

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

168379

ÇOK AMAÇLI BULANIK LİNEER TAŞIMA PROBLEMİ

Matematikçi Hale GONCE

F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Matematik Mühendisliği Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU (Y.T.Ü)



Doç.Dr. Fatma TIRYAKI



Yrd.Doç.Dr. Coşkun Güle



İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TAŞIMA PROBLEMİ.....	5
2.1 Problemin Tanımı ve Formülasyonu	5
2.2 Problemin Çözüm Yöntemleri.....	7
2.2.1 Başlangıç Çözümün Belirlenmesi	8
2.2.1.1 Kuzey Batı Köşesi Yöntemi	8
2.2.1.2 En Düşük Maliyet Yöntemi.....	9
2.2.1.3 Ceza Maliyeti Yöntemi.....	10
2.2.2 Optimal Çözümün Belirlenmesi	10
2.2.2.1 Atlama Taşı Yöntemi.....	11
2.2.2.2 Basitleştirilmiş Dağıtım Yöntemi.....	12
3. BULANIK MATEMATİK.....	14
3.1 Bulanık Mantık	14
3.2 Temel Kavramlar	15
3.2.1 Bulanık Kümeler.....	15
3.2.2 Destek Kümesi.....	19
3.2.3 Alfa Kesen	19
3.2.4 Konvekslik.....	20
3.2.5 Yükseklik.....	20
3.2.6 Normallik.....	21
3.2.7 Kardinalite	21
3.3 Bulanık Kümelerde Temel Küme Teorisi İşlemleri	22
3.3.1 Eşitlik.....	22
3.3.2 Kesişme	22

3.3.3	Birleşme	22
3.3.4	Tümleyen	23
3.4	Bulanık Kümelerin Özellikleri	24
3.5	Bulanık Kümelerde Cebirsel İşlemler	25
3.6	Genişleme Prensibi	27
3.7	Bulanık Sayılar	28
3.8	Bulanık Sayılarda Temel Aritmetik İşlemler	29
3.9	Üçgensel Bulanık Sayılar	30
3.9.1	Üçgensel Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler	31
3.10	Yamuksal Bulanık Sayılar	35
3.10.1	Yamuksal Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler	36
4.	BULANIK KARAR VERME	40
4.1	Bulanık Lineer Programlama	43
4.1.1	Amaçta Hedef ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali	44
4.1.2	Kesin Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali	50
4.2	Bulanık Çok Kriterli Karar Verme	53
4.2.1	Çok Amaçlı Bulanık Lineer Programlama	54
5.	BULANIK TAŞIMA PROBLEMİ	62
5.1	Tek Amaçlı Bulanık Lineer Taşıma Problemi	62
5.2	Çok Amaçlı Bulanık Lineer Taşıma Problemi	68
5.2.1	Çok Amaçlı Lineer Taşıma Problemine Bulanık Tekniklerle Çözüm Bulma	69
5.2.1.1	Birinci Yaklaşım	69
5.2.1.2	İkinci Yaklaşım	76
5.2.2	Bulanık Parametrelere Sahip Çok Amaçlı Lineer Taşıma Problemi	82
	SONUÇ	90
	KAYNAKLAR	91
	ÖZGEÇMİŞ	94

SİMGE LİSTESİ

a_i	i . arz miktarı
b_j	j . talep miktarı
$\tilde{a}_i$	i . bulanık arz miktarı
$\tilde{b}_j$	j . bulanık talep miktarı
x_{ij}	i . kaynaktan j . varış yerine taşınan miktarı gösteren karar değişkeni
c_{ij}	i . kaynaktan j . varış yerine birim taşıma maliyeti
z	Amaç fonksiyonu
μ	Üyelik fonksiyonu
$\tilde{A}$	Bulanık bir küme
$\tilde{A}_\alpha$	Bulanık bir kümenin α – keseni



KISALTMA LİSTESİ

BLP	Bulanık Lineer Programlama
ÇABLP	Çok Amaçlı Bulanık Lineer Programlama
ÇALP	Çok Amaçlı Lineer Programlama
ÇALTP	Çok Amaçlı Lineer Taşıma Problemi
KV	Karar Verici
LP	Lineer Programlama
TABLTP	Tek Amaçlı Bulanık Lineer Taşıma Problemi
TP	Taşıma Problemi



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Taşıma problemi.....	5
Şekil 2.2	Taşıma tablosu.	8
Şekil 3.1.	Kesin A kümesinin üyelik fonksiyonu.....	15
Şekil 3.2	Üyelik fonksiyonu (Örnek 3.1).	17
Şekil 3.3	Üyelik fonksiyonu (Örnek 3.2).	18
Şekil 3.4	Üyelik fonksiyonu (Örnek 3.3).	18
Şekil 3.5	Konveks bulanık küme.....	20
Şekil 3.6	Konveks olmayan bulanık küme.....	21
Şekil 3.7	İki bulanık kümenin kesişimi.	23
Şekil 3.8	İki bulanık kümenin birleşimi.	23
Şekil 3.9	A ve B bulanık kümelerinin kesişimi (Örnek 3.5).....	25
Şekil 3.10	Genişleme prensibinin genel gösterimi.....	27
Şekil 3.11	Genişleme prensibinin gösterimi (Örnek 3.7).....	28
Şekil 3.12	Bulanık M sayısının α –keseni.....	29
Şekil 3.13	Üçgensel bulanık sayı.	31
Şekil 3.14	Yamuksal bulanık Sayı.	35
Şekil 4.1	Bulanık bir karar.	42
Şekil 4.2	“ $\leq$ ” yapısındaki kısıtlara ait üyelik fonksiyonu.....	46
Şekil 4.3	“ $\cong$ ” yapısındaki kısıtın üyelik fonksiyonu.....	48
Şekil 4.4	Amacın üyelik fonksiyonu (Örnek 4.2).	49
Şekil 4.5	$\alpha = 1$ ve $\alpha = 0$ seviyelerine karşılık gelen uygun bölgeler R_1 ve R_0	53
Şekil 4.6	Kararın üyelik fonksiyonu (Örnek 4.3).....	53
Şekil 4.7	Her bir amacın üyelik fonksiyonu.....	57
Şekil 4.8	Çözüm uzayı (Örnek 4.4).....	59
Şekil 5.1	Bulanık arz miktarı.....	63
Şekil 5.2	Bulanık hedef $\tilde{G}$ 'nin üyelik fonksiyonu.	64
Şekil 5.3	Bulanık arz miktarlarının üyelik fonksiyonu.	83
Şekil 5.4	Bulanık talep miktarlarının üyelik fonksiyonu.	84

TABLO LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 4.1 Örnek 11 sonuç değerleri.	49
Tablo 4.2 Ödemeler matrisi.	58
Tablo 4.3 Ödemeler matrisi (Örnek 4.4).	60
Tablo 5.1 Parametrik TP	67
Tablo 5.2 Parametrik TP'nin çözüm tablosu.	68
Tablo 5.3 Örnek 5.3 için optimal uzlaşık çözüm değerleri.	82



ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında öneri ve yardımlarıyla beni destekleyen, akademik çalışma detaylarını bana öğreten tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet Ahlatçioğlu'na teşekkür ederim.

