

768486

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

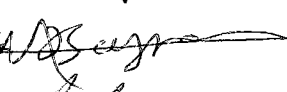
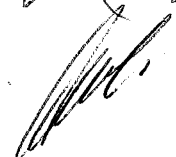
**LAPLACE, TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ VE
DİFERANSİYEL DENKLEME UYGULAMASI**

Matematikçi Yasin ÇEK

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Servet ES

Yrd Doç Dr. Servet ES 
Doç. Dr. Mustafa Bayram 
Yrd. Doç. Dr. Coşkun Güler 

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ.....	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Dönüşüm Nedir?	1
1.1.1 Örnek.....	1
1.1.2 Örnek.....	1
2. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ	2
2.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı	2
2.1.1 Tanım	2
2.1.1.1 Örnek.....	3
2.1.2 Laplace Dönüşümünün Varlığı İçin Yeter Koşul.....	3
2.1.2.1 Tanım (Parçalı Sürekli Fonksiyon)	3
2.1.2.1.1 Örnek.....	4
2.1.2.2 Tanım (Üstel Mertebeden Fonksiyon)	4
2.1.2.2.1 Örnek.....	5
2.1.2.2.2 Örnek.....	5
2.1.2.3 Teorem (Laplace Dönüşümünün Varlığı)	5
2.1.2.3.1 Örnekler.....	6
2.2 Laplace Dönüşümünün Özellikleri.....	12
2.2.1 Teorem (Doğrusallık Özelliği)	12
2.2.1.1 Örnek.....	12
2.2.2 Teorem (Türetilmiş Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri).....	13
2.2.3 Teorem	14
2.2.3.1 Örnek.....	15
2.2.4 Teorem (İntegrallerin Laplace Dönüşümleri).....	15
2.2.4.1 Örnek.....	16
2.2.5 Teorem (Birinci Kaydırma Özelliği).....	16
2.2.5.1 Örnek.....	17
2.2.6 Teorem (İkinci Kaydırma Özelliği).....	17
2.2.6.1 Örnek.....	18
2.2.7 Teorem (t^n ile Çarpma).....	19
2.2.7.1 Örnek.....	19
2.2.8 Teorem (Skala Değiştirme Özelliği)	20
2.2.8.1 Örnek.....	21
2.2.9 Teorem (t ile Bölme)	21
2.2.9.1 Örnek.....	22
2.2.10 Örnekler.....	22
2.3 Gamma Fonksiyonu	27
2.3.1 Tanım	27

2.3.1.1	Örnek.....	31
2.3.1.2	Örnek.....	33
2.3.1.3	Örnek.....	33
2.3.1.4	Örnek.....	34
2.3.1.5	Örnek.....	34
2.3.1.6	Örnek.....	35
2.4	Bessel Fonksiyonu.....	36
2.4.1	Tanım	36
2.4.2	Örnek.....	36
2.4.3	Örnek.....	37
2.5	Başlangıç ve Son Değer Teoremleri.....	38
2.5.1	Başlangıç Değer Teoremi.....	38
2.5.1.1	Teorem	38
2.5.1.2	Başlangıç Değer Teoreminin Genelleştirilmesi	39
2.5.1.3	Örnek.....	39
2.5.2	Son Değer Teoremi	40
2.5.2.1	Teorem	40
2.5.2.2	Son Değer Teoreminin Genelleştirilmesi	40
2.5.2.3	Örnek.....	41
2.6	Sinüs, Kosinüs ve Eksponansiyel İntegralleri	41
2.6.1	Sinüs İntegrali	41
2.6.1.1	Tanım	41
2.6.1.1.1	Örnek.....	42
2.6.2	Kosinüs İntegrali	43
2.6.2.1	Tanım	43
2.6.2.2	Örnek.....	44
2.6.3	Eksponansiyel İntegrali	45
2.6.3.1	Tanım	45
2.6.3.2	Örnek.....	45
2.7	Hata Fonksiyonu	46
2.7.1	Tanım	46
2.7.1.1	Örnek.....	47
2.7.1.2	Örnek.....	48
2.8	Periyodik Fonksiyon	49
2.8.1	Tanım	49
2.8.2	Teorem	49
2.8.3	Teorem	50
2.8.4	Örnek.....	51
2.9	Heaviside Birim Basamak Fonksiyonu	52
2.9.1	Tanım	52
2.9.2	Teorem	53
2.9.2.1	Örnek.....	53
2.9.3	Tanım	54
2.9.4	Tanım	55
2.9.5	Teorem	55
2.9.6	Tanım	56
2.9.6.1	Örnek.....	56
2.9.6.2	Örnek.....	57
2.9.6.3	Örnek.....	58
2.10	Dirac Delta Fonksiyonu	59
2.10.1	Tanım	59
2.10.1.1	Örnek.....	60
2.10.1.2	Örnek.....	60
2.10.1.3	Örnek.....	61

2.10.1.4	Örnek.....	61
2.11	Sıfır Fonksiyonu.....	62
2.11.1	Tanım.....	62
2.11.1.1	Örnek.....	62
2.11.1.2	Örnek.....	63
3.	TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ.....	64
3.1	Ters Laplace Dönüşümünün Tanımı.....	64
3.1.1	Tanım.....	64
3.1.1.1	Örnek.....	64
3.1.2	Ters Laplace Dönüşümünün Tekliği.....	64
3.1.2.1	Teorem (Leibniz Teoremi).....	64
3.2	Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri.....	65
3.2.1	Teorem (Doğrusallık Özelliği).....	65
3.2.1.1	Örnek.....	65
3.2.2	Teorem (Birinci Kaydırma Özelliği).....	65
3.2.2.1	Örnek.....	66
3.2.3.	Teorem (İkinci Kaydırma Özelliği).....	66
3.2.3.1	Örnek.....	67
3.2.4	Teorem (Skala Değiştirme Özelliği).....	67
3.2.4.1	Örnek.....	68
3.2.5	Teorem (Türetilmiş Fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümleri).....	68
3.2.5.1	Örnek.....	69
3.2.6	Teorem (İntegrallerin Ters Laplace Dönüşümleri).....	69
3.2.6.1	Örnek.....	70
3.2.7	Teorem (s^n ile Çarpma).....	70
3.2.7.1	Örnek.....	71
3.2.8	Teorem (s ile Bölme).....	71
3.2.8.1	Örnek.....	72
3.2.8.2	Örnek.....	72
3.2.9	Örnekler.....	73
3.3	Konvolüsyon.....	76
3.3.1	Tanım.....	76
3.3.2	Konvolüsyonun Özellikleri.....	76
3.3.2.1	Örnek.....	78
3.3.2.2	Örnek.....	78
3.3.3	Teorem.....	79
3.3.3.1	Örnek.....	81
3.3.3.2	Örnek.....	81
3.4	Basit Kesirlere Ayırma.....	82
3.4.1	Örnek.....	82
3.4.2	Örnek.....	84
3.4.3	Örnek.....	84
3.5	Duhamel Formülü ve Uygulanması.....	85
3.5.1	Duhamel Formülü.....	85
3.5.2	Örnek.....	88
3.6	Heaviside Açılım Formülü.....	89
3.6.1	Teorem.....	89
3.6.1.1	Örnek.....	90
3.6.2	Örnek.....	92
3.6.3	Örnek.....	94
3.7	Beta Fonksiyonu.....	95
3.7.1	Tanım.....	95

3.7.2	Teorem	95
3.7.2.1	Örnek.....	96
3.7.2.2	Örnek.....	97
4.	KOMPLEKS SAYILAR ve LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ	98
4.1	Örnek.....	98
4.2	Örnek.....	98
4.3	Örnek.....	98
4.4	Örnek.....	99
4.5	Kompleks Ters Dönüşüm Formülü	99
4.6	Ters Laplace Dönüşümlerinin Bulunmasında Rezidü Teoreminin Kullanılması.....	100
4.6.1	Örnek.....	101
4.6.2	Örnek.....	101
4.6.3	Örnek.....	102
4.6.4	Örnek.....	103
5.	LAPLACE ve TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİNİN DİFERANSİYEL DENKLEME UYGULANMASI	104
5.1	Sabit Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemler.....	104
5.1.1	Örnek.....	105
5.1.2	Örnek.....	106
5.1.3	Örnek.....	107
5.1.4	Örnek.....	109
5.1.5	Örnek.....	109
5.1.6	Örnek.....	110
5.2	Değişken Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemler	111
5.2.1	Örnek.....	112
5.2.2	Örnek.....	113
5.2.3	Örnek.....	114
5.3	Adi Diferansiyel Denklemler Sistemleri	115
5.3.1	Örnek.....	115
5.3.2	Örnek.....	116
5.4	Fark Denklemlerine Uygulama	117
5.4.1	Örnek.....	118
5.4.2	Örnek.....	119
5.4.3	Örnek.....	120
5.4.4	Örnek.....	121
6.	LAPLACE ve TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİNİN FİZİK, MÜHENDİSLİK ve MATEMATİK DALLARINA UYGULANMASI.....	123
6.1	Mekanîğe Uygulama	123
6.1.1	Örnek.....	124
6.1.2	Örnek.....	126
6.2	Elektrik Devrelerine Uygulama.....	128
6.2.1	Örnek.....	129
6.2.2	Örnek.....	131
6.3	Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlere Uygulama	133
6.3.1	Örnek.....	133
6.3.2	Örnek.....	134
6.3.3	Örnek.....	135
6.3.4	Örnek.....	136

6.4	İntegrallerin Hesaplanması.....	138
6.4.1	Örnek.....	138
6.4.2	Örnek.....	139
6.4.3	Örnek.....	140
6.5	İntegral Denklemlere Uygulama	141
6.5.1	İntegral Denklemler.....	141
6.5.1.1	Örnek.....	141
6.5.1.2	Örnek.....	142
6.5.2	Konvolüsyon Tipindeki İntegral Denklemler.....	143
6.5.2.1	Örnek.....	143
6.5.2.2	Örnek.....	144
6.5.3	Abel İntegral Denklemi	144
6.5.3.1	Örnek.....	144
6.5.4	İntegro-Diferansiyel Denklemler	145
6.5.4.1	Örnek.....	146
7.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	148
	KAYNAKLAR.....	149
	EKLER	150
	EK A – Özel Fonksiyonlar Tablosu	150
	EK B – Laplace Dönüşümlerinin Genel Özellikleri.....	152
	EK C – Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri Tablosu	154
	EK D – Laplace (1749 – 1827).....	167
	ÖZGEÇMİŞ.....	169

SİMGE LİSTESİ

$\forall$	Her
$\lim_{a \rightarrow \infty} b$	a sonsuza giderken b'nin limiti
$\{a_n\}$	a_n dizisi
$u_a(t)$	Basamak fonksiyonu
$J_n(t)$	Bessel fonksiyonu
$B(m,n)$	Beta fonksiyonu
q	Devredeki yük
i	Devreden geçen akım
$\delta(t)$	Dirac delta fonksiyonu
J	Dönüşümün Jakobiyeni
$Ei(t)$	Eksponansiyel integrali
E	Elektro motor kuvveti
$F'(s)$	$F(s)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$F^{(n)}(s)$	$F(s)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevi
$L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü
$L\{f(t)\}$	$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$ f(t) $	$f(t)$ fonksiyonunun mutlak değeri
$f(t) \sim g(t)$	$f(t)$ fonksiyonunun yaklaşık fonksiyonu $g(t)$
$f(t) * g(t)$	$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu
$\Gamma(n)$	Gamma fonksiyonu
$\text{erf}(t)$	Hata fonksiyonu
$\text{erfc}(t)$	Hata fonksiyonunun komplementeri
$H(t)$	Heaviside birim basamak fonksiyonu
L	İndüktansı L olan bir indüktör
$k(u,t)$	İntegral denklemin çekirdek fonksiyonu
$\Rightarrow$	ise
a	İvme
c	Kapasitesi c olan bir kondansatör
$Ci(t)$	Kosinüs integrali
F	Kuvvet
m	Kütle
$H(t-a) \cdot f(t-a)$	Pozitif t doğrultusunda $f(t)$ fonksiyonunun a birim ötelenmesi

R	Rezistansı R olan bir rezistör
$\text{Re}\{s\}$	s kompleks sayısının reel kısmı
$n(t)$	Sıfır fonksiyonu
$\text{Si}(t)$	Sinüs integrali
∞	sonsuz
Y_g	Y 'nin genel çözümü
Y_h	Y 'nin homojen çözümü
Y_o	Y 'nin özel çözümü



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Parçalı sürekli fonksiyon	4
Şekil 2.2 Laplace dönüşümü hesaplanmak istenen $f(t)$ fonksiyonu	11
Şekil 2.3 Gamma fonksiyonu	28
Şekil 2.4 Sinüs integrali	42
Şekil 2.5 Kosinüs integrali	43
Şekil 2.6 Ekspansiyel integrali	45
Şekil 2.7 Hata fonksiyonu	46
Şekil 2.8 Hata fonksiyonunun komplementeri	47
Şekil 2.9 Hata fonksiyonu ile komplementlerinin toplamı	47
Şekil 2.10 Periyodik fonksiyon	49
Şekil 2.11 $f(t)$ periyodik fonksiyonu	52
Şekil 2.12 Birim basamak fonksiyonu	53
Şekil 2.13 $f(t)$ fonksiyonunun grafiği	55
Şekil 2.14 $f(t)$ fonksiyonunun a birim ötelenmiş grafiği	55
Şekil 2.15 $f(t)$ sonsuz basamak fonksiyonu	57
Şekil 2.16 $f_c(t)$ fonksiyonu	60
Şekil 2.17 tu düzlemi	79
Şekil 2.18 uv düzlemi	80
Şekil 5.1 Diferansiyel denklemin çözümünde Laplace dönüşümü	104
Şekil 6.1 m kütleinin hareketi	123
Şekil 6.2 Hareketin grafiği (a)	125
Şekil 6.3 Hareketin grafiği (b)	126
Şekil 6.4 m_1 ve m_2 kütleinin hareketi	126
Şekil 6.5 Basit elektrik devresi	128
Şekil 6.6 Elektrik devresi (a)	129
Şekil 6.7 Elektrik devresi (b)	131

ÖNSÖZ

Başta tezimi hazırlarken bana yardımcı olan ve yönlendiren, Sayın Yrd. Doç. Dr. Servet Es'e, çalışmalarım süresince beni destekleyen aileme ve yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.



ÖZET

Diferansiyel denklem problemleri, matematik ve fizik temel bilimlerinde, ayrıca mühendislik alanında sıkça karşımıza çıkan problemlerdendir. Bu diferansiyel denklem problemlerinin çözümü için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Laplace dönüşümleri de bu çözüm yöntemlerinden biri olmakla birlikte oldukça da kullanışlıdır. Özellikle başlangıç değer problemleri bu dönüşümler uygulanarak kolaylıkla çözülebilir.

Zor çözülebilecek bir diferansiyel denklemi Laplace dönüşümü ile basit cebir problemine dönüştürebiliriz. Ardından bu basit cebir problemini çözüp, ters Laplace dönüşümü ile kolayca sonuca ulaşabiliriz.

Bu çalışmanın da ilk bölümünde, dönüşümün ne olduğu örneklerle açıklanmıştır.

İkinci bölümde, Laplace dönüşümü tanımlanmış ve temel özellikleri teorem başlıkları altında yazılıp ispatlanmıştır. Ayrıca diferansiyel denklem problemlerinin çözümünde karşımıza çıkabilecek bazı özel fonksiyonlar ele alınarak Laplace dönüşümleri hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde ters Laplace dönüşümü ve özelliklerine yer verilmiş, ters Laplace dönüşümünün hesaplanmasında kullanılan yöntemler anlatılmıştır.

Dördüncü bölüm kompleks sayılara ayrılmış, ters Laplace dönüşümünün bulunmasında rezidü teoreminin kullanılması örneklerle açıklanmıştır.

Beşinci bölümde sabit ve değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklem sistemleri ile fark denkleminin çözümüne örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde Laplace dönüşümlerinin, matematik, fizik temel bilimlerinde ve mühendislik alanında nerelerde kullanıldığına örnekler verilerek değinilmiştir.

Son bölümde ise bu çalışmanın sonucu özetlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Laplace dönüşümü, ters Laplace dönüşümü, diferansiyel denklem, başlangıç değer problemi, fark denklemi, matematik problemleri, fizik problemleri, mühendislik problemleri.

ABSTRACT

Differential equation problems are rather frequently recurring problems in mathematics, in physics main sciences and in engineering field. There are different methods for solving these differential equation problems. Laplace transformations is one of these solution procedures and also very useful. Especially beginning value problems can be solved easily by using these transformations.

A differential equation which is difficult to be solved can be converted into a basic algebra problem with the help of the Laplace transformations. After solving this basic algebra problem, we can easily arrive at a conclusion with the help of the inverse of the Laplace Transformation.

In the first section of this study “What does transformation means?” is explained with the examples.

In the second section the Laplace transformation is described and basic principles enlisted under the theorem titles are proved. Furthermore some of the functions can be up against in the process of solving differential equation problems are discussed and their Laplace transformations are calculated.

In the third section inverse of the Laplace transformations and properties are given place, the methods utilized in calculating inverse of the Laplace transformations are explained.

The fourth part is assigned to the complex numbers, in the process of finding the inverse of the Laplace transformations by using the “Residue Theorem” is explained with the examples.

In the fifth part examples are given about solving the constant and variable coefficient ordinary differential equations, ordinary differential equation systems and difference equations.

In the sixth part it is mentioned where the Laplace transformations is used in mathematics, in physics main sciences and in engineering field and the solution of the problems can be up against us with the examples.

At the last part this study’s consequences are deduced.

KEY WORDS: Laplace transformation, inverse Laplace transformation, differential equations, beginning value problems, difference equations, mathematic problems, physic problems and engineering problems.

1. GİRİŞ

Laplace* ve ters Laplace dönüşümleri matematikçilerin, fizikçilerin ve mühendislerin kolayca kullanabildiği, matematiğin vazgeçilmez bir parçasıdır. Bunun nedeni çeşitli yerlerde ortaya çıkan problemlerin çözümü için kolay ve etkili bir yöntem olmasıdır.

Bu yöntem ile özellikle sabit veya değişken katsayılı diferansiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer problemleri cebirsel denklem sistemine dönüştürülerek kolayca çözülebilir.

Bu çalışmada ele alınan konular, Laplace dönüşümünün ve ters Laplace dönüşümünün özellikleri ile adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulamaları, diferans ve integral denklemlerle ilgili problemlerdir. Ayrıca mekaniğe uygulama ve elektrik devrelerine uygulama başlıkları altında örnekler verilerek fizik ve mühendislik dallarında da Laplace ve ters Laplace dönüşümlerinin kullanıldığı vurgulanmıştır.

1.1 Dönüşüm Nedir?

Laplace dönüşümünün içine tamamen girmeden önce dönüşümün ne olduğunu görelim. Bunun için birkaç basit örnek ele alalım.

1.1.1 Örnek:

$\int \sin x \, dx = -\cos x$ ifadesini, yani verilen $\sin x$ fonksiyonunun integralini gözönüne alalım.

Burada $-\cos x$ belirli kurala göre ele alınan $\sin x$ 'in bir dönüşümüdür. Bu halde de $-\cos x$ 'in ters dönüşümünün $\sin x$ olduğu söylenebilir.

1.1.2 Örnek:

Bir başka örnek olarak da logaritma işlemini verebiliriz. Bu matematik metod, bir çok hallerde (çarpma, bölme, kök alma vb. yi ve bilhassa verilen sayı birçok ondalıklara sahipse ve büyük bir doğruluk isteniyorsa) basitleştirici rol oynamaktadır. Bu doğruluğu hemen elde etmek için logaritması hesaplanmak suretiyle verilmiş sayıyı dönüştürmüş, dönüşümünü elde etmiş oluruz. Bundan sonra logaritmalar toplanır, çarpılır vb. ve uygun antilogaritma (yani ters dönüşüm) olarak çözüm istenen şekilde bulunmuş olur. Özet olarak: Logaritmik fonksiyonlar yardımıyla, ilk önce verilen sayıların dönüşümü alınarak hesaplamalar yapılır ve netice sembolik olarak bulunur. Bu sembolik neticede ters dönüşüm işlemi uygulanarak istenen ifadeye ulaşılır.

* Laplace'nin biyografisi için sayfa 167 Ek D'ye bakınız.

2. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Verilen bir f fonksiyonundan integral yardımıyla yeni bir fonksiyon tanımlanması bir integral dönüşümüdür. Örneğin, f bir fonksiyon olmak üzere

$$F(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonu, f nin dönüşümüdür. k fonksiyonuna dönüşümün çekirdeği denir. Dönüşümden amaç, f bilinmeyen fonksiyonuna bağlı bir denklemi, daha kolay çözülebilen ve F 'ye bağlı bir probleme dönüştürmektir. Laplace dönüşümü de böyle bir integral dönüşümüdür. Şimdi Laplace dönüşümünün tanımını verelim.

2.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı

2.1.1. Tanım:

$f(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi bir s sayısı verildiğinde;

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise, $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve,

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

şeklinde gösterilir.

(2.1) integrali genelleştirilmiş bir integral olduğundan herhangi bir $f(t)$ fonksiyonu için Laplace dönüşümünün varlığı söz konusu değildir. Laplace dönüşümünün var olması için basit bir yeter koşul vermeden önce genelleştirilmiş integrallerin temel özelliklerini hatırlatmak yararlı olacaktır. Sınırsız bir aralık üzerindeki genelleştirilmiş integral, sonlu bir aralık üzerindeki integrallerin limiti olarak tanımlanır. R pozitif bir gerçel sayı olmak üzere:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt \quad (a < R)$$

dır. Sağdaki limit varsa, genelleştirilmiş integral yakınsaktır. Yakınsak olmayan bir integrale iraksaktır denir.

2.1.1.1 Örnek:

$f(t) = t^{-p}$, $t \geq 1$, p gerçel bir sabit olsun.

$$\int_1^{\infty} t^{-p} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R t^{-p} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (R^{1-p} - 1)$$

olur.

$$p > 1 \text{ ise } \lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-p} = 0$$

ve,

$$p < 1 \text{ ise } \lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-p} = \infty$$

dır. Bu nedenle $\int_1^{\infty} t^{-p} dt$ integrali, $p > 1$ için yakınsak, $p < 1$ için ise ıraksaktır. Şimdi de $p = 1$

için bakalım;

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln t = \infty$$

olduğundan, integral ıraksaktır.

2.1.2 Laplace Dönüşümünün Varlığı İçin Yeter Koşul

Yukarıda belirtildiği gibi istenilen her $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olmayabilir. Şimdi hangi koşullar altında Laplace dönüşümünün var olacağına dair bir yeter koşul vermeden önce iki tanım verelim.

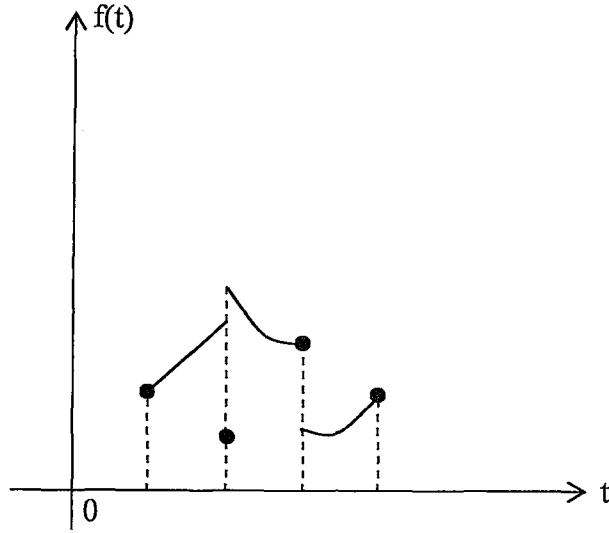
2.1.2.1 Tanım (Parçalı Sürekli Fonksiyon):

Aşağıdaki koşullara uyan $f(t)$ fonksiyonuna $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyon denir (Şekil 2.1):

- a) $f(t)$ her bir sonlu $[0, a)$ aralığında, ancak sonlu sayıda noktalarda süreksizdir;
- b) Eğer c bir süreksizlik noktası ise,

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} f(t) \text{ ve } \lim_{c \rightarrow 0^-} f(t)$$

limitleri tanımlı ve sonludur.



Şekil 2.1 Parçalı sürekli fonksiyon

2.1.2.1.1 Örnek

Şekil 2.1'deki fonksiyon bir parçalı sürekli fonksiyondur. Bunun aksine,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-1} & 0 \leq t < 1 \\ 2 & t = 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu parçalı sürekli bir fonksiyon değildir, çünkü $t = 1$ süreksizlik noktasında

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \infty$$

olmaktadır.

2.1.2.2 Tanım (Üstel Mertebeden Fonksiyon):

$f(t)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Eğer öyle bir $M > 0$ ve α sayısı bulunabiliyorsa ki, $t > t_0$ için

$$|f(t)| < M e^{\alpha t} \quad \text{veya} \quad |e^{-\alpha t} f(t)| < M \quad (2.2)$$

koşulu sağlansın, bu halde $f(t)$ fonksiyonuna üstel mertebeden bir fonksiyon adı verilir.

$\alpha < \beta$ iken

$$|e^{-\beta t} f(t)| < M \quad (t > t_0) \quad \text{olduğundan, (2.2) eşitsizliğini sağlayan } \alpha \text{ tek değildir.}$$

Tanım uyarınca her sınırlı fonksiyon üstel mertebeden bir fonksiyondur.

Gerçekten, bu halde ($\alpha = 0$, $t_0 = 0$) ve

$$|f(t)| < M = M \cdot e^{0 \cdot t}$$

olur.

2.1.2.2.1 Örnek:

$f(t) = t^n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) fonksiyonunun üstel mertebeden bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$t^n \leq n! t^n < n! \left(1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = n! e^t$$

Böylece,

$$t^n < M e^t \Rightarrow M = n!, \alpha = 1, t_0 = 0 \text{ bulunur.}$$

2.1.2.2.2 Örnek:

$f(t) = e^{t^2}$ fonksiyonu üstel mertebeden olmayan fonksiyona bir örnektir. Gerçekten,

$$|e^{-\alpha t} f(t)| = e^{-\alpha t} \cdot e^{t^2} = e^{t^2 - \alpha t}$$

fonksiyonu istenildiği kadar büyük değerler alabildiği için (2.2)'yi sağlaması söz konusu değildir.

2.1.2.3 Teorem (Laplace Dönüşümünün Varlığı):

$f(t)$ fonksiyonu her sonlu $0 \leq t \leq a$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyonsa, yani;

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}, t > t_0$$

sağlanıyorsa her bir $\text{Re}\{s\} > \alpha$ için $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü vardır.

İspat:

Laplace dönüşümü tanımına göre;

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| = \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) e^{-st} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |f(t)| e^{-st} dt = \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{t_0}^R |f(t)| e^{-st} dt \\
&\leq \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{t_0}^R M e^{\alpha t} e^{-st} dt \\
&= \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + M \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{t_0}^R e^{t(\alpha-s)} dt \\
&= \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + M \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(\alpha-s)R}}{\alpha-s} - \frac{e^{(\alpha-s)t_0}}{\alpha-s} \right) \\
&= \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + \frac{M e^{(\alpha-s)t_0}}{s-\alpha} = c, \quad \text{Re } \{s\} > \alpha
\end{aligned}$$

sağlanmaktadır, yani verilmiş genelleştirilmiş integral yakınsaktır. Başka bir ifadeyle $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü vardır.

2.1.2.3 Teorem Laplace dönüşümünün varlığı için sadece yeter koşulları vermektedir. Fakat bu koşullar hiçbir halde gerek koşul olmamaktadır. Örneğin;

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t-1)^{1/2}}, & 0 \leq t < 1 \\ t, & t \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu parçalı sürekli olmadığı halde, bu fonksiyonun Laplace dönüşümü mevcuttur.

Şimdi Laplace dönüşümünün tanımından faydalananarak bazı basit fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulalım.

2.1.2.3.1 Örnekler:

Aşağıda verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulalım.

1) $f(t) = 1$

Çözüm:

$$L\{f(t)\} = L\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^R$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-sR}}{-s} - \frac{e^0}{-s} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

olmaktadır, yani;

$$L\{1\} = F(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad (2.3)$$

şeklindedir.

2) $f(t) = t$

Çözüm:

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{t\} = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t \cdot e^{-st} dt$$

Bu integrali hesaplamak için kısmi integrasyon kullanılırsa;

$$t = u \quad e^{-st} dt = dv$$

$$dt = du \quad -\frac{1}{s} e^{-st} = v$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t \Big|_0^R - \int_0^R -\frac{1}{s} e^{-st} dt \right\}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{s} e^{-st} t \Big|_0^R - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^R \right\}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{s} e^{-sR} \cdot R + 0 - \frac{1}{s^2} e^{-sR} + \frac{1}{s^2} \right\}$$

$$= 0 + 0 - 0 + \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow F(s) = L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad (2.4)$$

3) $f(t) = e^{at}$ ($a \in \mathbb{R}$)

Çözüm:

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{(a-s)t} dt$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)t} \Big|_0^R}{a-s} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{(a-s)R}}{a-s} - \frac{e^{(a-s) \cdot 0}}{a-s} \right\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re } \{s\} > a$$

$$\Rightarrow F(s) = L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re } \{s\} > a \quad (2.5)$$

4) $f(t) = \cos at$

Çözüm:

$$L\{f(t)\} = L\{\cos at\} = \int_0^{\infty} \cos at \cdot e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos at \cdot e^{-st} dt$$

Bu integralin çözümü için kısmi integrasyon uygulayalım.

$$e^{-st} = u \quad \cos at \cdot dt = dv$$

$$-se^{-st} dt = du \quad \frac{1}{a} \sin at = v$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st} \frac{1}{a} \sin at \Big|_0^R - \int_0^R -se^{-st} \frac{1}{a} \sin at dt \right\}$$

$$\int \cos at \cdot e^{-st} dt = I \text{ dersek,}$$

$$I = \int \cos at \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{a} e^{-st} \sin at + \frac{s}{a} \int e^{-st} \cdot \sin at dt$$

Şimdi $\int e^{-st} \sin at dt$ integraline kısmi integrasyon uygulayalım.

$$e^{-st} = u \quad \sin at dt = dv$$

$$-s e^{-st} dt = du \quad -\frac{1}{a} \cos at = v$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a} e^{-st} \sin at + \frac{s}{a} \left\{ -e^{-st} \cdot \frac{1}{a} \cos at - \int -se^{-st} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \cos at dt \right\}$$

$$I = \frac{1}{a} e^{-st} \sin at + \frac{s}{a} \left\{ -\frac{1}{a} e^{-st} \cos at - \frac{s}{a} I \right\}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) I = \frac{1}{a} e^{-st} \sin at - \frac{s}{a^2} e^{-st} \cos at$$

$$I = \frac{e^{-st}}{a} \cdot \left(\sin at - \frac{s}{a} \cos at \right) \left(\frac{a}{a^2 + s^2} \right)$$

$$I = \frac{a}{a^2 + s^2} \cdot e^{-st} \left(\sin at - \frac{s}{a} \cos at \right)$$

Şimdi integrale $\lim_{R \rightarrow \infty}$ ifadesini uygulayalım.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a}{a^2 + s^2} \cdot e^{-st} \left(\sin at - \frac{s}{a} \cos at \right) \right\} \Big|_0^R$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a}{a^2 + s^2} e^{-sR} \left(\sin aR - \frac{s}{a} \cos aR \right) - \frac{a}{a^2 + s^2} \left(-\frac{s}{a} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} I = \frac{s}{a^2 + s^2} \text{ olarak bulunur ki,}$$

$$F(s) = L \{ \cos at \} = \frac{s}{a^2 + s^2}, \quad \text{Re } \{s\} > 0 \text{ dır.} \quad (2.6)$$

(2.6) ifadesini bulmak için aşağıdaki formüllerden de yararlanılabilir.

$$\int e^{bt} \sin at \, dt = \frac{e^{bt} (b \sin at - a \cos at)}{a^2 + b^2} \quad (2.7)$$

$$\int e^{bt} \cos at \, dt = \frac{e^{bt} (b \cos at + a \sin at)}{a^2 + b^2} \quad (2.8)$$

5) Şimdi (2.7) formülünü kullanarak $f(t) = \sin at$ 'yi bulalım.

