka nitelikli cümlelere DUAL DEFORM QUATERNİON denecektir.

TEOREM : 4.37.48

$X_1, X_2\in R$; $\lambda,\mu\in R$, $(\lambda^2 + \mu^2\neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$(\lambda X_1, \lambda X_2 - \mu X_1)\in\mathbb{D}(\lambda,\mu)$, dual halka sınıfları deform quatern: onlardır.

İsbat :

Sadece $\mathbb{D}(\lambda,\mu)$ halka sınıfının iç işlemleri karşısında eleman niteliğinin korunduğu ve λ,μ'nün değerleri için dual sayılar halkasını belirlediği saptanacaktır.

(T) iç işlemi ile

(T) : $(\lambda X_1, \lambda X_2 - \mu X_1)\,T\,(\lambda Y_1, \lambda Y_2 - \mu Y_1) = (\lambda(X_1 + Y_1), \lambda(X_2 + Y_2) - \mu(X_1 +$

$(\perp)$ iç işlemi ile

$\lambda^2.(\lambda X_1 Y_1, \lambda(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) - \mu X_1 Y_1)$ sonuçlarının elemanların yapı özelliğinin korunduğu görülmektedir. DEFORM QUATERNİON SINIFI ($\lambda = 1$, $\mu = 0$) için dual sayılar halkasını tanımlar.

TANIM : 4.38 : (DUAL AQUATERNİON)

C^2 de, tanımlanabilir dual deform quaternionlara dual aquaternion denecektir.

TEOREM : 4.38,49

Teorem 4.37,48 de

a) $\lambda^2 = -1$ veya $(\lambda = \mp i)$, $\mu \in R$

b) $\mu = \mp i$ ve $\lambda \in R$ değerlerinin tanımladığı dual deform quaternionları, aquaterniondur.

İsbat :

a) $\lambda^2 = -1$ veya $(\lambda = \mp i)$ $\mu \in R$ (Örneğin $\mu = 1$) için

$(\lambda X_1, \lambda X_2 - \mu X_1) = (\mp i X_1, \mp i X_2 - X_1)$, C^2 de

b) $\mu = \mp i$, $\lambda \in R$ (Örneğin $\lambda = 1$) için

$(\lambda X_1, \lambda X_2 - \mu X_1) = (X_1, X_2 - X_1 . i)$, C^2 de tanımlanmış olacaktır.

TANIM : 4.39, - ($\mathbb{H}(\lambda,\mu)_2$ HELİSEL CİSİMLER SINIFI)_çarpmada içerdiği parametrelerin değerlerine göre R^2 de bir dizi cisim oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda helisel cismi tanımlayan cisimler dizisine HELİSEL CİSİMLER SINIFI denecek ve $\mathbb{H}(\lambda,\mu)$ ile gösterilecektir.

TEOREM : 4.39,50

$X_1, X_2, Y_1 Y_2 \in R$; $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $\lambda, \mu \in R$ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak iç işlemleri

$$(T) : \quad (X_1, X_2)\ T\ (Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$$

$$(\perp) : \quad (X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (\lambda - \mu/2)(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) - \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2),$$
$$\mu(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) + (\lambda + \mu/2)(X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2)$$

ile tanımlanan $R^2(\lambda,\mu)$ cümleleri değişimli HELİSEL CİSİMLER SINIFI'dır.

İsbat :

(T), ($\perp$) işlemleri ile bu cümlelerin cisim olduğu ve λ, μ parametrelerin belirli durumunda helisel sayılar cismini içerdiği gösterilecektir.

Önce cisim aksiyomlarının gerçeklendiğini gösterelim.

(T) işleminin gerekli koşulları saptadığı açıktır; sıfır eleman $e = (0, 0)$ dır; ($\perp$) işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık niteliği teoremin hipotezinden kolayca görülebilir.

$(R^2(\lambda,\mu), \perp)$ ikilisi, (T) nin sıfır elemanını içermez. Zira

$\forall (X_1, X_2) \in R^2(\lambda,\mu)$ için, $(R^2(\lambda,\mu), T, \perp)$ halkası

$$(X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\begin{Bmatrix}((\lambda-\mu/2)X_1-\mu X_2)Y_1-((\lambda+\mu/2)X_2+\mu X_1)Y_2, \\ ((\lambda-\mu/2)X_2+\mu X_1)Y_1+((\lambda+\mu/2)X_1-(\lambda-\mu/2)X_2)Y_2\end{Bmatrix}$$

$$= \xi = ((\lambda+\mu/2)/(\lambda^2+3\mu^2/4), -\mu/(\lambda^2+3\mu^2/4))$$ den

$$Y_1 = [(\lambda^2-3\mu^2/4+\lambda\mu)X_1+(\lambda^2-3\mu^2/4-\lambda\mu)X_2]/(\lambda^2+3\mu^2/4)(X_1^2+X_2^2+X_1$$

$$Y_2 = [-2\lambda\mu X_1-(\lambda^2-3\mu^2/4+\lambda\mu)X_2]/(\lambda^2+3\mu^2/4)(X_1^2+X_2^2+X_1X_2)$$ olan

bir $(Y_1, Y_2) \in R^2(\lambda,\mu)$ nün varlığını gerektirir.

Burada yalnız $(X_1, X_2) = (0,0)$ olduğu takdirde (Y_1, Y_2) mevcut değildir. Sıfır elemanı içermeyen ve her elemanın tersinin bulunduğu bu halka bir cisimdir. ve $\mathbb{H}(\lambda,\mu)$ ile gösterilecektir.

$(\lambda = 1, \mu = 0)$ için $\mathbb{H}(\lambda,\mu)$ HELİSEL CİSİMLER SINIFI helisel cismi tanımlar $\mathbb{H}(1,0) \to \mathbb{H}$ dir.

TANIM : 4.40 : (HELİSEL SAYI CÜMLELERİ SINIFI)

$X_1, X_2 \in R$ ve $\lambda, \mu \in R$, $(\lambda^2+\mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$(\lambda-\mu/2)X_1-\mu X_2+((\lambda+\mu/2)X_2+\mu X_1).h$, $(h^2 = h-1)$ yapısında ve R, veel sayılar cümlesinin +, (.) işlemlerinikoruduğu sayılara helisel sayı cümleleri sınıfı denecek ve $H(\lambda,\mu)$ ile gösterilecektir.

TEOREM : 4.40.51

$\mathbb{H}(\lambda,\mu)$ helisel cisimler sınıfı ile $H(\lambda,\mu)$ helisel sayı cümleleri sınıfı, (T), $(\perp)$ ve (+), (.) işlemlerine göre izomorftur.

İsbat :

$(X_1, X_2) \in \mathbb{H}(\lambda,\mu) \to (\lambda-\mu/2)X_1-\mu X_2+((\lambda+\mu/2)X_2+\mu X_1)h \in H(\lambda,\mu)$

$(Y_1, Y_2) \in \mathbb{H}(\lambda,\mu) \to (\lambda-\mu/2)Y_1-\mu Y_2+((\lambda+\mu/2)Y_2+\mu Y_1)h \in H(\lambda,\mu)$ olsun

(T), (+) işlemleri yönünden karşılığı kurmak kolaydır.

$(\perp)$, (.) işlemleri için :

$$(\perp) : (X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\begin{Bmatrix}(\lambda-\mu/2)(X_1Y_1-X_2Y_2)-\mu(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2) \\ \mu(X_1Y_1-X_2Y_2)+(\lambda+\mu/2)(X_1Y_2+X_2Y_1+X_2Y_2)\end{Bmatrix} = (X,Y$$

$$(.)\ [(\lambda-\mu/2)X_1-\mu X_2+((\lambda+\mu/2)X_2+\mu X_1)h][(\lambda-\mu/2)Y_1-\mu Y_2+((\lambda+\mu/2)X_2+\mu X_1)$$

$(\lambda-\mu/2)X-\mu Y+((\lambda+\mu/2)X+\mu Y).h$ olur ve işlemlerin izomorf olduğu anlaşılır.

larının yapı özelliğinin korunduğu, ve parametrelerin özel durumunda, helisel cismi veren cisimlere HELİSEL SİMULATÖR QUATERNİON denecektir.

TEOREM : 4.41.52

$X_1, X_2 \in R$; $\lambda, \mu \in R$, $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$\left[(\lambda + \mu/2) X_1 + \mu X_2, \ (\lambda - \mu/2) X_2 - \mu X_1\right] \in \mathbb{H}(\lambda, \mu)$ helisel cisimler sınıfına dahil alt cümle, bir simulatör quaterniondur.

İsbat :

(T), ($\perp$) işlemleri karşısında özel yapıdaki elemanın özelliğinin korunduğu ve λ, μ nün belirli bir hali için H helisel cismi tanımladığı saptanacaktır.

(T) işlemi karşısında, elemanın yapı özelliğinin korunduğunu görmek kolaydır.

($\perp$) işlemi karşısında :

$$\left[(\lambda + \mu/2)X_1 + \mu X_2, (\lambda - \mu/2)X_2 - \mu X_1\right] \perp \left[(\lambda + \mu/2)Y_1 + \mu Y_2, (\lambda - \mu/2) Y_2 - \mu Y_1\right] =$$

$$(\lambda^2 + 3\mu^2/4)\left\{\begin{array}{l}(\lambda + \mu/2)(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) + \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2) \\ (\lambda - \mu/2)(X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2) - \mu(X_1 Y_1 - X_2 Y_2)\end{array}\right\} \text{ olduğunu}$$

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathbb{H}(\lambda, \mu)$ ve

$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (X, Y)$ ise

$$\left[(\lambda + \mu/2)X_1 + \mu X_2, (\lambda - \mu/2) X_2 - \mu X_1\right] \perp \left[(\lambda + \mu/2) Y_1 + Y_2, (\lambda - \mu/2)Y_2 - \mu Y_1\right]$$

$= \left[(\lambda^2 + \lambda\mu - 3.\mu^2/4) X - 2\lambda\mu Y, \ (\lambda^2 - \lambda\mu - 3\mu^2/4) Y - 2\mu\lambda X\right]$ olacağını ve elemanın yapı özelliğinin korunduğunu söyleyeceğiz.

Ve $\lambda = 1$, $\mu = 0$ için, bu sınıf doğrudan helisel cismi tanımlar $\mathbb{H}(1,0) \to \mathbb{H}$

TANIM : 4.42 (HELİSEL QUATERNİON)

C^2 de tanımlanabilir, helisel simulatör quaterniona helisel quaternion denecektir.

TEOREM : 4.42.53

Teorem : 4.41,52 de

$(\lambda^2 + 3 \cdot \mu^2/4) = 1$, $\lambda > 1$, $\lambda < -1$ koşulları ile λ, μ değerlerinin belirlediği $\mathbb{H}(\lambda, \mu)$ simulatör quaternionları C^2 de helisel quaternionlardır.

İsbat :

$\lambda^2 + 3\mu^2/4 = 1$ de örneğin $\lambda = 2$, $\mu = \mp 2i$ değerleri ile

$((\lambda + \mu/2) X_1 + \mu X_2, \ (\lambda - \mu/2) X_2 - \mu X_1)$, simulatör quaternionun belirlidiği :

$2 X_1 \mp (X_1 + 2 X_2)i$, $2 X_2 \mp (X_2 + 2 X_1) i$ ve yine örneğin

$\lambda = \sqrt{5}$, $\mu = \mp (4/\sqrt{3})$ i değerleri ile belirlenen

$$\left[(\sqrt{5} \mp 2/\sqrt{3}\, i)X_1 \mp (4/\sqrt{3})\, i\, X_2, (\sqrt{5} \mp 2\sqrt{3}\, i)\, X_2 \mp (4/\sqrt{3}) i\, X_1\right]$$

C^2 de helisel simulatör quaterniondur.

