T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİSKOELASTİK KATMANLI DAİRESEL SİLİNDİRLERDE EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGALARIN DİSPERSİYONU

TARIK KOÇAL

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE KONTROL PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. SURKAY AKBAROV

İSTANBUL, 2016

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİSKOELASTİK KATMANLI DAİRESEL SİLİNDİRLERDE EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGALARIN DİSPERSİYONU

Tarık KOÇAL tarafından hazırlanan tez çalışması 28.04.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Surkay AKBAROV

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPÇELER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Surkay AKBAROV

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPÇELER

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Ata MUGAN

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Ünal ALDEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Recep BURKAN

İstanbul Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Semih SEZER

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Cihan DEMİR

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Bu çalışma, TÜBİTAK Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı 2211-E kapsamında desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam sırasında, bu çalışmanın daha düşünce aşamasından başlayıp, hazırlanış ve ortaya konuş aşamalarına kadar katkılarını ve desteğini benden esirgemeyen, tez konumdaki öncü çalışmalarından ve bilgisinden yararlandığım Sayın Hocam Prof. Dr. Surkay AKBAROV'a, yardımlarını ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ikinci danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPÇELER'e ve mesai arkadaşlarım Burak YILDIZ ve Kaan ÜNLÜGENÇOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda bana destek olan annem ve babam başta olmak üzere bütün aileme sonsuz teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım. Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan rahmetli büyükbabamı saygıyla ve sevgiyle anıyorum.

Nisan, 2016

Tarık KOÇAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

ω	Açısal frekans
θ	Açısal koordinat
$k_1 R$	Boyutsuz dalga sayısı
$c / c_{20}^{(2)}$	Boyutsuz dalga yayılımının faz hızı
$\lambda_1^{(n)}(t)$	Çekirdek fonksiyonu
$\mu_1^{(n)}(t)$	Çekirdek fonksiyonu
$R_{\alpha}^{*}(x)$	Çözücü operatörü
k_2	Dalga genliğinin sönümü
k	Dalga sayısı
c	Dalga yayılım faz hızı
ω / k	Dalga yayılımının kompleks faz hızı
$D_{(ii)}$	Deviatorik gerilme bileşeni
$h^{(1)}$	Dış katman kalınlığı
ψ	Faz açısı
Γ	Gama fonksiyonu
$T_{(ii)}$	Gerilme
K_0	Hacim genişleme modülü
$h^{(2)}$	İç katman kalınlığı
$Q^{(n)}$	Karakteristik boyutsuz sürünme zamanı
$t_c^{(n)}$	Karakteristik sürünme zamanı
$d^{(n)}$	Malzemenin sabitlerinin $t = \infty$'daki değerini karakterize eder
$c_{20}^{(n)}$	n'inci malzemede $t = 0$'daki enine dalga yayılım hızı
σ_{ii}	Normal gerilmeler
r	Radyal koordinat
c_R	Rayleigh dalga yayılım hızı
$J_0(x)$	Sıfırıncı mertebeden birinci türden Bessel fonksiyonu
$Y_0(x)$	Sıfırıncı mertebeden ikinci türden Bessel fonksiyonu

β	Sönüm katsayısı
c_s	Stoneley dalga yayılım hızı
$\varepsilon_{(ii)}$	Şekil değiştirme
$\gamma_{(ii)}$	Şekil değiştirme genliği
$\lambda_0^{(n)}$	$t = 0$'daki Lame sabiti
$\mu_0^{(n)}$	$t = 0$'daki Lame sabiti
$\nu_0^{(n)}$	$t = 0$'daki Poisson oranı
$\lambda^{(n)*}$	Viskoelastik operatör
$\mu^{(n)*}$	Viskoelastik operatör
η	Volümetrik konsantrasyon
u_i	Yer değiştirme
v_r	Yer değiştirme genliği
ρ	Yoğunluk

KISALTMA LİSTESİ

E.V.	Dış silindir katman malzemesi elastik, iç katman malzemesi viskoelastik
V.E.	İç silindir katman malzemesi elastik, dış katman malzemesi viskoelastik
V.V.	İki katman malzemesi de viskoelastik

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

VİSKOELASTİK KATMANLI DAİRESEL SİLİNDİRLERDE EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGALARIN DİSPERSİYONU

Tarık KOÇAL

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Surkay AKBAROV

Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPÇELER

Viskoelastik materyallerde zamana göre harmonik dalga dispersiyonu ve sönümü ile ilgili yapılan çalışmalar; sadece teorik anlamda değil, aynı zamanda uygulama alanında da büyük bir öneme sahiptir. Gaz, yağ ve su taşınması gibi birçok endüstrinin altyapısında kullanılan borular ve kanalların tahribatsız muayenesi bu tür uygulamalara örnek olarak gösterilmektedir. Birçok yapıda korozyondan korumak amacıyla kanallar viskoelastik polimerlerle kaplanmaktadır, bu sebeple kanalların tahribatsız testlerinin yapılabilmesi için dalga yayılımında sönümün ve dispersiyon kurallarının bilinmesi gerekmektedir.

Bu tezde, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış tek katlı içi dolu, tek katlı içi boş, içi dolu bileşik ve içi boş bileşik silindirlerde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı çalışmasından bahsedilmiştir. Araştırmalar viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında yapılmıştır. Dispersiyon denklemi türetilerek nümerik sonuçlar için algoritmalar geliştirilmiştir. Silindir katman materyallerinin bünye denklemleri fraksiyonel eksponansiyel operatörler aracılığıyla tanımlanmıştır ve bu bağıntılar nümerik araştırmalarda kullanılmıştır. Katman materyallerinde karakteristik boyutsuz sürünme zamanını ve elastik sabitlerinin $t=\infty$'daki değerlerini belirten reolojik parametreler tanımlanarak dalga dispersiyonuna bu materyallerin viskositesinin etkisi bu parametreler aracılığı ile öğrenilmiştir. Literatürde verilen ve deneysel olarak belirlenen dispersif sönüm durumları için dispersiyon eğrileri elde edilmiş ve problem parametrelerinin bu eğrilere etkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dalga yayılımı, viskoelastik malzeme, boyuna dalga yayılımı, dispersiyon eğrileri, içi boş bileşik silindir, içi dolu bileşik silindir

ABSTRACT

THE DISPERSION OF AXISYMMETRIC LONGITUDINAL WAVES IN VISCOELASTIC LAYER CIRCULAR CYLINDERS

Tarık KOÇAL

Department of Mechanical Engineering

Phd. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Surkay AKBAROV

Co-Adviser: Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPÇELER

It is known that the study of time-harmonic wave dispersion and attenuation in viscoelastic materials and in elements of constructions made from these materials has great significance not only in the fundamental (theoretical) sense, but also in the application sense. As an example of such applications the nondestructive inspection of tubes and pipes which are used in the infrastructure of many industries such as gas, oil, and water transport. In many cases these tubes are coated with viscoelastic polymer coatings for corrosion protection and therefore, under nondestructive testing of the tubes with guided waves, it is necessary to know the attenuation and dispersion rules of the waves propagating therein.

The thesis is considered with study of axisymmetric longitudinal wave propagation in the different types circular cylinders made of linear viscoelastic materials. The investigations are made within the scope of the piecewise homogeneous body model by utilizing of the exact equations of the linear viscoelasto-dynamics. The dispersion equation is derived and the algorithm is developed for its numerical solution. The layers' materials of the cylinder are described through fractional exponential operators and this relations are used in the numerical investigations. The rheological parameters indicated the characteristic creep time and long-term values of the elastic constants are introduced and through these parameters, the influence of the materials viscoelasticity on the dispersion curves are studied. Dispersion curves are submitted for certain selected dispersive attenuation cases under various values of the problem parameters and the influence of the rheological parameters on these curves are discussed.

Keywords: Wave propagation, viscoelastic material, longitudinal wave propagation, dispersion curves, hollow compound cylinder, solid compound cylinder

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, viskoelastik malzemeden yapılmış tek ve çift katmanlı dairesel silindirlerde eksenel simetrik boyuna dalgaların dispersiyonu incelenmektedir. Çalışmada ele alınan problemlerin formülasyonları viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında yapılmaktadır. Silindir katman materyallerinin bünye denklemleri fraksiyonel eksponansiyel operatörler aracılığıyla tanımlanmaktadır. Silindir katman malzemeleri viskoelastikliğinin, eksenel simetrik boyuna dalga dispersiyonuna etkisini gösteren nümerik sonuçlar elde edilerek yorumlanmaktadır.

1.1 Literatür Özeti

Elastik ortamlarda dalga yayılımı, elastisite teorisinin başta gelen problemlerinden birisidir. Bu tip ortamlarda dalga yayılımı üzerine yapılan araştırmaların başlangıcı [1] ve [2]'de belirtildiği üzere 1821'de Navier tarafından yapılan elastik cisimlerin titreşim ve denge denklemlerinin türetildiği çalışma olarak kabul edilmektedir. Bu çalışmada maddesel noktalar olarak tanımlanan moleküllerin elastik yaylarla birbirine bağlı olduğu ve iki molekül arasındaki kuvvetin aradaki uzaklığın değişimi ile orantılı olduğu kabulü yapılmıştır [1]. Elastisite teorisinin temelleri Cauchy'nin elastik bir ortamın hareket denklemlerini yer değiştirmeler cinsinden elde ederek gerilme ve şekil değiştirme kavramlarını ortaya çıkardığı çalışma ile 1822'de atılmıştır [2]. Poisson 1828'de elastik dalgaların izotrop bir ortamda yayılmalarını denge denklemlerini gerilme bileşenleri cinsinden elde ederek incelemiş, enine ve boyuna dalgaların varlığını göstermiştir [1]. Daha sonra yapılan çalışmalarda Green 1837 yılında elastisite denklemlerini enerjinin korunumunu kullanarak elde etmiştir. 1876'da yapılan çalışmada Pochammer silindir bir çubuktaki dalga yayılımını incelemiş ve daha sonra 1889'da Chree de Pochammer ile aynı sonuçları elde etmiştir [2], [3]. 1887'de yapılan çalışmada ise Rayleigh yüzey dalgalarının, homojen izotrop elastik yarım-uzayın serbest yüzünde yayılabileceğini göstermiştir. Elastisite teorisinin temelleri ile ilgili açıklamalar [1], [3], [4] ve [5] kaynaklarında ele alınmıştır.

Tez kapsamında yapılan çalışmaların amacı viskoelastik malzemeden yapılmış tek katlı ve çift katlı dairesel içi dolu ve içi boş bileşik silindirlerde boyuna dalgaların yayılımının teoriksel olarak incelenmesidir. Viskoelastik malzemeden yapılmış tek ve çift katlı dairesel bileşik silindirde, boyuna dalgaların dispersiyonu konusu, viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında incelenmektedir. Tez konusuna ilişkin yapılan diğer çalışmaların kısa özetinin verilmesi, tezde yapılan araştırmaların literatürdeki yerinin daha iyi anlaşılmasına olanak sağlayacaktır.

Tez konusuna ait araştırmaları inceleyecek olursak, öngerilmesiz sonsuz uzunluktaki dairesel silindirdeki dalga yayılımı, Pochhamer ve Chree tarafından [2] ve [5]'te incelenmiştir. Armenakas [6], [7], [8], [9], Armenakas ile Keck [10-11] yayınlarında ise fiziksel ve geometrik parametrelere bağlı olarak homojen, izotrop malzemelerden oluşan içi dolu ve içi boş bileşik silindirler için, üç boyutlu doğrusal elastisite teorisi çerçevesinde dalga yayılımını incelemişlerdir. Armenakas [8] makalesinde bileşik silindirlerde boyuna dalgaların yayılımı ele alınmıştır. Armenakas [6] makalesinde içi dolu ve içi boş silindirlerde dispersif olmayan burulma dalgalarının birinci modunun, bileşik silindirlerde dispersif şekle dönüştüğü belirtilmiştir. Armenakas ve Keck [10] makalesinde ise simetrik olmayan dalgalar için bileşik silindirlerdeki dalga yayılımı kısa dalga boyu yaklaşımıyla analitik olarak incelenmiştir. Armenakas [7] ve [9] makalelerinde içi boş dairesel silindirde dalga yayılımı, üç boyutlu doğrusal elastisite teorisi kapsamında araştırılmış; Keck ve Armenakas [11] ise bu çalışmaların devamı olarak üç farklı malzemeli içi boş bileşik silindirdeki dalga yayılımını incelemişlerdir. Diğer bir makalede ise ön burulmalı çift malzemeli bileşik silindirlerde dalga dispersiyonu araştırılmıştır [12]. Bu makalede bileşik silindir bileşenlerinin izotropik ve homojen olduğu varsayılmış ve özellikle önburulmadan dolayı eksenel simetrik boyuna ve burulma dalgalarının silindir bileşenlerinden en az birinde yayılamayacakları belirlenmiştir. [13], [14], [15] makalelerinde öngerilme – şekil değiştirme durumu klasik doğrusal elastisite teorisi kapsamında belirlenmiş ve tek yönde öngerilmeli çift malzemeli bileşik silindirdeki burulma dalga dispersiyonu incelenmiştir.

Sotiropoulos [16], makalesinde iki ayrı öngerilmeli sıkışabilir yarı uzayın düzlem sınırları boyunca Stoneley dalgalarının yayılımı araştırılmıştır. Akbarov ve Ozışık [17], çalışmalarında öngerilmeli tabaka ile kaplanmış öngerilmeli yarı düzlemdeki genelleştirilmiş Rayleigh yüzey dalgalarının dispersiyonunu incelemiştir.

Geçmişten günümüze kadar yapılan çalışmalara baktığımızda viskoelastik malzemelerden yapılmış cisimlerdeki dalga yayılımıyla alakalı araştırmalar, elastik malzemelerdeki kadar fazla sayıda değildir. Weiss [18] ve Tamm ile Weiss [19] tarafından izotropik viskoelastik katmandaki Lamb dalga yayılımıyla alakalı yapılan makaleler, bu konudaki ilk çalışmalardandır. Bu makalelerde elastik sabitleri kompleks olup frekanstan bağımsız olduğu varsayılmıştır.

Coquin [20], makalesinde frekansa bağlı ve küçük kayıplı viskoelastik malzemelerden yapılmış elastik plakada Lamb dalgası yayılımını incelemek için yaklaşık bir yöntem önermiştir. Chervinko ve Shevchenko [21], çalışmalarında Lamb dalgalarının yayılımına frekansa bağlı kompleks kayma modülünün ve reel Poisson oranlı düşük sıkıştırılabilirlik özelliğine sahip malzemelerin etkisini incelemişlerdir.

Simonetty [22] makalesinde viskoelastik malzemeyle kaplanmış elastik plakada Lamb dalga yayılımını çalışmış ve bu plakalarda dalgaların dispersiyon özelliklerine kaplamaların sönümünün etkisini analiz etmiştir. Rose [23] bu sonuçları 2004 yılında yazmış olduğu monografta ele alıp detaylandırmıştır. Wolosewick and Raynor [24], makalelerinde silindirin sonunda harmonik zamanlı etkiyen keyfi radyal eksenel simetrik teğetsel kayma gerilmesi dağılımının olduğu durum için yarı sonsuz dairesel silindirde eksenel simetrik kararsız burulma dalgalarının yayılımını incelemiştir.

İki katlı dairesel silindirde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı ile alakalı çalışmalar Akbarov ve Guz [25] makalelerinde öngerilmelerin küçük olduğu varsayımı yapılarak başlamıştır. Akbarov ‘un [20] makalesinde ön gerilmeli ortamların dinamiğine ait 2007 yılına kadar olan çalışmaların geniş özeti verilmiştir. Akbarov ve Guliev de [27] makalelerinde ise ön şekil değiştirmelerin sonlu olduğu ve mekanik bağıntıların harmonik tipte potansiyel ile tanımlandığı durum için içi dolu bileşik silindirde eksenel simetrik dalga yayılımı öğrenilmiştir.

Barshinger ve Rose tarafından yapılmış makalede [28], polimer viskoelastik katmanla kaplanan elastik içi boş metal silindirdeki eksenel simetrik boyuna güdümlü dalga dispersiyonundan ve sönümünden bahsedilmiştir. Kaplanan tabakanın viskoelastisitesi, viskoelastik materyallerdeki boyuna ve enine dalgaların sönüm katsayısı ile göz önünde bulundurulmuştur. Bu 1 – 5 MHz arasındaki frekanslar için deneyle hesaplanan katsayılar, kompleks modülün saptanmasında kullanılmaktadır. Sonuç olarak karmaşık modülün kullanımıyla çift katmanlı içi boş silindirin dalga dispersiyonu ve sönüm dispersiyonu araştırılmıştır.

Yukarıdaki makaleleri incelediğimizde viskoelastik malzemelerden yapılmış plaka ve silindirlerde güdümlü dalgaların dispersiyonuyla alakalı yapılmış araştırmalar başlıca aşağıdaki durumlar ile uygulanır:

- Viskoelastik malzemelerin kompleks modülleri frekanstan bağımsız olarak alınır;
- Malzemelerin viskoelastisitesi Maxwell ve Kelvin-Voigt modelleri gibi en sade modellerle tanımlanır ve
- Somut polimer malzemeler için kompleks elastisite modülü deneysel olarak elde edilir.

Sonuç olarak, yukarıda ele alınan çalışmalarda, dalga yayılımı ve sönümü ile alakalı araştırmalar viskoelastik malzemeler için daha karmaşıktır ve gerçek modeller ile bağlantılı değildir. Bu çalışmalardan elde edilen nümerik sonuçların bir kısmı bu dispersiyonda viskoelastik malzemelerin reolojik parametrelerinin etkisini göstermez. Bu anlamda ilk deneme Akbarov ve Kepceler [29] tarafından yapılan makalede, Rabotnov [30] tarafından fraksiyonel eksponansiyel operatörler ile verilen mekanik bağıntılar ile lineer viskoelastik malzemeden yapılmış içi boş çok katlı silindirde burulma dalgalarının dispersiyonu incelenmiştir. Makalede reolojik parametrelerin değişimine bağlı dalga dispersiyonu ve sönüm dispersiyonu için nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Akbarov ve Kepceler [29] tarafından yapılan çalışmada gösterildiği gibi bu operatörlerin içinde bulunduğu reolojik parametrelerin değişimi ile viskoelastik malzemelerin dinamiklerinde meydana gelen değişimle ilgili birçok olası durum ele alınmıştır. Ayrıca bu operatörler karmaşık matematiksel dönüşümler için birçok basit kurala sahiptir. Örneğin Fourier ve Laplace dönüşümleri Akbarov ve Kepceler'in [29] makalesinde kullanılmıştır. Bu makalede elde edilen sonuçlar Akbarov'un [31] monografında detaylandırılmıştır.

Buraya kadar özetlenen araştırmaların içeriklerinden de anlaşıldığı gibi bu zamana kadar çok katlı dairesel silindirlerde boyuna dalga yayılımına silindir katman malzemelerinin viskoelastikliğinin etkisi incelenmemiştir.

1.2 Tezin Amacı

Viskoelastik malzemelerde zamana göre harmonik dalga dispersiyonu ve sönümü ile ilgili yapılan çalışmalar; sadece teorik anlamda değil, aynı zamanda uygulama alanında da bu çalışmaların büyük bir öneme sahip olduğunu göstermektedir. Gaz, petrol ve su taşınması olan birçok endüstrinin altyapısında kullanılan borular ve kanalların tahribatsız muayenesi bu tür uygulamalara örnek olarak gösterilmektedir. Birçok yapıda korozyondan korumak amacıyla kanallar viskoelastik polimerlerle kaplanmaktadır, bu sebeple kanalların tahribatsız testlerinin yapılabilmesi için dalga yayılımında sönümün ve dispersiyon kurallarının bilinmesi gerekmektedir.

Viskoelastik materyallerden yapılmış cisimler içindeki güdümlü dalgaların yayılımı ile ilgili çalışmaların uygulama alanlarından biri de depremin neden olduğu veya farklı tip güç kaynaklarına ait titreşim ve dalgaların sönümü için viskoelastik sistemlerin kullanımıdır. Birçok alanda ortaya çıkan bu yapıların mühendislik açısından göz önüne alınması gerekliliği ortadadır.

Tez kapsamında yapılan araştırmaların amaçları temel olarak:

1. Parçalı homojen cisim modeli kapsamında viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak tek veya çift katlı dairesel silindirde boyuna dalgaların dispersiyonuna malzemenin viskoelastikliğinin etkilerinin incelenmesi,

2. Tek katlı silindir, tek katlı içi boş silindir, çift katlı silindir ve çift katlı içi boş silindir için dispersiyon denklemlerinin oluşturulması ve bu denklemlerin çözümünde kullanılacak algoritmaların yazılması,
3. Yapılan çalışmalarla elde edilen algoritmaların elastik durum için çalıştırılarak elde edilen sonuçların daha önceden yapılmış makalelerdeki sonuçlarla karşılaştırılması ile algoritmaların test edilmesi,
4. Boyuna dalga yayılım hızının limit değerleri için analitik ifadelerin elde edilmesi ve bu değerlerin algoritma ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırarak algoritmaların doğruluğunun saptanması,
5. Viskoelastik malzemeden yapılmış veya malzemeyle kaplanmış tek veya çift katlı dairesel silindirde eksenel simetrik boyuna dalgaların dispersiyonuna ait sayısal sonuç ve grafiklerin elde edilmesi ve yorumlanmasıdır.

1.3 Hipotez

Çalışmada ele alınacak problemlerin formülasyonları viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında yapılacaktır. Tek ve çift katmanlı dairesel silindirlerde viskoelastikliğin eksenel simetrik boyuna dalgaların yayılımında çoğu zaman azalma meydana getireceği öngörülmektedir.

BÖLÜM 2

VİSKOELASTİK MALZEMEDEN YAPILMIŞ TEK VE ÇİFT KATLI DAİRESEL SİLİNDİRLERDE EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGALARIN DİSPERSİYONU

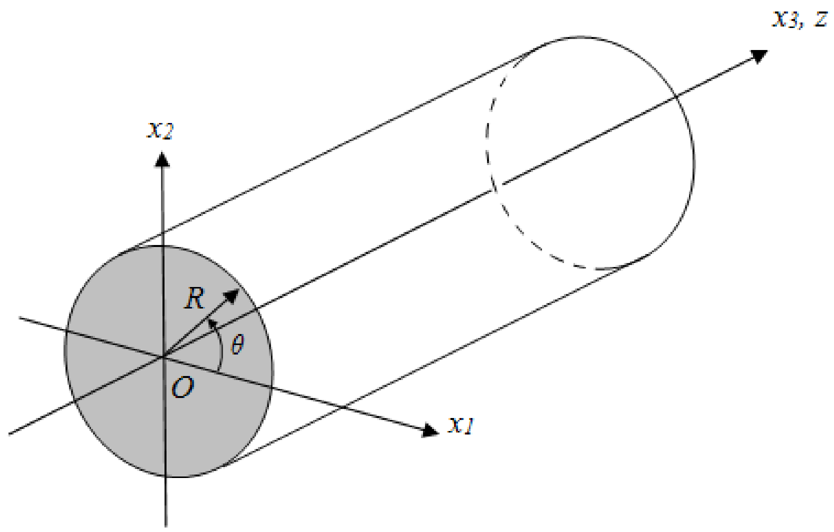
Viskoelastik malzemeden yapılmış tek katlı içi dolu, tek katlı içi boş, iki katlı içi dolu ve iki katlı içi boş silindirlerde eksenel simetrik boyuna dalgaların dispersiyonu problemi işlendiği bu bölümde araştırmalar viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında yapılmaktadır. Silindir katman materyallerinin bünye denklemleri, fraksiyonel eksponansiyel operatörler aracılığıyla tanımlanarak elde edilen bağıntılarla nümerik olarak araştırılmaktadır.

2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Bu tez kapsamında, tek katlı içi dolu, tek katlı içi boş, iki katlı içi dolu ve iki katlı içi boş silindirlerde viskoelastikliğin eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisinin incelenmesi yapıldığından her bir durum için matematiksel formülasyonun çıkarılması, sınır ve temas koşullarının belirlenmesi ve modellenmesi yapılmıştır. Yapılan formülasyonlarda bileşik silindirlerdeki iç silindir için üst indeks (2), dış silindir için üst indeks (1) kullanılıp tek katlı silindirler için üst indeks kullanılmamıştır. Tezde ele alınan söz konusu dört durum aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tek katlı içi dolu silindir:

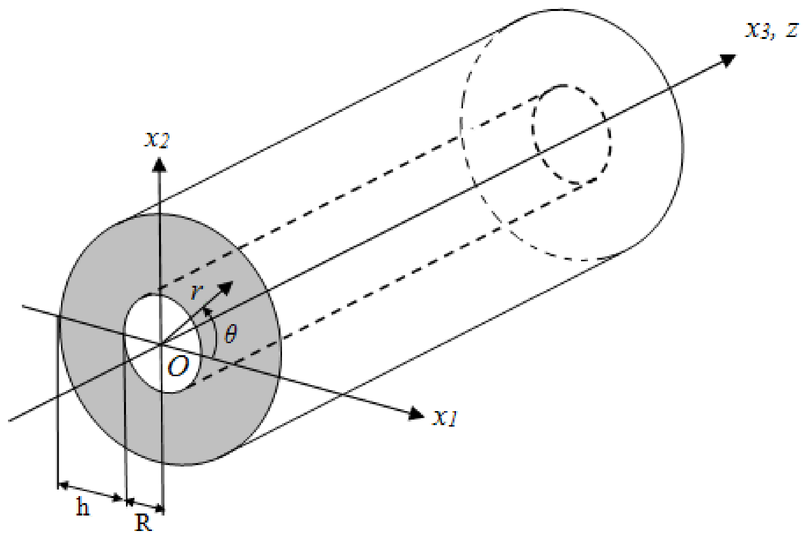
Silindir yarıçapı R olarak ele alınmış içi dolu silindir modelidir. Şekil 2. 1'da tek katlı içi dolu silindirin geometrisi verilmiştir.



Şekil 2. 1 Tek katlı içi dolu silindir

Tek katlı içi boş silindir:

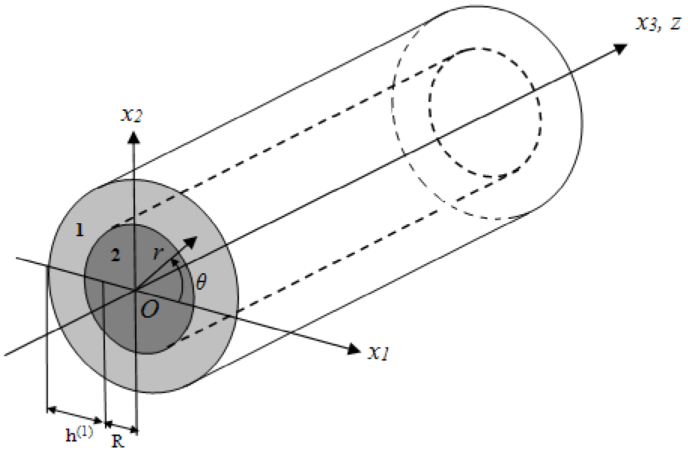
Silindir içindeki boşluğun yarıçapı R ve silindir et kalınlığı h olarak ele alınmış tek katlı içi boş silindir modelidir. Şekil 2. 2'de tek katlı içi boş silindirin geometrisi verilmiştir.



Şekil 2. 2 Tek katlı içi boş silindir

Çift katlı içi dolu silindir:

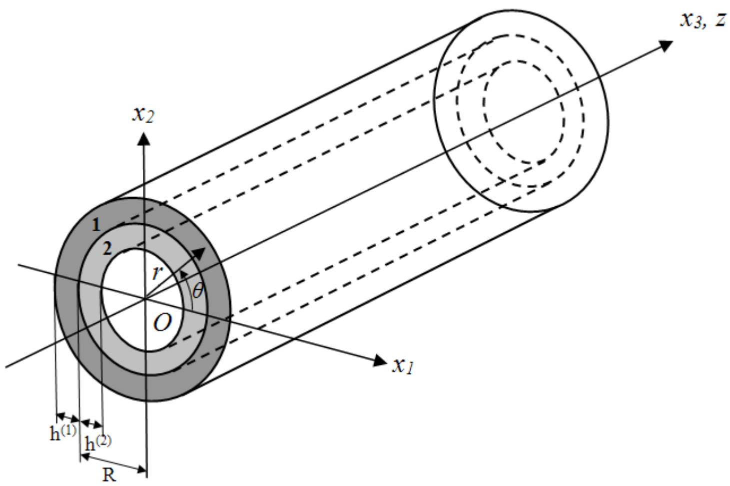
Dışı silindirle çevrili içi dolu silindir modelidir. İç silindirin yarıçapı R ve dış silindirin et kalınlığı $h^{(1)}$ olarak ele alınmıştır. Şekil 2. 3'de çift katlı içi dolu silindirin geometrisi verilmiştir.



Şekil 2. 3 Çift katlı içi dolu silindir

Çift katlı içi boş silindir:

İçi boş çift katlı bileşik silindir modelidir. İç dairesel silindirin dış çeperi yarıçapı R ve iç ile dış silindirin et kalınlıkları sırasıyla $h^{(2)}$ ve $h^{(1)}$ olarak ele alınmıştır. Şekil 2. 4'de çift katlı içi boş silindirin geometrisi verilmiştir.



Şekil 2. 4 Çift katlı içi boş silindir

Silindir bileşenleri malzemelerinin homojen, izotropik ve lineer viskoelastik olduğu varsayılmıştır. Söz konusu sistemde bir noktanın konumunu saptamada silindirik sistem koordinatları $Or\theta z$ kullanılmıştır. Ayrıca silindirlerin Oz ekseni yönünde sonsuz uzunluğa sahip olduğu varsayılmıştır.

Böylece viskoelastik cisimler için doğrusal hareket denklemlerini kullanarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında Oz ekseni boyunca eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı incelenmiştir. Söz konusu durum için alan denklemlerini yazacak olursak, Hareket denklemleri:

$$\frac{\partial T_{rr}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial T_{rz}^{(n)}}{\partial z}+\frac{1}{r}(T_{rr}^{(n)}-T_{\theta\theta}^{(n)})=\rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial T_{rz}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial T_{zz}^{(n)}}{\partial z}+\frac{1}{r}T_{rz}^{(n)}=\rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

Bünye denklemleri:

$$T_{(ii)}^{(n)}=\lambda^{(n)*}\theta^{(n)}+2\mu^{(n)*}\varepsilon_{(ii)}^{(n)}\ ,\ (ii)=rr,zz,\theta\theta\,,$$

$$T_{rz}^{(n)}=2\mu^{(n)*}\varepsilon_{rz}^{(n)}\ ,$$

$$\theta^{(n)}=\varepsilon_{rr}^{(n)}+\varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}+\varepsilon_{zz}^{(n)}\,, \tag{2.2}$$

$\lambda^{(n)*}$ ve $\mu^{(n)*}$ viskoelastik operatörleri denklem (2.3)'te verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix}\lambda^{(n)*}\\ \mu^{(n)*}\end{Bmatrix}\varphi(t)=\begin{Bmatrix}\lambda_0^{(n)}\\ \mu_0^{(n)}\end{Bmatrix}\varphi(t)+\int_0^t\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

Denklem (2.3)'teki $\lambda_0^{(n)}$ ve $\mu_0^{(n)}$, Lame sabitlerinin $t=0$'daki anlık değeridir ve $\lambda_1^{(n)}(t)$ ile $\mu_1^{(n)}(t)$ ise bileşen malzemelerinin kalıtsal özelliklerini tanımlayan çekirdek fonksiyonlarına karşılık gelmektedir.

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları:

$$\varepsilon_{rr}^{(n)}=\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r},$$

$$\varepsilon_{rz}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial z}+\frac{\partial u_z^{(n)}}{\partial r}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}=\frac{u_r^{(n)}}{r},$$

$$\varepsilon_{zz}^{(n)}=\frac{\partial u_z^{(n)}}{\partial z}. \tag{2.4}$$

(2.1) – (2.4) bağıntıları izotropik sürekli ortamlarda lineer viskoelastisite teorisi denklemleridir. Şekil 2. 1, Şekil 2. 2, Şekil 2. 3 ve Şekil 2. 4'e göre sınır ve temas koşullarını ele aldığımızda;

Tek katlı içi dolu silindir için temas koşulu yoktur. Bu tip silindir için sınır koşulları:

$$T_{rr}\Big|_{r=R} = 0\,,$$

$$T_{rz}\Big|_{r=R} = 0\,. \tag{2.5}$$

Tek katlı içi boş silindir için temas koşulu yoktur. Bu tip silindir için sınır koşulları:

$$T_{rr}\Big|_{r=R} = 0\,,$$

$$T_{rz}\Big|_{r=R} = 0\,,$$

$$T_{rr}\Big|_{r=R(1+h\ /R)} = 0\,,$$

$$T_{rz}\Big|_{r=R(1+h\ /R)} = 0\,. \tag{2.6}$$

Çift katlı içi dolu silindir için sınır ve temas koşulları:

$$T_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R} = T_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$T_{rz}^{(2)}\Big|_{r=R} = T_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$u_{r}^{(2)}\Big|_{r=R} = u_{r}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$u_{z}^{(2)}\Big|_{r=R} = u_{z}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$T_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)} = 0\,,$$

$$T_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)} = 0\,. \tag{2.7}$$

Çift katlı içi boş silindir için sınır ve temas koşulları:

$$T_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0\ ,$$

$$T_{rz}^{(2)}\Big|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0\,,$$

$$T_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R}=T_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R}\ ,$$

$$T_{rz}^{(2)}\Big|_{r=R}=T_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$u_{r}^{(2)}\Big|_{r=R}=u_{r}^{(1)}\Big|_{r=R}\ ,$$

$$u_{z}^{(2)}\Big|_{r=R}=u_{z}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$T_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0\ ,$$

$$T_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0\,. \tag{2.8}$$

Viskoelastik malzemelerden yapılmış veya malzemeyle kaplanmış içi boş veya içi dolu silindirde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı probleminin formülasyonu, bünye denklemleri (2.3)'teki çekirdek fonksiyonları $\lambda_1^{(n)}(t)$ ve $\mu_1^{(n)}(t)$'lerin açık biçimde verilmesi ile tamamlanmaktadır.

2.2 Çözüm Metodu

Dalganın Oz ekseni yönünde yayıldığını göz önüne alarak yer değiştirme ve şekil değiştirme aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

$$u_r^{(n)}=v_r^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)},$$

$$u_z^{(n)}=v_z^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}\ ,$$

$$\theta^{(n)}=\upsilon^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)},$$

$$\varepsilon_{(ii)}^{(n)}=\gamma_{(ii)}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)},\ (ii)=rr;\theta\theta;zz;rz \tag{2.9}$$

(k: dalga sayısı, ω: açısal frekans),

$$\gamma_{rr}^{(n)}=\frac{dv_r^{(n)}(r)}{dr}\ ,$$

$$\gamma_{\theta\theta}^{(n)}=\frac{v_r^{(n)}(r)}{r}\ ,$$

$$\gamma_{zz}^{(n)}=\frac{dv_z^{(n)}(r)}{dz}\ ,$$

$$\gamma_{rz}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{dv_r^{(n)}(r)}{dz}+\frac{dv_z^{(n)}(r)}{dr}\right) \tag{2.10}$$

Viskoelastik malzemeler için yüksek derecede hassasiyetle geçerli olan

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\approx\int_{-\infty}^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\ , \tag{2.11}$$

ifadesini mekanik bağıntılar (2.2) ve (2.3)'te uygulayarak, denklem (2.12) elde edilir.

$$T_{(ii)}^{(n)}=\lambda_0^{(n)}\vartheta^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}+e^{ikz}\vartheta^{(n)}(r)\int_{-\infty}^t\lambda_1^{(n)}(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau+$$
$$2\mu_0^{(n)}\gamma_{(ii)}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}+e^{ikz}\gamma_{(ii)}^{(n)}(r)\int_{-\infty}^t\mu_1^{(n)}(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\ . \tag{2.12}$$

$t-\tau=s$ dönüşümü kullanılarak denklem (2.12)'deki integraller için aşağıdaki matematiksel işlemler yapılır:

$$\int_{-\infty}^t\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=-\int_{\infty}^0\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)e^{-i\omega t}e^{i\omega s}ds=$$
$$e^{-i\omega t}\int_0^{\infty}\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)e^{i\omega s}ds=e^{-i\omega t}\left(\begin{Bmatrix}\lambda_{1c}^{(n)}\\ \mu_{1c}^{(n)}\end{Bmatrix}+i\begin{Bmatrix}\lambda_{1s}^{(n)}\\ \mu_{1s}^{(n)}\end{Bmatrix}\right) \tag{2.13}$$

(2.13)'teki $\lambda_{1c}^{(n)}$, $\mu_{1c}^{(n)}$, $\lambda_{1s}^{(n)}$ve $\mu_{1s}^{(n)}$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{1c}^{(n)} \\ \mu_{1c}^{(n)} \end{Bmatrix} = \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} \lambda_{1}^{(n)} \\ \mu_{1}^{(n)} \end{Bmatrix} (s)\cos(\omega \mathrm{s})\,\mathrm{ds}\,,$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{1s}^{(n)} \\ \mu_{1s}^{(n)} \end{Bmatrix} = \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} \lambda_{1}^{(n)} \\ \mu_{1}^{(n)} \end{Bmatrix} (s)\sin(\omega \mathrm{s})\,\mathrm{ds} \qquad (2.14)$$

ifadeleriyle belirlenir. (2.11) – (2.14) arası bağıntılar dikkate alınarak bünye denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$T_{(ii)}^{(n)} = \Lambda^{(n)} \vartheta^{(n)}(r) e^{i(kz-\omega t)} + 2M^{(n)} \gamma_{(ii)}^{(n)}(r) e^{i(kz-\omega t)} = \sigma_{(ii)}^{(n)}(r) e^{i(kz-\omega t)}$$
$$T_{rz}^{(n)} = 2M^{(n)} \gamma_{rz}^{(n)}(r) e^{i(kz-\omega t)} = \sigma_{rz}^{(n)}(r) e^{i(kz-\omega t)}\,, \qquad (2.15)$$

bu ifadelerdeki $\Lambda^{(n)}$ ve $M^{(n)}$

$$\Lambda^{(n)} = \lambda_0^{(n)} + \lambda_{1c}^{(n)} + i\lambda_{1s}^{(n)}\,,$$

$$M^{(n)} = \mu_0^{(n)} + \mu_{1c}^{(n)} + i\mu_{1s}^{(n)} \qquad (2.16)$$

şeklinde verilmiş sabitlerdir. Böylece (2.14) ve (2.16) bağıntıları ile tanımlanan kompleks sabitler $\Lambda^{(n)}$ ve $M^{(n)}$'in gerçek ve reel kısımları elde edilir. Viskoelastik sistemin tüm alan denklemleri (2.1), (2.2), (2.4), (2.15) ve (2.16); elastik bir sistemin elastisite sabitleri $\lambda_0^{(n)}$ ve $\mu_0^{(n)}$ ile kompleks sabitleri $\Lambda^{(n)}$ ve $M^{(n)}$'nin değiştirilmesiyle elde edilebilir. Diğer bir ifadeyle ele alınan problem için matematiksel hesaplar dinamik uygunluk prensibini [32] doğrulamaktadır ve burada kullanılan çözüm yöntemi de bu prensiple örtüşmektedir.

Kompleks sabitlerin reel kısımları, $\mathrm{Re}\,\Lambda^{(n)}(\omega)$ ve $\mathrm{Re}\,M^{(n)}(\omega)$ depolama modülü olarak adlandırılırken imajiner kısımlar, $\mathrm{Im}\,\Lambda^{(n)}(\omega)$ ve $\mathrm{Im}\,M^{(n)}(\omega)$ kayıp modülü olarak ifade edilir. $\mathrm{Im}\,\Lambda^{(n)}(\omega)/\mathrm{Re}\,\Lambda^{(n)}(\omega)$ ve $\mathrm{Im}\,M^{(n)}(\omega)/\mathrm{Re}\,M^{(n)}(\omega)$ oranları şekil değiştirmeler ile gerilmeler arasında faz kaymasını ifade eder.

Bu durumda (2.15)'teki ifade (2.1)'deki hareket denklemi içine yerleştirilerek ve denklem (2.9)'daki bağıntı da göz önünde bulundurularak, aşağıdaki yer değiştirme genliği cinsinden denklemler elde edilir.

$$m_1^{(n)} \frac{d^2 v_r^{(n)}}{d(kr)^2} + m_2^{(n)} \frac{d}{d(kr)} \left(\frac{v_r^{(n)}}{kr} \right) + i(m_2^{(n)} + m_3^{(n)}) \frac{dv_z^{(n)}}{d(kr)} - m_3^{(n)} v_r^{(n)} +$$

$$\frac{1}{kr}(m_1^{(n)} - m_2^{(n)}) \frac{dv_r^{(n)}}{dr} + (m_2^{(n)} - m_1^{(n)}) \frac{v_r^{(n)}}{(kr)^2} = -\frac{\omega^2}{k^2} \rho^{(n)} v_r^{(n)} ,$$

$$im_3^{(n)} \frac{dv_r^{(n)}}{d(kr)} + m_3^{(n)} \frac{d^2 v_z^{(n)}}{d(kr)^2} + i \frac{1}{kr} m_3^{(n)} v_r^{(n)} + \frac{1}{kr} m_3^{(n)} \frac{dv_z^{(n)}}{d(kr)} + ikm_2^{(n)} \frac{dv_r^{(n)}}{d(kr)} +$$

$$im_2^{(n)} \frac{v_r^{(n)}}{kr} - m_1^{(n)} v_z^{(n)} = -\frac{\omega^2}{k^2} \rho^{(n)} v_z^{(n)} \ . \tag{2.17}$$

Burada $m_1^{(n)}$, $m_2^{(n)}$ ve $m_3^{(n)}$

$$m_1^{(n)} = \Lambda^{(n)} + 2M^{(n)} \ ,$$

$$m_2^{(n)} = \Lambda^{(n)} , \ m_3^{(n)} = M^{(n)} \tag{2.18}$$

şeklinde verilmiş sabitlerdir. Yukarıdaki dönüşümler ile ifade (2.9) ve (2.15)'e göre (2.5), (2.6), (2.7) ve (2.8)'deki sınır ve temas koşulları aşağıdaki şekle dönüşür:

Tek katlı içi dolu silindir için sadece sınır koşulları vardır ve bu koşullar:

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R} = 0 ,$$

$$\sigma_{rz}\Big|_{r=R} = 0 . \tag{2.19}$$

Tek katlı içi boş silindir için sadece sınır koşulları vardır ve bu koşullar:

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R} = 0 \ ,$$

$$\sigma_{rz}\Big|_{r=R} = 0 \ ,$$

$$\left.\sigma_{rr}\right|_{r=R(1+h\;/R)}=0\;,$$

$$\left.\sigma_{rz}\right|_{r=R(1+h/R)}=0\,. \qquad (2.20)$$

Çift katlı içi dolu silindir için sınır ve temas koşulları:

$$\left.\sigma_{rr}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.\sigma_{rr}^{(1)}\right|_{r=R},$$

$$\left.\sigma_{rz}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.\sigma_{rz}^{(1)}\right|_{r=R},$$

$$\left.v_{r}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.v_{r}^{(1)}\right|_{r=R},$$

$$\left.v_{z}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.v_{z}^{(1)}\right|_{r=R},$$

$$\left.\sigma_{rr}^{(1)}\right|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0\,,$$

$$\left.\sigma_{rz}^{(1)}\right|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0\,. \qquad (2.21)$$

Çift katlı içi boş silindir için sınır ve temas koşulları:

$$\left.\sigma_{rr}^{(2)}\right|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0\,,$$

$$\left.\sigma_{rz}^{(2)}\right|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0\;,$$

$$\left.\sigma_{rr}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.\sigma_{rr}^{(1)}\right|_{r=R}\;,$$

$$\left.\sigma_{rz}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.\sigma_{rz}^{(1)}\right|_{r=R},$$

$$\left.v_{r}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.v_{r}^{(1)}\right|_{r=R}\;,$$

$$\left.v_{z}^{(2)}\right|_{r=R}=\left.v_{z}^{(1)}\right|_{r=R},$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0,$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0. \qquad (2.22)$$

Guz'a göre [33] problemin çözümünde yukarıdaki sınır ve temas koşulları ile denklem (2.9), (2.10), (2.15) ve (2.17)'yi kullanarak formülize etmesi baz alınarak yer değiştirme genlikleri için aşağıdaki simgeler kullanılır.

$$v_r^{(n)}=-ik\frac{\partial}{\partial r}X^{(n)},$$

$$v_z^{(n)}=\frac{1}{m_2^{(n)}+m_3^{(n)}}\left(m_1^{(n)}\Delta_1-k^2m_3^{(n)}+\omega^2\rho^{(n)}\right)X^{(n)},$$

$$\Delta_1=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}, \qquad (2.23)$$

buradaki $X^{(n)}$ fonksiyonu

$$\left[\left(\Delta_1-k^2(\zeta_2^{(n)})^2\right)\left(\Delta_1-k^2(\zeta_3^{(n)})^2\right)\right]X^{(n)}=0 \qquad (2.24)$$

denklem (2.24)'ten bulunur ve (2.23)'teki $\zeta_2^{(n)}$ ve $\zeta_3^{(n)}$ aşağıdaki denklemlerden elde edilir.

$$(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})M^{(n)}\left(\zeta'^{(n)}\right)^4-$$

$$k^2\left(\zeta'^{(n)}\right)^2\left[(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})\left(\rho^{(n)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})\right)+\right.$$

$$\left.M^{(n)}\left(\rho^{(m)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-M^{(n)}\right)+\left(\Lambda^{(n)}+M^{(n)}\right)^2\right]+$$

$$k^4\left(\rho^{(n)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})\right)\left(\rho^{(n)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-M^{(n)}\right)=0, \qquad (2.25)$$

Burada ω/k dalga yayılımının kompleks faz hızı, ω dalganın açısal frekansı ve k ise dalga sayısıdır.