Çözüm:

$$F(s) = L \{ \sin at \} = \int_0^{\infty} \sin at \cdot e^{-st} \, dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin at \, e^{-st} \, dt$$

(2.7)'ye göre,

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-st} (-s \sin at - a \cos at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{-sR} (-s \sin aR - a \cos aR)}{s^2 + a^2} + \frac{a}{s^2 + a^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(s) = L \{ \sin at \} = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad \text{Re } \{s\} > 0 \text{ dır.} \quad (2.9)$$

5) $f(t) = \cosh at$

Çözüm:

$$F(s) = L\{\cosh at\} = L\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2} L\{e^{at}\} + \frac{1}{2} L\{e^{-at}\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right\}$$

$$\Rightarrow F(s) = L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > |a| \quad (2.10)$$

6) $f(t) = \sinh at$

Çözüm:

Benzer şekilde,

$$F(s) = L\{\sinh at\} = L\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2} L\{e^{at}\} - \frac{1}{2} L\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > |a|$$

$$\Rightarrow F(s) = L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > |a| \quad (2.11)$$

$$7) f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

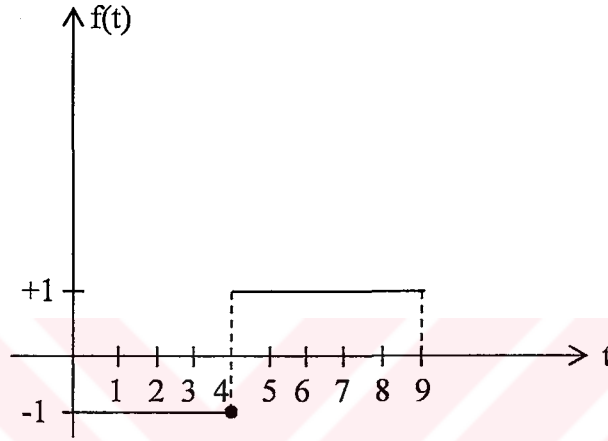
$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^1 f(t) e^{-st} dt + \int_1^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} t \cdot e^{-st} dt + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{1+\varepsilon}^R e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(-\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} \right\} + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_{1+\varepsilon}^R \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} e^{-s} \right) \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} \\
&= \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s}), \quad \text{Re } \{s\} > 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

8) Şekil 2.2’de verilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.



Şekil 2.2 Laplace dönüşümü hesaplanmak istenen $f(t)$ fonksiyonu

İlk önce Şekil 2.2’de gösterilen $f(t)$ fonksiyonunun ifadesini yazalım.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} -e^{-st} dt + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{4+\varepsilon}^R e^{-st} dt$$

$$= \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{1}{s} + \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-Rs} + \frac{1}{s} e^{-4s} \right)$$

$$\Rightarrow F(s) = L\{f(t)\} = \frac{2 \cdot e^{-4s}}{s} - \frac{1}{s}, \quad \text{Re } \{s\} > 0 \tag{2.13}$$

2.2 Laplace Dönüşümünün Özellikleri

2.2.1 Teorem (Doğrusallık Özelliği):

$f_1(t)$ ve $f_2(t)$ Laplace dönüşümü olan iki fonksiyon, c_1 ve c_2 de herhangi iki sabit sayı olmak üzere,

$$L \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L \{f_1(t)\} + c_2 L \{f_2(t)\} \quad (2.14)$$

eşitliği vardır ve buna Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliği denir.

İspat:

(2.14) eşitliğinin sol tarafını alıp uygun işlemlerle sağ tarafını elde etmeye çalışalım, buna göre:

$$L \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^{\infty} [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] e^{-st} dt$$

$$= c_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt$$

$$= c_1 L \{f_1(t)\} + c_2 L \{f_2(t)\}$$

elde edilir ki bu sonuç kolayca ikiden fazla fonksiyona genelleştirilebilir.

2.2.1.1 Örnek:

$L \{\sin^2 at\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$\sin^2 at = \frac{1 - \cos 2at}{2} \text{ olduğundan dolayı,}$$

$$L \{\sin^2 at\} = L \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\cos 2at}{2} \right\} \text{ şeklinde yazılabilir, şimdi (2.14)'ü kullanırsak,}$$

$$L \{\sin^2 at\} = \frac{1}{2} L \{1\} - \frac{1}{2} L \{\cos 2at\} \text{ olur,}$$

(2.3) ve (2.6)'yı veya Laplace tablosunu kullanırsak,

$$L \{\sin^2 at\} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2 + 4a^2)} = \frac{s^2 + 4a^2 - s^2}{2s(s^2 + 4a^2)} = \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$$

olarak bulunur.

2.2.2 Teorem (Türetilmiş Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri):

$f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyonsa ve $f'(t)$ her bir sonlu $[0, A]$ aralığında parçalı sürekliyse $\text{Re}\{s\} > \alpha$ olduğunda $f'(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü vardır ve,

$$L\{f'(t)\} = s L\{f(t)\} - f(0) \quad (2.15)$$

ile hesaplanmaktadır.

İspat:

$f'(t)$ 'nin $[0, A]$ aralığındaki süreksizlik noktaları $t_1, t_2, \dots, t_n$ olsun. Doğrudan integral alalım.

$$I = \int_0^A f'(t) e^{-st} dt = \int_0^{t_1} f'(t) e^{-st} dt + \int_{t_1}^{t_2} f'(t) e^{-st} dt + \dots + \int_{t_n}^A f'(t) e^{-st} dt$$

Şimdi integrallere kısmi integrasyon uygulayalım.

$$f'(t) dt = dv \quad e^{-st} = u$$

$$f(t) = v \quad -s e^{-st} dt = du$$

olur ki,

$$\int_0^{t_1} f'(t) e^{-st} dt = f(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} -s e^{-st} f(t) dt$$

$$= f(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{t_1} + s \int_0^{t_1} f(t) e^{-st} dt$$

olur, diğer integralleri de aynı yöntemle hesaplar ve $f(t)$ nin de sürekli olduğunu hesaba katarsak,

$$\begin{aligned} I = & f(t_1) e^{-st_1} - f(0) + s \int_0^{t_1} f(t) e^{-st} dt + f(t_2) - f(t_1) e^{-st_1} + s \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-st} dt \\ & + \dots + f(A) e^{-sA} - f(t_n) e^{-st_n} + s \int_{t_n}^A f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

olur, gerekli sadeleştirmeler de yapılırsa I integrali,

$$I = -f(0) + f(A)e^{-sA} + s \int_0^A f(t)e^{-st} dt$$

elde edilir.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \{f(A)e^{-sA}\} = 0, \quad \text{Re } \{s\} > \alpha$$

bulunur. Bu nedenle, $\text{Re } \{s\} > \alpha$ için

$$L \{f'(t)\} = s L \{f(t)\} - f(0)$$

elde edilir.

2.2.3 Teorem:

$f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında $(n-1)$ 'inci mertebeye kadar türetilabilen bir fonksiyon $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}$ fonksiyonlarının her biri üstel mertebeden ve $f^{(n)}(t)$ her biri $[0, A)$ aralığında parçalı sürekli olsun. Bu halde $f^{(n)}(t)$ 'nin $\text{Re } \{s\} > \alpha$ olduğunda Laplace dönüşümü var ve,

$$L \{f^{(n)}(t)\} = s^n L \{f(t)\} - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.16)$$

dir.

İspat:

(2.15)'e göre

$$L \{f^{(n)}(t)\} = s L \{f^{(n-1)}(t)\} - f^{(n-1)}(0)$$

$$L \{f^{(n-1)}(t)\} = s L \{f^{(n-2)}(t)\} - f^{(n-2)}(0) \quad (*)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$L \{f''(t)\} = s L \{f'(t)\} - f'(0) \quad (**)$$

$$L \{f'(t)\} = s L \{f(t)\} - f(0) \quad (***)$$

(*) ifadesini s ile ... (**) ifadesini $s^{(n-2)}$ ile ve son olarak (***) ifadesini de $s^{(n-1)}$ ile çarpıp taraf tarafa toplar, gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$$L \{f^{(n)}(t)\} = -f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \dots - s^{(n-2)} f'(0) + s^n L \{f(t)\} - s^{(n-1)} f(0)$$

elde edilir ki, düzenlersek,

$$L \{f^{(n)}(t)\} = s^n L \{f(t)\} - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

bulunur.

2.2.3.1 Örnek:

$L \{ \sin bt \}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

(2.16) da $n = 2$ alırsak,

$$L \{f''(t)\} = s^2 L \{f(t)\} - s f(0) - f'(0) \quad (*)$$

$$f(t) = \sin bt \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(t) = b \cos bt \Rightarrow f'(0) = b$$

$$f''(t) = -b^2 \sin bt$$

olarak hesaplanır (*) da yerine koyarsak,

$$L \{-b^2 \sin bt\} = s^2 L \{\sin bt\} - s \cdot 0 - b$$

$$-b^2 L \{\sin bt\} = s^2 L \{\sin bt\} - b$$

$$\Rightarrow L \{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad \text{Re } \{s\} > 0$$

olarak bulunur.

2.2.4 Teorem (İntegrallerin Laplace Dönüşümleri):

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$L \{f(t)\} = F(s)$$

olmak üzere bu fonksiyonun integralinin Laplace dönüşümü,

$$L \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (2.17)$$

şeklindedir.

İspat:

$f(t)$ fonksiyonunun integraline $g(t)$ diyelim.

$$g(t) = \int_0^t f(u) du \text{ olur ki}$$

$$\Rightarrow g'(t) = f(t)$$

$g(0) = 0$ sağlanır. (2.15)'e göre,

$$L\{g'(t)\} = s L\{g(t)\} - g(0)$$

$$L\{f(t)\} = s L\left\{\int_0^t f(u) du\right\} \text{ olur ki, düzenlenirse,}$$

$$L\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

elde edilir.

2.2.4.1 Örnek:

$$L\left\{\int_0^t e^{-3t} dt\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

(2.17)'ye göre,

$$L\left\{\int_0^t e^{-3t} dt\right\} = \frac{L\{e^{-3t}\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

$L\{e^{-3t}\}$ ifadesi (2.5)'e göre,

$$F(s) = \frac{1}{s+3} \text{ olur,}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t e^{-3t} dt\right\} = \frac{1}{s(s+3)}$$

olarak bulunur.

2.2.5 Teorem (Birinci Kaydırma Özelliği):

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

olsun. Bu taktirde, bu fonksiyonun e^{at} ile çarpımının Laplace dönüşümü

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \quad (2.18)$$

dır.

İspat:

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$$

elde edilir.

2.2.5.1 Örnek:

$L\{e^{-t}\cos 2t\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$\cos 2t = f(t)$ dersek, (2.18)'e göre

$$L\{e^{-t}\cos 2t\} = F(s+1)$$

$$f(t) = \cos 2t \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 4} \Rightarrow F(s+1) = \frac{s}{(s+1)^2 + 4}$$

$$\Rightarrow L\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

olarak bulunur.

2.2.6 Teorem (İkinci Kaydırma Özelliği):

$f(t)$ fonksiyonu Laplace dönüşümü olan ve Laplace dönüşümü de

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

olan bir fonksiyon olsun. $g(t)$ fonksiyonu ise şöyle tanımlansın:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < a \\ f(t-a) & t > a \end{cases}$$

ise,

$$L\{g(t)\} = e^{-as}F(s) \quad (2.19)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_0^a 0 \cdot e^{-st} dt + \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt = \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt$$

Şimdi $t - a = A$ dersek,

$$\int_0^{\infty} f(A) e^{-s(A+a)} dA = e^{-sa} \int_0^{\infty} f(A) e^{-sA} dA$$

$$\Rightarrow L\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$$

elde edilir.

2.2.6.1 Örnek:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

olduğuna göre $L\{g(t)\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. (2.19)'a göre,

$$L\{g(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} F(s)$$

$$F(s) = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1} \text{ olduğundan,}$$

$$L\{g(t)\} = \frac{s e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1}$$

elde edilir.

2.2.7 Teorem (t^n ile Çarpma):

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ ise,

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat:

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ olmak üzere, her iki tarafın s 'ye göre türevi alınır,

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$F'(s) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} f(t) e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow F'(s) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt$$

$$F''(s) = \int_0^{\infty} [t^2 f(t)] e^{-st} dt$$

$$F'''(s) = - \int_0^{\infty} [t^3 f(t)] e^{-st} dt$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} [t^n f(t)] e^{-st} dt \quad \text{bağıntısını düzenlersek,}$$

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bağıntısı elde edilir.

2.2.7.1 Örnek:

$L\{e^{3t} \sinh t\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

(2.20)'ye göre,

$$L\{t e^{3t} \sinh t\} = -\frac{d}{ds} L\{e^{3t} \sinh t\}$$

(2.11)'den veya Laplace tablosundan $\sinh t$ 'yi yazar ve (2.18)'i kullanırsak

$$L\{e^{3t} \sinh t\} = \frac{1}{(s-3)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow L\{t e^{3t} \sinh t\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 - 6s + 8} \right)$$

$$\Rightarrow L\{t e^{3t} \sinh t\} = \frac{2s-6}{(s^2 - 6s + 8)^2}$$

2.2.8 Teorem (Skala Değişirme Özelliği):

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

olsun. Buna göre,

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0 \quad (2.21)$$

bağıntısı vardır.

İspat:

$$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt, \quad a > 0$$

$at = u$ dönüşümü yapılırsa,

$adt = du$ olur ki,

$$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(u) e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} \frac{du}{a}$$

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u) e^{-\frac{s}{a}u} du$$

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

bulunur.

2.2.8.1 Örnek:

$L \{ \sin 4t \}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$f(t) = \sin t \Rightarrow f(at) = f(4t) = \sin 4t$, (2.21)'e göre,

$$\Rightarrow L \{ \sin 4t \} = \frac{1}{4} F\left(\frac{s}{4}\right)$$

$$F(s) = L \{ \sin t \} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow L \{ \sin 4t \} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{4}\right)^2 + 1}, \text{ düzenlersek}$$

$$\Rightarrow L \{ \sin 4t \} = \frac{4}{s^2 + 16}$$

olarak bulunur.

2.2.9 Teorem (t ile Bölme):

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L \{ f(t) \} = F(s) \text{ ve}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ mevcut ise}$$

$$L \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(u) du \quad (2.22)$$

şeklindedir.

İspat:

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \text{ olsun,}$$

$\Rightarrow f(t) = t \cdot g(t)$ olur. Her iki yanın Laplace dönüşümünü alır (2.20) yi kullanırsak,

$$L \{ f(t) \} = L \{ t g(t) \} = -\frac{d}{ds} L \{ g(t) \} \text{ olur ki,}$$

Buradan $F(s) = -\frac{dG}{ds}$ ifadesini ∞ 'dan s 'ye integre edelim.

$$G(s) - G(\infty)^* = - \int_{\infty}^s F(u) du = \int_s^{\infty} F(u) du$$

$$L \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^{\infty} F(u) du$$

elde edilir.

2.2.9.1 Örnek:

$L \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$L \{ \sin t \} = \frac{1}{s^2 + 1}$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ dir. (2.22)'ye göre,

$$\Rightarrow L \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\} = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s^{**}$$

$$\Rightarrow L \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\} = \arctan \frac{1}{s}$$

olarak bulunur.

Şimdi verilen bu teoremleri kullanarak bazı fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulalım.

2.2.10 Örnekler

Aşağıda verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulalım.

1) $f(t) = t^n$

Çözüm:

$L \{ t^n \} = L \{ t^n \cdot 1 \}$ şeklinde yazar, (2.20)'yi de kullanırsak

$$L \{ t^n \} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Burada,

* $L \{ g(t) \} = G(s)$ olmak üzere $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ dır.

** $\frac{\pi}{2} - \arctan t = \arctan \frac{1}{t}$ eşitliği vardır.

$$F(s) = F(1) = \frac{1}{s}$$

Buna göre sonuç olarak,

$$L\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) \quad (*)$$

şeklindedir. Şimdi $\frac{1}{s}$ 'nin n. mertebeden türevini alalım.

$$F(s) = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

$$F'(s) = -1.s^{-2}$$

$$F''(s) = 2.s^{-3}$$

$$\vdots$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n . n! . s^{-(n+1)}$$

olur ki, (*) eşitliğinde yerine koyarsak,

$$L\{t^n\} = (-1)^n (-1)^n n! s^{-(n+1)}$$

düzenlersek,

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (2.23)$$

elde edilir.

$$2) f(t) = t^2 e^{-3t}$$

Çözüm:

$$g(t) = e^{-3t} \text{ olsun } \Rightarrow (2.18)'e \text{ göre,}$$

$$L\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$L\{f(t)\} = L\{t^2 e^{-3t}\} , (2.20)'ye \text{ göre}$$

$$L\{f(t)\} = L\{t^2 g(t)\} = (-1)^2 G''(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s+3} \right)$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{2}{(s+3)^3}$$

olarak bulunur.

$$3) f(t) = \int_0^t u e^u du$$

Çözüm:

$g(t) = t e^t$ olarak alınır ve (2.18) kullanılırsa,

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

olur. Şimdi (2.17)'yi kullanırsak,

$$L\{f(t)\} = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s-1)^2}$$

olarak bulunur.

$$4) f(t) = \int_0^t \sinh 2u du$$

Çözüm:

$g(t) = \sinh 2u$ ise (2.11)'e göre

$$L\{g(t)\} = \frac{2}{s^2 - 4} \text{ ve (2.17)'ye göre de}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s(s^2 - 4)}$$

$$5) f(t) = \frac{\sin 3t}{t}$$

Çözüm:

$g(t) = \sin 3t$ olsun. (2.9)'a göre,

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 9} \text{ ve,}$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{t} = 3$ olarak mevcuttur, ise (2.22)'ye göre

$$\begin{aligned}
L\left\{\frac{\sin 3t}{t}\right\} &= \int_s^\infty \frac{3}{u^2+9} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_s^R \frac{3}{9\left[\left(\frac{u}{3}\right)^2+1\right]} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan \frac{u}{3} \Big|_s^R \\
L\left\{\frac{\sin 3t}{t}\right\} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\arctan \frac{R}{3} - \arctan \frac{s}{3} \right) \\
L\left\{\frac{\sin 3t}{t}\right\} &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{3} = \arctan \frac{3}{s}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

olarak bulunur.

6) $f(t) = \sin^3 2t$

Çözüm:

$$f(t) = \sin^3 2t = \sin 2t \cdot \sin^2 2t = \sin 2t \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \cdot \cos 4t = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \{ \sin(-2t) + \sin 6t \} \right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 6t$$

olduğundan, (2.9)'a göre,

$$L\{f(t)\} = L\{\sin^3 2t\} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{s^2+4} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{s^2+4} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{6}{s^2+36} \right)$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$L\{\sin^3 2t\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s^2+4)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s^2+36)} = \frac{3}{2} \frac{32}{(s^2+4)(s^2+36)} = \frac{48}{(s^2+4)(s^2+36)}$$

olarak bulunur.

7) $f(t) = e^{4t} \cdot t \int_0^t e^{-4u} \sin 3u du$

Çözüm:

İlk önce (2.24)'e göre, $L\left\{\frac{\sin 3u}{u}\right\}$ dönüşümünü yazalım,

$$L\left\{\frac{\sin 3u}{u}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{3}$$

Şimdi (2.18)'e göre $L\left\{e^{-4u} \frac{\sin 3u}{u}\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım,

$$L\left\{e^{-4u} \frac{\sin 3u}{u}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s+4}{3}$$

(2.17)'ye göre,

$$L\left\{\int_0^t e^{-4u} \frac{\sin 3u}{u} du\right\} = \frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s} \arctan \frac{s+4}{3}$$

Şimdi (2.20)'ye göre $L\left\{t \int_0^t e^{-4u} \frac{\sin 3u}{u} du\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım. Bunun için

$\frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s} \arctan \frac{s+4}{3}$ ifadesinin s'ye göre 1. türevini alıp (-1) ile çarpmalıyız.

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s} \arctan \frac{s+4}{3} \right) = -\frac{\pi}{2s^2} - \left(-\frac{1}{s^2} \arctan \frac{s+4}{3} + \frac{1}{s} \frac{\frac{1}{3}}{9 + (s+4)^2} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2s^2} + \frac{1}{s^2} \arctan \frac{s+4}{3} + \frac{3}{s(9 + (s+4)^2)}, \text{ şimdi } (-1) \text{ ile çarpalım,}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2s^2} - \frac{1}{s^2} \arctan \frac{s+4}{3} - \frac{3}{s(9 + (s+4)^2)}$$

ve son olarak (2.18) kullanırsak,

$$L\left\{e^{4t} t \int_0^t \frac{1}{u} e^{-4u} \sin 3u du\right\} \text{ dönüşümünü şöyle hesaplayabiliriz,}$$

e^{4t} çarpanı olduğu için $a = 4$ olur s yerine $s-4$ yazmalıyız.

$$\Rightarrow L\left\{e^{4t} t \int_0^t \frac{1}{u} e^{-4u} \sin 3u du\right\} = \frac{\pi}{2(s-4)^2} - \frac{1}{(s-4)^2} \arctan \frac{s}{3} + \frac{3}{(s-4)(s^2+9)}$$

olarak bulunur.

$$8) y(0)=0, y'(0)=-1, y''(0)=1$$

başlangıç değerlerini göz önünde bulundurarak,

$$y''' + 2y'' - y' + 3y = 0$$

diferansiyel denkleminde $y(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

(2.14)'e göre,

$$L\{y''' + 2y'' - y' + 3y\} = L\{y'''\} + 2L\{y''\} - L\{y'\} + 3L\{y\}$$

$$= s^3 L\{y\} - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + 2[s^2 L\{y\} - s y(0) - y'(0)] - [s L\{y\} - y(0)] + 3 L\{y\}$$

$$\Rightarrow L\{y\}(s^3 + 2s^2 - s + 3) + s + 1 = 0$$

yazılır, buradan $L\{y\}$ 'yi çekip yazarsak,

$$L\{y\} = -\frac{s+1}{s^3 + 2s^2 - s + 3}$$

elde edilir.

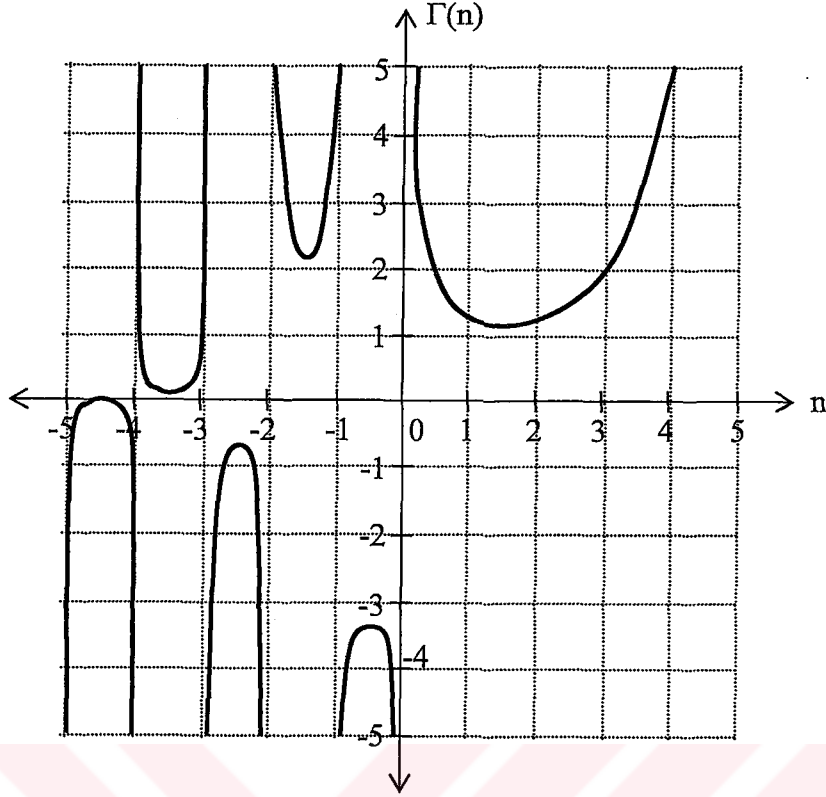
2.3 Gamma Fonksiyonu

2.3.1 Tanım:

Şekil 2.3 ile gösterilen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu adı ile de söylenebilen ve,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (2.25)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. Bu genelleştirilmiş integral $\forall n > 0$ için yakınsaktır.



Şekil 2.3 Gamma fonksiyonu*

Şimdi (2.25)'i kullanarak aşağıdaki ifadeleri ispatlayalım.

$$\text{a) } \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) \quad (2.26)$$

İspat:

$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ integraline kısmi integrasyon uygulayalım.

$$e^{-t} = u \quad t^{n-1} dt = dv$$

$$-e^{-t} dt = du \quad \frac{t^n}{n} = v$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = e^{-t} \cdot \frac{t^n}{n} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} \frac{t^n}{n} dt$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-R} R^n}{n} - \frac{e^0 \cdot 0^n}{n} \right) + \frac{1}{n} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

limit değeri $n > 0$ için sıfırdır.

* <http://www.efunda.com/math/gamma/gammaplot.cfm>

$$\Rightarrow \Gamma(n) = \frac{1}{n} \Gamma(n+1), \quad n > 0$$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n \Gamma(n), \quad n > 0$$

bağıntısı elde edilir.

$$\mathbf{b)} \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (2.27)$$

İspat:

(2.25) de $n = 1$ için,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} -e^{-R} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \Gamma(1) = 1 \quad (2.28)$$

elde edilir.

$\Gamma(2)$ ise (2.26)'ya göre,

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, (2.26)'yı kullanarak devam edersek,

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

$$\Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

elde edilir.

$$\mathbf{c)} \quad n = \frac{1}{2} \quad \text{ise} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.29)$$

İspat:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$$u^2 = t \quad \text{olsun}$$

$$\Rightarrow 2u du = dt$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

elde edilir.

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \left[2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right] \cdot \left[2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right]$$

$$= 4 \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv \quad (*)$$

iki katlı integral elde edilir ki, bunun çözümü için kutupsal koordinatlar dönüşümü yapalım.

$$u = r \cdot \cos \phi$$

$$v = r \cdot \sin \phi \text{ dersek,}$$

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ olur, ve}$$

$$du \cdot dv = r \, dr \, d\phi$$

$\Rightarrow (*)$ ifadesi şu şekli alır,

$$4 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} e^{-(r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi)} r \, dr \, d\phi$$

$$= 4 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\phi = 4 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \left(\left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \right) \Big|_{r=0}^{\infty} d\phi$$

$$= 4 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} d\phi = 4 \left(\frac{\phi}{2} \right) \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi \text{ elde edilir.}$$

$$\Rightarrow \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

elde edilmiş olunur.

$$\text{d) } L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (2.30)$$

İspat:

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt$$

$st = u$ dönüşümü yapılırsa,

$s dt = du$ olur.

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1), \quad n > -1, s > 0$$

bulunur ki;

$\Gamma(n+1) = n!$ olduğundan

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

elde edilmiş olunur.

2.3.1.1 Örnek:

n 'nin her değeri için $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ bağıntısının gerçekleştiğini kabul ederek,

a) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ c) $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ d) $\Gamma(0)$ e) $\Gamma(-1)$ f) $\Gamma(-2)$ yi bulalım.

Çözüm:

a) $n = -\frac{1}{2}$ olsun

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = -\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ olur ki, düzenlersek,}$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

elde edilir.

b) $n = -\frac{3}{2}$ olsun,

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right) = -\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} = -\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

elde edilir.

c) $n = -\frac{5}{2}$ olsun,

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right) = -\frac{5}{2}\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} = -\frac{5}{2}\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

elde edilir.

d) $n = 0$ olsun,

$$\Rightarrow \Gamma(0+1) = 0 \cdot \Gamma(0) \text{ ise (2.28)'e göre } \Gamma(1) = 1 \text{ idi.}$$

$$\Rightarrow \Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{1}{0}$$

$$\Rightarrow \Gamma(0) = \infty$$

elde edilir.

e) $n = -1$ olsun,

$$\Rightarrow \Gamma(0) = -1 \cdot \Gamma(-1)$$

$$\Rightarrow \Gamma(-1) = \infty$$

elde edilir.

f) $n = -2$ olsun,

$$\Rightarrow \Gamma(-1) = -2 \Gamma(-2)$$

$$\Rightarrow \Gamma(-2) = \infty$$

elde edilir.

Not:

Genel olarak n bir pozitif tam sayı veya sıfır ise $\Gamma(-n) = \infty$ olur.

2.3.1.2. Örnek:

$L\{t^{3/2}\}$ dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

(2.30)'a göre,

$$L\{t^{3/2}\} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)}{s^{\frac{3}{2}+1}} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow L\{t^{3/2}\} = \frac{\frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{5/2}} = \frac{\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{s^{5/2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4 \cdot s^{5/2}}$$

bulunur.

2.3.1.3 Örnek:

$L\{t^{1/2} \cdot e^{2t}\}$ dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

(2.18)'e göre $f(t) = t^{1/2}$ dir ve

$$L\{t^{1/2} e^{2t}\} = F(s-2) \text{ dir.}$$

$$f(t) = t^{1/2} \Rightarrow L\{f(t)\} = F(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot s^{3/2}}$$

$$\Rightarrow L\{t^{1/2} e^{2t}\} = F(s-2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(s-2)^{3/2}}$$

olarak bulunur.

2.3.1.4 Örnek:

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \text{ olduğunu gösterelim.}$$

Çözüm:

$$n = 1 \text{ için } \Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ gerçekleşir,}$$

$$n = k \text{ için } \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1.3.5.....(2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi} \text{ doğru olsun,}$$

$n = k + 1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2k+1}{2} + 1\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{1.3.5.....(2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi} = \frac{1.3.5.....(2k-1)(2k+1)}{2^{k+1}} \sqrt{\pi}$$

olduğu görülür ki

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

elde edilir.

2.3.1.5 Örnek:

$L\left\{(1+\sqrt{t})^4\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

$$(1+t^{1/2})^4 = 1.1^4.(t^{1/2})^0 + 4.1^3.(t^{1/2})^1 + 6.1^2.(t^{1/2})^2 + 4.1^1.(t^{1/2})^3 + 1.1^0.(t^{1/2})^4$$

$$= 1 + 4t^{1/2} + 6t + 4t^{3/2} + t^2$$

$$\Rightarrow L\{t^{1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2.s^{3/2}}, L\{t\} = \frac{1}{s^2}, L\{t^{3/2}\} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4.s^{5/2}}, L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow L\left\{(1+\sqrt{t})^4\right\} = \frac{1}{s} + 4 \frac{\sqrt{\pi}}{2.s^{3/2}} + 6 \frac{1}{s^2} + 4 \frac{3\sqrt{\pi}}{4.s^{5/2}} + \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow L\left\{(1+\sqrt{t})^4\right\} = \frac{1}{s} + \frac{2\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} + \frac{6}{s^2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{s^{5/2}} + \frac{2}{s^3}$$

olarak bulunur.

2.3.1.6 Örnek:

$f(t) = \sin \sqrt{t}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü gamma fonksiyonu ve seri açılım formülünü kullanarak bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \sin \sqrt{t} &= \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{t})^7}{7!} + \dots \\
 &= t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \dots \\
 \Rightarrow L\{\sin \sqrt{t}\} &= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3!s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5!s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7!s^{9/2}} + \dots \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{3/2}} - \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!s^{5/2}} + \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5!s^{7/2}} - \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{7!s^{9/2}} + \dots \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} - \frac{3\sqrt{\pi}}{2^2 \cdot 3!s^{5/2}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{\pi}}{2^3 \cdot 5!s^{7/2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{\pi}}{2^4 \cdot 7!s^{9/2}} + \dots \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{2 \cdot 3!s} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5!s^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3 \cdot 7!s^3} + \dots \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot s^{3/2}} \left[1 - \left(\frac{1}{2^2 s} \right) + \left(\frac{1}{2^2 s} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} - \left(\frac{1}{2^2 s} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot s^{3/2}} e^{-\frac{1}{2^2 s}} \\
 \Rightarrow L\{\sin \sqrt{t}\} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \cdot e^{-\frac{1}{4s}}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.4 Bessel Fonksiyonu

2.4.1 Tanım:

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4.(2n+2).(2n+4)} - \dots \right\} \quad (2.31)$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyona n. mertebeden Bessel fonksiyonu denir.

Bessel fonksiyonunun bazı önemli özellikleri şunlardır.