Ayrıca yardımlarıyla çalışmama büyük katkıda bulunan Sayın Doç. Dr. Fatma Tiryaki'ye; beni yetiştiren ve her zaman, her koşulda bana destek olan sevgili Ailem'e; bana yürekten inanan ve hiçbir konuda desteğini esirgemeyen sevgili arkadaşım Koray Köçken'e; bugüne kadar bana emeği geçen tüm hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Hale GONCE



ÖZET

Lineer programlama probleminin özel bir şekli olan taşıma modelinde amaç, malların kaynaklardan hedeflere minimum maliyetle taşınmasıdır. Taşıma modeli ayrıca stok kontrolü, işgücü programlama, personel atama gibi birçok alanda da kullanılmaktadır. Problemleri daha gerçekçi şekilde ele almak ve maliyet minimizasyonunun yanında dağıtım güvenliği, dağıtım süresi gibi amaçları da dikkate almak için taşıma modelinde çok amaçlı yapı gündeme gelmiştir.

Çok amaçlı taşıma probleminde bulanıklık iki şekilde ortaya çıkmaktadır. İlki arz-talep miktarı ve fiyat parametreleri kesin olarak verilen çok amaçlı problemin bulanık tekniklerle çözümüdür. İkincisi ise problemin parametrelerinin bulanık yapıda olmasıdır.

Tezde taşıma problemi ve çözüm teknikleri, bulanık temel kavramların tanımları ve bulanık lineer programlama problemleri için geliştirilen bazı çözüm yöntemleri verilmiştir. Tezin son bölümünde, tek amaçlı bulanık lineer taşıma problemi için verilen parametrik bir çözüm yaklaşımından sonra çok amaçlı lineer taşıma problemi için optimal uzlaşık çözüm üreten iki bulanık programlama yaklaşımı ve ayrıca bulanık arz-talep miktarlarına sahip çok amaçlı lineer taşıma probleminin çözümü için bir yaklaşım sunulmaktadır.

Anahtar kelimeler: Çok Amaçlı Taşıma Problemi, Bulanık Matematik Programlama.

ABSTRACT

The purpose of the transportation problem which is a special form of a linear programming problem is to transport the goods from sources to destinations. Transportation problem is also used in inventory control, manpower planning, personnel allocation, etc. In real-world problems, to reflect the problem as more realistically by taking objectives such as safety of delivery, delivery time besides transportation cost into considerations, it is used the multi objective transportation problem.

Fuzziness in multi objective transportation problem is revealed in two ways. The first one is to solve the multi objective transportation problem using fuzzy techniques. And other is to solve one with fuzzy parameter using fuzzy techniques.

In this thesis, firstly the transportation problem and its solution procedures, and then fundamental fuzzy concepts, fuzzy linear programming problem and its solution techniques are given. In the main and the last part of this thesis, a parametric approach for fuzzy single objective linear transportation problem, and the two fuzzy programming approaches generating compromise solution from a Pareto-optimal set for multi objective linear transportation problem, and then an approach for multi objective linear transportation problem with fuzzy demand and supply parameters are presented.

Keywords: Multi Objective Transportation Problem, Fuzzy Mathematical Programming.

1. GİRİŞ

Dünya, sanayi devriminden itibaren kurumlarda olağanüstü bir sayısal büyüme ve karışıklıkla karşı karşıya kalmıştır. Devrimle birlikte oluşan bu değişimin büyük bir bölümünün nedeni, kurumlardaki iş bölümü ve idari sorumlulukların paylaşılmasındaki artıştır. Her ne kadar sonuçlar olağanüstüysen de bu ihtisaslaşma beraberinde şu anda hala birçok kurumda var olan sorunları meydana getirmiştir. Problemlerden bir tanesi; kurumlarda birçok birimin, kendi kendini idare eden bir imparator gibi kendi özel amaçları ve değer yargıları doğrultusunda büyüme eğilimleridir. Bu yüzden kurumun bütün aktiviteleri ve amaçları birbirine karıştırılarak gerçek durumu inceleme fırsatı kaybolmuştur. Bazen bir birim için en iyi olan durum diğeri için zararlıdır, bu nedenle birimler çatışan amaçlar doğrultusundaki çalışmalara son verebilirler. Bir kurumdaki karışıklık ve ihtisaslaşma arttıkça, kullanılabilir kaynakların değişik aktivitelere göre en etkili bir biçimde dağıtılması ve kullanılması daha da zorlaşır. Bu tür problemler ve bunların çözülmesinde en iyi yöntemin bulunmasına duyulan ihtiyaç yöneylem araştırmasının ortaya çıkmasına neden olmuştur (Hillier ve Lieberman, 1990)*.

Yöneylem araştırması, gerçek hayat sistemlerinin matematiksel modellerle temsil edilmesi ve en iyi çözümün bulunması için kurulan modellere sayısal yöntemler (algoritmalar) uygulanması olarak tanımlanabilir.

Yöneylem araştırmasındaki matematiksel modellerde karar değişkenleri tamsayı ya da sürekli, amaç ve kısıt fonksiyonları lineer ya da non-lineer yapıda olabilir. Problemlerin bu tür modellerle temsil edilmesi sayesinde değişik çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlar içerisinde en belirgin ve başarıyla kullanılanı Lineer Programlama (LP) 'dır (Taha, 2000)**.

Tüm amaç ve kısıt fonksiyonları lineer, tüm değişkenleri sürekli olan LP, sınırlı kaynakların kullanımını optimum kılmak için tasarlanmış bir matematiksel modelleme yöntemidir. Askerlik, endüstri, tarım, ulaştırma, ekonomi sağlık sistemleri, hatta davranış bilimleriyle sosyal bilimler gibi alanlarda oldukça başarılı LP uygulamaları vardır. Ayrıca LP, hesaplamalardaki yüksek verimliliği ile tamsayı, doğrusal olmayan ve stokastik programlama gibi başka tip yöneylem araştırması modellerinin çözüm algoritmalarının

* Hillier, F.S., ve Lieberman, G.J., (1990), Introduction to Operations Research, McGraw-Hill Publishing Company, United States of America, sayfa 3.

** Taha, H.A., (2000), Yöneylem Araştırması (6. Basımdan Çeviri), Literatür Yayıncılık, İstanbul, sayfa 3.

geliştirilmesinin de temelini oluşturmuştur.

LP probleminin özel bir şekli taşıma modelidir. Malların kaynaklardan, hedeflere taşınmasıyla ilgilenilen bu modelde amaç, bir taraftan hedefin talep gereksinimleri ve kaynakların arz miktarında denge sağlarken, diğer taraftan da her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum kılacak taşıma miktarlarını belirlemektir. Taşıma modeli, malların bir yerden bir yere taşınmasından başka, stok kontrolü, işgücü programlama, personel atama gibi alanlarda da kullanılabilir (Taha, 2000)*.