Böylece denklem (2.24) ve (2.25)'ten fonksiyon $X^{(n)}$ için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$X^{(n)} = A_1^n J_0(\zeta_2^{(n)} kr) + A_2^n J_0(\zeta_3^{(n)} kr) + B_1^n Y_0(\zeta_2^{(n)} kr) + B_2^n Y_0(\zeta_3^{(n)} kr) \tag{2.26}$$

Burada $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci türden Bessel fonksiyonlarıdır.

Bağıntı (2.26) ve denklem (2.23), (2.16), (2.10) ve (2.9)'u kullanarak ifade (2.19), (2.20), (2.21) ve (2.22)'deki sınır ve temas koşullarından tüm durumlar için ayrı ayrı dispersiyon denklemleri elde edilir.

Tek katlı içi dolu silindir için dispersiyon denklemi:

$$\det\left\|\beta_{nm}\right\| = 0 \ , \ n;m = 1,2 \ , \tag{2.27}$$

şeklindedir. β matrisinin elemanları aşağıdaki bağıntılarla ifade edilir.

$$\beta_{11}\left(\zeta_2, \chi_2\right) = (\Lambda(\omega) + 2M \quad (\omega))\left(-\left(\zeta_2\right)^2 \frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_2\right) - J_0\left(\chi_2\right)\right)\right) +$$

$$\frac{\Lambda(\omega)}{\eta}\zeta_2 J_1\left(\chi_2\right) + \frac{\Lambda(\omega)}{2} \times \left(\beta_1 \left(\zeta_2\right)^2 \left(J_2\left(\chi_2\right) - J_0\left(\chi_2\right)\right) - \frac{\zeta_2}{\eta} J_1\left(\chi_2\right) - \beta_2 J_0\left(\chi_2\right)\right),$$

$$\beta_{21}\left(\zeta_2, \chi_2\right) = -M \quad (\omega)\zeta_2 J_1\left(\chi_2\right) + \frac{M \quad (\omega)}{4}\left(\beta_1 \left(\left(\zeta_2\right)^3 \left(3J_1\left(\chi_2\right) - J_3\left(\chi_2\right)\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2}{\eta^2} J_1\left(\chi_2\right) + \frac{\left(\zeta_2\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_2\right) - J_0\left(\chi_2\right)\right) + \beta_2 \zeta_2 J_1\left(\chi_2\right)\right)\right),$$

$$\beta_{12}\left(\zeta_3, \chi_{2h}\right) = (\Lambda(\omega) + 2M \quad (\omega))\left(-\left(\zeta_3\right)^2 \frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_{2h}\right) - J_0\left(\chi_{2h}\right)\right)\right) +$$

$$\frac{\Lambda(\omega)}{\eta}\zeta_3 J_1\left(\chi_{2h}\right) + \frac{\Lambda(\omega)}{2} \times$$

$$\left(\beta_1 \left(\zeta_3\right)^2 \left(J_2\left(\chi_{2h}\right) - J_0\left(\chi_{2h}\right)\right) - \frac{\zeta_2}{\eta} J_1\left(\chi_{2h}\right) - \beta_2 J_0\left(\chi_{2h}\right)\right),$$

$$\beta_{22}\left(\zeta_3,\chi_{2h}\right)=-M\ \ (\omega)\zeta_3 J_1\left(\chi_{2h}\right)+\frac{M\ \ (\omega)}{4}\left(\beta_1\ \left[\left(\zeta_3\right)^3\left(3J_1\left(\chi_{2h}\right)-J_3\left(\chi_{2h}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_3}{\eta^2}J_1\left(\chi_{2h}\right)+\frac{\left(\zeta_3\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_{2h}\right)-J_0\left(\chi_{2h}\right)\right)+\beta_2\zeta_3 J_1\left(\chi_{2h}\right)\right]\right). \qquad (2.28)$$

Tek katlı içi boş silindir için dispersiyon denklemi:

$$\det\left\|\alpha_{nm}\right\|=0\ ,\ n;m=1,2,...,4\,, \qquad (2.29)$$

şeklindedir. α matrisinin elemanları aşağıdaki bağıntılarla ifade edilir.

$$\alpha_{11}\left(\zeta_2,\chi_{2h^{(2)}}\right)=(\Lambda\,(\omega)+M\ \ (\omega))\left(-\left(\zeta_2\right)^2\frac{1}{2}\left[J_2\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right]\right)+$$

$$\frac{M\ \ (\omega)}{\eta}\zeta_2 J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)+$$

$$\frac{M\ \ (\omega)}{2}\left(\beta_1\ \left(\zeta_2\right)^2\left(J_2\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right)-\frac{\zeta_2}{\eta}J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-\beta_2 J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right),$$

$$\alpha_{21}\left(\zeta_2,\chi_{2h^{(2)}}\right)=-M(\omega)\zeta_2 J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)+$$

$$\frac{M(\omega)}{4}\left(\beta_1\ \left[\left(\zeta_2\right)^3\left(3J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-J_3\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2}{\eta^2}J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)+\frac{\left(\zeta_2\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right)+\beta_2\zeta_2 J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right]\right),$$

$$\alpha_{13}\left(\zeta_2,\chi_{2h^{(2)}}\right)=(\Lambda\,(\omega)+2M\ \ (\omega))\left(-\left(\zeta_2\right)^2\frac{1}{2}\left[Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right]\right)+$$

$$\frac{\Lambda\,(\omega)}{\eta}\zeta_2 Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)+\frac{\Lambda\,(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1\ \left(\zeta_2\right)^2\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right)-\frac{\zeta_2}{\eta}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-\beta_2 Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right),$$

$$\alpha_{23}\left(\zeta_2, \chi_{2h^{(2)}}\right) = -M\ \ (\omega)\zeta_2 Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right) +$$

$$\frac{M\ \ (\omega)}{4}\left(\beta_1\ \left(\left(\zeta_2\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right) - Y_3\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2}{\eta^2} Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right) + \frac{\left(\zeta_2\right)^2}{2\eta}\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}\right) - Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right)\right) + \beta_2\zeta_2 Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right),$$

$$\alpha_{n2} = \alpha_{n1}\left(\zeta_3, \chi_{3h^{(2)}}\right),\ \alpha_{n4} = \alpha_{n3}\left(\zeta_3, \chi_{3h^{(2)}}\right),\ n = 1, 2$$

$$\alpha_{31}\left(\zeta_2, \chi_{2h^{(1)}}\right) = (\Lambda\ (\omega) + 2M\ \ (\omega))\left(-\left(\zeta_2\right)^2 \frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) - J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right)\right) +$$

$$\frac{\Lambda\,(\omega)}{\eta}\zeta_2 J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) + \frac{\Lambda\,(\omega)}{2} \times$$

$$\left(\beta_1\ \left(\zeta_2\right)^2\left(J_2\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) - J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right) - \frac{s_2}{\eta} J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) - \beta_2 J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right),$$

$$\alpha_{41}\left(\zeta_2, \chi_{2h^{(1)}}\right) = -M\ \ (\omega)\zeta_2 J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) +$$

$$\frac{M\ \ (\omega)}{4}\left(\beta_1\ \left(\left(\zeta_2\right)^3\left(3J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) - J_3\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2}{\eta^2} J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) + \frac{\left(\zeta_2\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) - J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right)\right) + \beta_2\zeta_2 J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right),$$

$$\alpha_{33}\left(\zeta_2, \chi_{2h^{(1)}}\right) = (\Lambda\ (\omega) + 2M\ \ (\omega))\left(-\left(\zeta_2\right)^2 \frac{1}{2}\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) - Y_0\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right)\right) +$$

$$\frac{\Lambda\,(\omega)}{\eta}\zeta_2 Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right) + \frac{\Lambda\,(\omega)}{2} \times$$

$$\left(\beta_1\left(\zeta_2\right)^2\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right)-\frac{\zeta_2}{\eta}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)-\beta_2 Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}\right)\right),$$

$$\alpha_{43}\left(\zeta_2,\chi_{2h^{(1)}}\right)=-M\ (\omega)\zeta_2 Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)+$$

$$\frac{M\ (\omega)}{4}\left(\beta_1\left(\left(\zeta_2\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)-Y_3\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2}{\eta^2}Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)+\frac{\left(\zeta_2\right)^2}{2\eta}\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right)+\beta_2\zeta_2 Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}\right)\right)\right),$$

$$\alpha_{n2}=\alpha_{n1}\left(\zeta_3,\chi_{3h^{(1)}}\right),\alpha_{n4}=\alpha_{n3}\left(\zeta_3,\chi_{3h^{(1)}}\right),\quad n=3,4. \tag{2.30}$$

β ve α matrisleri için elde edilen bağıntılardaki bazı gösterimler aşağıdaki gibidir:

$$\chi_2=kR\zeta_2\ ,\ \chi_{2h}=kR\zeta_3$$

$$\chi_{2h^{(2)}}=kR\zeta_2\ ,\ \chi_{3h^{(2)}}=kR\zeta_3$$

$$\chi_{2h^{(1)}}=kR\left(1+\frac{h}{R}\right)\zeta_2\ ,\ \chi_{3h^{(1)}}=kR\left(1+\frac{h}{R}\right)\zeta_3$$

$$\beta_1=\frac{(\Lambda(\omega)+2M\ (\omega))}{(\Lambda(\omega)+M\ (\omega))}$$

$$\beta_2=\frac{M\ (\omega)}{(\Lambda(\omega)+M\ (\omega))}-\rho\left(\frac{\omega}{k}\right)^2(\Lambda(\omega)+M\ (\omega))^{-1}. \tag{2.31}$$

Çift katlı içi dolu silindir için dispersiyon denklemi:

$$\det\left\|\phi_{nm}\right\|=0\ ,\ n;m=1,2,\ldots,6, \tag{2.32}$$

şeklindedir. ϕ matrisinin elemanları aşağıdaki bağıntılarla ifade edilir.

$$\phi_{11}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=(\Lambda^{(2)}(\omega)+2M^{(2)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\left(J_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)-\beta_2^{(2)}J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right),$$

$$\phi_{21}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=-M^{(2)}(\omega)\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+$$

$$\frac{M^{(2)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(2)}\left(\left(\zeta_2^{(2)}\right)^3\left(3J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_3\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta^2}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)+\beta_2^{(2)}\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)\right),$$

$$\phi_{31}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=-\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right),$$

$$\phi_{41}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=\left(-\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2-\beta_2^{(2)}\right)J_0\left(\chi_2^{(2)}\right),$$

$$\phi_{13}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=(\Lambda^{(1)}(\omega)+2M^{(1)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\left(J_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-\beta_2^{(1)}J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right),$$

$$\phi_{15}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=(\Lambda^{(1)}(\omega)+2M^{(1)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\frac{1}{2}\left(Y_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\left(Y_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-\beta_2^{(1)}Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right),$$

$$\phi_{23}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=-M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+$$

$$\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left[\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_3\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right]+\beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)\right),$$

$$\phi_{25}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=-M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left[\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_3\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{\eta 2}\left(Y_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right]+\beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)\right),$$

$$\phi_{14}=\phi_{13}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{16}=\phi_{15}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{24}=\phi_{23}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{26}=\phi_{25}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{33}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=-\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_{43}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=\left(-\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2-\beta_2^{(1)}\right)J_0\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_{35}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=-\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_{45}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=\left(-\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2-\beta_2^{(1)}\right)Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_{34}=\phi_{33}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{36} = \phi_{35}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{44} = \phi_{43}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{46} = \phi_{45}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\phi_{53}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)}\right) = \left(\Lambda^{(1)}(\omega) + 2M^{(1)}(\omega)\right)\left(-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - J_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right)\right) +$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)} J_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) + \frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2} \times$$

$$\left(\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\left(J_2\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - J_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right) - \frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta} J_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - \beta_2^{(1)} J_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right),$$

$$\phi_{63}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)}\right) = -M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)} J_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) +$$

$$\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left(\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3J_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - J_3\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2} J_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) + \frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - J_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right) + \beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)} J_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right)\right),$$

$$\phi_{55}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)}\right) = \left(\Lambda^{(1)}(\omega) + 2M^{(1)}(\omega)\right)\left(-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2}\left(Y_2\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - Y_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right)\right) +$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)} Y_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) + \frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2} \times$$

$$\left(\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\left(Y_2\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - Y_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right) - \frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta} Y_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) - \beta_2^{(1)} Y_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right),$$

$$\phi_{65}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)}\right) = -M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)} Y_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right) +$$

$$\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left[\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)-Y_3\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2}Y_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{2\eta}\left(Y_2\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right)+\beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_{2h}^{(1)}\right)\right]\right),$$

$$\phi_{n4}=\phi_{n3}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_{3h}^{(1)}\right),$$

$$\phi_{n6}=\phi_{n5}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_{3h}^{(1)}\right),$$

$$\phi_{n1}=\phi_{n2}=0,\ n=5,6. \tag{2.33}$$

Çift katlı içi boş silindir için dispersiyon denklemi:

$$\det\left\|\delta_{nm}\right\|=0\ ,\ n;m=1,2,...,8, \tag{2.34}$$

şeklindedir. δ matrisinin elemanları aşağıdaki bağıntılarla ifade edilir.

$$\delta_{11}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)=(\Lambda^{(2)}(\omega)+M^{(2)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{M^{(2)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)+\frac{M^{(2)}(\omega)}{2}\left(\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\left(J_2\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta}J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-\beta_2^{(2)}J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right),$$

$$\delta_{21}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)=-M(\omega)\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)+$$

$$\frac{M(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(2)}\left[\left(\zeta_2^{(2)}\right)^3\left(3J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-J_3\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta^2}J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)+\beta_2^{(2)}\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right]\right),$$

$$\delta_{13}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)=(\Lambda^{(2)}(\omega)+2M^{(2)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\frac{1}{2}\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)+\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-\beta_2^{(2)}Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right),$$

$$\delta_{23}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)=-M^{(2)}(\omega)\zeta_2^{(2)}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)+$$

$$\frac{M^{(2)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(2)}\left(\left(\zeta_2^{(2)}\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-Y_3\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta^2}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2}{2\eta}\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)+\beta_2^{(2)}\zeta_2^{(2)}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)\right),$$

$$\delta_{n2}=\delta_{n1}\left(\zeta_3^{(2)},\chi_{3h^{(2)}}^{(2)}\right),$$

$$\delta_{n4}=\delta_{n3}\left(\zeta_3^{(2)},\chi_{3h^{(2)}}^{(2)}\right),$$

$$\delta_{n5}=\delta_{n6}=\delta_{n7}=\delta_{n8}=0,\ n=1,2,$$

$$\delta_{31}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=(\Lambda^{(2)}(\omega)+2M^{(2)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\left(J_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)-\beta_2^{(2)}J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right),$$

$$\delta_{41}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=-M^{(2)}(\omega)\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+$$

$$\frac{M^{(2)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(2)}\left[\left(\zeta_2^{(2)}\right)^3\left(3J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_3\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta^2}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)+\beta_2^{(2)}\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right)\right]\right),$$

$$\delta_{51}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=-\zeta_2^{(2)}J_1\left(\chi_2^{(2)}\right),$$

$$\delta_{61}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=\left[-\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2-\beta_2^{(2)}\right]J_0\left(\chi_2^{(2)}\right),$$

$$\delta_{33}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=(\Lambda^{(2)}(\omega)+2M^{(2)}(\omega))\left[-\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\frac{1}{2}\left[Y_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right]\right]+$$

$$\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(2)}Y_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+\frac{\Lambda^{(2)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\left(Y_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta}Y_1\left(\chi_2^{(2)}\right)-\beta_2^{(2)}Y_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right),$$

$$\delta_{43}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=-M^{(2)}(\omega)\zeta_2^{(2)}Y_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+$$

$$\frac{M^{(2)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(2)}\left[\left(\zeta_2^{(2)}\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_2^{(2)}\right)-Y_3\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta^2}Y_1\left(\chi_2^{(2)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2}{2\eta}\left(Y_2\left(\chi_2^{(2)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(2)}\right)\right)+\beta_2^{(2)}\zeta_2^{(2)}Y_1\left(\chi_2^{(2)}\right)\right]\right),$$

$$\delta_{53}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=-\zeta_2^{(2)}Y_1\left(\chi_2^{(2)}\right),$$

$$\delta_{63}\left(\zeta_2^{(2)},\chi_2^{(2)}\right)=\left[-\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2-\beta_2^{(2)}\right]Y_0\left(\chi_2^{(2)}\right),$$

$$\delta_{n2}=\delta_{n1}\left(\zeta_3^{(2)},\chi_3^{(2)}\right),\ \delta_{n4}=\delta_{n3}\left(\zeta_3^{(2)},\chi_3^{(2)}\right),\ n=3,4,5,6$$

$$\delta_{35}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=(\Lambda^{(1)}(\omega)+2M^{(1)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\frac{1}{2}\left(J_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\left(J_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-\beta_2^{(1)}J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right),$$

$$\delta_{37}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=(\Lambda^{(1)}(\omega)+2M^{(1)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\frac{1}{2}\left(Y_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\left(Y_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-\beta_2^{(1)}Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right),$$

$$\delta_{45}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=-M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left(\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_3\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-J_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)+\beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right),$$

$$\delta_{47}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_2^{(1)}\right)=-M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left(\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_3\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{\eta 2}\left(Y_2\left(\chi_2^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)+\beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right)\right)\right),$$

$$\delta_{36}=\delta_{35}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{38}=\delta_{37}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{46}=\delta_{45}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{48} = \delta_{47}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{55}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}\right) = -\zeta_2^{(1)} J_1\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\delta_{65}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}\right) = \left[-\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 - \beta_2^{(1)}\right] J_0\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\delta_{57}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}\right) = -\zeta_2^{(1)} Y_1\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\delta_{67}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}\right) = \left[-\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 - \beta_2^{(1)}\right] Y_0\left(\chi_2^{(1)}\right),$$

$$\delta_{56} = \delta_{55}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{58} = \delta_{57}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{66} = \delta_{65}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{68} = \delta_{67}\left(\zeta_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}\right),$$

$$\delta_{75}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) = \left(\Lambda^{(1)}(\omega) + 2M^{(1)}(\omega)\right)\left[-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2}\left[J_2\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) - J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right]\right] +$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)} J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) + \frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2} \times$$

$$\left[\beta_1^{(1)}\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\left(J_2\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) - J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right) - \frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta} J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) - \beta_2^{(1)} J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right],$$

$$\delta_{85}\left(\zeta_2^{(1)}, \chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) = -M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)} J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) +$$

$$\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left[\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right) - J_3\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right) +\right.\right.$$

$$\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2}J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{2\eta}\left(J_2\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)-J_0\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right)+\beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}J_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\Bigg),$$

$$\delta_{77}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)=(\Lambda^{(1)}(\omega)+2M^{(1)}(\omega))\left(-\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2\frac{1}{2}\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right)\right)+$$

$$\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{\eta}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)+\frac{\Lambda^{(1)}(\omega)}{2}\times$$

$$\left(\beta_1^{(2)}\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right)-\frac{\zeta_2^{(2)}}{\eta}Y_1\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)-\beta_2^{(2)}Y_0\left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}\right)\right),$$

$$\delta_{87}\left(\zeta_2^{(1)},\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)=-M^{(1)}(\omega)\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)+$$

$$\frac{M^{(1)}(\omega)}{4}\left(\beta_1^{(1)}\left(\left(\zeta_2^{(1)}\right)^3\left(3Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)-Y_3\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\frac{\zeta_2^{(1)}}{\eta^2}Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)+\frac{\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2}{2\eta}\left(Y_2\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)-Y_0\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\right)+\beta_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}Y_1\left(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}\right)\Bigg),$$

$$\delta_{n6}=\delta_{n5}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_{3h^{(1)}}^{(1)}\right),\ \delta_{n8}=\delta_{n7}\left(\zeta_3^{(1)},\chi_{3h^{(1)}}^{(1)}\right),$$

$$\delta_{n1}=\delta_{n2}=\delta_{n3}=\delta_{n4}=0\,,n=7,8\,. \qquad (2.35)$$

ϕ ve δ matrisleri için elde edilen bağıntılardaki bazı gösterimler aşağıdaki gibidir:

$$\chi_2^{(n)}=kR\zeta_2^{(n)},\ \chi_3^{(n)}=kR\zeta_3^{(n)},\ n=1,2\,,$$

$$\chi_{2h}^{(1)}=kR\left(1+\frac{h}{R}\right)\zeta_2^{(1)},\ \chi_{3h}^{(1)}=kR\left(1+\frac{h}{R}\right)\zeta_3^{(1)}$$

$$\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}=kR\left(1-\frac{h^{(2)}}{R}\right)\zeta_2^{(2)},\ \chi_{3h^{(2)}}^{(2)}=kR\left(1-\frac{h^{(2)}}{R}\right)\zeta_3^{(2)}$$

$$\chi_{2h^{(1)}}^{(1)} = kR\left(1+\frac{h^{(1)}}{R}\right)\zeta_2^{(1)},\ \chi_{3h^{(1)}}^{(1)} = kR\left(1+\frac{h^{(1)}}{R}\right)\zeta_3^{(1)}$$

$$\beta_1^{(n)} = \frac{(\Lambda^{(n)}(\omega)+2M^{(n)}(\omega))}{(\Lambda^{(n)}(\omega)+M^{(n)}(\omega))}$$

$$\beta_2^{(n)} = \frac{M^{(n)}(\omega)}{(\Lambda^{(n)}(\omega)+M^{(n)}(\omega))} - \rho^{(n)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 (\Lambda^{(n)}(\omega)+M^{(n)}(\omega))^{-1}. \tag{2.36}$$

Böylelikle ele alınan dalga yayılımı problemleri için elde edilen dispersiyon denklemleri (2.27), (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) ve (2.36)'da verilmiştir.

Bağıntı (2.16)'daki $\lambda_{1c}^{(n)}$, $\lambda_{1s}^{(n)}$, $\mu_{1c}^{(n)}$ ve $\mu_{1s}^{(n)}$ ifadelerinin sıfıra eşit ve $\Lambda^{(n)} = \lambda_0^{(n)}$ ile $M^{(n)} = \mu_0^{(n)}$ olduğu durumda yukarıda elde edilen dispersiyon denklemleriyle, Akbarov ve Guliev [27], Akbarov ve Ipek [34-35] makalelerinde ve Akbarov'un [31] monografında da olduğu gibi elastik durum için dalga dispersiyonu sonuçları elde edilebilir.

BÖLÜM 3

VİSKOELASTİK OPERATÖRLERİN SEÇİMİ VE NÜMERİK ÇÖZÜM ALGORİTMASI

3.1 Boyutsuz Reolojik Parametrelerin ve Viskoelastik Operatörlerin Seçilmesi

Viskoelastik malzemede zamana göre harmonik dalga yayılımını araştırmak için *k* dalga sayısı kompleks olarak ele alınmalıdır.

$$k = k_1 + ik_2 = k_1(1+i\beta)\,,\ \beta = \frac{k_2}{k_1} \tag{3.1}$$

k_2 (veya (3.1)'deki β) dalga sayısı, k'nın imajiner kısmıdır ve ele alınan dalga genliğinin sönümünü tanımlar. β da sönüm katsayısı olarak adlandırılır. Yukarıdaki ifadeleri kullanarak dalgaların faz hızı aşağıdaki gibi belirlenir.

$$c = \frac{\omega}{k_1} \tag{3.2}$$

Bu amaçla yanda verilen notasyon $c_{20}^{(n)} = \sqrt{\mu_0^{(n)} / \rho^{(n)}}$

ve aşağıdaki ifadeler kullanılır.

$$\frac{c}{c_{20}^{(2)}},\ k_1 R\,,\ \frac{h^{(1)}}{R} \text{ ve } \frac{h^{(2)}}{R}. \tag{3.3}$$

Dispersiyon denklemleri (2.27), (2.29), (2.32) ve (2.34)'ü çözmek için; (2.3)'teki operatörlerde verilen çekirdek fonksiyonları $\mu_1^{(n)}(t)$ ve $\lambda_1^{(n)}(t)$ kullanılarak (2.14)'teki ifadelerle belirlenen $\lambda_{1c}^{(n)}$, $\lambda_{1s}^{(n)}$, $\mu_{1c}^{(n)}$ ve $\mu_{1s}^{(n)}$ değerlerinin verilmesi gerekir. Bu operatörler silindir katman malzemelerinin viskoelastik özelliklerini göstermektedir. Sonuç olarak $\lambda_{1c}^{(n)}$, $\lambda_{1s}^{(n)}$, $\mu_{1c}^{(n)}$ ve $\mu_{1s}^{(n)}$'in sayısal değerlerini hesaplayabilmek için $\mu_1^{(n)}(t)$ ve $\lambda_1^{(n)}(t)$'nin açık bir şekilde ifade edilmesi gerekmektedir.

Akbarov [36] ile Akbarov ve Kepceler [29] tarafından yazılan makalelerde olduğu gibi Rabotnov [30] tarafından silindir katman malzemelerinin viskoelastisitesini ifade eden fraksiyonel eksponansiyel operatörler kullanılmıştır.

$$\mu^{(n)*}\varphi(t) = \mu_0^{(n)}\left[\varphi(t) - \frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})}\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}\left(-\frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})} - \beta_\infty^{(n)}\right)\varphi(t)\right],$$

$$\lambda^{(n)*}\varphi(t) = \lambda_0^{(n)}\left[\varphi(t) + \frac{\beta_0^{(n)}}{(1+\nu_0^{(n)})}\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}\left(-\frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})} - \beta_\infty^{(n)}\right)\varphi(t)\right],$$

$$E^{(n)*}\varphi(t) = E_0^{(n)}\left[\varphi(t) - \beta_0^{(n)}\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}\left(-\beta_0^{(n)} - \beta_\infty^{(n)}\right)\varphi(t)\right],$$

$$\nu^{(n)*}\varphi(t) = \nu_0^{(n)}\left[\varphi(t) + \frac{1-2\nu_0^{(n)}}{2\nu_0^{(n)}}\beta_0^{(n)}\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}\left(-\beta_0^{(n)} - \beta_\infty^{(n)}\right)\varphi(t)\right], \qquad (3.4)$$

(3.4)'teki bağıntılarda verilen $\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}$

$$\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}(x^{(n)})\varphi(t) = \int_0^t \Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)}(x^{(n)}, t-\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)}(x^{(n)}, t) = t^{-\alpha^{(n)}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x^{(n)})^p t^{p(1-\alpha^{(n)})}}{\Gamma((1+p)(1-\alpha^{(n)}))}, \; 0 \le \alpha^{(n)} < 1 \qquad (3.5)$$

şeklinde verilmiş operatördür. (3.5)'teki $\Gamma(x)$ gamma fonksiyonudur. Ayrıca (3.4) ve (3.5)'teki $\alpha^{(n)}$, $\beta_0^{(n)}$ ve $\beta_\infty^{(n)}$ sabitleri n'inci katman malzemesinin reolojik parametreleridir. (3.4)'teki ifadelere göre

$$(\lambda^{(n)*} + \frac{2}{3}\mu^{(n)*})\varphi(t) = (\lambda_0^{(n)} + \frac{2}{3}\mu_0^{(n)})\varphi(t) \qquad (3.6)$$

şekilde yazılabilir. $(\lambda_0^{(n)}+\frac{2}{3}\mu_0^{(n)})$ hacim genişleme modülü $K_0^{(n)}$ olarak belirtilir. Katman malzemelerinin hacimsel genleşmesi elastik olduğu durumda (3.4)'teki operatörlerin seçimi yapılabilir.

$$T^{(n)}=T_{rr}^{(n)}+T_{\theta\theta}^{(n)}+T_{zz}^{(n)}\ ,\ D_{rr}^{(n)}=T_{rr}^{(n)}-T^{(n)}\ ,$$

$$D_{\theta\theta}^{(n)}=T_{\theta\theta}^{(n)}-T^{(n)}\ ,\ D_{zz}^{(n)}=T_{zz}^{(n)}-T^{(n)}\ ,$$

$$D_{rz}^{(n)}=T_{rz}^{(n)}\ ,\ s_{rr}^{(n)}=\varepsilon_{rr}^{(n)}-\theta^{(n)}/3\ ,\ s_{\theta\theta}^{(n)}=\varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}-\theta^{(n)}/3\ ,$$

$$s_{zz}^{(n)}=\varepsilon_{zz}^{(n)}-\theta^{(n)}/3\ ,\ s_{rz}^{(n)}=\varepsilon_{rz}^{(n)}\ , \tag{3.7}$$

(2.2)'deki bünye denklemleri aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$T^{(n)}(t)=K_0^{(n)}\theta^{(n)}(t)\ ,\ D_{(ii)}^{(n)}=2\mu^{(n)*}s_{(ii)}^{(n)}\ ,\ (ii)=rr;\theta\theta;zz;rz \tag{3.8}$$

Literatürde olduğu gibi $D_{(ii)}^{(n)}$ ($s_{(ii)}^{(n)}$) deviatorik gerilme bileşeni olarak adlandırılır. Sonuç olarak, ifade (3.8)'den katman malzemelerinin viskoelastisitesini tanımlamak için $\mu^{(n)*}$ operatörünün yeterli olduğu ortaya çıkmaktadır.

$\alpha^{(n)}$, $\beta_0^{(n)}$ ve $\beta_\infty^{(n)}$ reolojik parametrelerinin mekanik anlamını açıklamak için Rabotnov [30], Akbarov [36] ve Akbarov ile Kepceler'in [29] çalışmalarına bağlı olarak (3.5) operatörünün bazı özellikleri incelenmiştir. İfadeyi basitleştirmek için üst indeks (n)'i gözardı ederek $\Pi_\alpha^*(x)$ operatörü

$$R_\alpha^*(x)=\frac{I_\alpha^*}{1-xI_\alpha^*}\quad \text{veya}\quad 1+xR_\alpha^*(x)=\frac{1}{1-xI_\alpha^*} \tag{3.9}$$

şeklinde ve bu operatördeki I_α^* ise

$$I_\alpha^*\varphi(t)=\int_0^t I_\alpha(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\ ,\ \ I_a(t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\ ,\ 0\le\alpha<1 \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır.

Bağıntı (3.9)'a göre, I_{α}^{*} ile ifade edilen operatör $R_{\alpha}^{*}(x)$ çözücü operatörü olarak adlandırılır. I_{α}^{*} tipi viskoelastik operatörü ile birlikte fraksiyonel dizi modeli Adolfson ile ark. [37] ve Sawicki ile Padovan'in [38] makalelerinde analiz edilmiştir. Rabotnov [30] makalesinde ifade (3.5) $\Pi_{\alpha}(x,t)$ ve $\Pi_{1\alpha}(x,t)=\int_0^t \Pi_{\alpha}(x,t-\tau)d\tau$ fonksiyonlarına $\bar{f}(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ Laplace dönüşümü uygulanarak

$$\bar{\Pi}_{\alpha}(x,s)=\frac{1}{s^{1-\alpha}-x},$$

$$\bar{\Pi}_{1\alpha}(x,s)=\frac{1}{s(s^{1-\alpha}-x)} \tag{3.11}$$

elde edilir. İfade (3.5)'te zamanın küçük değerlerinde $\Pi_{\alpha}(x,t)$ fonksiyonunun hesaplanması için serilerde birinci terim baskındır ve bu nedenle $t\to 0$ olduğu durumda $\Pi_{\alpha}(x,t)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\Pi_{\alpha}(x,t)\approx I_{\alpha}(t). \tag{3.12}$$

Ayrıca, $t\to\infty$ olduğu durumda (3.11)'deki ifadeden

$$\Pi_{1\alpha}(x,t)=\int_0^t \Pi_{\alpha}(x,t-\tau)d\tau \to -\frac{1}{x} \tag{3.13}$$

olması sonucu çıkar. Bu durumda (3.4), (3.5), (3.12) ve (3.13) ifadelerine göre $\alpha^{(n)}$ boyutsuz reolojik parametresinin, deformasyonların başlangıç durumunda ($t=0$ civarında) viskoelastik malzemenin mekanik davranışını karakterize ettiği sonucuna varılır.

Buna ek olarak $\beta_{\infty}^{(n)}$ reolojik parametresi boyutunun $\beta_0^{(n)}$ reolojik parametresi boyutuyla ve $T^{\alpha^{(n)}-1}$ ile örtüştüğü kararına varılabilir. Buradaki t zaman ölçüsüdür. Aynı zamanda, ifade (3.4), (3.5) ve (3.13)'e göre aşağıda takip eden ifadeler yazılır.

$$\lambda_{\infty}^{(n)}=\lim_{t\to\infty}\lambda^{(n)*}=\lambda_0^{(n)}\left(1+\frac{1}{1+\nu_0^{(n)}}\frac{1}{(3/(2(1-\nu_0^{(n)}))+d^{(n)})}\right),$$

$$\mu_{\infty}^{(n)} = \lim_{t\to\infty} \mu^{(n)*} = \mu_0^{(n)} \left(1 - \frac{3}{2(1+\nu_0^{(n)})} \frac{1}{(3/(2(1-\nu_0^{(n)})) + d^{(n)})} \right),$$

$$E_{\infty}^{(n)} = \lim_{t\to\infty} E^{(n)*} = E_0^{(n)} \left(1 - \frac{1}{1+d^{(n)}} \right),$$

$$\nu_{\infty}^{(n)} = \lim_{t\to\infty} \nu^{(n)*} = \nu_0^{(n)} \left(1 + \frac{1-2\nu_0^{(n)}}{2\nu_0^{(n)}} \frac{1}{1+d^{(n)}} \right), \tag{3.14}$$

burada $d^{(n)}$

$$d^{(n)} = \frac{\beta_{\infty}^{(n)}}{\beta_0^{(n)}} \tag{3.15}$$

şeklinde yazılır. (3.14) ve (3.15) ifadeleri $d^{(n)}$ sabitinin elastisite sabitlerinin $t=\infty$'daki değerlerini karakterize ettiğini gösterir. (3.4) ve (3.5) fraksiyonel eksponansiyel operatörlerinden seçilen $\mu_c^{(n)}$ ve $\mu_s^{(n)}$ ifadelerini ele alacak olursak, (2.14) ve (3.4) bağıntılarını kullanarak bu ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mu_c^{(n)} = \mu_0^{(n)} \left[1 - \frac{3}{2(1+\nu_0^{(n)})} \left(d^{(n)} + \beta_{01}^{(n)} \right)^{-1} \Pi_{\alpha^{(n)} c}^{(n)} (-\beta_{01}^{(n)} - \beta_{\infty}^{(n)}, k_1 Rc) \right],$$

$$\mu_s^{(n)} = -\mu_0^{(n)} \frac{3}{2(1+\nu_0^{(n)})} \left(d^{(n)} + \beta_{01}^{(n)} \right)^{-1} \Pi_{\alpha^{(n)} s}^{(n)} (-\beta_{01}^{(n)} - \beta_{\infty}^{(n)}, k_1 Rc), \tag{3.16}$$

buradaki $\beta_{01}^{(n)}$

$$\beta_{01}^{(n)} = \frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})} \tag{3.17}$$

şeklinde verilmiştir. $\mu_s^{(n)} \big/ \mu_c^{(n)}$ oranı kayıp tanjantı olarak adlandırılır. Örneğin $\tan\psi^{(n)} = \mu_s^{(n)} \big/ \mu_c^{(n)}$. Buradaki $\psi^{(n)}$ faz açısı olarak yorumlanabilir.

Böylece fraksiyonel eksponansiyel operatör (3.4)'ün çekirdek fonksiyonu (3.5)'e Laplace dönüşümü uygulanarak ve bazı matematiksel varsayımlar yapılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\Pi^{(n)}_{\alpha^{(n)}c}(-\beta^{(n)}_{01}-\beta^{(n)}_{\infty},k_1Rc)=\frac{(\xi^{(n)})^2+\xi^{(n)}\sin\frac{\pi\alpha^{(n)}}{2}}{(\xi^{(n)})^2+2\xi^{(n)}\sin\frac{\pi\alpha^{(n)}}{2}+1},$$

$$\Pi^{(n)}_{\alpha^{(n)}s}(-\beta^{(n)}_{01}-\beta^{(n)}_{\infty},k_1Rc)=\frac{\xi^{(n)}\cos\frac{\pi\alpha^{(n)}}{2}}{(\xi^{(n)})^2+2\xi^{(n)}\sin\frac{\pi\alpha^{(n)}}{2}+1}. \tag{3.18}$$

(3.18)'deki $\xi^{(n)}$ ifade (3.19)'daki gibi elde edilir.

$$\xi^{(n)}=(Q^{(n)}\Omega)^{\alpha^{(n)}-1},\ Q^{(n)}=\frac{c^{(n)}_{20}}{R(\beta^{(n)}_{01}+\beta^{(n)}_{\infty})^{\frac{1}{1-\alpha^{(n)}}}},\ \Omega=k_1R\frac{c}{c^{(2)}_{20}} \tag{3.19}$$

Yukarıda $\beta^{(n)}_{\infty}$ ve $\beta^{(n)}_{0}$ reolojik parametreleri için ele alınan ifadelerle (3.19)'deki $Q^{(n)}$ ve $\xi^{(n)}$ parametrelerinin boyutsuz olduğu çıkarılır. Ayrıca (3.16), (3.18) ve (3.19) ifadelerinde ve Akbarov [36] ile Akbarov ve Kepceler [29] makalelerindeki nümerik analizlerde $\mu^{(n)}_{s}\big/\mu^{(n)}_{0}$ oranı sıfıra doğru yaklaşırken, $\xi^{(n)}$'nin sıfıra veya sonsuza yaklaştığı sonucuna varılır. Fakat $\xi^{(n)}$ ile birlikte $\mu^{(n)}_{c}$ ($\Pi^{(n)}_{\alpha^{(n)}c}$)'nin mutlak değeri $\xi^{(n)}\to 0$ ($\xi^{(n)}\to\infty$) ve $\mu^{(n)}_{c}\big/\mu^{(n)}_{0}\to 1$ ($\mu^{(n)}_{c}\big/\mu^{(n)}_{0}\to\mu^{(n)}_{\infty}\big/\mu^{(n)}_{0}$) durum için monoton bir şekilde azalır (artar).

Akbarov'un monografında [31] ve Akbarov [36] ile Akbarov ve Kepceler [29] makalelerinde olduğu gibi $Q^{(n)}$ parametresinin mekanik anlamı,

$$t^{(n)}_{c}=\left(\beta^{(n)}_{01}+\beta^{(n)}_{0}\right)^{\frac{-1}{(1+\alpha^{(n)})}} \tag{3.20}$$

şeklinde yazılır ve n. katman malzemesi için karakteristik sürünme zamanı diye adlandırılır. İfade (3.19) ve (3.20)'ye göre

$$Q^{(n)} = t_c^{(n)} c_{20}^{(2)} / R \tag{3.21}$$

elde edilir. Bu denklemden $c_{20}^{(2)} / R$ sabit olması durumunda $Q^{(n)}$ değerindeki artış (azalış) karakteristik sürünme zamanı $t_c^{(n)}$ değerinde artışa (azalışa) neden olduğu sonucu çıkarılır. Yukarıda açıklanan bir diğer boyutsuz reolojik parametre $d^{(n)}$'dir. Bu parametre denklem (3.14) ve (3.16) içinde yazılır ve mekanik özelliklerin $t = \infty$'da olan değerlerini karakterize eder. Örneğin $\mu_\infty^{(n)}$'nin değerleri ifade (3.14) ve $\mu_\infty^{(n)} < \mu_0^{(n)}$ olduğu durumlar için belirlenir. Bununla birlikte, $\mu_\infty^{(n)}$'nin büyüklüğü $d^{(n)}$ ile birlikte artar. Daha açık anlatmak gerekirse,

$$\mu_\infty^{(n)} \to \mu_0^{(n)} \text{ , } \mu_s^{(n)} \to 0 \;\; \Rightarrow \;\; d^{(n)} \to \infty . \tag{3.22}$$

Sonuç olarak ele alınan viskoelastik sistemdeki dalga dispersiyon eğrileri $d^{(n)}$'nin yüksek değerlerinde benzer elastik sistem için elde edilen eğrilere yaklaşmalıdır. Aynı zamanda ifade (3.18) ve (3.19)'a göre aşağıdaki limit şartları yazılır:

$$\xi^{(n)} \to \infty ;\; \Pi_{\alpha^{(n)}c}^{(n)}(-\beta_1^{(n)} - \beta_\infty^{(n)}, k_1 Rc) \to 1 ;\; \Pi_{\alpha^{(n)}s}^{(n)}(-\beta_1^{(n)} - \beta_\infty^{(n)}, k_1 Rc) \to 0$$

$$(Q^{(n)}\Omega) \to 0 \text{ veya } k_1 R \to 0 \text{ olduğu durumda,} \tag{3.23}$$

$$\xi^{(n)} \to 0 ;\; \Pi_{\alpha^{(n)}c}^{(n)}(-\beta_1^{(n)} - \beta_\infty^{(n)}, k_1 Rc) \to 0 ;\; \Pi_{\alpha^{(n)}s}^{(n)}(-\beta_1^{(n)} - \beta_\infty^{(n)}, k_1 Rc) \to 0$$

$$(Q^{(n)}\Omega) \to \infty \text{ veya } k_1 R \to \infty \text{ olduğu durumda.} \tag{3.24}$$

İfade (3.23)'ten $(Q^{(n)}\Omega) \ll 1$ olduğu durumlarda viskoelastik sistemin davranışı elastisite sabitlerinin $t = \infty$'da olan değerlerinde elastik sistem davranışına çok yakın olduğu gözlemlenir. Bunun yanı sıra ifade (3.24)'ten $(Q^{(n)}\Omega) \gg 1$ olduğu durumlarda elastisite sabitlerinin anlık değerlerinde viskoelastik sistemin davranışı, $t = 0$'daki elastik sistem davranışına çok yakın olduğu sonucuna varılır.

Böylece yukarıdaki tartışmalara göre dalga yayılım hızı ve dalga sönüm dispersiyonunda, ele alınan viskoelastik malzemenin viskozitesinin etkisi olduğu görülmektedir. Bu etki $Q^{(n)}$ ve $d^{(n)}$ parametreleri ile karakterize edilir. $Q^{(n)}$ ve $d^{(n)}$ parametrelerinin değerlerindeki artışın, tüm bileşenlerin viskoz kısımlarında viskoelastik deformasyonların azalmasına neden olduğu dikkate alınmalıdır. Viskoelastik deformasyonların viskoz kısımındaki diğer reolojik parametre $\alpha^{(n)}$'nin etkisi $Q^{(n)}$ parametresi içinde verildiği not edilmelidir. Böylece boyutsuz reolojik parametreler değiştirilerek eksenel simetrik boyuna dalga yayılımında katman malzemelerinin viskoelastisitesinin etkisi incelenecektir.

3.2 Dispersiyon Denklemlerinin Nümerik Çözüm Algoritması

β_{ij}, α_{ij}, ϕ_{ij} ve δ_{ij} matrislerinin bileşenleri kompleks olduğu için determinant da komplekstir. Bu nedenle dispersiyon denklemleri aşağıdaki gibi indirgenebilir.

$$\left|\det\left\|\beta_{ij}\right\|\right| = 0, \quad i; j = 1,2,$$

$$\left|\det\left\|\alpha_{ij}\right\|\right| = 0, \quad i; j = 1,2,...,4,$$

$$\left|\det\left\|\phi_{ij}\right\|\right| = 0, \quad i; j = 1,2,...,6,$$

$$\left|\det\left\|\delta_{ij}\right\|\right| = 0, \quad i; j = 1,2,...,8. \tag{3.25}$$

Buradaki $\left|\det\left\|\beta_{ij}\right\|\right|$, $\left|\det\left\|\alpha_{ij}\right\|\right|$, $\left|\det\left\|\phi_{ij}\right\|\right|$ ve $\left|\det\left\|\delta_{ij}\right\|\right|$ kompleks sayıları sırasıyla $\det\left\|\beta_{ij}\right\|$, $\det\left\|\alpha_{ij}\right\|$, $\det\left\|\phi_{ij}\right\|$ ve $\det\left\|\delta_{ij}\right\|$'nin modülleri anlamına gelir. Dispersiyon eğrilerini çizmek için seçilen problem parametrelerinde ifade (3.25)'teki denklemleri nümerik olarak çözmek gerekir. Bu çözüm yönteminde tüm problemin parametre (c, k_1R ve β hariç) değerleri önceden seçilir. Sonuç olarak ifade (3.25)'teki denklemlerdeki üç bilinmeyen c, k_1R ve β bu denklemlerden elde edilir. Elastik problemlere karşılık gelen dispersiyon denklemleri sadece iki bilinmeyen (c ve k_1R) içerirler. Bu çözüm yönteminde c'nin değeri k_1R'nin seçilen her olası değeri için hesaplanabilir. Bununla birlikte elastik durumda bahsi geçen çözüm yöntemi, dispersiyon determinantının işaret değişimine dayanan “bi section” metodu kullanılarak elde edilir. Elastik problemlerde dispersiyon denklemlerinin çözüm algoritmaları ile ilgili daha detaylı açıklama, Akbarov tarafından 2015’te yazılan monografta [31], Akbarov ile Guliev’in [27] makalelerinde ve Akbarov ile Ipek’in [34-35] makalelerinde verilmektedir. Ancak ele aldığımız durumlar için dispersiyon determinantları elastik durum için elde edilen dispersiyon determinantlarından farklı olarak işaret değiştirmez. Yani $\left|\det\left\|\beta_{ij}\right\|\right| \geq 0$, $\left|\det\left\|\alpha_{ij}\right\|\right| \geq 0$, $\left|\det\left\|\phi_{ij}\right\|\right| \geq 0$ ve $\left|\det\left\|\delta_{ij}\right\|\right| \geq 0$’dır ve bu determinantlar önceden bahsettiğimiz gibi üç bilinmeyen içermektedir. Sonuç olarak dispersiyon denklemlerinin çözümü için “bi section” metoda dayanan yukarıda bahsettiğimiz algoritmayı kullanamayız. Bu nedenle dispersiyon denklemi (3.25)’i çözmek için kullandığımız algoritma dispersiyon determinantının modülü $\left|\det\left\|\beta_{ij}\right\|\right|$, $\left|\det\left\|\alpha_{ij}\right\|\right|$, $\left|\det\left\|\phi_{ij}\right\|\right|$ ve $\left|\det\left\|\delta_{ij}\right\|\right|$’nin değerlerinin doğru hesaplanması ve $\left|\det\left\|\beta_{ij}\right\|\right| \leq 10^{-12}$, $\left|\det\left\|\alpha_{ij}\right\|\right| \leq 10^{-12}$, $\left|\det\left\|\phi_{ij}\right\|\right| \leq 10^{-12}$ ve $\left|\det\left\|\delta_{ij}\right\|\right| \leq 10^{-12}$ kısıtlarında aranan köklerin belirlenmesi temeline dayanmaktadır. Bu algoritmaların kullanılması için c, k_1R ile β bilinmeyenlerinden birinin değerinin önceden verilmesi gerektiği unutulmamalıdır. Örneğin Barshinger ve Rose [28] tarafından yazılan makalede dalga yayılım hızı c’yi önceden vererek, seçilen her bir k_1R değeri için sönüm katsayısı β’nın değerini hesaplamışlardır. Sönüm katsayısını önceden vererek de seçilen her bir k_1R değeri için faz hızı c’yi elde etmek mümkündür. Akbarov ve Kepceler [29] makalesinde ele alındığı gibi bu bu tezde de bu yaklaşımla sonuca gidilmiştir.

