

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONLU ÖNŞEKİLDEĞİŞTİRMEYE SAHİP VE ELASTOMER
MALZEMEDEN YAPILMIŞ ÇOK KATLI İÇİ BOŞ SİLİNDİRLERDE
YAYILAN BURULMA DALGALARININ DİSPERSİYONUNA
KATLAR ARASINDAKİ İDEAL OLMAYAN TEMAS
KOŞULLARININ ETKİSİ**

EYYÜP KARAFAKI

DOKTORA TEZİ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Teorisi ve Kontrol Programı

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Tamer KEPÇELER

Ağustos, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONLU ÖNŞEKİLDEĞİŞTİRMEYE SAHİP VE ELASTOMER
MALZEMEDEN YAPILMIŞ ÇOK KATLI İÇİ BOŞ SİLİNDİRLERDE
YAYILAN BURULMA DALGALARININ DİSPERSİYONUNA KATLAR
ARASINDAKİ İDEAL OLMAYAN TEMAS KOŞULLARININ ETKİSİ**

Eyyüp KARAFAKI tarafından hazırlanan tez çalışması 17.08.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Makine Teorisi ve Kontrol Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Tamer KEPÇELER
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Tamer KEPÇELER, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Surkay AKBAROV, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ata MUGAN, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Semih SEZER, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nihal ERATLI, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Tamer KEPÇELER sorumluluğunda tarafımda hazırlanan Sonlu Örnekleştirmeye Sahip ve Elastomer Malzemeden Yapılmış Çok Katlı İçi Boş Silindirlerde Yayılan Burulma Dalgalarının Dispersiyonuna Katlar Arasındaki İdeal Olmayan Temas Koşullarının Etkisi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Eyyüp KARAFAKI

İmza

Aileme

ve

biricik eşime

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim süresince karşılaştığım her problemde kıymetli bilgileri ve tecrübesi ile bana desteğini eksik etmeyen, değerli hocalarım Prof. Dr. Surkay AKBAROV, Dr. Öğr. Üyesi Tamer KEPÇELER ve Mahmut Mert EĞİLMEZ'e şükranlarımı sunarım. Doktora yapmam konusunda beni teşvik eden Birsal DEDEHAYIR ve Hilal Kemal ŞENYILMAZ'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana her konuda destek olan anneme, babama, sevgili eşime, kızım ve oğluma sonsuz teşekkürler.

Eyyüp KARAFAKI

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vi
KISALTMA LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiv
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	6
1.3 Bulgular	7
2 İKİ KATLI BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGA DİSPERSİYONUNA İDEAL OLMAYAN TEMAS KOŞULLARININ ETKİSİ	8
2.1 Problemin Matematik Formülasyonu	8
2.2 Çözüm Yöntemi	13
2.3 Asimtotik İfadenin Çıkarılması	19
2.4 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması	25
3 İÇİ BOŞ ÜÇ KATLI BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGA DİSPERSİYONUNA İDEAL OLMAYAN TEMAS KOŞULLARININ ETKİSİ	32
3.1 Problemin Matematik Formülasyonu	32
3.2 Çözüm Yöntemi	37
3.3 Asimtotik İfadenin Çıkarılması	50
3.4 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması	58
4 SONUÇ VE ÖNERİLER	81
KAYNAKÇA	86
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	92

SİMGE LİSTESİ

ω	Açısal frekans
$\lambda_m^{(k)}$	Birim uzama katsayısı
kR	Boyutsuz dalga sayısı
k	Dalga sayısı
c	Dalga yayılım faz hızı
α_{ij}	Determinant bileşenleri
R	Doğal durumda iç silindir yarıçapı
$Oy_1y_2y_3$	Doğal durumdaki Kartezyen koordinatlar
$Or\theta z$	Doğal durumdaki Lagrange koordinatları
$\varepsilon_{(ij)}$	Green şekil değiştirme tensörü fiziksel bileşenleri
h	İçi dolu iki katlı bileşik silindirde dış silindir et kalınlığı
$h^{(1)}$	İçteki silindirin doğal durumdaki et kalınlığı
$h^{(2)}$	İkinci silindirin doğal durumdaki et kalınlığı
$\rho^{(k)}$	k. malzemenin yoğunluğu
$s_{(ij)}$	Lagrange gerilme tensörü fiziksel bileşenleri
$\mu^{(k)}$	Malzeme sabiti
$\lambda^{(k)}$	Malzeme sabiti
$\omega_{ijj}^{(k)}$	Mekanik sabitler
$J_0(x)$	Sıfırıncı mertebeden birinci tip Bessel Fonksiyonu
$Y_0(x)$	Sıfırıncı mertebeden ikinci tip Bessel Fonksiyonu
$K_0(x)$	Sıfırıncı mertebeden Macdonald Fonksiyonu
$I_0(x)$	Sıfırıncı mertebeden modifiye edilmiş Bessel Fonksiyonu
Φ	Şekil değiştirme enerjisi
$O'r'\theta'z'$	Öngerilmeli durumdaki Lagrange koordinatları
$h^{(3)}$	Üçüncü silindirin doğal durumdaki et kalınlığı
$u_m^{(k),0}$	Yerdeğiştirme vektörü bileşenleri

KISALTMA LİSTESİ

ÖÖÜDEDYT Öngerilmeli Ortamda Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga
Yayılımı Teorisi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	İçi boş bileşik silindir	8
Şekil 2.2	Farklı $h^{(1)} / R$ değerlerinde F parametresinin etkisi.....	26
Şekil 2.3	Farklı $h^{(2)} / R$ değerlerinde F parametresinin etkisi.	27
Şekil 2.4	İçteki silindirin sertleşmesi durumunda F parametresinin etkisi.	28
Şekil 2.5	Dıştaki silindirin sertleşmesi durumunda F parametresinin etkisi. ...	28
Şekil 2.6	Farklı önşekillendirme değerlerinde F parametresinin etkisi $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = 0.1$	29
Şekil 2.7	Farklı önşekillendirme değerlerinde F parametresinin etkisi.	30
Şekil 2.8	Farklı önşekillendirme değerlerinde F parametresinin etkisi.	30
Şekil 2.9	F parametresinin dalga yayılım hızına etkisi.....	31
Şekil 3.1	Üç katlı içi boş bileşik silindir modeli.....	32
Şekil 3.2	Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$, $\lambda_3 = 1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2$).....	60
Şekil 3.3	Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$, $\lambda_3 = 1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 5$).....	61
Şekil 3.4	Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$, $\lambda_3 = 1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 10$).....	61
Şekil 3.5	Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ paramet-resinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$ ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$)	62
Şekil 3.6	İçteki silindirin sert olması ($\mu^{(1)} > (\mu^{(2)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$).....	63
Şekil 3.7	Ortadaki silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$).....	64
Şekil 3.8	Dıştaki silindirin sert olması ($\mu^{(3)} > \mu^{(1)} = \mu^{(2)}$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$).....	64
Şekil 3.9	Silindirlerin sertleşmesi durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$).....	65

- Şekil 3.10** İçteki silindirin et kalınlığı $h^{(1)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$) 66
- Şekil 3.11** Ortadaki silindirin et kalınlığı $h^{(2)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$) 67
- Şekil 3.12** Dıştaki silindirin et kalınlığı $h^{(3)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$) 67
- Şekil 3.13** İçteki silindirin et kalınlığı $h^{(1)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$, $h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)..... 68
- Şekil 3.14** Ortadaki silindirin et kalınlığı $h^{(2)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$, $h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)..... 68
- Şekil 3.15** Dıştaki silindirin et kalınlığı $h^{(3)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$, $h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)..... 69
- Şekil 3.16** Önbasınç halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$) ortadaki silindirin sertleşmesi durumlarında $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)..... 71
- Şekil 3.17** Öngerilme olmadan ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$) ortadaki silindirin sertleşmesi durumlarında $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)..... 71
- Şekil 3.18** Önçekme halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$) ortadaki silindirin sertleşmesi durumlarında $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)..... 72
- Şekil 3.19** Önbasınç halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$) ortadaki silindirin et kalınlığının $h^{(2)} / R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)..... 73
- Şekil 3.20** Öngerilme olmadan $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ortadaki silindirin et kalınlığının $h^{(2)} / R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)..... 74
- Şekil 3.21** Önçekme halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$) ortadaki silindirin et kalınlığının $h^{(2)} / R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)..... 75

- Şekil 3.22** İçteki silindir önbasınç halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = 0.6$) içteki silindirin et kalınlığının $h^{(1)} / R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $\lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)} / \mu^{(2)} = 2.0$) 75
- Şekil 3.23** İçteki silindirde öngerilme olmadan ($\lambda_3^{(1)} = 1$) içteki silindirin et kalınlığının $h^{(1)} / R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $\lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)} / \mu^{(2)} = 2.0$) 76
- Şekil 3.24** İçteki silindir önçekme halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = 1.4$) içteki silindirin et kalınlığının $h^{(1)} / R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $\lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)} / \mu^{(2)} = 2.0$) 77
- Şekil 3.25** Önbasınç $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$ halinde $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$) 78
- Şekil 3.26** Öngerilme olmaması $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ halinde $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$) 78
- Şekil 3.27** Önçekme $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$ halinde $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$) . 79
- Şekil 3.28** Öngerilmeli durumda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$ $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$) ... 79

Sonlu Öñşekildeğıştirmeye Sahip ve Elastomer Malzemedен Yapılmış Çok Katlı İçi Boş Silindirlerde Yayılan Burulma Dalgalarının Dispersiyonuna Katlar Arasındaki İdeal Olmayan Temas Koşullarının Etkisi

Eyyüp KARAFKİ

Makine Mühendisliğı Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tamer KEPÇELER

İmalat sırasında veya termal ve benzeri dış çevresel etkilerle ortaya çıkan öngerilmeler, mühendislik problemlerine dinamik etki etmektedir. Bu etkilerinden dolayı birçok bilimsel araştırmaya konu olmuştur. Sıvı veya gaz halinde akışkan iletimi, enerji ve kimyasal üretim tesisleri gibi endüstrinin birçok alanında kullanılan çok katlı bileşik silindirlerin, öngerilmeye birlikte dinamik yüklere maruz kalmaları da önemli bir inceleme konusu halini almıştır.

Bu inceleme konularının birisi de silindirlerde dalga yayılım hızının hangi parametrelere bağı olduğıdur. Öngerilmeli veya öngerilmesiz durumlar için bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımı ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. Çoğı durumda, tabakalı malzemelerdeki yapışma kalitesinin kontrolü, bu malzemelerdeki akustik dalga yayılma hızının ölçülmesi yoluyla yapılır. Bu ölçüm prosedürleri altında, bağlanan kusurun bu dalgaların dağılımı üzerindeki etkisi ile ilgili ilgili teorik sonuçlar hakkında bilgi sahibi olmak gerekir. Bu çalışmada,

öngerilmeli çok katlı bileşik silindirlerdeki burulma dalga dispersiyonuna, silindirler arasındaki temas koşullarının ideal olmamasının etkisi incelenmiştir.

Problemlerin formülasyonları Parçalı Homojen Cisim Modeli çerçevesinde, öngerilmeli cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÜDEDYT) uygulanarak yapılmıştır. Mekanik ilişkiler Harmonik Potansiyel ile verilmiştir.

Burulma dalga yayılımına silindirler arasındaki temas koşullarının ideal olmamasının etkisi, silindirlerdeki farklı öngerilmeler, geometrik ve mekanik parametreler için incelenmiştir. Sayısal sonuçları elde etmek için ihtiyaç duyulan algoritma ve programlar MATLAB programında hazırlanmıştır. Algoritmaların doğruluğu, literatür ile aynı koşullar altında test edilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar grafiklerle desteklenmiş ve yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dalga dispersiyonu, temas koşulları, hiperelastik

The Influence Of The Imperfect Contact Conditions On The Dispersion Of The Torsional Waves Propagated In The Many Layered Hollow Cylinder Made Of Highly Elastic Materials

Eyyüp KARAFKI

Department of Mechanical Engineering

Phd. Thesis

Advisor: Dr. Tamer KEPÇELER

Initial strains, which may arise during manufacturing process or because of environmental impacts like temperature, have dynamic effects on the engineering problems. It was handled in many research projects in consequence of these effects. Multi-layered compound cylinders which are used in many areas of the industry like power generation, chemical production, transfer of the liquid or gas materials, are exposed to dynamic loadings with initial strains and this has become an important investigation problem to handle too.

One of the aforementioned investigation problems is the parameters of the wave dispersion speed in cylinders. There are many studies about torsional wave dispersions in compound cylinders with or without initial strains. In many cases the control of the adhesion quality in the layered materials is made through measurement of the acoustic wave propagation velocity in these materials. Under these measurement procedures it is necessary to have information on the corresponding theoretical results related to the influence of the bonded imperfection on the dispersion of these waves. In this study it was investigated the

effect of non-ideal contact conditions on the torsional wave dispersion in multi-layered circular cylinders with initial strains.

The formulations of the problems were produced within the framework of the piecewise homogenous body model with the use of the Three-Dimensional Linearized Theory of Elastic Waves in Initially Stressed Bodies (TLTEWISB). The mechanical relations are described through their harmonic potential.

The effect of non-ideal contact conditions between cylinders on torsional wave dispersion are investigated with different initial strains, geometric and mechanical parameters. The algorithms and programs which are needed to obtain numerical results are coded with MATLAB. The accuracy of these algorithms are tested under the same conditions of the relevant studies. The numerical results are shown with graphics and interpreted.

Keywords: Wave propagation, contact conditions, hyperelastic

1.1 Literatür Özeti

Elastisite Teorisinin üzerinde çalıştığı önemli problemlerden biri Dalga Yayılımı konusudur. Elastik ortamlarda dalga yayılımı çalışmalarının başlangıcı olarak, 1821’de Navier’in elastik cisimlerin titreşim ve denge denklemlerini türettiği çalışmalar kabul edilmektedir. 1822’de Cauchy tarafından elastik bir ortamın hareket denklemleri yerdeğiştirmeler cinsinden elde edilerek, gerilme ve şekil değiştirme kavramları ortaya konmuş ve elastisite teorisinin temelleri atılmıştır. 1828’de Poisson, denge denklemlerini gerilme bileşenleri cinsinden elde ederek, elastik dalgaların izotrop bir ortamda yayılımını incelemiş, enine ve boyuna dalgaların varlığını göstermiştir. 1837’de Green tarafından elastisite denklemleri enerjinin korunumu kullanılarak türetilmiştir. 1876’da Pochhammer silindirik bir çubukta dalga yayılımını incelemiş, 1889’da Chree bu sonuçları doğrulamıştır. 1887’de Rayleigh, yüzey dalgalarının homojen izotrop elastik yarım-uzayın serbest yüzünde yayılabileceğini göstermiştir. Bu çalışmaların özetleri [1], [2], [3], [4] ve [5] kaynaklarında bulunmaktadır.

Silindirlerde dalga yayılımı konusunda şimdiye kadar yapılan çalışmaları öngerilmeli ve öngerilmesiz durumlar şeklinde ikiye ayrılarak incelemekte fayda görölmektedir.

Bileşik silindirlerde dalga yayılımı konusunda öngerilmesiz durum için yapılan çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Sonsuz uzunluktaki dairesel silindirlerde dalga yayılımı Pochhammer ve Chree tarafından incelenmiştir ([2], [5]). İçi dolu ve içi boş silindirlerde dispersif olmayan burulma dalgalarının birinci modunun bileşik silindirlerde dispersif hale geldiğinin ifadesi Armenekas [6] tarafından çıkarılmıştır. Üç boyutlu lineer elastisite teorisi çerçevesinde içi boş silindirlerde dalga yayılımı [7] ve [9] boyuna dalgaların bileşik silindirlerde yayılımı [8] makalesinde incelenmiştir.

Kısa dalgaboyu yaklaşımıyla simetrik olmayan dalgalar için analitik olarak bileşik silindirlerde dalga yayılımı [10] ve üç farklı malzemeden oluşan içi boş bileşik silindirdeki dalga yayılımı [11] çalışmalarında mevcuttur.

Bileşik silindirdeki burulma dalgalarının dispersiyon denkleminin üç boyutlu lineer elastisite teorisi çerçevesinde elde edilmesi ve faz hızının birinci mod için fiziksel ve geometrik parametrelere göre değişiminin incelenmesi [12] makalesinde yapılmıştır.

Fiziksel ve geometrik parametrelerin bileşik silindirdeki burulma dalgalarının dispersiyonuna etkileri Haines ve Lee tarafından [13] ve [14] makalelerinde incelenmiştir. Geometrik parametrelere bağlı olarak lineer elastisite teorisi çerçevesinde bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımı [15] ve grup hızı ile enerji akışı problemlerinin de ele alınmasıyla, yaklaşık dalga teorileri çerçevesinde bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımı [16] çalışmalarında incelenmiştir. Sonsuz elastik ortam içindeki silindirde burulma dalgalarının yayılımı Kleczewski ve Parnes [17] tarafından incelenmiştir.

Bileşik silindirdeki burulma dalgalarının yayılımının temas koşullarına bağlı olarak incelenmesi ve [6] ile elde edilen sonuçların doğrulanması Berger [18] tarafından gerçekleştirilmiştir.

Günümüzde mühendislik problemlerinin çözümlerinin araştırılmasında lineer olmayan dinamik etkilerin göz önüne alınması gerekliliği ön plana çıkmıştır. Birçok alanda karşımıza çıkan öngerilmeli/önşekildeğiştirmeli ortamların dinamiği bu tür problemlerdendir.

Öngerilmemiş durumlar için yapılan araştırmalar, lineer elastisite teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Öngerilmeli durumlar dikkate alındığında klasik elastisite teorisi yetersiz kalmaktadır. Problemler incelenirken, öngerilmelerin dalga yayılımından dolayı oluşan gerilmelerden çok büyük olduğu kabul edilmiştir. Bu kabul, lineer olmayan elastodinamik alan denklemlerinin lineerleştirilmesine olanak sağlamıştır. Lineerleştirmede uygulanan birinci yöntem; iki ve üç boyutlu problemlerin Kirchhoff-Love ve Timoshenko teorileri gibi yaklaşık teoriler kullanılarak tek ve iki boyutlu problemlere indirgenmesidir. Diğer yöntem ise; üç

boyutlu doğrusallaştırılmış kesin teoriler kullanmaktır. Öngerilmeli cisimlerin dalga yayılımı incelenirken kullanılan teori, Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖCÜDEDYT) olarak adlandırılmaktadır.

Kompozit malzemeler, elektrik, ultrasonik muayene, deprem ve jeofizik gibi alanlarda önşekildeğiştirmeli (öngerilmeli) cisimlerin dalga yayılımı problemi ilgi odağı olmuştur.

Bileşik silindirlerde dalga yayılımı konusunda öngerilmeli durum için yapılan çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Hayes [19] tarafından Rayleigh yüzey dalgaları öngerilmeli yarı uzayda incelenmiştir. Öngerilmeli dairesel katı silindirde burulma dalga yayılımı Green [20] ve öngerilme altında dalga yayılımının temel özellikleri ve yer çekiminin Rayleigh dalgalarına etkisi Biot [21] çalışmalarında bulunmaktadır. Önburulmalı dairesel silindirde eksenel simetrik dalga yayılımı [22] ve öngerilmeli dairesel homojen silindirlerde boyuna dalga yayılımı [23], [24] ile [25] makalelerinde yer almaktadır.

Önşekildeğiştirmeli cisimlerde yüzeyler arası Stoneley dalgaları [26], [27] ve [28] çalışmalarında incelenmiştir. Sıkıştırılabilir elastik yarı-uzayda öngerilmenin, yüzey dalgalarının yayılımı ve yansıması üzerindeki etkisi [29] ve sıkıştırılamayan malzemelerden yapılmış, önşekildeğiştirmeli sandviç plaklarda Lamb Dalgalarının yayılımı [30] makalelerinde incelenmiştir. Öngerilmeli elastik yarı-uzaylarda yüzey dalgalarının hızı [31] makalesinde hesaplanmıştır. Piezoelektrik malzemelerden oluşan kompozit yapılarda, öngerilmenin dalga yayılımı üzerindeki etkisi [32] ve [33], öngerilmeli viskoelastik ortamda dalga yayılımı [34] ve dairesel olmayan enine kesitli, doğal titreşimli kirişin önburulmasının incelenmesi ise [35] çalışmalarında bulunmaktadır.

Nonlineer elastik dalgalar ve öngerilmeli elastik cisimlerde elastik dalga teorileri [36], [37] ve [38] makalelerinde incelenmiştir. Öngerilmenin küçük olduğu farz edilen, bileşik silindirde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı [39], [40] ve [41] makalelerinde çalışılmıştır.

Sıkıştırılabilir elastik bir ortamdaki dairesel bir silindirde sonlu öñşekildeğıştirmelerin eksenel simetrik dalga dispersiyonuna etkisi [42] makalesinde mevcuttur. Elastik bir ortamdaki dairesel bir silindirde sonlu öñşekildeğıştirmelerin eksenel simetrik dalga dispersiyonuna etkisinin, malzemelerin sıkıştırılamaz olduğu ve bunların gerilme-şekildeğıştirme ilişkilerinin Treloar Potansiyeli ile verildiğı durum için incelenmesi [43] çalışmasında yer almaktadır.

Öñburulmalı iki farklı malzemeden oluşan bileşik silindirlerde eksenel simetrik dalga yayılımının dispersiyon ilişkileri [44] makalesinde incelenmiştir. Tek yönlü öñgerilmeli, iki malzemeli bileşik silindirdeki eksenel simetrik burulma dalga yayılımının, elastik ilişkilerin Murnaghan Potansiyeli ile verilmesi ve öñşekildeğıştirmelerin küçük olduğu kabulüyle incelenmesi [45], [46], [47] çalışmalarında yer almaktadır.

[45], [46], [47] makalelerinde göz önüne alınan problemlerin ideal olmayan temas koşulları altında incelenmesi ise [48] makalesinde ele alınmıştır. [45], [46], [47] makalelerinde yapılan kabuller kullanılarak öñgerilmeli çok katlı bir silindirde burulma dalga yayılımı konusu [49] makalesinde incelenmiştir.

Ayhan ÖZTÜRT tarafından 2007 yılında hazırlanan Doktora Tezi'ne [50] kadar bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımına öñgerilmenin etkisi incelenmemiştir. Öñgerilmelere tekabül eden öñşekildeğıştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla incelenen konuda [45], [46], [47], [48] ve [49] makaleleri yayınlanmıştır.

Öñşekildeğıştirmelerin küçük olduğu durumlar için sadece sert malzemelere yönelik olarak yapılan çalışmalar, Mahmut Mert EĞİLMEZ'in 2013'deki doktora tezi [51] kapsamında yaptığı çalışmalarla hiperelastik (elastomer, polimer vb.) malzemelere de geçerli olacak şekilde genişletilmiştir. Bu çalışmalar sonlu öñşekildeğıştirmeli ve çok katlı bileşik silindirler için ideal temas koşullarında yapılmıştır.

İki katlı içi boş sonlu öñşekildeğıştirmesi olan bileşik silindirdeki burulma dalga yayılımının incelenmesi [52] ve üç katlı içi boş sonlu öñşekildeğıştirmesi olan bileşik silindirdeki burulma dalga yayılımının incelenmesi ise [53] makalelerinde

sunulmuştur. Sonlu önşekildeğiştirmesi olan bileşik silindirdeki burulma dalga yayılımına özgü davranışların incelenmesine [54] çalışmasında yer verilmiştir.

Prof.Dr.Surkay AKBAROV tarafından konuyla ilgili o güne kadar yapılan çalışmalar, uluslararası dergilerde yayınlanmış olan makaleler bir bütün olarak derlenmiş ve 2014 yılında çıkarılan kitapta [55] bilim dünyasında ilgililerin istifadesine sunulmuştur.

Öngerilmemiş ve öngerilmeli başlangıç koşullarında iki katlı bileşik silindirlerde dalga yayılımına temas koşullarının etkisinin incelenmesi konusunda Cengiz İPEK tarafından 2011 yılında Doktora Tezi [56] hazırlanmıştır. Tez çalışmasında özetle aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir;

- Temas koşullarının azalmasıyla birlikte birinci tip eğrinin kaybolduğu, ikinci tip eğrinin de sıkı temas koşulları için bulunan dispersiyon eğrisine yaklaştığı görülmüştür. Bu durum iki katlı bileşik silindirlerde içi boş ve içi dolu durumlarında geçerli olmaktadır.
- Küçük ve büyük dalga sayısı limitlerinin değerlerini temas koşulları değiştirmemektedir.
- Temel modlarla bulunan birinci eğri tipinde dalga yayılım hızı temas koşulu durumu süresizse küçük kalmakta, ikinci eğri tipinde ise büyük kalmaktadır.
- Temas koşullarındaki süresizliğin iki katlı öngerilmeli bileşik silindirin malzemesindeki ön şekildeğiştirmelerin dispersiyon eğrilerinin davranışına nitelik açısından etki etmediği ancak nicelik açısından değiştirdiği görülmüştür.
- İki katlı içi boş bileşik silindirlerde içteki silindirin et kalınlığı artınca, benzer içi dolu bileşik silindir için elde edilen dalga yayılım eğrilerine benzemektedir.
- Temaskoşulları süresizleşirken temel modun birinci ve ikinci tip dalga yayılım eğrileri tam kaymalı dalga yayılım eğrilerine benzemektedir

Konuyla ilgili yapılan çalışmaların detayları [57], [58], [59] ve [60] makalelerinde yer almaktadır.

Bununla birlikte, dalga yayılımına etki eden diğer bir unsur olarak silindir malzemelerinin viskoelastikliklerinin de incelendiği çalışmalar mevcuttur. Viskoelastik malzemedен üretilmiş dairesel içi boş silindirlerde burulma dalga yayılımı konusunda dalga ve sönüm dispersiyonu reolojik parametrelerin değişimine bağlı olarak incelenmiş ve nümerik sonuçlar elde edilerek [61] makalesinde grafiklerle yorumlanmıştır.

Viskoelastik katmanlı dairesel silindirlerde eksenel simetrik boyuna dalgaların dispersiyonu Tarık KOÇAL tarafından Doktora Tezi [62] olarak çalışılmış ve tek katlı ve iki katlı olarak incelenen silindirlerde katman malzemesinin viskoelastisitesinin eksenel simetrik dalga yayılım hızında düşüşe neden olduğu [63], [64], [65], [66] ve [67] çalışmalarında görülmüştür.

1.2 Tezin Amacı

Tezde ideal olmayan temas koşullarının öngerilmeli çok katlı bileşik silindirlerdeki burulma dalga dispersiyonuna etkisi incelenmiştir.

[51] tezindeki ve bu tezden üretilen [52], [53] ve [54] makalelerinde yapılan kabullerle yani, önşekildeğiştirmelerin sonlu olduğu ve elastisite ilişkilerinin harmonik potansiyel ile verildiği durumlar için, Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖCÜDEDYT) uygulanarak; ideal olmayan temas koşullarının etkisi altında öngerilme, geometrik ve mekanik parametrelerin burulma dalga dispersiyonuna etkilerinin tespit edilmesi amaçlanmıştır.

Bu maksatla; dispersiyon denklemleri çıkarılarak çözümlerinde kullanılacak algoritmaların oluşturulması, daha önce yapılan çalışmalarla uyumluluğu kontrol edildikten sonra, ideal olmayan temas koşullarının etkisinin sayısal sonuçlarının elde edilerek grafiklerle yorumlanması yol haritası olarak belirlenmiştir.

1.3 Bulgular

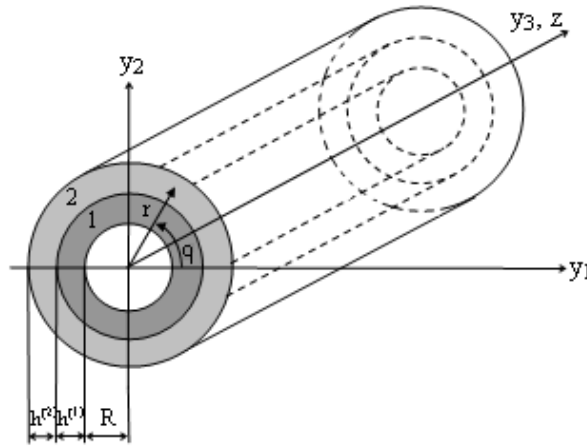
İdeal olmayan temas koşullarının dalga yayılım hızının azalmasına sebep olacağı ve ön gerilmenin, sadece dalga yayılım hızında değil aynı zamanda bu hız üzerinde temas koşullarının ideal olmamasının etkisinin büyüklüğünde de önemli ölçüde rol oynayacağı öngörülmektedir.