1939 yılında L. V. Kantorovich, klasik Taşıma Problemi (TP)'ni derinlemesine incelememesine rağmen, konuyla çok yakından ilişkili olan bir problem sınıfının uygulamalarını tanıtmıştır. Bu uygulamalar fiyatları ve üretim oranı, görevi ve tipine bağlı olarak değişen makinalara iş atama ile ilgilidir. Kantorovich, bu tip problemlerin çözümü için kullanışlı fakat eksik bir algoritma ortaya koymuştur. Yine, 1942 yılında TP'nin sürekli versiyonu üzerine ve 1948'de Gavurin ile kısıtlı TP üzerine çalışmalar yapmıştır.

TP'nin günümüzde kullanılan standart biçimi ilk olarak Frank L. Hitchcock tarafından 1941 yılında "Bir ürünün birçok kaynaktan birçok varış yerine dağıtılması" adlı makalesinde ortaya konmuştur. Simpleks yöntemin başlangıcı sayılabilecek bir teknik öne süren makale, TP'nin başlangıç çözümü dışındaki özel çözüm yöntemlerini içermemektedir. Bu sebeple makale dikkat çekme konusunda da yetersiz kalmıştır.

İkinci Dünya Savaşı'nda Combined Shipping Board'un bir üyesi olan T. C. Koopmans, yük gemilerinin taşıma süresini azaltmak amacıyla TP'lerinin çözümlerinin kullanımı ile ilgilenmiş ve 1947'de, "Taşıma sistemlerinden optimum yararlanma" adlı bir makale yayımlamıştır (Dantzig, 1963)**.

G. B. Dantzig primal simpleks taşıma yöntemi adı altında simpleks yöntemi TP'ne uyarlayarak etkin bir algoritma geliştirmiş, Charnes ve Cooper ise 1954'de TP'nin optimal çözümünü bulan atlama taşı yöntemini geliştirmişlerdir. Arsham ve Khan TP çözümü için yeni bir algoritma önermişler ve ayrıca Arsham pertürbasyon analizini TP'nin postoptimalite

* Taha, sayfa 11 ve 63.

** Dantzig, G.B., (1974), Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, sayfa 299-300.

analizine uygulamış ve ilginç sonuçlar elde etmiştir (Liu, 2003).

Klasik TP, taşıma maliyetinin minimizasyonu amacı altında kurulmuştur. Fakat pratikteki problemleri daha gerçekçi şekilde ele almak ve maliyet minimizasyonunun yanında dağıtım güvenliği, dağıtım süresi gibi amaçları da dikkate almak amacıyla taşıma modelinde amaç fonksiyonu sayısı artırılmış ve böylece çok amaçlı taşıma problemi gündeme gelmiştir. Ayrıca 1965 yılında L. A. Zadeh'in bilim ve teknoloji dünyasında bir dönüm noktası olarak tanımlanabilecek bulanık küme teorisini geliştirmesiyle parametreleri kesin olarak tanımlanamayan problemlerin modellenmesi imkanı doğmuştur.

Bulanık arz-talep miktarlarına sahip tek amaçlı TP için; Chanas vd. 1984 yılında parametrik programlama yardımıyla bir yaklaşım geliştirmişlerdir (Zimmermann, 1993)*. Ayrıca Chanas ve Kuchta 1998'de benzer bulanık yapıya sahip TP için tamsayılı çözüm üreten bir algoritma önermişlerdir. Liu (2003) ise aralık şeklinde verilen arz-talep miktarlarına karşılık toplam taşıma maliyetinin alt ve üst sınırlarını belirleyen bir yöntem geliştirmiştir.

Tek amaçlı TP'den sonra ilk olarak Aneja ve Nair çift kriterli bir TP modeli sunmuşlardır. Lee ve Moore çok amaçlı taşıma probleminin optimizasyonu üzerine çalışmışlardır. Bazı araştırmacılar ÇALTP'nin tüm basılamaz çözümlerini üreten prosedürler önermişlerdir. Bunlardan bazıları, Diaz; Isermann; Yu ve Zeleny'dir. Climaco vd. ve Ringuest vd. ise ÇALTP için etkileşimli algoritmalar geliştirmişlerdir (Li ve Lai, 2000).

Abd El-Wahed (2001), Çok Amaçlı Lineer Taşıma Problemi (ÇALTP)'nin optimal uzlaşık çözümünü elde eden bir bulanık programlama yaklaşımı geliştirmiştir. Ayrıca Li ve Lai (2000) ağırlıklı kök kuvvet ortalamasını kullandıkları bir yaklaşım sunmuşlardır.

Bölüm 2'de TP ve çözüm teknikleri verilmekte, Bölüm 3'de bulanık matematik için temel oluşturması açısından bazı kavramlar açıklanmakta ve ardından Bölüm 4'de Bulanık Lineer Programlama (BLP) problemleri için geliştirilen bazı çözüm yöntemleri incelenmektedir. Tezin esas konusunu oluşturan Bölüm 5'de ise tek amaçlı bulanık lineer TP için parametrik bir çözüm yaklaşımı verildikten sonra ÇALTP için optimal uzlaşık çözüm üreten iki bulanık

* Zimmermann H.-J., (1993), Fuzzy Set Theory-and Its Applications, Second, Revised Edition, Sixth Printing, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, sayfa 286.

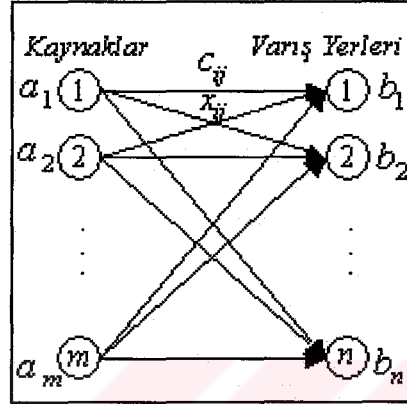
programlama yaklaşımı ve ayrıca bulanık arz-talep miktarlarına sahip ÇALTP'nin çözümü için bir yaklaşım sunulmaktadır.



2. TAŞIMA PROBLEMİ

2.1 Problemin Tanımı ve Formülasyonu

Geleneksel TP, tek tip bir malın kaynaklardan varış yerlerine minimum maliyet amacı altında dağıtım problemi. m tane kaynak noktası ve n tane varış yerinin kapasiteleri sırasıyla $a_1, a_2, \dots, a_m$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ olmak üzere problem Şekil 2.1 ile gösterilebilir.



Şekil 2.1 Taşıma problemi.

Burada $(i = 1, 2, \dots, m)$ kaynakları, üretim merkezi veya arz noktası; $(j = 1, 2, \dots, n)$ varış yerleri ise pazar veya talep merkezi olarak isimlendirilebilir.