Böylece Ewing ile ark. [39] ve Kolsky [40] makalelerine göre Akbarov ve Kepceler [29] makalelerinde de olduğu gibi,

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\mu_{1s}^{(1)}(\omega)}{\mu_0^{(1)} + \mu_{1c}^{(1)}(\omega)}, \tag{3.26}$$

veya

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\mu_{1s}^{(2)}(\omega)}{\mu_0^{(2)} + \mu_{1c}^{(2)}(\omega)} \tag{3.27}$$

olarak ele alınmıştır. Dispersif sönüm durumunda yukarıdaki (3.26) ve (3.27) ifadeleri yerine sönüm katsayısının verildiği unutulmamalıdır. Aynı zamanda dispersif olmayan yani $k_2 R$'nin (veya β'nın) dalga frekansına (ω) bağlı olmadığı durum da ele alınmıştır. (3.25)'te verilen dispersiyon denklemleri bu nümerik çözüm algoritmasıyla çözülmüştür.

3.3 Düşük ve Yüksek Dalga Sayısı Limit Değerlerindeki Dalga Yayılım Hızı

Dalgaların sönümünün dispersif olduğu durumdaki sonuçlar, sönüm katsayısının aşağıdaki koşulları sağlaması ile verilir.

$$k_1 R \to 0 \text{ iken } \beta \to 0 \text{ ve } k_1 R \to \infty \text{ iken } \beta \to 0 . \tag{3.28}$$

Örneğin (3.28)'de verilen şartlar, (3.26) veya (3.27) bağıntılarının meydana geldiği durumları ifade eder. Böylece alt bölüm 3.1'e ve Akbarov [31] monografına göre, viskoelastik malzemeden yapılmış çift katlı içi dolu ve çift katlı içi boş dairesel silindirdeki dalga yayılım hızı için $k_1 R \to 0$'daki limit değerleri (3.29)'daki gibi elde edilir.

$$k_1 R \to 0 \text{ iken } \frac{c}{c_{20}^{(2)}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty^{(2)}}{\mu_0^{(2)}}} \left(\frac{e_\infty^{(2)} \eta^{(2)} + e_\infty^{(1)} \eta^{(1)} \frac{\mu_\infty^{(1)}}{\mu_\infty^{(2)}}}{\eta^{(2)} + \eta^{(1)} \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}}} \right)^{\frac{1}{2}} , \tag{3.29}$$

buradaki $e_\infty^{(n)}$ her iki durum için aynıdır. Fakat $\eta^{(2)}$ ve $\eta^{(1)}$'lerin içi dolu silindir için olanları (3.30)'da, içi boş silindir için olanları (3.31)'de

$$e_\infty^{(n)} = 2\left(1 + \frac{\lambda_\infty^{(n)}}{2(\lambda_\infty^{(n)} + \mu_\infty^{(n)})}\right) ,$$

$$\eta^{(1)} = \left(2\frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2\right)\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} ,$$

$$\eta^{(2)} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}. \tag{3.30}$$

$$\eta^{(1)} = \frac{2+\dfrac{h^{(1)}}{R}}{\left(1+\dfrac{h^{(1)}}{R}\right)\left(2+\dfrac{h^{(1)}}{R}-\dfrac{h^{(2)}}{R}\right)},$$

$$\eta^{(2)} = \frac{2-\dfrac{h^{(2)}}{R}}{\left(1+\dfrac{h^{(1)}}{R}\right)\left(2+\dfrac{h^{(1)}}{R}-\dfrac{h^{(2)}}{R}\right)} \tag{3.31}$$

şeklinde verilmiştir. Aynı şekilde alt bölüm 3.1'e ve Akbarov'un monografına göre ele alınan durum için yüksek dalga sayısı limit değerleri içi dolu silindir için bağıntı (3.32)'deki, içi boş silindir için bağıntı (3.33)'teki gibi elde edilir.

$$\frac{c}{c_{20}^{(2)}} = \min\left\{\frac{c_R^{(1)}}{c_{20}^{(2)}}, 1, \frac{c_S}{c_{20}^{(2)}}\right\}, \tag{3.32}$$

$$\frac{c}{c_{20}^{(2)}} = \min\left\{\frac{c_R^{(1)}}{c_{20}^{(2)}}, \frac{c_R^{(2)}}{c_{20}^{(2)}}, \frac{c_S}{c_{20}^{(2)}}\right\} \tag{3.33}$$

Buradaki $c_R^{(n)}$ materyalin elastik sabitlerinin anlık değerlerinde n'inci malzemenin Rayleigh dalga yayılım hızıdır ve c_S ise tabakaların seçilen çift metaryallerinin Stoneley dalga yayılım hızıdır. Ayrıca $c_R^{(n)}$ ve c_S materyallerin elastisite sabitlerinin anlık değerleridir.

(3.29) – (3.33)'teki ifadelerin sadece (3.4) ve (3.5)'te verilen fraksiyonel eksponansiyel operatörlerinden meydana gelmediği, aynı zamanda silindirin tabaka materyallerinin viskoelastisitesini tanımlayan keyfi olası operatörler için de meydana geldiği bilinmelidir. Bununla birlikte (3.29), (3.32) ve (3.33)'teki ifadelerin (3.28)'deki koşulları sağlaması gerekmektedir.

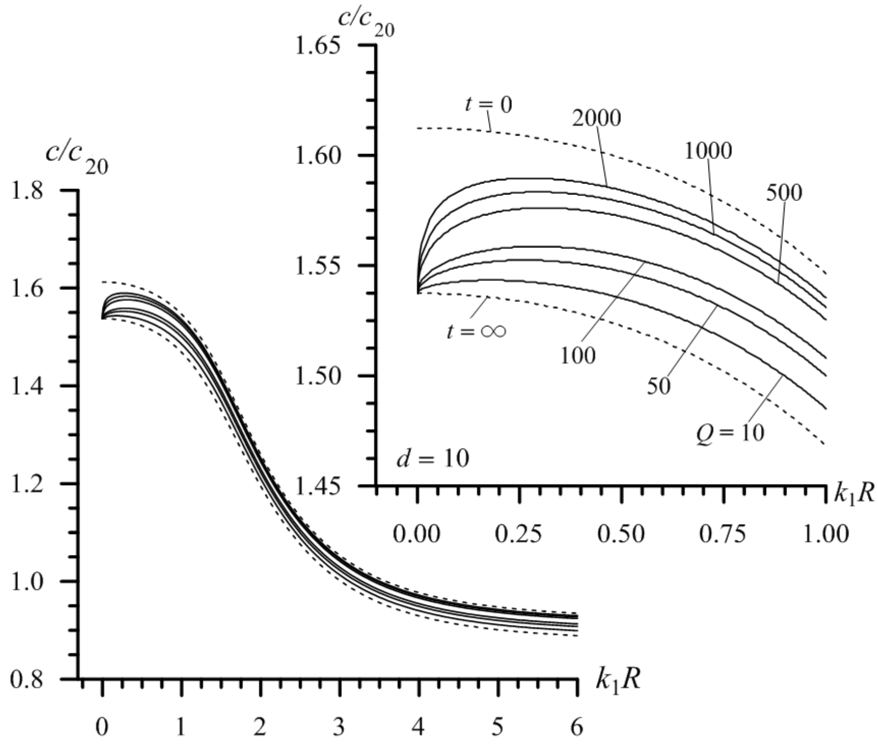
BÖLÜM 4

İÇİ DOLU BİLEŞİK SİLİNDİRLER İÇİN NÜMERİK SONUÇLARIN ELDESİ VE İNCELENMESİ

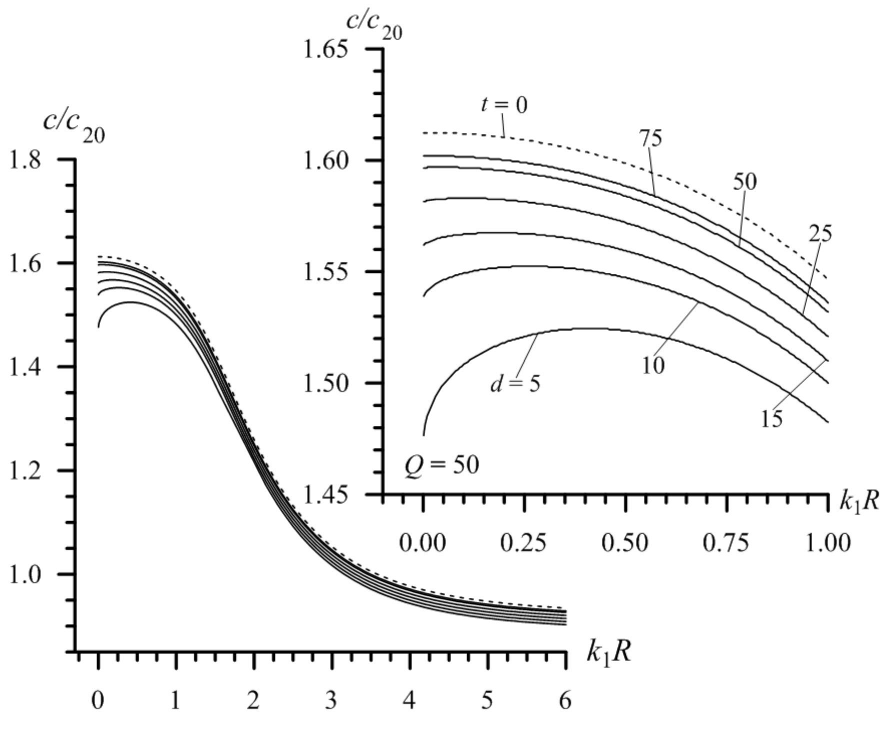
Bu bölümde tek katlı ve iki katlı içi dolu silindir çeşitleri için viskoelastikliğin boyuna dalga dispersiyon eğrilerine etkisini gösteren sonuçlar grafikler halinde verilip yorumlanmaktadır.

4.1 Tek Katlı İçi Dolu Silindirin Dispersiyon ve Dispersif Sönüm Eğrilerinin Nümerik Sonuçları

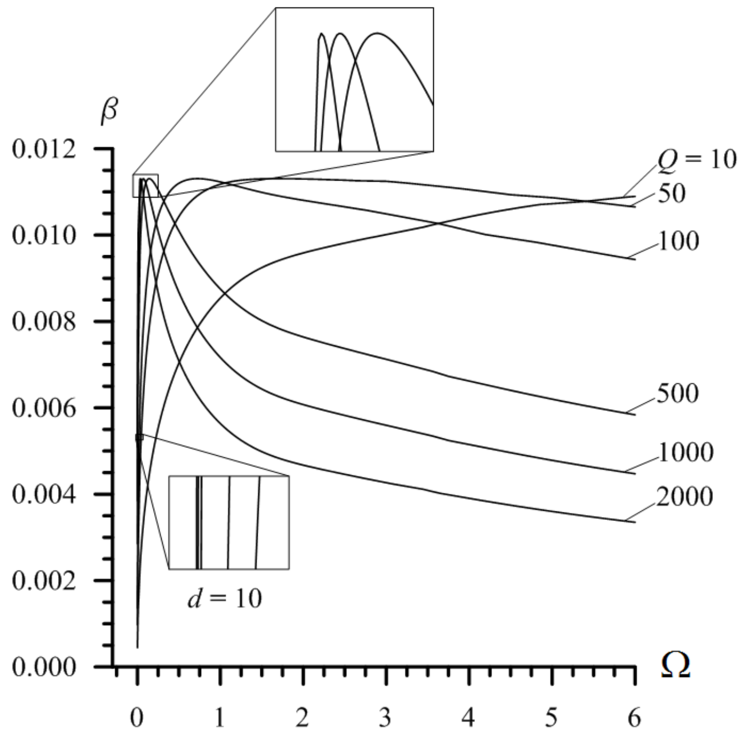
İlk olarak homojen tek katlı dairesel silindirde $\nu_0 = 0.3$ (Poisson katsayısının anlık değeri) ve $\alpha = 0.5$ (reolojik parametre) koşulları için dispersiyon eğrileri incelenmiştir. Yukarıda elde ettiğimiz ifade ve denklemler ile tanımlanan dispersiyon denklemlerinin çözümü ile birinci mod eğrileri elde edilmiştir. Dispersif sönüm durumunda ifade (3.26) (veya 3.27) ile elde edilen sönüm katsayısı β için elde edilen sonuçlar Şekil 4. 1'de verilmektedir. Yapılan çalışmalarda d (=10) parametresinin değeri sabit tutularak Q parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi a harfiyle gruplanan grafiklerde temsil edilirken, Q (=50) parametresinin değeri sabit tutularak d parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi b harfiyle gruplanan grafiklerde temsil edilip incelenmiştir. Sönüm katsayısı β ile Ω (3.19) arasındaki bağıntı $d = 10$ koşulu için Şekil 4. 2a'da ve $Q = 50$ koşulu için Şekil 4. 2b'de verilmektedir.



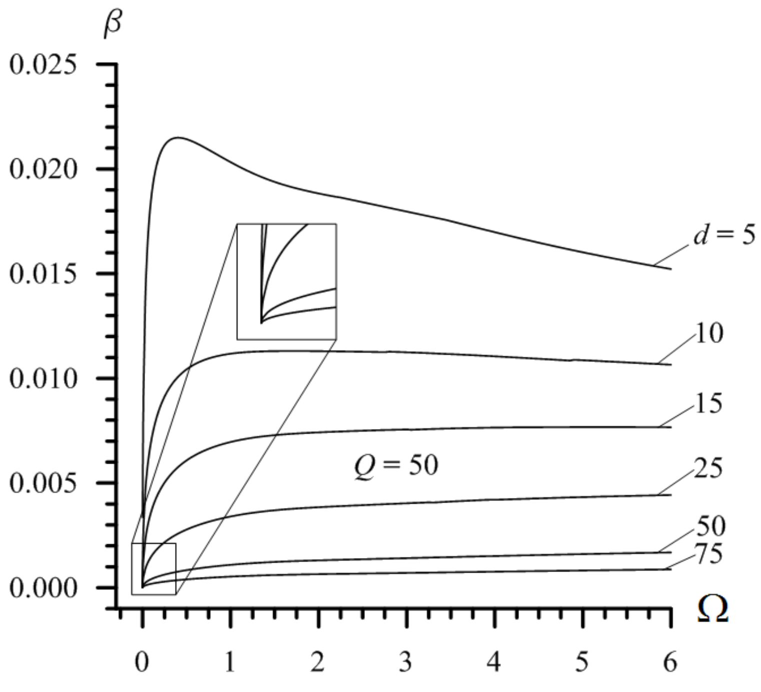
Şekil 4. 1a d (=10) parametresinin sabit değerinde, Q parametresinin değişimi ile homojen katı silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 1b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, d parametresinin değişimi ile homojen katı silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 2a d (=10) parametresinin sabit değerinde, Q parametresinin değişimi ile elde edilen sönüm katsayısı β ile boyutsuz frekans Ω arasındaki ilişki grafiği



Şekil 4. 2b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, d parametresinin değişimi ile elde edilen sönüm katsayısı β ile boyutsuz frekans Ω arasındaki ilişki grafiği

Şekil 4. 2a ve Şekil 4. 2b'de verilen eğriler içi dolu silindir için elde edilen tüm durumlar için aynıdır. Çünkü sönüm tipi silindir katman malzemesinin reolojik parametrelerine bağlı olarak değişmektedir.

Dalga yayılım hızının $k_1 R \to 0$ limit değerinde $\eta^{(1)} = 0$ ve $\eta^{(2)} = 1$ olduğu kabulü yapılarak ifade (3.29) ve ifade (3.30) ile aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$k_1 R \to 0 \text{ iken } \frac{c}{c_{20}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\mu_0} e_\infty} \text{ , } e_\infty = 2\left(1 + \frac{\lambda_\infty}{2(\lambda_\infty + \mu_\infty)}\right) \tag{4.1}$$

$E_\infty = \mu_\infty e_\infty$ ve $c_{20} = \sqrt{\mu_0 / \rho}$ ilişkileri ifade (4.1)'de kullanılarak ifade (4.2)

$$k_1 R \to 0 \text{ iken } c = \sqrt{E_\infty / \rho} \text{ ,} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır ve buradaki $\sqrt{E_\infty / \rho}$, ele alınan silindirdeki $t = \infty$'daki çubuk dalga hızıdır.

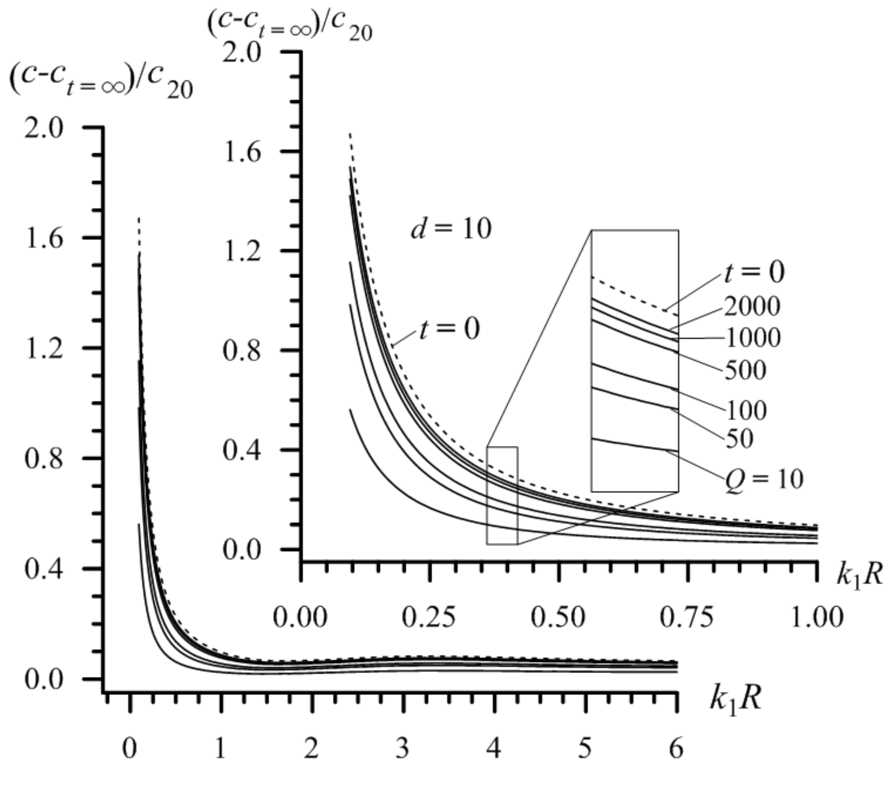
Bilinen mekanik ilişkiler ve ifade (3.32) ile dalga yayılım hızı c'nin yüksek dalga sayısı limit değeri c_R elde edilir. c_R elastisite sabitlerinin anlık değerlerinde silindir malzemesinin Rayleigh dalga yayılım hızını simgelemektedir. Bununla birlikte Şekil 4. 1a ve Şekil 4. 1b'de verilen nümerik sonuçları ele alacak olursak; viskoelastik durum için elde edilen eğrilerin elastisite sabitlerinin anlık değerlerinde ($t = 0$ için) elde edilen dalga yayılım hızı eğrisi ile elastisite sabitlerinin $t = \infty$'daki değerlerinde elde edilen dalga yayılım hızı eğrisi ile sınırlandığı görülmektedir.

Şekil 4. 1a ve Şekil 4. 1b'ye baktığımızda silindir malzemesinin viskoelastisitesinin dalga yayılım hızında düşüşe neden olduğu sonucuna varılmıştır. Bu iki grafik incelendiğinde dalga yayılım hızının düşük dalga sayısı limit değerlerinde reolojik parametrelerden Q'ye bağlı olmayıp, reolojik parametre d'ye bağlı olduğu öngörülebilmektedir.

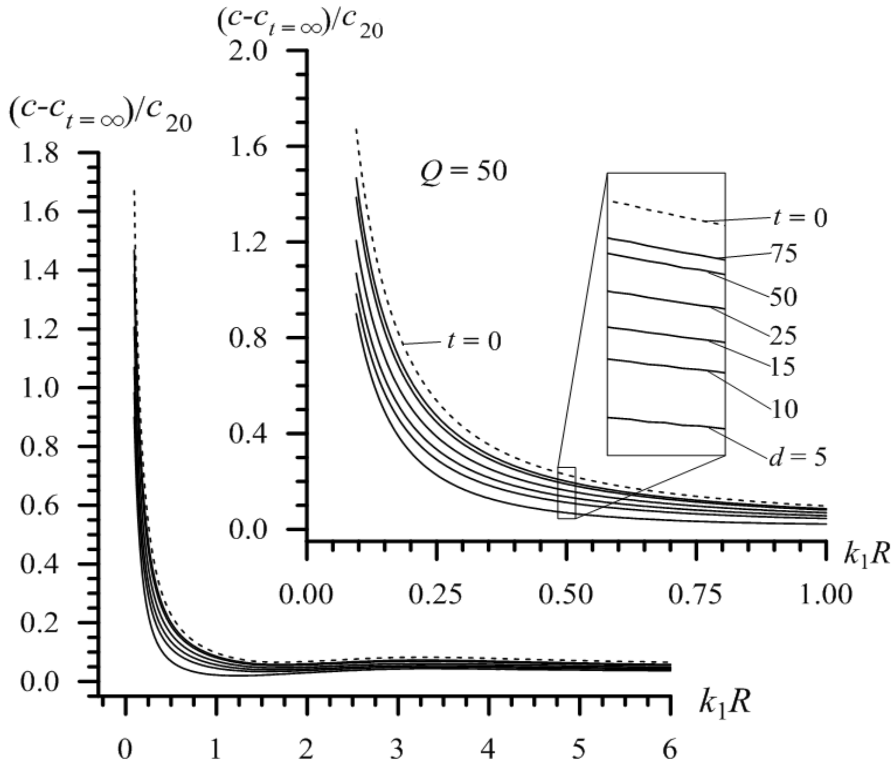
Sonuç olarak dalga yayılım hızının düşük dalga sayısı limit değerleri; d parametresinin sabit olarak tutulduğu durumlarda reolojik parametre olan Q'nün çeşitli değerleri için aynı olması gerekmektedir. Bu durum Şekil 4. 1a'da verilen sonuçlarla doğrulanmıştır. Düşük dalga sayısı limit değerlerinde dalga yayılım hızı reolojik parametre d ile birlikte artması Şekil 4. 1b'de görülmektedir. Aynı zamanda Şekil 4. 1'de verilen sonuçlar d ve

Q reolojik parametrelerinin anlık değerlerinde silindirde eksenel simetrik dalganın yayılım hızını göstermektedir. Ele alınan durumlar incelendiğinde silindir malzemenin viskoelastisitesinin dalga yayılım hızına boyutsuz dalga sayısı k_1R'nin küçük değerlerinde daha çok etki ettiği görülmektedir.

İkinci mod için elde edilen nümerik sonuçları ele aldığımızda silindir malzemesinin reolojik parametrelerinin ikinci modda dalga yayılım hızı üzerine etkisini daha belirgin görmek için grafikler $(c-c|_{t=\infty})/c_{20}$ ve k_1R arasında oluşturulmuştur. İkinci modda d (=10) parametresinin sabitlenerek Q parametresinin farklı değerleri için ve Q(=50) parametresi sabitlenerek d parametresinin farklı değerleri için elde edilen dispersiyon eğrileri sırasıyla Şekil 4. 3a ve Şekil 4. 3b'de verilmektedir.



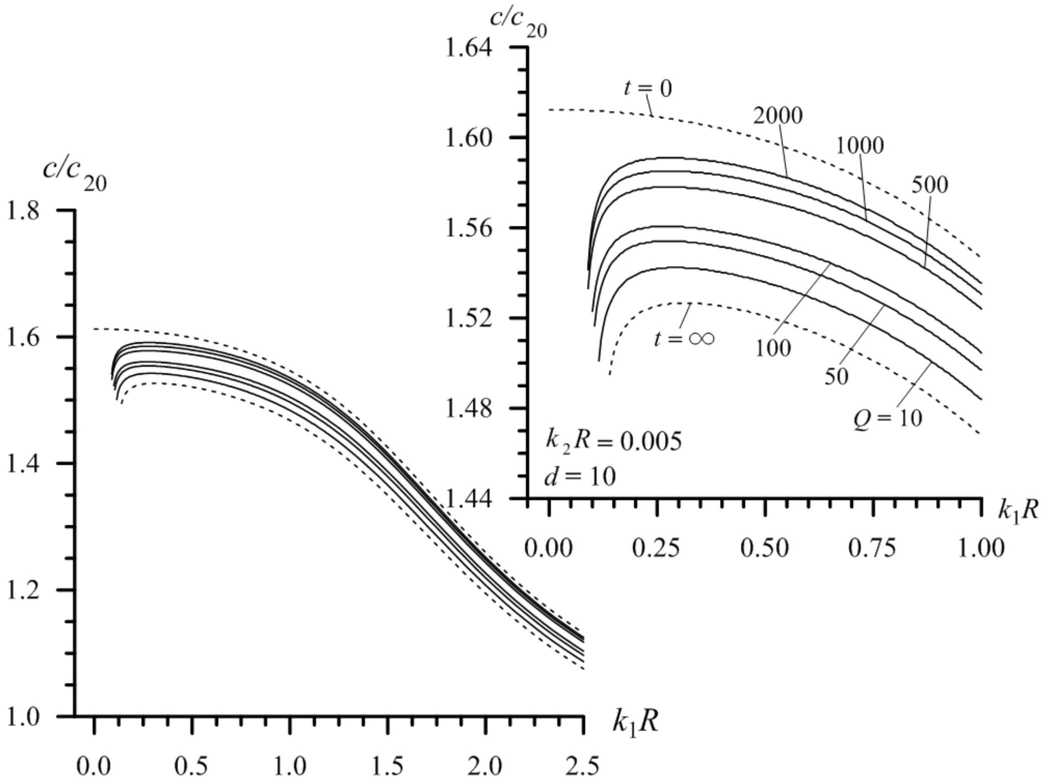
Şekil 4. 3a d (=10) parametresinin sabit değerinde, Q parametresinin değişimi ile ikinci mod için elde edilen $(c-c|_{t=\infty})/c_{20}$ ile k_1R arasındaki ilişki grafiği



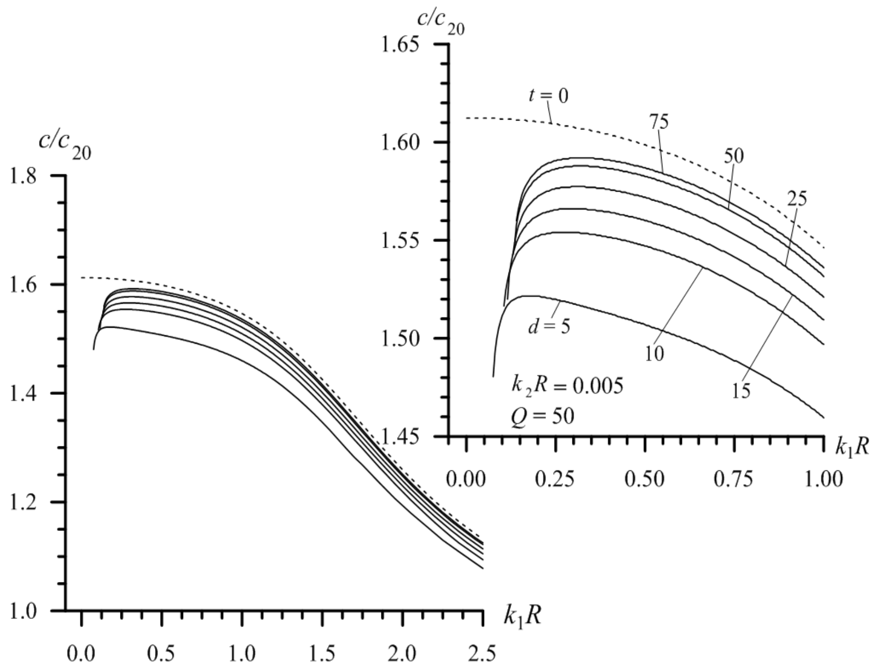
Şekil 4. 3b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, d parametresinin değişimi ile ikinci mod için elde edilen $(c - c|_{t=\infty}) / c_{20}$ ile k_1R arasındaki ilişki grafiği

Silindir katman malzemelerinin viskoelastikliğinin artmasıyla ikinci modda dalga yayılım hızında önemli bir düşüş meydana getirdiği görülmektedir. Bu başlık altında şu ana kadar elde edilen grafikler ifade (3.26) veya ifade (3.27)'de tanımlanan sönüm ifadesi ile elde edilen sönüm dispersiyonu durumu için oluşturulmuştur.

Birinci düşük mod için dispersif olmayan sönüm durumu incelenmiş, $k_2R = 0.005$ koşulu ele alınmıştır. Dispersif olmayan sönüm durumu için d (=10) parametresinin sabitlenerek değişken değerli Q parametresi için ve Q(=50) parametresi sabitlenerek değişken değerli d parametresi için elde edilen dispersiyon eğrileri sırasıyla Şekil 4. 4a ve Şekil 4. 4b'de verilmektedir.



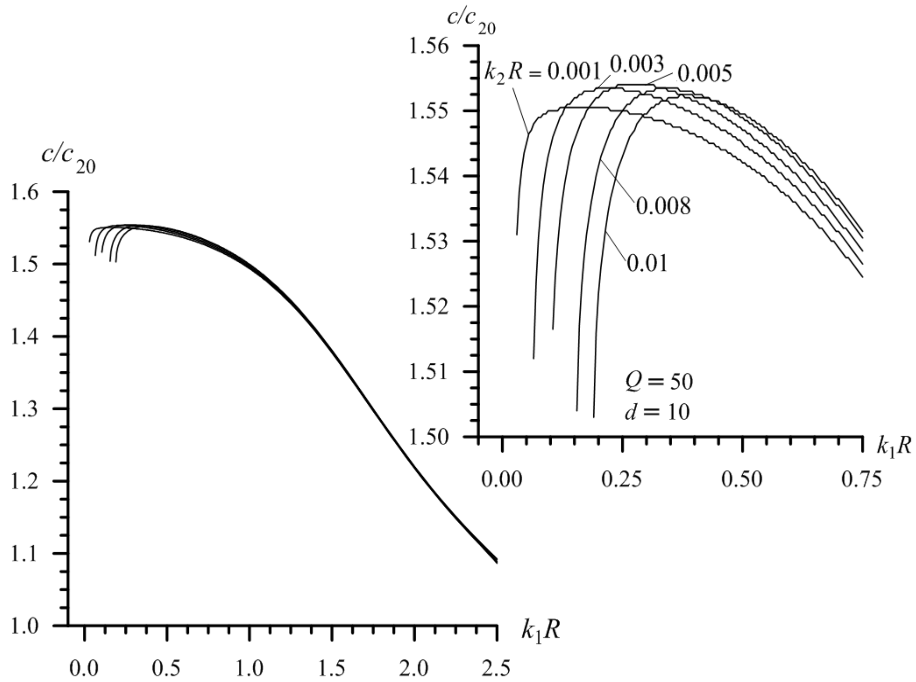
Şekil 4. 4a Homojen içi dolu silindirde dispersif olmayan sönüm durumunda, d (=10) parametresinin sabit değerinde, $k_2R = 0.005$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 4b Homojen içi dolu silindirde dispersif olmayan sönüm durumunda, $Q(=50)$parametresinin sabit değerinde, $k_2R = 0.005$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Dispersif olmayan sönüm durumu için elde edilen grafikler incelendiğinde k_1R'nin bazı değerlerinde kopma (cutoff) olduğu ($(k_1R)_{c.f.}$ ile simgelenmektedir) görülmektedir. Bu durumdaki $\omega_{c.f.}$ kopma (cutoff) frekansıdır ve $\omega_{c.f.} = (k_1R)_{c.f.} \times c\big|_{k_1R=(k_1R)_{c.f.}}$ şeklinde elde edilmektedir. Dispersif sönüm durumunda reolojik parametreleri Q ve d değerlerindeki düşüşün dalga yayılım hızında düşüşe neden olduğu grafiklerde görülmektedir. Aynı zamanda Şekil 4. 4a ve Şekil 4. 4b incelendiğinde Q (d) değerinin artmasının $(k_1R)_{c.f.}$ değerinde azalışa (artışa) neden olduğu görülmektedir.

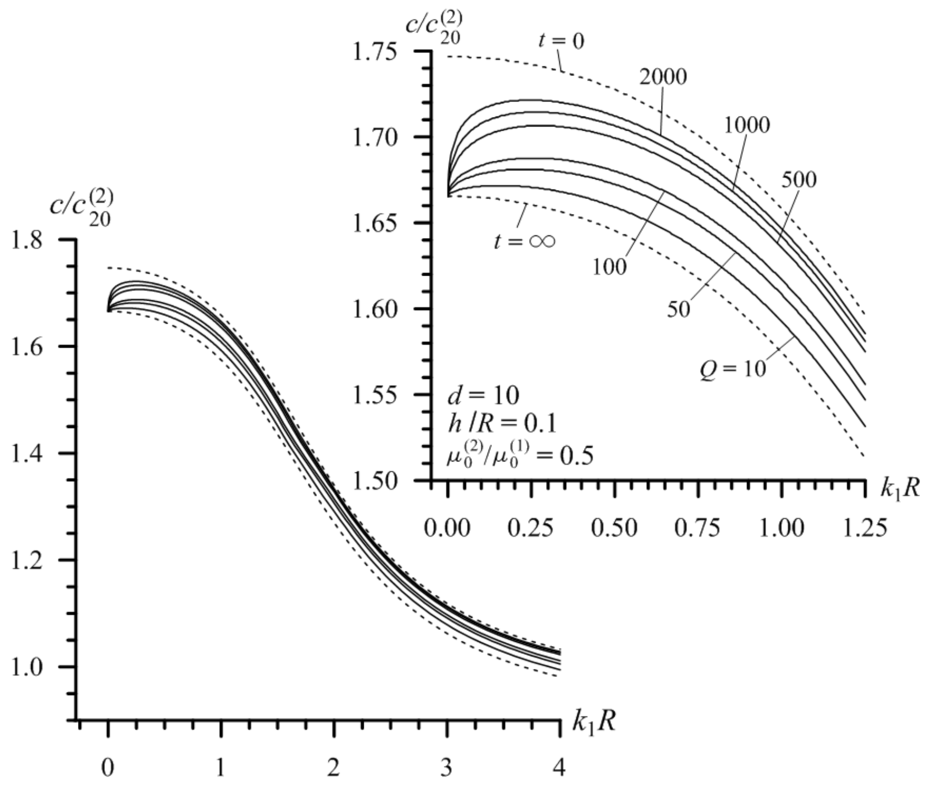
Şekil 4. 5'te verilen sonuçlarda k_2R'nin değerindeki değişimin $(k_1R)_{c.f.}$ değerinde değişime neden olduğu görülmektedir ve k_2R'deki düşüşün $(k_1R)_{c.f.}$'de de düşüş meydana getirdiği anlaşılmaktadır.



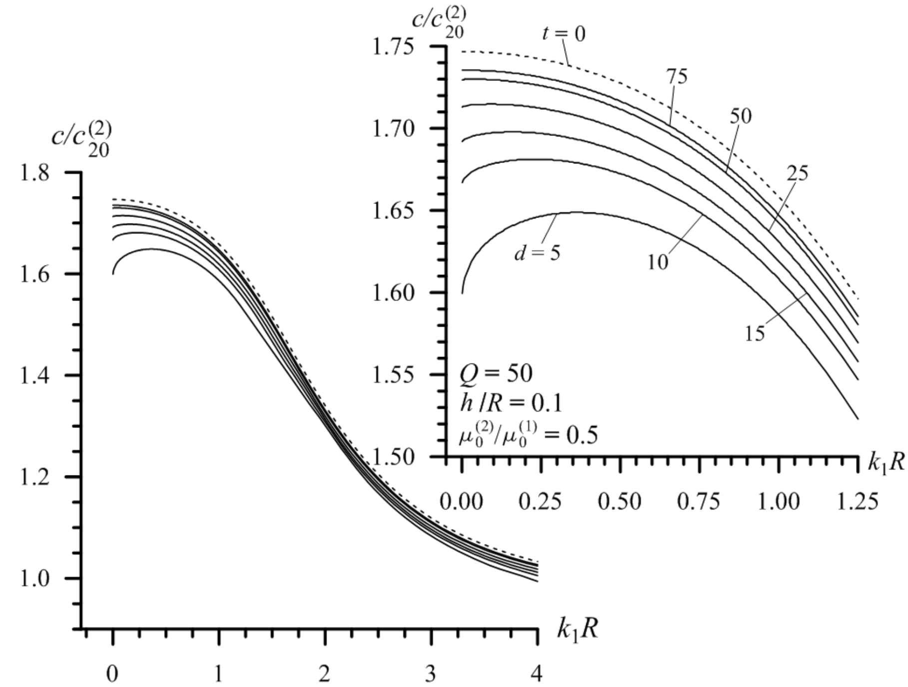
Şekil 4. 5 Homojen içi dolu silindir için dispersif olmayan sönüm durumunda, kopma (cut off) değerlerine k_2R'nin etkisi

4.2 İki Katlı İçi Dolu Silindirin Dispersiyon ve Dispersif Sönüm Eğrilerinin Nümerik Sonuçları

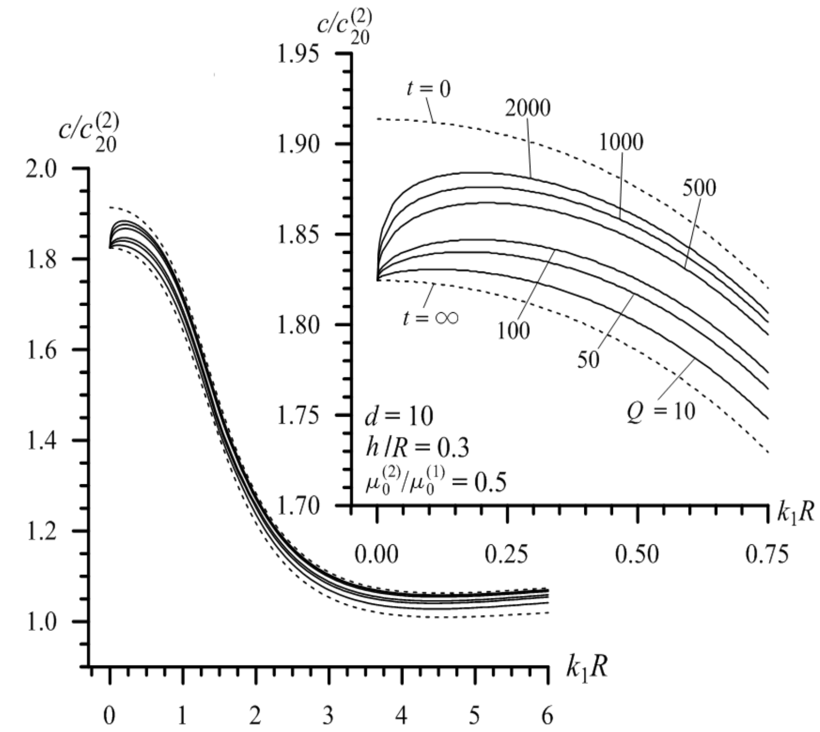
Tek katlı içi dolu dairesel silindirden sonra iki katlı içi dolu dairesel silindir ele alınmıştır. Poisson katsayısının anlık değeri her iki tabaka için aynı ve $\nu_0^{(1)} = \nu_0^{(2)} = 0.3$ olduğunu, ayrıca $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0.5$ olduğu varsayılmıştır. Yapılan incelemelerde rijitlik oranı $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ ile $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durumlar ele alınmıştır. İlk olarak silindir katmanlarının viskoelastik özelliklerinin aynı olduğu ($Q^{(1)} = Q^{(2)} (= Q)$ ve $d^{(1)} = d^{(2)} (= d)$) durum için sonuçlar analiz edilmiştir. Aksi belirtilmediği takdirde aşağıda tartışılan sonuçların ifade (3.26) veya ifade (3.27)'deki sönüm ilişkisi ile birlikte elde edilmiş olduğu unutulmamalıdır. İlk etapta oluşturulan grafikler birinci temel mod için elde edilmiştir.