Çarpmada içerdiği parametrelerin değerlerine göre R de bir dizi halka oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda homotetik halkayı tanımlayan halkalar dizisine, HOMOTETİK HALKALAR SINIFI DENECEK ve $\mathbb{H}'(\lambda,\mu)$ ile gösterilecektir.

TEOREM : 4.43.54

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $\lambda, \mu \in R$ önceden seçilmiş parametreler olarak $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$; iç işlemleri

$$(T) : (X_1, X_2) \, T \, (Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$$

$$(\perp) : (X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = \begin{cases} (\lambda + \mu/2)(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + \mu(X_1 Y_1 + X_2 Y_1 - X_2 Y_2), \\ \mu(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + (\lambda - \mu/2)(X_1 Y_2 + X_2 Y_1 - X_2 Y_2) \end{cases}$$ ile

tanımlanan $R^2(\lambda,\mu)$ cümleleri değişimli halkalardır.

İsbat :

(T) iç işleminin gerekli koşulları saptadığı açıktır; etkisiz elemanı $e = (0,0)$dır; $(\perp)$ işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık ve değişimlilik niteliği teoremin hipotezinden kolaylıkla çıkarılabilir.

$(\perp)$ nin birim elemanı $\varepsilon = \left[(\lambda - \mu/2)(\lambda^2 - 5.\mu^2/4), -\mu/(\lambda^2 - 5\mu^2/4)\right]$

(X_1, X_2) nin ters elemanı : (Y_1, Y_2)

$$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = \begin{cases} \left[(\lambda + \mu/2)X_1 + \mu X_2\right] Y_1 + \left[(\lambda - \mu/2) X_2 + \mu X_1\right] Y_2, \\ \left[(\lambda - \mu/2) X_2 + \mu X_1\right] Y_1 + \left[(\lambda - \mu/2) X_1 - (\lambda - 3\mu/2) X_2\right] \end{cases}$$

$= \varepsilon = \left[(\lambda - \mu/2)/(\lambda^2 - 5.\mu^2/4), -\mu/(\lambda^2 - 5.\mu^2/4)\right]$den

$$Y_1 = \left[(\lambda^2 - \lambda\mu + 3\mu^2/4)X_1 - (\lambda^2 - \mu^2/4)X_2\right] / (X^2 - 5.\mu^2/4)^2 . (X_1^2 - X_2^2 - X_1 X_2)$$

$$Y_2 = -\left[(\lambda^2 - \lambda\mu + 3\mu^2/4)X_2 + \lambda\mu X_1\right] / (\lambda^2 - 5\mu^2/4)^2 . (X_1^2 - X_2^2 - X_1 X_2)$$

bulunur.

$\lambda = 1$, $\mu = 0$ için $\mathbb{H}'(1,0)$ bilinen homotetik halkayı belirler.

TANIM : 4.44- (HOMOTETİK SAYI CÜMLELERİ SINIFI)

$X_1, X_2 \in R$ ve $\lambda, \mu \in R$, $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak.

$(\lambda + \mu/2) X_1 + \mu X_2 + \left[(\lambda - \mu/2) X_2 + \mu X_1\right] . h^1, (h^{12} = 1 - h^1)$ yapısında ve R, veel sayılar cümlesinin (+), (.) işlemlerinin korunduğu sayılara homotetik sayı cümleleri sınıfı denecek ve $H^1(\lambda,\mu)$ ile gösterilecektir.

TEOREM : 4.44.55

$\mathbb{H}'(\lambda,\mu)$ homotetik halkalar sınıfı ile $H'(\lambda,\mu)$ homotetik sayı cümleleri sınıfı T, $\perp$ ve (+), (.) işlemlerine göre izomorfturlar.

$(X_1,X_2)\in \mathbb{H}(\lambda,\mu) \to (\lambda+\mu/2)X_1+\mu X_2+[(\lambda-\mu/2)X_2+\mu X_1]$. "

$(Y_1,Y_2)\in \mathbb{H}'(\lambda,\mu) \to (\lambda+\mu/2)Y_1+\mu Y_2+[(\lambda-\mu/2)Y_2+\mu Y_1]\,.h^1$ olsun

(T) , (+) işlemleri için :

T: $(X_1,X_2)\ T\ (Y_1,Y_2)=(X_1-Y_1\ ,\ X_2+Y_2\ )\in \mathbb{H}'(\lambda,\mu\ )$

(+): $[(\lambda+\mu/2)X_1+\mu X_2+((\lambda-\mu/2)X_2+\mu X_1)\ h^1]+[(\lambda+\mu/2)Y_1+\mu Y_2+((\lambda-\mu/2)Y_2+\mu Y_1)h^1]$

$(\lambda+\mu/2)(X_1+Y_1)+\mu(X_2+Y_2)+[(\lambda-\mu/2)\ (X_2+Y_2)\ +\mu(X_1+Y_1)]\ \ h^1$ ve

$(\perp)$, (.) işlemleri için

$$(\perp):\ (X_1,X_2)\perp(Y_1,Y_2)=\left\{\begin{array}{l}(\lambda+\mu/2)(X_1Y_1+X_2Y_2)+\mu(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2),\\ \mu(X_1Y_1+X_2Y_2)+(\lambda-\mu/2)(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)\end{array}\right\}=(X,Y)$$

(.) $[(\lambda+\mu/2)X_1+\mu X_2+((\lambda-\mu/2)X_2+\ X_1)h^1]\,.\,[(\lambda+\mu/2)Y_1+\mu Y_2+((\lambda-\mu/2)Y_2+\mu Y_1)h^1]$

$(\lambda+\mu/2)\ X+\mu Y+[(\lambda-\mu/2\ )\ Y+\mu X]\,.h^1$ olur. Bu sonuçlar her iki sınıfın iç işlemlerine göre izomorf olduğunu gösterir.

$\lambda=1,\mu=0\ \mathbb{H}'(1,0)=\mathbb{H}'$, bilinen homotetik halkayı tanımlar.

<u>TANIM: 4.45</u> ($\mathbb{H}'(\lambda,\mu)$ DE DEFORM QUATERNİON)

Elemenları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında, elemanların yapı özelliğini koruyan, veparametrelerin özel bir durumunda homotetik halkayı veren-cisim olmayan-halka nitelikli cümlelere $\mathbb{H}'(\lambda,\mu)$ de deform quaternionlar denecektir.

<u>TEOREM : 4.45.56</u>

$X_1,\ X_2\in R,\quad \lambda,\mu\in R,\ (\lambda^2+\mu^2\neq 0\ )$ önceden seçilmiş parametreler olarak $[(\lambda-\mu/2)\ X_1-\mu X_2,\ (\lambda+\mu/2)\ X_2-\mu X_1]$ yapısındaolup $\mathbb{H}'(\lambda,\mu)$ helisel halkalar sınıfına dahil elemanların oluşturduğu halka bir deform quaterniondur.

<u>İsbat :</u>

$\mathbb{H}'(\lambda,\mu\ )$ nın iç işlemleri karşısında elemanın yapı özelliğinin korunduğu ve λ,μ nün belirli değeri için bunun $\mathbb{H}'$ homotetik halkayı belirlediği saptanacaktır.

$(\perp)$ çarpım işlemi karşısında :

$[(\lambda-\mu/2)X_1-\mu X_2,\ (\lambda+\mu/2)X_2-\mu X_1]\perp[(\lambda-\mu/2)Y_1-\mu Y_2,(\lambda+\mu/2)Y_2-\mu Y_1]$

$(\lambda-5\mu^2/4)\ [(\lambda-\mu/2)\ (X_1Y_1+X_2Y_2)-\mu(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)\ ,$

$(\lambda+\mu/2)\ (\ X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)-\mu(X_1Y_1+X_2Y_2\ )]$ olarak eleman yapı özelliğinin korunduğu ve

$\lambda=1,\ \mu=0$ için, bu sınıfın H^1 homotetik halkayı oluşturduğu görülmekteri.

TANIM : 4.46 (HOMOTETİK AQUATERNION)

C^2 de tanımlanabilir $\mathbb{H}'(\lambda, \mu)$ deform quaterniona homotetik aquaternion [de]necektir.

TEOREM : 4.46,57

Teorem 4.45,56 da

$(\lambda^2 - 5.\mu^2/4) = 1$, de $-1 < \lambda^2 < 1$ koşulları ile λ, μ nün belirlediği $\mathbb{H}'(\lambda, \mu)$ deform quaternionları C^2 de homotetik aquaternionlardır.

İsbat :

$(\lambda^2 - 5.\mu^2/4) = 1$ de örneğin $\lambda = 2/3$ $\mu = (2/3)$ i değerleri ile

$\left[(\lambda - \mu/2)\, X_1 - \mu X_2,\ (\lambda + \mu/2)\, X_2 - \mu X_1\right]$, deform quaternionun belirlediği:

$\left[(1/3)\,(X_1 - 2\,X_2 . i),\ X_2 - (2/3).X_1 . i\right]$. C^2 de homotetik aquaterniondu[r].

TANIM : 5.47 - " BERKİ„ HALKA VE CİSİMLERİ

S x C, C x D, D x S, cümlelerinde, halka veya cisim oluşturulabilir iç işlemlerin tanımlanabilmesi halinde bileşenleri S, C, D den alınan iki bileşenli elemanlar cümlesine "BERKİ„ halka veya cisimleri denecektir.

Bizi burada şimdilik S x C de, sınıflama yöntemi ile halka ve cisim oluşturabilir iç işlemlerin tanımlanabildiği "BERKİ„ halka ve cisimlerini realize edeceğiz

TEOREM : 5.47.58

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$, $Z_1 = x_1 . S \in S$, $Z_2 = x_2 . i \in C$, $(x_1 . S, x_2 . i) \in S \times C$

$W_1 = y_1 . S \in S$, $W_2 = y_2 . i \in C$, $(y_1 S, y_2 i) \in S \times C$; olarak

T, iç işlemleri

T: $(Z_1 , Z_2)\ T\ (W_1 , W_2) = (x_1 S, x_2 i)\ T\ (y_1 S, y_2 i) = ((x_1 + y_1) S, (x_2 + y_2) i)$

: $(Z_1, Z_2) \perp (W_1, W_2) = \begin{cases} (X_1 Y_1 + X_2 Y_2) S + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) i , \\ (X_1 Y_1 + X_2 Y_2) i - (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) S \end{cases}$ ile tanımlanıyor ise S x C çarpım cümlesi değişimli bir cisimdir. Bu cisim β (S, i) ile gösterilecektir.

İsbat :

(S x C, T) ikilisi bir Abel gurubudur, değişimli birleşimlidir.

e = (0, 0) sıfır elemandır.

$(X_1 S, X_2 i)\ T\ (Y_1 S, Y_2 i) = ((X_1 + Y_1) S, (X_2 + Y_2) i) = (0,0)$ da

$(X_1 S, X_2 i)$ nin ters elemanı $(- X_1 S, - X_2 i)$ dir.