Problemin çözümü, aşağıdaki varsayımlar altında incelenecektir:

- $(1 \leq i \leq m)$ kaynaklarının her birinde aynı tip mal üretilmektedir.
- $(1 \leq j \leq n)$ varış yerlerinde talep edilen mallar $(1 \leq i \leq m)$ kaynaklarında üretilen mallardır.
- Varış yerlerinin talepleri tamamen karşılandıkları zaman kaynaklardaki mallar tamamen tükenmiş olacaktır. Bu varsayım arz-talep dengesi olarak yorumlanabilir;

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (\text{Dengeli TP})$$

Eğer bir TP dengeli değilse, başka bir ifadeyle

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

ise hayali kaynak veya hayali varış yeri oluşturularak problem dengeli hale getirilebilir.

- i . kaynaktaki malların j . varış yerine dağıtımı sürecinde aktarma noktaları yoktur ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).
- i . kaynaktan j . varış yerine taşıma maliyeti, taşınan x_{ij} miktarıyla orantılıdır ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

i . kaynaktan j . varış yerine taşınacak miktar x_{ij} , bu taşımanın birim başına taşıma maliyeti c_{ij} olmak üzere TP'nin matematiksel modeli:

$$\text{Amaç} : \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\text{Kısıtlar} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.5)$$

şeklinde olacaktır. Modelde amaç fonksiyonu toplam taşıma maliyetine eşdeğerdir ve bu sebeple minimize edilmek istenmektedir. Kısıtlarda (2.2) kaynak(arz) kısıtlarını, (2.3) talep kısıtlarını göstermektedir. (2.4) non-negatiflik şartı ve (2.5) ise denge şartıdır (Sezginman, 1993)*

TP modeli m tanesi kaynak, n tanesi talep kısıtı olmak üzere $m + n$ sayıda kısıt denklemini içerir. Fakat TP'nin dengeli olduğu varsayımından dolayı bu $m + n$ tane denklemden biri diğerlerine lineer bağımlıdır, böylece denklemlerin $m + n - 1$ tanesi lineer bağımsızdır.

* Sezginman, İ., (1993), Lineer Programlama Teori ve Problemleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul, sayfa 245-248.

Gerçekten,

$$(2.2) \Rightarrow \sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_i a_i, \quad (2.3) \Rightarrow \sum_j \sum_i x_{ij} = \sum_j b_j$$

Denge denklemi (2.5) de göz önüne alınırsa ilk m denklemin toplamı

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_i x_{ij} &= \sum_i a_i = \sum_j b_j \\ \Rightarrow \sum_j \sum_i x_{ij} &= \sum_j b_j \\ \Rightarrow \sum_{j \neq p} \sum_i x_{ij} + \sum_i x_{ip} &= \sum_{j \neq p} b_j + b_p \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Son n denklemden p hariç $n-1$ tanesinin toplamı ise

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_i x_{ij} &= \sum_j b_j \\ \Rightarrow \sum_{j \neq p} \sum_i x_{ij} &= \sum_{j \neq p} b_j \end{aligned} \quad (2.7)$$

dir. (2.6) ve (2.7) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\sum_i x_{ip} = b_p$$

elde edilir. Bu, $m+n$ tane denklemden p denkleminin diğerleri cinsinden yazılabildiğini dolayısıyla denklemlerin lineer bağımlı olmaları demektir. Denklemlerden herhangi bir tanesi atılabilir ve taban çözümü $m+n-1$ tane değişkeninden oluşur.

2.2 Problemin Çözüm Yöntemleri

TP aslında bir LP problemidir ve LP için geliştirilen çözüm yöntemleri (örneğin simpleks yöntem) kullanılarak çözülebilir. Bununla birlikte TP'nin özel yapısından yararlanarak daha etkin çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

TP çözümü için aşağıdaki adımlar takip edilir.

Adım 1: Başlangıç uygun temel çözümü belirle.

Adım 2: Mevcut çözümün optimalliğini kontrol et. Eğer çözüm optimalse dur.

Adım 3: Mevcut çözümü geliştirebilmek amacıyla yeni bir çözüm elde et. Adım 2'ye git .

TP'nin çözümünde taşıma tablolarından yararlanılmaktadır. Bir taşıma tablosunun genel yapısı aşağıdaki gibidir.

Varış Yerleri Kaynaklar	1	2	...	n	Arz Miktar- ları
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
Talep Miktarları	b_1	b_2	...	b_n	

Şekil 2.2 Taşıma tablosu.

2.2.1 Başlangıç Çözümün Belirlenmesi

TP'nin çözümü için öncelikle başlangıç uygun taban çözümün elde edilmesi gerekir. $m + n - 1$ tane lineer bağımsız kısıt olması sebebiyle çözüm $m + n - 1$ tane taban değişkeni içerir. Bu değişkenler haricindekiler *taban dışı değişken* ve taşıma tablosunda bu değişkenlere karşılık gelen hücreler *boş hücre* olarak adlandırılacaktır.

Taban dışı değişkenler dağıtım yapılmayan dolayısıyla sıfır değerini alan değişkenlerdir. Taban değişkenleri ise dağıtımın yapıldığı, dolayısıyla sıfırdan farklı değerler alan değişkenlerdir. Eğer yapılan dağıtım sonucunda taban değişkenlerinden biri sıfır değerini almışsa elde edilen çözüme yozlaşmış (dejenere) çözüm denir.

Başlangıç çözümün belirlenmesi için geliştirilen yöntemlerden bazıları şunlardır:

2.2.1.1 Kuzey Batı Köşesi Yöntemi

Taşıma tablosunun kuzey batısında bulunan hücreye, bulunduğu satır ve sütunun arz ve talep miktarlarını aşmayacak şekilde mümkün olan en büyük atama yapılır. Buna göre yapılan

atama miktarı $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ 'dir. Atama miktarı arz ve talep miktarlarından çıkarılarak yeni arz-talep miktarları belirlenir.

$$\hat{a}_i = a_i - x_{ij} \quad , \quad \hat{b}_j = b_j - x_{ij} .$$

Çıkarma sonucu sıfır arz ya da talep miktarına ulaşan satır ya da sütun iptal edilir. Eğer satır iptal edilirse atama yapılan hücrenin bir aşağısındaki hücreye, sütun iptal edilmişse bir sağındaki hücreye geçilerek atama işlemine aynı yolla devam edilir. Sadece bir satır ya da sütun kaldığında son atama yapıldıktan sonra işlem biter.

Eğer satır-sütun iptali aşamasında $\hat{a}_i$ ve $\hat{b}_j$ aynı anda sıfır olursa keyfi olarak ikisinden biri seçilerek ilgili satır ya da sütun iptal edilir. Ardından iptal edilmeyen satırın (sütunun) kuzeybatısındaki hücreye sıfır ataması yapılarak bu satır (sütun) da iptal edilir. Böylece taban değişkenlerinden biri sıfır değer aldığından burada yozlaşmış bir çözüm oluşur. Ve ε tekniği (Tulunay,1980)* kullanılarak bu sorun giderilebilir.