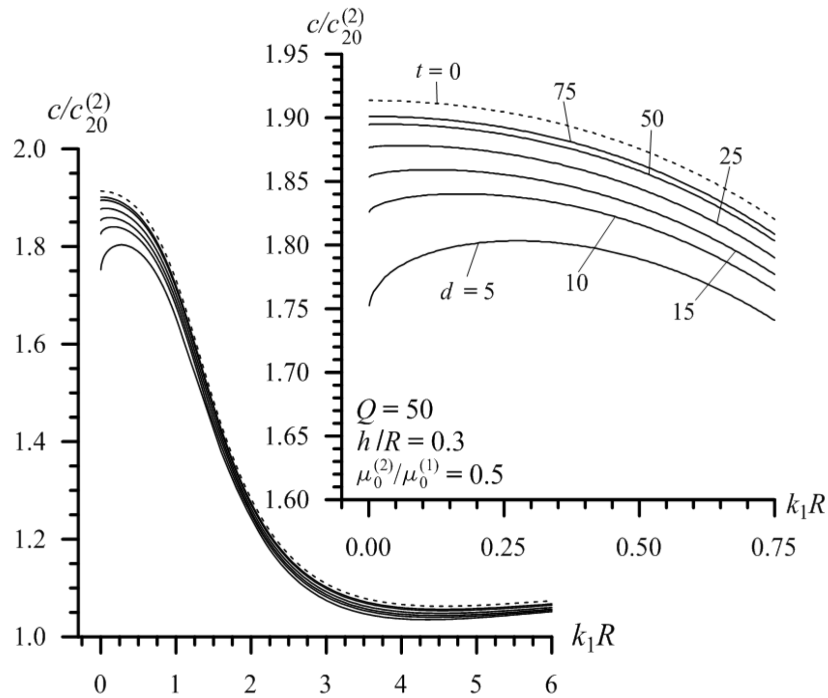
Şekil 4. 6a V.V. koşulunda d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



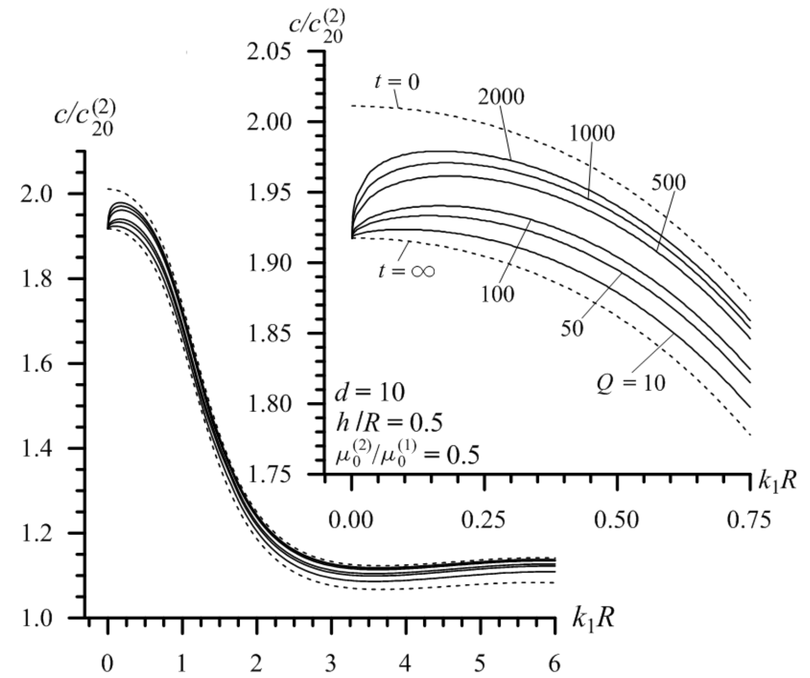
Şekil 4. 6b V.V. koşulunda Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



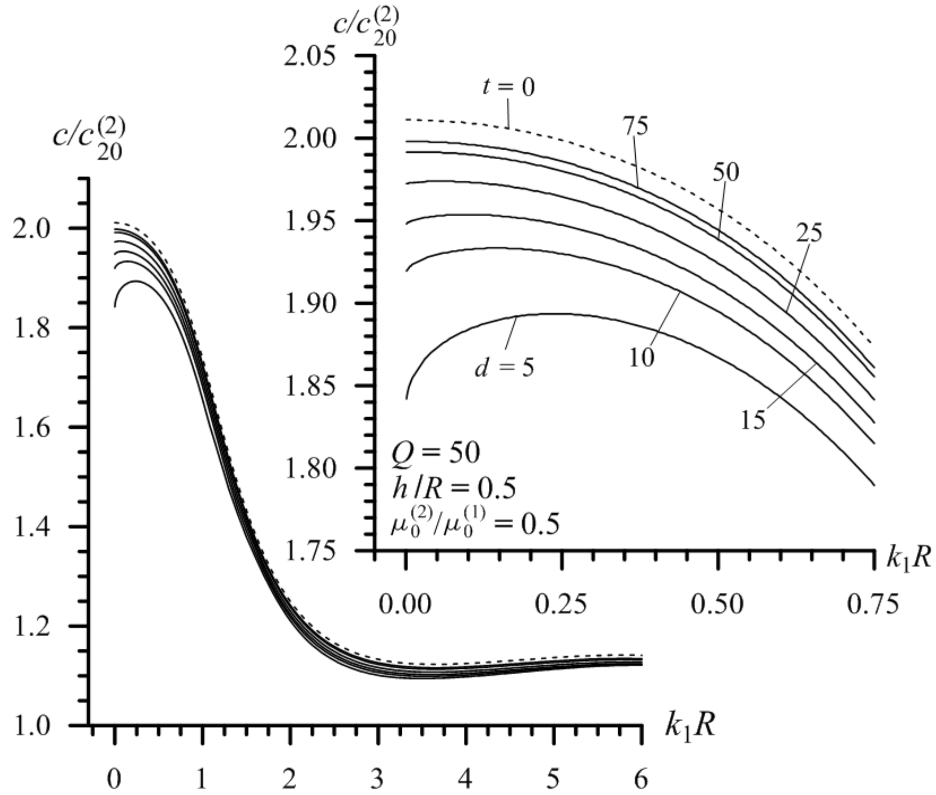
Şekil 4. 7a V.V. koşulunda d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 7b V.V. koşulunda Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

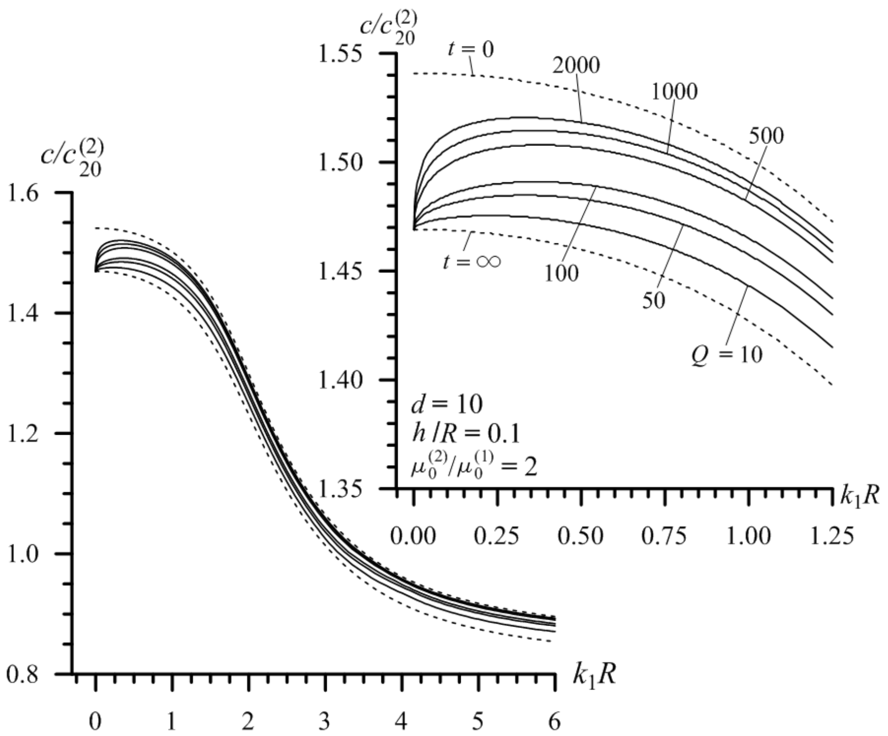


Şekil 4. 8a V.V. koşulunda d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.5$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

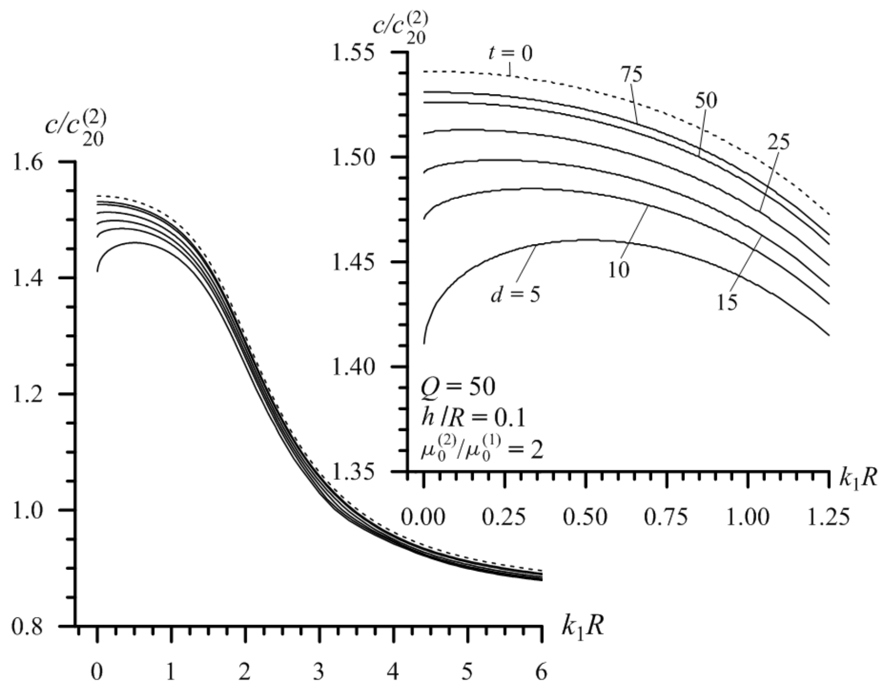


Şekil 4. 8b V.V. koşulunda Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.5$ ve $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

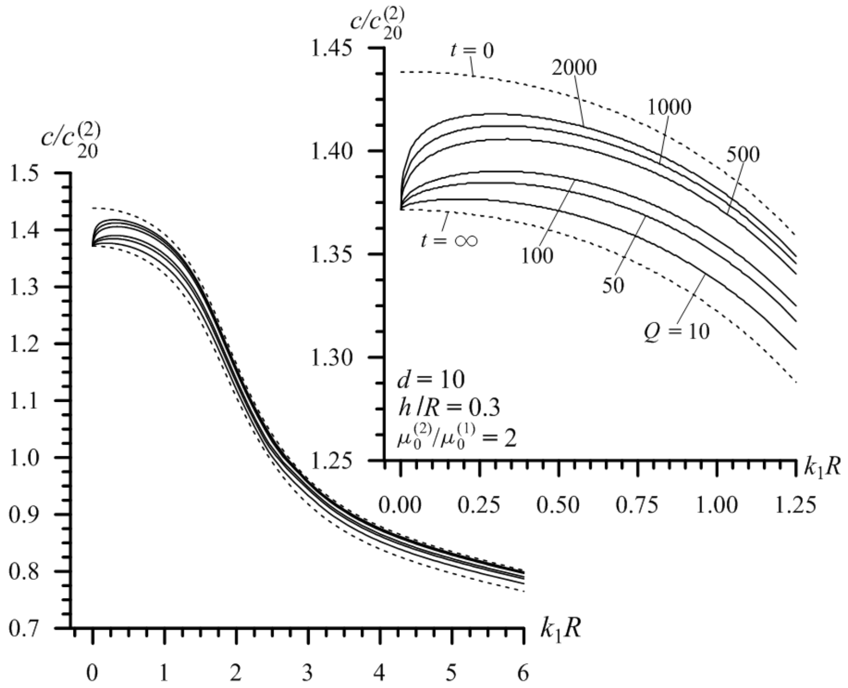
Rijitlik oranının $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ ($\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 2$) ve katman kalınlıklarının yarıçapla oranının $h^{(1)}\big/R = h^{(2)}\big/R = 0.1,\ 0.3$ ve 0.5 olduğu durum için çizilen grafikler sırasıyla Şekil 4. 6, 4. 7 ve 4. 8'de (Şekil 4. 9, 4. 10 ve 4. 11'de) ele alınmıştır. Bu şekillerdeki d parametresinin değeri sabit tutularak Q parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi a harfiyle gruplanan grafiklerle temsil edilirken b harfiyle gruplanan grafiklerde ise Q parametresinin değeri sabit tutularak d parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi incelenmiştir.



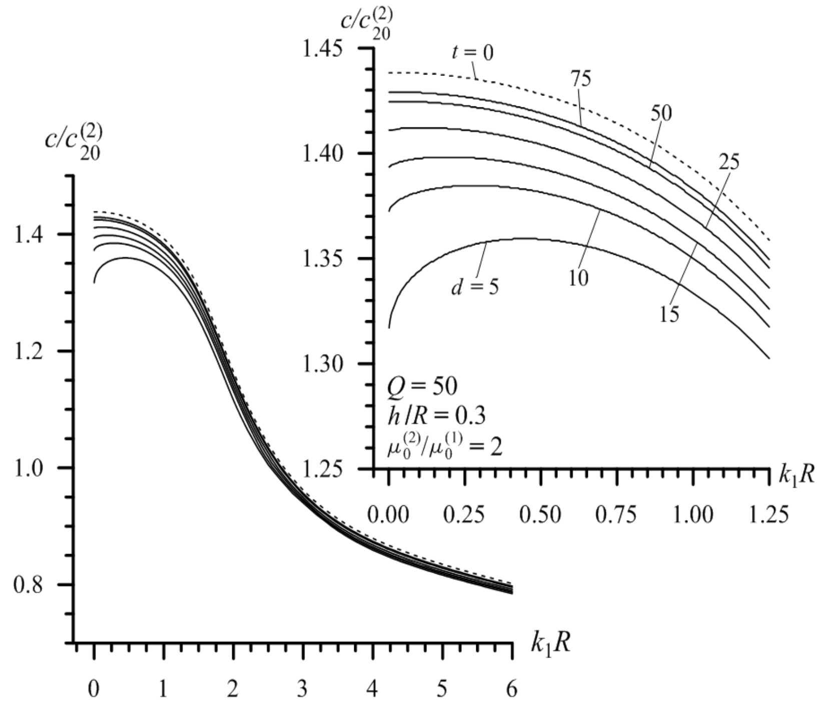
Şekil 4. 9a V.V. koşulunda d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



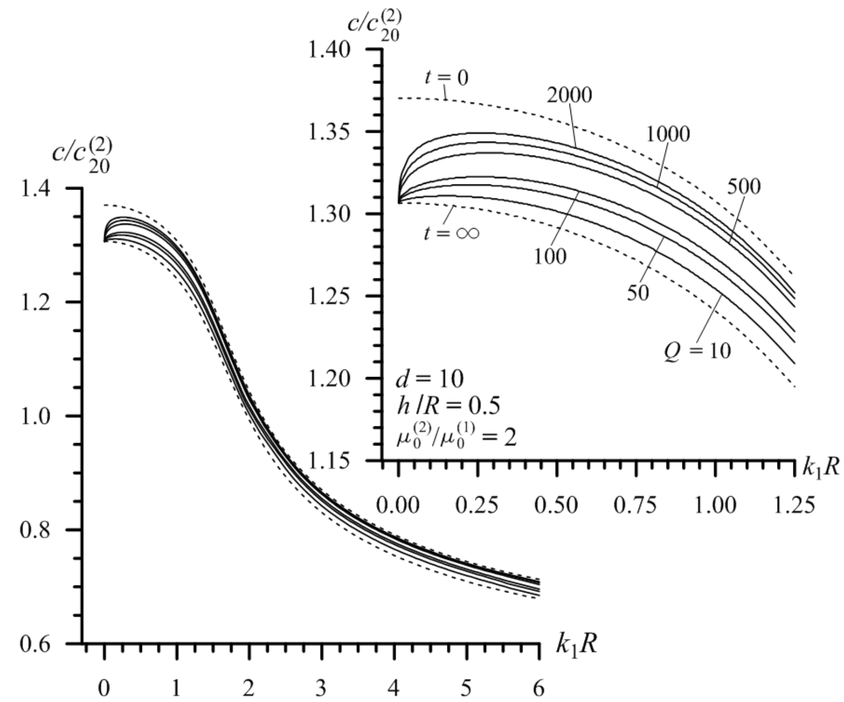
Şekil 4. 9b V.V. koşulunda Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



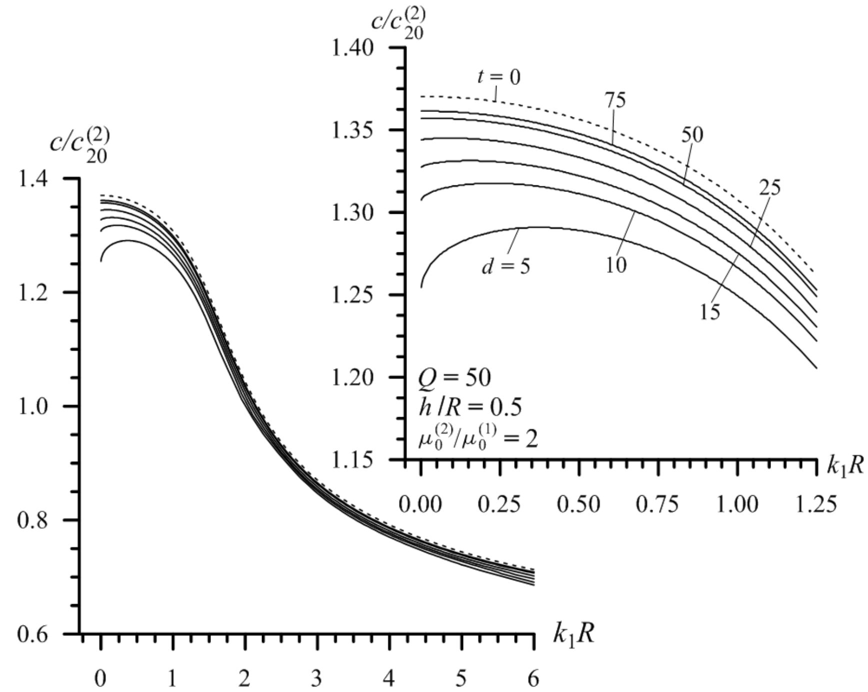
Şekil 4. 10a V.V. koşulunda d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 10b V.V. koşulunda Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 11a V.V. koşulunda d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.5$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 11b V.V. koşulunda Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.5$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

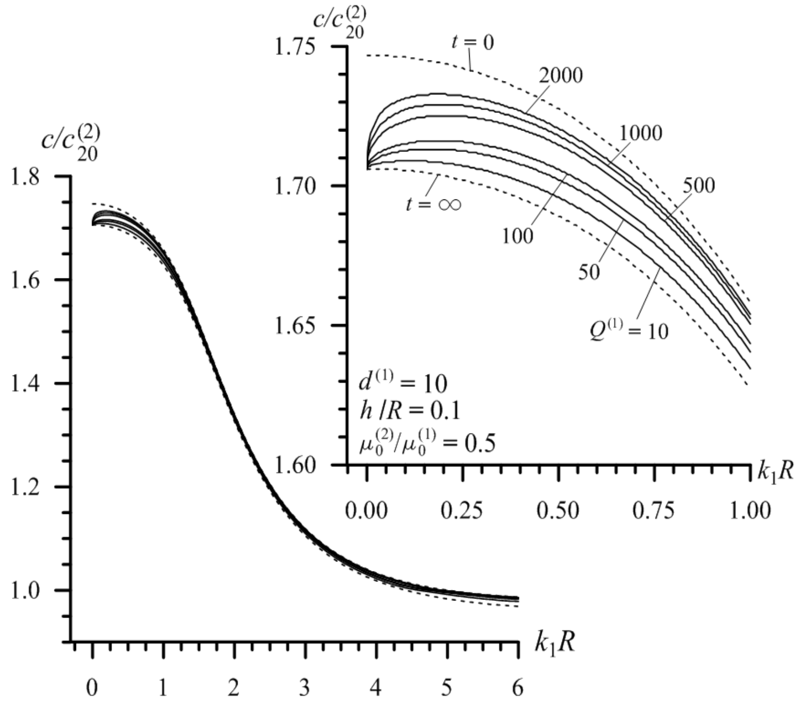
Alt bölüm 3.1 ve bölüm 4’te yapılan açıklamalara göre, d parametresinin sabit tutulduğu durumda Q parametresinin seçilen tüm değerleri için dalga yayılım hızı, k_1R’nin sıfıra yaklaştığı durumlarda aynı limit değerine sahip olmalıdır. Böylece limit değerlerinde iki katlı bileşik silindirde dalga yayılım hızının reolojik parametrelerden Q’ye bağlı olmayıp, reolojik parametre d’ye bağlı olduğu öngörülebilir. Bu öngörülerin ispatı Şekil 4. 6 - 4. 11’deki grafiklerle sağlanmıştır. Ve bu sonuçlar için d parametresi sabit tutularak elde edilen dispersiyon eğrileri; $t=0$’da elastisite sabitlerinin anlık değerinde ve elastisite sabitlerinin $t=\infty$’daki değerinde elastik durum için elde edilen dispersiyon eğrileri arasında sınırlandığı görülmektedir. Grafiklerde kesikli çizgilerle verilen eğriler limit durumlarını ifade etmektedir. Elastik durum için çizilen eğriler Akbarov ve İpek’in [35] makalesindeki ve Akbarov’un [31] monografındaki sonuçlarla örtüşmektedir. Sonuç olarak Şekil 4. 6 – 4. 11’de verilen sonuçlarla hem dispersiyon eğrilerine reolojik parametrelerin etkisi incelenmekte hem de elde edilen sonuçların doğruluğunu ve hesaplama algoritmasının doğru çalıştığı gösterilmektedir. Ayrıca sonuçlar k_1R’nin yüksek değerlerinde reolojik parametrelerinin her bir değeri için elde edilen dalga yayılım hızının, elastik durum için elde edilen dalga yayılım hızına yaklaştığını göstermektedir. Şekil 4. 1 – 4. 6’daki grafiklerde d ve Q reolojik parametre değerlerindeki artış için oluşturulan dispersiyon eğrileri, $t=0$’da elastik durum için elde edilen dispersiyon eğrilerine yaklaştığı görülmektedir.

Yukarıda analiz edilmiş sonuçlar incelendiğinde $k_1R \le 1.5$ olduğu durumda dalga yayılım hızına viskoelastisite parametreleri d ve Q’nün etkisinin önemini göstermektedir. Bununla birlikte yukarıdaki sonuçları analiz ettiğimizde $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ ($\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$) olduğu durumda h/R değerinin artmasıyla dalga yayılım hızı $c/c_{20}^{(2)}$’de artışa (azalışa) neden olduğu görülmektedir. Bunun nedeni $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ ($\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$) olduğu durumda h/R değerinin artması bileşik silindirde sert (yumuşak) malzemenin hacimsel yoğunluğunun artması anlamına gelmektedir ve bununla birlikte dalga yayılım hızında artış (azalış) görülmektedir. Ayrıca bu çıkarım ile birlikte Şekil 4. 1 ile örneklenen homojen katı silindir için elde edilen dalga yayılım hızı, aynı şartlarda bileşik silindirde $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ ($\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2$) olduğu durum için Şekil 4. 6 – 4. 11'de verilen dalga yayılım hızından daha azdır (fazladır).

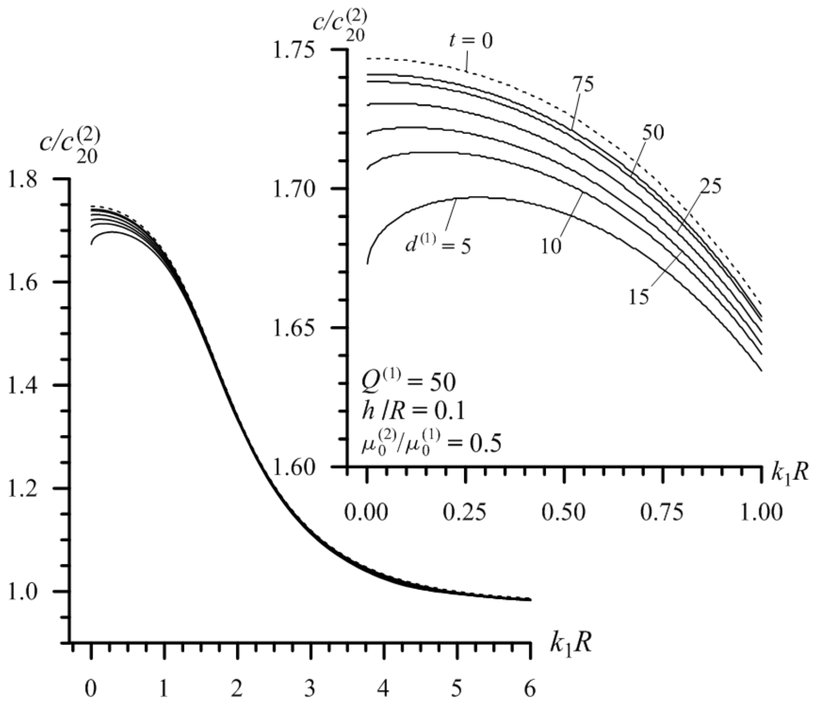
Yukarıdaki sonuçların analizinde ve aşağıda ele alınacak sonuçların incelenmesinde $0 < k_1 R < 1.5$ olduğu aralıkta $c / c_{20}^{(2)}$ ve $k_1 R$ arasındaki ilişkinin karakteri unutulmamalıdır.

Böylece silindir katman malzemelerinin elastik olduğu durumda bu ilişkinin monoton olduğu görülmektedir. Örneğin $k_1 R$'nin azalmasıyla $c / c_{20}^{(2)}$ değerinde monoton bir şekilde artış gözlemlenmektedir. Fakat silindir katman malzemelerinin viskoelastik olduğu durum ele alındığında bu ilişki monoton olmayan bir karaktere sahiptir. Bu monoton olmayan karakter, viskoelastik operatörlerden d'nin sabit tutularak Q'nün değişik değerlerinin incelendiği tüm durumları kapsamaktadır ve Q'nün sabit tutularak d'nin nispeten küçük değerlerinde yapılan incelemelerde de ortaya çıkmaktadır.

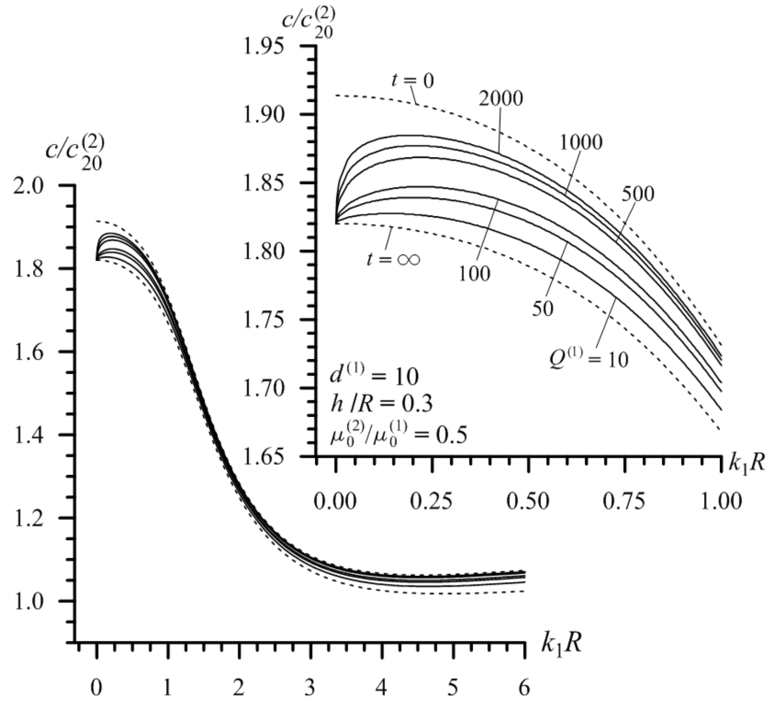
İki katlı silindir için şu ana kadar ele alınan yukarıdaki tüm sonuçlar iç ve dış katmanların ikisinin de viskoelastik malzemeden yapıldığı durum içindir. Silindir iç katman malzemesinin elastik olup dış katman malzemesinin viskoelastik olduğu durum V.E. olarak simgelenmiş ve bu durum için de sonuçlar elde edilmiştir. V.E. durumu için de sönüm katsayısı β'nın ifade (3.26)'daki gibi olduğu varsayılmıştır. Şekil 4. 12, 4. 13 ve 4. 14'te (Şekil 4. 15, 4. 16 ve 4. 17'de) verilen dispersiyon eğrileri sırasıyla $h/R = 0.1$, 0.3 ve 0.5 olduğu durumda $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ $(\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2)$ için elde edilmiştir. Yukarıdaki grafiklerde a harfi ile gruplanan şekiller $d^{(1)}$ $(=10)$ parametresi değerinin sabit tutularak $Q^{(1)}$ parametresinin çeşitli değerleri için oluşturulmuştur. Ayrıca $Q^{(1)}$ parametresi değerinin sabit tutularak $d^{(1)}$ $(=10)$ parametresinin çeşitli değerleri için elde edilen grafikler ise b ile gruplanan şekillerde verilmiştir.



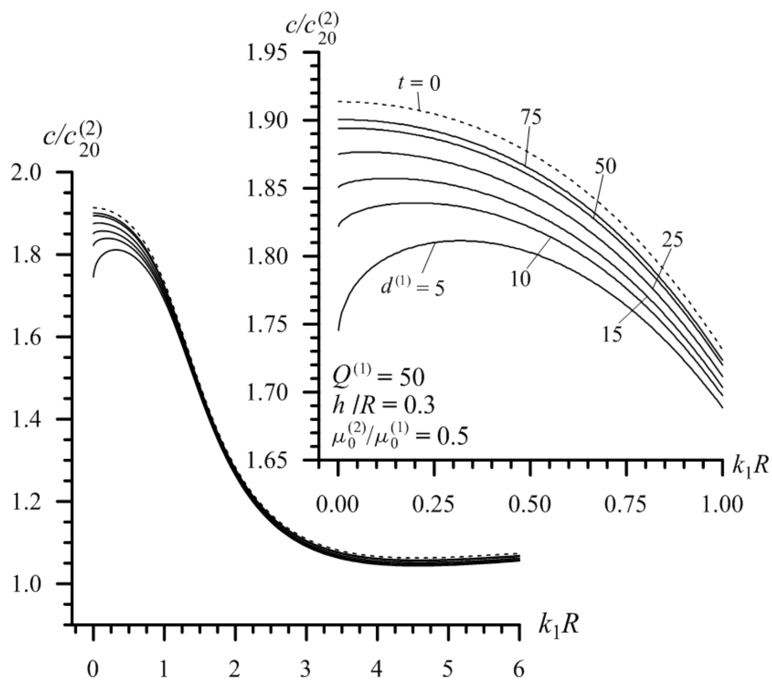
Şekil 4. 12a V.E. koşulunda $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



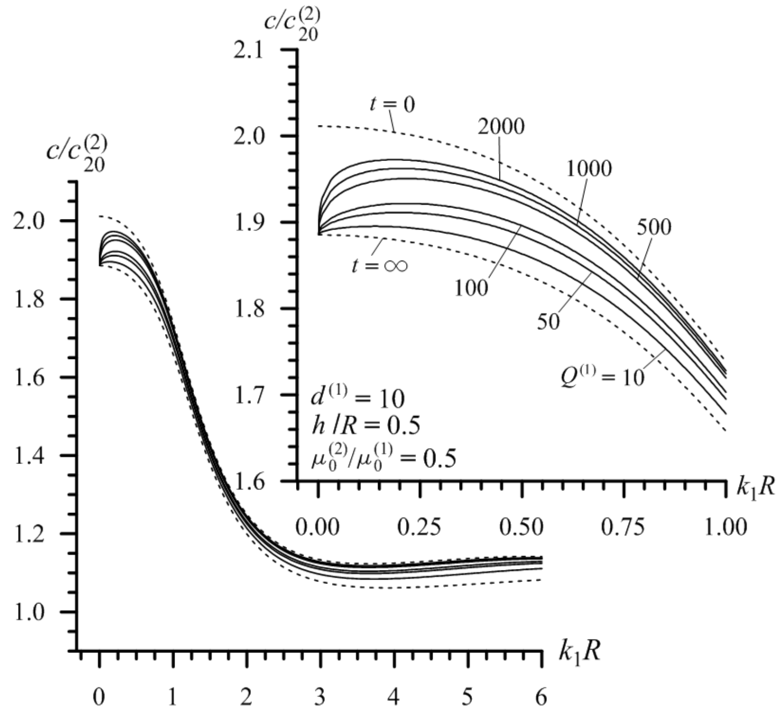
Şekil 4. 12b V.E. koşulunda $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



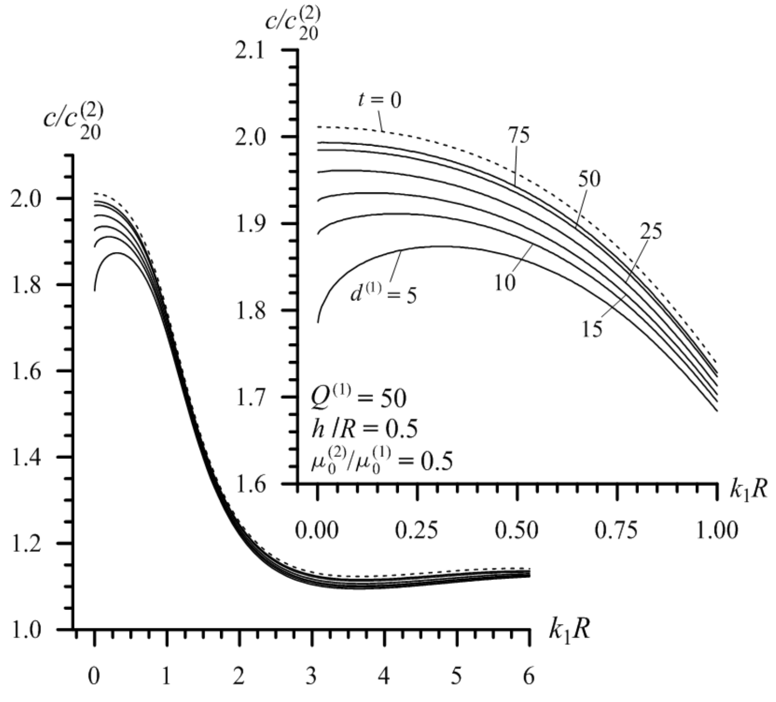
Şekil 4. 13a V.E. koşulunda $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 13b V.E. koşulunda $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

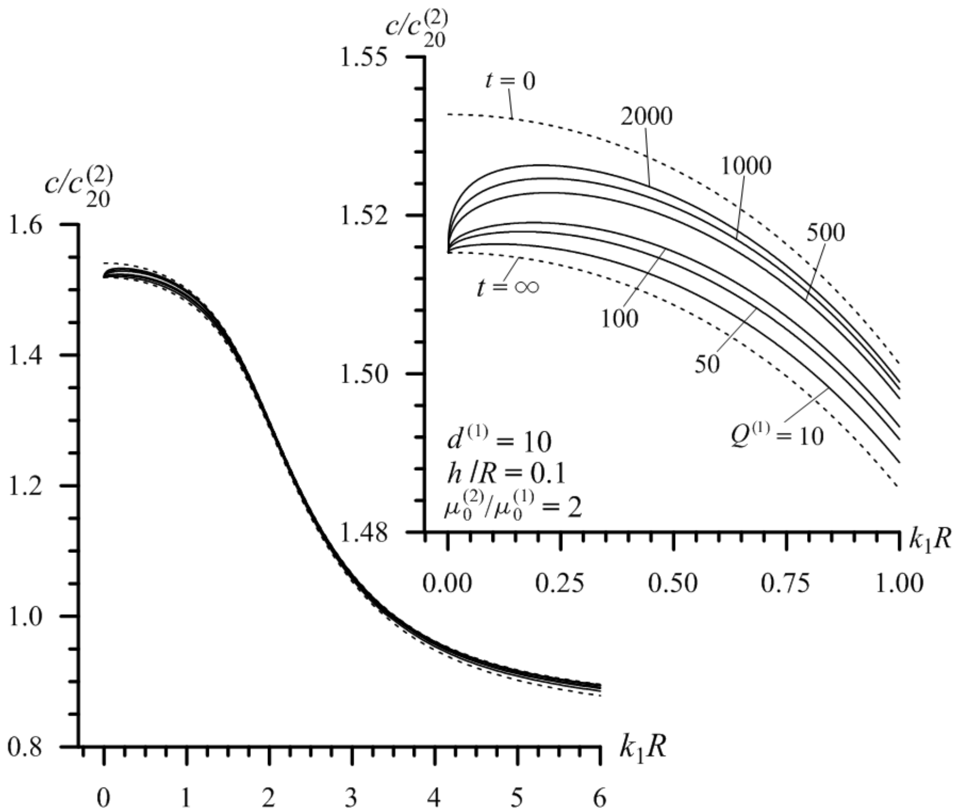


Şekil 4. 14a V.E. koşulunda $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.5$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

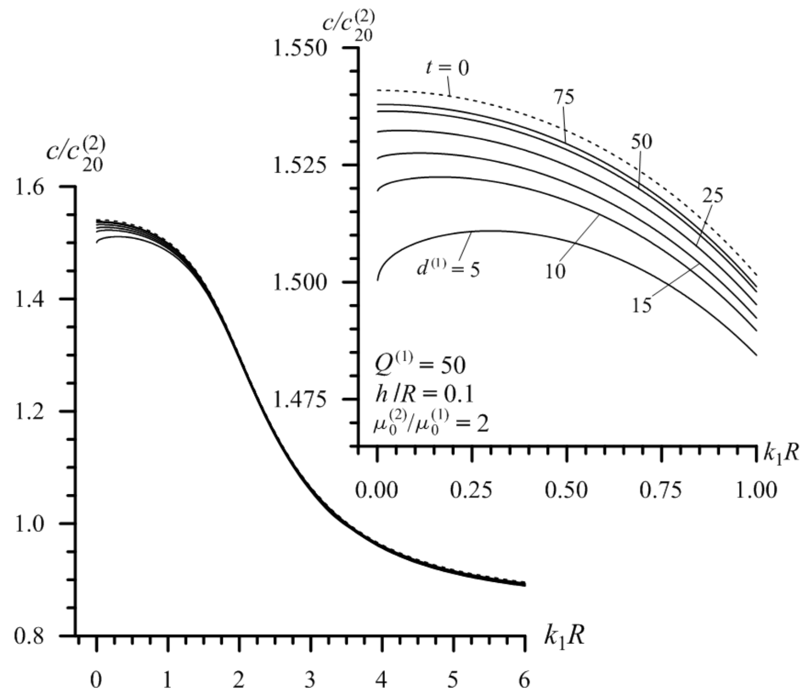


Şekil 4. 14b V.E. koşulunda $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.5$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

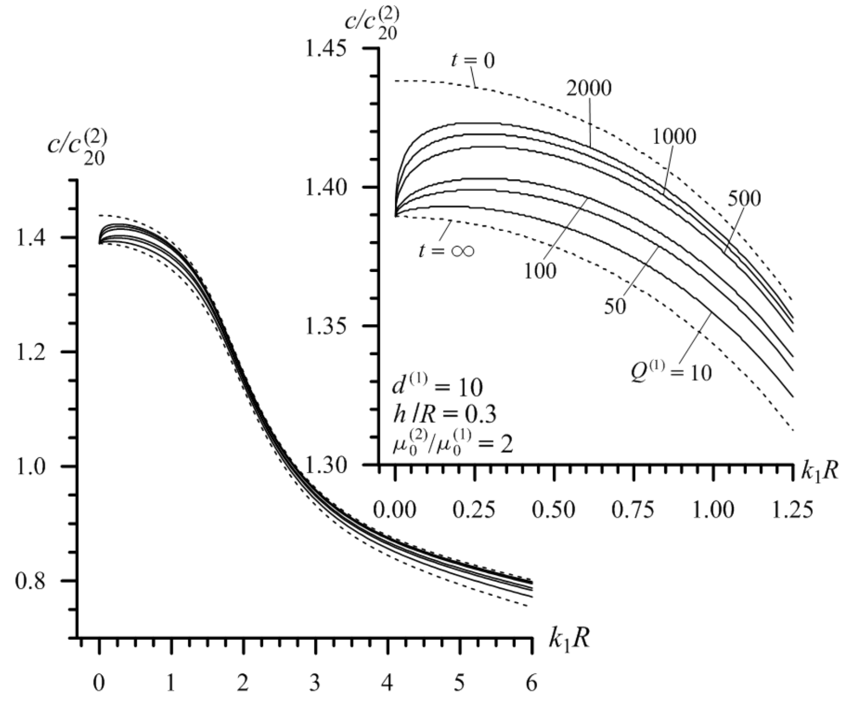
V.V. ve V.E. durumlarında dalga yayılım hızı $c_{v.v.}$ ve $c_{v.e.}$ notasyonlarıyla belirtilmektedir. Şekil 4. 12, 4. 13 ve 4. 14’te (Şekil 4. 15, 4. 16 ve 4. 17’de) verilen sonuçlar ile Şekil 4. 6, 4. 7 ve 4. 8’de (Şekil 4. 9, 4. 10 ve 4. 11’de) verilen sonuçlar karşılaştırıldığında $c_{v.e.} > c_{v.v.}$ olduğu görülmektedir. Ayrıca bu karşılaştırma ile V.E. durum için dispersiyon eğrilerinin karakteri ve bu eğrilere problem parametrelerinin etkisinin karakteri V.V. durum için elde edilenlerle aynıdır. Örneğin her iki durumda reolojik parametrelerinin seçilen tüm değerleri için dalga yayılım hızı, elastik durumda elastisite sabitlerinin anlık ($t=\infty$’daki) değerleri için elde edilen dalga yayılım hızından daha azdır (fazladır). Ancak aşağıda ele alacağımız silindir dış katman malzemesinin elastik olup, iç katman malzemesinin viskoelastik olduğu durumlarda (E.V.), daha önceden ele alınan dalga yayılım hızı sınırlarının karakteri ile aynı olmayabilir.



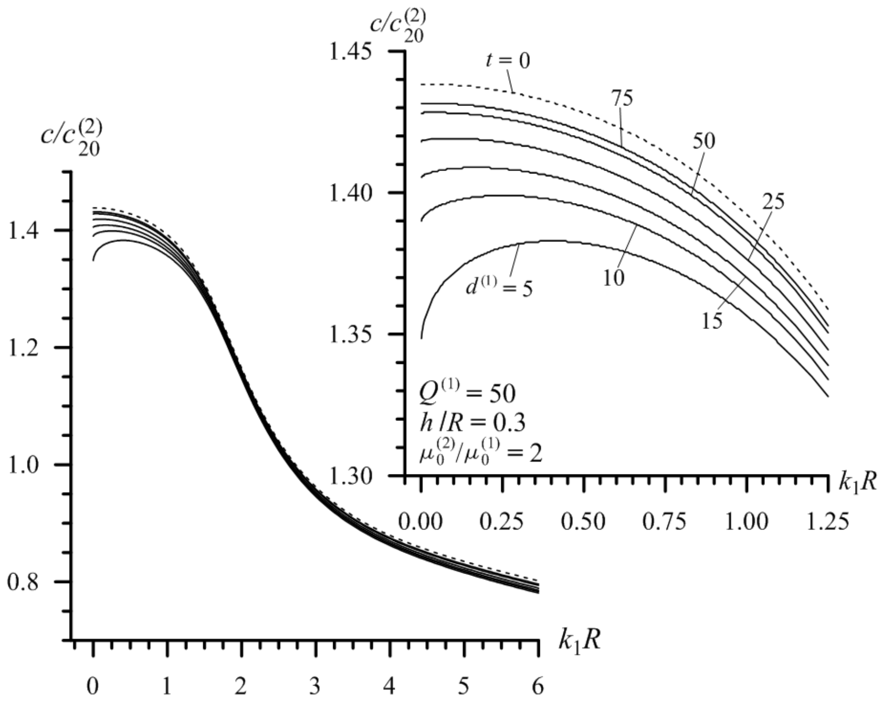
Şekil 4. 15a V.E. koşulunda $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}\Big/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



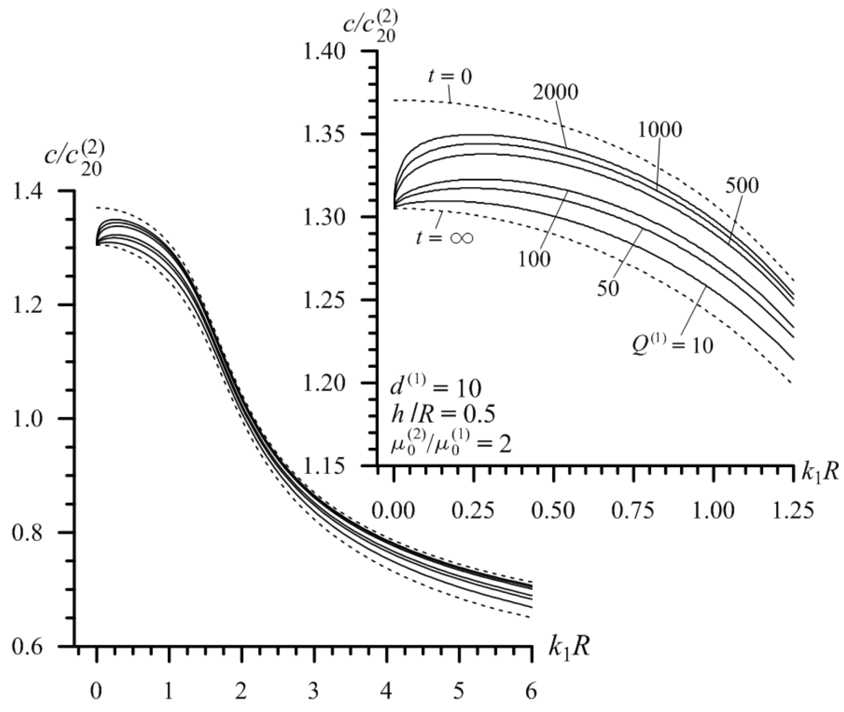
Şekil 4. 15b V.E. koşulunda $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



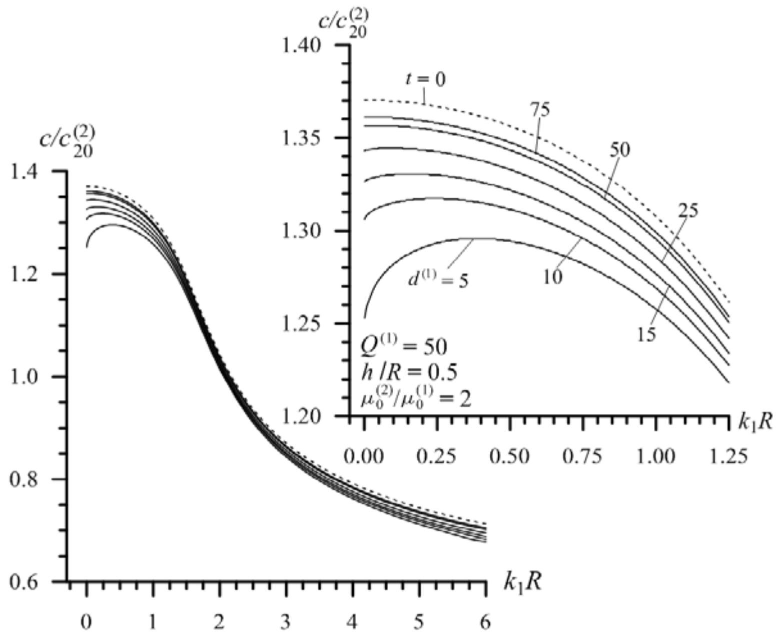
Şekil 4. 16a V.E. koşulunda $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 16b V.E. koşulunda $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

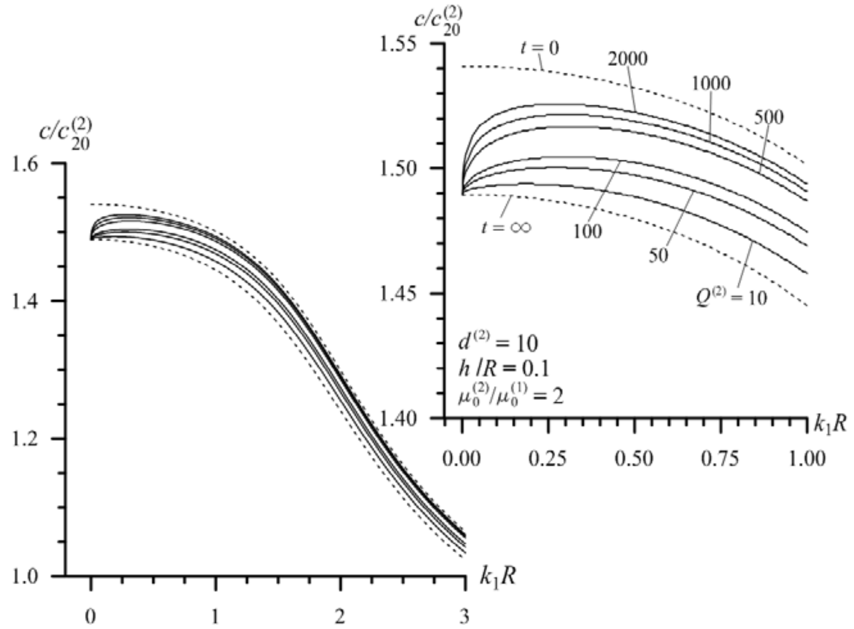


Şekil 4. 17a V.E. koşulunda $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.5$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

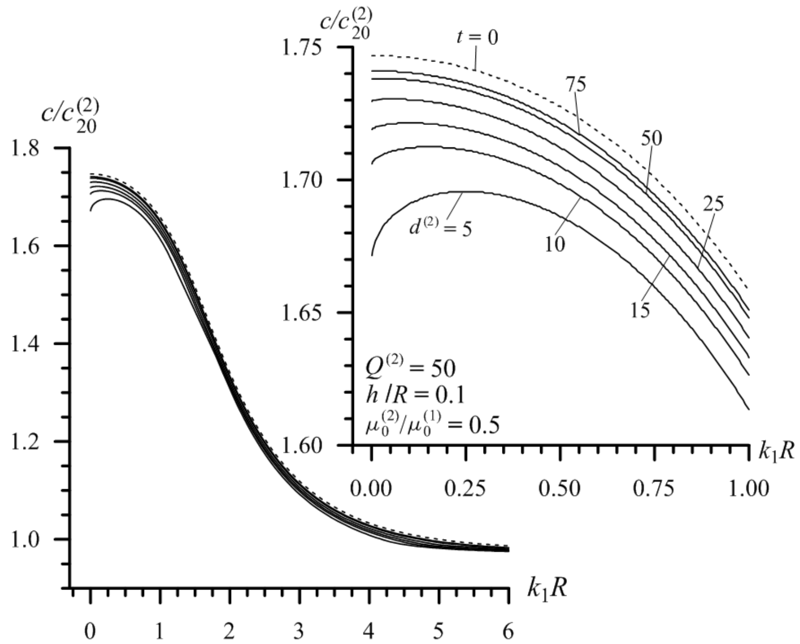


Şekil 4. 17b V.E. koşulunda $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.5$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

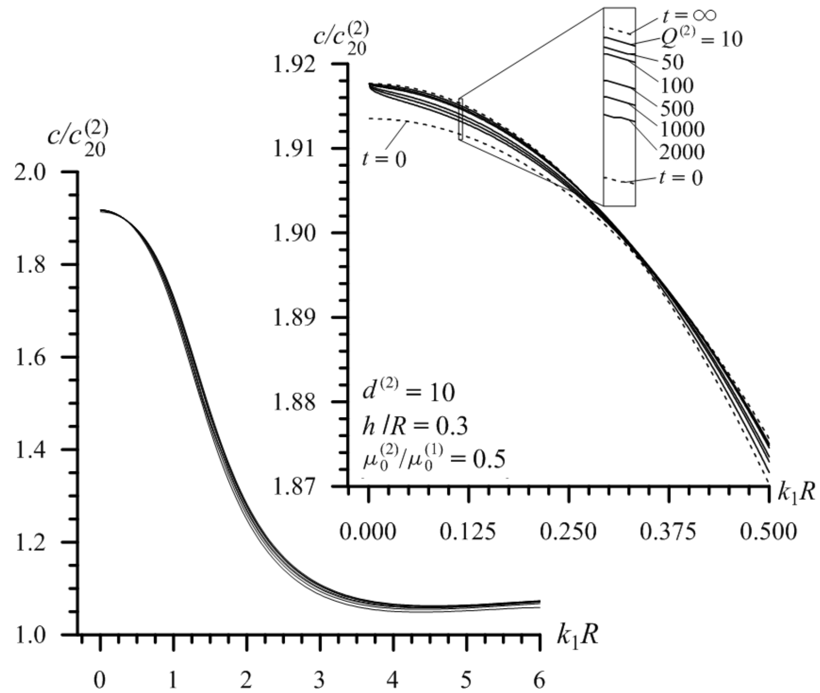
Rijitlik oranının $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ $(\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2)$ ve katman kalınlıklarının yarıçapla oranının $h/R=0.1$, 0.3, 0.5 ve 0.7 $(h/R=0.1$, 0.3, 0.7 ve $1)$ olduğu E.V. durum için elde edilen dispersiyon eğrileri sırasıyla Şekil 4. 18, 4. 19, 4. 20 ve 4. 21'de (Şekil 4. 22, 4. 23, 4. 24 ve 4. 25'te) ele alınmıştır. Bu sonuçlar analiz edildiğinde h/R'nin nispeten küçük değerlerinde (örneğin rijitlik oranının $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olup $h/R=0.1$ olduğu durum ile rijitlik oranının $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olup $h/R\le 0.3$ olduğu durumda) V.V. ve V.E durumları için elde edilen dispersiyon eğrilerinin alt ve üst limitlerinin aynı tipte olduğu görülmektedir. Fakat h/R'nin nispeten büyük değerlerinde daha önceden elde edilen dispersiyon eğrilerinin sınırlarının karakteri ile aynı olmayabilir. Yani E.V. durum için elde edilen $0<k_1R\le 1.0$ olduğu bölgedeki dispersiyon eğrilerinin üst (alt) limiti, elastik durumda elastisite sabitlerinin $t=\infty$'daki (anlık) değerleri için elde edilen dipersiyon eğrisidir. Sonuç olarak belirli koşullar altında iç silindirin viskoelastisitesi ele alınan bileşik katı silindirin eksenel simetrik boyuna dalga yayılım hızını arttırabilir. Bu durumlar altında d ve Q reolojik parametrelerinin azaltılması ile birlikte dalga yayılım hızında artış gözlemlenmektedir.