( ) işleminin

$(Z_1 , Z_2) \perp (W_1 , W_2) = (X_1 S, X_2 i) \perp (Y_1 S, Y_2 i) =$

$\left[(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) S + (X_1 Y_2\ si - X_2 Y_1\ is)\ i,\ (X_1 Y_1 - X_2 Y_2)\ i - (X_1 Y_2\ si - X_2 Y_1\ is)\ S\right]$ d

$si = - is$, $i^2 = - 1$, $S^2 = 1$ eşitlikleri gözönüne alındığında

$(X_1 S, X_2 i) \perp (Y_1 S, Y_2 i) = \left[((X_1 Y_1 - X_2 Y_2) - (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)) S, ((X_1 Y_1 - X_2 Y_2) + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)) i\right]$

$((X_1 - X_2) Y_1 - (X_1 + X_2) Y_2) S$, $((X_1 + X_2) Y_1 + (X_1 - X_2) Y_2) i$ sonuç işlemine göre (SxC, $\perp$) ikilisinin birleşimli, T üzerine dağılımlı olduğu

$= (S/2, - i/2$ birim elemanına malik olduğu ve (X_1, X_2) nin (Y_1, Y_2) ters elemanının $(Y_1, Y_2) = (-X_2 S / 2(X_1^2 + Y_1^2), -X_1\ i/2\ (X_1^2 + Y_1^2))$ mevcut bulunduğu ve sıfır elemanı içermediği kolayca görülebilir.

Aynı yol ve yöntemle $(X_1 i, X_2 S)$ C x S ninde bir cisim olduğu tekrarlanabilir.

$\mathbb{B}$ (S, i) cismi $\mathbb{C}(\lambda, \mu)$ kompleks cisimler sınıfının ...

cismine, kendi T, $\perp$ toplama çarpma iç işlemlerine göre izomorfturlar.

İsbat :

$(X_1, X_2) \in \mathbb{C}(1,1), (X_1 S, X_2 i) \in \mathbb{B}(S,i); (X_1, X_2) \longrightarrow (X_1 S, X_2 i)$

$(Y_1, Y_2) \in \mathbb{C}(1,1), (Y_1 S, Y_2 i) \in \mathbb{B}(S,i) , (Y_1, Y_2) \longrightarrow (Y_1 S, Y_2 i)$ olsu

$\mathbb{C}(1,1)$ de (T) toplama işlemi :

$(X_1, X_2) T (Y_1, Y_2) = ((X_1 + Y_1) , X_2 + Y_2)) \in \mathbb{C} (1,1)$

$\mathbb{B}$ (s,i) de (T) toplama işlemi :

$(X_1 S, X_2 i) \ T \ (Y_1 S, Y_2 i) = ((X_1 + Y_1) \ S, (X_2 + Y_2) i) \in \mathbb{B}(S,i$

$(X_1 + Y_1 , X_2 + Y_2) \longrightarrow ((X_1 + Y_1) S, (X_2 + Y_2) i)$ olur

$\mathbb{C}(1,1)$ de ($\perp$) çarpma işlemi :

$(X_1,X_2) \perp (Y_1,Y_2) = ((X_1Y_1- X_2Y_2- (X_1Y_2+X_2Y_1), (X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1))$

(Teorem : 5.47.58) de

$\mathbb{B}$ (s,i) de ($\perp$) çarpma işlemi

$(X_1S,X_2i) \perp (Y_1S,Y_2i) = [((X_1Y_1-X_2Y_2)- (X_1Y_2+X_2Y_1))S,((X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1))$

$(X_1,X_2) \perp (Y_1, Y_2) \longrightarrow (X_1 \ S, X_2 i) \perp (Y_1 \ S, Y_2 i)$ olur

$\mathbb{C}(1,1)$ de birim eleman $\xi = (1/2 , - 1/2)$

$\mathbb{B}$ (s,i) de birim eleman $\xi = (s/2, - i/2)$

$\mathbb{C}(1,1)$ de $\forall (X_1, X_2)$ nin (Y_1, Y_2) ters elemanı

$(Y_1,Y_2) = [- X_2S/2 (X_1^2 + X_2^2), - X i/2 (X_1^2 + X_2^2)]$ (Teorem : 5.47.58)

$\mathbb{B}$ (s,i) de $\forall (X_1 S, X_2 i)$ nin $(Y_1 S, Y_2 i)$ ters elemanı

$(Y_1 S, Y_2 i) = [- X_2 S /2 (X_1^2 + X_2^2) , - X_1 i /2 (X_1^2 + X_2^2)]$ dir

TEOREM : 5.47.60

$\mathbb{B}$ (s,i) cismi ile $B (i, \xi s, i\xi) = (X_1- X_2 i)\xi s- (X_1+X_2 i)$ iş

vektör uzayı, kendi T, $\perp$ toplama ve çarpma iç işlemlerine göre izomorfturlar.

İsbat :

Bak : (Teorem 3.25,26 - Teorem . 5.47,59)

TANIM : 5,48 : $\mathbb{B}$ (s,i) DE SİMULATÖR QUATERNİON)

Elemenları λ, μ parametrelerine göre özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında elemanlarının yapı özelliğinin korunduğu ve parametrelerin özel durumunda $\mathbb{B}$(s,i) cismini veren cisimlere $\mathbb{B}$ (s,i) DE SİMULATÖR QUATERNİON denecektir. Ve bu sınıf $\mathbb{B}(\lambda, \mu, s,i)$ ile gösterilecektir.

$X_1, X_2 \in R$, $\lambda, \mu \in R$ olmak üzere,

$(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$, $\lambda \neq \mu(1 \mp \sqrt{2})$, $\lambda \neq \mu(-1 \mp \sqrt{2})$ olarak, elemanları

$\{(X_1 - X_2)S, (X_1 + X_2)i\}$ yapısında olup, T, $\perp$ iç işlem $\mathfrak{B}(s,i)$ nin

işlemleri olarak tanımlanan cümle bir $\mathfrak{B}(S,i)$ simulatör quaternionudur.

<u>İsbat :</u>

$((\lambda X_1 - \mu X_2)S, (\mu X_1 + \lambda X_2)i)$, elemanlarının $\mathfrak{B}(s,i)$ işlemleri muvacehesinde cisim olduğunu, yapı özelliğini koruduğunu ve λ, μ nün özem değerleri için $\mathfrak{B}(s,i)$ yi tanımladığını kanıtlıyacağız.

Söz konusu elemanlar için $\mathfrak{B}(s,i)$ nin T toplama $\perp$ çarpma işlemi :

T) : $[(\lambda X_1 - \mu X_2)S, (\mu X_1 + \lambda X_2)i]\, T\, [(\lambda Y_1 - \mu Y_2)S, (\mu Y_1 + \lambda Y_2)i] =$

$[(\lambda(X_1 + Y_1) - \mu(X_2 + Y_2))s, (\mu(X_1 + Y_1) + \lambda(X_2 + Y_2))i]$

$\perp$) : $\lambda^2 - \mu^2 - 2\lambda\mu = P$, $\lambda^2 - \mu^2 + 2\lambda\mu = K$ olarak

$[(\lambda X_1 - \mu X_2)S, (\mu X_1 + \lambda X_2)i] \perp [(\lambda Y_1 - \mu Y_2)S, (\mu Y_1 + \lambda Y_2)i] =$

$([(PX_1 - KX_2)Y_1 - (PX_1 + KX_2)Y_2]S, [(PX_1 + KY_2)Y_1 + (PX_1 - KX_2)Y_2]$

olduğuna göre, toplama ve çarpmada elemanın λ, μ parametrelerine göre yapı özelliğini koruduğu ve

$(\mathfrak{B}(\lambda,\mu,s,i), T)$ ikilisinin Aber gurubu niteliği taşıdığı, $(\mathfrak{B}(\lambda,\mu,s,i), \perp)$ ikilisinin ise birleşimli ve (T) üzerine dağılımlı olduğu açıktır.

$(\mathfrak{B}(\lambda,\mu,s,i), \perp)$ nin (ε) birim elemanı

$\varepsilon = [(\lambda + \mu)S/2P, -(\lambda - \mu)i/2K]$ ve

$[(\lambda X_1 - \mu X_2)S, (\mu X_1 + \lambda X_2)i]$ nin (Y_1, Y_2) ters elemanı

$Y_1 = (\lambda P X_1 - \mu K X_2)S)/2.(P^2 X_1^2 + K^2 X_2^2)$

$Y_2 = (\lambda^2 + \mu^2)(\mu K X_1 + \lambda P X_2)i/2.(P^2 X_1^2 + k^2 X_2^2)$ dir.

$P \neq 0 \rightarrow \lambda \neq \mu(1 \mp \sqrt{2})$, $K \neq 0 \rightarrow \lambda \neq \mu(-1 \mp \sqrt{2})$ olan bütün sınıf cümlelerinin birer cisim olacağı açıktır.

$\lambda = 1, \mu = 0$ için, $\mathfrak{B}(s,i)$ Berki cismi tanımlanır.

<u>TEOREM : 5.48.62</u>

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$, $Z_1 = X_1 i - X_2 s$, $Z_2 = X_2 i + X_1 s \in (C \times S)$

$W_1 = Y_1 i - Y_2 s$, $W_2 = Y_2 i + Y_1 S \in (C \times S)$, $(X_1 i - X_2 s, X_2 i + X_1 S) \in (C \times S$

T) : $(X_1 i - X_2 S, X_2 i + X_2 S)\; T\; (Y_1 i - Y_2 s, Y_2 i + Y_1 S) =$

$((X_1 + Y_1)i - (X_2 + Y_2)S, (X_2 + Y_2)i + (X_1 + Y_1)S)$

$$\left[(X_1 Y_1 - X_2 Y_2)\, i - (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)\, S,\ (X_1 Y_1 - X_2 Y_2) S + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)\, i \right]$$ ile

tanımlanan (C x S) cümlesi bir Berki cismidir.

İsbat :

$((C \times S)^2, T)$ ikilisi tanım nedeni ile bir Abel gurubudur, birleşimli ve değişimlidir, $e = (0,0)$ sıfır elemandır.

($\perp$) işleminin

$$(Z_1, Z_2) \perp (W_1, W_2) = (X_1 i - X_2 s,\ X_2 i + X_1 S) \perp (Y_1 i - Y_2 s,\ Y_2 i + Y_1 s) =$$

$$= 2 \left[(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) i - (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) S,\ (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) i + (X_1 Y_1 - X_2 Y_2) S \right]$$ olduğu gözönüne alındığında, $((C \times S)^2, \perp)$ nin birleşimli ve (T) üzerine dağılımlı ve (ξ) birim elemanının $\xi = (-i/2, -S/2)$ ve $(X_1 i - X_2 S,\ X_2 i + X_1 s)$ elemanının ters elemanının

$$\left(-(X_1 i + X_2 S) / 4 (X_1^2 + X_2^2),\ (X_2 i - X_1 S) / 4 (X_1^2 + X_2^2) \right)$$ olduğu kolayca görülür.

İşlemlerde $si = -is$, $S^2 = 1$, $i^2 = -1$ olduğu gözönünde bulundurulmuştur.