2.2.1.2 En Düşük Maliyet Yöntemi

Taşıma tablosunda en düşük maliyete sahip hücreye, bulunduğu satır ve sütunun arz ve talep miktarlarını aşmayacak şekilde mümkün olan en büyük atama yapılır. Buna göre seçilen hücre $\hat{c}_{ij} = \min\{c_{ij}\}$ en düşük maliyetine sahip hücre, yapılan atama miktarı ise $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ 'dir. Kuzey Batı Köşesi yöntemine benzer olarak atama miktarı arz ve talep miktarlarından çıkarılarak yeni arz ve talep miktarları belirlenir.

$$\hat{a}_i = a_i - x_{ij} \quad , \quad \hat{b}_j = b_j - x_{ij} .$$

Eğer aynı maliyete sahip birden fazla hücre varsa keyfi olarak herhangi birisine atama yapılabilir. Çıkarma sonucu sıfır arz ya da talep miktarına ulaşan satır ya da sütun iptal edilir. Bu aşamada $\hat{a}_i$ ve $\hat{b}_j$ aynı anda sıfır olursa keyfi olarak ikisinden biri seçilerek ilgili satır ya da sütun iptal edilir.

Ardından iptal edilmeyen hücreler arasında en düşük maliyete sahip olana atama yapmak

* Tulunay, Y., (1980), Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 2721, İstanbul, sayfa 371.

üzere işleme devam edilir. Sadece bir satır ya da sütun kaldığında son atama yapıldıktan sonra işlem biter.

2.2.1.3 Ceza Maliyeti Yöntemi

En düşük maliyet yöntemi VAM (Vogel Approximation Method) yöntemi olarak da bilinmektedir.

Yöntemde her satır ve sütunda bulunan en küçük iki maliyetin farkı olarak her satır ve sütuna ait ceza maliyeti hesaplanır. En büyük ceza maliyetine sahip olan satır veya sütunda, en düşük maliyetli hücreye mümkün olduğunca fazla atama yapılır. Eğer en yüksek ceza maliyetine sahip birden fazla satır veya sütun varsa herhangi biri keyfi olarak seçilebilir. Yapılan atama miktarı arz ve talep miktarlarından çıkarılarak yeni arz ve talep miktarları belirlenir ve ceza maliyetleri yeniden hesaplanır.

$$\hat{a}_i = a_i - x_{ij} , \quad \hat{b}_j = b_j - x_{ij} .$$

Yeni ceza maliyetleri arasında en büyüğü seçilerek atama işlemine aynı şekilde devam edilir. Sadece bir satır ya da sütun kaldığında son atama yapıldıktan sonra işlem biter.

Bu üç yöntem arasında, elde edilen başlangıç uygun temel çözümün “kalitesi” açısından farklılıklar vardır. Kuzey Batı Köşesi yöntemi başlangıç uygun temel çözüme en az hesaplama ile en kolay ve çabuk ulaşan yöntemdir. Bunun yanında birim taşıma maliyetlerini göz önüne almaması sebebiyle bu yöntemler arasında genelde en kötü amaç değerini verir. Buna karşılık Ceza Maliyeti yönteminde daha fazla hesaplama yapılır ama bu hesaplamanın getirisi olarak daha iyi, başka bir ifadeyle optimum çözüme daha yakın bir çözüm elde edilir. Bu bakımdan büyük hacimli problemler için iterasyon sayısı hakkında bir yorum yapılırsa, optimuma daha yakın bir çözüm elde edilen Ceza Maliyeti yönteminin kullanılması durumunda iterasyon sayısının daha az olacağı söylenebilir (Taha, 2000)*.

2.2.2 Optimal Çözümün Belirlenmesi

Başlangıç çözümünün elde edilmesinden sonra öncelikle, taban dışı değişkenlere ait hücrelere yapılacak bir atamanın amaç fonksiyonuna etkisi incelenerek mevcut çözümün optimal olup

* Taha, sayfa 179.

olmadığı belirlenir. Yapılan atama ile amaç fonksiyonunda yani taşıma maliyetinde bir tasarruf sağlanabiliyorsa eldeki çözüm optimal değildir. Bu durumda taban dışı değişkenlerden amaçta tasarruf sağlayan değişken mevcut çözüme dahil edilecek şekilde yeni dağıtım planı elde edilir (Öztürk, 2002)*.

Başlangıç uygun taban çözümün elde edilmesinden sonra optimal çözüm elde edilene kadar tekrarlanacak olan çözüm algoritması için geliştirilen iki yöntem Atlama Taşı ve Basitleştirilmiş Dağıtım Yöntemidir.

2.2.2.1 Atlama Taşı Yöntemi

Atlama taşı yöntemi, boş bir hücreye atama yapıldığında, toplam maliyetin ne kadar değişeceğini hesaplamaya dayanır.

Boş bir hücreye bir birimlik atama yapıldığında maliyetteki net değişim miktarı (d_{ij}) hesaplanır. Bu hesaplama sadece yatay ve düşey olarak birbirlerine bağlanmış eğri parçalarından oluşan kapalı bir döngü oluşturularak yapılır, çapraz bağlantıya izin verilmemiştir. Döngüye ait her köşe noktası hesaplamanın yapıldığı hücre haricinde taban değişkenlere ait hücrelerdir. Böylece atama yapılan hücreden başlanarak sırasıyla bir birim arttırıp bir birim azaltarak oluşan döngünün arz ve talep miktarları dengesini koruması sağlanır (Taha, 2000 ve Öztürk, 2002)**

Bulunan d_{ij} net değişim miktarı taban dışındaki boş hücreye ait değişkenin amaca katkısı olarak yorumlanabilir. Bu sebeple, amacın minimum maliyet olduğu da göz önüne alınırsa, mutlak değerce en büyük negatif net değişim miktarına sahip olan hücredeki değişkenin tabana girmesiyle amaçta tasarruf sağlanacak ve ilgili değişken tabana girecektir.

Oluşan döngüdeki taban değişkenlerin değerleri arasından en küçüğü boş hücreye atanacak miktarı gösterir. Böylece boş hücre bu değerle tabana giren değişken, en küçük değere sahip taban değişken de tabandan çıkan değişken olarak belirlenmiş olur. Eğer tüm boş hücreler için hesaplanan d_{ij} değerleri arasında negatif bir değer yoksa, başka bir ifadeyle $d_{ij} \geq 0$ ise amacı

* Öztürk, A., (2002), Yöneylem Araştırması, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa, sayfa 205-206.

** Taha, sayfa 186 ve Öztürk, sayfa 206.

denklemleri elde edilir. S_i ve K_j simpleks çarpanları denklemlerdeki taban değişkenlerinin katsayıları sıfır olacak şekilde belirtilirse, eşitliğin sağ tarafında taban değişkenleri yok olur ve Z amaç fonksiyonu sadece, taban dışı değişkenler cinsinden ifade edilir.