1) n pozitif tamsayı ise,

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t) \text{ dir.}$$

$$2) J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$$

$$3) \frac{d}{dt} \{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t) \text{ ve } n=0 \text{ için}$$

$$J'_0(t) = J_{-1}(t) \text{ ve 1. özelliğe göre;}$$

$$J_{-1}(t) = (-1)^1 J_1(t) = -J_1(t)$$

$$\Rightarrow J'_0(t) = -J_1(t) \quad (2.32)$$

2.4.2 Örnek:

$J_0(t)$, mertebesi sıfır olan Bessel fonksiyonu olmak üzere $L\{J_0(t)\}$ dönüşümünü ve bundan yararlanarak $L\{J_0(at)\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} J_0(t) &= 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \\ \Rightarrow L\{J_0(t)\} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{2^2} \frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2^2 4^2} \frac{4!}{s^5} - \frac{1}{2^2 4^2 6^2} \frac{6!}{s^7} + \dots \\ &= \frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} \right) + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{1}{s^4} \right) - \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{1}{s^6} \right) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Not:

$f(t) = (1 \pm t)^a$ ise, $f(t)$ 'nin Binom açılımı;

$$f(t) = (1 \pm t)^a = 1 \pm \binom{a}{1}t + \binom{a}{2}t^2 \pm \binom{a}{3}t^3 + \dots$$

şeklindedir ve,

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-n+1)}{1.2.3\dots n}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi Binom teoremini kullanarak $\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ifadesinin binom açılımını bulalım.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s^2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{1}{s^4} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{2.3}\frac{1}{s^6} + \dots \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{s^4}\right) - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{s^6} + \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

elde edilir. Buna göre (2.33) ve (2.34) ifadelerini kullanarak şöyle yazabiliriz.

$$\begin{aligned} L\{J_0(t)\} &= \frac{1}{s} \left\{ \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{s} \left(\frac{s^2}{s^2+1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow L\{J_0(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

elde edilir. Şimdi (2.21) ve (2.35)'i kullanarak $L\{J_0(at)\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

$$L\{J_0(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{(s/a)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

olarak bulunur.

2.4.3 Örnek:

$J_1(t)$ birinci mertebeden Bessel fonksiyonu olmak üzere $L\{J_1(t)\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

(2.32)'ye göre,

$J_o'(t) = -J_1(t)$ idi, her iki tarafın Laplace dönüşümünü alır ve (2.15)'i kullanırsak,

$$\Rightarrow -L\{J_o'(t)\} = L\{J_1(t)\}$$

$$\Rightarrow -L\{J_o'(t)\} = -s L\{J_o(t)\} + J_o(0)$$

$$= -s \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} + 1 = 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{\sqrt{s^2 + 1} - s}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow L\{J_1(t)\} = \frac{\sqrt{s^2 + 1} - s}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (2.36)$$

elde edilir.

2.5 Başlangıç ve Son Değer Teoremleri**2.5.1 Başlangıç Değer Teoremi:****2.5.1.1 Teorem:**

$f(t)$ Laplace dönüşümü alınabilen ve Laplace dönüşümü $F(s)$ olan bir fonksiyon olsun. Eğer limitler mevcut ise,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad (2.37)$$

dir.

İspat:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = s F(s) - f(0) \quad (2.38)$$

$f'(t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve üstel mertebeden ise,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right) f'(t) dt = 0 \quad \text{dir.}$$

Şimdi (2.38)'de $s \rightarrow \infty$ için limit alırsak,

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

elde edilmiş olunur.

2.5.1.2 Başlangıç Değer Teoreminin Genelleştirilmesi

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ ise t 'nin $t = 0$ 'a yakın değerleri için $f(t)$ 'nin $g(t)$ 'ye yaklaşık olarak eşit

olduğunu söyleyebiliriz ve $t \rightarrow 0$ için,

$f(t) \sim g(t)$ yazabiliriz.

Benzer biçimde $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{G(s)} = 1$ ise s 'nin büyük değerleri için $F(s)$ 'nin $G(s)$ 'ye yaklaşık olarak

eşit olduğunu söyleyebiliriz ve $s \rightarrow \infty$ için $F(s) \sim G(s)$ yazabiliriz.

Sonuç olarak şu şekilde yazabiliriz.

$L\{f(t)\} = F(s)$ ve $L\{g(t)\} = G(s)$ olmak üzere,

$t \rightarrow 0$ için $f(t) \sim g(t)$ ise $s \rightarrow \infty$ için $F(s) \sim G(s)$ dir.

2.5.1.3 Örnek:

a) $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + a^2)}$ ise $f(0)$ 'ı bulalım.

b) $F(s) = \frac{2s}{s^2 - 2s + 5}$ ise $f(0)$ 'ı bulalım.

Çözüm:

a) (2.37)'ye göre,

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s(s^2 + a^2)} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

b) (2.37)'ye göre,

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s}{s^2 - 2s + 5} = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

2.5.2 Son Değer Teoremi

2.5.2.1 Teorem:

$f(t)$ Laplace dönüşümü alınabilen ve Laplace dönüşümü $F(s)$ olan bir fonksiyon olsun. Eğer limitler mevcut ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \quad (2.39)$$

dir.

İspat:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = s F(s) - f(0)$$

$s \rightarrow 0$ için sol tarafın limiti,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f'(t) dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \{f(R) - f(0)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) \end{aligned}$$

Şimdi $s \rightarrow 0$ için sağ tarafın limitini alalım.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0) \text{ ve,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \text{ olarak bulunur.}$$

2.5.2.2 Son Değer Teoreminin Genelleştirilmesi

$L\{f(t)\} = F(s)$, $L\{g(t)\} = G(s)$ olmak üzere,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ ise $t \rightarrow \infty$ için $f(t) \sim g(t)$ yazabiliriz. Benzer biçimde

$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{G(s)} = 1$ ise $s \rightarrow 0$ için $F(s) \sim G(s)$ yazabiliriz. Sonuç olarak,

$t \rightarrow \infty$ için $f(t) \sim g(t)$ ise $s \rightarrow 0$ için $F(s) \sim G(s)$ şeklinde yazılabilir.

2.5.2.3 Örnek:

$f(t) = 3 \cdot e^{-2t}$ fonksiyonuna başlangıç ve son değer teoremlerini uygulayalım.

Çözüm:

$$f(t) = 3 \cdot e^{-2t} \Rightarrow (2.18)'e \text{ göre } F(s) = \frac{3}{s+2} \text{ olur.}$$

Şimdi başlangıç değer teoremini uygulayalım.

$$\lim_{t \rightarrow 0} 3 \cdot e^{-2t} = 3$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s}{s+2} = 3$$

$\Rightarrow (2.37)$ eşitliği sağlanır.

Şimdi de son değer teoremini uygulayalım.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 3 \cdot e^{-2t} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s+2} = 0$$

$\Rightarrow (2.39)$ eşitliği sağlanır.

2.6 Sinüs, Kosinüs ve Eksponansiyel İntegralleri

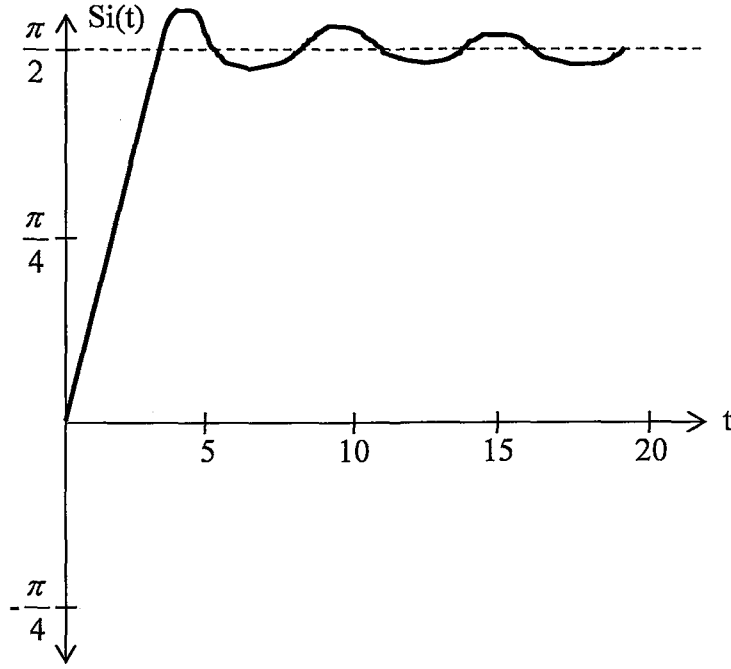
2.6.1 Sinüs İntegrali

2.6.1.1 Tanım:

Şekil 2.4'te gösterilen ve,

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona sinüs integrali denir.



Şekil 2.4 Sinüs integrali*

2.6.1.1.1 Örnek:

$L\{Si(t)\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \text{ ve,}$$

$$f'(t) = \frac{\sin t}{t} - f(0) = \frac{\sin t}{t}$$

$\Rightarrow t f'(t) = \sin t$ dir. Şimdi her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$L\{t f'(t)\} = -\frac{d}{ds}\{s F(s) - f(0)\} = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\{s F(s)\} = \frac{-1}{s^2 + 1}, \text{ integral alırsak,}$$

$\Rightarrow s F(s) = -\arctan s + c$ elde edilir ki, c 'yi bulmak için başlangıç değer teoremini kullanırsak, (2.37)'ye göre,

* <http://www.efunda.com/math/miscellaneousfun/SiCiPlot.cfm>

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} -\arctan s + c = -\frac{\pi}{2} + c = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \quad \text{bulunur.}$$

$$\Rightarrow s F(s) = -\arctan s + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow L\{Si(t)\} = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s}$$

olarak bulunur.

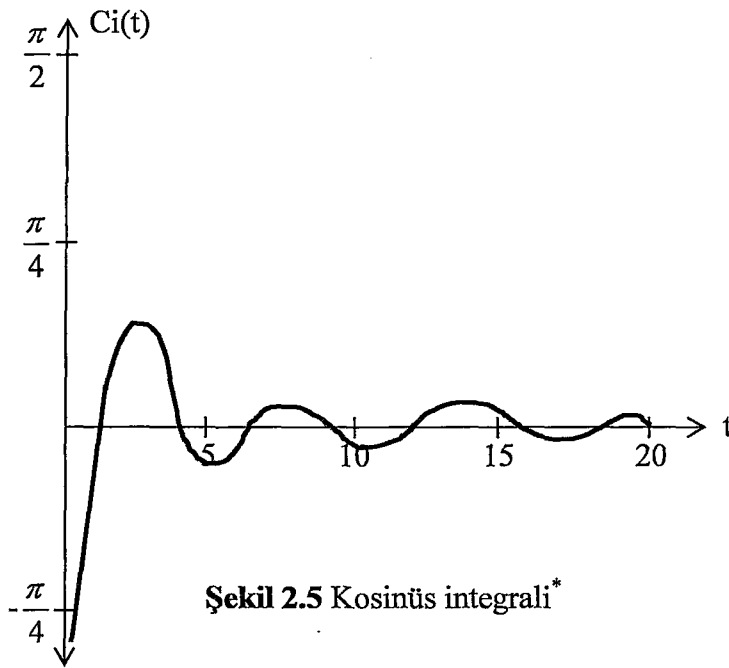
2.6.2 Kosinüs İntegrali

2.6.2.1 Tanım:

Şekil 2.5'te gösterilen ve

$$Ci(t) = \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \quad (2.41)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona kosinüs integrali denir.



Şekil 2.5 Kosinüs integrali*

* <http://www.efunda.com/math/miscellaneousfun/SiCiPlot.cfm>

2.6.2.2 Örnek:

$L\{Ci(t)\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$f(t) = \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \text{ olsun,}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\cos R}{R} - \frac{\cos t}{t} = -\frac{\cos t}{t} \text{ olur ki,}$$

$$\Rightarrow t f'(t) = -\cos t \text{ elde edilir.}$$

Şimdi her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$\Rightarrow L\{t f'(t)\} = -L\{\cos t\} \text{ olur ki (2.20) ve (2.15)'e göre,}$$

$$-\frac{d}{ds} \{s F(s) - f(0)\} = \frac{-s}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \{s F(s)\} = \frac{s}{s^2 + 1} \text{ olur ki integral alırsak,}$$

$$s F(s) = \frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + c, \text{ olur } c\text{'yi bulmak için son değer teoremini kullanırsak (2.39)'a göre,}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \frac{1}{2} \ln 1 + c = c = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\Rightarrow s F(s) = \frac{1}{2} \ln(s^2 + 1)$$

$$\Rightarrow L\{Ci(t)\} = F(s) = \frac{\ln(s^2 + 1)}{2s}$$

olarak bulunur.

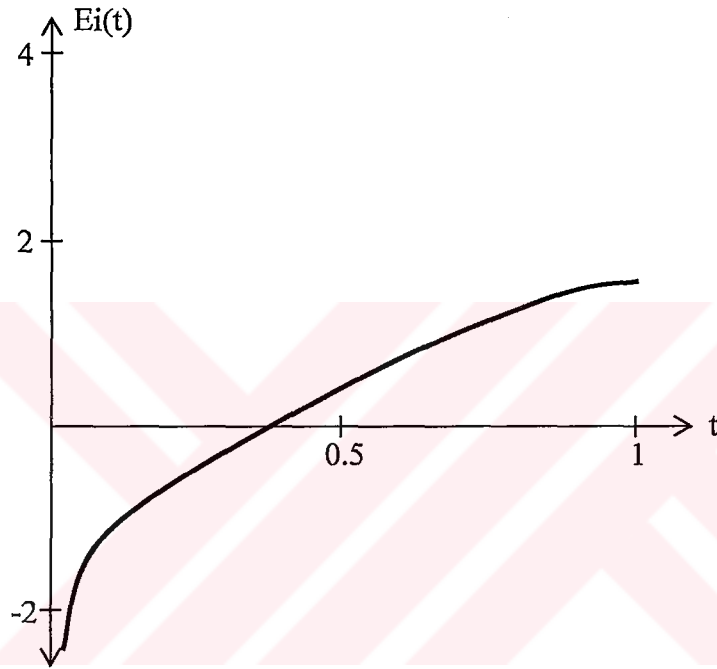
2.6.3 Ekspansiyel İntegrali

2.6.3.1 Tanım:

Şekil 2.6'da gösterilen ve,

$$Ei(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (2.42)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona ekspansiyel integrali denir.



Şekil 2.6 Ekspansiyel integrali*

2.6.3.2 Örnek:

$L\{Ei(t)\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$f(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ olsun,}$$

$$\Rightarrow f'(t) = -\frac{e^{-t}}{t} \text{ olur ki buradan da,}$$

$t f'(t) = -e^{-t}$ elde edilir. Şimdi her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

* <http://www.efunda.com/math/miscellaneousfun/EiPlot.cfm>

(2.20) ve (2.15)'e göre,

$$-\frac{d}{ds} \{s F(s) - f(0)\} = -\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} s F(s) = \frac{1}{s+1} \text{ olur ki, integral alırsak,}$$

$s F(s) = \ln(s+1) + c$ olur, c 'yi bulmak için son değer teoremini kullanırsak,

(2.39)'a göre,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = c = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

$\Rightarrow c = 0$ bulunur. Dolayısıyla $F(s)$,

$$L \{Ei(t)\} = F(s) = \frac{\ln(s+1)}{s}$$

olarak bulunur.

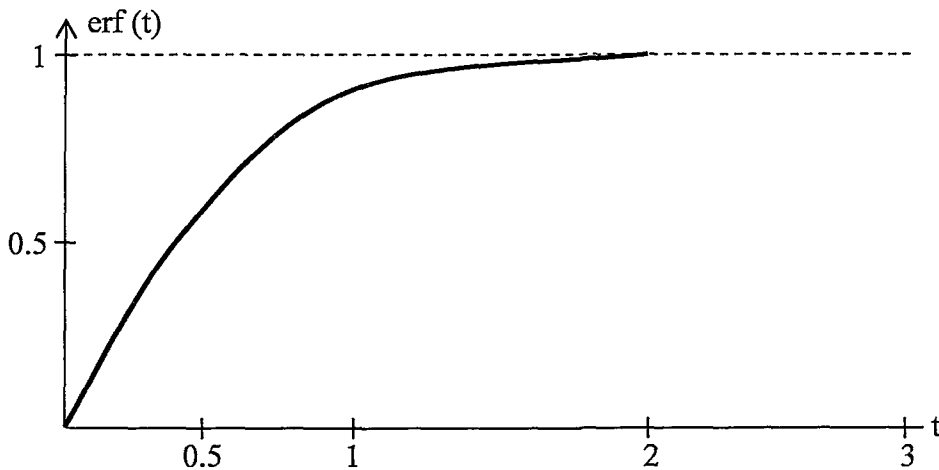
2.7 Hata Fonksiyonu

2.7.1 Tanım:

Şekil 2.7'de gösterilen ve,

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \quad (2.43)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona hata fonksiyonu veya olasılık fonksiyonu denir.



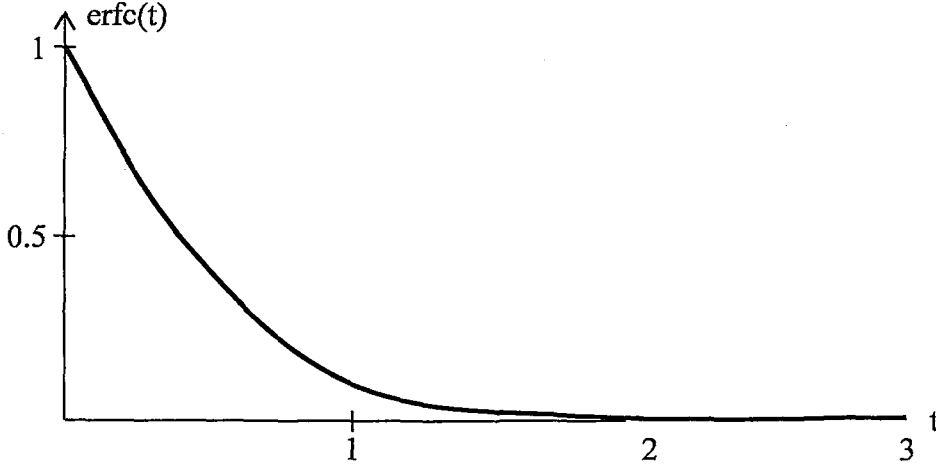
Şekil 2.7 Hata fonksiyonu*

* http://www.efunda.com/math/error_zeta/ErrorPlot.cfm

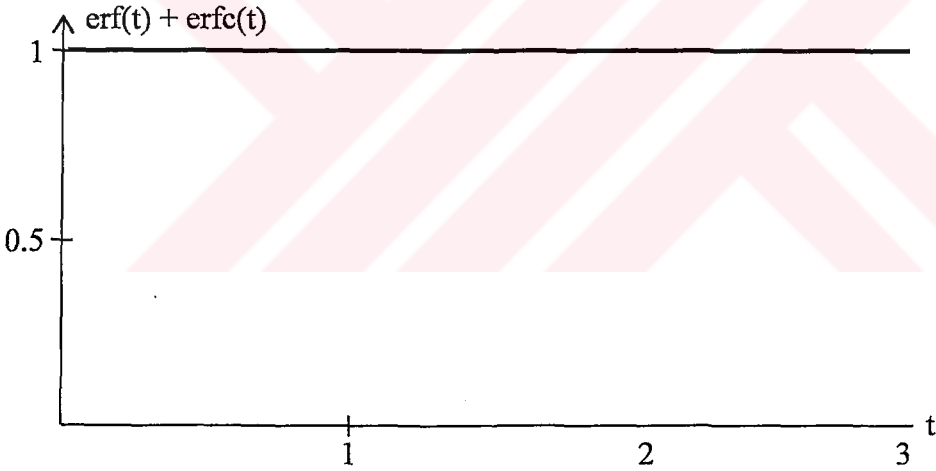
Diğer taraftan Şekil 2.8’de gösterilen ve

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-u^2} du \quad (2.44)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona hata fonksiyonunun komplementeri denir.



Şekil 2.8 Hata fonksiyonunun komplementeri*



Şekil 2.9 Hata fonksiyonu ile komplementlerinin toplamı**

2.7.1.1 Örnek:

a) $\operatorname{erf}(0)$ b) $\operatorname{erf}(\infty)$ c) $\operatorname{erfc}(0)$ d) $\operatorname{erfc}(\infty)$ ifadelerini hesaplayalım.

Çözüm:

a) $\operatorname{erf}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-u^2} du$ olur ki integralin değeri sıfır olacağından,

* http://www.efunda.com/math/error_zeta/ErrorPlot.cfm

** http://www.efunda.com/math/error_zeta/ErrorPlot.cfm

$\text{erf}(0) = 0$ elde edilir.

b) $\text{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ olur ki integralin değeri $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olacağından,

$$\text{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \text{ elde edilir.}$$

c) $\text{erfc}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 1$ elde edilir.

d) $\text{erfc}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 0$ elde edilir.

2.7.1.2 Örnek:

$L\{\text{erf} \sqrt{t}\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$L\{\text{erf} \sqrt{t}\} = L\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du\right\} \text{ ve } e^{-u^2} \text{ 'yi seriye açarsak,}$$

$$= L\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \left(1 - u^2 + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \dots\right) du\right\}$$

$$= L\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5 \cdot 2!} - \frac{t^{7/2}}{7 \cdot 3!} + \dots\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3 \cdot s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5 \cdot 2! \cdot s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7 \cdot 3! \cdot s^{9/2}} + \dots \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{3 \cdot s^{5/2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{5}{2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{5 \cdot 2! \cdot s^{7/2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{7}{2} \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{7 \cdot 3! \cdot s^{9/2}} + \dots$$

bu son ifade de gerekli sadeleştirmeleri yapıp, düzenlersek,

$$= \frac{1}{s^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^{5/2}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{s^{7/2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{s^{9/2}} + \dots$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{s^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{s^3} + \dots \right\}$$

$\Rightarrow$ Binom teoremine göre,

$$= \frac{1}{s^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-1/2} = \frac{1}{s^{3/2}} \left(\frac{s}{s+1}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow L\{erf \sqrt{t}\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \text{ elde edilir.}$$

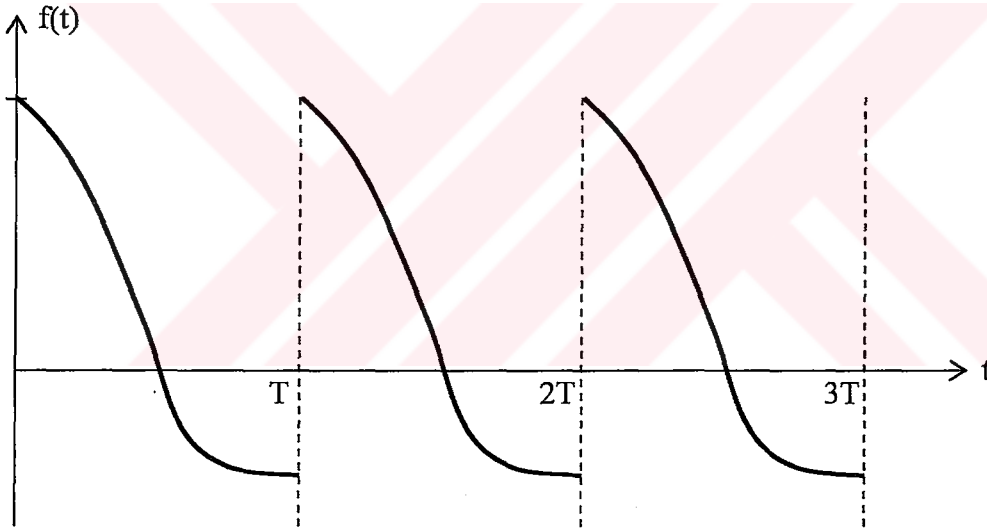
2.8 Periyodik Fonksiyon

2.8.1 Tanım:

$f(t)$ fonksiyonu $T > 0$ için,

$$f(t + T) = f(t) \quad (2.45)$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(t)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir. (Şekil 2.10)



Şekil 2.10 Periyodik fonksiyon

2.8.2 Teorem:

$f(t)$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olsun,

$f(t) = f(t + T)$, $T > 0$ ise,

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad (2.46)$$

dir.

İspat:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-st} dt + \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-st} dt + \dots$$

yazılabilir. Bu integrallere sırasıyla,

$$t = u + nT, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$u = t - nT$ dönüşümleri uygulanırsa,

$$L\{f(t)\} = \int_0^T f(u) e^{-su} du + \int_0^T f(u+T) e^{-s(u+T)} du + \dots + \int_0^T f(u+nT) e^{-s(u+nT)} du + \dots$$

$$= \int_0^T f(u) e^{-su} du + e^{-sT} \int_0^T f(u) e^{-su} du + \dots + e^{-snT} \int_0^T f(u) e^{-su} du + \dots$$

$$= \int_0^T f(u) e^{-su} du (1 + e^{-sT} + \dots + e^{-snT} + \dots)$$

Not:

$$1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1 \text{ serisine geometrik seri denir.}$$

Bu nota göre,

$$1 + e^{-sT} + \dots + e^{-snT} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-sT}}, \quad e^{-sT} < 1 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt, \quad s > 0, \quad e^{-sT} < 1$$

elde edilir.

2.8.3 Teorem:

Eğer $f(t+T) = -f(t)$ ise

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 + e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad (2.47)$$

dir.

İspat:

$$f(t+2T) = f[(t+T)+T] = -f(t+T) = f(t)$$

dir.

$\Rightarrow f(t)$ periyodik fonksiyondur ve periyodu $2T$ dir.

$\Rightarrow (2.46)$ 'ya göre,

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2sT}} \int_0^{2T} f(t)e^{-st} dt = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st} dt}{1-e^{-2sT}}$$

Şimdi $\int_T^{2T} f(t)e^{-st} dt$ integraline $u = t - T$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_T^{2T} f(t)e^{-st} dt = \int_0^T f(u+T)e^{-s(u+T)} du = e^{-sT} \int_0^T [-f(u)]e^{-su} du = -e^{-sT} \int_0^T f(u)e^{-su} du$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt - e^{-sT} \int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1-e^{-2sT}}$$

$$= \frac{\left[\int_0^T f(t)e^{-st} dt \right] [1 - e^{-sT}]}{[1 - e^{-sT}] [1 + e^{-sT}]}$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{1}{1+e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$

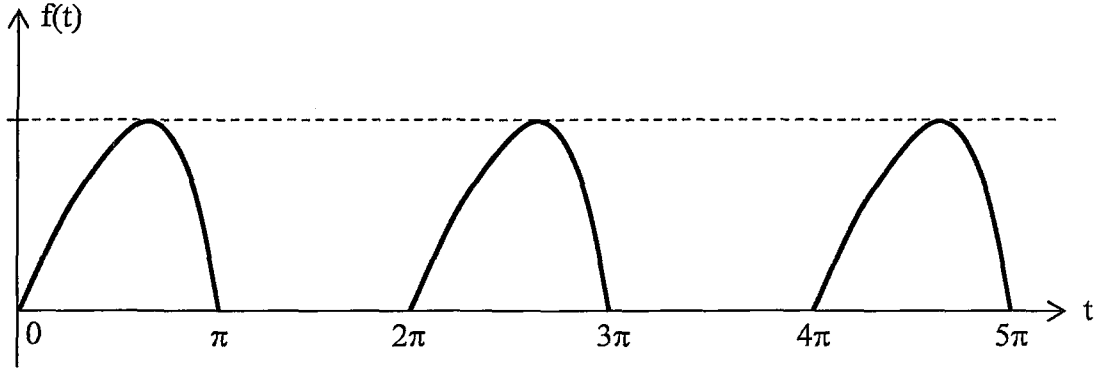
elde edilir.

2.8.4 Örnek:

Şekil 2.11'de verilen ve

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

olan fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.



Şekil 2.11 $f(t)$ periyodik fonksiyonu

Çözüm:

$f(t)$ fonksiyonunun periyodu 2π dir. (2.46)'ya göre,

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-st} dt \end{aligned}$$

dir. Şimdi integrali çözelim,

$$\int e^{bt} \sin at \, dt = \frac{e^{bt} (b \sin at - a \cos at)}{a^2 + b^2} \quad \text{'ye göre,}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt = \frac{e^{-st} (-s \cdot \sin t - \cos t)}{s^2 + 1} \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{1}{(1 + e^{-\pi s})(1 - e^{-\pi s})} \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)}$$

elde edilir.

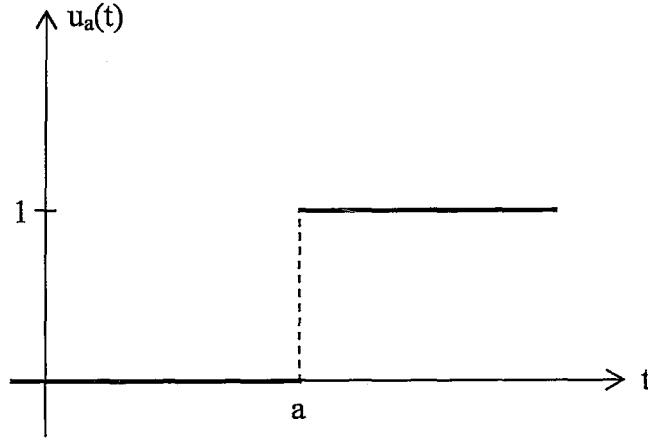
2.9 Heaviside Birim Basamak Fonksiyonu

2.9.1 Tanım:

Şekil 2.12'de gösterilen ve $a > 0$ olmak üzere

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < a \\ 1 & , \quad t > a \end{cases} \quad (2.48)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona birim basamak fonksiyonu denir.



Şekil 2.12 Birim basamak fonksiyonu

2.9.2 Teorem:

Birim basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$L\{u_a(t)\} = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0 \quad (2.49)$$

dır.

İspat:

$$L\{u_a(t)\} = \int_0^{\infty} u_a(t) e^{-st} dt = \int_0^a u_a(t) e^{-st} dt + \int_a^{\infty} u_a(t) e^{-st} dt$$

$$= 0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^R$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} (e^{-sR} - e^{-sa}) \right] = \frac{1}{s} e^{-sa} = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

elde edilir.

2.9.2.1 Örnek:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

(2.49)'a göre,

$$L\{u_2(t)\} = \frac{e^{-s^2}}{s} = \frac{e^{-2s}}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

elde edilir.

2.9.3 Tanım:

(2.48) ifadesinde $a = 0$ alınarak elde edilen,

$$u_o(t) = H(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$$

birim basamak fonksiyonuna, Heaviside* birim basamak fonksiyonu denir. Heaviside birim basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için (2.49)'da a gördüğümüz yere 0 yazarız.

$$\Rightarrow L\{H(t)\} = L\{u_o(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0 \quad (2.50)$$

elde edilir.

Not:

Her bir $u_a(t)$ birim basamak fonksiyonu, Heaviside birim basamak fonksiyonu yardımıyla,

$$u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0 & , \quad t < a \\ 1 & , \quad t > a \end{cases} \quad (2.51)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Aynı zamanda yine,

$$L\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0 \quad (2.52)$$

bağıntısı vardır.

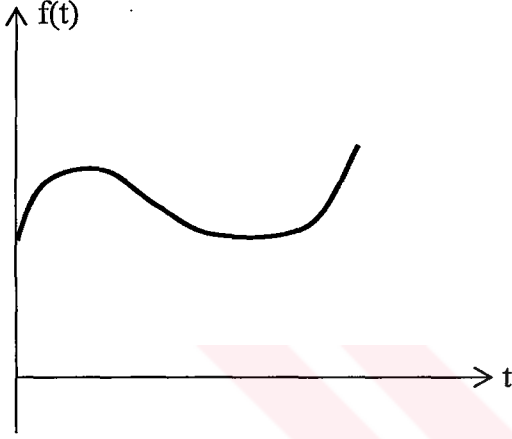
* Oliver Heaviside (18 Mayıs 1850-3 Şubat 1925) kendisini iyi yetiştiren bir İngiliz fizikçisi. Elektrik ve manyetiği incelemiştir. Vektörel çözümleme yöntemleri geliştirmiştir. İyonlaşmış bir atmosfer katmanının varlığını ileri sürmüştür.