TEOREM : 5.48,63

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$, $Z_1 = X_1 \mathcal{S} - X_2 i$, $Z_2 = X_2 \mathcal{S} + X_1 i \in D \times C$

$W_1 = Y_1 \mathcal{S} - Y_2 i$, $W_2 = Y_2 \mathcal{S} + Y_1 i \in D \times C$, $((X_1 \mathcal{S} - X_2 i,\ X_2 \mathcal{S} + X_1 i) \in (D \times C)^2$ olarak, (T) toplama, ($\perp$) çarpma işlemleri

(T) $(X_1 \mathcal{S} - X_2 i,\ X_2 \mathcal{S} - X_1 i)\ T\ (Y_1 \mathcal{S} - Y_2 i,\ Y_2 \mathcal{S} + Y_1 i) =$

$$\left[(X_1 + Y_1) \mathcal{S} - (X_2 + Y_2) i,\ (X_2 + Y_2) \mathcal{S} + (X_1 + Y_1) i \right]$$

($\perp$) $(Z_1, Z_2) \perp (W_1, W_2) =$

$$\left[(X_1 Y_1 + X_2 Y_2) \mathcal{S} - (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) i,\ (X_1 Y_1 - X_2 Y_2) i + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) \mathcal{S} \right]$$

ile tanımlanan $(D \times C)^2$ cümlesi bir Berki cismi teşkil eder.

İsbat :

Bak : (Teorem : 5.48,62)

§ .1 - SIRALI ÜÇLÜ HALKALAR

TANIM : 1.1 - (SIRALI ÜÇLÜ HALKALAR)

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \in E$ olarak, $X = (X_1, X_2, X_3) \in E^3$, $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) \in E$ elemanları arasında, halka veya cisim oluşturulabilir iç işlemler tanımlanabilirse X, Y.... sıralı üçlü elemanlar cümlesine sıralı üçlü halka veya cisimler denecektir.

TANIM : 1.2 - (SIRALI ÜÇLÜ GEN HALKA)

Sıralı üçlü halkaları tanımlayan iç işlemler, halka niteliğini bozmayan değişebilir bazı parametreler içerdiği takdirde bu halka yapısına sıralı üçlü gen halka denecektir.

Gen halkadan parametrelerin önceden belirlenen değerlerine göre bir dizi halka üretebilecek demektir.

TEOREM : 1.2.1

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \in R$ ve $\alpha, \beta, \gamma \in R$ önceden belirlenen parametreler olarak $(X_1, X_2, X_3) \in R^3$, $(Y_1, Y_2, Y_3) \in R^3$ elemanları arasında toplama (T), çarpma ($\perp$) denilecek iç işlemler :

(T): $(X_1, X_2, X_3) \; T \; (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3 + Y_3) \in R^3$

($\perp$): $(X_1, X_2, X_3) \perp (Y_1, Y_2, Y_3) =$

$$(X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + \gamma X_3 Y_3,\ \beta X_1 Y_3 + Y_3 + X_2 + \beta X_3 Y_1,\ \alpha X_1 Y_1 + X_2 Y_3 + X_3 Y_2) \in R^3$$ ile

tanımlanıyor ise, $(R^3, T, \perp)$ üçlüsü değişimli bir halkadır.

İsbat :

(R^3, T) Abel gurubudur; değişimli birleşimlidir, $(0,0,0)$ etkisiz (sıfır) elemanı olup, her (X_1, X_2, X_3) elemanının $(-X_1, -X_2, -X_3)$ ters elemanı vardır.

$(R^3, \perp)$ ikilisi (T) üzerine dağılımlıdır.

$((X_1, X_2, X_3) \; T \; (Y_1, Y_2, Y_3)) \perp (Z_1, Z_2, Z_3) =$

$((X_1, X_2, X_3) \perp (Z_1, Z_2, Z_3)) \; T \; ((Y_1, Y_2, Y_3) \perp (Z_1, Z_2, Z_3))$ dür. nitekim :

$$(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3 + Y_3) \perp (Z_1, Z_2, Z_3) = \begin{cases} (X_1+Y_1)Z_2 + (X_2+Y_2)Z_1 + \gamma(X_3+Y_3)Z_3, \\ \beta(X_1+Y_1)Z_3 + (X_2+Y_2)Z_2 + \beta(X_3+Y_3)Z_1, \\ \alpha(X_1+Y_1)Z_1 + (X_2+Y_2)Z_3 + (X_3+Y_3)Z_2 \end{cases}$$

veya :

$$(X_1 Z_2 + X_2 Z_1 + \gamma X_3 Z_3) + (Y_1 Z_2 + Y_2 Z_1 + \gamma Y_3 Z_3)$$

$$(\beta X_1 Z_3 + X_2 Z_2 + \beta X_3 Z_1) + (\beta Y_1 Z_3 + Y_2 Z_2 + \beta Y_3 Z_1)$$

$$(\alpha X_1 Z_1 + X_2 Z_3 + X_3 Z_2) + (\alpha Y_1 Z_1 + Y_2 Z_3 + Y_3 Z_2)$$ bunun anlamı ise

(R^3, $\perp$) ikilisi $\beta=\alpha.\gamma$ koşulu ile birleşimlidir. ...
matris elemanı olarak kabulu ile

$$(X_1,X_2,X_3)\perp(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix} X_2 & X_1 & \gamma X_3 \\ \beta X_3 & X_2 & \beta X_1 \\ \alpha X_1 & X_3 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_2 & Y_1 & \gamma Y_3 \\ \beta Y_3 & Y_2 & \beta Y_1 \\ \alpha Y_1 & Y_3 & Y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

değişimliliği gözönünde bulundurularak.

$$((X_1,X_2,X_3)\perp(Y_1,Y_2,Y_3))\perp(Z_1,Z_2,Z_3)=(Z_1,Z_2,Z_3)\perp((X_1,X_2,X_3)\perp(Y_1,Y_2,Y_3))$$

$$\begin{pmatrix} Z_2 & Z_1 & \gamma Z_3 \\ \beta Z_3 & Z_2 & \beta Z_1 \\ \alpha Z_1 & Z_3 & Z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_2 & X_1 & \gamma X_3 \\ \beta X_3 & X_2 & \beta X_1 \\ \alpha X_1 & X_3 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix},$$ diğer taraftan

$$(X_1,X_2,X_3)\perp((Y_1,Y_2,Y_3)\perp(Z_1,Z_2,Z_3))=(X_1,X_2,X_3)\perp((Z_1,Z_2,Z_3)\perp(Y_1,Y_2,Y_3))=$$

$$\begin{pmatrix} X_2 & X_1 & \gamma X_3 \\ \beta X_3 & X_2 & \beta X_1 \\ \alpha X_1 & X_3 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_2 & Z_1 & \gamma Z_3 \\ \beta Z_3 & Z_2 & \beta Z_1 \\ \alpha Z_1 & Z_3 & Z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix},$$ eşitlikleri karşılaştırıldığında, matris çarpımlarının $\beta=\alpha.\gamma$ koşulu ile değişimli olacakları gözönünde bulundurulursa değişimlilik niteliği doğrulanmış olur.

(R^3, T, $\perp$) sıralı üçlü halkanın ($\perp$) işlemine göre etkisiz elemanı $\varepsilon=(0,1,0)$ dır.

$$\begin{vmatrix} X_2 & X_1 & \gamma X_3 \\ \beta X_3 & X_2 & \beta X_1 \\ \alpha X_1 & X_3 & X_2 \end{vmatrix}=X_2^3+\beta(\alpha X_1^3+\gamma X_3^3)-3\beta X_1.X_2.X_3=P\neq 0$$ koşulu ile tüm (X_1, X_2, X_3) sıralı üçlü halka elemanlarının ters elemanı vardır ve (X_1, X_2, X_3) ün (Y_1, Y_2, Y_3) ters elemanı :

$$(Y_1,Y_2,Y_3)=\left[(\gamma X_3^2-X_1X_2)/P,\ (X_2^2-\alpha\gamma X_1X_3)/P,\ (\alpha X_1^2-X_2X_3)/P\right]$$ d

<u>TANIM : 1.3</u> - (MÜGE HALKALARI)*

Teorem. 1.2.1 de verilen, $\beta=\alpha.\gamma$ koşulu ile oluşan R^3 deki GEN HALKA'ya MÜGE halkaları adını vereceğiz.

Müge halkasının bir elemanını göstermek için $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix}$ notasyonunu tercih edeceğiz.

<u>TANIM : 1.4</u> - (ÜÇ BOYUTLU DUAL HALKA)

Teorem 1.2.1 ve Tanım 1.3 de verilen R^3 de gen halkaya da müge halkaları $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\beta=0$ değerleri ile oluşan alt sınıfına

---

(*) kızım MÜGE'ye ithaf

kullanacağız. Bu kabullere göre

$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3$ elemanları için (+) toplama

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1+Y_1 & X_2+Y_2 \\ & X_3+Y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3$$

, (.) çarpma

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 Y_2 + X_2 Y_1 & X_2 Y_2 \\ & X_2 Y_3 + X_3 Y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3$$

olacaktır.

R^3 de $\mathbb{D}_3$ dual halkanın $\forall (X_1, X_2, X_3)$ elemanının, (Y_1, Y_2, Y_3) ters elemanı $(Y_1, Y_2, Y_3) = (-X_1/X_2^2, 1/X_2, -X_3/X_2^2)$ dır. (Teorem 1.2.1.)

$Y_3 = 0$ halinde bilinen dual halka edilir.

<u>TANIM : 1.5</u> - (ÜÇ BOYUTLU DUAL SAYILAR CÜMLESİ)

$X_1, X_2, X_3 \in R$; $\varepsilon, \varepsilon'$; $\varepsilon'^2 = 0$; $\varepsilon^2 = 0$; $\varepsilon.\varepsilon' = 0$ özge çarpanlar olarak, iç işlemlerinde, R nin (+) toplama ve (.) çarpma kurallarının korunduğu $(X_2 + X_1\varepsilon + X_3\varepsilon')$ yapısındaki sayıları üç boyutlu dual sayılar diyeceğiz ve D_3 ile göstereceğiz.

Tanıma göre bu sayıların toplama (+) ve çarpma (.) işlemleri

(+) : $(X_2 + X_1\varepsilon + X_3\varepsilon') + (Y_2 + Y_1\varepsilon + Y_3\varepsilon') =$

$(X_2 + Y_2) + (X_1 + Y_1)\varepsilon + (X_3 + Y_3)\varepsilon' \in D_3$

(.) : $(X_2 + X_1\varepsilon + X_3\varepsilon') \cdot (Y_2 + Y_1\varepsilon + Y_3\varepsilon') =$

$X_2 Y_2 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)\varepsilon + (X_2 Y_3 + X_3 Y_2)\varepsilon'$ olacaktır. $Y_3 = 0$ halinde bilinen dual sayı elde edilir.

<u>TEOREM : 1.5.2</u>

$\mathbb{D}_3$ dual halka ile, D_3 dual sayı cümlesi, (+) toplama ve (.) çarpma işlemlerine göre izomorftur.

<u>İsbat :</u>

$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3 \to (X_2 + X_1\varepsilon + X_3\varepsilon') \in D_3$

$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3 \quad (Y_2 + Y_1\varepsilon + Y_3\varepsilon') \in D_3$ karşılıkları

için, (Teorem 1.4 - 1.5) da verilen iç işlemler uygulandığında

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1+Y_1 & X_2+Y_2 \\ & X_3+Y_3 \end{pmatrix}$$

$$(X_2 + X_1\xi + X_3\xi') + (Y_2 + Y_1\xi + Y_3\xi') = (X_2+Y_2) + (X_1+Y_1)\xi + (X_3+Y_3)\xi'$$

$$\begin{pmatrix} X_1+Y_1 & X_2+Y_2 \\ & X_3+Y_3 \end{pmatrix} \rightarrow (X_2+Y_2) + (X_1+Y_1)\xi + (X_3+Y_3)\xi'$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 Y_2 + X_2 Y_1 & X_2 Y_2 \\ & X_2 Y_3 + X_3 Y_2 \end{pmatrix}$$

$$(X_2 + X_1\xi + X_3\xi') \cdot (Y_2 + Y_1\xi + Y_3\xi') = X_2 Y_2 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)\xi + (X_2 Y_3 + X_3 Y_2)\xi'$$

$$\begin{pmatrix} X_1 Y_2 + X_2 Y_1 & X_2 Y_2 \\ & X_2 Y_3 + X_3 Y_2 \end{pmatrix} \rightarrow [\, X_2 Y_2 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)\xi + (X_2 Y_3 + X_3 Y_2)\xi' \,]$$ bulunur.