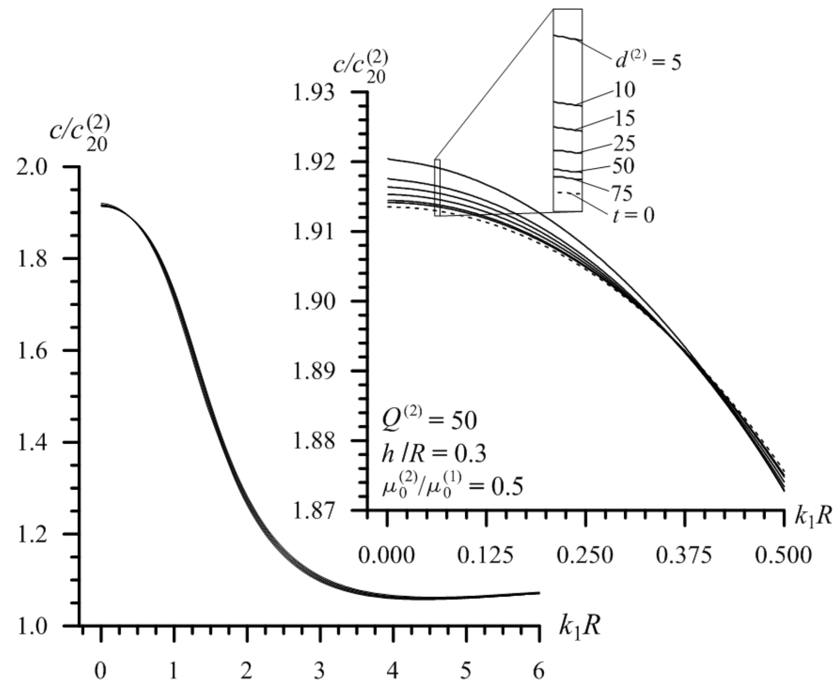
Şekil 4. 18a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



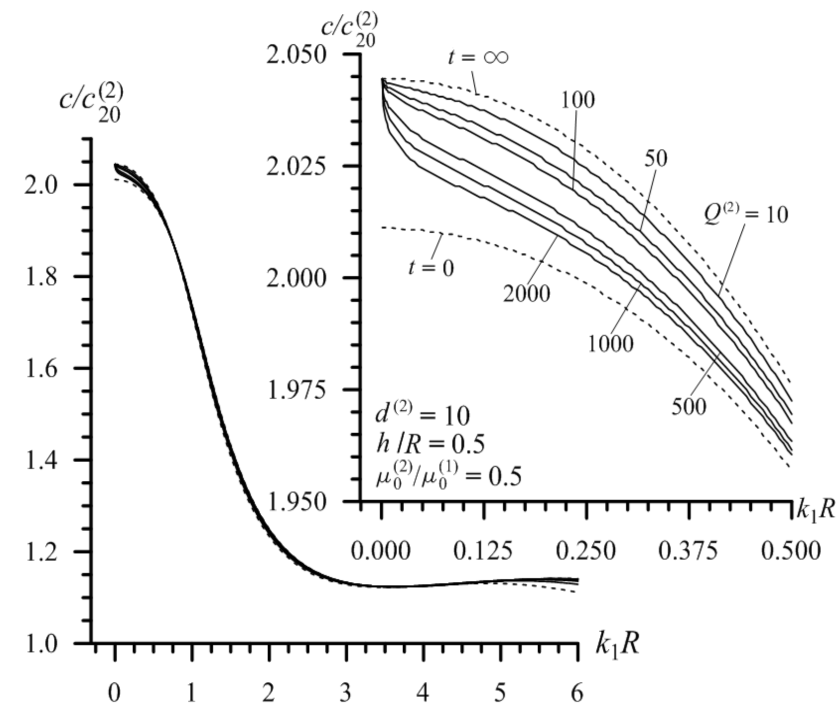
Şekil 4. 18b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



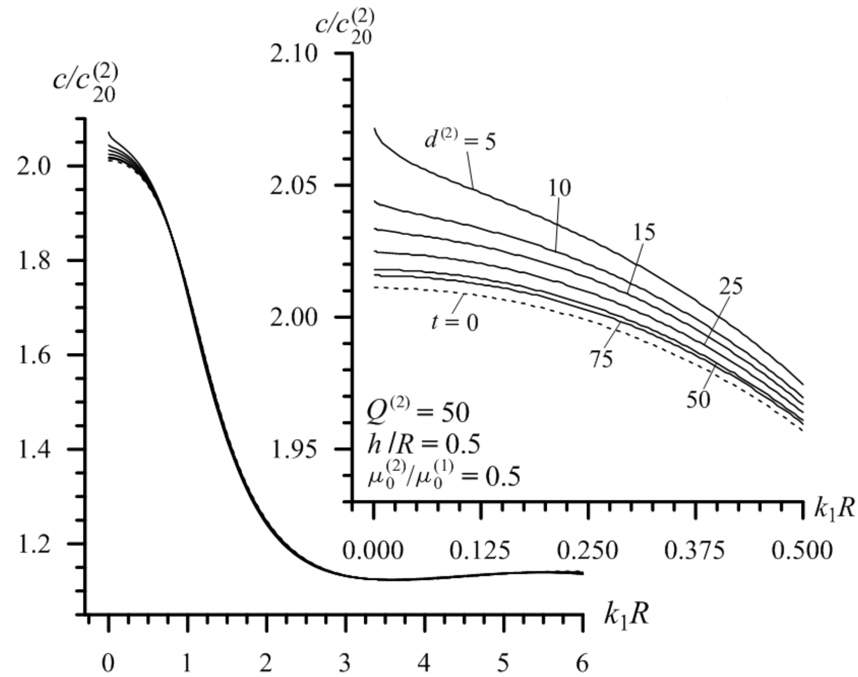
Şekil 4. 19a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



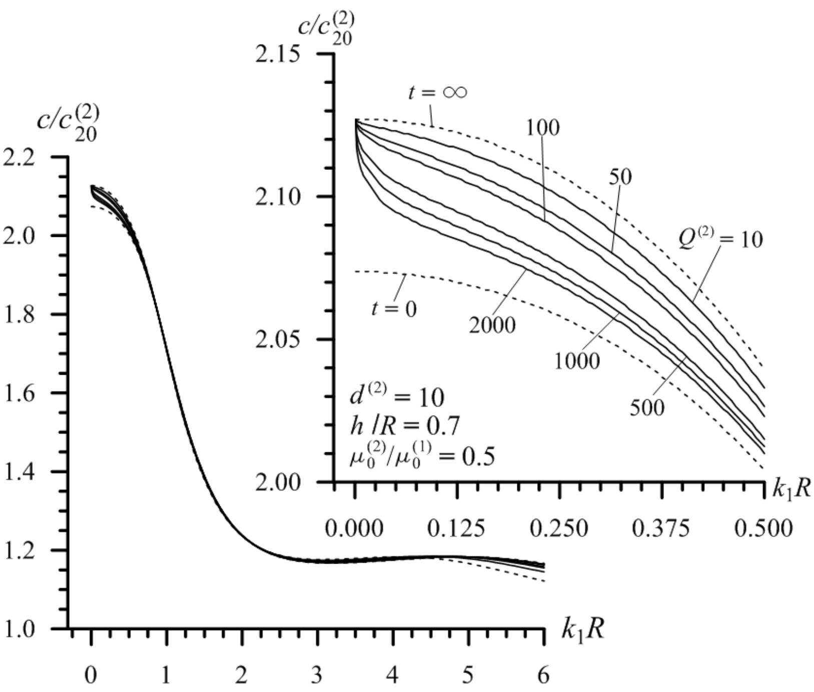
Şekil 4. 19b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



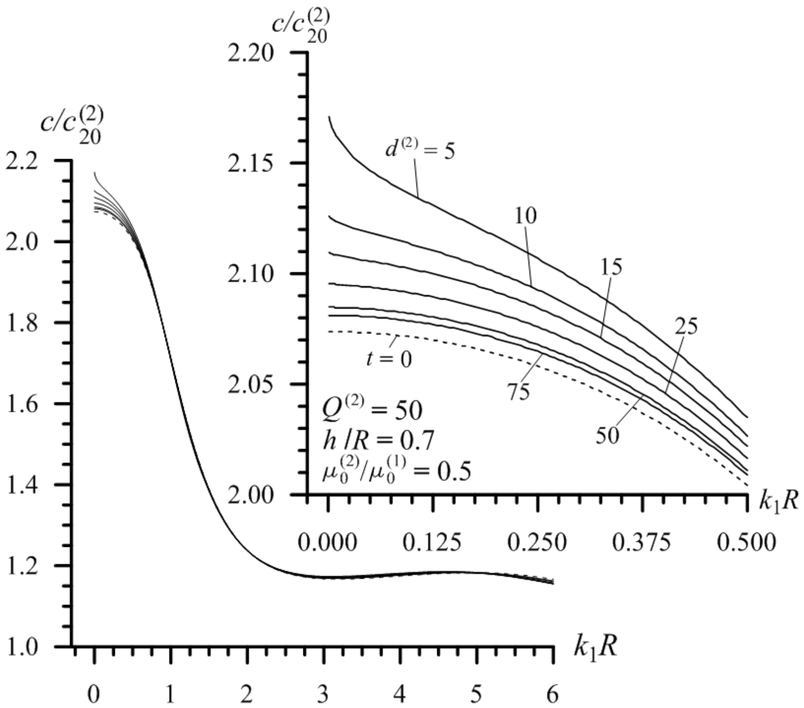
Şekil 4. 20a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.5$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



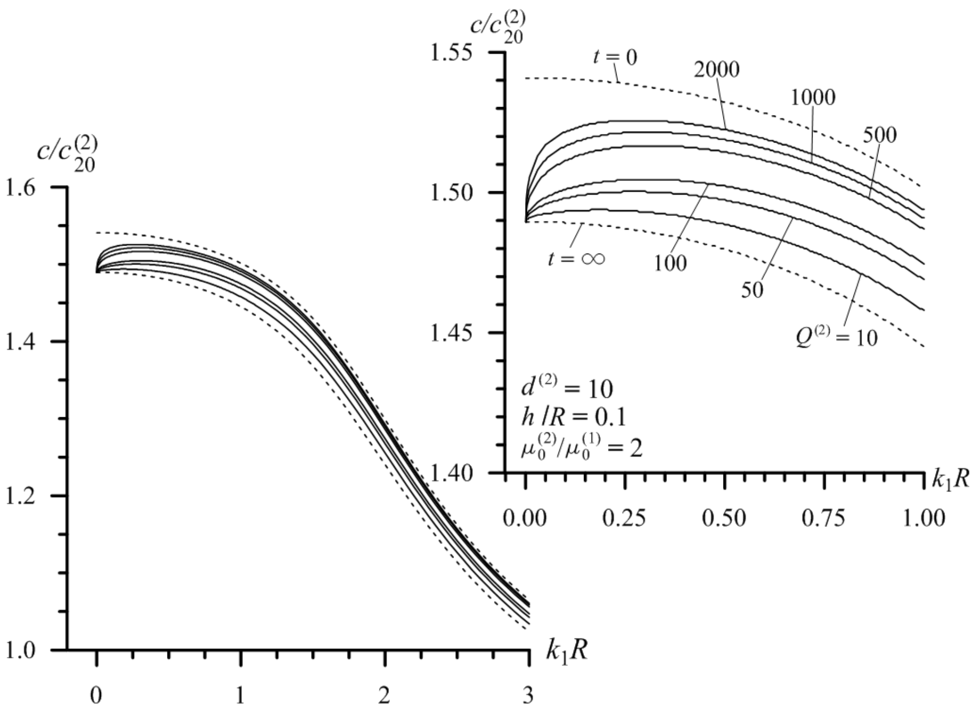
Şekil 4. 20b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.5$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



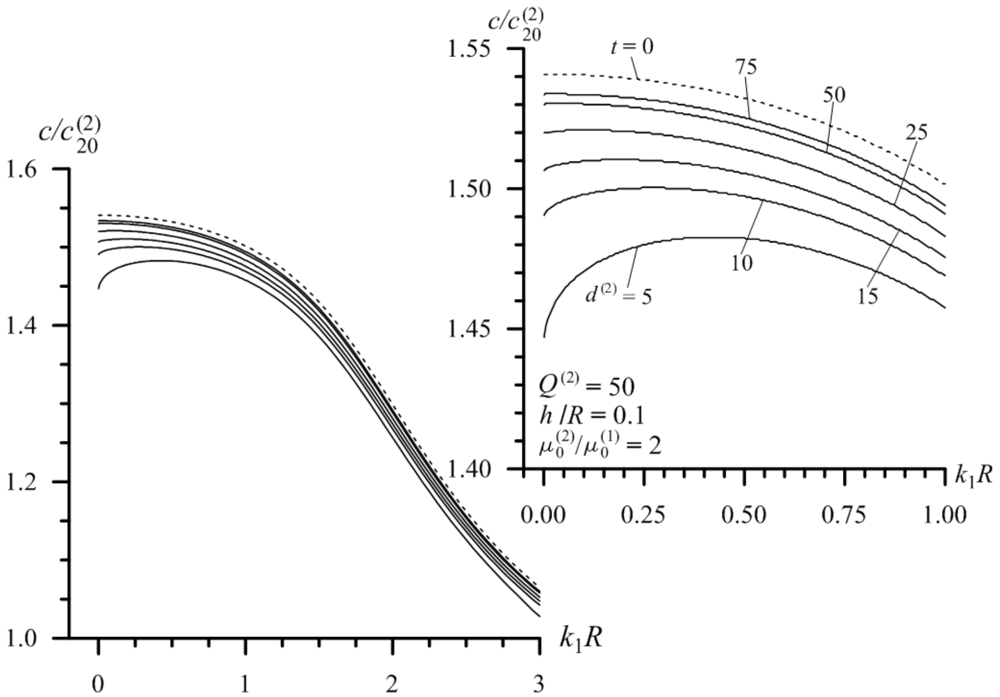
Şekil 4. 21a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.7$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



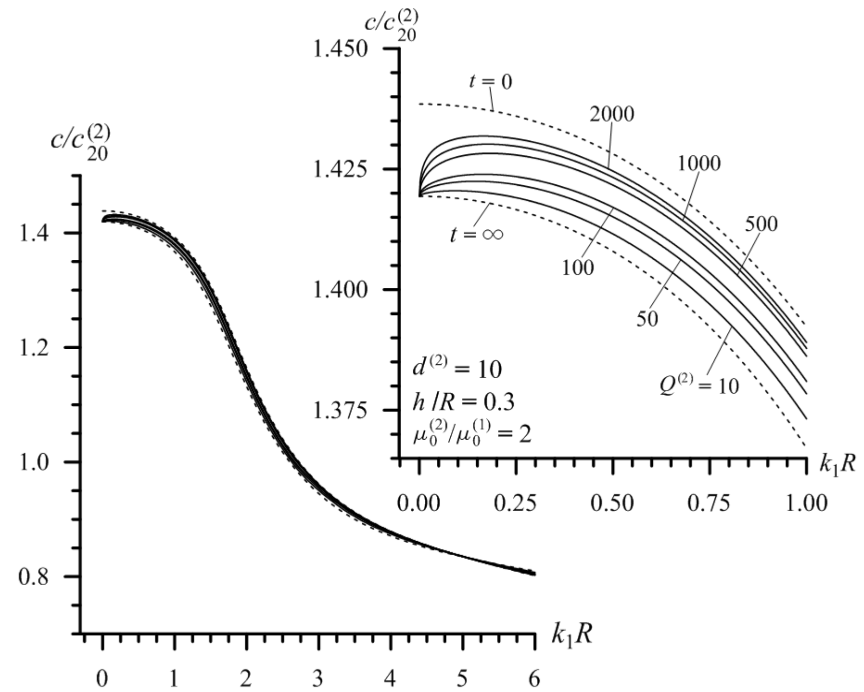
Şekil 4. 21b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.7$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



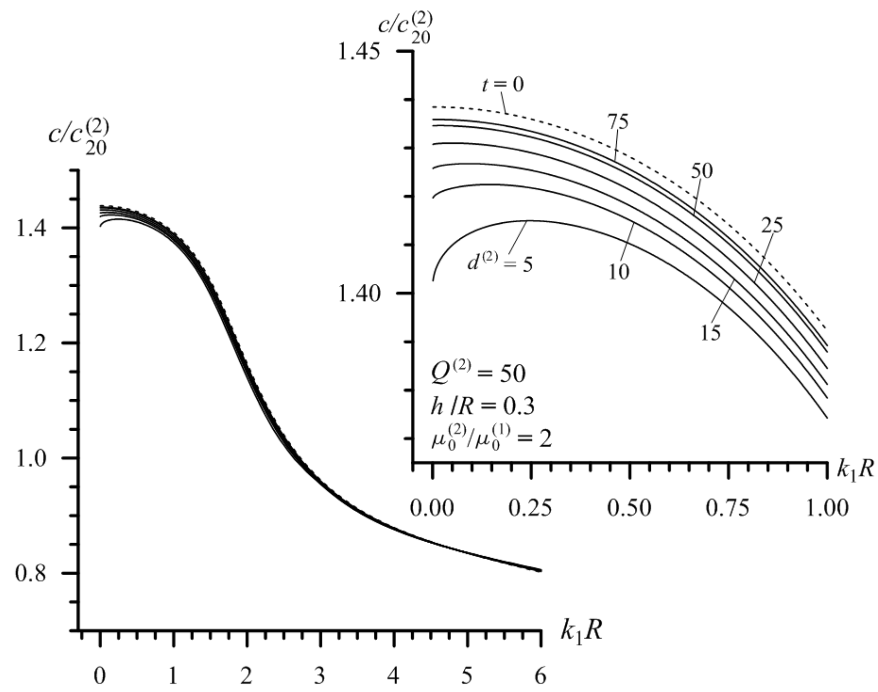
Şekil 4. 22a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



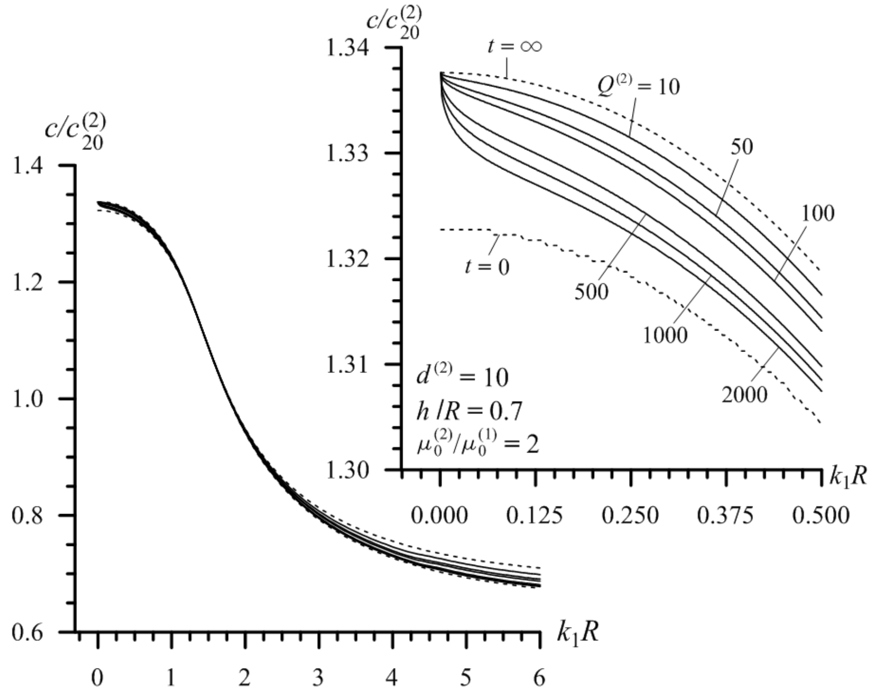
Şekil 4. 22b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



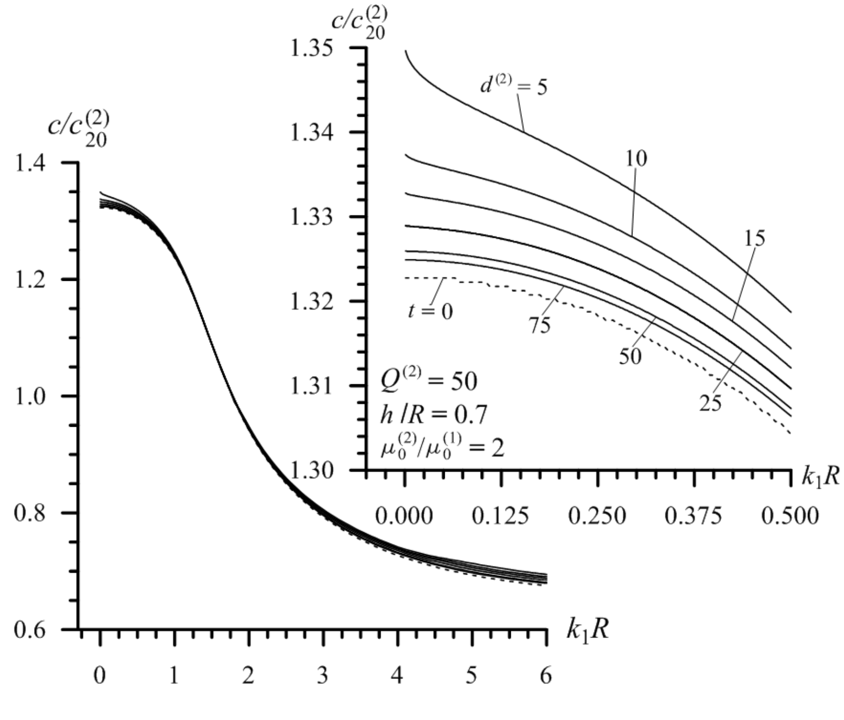
Şekil 4. 23a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



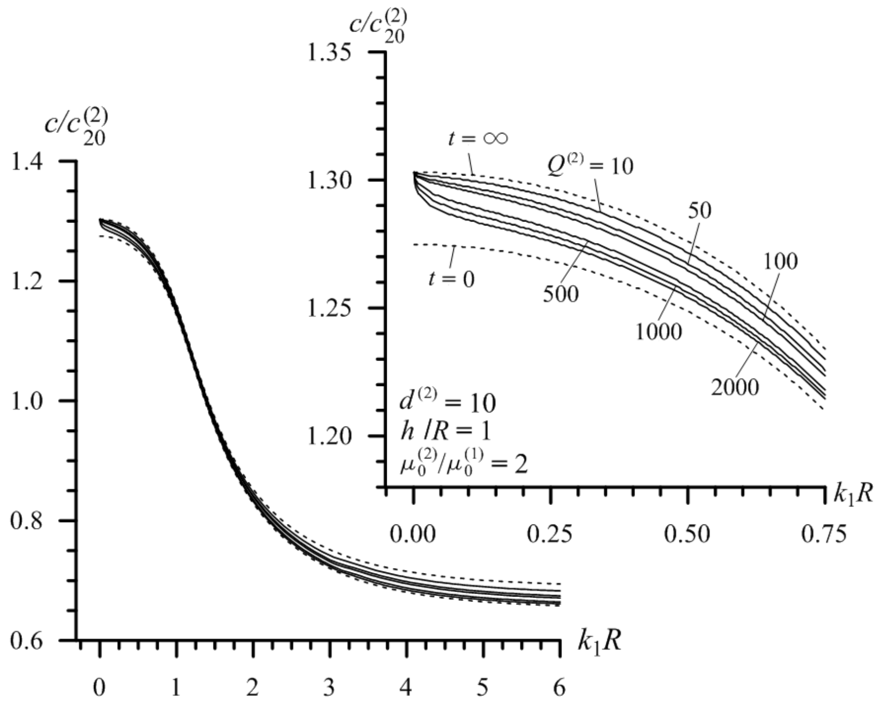
Şekil 4. 23b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



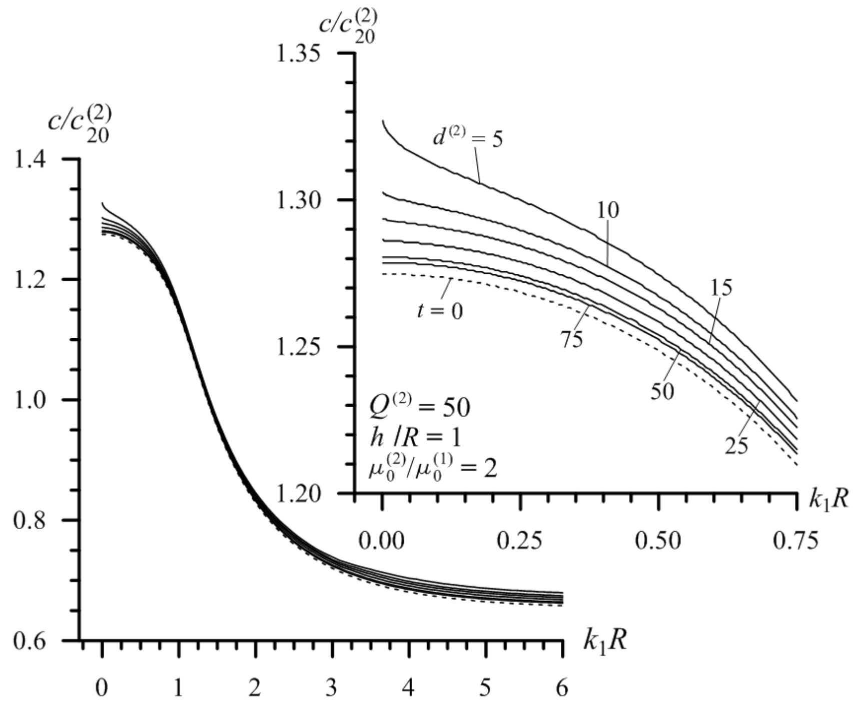
Şekil 4. 24a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.7$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 24b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.7$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

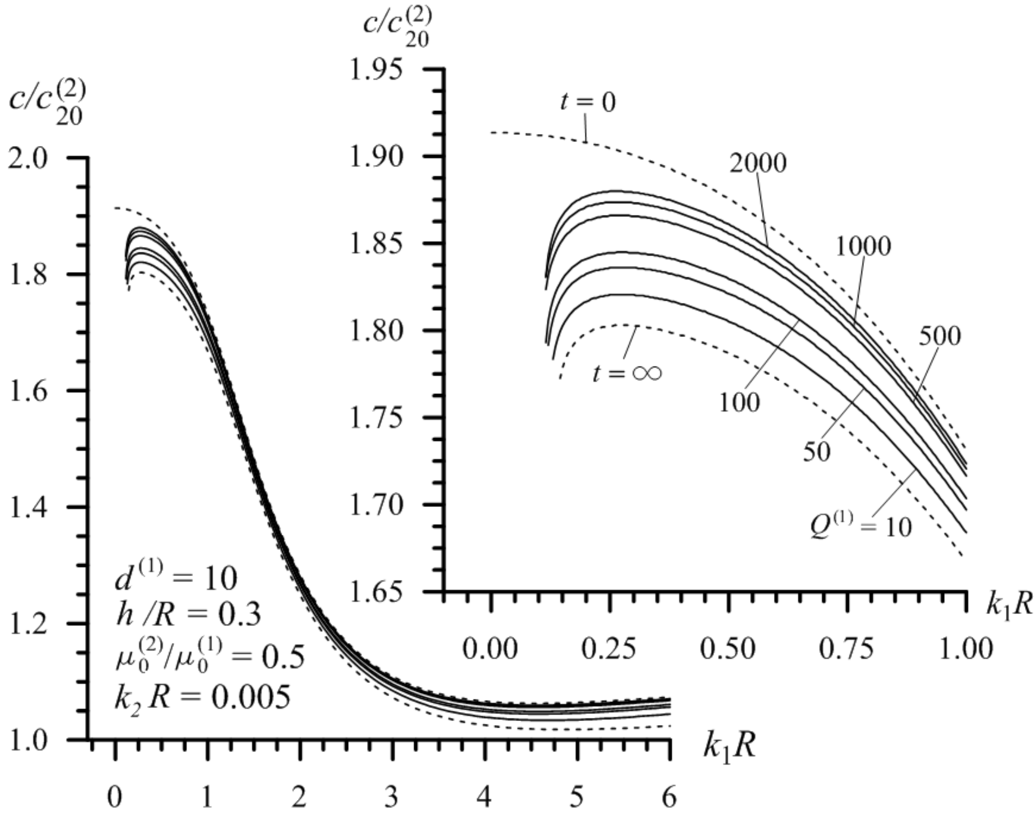


Şekil 4. 25a E.V. koşulunda $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 1.0$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

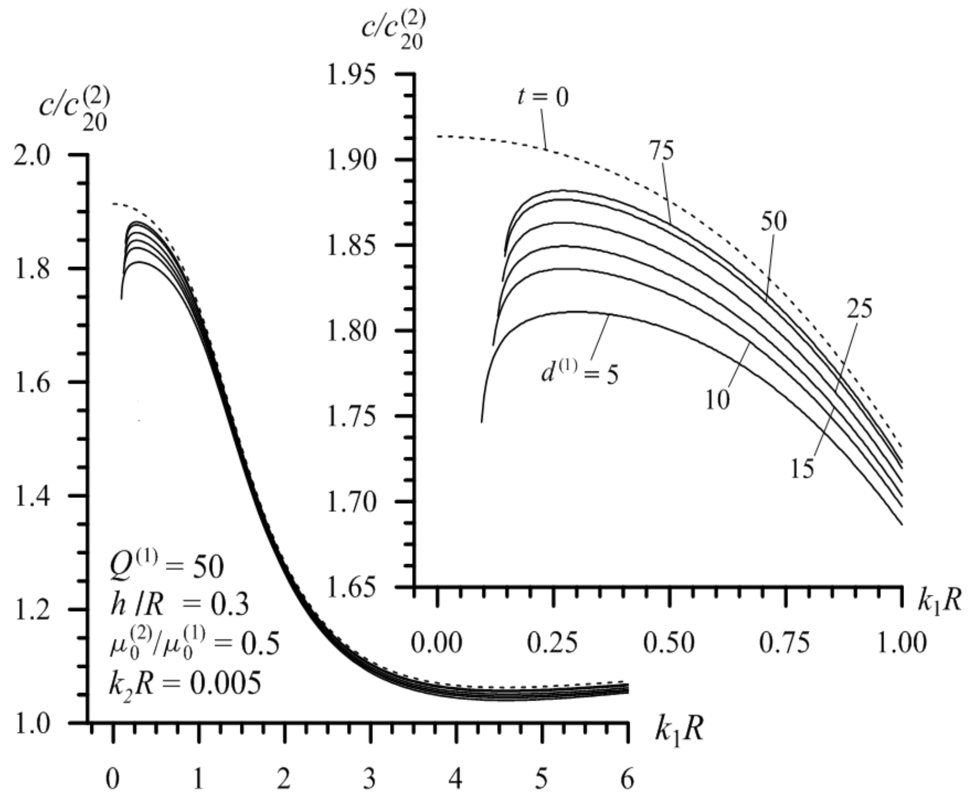


Şekil 4. 25b E.V. koşulunda $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 1.0$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Yukarıda elde edilen tüm sonuçlar dispersif sönüm durumu için çıkarılmıştır. Dispersif olmayan sönümün dalga yayılımına etkisini incelemek adına V.E. durum için $k_2R = 0.005$, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ parametrelerinde araştırmalar yapılmıştır. Şekil 4. 26'da verilen bu grafiklerden biri $d^{(1)}\,(=10)$ parametresinin sabit tutularak $Q^{(1)}$ parametresinin çeşitli değerleri için (Şekil 4. 26a), diğeri ise $Q^{(1)}\,(=50)$ parametresi sabit tutulup $d^{(1)}$ parametresinin çeşitli değerleri için (Şekil 4. 26b) elde edilmiştir.

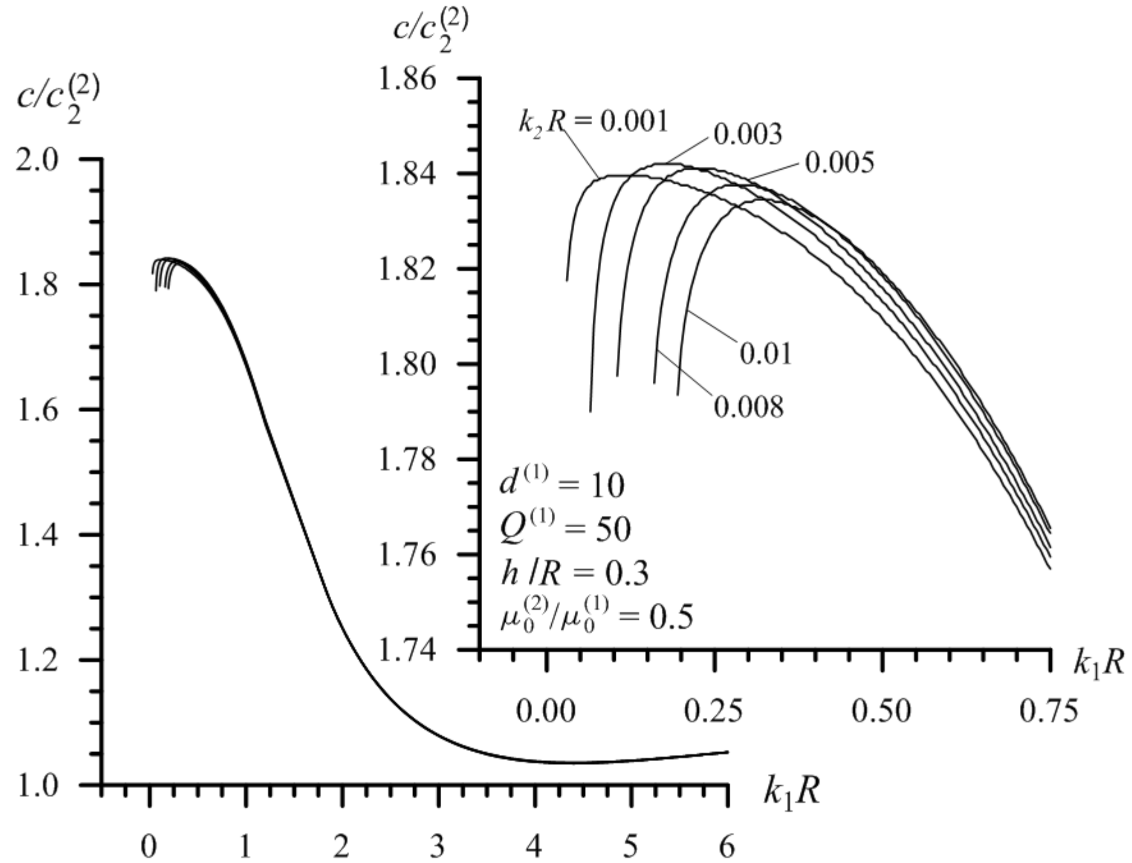


Şekil 4. 26a V.E. koşulunda homojen içi dolu silindirde dispersif olmayan sönüm durumunda, $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$, $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ ve $k_2R = 0.005$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



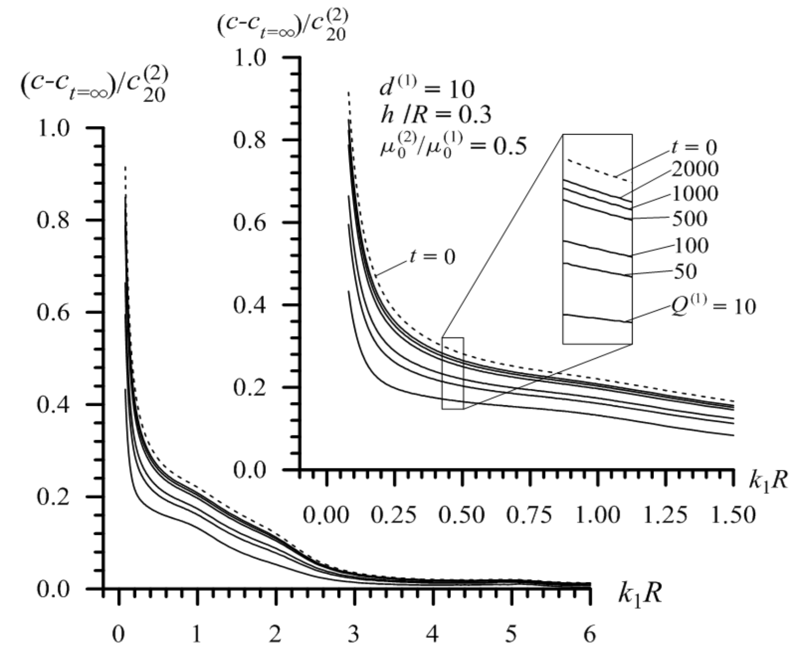
Şekil 4. 26b V.E. koşulunda homojen içi dolu silindirde dispersif olmayan sönüm durumunda, $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$, $\mu_0^{(2)} \big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ ve $k_2R = 0.005$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Bu sonuçlarla birlikte dispersif sönüm durumu ve dispersif olmayan sönüm durumunda, dış silindir malzemesinin viskoelastisitesi dalga yayılım hızının değerinde düşüşe neden olduğu görülmektedir. Ancak dispersif olmayan sönüm durumu için k_1R'nin kopma (cut off) değerleri ($(k_1R)_{c.f.}$) ortaya çıkmaktadır. Cut off frekansı ($\omega_{c.f.}$) $\omega_{c.f.} = (k_1R)_{c.f.} \times c\big|_{k_1R=(k_1R)_{c.f.}}$ ifadesi ile belirlenmektedir. $(k_1R)_{c.f.}$'in değeri $d^{(1)}$'in azalmasıyla birlikte azalmakta, $Q^{(1)}$'in azalmasıyla birlikte artmaktadır. Ayrıca $(k_1R)_{c.f.}$'in değeri k_2R'nin değerine de bağlıdır. Şekil 2. 27'de verilen grafiklerde bu durum örneklenmiştir. Bu grafikler incelendiğinde k_2R'nin azalmasıyla birlikte $(k_1R)_{c.f.}$ değerinde azalma meydana geldiği görülmektedir.

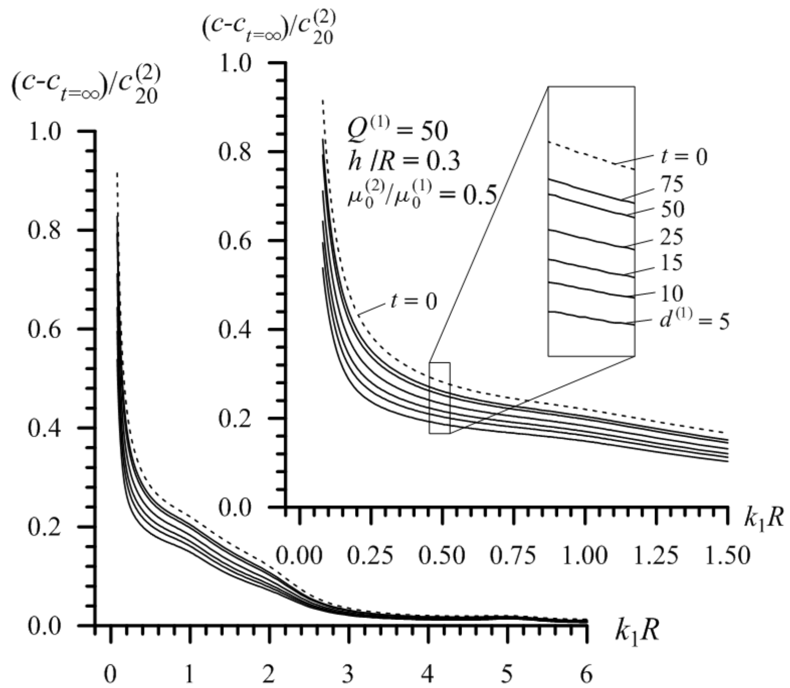


Şekil 4. 27 Dispersif olmayan sönüm koşulunda $Q(=50)$ ve d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için k_2R sönüm derecesinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Dalga yayılımının ikinci moddaki sonuçlarını incelemek için dispersif sönümde $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu V.E. durumu ele alınmıştır. 2. modda reolojik parametrelerin dalga yayılımı üzerindeki etkisinin daha belirgin anlaşılması için $(c - c|_{t=\infty})/c_{20}$ ve k_1R arasındaki grafikler Şekil 4. 28'de incelenmiştir. Silindir katman malzemelerinin viskoelastisitesi ikinci modda dalga yayılım hızında önemli bir düşüş meydana getirdiği görülmektedir.