2.9.4 Tanım:

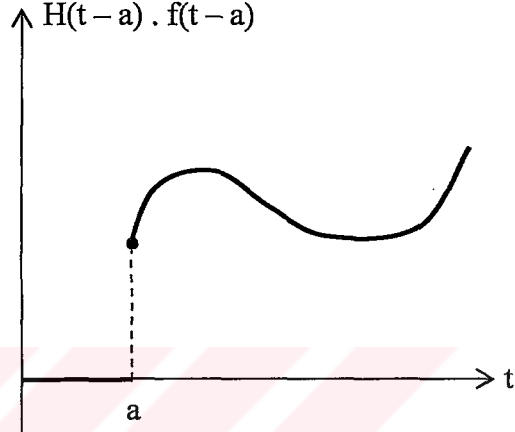
$f(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ değerlerinde tanımlanmış bir fonksiyon ise,

$$H(t-a) \cdot f(t-a) = u_a(t) \cdot f(t-a) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < a \\ f(t-a) & , \quad t > a \end{cases} \quad (2.53)$$

fonksiyonuna ötelenmiş fonksiyon veya kaymış fonksiyon denir (Şekil 2.13 ve Şekil 2.14).



Şekil 2.13 $f(t)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.14 $f(t)$ fonksiyonunun a birim ötelenmiş grafiği

2.9.5 Teorem:

$L\{f(t)\} = F(s)$ olsun

$$\Rightarrow L\{H(t-a) \cdot f(t-a)\} = e^{-as} F(s) \quad (2.54)$$

şeklindedir.

İspat:

$$\begin{aligned} L\{H(t-a) f(t-a)\} &= \int_0^{\infty} H(t-a) \cdot f(t-a) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt \end{aligned}$$

olur ki $u = t - a$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(u) e^{-s(u+a)} du = e^{-sa} \int_0^{\infty} f(u) e^{-su} du$$

elde edilir.

$$\Rightarrow L\{H(t-a) \cdot f(t-a)\} = e^{-st} F(s)$$

bulunur.

2.9.6 Tanım:

Birim basamak fonksiyonlarının sonlu sayıda kombinasyonu ile elde edilen fonksiyona basamak fonksiyonu denir.

Basamak fonksiyonlarının Laplace dönüşümü (2.14) ve (2.49) kullanılarak hesaplanabilir.

2.9.6.1 Örnek:

$u(t) = u_1(t) - 2u_3(t) + \frac{1}{2}u_4(t)$ fonksiyonunu basamak fonksiyonu şeklinde yazıp Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 1 \\ 1 & , \quad t > 1 \end{cases}, \quad u_3(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 3 \\ 1 & , \quad t > 3 \end{cases}, \quad u_4(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 4 \\ 1 & , \quad t > 4 \end{cases}$$

şeklindedir.

$$\Rightarrow -2u_3(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 3 \\ -2 & , \quad t > 3 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2}u_4(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 4 \\ \frac{1}{2} & , \quad t > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t) = u_1(t) - 2u_3(t) + \frac{1}{2}u_4(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 1 \\ 1 & , \quad 1 < t < 3 \\ -2 & , \quad 3 < t < 4 \\ \frac{1}{2} & , \quad t > 4 \end{cases}$$

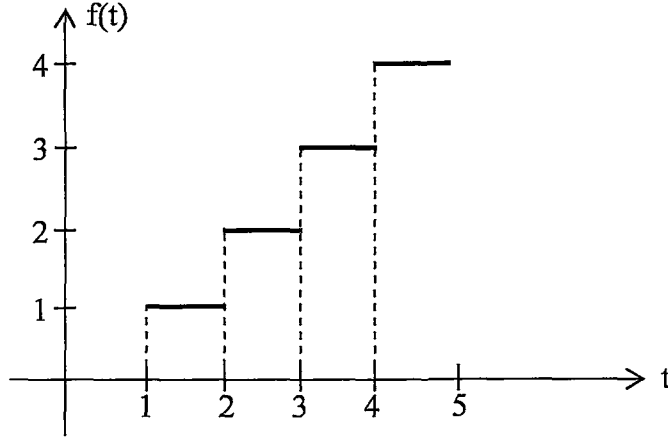
şeklindedir. Laplace dönüşümü ise şöyledir,

$$L\{u(t)\} = L\{u_1(t)\} - 2L\{u_3(t)\} + \frac{1}{2}L\{u_4(t)\}$$

$$\Rightarrow L\{u(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{1}{2} \frac{e^{-4s}}{s}$$

2.9.6.2 Örnek:

Şekil 2.15'te verilen sonsuz basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.



Şekil 2.15 $f(t)$ sonsuz basamak fonksiyonu

Çözüm:

$f(t)$ 'yi Heaviside birim basamak fonksiyonunun sonsuz toplamı şeklinde yazalım.

$$\Rightarrow f(t) = H(t-1) + H(t-2) + H(t-3) + \dots$$

Şimdi $L\{f(t)\}$ 'yi hesaplayalım.

$$L\{f(t)\} = L\{H(t-1)\} + L\{H(t-2)\} + L\{H(t-3)\} + \dots$$

(2.52)'ye göre,

$$L\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \dots = \frac{e^{-s}}{s} (1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots)$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} \left(\frac{1}{1 - e^{-s}} \right) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{e^s - 1} \right), \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

olarak bulunur.

2.9.6.3 Örnek:

$f(t)$ fonksiyonu,

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & , \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{3} \\ \cos t + \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & , \quad t \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $L\{f(t)\}$ 'yi hesaplayalım.

Çözüm:

$f(t)$ 'yi iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazalım.

$$\Rightarrow f(t) = \cos t + h(t) = \cos t + \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{3} \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & , \quad t \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

olur ki, $h(t)$ fonksiyonu da,

$$u_{\frac{\pi}{3}}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{3} \\ 1 & , \quad t \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$h(t) = u_{\frac{\pi}{3}}(t) \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Rightarrow f(t) = \cos t + u_{\frac{\pi}{3}}(t) \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$L\{f(t)\} = L\{\cos t\} + L\left\{u_{\frac{\pi}{3}}(t) \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right\} \quad \text{olur ve (2.54)'e göre,}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1} + e^{-\frac{\pi}{3}s} L\{\sin t\} \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{3}s} \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{s + e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+1}$$

olarak bulunur.

2.10 Dirac Delta Fonksiyonu

Fizik ve mühendislik uygulamalarında çoğu kez, çok büyük boyutlardaki fiziksel büyüklükleri matematiksel olarak ifade etme gereğini duyarız. Örneğin, makroskopik incelemelerde elektronun yükünün, elektronun bütün hacmi üzerine yayılı olduğunu değil de, bir noktaya uygulanmış noktasal bir yük gibi hesaba katılması daha faydalı olabilir. Benzer şekilde, mekanikte sık kullanılan bir kavram olan maddesel nokta, kütlenin tek bir noktaya yoğunlaşması düşüncesine dayanır (noktanın hiçbir hacme sahip olmamasına rağmen). Astronomide ise, çok büyük uzaklıklarda, dünya veya güneşin de maddesel nokta gibi hesaba katılması gerekli olabilir. Başka bir örnek olarak şöyle söylenebilir, kısa bir zaman aralığında, bir cisme çok büyük bir kuvvet veya bir elektrik devresi ani bir gerilime maruz kalırsa, bu gerilim sonucu $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ dar aralığında büyük değerler ve bu aralığın dışında ise sıfır değerini alan bir fonksiyon olan Dirac* delta fonksiyonu ile hesap yapılabilir. (Hasanov vd., 2002; Cesur, 2004).

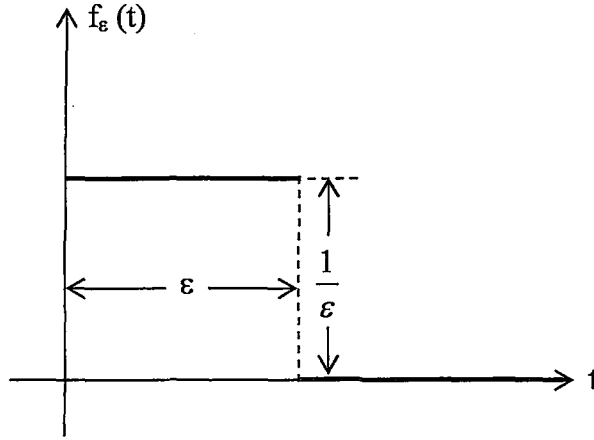
2.10.1 Tanım:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , \quad 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & , \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada $\varepsilon > 0$ dır ve grafiği Şekil 2.16'da gösterilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı gibi $\varepsilon \rightarrow 0$ iken dikdörtgen bölgenin yüksekliği sınırsız olarak artmakta ve eni, alanının daima 1 olmasını sağlayacak biçimde azalmaktadır. Başka bir deyişle;

$$\int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = 1 \text{ dir.}$$

* Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) görece kuantum kuramının yaratıcılarından. Pozitronun varlığını öngördü. Dört tane diferansiyel denklemle elektronun hareketini tanımladı. Erwin Schrödinger ile 1933 Nobel Fizik Ödülünü paylaştı.



Şekil 2.16 $f_\epsilon(t)$ fonksiyonu

Buna göre, $\epsilon \rightarrow 0$ için $f_\epsilon(t)$ 'ye yakınsayan ve $\delta(t)$ ile gösterilen limit fonksiyonuna birim darbe fonksiyonu veya Dirac delta fonksiyonu denir.

2.10.1.1 Örnek:

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & , \quad 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & , \quad t > \epsilon \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olan $f_\epsilon(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

$$L\{f_\epsilon(t)\} = \int_0^{\infty} f_\epsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} e^{-st} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} 0 \cdot e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{f_\epsilon(t)\} = \frac{1}{\epsilon} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{1}{s} e^{-s\epsilon} + \frac{1}{s} \right)$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{\epsilon \cdot s}$$

olarak bulunur.

2.10.1.2 Örnek:

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L\{f_\epsilon(t)\} = 1$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$L\{f_\varepsilon(t)\} = \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon \cdot s} \text{ idi. } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ için limit alalım,}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon \cdot s} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği ile karşılaşırız. L'Hospital kuralını uygularsak,}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon \cdot s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L\{f_\varepsilon(t)\} = 1$$

olarak bulunur.

Not:

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$ mevcut olmayıp dolayısıyla $L\left\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)\right\}$ tanımlanmış değildir. Fakat $L\{\delta(t)\} = 1$

olacak biçimde $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$ yi ele almanın faydalı olacağı görülmüştür.

2.10.1.3 Örnek:

$\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonu ise,

$$L\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \text{ olduğunu gösterelim.}$$

Çözüm:

$$L\{f(t)\} = F(s) \text{ ve } g(t) = \begin{cases} f(t-a) & , \quad t > a \\ 0 & , \quad t < a \end{cases}$$

ise $L\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$ idi. Buna göre,

$$L\{\delta(t-a)\} = e^{-as} L\{\delta(t)\} \Rightarrow L\{\delta(t)\} = 1 \text{ olduğundan}$$

$$L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

olarak bulunur.

2.10.1.4 Örnek:

$g(t) = 2\delta(t-8) + 5\delta(t+2)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

$$L\{g(t)\} = 2L\{\delta(t-8)\} + 5L\{\delta(t+2)\}$$

$$= 2e^{-8s} + 5e^{-(-2)s}$$

$$\Rightarrow L\{g(t)\} = 2e^{-8s} + 5e^{2s}$$

olarak bulunur.

2.11 Sıfır Fonksiyonu**2.11.1 Tanım:**

$n(t)$, $\forall t > 0$ için $\int_0^t n(u) du = 0$ gerçekenmek üzere t nin bir fonksiyonu ise $n(t)$ fonksiyonuna sıfır fonksiyonu denir.

2.11.1.1 Örnek:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın $f(t)$ fonksiyonunun sıfır fonksiyonu olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$I = \int_0^t f(u) du = 0 \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

I integralini hesaplamak için $I(\varepsilon)$ aşağıdaki biçimde tanımlanırsa,

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} 0 du + \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} 1 du + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1-\varepsilon} 0 du + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} (-1) du + \int_{1+\varepsilon}^t 0 du$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = 0$$

$\Rightarrow f(t)$ fonksiyonu sıfır fonksiyonudur.

Not:

Bir $n(t)$ sıfır fonksiyonunun Laplace dönüşümü de sıfır olduğundan,

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L\{f(t) + n(t)\} = L\{f(t)\} + L\{n(t)\} = L\{f(t)\} = F(s) \text{ dir.}$$

Bu nedenle farklı iki fonksiyonun Laplace dönüşümleri aynı olabilir. Şimdi sıfır

fonksiyonunun Laplace dönüşümünün sıfır olduğunu gösterelim. $\forall t > 0$ için $\int_0^t n(u) du = 0$

dir. Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alıp, (2.17)'yi kullanalım. $L\{n(t)\} = N(s)$ ise,

$$L\left\{\int_0^t n(u) du\right\} = \frac{N(s)}{s} = 0$$

olur ki buradan,

$$L\{n(t)\} = N(s) = 0$$

elde edilir.

2.11.1.2 Örnek:

Aşağıdaki fonksiyonların sıfır fonksiyonu olup olmadığını bulalım.

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \text{ nin diğer değerleri} \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \delta(t)$$

Çözüm:

$$\text{a) } \int_0^t f(u) du = \int_0^1 0 du + \int_1^2 1 du + \int_2^t 0 du = u \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow f(t)$ sıfır fonksiyonu değildir.

b) $t > 0$ için $\int_0^t \delta(u) du = 1$ olduğundan $\delta(t)$ fonksiyonu sıfır fonksiyonu değildir.

3. TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

3.1 Ters Laplace Dönüşümünün Tanımı

3.1.1 Tanım:

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ yani,

$L\{f(t)\} = F(s)$ ise $f(t)$ 'ye $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü denir ve sembolik olarak,

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ yazılır. L^{-1} 'e ters Laplace dönüşüm operatörü denir.

3.1.1.1 Örnek:

$F(s) = \frac{1}{s+4}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ 'yi bulalım.

Çözüm:

$L\{e^{-4t}\} = \frac{1}{s+4}$ olduğu için,

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t}$ olur.

3.1.2 Ters Laplace Dönüşümünün Tekliği

$n(t)$ sıfır fonksiyonunun Laplace dönüşümü sıfır olduğundan,

$L\{f(t)\} = F(s)$ iken $L\{f(t) + n(t)\} = F(s)$ oluyordu. Buradan da Laplace dönüşümleri aynı olan birbirinden farklı iki fonksiyonun olabileceği sonucunu bulmuştuk.

Sıfır fonksiyonları söz konusu olduğunda Laplace dönüşümünün tek olmadığını biliyoruz. Eğer sıfır fonksiyonları kullanılmazsa ters Laplace dönüşümleri tektir. Bu şu teoremle ifade edilir.

3.1.2.1 Teorem (Learch Teoremi):

Parçalı sürekli ve üstel merteben olan $f(t)$ fonksiyonları için $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü tek türlü olarak belirlidir. Bir başka deyişle $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ tektir.

Aksi söylenmedikçe ters Laplace dönüşümlerinin tek olduğunu düşüneceğiz.

3.2 Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri

3.2.1 Teorem (Doğrusallık özelliği):

c_1 ve c_2 sabit büyüklükler ve $F_1(s)$ ve $F_2(s)$ 'de sırasıyla $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri ise,

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad (3.1)$$

olur ki bu sonuç ikiden fazla fonksiyona kolaylıkla genişletilebilir.

İspat:

Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğine göre,

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

idi.

$$\Rightarrow L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

olur ki, bu da genelleştirilebilir.

3.2.1.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} + \frac{2s}{s^2+16} - \frac{3}{s^2+9}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} + \frac{2s}{s^2+16} - \frac{3}{s^2+9}\right\} = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$= 4e^{2t} + 2\cos 4t - \sin 3t$$

olarak bulunur.

3.2.2 Teorem (Birinci Kaydırma Özelliği):

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ ise,}$$

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t) \quad (3.2)$$

dir.

İspat:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \text{ olup,}$$

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = \int_0^{\infty} \{e^{at} f(t)\} e^{-st} dt = L\{e^{at} f(t)\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

elde edilir.

3.2.2.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+10}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+10}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+3^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+3^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+3^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} = \cos 3t \quad \text{ve} \quad L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \sin 3t$$

olduğuna göre, (3.2)'yi de kullanırsak,

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+10}\right\} = e^t \cos 3t + \frac{1}{3} e^t \sin 3t$$

elde edilir.

3.2.3 Teorem (İkinci Kaydırma Özelliği):

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ ise,}$$

$$L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & , \quad t > a \\ 0 & , \quad t < a \end{cases} \quad (3.3)$$

dır.

İspat:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \text{ olup,}$$

$$e^{-as} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-as} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-s(t+a)} dt$$

$\Rightarrow t + a = u$ dersek

$$= \int_a^{\infty} f(u-a) e^{-su} du = \int_0^a 0 \cdot e^{-st} dt + \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt = \int_a^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

olur ki, buradaki $g(t)$ fonksiyonu şöyledir,

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & , \quad t > a \\ 0 & , \quad t < a \end{cases}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu $g(t)$ fonksiyonu Heaviside birim basamak fonksiyonu cinsinden şöyle yazılabilir.

$$g(t) = f(t-a) \cdot H(t-a)$$

3.2.3.1 Örnek:

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi s}{4}}}{s^2 + 1} \right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \sin t \text{ 'dir ve (3.3)'e göre,}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi s}{4}}}{s^2 + 1} \right\} = \begin{cases} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) & , \quad t > \frac{\pi}{4} \\ 0 & , \quad t < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

olarak bulunur.

3.2.4 Teorem (Skala Değişirme Özelliği):

$$L^{-1} \{ F(s) \} = f(t)$$

ise,

$$L^{-1} \{ F(ks) \} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \quad (3.4)$$

dır.

İspat:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \text{ olup,}$$

$$F(ks) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-kst} dt \text{ olur, } kt = u \text{ dersek,}$$

$$= \int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{k}\right) e^{-su} \frac{du}{k} = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{k}\right) e^{-su} du = \frac{1}{k} L\left\{f\left(\frac{t}{k}\right)\right\} \text{ bulunur,}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

elde edilir.

3.2.4.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2 + 16}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 16}\right\} = \cos 4t \text{ 'dir ve (3.4)'e göre,}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2 + 16}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2 + 16}\right\} = \frac{1}{2} \cos \frac{4t}{2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2 + 16}\right\} = \frac{1}{2} \cos 2t$$

elde edilir.

3.2.5 Teorem (Türetilmiş Fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümleri):

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise,

$$L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

İspat:

Laplace dönüşümünün özelliklerinden biri olan,

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \text{ ifadesini kullanarak,}$$

$$L^{-1}\{(-1)^n F^{(n)}(s)\} = (-1)^n L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = t^n f(t)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

elde edilir.

3.2.5.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t \text{ 'dir ve } \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \text{ dir, (3.5)'i kullanırsak,}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -2 L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = (-1)t \sin t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2} t \sin t$$

elde edilir.

3.2.6 Teorem (İntegrallerin Ters Laplace Dönüşümleri):

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u) du\right\} = \frac{f(t)}{t} \tag{3.6}$$

dir.

İspat:

Laplace dönüşümünün özelliklerinden biri olan,

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad \text{ve} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ mevcut ise}$$

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du \text{ idi, buna göre}$$

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u) du\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

ifadesi doğrulanır.

3.2.6.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1 - e^{-t} \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du\right\} = L^{-1}\left\{\ln u - \ln(u+1) \Big|_s^\infty\right\} = L^{-1}\left\{\ln \frac{u}{u+1} \Big|_s^\infty\right\} = L^{-1}\left\{\ln \left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\}$$

$\Rightarrow$ (3.6)'ya göre,

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du\right\} = L^{-1}\left\{\ln \left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

elde edilir.

3.2.7 Teorem (s^n ile Çarpma):

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ ve } f(0) = 0 \text{ ise}$$

$$L^{-1}\{s F(s)\} = f'(t) \tag{3.7}$$

dir. Görüldüğü gibi s ile çarpmanın $f(t)$ 'yi türetme biçiminde etkisi olmaktadır.

İspat:

Laplace dönüşümünün özelliklerinden biri olan,

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \text{ ve } f(0) = 0 \text{ olursa,}$$

$$L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t)$$

ifadesi elde edilir ki, bu ifade $n = 2, 3, 4, \dots$ için

$$L^{-1}\{s^n F(s)\} \text{ 'ye genelleştirilebilir.}$$

3.2.7.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t \text{ ve } \sin 0 = 0 \text{ olup,}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} = \frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

elde edilir.

3.2.8 Teorem (s ile Bölme):

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise,

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u) du \quad (3.8)$$

dır.

İspat:

$$g(t) = \int_0^t f(u) du \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow g'(t) = f(t) \text{ , } g(0) = 0 \text{ dır. Dolayısıyla,}$$

$$L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0) = sL\{g(t)\} = F(s)$$

$$\Rightarrow L\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s} \text{ veya } L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = g(t) = \int_0^t f(u) du$$

elde edilir.

3.2.8.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 4)}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2} \sin 2t \text{ 'dir. Şimdi (3.8)'i kullanırsak,}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2u du = -\frac{1}{4} \cos 2u \Big|_0^t = -\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (1 - \cos 2t)$$

elde edilir.

3.2.8.2 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v f(u) du dv$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$g(t) = \int_0^t \int_0^v f(u) du dv \text{ olsun.}$$

$$g'(t) = \int_0^t f(u) du, \quad g''(t) = f(t) \text{ ve } g(0) = g'(0) = 0 \text{ dir.}$$

$$L\{g''(t)\} = s^2 L\{g(t)\} - s g(0) - g'(0) = s^2 L\{g(t)\} = F(s) \text{ dir, dolayısıyla}$$

$$L\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s^2} \text{ veya } L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\} = g(t) = \int_0^t \int_0^v f(u) du dv$$

dir. Sonuçta,

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^t f(t) dt^2 \quad (3.9)$$

biçiminde yazılabilir.

Genel olarak ise şöyle ifade edilir,

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^n \quad (3.10)$$

Şimdi ters Laplace dönüşümünün özelliklerini kullanarak verilen bir fonksiyonun ters Laplace dönüşümünün bulunduğu birkaç örnek yapalım.

3.2.9 Örnekler:

1) $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s+3)-2}{(s+3)^2+16}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s+3)}{(s+3)^2+16}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)+16}\right\}$$

(3.2)'ye göre,

$$L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+16}\right\} = e^{-3t} \cos 4t \text{ bulunur.}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)+16}\right\} = e^{-3t} \sin 4t \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\} = e^{-3t} \cos 4t - \frac{1}{2}e^{-3t} \sin 4t = e^{-3t} \left(\cos 4t - \frac{1}{2} \sin 4t \right)$$

olarak bulunur.

2) $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$ dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

Bu sorunun çözümü için (3.5)'i kullanalım.

$$F(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\Rightarrow F'(s) = \frac{2s \cdot s^2 - 2s(s^2+1)}{s^2 \cdot s^2} \cdot \frac{s^2}{s^2+1} = \frac{-2}{s(s^2+1)} = -2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F'(s)\} = L^{-1}\left\{-2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)\right\} = -2\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}\right]$$

$$= -2(1 - \cos t) = (-1) \cdot t^1 \cdot f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{t}(1 - \cos t) \text{ elde edilir ki,}$$

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\} = \frac{2}{t}(1 - \cos t)$$

dir.

3) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$ dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t \text{ olup, (3.8)'i art arda uygularsak,}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin u \, du = -\cos u \Big|_0^t = -\cos t + \cos 0 = 1 - \cos t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1 - \cos u) \, du = u - \sin u \Big|_0^t = t - \sin t - 0 + \sin 0 = t - \sin t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (u - \sin u) \, du = \frac{u^2}{2} + \cos u \Big|_0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 0 - \cos 0 = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1$$

olarak bulunur.

4) $L^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$ dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

İlk önce $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right\}$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}/2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\}$$

Şimdi (3.2)'ye göre,

$$= e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right)$$

olur ki $L^{-1} \left\{ \frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2 + s + 1} \right\}$ dönüşümünü bulmak için (3.3)'ü kullanalım.

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2 + s + 1} \right\} = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3} \cos \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) \right] + \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) \right] \right\} & , \quad t > \pi \\ 0 & , \quad t < \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2 + s + 1} \right\} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3} \cos \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) \right] + \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) \right] \right\} H(t-\pi)$$

şeklinde yazılabilir.

5) $n > -1$ için $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$L \left\{ \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \right\}$ dönüşümünü ele alalım.

$$L \left\{ \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \right\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} L \{t^n\} \Rightarrow (2.23)'e göre,$$

$$L \{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \text{ olduğundan}$$

$$L \left\{ \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \right\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad n > -1$$

dir. Öyleyse,

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$$

elde edilir.

3.3. Konvolüsyon

3.3.1 Tanım:

$f(t)$ ve $g(t)$ her sonlu $[0, a]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve üstel mertebeli iki fonksiyon olsun. $f(t) * g(t)$ ile gösterilen ve

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du \quad (3.11)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona, $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu denir.

3.3.2 Konvolüsyonun Özellikleri

1) $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ (Değişme Özelliği)

İspat:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du$$

Burada $u = t - z$ dönüşümü yapılırsa,

$$f(t) * g(t) = \int_t^0 f(z) g(t-z) (-dz) = \int_0^t g(t-z) f(z) dz = g(t) * f(t)$$

olur ki,

$$\Rightarrow f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

elde edilir.

2) $f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$ (Birleşme Özelliği)

İspat:

$$f(t) * (g(t) * h(t)) = \int_0^t f(u) \int_0^{t-u} g(t-u-a) h(a) da du$$

$$= \int_0^t h(a) \int_0^{t-a} g(t-a-u) f(u) du da = h(t) * (f(t) * g(t))$$

$$= (f(t) * g(t)) * h(t)$$

elde edilir.

$$3) f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

İspat:

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = \int_0^t f(t-u)(g(u) + h(u)) du$$

$$= \int_0^t f(t-u)g(u) du + \int_0^t f(t-u)h(u) du$$

$$= f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

elde edilir.

$$4) (f(t) + g(t)) * h(t) = f(t) * h(t) + g(t) * h(t)$$

İspat:

$$(f(t) + g(t)) * h(t) = \int_0^t (f(t-u) + g(t-u))h(u) du$$

$$= \int_0^t f(t-u)h(u) du + \int_0^t g(t-u)h(u) du$$

$$= f(t) * h(t) + g(t) * h(t)$$

elde edilir.

5) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(t) * (\alpha g(t)) = \alpha (f(t) * g(t))$$

İspat:

$$f(t) * (\alpha g(t)) = \int_0^t f(t-u)(\alpha g(u)) du = \int_0^t f(t-u) \cdot \alpha \cdot g(u) du$$

$$= \alpha \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

$$= \alpha (f(t) * g(t))$$

elde edilir.

3.3.2.1 Örnek:

$f(t) = \sin t$ ve $g(t) = \cos t$ ise $f(t) * g(t)$ 'yi bulalım.

Çözüm:

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin(t-u) \cos u \, du = \int_0^t (\sin t \cos u - \sin u \cos t) \cos u \, du$$

$$= \int_0^t \sin t \cos^2 u \, du - \int_0^t \sin u \cos t \cos u \, du$$

$$= \sin t \left\{ \int_0^t \frac{1}{2} \, du + \int_0^t \frac{\cos 2u}{2} \, du \right\} - \cos t \int_0^t \sin u \cos u \, du$$

$$= \sin t \left\{ \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sin 2u \right\} \Big|_0^t - \cos t \left\{ \frac{\sin^2 u}{2} \right\} \Big|_0^t$$

$$= \sin t \left\{ \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right\} - \cos t \frac{\sin^2 t}{2} = \frac{t}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t - \frac{1}{2} \cos t \sin^2 t$$

$$= \frac{t}{2} \sin t$$

elde edilir.

3.3.2.2 Örnek:

$f(t) = t^\alpha$, $g(t) = t^\beta$, $\alpha, \beta > 0$ ise $f(t) * g(t)$ 'yi bulalım.

Çözüm:

$$t^\alpha * t^\beta = \int_0^t (t-u)^\alpha u^\beta \, du$$

$\Rightarrow u = tx$ dönüşümü yapılırsa,

$$t^\alpha * t^\beta = \int_0^1 (t-tx)^\alpha (tx)^\beta t \, dx = \int_0^1 t^\alpha (1-x)^\alpha t^\beta x^\beta t \, dx$$

$$= t^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 (1-x)^\alpha x^\beta dx = B(\beta+1, \alpha+1) t^{\alpha+\beta+1}$$

bulunur ki, burada

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0$$

ile tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu* veya birinci türden Euler integrali denir.

3.3.3 Teorem:

Verilmiş $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları üstel mertebeden ve $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli olsunlar. Bu fonksiyonların konvolüsyonunun Laplace dönüşümü her birinin Laplace dönüşümünün çarpımına eşittir.

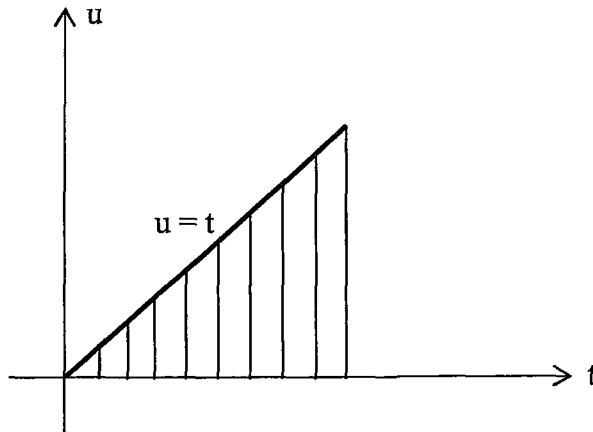
$$L\{f * g\} = L\{f\} \cdot L\{g\} \quad (3.12)$$

İspat:

Laplace dönüşümünün tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} L\{f * g\} &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-u) g(u) du \right) e^{-st} dt \\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t f(t-u) g(u) e^{-st} du dt \end{aligned} \quad (3.13)$$

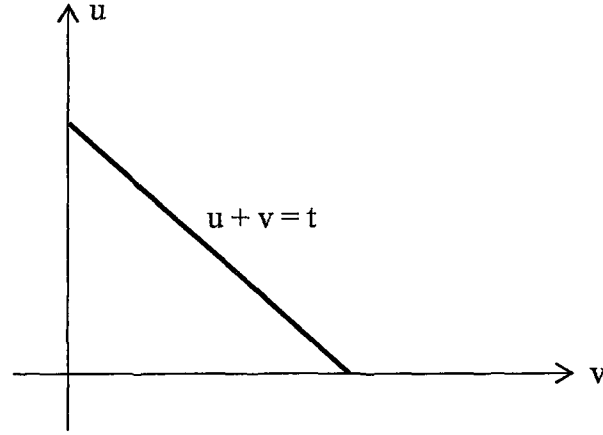
yazılabilir, bu (3.13) ile ifade edilen çift katlı integralinin yapıldığı tu düzlemindeki bölge Şekil 2.17 ile gösterilebilir.



Şekil 2.17 tu düzlemi

* Beta fonksiyonu sayfa 95 bölüm 3.7'de açıklanmıştır.

$t - u = v$ veya $t = u + v$ dönüşümü ile tu düzlemindeki bölge Şekil 2.18 ile gösterilen uv düzlemindeki bölgeye dönüşür.



Şekil 2.18 uv düzlemi

Burada, $u = t$

$$t = u + v$$

ve dönüşümün Jakobiyesi,

$$J = \frac{\partial(u, t)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olarak bulunur ve,

$u \geq 0$, $v \geq 0$ ise,

(2.67) ile ifade edilen çift katlı integral şu şekli alır,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(v) g(u) e^{-s(u+v)} du dv \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(v) g(u) e^{-su} \cdot e^{-sv} du dv \\ &= \int_0^{\infty} f(v) e^{-sv} dv \int_0^{\infty} g(u) e^{-su} du \quad \text{olur ki,} \\ &= L\{f\} \cdot L\{g\} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3.3.1 Örnek:

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+3^2)^2}\right\}$ dönüşümünü konvolüsyon teoremini kullanarak bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{(s^2+3^2)^2} = \frac{1}{s^2+3^2} \cdot \frac{1}{s^2+3^2} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3^2}\right\} = \frac{1}{3} \sin 3t \Rightarrow L\left\{\frac{1}{3} \sin 3t\right\} = \frac{1}{s^2+3^2} \text{ dir ve}$$

$\Rightarrow (3.12)$ 'ye göre,

$$\frac{1}{(s^2+3^2)^2} = L\left\{\frac{1}{3} \sin 3t\right\} \cdot L\left\{\frac{1}{3} \sin 3t\right\} = L\left\{\frac{1}{3} \sin 3t * \frac{1}{3} \sin 3t\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+3^2)^2}\right\} = \frac{1}{3} \sin 3t * \frac{1}{3} \sin 3t \text{ olur, çözersek,}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \sin 3t * \frac{1}{3} \sin 3t = \int_0^t \frac{1}{3} \sin[3(t-u)] \cdot \frac{1}{3} \sin 3u \, du$$

$$= \frac{1}{18} \int_0^t \{\cos(6u-3t) - \cos 3t\} \, du$$

$$= \frac{1}{18} \left\{ \frac{1}{6} \sin(6u-3t) - u \cos 3t \right\} \Big|_0^t = \frac{1}{18} \left\{ \frac{1}{6} \sin 3t - t \cos 3t - \frac{1}{6} \sin(-3t) \right\}$$

$$= \frac{1}{18} \left\{ \frac{1}{6} \sin 3t - t \cos 3t + \frac{1}{6} \sin 3t \right\} = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{3} \sin 3t - t \cos 3t \right)$$

olarak bulunur.