<u>TANIM : 1.6 -</u> (ÜÇ BOYUTLU DUAL HALKA SINIFI)

Çarpma işleminde içerdiği parametrelerin değerlerine göre kendisinden bir izi halka türetilen ve parametrelerin belirli bir durumunda da üç boyutlu dual halkayı tanımlayan halkalar dizisine üç boyutlu dual halka sınıfı denecektir.

<u>TEOREM : 1.6.3</u>

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \in R$, $(X_1, X_2, X_3) \in R^3$, $(Y_1, Y_2, Y_3) \in R^3$ ve $\lambda, \mu, \nu \in R$ oeden seçilmiş parametreler olarak $\mu \neq 0$, (+) toplama ve (.) çarpma işlemleri

$$(+): \quad \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1+Y_1 & X_2+Y_2 \\ & X_3+Y_3 \end{pmatrix} \in R^3$$

$$(.): \quad \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X_2 Y_2 + \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) & \mu X_2 Y_2 \\ & \mu(X_2 Y_3 + X_3 Y_2) + \nu X_2 Y_2 \end{pmatrix} \in R^3$$ ile tanımlanan

$R^3(\lambda, \mu, \nu)$ değişimli halkalar ve dual halka sınıfını oluşturur.

<u>İsbat :</u>

(+) , (.) işlemleri ile tanımlanan cümlenin öncelikle halka olduğu ve sonra λ, μ, ν nün özel değerleri için üç boyutlu dual halkayı oluşturduğu saptanacaktır.

$(R^3(\lambda, \mu, \nu), +)$ ikilisinin Abel gurubu, $(R^3(\lambda, \mu, \nu), (.))$ ikilisinin, birleşimli, (+) üzerine dağılımlı olduğu (+), (.) çarpımı veren hipotezden olayca görülebilir.

(+) nın etkisiz (Sıfır) elemanı $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$

(.) nın etkisiz (Birim) elemanı $\varepsilon = (1/\mu^2) \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ & -\nu \end{pmatrix}$ dür. ve $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix}$ ün,

$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix}$ ters elemanı

$$Y_2 = \mu X_2 / \mu^3 X_2^2$$

$Y_3 = -(2\nu X_2 + \mu X_3) / \mu^3 X_2^2$ dir. Bu sınıf $\mathbb{D}_3(\lambda,\mu,\nu)$ ile gösterilecektir.

TANIM : 1.7 (ÜÇ BOYUTLU DUAL SAYI CÜMLELERİ SINIFI)

$X_1, X_2, X_3 \in R$ ve $\lambda,\mu,\nu \in R$, ($\mu \neq 0$) önceden belirlenmiş parametreler ve $\varepsilon, \varepsilon'$; $\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon'^2 = 0$, $\varepsilon.\varepsilon' = 0$ özge çarpanlar olarak R nin (+), (.) işlemlerinin korunduğu

$\mu X_2 + (\mu X_1 + \lambda X_2)\varepsilon + (\mu X_3 + \nu X_1)\varepsilon'$ yapılı sayılara, üç boyutlu dual sayı cümleleri sınıfı denecek ve $D_3(\lambda,\mu,\nu)$ ile gösterilecektir.

$$d = \mu X_2 + (\mu X_1 + \lambda X_2)\varepsilon + (\mu X_3 + \nu X_1)\varepsilon' \in D_3(\lambda,\mu,\nu)$$

$d' = \mu Y_2 + (\mu Y_1 + \lambda Y_2)\varepsilon + (\mu Y_3 + \nu Y_1)\varepsilon' \in D_3(\lambda,\mu,\nu)$ sayıları arasında (+) ve (.) çarpma işlemleri

$$d+d' = \mu(X_2+Y_2) + [\mu(X_1+Y_1) + \lambda(X_2+Y_2)].\varepsilon + [\mu(X_3+Y_3) + \nu(X_1+Y_1)]\varepsilon'$$

$$d.d' = \mu^2 X_2 Y_2 + [2\lambda\mu X_2 Y_2 + \mu^2 (X_2Y_1 + X_1Y_1)]\varepsilon + [2\mu\nu X_2 Y_2 + \mu^2 (X_2Y_3 + X_3Y_2)]\varepsilon'$$

olacaktır.

TEOREM : 1.7.4

$\mathbb{D}_3(\lambda,\mu,\nu)$, $D_3(\lambda,\mu,\nu)$ sınıfları izomorftur.

İsbat :

Bak : (Tanım : 1.7 - Teorem. 1.6.3)

TANIM : 1.8 : (ÜÇ BOYUTLU DUAL VEKTÖR UZAYLARI)

$X_1, X_2, X_3 \in R$ ve λ,μ,ν halka nitelikli başka cümlelerden seçilmiş parametrik elemanlar olarak ($\mu \neq \varepsilon$)

$\mathbb{D}_3(V) = \begin{pmatrix} \mu X_1 - \lambda X_2 & \mu X_2 \\ & \mu X_3 - \nu X_2 \end{pmatrix}$ yapısında (+) toplama ve (.) çarpma işlemleri, üç boyutlu dual halka işlemleri olarak (Tanım 1.6) tanımlanan elemanlar cümlesine üç boyutlu dual vektör uzayları diyeceğiz, ve $\mathbb{D}_3(V)$ ile göstereceğiz

Tanımın cebirsel anlamının tamlığı için $\mathbb{D}_3(V)$ nin bir halka olduğu ve $E \times \mathbb{D}_3(V) \to \mathbb{D}_3(V)$ operasyonunu gerçekleyen bir (E) nin varlığı ve tarifi gerekir.

$\mathbb{D}_3(V)$ nin halka niteliğini tanım ortaya koymaktadır. (+) toplama işlemi için durum açıktır.

$\mathbb{D}_3$ (V) için, dual halka sınıfı (.) çarpma işlemi geçerli gösterilmiştir.

Buna göre

$$\begin{pmatrix} \mu X_1 - \lambda X_2 & \mu X_2 \\ & \mu X_3 - \nu X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu Y_1 - \lambda Y_2 & \mu Y_2 \\ & \mu Y_3 - \nu X_2 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} \mu(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) - \lambda X_2 Y_2 & \mu X_2 Y_2 \\ & \mu(X_2 Y_3 + X_3 Y_2) - \nu X_2 Y_2 \end{pmatrix}$$

dir. Tanımın (+) , (.) işlemlerine göre $\mathbb{D}_3$ (V) bir halkadır.

1) λ, μ, ν ne olursa olsun $\mathbb{D}_3$ (V), E = R veel sayılar cismi üzerinden vektör uzayı oluşturur.

$E \times \mathbb{D}_3 (V) \to \mathbb{D}_3 (V)$

2) $\mu = 1$, $\lambda = i$, $\nu = i$ için

$$\begin{pmatrix} X_1 - i X_2 & X_2 \\ & X_3 - iX_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3 (v,i,1,i)$$ R üzerinden bir vektör uzayıdır. Bunu bir aquaternion C^3 de olarak da tanımlamak mümkündür.

bir aquaternion

3) $\mu = i$, $\lambda = 1$, $\nu = i$ için

$$\begin{pmatrix} i X_1 - X_2 & i X_2 \\ & X_3 - i X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3 (v,1,i,i)$$, R üzerinden bir vektör uzayı oluşturur.

$R \times \mathbb{D}_3 (v,1,i,i) \to \mathbb{D}_3 (v,1,i,i)$. Bunu C^3 de bir aquaternion olarak tanımlamak mümkündür.

4) $\mu = i$, $\lambda = s$, $\nu = s$ için

$$\begin{pmatrix} i X_1 - s X_2 & i X_2 \\ & i X_3 - s X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_3 (v,s,i,s)$$, R üzerinden bir vektör uzayıdır

$R \times \mathbb{D}_3 (v,s,i,s) \to \mathbb{D}_3 (v,s,i,s)$ olur.

Bu örnekleri $\mu^2 \neq 0$, $\mu \neq 0$ olmak koşulu ile çoğaltmak, vektör uzaylarını Berki sayı cümlelerinde de tanımlamak mümkündür.

TANIM : 1,9 : (R^3 DE. DAİRESEL HALKA)

(Tanım 1,3) de, $\beta = \alpha . \gamma$ koşulu ile tanımlanan Müge halka sınıfı içinde $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ değerleri ile oluşan halkaya dairesel halka denecektir.

Tanıma göre bu halkada (+) toplama işlemi ve (.) çarpma - bu özel halka için (0) çarpma notasyonu

$$(+) : \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 & X_2 + Y_2 \\ & X_3 + Y_3 \end{pmatrix}$$

$$(0) : \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 Y_3 + X_1 Y_2 + X_2 Y_1 & X_2 Y_2 + X_1 Y_3 + X_3 Y_1 \\ & X_1 Y_1 + X_2 Y_3 + X_3 Y_2 \end{pmatrix}$$ ~~olacaklar.~~

olacaktır.

TANIM : 1.10 : (R^3 DE ÜÇGEN HALKA)

(Tanım 1.3) de $\beta = \alpha . \gamma$ koşulu ile tanımlanan Müge halka sınıfı içinde $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ değerlerinin oluşturduğu halkaya R^3 de üçgen halka diyeceğiz

Tanıma göre bu halkada (+) toplama işlemi ve (.) çarpma - bu özel halka için (∇) çarpma notasyonu -

$$(+) \quad \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 & X_2 + Y_2 \\ & X_3 + Y_3 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla) \quad \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ & X_3 \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ & Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 Y_2 + X_2 Y_1 & X_2 Y_2 \\ X_1 Y_1 + X_2 Y_3 + X_3 Y_2 & \end{pmatrix}$$ olacaktır.

Üç boyutlu dual halka, dual halka sınıfı ve dual vektör uzaylarında ortaya konan yöntemlerle, benzer teorem ve özellikler, dairesel halka ve üçgen halkalar içinde tesis edilebilir.

Bu bölümde matris tanım ve klasik matris halka iç işlem kurallarının tanımlandığını ve bilindiğini kabul ederek değişik bazı savlar ortaya koymaya çalışacağız.

İsbat ve ifadelerde 2x2, 3x3 boyutlu örneklerde matris içeriğinde a,b,c... alfabetik ifade, nxn boyutlu genellemelerde X_{pk} indisli elemanlar tercih edilecektir.

.1- ÇAPRAZ KURALLI MATRİS HALKALARI

TANIM : 3.1- ÇAPRAZ KURAL - KLASİK KURAL.

Kare matrisler için, matrislerin halka niteliğini koruyan teorem 3.1.2 ve teorem 3.1.3 de yöntemi ve isbatı verilen matris elemanların farklı çarpım kuralına, çapraz kural adı verilecektir. Matrisler için bilinen çarpım işlemine klasik çarpım diyeceğiz.

TEOREM : 3.1.1

$a,b,c,d,a',b',c',d' \in R$ olarak (2x2) kare matris kreasyonu

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ile gösterilen elemanlar cümlesi bilinen klasik toplama (+)

$$+ : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$ ve çarpma (.)

$$(.) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'\bar{+}bc' & ab'\bar{+}bd' \\ ac'\bar{+}dc' & cb'\bar{+}dd' \end{pmatrix}$$ işlemleri üzerinden bir halka oluşturur.