Tabanın $m+n-1$ değişkenden oluştuğu ve taban dışı x_{ij} değişkenlerin katsayılarının sıfır olacağı göz önüne alınırsa

$$S_i + K_j + c_{ij} = 0$$

şeklinde $m+n$ simpleks çarpan bilinmeyenini çözmek üzere $m+n-1$ tane denklem elde edilir. Bu durumda bilinmeyenlerden bir tanesi keyfi olarak sıfır seçilerek simpleks çarpanlar hesaplanır. Genelde hesaplama $S_1 = 0$ alınarak yapılmaktadır.

Simpleks çarpanlar belirlendikten sonra taban dışı x_{ij} değişkenlerinin katsayıları (c'_{ij}) belirlenir.

$$c'_{ij} = S_i + K_j + c_{ij}$$

Taban dışı değişkenlerin c'_{ij} katsayılarına gölge fiyatlar denir. Hesaplanan c'_{ij} gölge fiyatları içinde negatif olanlar tükenmişse optimal çözüme ulaşılmıştır. Aksi takdirde mutlak değerce en büyük negatif c'_{ij} gölge fiyatına sahip olan değişken tabana alınarak yeni bir çözüme atlanır.

Tabandan çıkan değişkeni belirlemek için atlama taşı yöntemindekine benzer olarak tabana girecek değişken için kapalı döngü oluşturulur. Burada mevcut yöntemin atlama taşı yönteminden farkı bu döngünün, sadece giren değişken için kurulmasıdır. Oysa atlama taşı yönteminde hangi değişkenin tabana gireceği henüz belli olmadığından bu döngü tüm tabana dışı değişkenler için kurulmaktaydı. Ayrıca mevcut yöntemde çıkan değişken bir önceki yöntemde olduğu gibi döngüdeki en küçük değere sahip temel değişken olarak seçilir. Sonuç olarak, tek taban dışı değişken için kurulan döngü ile bu değişkenin hangi değerle tabana gireceği ve bunun yanında hangi temel değişkenin tabandan çıkacağı da belirlenmiş olur. Elde edilen yeni çözüm ile yöntemin adımları tekrarlanır.

3. BULANIK MATEMATİK

3.1 Bulanık Mantık

L.A. Zadeh 1965 yılında "Information and Control" dergisinde yayınlanan "Bulanık Kümeler" adlı makalesiyle bulanık mantığın temelini atmıştır. İngilizcede civcivlerin tüyleri için kullanılan fuzz kelimesinden türetilen fuzzy sözcüğünün Türkçe karşılığı "bulanık, belirsiz" dir.

Klasik matematiksel yöntemlerde, verilerin tam olması gereksiniminden dolayı bu yöntemlerle gerçek hayattaki sistemleri modellemek ve kontrol etmek oldukça zordur. Bulanık mantık, matematiğin gerçek dünyayı yorumlamasında daha geniş bir uyarlama alanı oluşturmak suretiyle bu zorluğu ortadan kaldırmış ve daha niteliksel bir tanımlama olanağı sağlamıştır. Örneğin bir kişi için "1.70 boyundadır" tanımlaması yerine, sadece "orta boyludur" tanımlamasının yapılması birçok uygulama için yeterli bir veridir. Böylece azımsanamayacak ölçüde bir bilgi indirgenmesi gerçekleştirilerek matematiksel bir tanımlama yerine, dilsel (linguistik) değişken adı verilen daha kolay anlaşılabilen bir değişken ile niteliksel bir tanımlama yapılabilir. "Kalabalık" veya "kalabalık değil" gibi kelimeler ve ifadelerle tanımlanabilen dilsel değişkenlerin değerleri bulanık kümeler ile ifade edilir. Örneğin; bir sınıftaki öğrenci sayısını belirtecek dilsel değişkenin alabileceği "kalabalık", "kalabalık değil" ve "çok kalabalık" değerlerinin her biri ayrı ayrı bulanık kümeler ile ifade edilir (Ülker ve Çomak, 2004).

Bulanık mantık, mantık kurallarının esnek bir şekilde uygulanması olarak da tanımlanabilir. Klasik mantıkta sadece "doğru" ve "yanlış" ya da Boole cebirindeki karşılıklarıyla "1" ve "0" değerleri vardır. Bulanık mantıkta ise, ikisinin arasında değerler alabilen önermeler ve ifadelere izin verilir. Gerçek hayatta "kesinlikle doğru" veya "kesinlikle yanlış" değerlendirmeleri yerine genelde "kısmen doğru" veya "belli bir olasılıkla" doğru şeklinde değerlendirmeler yapıldığı göz önüne alınırsa bulanık mantığın işlevi daha iyi fark edilmiş olacaktır.

Zadeh'in 1965 yılındaki makalesinin ardından bulanık matematik, birçok araştırmacının katkılarıyla büyük bir hızla gelişmiştir. Zadeh' ten sonra Rescher, Dubois, Prade, Lakeoff, Yager ve Kandel gibi bilim adamları bu alanda önemli çalışmalar yürütmüşlerdir.

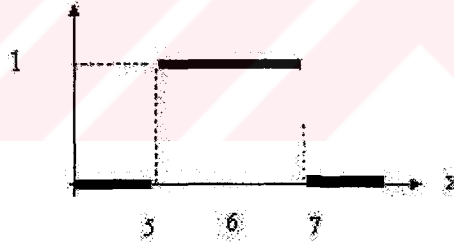
3.2 Temel Kavramlar

3.2.1 Bulanık Kümeler

Bulanık küme teorisi, bilim ve teknoloji dünyasında bir dönüm noktası olmuştur. Geçmişte, genel ve özel olarak belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar, gelişigüzel bir ayrıma tabi tutulmuşlar ve iki değerli kümeler teorisi aracılığıyla tanımlanmışlardır. Son yıllarda gelişen bulanık küme teorisi ise belirsizlik ifade eden terimleri ve kavramları gelişigüzel bir ayrıma tabi tutmaksızın, belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak, çok değerli kümeler teorisi kapsamı içinde tanımlamalara imkan sağlamaktadır.

Bulanık kümeler teorisinin amacı, belirsizlik ifade eden, tanımlanması güç kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmektir. Belirlilik getirme yaklaşımı, iki değerli kümeler teorisinin çok değerli teoriye dönüşümünden oluşur (Aksoy vd., 2003)*.

Klasik mantıkta küme, ayırt edilebilen belirli nesnelerin topluluğu olarak ifade edilir. Sözü edilen kümeye hangi elemanların ait olup, olmadığı kesin olarak bellidir. Böyle kümelere kesin (krisp) kümeler denir. Örneğin $A = \{x \mid 5 \leq x \leq 7, x \in R\}$ kümesi kesin bir kümedir. $[5,7]$ aralığındaki tüm reel sayılar kümenin elemanı, bunun dışındaki elemanlar ise kümenin elemanı değildir. Verilen kümenin grafik ile gösterimi Şekil 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1. Kesin A kümesinin üyelik fonksiyonu.