3.3.3.2 Örnek:

$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\}$ dönüşümünü konvolüsyon teoremini kullanarak çözelim.

Çözüm:

$$\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{(s-1)} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1-\frac{1}{2}}}\right\} = \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t \quad \text{dir, bunlara göre,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} = L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\} \cdot L\{e^t\} = L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t \quad \text{olur, çözersek}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t = \int_0^t e^{t-u} \frac{1}{\sqrt{\pi u}} du = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u} \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

olur ki $u = v^2$ dersek,

$$= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} \frac{1}{v} 2v dv = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv$$

elde edilir ki, (2.43) ile tanımlanan hata fonksiyonunu göz önüne alırsak,

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \quad \text{ise}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\} = e^t \cdot \text{erf}(\sqrt{t})$$

olarak bulunur.

3.4 Basit Kesirlere Ayırma

$P(s)$ ve $Q(s)$, $P(s)$ 'nin derecesi $Q(s)$ 'ninkinden küçük olan polinomlar olmak üzere $P(s)/Q(s)$ biçimindeki bir rasyonel fonksiyon basit kesir diye adlandırılan, rasyonel fonksiyonların toplamı olarak ifade edilebilir. Böylece basit kesirlerin her birinin ayrı ayrı ters Laplace dönüşümleri bulunarak $L^{-1}\{P(s)/Q(s)\}$ elde edilir.

3.4.1 Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{2s^3 + 10s^2 + 15s + 9}{(s+1)^2(s^2 + 2s + 2)}\right\} \quad \text{dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$\frac{2s^3 + 10s^2 + 15s + 9}{(s+1)^2(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 2}$$

$\Rightarrow$ Paydalar eşitlenip düzenlersek,

$$2s^3 + 10s^2 + 15s + 9 = (A + C)s^3 + (B + 2C + 3A + D)s^2 + (2B + C + 4A + 2D)s + D + 2B + 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 0B + C + 0D = 2 \\ 3A + B + 2C + D = 10 \\ 4A + 2B + C + 2D = 15 \\ 2A + 2B + 0C + D = 9 \end{cases} \Rightarrow \text{Birinci dereceden dört bilinmeyenli bir denklemle karşılarız. Bu denklemi çözmek için katsayılar}$$

matrisinin tersi ile $\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektörünü çarpıyoruz.

$$\Rightarrow A = 1$$

$$B = 2$$

$$C = 1$$

$$D = 3$$

olarak bulunur. Şimdi değerleri yerine yazıp, ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{2s^3 + 10s^2 + 15s + 9}{(s+1)^2 (s^2 + 2s + 2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{s+3}{s^2 + 2s + 2} \right\}$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + 2 L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2 + 1} \right\}$$

$\Rightarrow$ Bu dönüşümleri bulmak için (3.2)'yi kullanırsak

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} = e^{-t} \cdot t \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+1)^2 + 1} \right\} = e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t$$

$$= e^{-t} + 2te^{-t} + e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t$$

$$= e^{-t} (1 + 2t + \cos t + 2 \sin t)$$

elde edilir.

3.4.2 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3} \quad (*)$$

(*) ifadesinin her iki yanını $(s+1)$ ile çarpıp $s \rightarrow -1$ için limit alırsak

$$A = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

(*) ifadesinin her iki yanını $(s-2)^3$ le çarpıp $s \rightarrow 2$ için limit alırsak $D = -7$ bulunur.

Ancak bu yöntemle C ve B'yi hesaplamak olanaksızdır. A ve D'yi bulduktan sonra s'ye iki değer verip C ve B'nin bulunduğu birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem elde ederiz, şöyle ki, $s = 0$ ve $s = 1$ için,

$$\frac{11}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{C}{4} - \frac{B}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{21}{2} = -\frac{1}{6} + 7 + C - B$$

Bu eşitlikler düzenlenip çözülürse,

$$C = 4 \text{ ve } B = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{-7}{(s-2)^3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 4te^{2t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t}$$

elde edilir.

3.4.3 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

paydaları eşitleyip düzenlersek,

$$s^2 + 2s + 3 = (A + C)s^3 + (2A + B + 2C + D)s^2 + (5A + 2B + 2C + 2D)s + 5B + 2D$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A + 0.B + C + 0.D = 0 \\ 2A + B + 2C + D = 1 \\ 5A + 2B + 2C + 2D = 2 \\ 0.A + 5B + 0.C + 2D = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \\ C = 0 \\ D = \frac{2}{3} \end{array} \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1/3}{s^2 + 2s + 2} + \frac{2/3}{s^2 + 2s + 5} \right\} = \frac{1}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right\} + \frac{2}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 4} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} e^{-t} \sin t + \frac{2}{3} \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

$$= \frac{1}{3} e^{-t} \{ \sin t + \sin 2t \}$$

elde edilir.

3.5 Duhamel Formülü ve Uygulanması

3.5.1 Duhamel Formülü

$[0, \infty]$ aralığında $f(t)$ fonksiyonu sürekli, $g(t)$ fonksiyonu da sürekli türeve sahip olsun, o zaman,

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad \text{ve} \quad L\{g(t)\} = G(s)$$

olmak üzere,

$$L^{-1}\{s F(s) G(s)\} = f(t) \cdot g(0) + \int_0^t f(u) g'(t-u) du \quad (3.14)$$

formülü doğrudur.

(3.14)'ü ispatlamak için konvolüsyon teoremini kullanabiliriz.

$$L^{-1}\{F(s) G(s)\} = \int_0^t f(u) g(t-u) du$$

$\Rightarrow$ sağ tarafın t parametresine göre türevini alalım.

$\int_0^t g(t-u) f(u) du$ 'nun türevini alırken Leibnitz kuralını kullanalım. Leibnitz kuralı aşağıda

not başlığı altında açıklanmıştır.

Not:

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(t, u) du = \int_{A(t)}^{B(t)} f_t(t, u) du + f(t, B(t)) \cdot B_t - f(t, A(t)) \cdot A_t$$

şeklinde ifade edilen denklem Leibnitz kuralıdır.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t f(u) g(t-u) du = \int_0^t f(u) g'(t-u) du + g(0) \cdot f(t) \cdot 1 - 0$$

$$= f(t) \cdot g(0) + \int_0^t f(u) g'(t-u) du$$

elde edilir. Laplace dönüşümünün özelliklerinden biri olan,

$$L \{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) \text{ eşitliğinden,}$$

$$L \left\{ \int_0^t f(u) g(t-u) du \right\} = F(s) G(s)$$

$$L \left\{ \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(u) g(t-u) du \right) \right\} = s F(s) G(s)$$

Şimdi her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(u) g(t-u) du \right) = f(t) \cdot g(0) + \int_0^t f(u) g'(t-u) du = L^{-1} \{s F(s) G(s)\}$$

elde edilir.

Duhamel formülündeki $\int_0^t f(u) g'(t-u) du$ integraline Duhamel integrali denir.

Duhamel formülü yardımıyla başlangıç değerleri sıfır olan,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad (a_0 \neq 0, t > 0) \quad (3.15)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (3.16)$$

problemi çözülebilir.

Bu problemi çözmek için (3.15) eşitliğinde y yerine x alalım ve eşitliğin sağ tarafını da 1'e eşitleyelim.

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 1, \quad (t > 0) \quad (3.17)$$

yardımcı problemini ele alalım ve $L\{x(t)\} = X(s)$, $L\{y(t)\} = Y(s)$ olsun. (3.15) ve (3.17) problemlerinin Laplace dönüşümlerini alalım.

$$\Rightarrow a_0 L\{y^{(n)}\} + a_1 L\{y^{(n-1)}\} + a_2 L\{y^{(n-2)}\} + \dots + a_{n-1} L\{y'\} + a_n L\{y\} = F(s)$$

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + a_2 s^{n-2} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = F(s)$$

$$P_n(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \text{ olarak ele alırsak,}$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{P_n(s)} \quad (3.18)$$

ve aynı şekilde $X(s)$ 'yi de hesaplarsak,

$$X(s) = \frac{1}{s P_n(s)} \quad (3.19)$$

elde edilir ki, (3.18) ve (3.19)'u kullanırsak,

$$Y(s) = s F(s) X(s) \quad (3.20)$$

bulunur, (3.20) eşitliğine Duhamel formülünü uygularsak,

$$L^{-1}\{s F(s) X(s)\} = f(t) \cdot x(0) + \int_0^t f(u) x'(t-u) du, \quad x(0) = 0 \text{ idi}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{s F(s) X(s)\} = \int_0^t f(u) x'(t-u) du$$

elde edilir, buradan

$$L^{-1}\{s F(s) X(s)\} = L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \int_0^t f(u) x'(t-u) du \quad (3.21)$$

elde edilir.

Şimdi bir örnekle bu formülün kullanılışını açıklayalım.

3.5.2 Örnek:

$y'' + y' = t$, $y(0) = y'(0) = 0$ problemini Duhamel formülünü kullanarak çözelim.

Çözüm:

$x'' + x' = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$ yardımcı problemini ele alalım. Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak.

$s^2 X(s) - s x(0) - x'(0) + s X(s) - x(0) = \frac{1}{s}$, $x(0) = x'(0) = 0$ değerlerini kullanarak düzenlersek,

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Şimdi ters Laplace dönüşümünü almak için basit kesirlere ayıralım.

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

$$\Rightarrow A = -1, B = 1, C = 1$$

elde edilir.

$$\Rightarrow L^{-1}\{X(s)\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\Rightarrow x(t) = -1 + t + e^{-t} \text{ elde edilir ki türev alırsak,}$$

$$x'(t) = -e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t}$$

bulunur. Şimdi (3.21) formülü yardımıyla, $f(t) = t$ ve $x'(t) = 1 - e^{-t}$ olduğunu da gözönünde bulundurarak,

$$\int_0^t u(1 - e^{-(t-u)}) du, \text{ integralini çözmeliyiz.}$$

$$\Rightarrow \int_0^t u(1 - e^{-(t-u)}) du = \int_0^t u du - \int_0^t u e^{u-t} du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^t - e^{-t} \int_0^t u \cdot e^u du$$

$$= \frac{t^2}{2} - e^{-t} \left[u e^u - \int_0^t e^u du \right]_0^t = \frac{t^2}{2} - e^{-t} [u e^u - e^u]_0^t$$

$$= \frac{t^2}{2} - e^{-t} [t e^t - e^t + 1] = \frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t}$$

$$\Rightarrow y(t) = -e^{-t} + \frac{t^2}{2} - t + 1$$

olarak bulunur.

3.6 Heaviside Açılım Formülü

3.6.1 Teorem:

$P(s)$ ve $Q(s)$, $P(s)$ 'nin derecesi $Q(s)$ 'nin derecesinden daha küçük olan polinomlar olsun.

$Q(s)$ 'nin n farklı α_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ köke sahip olduğunu varsayalım. Buna göre,

$$L^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}, \quad t \geq 0 \quad (3.22)$$

formülü elde edilir. Bu formüle Heaviside açılım formülü veya teoremi denir.

İspat:

$Q(s)$ 'nin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n farklı kökü olduğundan, basit kesirlere ayırırsak,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{A_k}{s - \alpha_k} + \dots + \frac{A_n}{s - \alpha_n} + \dots \quad (3.23)$$

elde ederiz. Her iki yanı $s - \alpha_k$ ile çarpıp $s \rightarrow \alpha_k$ için L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} (s - \alpha_k) \right] = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left[\frac{A_1}{(s - \alpha_1)} (s - \alpha_k) + \frac{A_2}{(s - \alpha_2)} (s - \alpha_k) + \dots + \frac{A_k}{(s - \alpha_k)} (s - \alpha_k) + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha_n)} (s - \alpha_k) \right]$$

$$\lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)} (s - \alpha_k) = A_k = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left(\frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right) = P(\alpha_k) \cdot \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{1}{Q'(s)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

Burada $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $Q(s)$ 'nin kökleri olduğundan $Q(\alpha_k) = 0$ dır.

$$\Rightarrow A_1 = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}, A_2 = \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}, \dots, A_n = \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}$$

bulunur, bu değerler (3.23)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} \frac{1}{(s-\alpha_1)} + \dots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \frac{1}{(s-\alpha_k)} + \dots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} \frac{1}{(s-\alpha_n)}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} + \dots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} + \dots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} e^{\alpha_n t} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

Heaviside formülü elde edilir.

3.6.1.1 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{s+4}{2s^2+5s+3}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

Heaviside formülüne göre,

$$P(s) = s + 4, \quad Q(s) = 2s^2 + 5s + 3 = 2(s+1)\left(s + \frac{3}{2}\right) \text{ dir.}$$

O halde $Q(s)$ 'nin kökleri $s_1 = -1, s_2 = -\frac{3}{2}$ dir.

$Q'(s) = 4s + 5$ olur ki,

$$L^{-1}\left\{\frac{s+4}{2s^2+5s+3}\right\} = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} e^{-t} + \frac{P\left(-\frac{3}{2}\right)}{Q'\left(-\frac{3}{2}\right)} e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$= 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$$

olarak bulunur.

Not 1:

$s = a$ $Q(s)$ 'nin m katlı kökü olsun o zaman $\frac{P(s)}{Q(s)}$ nin ters Laplace dönüşümü şöyle bulunur,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \frac{A_m}{(s-a)^m} \quad (3.24)$$

olur ki, A_m katsayılarını bulmak için eşitliğin her iki tarafını $(s-a)^m$ ile çarpalım.

$$\frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} = A_1(s-a)^{m-1} + A_2(s-a)^{m-2} + \dots + A_{m-1}(s-a) + A_m \quad (3.25)$$

elde edilir, $s \rightarrow a$ giderken limit alınırsa, A_m katsayısı,

$$A_m = \left[\frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} \right]_{s=a}$$

olarak bulunur. (3.25) denklemini s 'ye göre türetirsek,

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} \right] = A_1(m-1)(s-a)^{m-2} + A_2(m-2)(s-a)^{m-3} + \dots + A_{m-1}$$

ve $s \rightarrow a$ giderken limit alırsak A_{m-1} katsayısı,

$$A_{m-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} \right]_{s=a}$$

olarak bulunur, bu şekilde devam edilirse,

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \left\{ \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \left[\frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} \right]_{s=a} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

elde edilir. O halde,

$$H(s) = \frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} \text{ dersek}$$

$$A_m = H(a)$$

$$A_{m-1} = H'(a)$$

$$A_{m-2} = \frac{1}{2!} H''(a)$$

$\vdots$

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} H^{(m-k)}(a)$$

dır. Diğer taraftan,

$$L^{-1} \left\{ \frac{A_k}{(s-a)^k} \right\} = A_k \frac{e^{at} t^{k-1}}{(k-1)!} \text{ olarak bulunur ki,}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \left[A_1 + A_2 \frac{t}{1!} + \dots + A_{m-1} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right] e^{at} \quad (3.26)$$

elde edilir. (Aydın vd., 2001)

3.6.2 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3(s+1)^2}\right\} \text{ dönüşümünü bulalım.}$$

Çözüm:

$$\frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3(s+1)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s^3} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{B_2}{(s+1)^2}$$

Şimdi A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ için

$$H(s) = \frac{(s-0)^3(5s^3 - 6s - 3)}{s^3(s+1)^2} = \frac{5s^3 - 6s - 3}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow A_3 = H(0) = \frac{-3}{1} = -3$$

$$A_2 = H'(0) = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2!} H''(0) = 3$$

olarak bulunur, benzer şekilde B katsayıları için,

$b = -1$ için,

$$H_1(s) = \frac{(s+1)^2(5s^3 - 6s - 3)}{s^3(s+1)^2} = \frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3}$$

$$\Rightarrow B_2 = H_1(-1) = 2$$

$$B_1 = H_1'(-1) = -3$$

olarak bulunur. Buna göre ters Laplace dönüşümü,

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3(s+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{s} - \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - 3 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} - 3 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + 2 L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} \\
&= 3 - 3 \frac{t^2}{2} - 3 e^{-t} + 2 t e^{-t} \\
&= 2 t e^{-t} - 3 e^{-t} - 3 \frac{t^2}{2} + 3
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Not 2:

$Q(s)$ 'nin kökleri kompleks ve birbirinden farklı ise ters Laplace dönüşümü şöyle bulunur,

$s = a = \alpha + i \beta$ $Q(s)$ 'nin kökü olsun. Bu taktirde eşleniği $\bar{a} = \alpha - i \beta$ da köküdür ve,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{s-\bar{a}} \quad (3.27)$$

Şimdi ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$L^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = A_1 e^{at} + A_2 e^{\bar{a}t} \quad (3.28)$$

bulunur.

$$H(s) = \frac{(s-a)P(s)}{Q(s)} \text{ diyelim, buna göre } A_1 \text{ ve } A_2 \text{ katsayıları,}$$

$$A_1 = H(a)$$

$$A_2 = H(\bar{a})$$

olur ki, $H(a)$ ve $H(\bar{a})$ 'yi

$$H(a) = H_1 + i H_2, \quad H(\bar{a}) = H_1 - i H_2$$

şeklinde tanımlayalım, o zaman (3.28) dönüşümü şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} &= \left[(H_1 + i H_2) e^{(\alpha+i\beta)t} + (H_1 - i H_2) e^{(\alpha-i\beta)t} \right] \\
&= \left[(H_1 + i H_2) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + (H_1 - i H_2) e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \right]
\end{aligned}$$

düzenlersek,

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = 2e^{\alpha t} (H_1 \cos \beta t - H_2 \sin \beta t),$$

elde edilir. (Aydın vd., 2001)

3.6.3 Örnek:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 2s + 2}\right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s}{s^2 - 2s + 2} \Rightarrow Q(s) = s^2 - 2s + 2 \text{ olup kökleri,}$$

$a = 1 + i$, $\bar{a} = 1 - i$ ve $\alpha = 1$, $\beta = 1$ dir.

$$H(s) = \frac{(s-a)P(s)}{(s-a)(s-\bar{a})} = \frac{s}{(s-\bar{a})}$$

$$H(a) = \frac{1+i}{(1+i)-(1-i)} = \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Buna göre,

$$H_1 = \frac{1}{2}, H_2 = -\frac{1}{2} \text{ olarak bulunur}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 2s + 2}\right\} = 2e^t \left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \right) = e^t (\cos t + \sin t)$$

olarak bulunur.

Not 3:

$Q(s)$ nin kökleri kompleks ve katlı ise ters Laplace dönüşümü şöyle bulunur,

$s = a = \alpha + i\beta$ $Q(s)$ 'nin m katlı kökü olsun, buna göre,

$\bar{a} = \alpha - i\beta$ da $Q(s)$ 'nin m katlı köküdür. Bu durumda,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-a} + \dots + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{B_1}{(s-\bar{a})} + \dots + \frac{B_{m-1}}{(s-\bar{a})^{m-1}} + \frac{B_m}{(s-\bar{a})^m} \quad (3.29)$$

yazılır ve Not 2'ye göre,

$$H(s) = \frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} \text{ ve } H_1(s) = \frac{(s-\bar{a})^m P(s)}{Q(s)}$$

olmak üzere,

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} H^{(m-k)}(a) \quad \text{ve} \quad B_k = \frac{1}{(m-k)!} H_1^{(m-k)}(\bar{a})$$

şeklindedir.

$$L^{-1} \left\{ \frac{A_k}{(s-a)^k} \right\} = A_k \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{ve} \quad L^{-1} \left\{ \frac{B_k}{(s-\bar{a})^k} \right\} = B_k \frac{e^{(\alpha-i\beta)t} t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \left[A_1 + A_2 \frac{t}{1!} + \dots + A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right] e^{(\alpha+i\beta)t} + \left[B_1 + B_2 \frac{t}{1!} + \dots + B_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right] e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A_k e^{\alpha} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} B_k e^{\alpha} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha} [(A_k + B_k) \cos \beta t + i (A_k - B_k) \sin \beta t]$$

elde edilir. (Aydın vd., 2001)

3.7 Beta Fonksiyonu

3.7.1 Tanım:

$m > 0$, $n > 0$ ise beta fonksiyonu,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (3.30)$$

şeklinde tanımlanır.

3.7.2 Teorem:

$m > 0$, $n > 0$ olmak üzere,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

dir.

İspat:

$$g(t) = \int_0^t x^{m-1} (t-x)^{n-1} dx$$

olsun, konvölüsyon teoremine göre,

$$L\{g(t)\} = L\{t^{m-1}\} \cdot L\{t^{n-1}\} = \frac{\Gamma(m)}{s^m} \cdot \frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}}$$

Şimdi ters dönüşümle $g(t)$ 'yi bulalım,

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}} \right\} = \Gamma(m)\Gamma(n) L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{m+n}} \right\} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1}$$

veya,

$$\int_0^t x^{m-1} (t-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1}$$

elde edilir, $t = 1$ alırsak,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

elde edilir.

3.7.2.1 Örnek:

$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} Q \cdot \cos^{2n-1} Q dQ$ sonucunu beta fonksiyonu cinsinden bulalım.

Çözüm:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ idi,}$$

$x = \sin^2 Q$ dersek,

$$dx = 2 \sin Q \cdot \cos Q dQ$$

$$B(m, n) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2} Q \cdot \cos^{2n-2} Q \cdot 2 \sin Q \cdot \cos Q dQ$$

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} Q \cdot \cos^{2n-1} Q \cdot dQ = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} Q \cdot \cos^{2n-1} Q dQ = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} = \frac{1}{2} B(m, n) \quad (3.31)$$

elde edilir.

3.7.2.2 Örnek:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 Q \cdot \cos^6 Q dQ$ belirli integralini hesaplayalım.

Çözüm:

(3.31)'e göre,

$$2m - 1 = 4 \Rightarrow m = \frac{5}{2} \text{ ve } 2n - 1 = 6 \Rightarrow n = \frac{7}{2} \text{ olur ki,}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 Q \cdot \cos^6 Q dQ = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2 \Gamma(6)} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3\pi}{512}$$

olarak bulunur.

4. KOMPLEKS SAYILAR ve LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

Kompleks ters dönüşüm formülü ile ilgili açıklamaları yapmadan önce kompleks sayı şeklinde verilen bir fonksiyonun Laplace dönüşümünün bulunacağı birkaç örnek yapalım.

4.1 Örnek:

$L\{e^{i\omega t}\}$ dönüşümünü bulalım.

Çözüm:

Bu dönüşümü bulmak için 2. bölümde anlatılan Laplace dönüşümünün tanımını kullanalım.

$$\begin{aligned}
 L\{e^{i\omega t}\} &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(s-i\omega)} dt = \int_0^{\infty} e^{t(i\omega-s)} dt \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{i\omega - s} e^{t(i\omega-s)} \right]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{i\omega - s} e^{-t(s-i\omega)} \right]_0^R, \text{Re}\{s\} > 0 \\
 &= 0 - \frac{1}{i\omega - s} \\
 &\Rightarrow L\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s - i\omega}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir.

4.2 Örnek:

$L\{e^{-i\omega t}\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

Yine bir önceki örneğe benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 L\{e^{-i\omega t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(s+i\omega)} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-s - i\omega} \cdot e^{-t(s+i\omega)} \right]_0^R \\
 &= 0 - \frac{1}{-s - i\omega} = \frac{1}{s + i\omega}, \text{Re}\{s\} > 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.3 Örnek:

$L\{\cos \omega t\}$ ifadesini $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ formülünü kullanarak bulalım.

Çözüm:

$$L\{\cos wt\} = L\left\{\frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{iwt}\} + \frac{1}{2}L\{e^{-iwt}\}$$

$\Rightarrow$ (4.1) ve (4.2)'ye göre,

$$L\{\cos wt\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s - iw} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + iw} = \frac{1}{2} \left(\frac{s + iw + s - iw}{s^2 + w^2} \right)$$

$$\Rightarrow L\{\cos wt\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s - iw} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + iw} = \frac{1}{2} \left(\frac{s + iw + s - iw}{s^2 + w^2} \right)$$

$$\Rightarrow L\{\cos wt\} = \frac{s}{s^2 + w^2}, \text{ Re}\{s\} > 0$$

olarak bulunur.

4.4 Örnek:

Şimdi de benzer şekilde $\sin wt = \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}$ formülünü kullanarak $L\{\sin wt\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$L\{\sin wt\} = L\left\{\frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}L\{e^{iwt}\} - \frac{1}{2i}L\{e^{-iwt}\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - iw} - \frac{1}{s + iw} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{s + iw - s + iw}{s^2 + w^2} \right)$$

$$\Rightarrow L\{\sin wt\} = \frac{w}{s^2 + w^2}, \text{ Re}\{s\} > 0$$

elde edilir.

4.5 Kompleks Ters Dönüşüm Formülü

$F(s) = L\{f(t)\}$ ise,

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad t > 0 \quad (4.3)$$

ile verilir. $t < 0$ için $f(t) = 0$ dır. Bu sonuca kompleks ters dönüşüm integrali veya formülü denir. Bu formül aynı zamanda Bromwich integral formülü olarak da bilinir.

$s = x + iy$ olmak üzere (4.3) integrali kompleks düzlemde $s = a$ doğrusu boyunca hesaplanır. $s = a$ doğrusu tekil noktaların (kutup, dallanma ve esas tekil noktalar) tamamının sağında yer alacak biçimde a reel sayısı seçilir.

4.6 Ters Laplace Dönüşümlerinin Bulunmasında Rezidü Teoreminin Kullanılması

Sabit bir a reel sayısı için $s = a$ doğrusunun, $F(s)$ fonksiyonunun sadece kutup noktalarından ibaret olan tekil noktalarının tamamının sağında kaldığını düşünelim. O zaman,

$f(t) = F(s)$ 'nin kutup noktalarında $e^{st} F(s)$ 'nin rezidülerinin toplamı

$$\Rightarrow f(t) = \sum F(s) \text{ 'nin kutup noktalarında } e^{st} F(s) \text{ 'nin rezidüleri} \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Not (Tekil Nokta):

$F(z)$ 'nin analitik olmadığı bir nokta $F(z)$ 'nin bir tekil noktasıdır.

Not (Kutup Noktaları):

$F(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^n}$, $\phi(a) \neq 0$ olsun. Burada $\phi(z)$, $z = a$ noktasını da ihtiva eden bir bölgede

analitiktir ve n pozitif bir tam sayıdır. Buna göre, $z = a$ da, $F(z)$ 'nin bir tekil noktası vardır ve bu noktaya n . mertebeden kutup noktası denir, $n = 1$ ise kutup noktasına basit kutup noktası denir. Örneğin,

$F(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+2)}$ 'nin iki tane tekil noktası vardır. $z = 2$ de ikinci mertebeden bir kutup

noktası ve $z = -2$ de basit kutup noktası vardır.

Not (Rezidü):

$F(z)$ 'nin $z = a$ kutup noktasındaki rezidüsü,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n F(z)\} \quad (4.5)$$

formülüyle hesaplanır.

4.6.1 Örnek:

a) $s = 2$ kutup noktasında $\frac{e^{st}}{s-2}$ 'nin rezidüsünü bulalım.

b) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

a) $s = 2$ basit kutup noktasındaki rezidü (4.5)'e göre,

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \frac{e^{st}}{(s-2)} = e^{2t}$$

olarak bulunur.

b) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$ (4.4)'e göre,

$\sum e^{st} F(s)$ 'nin rezidüleridir. Buna göre,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \frac{e^{st}}{(s-2)} = e^{2t}$$

olarak bulunur.

4.6.2 Örnek:

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$e^{st} F(s) = \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \text{ olur.}$$

$\Rightarrow s = -1$ basit kutup noktasındaki rezidü,

$$\lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \left\{ \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right\} = \frac{1}{9} e^{-t}$$

$\Rightarrow s = 2$ 'de ikinci mertebeden bir kutup noktası olup bu noktadaki rezidü,

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left\{ (s-2)^2 \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{t e^{st} (s+1) - e^{st}}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{t e^{2t} \cdot 3 - e^{2t}}{9} = \frac{1}{3} t e^{2t} - \frac{1}{9} e^{2t}$$

olarak bulunur. (4.4)'e göre,

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\} = \sum \text{rezidüler} = \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{3} t e^{2t} - \frac{1}{9} e^{2t}$$

olarak bulunur.

4.6.3 Örnek:

$$L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)^3 (s-1)^2} \right\} \text{ dönüşümünü hesaplayalım.}$$

Çözüm:

$$e^{st} F(s) = \frac{s e^{st}}{(s+1)^3 (s-1)^2} \text{ olur ve ters Laplace dönüşümünün sonucu } s = -1 \text{ deki üçüncü, } s = 1$$

deki ikinci mertebeden kutup noktalarında hesaplanan rezidülerin toplamına eşittir.

$\Rightarrow s = -1$ deki rezidü,

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s+1)^3 \frac{s e^{st}}{(s+1)^3 (s-1)^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{s e^{st}}{(s-1)^2} \right\}$$

$\Rightarrow$ ikinci mertebeden türev alınıp $\frac{1}{2}$ ile çarpıp $s = -1$ alırsak,

$$= \frac{1}{16} e^{-t} (1 - 2t^2) \text{ ve,}$$

$s = 1$ deki rezidü,

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left\{ (s-1)^2 \frac{s e^{st}}{(s+1)^3 (s-1)^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{s e^{st}}{(s+1)^3} \right\}$$

$\Rightarrow s'$ 'ye göre türev alıp $s = 1$ alırsak,

$$= \frac{1}{16} e^t (2t - 1)$$

olarak bulunur, öyleyse,

$$L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)^3 (s-1)^2} \right\} = \sum \text{rezidüler} = \frac{1}{16} e^{-t} (1 - 2t^2) + \frac{1}{16} e^t (2t - 1)$$

olarak bulunur.

4.6.4 Örnek:

$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{[(s+i)(s-i)]^2} = \frac{1}{(s+i)^2 (s-i)^2}$$

$\Rightarrow e^{st} F(s) = \frac{e^{st}}{(s+i)^2 (s-i)^2}$ olur ve ters Laplace dönüşümünün sonucu $s = i$, $s = -i$ deki ikinci

mertebeden kutup noktalarına ait rezidülerin toplamına eşittir.

$s = i$ deki rezidü,

$$\lim_{s \rightarrow i} \frac{d}{ds} \left\{ (s-i)^2 \frac{e^{st}}{(s+i)^2 (s-i)^2} \right\} = -\frac{1}{4} t e^{it} - \frac{1}{4} i e^{it}$$

$s = -i$ deki rezidü,

$$\lim_{s \rightarrow -i} \frac{d}{ds} \left\{ (s+i)^2 \frac{e^{st}}{(s+i)^2 (s-i)^2} \right\} = -\frac{1}{4} t e^{-it} + \frac{1}{4} i e^{-it}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \sum \text{rezidüler} = -\frac{1}{4} t e^{it} - \frac{1}{4} i e^{it} - \frac{1}{4} t e^{-it} + \frac{1}{4} i e^{-it}$$

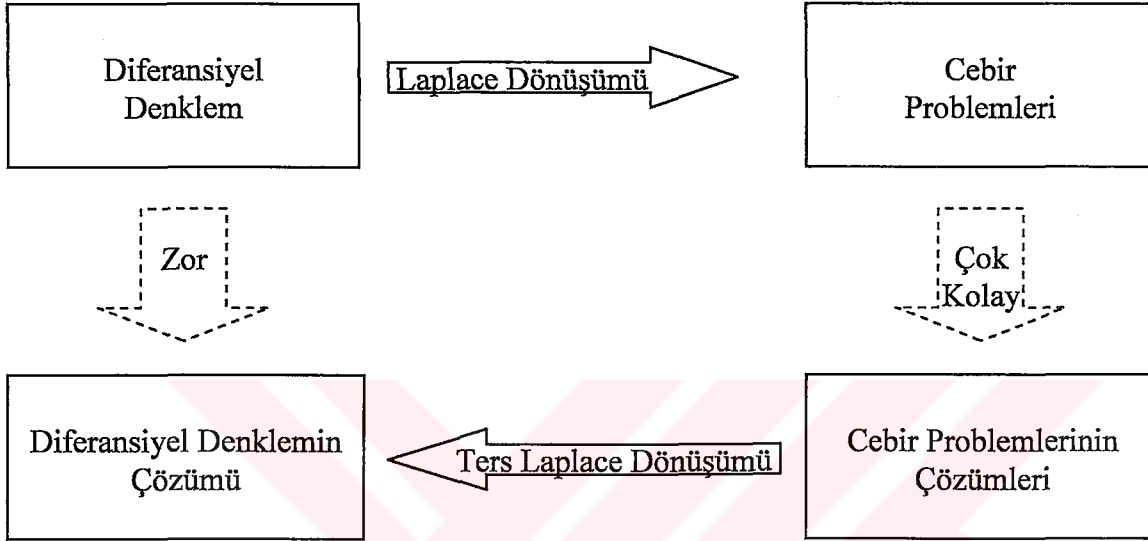
$$= -\frac{1}{4} t (e^{it} + e^{-it}) - \frac{1}{4} i (e^{it} - e^{-it})$$

$$= -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$$

olarak bulunur.