İKİ KATLI BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGA DİSPERSİYONUNA İDEAL OLMAYAN TEMAS KOŞULLARININ ETKİSİ

Bu bölümde, öngerilmeli iki katlı içi boş bileşik silindirlerde ideal olmayan temas koşullarının burulma dalga dispersiyonuna etkisi incelenecektir. İçteki silindire ait büyüklükler (1), dıştaki silindire ait büyüklükler (2) ve başlangıç durumu (0) üst indisi ile ifade edilmektedir. İdeal olmayan temas koşullarının etkisini gösteren sonuçlar grafikler halinde verilerek yorumlanmaktadır.

2.1 Problemin Matematik Formülasyonu

İçi boş bileşik silindir modelinde, içteki silindirin et kalınlığı $h^{(1)}$, iç yarıçapı R ve dıştaki silindirin et kalınlığı $h^{(2)}$, iç yarıçapı ise r 'dir.



Şekil 2.1 İçi boş bileşik silindir

Silindirdeki bir noktanın konumu $Oy_1y_2y_3$ Kartezyen koordinat veya $Orqz$ Kartezyen koordinat veya silindirik koordinat sisteminde tanımlanan Lagrange koordinatları ile verilmektedir. Silindirlerin Oy_3 eksenidoğrultusunda sonsuz uzunlukta ve her bileşen için öngerilmelerin eksenel simetrik ve homojen olduğu varsayılmaktadır. Öngerilmeler silindirler birleştirilmeden önce veya sonra oluşmuş olabilir. Bu durumun dalga yayılımına herhangi bir tesiri

bulunmamaktadır. Silindirlerin öngerilmeli durumu Kartezyen koordinatlarda $O'y_1y_2y_3$, Lagrange koordinatlarında ise $O'r'q'z'$ ile ilişkilendirilmektedir. İç ve dış silindirlerdeki öngerilmeler aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$u_m^{(k),0} = (\lambda_m^{(k)} - 1)y_m, \quad \lambda_1^{(k)} = \lambda_2^{(k)} \neq \lambda_3^{(k)}, \quad \lambda_m^{(k)} = \text{const}, \quad m=1,2,3; \quad k=1,2, \quad (2.1)$$

$u_m^{(k),0}$ yer değiştirme vektörü ve $\lambda_m^{(k)}$ ise Oy_m eksenindeki uzamadır. Buradan şu tanımlamayı yapıyoruz:

$$y'_i = \lambda_i^{(k)} y_i \quad r' = \lambda_1^{(k)} r \quad R' = \lambda_1^{(2)} R \quad (2.2)$$

Hareket denklemi:

$$\frac{\partial}{\partial r'} Q'_{r'q}{}^{(k)} + \frac{\partial}{\partial z'} Q'_{qz}{}^{(k)} + \frac{1}{r'} (Q'_{r'q}{}^{(k)} + Q'_{qr'}{}^{(k)}) = \rho'^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u'_q{}^{(k)} \quad (2.3)$$

Elastisite denklemleri:

$$Q'_{r'q}{}^{(k)} = \omega'_{1221}{}^{(k)} \frac{\partial u'_q{}^{(k)}}{\partial r'} - \omega'_{1212}{}^{(k)} \frac{u'_q{}^{(k)}}{r'} \quad (2.4)$$

$$Q'_{q'z'}{}^{(k)} = \omega'_{1331}{}^{(k)} \frac{\partial u'_q{}^{(k)}}{\partial z'}$$

(2.3) ve (2.4)'te $Q'_{r'q}{}^{(k)}$ ve $Q'_{q'z'}{}^{(k)}$ kayma gerilmesi, $u'_q{}^{(k)}$ yer değiştirmedir. ω mekanik sabitleri ise iç ve dış silindirlerin malzemeleri ve öngerilmelerin durumlarına göre belirlenir. $\rho'^{(k)}$ ise k'nci malzemenin yoğunluğudur.

Green şekil değiştirme tensörünün fiziksel bileşenleri ile yer değiştirme vektörü u 'nun fiziksel bileşenleri arasındaki ilişki:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2$$

$$\varepsilon_{qq} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial q} - u_q \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial q} - u_r \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial q} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \\
\varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_q}{\partial r} \frac{\partial u_q}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_{rq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} - \frac{1}{r} u_q + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial q} - u_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial r} \left(\frac{\partial u_q}{\partial q} - u_q \right) + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial q} \right) \\
\varepsilon_{qz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial q} - u_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial z} \left(\frac{\partial u_q}{\partial q} - u_q \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial q} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (2.5)
\end{aligned}$$

(2.1) ve (2.5) kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^{(k),0} &= \varepsilon_{qq}^{(k),0} = \frac{1}{2} \left(\left(\lambda_1^{(k)} \right)^2 - 1 \right) & \varepsilon_{zz}^{(k),0} &= \frac{1}{2} \left(\left(\lambda_3^{(k)} \right)^2 - 1 \right) \\
\varepsilon_{rq}^{(k),0} &= \varepsilon_{rz}^{(k),0} = \varepsilon_{qz}^{(k),0} = 0 \quad (2.6)
\end{aligned}$$

(2.6) ifadesine göre aşağıdaki ilişkiler yazılır:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{rr}^{(k),0}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{qq}^{(k),0}} = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1^{(k)}} \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{zz}^{(k),0}} = \frac{1}{\lambda_3^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \lambda_3^{(k)}} \quad (2.7)$$

Elastik malzemelerin sonlu şekildeğiştirmelerinde Kirchhoff gerilme tensörü kullanılmaktadır. Bu tensörler, şekil değiştirmeden önce ve sonraki gerilme vektörlerinin alanların oranlarına göre hesaplanırlar. Bu yüzden, sonlu elastik şekildeğiştirme teorisinde sınır koşulları ile hareket denklemlerinin belirlenmesinde hacim ve alan ilişkilerini hesaba katmak gerekir. Bu tespitler ışığında çalışmamızda, Kirchhoff ($\tilde{q}$ ile belirtilirse) ve Lagrange ($\tilde{S}$ belirtilirse) gerilme tensörleri üzerinde işlemler yapılacaktır. Ele alınan parçaya şekildeğiştirme halinde etki eden iç kuvvetlerin başlangıç durumundaki benzer alana göre etki şiddetini Kirchhoff ve Lagrange gerilme tensörlerinin bileşenleri belirler. Şekil değiştirme enerjisi potansiyeli $\Phi = \Phi(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{qq}, \dots, \varepsilon_{qz})$ cinsinden gerilme tensörü $\tilde{S}$ 'in, $S_{(ij)}$ fiziksel bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$S_{(ij)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ij)}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ji)}} \right) \Phi \quad (2.8)$$

Silindirlerin elastisite ilişkileri, [50] çalışmasındaki Murnaghan Potansiyeli [68] yerine [51] çalışmasında olduğu gibi harmonik potansiyel ile aşağıdaki şekilde ifade edilir. Şekil değiştirme enerji potansiyeli:

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda (s_1)^2 + \mu s_2 \quad (2.9)$$

$$s_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1} + \sqrt{1+2\varepsilon_2} + \sqrt{1+2\varepsilon_3} - 3$$

$$s_2 = (\sqrt{1+2\varepsilon_1} - 1)^2 + (\sqrt{1+2\varepsilon_2} - 1)^2 + (\sqrt{1+2\varepsilon_3} - 1)^2 \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada λ ve μ malzemeye bağlı sabitlerken ε_i ise Green şekil değiştirme tensörünün asal değerleridir.

(2.9) ve (2.10) eşitliklerini kullanarak başlangıç koşulları için şekil değiştirme enerji potansiyeli aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Phi^{(k),0} = \frac{1}{2} \lambda^{(k)} (2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3)^2 + \mu^{(k)} (2(\lambda_1^{(k)} - 1)^2 + (\lambda_3^{(k)} - 1)^2) \quad (2.11)$$

(2.10) ve (2.11) kullanılarak başlangıç koşulları için gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$S_{zz}^{(k),0} = [\lambda^{(k)} (2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3) + 2\mu^{(k)} (\lambda_3^{(k)} - 1)] (\lambda_3^{(k)})^{-1} \quad (2.12)$$

$$S_{rq}^{(k),0} = S_{rz}^{(k),0} = S_{zq}^{(k),0} = S_{rr}^{(k),0} = S_{qq}^{(k),0} = 0$$

Kirchhoff gerilme tensörü olarak adlandırılan $\tilde{q}$ gerilme tensörü kullanılarak başlangıç koşulları için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\omega_{1221}^{(k)} = \omega_{1212}^{(k)} = \frac{\mu^{(k)}}{\lambda_3^{(k)}}$$

$$\omega_{1331}^{(k)} = \frac{\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)}} \left(2\mu^{(k)} - \lambda^{(k)} (2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3) \right) + \frac{1}{\lambda_3^{(k)}} S_{33}^{(k),0} \quad (2.13)$$

İçi boş bileşik silindirler için burulma dalga yayılımı (2.3), (2.4) ve (2.13) denklemleri kullanılarak araştırılacaktır.

Öncelikle, silindir katmanları arasında süreksiz temas olması durumunu, yani ideal olmayan temas koşullarını göz önüne alarak bir algoritma geliştirmek gerekmektedir. İdeal olmayan temas koşulları durumu katmanların birleşim yerindeki gerilme ve yerdeğiştirmelerin temas eden yüzey hattındaki süreksizliğinden meydana gelmektedir. Bugüne kadar yapılan çalışmalarda, katmanların birleşim yerindeki ideal olmayan temas koşullarının matematiksel ifadesi gerilme ve yerdeğiştirmelerin süreksizliği şeklinde incelenmiştir. Konuyla ilgili yapılan araştırmaların geniş özeti [69] makalesinde bulunmaktadır.

Birleşim yüzeyinin bir bölgesindeki yerdeğiştirme ve kuvvet vektörlerini u^+ ve f^+ ile, diğer bölgesindeki yerdeğiştirme ve kuvvet vektörlerini ise u_- ve f_- ile gösterilirse [70] çalışmasında da üzerinde durulan ideal olmayan temas koşullarının modellenmesi aşağıda yer almaktadır.

$$[f] = Cu^- + Df^- \quad [u] = Gu^- + Ff^- \quad (2.14)$$

Bu formülasyonda; C, D, G ve F (4x4) boyutlu katsayılar matrisleridir ve köşeli parantezler ise geçiş matrisini ifade etmektedir. Yüzey $r = R + h_1$ ise;

$$[u] = u \Big|_{r=R+h_1+0} - u \Big|_{r=R+h_1-0} \quad [f] = f \Big|_{r=R+h_1+0} - f \Big|_{r=R+h_1-0} \quad (2.15)$$

(2.14) formülasyonu ile, farklı özel durumlardaki ideal olmayan temas koşulları C, D, G ve F matrisleri vasıtasıyla araştırılabilmektedir. Özel bir durum olarak [71] makalesinde $C = D = G = 0$ olarak alınmış ve çözüm gerçekleştirilmiştir. (2.14) formülasyonu ile şu sonuca ulaşılır:

$$[f] = 0 \quad [u] = Ff^- \quad (2.16)$$

Bu notasyonda F sabit bir diyagonal matristir. Süreksizlik problemlerinin çözümünde (2.16) formülasyonundaki modelleme farklı özel durumlar için oldukça kolaylık sağlamakta ve pek çok gerçek durum için başarılı sonuçlar elde edilmektedir. Model, [18], [48], [57], [71], [72] ve [73] gibi çalışmalarda da klasik elastodinamik problemlerin çözümünde yer almaktadır. Çalışmalarımızda bu modelleme ve (2.16)'daki denklem, ideal olmayan temas koşullarının matematiksel modellenmesinde gözönüne alınmıştır. İçi boş iki katlı bileşik silindir için (2.16) denklemini kullanılarak sınır koşullarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
t'_{r\theta} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} &= 0 \\
t'_{r\theta} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} &= 0 \\
t'_{r\theta} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} &= t'_{r\theta} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \Rightarrow t'_{r\theta} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - t'_{r\theta} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} &= u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \Rightarrow u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.2 Çözüm Yöntemi

Oz eksenini boyunca harmonik burulma dalga yayılımını düşündüğümüzde, $u_q^{(m)}(r, z, t)$ yerdeğiştirmeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$u_q^{(m)}(r', z', t) = -\frac{\partial}{\partial r'} \psi^{(m)}(r', z', t) \tag{2.18}$$

(2.18) 'deki $\psi^{(m)}$ aşağıdaki denklemi sağlayacaktır:

$$\left[\Delta_1 + (\xi'^{(m)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\rho'}{\omega'_{1221}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi = 0 \tag{2.19}$$

Burada,

$$\Delta'_1 = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \quad \xi_n'^{(m)2} = \frac{2\lambda_3^{(m)3}}{\lambda_2^{(m)2}(\lambda_2^{(m)} + \lambda_3^{(m)})} \tag{2.20}$$

Buna göre:

$$\psi^{(m)}(r', z', t) = \varphi^{(m)}(r') e^{i(\kappa z' - \omega t)} \tag{2.21}$$

olur. Böylece bilinmeyen fonksiyon $\varphi^{(m)}(r')$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left[\frac{d^2}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} - (\xi'^{(m)})^2 \kappa^2 + \frac{\lambda_3^{(m)} \rho'^{(m)} \omega^2}{\mu^{(m)}} \right] \varphi(r') e^{i(\kappa z' - \omega t)} = 0 \quad (2.22)$$

Bu notasyona göre:

$$(s^{(m)})^2 = (\xi'^{(m)})^2 \kappa^2 + \frac{\lambda_3^{(m)} \rho'^{(m)} \omega^2}{\mu^{(m)}} \quad (2.23)$$

(2.22)'nin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} s^{(1)2} > 0 &\Rightarrow \varphi^{(1)}(r') = A^{(1)} J_0(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} Y_0(s^{(1)} \kappa r') \\ s^{(2)2} > 0 &\Rightarrow \varphi^{(2)}(r') = A^{(2)} J_0(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} Y_0(s^{(2)} \kappa r') \\ s^{(1)2} < 0 &\Rightarrow \varphi^{(1)}(r') = A^{(1)} I_0(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} K_0(s^{(1)} \kappa r') \\ s^{(2)2} < 0 &\Rightarrow \varphi^{(2)}(r') = A^{(2)} I_0(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} K_0(s^{(2)} \kappa r') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') \\ u_\theta^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} s^{(1)2} > 0 &\Rightarrow u_\theta^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') = -\left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa J'_0(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y'_0(s^{(1)} \kappa r') \right] \\ &= A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)} \kappa r') \\ s^{(2)2} > 0 &\Rightarrow u_\theta^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') = -\left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J'_0(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y'_0(s^{(2)} \kappa r') \right] \\ &= A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r') \\ s^{(1)2} < 0 &\Rightarrow u_\theta^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') = -\left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa I'_0(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K'_0(s^{(1)} \kappa r') \right] \\ &= -A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_1(s^{(1)} \kappa r') \\ s^{(2)2} < 0 &\Rightarrow u_\theta^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') = -\left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa I'_0(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K'_0(s^{(2)} \kappa r') \right] \\ &= -A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)} \kappa r') \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.4), (2.18), (2.21) ve (2.25) denklemleri kullanılarak, (2.17) sınır koşullarına bağlı olarak aşağıdaki dispersiyon denklemleri yazılabilir:

$$s^2 > 0 \Rightarrow t'_{r0} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = \left\{ \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r'} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r'} \right) \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[A^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 J_1'(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 Y_1'(s^{(1)}\kappa r') \right] - \left[\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa J_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa Y_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$J_1'(x) = \frac{1}{x} (J_1) - J_2$$

$$= \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa J_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa Y_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] - (s^{(1)}\kappa)^2 \left[A^{(1)} J_2(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} Y_2(s^{(1)}\kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)}\kappa)^2 J_2(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{11}} \right\} A^{(1)} - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)}\kappa)^2 Y_2(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{12}} \right\} B^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$s^2 < 0 \Rightarrow t'_{r0} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = \left\{ \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r'} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r'} \right) \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[-A^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 I_1'(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 K_1'(s^{(1)}\kappa r') \right] - \left[-\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa I_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa K_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$I_1'(x) = \frac{1}{x} (I_1) + I_2$$

$$= \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa I_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa K_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] - (s^{(1)}\kappa)^2 \left[A^{(1)} I_2(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} K_2(s^{(1)}\kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)}\kappa)^2 I_2(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{11}} \right\} A^{(1)} - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)}\kappa)^2 K_2(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{12}} \right\} B^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$s^2 > 0 \Rightarrow \mathbf{t}'_{\mathbf{r}0} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \left\{ \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\mathbf{r}'} \right) \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[A^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 J_1'(s^{(2)}\kappa r') + B^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 Y_1'(s^{(2)}\kappa r') \right] - \left[\frac{A^{(2)} s^{(2)}\kappa J_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)}\kappa Y_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$J_1'(x) = \frac{1}{x} (J_1) - J_2$$

$$= \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\frac{A^{(2)} s^{(2)}\kappa J_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)}\kappa Y_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} \right] - (s^{(2)}\kappa)^2 \left[A^{(2)} J_2(s^{(2)}\kappa r') + B^{(2)} Y_2(s^{(2)}\kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$= - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)}\kappa)^2 J_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{23}} \right\} A^{(2)} - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)}\kappa)^2 Y_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{24}} \right\} B^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 < 0 \Rightarrow \mathbf{t}'_{\mathbf{r}0} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \left\{ \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\mathbf{r}'} \right) \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[-A^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 I_1'(s^{(2)}\kappa r') + B^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 K_1'(s^{(2)}\kappa r') \right] - \left[-\frac{A^{(2)} s^{(2)}\kappa I_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)}\kappa K_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$I_1'(x) = \frac{1}{x} (I_1) + I_2$$

$$= - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)}\kappa)^2 I_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{23}} \right\} A^{(2)} - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)}\kappa)^2 K_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{24}} \right\} B^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 > 0 \Rightarrow \mathbf{t}'_{\mathbf{r}0} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \mathbf{t}'_{\mathbf{r}0} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(1)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(1)}}{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$= - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)})^2 J_2(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{31}} \right\} A^{(1)} - \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)})^2 Y_2(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{32}} \right\} B^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} + \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)})^2 J_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{33}} \right\} A^{(2)} + \left\{ \underbrace{\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)})^2 Y_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{34}} \right\} B^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 < 0 \Rightarrow \mathbf{t}'_{r0^{(1)}} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \mathbf{t}'_{r0^{(2)}} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(1)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(1)}}{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\mathbf{r}'} \right) \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$= \left\| \begin{aligned} & - \left\{ \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \underbrace{(s^{(1)})^2}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{31}} I_2(s^{(1)}\kappa r') \right\} A^{(1)} - \left\{ \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \underbrace{(s^{(1)})^2}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{32}} K_2(s^{(1)}\kappa r') \right\} B^{(1)} \\ & + \left\{ \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \underbrace{(s^{(2)})^2}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{33}} I_2(s^{(2)}\kappa r') \right\} A^{(2)} + \left\{ \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \underbrace{(s^{(2)})^2}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{34}} K_2(s^{(2)}\kappa r') \right\} B^{(2)} \end{aligned} \right\|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 > 0 \Rightarrow \mathbf{u}_\theta^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \mathbf{u}_\theta^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)}\kappa r') \right] - \left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)}\kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)}\kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \underbrace{s^{(1)} J_1(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{41}} A^{(1)} + \underbrace{s^{(1)} Y_1(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{42}} B^{(1)} - \underbrace{s^{(2)} J_1(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{43}} A^{(2)} - \underbrace{s^{(2)} Y_1(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{44}} B^{(2)} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

(2.26)

$$s^2 < 0 \Rightarrow \mathbf{u}_\theta^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \mathbf{u}_\theta^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \left[-A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_1(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_1(s^{(1)}\kappa r') \right] - \left[-A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)}\kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)}\kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ -\underbrace{s^{(1)} I_1(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{41}} A^{(1)} + \underbrace{s^{(1)} K_1(s^{(1)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{42}} B^{(1)} + \underbrace{s^{(2)} I_1(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{43}} A^{(2)} - \underbrace{s^{(2)} K_1(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{44}} B^{(2)} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\det \|\alpha_{ij}(c/c_2^{(2)}, kR, h_1, h_2, F, \lambda_m^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^k, \rho^{(k)})\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.27)$$

$$\alpha_{11} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 J_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 I_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{12} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 Y_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 K_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$$

$$\alpha_{23} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa)^2 J_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} > 0 \\ -\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa)^2 I_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{24} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa)^2 Y_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} > 0 \\ -\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa)^2 K_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{31} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)})^2 J_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)})^2 I_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{32} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)})^2 Y_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)})^2 K_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{33} = \begin{cases} \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)})^2 J_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} > 0 \\ \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)})^2 I_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{34} &= \begin{cases} \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)})^2 Y_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} > 0 \\ \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)})^2 K_2(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{41} &= \begin{cases} s^{(1)} J_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} > 0 \\ -s^{(1)} I_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{42} &= \begin{cases} s^{(1)} Y_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} > 0 \\ s^{(1)} K_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{43} &= \begin{cases} -s^{(2)} J_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} > 0 \\ s^{(2)} I_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{44} &= \begin{cases} -s^{(2)} Y_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} > 0 \\ -s^{(2)} K_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)^2} < 0 \end{cases} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

İçi boş bileşik silindirde temas koşullarından bağımsız olarak burulma dalga yayılımı dispersiyon denklemi (2.27) determinantındaki formda elde edilmiştir.

2.3 Asimtotik İfadenin Çıkarılması

Burulma dalgalarının birinci modunun dalga boyunun çok büyük olduğu $kR \rightarrow 0$ durumunda limit değerini veren analitik ifadenin elde edilmesi için, (2.27) determinantı Bessel fonksiyonlarının seri açılımlarından yararlanılarak $kR \rightarrow 0$ koşulu ile seriye açılmalıdır.

$$\alpha_{11} = J_2(s^{(1)} x_1) \quad \alpha_{12} = Y_2(s^{(1)} x_1)$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$$

$$\alpha_{23} = J_2(s^{(2)} x_3) \quad \alpha_{24} = Y_2(s^{(2)} x_3)$$

$$\alpha_{31} = -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)})^2 J_2(s^{(1)} x_2)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{32} &= -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(s^{(1)}\right)^2 Y_2 \left(s^{(1)} x_2\right) & \alpha_{33} &= \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(s^{(2)}\right)^2 J_2 \left(s^{(2)} x_2\right) \\
\alpha_{34} &= \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(s^{(2)}\right)^2 Y_2 \left(s^{(2)} x_2\right) \\
\alpha_{41} &= s^{(1)} J_1 \left(s^{(1)} x_2\right) & \alpha_{42} &= s^{(1)} Y_1 \left(s^{(1)} x_2\right) \\
\alpha_{43} &= -s^{(2)} J_1 \left(s^{(2)} x_2\right) \\
\alpha_{44} &= -s^{(2)} Y_1 \left(s^{(2)} x_2\right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$x_1 = \kappa R = y \quad x_2 = \kappa R^* \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) = y^* \zeta_1 \quad x_3 = \kappa R^* \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R}\right) = y^* \zeta_2$$

Bu denklemi $\kappa R \rightarrow 0$ 'da seriye açmak için, Bessel fonksiyonlarının $x \ll 1$ için aşağıdaki değerlerini;

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\
\Gamma(\nu+1) &= \nu! \\
Y_\nu(x) &\rightarrow -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_0(x) &\rightarrow 1 & J_1(x) &\rightarrow \frac{x}{2} & J_2(x) &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{8} \\
Y_0(x) &\rightarrow \frac{2}{\pi} \ln(x) & Y_1(x) &\rightarrow -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{\pi x} & Y_2(x) &\rightarrow -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^2 = -\frac{4}{\pi x^2}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

(2.29) ifadesinde yerine koyarak lineerleşirsek;

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{(s^{(1)})^2 x_1^2}{8} & \alpha_{12} &= -\frac{4}{\pi (s^{(1)} x_1)^2} \\
\alpha_{13} &= \alpha_{14} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0 \\
\alpha_{23} &= \frac{(s^{(2)} x_3)^2}{8} & \alpha_{24} &= -\frac{4}{\pi (s^{(2)} x_3)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{31} &= -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \frac{(s^{(1)})^4 x_2^2}{8} & \alpha_{32} &= \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \frac{4}{\pi x_2^2} \\
\alpha_{33} &= \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(s^{(2)})^4 x_2^2}{8} & \alpha_{34} &= -\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{4}{\pi x_2^2} \\
\alpha_{41} &= \frac{s^{(1)2} x_2}{2} & \alpha_{42} &= -\frac{2}{\pi x_2} \\
\alpha_{43} &= -\frac{s^{(2)2} x_2}{2} & \alpha_{44} &= \frac{2}{\pi x_2}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

elde edilir.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \\ A^{(2)} \\ B^{(2)} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.32}$$

(2.31), (2.32)'de yerine yazılıp, gerekli dönüşüm ve sadeleştirmeler yapıldığında burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde) aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{c_2^{(1)}} &= \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi_1^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\zeta_2^4 - \zeta_1^4)}{(\zeta_1^4 - 1)} (\xi_1^{(2)})^2}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \frac{c_2^{(1)2}}{c_2^{(2)2}} \frac{(\zeta_2^4 - \zeta_1^4)}{(\zeta_1^4 - 1)}} \right]^{1/2} \\
\frac{c}{c_2^{(1)}} &= \left[\frac{\frac{\mu}{\lambda_3^{(1)}} (\xi_1^{(1)})^2 + \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \alpha (\xi_1^{(2)})^2}{\mu + \mu \alpha RO} \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\alpha = \frac{(\zeta_2^4 - \zeta_1^4)}{(\zeta_1^4 - 1)} \zeta_1 = 1 + \frac{h1}{R} \zeta_2 = 1 + \frac{h1}{R} + \frac{h2}{R} \tag{2.34}$$

$\lambda_3^{(m)}=1$ olduğu durumda;

$$\left(\frac{c}{c_2^{(1)}} \right)^2 = \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \alpha}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \alpha \frac{c_2^{(1)2}}{c_2^{(2)2}}} \quad (2.35)$$

Oztürk ve Akbarov'un [45] çalışmasında yalnızca küçük önşekillendirmeler için elde ettiği dalga yayılım hızı ifadesinin, sonlu önşekillendirmeyi de kapsayacak halde (2.33) ifadesinde geneleştirildiği görülmektedir.