Şekil 4. 28a V.E. koşulunda $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile 2. mod için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 4. 28b V.E. koşulunda $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile 2. mod için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

BÖLÜM 5

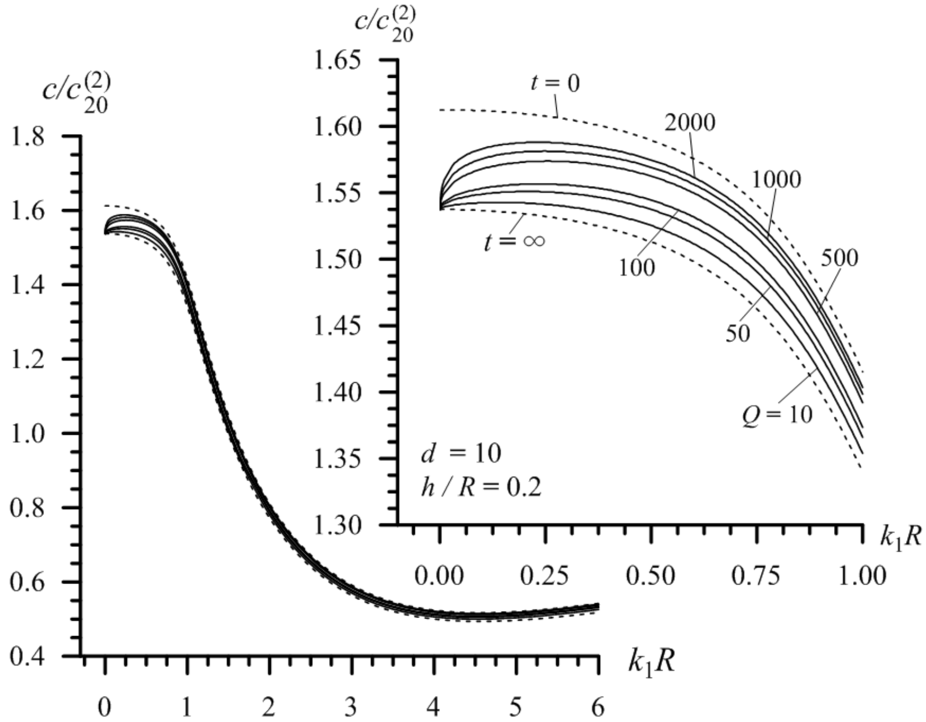
İÇİ BOŞ BİLEŞİK SİLİNDİRLER İÇİN NÜMERİK SONUÇLARIN ELDESİ VE İNCELENMESİ

Bu bölümde tek katlı ve iki katlı içi boş silindir çeşitleri için viskoelastikliğin boyuna dalga dispersiyon eğrilerine etkisini gösteren sonuçlar grafikler halinde verilip yorumlanmaktadır.

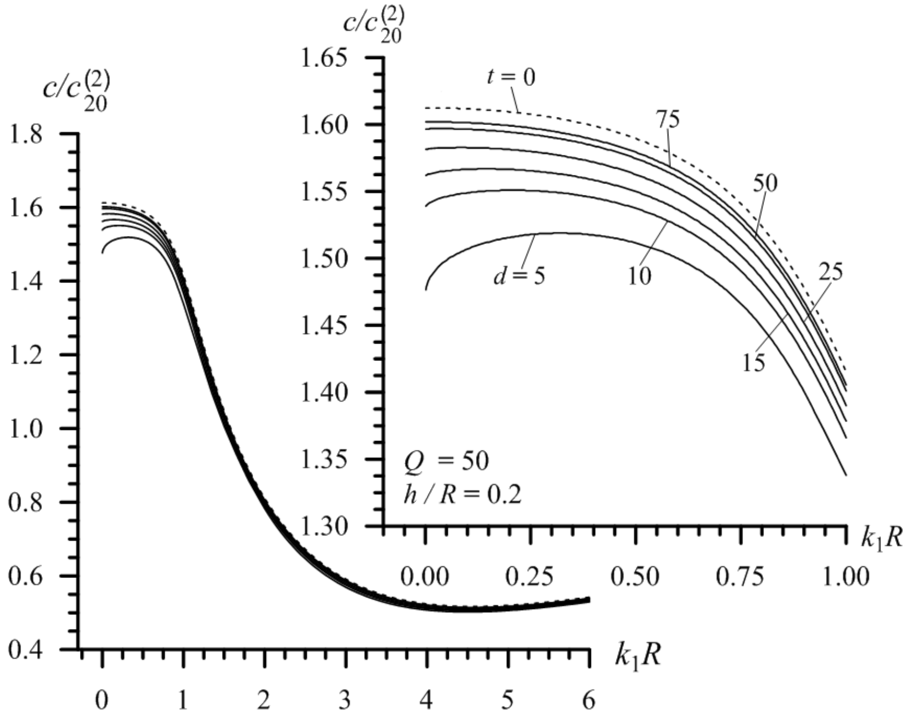
5.1 Tek Katlı İçi Boş Silindirin Dispersiyon ve Dispersif Sönüm Eğrilerinin Nümerik Sonuçları

İlk olarak homojen tek katlı içi boş dairesel silindirde $\nu_0 = 0.3$ (Poisson katsayısının anlık değeri) ve $\alpha = 0.5$ (reolojik parametre) koşulları için dispersiyon eğrileri araştırılmıştır. Bölüm 2.2'de elde edilen dispersiyon denklemlerinin çözümü ile birinci mod eğrileri elde edilmektedir. Dispersif sönüm durumunda ifade (3.26) veya (3.27) ile elde edilen sönüm katsayısı β için elde edilen sonuçlar Şekil 5. 1, 5. 2 ve 5. 3'te verilmektedir.

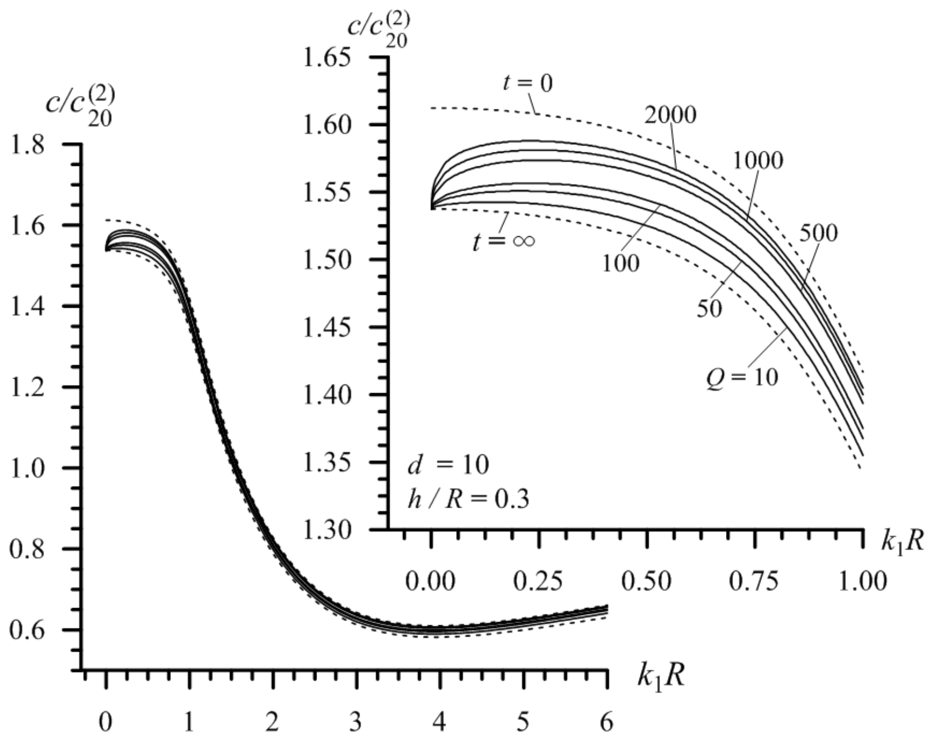
Bu bölümde de d (=10) parametresinin değeri sabit tutularak Q parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi a harfiyle gruplanan grafiklerde ve Q (=50) parametresinin değeri sabit tutularak d parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi b harfiyle gruplanan grafiklerde temsil edilip incelenmiştir.



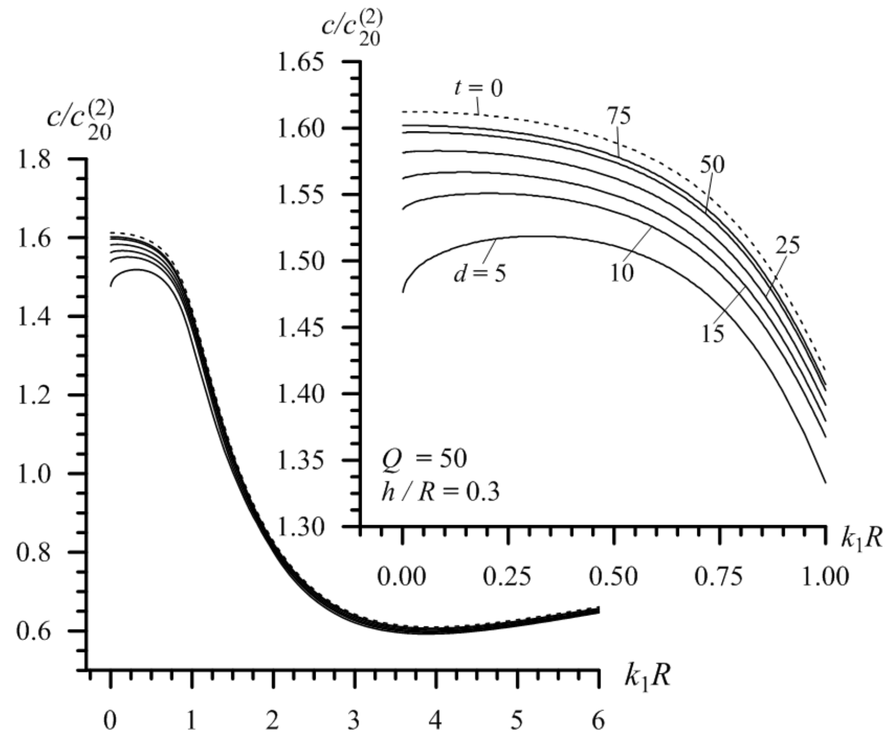
Şekil 5. 1a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.2$ olduğu durumda Q parametresinin değişimi ile homojen içi boş silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



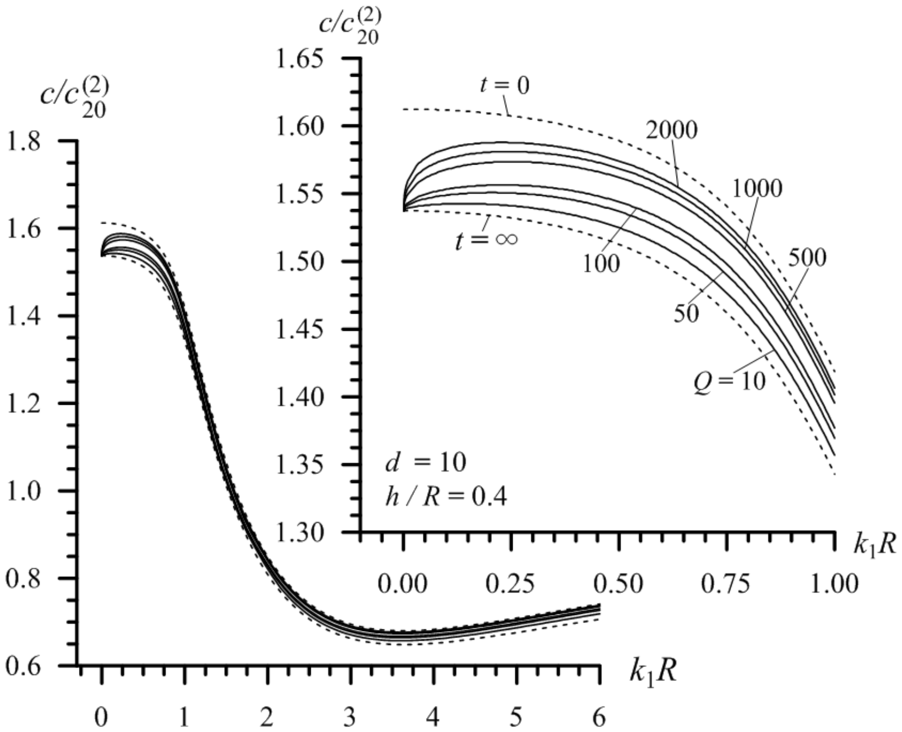
Şekil 5. 1b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.2$ olduğu durumda d parametresinin değişimi ile homojen içi boş silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



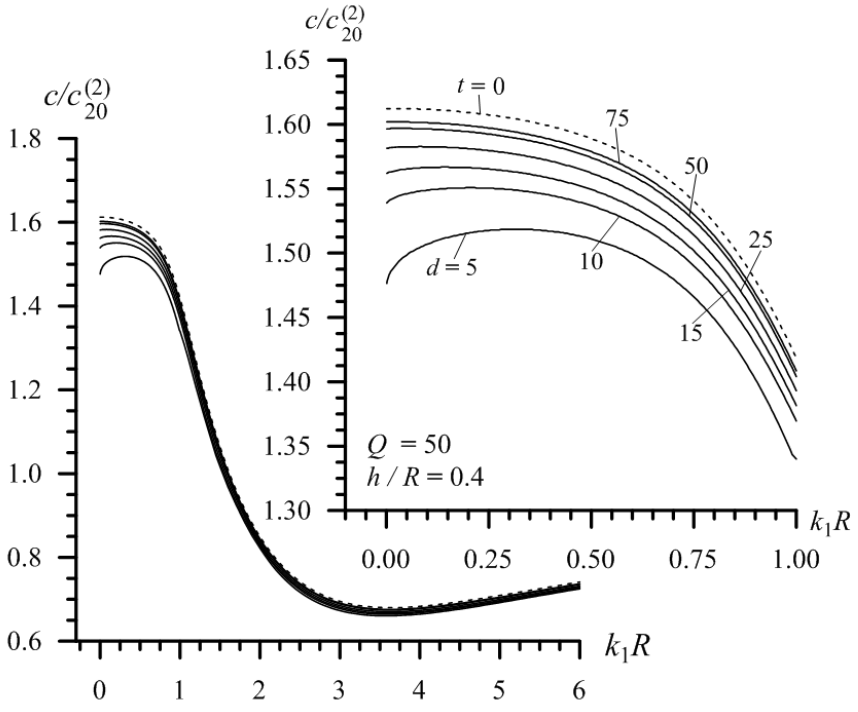
Şekil 5. 2a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.3$ olduğu durumda Q parametresinin değişimi ile homojen içi boş silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 2b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R=0.3$ olduğu durumda d parametresinin değişimi ile homojen içi boş silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

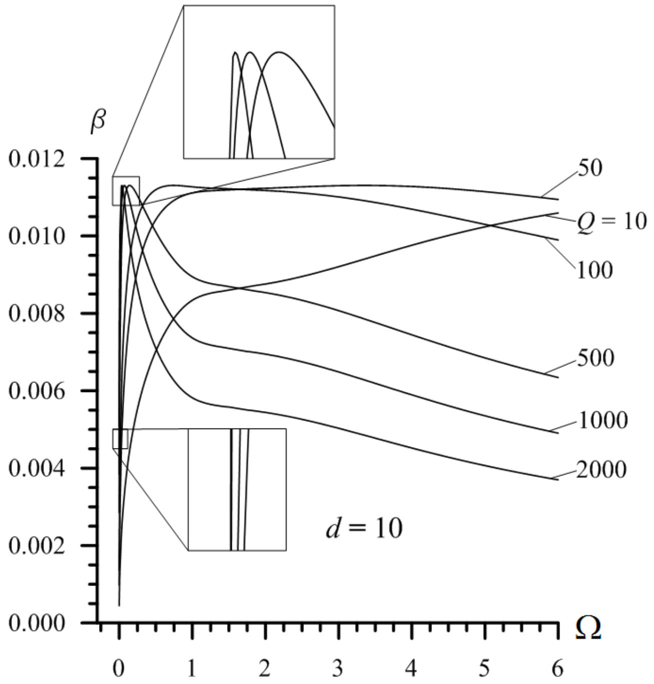


Şekil 5. 3a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.4$ olduğu durumda Q parametresinin değişimi ile homojen içi boş silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

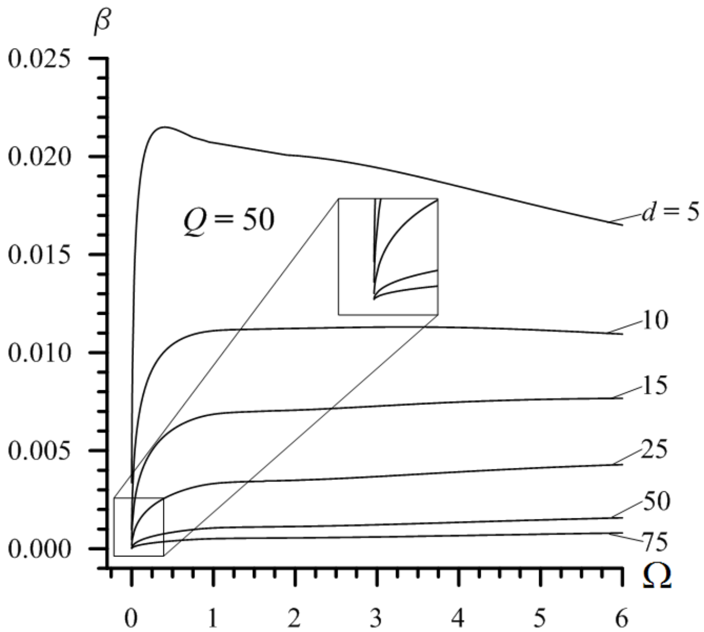


Şekil 5. 3b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.4$ olduğu durumda d parametresinin değişimi ile homojen içi boş silindir için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Sönüm katsayısı β ile (3.19)'daki Ω arasındaki bağıntı $d=10$ koşulu için Şekil 5. 4a'da ve $Q=50$ koşulu için Şekil 5. 4b'de verilmektedir.



Şekil 5. 4a d (=10) parametresinin sabit değerinde, Q parametresinin değişimi ile elde edilen sönüm katsayısı β ile boyutsuz frekans Ω arasındaki ilişki grafiği



Şekil 5. 4b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, d parametresinin değişimi ile elde edilen sönüm katsayısı β ile boyutsuz frekans Ω arasındaki ilişki grafiği

Sönüm tipi silindir katman malzemesinin reolojik parametrelerine bağlı olarak değişmesinden dolayı Şekil 5. 4a ve Şekil 5. 4b'de verilen eğriler tek katlı içi boş silindir için elde edeceğimiz tüm durumlar için aynıdır. Dalga yayılım hızının düşük dalga sayısı limit değerinde $\eta^{(1)}=1$ ve $\eta^{(2)}=0$ olduğu kabulü yapılarak ifade (3.29) ve ifade (3.31) ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k_1R \to 0 \text{ iken } \frac{c}{c_{20}} = e_\infty \text{ , } e_\infty = 2\left(1+\frac{\lambda_\infty}{2(\lambda_\infty+\mu_\infty)}\right) \quad (5.1)$$

$E_\infty = \mu_\infty e_\infty$ ve $c_{20} = \sqrt{\mu_0/\rho}$ ilişkileri ifade (5.1)'de kullanılarak ifade (5.2) elde edilir.

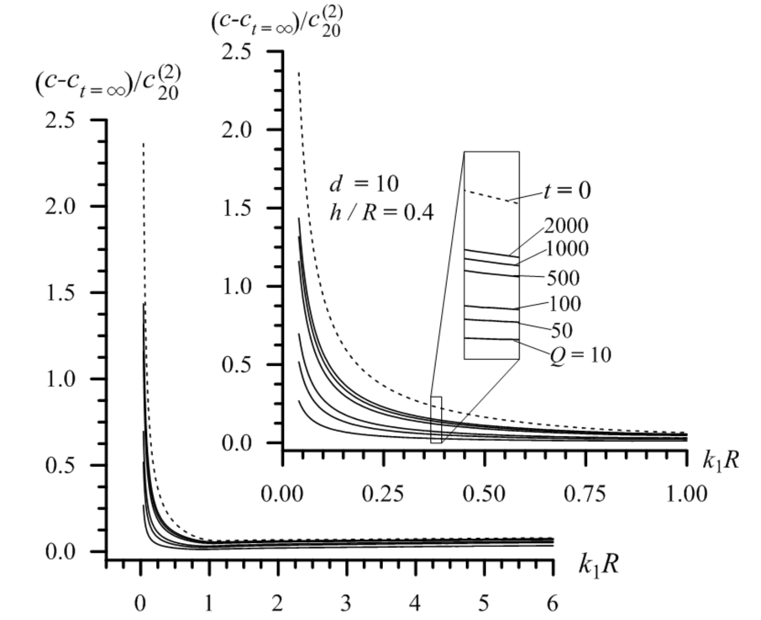
$$k_1R \to 0 \text{ iken } c = \sqrt{E_\infty/\rho} \quad (5.2)$$

şeklindedir.

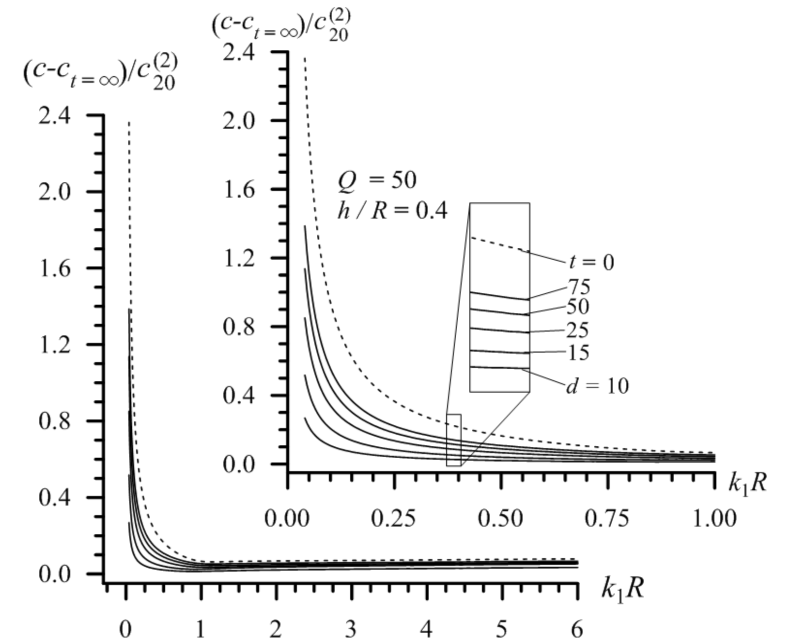
Bilinen mekanik ilişkiler ve ifade (3.33) ile dalga yayılım hızı c'nin yüksek dalga sayısı limit değeri c_R elde edilir. Bununla birlikte Şekil 5. 1, 5. 2 ve 5. 3'de verilen nümerik sonuçları ele alacak olursak; viskoelastik durum için elde edilen eğrilerin elastisite sabitlerinin anlık değerlerinde ($t=0$ için) elde edilen dalga yayılım hızı eğrisi ile elastisite sabitlerinin $t=\infty$'daki değerlerinde elde edilen dalga yayılım hızı eğrisi ile sınırlandığı görülmektedir.

Şekil 5. 1, 5. 2 ve 5. 3 incelendiğinde silindir malzemesinin viskoelastisitesinin dalga yayılım hızında düşüşe neden olduğu çıkarılmaktadır. Grafiklere bakıldığında silindir katman kalınlığının dalga yayılım hızında belirgin bir değişime neden olmadığı görülmektedir.

Sonuç olarak dalga yayılım hızının düşük dalga sayısı limit değerleri; d parametresinin sabit olarak tutulduğu durumlarda reolojik parametre olan Q'nün çeşitli değerleri için aynı olması şartı, Şekil 5. 1a, 5. 2a ve 5. 3a'da verilen sonuçlarla da tekrardan doğrulanmıştır. Düşük dalga sayısı limit değerlerinde dalga yayılım hızı reolojik parametre d'nin artışı ile birlikte artması Şekil 5. 1b, 5. 2b ve 5. 3b'de görülmektedir. Aynı zamanda Şekil 5. 1, 5. 2 ve 5. 3'te verilen sonuçlar d ve Q reolojik parametrelerinin anlık değerlerinde silindirde eksenel simetrik dalganın yayılım hızını göstermektedir. Ele alınan durumlar incelendiğinde tek katlı içi boş silindirde silindir malzemesinin viskoelastisitenin, dalga yayılım hızına boyutsuz dalga sayısı k_1R'nin küçük değerlerinde daha çok etki ettiği görülmektedir.



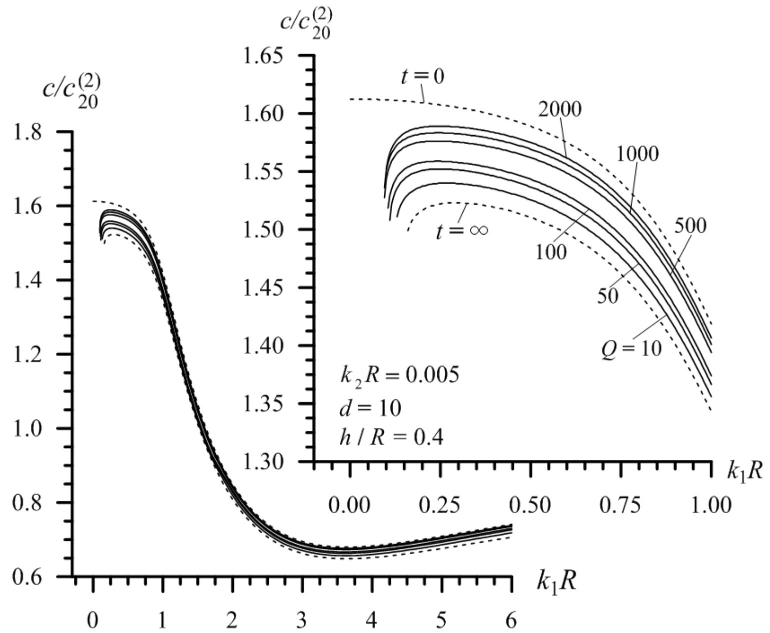
Şekil 5. 5a Tek katlı içi boş silindirde d (=10) parametresinin sabit değerinde, Q parametresinin değişimi ile ikinci mod için elde edilen $(c-c|_{t=\infty})/c_{20}$ ile k_1R arasındaki ilişki grafiği



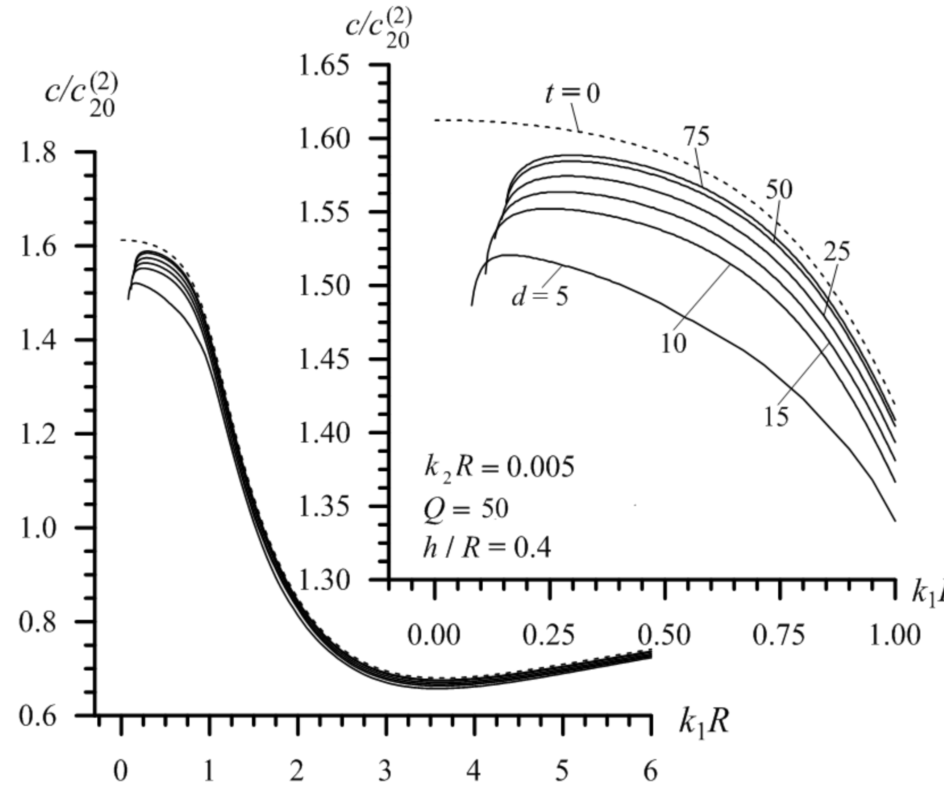
Şekil 5. 5b Tek katlı içi boş silindirde Q (=50) parametresinin sabit değerinde, d parametresinin değişimi ile ikinci mod için elde edilen $(c-c|_{t=\infty})/c_{20}$ ile k_1R arasındaki ilişki grafiği

İkinci mod için elde edilen nümerik sonuçları tek katlı içi boş silindir için ele aldığımızda, silindir malzemesinin reolojik parametrelerinin dalga yayılım hızı üzerine etkisini daha belirgin görmek için grafikler içi dolu silindirdeki gibi $(c-c|_{t=\infty})/c_{20}$ ve k_1R arasında oluşturulmuştur. İkinci modda d (=10) parametresinin sabitlenerek Q parametresinin farklı değerleri için ve Q(=50) parametresi sabitlenerek d parametresinin farklı değerleri için elde edilen dispersiyon eğrileri sırasıyla Şekil 5. 5a ve Şekil 5. 5b'de verilmektedir. Silindir katman malzemelerinin viskoelastikliğinin artmasıyla ikinci modda dalga yayılım hızında önemli bir düşüş meydana getirdiği görülmektedir.

Tek katlı içi boş silindir için elde ettiğimiz bu grafikler ifade (3.26) veya ifade (3.27)'de tanımlanan sönüm ifadesi ile elde edilen sönüm dispersiyonu durumu için oluşturulmuştur. Birinci düşük mod için $k_2R = 0.005$ koşulunda dispersif olmayan sönüm durumu için d (=10) parametresinin sabitlenerek değişken değerli Q parametresi için ve Q(=50) parametresi sabitlenerek değişken değerli d parametresi için elde edilen dispersiyon eğrileri sırasıyla Şekil 5. 6a ve Şekil 5. 6b'de verilmektedir.



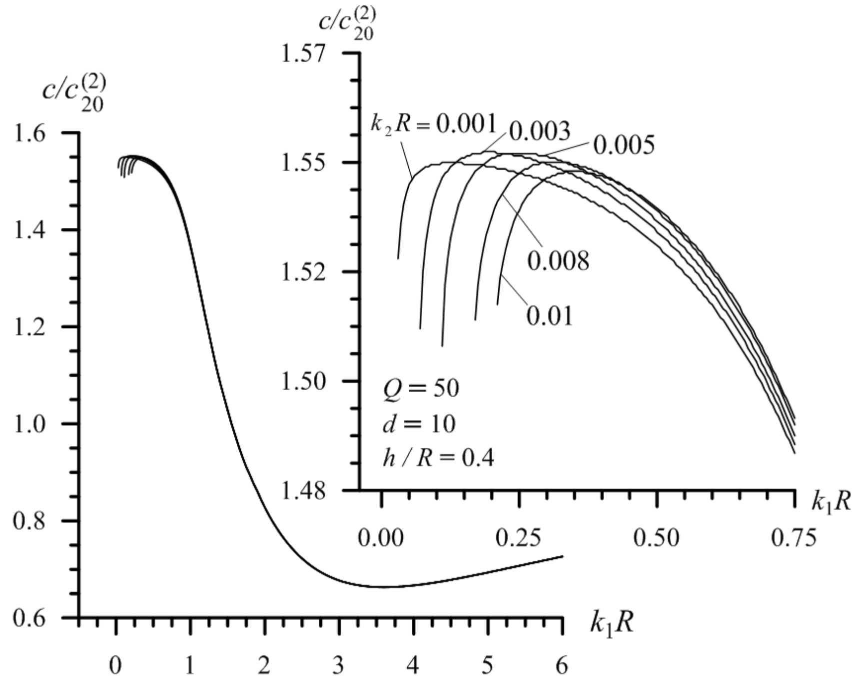
Şekil 5. 6a Homojen içi boş silindirde dispersif olmayan sönüm durumunda, d (=10) parametresinin sabit değerinde $h/R = 0.4$ ve $k_2R = 0.005$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 6b Homojen içi boş silindirde dispersif olmayan sönüm durumunda, $Q(=50)$parametresinin sabit değerinde, $h/R = 0.4$ ve $k_2R = 0.005$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Dispersif olmayan sönüm durumu için elde edilen grafikler incelendiğinde k_1R'nin bazı değerlerinde içi dolu silindirde olduğu gibi kopma (cut off) olduğu görülmektedir. Dispersif sönüm durumunda reolojik parametreleri Q ve d değerlerindeki düşüşün dalga yayılım hızında düşüşe neden olduğu grafiklerden anlaşılmaktadır. Aynı zamanda Şekil 5. 6a ve Şekil 5. 6b incelendiğinde Q (d) değerinin artmasının $(k_1R)_{c.f.}$ değerinde azalışa (artışa) neden olduğu görülmektedir.

Şekil 5. 7'de verilen sonuçlarda k_2R'nin değerindeki değişimin $(k_1R)_{c.f.}$ değerinde değişime neden olduğu görülmektedir ve k_2R'deki düşüşün $(k_1R)_{c.f.}$'de de düşüşe neden olduğu anlaşılmaktadır.

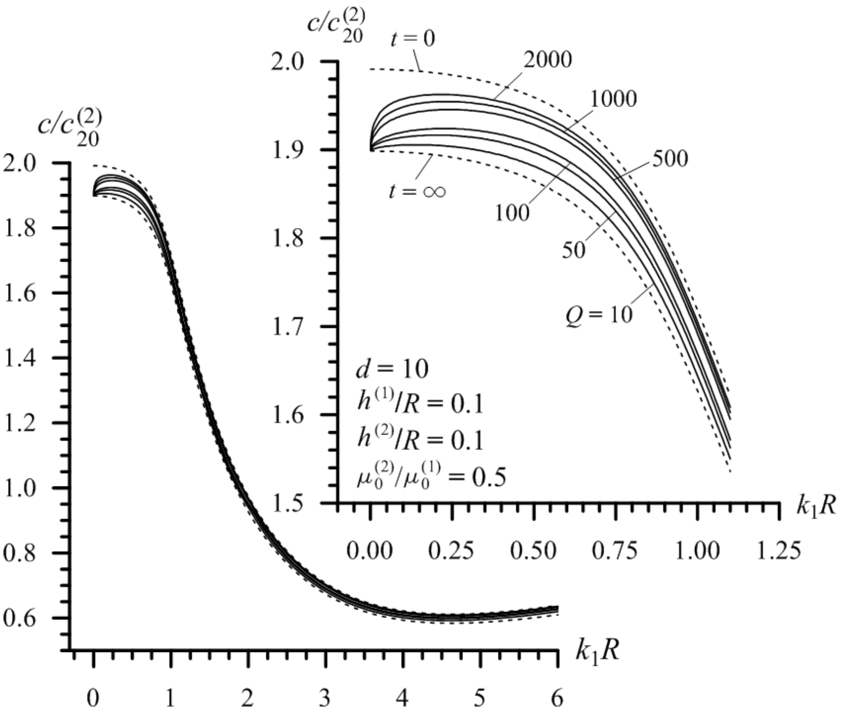


Şekil 5. 7 Homojen içi boş silindir için dispersif olmayan sönüm durumunda, kopma (cut off) değerlerine k_2R'nin etkisi

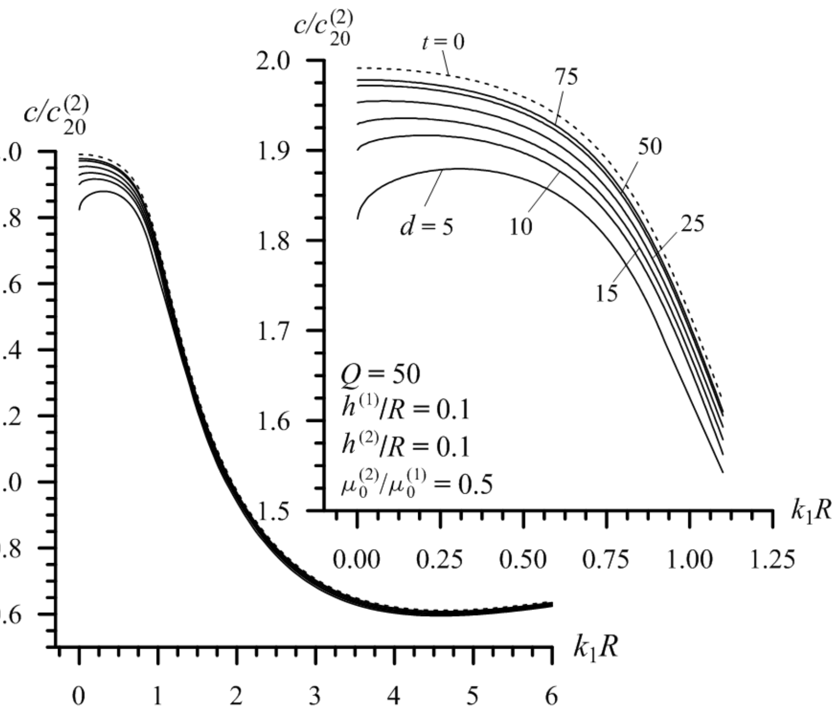
5.2 İki Katlı İçi Boş Silindirin Dispersiyon ve Dispersif Sönüm Eğrilerinin Nümerik Sonuçları

Tek katlı içi boş dairesel silindirden sonra iki katlı içi boş dairesel silindir ele alınmıştır. Poisson katsayısının anlık değeri her iki tabaka için aynı $v_0^{(1)} = v_0^{(2)} = 0.3$ olduğu ve $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0.5$ olduğu varsayılarak rijitlik oranı $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ ile $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durumlar ele alınmıştır. İlk olarak silindir katmanlarının viskoelastik özelliklerinin aynı olduğu ($Q^{(1)} = Q^{(2)}$ $(= Q)$ ve $d^{(1)} = d^{(2)}$ $(= d)$) durum için sonuçlar analiz edilmiştir. Aşağıda tartışılan sonuçların (3.26) veya (3.27)'deki sönüm ilişkisi ile birlikte çıkarılmıştır. Buradaki sonuçlar birinci temel mod için elde edilmiştir.

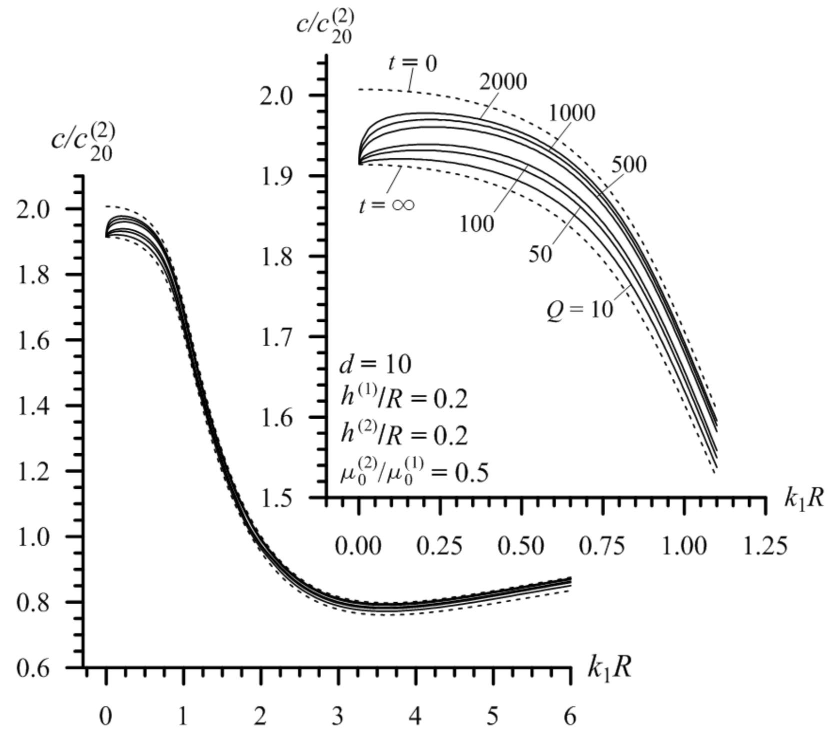
Rijitlik oranının $\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 0.5$ ($\mu_0^{(2)} / \mu_0^{(1)} = 2$) ve katman kalınlıklarının yarıçapla oranının $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1,\ 0.2$ ve 0.3 olduğu durum için çizilen grafikler sırasıyla Şekil 5. 8, 5. 9 ve 5. 10'da (şekil 5. 11, 5. 12 ve 5. 13'te) ele alınmıştır.