Teoremin ve isbatının bilindiğini kabul etmekteyiz.

TEOREM : 3.1.2

$a,b,c,d,a',b',c',d' \in R$ olarak ayni (2x2) kare matris kreasyonu

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ile gösterilen elemanlar cümlesi, toplama denilecek (+)

$$+ : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$; ve çarpma denilecek (.)

$$(.) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac'\bar{+}ba' & ad'\bar{+}bb' \\ cc'\bar{+}da' & cd'\bar{+}db' \end{pmatrix}$$ işlemleri üzerinden bir halka oluşturur.

İSBAT :

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2$ olarak $(\mathfrak{M}_2, +)$ ikilisi bir abel gurubudur; değişimli birleşimlidir; $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sıfır elemandır. $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ ters elemandır.

$(\mathfrak{M}_2, (.))$ ikilisi birleşimlidir : nitekim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'c''\bar{+}b'a'' & a'd''\bar{+}b'b'' \\ c'c''\bar{+}d'a'' & c'd''\bar{+}d'b'' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a(c'c''\bar{+}d'a'')\bar{+}b(a'c''\bar{+}b'a'') & a(c'd''\bar{+}d'b'')\bar{+}d(a'd''\bar{+}b'b'') \\ c(c'c''\bar{+}d'a'')\bar{+}d(a'c''+b'a'') & c(c'd''\bar{+}d'b'')\bar{+}d(a'd''\bar{+}b'b'') \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac' \mp ba' & ad' \mp bb' \\ cc' \mp da' & cd' \mp db' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (ac' \mp ba')\,c'' \mp (ad' \mp bb')\,a'' & (ac' \mp ba')\,d'' \mp (ad' \mp bb')\,b'' \\ (cc' \mp da')\,c'' \mp (cd' \mp db')\,a'' & (cc' \mp da')\,d'' \mp (cd' \mp db')\,b'' \end{pmatrix}$$

neticeleri karşılaştırıldığında (.) işleminin deşimli olduğu görülür; dağılımlı olduğu daha kolaylıkla saptanabilir.

çarpım işleminin birim elemanı $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dır. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nin

ters elemanı $1/(bc \mp ad)\begin{pmatrix} a & c \\ \multicolumn{2}{c}{\overline{b \mp d}} \end{pmatrix}$ olup $bc \mp ad = 0$ ve $c' = (b/a)\,a'$

$d' = (b/a)\,b'$ koşullarında $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ da olduğu gibi

sıfır böleni elemanlara maliktir.

(2x2), $\mathfrak{M}_2$ matrisleri için verilen teoremi ve isbatlı genelleştireceğiz.

TEOREM : 3.1.3

X_{pk}, $Y_{pk} \in R$ olarak (nxn) matris kreasyonu ile gösterilen

(X_{pk}) $\begin{cases} k = 1,2,\dots n \\ p = 1,2,\dots n \end{cases} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n$ cebirsel elemanlar cümlesi, toplama (+) ve çarpma (.) denilecek işlemler.

$$+: (X_{pk}) + (Y_{pk}) = (X_{pk} + Y_{pk}) \quad \begin{cases} k = 1,2,\dots.n \\ p = 1,2,\dots.n \end{cases}$$

$$(.): (X_{pk}) \cdot (Y_{pk}) = V_{pk} = \sum_{r=1}^{n} X_{pr}\, Y_{(n+1-r)k} \quad \begin{cases} k=1,2\dots.n \\ p=1,2\dots.n \end{cases} \begin{cases} p.\ \text{ci satır} \\ k.\ \text{cı sütun} \end{cases}$$

ile tanımlanıyor ise bir halka oluşturur.

İSBAT :

$(\mathfrak{M}_n, +)$ ikilisinin bir abel gurubu olduğu açıktır. $(\mathfrak{M}_n, (.))$ ikilisinin sadece birleşimli olduğunun doğrulanması yeterli olacaktır.

$$\left((X_{pk})(Y_{pk})\right) \cdot Z_{pk} = (X_{pk})\left((Y_{pk}) \cdot (Z_{pk})\right) \text{ veya } (X_{pk}) \cdot (Y_{pk}) = V_{pk}$$

$(Y_{pk}) \cdot (Z_{pk}) = U_{pk}$ kullanarak

$W = (V_{pk}) \cdot (Z_{pk}) = (X_{pk})\,(U_{pk})$ olduğu saptanacaktır.

W nin p ci satır, S.ci sütun elemanları

$W_{ps} = \sum_{r=1}^{n} V_{kr} \cdot Z_{(n+1-r)s}$ dir, buradan

$$V_{p1} = \sum_{r=1} X_{pr} Y_{(n+1-r)1}, \quad V_{p2} = \sum_{r=1} X_{pr} Y_{(n+1-r)2}, \ldots . V_{pn} = \sum_{r=1} X_{pr} Y_{(n+1-r)n}$$

$$ps = \sum_{r=1}^{n} X_{pr} Y_{n+1-r)1} Z_{ns} + \sum_{r=1}^{n} X_{pr} Y_{(n+1-r)2} Z_{(n-1)s} + \ldots . \sum_{r=1}^{n} X_{pr} Y_{(n+1-r)n} Z_{1S}$$

$$ps = \sum_{r=1}^{n} X_{pr} \sum_{t=1}^{n} Y_{(n+1-r)t} Z_{(n+1-t)s} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} X_{pr} Y_{(n+1-r)t} Z_{n+1)-t)s}$$

Sonucu ile

$U_{ps} = \sum_{r=1}^{n} Y_{pr} Z_{(n+1-r)s}$ den, s.ci sütun elemanları

$$U_{1S} = \sum_{r=1}^{n} Y_{1r} Z_{(n+1-r)s}, \quad U_{2S} = \sum_{r=1}^{n} Y_{2r} Z_{(n+1-r)s}, \ldots . U_{ns} = \sum_{r=1}^{n} Y_{nr} Z_{(n+1-r)}$$

$$ps = \sum_{r=1}^{n} X_{p1} Y_{nr} Z_{(n+1-r)s} + \sum_{r=1}^{n} X_{p2} Y_{(n-1)r} Z_{(n+1-r)s} + \ldots + \sum_{r=1}^{n} X_{pn} Y_{1r} Z_{(n+1-r)}$$

$\sum_{r=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} X_{pt} Y_{(n+1-t)r} Z_{(n+1-r)s}$ karşılaştırıldığında $\sum$, $\sum$ toplamları değişimli olduğundan r, yerine t; t yerine koymak mümkün olduğundan $(V_{pk})(Z_{pk})=(X_{pk})(U_{pk})$ doğrulanmış olur. $\mathfrak{M}_n$ matrisler cümlesine çapraz kurallı matrisler halkası denecektir. Halkanın birim elemanı

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 10 \\ \ldots & & & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Teorem 3.1.1-3.1.2-3.1.3-de, matrisler için klasik çarpım ve çapraz çarpım içeriğinin örneğin (a,b), (a',c') sıralı ikililerin $(a,b) \perp (a',c') = (aa' + bc', ac' + ba')$ çarpımını oluşturan bileşenlerle teşkil edilebildiği gözlenmektedir.

Buna göre genelde 1. BÖLÜM teorem 1.3.1 ile verilen GEN HALKA'nın çarpım işleminin tanımladığı bileşenler ile de matris halkalarının teşkil edilebilmesini mümkün görmekteyiz. Aşağıdaki teorem 3.1.4, 3x3 matrisleri için bu savı ortaya koymaktadır.

TEOREM : 1.3.4

X_k, X_k', X_k'' (k=1,2,3), Y_k, Y_k', Y_k'' (k=1,2,3) $\in R$ olarak, (3x3) matris kreasyonu ile gösterilen

$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3$ cebirsel elemanlar cümlesi, toplama (+); çarpma (.) denilecek iç işlemler :

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_1' & Y_2' & Y_3' \\ Y_1'' & Y_2'' & Y_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1+Y_1 & X_2+Y_2 & X_3+Y_3 \\ X_1'+Y_1' & X_2'+Y_2' & X_3'+Y_3' \\ X_1''+Y_1'' & X_2''+Y_2'' & X_3''+Y_3'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_1' & Y_2' & Y_3' \\ Y_1'' & Y_2'' & Y_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1Y_1+X_2Y_1''+X_3Y_1' & X_1Y_2+X_2Y_2''+X_3Y_1' & X_1Y_3+X_2Y_3''+X_3Y_3' \\ X_1'Y_1+X_2'Y_1''+X_3'Y_1' & X_1'Y_2+X_2'Y_2''+X_3'Y_1' & X_1'Y_3+X_2'Y_3''+X_3'Y_3' \\ X_1''Y_1+X_2''Y_1''+X_3''Y_1' & X_1''Y_2+X_2''Y_2''+X_3''Y_1' & X_1''Y_3+X_2''Y_3''+X_3''Y_3' \end{pmatrix}$$

ile tanımlanıyor ise, bir halka oluşturur.

Teoremin isbatı $\mathfrak{M}_2$ matrislerdeki aritmetik yol ile kolayca yapılabilir. Halkanın birim elemanı

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. GEN HALKANIN sıralı dörtlüler (n=4) için verdiği bileşenler dikkate alınırsa (4x4) matris kreasyonları için $X_1Y_1' + X_2Y_1 + X_3Y_1''' + X_4Y_1''$ işleminin oluşturacağı çarpım işlemi ile $\mathfrak{M}_4$ halkası teşkil edilebilecektir. $\mathfrak{M}_4$ de birim eleman

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

teorem : (2nx2n) matris kreasyonları için genelleştirmek ve isbatın teorem 3.1.3 deki yöntemle elde edilebileceğini söylemekle yetineceğiz.

TEOREM : 1.3.5

$X_{pk}, Y_{pk} \in R$ olarak (2nx2n) matris kreasyonu ile gösterilen

$$\left(X_{pk}\right) \begin{cases} k = 1,2\ldots\ldots 2n \\ p = 1,2\ldots\ldots 2n \end{cases} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots\ldots & X_{1(2n)} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots\ldots & X_{2(2n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{(2n)1} & Y_{(2n)2} & \ldots & X_{(2n)(2n)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}$$

cebirsel elemanlar cümlesi toplama (+) ve çarpma (.) denilecek iç işlemler.

$$(+): \left(X_{pk}\right) + \left(Y_{pk}\right) = \left(X_{pk} + Y_{pk}\right) \begin{cases} k = 1,2\ldots 2n \\ p = 1,2\ldots 2n \end{cases}$$

$$(.): \left(X_{pk}\right) \cdot \left(Y_{pk}\right) = V_{pk} = \sum_{r=1}^{n} \left(X_{p(2r-1)} Y_{2r.k} + X_{p(2r)} Y_{(2r-1)k} \right)$$

ile tanımlanıyor ise bir halka oluşturur.

GEN HALKA'nın çarpım işleminin tanımladığı sıralı (n) li elemanların bileşenleri ile, matris kreasyonu ile gösterilen elemanlar için değişik halka nitelikli cümleler teşkil edilebildiği gözönüne alındığında, GEN HALKA'dan türetilen halka sınıfı sıralı (n) li elemanların bileşenleri ile de matris halka sınıflarının oluşturulabilmesi olanaklı görülmektedir. Aşağıdaki teoremler bu savı kanıtlıyacaktır. Bu teorem ve isbatlarında kolaylık sağlayacağından klasik çarpım ve çapraz çarpım işlem ve notasyonların farklı gösterilmesinde yarar olacaktır.