$c/c_2^{(1)}$ 'in $(c_2^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)} / \rho^{(1)}})$ limit değeri $\mu^{(1)} / \mu^{(2)}$ ile azalırken, $\lambda = (\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)})$ ile arttığı (2.33)'de görülmektedir. $kR \rightarrow 0$ düşük dalga sayısı limit değerlerinde, bileşik silindirlerde önçekmenin (önbasınç) dalga limit hızının artmasına (azalmasına) yol açmaktadır. Bilinen fiziksel mekanik öngörülerle uyumlu olarak, $kR \rightarrow \infty$ yüksek dalga sayısı limit değerlerinde;

$$c \rightarrow \min \{c_2^{(1)}(\lambda_3^{(1)}), c_2^{(2)}(\lambda_3^{(2)})\}, kR \rightarrow \infty \quad (2.36)$$

İdeal olmayan temas koşullarını sınır şartlarına uygun olarak yazdığımızda:

$$\begin{aligned} Q'_{rq} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} kR} &= 0 \\ Q'_{rq} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} kR \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R}\right)} &= 0 \\ Q'_{rq} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} kR \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} &= Q'_{rq} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} kR \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} \Rightarrow Q'_{rq} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} kR \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} - Q'_{rq} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} kR \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\ u_q^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} kR \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} - u_q^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} kR \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} &= \frac{RFQ'_{rq}^{(1)}}{\mu_1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$s^2 > 0 \Rightarrow u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r'^{(2)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r'^{(1)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1}$$

$$\left\{ \left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)}$$

$$= \frac{RF}{\mu_1} \left[\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 \{ -A^{(1)} J_2(s^{(1)} \kappa r') - B^{(1)} Y_2(s^{(1)} \kappa r') \} \right]$$

$$\left\{ \left[\underbrace{J_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) J_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{41}} \right] A^{(1)} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} J_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{43}} + \right. \\ \left. \left[\underbrace{Y_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) Y_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right] B^{(1)} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} Y_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{44}} \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 < 0 \Rightarrow u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r'^{(2)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r'^{(1)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1}$$

$$\left\{ \left[-A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left[-A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_1(s^{(1)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)}$$

$$= \frac{RF}{\mu_1} \left[\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 \{ -A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_2(s^{(1)} \kappa r') - B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_2(s^{(1)} \kappa r') \} \right]$$

$$\left\{ \left[\underbrace{-I_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) I_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{41}} \right] A^{(1)} + \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} I_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{43}} + \right. \\ \left. \left[\underbrace{K_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) K_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right] B^{(1)} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} K_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{44}} \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{41} &= \begin{cases} \left[\underbrace{J_1(s^{(1)} \kappa r')} - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) J_2(s^{(1)} \kappa r') \right] , s^{(1)} > 0 \\ \left[\underbrace{-I_1(s^{(1)} \kappa r')} - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) I_2(s^{(1)} \kappa r') \right] , s^{(1)} < 0 \end{cases} \\
\alpha_{42} &= \begin{cases} \left[\underbrace{Y_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) Y_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right] , s^{(1)} > 0 \\ \left[\underbrace{\underbrace{K_1(s^{(1)} \kappa r')}_0 - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) K_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right] , s^{(1)} < 0 \end{cases} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

İdeal olmayan temas koşullarında içi boş bileşik silindirin asimtotik ifadesi ise:

$$\begin{aligned}
\alpha_{41} &= \underbrace{J_1(s^{(1)} x_2)} - \frac{s^{(1)} x_1 F}{\lambda_3^{(1)}} J_2(s^{(1)} x_2) = \frac{s^{(1)} x_2}{2} - \frac{s^{(1)3} x_2^2 x_1 F}{8 \lambda_3^{(1)}} \\
\alpha_{42} &= Y_1(s^{(1)} x_2) - \frac{s^{(1)} x_1 F}{\lambda_3^{(1)}} Y_2(s^{(1)} x_2) = -\frac{4 x_1 F}{\pi s^{(1)} x_2^2 \lambda_3^{(1)}} + \frac{2}{\pi s^{(1)} x_2} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Gerekli dönüşüm ve sadeleştirmeler yapıldığında içinde F bulunan ifade $(\kappa R)^2$ içerdiğinden sadeleşerek burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı $(\kappa R \rightarrow 0$ limitinde) ideal temas koşullarındakinin aynısı olarak (2.33)'deki gibi elde edilir.

Bu durum başlangıç koşullarında temas koşullarının ideal olmamasının (F'in değişiminin) burulma dalgalarının yayılım hızının $\kappa R \rightarrow 0$ 'daki limit değerine etki etmediğini göstermektedir.

Burada F, silindirler arasındaki temas koşullarının ideal olmaması durumunu ifade eden boyutsuz bir parametredir. $F=0$ ideal temas koşulunu, $F>0$ ise ideal olmayan temas koşullarını ifade etmektedir. Bu çalışmada F parametresinin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi incelenecektir.

2.4 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

Burulma dalgalarının yayılımını iki katlı bileşik silindirlerde incelemek için (2.26) dispersiyon denkleminin kR 'ye bağımlı olarak $c/c_2^{(1)}$ 'ye göre çözülmesi gerekmektedir. Burada, kR boyutsuz dalga sayısı ve C ise burulma dalgalarının faz hızını göstermektedir.

(2.26) denkleminin çözülebilmesi (2.28)'de verilen α_{ij} 'lere bağlıdır. α_{ij} ise $c/c_2^{(2)}, kR, h_1, h_2, F, \lambda_m^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^k, \rho^{(k)}$ parametrelerine bağlıdır. Bu problemde parametrelerden kR ve $c/c_2^{(1)}$ haricindekiler önceden verilmektedir.

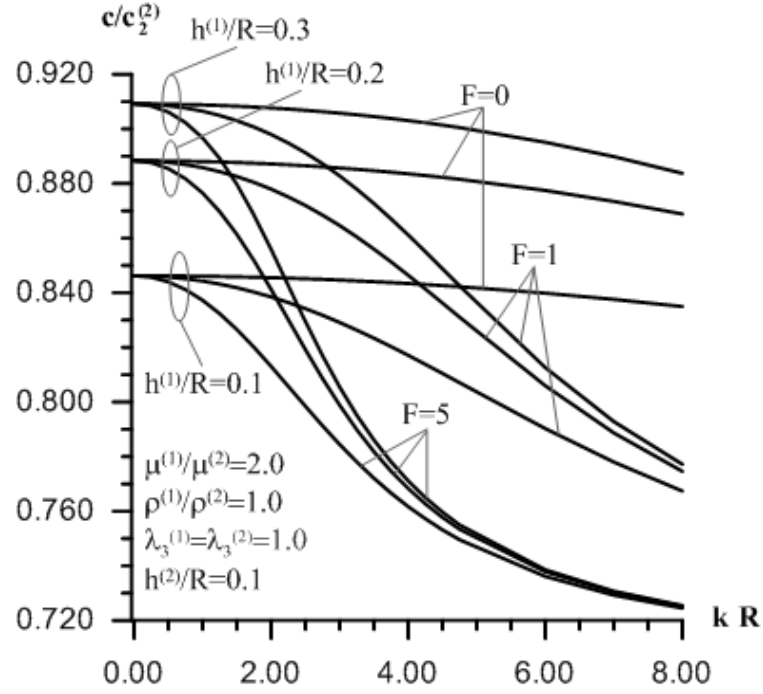
Denklemin çözümü için MATLAB programında hazırlanan algoritmalar kullanılmıştır. kR 'ye başlangıç değeri verilerek, C 'ye sınırdan başlayarak verilen değerlere karşılık gelen determinantın işareti bulunur. C değerleri istenilen miktarlarda artırılarak, ardışık iki değerdeki determinantın işareti farklı ise burada bir kök var diye düşünülür. Yarılama yöntemi kullanılarak belirlenen hassasiyet çerçevesinde kök bulunur. İşlem devam ettirilerek daha büyük kök değerleri bulunur. Böylelikle, kR 'nin her bir değerine tekabül eden $c/c_2^{(1)}$ dalga yayılım hızını elde etmiş oluruz.

kR ve $c/c_2^{(1)}$ değerleriyle oluşturulan grafiklerde, dispersif ve dispersif olmayan dalga eğrileri ortaya çıkmaktadır. Çalışmalarımızda dispersif dalga eğrilerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Problemin çözümü için kullanılan algoritmanın doğruluğu [51] çalışmasında yer alan benzer durumlar için denenerek test edildikten sonra $c/c_2^{(1)}$ ve kR grafikleri elde edilmiş ve yorumlanmıştır. Yapılan çalışmalarda malzeme yoğunlukları eşit $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$ olarak düşünülmüştür.

Öncelikle, katman malzemelerinin sertleşmesi olarak malzemenin uyulanan kuvvete karşı olan rijitliğinin/direngenliğinin kastedildiğinin bilinmesinde fayda vardır. Biz çalışmamızda daha önceki çalışmalarda olduğu gibi bu malzeme karakteristiğinden sertlik olarak bahsedeceğiz.

İki katlı içi boş bileşik silindirlerde temas koşullarını simüle eden F parametresinin etkisi katman malzemelerinin sertlik durumuna, katmanların et kalınlıklarına ve ödeşkildeğıştirme (önçekme/önbasınc) durumuna göre incelenmiştir.



Şekil 2.2 Farklı $h^{(1)} / R$ değerlerinde F parametresinin etkisi.

Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'te içteki silindirin dıştakine göre daha sert olduğu $\mu^{(1)} / \mu^{(2)} = 2$ kabul edilerek, öngerilme olmadığı $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1$ durumda F parametresinin burulma dalga yayılımına et kalınlıkları değışimiyle nasıl etki ettiğı incelenmiştir.

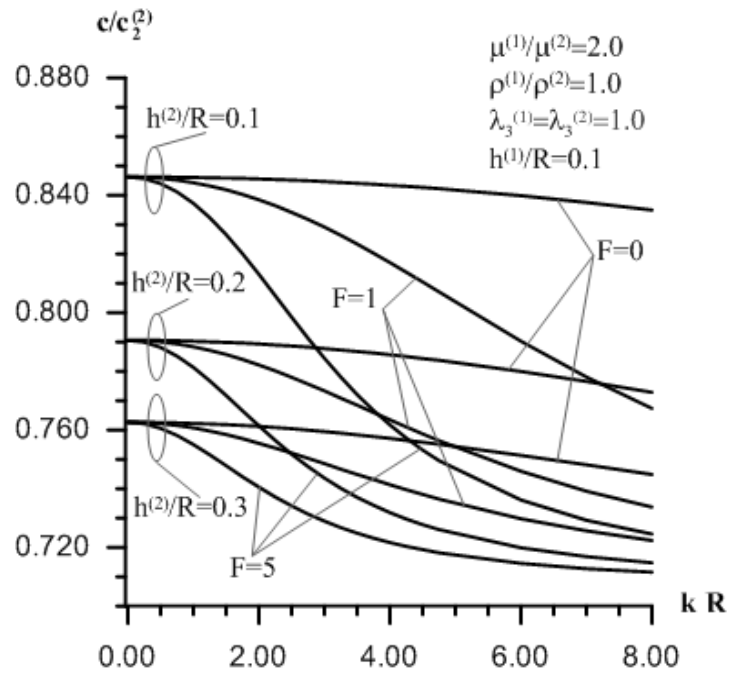
Şekil 2.2'de görüldüğü gibi $h^{(1)} / R$ değeri arttıkça dalga yayılım hızı da artmaktadır. Ancak Şekil 2.3'te ise $h^{(2)} / R$ değeri arttıkça dalga yayılım hızı azalmaktadır.

İki katlı silindirlerde $F = 0$ olduğu durumlar içinburulma dalga yayılımına et kalınlıklarının artışının etkisi ile ilgili bulunan bu sonuçlar [51] çalışmasında elde edilen sonuçlarla birebir örtüşmektedir.

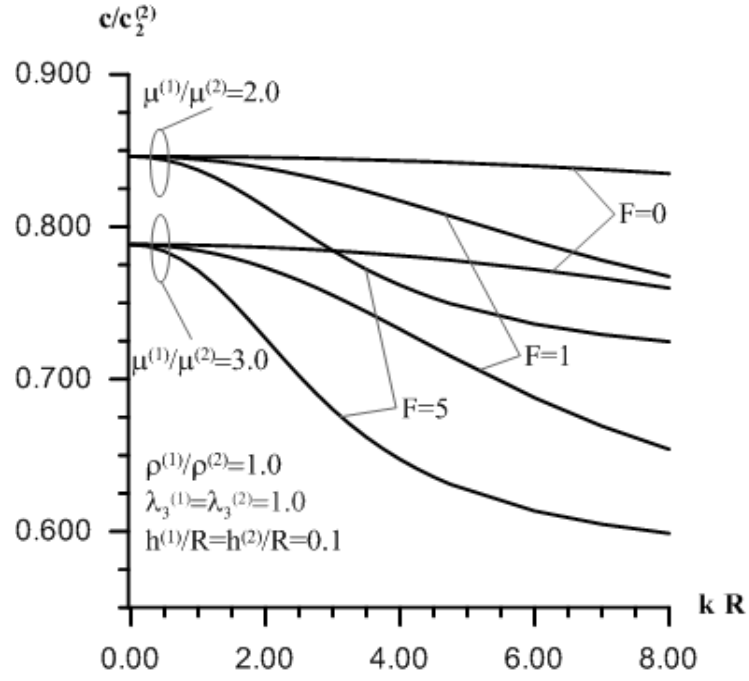
Temas koşullarıyla ilgili duruma bakacak olursak, tasarlanan tüm durumlarda $kR \rightarrow 0$ için dalga yayılım limit hızı aynıdır ve F parametresinden bağımsızdır.

Yüksek dalga sayılarında burulma dalga yayılım hızının limit değeri F parametresinden bağımsızdır. F parametresi arttıkça dalga yayılım hızı doğal olarak azalmaktadır. Ancak $h^{(2)}/R$ 'nin düşük değerlerinde, $h^{(1)}/R$ 'nin ise yüksek değerlerinde F parametresinin etkisinin daha fazla olduğu görülmektedir. Yani temas koşulları kötü ise burulma dalgalarının yayılım hızının daha az etkilenmesi için dıştaki silindirin et kalınlığı artırılmalı ya da içteki silindirin et kalınlığı azaltılmalıdır.

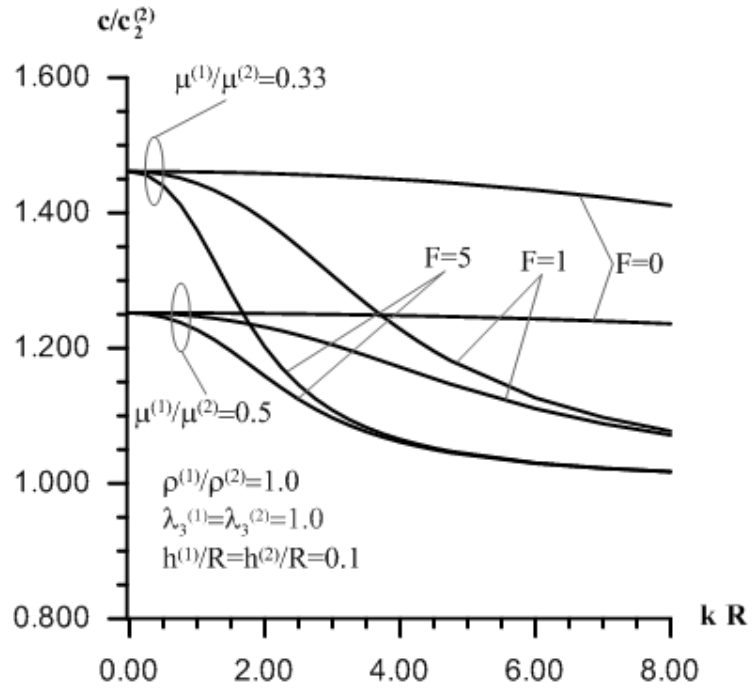
Bununla birlikte F parametresinin etkisinin $h^{(2)}/R$ artışına oranla $h^{(1)}/R$ artışıyla daha belirgin olduğu görülmektedir.



Şekil 2.3 Farklı $h^{(2)}/R$ değerlerinde F parametresinin etkisi.



Şekil 2.4 İçteki silindirin sertleşmesi durumunda F parametresinin etkisi.

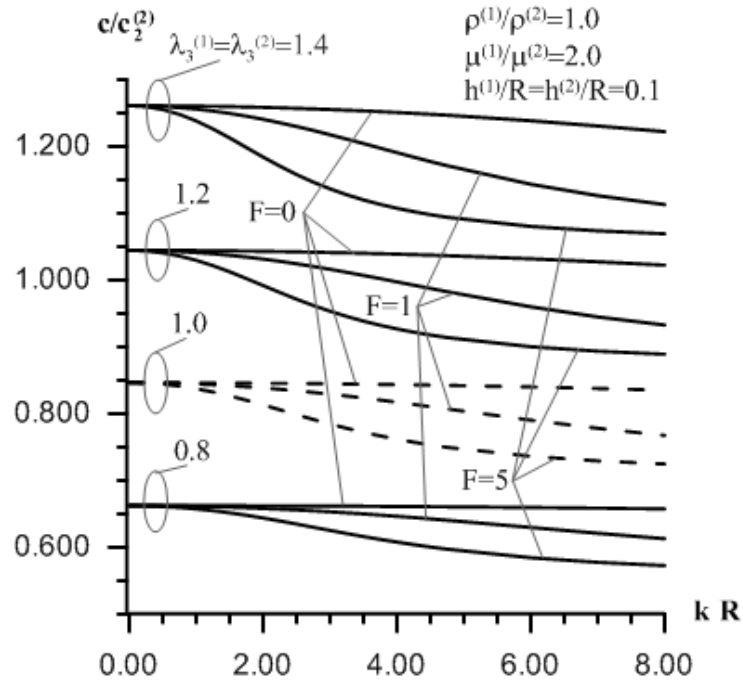


Şekil 2.5 Dıştaki silindirin sertleşmesi durumunda F parametresinin etkisi.

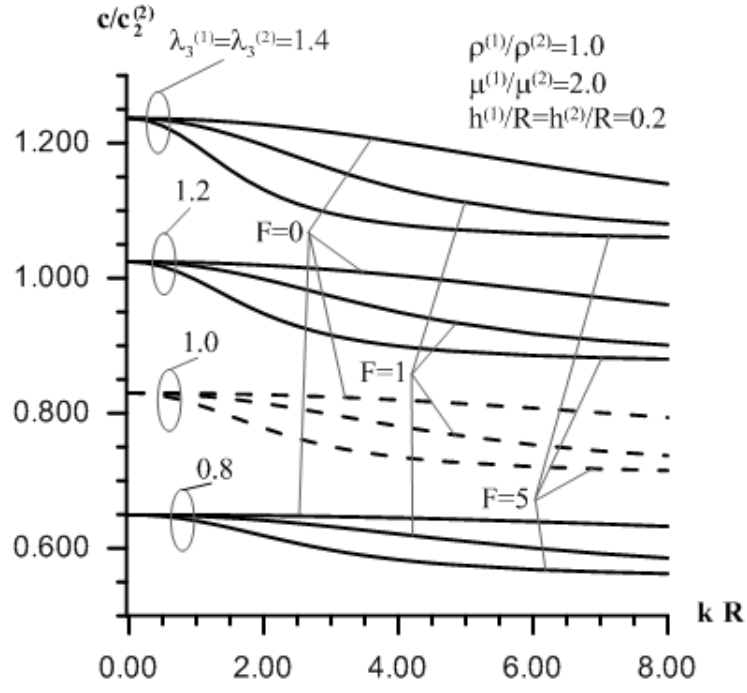
Şekil 2.4 ve Şekil 2.5'te, silindir et kalınlıklarının aynı olduğu $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = 0.1$ ve önşekildeğiştirme olmadığı $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1$ kabul edilerek, silindir malzemelerinin sertlik durumunun F parametresiyle birlikte dispersiyon eğrilerine nasıl etki ettiği araştırılmıştır.

İçteki silindirin sertleşmesiyle dalga yayılım hızı azalır. Dıştaki silindirin sertleşmesiyle dalga yayılım hızı artar. Her iki katmanda da yüksek sertlik değerlerinde temas koşullarını simüle eden F parametresinin artmasıyla dalga yayılım hızının daha fazla azaldığı görülmektedir. F parametresinin ekisinin, içteki silindirin sertleşme artışına oranla dıştaki silindirin sertleşme artışıyla daha belirgin olduğu görülmektedir.

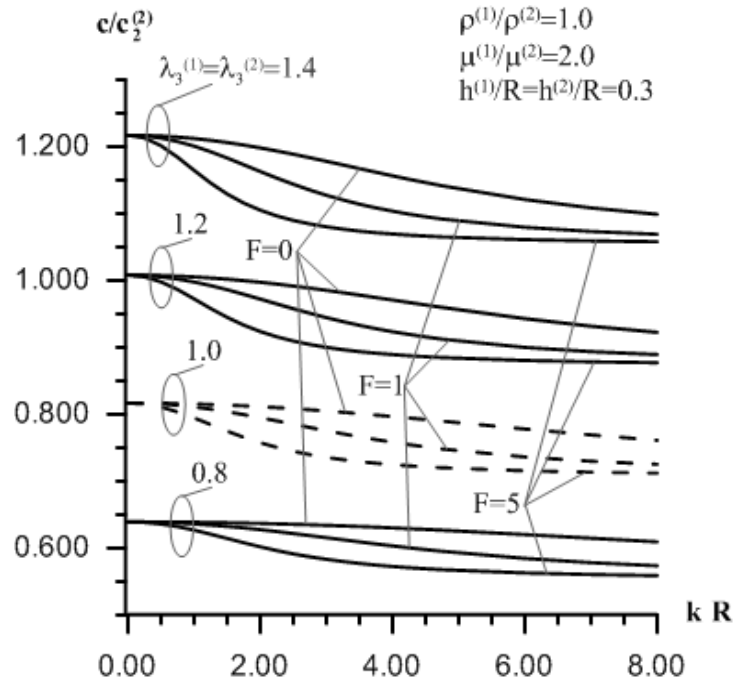
$kR \rightarrow 0$ durumunda dalga yayılımının limit hızı F parametresinden bağımsız olarak aynıdır. F parametresinin etkisi kR artışı ile belirginleşir. Sonuçta dalga yayılım hızı, $kR \rightarrow \infty$ durumunda $\min\{c_R^{(1)}, c_R^{(2)}\}$ değerine yaklaşır ki burada $c_R^{(m)}$ ($m=1,2$) m'inci malzemenin Rayleigh dalga hızıdır.



Şekil 2.6 Farklı önşekillendirme değerlerinde F parametresinin etkisi
 $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = 0.1$



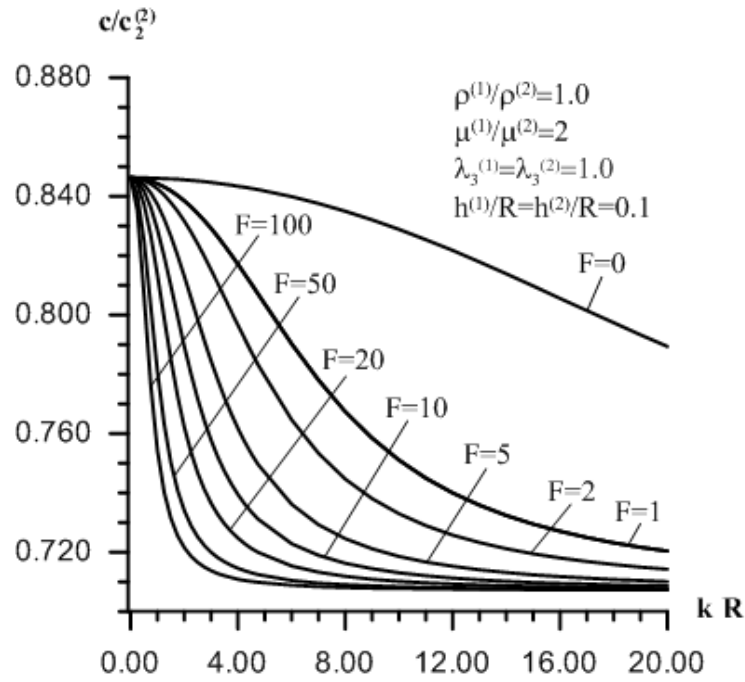
Şekil 2.7 Farklı önşekillendirme değerlerinde F parametresinin etkisi.
 $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.2$



Şekil 2.8 Farklı önşekillendirme değerlerinde F parametresinin etkisi.
 $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.3$

Şekil 2.6, Şekil 2.7 ve Şekil 2.8’de farklı öngerilmeler ve kalınlıklar altında F parametresinin dispersiyon eğrilerine etkisi araştırılmıştır. Öncekme değerlerinin büyümesiyle F parametresinin etkisinin daha belirgin olduğu görülmektedir. Önbasınç durumunda ise F parametresinin etkisi azalmaktadır.

Şekil 2.2 ve Şekil 2.3’ü incelerken $h^{(1)}/R$ değeri arttıkça dalga yayılım hızının arttığını, ancak $h^{(2)}/R$ değeri arttıkça dalga yayılım hızının azaldığını görmüştük. Şekil 2.6, Şekil 2.7 ve Şekil 2.8 birlikte değerlendirildiğinde; her iki silindirin etkalınlıklarının aynı miktarda artırıldığında ise F parametresinin etkisinin azaldığı gözlemlenmiştir. Bu durum bize dıştaki silindirin $h^{(2)}/R$ et kalınlığı artışının daha etkin olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.9 F parametresinin dalga yayılım hızına etkisi.

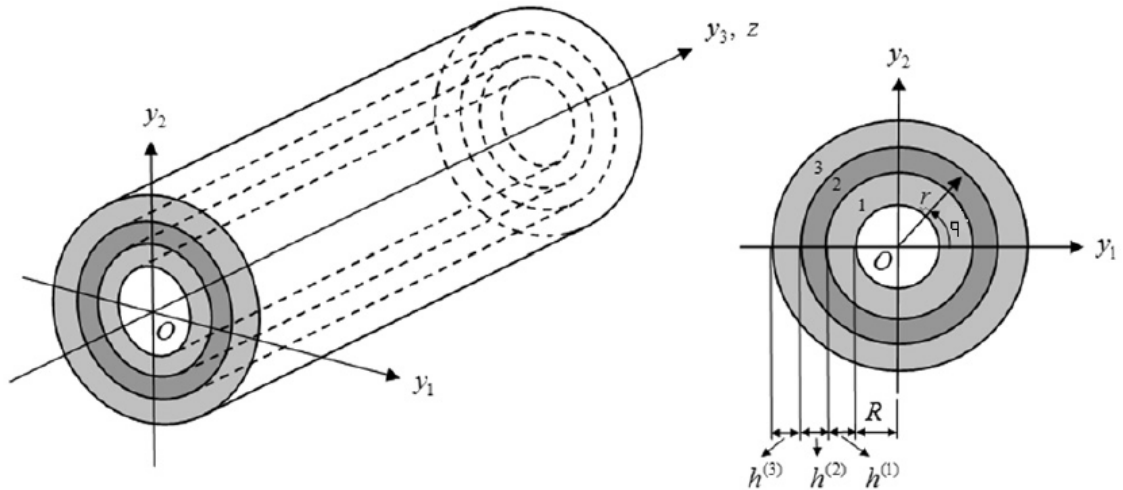
Şekil 2.9’da, temas koşullarının ideal olmamasının dalga yayılım hızını bariz bir şekilde düşürdüğü görülmektedir. Ancak F’in değişimi burulma dalgalarının yayılım hızının $kR \rightarrow 0$ ’daki ve $kR \rightarrow \infty$ limit değerlerine etki etmemektedir. Benzer sonuçlar [18] ve [48] çalışmalarında da yer almaktadır.

İÇİ BOŞ ÜÇ KATLI BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE BURULMA DALGA DİSPERSİYONUNA İDEAL OLMAYAN TEMAS KOŞULLARININ ETKİSİ

Elastikiyeti yüksek malzemeden yapılmış öngerilmeli içi boş üç katlı bileşik silindirde burulma dalga yayılımına ideal olmayan bağlanmanın etkisi araştırılacaktır. Araştırmalar Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi kullanılarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yürütülmektedir. Silindir malzemesinin mekanik ilişkileri harmonik potansiyel ile tanımlanmıştır. Öngerilme ile ideal olmayan sınır şartlarının dalga yayılım hızına etkisinin sayısal sonuçları sunulmuş ve tartışılmıştır.

3.1 Problemin Matematik Formülasyonu

İçi boş, iç yarıçapı R ve et kalınlığı $h^{(1)}$ olan bir silindir üzerine yerleştirilmiş, et kalınlığı $h^{(2)}$ olan bir silindir ve onun üzerinde de et kalınlığı $h^{(3)}$ olan bir silindirden oluşmaktadır.



Şekil 3.1 Üç katlı içi boş bileşik silindir modeli.

Silindirlerdeki öngerilmeler aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$u_r^{(k),0} = (\lambda_1^{(k)} - 1)r \quad u_q^{(k),0} = 0 \quad u_z^{(k),0} = (\lambda_3^{(k)} - 1)z \quad \lambda_1^{(k)} \neq \lambda_3^{(k)} \quad k=1,2,3 \quad (3.1)$$

$u_{r,z}^{(k),0}$ yer değiştirme ve $\lambda_{1,3}^{(k)}$ ise radyal ve eksenel uzamayı göstermektedir.

Aşağıdaki tanımlamayı yapıyoruz:

$$z' = \lambda_3^{(k)} z \quad r' = \lambda_1^{(k)} r \quad R' = \lambda_1^{(1)} R$$

$$k=1 \text{ için } R \leq r \leq R+h^{(1)}$$

$$k=2 \text{ için } R+h^{(1)} < r \leq R+h^{(1)}+h^{(2)} \quad (3.2)$$

$$k=3 \text{ için } R+h^{(1)}+h^{(2)} < r \leq R+h^{(1)}+h^{(2)}+h^{(3)}$$

Silindirlerin öngerilmeli koşulları koordinat sisteminde $O'r'q'z'$ ile verilmektedir.