5. LAPLACE ve TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİNİN DİFERANSİYEL DENKLEME UYGULANMASI

Laplace dönüşümü her türlü başlangıç değer problemlerini çözmek için formüle edilmiş güçlü bir araçtır. Zor çözülebilecek diferansiyel denklemleri çözümün kolayca bulunabileceği basit cebir problemlerine dönüştürür. Ardından ters Laplace dönüşümü bulunarak verilmiş zor sayılabılacak diferansiyel denklemlerin çözümü sağlanır. (Şekil 5.1)



Şekil 5.1 Diferansiyel denklemin çözümünde Laplace dönüşümü

5.1 Sabit Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemler

Sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümü Şekil 5.1’de açıklandığı gibi çözülebilir. Örneğin, ikinci mertebeden,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + \beta y = f(t) \quad \text{veya} \quad y'' + \alpha y' + \beta y = F(t) \quad (5.1)$$

doğrusal diferansiyel denklemi çözmek isteyelim. Burada α ve β sabit büyüklükler olmak üzere,

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b \quad (5.2)$$

a ve b başlangıç koşullarını sağlayan sabitlerdir. Çözüm için Şekil 5.1’deki gibi, (5.1)’in her iki yanının Laplace dönüşümünü alır ve (5.2)’yi kullanarak $L\{y(t)\} = Y(s)$ ’yi bulabileceğimiz cebirsel bir denklem elde ederiz. $Y(s)$ ’nin ters Laplace dönüşümünü alarak istenen çözümü buluruz. Bu yöntem daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere kolayca genişletilebilir.

5.1.1 Örnek:

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım,

$$L\{y''\} + 2L\{y'\} + 5L\{y\} = L\{e^{-t} \sin t\}$$

$$(s^2 Y - sy(0) - y'(0)) + 2(sY - y(0)) + 5Y = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\Rightarrow s^2 Y - s \cdot 0 - 1 + 2sY + 5Y = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\Rightarrow Y(s^2 + 2s + 5) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^2 + 2s + 2}$$

$$Y = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Şimdi basit kesirlere ayrılarak ters dönüşümünü bulalım.

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 5} \quad (*)$$

şimdi (*) eşitsizliğinin her iki tarafını $(s^2 + 2s + 2) \cdot (s^2 + 2s + 5)$ ile çarpalım.

$$s^2 + 2s + 3 = (s^2 + 2s + 5)(As + B) + (s^2 + 2s + 2)(Cs + D)$$

$$s^2 + 2s + 3 = s^3(A + C) + s^2(B + 2A + D + 2C) + s(2B + 5A + 2D + 2C) + 5B + 2D$$

$$A + 0 \cdot B + C + 0 \cdot D = 0$$

$$2A + B + 2C + D = 1$$

$$\Rightarrow 5A + 2B + 2C + 2D = 2 \quad (**)$$

$$0 \cdot A + 5B + 0 \cdot C + 2D = 3$$

(**) birinci dereceden dört bilinmeyenli denklemi çözmek için:

K katsayılar matrisi olmak üzere,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad K^{-1} \text{ bulup } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ matrisi ile çarpalım.}$$

$$\Rightarrow A=0, B=\frac{1}{3}, C=0, D=\frac{2}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1/3}{s^2 + 2s + 2} + \frac{2/3}{s^2 + 2s + 5} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right\} + \frac{2}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 4} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} \sin t + \frac{2}{3} \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

$$y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} (\sin t + \sin 2t)$$

olarak bulunur.

5.1.2 Örnek:

$$y'' + 2y' + 5y = \sin 3t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$L\{y''\} + 2L\{y'\} + 5L\{y\} = L\{\sin 3t\}$$

$$\Rightarrow (s^2 Y - sy(0) - y'(0)) + 2(sY - y(0)) + 5Y = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$Y(s) = \frac{s+1 + \frac{3}{s^2+9}}{(s^2+2s+5)} = \frac{s+1}{s^2+2s+5} + \frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)}$$

olarak bulunur. Şimdi ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2+2s+5} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} \right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2+2s+5} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \right\} = e^{-t} \cos 2t \quad (*)$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} \right\} \text{ dönüşümünü bulmak için basit kesirlere ayıralım.}$$

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

paydalar eşitlenip, katsayılar eşitlenirse,

$$A = -\frac{3}{26}, \quad B = -\frac{3}{13}, \quad C = \frac{3}{26}, \quad D = -\frac{6}{13}$$

olarak bulunur.

$$\Rightarrow \frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} = \frac{3}{26} \left(-\frac{s+2}{s^2+9} + \frac{s+4}{s^2+2s+5} \right)$$

$$\Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s+2}{s^2+9} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+9} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+9} \right\} = \cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t \quad (**)$$

ve,

$$L^{-1} \left\{ \frac{s+4}{s^2+2s+5} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+1)^2+4} \right\} = e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t \quad (***)$$

olarak bulunur ki (*), (**) ve (***) daki değerleri kullanırsak,

$$y(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{26} \left(-\cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t + e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t \right)$$

elde edilir.

5.1.3 Örnek:

$$y'' + 9y = \cos 2t, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = -1$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$$y'(0) \text{ bilinmemektedir} \Rightarrow y'(0) = c \text{ olsun.}$$

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$L\{y''\} + 9L\{y\} = L\{\cos 2t\}$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 9Y = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$s^2Y - s - c + 9Y = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s^2 + 9) = \frac{s}{s^2 + 4} + s + c$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)} \Rightarrow \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)} \text{ basit kesirlere ayırırsak,}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)} - \frac{s}{5(s^2+9)}$$

$$Y(s) = \frac{4}{5} \left(\frac{s}{s^2+9} \right) + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)}$$

Şimdi ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{4}{5} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + c L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} + \frac{1}{5} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{c}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

Şimdi verilen $y(\pi/2) = -1$ değerini yerine koyarak c 'yi bulalım.

$$-1 = \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{c}{3}(-1) + \frac{1}{5}(-1)$$

$$-1 + \frac{1}{5} = -\frac{c}{3} \Rightarrow c = \frac{12}{5}$$

olarak bulunur.

$$\Rightarrow y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

elde edilir.

5.1.4 Örnek:

$y'' - a^2 y = f(t)$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$ olsun ve her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$L\{y''\} - a^2 L\{y\} = F(s)$$

$$s^2 Y - s c_1 - c_2 - a^2 Y = F(s)$$

$$Y(s^2 - a^2) = F(s) + s c_1 + c_2 \Rightarrow Y = \frac{s c_1 + c_2}{s^2 - a^2} + \frac{F(s)}{s^2 - a^2}$$

Şimdi her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = c_1 L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - a^2}\right\} + c_2 L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - a^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2 - a^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cosh at + \frac{c_2}{a} \sinh at + f(t) * \frac{1}{a} \sinh at$$

$$\frac{c_2}{a} = c_3 \text{ diyebiliriz,}$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cosh at + c_3 \sinh at + \frac{1}{a} \int_0^t f(u) \sinh [a(t-u)] du$$

elde edilir.

5.1.5 Örnek:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 1 \\ 2 & , \quad t \geq 1 \end{cases} \text{ ise,}$$

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

şekilde verilen diferansiyel denklemi çözelim.

Çözüm:

$f(t) = 2 \cdot H(t-1)$ basamak fonksiyonu şeklinde yazabiliriz.

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak,

$$L\{y''\} + L\{y\} = L\{f(t)\} = 2 L\{H(t-1)\}$$

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + Y = 2 \frac{e^{-s}}{s}$$

$$s^2 Y + Y = \frac{2 e^{-s}}{s} \Rightarrow Y = \frac{2 e^{-s}}{s(s^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{2 e^{-s}}{s(s^2 + 1)} \right\} \text{ olur ki, konvolüsyon teoremine göre,}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{2 e^{-s}}{s(s^2 + 1)} \right\} = 2 \left[L^{-1} \left\{ \frac{e^{-s}}{s} \right\} * L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} \right] = 2 (H(t-1) * \sin t)$$

$$\Rightarrow y(t) = 2 \int_0^t H(x-1) \cdot \sin(t-x) dx$$

Eğer $t < 1$ ise,

$$y(t) = 2 \int_0^t 0 \cdot \sin(t-x) dx = 0 \quad (*)$$

olur, $t \geq 1$ ise

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \left[\int_0^1 0 \cdot \sin(t-x) dx + \int_1^t 1 \cdot \sin(t-x) dx \right] \\ &= 2 \int_1^t \sin(t-x) dx = 2 \cos(t-x) \Big|_{x=1}^t = 2 - 2 \cos(t-1) \quad (**) \end{aligned}$$

(*) ve (**)’dan,

$$y(t) = H(t-1) [2 - 2 \cos(t-1)]$$

elde edilir.

5.1.6 Örnek:

$$y'' + 2y' - 15y = 6 \delta(t-9), \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 7$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım,

$$s^2 Y - s y(0) - y'(0) + 2(sY - y(0)) - 15Y = 6 e^{-9s}$$

$$(s^2 + 2s - 15)Y + 5s + 3 = 6e^{-9s}$$

$$Y(s) = \frac{6e^{-9s}}{(s+5)(s-3)} - \frac{5s+3}{(s+5)(s-3)}$$

$$= 6e^{-9s}F(s) - G(s)$$

Şimdi $F(s)$ ve $G(s)$ nin ters Laplace dönüşümlerini bulalım.

$$F(s) = \frac{1}{(s+5)(s-3)} = \frac{\frac{1}{8}}{s-3} - \frac{\frac{1}{8}}{s+5}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-5t}$$

$$G(s) = \frac{5s+3}{(s+5)(s-3)} = \frac{\frac{9}{4}}{s-3} + \frac{\frac{11}{4}}{s+5}$$

$$g(t) = \frac{9}{4}e^{3t} + \frac{11}{4}e^{-5t}$$

$\Rightarrow Y(s) = 6e^{-9s}F(s) - G(s)$ idi ve (2.54) denklemi ile verilmiş olan,

$L\{u_a \cdot f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ eşitliğini kullanırsak,

$$y(t) = 6L^{-1}\{e^{-9s}F(s)\} - L^{-1}\{G(s)\}$$

$$\Rightarrow y(t) = 6u_9(t)f(t-9) - g(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = 6u_9(t) \left[\frac{1}{8}e^{3(t-9)} - \frac{1}{8}e^{-5(t-9)} \right] - \frac{9}{4}e^{3t} - \frac{11}{4}e^{-5t}$$

elde edilir.

5.2 Değişken Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemler

Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümleri kullanılabilir. Bu yöntemin özellikle faydalı olabileceği denklem,

$$t^m y^{(n)}(t) \tag{5.3}$$

biçiminde olanlardır. Bunun Laplace dönüşümü Bölüm 2’de gösterildiği üzere,

$$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m} L \{y^{(n)}(t)\} \quad (5.4)$$

biçimindedir. Şimdi örnekler üzerinde değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini görelim.

5.2.1 Örnek:

$$y'' + 3ty' - 6y = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$L\{y''\} + 3L\{ty'\} - 6L\{y\} = L\{2\} \quad (*)$$

$L\{ty'\}$ (5.4)'e göre hesaplırsak,

$$L\{ty'\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} L\{y'\} = -\frac{d}{ds} (sY - y(0)) = -sY' - Y \text{ olur ki } (*) \text{ ifadesi}$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3(-sY' - Y) - 6Y = \frac{2}{s} \text{ şeklini alır, düzenlersek,}$$

$$-3sY' + (s^2 - 9)Y = \frac{2}{s}, \quad Y' \text{ ifadesini yalnız bırakmak için her iki tarafı } -3s'ye \text{ bölelim,}$$

$$Y' + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y = -\frac{2}{3s^2} \quad (**)$$

Şimdi $e^{\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right) ds}$ integrasyon çarpanını hesaplayalım.

$$e^{\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right) ds} = e^{3 \ln s - \frac{1}{3} \frac{s^2}{2}} = s^3 \cdot e^{-\frac{s^2}{6}} \text{ şeklinde bulunur, şimdi bulduğumuz integrasyon sabiti ile } (**)$$

ifadesini çarpalım.

$$s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y' + s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right) Y = -\frac{2}{3} s e^{-\frac{s^2}{6}}, \text{ her iki tarafın } s'ye \text{ göre integralini alalım.}$$

$$\int \left(s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y(s) \right)' ds = \int -\frac{2}{3} s e^{-\frac{s^2}{6}} ds$$

$$s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y(s) = 2 e^{-\frac{s^2}{6}} + c$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3} + c \frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3} \text{ ise ters Laplace dönüşümünün özelliklerinden biri olan,}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L\{f(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \text{ olmalıdır.}$$

c'yi bulmak için bu özelliği kullanalım.

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2}{s^3} + \lim_{s \rightarrow \infty} c \frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3} \text{ ifadesinin sıfır olması için } c=0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3} \text{ olduğundan ters Laplace dönüşümü ile,}$$

$$y(t) = t^2$$

olarak bulunur.

5.2.2 Örnek:

$$ty'' + y' + 4ty = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$L\{ty''\} + L\{y'\} + 4L\{ty\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + (sY - y(0)) - 4\frac{dY}{ds} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y - 3s) + sY - 3 - 4\frac{dY}{ds} = 0$$

$$3 - \left(2sY + s^2\frac{dY}{ds}\right) + sY - 3 - 4\frac{dY}{ds} = 0$$

$$-sY - s^2\frac{dY}{ds} - 4\frac{dY}{ds} = 0$$

$$\frac{dY}{ds}(s^2 + 4) = -sY$$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{-s ds}{s^2 + 4} \text{ olur ki her iki tarafın integralini alırsak,}$$

$$\ln Y = -\frac{1}{2} \ln|s^2 + 4| + c_1 \text{ elde edilir.}$$

$$\ln Y + \ln|s^2 + 4|^{1/2} = c_1$$

$$\ln \left(Y \cdot |s^2 + 4|^{1/2} \right) = c_1 \Rightarrow c_1 = \ln c_2 \text{ dersek}$$

$Y = \frac{c_2}{\sqrt{s^2 + 4}}$ olarak bulunur. Şimdi her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = c_2 L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2 + 4}}\right\}$$

Bessel fonksiyonu olarak bilinen $J_n(t)$ 'de,

$$L\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \text{ idi,}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2 + 4}}\right\} = J_0(2t) \text{ olarak bulunur.}$$

$\Rightarrow y(t) = c_2 J_0(2t)$ bulunur. c_2 'yi bulmak için $y(0) = 3$ ifadesini ele alalım. $c_2 J_0(0) = 3 \Rightarrow J_0(0) = 1$ olduğundan $c_2 = 3$ olarak bulunur.

$$\Rightarrow y(t) = 3 J_0(2t)$$

olarak bulunur.

5.2.3 Örnek:

$$ty'' + 2y' + ty = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$y'(0) = c$ diyelim ve her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım,

$$L\{ty''\} + 2L\{y'\} + L\{ty\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2 Y - sy(0) - y'(0)) + 2(sY - y(0)) - \frac{dY}{ds} = 0, \text{ düzenlersek,}$$

$$-s^2 Y' - Y' - 1 = 0 \Rightarrow Y' = \frac{-1}{s^2 + 1} \Rightarrow \frac{dY}{ds} = -\frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow dY = -\frac{ds}{s^2 + 1}$$

Şimdi son ifadede her iki tarafın integralini alalım,

$Y = -\arctan s + c$ bulunur. Ters Laplace dönüşümünün özelliklerinden biri olan $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ idi, buna göre

$$\lim_{s \rightarrow \infty} -\arctan s + c = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$\Rightarrow Y(s) = -\arctan s + \frac{\pi}{2}$ dir. Şimdi her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = L^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \arctan s\right\} = L^{-1}\left\{\arctan \frac{1}{s}\right\} \text{ olur ki bu ifadede Bölüm 1'de 2.2.9.1}$$

örnekte gösterildiği üzere

$$y(t) = L^{-1}\left\{\arctan \frac{1}{s}\right\} = \frac{\sin t}{t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

olarak bulunur.

5.3 Adi Diferansiyel Denklem Sistemleri

İki veya daha fazla diferansiyel denklemden oluşan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde de Laplace dönüşümlerinden yararlanılır. Çözüm yöntemi 5.1 ve 5.2 bölümde anlatılanla aynıdır. Şimdi çözümün nasıl yapıldığını birkaç örnek üzerinde görelim.

5.3.1 Örnek:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 2x$$

$x(0) = 8$ ve $y(0) = 3$ olan diferansiyel denklem sistemini çözelim.

Çözüm:

Denklem sisteminin Laplace dönüşümünü alalım.

$L(x) = X$ ve $L(y) = Y$ olmak üzere,

$$sX - x(0) = 2X - 3Y \Rightarrow sX - 8 = 2X - 3Y$$

$$sY - y(0) = Y - 2X \Rightarrow sY - 3 = Y - 2X$$

$$\Rightarrow (s-2)X + 3Y = 8 \quad (*)$$

$$2X + (s-1)Y = 3 \quad (**)$$

(*) ve (**) ifadelerini birlikte çözersek,

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

Aynı şekilde Y'yi de bulursak,

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

Şimdi $x(t)$ ve $y(t)$ 'yi bulmak için ters Laplace dönüşümünü alalım,

$$x(t) = L^{-1}\{X\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$$

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$$

$$y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

olarak bulunur.

5.3.2 Örnek:

$$w' + y = \sin x$$

$$y' - z = e^x$$

$$z' + w + y = 1$$

$w(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ olan diferansiyel denklem sistemini çözelim.

Çözüm:

Denklem sisteminin Laplace dönüşümünü alalım.

$$L\{w'\} + L\{y\} = L\{\sin x\}$$

$$L\{y'\} - L\{z\} = L\{e^x\}$$

$$L\{z'\} + L\{w\} + L\{y\} = L\{1\}$$

$$\Rightarrow sW(s) - 0 + Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow sW(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (*)$$

$$sY(s) - 1 - Z(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow sY(s) - Z(s) = \frac{s}{s-1} \quad (**)$$

$$sZ(s) - 1 + W(s) + Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow W(s) + Y(s) + sZ(s) = \frac{s+1}{s} \quad (***)$$

$\Rightarrow (*)$, $(**)$ ve $(***)$ ifadeleri birlikte bir önceki örnekteki gibi çözülürse,

$$W(s) = \frac{-1}{s(s-1)}, Y(s) = \frac{s^2 + s}{(s-1)(s^2 + 1)}, Z(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Şimdi ters Laplace dönüşümünü alalım,

$$w(x) = L^{-1}\{W(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right\} = 1 - e^x$$

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s^2 + s}{(s-1)(s^2 + 1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2 + 1}\right\} = e^x + \sin x$$

$$z(x) = L^{-1}\{Z(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} = \cos x$$

elde edilir.

5.4 Fark Denklemlerine Uygulama

a bir sabit olmak üzere $y(t)$ fonksiyonu ile bir veya daha fazla $y(t - a)$ fonksiyonları arasındaki ilişkiyi içeren denkleme bir fark denklemi denir. Örneğin;

$y(t) - 4y(t - 1) + 3y(t - 2) = t$ bir fark denklemdir.

Uygulamada bir fark denklemi oluşturup, verilen başlangıç koşulları altında bilinmeyen $y(t)$ fonksiyonunu bulmak mümkündür. Buna fark denkleminin çözme denir ve bu işlem genellikle Laplace dönüşümleri kullanılarak yapılır.

5.4.1 Örnek:

$t < 0$ için $y(t) = 0$ ise,

$3y(t) - 4y(t-1) + y(t-2) = t$ fark denklemini çözelim.

Çözüm:

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım,

$$3L\{y(t)\} - 4L\{y(t-1)\} + L\{y(t-2)\} = L\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad (*)$$

Şimdi $L\{y(t-1)\}$ ve $L\{y(t-2)\}$ ifadelerini bulalım.

$$L\{y(t-1)\} = \int_0^{\infty} y(t-1)e^{-st} dt$$

$t = u + 1$ dönüşümü yapalım,

$$L\{y(u)\} = \int_{-1}^{\infty} y(u)e^{-s(u+1)} du = e^{-s} \int_{-1}^0 y(u)e^{-su} du + e^{-s} \int_0^{\infty} y(u)e^{-su} du$$

$u < 0$ için $y(u) = 0$ olduğundan $\int_{-1}^0 y(u)e^{-su} du = 0$ olur,

$$\Rightarrow L\{y(t-1)\} = e^{-s} \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = e^{-s}Y(s)$$

ve aynı şekilde $L\{y(t-2)\}$ 'yi bulalım,

$$L\{y(t-2)\} = \int_0^{\infty} y(t-2)e^{-st} dt$$

$t = u + 2$ dönüşümü yapalım,

$$= \int_{-2}^{\infty} y(u)e^{-s(u+2)} du = e^{-2s} \int_{-2}^0 y(u)e^{-su} du + e^{-2s} \int_0^{\infty} y(u)e^{-su} du$$

$$\Rightarrow L\{y(t-2)\} = e^{-2s}Y(s)$$

olur ki (*) bağıntısında yerine yazarsak,

$$3Y(s) - 4e^{-s}Y(s) + e^{-2s}Y(s) = \frac{1}{s^2} \text{ düzenlersek,}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})} = \frac{1}{s^2(1 - e^{-s})(3 - e^{-s})}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \left[\frac{\frac{1}{2}}{(1 - e^{-s})} - \frac{\frac{1}{2}}{(3 - e^{-s})} \right] = \frac{1}{2s^2} \left[\frac{1}{1 - e^{-s}} - \frac{1}{3 - e^{-s}} \right] = \frac{1}{2s^2} \left[\frac{1}{1 - e^{-s}} - \frac{1}{3 \left(1 - \frac{e^{-s}}{3} \right)} \right]$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2} \left\{ \left(1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{e^{-s}}{3} + \frac{e^{-2s}}{3^2} + \frac{e^{-3s}}{3^3} + \dots \right) \right\}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + e^{-s} \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + e^{-2s} \left(1 - \frac{1}{3^3} \right) + \dots \right\}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \frac{e^{-ns}}{s^2}$$

olur ki her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alırsak,

$$y(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) (t - n)$$

olarak bulunur. Buradaki $\lfloor t \rfloor$, t 'ye eşit veya t 'den küçük olan en büyük tam sayıdır.

5.4.2 Örnek:

$n \leq t < n+1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $f(t) = r^n$ ise

$L\{f(t)\}$ 'yi bulalım.

Çözüm:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^1 r^0 \cdot e^{-st} dt + \int_1^2 r^1 \cdot e^{-st} dt + \int_2^3 r^2 \cdot e^{-st} dt + \dots$$

$$= r^0 \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1 \right) + r^1 \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_1^2 \right) + r^2 \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_2^3 \right) + \dots$$

$$= \left(-\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} \right) + r \left(-\frac{1}{s} e^{-2s} + \frac{1}{s} e^{-s} \right) + r^2 \left(-\frac{1}{s} e^{-3s} + \frac{1}{s} e^{-2s} \right) + \dots$$

$$= \frac{1 - e^{-s}}{s} + r \left(\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} \right) + r^2 \left(\frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s} \right) + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-e^{-s}}{s} (1 + r e^{-s} + r^2 e^{-2s} + \dots) \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1-re^{-s}} \\
\Rightarrow L\{f(t)\} &= \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} \tag{5.5}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.4.3 Örnek:

$n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $n \leq t < n+1$ için $y(t) = a_n$ olsun.

$$\text{a) } L\{y(t+1)\} \quad \text{b) } L\{y(t+2)\}$$

dönüşümlerini $L\{y(t)\} = Y(s)$ cinsinden hesaplayalım.

Çözüm:

a) $t+1 = u$ olsun $0 \leq t < 1$ için $y(t) = a_0$ ise,

$$\begin{aligned}
L\{y(t+1)\} &= \int_0^\infty y(t+1) e^{-st} dt = \int_1^\infty y(u) e^{-s(u-1)} du = e^s \int_1^\infty y(u) e^{-su} du \\
&= e^s \int_0^\infty y(u) e^{-su} du - e^s \int_0^1 y(u) e^{-su} du = e^s Y(s) - e^s \int_0^1 a_0 e^{-su} du \\
&= e^s Y(s) - e^s a_0 \left(-\frac{1}{s} e^{-su} \Big|_0^1 \right) = e^s Y(s) - e^s a_0 \left(-\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} \right) \\
\Rightarrow L\{y(t+1)\} &= e^s Y(s) - \frac{a_0 e^s (1 - e^{-s})}{s} \tag{5.6}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) $t+2 = u$ olsun, $0 \leq t < 1$ için $y(t) = a_0$ ve $1 \leq t < 2$ için $y(t) = a_1$ olur ki,

$$\begin{aligned}
L\{y(t+2)\} &= \int_0^\infty y(t+2) e^{-st} dt = e^{2s} \int_2^\infty y(u) e^{-su} du \\
&= e^{2s} \left\{ \int_0^\infty y(u) e^{-su} du - \int_0^1 y(u) e^{-su} du - \int_1^2 y(u) e^{-su} du \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2s}Y(s) - e^{2s} \int_0^1 a_0 e^{-su} du - e^{2s} \int_1^2 a_1 e^{-su} du \\
&= e^{2s}Y(s) - \frac{a_0 e^{2s}(1 - e^{-s})}{s} - \frac{a_1 e^{2s}(e^{-s} - e^{-2s})}{s} \\
&\Rightarrow L\{y(t+2)\} = e^{2s}Y(s) - \left(\frac{a_0 e^{2s}(1 - e^{-s}) + a_1 e^{2s}e^{-s}(1 - e^{-s})}{s} \right) \\
L\{y(t+2)\} &= e^{2s}Y(s) - \frac{e^s(1 - e^{-s})(a_0 e^s + a_1)}{s} \tag{5.7}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.4.4 Örnek:

$a_0, a_1, a_2, \dots$ sabit büyüklükler olmak üzere $\{a_n\}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ dizisini ele alalım. $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ fark denklemi verilsin. Bu fark denkleminde a_n 'i bulalım.

Çözüm:

$n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $y(t) = a_n$, $n \leq t < n + 1$ olsun, ise verilen bağıntı şu şekli alır,

$$y(t+2) - 5y(t+1) + 6y(t) = 0 \tag{*}$$

Şimdi (*) denkleminin her iki tarafına da Laplace dönüşümünü uygulayalım ve (5.6), (5.7)'yi kullanalım,

$$e^{2s}Y(s) - \frac{e^s(1 - e^{-s})}{s} - 5e^sY(s) + 6Y(s) = 0$$

$$(e^{2s} - 5e^s + 6)Y(s) = \frac{e^s(1 - e^{-s})}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{e^s(1 - e^{-s})}{s(e^{2s} - 5e^s + 6)} = \frac{e^s(1 - e^{-s})}{s} \left(\frac{1}{(e^s - 3)(e^s - 2)} \right) = \frac{e^s(1 - e^{-s})}{s} \left(\frac{1}{e^s - 3} - \frac{1}{e^s - 2} \right)$$

$$= \frac{1 - e^{-s}}{s} \left(\frac{1}{1 - 3e^{-s}} - \frac{1}{1 - 2e^{-s}} \right)$$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 3e^{-s})} - \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})}$ olarak bulunur. Şimdi her iki tarafın ters Laplace

dönüşümünü alalım ve (5.5)'i kullanalım,

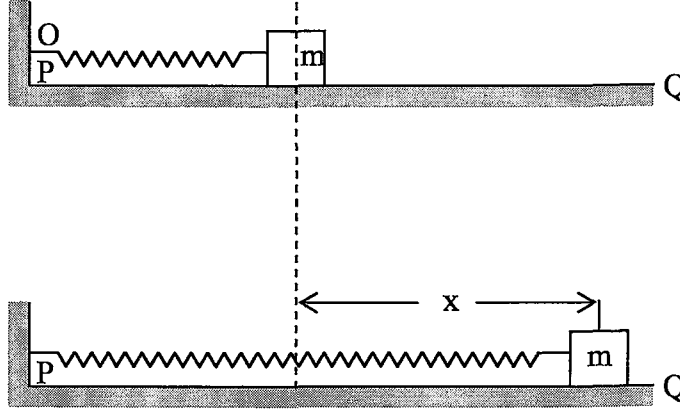
$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = 3^t - 2^t$$

$$\Rightarrow a_n = 3^n - 2^n$$

olarak bulunur.

6. LAPLACE ve TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİNİN FİZİK, MÜHENDİSLİK ve MATEMATİK BİLİM DALLARINA UYGULANMASI

6.1 Mekaniğe Uygulama



Şekil 6.1 m kütlesinin hareketi

O noktasında tespit edilmiş bir yaya tutturulmuş olan bir m kütlesinin sürtünmesiz bir PQ düzlemi üzerinde hareket etsin. (Şekil 6.1)

$x(t)$ veya kısaca x ile, t anında m kütlesinin denge durumundan ani yer değiştirmesini gösterelim. k , yaya bağlı olan ve yay sabiti diye adlandırılan bir sabit olmak üzere $-kx$ 'e eşit olan bir kuvvet cismi denge durumuna getirmek isteyecektir. Bu sonucu cismi denge durumuna getirmek isteyen kuvvetin cismin denge durumundan uzaklaştığı mesafe ile orantılı olduğunu ifade eden Hooke kanunundan çıkarmaktayız. Bir cismin üzerine etki eden net kuvvetin cismin kütlesi ile ivmesinin çarpımına eşit olduğunu ifade eden Newton kanunu uyarınca hareketin denklemi,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{veya} \quad mx'' + kx = 0 \quad (6.1)$$

dir. Buna ek olarak m 'in ani hızı ile orantılı olan ve hareketin sönümlü olmasını sağlayan bir kuvvet varsa hareketin denklemi,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} \quad \text{veya} \quad mx'' + \beta x' + kx = 0 \quad (6.2)$$

dır. β 'ya sönüm sabiti denir.

Ayrıca zamana bağlı $f(t)$ gibi bir dış kuvvet cismin üzerinde etki ediyorsa hareketin denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + f(t) \quad \text{veya} \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t) \quad (6.3)$$

olur. Laplace dönüşümünü; uygun başlangıç koşulları altında (6.1), (6.2) ve (6.3)'ü uygulayarak $x(t)$ bulunabilir.

6.1.1 Örnek:

Kütlesi 2 gr. olan P parçacığı x eksenini üzerinde hareket etmekte ve O orijinine doğru nümerik değeri 8x olan bir kuvvet tarafından çekilmektedir. Başlangıçta $x = 10$ 'da hareketsiz olarak durduğu kabul edilen bu cisim üzerine,

- a) Başka herhangi bir kuvvet etki etmiyorsa,
- b) Zıt yönde ve nümerik değeri cismin hızının 8 katına eşit olan bir kuvvet etki ediyorsa herhangi bir t anında cismin bulunduğu yeri bulalım.