Görüldüğü gibi herhangi bir elemanın 0 veya 1 değeriyle A kümesine ait olup olmadığı belirlenmekte, böylece küme elemanları ile elemanı olmayanlar arasında kesin bir ayırım bulunmaktadır (Civalek, 1999).

* Aksoy, Y., Özkan, E.M. ve Karanfil, S., (2003), Bulanık Mantığa Giriş, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 4, İstanbul, Sayfa 25.

Bulanık küme teorisinde ise elemanlar aldıkları üyelik dereceleriyle kümeye ait olurlar. Başka bir ifadeyle bir eleman için kesinlikle kümeye aittir ya da ait değildir ifadeleri yerine x_i elemanı $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ üyelik derecesiyle kümeye aittir ifadesi kullanılır.

Tanım 3.1:

X bir evrensel küme olsun. X kümesinde bulanık bir $\tilde{A}$ alt kümesi,

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. $\mu_{\tilde{A}}$ üyelik fonksiyonu her bir $x \in X$ 'i $[0,1]$ aralığında bir $\mu_{\tilde{A}}(x)$ reel sayısına atayan fonksiyondur. x noktasındaki $\mu_{\tilde{A}}(x)$ değeri ise x ' in $\tilde{A}$ kümesindeki üyelik derecesini belirtir.

Bulanık kümeler genelde $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots$ ile gösterilmesine rağmen basitlik açısından $A, B, C, \dots$ ile de gösterilebilir.

Bulanık A kümesi x elemanı ve bunun üyelik derecesi $\mu_A(x)$ 'ten oluşan sıralı ikililer ile

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in X \}$$

şeklinde gösterilebilir.

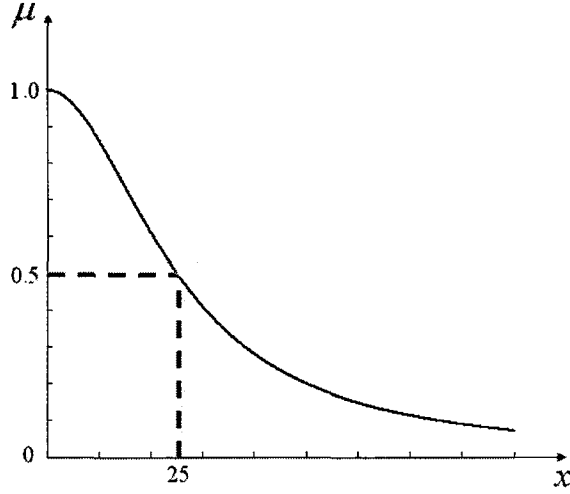
$\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini içeriyorsa, A kümesi bulanık bir küme değil, kesin bir kümedir.

Örnek 3.1:

Kişilerin yaşlarının $X = [0, \infty)$ aralığında değişen sayısal değerli bir değişkenle gösterildiği varsayalım. “20’den küçük yaşta ve 20 yaşında olan kişiler” kümesi açıkça görülebilir ki kesin bir kümedir. Fakat, kesin sınırlarla tanımlanmayan “Genç yaşta kişiler” kümesi X 'in bulanık bir alt kümesi olacaktır. Bu bulanık küme aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanabilir:

$$\mu_A(x) = (1 + (0.04x)^2)^{-1}$$

Üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Üyelik fonksiyonu (Örnek 3.1).

Örnek 3.2:

$R^1 = (-\infty, \infty)$ reel ekseninde, 10'dan büyük olan reel sayılar kümesi kesin bir küme, fakat "10'dan çok büyük olan reel sayılar" kümesi bulanık bir kümedir. Ve aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanabilir:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 10 \\ 1 - (1 + (0.1(x - 10))^2)^{-1} & , \quad x > 10 \end{cases}$$

Üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.3 ile gösterilmiştir (Sakawa, 1993)*.

Örnek 3.3:

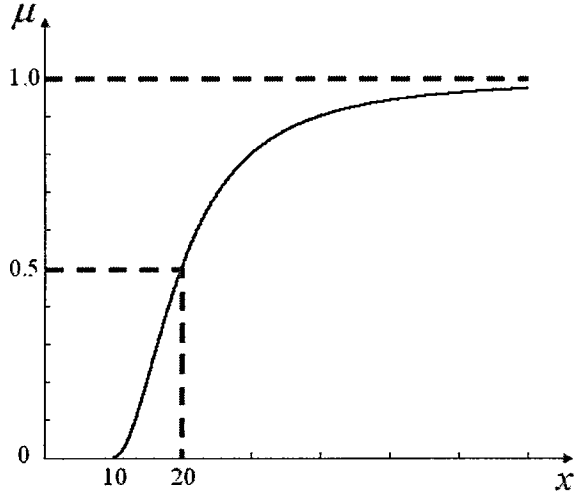
$C =$ " 10'a yakın reel sayılar " bulanık kümesi

$$C = \left\{ (x, \mu_C(x)) \mid \mu_C(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1} \right\}$$

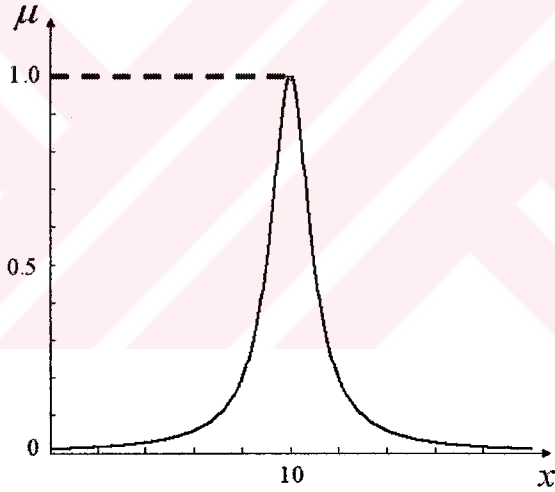
şeklinde belirtilebilir. İlgili üyelik fonksiyonu Şekil 3.4 ile gösterilmiştir (Zimmerman, 1993)**

* Sakawa, M., (1993), Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, Newyork, sayfa 9.

** Zimmermann, sayfa 12.



Şekil 3.3 Üyelik fonksiyonu (Örnek 3.2).



Şekil 3.4 Üyelik fonksiyonu (Örnek 3.3).

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evrenseli sonlu bir küme ise bu küme üzerinde tanımlanan A bulanık kümesi

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ifadede basitlik açısından üyelik derecesi sıfır olan elemanlara ait ikililer yazılmayabilir.

Zadeh(1965) tarafından önerilen gösterime göre, X kümesindeki $\tilde{A}$ bulanık kümesi,

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

şeklindedir. Bu ifadede “+” veya “ Σ ” sembolü adi toplama işlemine veya teorik küme birleşimi işlemine karşılık gelmemekte, x_i ’nin üyelik derecesinin $\mu_A(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olduğu anlamına gelmektedir.