TANIM : 2.4- KLASİK ÇARPIM VE ÇAPRAZ ÇARPIM NOTASYONLARI

Matrisler için bilinen çarpım işlemi klasik çarpım denecek ve (.) notasyonu ile gösterilecek ve TANIM : 3.1 ve teorem 3.1.3 ve teorem 3.1.4 de verilen çarpımlara çapraz çarpım işlemleri denecek ve sıra ile (O), ($\ast$) notasyonları kullanılacaktır.

TEOREM : 2.4.6

$a,b,c,d,a',b',c',d' \in R$ ve $\lambda,\mu \in R$, $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$ önceden belirlenen parametreler olarak (2x2) matris kreasyonu ile ifade edilen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ elemanlar için toplama (+) ve çarpma (X) denilecek iç işlemler.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(aa'+bc') + \mu(ac' \mp ba') & \lambda(ab'+bd') + \mu(ad' \mp bb') \\ \lambda(ca'+dc') + \mu(cc' \mp da') & \lambda(cb'+dd') + \mu(cd' \mp db') \end{pmatrix}$$

veya ayni şey demek olan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ast \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$ ile tanımlanıyor ise $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\lambda,\mu)$ cümlesi bir halka teşkil eder.

İSBAT :

(.) işleminin birleşimliliği bilinmektedir. ($\ast$) çapraz kural çarpım işleminin birleşimli olduğu teorem 1.3.3 ve 1.3.4 de verilmiş ve kanıtlanmıştır. Biz (.) ve ($\ast$) işlemlerinin kendi aralarında birleşimli olduğunu öncelikle ortaya koyacağız.

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \ast \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \ast \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right)$$ olduğunu doğrulayacağız.

Eşitliğin ilk sol yanı :

$$\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c''(aa'+bc') + a''(ab'+bd') & d''(aa'+bc') + b''(ab' + bd') \\ c''(a'c+dc') + a''(cb'+dd') & d\,(a'c+dc') + b''(cb' + dd') \end{pmatrix}$$

ve eşitliğin ikinci sağ yanı :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'c'' + b'a'' & a'd'' + b'b'' \\ c'c'' + d'a'' & c'd'' + d'b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a'c'' + b'a'') + b(c'c'' + d'a'') & a(a'd'' + b'b'') + b(c'd''+d'b'') \\ c(a'c'' + b'a'') + d(c'c'' + d'a'') & c(a'd''+ b'b'') + d(c'd''+d'b'') \end{pmatrix}$$

her ikisi karşılaştırıldığında (.),(*) işlemlerinin aralarında birleşimli olduğu görülmektedir.

Teoremin isbatında ., * işlemlerinin birleşimliği kullanılacaktır

$(\mathfrak{M}_2(\lambda, \mu), +)$ nin abel gurubu ve (x) işleminin (+) üzerine dağılımının doğrulanmasını kolaylığı açıklığı sebebi ile bir yana bırakarak (x) işleminin birleşimliğini kanıtlayacağız.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = m$, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = m'$, $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = m''$ ile gösterildiğinde

$m \times m' = \lambda\,(m.m') + \mu\,(m * m')$ ve $m' \times m'' = \lambda(m'.m'') + \mu\,(m' * m'')$ dür.

$(m \times m') \times m'' = m \times (m' \times m'')$ olduğu saptanacaktır.

eşitliğin birinci sol yanı ele alınırsa.

$$(m x m')x m'' = \lambda\,(m.m') + \mu\,(m * m') \quad x\, m'' = \left[\lambda(m.m') \times m'' + \mu(m * m') \times m''\right] =$$
$$= \lambda\left[\lambda(m.m') . m'' + \mu(m.m') * m''\right] + \mu\left[\lambda(m * m').m'' + \mu(m * m') * m''\right] \text{ dür.}$$

eşitliğin ikinci sağ yanı ele alındığında

$$m x\,(m' x\, m'') = m \times \left[\lambda(m'. m'') + \mu\,(m' * m'')\right] = \lambda m \times (m'. m'') + \mu\, m x\,(m' * m'') =$$
$$= \lambda\left[\lambda m.\,(m'. m'') + \mu\, m * (m'. m'')\right] + \mu\left[\lambda m.\,(m' * m'') + \mu\, m * (m' * m'')\right]$$

her iki sonuç (.) ve (*) işlemlerinin ayrı ayrı ve (.) ,(*) aralarında birleşimliliği dikkate alınarak karşılaştırıldığında (x) işleminin birleşimliliği doğrulanmış olur.

Halka sınıfının sıfır elemanı $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

birim elemanı $= \left(1/(\lambda^2 \mp \mu^2) \right) \begin{pmatrix} \lambda & \mp\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ dır.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nin ters elemanı $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} =$

$(\lambda^2 \mp \mu^2)^2$ (ad - bc) = P ile gösterildiğinde :

$$a' = \left(\lambda(\lambda d + \mu c) - \mu(\lambda b + \mu a)\right)/P$$
$$b' = \left(-\lambda(\lambda b + \mu a) - \mu(\lambda d + \mu c)\right)/P$$
$$c' = \left(-\lambda(\lambda c - \mu d) + \mu(\lambda a - \mu b)\right)/P$$

$d = (\lambda(\lambda a - \mu b) + \mu(\lambda c - \mu d)) / \ldots$

Bu kez dual halka sınıfı, sıralı ikili eleman bileşenlerinden yararlanarak, bir matris halka sınıfı daha tesis edilip edilemiyeceği düşünülmektedir: Örneğin (a,b) , (a',c') ikili elemanlar için dual halka sınıfı çarpım işleminin $(a,b)\cdot(a',c') = (\mu aa', \lambda aa' + \mu(ac'+ba'))$ olduğu gözönüne alınarak aşağıdaki teoremi ileri süreceğiz.

TEOREM : 2.4.7

$a,b,c,d,a',b',c',d' \in R$ ve $\lambda,\mu \in R$ $(\mu \neq 0)$ önceden belirlenmiş parametreler olarak, matris kreasyonu ile gösterilen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\lambda,\mu)$ cümlelerinde toplama $(+)$, ve çarpma (Δ) denilecek iç işlemler :

$$+ : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\Delta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda aa' + \mu(ac' + ba') & \lambda ab' + \mu(ad' + bb') \\ \lambda ca' + \mu(cc' + da') & \lambda cb' + \mu(cd' + db') \end{pmatrix}$$ ile tanımlanıyor

ise $\mathcal{M}_2(\lambda,\mu)$ cümleleri halka oluştururlar.

İSBAT :

$(\mathcal{M}_2(\lambda,\mu),+)$ ikilisinin abel gurubu olduğu açık, ve Δ nın $(+)$ üzerine dağılımlı olduğunun doğrulanması kolaydır. Biz sadece Δ çarpım işleminin birleşimli olduğunu kanıtlayacak; Δ nın etkisiz (birim) elemanını ve ters elemanını vereceğiz.

Ve Δ nın bu tanımından yararlanarak $(\cdot)$, $\star$, Δ üç çarpım kuralı arasında bir ilişki bulunacaktır.

Δ işlemi birleşimlidir. Yani

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \Delta \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right)$$ olduğu

doğrulanmalıdır. Eşitliğin birinci sol yanı

$$\begin{pmatrix} \lambda aa' + \mu(ac' + ba') & \lambda ab' + \mu(ad' + bb') \\ \lambda ca' + \mu(cc' + da') & \lambda cb' + \mu(cd' + db') \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$ dir. Biz

bu çarpımın yalnızca birinci satır, 1 ci sütun elemanının ifadesini yeterli görüyor ve diğer terimlerin doğrulanmasını okuyucuya bırakıyoruz.

Çarpımın 1 ci satır 1.ci sütun elemanı :

$$\lambda a''[\lambda aa' + \mu(ac' + ba')] + \mu[c''(\lambda aa' + \mu(ac' + ba')) + a''(\lambda ab' + \mu(ad' + bb'))]$$

dür. Eşitliğin ikinci sağ yanı

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} \lambda a a'' + \mu(a' c'' + b a'') & \lambda a b'' + \mu(a d'' + a b'') \\ \lambda c a'' + \mu(c' c'' + d a'') & \lambda c b'' + \mu(c d'' + d b'') \end{pmatrix}$$ dür. ve bu çarpımın

1. ci satır, 1 ci sütun elemanı :

$\lambda a\left[\lambda a' a'' + \mu(a c'' + b' a'')\right] + \mu\left[a(\lambda c' a'' + \mu(c' c'' + d' a'') + b(\lambda a' a'' + \mu(a' c'' + b' a''))\right]$ dır.

Her iki eleman karşılaştırıldığında ayni olduğu görülür.

Δ işleminin etkisiz (birim) elemanı $+\left(1/\mu^2\right)\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

nin $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ters elemanı $P = \mu^2(bc - ad)$ yi göstermek üzere

$a' = -a/P$; $c' = (\lambda a + \mu b)/\mu . P$; $b' = (\lambda a + \mu c)/\mu P$ ve

$d' = -(\lambda(\lambda a + \mu b) + \mu(\lambda c + \mu d))/\mu^2 P$ dir. $\mu \neq 0$ olmak koşulu ile istenildiği gibi (örneğin $\mu/2$) alınabilir.

Ayni şekilde bu çarpım.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b c' + \mu(a c' + b a') & \lambda b d' + \mu(a d' + b b') \\ \lambda d c' + \mu(c c' + d a') & \lambda d d' + \mu(c d' + d b') \end{pmatrix}$$

olarak da ifade edildiğinde $\mathcal{M}_2(\lambda, \mu)$ halka niteliğini korur

birim eleman bu kez $\varepsilon = 1/\mu^2\begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ olur. $\mu \neq 0$ koşulu ile burada da istenildiği gibi (örneğin $\mu/2$) alınabilir.

TEOREM : 2.4.8

(.) klasik matrisler çarpımını, ($*$) teorem 2.4.6 ile verilen çapraz çarpımı, Δ ve Δ' teorem 2.4.7 ile verilen dual çarpımı göstermek üzere.

$$\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta' \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$ dür.

İSBAT :

Teorem 2.4.6 da verilen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a a' + b c') + \mu(b a' + a c') & \lambda(a b' + b d') + \mu(a d' + b b') \\ \lambda(c a' + d c') + \mu(c c' + d a') & \lambda(c b' + d d') + \mu(c d' + d b') \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ tanımı ile; (x) çarpım tanımı

nı veren matrisin iki matris toplamı olarak,

$$\begin{pmatrix} aa'+\mu/_2(ba'+ac') & \lambda ab'+\mu/_2(ad'+bb') \\ ca'+\mu/_2(cc'+da') & \lambda cb'+\mu/_2(cd'+db') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda bc'+\mu/_2(ba'+ac') & \lambda bd'+\mu/_2(ad'+bb') \\ \lambda dd'+\mu/_2(cc'+da') & \lambda dd'+\mu/_2(ad'+bb') \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabileceği gözönünde tutulursa, toplamı teşkil eden matrisler yerine$(\mu/_2)$ için Δ , Δ'nin tanımı olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta' \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$ bulunur.

TEOREM : 2.4.9

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisleri için daimî bir abel gurubu oluşturan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$ toplam tanımı eşliğinde

(2x2) boyutlu matrisler, aşağıda verilen (20) sayıda çarpım kuralları tarifi altında, dağılım ve birleşim niteliklerini gerçekleyen ve birim elemanı haiz halka olma niteliğini sürekli muhafaza ederler.