Bu çerçevede, $O'z'$ eksenini boyunca simetrik burulma dalga yayılımını aşağıdaki denklemler aracılığıyla inceleyeceğiz.

Hareket denklemi:

$$\frac{\partial}{\partial r'} Q'_{r'q}{}^{(k)} + \frac{\partial}{\partial z'} Q'_{zq}{}^{(k)} + \frac{1}{r'} (Q'_{r'q}{}^{(k)} + Q'_{qr'}{}^{(k)}) = \rho'^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u'_{q}{}^{(k)} \quad (3.3)$$

Elastisite ilişkileri:

$$Q'_{r'q}{}^{(k)} = \omega'_{1221}{}^{(k)} \frac{\partial u'_{q}{}^{(k)}}{\partial r'} - \omega'_{1212}{}^{(k)} \frac{u'_{q}{}^{(k)}}{r'} \quad Q'_{z'q'}{}^{(k)} = \omega'_{1331}{}^{(k)} \frac{\partial u'_{q}{}^{(k)}}{\partial z'}$$

$$Q'_{qr'}{}^{(k)} = \omega'_{2121}{}^{(k)} \frac{\partial u'_{q}{}^{(k)}}{\partial r'} - \omega'_{2112}{}^{(k)} \frac{u'_{q}{}^{(k)}}{r'} \quad (3.4)$$

(3.3) ve (3.4) denklemlerindeki $Q'_{r'q}{}^{(k)}$, $Q'_{z'q'}{}^{(k)}$ ve $Q'_{qr'}{}^{(k)}$ Kirchhoff gerilme tensörleri bileşenlerinin pertürbasyonlarıdır. $u'_{q}{}^{(k)}$ yerdeğiştirme vektörü bileşeninin pertürbasyonudur. ω 'lar öngerilme durumu ile silindir malzemelerinin mekanik denklemlerinden gelen sabitlerdir. $\rho'^{(k)}$ malzeme yoğunluğudur.

Silindirik koordinat sisteminde, yerdeğiştirme vektörü u ile Green şekil değiştirme tensörü:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \\
\varepsilon_{qq} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial q} - u_q \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial q} - u_r \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial q} \right)^2 \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \\
\varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_q}{\partial r} \frac{\partial u_q}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_{rq} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} - \frac{1}{r} u_q + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial q} - u_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial r} \left(\frac{\partial u_q}{\partial q} - u_q \right) + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial q} \right) \\
\varepsilon_{qz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial q} + \frac{\partial u_q}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial q} - u_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial z} \left(\frac{\partial u_q}{\partial q} - u_q \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial q} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

(3.1) ve (3.5) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki ön şekildeğiştirmeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^{(k),0} = \varepsilon_{qq}^{(k),0} &= \frac{1}{2} \left(\left(\lambda_1^{(k)} \right)^2 - 1 \right) \quad \varepsilon_{zz}^{(k),0} = \frac{1}{2} \left(\left(\lambda_3^{(k)} \right)^2 - 1 \right) \\
\varepsilon_{rq}^{(k),0} = \varepsilon_{rz}^{(k),0} = \varepsilon_{qz}^{(k),0} &= 0 \quad (3.6)
\end{aligned}$$

(3.6) ifadesine göre, aşağıdaki ilişki yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{rr}^{(k),0}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{qq}^{(k),0}} = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1^{(k)}}, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{zz}^{(k),0}} = \frac{1}{\lambda_3^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \lambda_3^{(k)}} \quad (3.7)$$

Gerilme tensörü $\tilde{\sigma}$ 'in fiziksel bileşeni olan $S_{(ij)}$ 'ler aşağıdaki ifade yardımıyla, şekildeğiştirme enerji potansiyeli $\Phi = \Phi(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{qq}, \dots, \varepsilon_{qz})$ ile tanımlanır:

$$S_{(ij)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ij)}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ji)}} \right) \Phi \quad (3.8)$$

Silindirlerin elastisite ilişkileri [74]'te olduğu gibi harmonik potansiyel ile ifade edilmektedir.

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda (s_1)^2 + \mu s_2 \quad (3.9)$$

$$s_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1} + \sqrt{1+2\varepsilon_2} + \sqrt{1+2\varepsilon_3} - 3$$

$$s_2 = \left(\sqrt{1+2\varepsilon_1} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{1+2\varepsilon_2} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{1+2\varepsilon_3} - 1 \right)^2 \quad (3.10)$$

(3.8), (3.9) ve (3.10) ifadelerinde, λ ve μ malzeme sabitleridir. ε_i ise Green şekil değiştirme tensörünün asıl değerleridir.

(3.9) ve (3.10) ifadeleri kullanılarak başlangıç durumu için şekildeğiştirme enerji potansiyelini aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\Phi^{(k),0} = \frac{1}{2} \lambda^{(k)} \left(2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3 \right)^2 + \mu^{(k)} \left(2 \left(\lambda_1^{(k)} - 1 \right)^2 + \left(\lambda_3^{(k)} - 1 \right)^2 \right) \quad (3.11)$$

(3.10) ve (3.11) ifadelerini kullanarak, başlangıç durumu için gerilmeleri aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$S_{zz}^{(k),0} = \left[\lambda^{(k)} \left(2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3 \right) + 2\mu^{(k)} \left(\lambda_3^{(k)} - 1 \right) \right] \left(\lambda_3^{(k)} \right)^{-1}$$

$$S_{rq}^{(k),0} = S_{rz}^{(k),0} = S_{zq}^{(k),0} = S_{rr}^{(k),0} = S_{qq}^{(k),0} = 0 \quad (3.12)$$

Gerilme tensörü $\tilde{q}$ Kirchhoff gerilme tensörü olarak ifade edilir. başlangıç durumu için Kirchhoff gerilme tensörünü kullanarak:

$$\omega'_{1221}^{(k)} = \omega'_{1212}^{(k)} = \omega'_{2121}^{(k)} = \omega'_{2112}^{(k)} = \frac{\mu^{(k)}}{\lambda_3^{(k)}} \quad \omega'_{1331}^{(k)} = \frac{\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)}} 2\mu^{(k)} \lambda_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda_3^{(k)}} S_{33}^{(k),0} \quad (3.13)$$

İçi boş bileşik silindirde burulma dalga yayılımı [51] çalışmasındaki gibi (3.3), (3.4) ve (3.13) bağıntıları yardımıyla incelenecektir.

Öncelikle, silindir katmanları arasında süreksiz temas olması durumunu, yani ideal olmayan temas koşullarını göz önüne alarak bir algoritma geliştirmek gerekmektedir. İdeal olmayan temas koşulları durumu katmanların birleşim yerindeki gerilme ve yerdeğiştirmelerin temas eden yüzey hattındaki süreksizliğinden meydana gelmektedir. Bugüne kadar yapılan çalışmalarda, katmanların birleşim yerindeki ideal olmayan temas koşullarının matematiksel ifadesi gerilme ve yerdeğiştirmelerin süreksizliği şeklinde incelenmiştir. Konuyla ilgili yapılan araştırmaların geniş özeti [69] makalesinde bulunmaktadır.

İki katlı silindirler için 2.Bölüm’de açıklandığı şekilde; birleşim yüzeyinin bir bölgesindeki yerdeğiştirme ve kuvvet vektörlerini u^+ ve f^+ ile, diğeri bölgesindeki yerdeğiştirme ve kuvvet vektörlerini ise u_- ve f_- ile gösterilirse [70] çalışmasında da üzerinde durulan ideal olmayan temas koşullarının modellenmesi aşağıda yer almaktadır.

$$[f] = Cu^- + Df^- \quad [u] = Gu^- + Ff^- \quad (3.14)$$

Bu formülasyonda; C, D, G ve F (4x4) boyutlu katsayılar matrisleridir ve köşeli parantezler ise geçiş matrisini ifade etmektedir. Yüzey $r = R + h_1$ ise;

$$[u] = u \Big|_{r=R+h_1+0} - u \Big|_{r=R+h_1-0} \quad [f] = f \Big|_{r=R+h_1+0} - f \Big|_{r=R+h_1-0} \quad (3.15)$$

(2.14) formülasyonu ile, farklı özel durumlardaki ideal olmayan temas koşulları C, D, G ve F matrisleri vasıtasıyla araştırılabilmektedir. Özel bir durum olarak [71] makalesinde $C = D = G = 0$ olarak alınmış ve çözüm gerçekleştirilmiştir. (3.14) formülasyonu ile şu sonuca ulaşılır:

$$[f] = 0 \quad [u] = Ff^- \quad (3.16)$$

Bu notasyonda F sabit bir diyagonal matristir. Süreksizlik problemlerinin çözümünde (3.16) formülasyonundaki modelleme farklı özel durumlar için oldukça kolaylık sağlamak ve pek çok gerçek durum için başarılı sonuçlar elde edilmektedir. Model, [18], [48], [57], [71], [72] ve [73] gibi çalışmalarda da klasik elastodinamik problemlerin çözümünde yer almaktadır. Çalışmalarımızda bu modelleme ve (3.16)’daki denklem, ideal olmayan temas koşullarının matematiksel

modellenmesinde gözönüne alınmıştır. İçi boş iki katlı bileşik silindir için (3.16) denklemini kullanarak sınır koşullarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} &= u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \Rightarrow u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} &= u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \Rightarrow u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0 \\
t'_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} &= t'_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \Rightarrow t'_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - t'_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
t'_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} &= t'_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \Rightarrow t'_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - t'_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0 \\
t'_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R} &= 0 \\
t'_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(3)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}+\frac{h_3}{R}\right)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

3.2 Çözüm Yöntemi

Oz eksenini boyunca harmonik burulma dalga yayılımını düşündüğümüzde, $u_q^{(m)}(r, z, t)$ yerdeğiştirmeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$u_q^{(m)}(r', z', t) = -\frac{\partial}{\partial r'} \psi^{(m)}(r', z', t) \tag{3.18}$$

(3.18) 'deki $\psi^{(m)}$ aşağıdaki denklemi sağlayacaktır:

$$\left[\Delta_1 + (\xi'^{(m)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\rho'}{\omega'_{1221}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi = 0 \tag{3.19}$$

Burada

$$\Delta_1' = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \xi_n'^{(m)2} = \frac{2\lambda_3^{(m)3}}{\lambda_1^{(m)2} (\lambda_1^{(m)} + \lambda_3^{(m)})} \tag{3.20}$$

Buna göre:

$$\psi^{(m)}(r', z', t) = \varphi^{(m)}(r') e^{i(kz' - \omega t)} \tag{3.21}$$

olur. Böylece bilinmeyen fonksiyon $\varphi^{(m)}(r')$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left[\frac{d^2}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} - (\xi'^{(m)})^2 \kappa^2 + \frac{\lambda_3^{(m)} \rho'^{(m)} \omega^2}{\mu^{(m)}} \right] \varphi(r') e^{i(\kappa z' - \omega t)} = 0 \quad (3.22)$$

Bu notasyona göre:

$$(s^{(m)})^2 = (\xi'^{(m)})^2 \kappa^2 + \frac{\lambda_3^{(m)} \rho'^{(m)} \omega^2}{\mu^{(m)}} \quad (3.23)$$

(3.22)'nin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} s^{(1)2} > 0 &\Rightarrow \varphi^{(1)}(r') = A^{(1)} J_0(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} Y_0(s^{(1)} \kappa r') \\ s^{(2)2} > 0 &\Rightarrow \varphi^{(2)}(r') = A^{(2)} J_0(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} Y_0(s^{(2)} \kappa r') \\ s^{(3)2} > 0 &\Rightarrow \varphi^{(3)}(r') = A^{(3)} J_0(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} Y_0(s^{(3)} \kappa r') \\ s^{(1)2} < 0 &\Rightarrow \varphi^{(1)}(r') = A^{(1)} I_0(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} K_0(s^{(1)} \kappa r') \\ s^{(2)2} < 0 &\Rightarrow \varphi^{(2)}(r') = A^{(2)} I_0(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} K_0(s^{(2)} \kappa r') \\ s^{(3)2} < 0 &\Rightarrow \varphi^{(3)}(r') = A^{(3)} I_0(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} K_0(s^{(3)} \kappa r') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') \\ u_\theta^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \\ u_\theta^{(3)} &= -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(3)}(r') \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} s^{(1)2} > 0 &\Rightarrow u_\theta^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') = -\left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa J'_0(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y'_0(s^{(1)} \kappa r') \right] \\ &= A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)} \kappa r') \\ s^{(2)2} > 0 &\Rightarrow u_\theta^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') = -\left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J'_0(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y'_0(s^{(2)} \kappa r') \right] \\ &= A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r') \\ s^{(3)2} > 0 &\Rightarrow u_\theta^{(3)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(3)}(r') = -\left[A^{(3)} s^{(3)} \kappa J'_0(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa Y'_0(s^{(3)} \kappa r') \right] \\ &= A^{(3)} s^{(3)} \kappa J_1(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa Y_1(s^{(3)} \kappa r') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^{(1)^2} < 0 &\Rightarrow u_{\theta}^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') = -\left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_0'(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_0'(s^{(1)} \kappa r')\right] \\
&= -A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_1(s^{(1)} \kappa r') \\
s^{(2)^2} < 0 &\Rightarrow u_{\theta}^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') = -\left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_0'(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_0'(s^{(2)} \kappa r')\right] \quad (3.25) \\
&= -A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)} \kappa r') \\
s^{(3)^2} < 0 &\Rightarrow u_{\theta}^{(3)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(3)}(r') = -\left[A^{(3)} s^{(3)} \kappa I_0'(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa K_0'(s^{(3)} \kappa r')\right] \\
&= -A^{(3)} s^{(3)} \kappa I_1(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa K_1(s^{(3)} \kappa r')
\end{aligned}$$

(3.4), (3.18), (3.21), ve (3.25) denklemleri kullanılarak, (3.17) sınır koşullarına bağlı olarak:

$$\begin{aligned}
s^2 > 0 &\Rightarrow u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \\
&\left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
&\left\{ \left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)} \kappa r') \right] - \left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
&\left\{ \underbrace{J_1(s^{(1)} \kappa r') A^{(1)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{11}} + \underbrace{Y_1(s^{(1)} \kappa r') B^{(1)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{12}} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} J_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{13}} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} Y_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{14}} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$$s^2 < 0 \Rightarrow u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} -$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \left[-A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_1(s^{(1)} \kappa r') \right] - \left[-A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \underbrace{-I_1(s^{(1)} \kappa r') A^{(1)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{11}} + \underbrace{K_1(s^{(1)} \kappa r') B^{(1)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{12}} + \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} I_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{13}} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} K_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{14}} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 > 0 \Rightarrow u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} -$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(3)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left[A^{(3)} s^{(3)} \kappa J_1(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa Y_1(s^{(3)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \underbrace{J_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{23}} + \underbrace{Y_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{24}} - \underbrace{\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} J_1(s^{(3)} \kappa r') A^{(3)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{25}} - \underbrace{\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} Y_1(s^{(3)} \kappa r') B^{(3)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{26}} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 < 0 \Rightarrow u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} -$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(3)}(r') \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \left[-A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left[-A^{(3)} s^{(3)} \kappa I_1(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa K_1(s^{(3)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$\left\{ \underbrace{-I_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{23}} + \underbrace{K_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{24}} + \underbrace{\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} I_1(s^{(3)} \kappa r') A^{(3)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{25}} - \underbrace{\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} K_1(s^{(3)} \kappa r') B^{(3)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{26}} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$= -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)} \lambda_3^{(1)}} \left\{ A^{(1)} J_2(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} Y_2(s^{(1)} \kappa r') \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \begin{aligned} & \left[A^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)} \kappa r')} J_1(s^{(2)} \kappa r') - J_2(s^{(2)} \kappa r') \right] + \right. \\ & \left. B^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)} \kappa r')} Y_1(s^{(2)} \kappa r') - Y_2(s^{(2)} \kappa r') \right] \right] \\ & \left[A^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right) \frac{J_1(s^{(2)} \kappa r')}{(s^{(1)} \kappa r')} + B^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right) \frac{Y_1(s^{(2)} \kappa r')}{(s^{(1)} \kappa r')} \right] \end{aligned} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$= \left\{ -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)} \lambda_3^{(1)}} \{ J_2(s^{(1)} \kappa r') \} \right\} A^{(1)} + \left\{ -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)} \lambda_3^{(1)}} \{ Y_2(s^{(1)} \kappa r') \} \right\} B^{(1)} +$$

$$\left\{ -\frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)} \kappa r')} J_1(s^{(2)} \kappa r') - J_2(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right) \frac{J_1(s^{(2)} \kappa r')}{(s^{(1)} \kappa r')} \right\} \right\} A^{(2)}$$

$$+ \left\{ -\frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)} \kappa r')} Y_1(s^{(2)} \kappa r') - Y_2(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right) \frac{Y_1(s^{(2)} \kappa r')}{(s^{(1)} \kappa r')} \right\} \right\} B^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned}
s^2 > 0 &\Rightarrow t_{r0}^{(1)} \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} - t_{r0}^{(2)} \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} = \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r'} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r'} \right) \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} \\
&- \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\frac{\partial u_\theta^{(2)}}{\partial r'} - \frac{u_\theta^{(2)}}{r'} \right) \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
&= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)} \lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[\frac{A^{(1)} (s^{(1)} \kappa)^2 J_1'(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} (s^{(1)} \kappa)^2 Y_1'(s^{(1)} \kappa r')}{\left[\frac{A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)} \kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)} \kappa r')}{r'} \right]} \right] - \right\} \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} \\
&- \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\frac{A^{(2)} (s^{(2)} \kappa)^2 J_1'(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} (s^{(2)} \kappa)^2 Y_1'(s^{(2)} \kappa r')}{\left[\frac{A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r')}{r'} \right]} \right] - \right\} \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
&= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)} \lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[\frac{A^{(1)} (s^{(1)} \kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(1)} \kappa r')} J_1(s^{(1)} \kappa r') - J_2(s^{(1)} \kappa r') \right] + \left[\frac{B^{(1)} (s^{(1)} \kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(1)} \kappa r')} Y_1(s^{(1)} \kappa r') - Y_2(s^{(1)} \kappa r') \right]}{\left[\frac{A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)} \kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)} \kappa r')}{r'} \right]} \right]} \right] - \right\} \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} \\
&- \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\frac{A^{(2)} (s^{(2)} \kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)} \kappa r')} J_1(s^{(2)} \kappa r') - J_2(s^{(2)} \kappa r') \right] + \left[\frac{B^{(2)} (s^{(2)} \kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)} \kappa r')} Y_1(s^{(2)} \kappa r') - Y_2(s^{(2)} \kappa r') \right]}{\left[\frac{A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r')}{r'} \right]} \right]} \right] - \right\} \Big|_{r'= \lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^2 < 0 &\Rightarrow \left. \mathbf{t}'_{r\theta}{}^{(1)} \right|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \left. \mathbf{t}'_{r\theta}{}^{(2)} \right|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(1)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(1)}}{\mathbf{r}'} \right) \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \\
&- \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\mathbf{r}'} \right) \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
&= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[-A^{(1)} \left(s^{(1)}\kappa \right)^2 I_1' \left(s^{(1)}\kappa r' \right) + B^{(1)} \left(s^{(1)}\kappa \right)^2 K_1' \left(s^{(1)}\kappa r' \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. \left[-\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa I_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa K_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \\
&- \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[-A^{(2)} \left(s^{(2)}\kappa \right)^2 I_1' \left(s^{(2)}\kappa r' \right) + B^{(2)} \left(s^{(2)}\kappa \right)^2 K_1' \left(s^{(2)}\kappa r' \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. \left[-\frac{A^{(2)} s^{(2)}\kappa I_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)}\kappa K_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} \right] \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0 \\
&= -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ A^{(2)} J_2 \left(s^{(2)}\kappa r' \right) + B^{(2)} Y_2 \left(s^{(2)}\kappa r' \right) \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \\
&- \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left[A^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(3)}\kappa r' \right)} J_1 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) - J_2 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) \right] + B^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(3)}\kappa r' \right)} Y_1 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) - Y_2 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) \right] \right] - \right. \\
&\quad \left. \left[A^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{J_1(s^{(3)}\kappa r')}{\left(s^{(2)}\kappa r' \right)} + B^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{Y_1(s^{(3)}\kappa r')}{\left(s^{(2)}\kappa r' \right)} \right] \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0 \\
&= \left\{ -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ J_2 \left(s^{(2)}\kappa r' \right) \right\} \right\} A^{(2)} + \left\{ -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ Y_2 \left(s^{(2)}\kappa r' \right) \right\} \right\} B^{(2)} + \\
&\quad \left\{ -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(3)}\kappa r' \right)} J_1 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) - J_2 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) \right] - \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{J_1(s^{(3)}\kappa r')}{\left(s^{(2)}\kappa r' \right)} \right\} \right\} A^{(3)} \\
&\quad + \left\{ -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(3)}\kappa r' \right)} Y_1 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) - Y_2 \left(s^{(3)}\kappa r' \right) \right] - \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{Y_1(s^{(3)}\kappa r')}{\left(s^{(2)}\kappa r' \right)} \right\} \right\} B^{(3)} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[\begin{aligned} &-A^{(1)} \left(s^{(1)}\kappa\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(1)}\kappa r'\right)} I_1\left(s^{(1)}\kappa r'\right) + I_2\left(s^{(1)}\kappa r'\right) \right] + \\ &B^{(1)} \left(s^{(1)}\kappa\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(1)}\kappa r'\right)} K_1\left(s^{(1)}\kappa r'\right) - K_2\left(s^{(1)}\kappa r'\right) \right] \\ &\left[-\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa I_1\left(s^{(1)}\kappa r'\right)}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa K_1\left(s^{(1)}\kappa r'\right)}{r'} \right] \end{aligned} \right] \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \\
&- \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\begin{aligned} &-A^{(2)} \left(s^{(2)}\kappa\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(2)}\kappa r'\right)} I_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right) + I_2\left(s^{(2)}\kappa r'\right) \right] + \\ &B^{(2)} \left(s^{(2)}\kappa\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(2)}\kappa r'\right)} K_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right) - K_2\left(s^{(2)}\kappa r'\right) \right] \\ &\left[-\frac{A^{(2)} s^{(2)}\kappa I_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right)}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)}\kappa K_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right)}{r'} \right] \end{aligned} \right] \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ A^{(1)} I_2\left(s^{(1)}\kappa r'\right) + B^{(1)} K_2\left(s^{(1)}\kappa r'\right) \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \\
&- \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\begin{aligned} &-A^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(2)}\kappa r'\right)} I_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right) + I_2\left(s^{(2)}\kappa r'\right) \right] + \\ &B^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(2)}\kappa r'\right)} K_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right) - K_2\left(s^{(2)}\kappa r'\right) \right] \\ &\left[-A^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right) \frac{I_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right)}{\left(s^{(1)}\kappa r'\right)} + B^{(2)} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right) \frac{K_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right)}{\left(s^{(1)}\kappa r'\right)} \right] \end{aligned} \right] \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \underbrace{-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ I_2\left(s^{(1)}\kappa r'\right) \right\}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{31}} \right\} A^{(1)} + \left\{ \underbrace{-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ K_2\left(s^{(1)}\kappa r'\right) \right\}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{32}} \right\} B^{(1)} + \\
&\left\{ \underbrace{\frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(2)}\kappa r'\right)} I_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right) + I_2\left(s^{(2)}\kappa r'\right) \right] - \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right) \frac{I_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right)}{\left(s^{(1)}\kappa r'\right)} \right\}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{33}} \right\} A^{(2)} \\
&+ \left\{ \underbrace{-\frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(s^{(2)}\kappa r'\right)} K_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right) - K_2\left(s^{(2)}\kappa r'\right) \right] - \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right) \frac{K_1\left(s^{(2)}\kappa r'\right)}{\left(s^{(1)}\kappa r'\right)} \right\}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{34}} \right\} B^{(2)} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R\left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$$s^2 < 0 \Rightarrow \mathbf{t}'_{r\theta}{}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - \mathbf{t}'_{r\theta}{}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(2)}}{\partial r'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(2)}}{r'} \right) \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} -$$

$$\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\theta^{(3)}}{\partial r'} - \frac{\mathbf{u}_\theta^{(3)}}{r'} \right) \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\begin{aligned} & -A^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 I_1'(s^{(2)}\kappa r') + B^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 K_1'(s^{(2)}\kappa r') \end{aligned} \right] - \left[\begin{aligned} & -\frac{A^{(2)} s^{(2)}\kappa I_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)}\kappa K_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} \end{aligned} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \\ - \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\begin{aligned} & -A^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 I_1'(s^{(3)}\kappa r') + B^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 K_1'(s^{(3)}\kappa r') \end{aligned} \right] - \left[\begin{aligned} & -\frac{A^{(3)} s^{(3)}\kappa I_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(3)} s^{(3)}\kappa K_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} \end{aligned} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ \left[\begin{aligned} & -A^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)}\kappa r')} I_1(s^{(2)}\kappa r') + I_2(s^{(2)}\kappa r') \right] + \left[\begin{aligned} & B^{(2)} (s^{(2)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(2)}\kappa r')} K_1(s^{(2)}\kappa r') - K_2(s^{(2)}\kappa r') \right] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] - \left[\begin{aligned} & -\frac{A^{(2)} s^{(2)}\kappa I_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(2)} s^{(2)}\kappa K_1(s^{(2)}\kappa r')}{r'} \end{aligned} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \\ - \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left[\begin{aligned} & -A^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} I_1(s^{(3)}\kappa r') + I_2(s^{(3)}\kappa r') \right] + \left[\begin{aligned} & B^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} K_1(s^{(3)}\kappa r') - K_2(s^{(3)}\kappa r') \right] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] - \left[\begin{aligned} & -\frac{A^{(3)} s^{(3)}\kappa I_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(3)} s^{(3)}\kappa K_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} \end{aligned} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ A^{(2)} I_2(s^{(2)}\kappa r') + B^{(2)} K_2(s^{(2)}\kappa r') \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \begin{aligned} &\left[-A^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} I_1(s^{(3)}\kappa r') + I_2(s^{(3)}\kappa r') \right] + \right. \\ &\left. B^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} K_1(s^{(3)}\kappa r') - K_2(s^{(3)}\kappa r') \right] \right] + \\ &\left[-A^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{I_1(s^{(3)}\kappa r')}{(s^{(2)}\kappa r')} + B^{(3)} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{K_1(s^{(3)}\kappa r')}{(s^{(2)}\kappa r')} \right] \end{aligned} \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0 \\
&= \left\{ -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ I_2(s^{(2)}\kappa r') \right\} \right\}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{43}} A^{(2)} + \left\{ -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \left\{ K_2(s^{(2)}\kappa r') \right\} \right\}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{44}} B^{(2)} + \\
&\quad \left\{ \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} I_1(s^{(3)}\kappa r') + I_2(s^{(3)}\kappa r') \right] - \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{I_1(s^{(3)}\kappa r')}{(s^{(2)}\kappa r')} \right\} \right\}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{45}} A^{(3)} \\
&\quad + \left\{ -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} K_1(s^{(3)}\kappa r') - K_2(s^{(3)}\kappa r') \right] - \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right) \frac{K_1(s^{(3)}\kappa r')}{(s^{(2)}\kappa r')} \right\} \right\}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{46}} B^{(3)} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$$s^2 > 0 \Rightarrow \mathbf{t}_{r_0}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = \left\{ \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0^{(1)}}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{u}_0^{(1)}}{\mathbf{r}'} \right) \right\}_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[A^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 J_1'(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 Y_1'(s^{(1)}\kappa r') \right] - \left[\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa J_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa Y_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[\begin{aligned} &A^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(1)}\kappa r')} J_1(s^{(1)}\kappa r') - J_2(s^{(1)}\kappa r') \right] + B^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(1)}\kappa r')} Y_1(s^{(1)}\kappa r') - Y_2(s^{(1)}\kappa r') \right] \\ &\left[\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa J_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa Y_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] \end{aligned} \right] - \right\} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= - \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ A^{(1)} J_2(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} Y_2(s^{(1)}\kappa r') \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$= \left\{ -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ J_2(s^{(1)}\kappa r') \right\} \right\}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{51}} A^{(1)} + \left\{ -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ Y_2(s^{(1)}\kappa r') \right\} \right\}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{52}} B^{(1)} \Bigg|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$\begin{aligned}
s^2 < 0 \Rightarrow t_{r0}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} &= \left\{ \frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r'} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r'} \right) \right\}_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0 \\
&= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[-A^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 I_1'(s^{(1)}\kappa r') + B^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 K_1'(s^{(1)}\kappa r') \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa I_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa K_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] \right\}_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0 \\
&= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ \left[-A^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(1)}\kappa r')} I_1(s^{(1)}\kappa r') + I_2(s^{(1)}\kappa r') \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B^{(1)} (s^{(1)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(1)}\kappa r')} K_1(s^{(1)}\kappa r') - K_2(s^{(1)}\kappa r') \right] \right] - \left[-\frac{A^{(1)} s^{(1)}\kappa I_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(1)} s^{(1)}\kappa K_1(s^{(1)}\kappa r')}{r'} \right] \right\}_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0 \\
&= \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \left\{ -A^{(1)} I_2(s^{(1)}\kappa r') - B^{(1)} K_2(s^{(1)}\kappa r') \right\}_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0 \\
&= \left\{ \underbrace{-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \{ I_2(s^{(1)}\kappa r') \}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{s1}} A^{(1)} + \underbrace{-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \{ K_2(s^{(1)}\kappa r') \}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{s2}} B^{(1)} \right\}_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^2 < 0 \Rightarrow t_{r0}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(3)}\kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right)} &= \left\{ \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \left(\frac{\partial u_\theta^{(3)}}{\partial r'} - \frac{u_\theta^{(3)}}{r'} \right) \right\}_{r'=\lambda_2^{(3)}\kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right)} = 0 \\
&= \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left[-A^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 I_1'(s^{(3)}\kappa r') + B^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 K_1'(s^{(3)}\kappa r') \right] - \left[-\frac{A^{(3)} s^{(3)}\kappa I_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(3)} s^{(3)}\kappa K_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} \right] \right\}_{r'=\lambda_2^{(3)}\kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right)} = 0 \\
&= \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ \left[-A^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} I_1(s^{(3)}\kappa r') + I_2(s^{(3)}\kappa r') \right] + \left[B^{(3)} (s^{(3)}\kappa)^2 \left[\frac{1}{(s^{(3)}\kappa r')} K_1(s^{(3)}\kappa r') - K_2(s^{(3)}\kappa r') \right] \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[-\frac{A^{(3)} s^{(3)}\kappa I_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} + \frac{B^{(3)} s^{(3)}\kappa K_1(s^{(3)}\kappa r')}{r'} \right] \right] \right\}_{r'=\lambda_2^{(3)}\kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R} \right)} = 0
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \left\{ -A^{(3)} I_2(s^{(3)} \kappa r') - B^{(3)} K_2(s^{(3)} \kappa r') \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(3)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R}\right)} = 0 \quad (3.26)$$