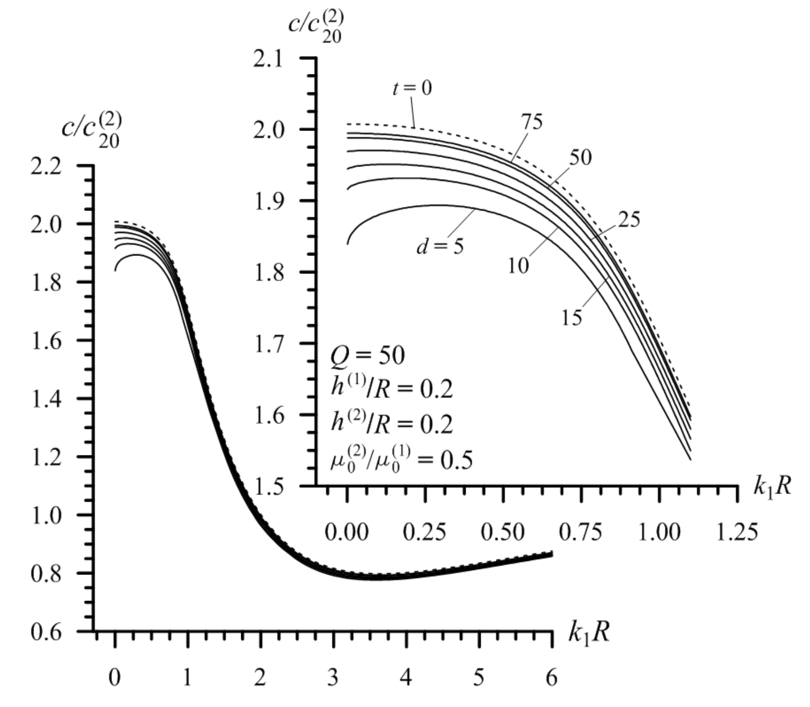
Şekil 5. 8a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



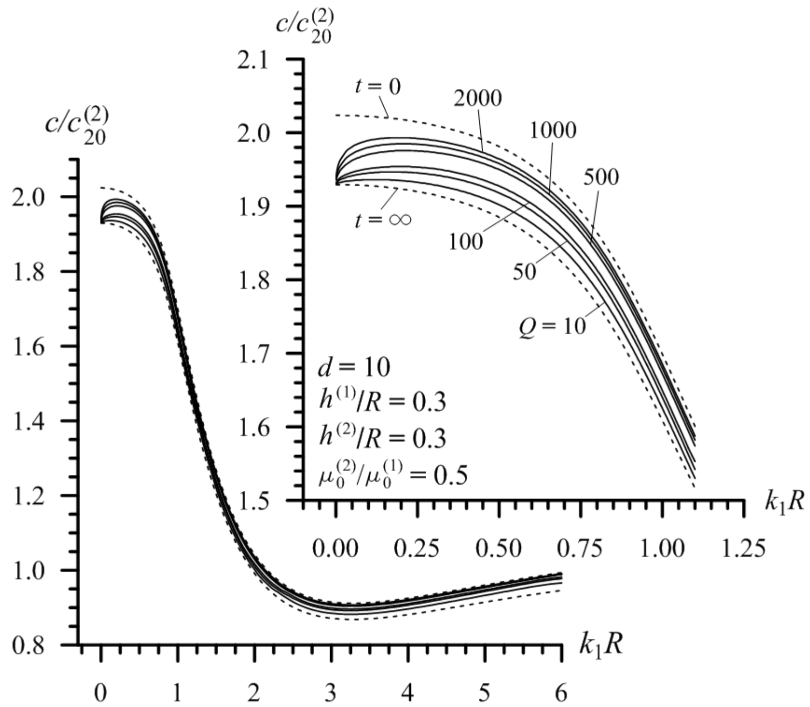
Şekil 5. 8b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



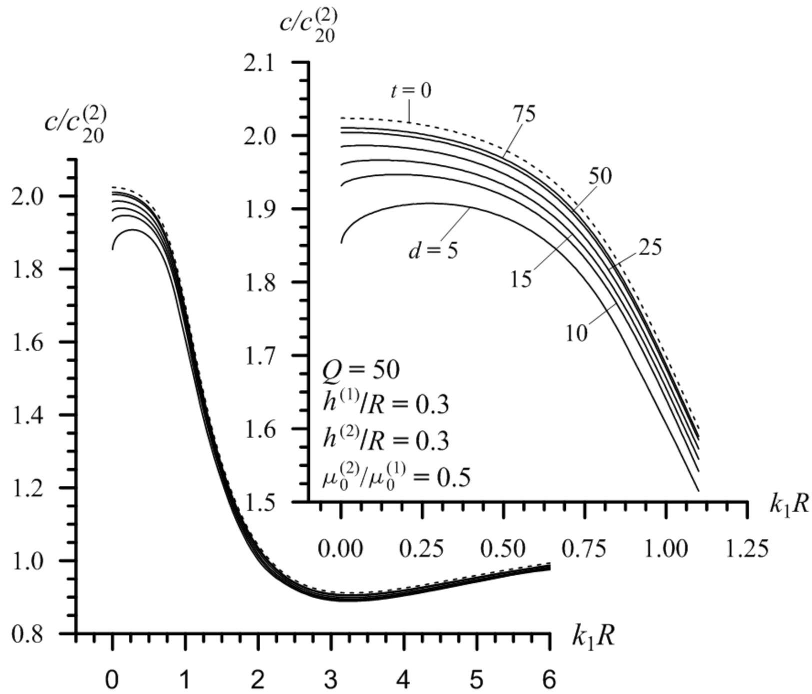
Şekil 5. 9a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.2$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



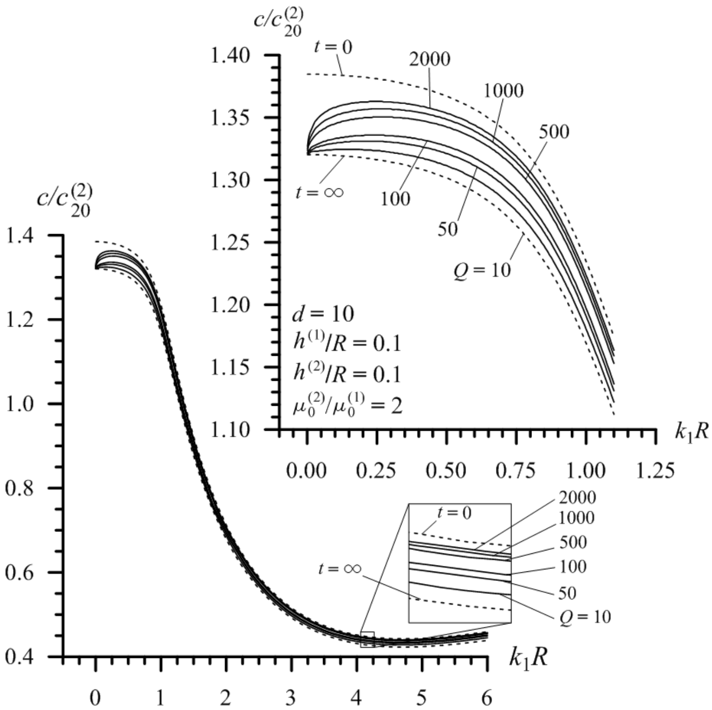
Şekil 5. 9b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.2$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



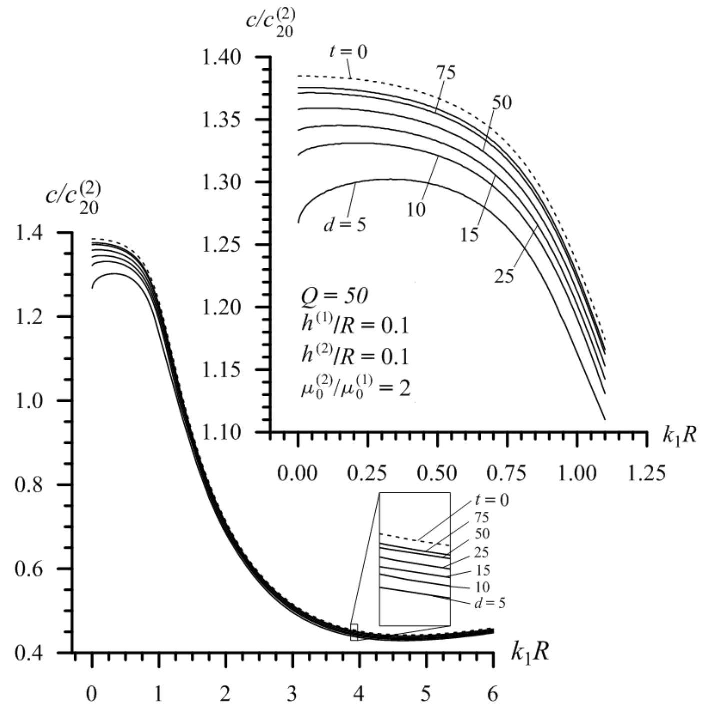
Şekil 5. 10a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



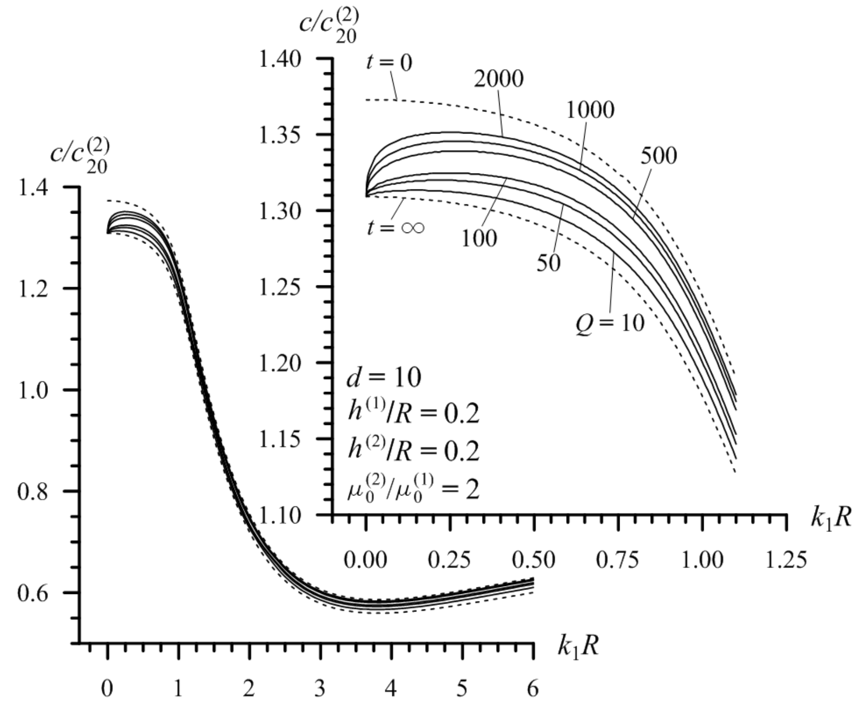
Şekil 5. 10b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



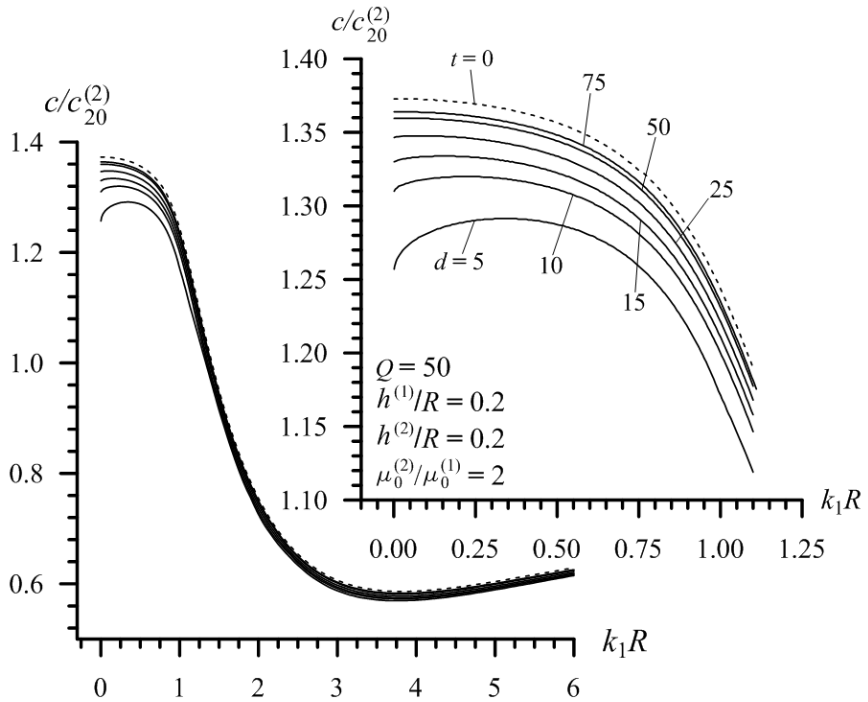
Şekil 5. 11a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



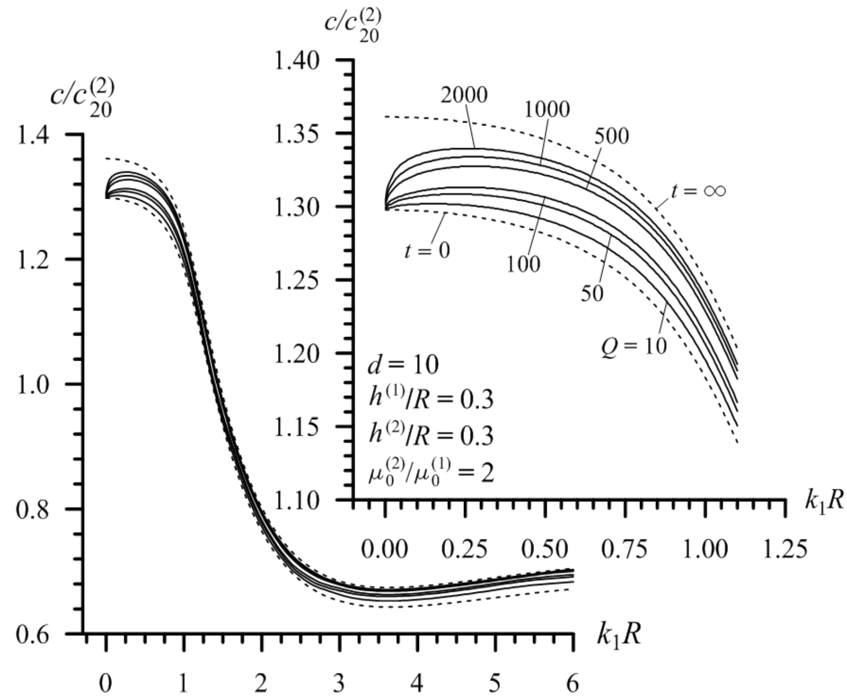
Şekil 5. 11b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



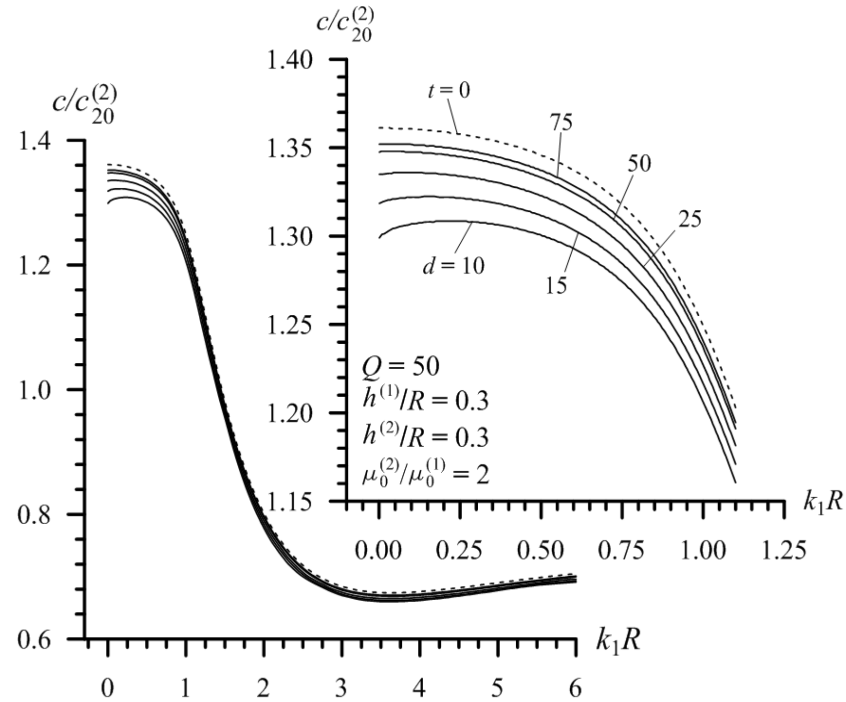
Şekil 5. 12a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}\big/R = h^{(2)}\big/R = 0.2$ ve $\mu_0^{(2)}\big/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 12b Q(=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}\big/R = h^{(2)}\big/R = 0.2$ ve $\mu_0^{(2)}\big/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



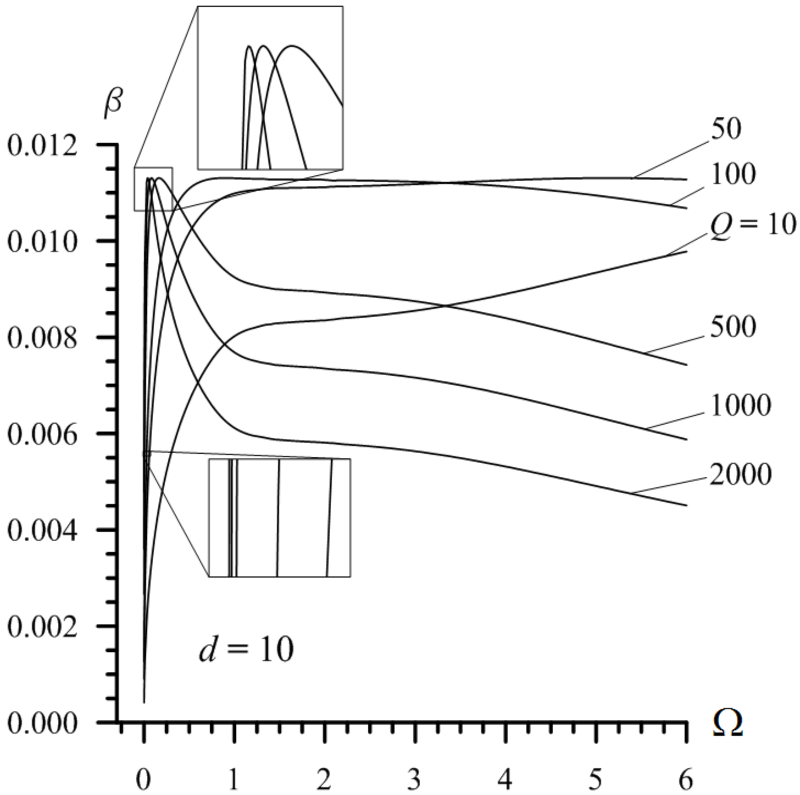
Şekil 5. 13a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



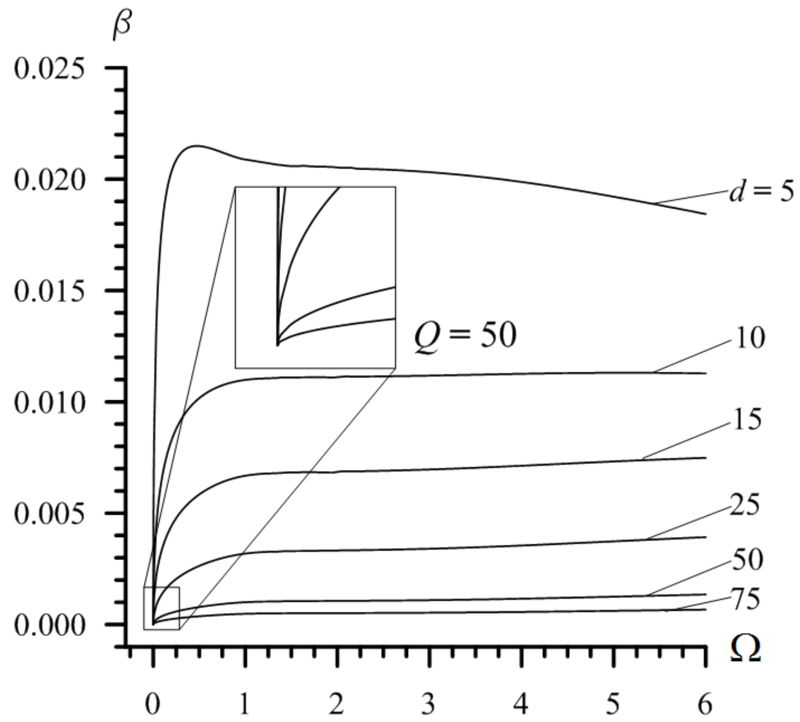
Şekil 5. 13b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Bu şekillerdeki d parametresinin değeri sabit tutularak Q parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi a harfiyle gruplanan grafiklerle temsil edilirken b harfiyle gruplanan grafiklerde ise Q parametresinin değeri sabit tutularak d parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Reolojik parametrelerinden $d\,(=10)$ parametresi sabit tutularak Q parametresinin çeşitli değerleri için ve d parametresinin çeşitli değerlerinde $Q\,(=50)$ parametresi sabit tutularak çizilmiş sönümün dispersiyon grafiği sırasıyla Şekil 5. 14a ve 5. 14b'de verilmiştir.



Şekil 5. 14a d (=10) parametresinin sabit değerinde Q parametresinin değişimi ile elde edilen sönüm dispersiyonu grafiği



Şekil 5. 14b Q (=50) parametresinin sabit değerinde d parametresinin değişimi ile elde edilen sönüm dispersiyonu grafiği

Alt bölüm 4.1'de de yapılan açıklamalara göre, d parametresinin sabit tutulduğu durumda Q parametresinin seçilen tüm değerleri için dalga yayılım hızı k_1R'nin sıfıra yaklaştığı durumlarda aynı limit değerine sahip olması gerekmektedir. Böylece yukarıdaki grafikler incelendiğinde limit değerlerinde dalga yayılım hızının reolojik parametrelerden Q'ye bağlı olmayıp, reolojik parametre d'ye bağlı olduğu anlaşılmaktadır.

Bu sonuçlar için d parametresi sabit tutularak elde edilen dispersiyon eğrileri; $t = 0$'da elastik sabitlerinin anlık değerinde ve elastik sabitlerinin $t = \infty$'daki değerlerinde elastik durum için elde edilen dispersiyon eğrileri ile sınırlandığı görülmektedir. Grafiklerde kesikli çizgilerle verilen eğriler limit durumlarını ifade etmektedir. Elastik durum için çizilen eğrilerin Akbarov ve İpek'in [35] makalesindeki ve Akbarov'un [31] monografındaki sonuçlarla örtüşmektedir.

Şekil 5. 8 – Şekil 5. 13'te verilen sonuçlarla hem dispersiyon eğrilerine reolojik parametrelerin etkisi gösterilmiş hem de bu sonuçların gerçekliği ve hesaplama algoritmasının doğru çalıştığı ispatlanmıştır. Ayrıca sonuçlar k_1R'nin yüksek değerlerinde reolojik parametrelerinin her bir değeri için elde edilen dalga yayılım hızının, elastik durum için elde edilen dalga yayılım hızına yaklaştığını göstermektedir.

Şekil 5. 8 – Şekil 5. 13'teki grafiklerde görüldüğü gibi d ve Q reolojik parametre değerlerindeki artış sonucunda dispersiyon eğrileri, $t = 0$'da elastik durum için elde edilen dispersiyon eğrilerine yaklaştığı anlaşılmaktadır.

Yukarıda analiz edilmiş sonuçlar incelendiğinde $k_1 R \le 1.5$ olduğu durumda dalga yayılım hızına viskoelastisite parametreleri d ve Q'nün etkisinin önemi görülmektedir, fakat aynı aralıkta geometrik parametreler $h^{(1)}/R \; (= h^{(2)}/R)$'nin dalga yayılım hızına etkisinin çok kayda değer olmadığı belirlenmiştir.

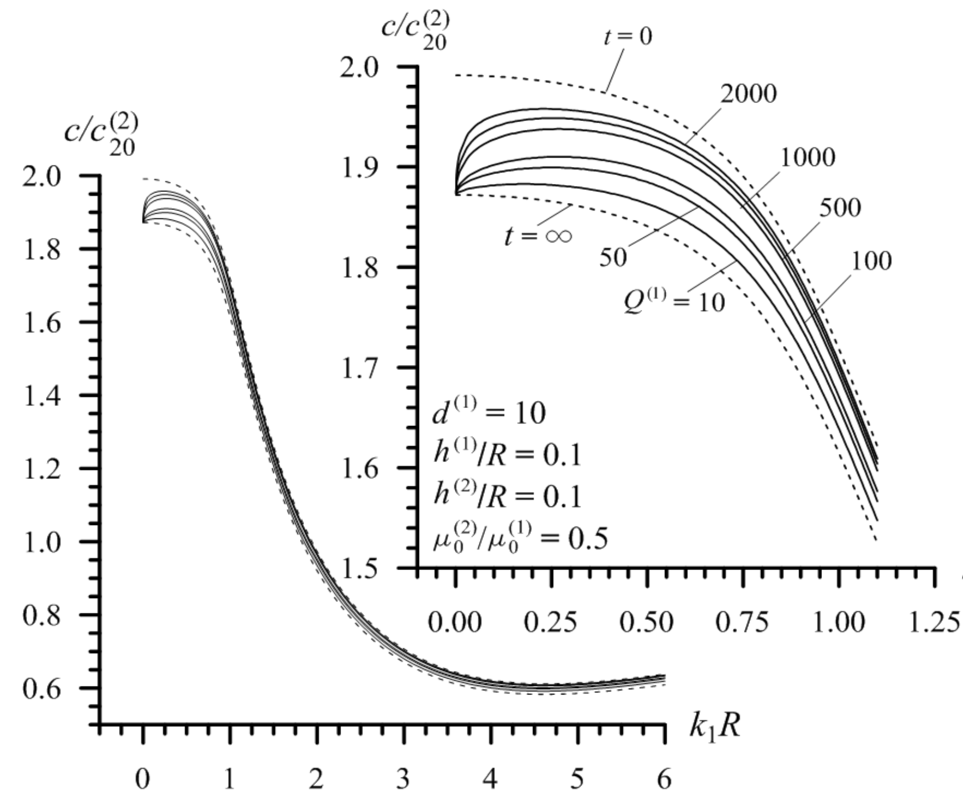
Bilinen fiziko mekanik prensiplere göre (Rabotnov [30]), viskoelastik malzemenin viskozitesinin yapının titreşimi üzerine etkisi titreşim frekansının azaltılmasıyla birlikte artar ve aynı şekilde bu etki titreşim frekansının arttırılmasıyla birlikte azalır. Böylece $k_1 R \to 0$ ($k_1 R \to \infty$) olduğu durum için dalga yayılım hızı $c = \omega/k_1 = \omega R/(k_1 R)$ limit sonsuza yaklaştığında, bu yayılım eğrilerinden dalganın frekansı ω'nın sıfıra (sonsuza) yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ele alınan durumlarda $k_1 R$'nin değerindeki azalışın (artışın) dalga frekansının değerindeki azalışa (artışa) neden olduğu görülmektedir. Ayrıca yukarıda ele alınan fiziksel prensiplere göre, reolojik parametreleri d ve Q'nün katman malzemelerinin viskozitesine ve dalga yayılım hızına etkisi $k_1 R$'nin azalmasıyla (artmasıyla) birlikte artar (azalır).

Yukarıdaki sonuçlarla birlikte $h^{(1)}/R \; (= h^{(2)}/R)$ 'nin dalga yayılım hızına etkisi ele alınan bileşik silindirde $t = \infty$'da "çubuk dalga hızı" ile belirlenen ifade (3.29) ve (3.31) kullanılarak açıklanabilir. Sonuç olarak $k_1 R \to 0$ iken dalga yayılım hızı $t = \infty$'da "çubuk dalga hızı" değerine yaklaşır ve incelenen bu durumlarda $h^{(1)}/R \; (= h^{(2)}/R)$'nin bu hız üzerinde etkisi $\eta^{(2)} = 0.5 + 0.25h^{(1)}/R$ ve $\eta^{(1)} = 0.5 - 0.25h^{(1)}/R$ parametreleri ile tahmin edilebilir. Ayrıca $k_1 R \to 0$ olduğu durumda $h^{(1)}/R \; (= h^{(2)}/R)$'nin dalga yayılım hızına etkisi düşmektedir.

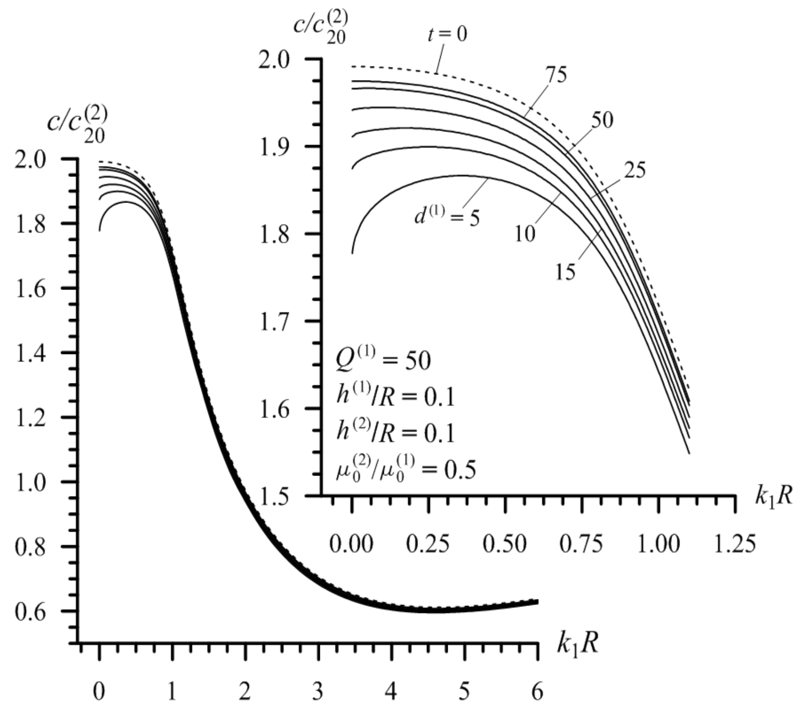
Bu alt bölümde ele aldığımız yukarıdaki sonuçlar çift katlı içi boş silindirin iç ve dış katmanlarının ikisinin de viskoelastik malzemeden yapıldığı durum (V.V) içindir.

İç silindir katman malzemesinin elastik olup dış katman malzemesinin viskoelastik olduğu durum (V.E.) için elde edilen sonuçları ele alalım. Bu durum için ifade (3.26)'da verilen sönüm katsayısı β kullanılmıştır.

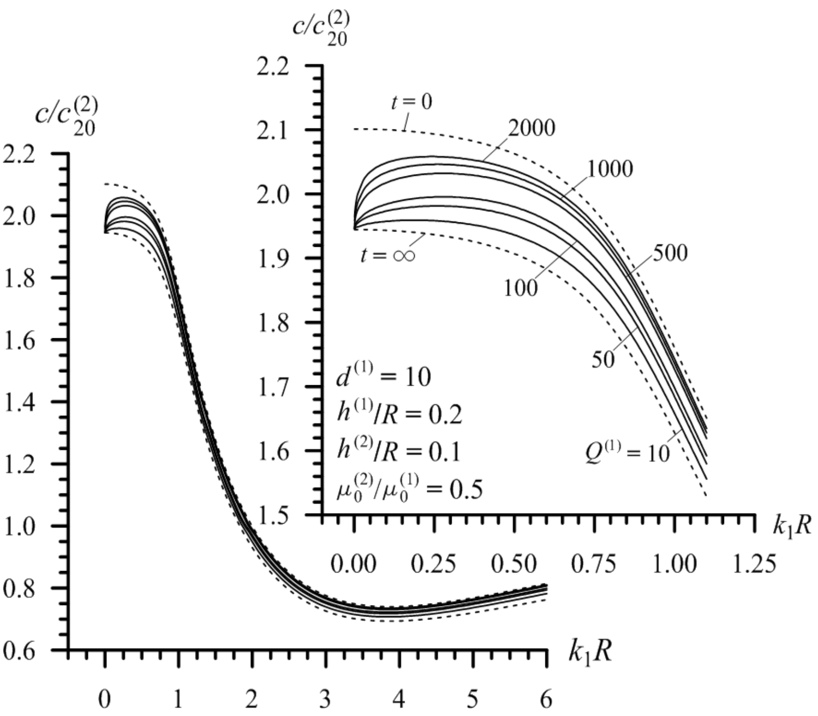
Viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik kaplamanın kalınlığını arttırmanın ele alınan sistemin dalga dispersiyonuna etkisini görebilmek için $h^{(2)}/R$ değerini 0.1'de sabitleyerek $h^{(1)}/R$ değerinde değişikliği ele alınmıştır. Şekil 5. 15, 5. 16 ve 5. 17'de verilen dispersiyon eğrileri sırasıyla $h^{(1)}/R = 0.1$, 0.2 ve 0.3 olduğu durumda $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ için elde edilmiştir.



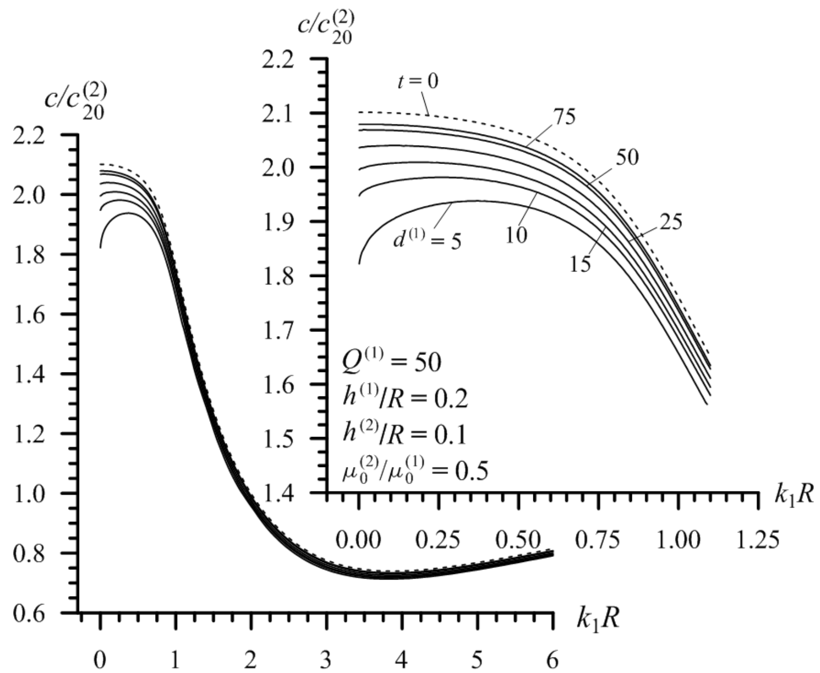
Şekil 5. 15a $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



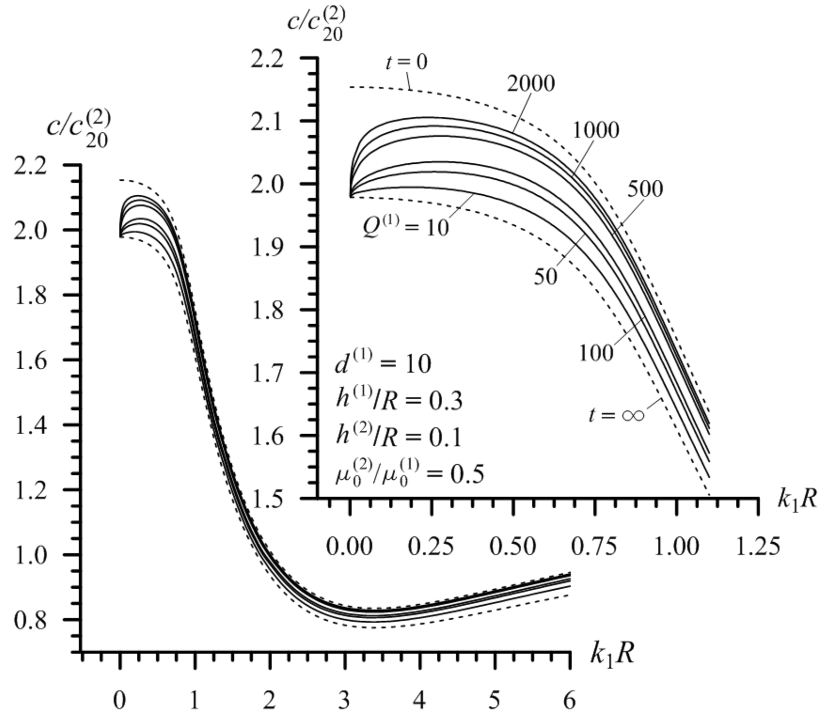
Şekil 5. 15b $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



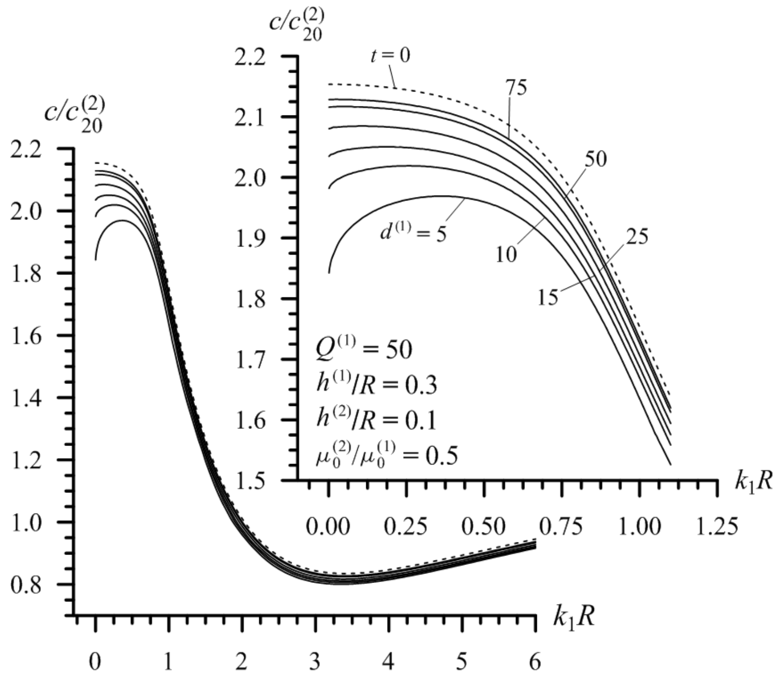
Şekil 5. 16a $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = 0.2$, $h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 16b $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R=0.2$, $h^{(2)}/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

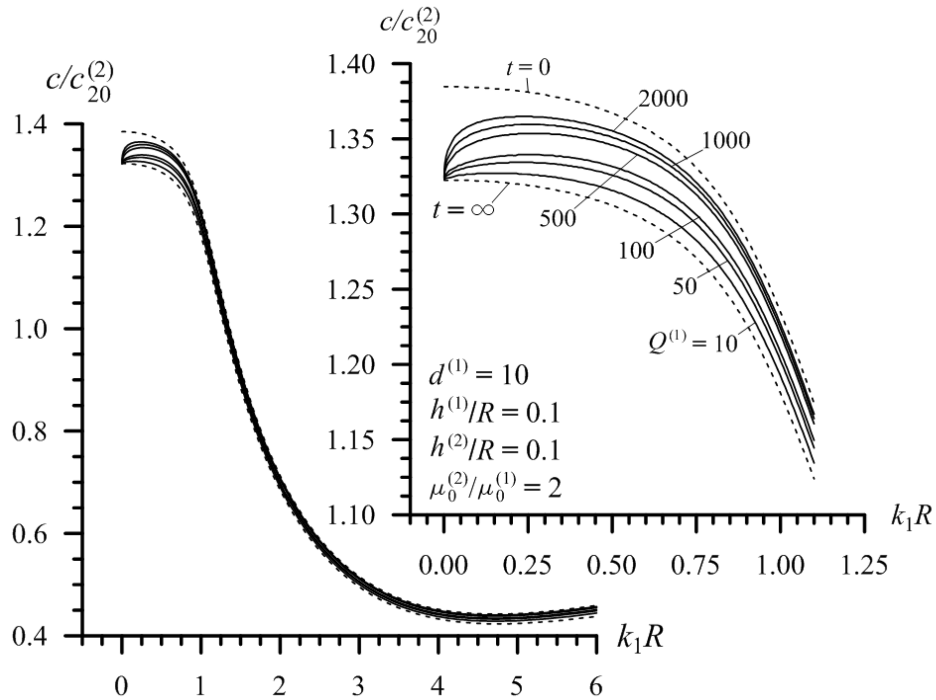


Şekil 5. 17a $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R=0.3$, $h^{(2)}/R=0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

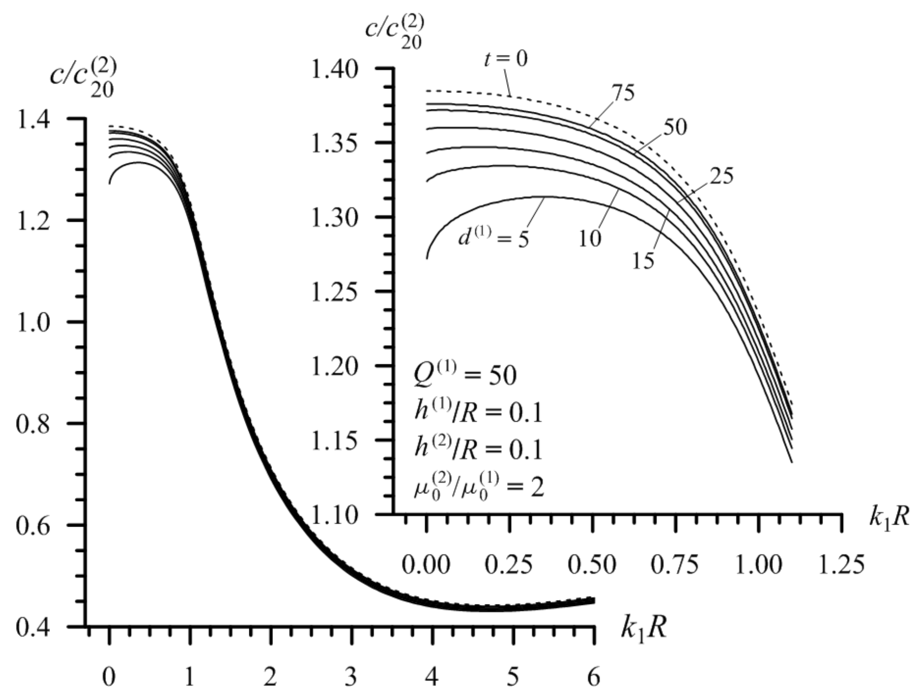


Şekil 5. 17b $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = 0.3$, $h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

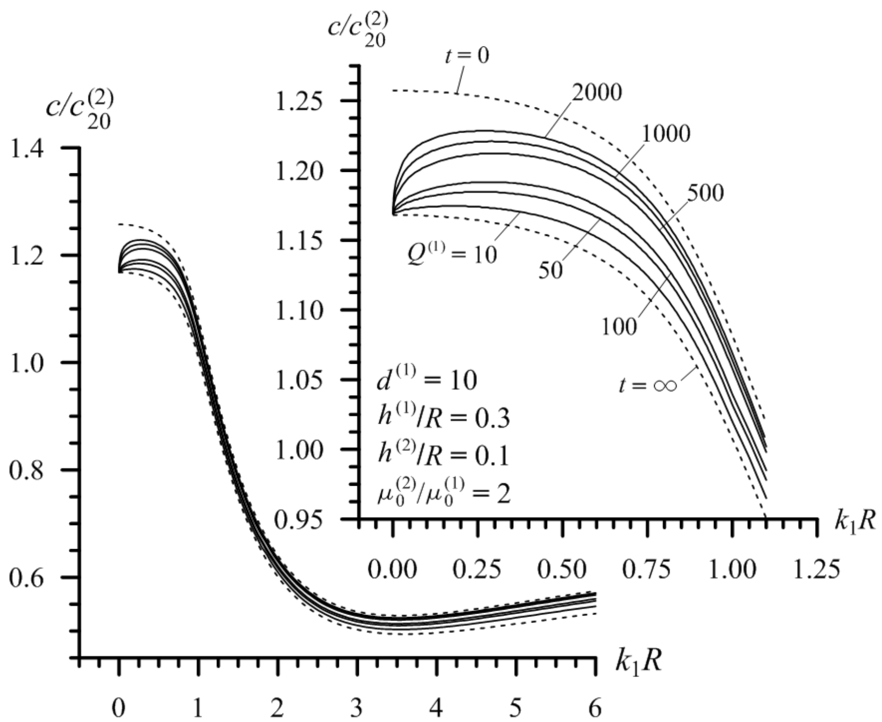
Şekil 5. 18 ve 5. 19'da verilen grafiklerde $h^{(1)}/R = 0.1$ ve 0.3 olduğu koşulda $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ için dispersiyon eğrileri elde edilmiştir. Şekil 5. 15, 5. 16, 5. 17, 5. 18 ve 5. 19'da a harfiyle gruplanan grafiklerde $d^{(1)}$ parametresini 10'da sabit tutarak $Q^{(1)}$ değerindeki değişimlerin, b harfiyle gruplanan grafiklerde $Q^{(1)}$ parametresini 50'de sabit tutarak $d^{(1)}$ değerindeki değişimlerin dalga dispersiyonuna etkisi incelenmiştir.



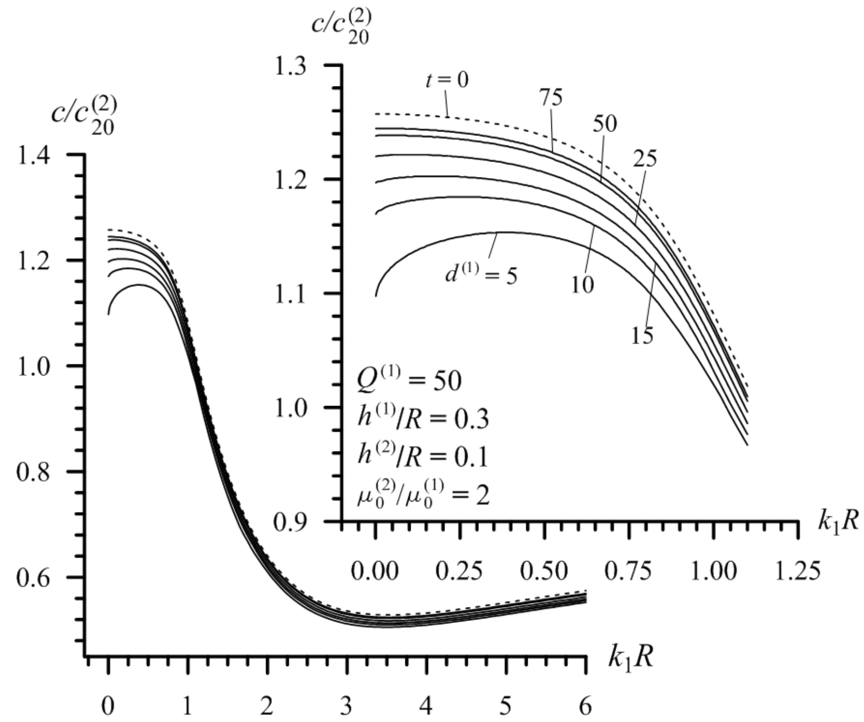
Şekil 5. 18a $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 18b $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 19a $d^{(1)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = 0.3$, $h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

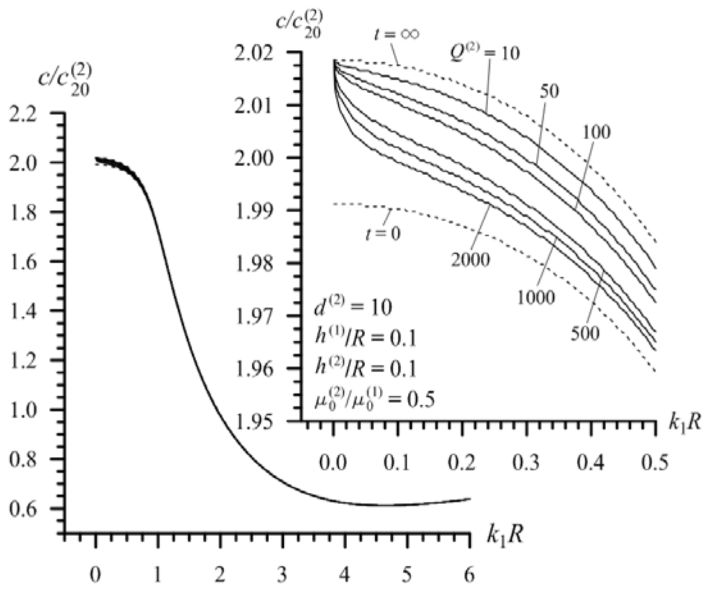


Şekil 5. 19b $Q^{(1)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = 0.3$, $h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(1)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

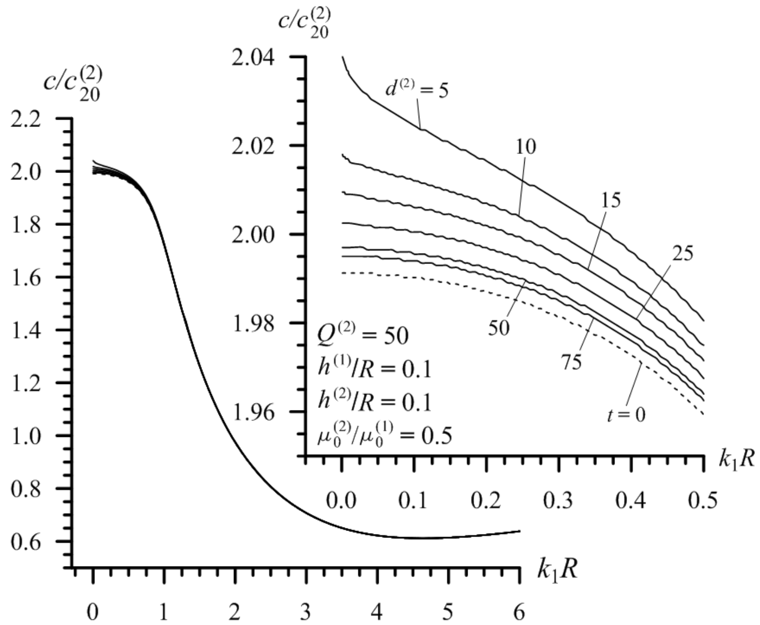
Şekil 5. 8'de verilen grafiklerle Şekil 5. 15'te verilen grafikleri karşılaştırdığımızda $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu V.E. durumunda dış katman viskoelastisitesinin dispersiyon eğrilerine V.V. durumuna göre daha büyük bir etkiye sahip olduğu görülmektedir. Ancak Şekil 5. 18'de verilen grafiklerle şekil 5. 11'de verilen grafikleri karşılaştırdığımızda $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2$ olduğu V.E. durumunda dış katman viskoelastisitesinin dispersiyon eğrilerine V.V. durumuyla benzer etki gösterdiği anlaşılmaktadır.