1.1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$ bilinen klasik kural (pozitiv hal)

1.2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bc' & ab'-bd' \\ ca'-dc' & cb'-dd' \end{pmatrix}$ klasik kural (negativ hal)

2.1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac'+ba' & ad'+bb' \\ cc'+da' & cd'+db' \end{pmatrix}$ çapraz kural (pozitiv hal)

2.2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac'-ba' & ad'-bb' \\ cc'-da' & cd'-db' \end{pmatrix}$ çapraz kural (negativ hal)

1 ve 2 deki kuralların lineer kombunezonları ile :

3) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(aa' \mp bc') \mp \mu(ac' \mp ba') & \lambda(ab' \mp bd') \mp \mu(ad' \mp bb') \\ \lambda(ca' \mp dc') \mp \mu(cc' \mp da') & \lambda(cb' \mp dd') \mp \mu(cd' \mp db') \end{pmatrix}$$

bu kural $\mp$ tercihleri gözönünde tutulduğunde sekiz değişik tanım belirler.

4.1) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda aa' \mp \mu(ac' \mp ba') & \lambda ab' \mp \mu(ad' \mp bb') \\ \lambda ca' \mp \mu(cc' \mp da') & \lambda cb' \mp \mu(cd' \mp db') \end{pmatrix}$$

bu kural da $\mp$ tercihleri gözönüne alındığında dört değişik tanım belirler.

4.2) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Delta' \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda bc' \mp \mu(ac' \mp ba') & \lambda bd' \mp \mu(ad' \mp bb') \\ \lambda dc' \mp \mu(cc' \mp da') & \lambda dd' \mp \mu(ad' \mp bb') \end{pmatrix}$$

bu kural dahi $\mp$ seçenekleri ile dört değişik kural belirler

Teoremin isbatı her hal için, geçmiş teoremlerin isbatları yönünde aritmetik yalınlık ve kolaylık ile gerçeklenebilir.

Daha yüksek boyutlu (3x3), ...v.b matrisler için gen - halka çarpım kurallarının lineer kombinezonları yolu ile, halka niteliğini koruyan çarpım kuralları tanımları ortaya koymak mümkündür. Biz burada v erilen durumların bazılarından elde edilecek sonuçlar üzerinde durmakla yetineceğiz.

3.1) Çarpım kuralları arasında

$\begin{pmatrix} a & b \\ a & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_1(\lambda, \mu)$ olan matris elemanları için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(aa' + bc') + \mu(ac' - ba') & \lambda(ab' + bd') + \mu(ad' - bb') \\ \lambda(ca' + dc') + \mu(cc' - da') & \lambda(cb' + dd') + \mu(cd' - db') \end{pmatrix}$$

tanımı altındaki halkanın $P = (\lambda^2 + \mu^2)^2 (ad - bc)$ olarak

$\mathcal{E}$ birim elemanı $\mathcal{E} = (1/\lambda^2 + \mu^2) \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ters elemanı

$a' = [\lambda(\lambda d + \mu c) - \mu(\mu a + \lambda b)]/P$; $b' = [-\lambda(\lambda a + \mu b) - \mu(\lambda d + \mu c)]/P$

$c = [\lambda(\mu d - \lambda c) + \mu(\lambda a - \mu b)]/P$; $d' = [\lambda(\lambda a - \mu b) + \mu(\lambda c - \mu d)]/P$ dir.

3.2. çarpım kuralları arasında

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\lambda, \mu)$ olan matris elemanları için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(aa' + bc') + \mu(ac' + ba') & \lambda(ab' + bd') + \mu(ad' + bb') \\ \lambda(ca' + dc') + \mu(cc' + da') & \lambda(cb' + dd') + \mu(cd' + db') \end{pmatrix}$$

tanımı altındaki halkanın, $P = (\lambda^2 - \mu^2)^2 (ad - bc)$ olarak

$\mathcal{E}$ birim elemanı $\mathcal{E} = (1/\lambda^2 - \mu^2) \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ters elemanı

$a' = [\lambda(\lambda d + \mu c) + \mu(\lambda b + \mu a)]/P$, $b' = [-\lambda(\lambda b + \mu a) - \mu(\lambda d + \mu c)]/P$

$c' = [-\lambda(\lambda c + \mu d) - \mu(\lambda a + \mu b)]/P$, $d' = [\lambda(\lambda a + \mu b) + \mu(\lambda c + \mu d)]/P$ olur.

Her iki halde $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ veya $\lambda^2 - \mu^2 \neq 0$ gereklidir, bu koşullara $ad - bc \neq 0$ koşulu da eklendiğinde (2x2) matriscisimleri elde edilecektir.

TANIM : 2.5 - QUATERNİON (BİBL. V)

$\lambda = 1$, $\mu = 0$, $a = A + Ci$, $b = B + Di$, $c = -B + Di$, $d = A - Ci$ için yukarıdaki koşulları gerçekleyen matris cismine quaternionlar denir; birim eleman

$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ters elemanı önceki bağıntılara uygun olarak,

$P = A^2+B^2+C^2+D^2$ yi göstermek üzere

$a = (A - Ci)/P$; $b = -(B+Di)/P$; $c = -(-B+Di)/P$ $d = (A + Ci)/P$ olur.

TANIM : 2.6- QUATERNİON SINIFI

3.1. çarpım kuralı üzerinden $\begin{pmatrix} a = \lambda A + \mu B & b = \mu C + \lambda D \\ c = \mu C - \lambda D & d = \lambda A - \mu B \end{pmatrix}$ matrislerinin $(\lambda^2+\mu^2 \neq 0)$, λ, μ nün cisim teşkil edebilir değerleri için oluşturduğu halkalar dizisine quaternion sınıfları denecektir.

cisimlerin birim elemanı $\xi = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \lambda A+\mu B & \mu C + \lambda D \\ \mu C-\lambda D & \lambda A - \mu B \end{pmatrix}$ nin $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ters elemanı $P = (\lambda^2+\mu^2)^2[\lambda^2(A^2+D^2) - \mu^2(B^2+C^2)]$ olarak

$a' = \{\lambda[(\lambda^2-\mu^2)A-2\lambda\mu D] - \mu(\lambda^2+\mu^2)B\}/P$, $b' = \{\mu(\lambda^2+\mu^2)C - \lambda[(\lambda^2-\mu^2)D+2\lambda\mu A]\}/P$

$c' = \{\mu(\lambda^2+\mu^2)C+\lambda[(\lambda^2-\mu^2)D+2\lambda\mu A]\}/P$, $d' = \{\lambda[(\lambda^2-\mu^2)A-2\lambda\mu D] + \mu(\lambda^2+\mu^2)B\}/P$

olacaktır. Örneğin $B = i$ $C = i$ için $\begin{pmatrix} \lambda A+\mu i & \mu i + \lambda D \\ \mu i-\lambda D & \lambda A - \mu i \end{pmatrix}$ matris cisminde, $P = (\lambda^2+\mu^2)^2[\lambda^2(A^2+D^2)+2\mu^2]$ ve ters eleman için

$$a' = \{\lambda[(\lambda^2-\mu^2)A-2\lambda\mu D] - \mu(\lambda^2+\mu^2)i\}/P$$

$$b' = \{\mu(\lambda^2+\mu^2)i - \lambda[(\lambda^2-\mu^2)D+2\lambda\mu A]\}/P$$

$$c' = \{\mu(\lambda^2+\mu^2)i + \lambda[(\lambda^2-\mu^2)D+2\lambda\mu A]\}/P$$

$$d' = \{\lambda[(\lambda^2-\mu^2)A-2\lambda\mu D]+\mu(\lambda^2+\mu^2)i\}/P$$ bulunur. $\lambda, \mu \in R$

olarak A, D parametrelerine göre cisimler dizisi belirlenmiş olur.

(BİB.) BİBLİOGRAFYA

NO	KİTABIN ADI	YAYIN YERİ - YILI	YAZARI
(I)	LİNEER CEBİR	DİYARBAKIR ÜNİV. YAY. Matematik I - 1977	H.HİLMİ HACI SALİHOĞLU A.Ü Fen Fak. Ceb.Geo.KÜRS. Başkanı
(II)	İNTRODUCTİON A L'AL EGBRE-ET L'ANALYSE MODERN	DUNOT - Paris 1963	MARC ZAMANSKY Prof. et Doyen da la fac. des sciences de l' üni. Paris
(III)	KİNAMATİK DERSLERİ	A.ÜNİV. FEN FAK.YAY. um 96, mat 27 . 1963	H.R. MÜLLER A.Ü. Fen Fak MAt. Prof .
(IV)	ANALİZ DERSLERİ	MİL. EĞİT.BAK. YAY. 1945	C.J.DE LA VALLEE POUSSİNE Louvain Üniv. Prof . Çev : Ratip Berker
(V)	LİNEER TRANSFORMAS yonlar	Öğr. Der. Not. 1947	H.L.HAMBURGER A.Ü Fen Fak. Prof Çev : Berki Yurtsever

DOKTORA ADAYI

SADİ BAYDARIN ÖZGEÇMİŞ NOTU

1- 1929 Seydişehir doğumludur.
Evli ve üç Çocukludur.

2- 1950 Fen Fakültesi Matematik bölümü
mezunudur.

3- 1950 - 1968 Aralığında Milli Eğtim Bakanlığı
emrinde ;

- 1950 - 1957 Ankara Atatürk Lisesi, Kars Lisesi, Niğde Lisesi Matematik Öğretmeni, Lise Müdür Yardımcısı

- 1958 - 1961 Kıbrıs Namık Kemal Lisesi Matematik Öğretmeni ve Müdürü

- 1961 - 1965 Konya, Isparta Maarif Müdürü

- 1965 - 1969 T.E.D. Zonguldak Kolej Müdürü

- 1969 - 1976 Türkiye Elektrik Kurumu Teknik Eğitim Müdürü, Teknik Başmüşavir

- 1976 - Emekli ve 1977 - 1978 K.B.İ Eğitim Danışmanı

- 1979 - 1982 Z.D.M.M.A. Öğretim Görevlisi
vazifelerini yapmıştır.

TEŞEKKÜR

İ.D.M.M.A ' ne bağlı Z.D.M.M.A ' sine intisap ettiğimden bir yıl
...ra, abstre cebir , ya da lineer cebir alanında doktora yapmak dileğimi
... 12 . 1980 tarıh ve 12 sayılı kararı ile lütfen kabul eden ,

- İ.D.M.M.A Temel Bilimler Fakültesi Profesörler kurulu üyelerine ,

Doktora hocalığımı , üzerinde ağır akademik yük bulunmasına rağmen
...en kabul edip, tez çalışmamı denetleyen geliştiren

- A.Ü.Fen fakültesi Cebir Geometri Kürsüsü Başkanı Prof.Dr.H.Salihoğluna

Doktora talebimin işlem ve kabul gömesi için içtenlikle çalışıp doktora
...etimimi üstlenene

- İ.D.M.M.A Temel Bilimler Fakültesi Öğretim üyesi Doç . B .Çağal'a

Ve Özellikle, elli yaşımdan sonra akademik ortama geçmekliğimi teşvik
..., tez yapmak duygumu cesaretlendiren Türk Matematik hayatına çok yönlü ve
...lu katkıları bulunan

- A.Ü. Fen Fakültesi Analiz Kürsüsü Başk . Prof. Dr . Berki Yurtsever'e

kalbi teşekkürlerimi saygılarımla arzederim .