$$= \left\{ \underbrace{-\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \{I_2(s^{(3)} \kappa r')\}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{65}} \right\} A^{(3)} + \left\{ \underbrace{-\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \{K_2(s^{(3)} \kappa r')\}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{66}} \right\} B^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(3)} \kappa R \left(1 + \frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R} + \frac{h_3}{R}\right)} = 0$$

$$\det \|\alpha_{ij}(c/c_2^{(2)}, \kappa R, h_1, h_2, h_3, F_1, F_2, \lambda_m^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^k, \rho^{(k)})\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (3.27)$$

$$\alpha_{11} = \begin{cases} J_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} > 0 \\ -I_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{12} = \begin{cases} Y_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} > 0 \\ K_1(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{13} = \begin{cases} -\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} J_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} > 0 \\ \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} I_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{14} = \begin{cases} -\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} Y_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} > 0 \\ -\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} K_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{15} = 0 \quad \alpha_{16} = 0 \quad \alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{22} = 0$$

$$\alpha_{23} = \begin{cases} J_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} > 0 \\ -I_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{24} = \begin{cases} Y_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} > 0 \\ K_1(s^{(2)} \kappa r') & , s^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{25} = \begin{cases} -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} J_1(s^{(3)} \kappa r') & , s^{(3)} > 0 \\ \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} I_1(s^{(3)} \kappa r') & , s^{(3)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{26} = \begin{cases} -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} Y_1(s^{(3)} \kappa r') & , s^{(3)} > 0 \\ -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} K_1(s^{(3)} \kappa r') & , s^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{31} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \{J_2(s^{(1)}\kappa r')\} & , s^{(1)} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \{I_2(s^{(1)}\kappa r')\} & , s^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{32} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \{Y_2(s^{(1)}\kappa r')\} & , s^{(1)} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}\lambda_3^{(1)}} \{K_2(s^{(1)}\kappa r')\} & , s^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{33} = \begin{cases} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} J_2(s^{(2)}\kappa r') & , s^{(2)} > 0 \\ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} I_2(s^{(2)}\kappa r') & , s^{(2)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{34} = \begin{cases} \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} Y_2(s^{(2)}\kappa r') & , s^{(2)} > 0 \\ \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} K_2(s^{(2)}\kappa r') & , s^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{35} = 0 \quad \alpha_{36} = 0 \quad \alpha_{41} = 0 \quad \alpha_{42} = 0$$

$$\alpha_{43} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \{J_2(s^{(2)}\kappa r')\} & , s^{(2)} > 0 \\ -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \{I_2(s^{(2)}\kappa r')\} & , s^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{44} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \{Y_2(s^{(2)}\kappa r')\} & , s^{(2)} > 0 \\ -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\lambda_3^{(2)}} \{K_2(s^{(2)}\kappa r')\} & , s^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{45} = \begin{cases} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} J_2(s^{(3)}\kappa r') & , s^{(3)} > 0 \\ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} I_2(s^{(3)}\kappa r') & , s^{(3)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{46} = \begin{cases} \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} Y_2(s^{(3)}\kappa r') & , s^{(3)} > 0 \\ \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} K_2(s^{(3)}\kappa r') & , s^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{51} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} J_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} I_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} < 0 \end{cases} \quad \alpha_{52} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} Y_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} > 0 \\ -\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} K_2(s^{(1)} \kappa r') & , s^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{53} = 0 \quad \alpha_{54} = 0 \quad \alpha_{55} = 0 \quad \alpha_{56} = 0$$

$$\alpha_{61} = 0 \quad \alpha_{62} = 0 \quad \alpha_{63} = 0 \quad \alpha_{64} = 0$$

$$\alpha_{65} = \begin{cases} -\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} J_2(s^{(3)} \kappa r') & , s^{(3)} > 0 \\ -\frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} I_2(s^{(3)} \kappa r') & , s^{(3)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{66} = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \{ Y_2(s^{(3)} \kappa r') \} & , s^{(3)} > 0 \\ -\frac{1}{\lambda_3^{(3)}} \{ K_2(s^{(3)} \kappa r') \} & , s^{(3)} < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

İçi boş üç katlı bileşik silindirde burulma dalga yayılımı dispersiyon denklemi (3.28) denklemlerindeki formda elde edilmiştir.

3.3 Asimtotik İfadenin Çıkarılması

$$\begin{aligned} x_1 &= s^{(1)} \kappa R \lambda_2^{(1)} \left(1 + \frac{h1}{R} \right) & x_2 &= s^{(2)} \kappa R \lambda_2^{(1)} \left(1 + \frac{h1}{R} \right) \\ x_3 &= s^{(2)} \kappa R \lambda_2^{(2)} \left(1 + \frac{h1}{R} + \frac{h2}{R} \right) & x_4 &= s^{(3)} \kappa R \lambda_2^{(2)} \left(1 + \frac{h1}{R} + \frac{h2}{R} \right) \\ x_5 &= s^{(1)} \kappa R \lambda_2^{(1)} & x_6 &= s^{(3)} \kappa R \lambda_2^{(3)} \left(1 + \frac{h1}{R} + \frac{h2}{R} + \frac{h3}{R} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\alpha_{11} = J_1(x_1) = \frac{x_1}{2} \quad \alpha_{12} = Y_1(x_1) = -\frac{2}{\pi x_1}$$

$$\alpha_{13} = -\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} J_1(x_2) = -\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \frac{x_2}{2} \quad \alpha_{14} = -\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} Y_1(x_2) = \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \frac{2}{\pi x_2}$$

$$\alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{23} &= J_1(x_3) = \frac{x_3}{2} & \alpha_{24} &= Y_1(x_3) = -\frac{2}{\pi x_3} \\
\alpha_{25} &= -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} J_1(x_4) = -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \frac{x_4}{2} & \alpha_{26} &= -\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} Y_1(x_4) = \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \frac{2}{\pi x_4} \\
\alpha_{31} &= -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)} \lambda_3^{(1)}} J_2(x_1) = A \frac{x_1^2}{8} & \alpha_{32} &= -\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)} \lambda_3^{(1)}} Y_2(x_1) = -A \frac{4}{\pi x_1^2} \\
\alpha_{33} &= \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} J_2(x_2) = \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 B \frac{x_2^2}{8} \\
\alpha_{34} &= \left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(2)}} Y_2(x_2) = -\left(\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} \right)^2 B \frac{4}{\pi x_2^2} \\
\alpha_{35} &= \alpha_{36} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0 \\
\alpha_{43} &= -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)} \lambda_3^{(2)}} J_2(x_3) = C \frac{x_3^2}{8} & \alpha_{44} &= -\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(3)} \lambda_3^{(2)}} Y_2(x_3) = -C \frac{4}{\pi x_3^2} \\
\alpha_{45} &= \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} J_2(x_4) = \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 D \frac{x_4^2}{8} \\
\alpha_{46} &= \left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 \frac{1}{\lambda_3^{(3)}} Y_2(x_4) = -\left(\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} \right)^2 D \frac{4}{\pi x_4^2} \\
\alpha_{51} &= J_2(x_5) = \frac{x_5^2}{8} & \alpha_{52} &= Y_2(x_5) = -\frac{4}{\pi x_5^2} \\
\alpha_{53} &= \alpha_{54} = \alpha_{55} = \alpha_{56} = \alpha_{61} = \alpha_{62} = \alpha_{63} = \alpha_{64} = 0 \\
\alpha_{65} &= J_2(x_6) = \frac{x_6^2}{8} \\
\alpha_{66} &= Y_2(x_6) = -\frac{4}{\pi x_6^2}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\det \|\alpha_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} \begin{matrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \\ C^{(1)} \\ A^{(2)} \\ B^{(2)} \\ C^{(2)} \end{matrix} = 0 \quad (3.31)$$

Gerekli dönüşüm ve sadeleştirmeler yapıldığında burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı ($kR \rightarrow 0$ limitinde) aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\lambda_3^{(2)} \lambda_3^{(3)} \mu^{(1)} (\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1) (\xi'^{(1)})^2 + \lambda_3^{(1)} \lambda_3^{(3)} \mu^{(2)} (\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4) (\xi'^{(2)})^2 + \lambda_3^{(1)} \lambda_3^{(2)} \mu^{(3)} (\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4) (\xi'^{(3)})^2}{\lambda_3^{(1)} \lambda_3^{(2)} \lambda_3^{(3)} \mu^{(1)} \left[\left[\left(1 - \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \right) \eta_1^4 - 1 \right] \lambda_2^{(1)4} + \left(\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} - \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \right) \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 + \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 \right]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

Pay ve paydayı $\lambda_3^{(1)} \lambda_3^{(2)} \lambda_3^{(3)}$ 'ye bölelim,

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1) (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4) (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} (\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4) (\xi'^{(3)})^2}{\mu^{(1)} \left[\left[\left(1 - \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \right) \eta_1^4 - 1 \right] \lambda_2^{(1)4} + \left(\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} - \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \right) \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 + \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 \right]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

Pay ve paydayı $(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)$ 'ye bölelim,

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(3)})^2}{\frac{\mu^{(1)} \left[\left[\left(1 - \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \right) \eta_1^4 - 1 \right] \lambda_2^{(1)4} + \left(\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} - \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \right) \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 + \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 \right]}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

Payda da parantez içine gerekli düzenlemeleri yapalım,

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(3)})^2}{\frac{\mu^{(1)} \left[\left[\left(\frac{\rho^{(1)} - \rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \right) \eta_1^4 - 1 \right] \lambda_2^{(1)4} + \left(\frac{\rho^{(2)} - \rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \right) \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 + \frac{\rho^{(3)}}{\rho^{(1)}} \lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 \right]}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.35)$$

Payda da $\mu^{(1)}$ 'yi parantez içine alıp gerekli düzenlemeleri yapalım,

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(3)})^2}{\frac{\left[\left[(\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) c_2^{(1)2} \eta_1^4 - \mu^{(1)} \right] \lambda_2^{(1)4} + (\rho^{(2)} - \rho^{(3)}) c_2^{(1)2} \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 + \rho^{(3)} c_2^{(1)2} \lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 \right]}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

Paydayı açalım,

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(3)})^2}{\frac{\rho^{(1)} c_2^{(1)2} \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - \rho^{(2)} c_2^{(1)2} \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - \mu^{(1)} \lambda_2^{(1)4} + \rho^{(2)} c_2^{(1)2} \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \rho^{(3)} c_2^{(1)2} \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 + \rho^{(3)} c_2^{(1)2} \lambda_2^{(3)4} \eta_3^4}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

Payda da gerekli düzenlemeleri yapalım,

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(3)})^2}{\frac{\mu^{(1)} \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - \mu^{(2)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}} \right)^2 \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - \mu^{(1)} \lambda_2^{(1)4} + \mu^{(2)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}} \right)^2 \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \mu^{(3)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(3)}} \right)^2 \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 + \mu^{(3)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(3)}} \right)^2 \lambda_2^{(3)4} \eta_3^4}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(3)})^2}{\frac{\mu^{(1)} \lambda_2^{(1)4} (\eta_1^4 - 1) + \mu^{(2)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}} \right)^2 (\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4) + \mu^{(3)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(3)}} \right)^2 (\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} (\xi'^{(3)})^2}{\mu^{(1)} \frac{\lambda_2^{(1)4} (\eta_1^4 - 1)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} + \mu^{(2)} \frac{(\lambda_2^{(2)4} \eta_2^4 - \lambda_2^{(1)4} \eta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(2)}} \right)^2 + \mu^{(3)} \frac{(\lambda_2^{(3)4} \eta_3^4 - \lambda_2^{(2)4} \eta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)4} \eta_1^4 - 1)} \left(\frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(3)}} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

$$\alpha = \frac{((\lambda_2^{(2)})^4 \zeta_2^4 - (\lambda_2^{(1)})^4 \zeta_1^4)}{(\lambda_2^{(1)})^4 (\zeta_1^4 - 1)} \quad \beta = \frac{((\lambda_2^{(3)})^4 \zeta_3^4 - (\lambda_2^{(2)})^4 \zeta_2^4)}{(\lambda_2^{(1)})^4 (\zeta_1^4 - 1)}$$

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi_1'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \alpha (\xi_1'^{(2)})^2 + \frac{\mu^{(3)}}{\lambda_3^{(3)}} \beta (\xi_1'^{(3)})^2}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \frac{c_2^{(1)2}}{c_2^{(2)2}} \alpha + \mu^{(3)} \frac{c_2^{(1)2}}{c_2^{(3)2}} \beta} \right]^{1/2} \quad (3.40)$$

$$\zeta_1 = 1 + \frac{h1}{R} \quad \zeta_2 = 1 + \frac{h1}{R} + \frac{h2}{R} \quad \zeta_3 = 1 + \frac{h1}{R} + \frac{h2}{R} + \frac{h3}{R} \quad (3.41)$$

$\mu^{(3)} = 0$ durumunda;

$$\frac{c}{c_2^{(1)}} = \left[\frac{\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (\xi_1'^{(1)})^2 + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \frac{(\zeta_2^4 - \zeta_1^4)}{(\zeta_1^4 - 1)} (\xi_1'^{(2)})^2}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \frac{c_2^{(1)2}}{c_2^{(2)2}} \frac{(\zeta_2^4 - \zeta_1^4)}{(\zeta_1^4 - 1)}} \right]^{1/2} \quad (3.42)$$

2. Bölüm'de incelenen içi boş iki katlı silindirle aynı sonucu elde ederiz.

İdeal olmayan temas koşullarını sınır şartlarına uygun olarak yazdığımızda:

$$u_q^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_q^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{\text{RF}t_{rq}'^{(1)}}{\mu_1}$$

$$u_q^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - u_q^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \frac{\text{RF}t_{rq}'^{(2)}}{\mu_2}$$

$$t_{rq}'^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = t_{rq}'^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \Rightarrow t_{rq}'^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - t_{rq}'^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$t_{rq}'^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = t_{rq}'^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \Rightarrow t_{rq}'^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - t_{rq}'^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$t_{rq}'^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R} = 0$$

$$t_{rq}'^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(3)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}+\frac{h_3}{R}\right)} = 0$$

$$s^2 > 0 \Rightarrow u_\theta^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_\theta^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{\text{RF}t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r'^{(2)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r'^{(1)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{\text{RF}t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1}$$

$$\left\{ \left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left[A^{(1)} s^{(1)} \kappa J_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa Y_1(s^{(1)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)}$$

$$= \frac{\text{RF}}{\mu_1} \left[\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 \{ -A^{(1)} J_2(s^{(1)} \kappa r') - B^{(1)} Y_2(s^{(1)} \kappa r') \} \right]$$

$$\left\{ \underbrace{\left[J_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{\text{RF}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) J_2(s^{(1)} \kappa r') \right] A^{(1)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{11}} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} J_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{13}} + \underbrace{\left[Y_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{\text{RF}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) Y_2(s^{(1)} \kappa r') \right] B^{(1)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{12}} - \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} Y_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{14}} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned}
s^2 < 0 &\Rightarrow u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - u_{\theta}^{(1)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1} \\
&\Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r'^{(2)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(1)}(r'^{(1)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1} \\
&\left\{ \left[-A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)} \kappa r') \right] - \left[-A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_1(s^{(1)} \kappa r') + B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_1(s^{(1)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} \\
&= \frac{RF}{\mu_1} \left[\frac{\mu^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa)^2 \left\{ -A^{(1)} s^{(1)} \kappa I_2(s^{(1)} \kappa r') - B^{(1)} s^{(1)} \kappa K_2(s^{(1)} \kappa r') \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\left\{ \underbrace{\left[-I_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) I_2(s^{(1)} \kappa r') \right] A^{(1)} + \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} I_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)} +}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{11}} \underbrace{\frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} I_1(s^{(2)} \kappa r') A^{(2)} +}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{13}} \right. \\
\left. \underbrace{\left[K_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) K_2(s^{(1)} \kappa r') \right] B^{(1)} - \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} K_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{12}} \underbrace{- \frac{s^{(2)}}{s^{(1)}} K_1(s^{(2)} \kappa r') B^{(2)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{14}} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned}
s^2 > 0 &\Rightarrow u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(2)}}{\mu_2} \\
&\Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(3)}(r'^{(3)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r'^{(2)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left[A^{(3)} s^{(3)} \kappa J_1(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa Y_1(s^{(3)} \kappa r') \right] - \left[A^{(2)} s^{(2)} \kappa J_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa Y_1(s^{(2)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \\
&= \frac{RF}{\mu_2} \left[\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa)^2 \left\{ -A^{(2)} J_2(s^{(2)} \kappa r') - B^{(2)} Y_2(s^{(2)} \kappa r') \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\left\{ \underbrace{\left[J_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa) J_2(s^{(2)} \kappa r') \right] A^{(2)} - \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} J_1(s^{(3)} \kappa r') A^{(3)} +}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{23}} \underbrace{- \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} J_1(s^{(3)} \kappa r') A^{(3)} +}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{25}} \right. \\
\left. \underbrace{\left[Y_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa) Y_2(s^{(2)} \kappa r') \right] B^{(2)} - \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} Y_1(s^{(3)} \kappa r') B^{(3)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{24}} \underbrace{- \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} Y_1(s^{(3)} \kappa r') B^{(3)}}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{26}} \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)} \kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned}
s^2 < 0 &\Rightarrow u_{\theta}^{(3)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - u_{\theta}^{(2)} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(2)}}{\mu_2} \\
&\Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(3)}(r'^{(3)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} - \left[-\frac{\partial}{\partial r'} \varphi^{(2)}(r'^{(2)}) \right] \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = \frac{RF t_{r\theta}'^{(1)}}{\mu_1} \\
&\left\{ \left[-A^{(3)} s^{(3)} \kappa I_1(s^{(3)} \kappa r') + B^{(3)} s^{(3)} \kappa K_1(s^{(3)} \kappa r') \right] - \left[-A^{(2)} s^{(2)} \kappa I_1(s^{(2)} \kappa r') + B^{(2)} s^{(2)} \kappa K_1(s^{(2)} \kappa r') \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(2)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} \\
&= \frac{RF}{\mu_2} \left[\frac{\mu^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa)^2 \left\{ -A^{(2)} I_2(s^{(2)} \kappa r') - B^{(2)} K_2(s^{(2)} \kappa r') \right\} \right] \\
&\left\{ \left[\underbrace{\left[-I_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa) I_2(s^{(2)} \kappa r') \right]}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{23}} + \underbrace{\frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} I_1(s^{(3)} \kappa r') A^{(3)} + \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} I_2(s^{(3)} \kappa r') B^{(3)}}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{25}} \right] \right. \\
&\left. \left[\underbrace{\left[K_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa) K_2(s^{(2)} \kappa r') \right]}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{24}} + \underbrace{\left[B^{(2)} - \frac{s^{(3)}}{s^{(2)}} K_1(s^{(3)} \kappa r') B^{(3)} \right]}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{26}} \right] \right\} \Big|_{r'=\lambda_2^{(1)}\kappa R \left(1+\frac{h_1}{R}+\frac{h_2}{R}\right)} = 0 \tag{3.43}
\end{aligned}$$

$$\alpha_{11} = \begin{cases} \left[\underbrace{J_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) J_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{41}} \right] , s^{(1)} > 0 \\ \left[\underbrace{-I_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) I_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{41}} \right] , s^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{12} = \begin{cases} \left[\underbrace{Y_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) Y_2(s^{(1)} \kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right] , s^{(1)} > 0 \\ \left[\underbrace{\left[K_1(s^{(1)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(1)}} (s^{(1)} \kappa) K_2(s^{(1)} \kappa r') \right]}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right] , s^{(1)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{23} = \begin{cases} \left[\underbrace{J_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa) J_2(s^{(2)} \kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{23}} \right] , s^{(2)} > 0 \\ \left[\underbrace{-I_1(s^{(2)} \kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}} (s^{(2)} \kappa) I_2(s^{(2)} \kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{23}} \right] , s^{(2)} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{24} = \begin{cases} \left[\underbrace{Y_1(s^{(2)}\kappa r') - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}}(s^{(2)}\kappa)Y_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 > 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right], s^{(2)} > 0 \\ \left[\underbrace{\underbrace{K_1(s^{(2)}\kappa r')}_0 - \frac{RF}{\lambda_3^{(2)}}(s^{(2)}\kappa)K_2(s^{(2)}\kappa r')}_{s^2 < 0 \Rightarrow \alpha_{42}} \right], s^{(2)} < 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

İdeal olmayan temas koşullarında üç katlı içi boş bileşik silindirin asimtotik ifadesi ise:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \underbrace{J_1(x_1)} - \frac{x_1 F}{\zeta_1 \lambda_2^{(1)} \lambda_3^{(1)}} J_2(x_1) = \frac{x_1}{2} - \frac{x_1^3 F}{8 \zeta_1 \lambda_2^{(1)} \lambda_3^{(1)}} \\ \alpha_{12} &= Y_1(x_1) - \frac{x_1 F}{\zeta_1 \lambda_2^{(1)} \lambda_3^{(1)}} Y_2(x_1) = \frac{4F}{\pi \alpha_1 \zeta_1 \lambda_2^{(1)} \lambda_3^{(1)}} - \frac{2}{\pi \alpha_1} \\ \alpha_{23} &= \underbrace{J_1(x_3)} - \frac{x_3 F}{\zeta_2 \lambda_2^{(2)} \lambda_3^{(2)}} J_2(x_3) = \frac{x_3}{2} - \frac{x_3^3 F}{8 \zeta_2 \lambda_2^{(2)} \lambda_3^{(2)}} \\ \alpha_{24} &= Y_1(x_3) - \frac{x_3 F}{\zeta_2 \lambda_2^{(2)} \lambda_3^{(2)}} Y_2(x_3) = \frac{4F}{\pi \alpha_3 \zeta_2 \lambda_2^{(2)} \lambda_3^{(2)}} - \frac{2}{\pi \alpha_3} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Gerekli dönüşüm ve sadeleştirmeler yapıldığında içinde F bulunan ifade $(kR)^2$ içerdiğinden sadeleşerek burulma dalgalarının birinci modunun faz hızı $(kR \rightarrow 0)$ limitinde) ideal temas koşullarındakinin aynısı olarak (3.42)'deki gibi elde edilir.

Bu durum başlangıç koşullarında temas koşullarının ideal olmamasının (F'in değişiminin) burulma dalgalarının yayılım hızının $kR \rightarrow 0$ 'daki limit değerine etki etmediğini göstermektedir.

3.4 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

Problemin çözümü için kullanılan algoritmanın doğruluğu [51] çalışmasında yer alan benzer durumlar için denenerek test edildikten sonar, F temas koşullarının dalga yayılımına etkisini araştırmak üzere $c/c_2^{(1)}$ ve kR grafikleri elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

[51] çalışmasında üç katlı içi boş bileşik silindirlerle ilgili ulaşılan sonuçlar;

- Orta katmanın sertleşmesinin dalga yayılım hızında azalmaya sebep olduğu Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te,
- Orta katmanın kalınlığının artmasının dalga yayılım hızında azalmaya sebep olduğu Şekil 3.14'de,
- Silindir katmanlarındaki önçekmenin (önbasınç) burulma dalga yayılım hızında artışa (azalışa) sebep olduğu Şekil 3.28'de,
- Önşekildeğiştirmenin sadece dış katmanda olması durumunda dalga yayılım hızındaki artışın çok daha belirgin olduğu Şekil 3.22, Şekil 3.23 ve Şekil 3.24'te benzer olarak bulunmuştur.

Sonlu önşekildeğiştirmesi olan durumlar için yapılan [51], [52], [53] ve [54] çalışmalarında tespit edilen bulgular, temas koşullarını simüle eden F parametresinin $F=0$ olarak belirlendiği durumlarda benzer sonuçları vermiştir. Bu durum matematik modelin ve algoritmanın doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Üç katlı içi boş bileşik silindirlerde temas koşullarını simüle eden F parametresinin etkisi, katman malzemelerinin sertlik durumuna, katmanların et kalınlıklarına ve önşekildeğiştirme (önçekme/önbasınç) durumuna göre incelenmiştir.

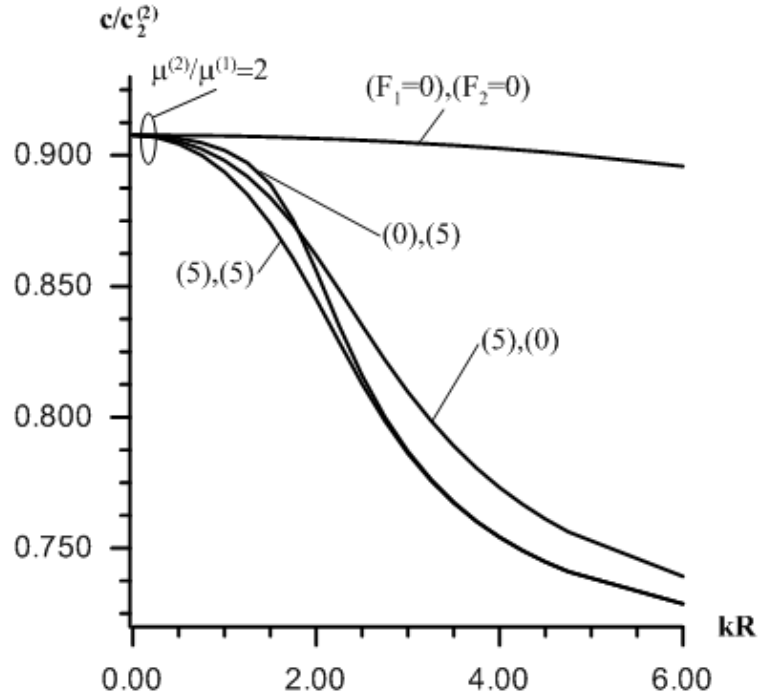
Temas koşullarını simüle eden F parametresinin etkisi ile ilgili olarak, aynı şartlarda matematik modelin doğrulanacağı bir çalışma bulunmamaktadır. Bununla birlikte öngörilmelerle oluşan önşekildeğiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla yapılan iki katlı silindirler ile ilgili çalışmalar literatürde mevcuttur. 2. Bölüm'de yapılan değerlendirmeler ışığında, üç katlı silindirlerle ilgili matematik model ve algoritmanın da doğruluğu $\mu^{(3)} = 0$ durumunda görülmektedir.