$h^{(1)} \Big/ R$'nin çeşitli değerleri için Şekil 5. 15 – 5. 19'da verilen sonuçları karşılaştırdığımızda viskoelastik dış katmanın kalınlığının artması, dispersiyon eğrilerinde viskoelastik etkinin artmasına neden olduğu görülmektedir.

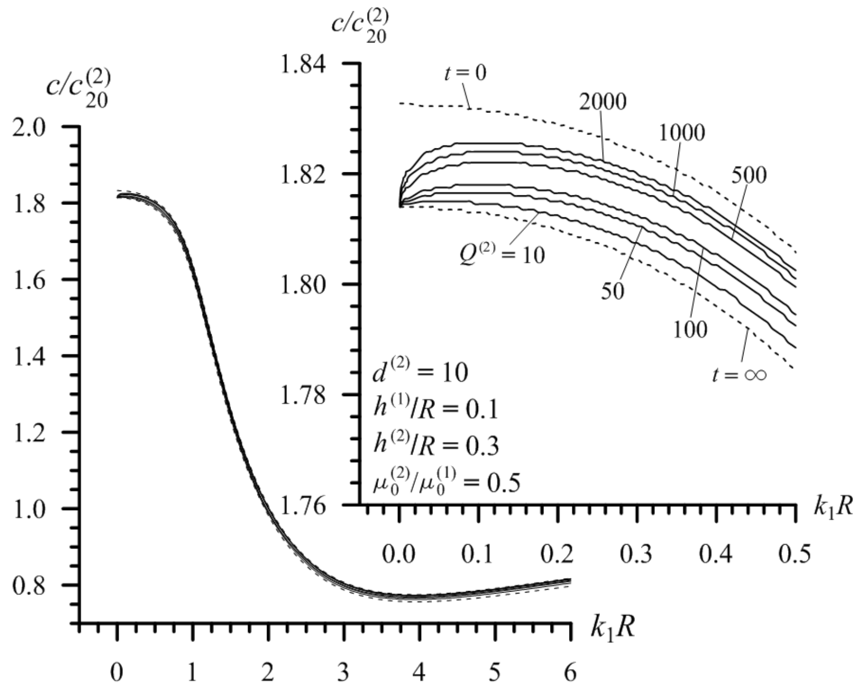
İki katlı silindirde iç katmanın viskoelastik dış katmanın elastik olduğu durumda (E.V.) dış katman kalınlığını sabit tutarak ($h^{(1)} \Big/ R = 0.1$) iç katman kalınlığının değişik varyasyonları da incelenmiştir. Bu durumda sönüm katsayısı β bağıntı (3.27) ile hesaplanmıştır. Aynı durum için $h^{(2)} \Big/ R = 0.1$ ve 0.3 koşulunda $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ olarak ele alınarak elde edilen dispersiyon eğrileri Şekil 5. 20 ve 5. 21'de elde edilmiştir.



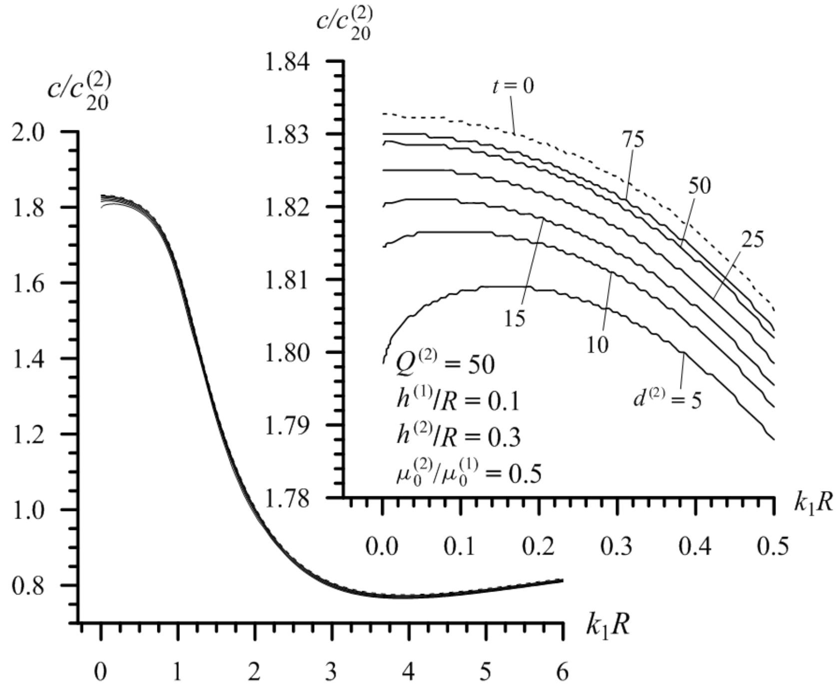
Şekil 5. 20a $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)} \Big/ R = h^{(2)} \Big/ R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 20b $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



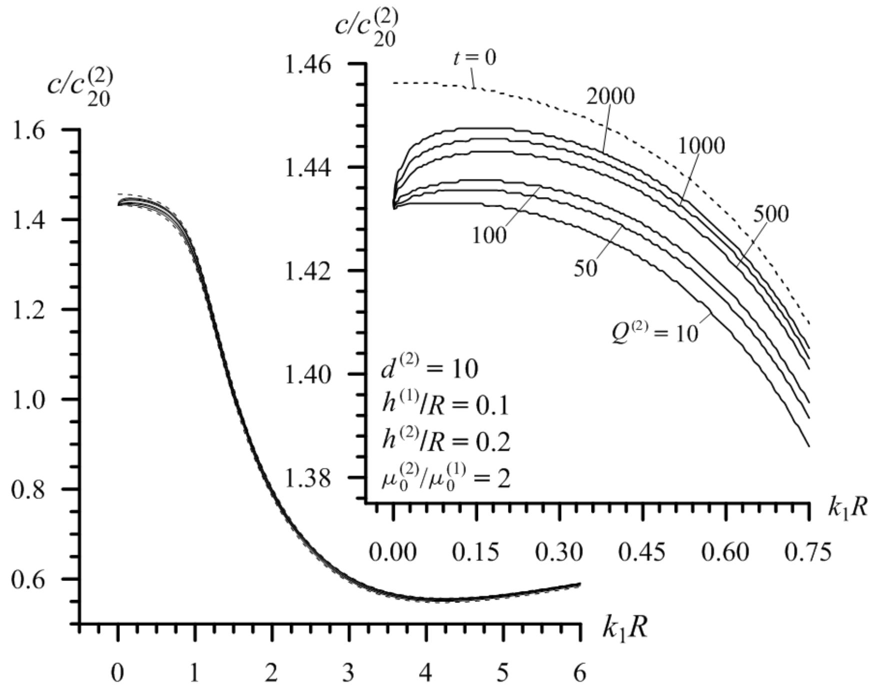
Şekil 5. 21a $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



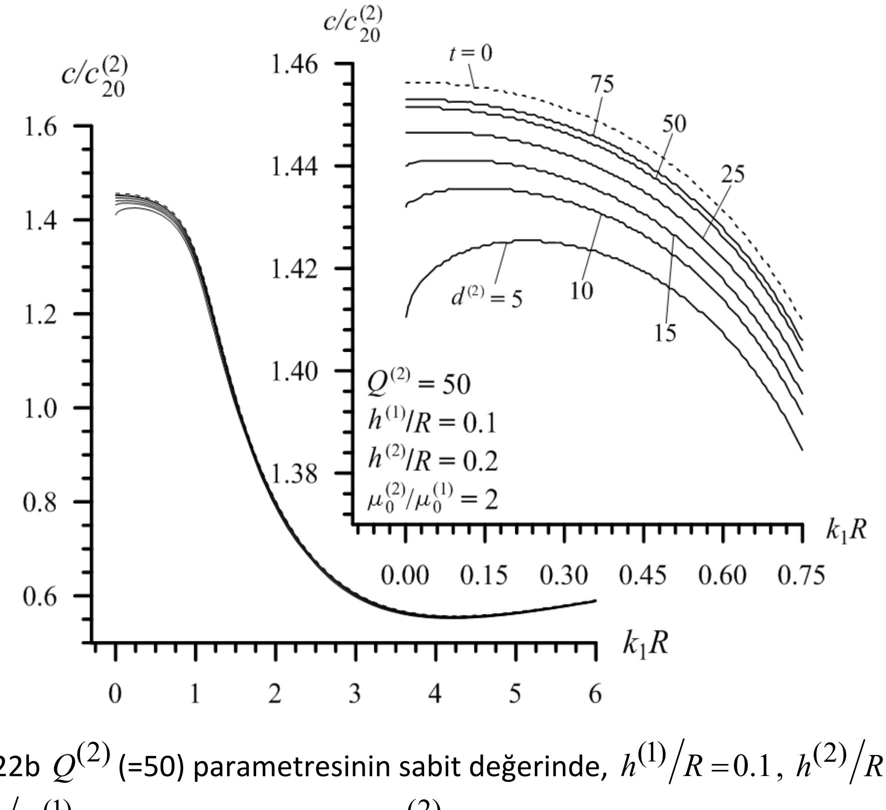
Şekil 5. 21b $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

E.V. koşulunda Şekil 5. 20'de $h^{(2)}/R=0.1$ olduğu durumda iç katman malzemesinin viskoelastisitesinin dalga yayılım hızında artışa neden olduğu görülmektedir. Sonuç olarak dispersiyon eğrilerinin üst (alt) limitlerinde iç katman malzemesinin elastik sabitlerinin $t=\infty$'daki (anlık) değerlerinde elastik durum için elde edilen dispersiyon eğrilerine benzemektedir. Bu durumun $h^{(2)}/R<0.2$ olduğu koşulda oluştuğu not edilmelidir. $h^{(2)}/R\to 0.2$ koşulunda iç katman malzemesinin viskozitesinin etkisinin hemen hemen yok olduğu fakat $h^{(2)}/R>0.2$ olduğu durumda iç katman malzemesinin viskozitesinin dalga yayılım hızını azalttığı gözlemlenmektedir. $h^{(2)}/R$ ile viskozitenin etkisi artmaktadır.

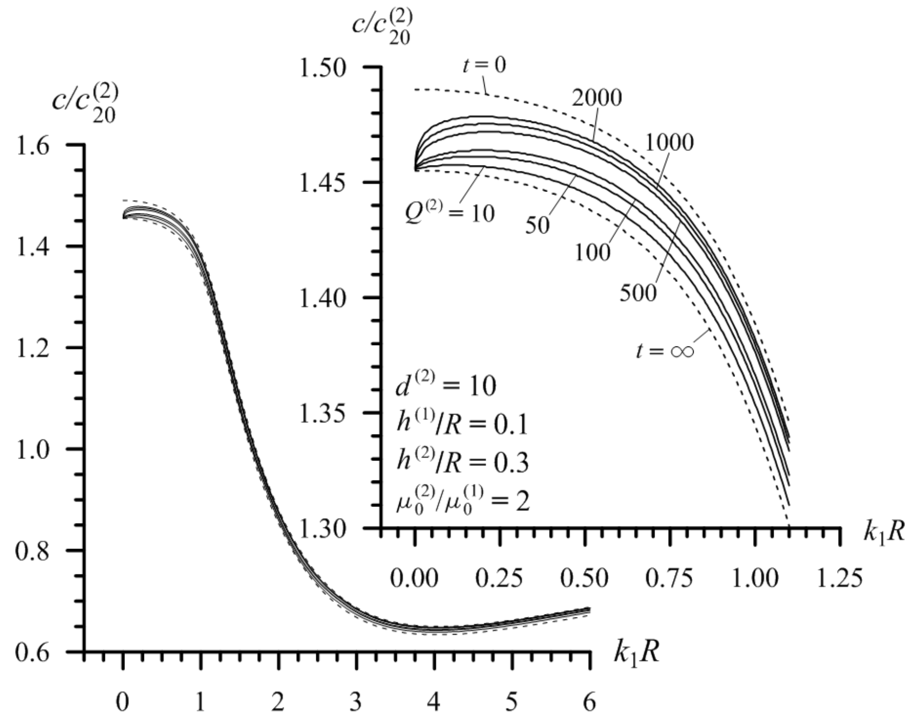
E.V. koşulunda $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2.0$ olduğu durumda $h^{(2)}/R=0.2$ ve 0.3 için elde edilen dispersiyon eğrileri sırasıyla Şekil 5. 22 ve 5. 23'te verilmiştir.



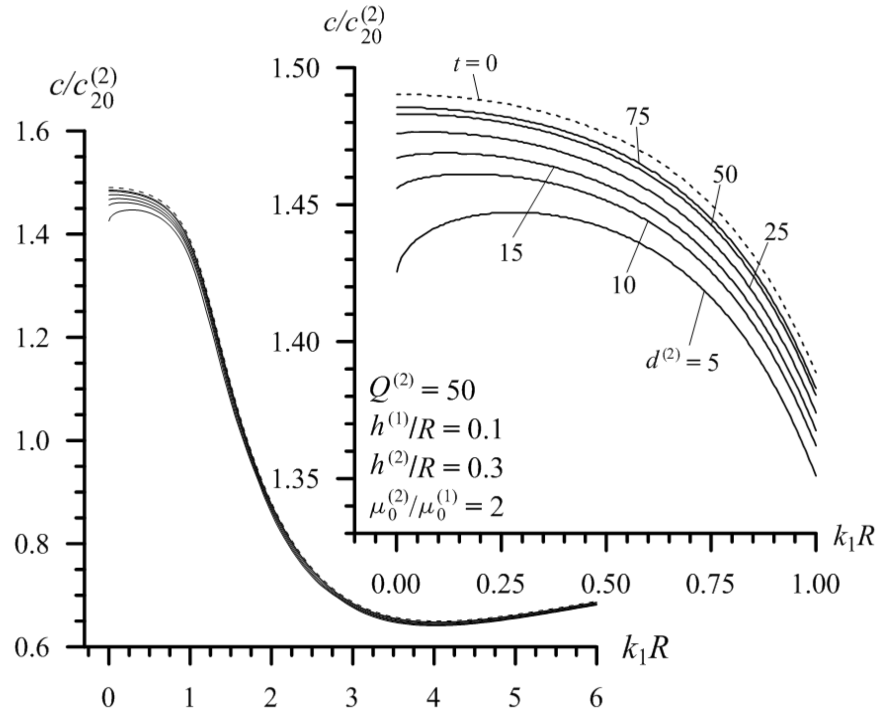
Şekil 5. 22a $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.2$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 22b $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = 0.1$, $h^{(2)}/R = 0.2$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 2$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 23a $d^{(2)}$ (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için $Q^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



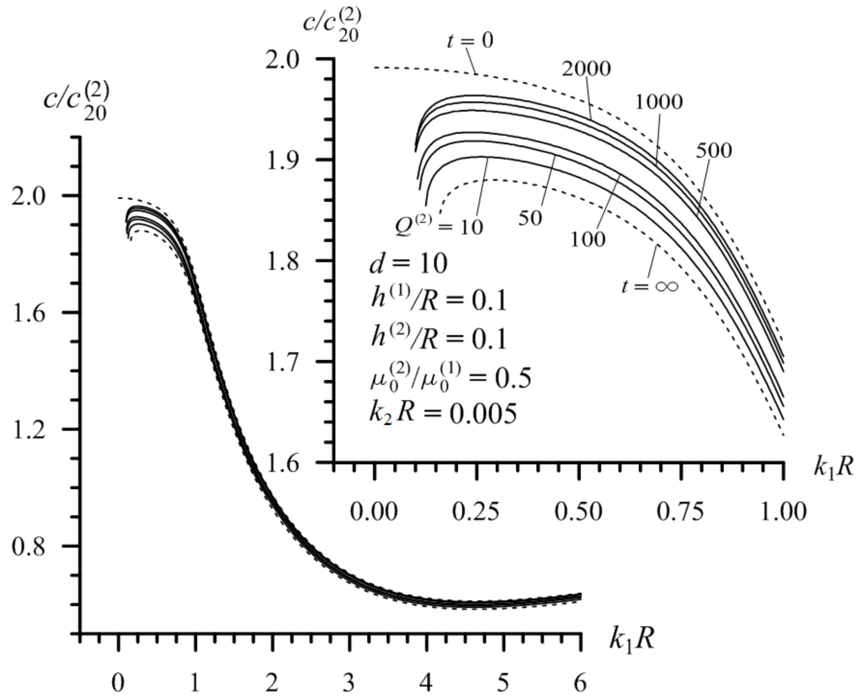
Şekil 5. 23b $Q^{(2)}$ (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R=0.1$, $h^{(2)}/R=0.3$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)}=2$ olduğu durum için $d^{(2)}$ parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Bunlar ve burda verilmeyen diğer sonuçlar $\mu_0^{(2)} \Big/ \mu_0^{(1)} = 2.0$ koşulunda iç katman malzemesinin viskozitesinin dalga yayılım hızında artışa neden olduğunu göstermektedir.

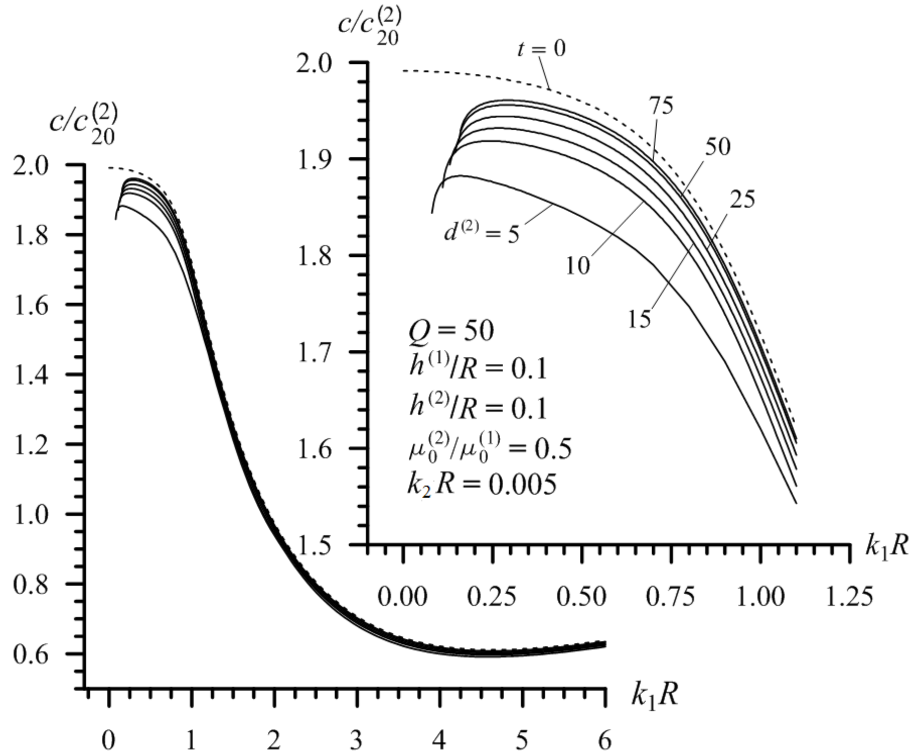
Şekil 5. 20 – 5. 23'te a (b) harfiyle gruplanan grafiklerde $d^{(1)}$ (sabit $Q^{(1)}$)parametresini sabit tutarak $Q^{(1)}$ (değişken $d^{(1)}$) değerindeki değişimlerin dalga dispersiyonuna etkisi incelendiği bilinmelidir.

V.E. ve E.V. koşullarında elde edilen ve Şekil 5. 15 – 5. 23'te verilen nümerik sonuçlar yüksek dalga sayısı limit değerlerini ifade eden bağıntı (3.33)'ün bu koşullar için meydana geldiğini göstermektedir. Ancak V.E. koşulunda (E.V. koşulunda) küçük dalga sayısı limit değerlerinin hesaplanması için elde edilen bağıntı (3.29)'daki $\lambda_\infty^{(2)}$ ve $\mu_\infty^{(2)}$ ($\lambda_\infty^{(1)}$ ve $\mu_\infty^{(1)}$)değerlerini sırasıyla $\lambda_0^{(2)}$ ve $\mu_0^{(2)}$ ($\lambda_0^{(1)}$ ve $\mu_0^{(1)}$) ile yer değiştirmek gereklidir.

Dispersif olmayan sönüm durumunu incelediğimizde $k_2 R = 0.005$ koşulu ele alınmıştır. Bununla birlikte $Q^{(1)} = Q^{(2)}$ $(= Q)$ ve $d^{(1)} = d^{(2)}$ $(= d)$ olduğu varsayılarak bu durum için d (=10) parametresinin sabitlenerek değişken değerli Q parametresi için ve Q(=50) parametresi sabitlenerek değişken değerli d parametresi için elde edilen dispersiyon eğrileri sırasıyla Şekil 5. 24a ve Şekil 5. 24b'de verilmektedir.



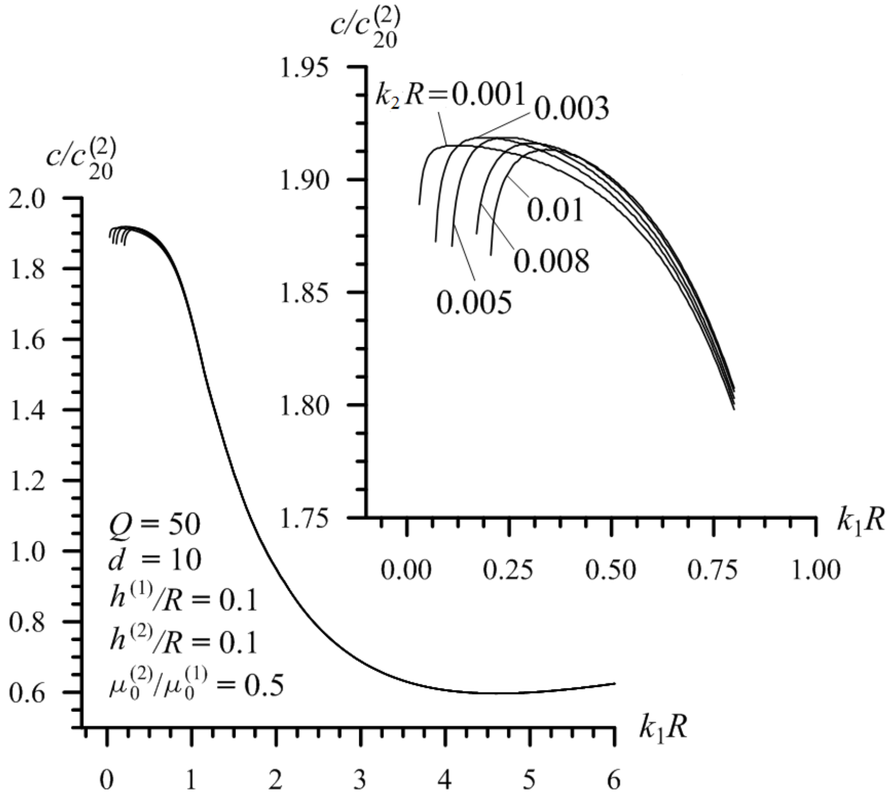
Şekil 5. 24a Dispersif olmayan sönüm durumunda $k_2 R = 0.005$ koşulunda d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 24b Dispersif olmayan sönüm durumunda $k_2 R = 0.005$ koşulunda Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Şekil 5. 25’ten dispersif olmayan sönüm durumunda k_1R’nin bazı değerlerinde cutoff olduğu görülmektedir. Bu durumda $\omega = kc$ cutoff frekans $\omega_{c.f} = c(k_1R)_{c.f.}$ şekline dönüşmektedir. Aynı zamanda Şekil 5. 24’e baktığımızda d (Q) reolojik parametresinin değerinin değişmesiyle $(k_1R)_{c.f.}$ değerinde değişikliğe neden olduğu görülmektedir.

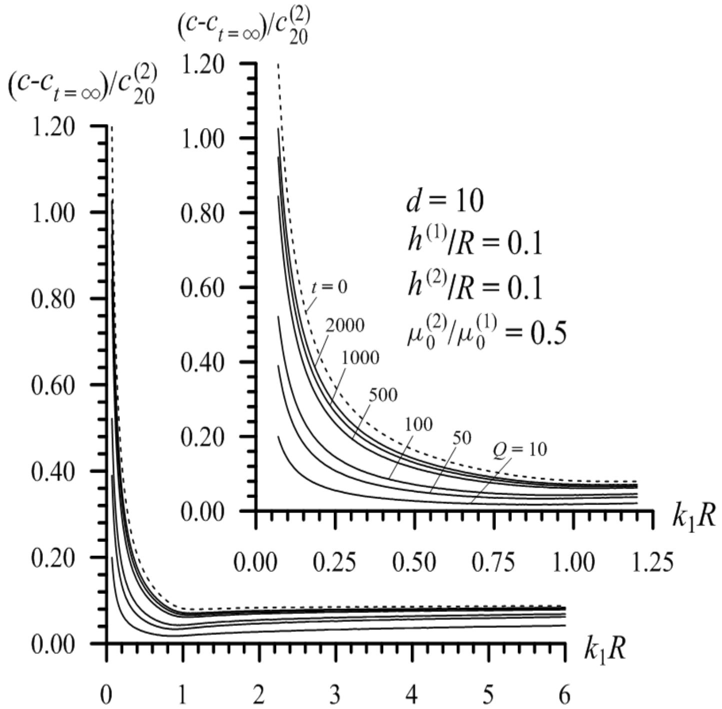
Nümerik sonuçlara baktığımızda dispersif olmayan sönüm durumu için $(k_1R)_{c.f.}$ değeri k_2R sönüm derecesine bağlıdır. Bu durum Şekil 5. 25’te verilen grafikte örneklenmektedir.



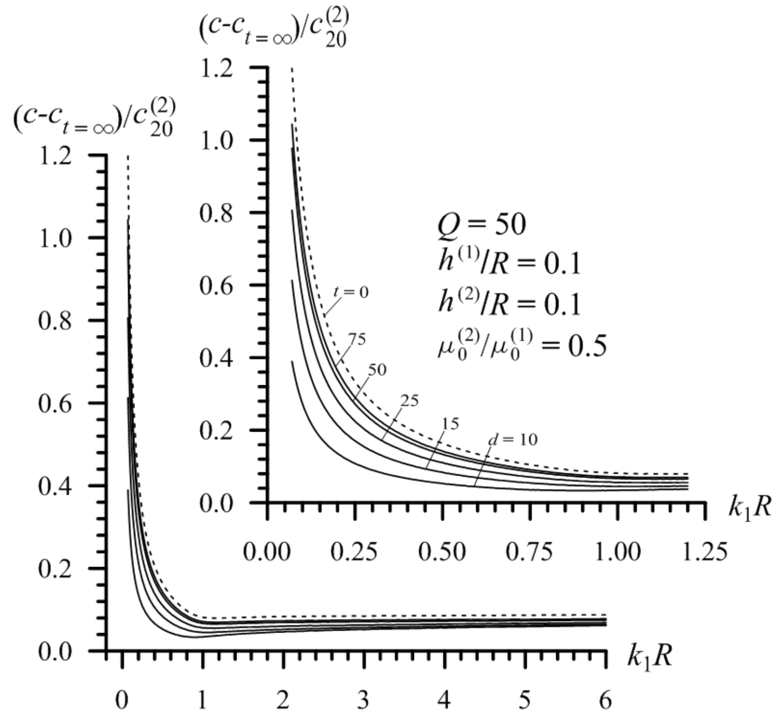
Şekil 5. 25 Dispersif olmayan sönüm koşulunda $Q(=50)$ ve d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için k_2R sönüm derecesinin değişimi ile elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

Bu grafikte $Q = 50$, $d = 10$, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durumda k_2R’nin değişik değerleri için dispersiyon eğrileri oluşturulmuştur. Bu grafik incelendiğinde k_2R ifadesinin küçültülmesiyle $(k_1R)_{c.f.}$ değerinde azalış meydana geldiği görülmektedir.

$Q^{(1)} = Q^{(2)}\ (=Q)$, $d^{(1)} = d^{(2)}\ (=d)$, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için dispersif sönüm şartlarında ikinci mod verileri incelenmiştir. Söz konusu etkinin daha belirgin anlaşılması için $(c - c|_{t=\infty})/c_{20}^{(2)}$ ve k_1R arasında Şekil 5. 26'da verilen grafikler elde edilmiştir. Silindir katman malzemelerinin viskoelastisitesi ikinci modda dalga yayılım hızında önemli bir düşüş meydana getirdiği görülmektedir.



Şekil 5. 26a d (=10) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için Q parametresinin değişimi ile 2. mod için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği



Şekil 5. 26b Q (=50) parametresinin sabit değerinde, $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.1$ ve $\mu_0^{(2)}/\mu_0^{(1)} = 0.5$ olduğu durum için d parametresinin değişimi ile 2. mod için elde edilen dispersiyon eğrileri grafiği

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında viskoelastik malzemelerden yapılmış tek katlı içi dolu, tek katlı içi boş, iki katlı içi dolu ve iki katlı içi boş dairesel silindirde eksenel simetrik boyuna dalga dispersiyonu araştırılmıştır. Tez çalışmasında yapılan bu araştırmalara göre:

- Lineer viskoelastisite teorisinin hareket denklemleri kapsamında keyfi kalıtsal tipte viskoelastik sabitler kullanılarak tek ve çift katlı dairesel silindirlerde boyuna dalgaların yayılımı problemi için matematiksel formülasyonlar yapılmış ve dispersiyon denklemleri elde edilmiştir.
- Ele alınan koşullar çerçevesinde boyuna dalga yayılım hızının limit değerleri için analitik ifadeler elde edilmiştir.
- Dispersiyon denklemlerinin sayısal analizleri için MATLAB programıyla özel algoritmalar geliştirilerek sonuçlar elde edilmiştir.
- Yazılan algoritmaların doğruluğunu test etmek amacıyla reolojik parametreleri malzeme elastikmiş gibi seçerek elde edilen eğrilerin Akbarov ve Kepceler'in elastik durum için elde etmiş oldukları sonuçlarla ve dalga yayılım hızının limit değerleri için elde edilen analitik ifadelerin sonuçlarıyla karşılaştırılması yolu ile sağlama yapılmıştır.

Yukarıda belirtilen koşullar çerçevesinde kesin nümerik araştırmalar için malzemelerin viskoelastikliği Rabotnov'un [30] fraksiyonel eksponansiyel operatörleri ile tarif edilmiştir. Karakteristik boyutsuz sürünme zamanı (Q) ve elastik sabitlerinin $t=\infty$'da olan değerleri (d) ile karakterize edilen boyutsuz reolojik parametreleri ile malzemenin viskoelastikliği belirtilmiş ve bu parametrelerin dispersiyon eğrilerine etkisi incelenmiştir.

Çoğunlukla Dispersif sönüm durumları incelenmesine rağmen dispersif olmayan sönüm durumları da ele alınmıştır. Dispersif sönüm durumunda (3.26) ya da (3.27) bağıntılarında verilen sönüm katsayısı kullanılmıştır. Dalga yayılım hızının düşük ve yüksek dalga sayısı limit değerlerinin ifadeleri türetilmiştir. Çift katmanlı silindirler için ilgili nümerik sonuçlar iç katman malzemesinin anlık kayma modülünün dış katman malzemesinin anlık kayma modülünün iki katı olduğu ve dış katman malzemesinin anlık kayma modülünün iç katman malzemesinin anlık kayma modülünün iki katı olduğu durumlar için tartışılmış ve sunulmuştur.

Ayrıca bu koşullar altında V.V. ile gösterilen katman malzemelerinin her ikisininde viskoelastik olduğu durum için, V.E. ile gösterilen dış katman malzemesinin viskoelastik fakat iç katman malzemesinin elastik olduğu durum için ve aynı zamanda E.V. ile gösterilen dış katman malzemesinin elastik fakat iç katman malzemesinin viskoelastik olduğu durum için nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Nümerik araştırmalar ağırlıklı olarak birinci (temel) düşük mod için elde edilmiş olmasına rağmen ikinci mod ile ilgili bazı dispersiyon eğrileri örnekleri de ele alınmıştır. İçi boş silindirde V.V. koşulunda, içi dolu silindirde V.V. ve V.E. koşulunda sönüm dispersiyon durumu için silindir katman malzemelerinin viskoelastisitesi, eksenel simetrik dalga yayılım hızında düşüşe neden olmuştur. Daha önce belirtilen boyutsuz reolojik parametrelerinin azaltılmasıyla birlikte bu azalışın şiddeti artmıştır.

Tüm koşullar için elde edilen disperisiyon eğrileri, elastik sabitlerinin anlık değerlerinde (alt limit) ve elastik sabitlerinin $t = \infty$'daki değerlerinde (üst limit) elastik durum için elde edilen dispersiyon eğrileri ile sınırlandığı görülmüştür.

Dalga yayılım hızında katman materyallerinin viskositesinin belirgin etkisi $k_1 R \leq 1.5$ olduğu durumda ortaya çıkmıştır.

İçi boş silindir için elde edilen sonuçlar E.V. koşulu ve V.E. koşulu için araştırılmıştır. Bunla birlikte, E.V. koşulunda $h^{(2)}/R\,(< 0.2)$ oranının küçük değerlerinde iç katman malzemesinin anlık kayma modülünün dış katman malzemesininkinden küçük olduğu durumda viskoelastikliğin etkisinin değişik karakter gösterdiği gözlemlenmiştir.

İçi dolu silindirde E.V. koşulunda h/R'nin nispeten küçük değerleri için V.V. ve E.V. koşulları için elde edilen sonuçlarla benzerlik gösterdiği görülmüştür. Ancak E.V. koşulunda h/R'nin nispeten büyük değerleri için iç silindir malzemesinin viskoelastisitesi dalga yayılım hızında bir yükselişe neden olmuştur ve iç silindir malzemesinin reolojik parametrelerinin azalmasıyla birlikte bu yükselişin büyüklüğü artmıştır.

Ele alınan tüm durumlar için dalga yayılım hızının düşük (yüksek) dalga sayısındaki limit değerleri katman malzemelerinin elastik sabitlerinin $t = \infty$'daki (anlık) değerlerine bağlıdır. Dispersif olmayan sönüm durumunda k_1R'nin sıfıra yakın değerlerinde kopma ($(k_1R)c.f.$(cutoff)) ortaya çıkmaktadır ve d reolojik parametresinin (Q parametresinin) artmasıyla beraber $(k_1R)c.f.$ değerinde artışa (azalışa) neden olduğu görülmüştür. Bununla birlikte dispersif olmayan durumda sönüm derecesi k_2R artmasıyla birlikte $(k_1R)c.f.$ değerleri de artmıştır. İçi boş silindirde V.V. koşulunda, içi dolu silindirde V.E. koşulunda dispersif sönümün seçilen değerlerinde silindir katman malzemesinin viskoelastisitesi ikinci modda dalga yayılım hızında düşüşe neden olduğu görülmüştür. Ayrıca katman malzemelerinin viskoelastisitesi ikinci modda k_1R'nin kopma (cut off) değerlerinde artış meydana getirmiştir.

Tez kapsamında ele alınan araştırma yöntemi ve bu sonuçlar su iletiminde, petrol ve gaz hatlarında, kimyasal madde üretim tesislerinde ve benzeri alanlarda kullanılan tüm viskoelastik malzemelerle kaplanmış veya viskoelastik malzemeden yapılmış boruların tahribatsız muayenelerle kontrolünde kullanılabilir.

Sonuç olarak tez kapsamında kullanılan yöntem ve elde edilen algoritmalar, viskoelastik malzemeler için elde edildiğinden, bu alanda elde edilen sonuçların uygulama alanlarını önemli bir biçimde genişletmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Love, A.E.H., (1994). Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publication, New York.

[2] Graff, K.F., (1991). Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publication, New York.

[3] Miklowitz, J., (1960). "Recent Developments in Elastic Wave Propagation", ASME Applied Mechanic Review, 13 (12):865-878.

[4] Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1975). Elastodynamics, Volume I, Finite Motions, Academic Press, New York.

[5] Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1975). Elastodynamics, Volume II, Linear Theory, Academic Press, New York.

[6] Armenakas, A.E., (1965). "Torsional Wave in Composite Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 38:439-446.

[7] Armenakas, A.E., (1967). "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Shells Part l: Theoretical Investigation", AIAA Journal, 5:740-744.

[8] Armenakas, A.E., (1970). "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 47:822-837.

[9] Armenakas, A.E., (1971). "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Shells Part ll: Numerical Investigation", AIAA Journal, 9:599-605.

[10] Armenakas, A.E. ve Keck, H.E., (1970). "Harmonic Nonaxisymmetric Waves with Short Wavelenghts Propagating in Composite Rods", The Journal of the Acoustical Society of America, 48:1160-1169.

[11] Keck, H.E. ve Armenakas, A.E., (1971). "Dispersion of Axially Symmetric Waves in Three-Layered Elastic Shells", The Journal of the Acoustical Society of America, 49:1511-1520.

[12] Akbarov, S.D., Guliev, M.S. ve Kepceler, T., (2011). "Dispersion Relations of Axisymmetric Wave Propagation in ,Initially Twisted Bi-Material Compounded Cylinders", Journal of Sound and Vibration, 330:1644-1664.

[13] Ozturk, A. ve Akbarov, S.D., (2008). “Propagation of Torsional Waves in a Pre-Stretched Compound Circular Cylinder”, Mechanics of Composite Materials, 44(1):77-86.

[14] Ozturk, A. ve Akbarov, S.D., (2009). “Torsional Wave Dispersion Relations in a Pre-Stressed Bi-Material Compounded Cylinder”, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 89 (9):754-766.

[15] Ozturk, A. ve Akbarov, S.D., (2009). “Torsional Wave Dispersion Relations in a Pre-Stressed Circular Cylinderembedded in a Pre-Stressed Elastic Medium”, Applied Mathematical Modelling, 33:3636-3649.

[16] Sotiropoulos, D.A., (1998). ”Interfacial Waves in Pre-Stressed Compressible Elastic Media”, Computational Mechanics, 21:293-299.

[17] Akbarov, S.D. ve Ozisik, M., (2003). “The Influence of the Third Order Elastic Constants on the Generalized Rayleigh Wave Dispersion in a Pre-Stressed Stratified Half-Plane”, International Journal of Engineering Science, 41 (17):2047-2061.

[18] Weiss, O., (1959). ”Uber Die Schallausbreitung in Verlusbehafteten Median Mit Komplexen Schub und Modül”, Acoustica, 9:387-399.

[19] Tamm, K. ve Weiss, O., (1961). “Wellenausbreitung in Unbergrenzten Scheiben und in Scheibensteinfrn”, Acoustica, 11: 8-17.

[20] Coquin, G.A., (1964). “Attenuation of Guided Waves in Isotropic Viscoelastic Materials”, J. Acoust. Soc. Am., 36:1074-1080.

[21] Chervinko, O.P. ve Sevchenkov, I.K., (1986). “Harmonic Viscoelastic Waves in a Layer and in an Infinite Cylinder”, Int. Appl. Mech., 22:1136–1186.

[22] Simonetti, F., (2004). “Lamb Wave Propagation in Elastic Plates Coated with Viscoelastic Materials”, J. Acoust. Soc. Am., 115:2041–2053.

[23] Rose, J.L., (2004). Ultrasonic Waves in Solid Media, Cambridge University Press.

[24] Wolosewick, R.M. ve Raynor, S., (1967). “Axisymmetric Torsional Wave Propagation in Circular Viscoelastic Rods”, J. Acoust. Soc. Am., 42:417–421.

[25] Akbarov, S.D. ve Guz, A.N., (2004). “Axisymmetric Longitudinal Wave Propagation in Pre-Stressed Compound Circular Cylinders”, International Journal of Engineering Science, 42:769-791.

[26] Akbarov, S.D., (2007). “Recent Investigations on the Dynamical Problems of the Elastic Body with Initial (Residual) Stresses (Review)”, International Applied Mechanics, 43 (12):3-27.

[27] Akbarov, S.D. ve Guliev, M.S., (2009). “Axisymmetric Longitudinal Wave Propagation in a Finite Pre-Strained Compound Circular Cylinder Made From Compressible Materials”, Computer Modeling in Engineering and Sciences, 39 (2):155-177.

[28] Barshinger, J.N. ve Rose, J.L., (2004). "Guided Wave Propagation in an Elastic Hollow Cylinder Coated with Aviscoelastic Material", IEEE Trans. Ultrason. Freq. Control, 51:1574–1556.

[29] Akbarov, S.D. ve Kepceler, T., (2015). "On the Torsional Wave Dispersion in a Hollow Sandwich Circular Cylinder Made from Viscoelastic Materials", Applied Mathematical Modelling, 39:3569–3587.

[30] Rabotnov, Yu.N., (1980). Elements of Hereditary Solid Mechanics, Mir, Moscow.

[31] Akbarov, S.D., (2015). Dynamics of Pre-Strained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach, Springer.

[32] Fung, Y.C., (1965). Introduction to Solid Mechanics, Prentice – Hall.

[33] Guz, A.N., (2004). "Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses" International Applied Mechanics, 38:23-59.

[34] Akbarov, S.D. ve Ipek, C., (2010). "The Influence of the Imperfectness of the Interface Conditions on the Dispersion of the Axisymmetric Longitudinal Waves In the Pre-Strained Compound Cylinder", CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences, 70 (2):93–121.

[35] Akbarov, S.D. ve Ipek, C., (2012). "Dispersion of Axisymmetric Longitudinal Waves in a Pre-Strained Imperfectly Bonded Bi-Layered Hollow Cylinder", CMC: Computers, Materials & Continua, 32 (2):99–144.

[36] Akbarov, S.D., (2014). "Axisymmetric Time-Harmonic Lamb's Problem for a System Comprising a Viscoelastic Layer Covering a Viscoelastic Half-Space", Mech. Time-Depend. Mater., 18:153–178.

[37] Adolfson, K., Enelund, M. ve Olsson, P., (2005). "On the Fractional Order Model of Viscoelasticity", Mech. Time-Depend. Mater., 9:15–34.

[38] Sawicki, J.T. ve Padovan, J., (1999). "Frequency Driven Phasic Shifting and Elastic-Hysteretic Partitioning Properties of Fractional Mechanical System Representation Schemes", J. Franklin Ins., 336:423–433.

[39] Ewing, W.M., Jazdetzky, W.S. ve Press, F., (1957). Elastic Waves in Layered Media, McGraw–Hill, New–York.

[40] Kolsky, H., (1963). Stress Waves in Solids. Dover, New–York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Tarık KOÇAL
Doğum Tarihi ve Yeri	: 23.11.1986 - Çayeli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: tkocal@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Mekatronik Müh.	İTÜ	2012
Lisans	Makine Müh.	YTÜ	2009
Lise	Fen Bilimleri	Fenerbahçe Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2010 - Halen	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Bildiri

1. Akbarov, S.D., Kepçeler, T. ve Koçal, T., (2014). “Tortıonal Wave Propagatıon in a Bi-Layered Hollow Cylinder Made of Viscoelastic Material”, XVIII International Conference on Mechanics of Composite Materials (MCM), 2-6 June 2014, Riga, Latvia.

2. Akbarov, S.D., Koçal, T. ve Kepçeler, T., (2015). “Viskoelastik Malzemeden Yapılmış İki Katlı İçi Boş Dairesel Silindirde Eksenel Simetrik Boyuna Dalgaların Dispersiyonu”, XIX. Ulusal Mekanik Kongresi, 24-28 Ağustos 2015, Trabzon.

3. Akbarov, S.D., Koçal, T. ve Kepçeler, T., (2016). “Dispersion of Axisymmetric Longitudinal Waves in a Solid Cylinder Made of Viscoelastic Material”, International Conference on Applied Physics and Mathematics (ICAPM), 17 February 2016, Osaka, Japan.