Çözüm:

a) Sağa doğru olan yönü pozitif olarak alalım. $x > 0$ ise kuvvetin yönü sola doğrudur ve $-8x$ ile verilir. $x < 0$ ise kuvvetin yönü sağa doğrudur ve $-8x$ ile verilir. Öyleyse her durumda kuvvetin değeri $-8x$ 'dir. Newton kanununa göre,

$$F = ma$$

$$\text{Kuvvet} = (\text{Kütle}) \cdot (\text{İvme})$$

$$-8x = 2 \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad (*)$$

Başlangıç koşulları

$$x(0) = 10 \quad (**)$$

$$x'(0) = 0 \quad (***)$$

şimdi (*) ifadesinin Laplace dönüşümü alınıp, (**) ve (***) başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$X = L\{x\} \text{ ise,}$$

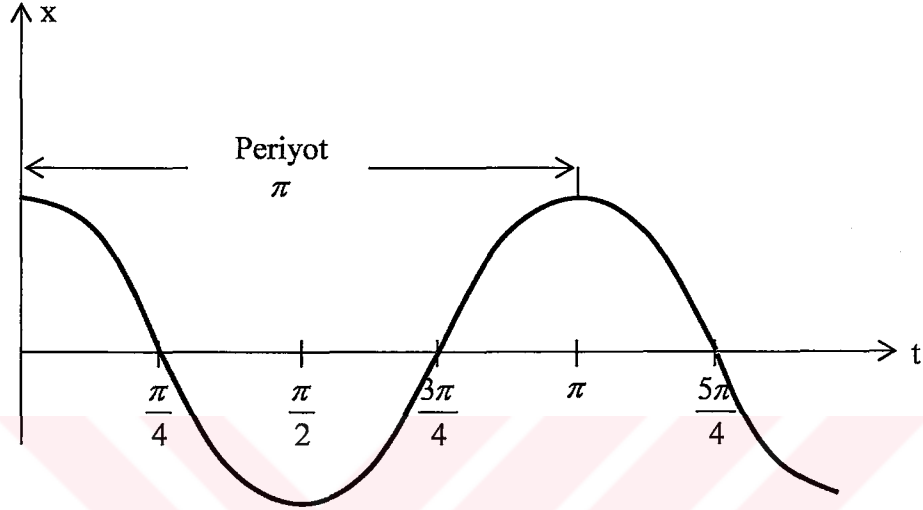
$$L\{x''\} + 4L\{x\} = s^2X - 10s + 4X = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{10s}{s^2 + 4}$$

Şimdi ters Laplace dönüşümünü alalım,

$$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = 10 \cos 2t$$

olarak bulunur. Hareketin grafiği Şekil 6.2'de gösterilmiştir.



Şekil 6.2 Hareketin grafiği (a)

b) Yine Newton kanununa göre,

$$F = ma$$

$$\text{Kuvvet} = (\text{Kütle}) \cdot (\text{İvme})$$

$$-8x - 8 \frac{dx}{dt} = 2 \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4}{dt} + 4x = 0 \quad (*)$$

Başlangıç koşulları,

$$x(0) = 10 \quad (**)$$

$$x'(0) = 0 \quad (***)$$

(*) ifadesinin Laplace dönüşümü alınır ve (**), (***) başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$s^2 X - 10s + 4(sX - 10) + 4X = 0$$

$$X = \frac{10s + 40}{s^2 + 4s + 4}$$

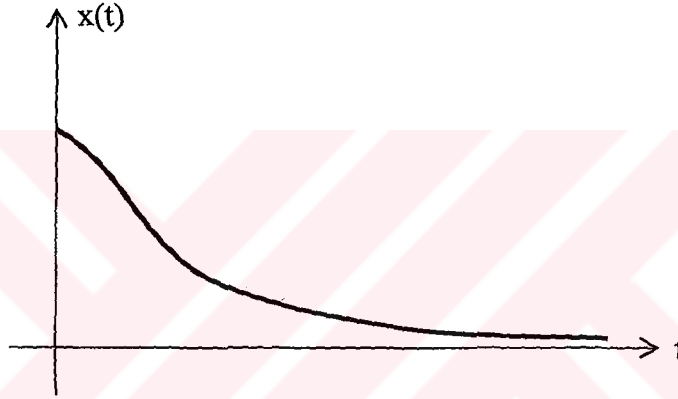
olarak bulunur ki, ters Laplace dönüşümünü alırsak,

$$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = L^{-1}\left\{\frac{10s + 40}{s^2 + 4s + 4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{10(s + 2) + 20}{(s + 2)^2}\right\}$$

$$= 10 L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} + 20 L^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)^2}\right\}$$

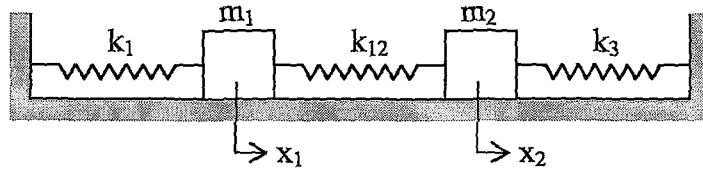
$$\Rightarrow x(t) = 10e^{-2t} + 20te^{-2t} = 10e^{-2t}(1 + 2t)$$

olarak bulunur. $x(t)$ 'nin grafiği Şekil 6.3'de gösterilmiştir.



Şekil 6.3 Hareketin grafiği (b)

6.1.2 Örnek:



Şekil 6.4 m_1 ve m_2 kütlelerinin hareketi

Yukarıdaki Şekil 6.4'te yatay sürtünmesiz bir düzlem üzerinde hareket etmekte olan $m_1 = 1 \text{ kg}$ ve $m_2 = 2 \text{ kg}$ olan cisimler görülmektedir. Ağırlıksız yaylarla birbirine tutturulmuş olarak denge konumları etrafında salınım hareketi yapmaktadırlar. Yayların esneklik katsayıları sırasıyla $k_1 = 1 \text{ N/m}$, $k_{12} = 2 \text{ N/m}$, $k_3 = 2 \text{ N/m}$ olduğu ve başlangıç koşullarının ise $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 2$ ve $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ olduğu biliniyor. Herhangi $t > 0$ anında cisimlerin her birinin denge konumundan hangi uzaklıkta olduğunu bulalım.

Çözüm:

m_1 kütleline soldaki yay $F_1 = k_1 x_1$ kuvveti ile ortadaki yay ise $F_2 = k_{12} (x_2 - x_1)$ ile etki ettiğinden, m_1 kütleline Newton yasası uygulanırsa,

$$F_1 + F_2 = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \text{ verilenler yerine yazılırsa,}$$

$$1 x_1'' = -x_1 + 2(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow x_1'' + 3x_1 - 2x_2 = 0$$

olarak bulunur ki her iki tarafın Laplace dönüşümü alınır,

$$L\{x_1''\} + 3L\{x_1\} - 2L\{x_2\} = 0$$

$$s^2 X_1 - s x_1(0) - x_1'(0) + 3X_1 - 2X_2 = 0$$

$$X_1(s^2 + 3) - 2X_2 = -s \quad (*)$$

Benzer şekilde m_2 kütleline ortadaki yay $F_3 = -k_{12} (x_2 - x_1)$ kuvveti ile sağdaki yay ise $F_4 = -k_2 x_2$ ile etkiler, m_2 kütleline Newton yasası uygulanırsa,

$$F_3 + F_4 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow 2 x_2'' = -2(x_2 - x_1) - 2x_2, \text{ düzenlersek,}$$

$$\Rightarrow 2x_2'' + 4x_2 - 2x_1 = 0$$

elde edilir ki Laplace dönüşümünü alırsak,

$$2L\{x_2''\} + 4L\{x_2\} - 2L\{x_1\} = 0$$

$$2(s^2 X_2 - s x_2(0) - x_2'(0)) + 4X_2 - 2X_1 = 0$$

$$X_2(2s^2 + 4) - 2X_1 = 4s \quad (**)$$

elde edilir. Şimdi $X_2(s)$ ve $X_1(s)$ 'yi bulmak için (*) ve (**) denklemlerini Cramer yöntemi ile çözelim,

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -s & -2 \\ 4s & 2s^2 + 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 3 & -2 \\ -2 & 2s^2 + 4 \end{vmatrix}} = \frac{-s^3 + 2s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \quad (***)$$

$$X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 + 3 & -s \\ -2 & 4s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 3 & -2 \\ -2 & 2s^2 + 4 \end{vmatrix}} = \frac{2s^3 + 5s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \quad (****)$$

olarak bulunur. Şimdi (***) ve (****) ifadelerinin ters Laplace dönüşümünü alarak $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ 'yi bulalım.

$X_1(s)$ ve $X_2(s)$ ifadelerini basit kesirlere ayırarak ters Laplace dönüşümlerini hesaplayalım.

$$X_1(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2s}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{X_1(s)\} = x_1(t) = \cos t - 2 \cos 2t$$

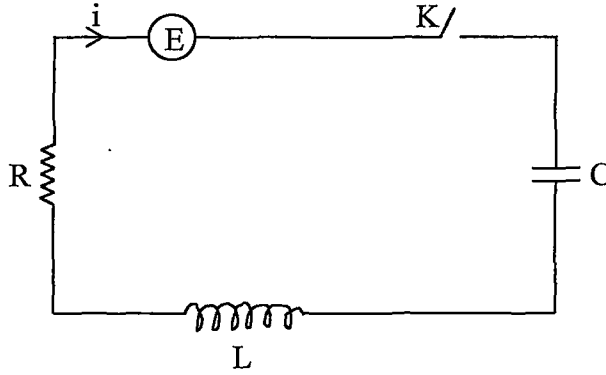
$$X_2(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{X_2(s)\} = x_2(t) = \cos t + \cos 2t$$

olarak bulunur.

6.2 Elektrik Devrelerine Uygulama

Basit bir elektrik devresi (Şekil 6.5) aşağıdaki devre elemanlarının seri olarak bir anahtarla birlikte bağlanmasından oluşur.



Şekil 6.5 Basit elektrik devresi

- 1) E ile gösterilen elektro motor kuvveti veya elektromotor kuvvetini üreten bir bataryadır. Wolt cinsinden ifade edilir.
- 2) Rezistansı R olan bir rezistör. Ohm cinsinden ifade edilir.
- 3) İndüktansı L olan bir indüktör. Henry cinsinden ifade edilir.
- 4) Kapasitesi C olan bir kondansatör. Farad cinsinden ifade edilir.

Anahtar, dolayısıyla devre kapandığında bir q yükü (kulomb) kondansatörün plakalarına geçecektir. Yükün akışının zamana göre ifadesi $\frac{dq}{dt} = i$ ile verilip akım diye adlandırılır.

Zaman saniye cinsinden ifade ediliyorsa akımın birimi amperdir.

Önemli bir nokta, kapasitörlerdeki yükü ve akımı zamanın fonksiyonu olarak tayin edebilmektir. Bunu yapabilmek için bir devrenin elemanları üzerindeki potansiyel düşmesi veya voltaj düşmesini tanımlamalıyız.

a) Bir rezistansda meydana gelen voltaj düşmesi $= Ri = R \frac{dq}{dt}$

b) Bir indüktörde meydana gelen voltaj düşmesi $= L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$

c) Bir kondansatörde meydana gelen voltaj düşmesi $= \frac{q}{c}$

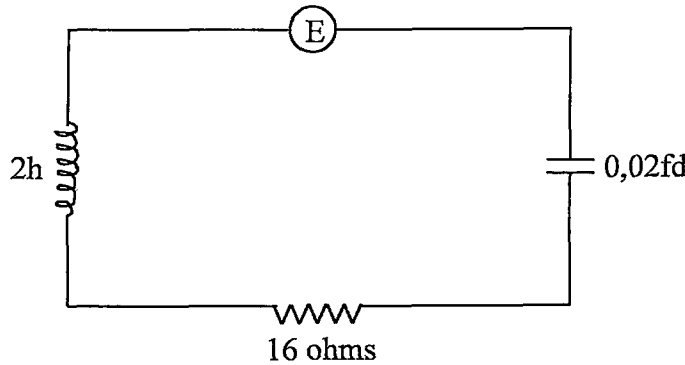
d) Bir jeneratörde meydana gelen voltaj düşmesi $= -E$

Kirchhoff Yasaları:

- 1) Herhangi bir birleşme noktasından geçen akımların cebirsel toplamı sıfırdır.
 - 2) Herhangi bir kapalı halkada meydana gelen voltaj düşmelerinin cebirsel toplamı sıfırdır.
- Şekil 6.5 basit devrede bu yasaların uygulaması kolaydır. q 'nın tayini için gerekli denklem,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E \quad (6.4)$$

6.2.1 Örnek:



Şekil 6.6 Elektrik devresi (a)

Şekil 6.6'de 2 henry'lik bir indüktör, 16 ohm'luk bir rezistans ve 0,02 faradlık bir kondansatör E voltluk bir elektro motor kuvveti ile seri olarak bağlanmıştır. $t = 0$ anında kondansatörün yükü ve devredeki akım sıfırdır.

a) $E = 300$ volt

b) $E = 100 \sin 3t$ volt ise $t > 0$ anında yükü ve akımı bulalım.

Çözüm:

t anındaki yük ve akım sırasıyla q ve i olsun. Kirchhoff kanununa göre,

$$2 \frac{di}{dt} + 16i + \frac{q}{0,02} = E$$

olur ki $i = \frac{dq}{dt}$ olduğundan,

$$2 \frac{d^2q}{dt^2} + 16 \frac{dq}{dt} + 50q = E \quad (*)$$

dir. $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ ve $q'(0) = 0$ başlangıç koşullarını kullanalım.

a) $E = 300$ ise (*) eşitliği şu şekli alır,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 8 \frac{dq}{dt} + 25q = 150$$

Şimdi her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım, $L\{q(t)\} = Q(s)$ olsun,

$$s^2Q - sq(0) - q'(0) + 8(sQ - q(0)) + 25Q = \frac{150}{s}$$

$$s^2Q + 8sQ + 25Q = \frac{150}{s}$$

$$Q(s) = \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)}, \text{ şimdi } Q(s)'yi \text{ basit kesirlerine ayırıp ters Laplace dönüşümünü}$$

olarak $q(t)$ 'yi bulalım,

$$Q(s) = \frac{6}{s} - \frac{6s + 48}{s^2 + 8s + 25} = \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4) + 24}{(s + 4)^2 + 9} = \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4)}{(s + 4)^2 + 9} - \frac{24}{(s + 4)^2 + 9}$$

$$L^{-1}\{Q(s)\} = q(t) = 6 - 6e^{-4t} \cos 3t - 24 \frac{1}{3} \sin 3t$$

$$\Rightarrow q(t) = 6 - 6e^{-4t} \cos 3t - 8 \sin 3t$$

olarak bulunur. $i(t) = \frac{dq}{dt}$ olduğundan,

$$i(t) = 50 e^{-4t} \sin 3t$$

olarak bulunur.

b) $E = 100 \sin 3t$ ise (*) eşitliği,

$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{8dq}{dt} + 25q = 50 \sin 3t$ olur ki her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak,

$$s^2 Q + 8sQ + 25Q = \frac{150}{s^2 + 9}$$

$$\Rightarrow Q(s) = \frac{150}{(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)}, \text{ şimdi } Q(s)\text{'yi basit kesirlerine ayırıp ters Laplace}$$

dönüşümünü alarak $q(t)$ 'yi bulalım,

$$Q(s) = \frac{75}{26} \cdot \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{75}{52} \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{75}{26} \cdot \frac{1}{(s+4)^2 + 9} + \frac{75}{52} \cdot \frac{s+4}{(s+4)^2 + 9}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{Q(s)\} = q(t) = \frac{75}{26} \cdot \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{75}{52} \cos 3t + \frac{75}{26} \frac{1}{3} e^{-4t} \sin 3t + \frac{75}{52} e^{-4t} \cos 3t$$

$$q(t) = \frac{25}{26} \sin 3t - \frac{75}{52} \cos 3t + \frac{25}{26} e^{-4t} \sin 3t + \frac{75}{52} e^{-4t} \cos 3t$$

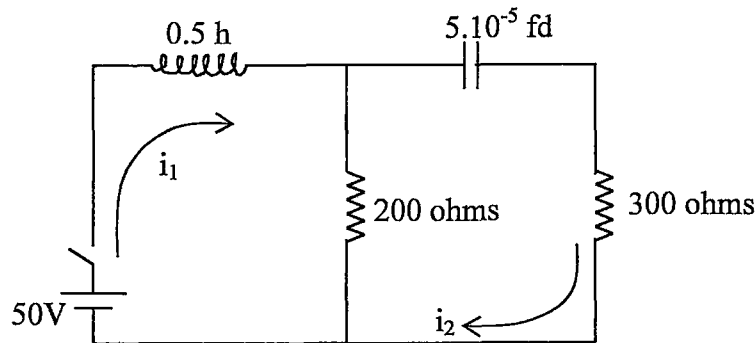
$$q(t) = \frac{25}{52} (2 \sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{25}{52} e^{-4t} (2 \sin 3t + 3 \cos 3t)$$

olarak bulunur ve $i(t) = \frac{dq}{dt}$ olduğundan,

$$i(t) = \frac{75}{52} (2 \cos 3t + 3 \sin 3t) - \frac{25}{52} e^{-4t} (17 \sin 3t + 6 \cos 3t)$$

olarak bulunur.

6.2.2 Örnek:



Şekil 6.7 Elektrik devresi (b)

Şekil 6.7'deki devrede herhangi bir t anı için kollarındaki i_1 ve i_2 akım fonksiyonlarını hesaplayalım. (Anahtar $t = 0$ anında kapatıldığında yükler ve akımlar sıfırdır.)

Çözüm:

i_1 ve i_2 akımları Şekil 6.7'de gösterildiği kollara ait akımlar olduğu gibi ortak kolda ise akım $i_1 - i_2$ olur.

Her kola Kirchhoff'un yasası uygulanırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$0.5 \frac{di_1}{dt} + 200(i_1 - i_2) = 50 \quad (*)$$

$$300 i_2 + 200 (i_2 - i_1) + \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \int_0^t i_2 dt = 0 \quad (**)$$

Şimdi (*) ve (**) denklemlerine Laplace dönüşümünü uygulayalım. $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$ ve

$L\{i_1\} = I_1(s)$, $L\{i_2\} = I_2(s)$ olmak üzere,

$$0.5 L\{i_1'\} + 200 L\{i_1\} - 200 L\{i_2\} = L\{50\}$$

$$\frac{1}{2} (sI_1 - i_1(0)) + 200I_1 - 200I_2 = \frac{50}{s}$$

$$s^2 I_1 + 400sI_1 - 400sI_2 = 100$$

$$I_1(s^2 + 400s) - 400sI_2 = 100 \quad (***)$$

Şimdi (**) denklemini ele alalım,

$$300I_2 + 200I_2 - 200I_1 + 0.2 \cdot 10^5 \frac{1}{s} I_2 = 0$$

$$300sI_2 + 200sI_2 - 200sI_1 + 2 \cdot 10^4 I_2 = 0$$

$$-2sI_1 + I_2(5s + 200) = 0 \quad (****)$$

Şimdi (***) ve (****) denklemlerini Cramer kuralını uygulayarak çözelim,

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 100 & -400s \\ 0 & 5s + 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 400s & -400s \\ -2s & 5s + 200 \end{vmatrix}} = \frac{500s + 20000}{5s^3 + 2000s^2 + 200s^2 + 80000s - 800s^2} = \frac{100s + 4000}{s(s + 80)(s + 200)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 + 400s & -400s \\ -2s & 5s + 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 400s & -400s \\ -2s & 5s + 200 \end{vmatrix}} = \frac{40}{(s + 80)(s + 200)}$$

Şimdi $I_1(s)$ ve $I_2(s)$ ifadelerini basit kesirlere ayırıp ters Laplace dönüşümlerini alarak $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ 'yi bulalım.

$$\Rightarrow I_1(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{(s+80)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(s+200)}$$

$$\Rightarrow I_2(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+80)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+200)}$$

$$L^{-1}\{I_1(s)\} = i_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} e^{-80t} - \frac{2}{3} e^{-200t}$$

ve,

$$L^{-1}\{I_2(s)\} = i_2(t) = \frac{1}{3} e^{-80t} - \frac{1}{3} e^{-200t}$$

olarak bulunur. $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ ifadeleri herhangi bir t anında kollaraki akım fonksiyonlarıdır.

6.3 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlere Uygulama

Başlangıç koşullarına bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümleri kullanılabilir. Bu problemlere çoğu zaman sınır değer problemleri denir. Şimdi birkaç örnek üzerinde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümleri ile çözümüne bakalım.

6.3.1 Örnek:

$a \leq x \leq b$, $t > 0$ için tanımlanmış $u(x, t)$ fonksiyonu verilsin. $u = u(x, t)$ 'nin,

$$\text{a) } L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt \quad \text{b) } L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-st} dt$$

ifadelerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\text{a) } L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt \quad (*)$$

Şimdi (*) ifadesine kısmi integrasyon uygulayalım,

$$\frac{\partial u}{\partial t} dt = dv \quad e^{-st} = u$$

$$u(x, t) = v - \int_0^t u(x, \tau) d\tau$$

$\Rightarrow (*)$ ifadesi şu şekli alır,

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st} u(x, t) \Big|_{t=0}^R + s \int_0^R u(x, t) e^{-st} dt \right\} \\
 &= -u(x, 0) + s \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt = s U(x, s) - u(x, 0) \\
 &\Rightarrow L \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = s U(x, s) - u(x, 0) \tag{6.5}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) İntegral işareti altında türev almaya ait Leibnitz* kuralını kullanalım,

$$L \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-st} dt = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u e^{-st} dt = \frac{dU}{dx} \tag{6.6}$$

olarak bulunur.

6.3.2 Örnek:

(6.5) ve (6.6)'yı kullanarak $u_t(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}$ ve,

$U = U(x, s) = L \{u(x, t)\}$ olmak üzere,

$$\text{a) } L \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} = s^2 U(x, s) - s u(x, 0) - u_t(x, 0)$$

$$\text{b) } L \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

a) $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ olsun, (6.5)'e göre,

$$L \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} = L \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} = s L \{v\} - v(x, 0) = s (s L \{u\} - u(x, 0)) - u_t(x, 0)$$

* Sayfa 86'daki Not'a bakınız.

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2 U - s u(x,0) - u_t(x,0) \quad (6.7)$$

bulunur ki, bunun genelleştirilmesi kolayca yapılır.

$$\text{b) } L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-st} dt = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty u e^{-st} dt = \frac{d^2 U}{dx^2} \quad (6.8)$$

bulunur ki, bunun da genelleştirilmesi kolayca yapılır.

6.3.3 Örnek:

$x > 0, t > 0$ için sınırlanmış olan $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u$ ve $u(x,0) = 6 e^{-3x}$ 'in çözümünü bulalım.

Çözüm:

Verilen kısmi türevli diferansiyel denklemin t 'ye göre Laplace dönüşümünü alır, (6.5) ve (6.6)'yı kullanırsak, verilen sınır koşulundan,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= 2(sU - u(x,0)) + U \\ \frac{dU}{dx} - (2s+1)U &= -12 e^{-3x} \end{aligned} \quad (*)$$

bulunur. Böylece Laplace dönüşümünün kısmi türevli diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme dönüşür.

(*) ifadesini çözmek için her iki yanı $e^{\int -(2s+1)dx} = e^{-(2s+1)x}$ integrasyon çarpanı ile çarpalım,

$$\frac{d}{dx} (U e^{-(2s+1)x}) = -12 e^{-(2s+4)x}$$

olur ki her iki tarafın integralini alırsak,

$$U e^{-(2s+1)x} = -12 \frac{1}{-(2s+4)} e^{-(2s+4)x} + c$$

$$U = \frac{6}{s+2} e^{-3x} + c e^{(2s+1)x}$$

$x \rightarrow \infty$ iken $u(x,t)$ sınırlı olması nedeniyle, $x \rightarrow \infty$ iken $U(x,s)$ 'de sınırlıdır, bu durumda $c=0$ olmalıdır, buradan da,

$$U = \frac{6}{s+2} e^{-3x}$$

bulunur ki ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$u(x,t) = 6 e^{-3x} e^{-2t}$$

$$u(x,t) = 6 e^{-2t-3x}$$

olarak bulunur.

6.3.4 Örnek:

Başlangıç koşulları,

$$y(0,t) = 0, y(\pi,t) = 16\pi, y_t(x,0) = 0, y(x,0) = 16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + 20 \sin x$$

in çözümünü bulalım.

Çözüm:

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alır ve (6.7) ile (6.8)'i kullanırsak,

$$s^2 Y - s y(x,0) - y_t(x,0) - 4 \frac{d^2 Y}{dx^2} + Y = \frac{16x}{s} + \frac{20 \sin x}{s}$$

Şimdi verilen koşulları yerine yazıp, düzenlersek,

$$s^2 Y - s (16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x) - 4 \frac{d^2 Y}{dx^2} + Y = \frac{16x}{s} + \frac{20 \sin x}{s}$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{Y(1+s^2)}{4} = \frac{-s(16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x)}{4} - \frac{16x}{4s} - \frac{20 \sin x}{4s} \quad (*)$$

Şimdi (*) ifadesinin Y_h (Y 'nin homojen çözümü)'ı bulalım,

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{Y(1+s^2)}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{(1+s^2)}{4} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1+s^2}{4} \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{\mu \sqrt{1+s^2}}{2}$$

$$\Rightarrow Y_h = c_1 e^{\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}x} \quad (**)$$

şeklindedir.

Diğer taraftan Y_0 (Y 'nin özel çözümü) ise,

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{Y(1+s^2)}{4} = 4 \left(-s - \frac{1}{s} \right) x - 5 \frac{\sin x}{s} - 3s \sin 2x + 2s \sin 3x$$

denkleminin sağ tarafına göre belirlenirse,

$$Y_0 = Ax + B \sin x + C \sin 2x + D \sin 3x \quad (***)$$

biçiminde olacaktır. Y_0 'nün çözümü için gerekli olan Y_0'' 'ni hesaplayalım,

$$Y_0' = A + B \cos x + 2C \cos 2x + 3D \cos 3x$$

$$Y_0'' = -B \sin x - 4C \sin 2x - 9D \sin 3x$$

Şimdi Y_0, Y_0'' 'ni (*) ifadesinde yerine koyup A, B, C, D'yi hesaplayalım,

$$\begin{aligned} & -B \sin x - 4C \sin 2x - 9D \sin 3x - \frac{(1+s^2)}{4} (Ax + B \sin x + C \sin 2x + D \sin 3x) \\ &= \frac{-s(16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x)}{4} - \frac{16x}{4s} - \frac{20 \sin x}{4s} \\ &= 4 \left(-s - \frac{1}{s} \right) x - 5 \frac{\sin x}{s} - 3s \sin 2x + 2s \sin 3x \end{aligned}$$

bulunur ki, denklemi düzenlersek,

$$\begin{aligned} & -x \left(\frac{A}{4} (1+s^2) \right) + \sin x \left(-B - \frac{B}{4} (1+s^2) \right) + \sin 2x \left(-4C - \frac{C}{4} (1+s^2) \right) \\ & + \sin 3x \left(-9D - \frac{D}{4} (1+s^2) \right) = 4x \left(\frac{-s^2-1}{s} \right) - 5 \frac{\sin x}{s} - 3s \sin 2x + 2s \sin 3x \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan,

$$-\frac{A}{4} (1+s^2) = -\frac{4}{s} (s^2+1) \Rightarrow A = \frac{16}{s}$$

$$B \left(-1 - \frac{1}{4} (1+s^2) \right) = -\frac{5}{s} \Rightarrow B = \frac{20}{(s^2+5)s}$$

$$C \left(-4 - \frac{1}{4} (1+s^2) \right) = -3s \Rightarrow C = \frac{12s}{s^2+17}$$

$$D\left(-9 - \frac{1}{4}(1+s^2)\right) = 2s \Rightarrow D = \frac{-8s}{s^2+37}$$

bulunur ki bu değerler (***) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$Y_{\partial} = \frac{16}{s}x + \frac{20}{(s^2+5)s} \sin x + \frac{12s}{s^2+17} \sin 2x + \frac{-8s}{s^2+37} \sin 3x$$

elde edilir.

Şimdi (**) ifadesindeki c_1 ve c_2 katsayılarını bulmak için

$$Y(0,s) = 0, \quad Y(\pi,s) = \frac{16\pi}{s} \text{ ifadelerini kullanalım,}$$

$$Y_h = c_1 e^{\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}x}$$

$$x=0 \text{ için } c_1 + c_2 = 0$$

$$x=\pi \text{ için } c_1 e^{\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}\pi} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{1+s^2}}{2}\pi} = 0$$

olur ki buradan $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir, o zaman $Y_h = 0$ olur, ise

Y_g (Y 'nin genel çözümü) şöyle ifade edilebilir,

$$Y_g = Y_h + Y_{\partial} = Y_{\partial}$$

$$\Rightarrow Y_g = \frac{16}{s}x + \frac{4}{s} \sin x - \frac{4s}{s^2+5} \sin x + \frac{12s}{s^2+17} \sin 2x - \frac{8s}{s^2+37} \sin 3x \quad (****)$$

elde edilir ki, (****) ifadesinin ters Laplace dönüşümü alınarak çözüm bulunmuş olur. Şöyle ki,

$$y(x,t) = 16x + 4 \sin x - 4 \cos \sqrt{5}t \sin x + 12 \sin 2x \cos \sqrt{17}t - 8 \sin 3x \cos \sqrt{37}t$$

elde edilir.

6.4 İntegrallerin Hesaplanması

Belirli integrallerin hesaplanmasında Laplace dönüşümlerinden sık sık yararlanılır. Bunun nasıl olduğunu şimdi birkaç örnekle görelim.

6.4.1 Örnek:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} t e^{-2t} \cos t \, dt \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \, dt$$

integrallerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\text{a) } L\{t \cos t\} = \int_0^{\infty} t e^{-st} \cos t \, dt = \frac{d}{ds} L\{\cos t\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

dir. Buradan $s = 2$ alırsak,

$$\int_0^{\infty} t e^{-2t} \cos t \, dt = \frac{2^2 - 1}{(2^2 + 1)^2} = \frac{3}{25}$$

olarak bulunur.

$$\text{b) } f(t) = e^{-t} - e^{-3t} \text{ ise } F(s) = L\{f(t)\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \left\{\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right\} du = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} e^{-st} dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

$\Rightarrow s = 0$ alırsak

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt = \ln 3$$

olarak bulunur.

6.4.2 Örnek:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} J_0(t) dt \quad \text{b) } \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} \, dt$$

integrallerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} J_0(t) e^{-st} dt = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

idi. $s = 0$ alırsak,

$$\int_0^{\infty} J_0(t) dt = 1$$

olarak bulunur.

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \operatorname{erf} \sqrt{t} e^{-st} dt = \frac{1}{s \sqrt{s+1}}$$

idi. $s = 1$ alırsak,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olarak bulunur.

6.4.3 Örnek:

$$\int_0^t J_0(u) J_0(t-u) du$$

integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$$g(t) = \int_0^t J_0(u) J_0(t-u) du$$

olsun. Konvolüsyon teoremine göre,

$$L\{g(t)\} = L\{J_0(t)\} \cdot L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = g(t) = \sin t$$

$$\Rightarrow g(t) = \int_0^t J_0(u) J_0(t-u) du = \sin t$$

olarak bulunur.

6.5 İntegral Denklemlere Uygulama

6.5.1 İntegral Denklemler

$f(t)$ ve $k(u,t)$ bilinen fonksiyonlar, a ve b verilen sabitler veya t 'nin fonksiyonu ve integral işareti altında görülen $y(t)$ fonksiyonu hesaplanacak fonksiyon olmak üzere bir integral denklem,

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(u,t) y(u) du \quad (6.9)$$

biçimindedir. $k(u,t)$ integral denklemin çekirdeğidir. a ve b sabit ise integral denkleme Fredholm integral denklemi denir. a sabit iken $b = t$ ise denkleme Volterra integral denklemi denir.

Bir integral denklem ile bir diferansiyel denklem arasında ilişki vardır.

6.5.1.1 Örnek:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4\sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

diferansiyel denklemini integral denkleme dönüştürelim.

Çözüm:

Verilen diferansiyel denklemin her iki yanını integre edelim,

$$\int_0^t (y''(u) - 3y'(u) + 2y(u)) du = \int_0^t 4 \sin u du$$

$y(0) = 1$ ve $y'(0) = -2$ koşulları altında,

$$y'(t) + 2 - 3(y(t) - 1) + 2 \int_0^t y(u) du = -4 \cos u \Big|_0^t = -4 \cos t + 4$$

$$y'(t) - 3y(t) + 2 \int_0^t y(u) du = -1 - 4 \cos t$$

Tekrar her iki yanın integralini alalım,

$$y(t) - 1 - 3 \int_0^t y(u) du + 2 \int_0^t (t-u) y(u) du = -t - 4 \sin t \quad (*)$$

$$y(t) + \int_0^t (2(t-u) - 3) y(u) du = 1 - t - 4 \sin t$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 - t - 4 \sin t - \int_0^t (2(t-u) - 3) y(u) du$$

olarak dönüştürülür.