Üç katlı içi boş bileşik silindirlerde iki adet temas yüzeyi bulunmaktadır. F_1 parametresi iç katman ile orta katman, F_2 ise orta ile dıştaki katman arasındaki temas koşullarını karakterize etmektedir. Temas koşullarının ideal olmaması durumunu ifade eden $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi, problemin diğer parametrelerinin değişimi ile birlikte incelenmiştir. Aynı zamanda, öngörilmenin

$\lambda_3 (= \lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)})$ temas koşullarıyla olan ilgisi araştırılmıştır. Yapılan çalışmalarda malzeme yoğunlukları eşit $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)}$ olarak düşünülmüştür.

Katman malzemelerinin sertleşmesinin dalga yayılım hızında temas koşullarıyla olan ilişkisi Şekil 3.2 ile Şekil 3.9 arasında verilen grafikler üzerinden incelenecektir.

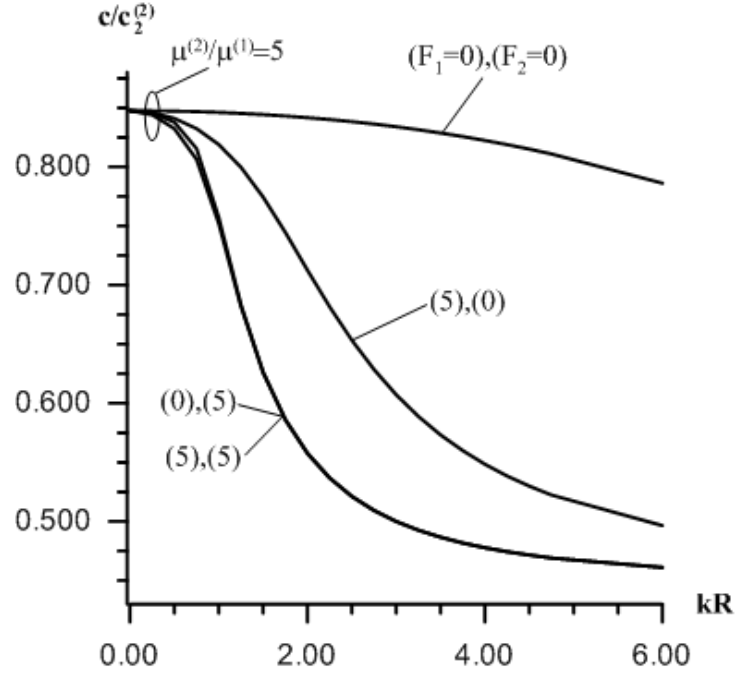
Yapılan çalışmalarda üç katmandan ikisinin eşit sertlikte olduğu kabul edilmiş ve incelenecek katmanın sertlik değerleri değiştirilerek grafikler elde edilmiştir.



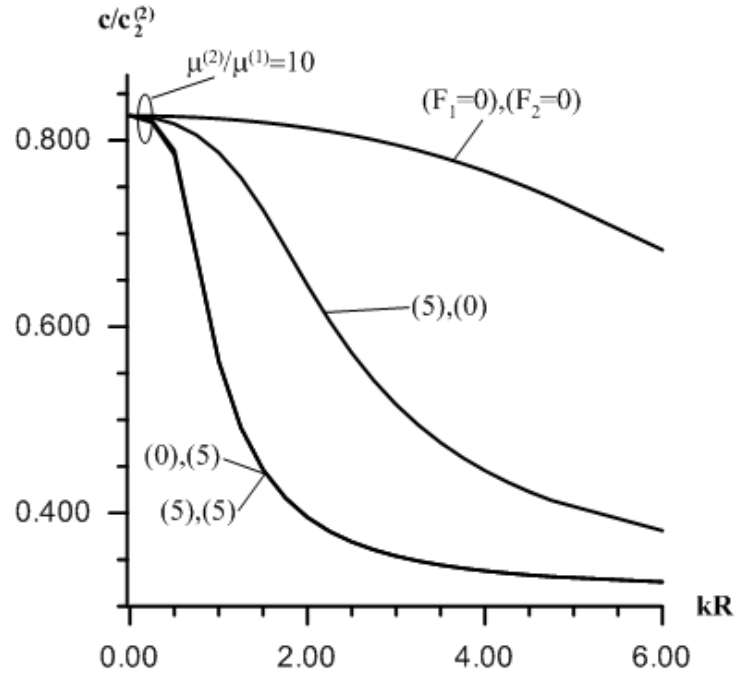
Şekil 3.2 Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$, $\lambda_3 = 1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2$)

Şekil 3.2’de ortadaki silindirin diğerlerinden daha sert olduğu durum için $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2$ önerilme olmadan $F(F_1, F_2)$ parametresinin $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisine etkisi incelenmiştir.

Başlangıç koşullarında temas koşullarının ideal olmamasının ($F(F_1, F_2) > 0$) burulma dalgalarının yayılım hızının $kR \rightarrow 0$ ’daki limit değerine etki etmediği Şekil 3.2’de açıkça görülmektedir.

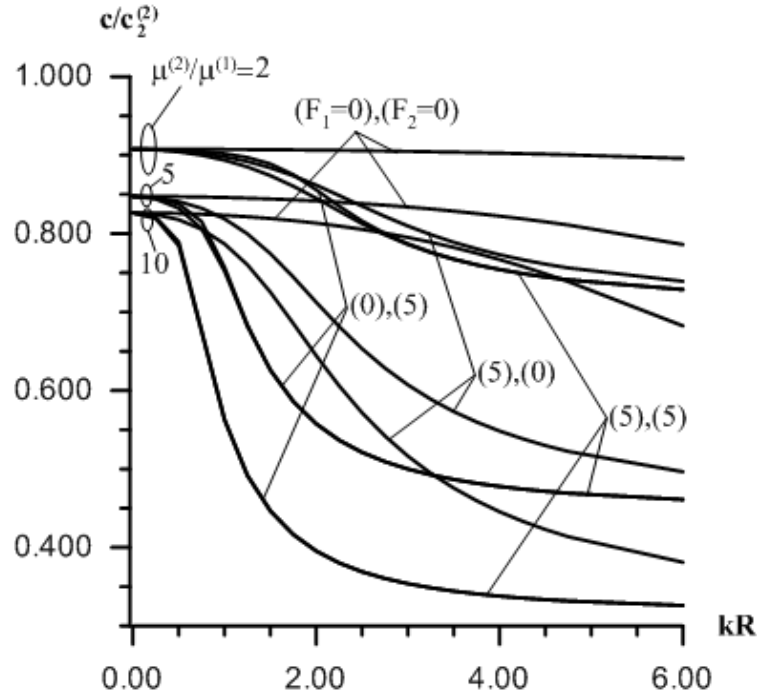


Şekil 3.3 Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$, $\lambda_3 = 1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 5$)



Şekil 3.4 Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$, $\lambda_3 = 1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 10$)

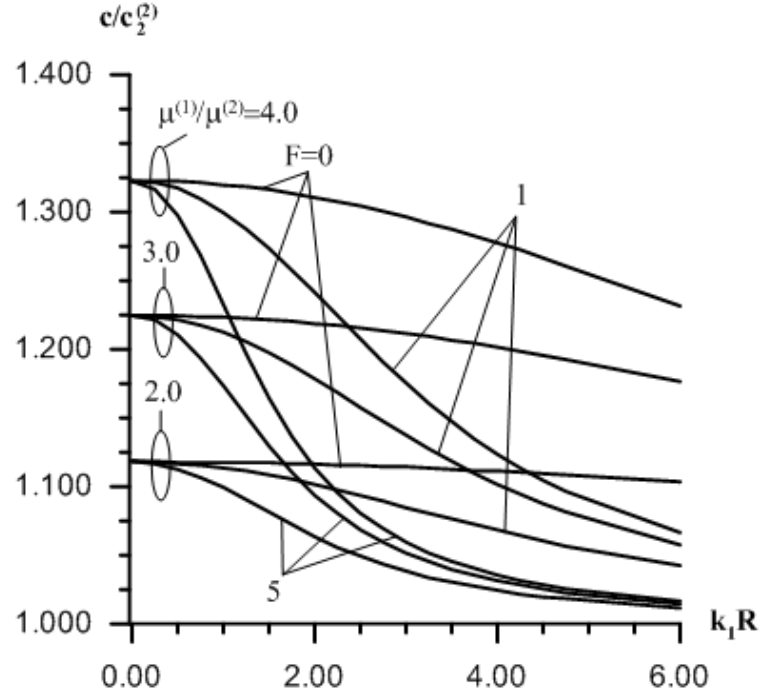
Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te ortadaki silindirin diğerlerinden çok daha sert olduğu durumlar için $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 5$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 10$ öngerilme olmadan $F(F_1, F_2)$ parametresinin $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisine etkisi incelenmiştir.



Şekil 3.5 Orta silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$ ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$)

Şekil 3.5'te ise ortadaki silindirin sertleşmesinin $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2$, $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 5$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 10$ öngerilme olmadan $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$, $F(F_1, F_2)$ parametresinin $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisine etkisi aynı grafik üzerinde incelenmiştir.

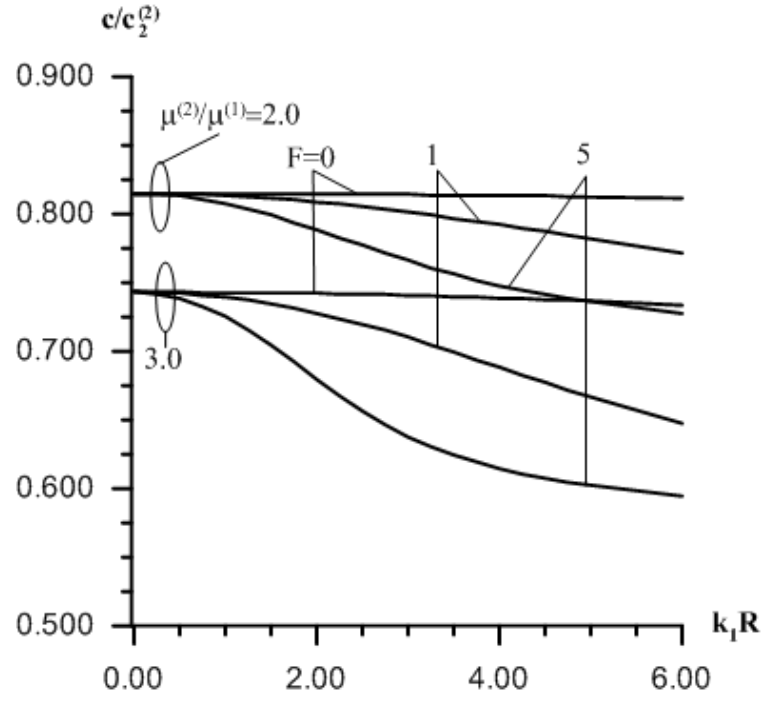
Ortadaki silindirin sertleşmesiyle $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$ birlikte F_1 ve F_2 parametrelerinin dalga yayılım hızına etkilerinin farklılık arz ettiği görülmektedir. F_2 artışının F_1 'e göre dalga yayılım hızında daha etkili olduğunu söylemek mümkündür. F_2 arttıkça dalga yayılım hızının daha da belirgin bir şekilde azaldığı gözlemlenmektedir. Şekil 3.5 incelendiğinde, $F(F_1, F_2) \rightarrow F(0, 5)$ ve $F(F_1, F_2) \rightarrow F(5, 5)$ F_2 'nin yüksek değerlerinde dispersiyon eğrilerinin üst üste çakıştığı görülmektedir.



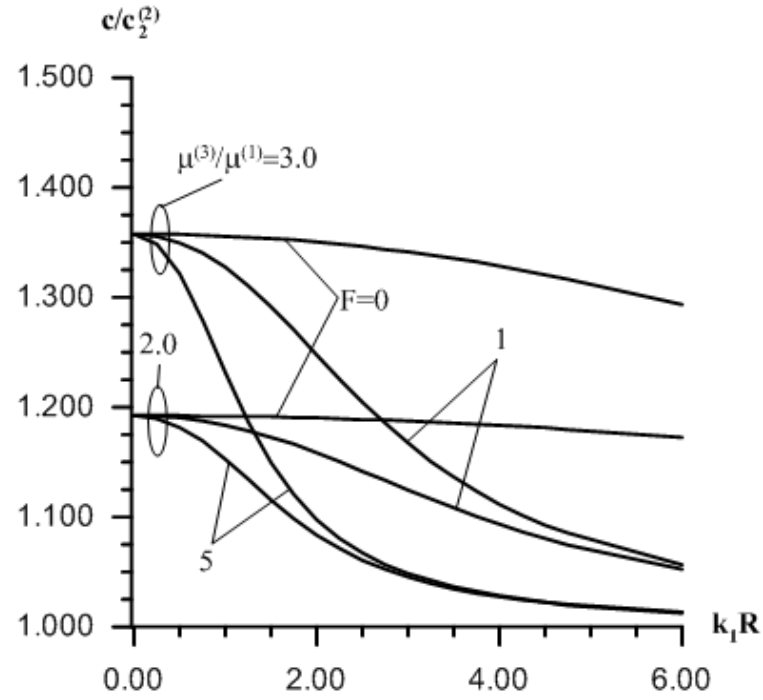
Şekil 3.6 İçteki silindirin sert olması ($\mu^{(1)} > (\mu^{(2)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$)

Şekil 3.6'da içteki silindirin diğerlerinden daha sert olduğu durum için ($\mu^{(1)} > (\mu^{(2)} = \mu^{(3)})$), öngerilme olmadan F parametresinin $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisine etkisi incelenmiştir.

Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de ise ortadaki ve dıştaki silindirlerin diğerlerinden daha sert olduğu durumlar için ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$ ve $\mu^{(3)} > \mu^{(1)} = \mu^{(2)}$), öngerilme olmadan F parametresinin $c/c_2^{(1)}$ ve kR ilişkisine etkisi incelenmiştir.

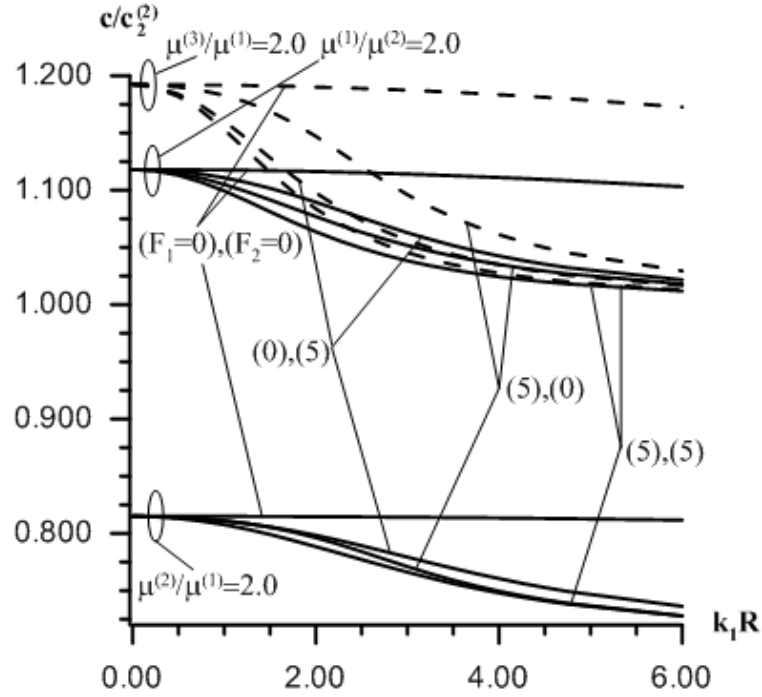


Şekil 3.7 Ortadaki silindirin sert olması ($\mu^{(2)} > (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$)



Şekil 3.8 Dıştaki silindirin sert olması ($\mu^{(3)} > \mu^{(1)} = \mu^{(2)}$) durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$)

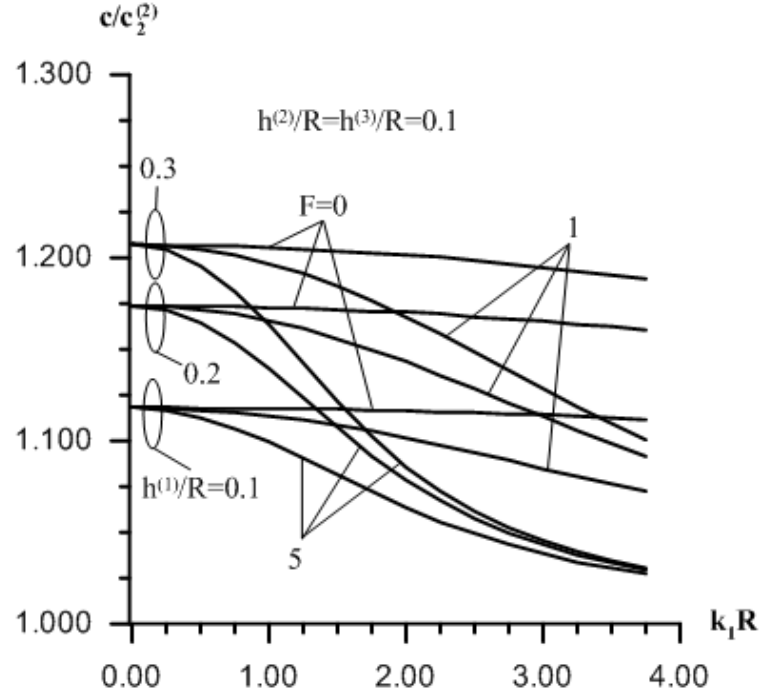
Silindir katmanı malzemelerinin sertleşmesiyle birlikte dalga yayılım hızının arttığı/azaldığı görülmektedir. Ortadaki katman sertleştikçe dalga yayılım hızı azalmakta, iç ve dıştaki katman sertleştikçe dalga yayılım hızı artmaktadır. Bu noktada dıştaki katmanın sertleşmesinin dalga yayılım hızının artmasında daha fazla tesiri olduğu Şekil 3.8 ve 3.9 incelendiğinde görülmektedir. Elde edilen veriler daha önce yapılan çalışmalarla örtüşmektedir. Bu husus algoritmanın doğruluğunu göstermektedir.



Şekil 3.9 Silindirlerin sertleşmesidurumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi

$$(\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1 \text{ ve } h^{(1)} / R = h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1)$$

Silindir katmanlarının et kalınlıkları değişiminin (h/R) dalga yayılım hızında temas koşullarıyla $F(F_1, F_2)$ olan ilişkisi Şekil 3.10 ile Şekil 3.15 arasında verilen grafikler üzerinden incelenecektir.



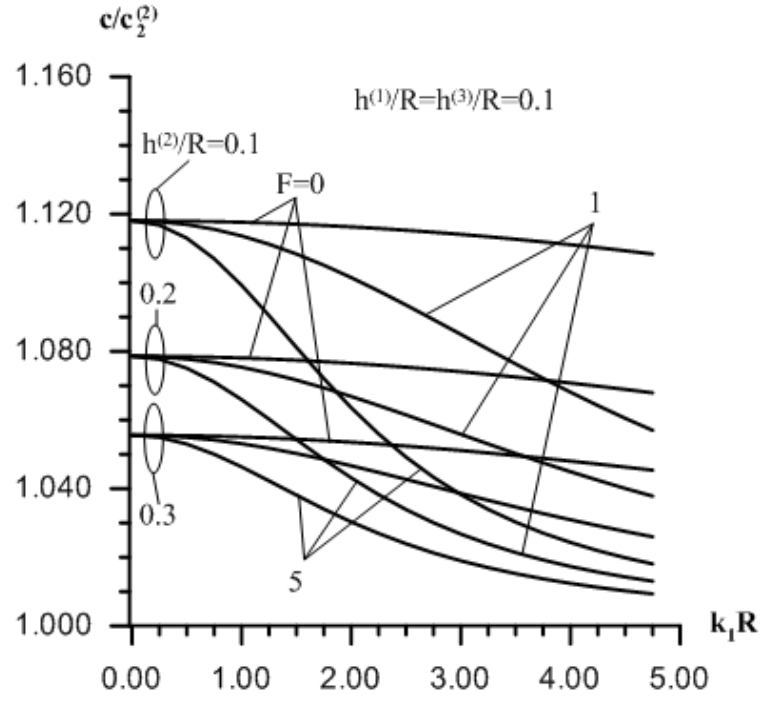
Şekil 3.10 İçteki silindirin et kalınlığı $h^{(1)}/R$ değişimi durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)}/(\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)

Öncelikle, her iki arayüz arasındaki temas koşullarının da aynı olduğu $F(F_1 = F_2)$ ve içteki silindirin diğerlerinden daha sert olduğu $\mu^{(1)}/(\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$ kabul edilmiştir.

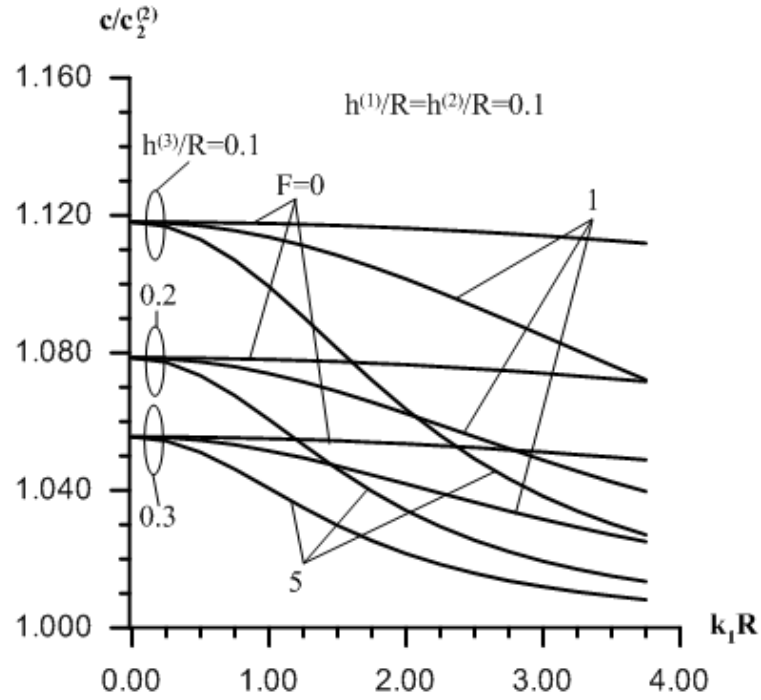
Şekil 3.10'da içteki silindirin et kalınlığı artışının dalga yayılım hızını artırdığı, bununla birlikte temas koşullarının kötüleşmesinin $F(F_1 = F_2) > 0$ et kalınlığı arttıkça etkisini daha fazla artırdığı görülmektedir.

Şekil 3.11'de ortadaki silindirin et kalınlığı artışının dalga yayılım hızını azalttığı, temas koşullarının kötüleşmesinin $F(F_1 = F_2) > 0$ dalga yayılım hızının yüksek olduğu değerlerde, yani ortadaki silindirin et kalınlığının az olduğu durumda daha etkin olduğu görülmektedir.

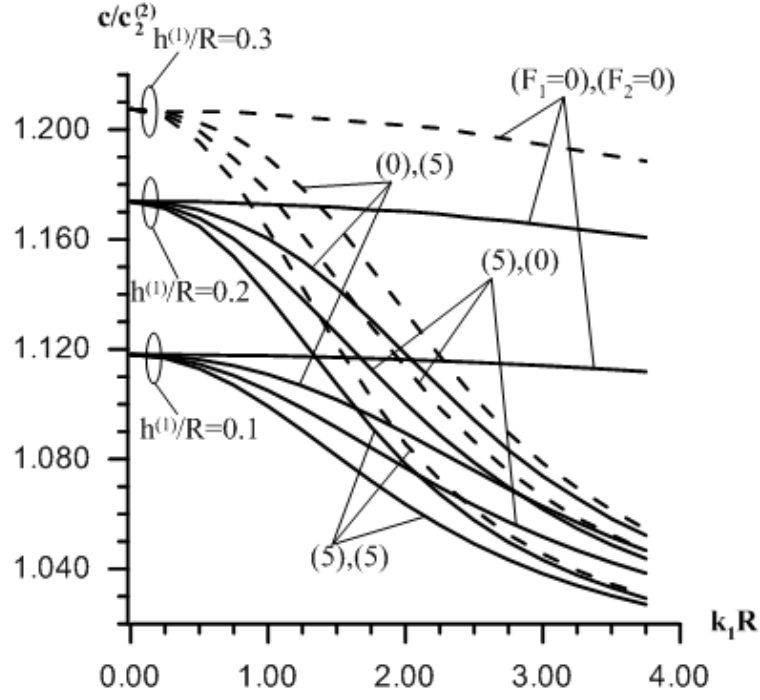
Şekil 3.12'de ise dıştaki silindirin et kalınlığı artışının dalga yayılım hızını azalttığı, Şekil 3.11'de olduğu gibi, temas koşullarının kötüleşmesinin $F(F_1 = F_2) > 0$ dalga yayılım hızının yüksek olduğu değerlerde, yani dıştaki silindirin et kalınlığının az olduğu durumda daha etkin olduğu görülmektedir.



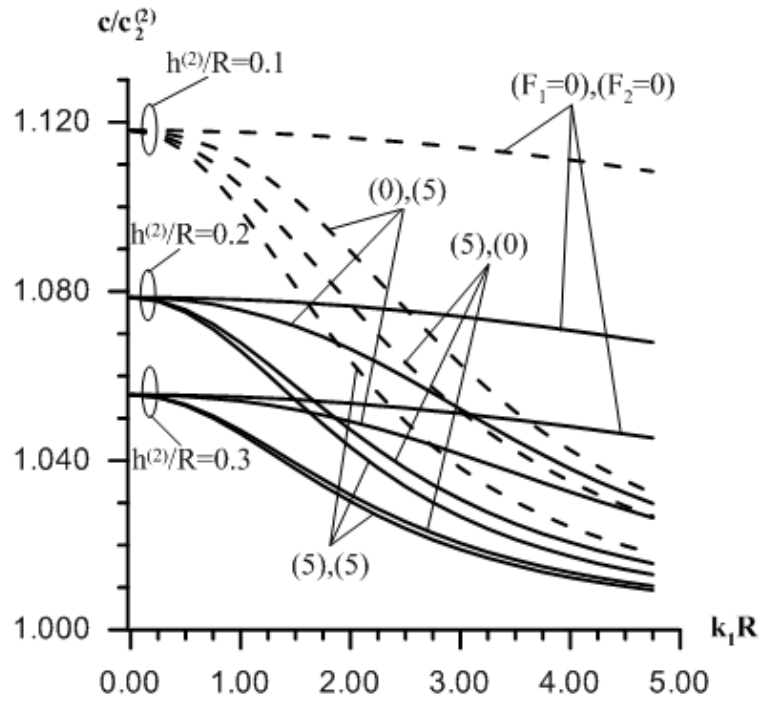
Şekil 3.11 Ortadaki silindirin et kalınlığı $h^{(2)}/R$ değişimi durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)}/(\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)



Şekil 3.12 Dıştaki silindirin et kalınlığı $h^{(3)}/R$ değişimi durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)}/(\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)



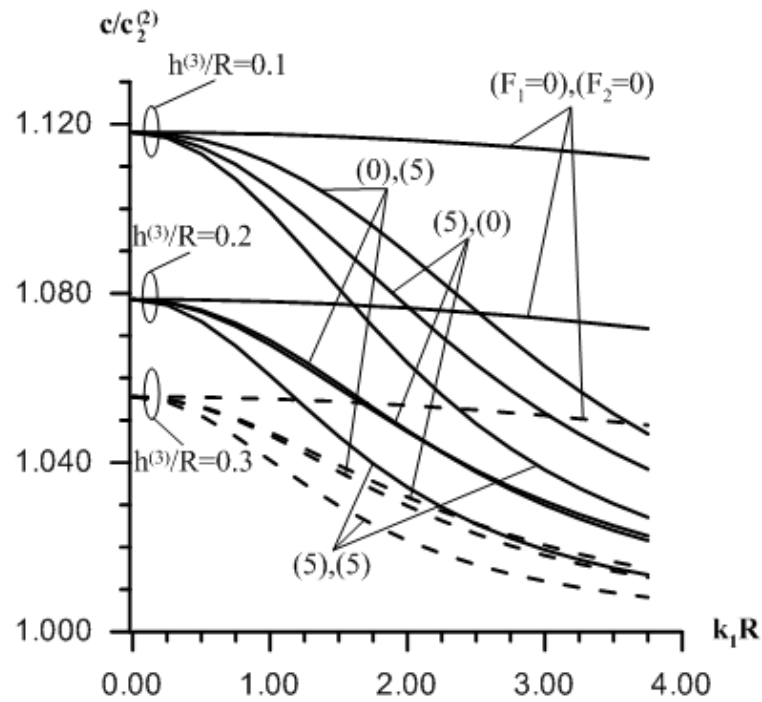
Şekil 3.13 İçteki silindirin et kalınlığı $h^{(1)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$, $h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)



Şekil 3.14 Ortadaki silindirin et kalınlığı $h^{(2)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$, $h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)

Şekil 3.13, Şekil 3.14 ve Şekil 3.15'te silindir et kalınlıklarının artışının/azalışının dalga yayılım hızına olan etkisi $F(F_1, F_2)$ şartlarında incelenecektir. Arayüzler arasında temas koşullarının farklılık arz etmesi durumu incelendiğinde;

- Silindir et kalınlıkları değişiminde F_1 ve F_2 parametrelerinin dalga yayılım hızına etkilerinin farklılık arz ettiği görülmektedir.
- F_2 artışının F_1 'e göre dalga yayılım hızında daha etkili olduğunu söylemek mümkündür.
- F_2 arttıkça dalga yayılım hızının daha da belirgin bir şekilde azaldığı gözlemlenmektedir.
- Şekil 3.15 incelendiğinde, $F(F_1, F_2) \rightarrow F(0, 5)$ ve $F(F_1, F_2) \rightarrow F(5, 5)$ F_2 'nin yüksek değerlerinde dispersiyon eğrilerinin üst üste çakıştığı görülmektedir.

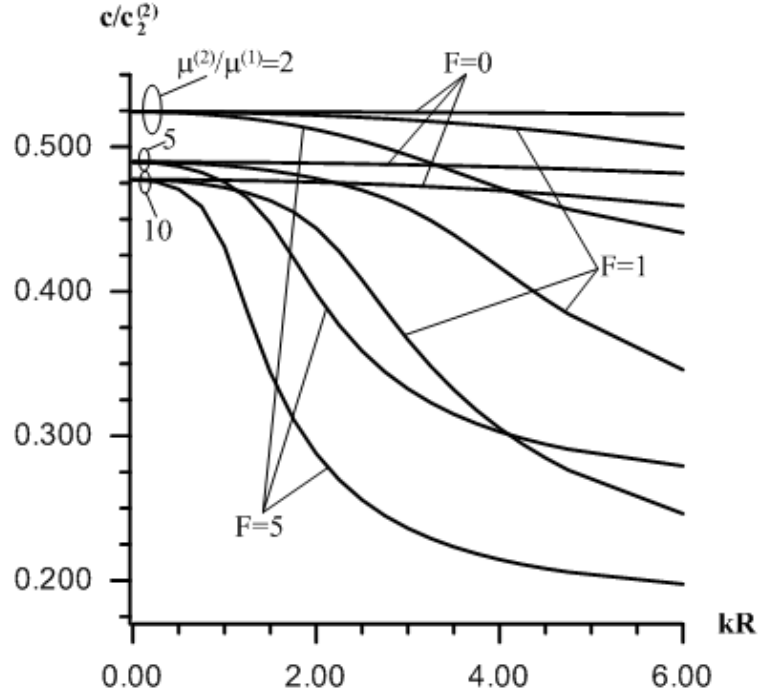


Şekil 3.15 Dıştaki silindirin et kalınlığı $h^{(3)} / R$ değişimi durumunda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$, $h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(1)} / (\mu^{(2)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)

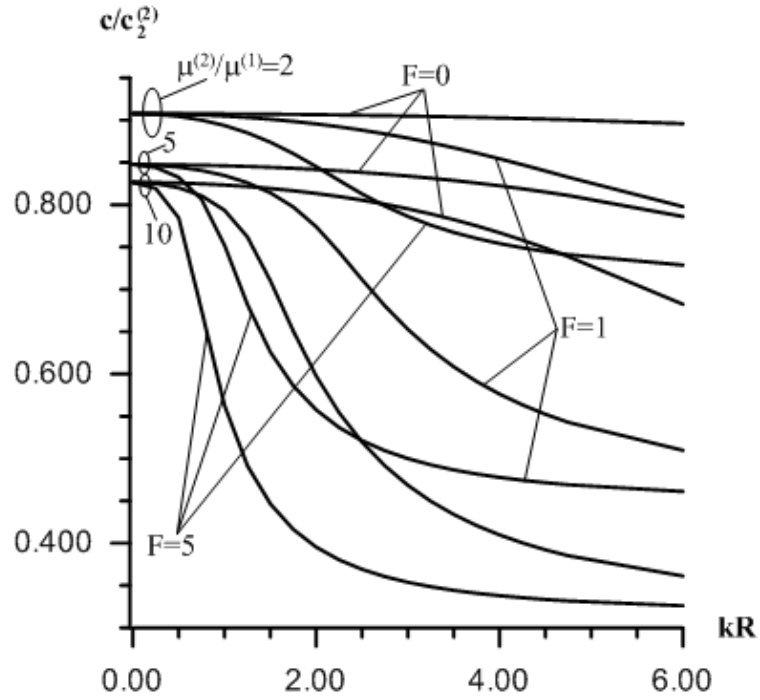
Öngerilmenin dalga yayılım hızına etkisi ve temas koşullarının da değişimiyle birlikte elde edilen grafikler üzerinden incelenecektir.

Öncelikle, $F_1 = F_2$, $\mu^{(1)} = \mu^{(3)}$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $h^{(2)} / R = 0.4$ ve $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)}$ durumu ele alınmıştır. Ortadaki silindirin sertleşmesinin F parametresi ile birlikte etkisi farklı önşekildeğiştirme durumlarında $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$ (Şekil 3.16), $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ (Şekil 3.17) ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$ olmak üzere (Şekil 3.18) ele alınmıştır. Grafikler incelendiğinde:

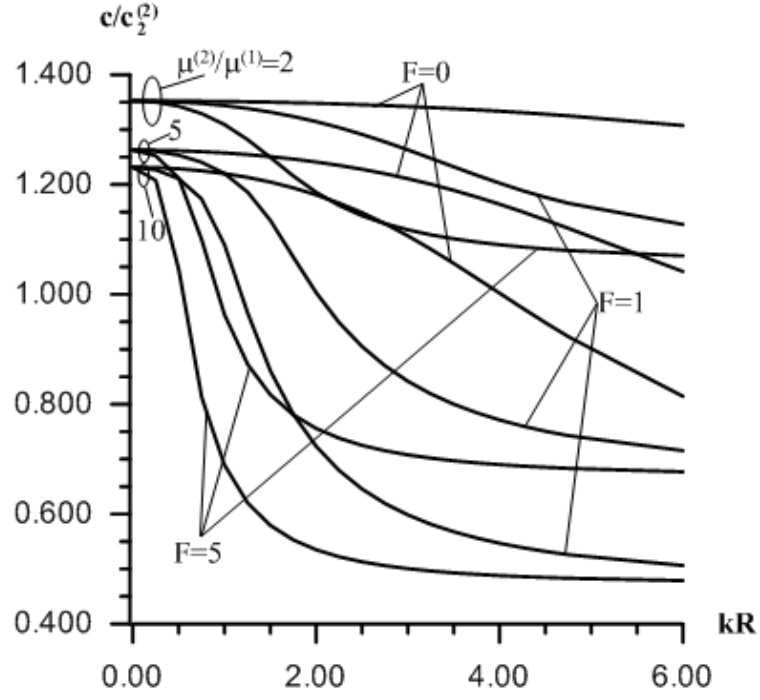
- Ortadaki silindirin sertleşmesiyle birlikte ($\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$ arttıkça) dalga yayılım hızının $c/c_2^{(2)}$ azaldığı görülmektedir.
- Diğer tüm örneklerde olduğu gibi F parametresi arttıkça dalga yayılım hızı azalmaktadır.
- Önşekildeğiştirmenin olmadığı ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$) Şekil 3.17 incelendiğinde, $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$ arttıkça F parametresinin ekisinin daha da belirginleştiği görülmektedir.
- Şekil 3.16, Şekil 3.17 ve Şekil 3.18 birlikte değerlendirildiğinde ise parçadaki önşekildeğiştirmenin artmasıyla birlikte F parametresinin etkisinin oldukça arttığı ve dalga yayılım hızını önemli ölçüde azalttığı görülmektedir.



Şekil 3.16 Önbasinç halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$) ortadaki silindirin sertleşmesi durumlarında $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)

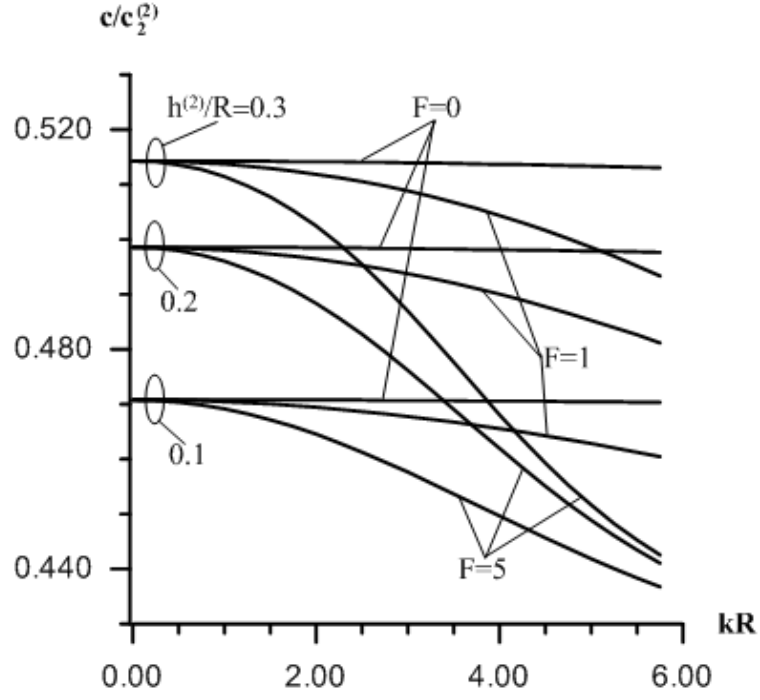


Şekil 3.17 Öngerilme olmadan ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$) ortadaki silindirin sertleşmesi durumlarında $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)



Şekil 3.18 Önçekme halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$) ortadaki silindirin sertleşmesi durumlarında $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)

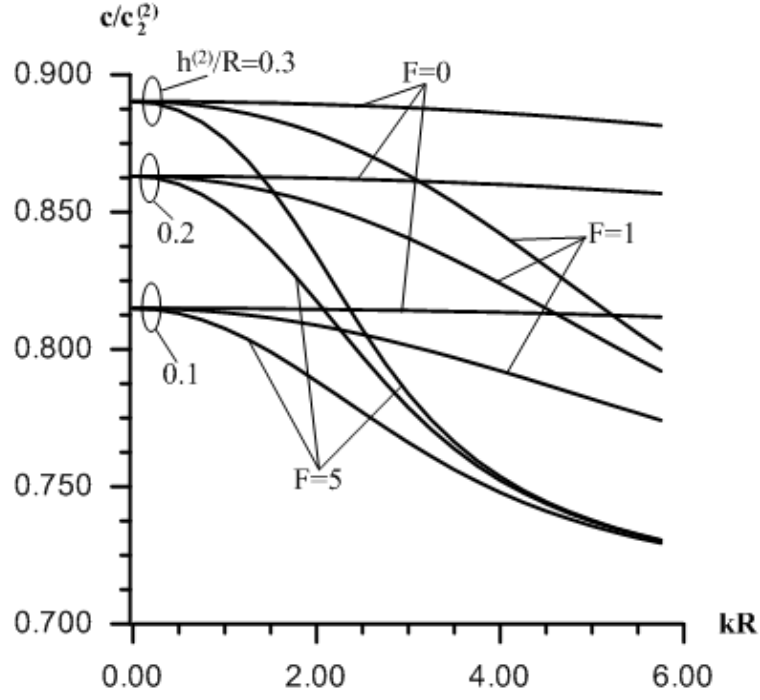
Mekanik prensiplerine göre ortadaki silindirin et kalınlığının $h^{(2)} / R$ artmasıyla birlikte dalga yayılım hızı $c / c_2^{(2)}$ artmalıdır. Bu tahmin, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(2)} / \mu^{(1)} = 2.0$ durumunda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$ (Şekil 3.19), $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ (Şekil 3.20) ve $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$ (Şekil 3.21) olacak şekilde farklı $h^{(2)} / R$ değerleri için incelenmiş ve doğrulanmıştır.



Şekil 3.19 Önbasinç halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$) ortadaki silindirin et kalınlığının $h^{(2)} / R$ artması durumunda $F (F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)

Belirlenen durum için grafikler incelendiğinde:

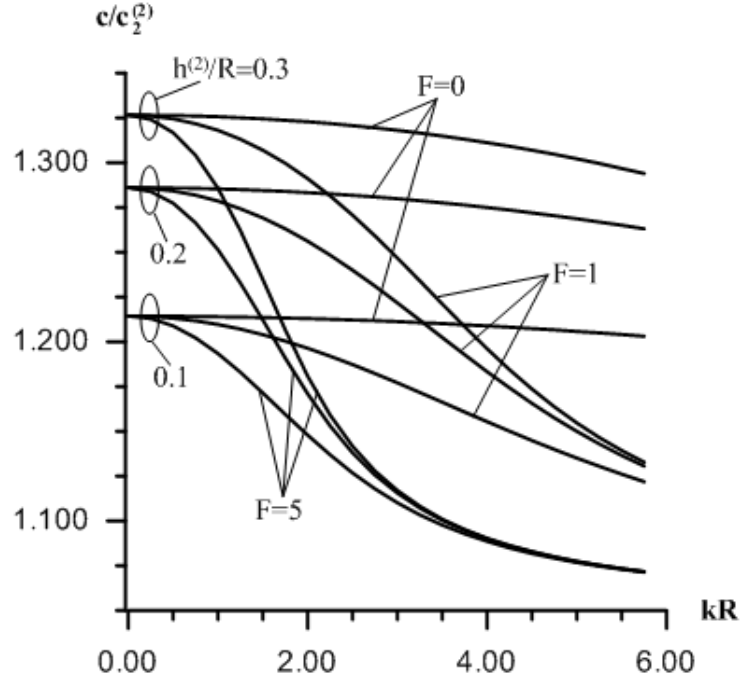
- Şekil 3.20’de görüldüğü gibi, dalga yayılım hızı $h^{(2)} / R$ ile birlikte artmaktadır.
- Buna paralel olarak temas koşulunu simüle eden F parametresinin artmasıyla birlikte dalga yayılım hızı oldukça düşmektedir.
- Bununla birlikte, parçadaki önşekildeğiştirmenin artmasıyla birlikte F parametresinin etkisinin oldukça arttığı ve dalga yayılım hızını önemli ölçüde azalttığı Şekil 3.19, Şekil 3.20 ve Şekil 3.21 birlikte değerlendirildiğinde görülmektedir.



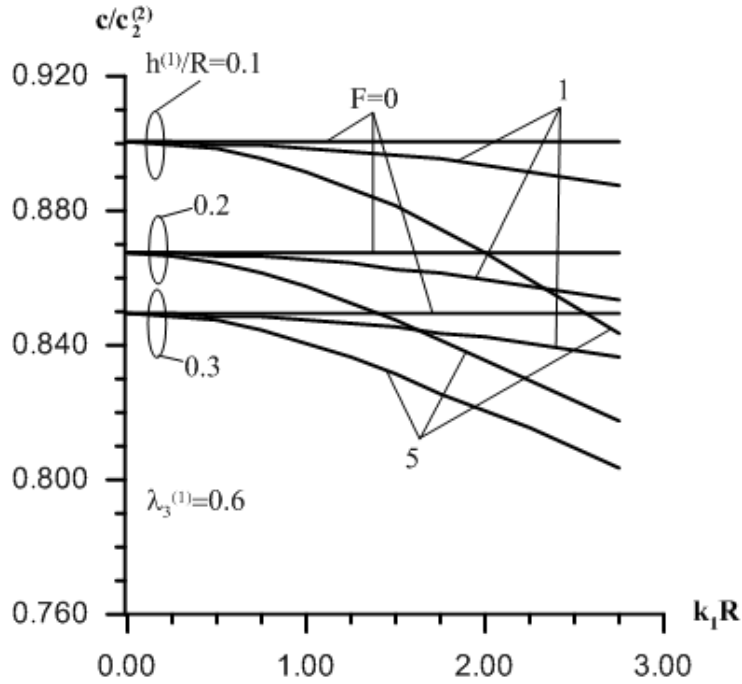
Şekil 3.20 Öngerilme olmadan $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ortadaki silindirin et kalınlığının $h^{(2)}/R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi
 $(h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1 \text{ ve } \mu^{(2)}/(\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0)$

Ele alınan tüm örnek durumlarda, $kR \rightarrow 0$ için dalga yayılım hızının limit değerinin F parametresinden bağımsız olarak aynı olduğu görülmektedir. F parametresinin etkisi boyutsuz dalga sayısı olan kR boyunca azalmaktadır.

Sonuçta dalga yayılım hızı, $kR \rightarrow \infty$ durumunda $\min \{c_2^{(1)}(\lambda_3^{(1)}), c_2^{(2)}(\lambda_3^{(2)})\}$ değerine yaklaşır ki burada $c_R^{(m)} (m=1, 2, 3)$ m'inci malzemenin Rayleigh dalga hızıdır. Dolayısıyla, burulma dalgası yayılım hızının yüksek dalga boyu sınır değeri aynı şekilde F parametresine bağlı değildir.

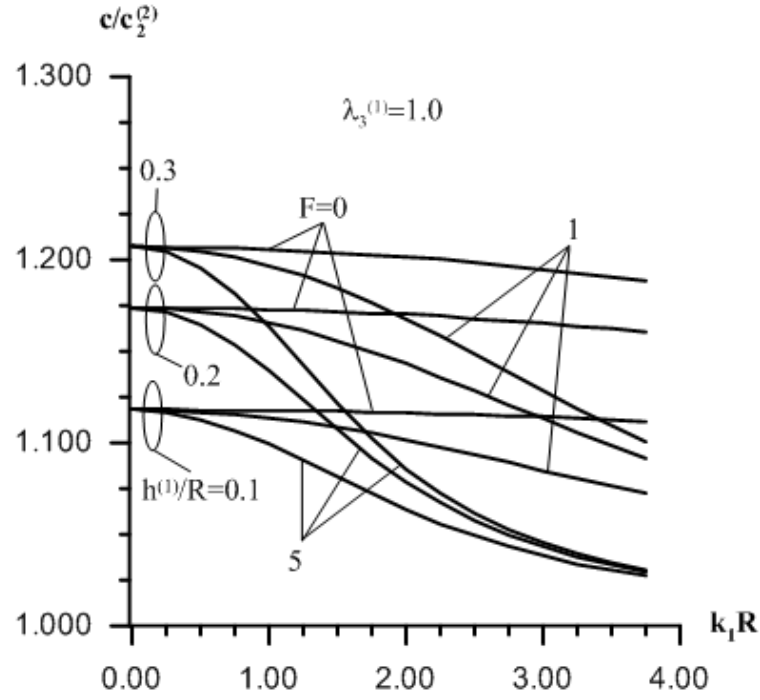


Şekil 3.21 Önçekme halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$) ortadaki silindirin et kalınlığının $h^{(2)}/R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$ ve $\mu^{(2)}/(\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$)



Şekil 3.22 İçteki silindir önbasıncı halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = 0.6$) içteki silindirin et kalınlığının $h^{(1)}/R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(2)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $\lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = 2.0$)

Öngerilmenin sadece içteki silindirde olduğu düşünülerek, dalga yayılım hızı değişimi $h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $\mu^{(1)} / \mu^{(2)} = 2.0$ durumunda $\lambda_3^{(1)} = 0.6$ (Şekil 3.22), $\lambda_3^{(1)} = 1$ (Şekil 3.23) ve $\lambda_3^{(1)} = 1.4$ (Şekil 3.24) olacak şekilde farklı $h^{(1)} / R$ değerleri için incelenmiştir. Temas koşullarının değişimi durumuna bağlı olarak elde edilen grafikler yorumlanmıştır.

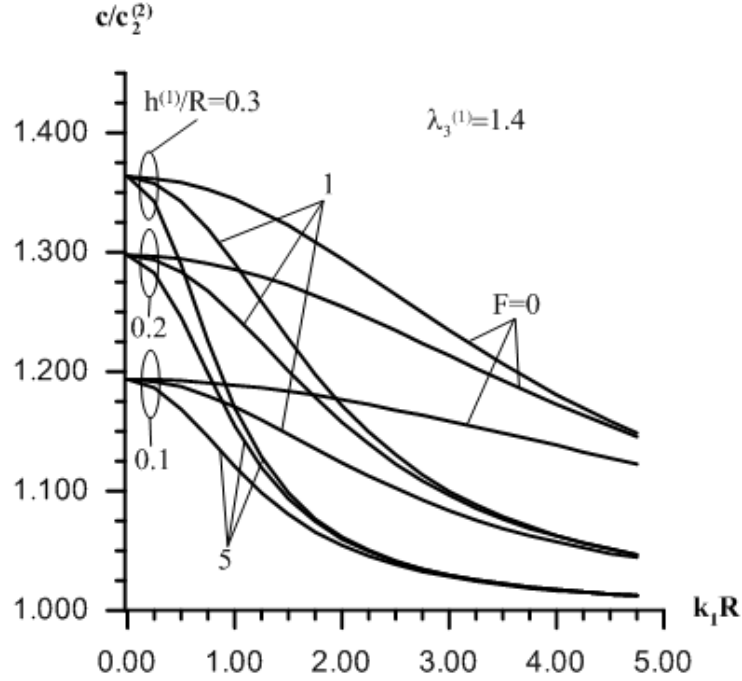


Şekil 3.23 İçteki silindirde öngerilme olmadan ($\lambda_3^{(1)} = 1$) içteki silindirin et kalınlığının $h^{(1)} / R$ artması durumunda $F (F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(2)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$, $\lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)} / \mu^{(2)} = 2.0$)

Belirlenen durum için grafikler incelendiğinde:

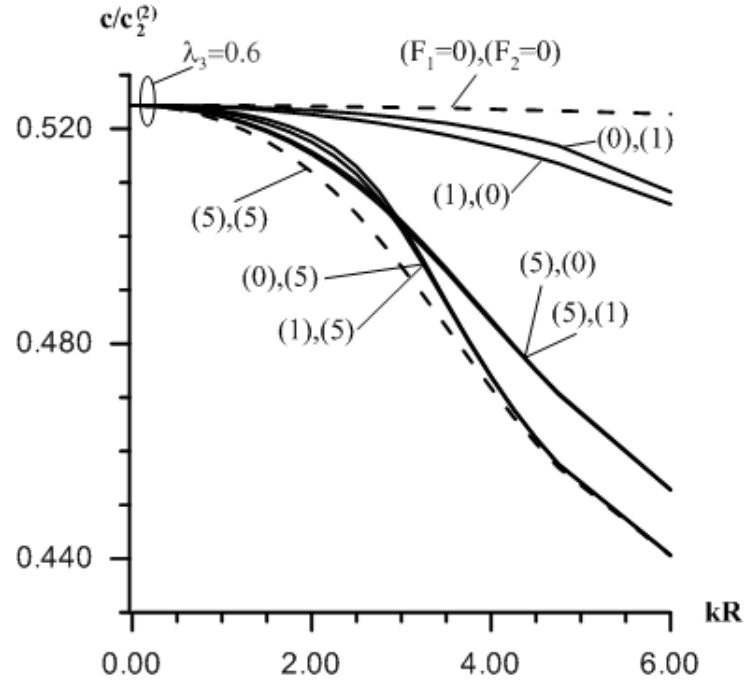
- Şekil 3.23’de görüldüğü gibi içteki silindirde öngerilme olmadığı zaman, dalga yayılım hızı $h^{(1)} / R$ ile birlikte artmaktadır.
- Önbasınç olduğu zaman Şekil 3.22’de görüldüğü gibi dalga yayılım hızı $h^{(1)} / R$ ile birlikte azalmaktadır.
- Öncekme olduğu zaman ise Şekil 3.24’te görüldüğü gibi dalga yayılım hızı $h^{(1)} / R$ ile birlikte oldukça artmaktadır.
- Buna paralel olarak temas koşulunu simüle eden F parametresinin artmasıyla birlikte dalga yayılım hızı oldukça düşmektedir.

- Bununla birlikte, parçadaki öñşekildeğıştirmenin artmasıyla birlikte F parametresinin etkisinin oldukça arttığı ve dalga yayılım hızını önemli ölçüde azalttığı Şekil 3.22, Şekil 3.23 ve Şekil 3.24 birlikte değeriendirildiğinde görülmektedir.

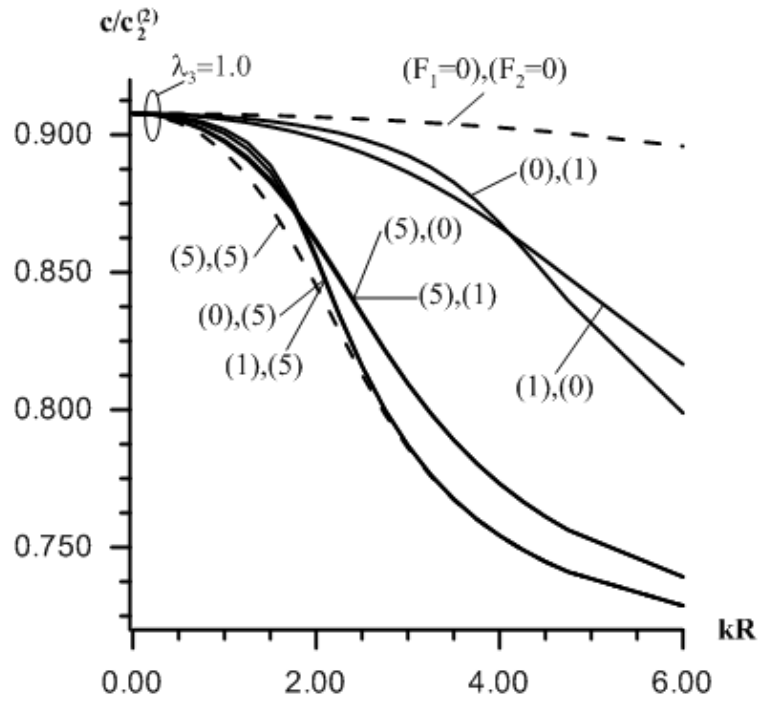


Şekil 3.24 İçteki silindir öñçekme halindeyken ($\lambda_3^{(1)} = 1.4$) içteki silindirin et kalınlığının $h^{(1)}/R$ artması durumunda $F(F_1 = F_2)$ parametresinin etkisi ($h^{(2)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$, $\lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ ve $\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = 2.0$)

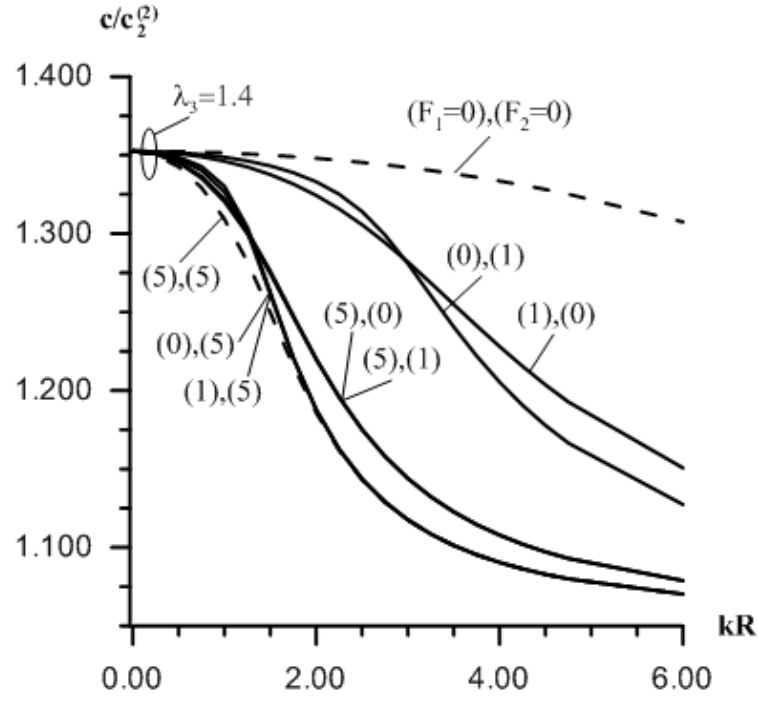
Silindirler arasındaki temas koşullarının farklı olduğu $F_1 \neq F_2$ durumu düşünelim. Ortadaki silindirin diğerlerine göre daha sert olduğu $\mu^{(2)}/(\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$, iç ve dıştaki silindirlerin et kalınlıklarının eşit $h^{(1)}/R = h^{(3)}/R = 0.1$ ve ortadaki silindirin et kalınlığının diğerlerinden fazla olduğu $h^{(2)}/R = 0.4$ koşuluyla, öñbasınç $\lambda_3 = 0.6$ (Şekil 3.25), öñgerilmesiz $\lambda_3 = 1.0$ (Şekil 3.26) ve öñçekme hali $\lambda_3 = 1.4$ (Şekil 3.27) ile birlikte F_1 ve F_2 parametrelerinin dalga yayılım hızına etkileri incelenmiştir. Öñşekildeğıştirmenin artmasıyla F_1 ve F_2 parametrelerinin etkisinin daha da belirgin hale geldiği ve F_2 artışının F_1 'e göre dalga yayılım hızında daha etkili olduğu görülmektedir.