Not:

$$\underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t}_{n \text{ tane}} y(u) du \cdot du \dots du = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} y(u) du$$

n tane

(*) ifadesinin bulunmasında yukarıdaki notta ifade edilen formül kullanılmıştır.

6.5.1.2 Örnek:

$$y(t) = 3t - 4 - 2 \sin t + \int_0^t \{ (t-u)^2 - 3(t-u) + 2 \} y(u) du \quad (*)$$

integral denklemini diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Çözüm:

Verilen integral denklemin her iki yanının türevini alalım ve türev alırken Leibnitz kuralını kullanalım.

$$y'(t) = 3 - 2 \cos t + \int_0^t 2(t-u) y(u) du - 3 \int_0^t y(u) du + 2y(t) \quad (**)$$

Şimdi (**) denkleminin her iki yanının türevini alalım,

$$y''(t) = 2 \sin t + 2 \int_0^t y(u) du - 3y(t) + 2y'(t) \quad (***)$$

Şimdi (***) denkleminin her iki yanının türevini alalım.

$$y'''(t) = 2 \cos t + 2y(t) - 3y'(t) + 2y''(t)$$

düzenlersek,

$$y'''(t) - 2y''(t) + 3y'(t) - 2y(t) = 2 \cos t$$

(*), (**) ve (***) da $t = 0$ koyarak başlangıç koşullarını elde ederiz, şöyle ki, $y(0) = -4$, $y'(0) = -7$, $y''(0) = -2$

olarak bulunur.

6.5.2 Konvolüsyon Tipindeki İntegral Denklemler

Uygulamada önemli bir yer tutan integral denklem,

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-u) y(u) du$$

ile verilen konvolüsyon tipindeki integral denklemdir ve bu,

$$y(t) = f(t) + k(t) * y(t)$$

biçiminde yazılabilir. Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa,

$$Y(s) = F(s) + K(s) Y(s)$$

bulunur ki bu da,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)}$$

olur ve ters Laplace dönüşümü ile istenen sonuç bulunabilir.

6.5.2.1 Örnek:

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(u) \sin(t-u) du$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm:

İntegral denklem,

$y(t) = t^2 + y(t) * \sin t$ biçiminde yazılabilir, şimdi her iki tarafın Laplace dönüşümünü alıp konvolüsyon teoremini kullanalım,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{Y(s)}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

olarak bulunur ki, her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alırsak,

$$y(t) = 2 \frac{t^2}{2!} + 2 \frac{t^4}{4!}$$

$$\Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{1}{12}t^4$$

olarak bulunur.

6.5.2.2 Örnek:

$$\int_0^t y(u) y(t-u) du = 16 \sin 4t$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm:

Denklemini,

$y(t) * y(t) = 16 \sin 4t$ biçiminde yazar ve her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\{Y(s)\}^2 = \frac{64}{s^2 + 16} \Rightarrow Y_1(s) = \frac{8}{\sqrt{s^2 + 16}}, Y_2(s) = \frac{-8}{\sqrt{s^2 + 16}}$$

Şimdi ters Laplace dönüşümü ile,

$$y_1(t) = L^{-1}\{Y_1(s)\} = 8 L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2 + 16}}\right\} = 8 J_o(4t)$$

$$y_2(t) = L^{-1}\{Y_2(s)\} = -8 L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2 + 16}}\right\} = -8 J_o(4t)$$

olarak bulunur. $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ 'nin her ikisi de integral denklemin çözümüdür.

6.5.3 Abel İntegral Denklemini

Konvolüsyon tipindeki önemli integral denklemlerden biri Abel integral denklemdir. Bu integral denklem şöyle ifade edilir,

$$g(t) = \int_0^t \frac{y(u)}{(t-u)^\alpha} du$$

Burada $g(t)$ verilen bir fonksiyon, α ise $0 < \alpha < 1$ olan bir sabittir.

6.5.3.1 Örnek:

$$\int_0^t \frac{y(u)}{\sqrt{t-u}} du = 1 + t + t^2$$

şeklinde ifade edilen Abel integral denklemini çözelim.

Çözüm:

İntegral denklem,

$$y(t) * (t-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + t + t^2$$

biçiminde yazılabilir. Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınır,

$$L\{y(t)\} \cdot L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = L\{1 + t + t^2\}$$

$$\frac{Y(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{3/2}} + \frac{2}{s^{5/2}} \right)$$

bulunur ki ters Laplace dönüşümü alınır,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{2t^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right)$$

$$y(t) = \frac{t^{-1/2}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} \left(1 + \frac{t}{\frac{1}{2}} + \frac{2t^2}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \right)$$

$$y(t) = \frac{t^{-1/2}}{\pi} \left(1 + 2t + \frac{8t^2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{3\pi} (3 + 6t + 8t^2)$$

olarak bulunur.

6.5.4 İntegro-Diferansiyel Denklemler

İntegro diferansiyel denklem, bilinmeyen $y(t)$ fonksiyonunun türevlerinin de bulunduğu bir integral denklemdir. Örneğin;

$$y''(t) = y(t) + \sin t + \int_0^t \cos(t-u) y(u) du$$

Bu tür bir denklemin başlangıç koşullarına bağlı çözümü Laplace dönüşümleri ile elde edilebilir.

6.5.4.1 Örnek:

$$y(0) = 2 \text{ ise } y'(t) + 5 \int_0^t \cos 2(t-u) y(u) du = 10$$

denklemini çözelim.

Çözüm:

Denklemini,

$y'(t) + 5 \cos 2t * y(t) = 10$ biçiminde yazabiliriz. Şimdi her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

$$s Y(s) - y(0) + \frac{5s Y(s)}{s^2 + 4} = \frac{10}{s}$$

$Y(s)$ 'yi yalnız bırakıp, düzenlersek,

$$Y(s) = \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)} \quad (*)$$

Şimdi ters Laplace dönüşümünü alarak $y(t)$ 'yi bulalım.

(*) ifadesindeki $\frac{1}{s^2(s^2 + 9)}$ 'u şöyle yazabiliriz,

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 9} \right)$$

Şimdi bu eşitliği (*) ifadesinde yerine yazalım,

$$\begin{aligned} \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)} &= \frac{1}{9} \left\{ \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2} - \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2 + 9} \right\} \\ &= \frac{1}{9} \left\{ \left(2s + 10 + \frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} \right) - \left(\frac{2s^3 + 10s^2 + 18s - 10s + 90 - 50}{s^2 + 9} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ \left(2s + 10 + \frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} \right) - \left(2s + 10 + \frac{-10s - 50}{s^2 + 9} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{9} \left(\frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2 + 9} + \frac{50}{s^2 + 9} \right)$$

şeklini alır.

$$\Rightarrow L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)} \right\} = \frac{1}{9} L^{-1}\left\{ \frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2 + 9} + \frac{50}{s^2 + 9} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{9} \left(8 + 40t + 10 \cos 3t + 50 \cdot \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{27} (24 + 120t + 30 \cos 3t + 50 \sin 3t)$$

olarak bulunur.

7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Laplace dönüşümlerindeki genel amaç, zor çözülebilen bir diferansiyel denklemi, kolay çözülebilen cebir problemine dönüştürüp ardından ters dönüşümle sonucu elde etmektir.

Fizik ve mühendislik bilim dallarında da (mekanik, elektrik devreleri vb.) karşımıza çıkan bazı problemlerin çözümünde Laplace dönüşümlerini kullanabiliriz. Bundan başka matematikte kısmi türevli diferansiyel denklem problemlerinin çözümünde, bazı integrallerin hesaplanmasında ve integral denklemlerin çözümünde de Laplace dönüşümleri kullanılabilir.



KAYNAKLAR

Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G. Ve Oturanç, G., (2001), Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, E.Ü. Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları Yayınları No:14, Fakülteler Kitapevi.

Borat, O. ve Palavan, S., (1972), Mühendislikte Diferansiyel Denklemler, İ.T.Ü. Yayınları, İstanbul.

Bronson, R., (1994), Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Equations, New York.

Cerit, C., (1998), Çözümlü Diferansiyel Denklemler Problemleri, İ.T.Ü. Yayınları, İstanbul.

Cesur, Y., (2004), Diferansiyel Denklemler ve Mathematica, İ.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, İstanbul.

Dernek, A., N. ve Dernek, A., (2001), Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, İstanbul.

Fogiel, M., (1978), The Differential Equations Problem Solver, Staff of Research and Education Association, New York.

Göktürk, B., B., (2004), Laplace Dönüşümleri ve Uygulamaları, FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Hamzaoglu, M., (2000), Çözümlü Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları, No:661, İstanbul.

Hasonov, E., Uzgören, G., ve Büyükaksoy, A., (2002), Diferansiyel Denklemler Teorisi, Papatya Yayıncılık.

Martin, R., H., Jr., (1983), Ordinary Differential Equations, New York.

Rainville, E., D. ve Bedient, P., E., (1989), Elementary Differential Equations, New York.

Schiff, J., (1988), The Laplace Transform, New York.

Spiegel, M., Ph.D., (1965), Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms, New York.

Yaşar, İ., B., (1999), Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Siyasal Kitapevi, Ankara.

Yaşar, İ., B., (2003), İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Ankara.

<http://www.efunda.com/math>

<http://www.istanbul.edu.tr/fen/matematik/mtmtkclr.htm#laplace>

http://www.s3.kth.se/~david/SigSysII/Lektion-2_comp.pdf

<http://www.sosmath.com/diffeq/laplace/application/laplace/answer.html>

<http://www.tutorial.math.lamar.edu>

EKLER**EK A****Özel Fonksiyonlar Tablosu****1. Gamma Fonksiyonu**

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, \quad n > 0$$

2. Beta Fonksiyonu

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m, n > 0$$

3. Bessel Fonksiyonu

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4 (2n+2) \cdot (2n+4)} - \dots \right\}$$

4. Modifiye Bessel Fonksiyonu

$$I_n(t) = i^{-n} J_n(it) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 + \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4 (2n+2) (2n+4)} + \dots \right\}$$

5. Hata Fonksiyonu

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

6. Hata Fonksiyonunun Komplementeri

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-u^2} du$$

7. Eksponansiyel İntegrali

$$Ei(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

8. Sinüs İntegrali

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

9. Kosinüs İntegrali

$$Ci(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du$$



EK B**Laplace Dönüşümlerinin Genel Özellikleri**

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

f(t)		F(s)
1) $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	→	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
2) $a f(at)$	→	$F(s/a)$
3) $e^{at} f(t)$	→	$F(s-a)$
4) $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & , \quad t > a \\ 0 & , \quad t < a \end{cases}$	→	$e^{-as} F(s)$
5) $f'(t)$	→	$s F(s) - f(0)$
6) $f''(t)$	→	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
7) $f^{(n)}(t)$	→	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
8) $-t f(t)$	→	$F'(s)$
9) $t^2 f(t)$	→	$F''(s)$
10) $(-1)^n t^n f(t)$	→	$F^{(n)}(s)$
11) $\int_0^t f(u) du$	→	$\frac{F(s)}{s}$
12) $\int_0^t \dots \int_0^t f(u) du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u) du$	→	$\frac{F(s)}{s^n}$
13) $\int_0^t f(u) g(t-u) du$	→	$F(s) G(s)$

$$14) \frac{f(t)}{t}$$

$$\rightarrow \int_s^{\infty} F(u) du$$

$$15) \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

$$\rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

$$16) \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$\rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

$$17) f(t) = f(t+T)$$

$$\rightarrow \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

$$18) \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

$$\rightarrow \frac{P(s)}{Q(s)} \text{ (P(s), derecesi n den küçük olan bir}$$

polinomdur.

$$\rightarrow Q(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n) \text{ ve}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ birbirinden farklıdır.)

EK C

Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri Tablosu

	$f(t)$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, 0! = 1$	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
4.	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6.	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}, 0! = 1$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
7.	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n > 0$
8.	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$
9.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
10.	$\frac{e^{bt} \sin at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$
11.	$e^{bt} \cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$
12.	$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{1}{s^2 - a^2}$

	$f(t)$	$F(s)$
13.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
14.	$\frac{e^{bt} \sinh at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$
15.	$e^{bt} \cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$
16.	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$
17.	$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$
18.	$\frac{\sin at - at \cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$
19.	$\frac{t \sin at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$
20.	$\frac{\sin at + at \cos at}{2a}$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$
21.	$\cos at - \frac{1}{2} at \sin at$	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$
22.	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
23.	$\frac{at \cosh at - \sinh at}{2a^3}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$
24.	$\frac{t \sinh at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$
25.	$\frac{\sinh at + at \cosh at}{2a}$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$

	$f(t)$	$F(s)$
26.	$\cosh at + \frac{1}{2}at \sinh at$	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$
27.	$t \cosh at$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$
28.	$\frac{(3 - a^2 t^2) \sin at - 3at \cos at}{8a^5}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^3}$
29.	$\frac{t \sin at - at^2 \cos at}{8a^3}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^3}$
30.	$\frac{(1 + a^2 t^2) \sin at - at \cos at}{8a^3}$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^3}$
31.	$\frac{3t \sin at + at^2 \cos at}{8a}$	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^3}$
32.	$\frac{(8 - a^2 t^2) \sin at + 5at \cos at}{8a}$	$\frac{s^4}{(s^2 + a^2)^3}$
33.	$\frac{(8 - a^2 t^2) \cos at - 7at \sin at}{8}$	$\frac{s^5}{(s^2 + a^2)^3}$
34.	$\frac{t^2 \sin at}{2a}$	$\frac{3s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^3}$
35.	$\frac{1}{2}t^2 \cos at$	$\frac{s^3 - 3a^2 s}{(s^2 + a^2)^3}$
36.	$\frac{1}{6}t^3 \cos at$	$\frac{s^4 - 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 + a^2)^4}$
37.	$\frac{t^3 \sin at}{24a}$	$\frac{s^3 - a^2 s}{(s^2 + a^2)^4}$

	$f(t)$	$F(s)$
38.	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at - 3at \cosh at}{8a^5}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^3}$
39.	$\frac{at^2 \cosh at - t \sinh at}{8a^3}$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^3}$
40.	$\frac{at \cosh at + (a^2 t^2 - 1) \sinh at}{8a^3}$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^3}$
41.	$\frac{3t \sinh at + at^2 \cosh at}{8a}$	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^3}$
42.	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at + 5at \cosh at}{8a}$	$\frac{s^4}{(s^2 - a^2)^3}$
43.	$\frac{(8 + a^2 t^2) \cosh at + 7at \sinh at}{8}$	$\frac{s^5}{(s^2 - a^2)^3}$
44.	$\frac{t^2 \sinh at}{2a}$	$\frac{3s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^3}$
45.	$\frac{1}{2} t^2 \cosh at$	$\frac{s^3 + 3a^2 s}{(s^2 - a^2)^3}$
46.	$\frac{1}{6} t^3 \cosh at$	$\frac{s^4 + 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 - a^2)^4}$
47.	$\frac{t^3 \sinh at}{24a}$	$\frac{s^3 + a^2 s}{(s^2 - a^2)^4}$
48.	$\frac{e^{at/2}}{3a^2} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2} \right\}$	$\frac{1}{s^3 + a^3}$
49.	$\frac{e^{at/2}}{3a} \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2} - e^{-3at/2} \right\}$	$\frac{s}{s^3 + a^3}$

	$f(t)$	$F(s)$
50.	$\frac{1}{3} \left(e^{-at} + 2e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} \right)$	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$
51.	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2} \left\{ e^{3at/2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2} \right\}$	$\frac{1}{s^3 - a^3}$
52.	$\frac{e^{-at/2}}{3a} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{3at/2} \right\}$	$\frac{s}{s^3 - a^3}$
53.	$\frac{1}{3} \left(e^{at} + 2e^{-at/2} \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} \right)$	$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$
54.	$\frac{1}{4a^3} (\sin at \cosh at - \cos at \sinh at)$	$\frac{1}{s^4 + 4a^4}$
55.	$\frac{\sin at \sinh at}{2a^2}$	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$
56.	$\frac{1}{2a} (\sin at \cosh at + \cos at \sinh at)$	$\frac{s^2}{s^4 + 4a^4}$
57.	$\cos at \cosh at$	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$
58.	$\frac{1}{2a^3} (\sinh at - \sin at)$	$\frac{1}{s^4 - a^4}$
59.	$\frac{1}{2a^2} (\cosh at - \cos at)$	$\frac{s}{s^4 - a^4}$
60.	$\frac{1}{2a} (\sinh at + \sin at)$	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$
61.	$\frac{1}{2} (\cosh at + \cos at)$	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$
62.	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi}t^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$

	$f(t)$	$F(s)$
63.	$\frac{\operatorname{erf} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$
64.	$\frac{e^{at} \operatorname{erf} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$
65.	$e^{at} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b e^{b^2 t} \operatorname{erfc}(b\sqrt{t}) \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{s-a+b}}$
66.	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
67.	$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$
68.	$a^n J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad n > -1$
69.	$a^n I_n(at)$	$\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}} \quad n > -1$
70.	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$	$\frac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$
71.	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t > b \\ 0 & t < b \end{cases}$	$\frac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$
72.	$\frac{t J_1(at)}{a}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$
73.	$t J_0(at)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$
74.	$J_0(at) - at J_1(at)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$

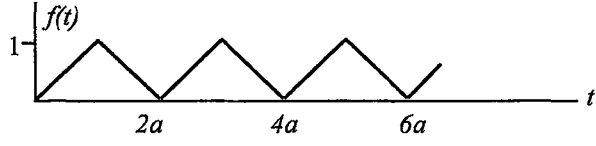
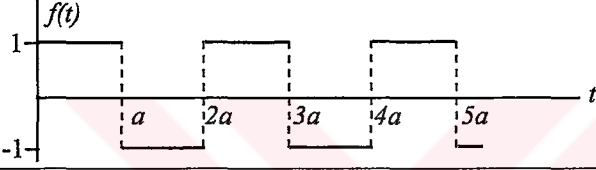
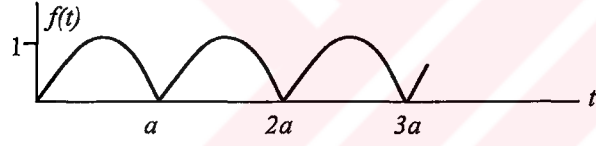
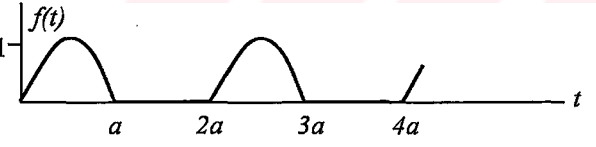
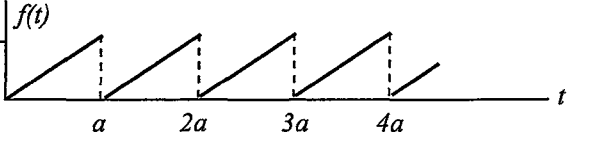
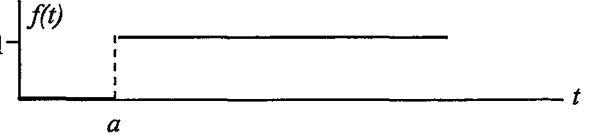
	$f(t)$	$F(s)$
75.	$\frac{t I_1(at)}{a}$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
76.	$t I_0(at)$	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
77.	$I_0(at) + at I_1(at)$	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$
78.	$F(t) = n, n \leq t < n+1, n = 0,1,2,\dots$	$\frac{1}{s(e^s - 1)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}$
79.	$F(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r_k$ [t] = t den küçük veya t ye eşit olan tam sayıların en büyüğü	$\frac{1}{s(e^s - r)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$
80.	$F(t) = r^n, n \leq t < n+1, n = 0,1,2,\dots$	$\frac{e^s - 1}{s(e^s - r)} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$
81.	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$
82.	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$	$\frac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$
83.	$\left(\frac{t}{a}\right)^{\pi/2} J_n(2\sqrt{at})$	$\frac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \quad n > -1$
84.	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
85.	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

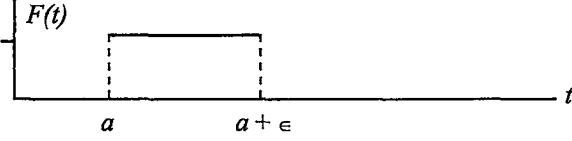
	$f(t)$	$F(s)$
86.	$\operatorname{erf}\left(a/2\sqrt{t}\right)$	$\frac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
87.	$\operatorname{erfc}\left(a/2\sqrt{t}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
88.	$e^{b(bt+a)} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$
89.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t} a^{2n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u}) du$	$\frac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$
90.	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$	$\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$
91.	$\operatorname{Ci}(at)$	$\frac{\ln[(s^2 + a^2)/a^2]}{2s}$
92.	$\operatorname{Ei}(at)$	$\frac{\ln[(s+a)/a]}{s}$
93.	$\ln t$	$-\frac{(\gamma + \ln s)}{s}$ $\gamma = \text{Euler sabiti} = .5772156\dots$
94.	$\frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$	$\ln\left(\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}\right)$
95.	$\ln^2 t$	$\frac{\pi^2}{6s} + \frac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ $\gamma = \text{Euler sabiti} = .5772156\dots$
96.	$-(\ln t + \gamma)$ $\gamma = \text{Euler sabiti} = .5772156\dots$	$\frac{\ln s}{s}$

	$f(t)$	$F(s)$
97.	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ $\gamma = \text{Euler sabiti} = .5772156\dots$	$\frac{\ln^2 s}{s}$
98.	$t^n \ln t$	$\frac{\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1) \ln s}{s^{n+1}}$
99.	$\frac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}(a/s)$
100.	$Si(at)$	$\frac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$
101.	$\frac{e^{-2\sqrt{\alpha t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{a/s}}{\sqrt{s}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha/s})$
102.	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t^2}$	$e^{s^2/4a^2} \operatorname{erfc}(s/2a)$
103.	$\operatorname{erf}(at)$	$\frac{e^{s^2/4a^2} \operatorname{erfc}(s/2a)}{s}$
104.	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+\alpha)}}$	$\frac{e^{as} \operatorname{erfc}\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$
105.	$\frac{1}{t+a}$	$e^{as} Ei(as)$
106.	$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \left[\cos as \left\{ \frac{\pi}{2} - Si(as) \right\} - \sin as Ci(as) \right]$
107.	$\frac{t}{t^2 + a^2}$	$\sin as \left\{ \frac{\pi}{2} - Si(as) \right\} + \cos as Ci(as)$
108.	$\tan^{-1}(t/a)$	$\frac{\cos as \left\{ \frac{\pi}{2} - Si(as) \right\} - \sin as Ci(as)}{s}$

	$f(t)$	$F(s)$
109.	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + a^2}{a^2} \right)$	$\frac{\sin as \left\{ \frac{\pi}{2} - Si(as) \right\} + \cos as Ci(as)}{s}$
110.	$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{t^2 + a^2}{a^2} \right)$	$\left[\frac{\pi}{2} - Si(as) \right]^2 + Ci^2(as)$
111.	$n(t)$	0
112.	$\delta(t)$	1
113.	$\delta(t-a)$	e^{-as}
114.	$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
115.	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$	$\frac{\sinh sx}{s \sinh sa}$
116.	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$	$\frac{\sinh sx}{s \cosh sa}$
117.	$\frac{t}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$	$\frac{\cosh sx}{s \sinh sa}$
118.	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$	$\frac{\cosh sx}{s \cosh sa}$
119.	$\frac{xt}{a} + \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$	$\frac{\sinh sx}{s^2 \sinh sa}$
120.	$x + \frac{8\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2\alpha}$	$\frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$
121.	$\frac{t^2}{2a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{n\pi t}{a} \right)$	$\frac{\cosh sx}{s^2 \sinh sa}$

	$f(t)$	$F(s)$
122.	$t + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$	$\frac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$
123.	$\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$	$\frac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$
124.	$\frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$
125.	$\frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$
126.	$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s}}$
127.	$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \cos \frac{n\pi x}{a}$	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s}}$
128.	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t / a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh a\sqrt{s}}$
129.	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$
130.	$\frac{xt}{a} + \frac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-n^2 \pi^2 t / a^2}) \sin \frac{n\pi x}{a}$	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2 \sinh a\sqrt{s}}$
131.	$\frac{1}{2}(x^2 - a^2) + t - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$
132.	$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t / a^2} J_0(\lambda_n x / a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, J_0(\lambda) = 0$ m pozitif kökleridir	$\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{s J_0(ia\sqrt{s})}$

	$f(t)$	$F(s)$
133.	$\frac{1}{4}(x^2 - a^2) + t + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, J_0(\lambda) = 0$ in pozitif kökleridir	$\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2 J_0(ia\sqrt{s})}$
134.	Üçgen dalga fonksiyonu. 	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$
135.	Kare dalga fonksiyonu. 	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$
136.	Rektifiye sinüs dalga fonksiyonu. 	$\frac{\pi a}{a^2 s^2 + \pi^2} \coth\left(\frac{as}{2}\right)$
137.	Yarı rektifiye sinüs dalga fonksiyonu. 	$\frac{\pi a}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$
138.	Testere dişi dalga fonksiyonu. 	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$
139.	Heavisinde birim fonksiyonu. $H(t - a)$ 	$\frac{e^{-as}}{s}$

	$f(t)$	$F(s)$
140.	Darbe fonksiyonu. 	$\frac{e^{-as}(1 - e^{-\epsilon s})}{s}$
141.	Basamak Fonksiyonu	$\frac{1}{s(1 - e^{-as})}$

EK D**Laplace (1749 – 1827)**

“Doğanın tüm olayları birkaç değişmeyen kanunun matematik sonuçlarıdır” diyen Marquis Pierre-Simon de Laplace, 23 Mart 1749 günü bir köylü çocuğu olarak dünyaya geldi. Ailesi, Fransa’nın Calvados ilinin Beaumont-en-Auge kasabasında yaşıyordu. Laplace’ın ilk çocukluk yılları hakkında çok az şeyler biliniyor. Onun çocukluğunu ve gençliğini saran karanlık yılları, kendini beğenen davranışlarından ileri geliyordu. Kökeninin fakir bir köylüden gelişi onun yüzünü kızartır ve sürekli onu gizlemek için elinden geleni yapardı. Kısaca, “bir köylü çocuğu olarak doğmadı ve kendini beğenen birisi olarak ölmedi” cümlesi ile yaşam öyküsü özetlenebilir. Her ne duyguysa, Laplace köylü olması ve ailesinin fakir olmasından bir aşağılık duyardı. Tüm yaşamı boyunca bu duygu ve düşünceden kendisini kurtaramadı. Bu da onun zayıf bir yanıydı.

Laplace, ilk yeteneğini köy okulunda gösterdi. Bu başarısı zengin komşularının sıcak dikkatini çekti. Zengin komşularını görmesi belki yukarıda sözünü ettiğimiz duyguları daha küçük çocukken şuur altına alıp baskı kurmuş olabilir düşüncesi akla gelmektedir. İlk başarılarını, teolojik tartışmalarda elde ettiği söylenir.

Laplace, kendisini çok erken matematiğe verdi. O zaman Beaumont’ta askeri bir okul vardı. Laplace bu okula devam ediyordu. Söylendiğine göre, Laplace sonraları bu okulda bir süre matematik dersleri okutmuştur. Yine bir söylentiye göre, onun matematik yeteneğinden çok daha fazla hafıza yeteneğinin olduğu kanaati vardır. Bundan dolayı, Laplace on sekiz yaşına gelince zengin koruyucularının tavsiye mektuplarıyla Paris’in yolunu tuttu. Kendisinin yüksek yeteneğini biliyor, fakat bunda hiç şişme ve bir abartma göstermiyordu. Genç Laplace, kendine tam bir güven içinde Paris’e matematik dünyasını fethetmek için geldi.

Paris’te doğru d’Alembert’in evine gitti. Tavsiye mektuplarını gönderdi. Fakat kabul edilmedi. D’Alembert, büyük ve kuvvetli kimselerin önerilerinden başka bir varlıkları olmayan kimselerle uğraşmıyordu. Laplace, övmeye değer bir anlayışla her şeyi hissetti. Eve döndü ve d’Alembert’e mekaniğin temel kuralları üzerine bir mektup yazdı. Böylece, oynadığı oyunda başarılı olmuştu. D’Alembert’in onu görmek için gönderdiği çağrı yazısında şöyle yazıyordu. “Bayım, görüyorsunuz ki öneri mektuplarına hiç değer vermiyorum. Sizin bu tür övgü mektuplarına hiç gereksinmeniz yok. Siz kendi kendinizi daha iyi tanıttınız. Bu bana yeter. Size yardım etmek bana bir borç olsun.” Birkaç gün sonra Laplace, d’Alembert’in

sayesinde Paris'teki askeri okula matematik öğretmeni olarak atandı. İşte bu sırada Laplace, Newton'un genel çekim kanununun güneş sistemine uygulaması adlı büyük eserini verdi.

Astronom matematikçi olduğu için, kendisine Fransız Newton'u denmiştir. Olasılıklar kuramının kurucusu gözüyle basılabilir. “Bildiklerimiz çok değil, bilmediklerimiz çoktur” sözüyle alçak gönüllülüğünü göstermiştir. Matematiğe önem vermediğini, şöhret ve ün için değil de kendi arzularını yenmek için matematikle uğraştığını söyler. Dahi kimselerin buluşlarını veya yaşayışlarını incelemek ve kendisini onların yerine koyarak engelleri aşmak düşüncesindedir.

Yaptığı çalışmaların tümünün kendisine ait olduğunu ileri sürer. Bu söz doğru değildir. Örneğin, yazdığı “Gök Mekaniği” adlı şaheserinde, gelecek kuşaklara bunu, ben yarattım gibi bir izlenimi vermeyi ustalıkla kullanmıştır. Diğer matematikçilerden aldıklarına kaynak vermez, kendine yarayan ve dışarıdan aldığı şeyleri kendine mal etmeyi çok kurnazca becerirdi. Gök Mekaniği için gereken analiz bilgilerini Legendre'den almış ve adını bile vermemiştir. Yalnız Newton'un adı geçer.

Laplace, Lagrange'da değinilen üç cisim problemini güneş sistemi için düşündü. Newton'un çekim kanununu Güneş sistemine uyguladı. Gezegenlerin hareketlerinin Güneş tarafından belirlendiğini, devirli küçük değişiklikler hariç, gezegenlerin Güneşe olan uzaklıklarının değişmediğini ispatladı. O zaman yirmi dört yaşında olan Laplace için tarih 1773 yıllarını gösteriyordu. Bu başarısından dolayı Paris İlimler Akademisine üye seçildi. Yaşamının ve meslek hayatının ilk şerefini ve ödülünü almış oluyordu. Bulduğu matematik sonuçlarının büyük birçoğunu astronomide kullanmak için elde etti. Sayılar kuramı üzerinde bir süre çalıştı ve onu kısa bir zaman sonra bıraktı. Olasılıklar kuramı üzerinde çalışması yine onu astronomide kullanmasından kaynaklandı. Gök Mekaniği adlı yapıtı, yirmi altı yıllık, bir zaman sürecinde parça parça olarak yayınlanmıştır. Gezegenlerin hareketleri, şekilleri, gel-git olaylarını inceleyen ilk iki cilt, 1799 yılında çıktı. 1802 ve 1805 yıllarında iki cilt ve 1823 ile 1825 yılları arasında da beşinci cildi yayınladı. Yalnız, bu eserlerde matematik kısımları pek açıklanmıyor ve yorumlardan da kaçınılıyordu. Hatta, matematik hesaplar için, “kolayca görülür” deyimini kullanılıyordu. Aslında, bu kolayca görülür deyimini ters bir anlam da taşıyordu. Kendisi bile bu kolayca görülür dediği kısımları günlerce uğraşarak çözüyordu. Okuyucuları ve öğrencileri daha sonra bu deyim üzerinde haftalarca uğraşacaklarını bildiklerinden, homurdanmayı adet edinmişlerdi.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	05.07.1978	
Doğum yeri	İzmit	
Lise	1992-1995	Gölcük Barbaros Hayrettin Lisesi
Lisans	1996-2000	Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2002-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı
Çalıştığı kurum	2001-	İstiklal İlköğretim Okulu