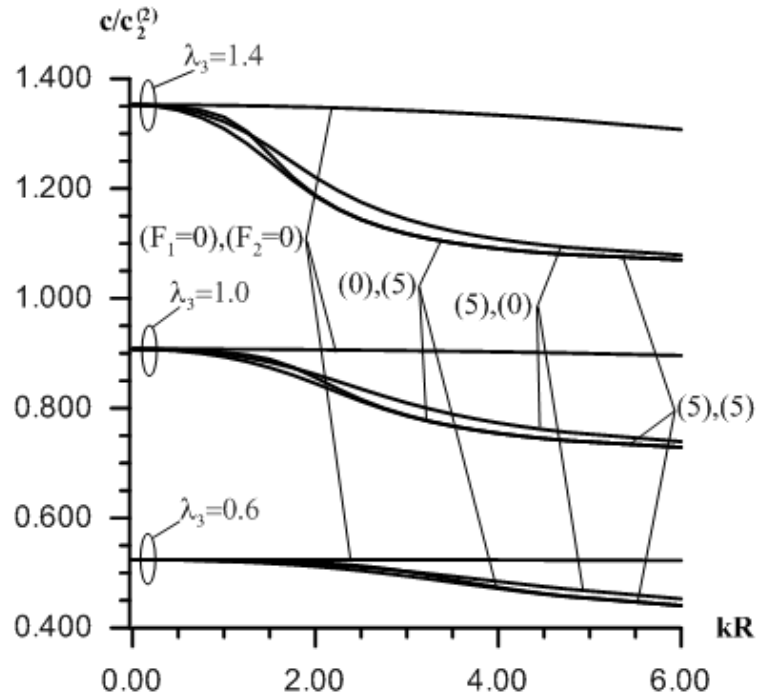
Şekil 3.25 Önbasinç $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 0.6$ halinde $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)



Şekil 3.26 Öngerilme olmaması $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$ halinde $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi ($\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) = 2.0$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)



Şekil 3.27 Öncekme $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1.4$ halinde $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi
 $(\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})) = 2.0$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)



Şekil 3.28 Öngerilmeli durumda $F(F_1, F_2)$ parametresinin etkisi
 $(\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})) = 2.0$, $h^{(1)} / R = h^{(3)} / R = 0.1$ ve $h^{(2)} / R = 0.4$)

Öngerilme halinin etkisi aynı grafik üzerinde daha net ortaya çıkmaktadır. Şekil 3.28 incelendiğinde, öçekme halinde dalga yayılım hızının arttığı, ancak temas koşullarının kötüleşmesinin $F(E_1, E_2) > 0$ etkisinin oldukça belirgin hale geldiği görülmektedir.

Bu tez çalışmasında, önşekildeğiştirmelerin sonlu olduğu ve elastisite ilişkilerinin harmonik potansiyel ile verildiği durumlar için, Öngerilmeli Cisimlerde Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖCÜDEDYT) uygulanarak; ideal olmayan temas koşullarının etkisi altında öngerilme, geometrik ve mekanik parametrelerin burulma dalga dispersiyonuna etkileri incelenmiştir.

Bu maksatla; iki katlı içi boş ve üç katlı içi boş bileşik silindirler için dispersiyon denklemleri çıkarılarak çözümlerinde kullanılacak algoritmalar oluşturulmuş, daha önce yapılan çalışmalarla uyumluluğu kontrol edildikten sonra, ideal olmayan temas koşullarının etkisinin sayısal sonuçları elde edilerek grafiklerle yorumlanmıştır.

Yapılan çalışmalarda malzeme yoğunlukları eşit $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)}$ olarak düşünülmüş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir;

İki katlı bileşik silindir için:

- $kR \rightarrow 0$ için dalga yayılım limit hızı aynıdır ve F parametresinden bağımsızdır,
- Temas koşullarının ideal olmaması dalga yayılım hızını bariz bir şekilde düşürmektedir.

Geometrik parametrenin yani et kalınlığı değişiminin etkisi:

- İçteki silindirin et kalınlığı $h^{(1)} / R$ arttıkça dalga yayılım hızı da artmaktadır,
- Dıştaki silindirin et kalınlığı $h^{(2)} / R$ arttıkça dalga yayılım hızı azalmaktadır,
- Ancak $h^{(2)} / R$ 'nin düşük değerlerinde, $h^{(1)} / R$ 'nin ise yüksek değerlerinde F parametresinin etkisinin daha fazla olduğu görülmektedir. Yani temas koşulları kötü ise burulma dalgalarının yayılım hızının daha az etkilenmesi

için dıştaki silindirin et kalınlığı artırılmalı ya da içteki silindirin et kalınlığı ise azaltılmalıdır,

- Bununla birlikte F parametresinin ekisinin $h^{(2)} / R$ azalışına oranla $h^{(1)} / R$ artışıyla daha belirgin olduğu görülmektedir.
- Her iki silindirin et kalınlıkları aynı miktarda artırıldığında F parametresinin etkisinin azaldığı gözlemlenmiştir. Bu durum bize dıştaki silindirin $h^{(2)} / R$ et kalınlığı artışının daha etkin olduğunu göstermektedir.

Silindir katman malzemelerinin sertlik değişiminin etkisi:

- İçteki silindirin sertleşmesiyle dalga yayılım hızı azalır,
- Dıştaki silindirin sertleşmesiyle dalga yayılım hızı artar,
- Her iki katmanda da yüksek sertlik değerlerinde temas koşullarını simüle eden F parametresinin artmasıyla dalga yayılım hızının daha fazla azaldığı görülmektedir,
- F parametresinin etkisinin, içteki silindirin sertleşme artışına oranla dıştaki silindirin sertleşme artışıyla daha belirgin olduğu görülmektedir.

Öngerilmenin etkisi:

- Öncekme değerlerinin büyümesiyle F parametresinin etkisinin daha belirgin olduğu görülmektedir. Önbasınç durumunda ise F parametresinin etkisi azalmaktadır.

Üç katlı bileşik silindir için:

- Başlangıç koşullarında temas koşullarının ideal olmaması ($F(F_1, F_2) > 0$), burulma dalgalarının yayılım hızının $kR \rightarrow 0$ 'daki limit değerine etki etmemektedir,
- F parametresi arttıkça dalga yayılım hızı azalmaktadır.

Silindir katman malzemelerinin sertlik değişiminin etkisi:

- Ortadaki silindirin sertleşmesiyle $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)})$ birlikte F_1 ve F_2 parametrelerinin dalga yayılım hızına etkilerinin farklılık arz ettiği görülmektedir. F_2 artışının F_1 'e göre dalga yayılım hızında daha etkili

olduğunu söylemek mümkündür. F_2 arttıkça dalga yayılım hızının daha da belirgin bir şekilde azaldığı gözlemlenmektedir,

- $F(F_1, F_2) \rightarrow F(0, 5)$ ve $F(F_1, F_2) \rightarrow F(5, 5)$ F_2 'nin yüksek değerlerinde dispersiyon eğrilerinin üst üste çakıştığı görülmektedir,
- Silindir katmanı malzemelerinin sertleşmesiyle birlikte dalga yayılım hızının arttığı/azaldığı görülmektedir,
- Ortadaki katman sertleştikçe dalga yayılım hızı azalmakta, iç ve dıştaki katman sertleştikçe dalga yayılım hızı artmaktadır,
- Bu noktada dıştaki katmanın sertleşmesinin dalga yayılım hızının artmasında daha fazla tesiri olduğu görülmektedir.

Silindir et kalınlıkları değişiminin etkisi:

- İçteki silindirin et kalınlığı artışının dalga yayılım hızını artırdığı, bununla birlikte temas koşullarının kötüleşmesinin $F(F_1 = F_2) > 0$ et kalınlığı arttıkça etkisini daha fazla artırdığı görülmektedir,
- Ortadaki silindirin et kalınlığı artışının dalga yayılım hızını azalttığı, temas koşullarının kötüleşmesinin $F(F_1 = F_2) > 0$ dalga yayılım hızının yüksek olduğu değerlerde, yani ortadaki silindirin et kalınlığının az olduğu durumda daha etkin olduğu görülmektedir,
- Dıştaki silindirin et kalınlığı artışının dalga yayılım hızını azalttığı, temas koşullarının kötüleşmesinin $F(F_1 = F_2) > 0$ dalga yayılım hızının yüksek olduğu değerlerde, yani dıştaki silindirin et kalınlığının az olduğu durumda daha etkin olduğu görülmektedir,
- Silindir et kalınlıkları değişiminde F_1 ve F_2 parametrelerinin dalga yayılım hızına etkilerinin farklılık arz ettiği görülmektedir,
- F_2 artışının F_1 'e göre dalga yayılım hızında daha etkili olduğunu söylemek mümkündür,
- F_2 arttıkça dalga yayılım hızının daha da belirgin bir şekilde azaldığı gözlemlenmektedir,

- $F(F_1, F_2) \rightarrow F(0,5)$ ve $F(F_1, F_2) \rightarrow F(5,5)$ F_2 'nin yüksek değerlerinde dispersiyon eğrilerinin üst üste çakıştığı görülmektedir.

Öngerilmenin etkisi:

- Öñşekildeğıştirmenin olmadığı ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(3)} = 1$) durumda ortadaki silindirin sertliğı $\mu^{(2)} / (\mu^{(1)} = \mu^{(3)}) > 1$ arttıkça F parametresinin etkisinin daha da belirgenleştığı görülmektedir,
- Parçadaki öñşekildeğıştirmenin artmasıyla birlikte F parametresinin etkisinin oldukça arttığı ve dalga yayılım hızını önemli ölçüde azalttığı görülmektedir,
- İçteki silindirde öngerilme olmadığı zaman, dalga yayılım hızı $h^{(1)} / R$ ile birlikte artmaktadır,
- Öñbasınç olduğu zaman, dalga yayılım hızı $h^{(1)} / R$ ile birlikte azalmaktadır.
- Öñçekme olduğu zaman ise dalga yayılım hızı $h^{(1)} / R$ ile birlikte oldukça artmaktadır,
- Öñşekildeğıştirmenin artmasıyla F_1 ve F_2 parametrelerinin etkisinin daha da belirgin hale geldiğı ve F_2 artışının F_1 'e göre dalga yayılım hızında daha etkili olduğu görülmektedir,
- Öñçekme halinde dalga yayılım hızının arttığı, ancak temas koşullarının kötüleşmesinin $F(F_1, F_2) > 0$ etkisinin oldukça belirgin hale geldiğı görülmektedir.

Yukarıdaki sonuçlara göre, ideal olmayan temas koşullarının dalga yayılım hızının azalmasına neden olduğu ve malzemelerdeki öngerilmenin sadece dalga yayılım hızını değil, aynı zamanda ideal olmayan temas koşullarının belirtilen etkisinin büyüklüğünü de etkilediğı sonucuna varılabilir.

Mevcut araştırmanın sonuçları ve yöntemi, çeşitli sıvı türlerini transfer etmek için kullanılan üç katmanlı polimer boruların gürültüsünün belirlenmesi, kontrolü ve en aza indirilmesi için kullanılabilir. Aynı zamanda, bu araştırmaların sonuçları,

tabakalı kompozit malzemelerde yapışma kalitesinin belirlenmesi ve kontrolü için de kullanılabilir.

Tez çalışmasında uygulanan metod ile öngerilmelerden kaynaklanan önşekildeğiş-tirmelerin küçük ve sonlu olduğu en geniş durumları da kapsayarak hiperelastik malzemelerden yapılan bileşik silindirlerde tahribatsız gerilme analizleri yapılabilir.

- [1] A.E.H. Love, "Mathematical theory of elasticity," Dover Publication, 1944.
- [2] K.F. Graff, "Wave motion in elastic solids," Dover Publication, 1991.
- [3] J. Miklowitz, "Recent developments in elastic wave propagation," ASME Applied Mechanics Review, vol. 13, pp. 865-878, 1960.
- [4] A.C. Eringen and E.S. Şuhubi, "Elastodynamics, volume I, finite motions," Academic Press, 1975.
- [5] A.C. Eringen and E.S. Şuhubi, "Elastodynamics, volume II, linear theory," Academic Press, 1975.
- [6] A.E. Armenekas, "Torsional wave in composite rods," The Journal of Acoustical Society of Amerika, vol. 38, pp. 439-446, 1965.
- [7] A.E. Armenekas, "Propagation of harmonic waves in composite circular cylindrical shells part I: theoretical investigation," AIAA Journal, vol. 5, pp. 740-744, 1967.
- [8] A.E. Armenekas, "Propagation of harmonic waves in composite circular cylindrical rods," The Journal of Acoustical Society of Amerika, vol. 47, pp. 822-837, 1970.
- [9] A.E. Armenekas, "Propagation of harmonic waves in composite circular cylindrical shells part II: numerical investigation," AIAA Journal, vol. 9, pp. 599-605, 1971.
- [10] A.E. Armenekas and H.E. Keck, "Harmonic nonaxisymmetric waves with short wavelengths propagating in composite rods," The Journal of Acoustical Society of Amerika, vol. 48, pp. 1160-1169, 1970.
- [11] H.E. Keck and A.E. Armenekas, "Dispersion of axially symmetric waves in three-layered elastic shells," The Journal of Acoustical Society of Amerika, vol. 49, pp. 1511-1520, 1971.
- [12] R.C. Reuter, "First-branch dispersion of torsional waves in bimaterial rods," The Journal of Acoustical Society of Amerika, vol. 46, pp. 821-823, 1969.
- [13] D.W. Haines and P.C.Y. Lee, "Axially symmetric torsional waves in circular composite cylinders," Journal of Applied Mechanics, vol. 38, pp. 1042-1044, 1971.
- [14] D.W. Haines and P.C.Y. Lee, "Approximate theory of torsional wave propagation in elastic circular composite cylinders," The Journal of Acoustical Society of Amerika, vol. 49, pp. 211-219, 1971.
- [15] R.N. Thurston, "Torsional acoustic modes in clad rods," IEEE Transaction on Sonics and Ultrasonics, vol. 23, pp. 154-161, 1976.

- [16] R.K. Kaul, R.P. Shawve and W. Muller, "Torsional waves in an axially homogeneous bimetallic cylinder," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 17, pp. 379-394, 1981.
- [17] D. Kleczewskive and R.Parnes, "Torsional dispersion relations in a radially dual elastic medium," *The Journal of Acoustical Society of Amerika*, vol. 81, pp. 30-36, 1987.
- [18] J.R. Berger, P.A. Martin and S.J. McCaffery, "Time-harmonic torsional waves in a compositcylinder with an imperfect interface," *The Journal of Acoustical Society of Amerika*, vol. 107, pp. 1161-1167, 2000.
- [19] M. Hayes and R.S. Rivlin, "Surfave waves in deformed materials," *Archive for Rational Mechanics and analysis*, vol. 8(5), pp. 358-380, 1961.
- [20] A.E. Green, "Torsional vibrations of an initially stressed circular cylinder," *Problems of Continuum Mechanics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Muskhelishvili Anniversary Volume, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 148-154, 1961.
- [21] M.A. Biot, "Mechanics of incremental deformations," Wiley, NewYork.
- [22] H. Demiray and E.S. Suhubi, "Small torsional oscillations of an initially twisted circular rubber cylinder," *International Journal of Engineering Science*, vol. 8, pp. 19-30, 1970.
- [23] I.A. Belward, "The Propagation of small amplitude waves in prestressed incompressible elastic cylinders," *International Journal of Engineering Science*, vol. 14(8), pp. 647-659, 1976.
- [24] A.N. Guz, V.P. Kushnir and F.G. Makhort, "On the wave propagation in a cylinder with initial stresses," *Izvestiya ANSSSR, Seriya Mekhanika Tverdogo Tela*, vol. 5, pp. 67-74, 1975.
- [25] V.P. Kushnir, "Longitudinal waves in the field of a transversally isotropic cylinder with initial stress," *International Applied Mechanics*, vol. 15(9), pp. 884-886, 1979.
- [26] P. Chadwick and D.A. Jarvis, "Interfacial waves in a pre-strained neo-hooken body. I: Biaxial states of strain," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 32, pp. 387-399, 1979.
- [27] P. Chadwick and D.A. Jarvis, "Interfacial waves in a pre-strained neo-hooken body. II: Triaxial states of strain," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 32, pp. 401-418, 1979.
- [28] M.A. Dowaiik and R.W. Ogden, "Interfacial waves and deformations in pre-stressed elastic media," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A 433, pp. 313-328, 1991.
- [29] R.W. Ogden and D.A. Sotiropoulos, "Reflection of plane waves from the boundary of a pre-stressed compressible elastic half-space," *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 61, pp. 61-69, 1998.

- [30] G.A. Rogeson and K.J. Sandiford, "The effect of finite primary deformations on harmonic waves in layered elastic media," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 2059-2087, 2000.
- [31] Y.B. Fu and A. Mielke, "A new identity for the surface impedance matrix and its application to the determination of surface-wave speeds," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A 458, pp. 2523-2543, 2002.
- [32] Z. Qian, F. Jin, K. Kishimoto and Z. Wang, "Effect of initial stress on the propagation behavior of SH-waves in multilayered piezoelectric composite structures," *Sensors and Actuators*, vol. A 112, pp. 368-375, 2004.
- [33] J. Su, Z.B. Kuang and H. Liu, "Love wave in ZnO/SiO₂/Si structure with initial stresses," *Journal of sound and Vibration*, vol. 286, pp. 981-999, 2005.
- [34] N. Garg, "Effect of initial stress on harmonic homogeneous waves in viscoelastic anisotropic media," *Journal of sound and Vibration*, vol. 303, pp. 515-525, 2007.
- [35] A.Y.T. Leung and J. Fan, "Natural vibration of pre-twisted shear deformable beam systems subject to multiple kinds of initial stresses," *Journal of sound and Vibration*, vol. 329, pp. 1901-1923, 2010.
- [36] C. Truesdell, "General and exact theory of waves in finite elastic strain," *Archive for Rational Mechanics and Analyses*, vol. 8(1), pp. 263-296, 1961.
- [37] A.C. Eringen and E.S. Suhubi, "Elastodynamics, Finite Motions," Academic Press, New York, vol. 1, 1975.
- [38] A.N. Guz, "Elastic waves in the body with initial (residual) stresses," A.S.K., Kiev, 2004.
- [39] S.D. Akbarov and A.N. Guz, "Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders," *International Journal of Engineering Science*, vol. 42, pp. 769-791, 2004.
- [40] S.D. Akbarov, "Recent investigations on the dynamical problems of the elastic body with initial (residual) stresses (review)," *International Applied Mechanics*, vol. 43(12), pp. 1305-1324, 2007.
- [41] S.D. Akbarov and M.S. Guliev, "Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials," *CMES: Computer Modeling Engineering Science*, vol. 39(2), pp. 155-178, 2009.
- [42] S.D. Akbarov and M.S. Guliev, "The influence of the finite initial strains on the axisymmetric wave dispersion in a circular cylinder in a compressible elastic medium," *International Journal of Mechanical Science*, vol. 52, pp. 89-95, 2010.
- [43] S.D. Akbarov and M.S. Guliev, "Propagation of axisymmetric longitudinal waves in a finitely pre-strained circular cylinder imbedded in a finitely prestrained infinite elastic body," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 44 (5), pp. 465-478, 2008.

- [44] S.D. Akbarov, M.S. Guliev and T. Kepceler, "Dispersion relations of axisymmetric wave propagation in initially twisted bi-material compounded cylinders," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, pp. 1644-1664, 2011.
- [45] A. Ozturk and S.D. Akbarov, "Propagation of torsional waves in a prestretched compound circular cylinder," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 44 (1), pp. 77-86, 2008.
- [46] A. Ozturk and S.D. Akbarov, "Torsional wave propagation relation in a pre-stressed bimaterial compounded cylinder," *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 89 (9), pp. 754-766, 2009.
- [47] A. Ozturk and S.D. Akbarov, "Torsional wave propagation in a pre-stressed circular cylinder embedded in a pre-stressed elastic medium," *Applied Mathematical Modeling*, vol. 33, pp. 3636-3649, 2009.
- [48] T. Kepceler, "Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface," *Applied Mathematical Modeling*, vol. 34, pp. 4058-4073, 2010.
- [49] A. Cilli and A. Ozturk, "Dispersion of torsional waves in initially stressed multilayered circular cylinders," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 13(2), 2010.
- [50] A. Öztürk, "Öngerilmeli dairesel bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımı," *Doktora Tezi*, 2007.
- [51] M.M. Eğilmez, "Sonlu önşekildeğiştirmesi olan çok katlı dairesel bileşik silindirlerde burulma dalgalarının dispersiyonu," *Doktora Tezi*, 2013.
- [52] S.D. Akbarov, T. Kepceler, M.M. Eğilmez and F. Dikmen, "Torsional wave propagation in the finitely pre-stretched hollow bi-material compound circular cylinder," *Computers Materials & Continua (CMC)*, vol. 26(2), pp. 91-109, 2011.
- [53] S.D. Akbarov, T. Kepceler and M.M. Eğilmez "Torsional wave propagation in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, pp. 4519-4537, 2011.
- [54] S.D. Akbarov, T. Kepceler and M.M. Eğilmez "On the some particularities of the torsional wave dispersion in a finitely pre-deformed hollow sandwich cylinder," *Computers Materials & Continua (CMC)*, vol. 30(1), pp. 83-97, 2012.
- [55] S.D. Akbarov, "Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: linearized three-dimensional approach," *Springer*, 2015.
- [56] C. İpek, "Öngerilmeli bileşik silindirlerde temas koşullarının eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisi," *Doktora Tezi*, 2011.
- [57] S.D. Akbarov and C. İpek, "The influence of the interface conditions on the dispersion of the axisymmetric longitudinal waves in the pre-strained compound cylinder," *CMES: Computer Modeling in Engineering and Science*, vol. 70(2), pp. 93-122, 2010.

- [58] S.D. Akbarov and C. İpek, "Dispersion of axisymmetric longitudinal waves in a pre-strained imperfectly bonded bi-layered hollow cylinder," *Computers Materials & Continua (CMC)*, vol. 32(2), pp. 99-144, 2012.
- [59] C. İpek, "The dispersion of the flexural waves in a compound hollow cylinder under imperfect contact between layers," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 55(2), pp. 335-348, 2015.
- [60] S.D. Akbarov, M. Negin and C. İpek, "Effect of imperfect contact on the dispersion of generalized rayleigh waves in a system consisting of a prestressed layer and a prestressed half-plane," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 51(3), pp. 397-404, 2015.
- [61] S.D. Akbarov and T. Kepçeler, "On the torsional wave dispersion in a hollow sandwich circular cylinder made from viscoelastic materials," *Applied Mathematical Modeling*, vol. 39, pp. 3569-3587, 2015.
- [62] T. Koçal, "Viskoelastik katmanlı dairesel silindirlerde eksenel simetrik boyuna dalgaların dispersiyonu," *Doktora Tezi*, 2016.
- [63] S.D. Akbarov, T. Koçal and T. Kepçeler, "Dispersion of axisymmetric longitudinal waves in a solid cylinder made of viscoelastic material," *The Ijaseat Journal*, vol.4, pp.70-75, 2016.
- [64] S.D. Akbarov, T. Koçal and T. Kepçeler, "Dispersion of axisymmetric longitudinal waves in a bi-material compound solid cylinder made of viscoelastic materials," *CMC-Computers Materials & Continua*, vol.51, pp.105-143, 2016.
- [65] S.D. Akbarov, T. Koçal and T. Kepçeler, "On the dispersion of the axisymmetric longitudinal wave propagating in a bi layered hollow cylinder made of viscoelastic materials," *International Journal Of Solids And Structures*, vol.100, pp.195-210, 2016.
- [66] T. Koçal and S.D. Akbarov, "On the attenuation of the axisymmetric longitudinal waves propagating in the bi-layered hollow cylinder made of viscoelastic materials," *Structural Engineering And Mechanics*, vol.61, pp.145-165, 2017.
- [67] T. Koçal and S.D. Akbarov, "The Influence of the Viscoelasticity on the Axisymmetric Wave Attenuation in a bi-Material Solid Cylinder," *Acta Physica Polonica*, vol.134, pp.135-138, 2018.
- [68] F.D. Murnagan, "Finite Deformation of an Elastic Solid, Wiley," New York, 1951.
- [69] P.A. Martin, "Boundary integral equations for the scattering of elastic waves by elastic inclusions with thin interface layers," *J. Nondestruct. Eval.*, vol. 11, pp. 167-174, 1992.
- [70] S.I. Rokhlin and Y.J. Wang, "Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 89, pp. 503-515, 1991.

- [71] J.P. Jones and J.S. Whitter, "Waves at a flexibly bonded interface," J. Appl. Mech., vol. 34, pp. 905–909, 1967.
- [72] A.K. Mal and P.C. Xu, "Elastic waves in layered media with interface feature, in: M.F. McCarthy, Hayes (Eds.), Elastic Wave Propagation," North-Holland, Amsterdam, pp. 67–73, 1989.
- [73] A. Pilarski and J.L. Rose, "A transverse-wave ultrasonic oblique-incidence technique for interfacial weakness detection in adhesive bonds," J. Appl. Phys., vol. 63, pp. 300–307, 1988.
- [74] R.T. Smith, R. Stren and R.V.B. Stephens, "Third order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurements," J. Acoust. Soc. Am. vol. 40(5), pp. 1002–1008, 1966.

İletişim Bilgisi: eyyupkarafaki@gmail.com

Makaleler

1. E. Karafakı and T. Kepçeler, "On the dispersion of torsional waves in the imperfectly bonded finitely pre-strained bi-material hollow cylinder made of highly-elastic material," Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, vol. 32, Issue: 4, (DEC 2014), pp:454-468, 2014.
2. E. Karafakı and T. Kepçeler, "Influence of imperfect contact conditions on the torsional wave dispersion in pre-strained many layered hollow cylinder made of highly elastic materials," Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, vol. 38, Issue: 2, (JUN 2020), pp:545-561, 2020.

Konferans Bildirileri

1. S.D. Akbarov, T. Kepçeler and E. Karafakı, "The influence of the bonded imperfectness on torsional wave dispersion in the finitely pre-strained hollow bi-material compound circular cylinder made of highly-elastic material," The Twenty-second Annual International Conference on Composites/Nano Engineering (ICCE-22), July 13-19, 2014, Saint Julien's, Malta.