Eğer X kümesi sonlu olmayan bir küme ise bu gösterim şu şekli almaktadır:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

Örnek 3.4:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olsun. “Yaklaşık olarak 5’e eşit olan tamsayılar” bulanık kümesi

$D = \{(3, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.4)\}$ veya $D = \frac{0.4}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.4}{7}$ şeklinde gösterilebilir (Sakawa, 1993)*.

3.2.2 Destek Kümesi

Bir bulanık A kümesinin desteği, $S(A)$; X kümesinde üyelik derecesi pozitif olan noktaların oluşturduğu kesin kümedir. Başka bir ifadeyle A kümesinin desteği,

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.3 Alfa Kesen

Bulanık A kümesinde üyelik derecesi bir $\alpha \in [0, 1]$ sayısına eşit veya daha büyük olan $x \in X$ elemanlarının oluşturduğu kesin kümeye bulanık A kümesinin α -keseni veya α -seviyesi denir.

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

* Sakawa, sayfa 9-10.

Örnek 3.4'te verilen $D = \{(3, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.4)\}$ bulanık kümesinin bazı α -kesenleri şu şekildedir.

$$D_{0.3} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

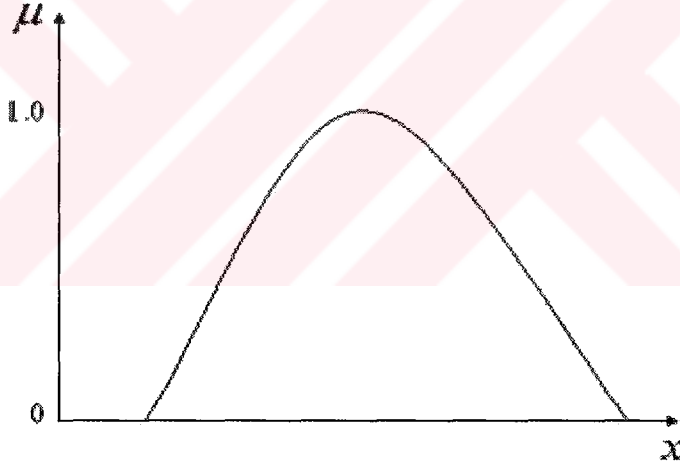
$$D_{0.7} = \{4, 5, 6\}$$

$$D_1 = \{5\}$$

3.2.4 Konvekslik

X kümesindeki bulanık bir A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart onun bütün α -kesenlerinin konveks olmasıdır. Konveks bulanık kümenin alternatif ve daha açık bir tanımını da şu şekilde verilebilir.

Bulanık bir A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]$ için $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

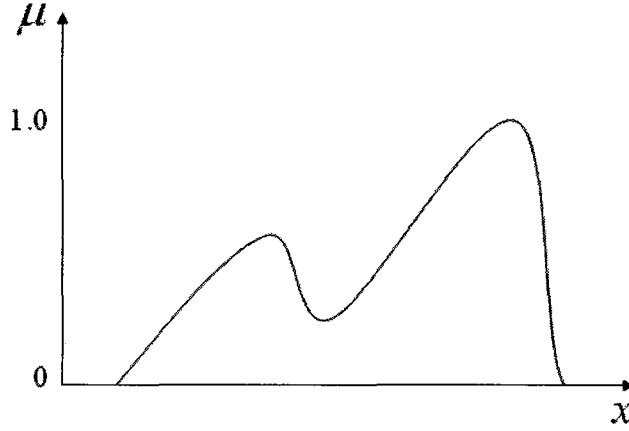


Şekil 3.5 Konveks bulanık küme.

3.2.5 Yükseklik

$\mu_A(x)$ üyelik derecesinin en küçük üst sınırına bulanık A kümesinin yüksekliği denir. $hgt(A)$ ile gösterilir.

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$



Şekil 3.6 Konveks olmayan bulanık küme.

3.2.6 Normallik

$\mu_A(x)=1$ eşitliğini sağlayan en az bir $x \in X$ elemanı mevcutsa bulanık A kümesi normaldir denir. Herhangi bir A bulanık kümesi normal değilse, ilgili kümenin üyelik değeri $\mu_A(x)$, kümenin yüksekliğine bölünerek normalize edilebilir.

3.2.7 Kardinalite

Sonlu bir bulanık A kümesinin kardinalitesi $|A|$,

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

olarak tanımlanır.

$\|A\| = \frac{|A|}{|X|}$ ise A bulanık kümesinin göreceli kardinalitesi olarak tanımlanır.

Örnek 3.4.'te verilen $D = \{(3, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.4)\}$ bulanık kümesinin kardinalitesi ve göreceli kardinalitesi sırasıyla

$$|D| = 0.4 + 0.8 + 1 + 0.8 + 0.4 = 3.4 \quad \text{ve} \quad \|D\| = \frac{3.4}{9} = 0.38$$

olarak hesaplanır.

Eğer X evrenseli sonlu değilse A 'nın kardinalitesi

$$|A| = \int_X \mu_A(x) dx$$

ile tanımlanır ve bu durumda kardinalite daima var olmayabilir (Zimmermann, 1993)*.

3.3 Bulanık Kümelerde Temel Küme Teorisi İşlemleri

Bir bulanık kümenin en önemli belirteci üyelik fonksiyonudur. Bu sebeple temel küme teorisi işlemleri bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları aracılığıyla tanımlanır. Zadeh tarafından önerilen temel küme teorisi işlemleri şu şekildedir (Sakawa, 1993)**.

A ve B , X evrenselinde tanımlı iki bulanık küme olsun.

3.3.1 Eşitlik

A ve B kümelerinin eşit olması için gerek ve yeter şart X üzerindeki tüm noktalar için bu bulanık kümelerin üyelik derecelerinin eşit olmasıdır.

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X.$$

3.3.2 Kesişme

A ve B bulanık kümelerinin kesişimi $A \cap B$ ile gösterilir ve

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Bulanık kümeler arası kesişim, " $\wedge$ " işareti ile gösterilen "mantıksal ve" bağlacına karşılık gelmektedir.

3.3.3 Birleşme

A ve B bulanık kümelerinin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir ve

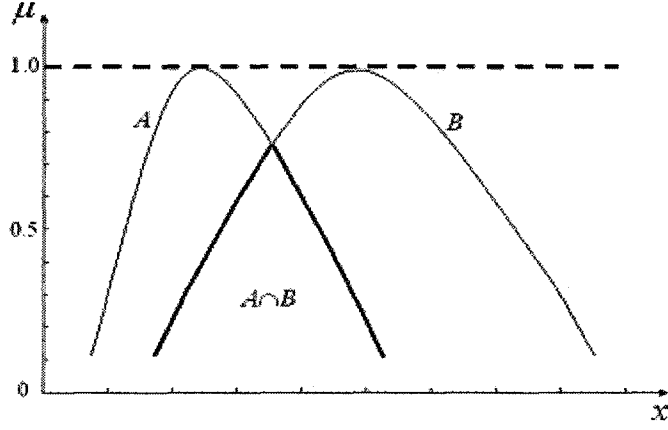
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Bulanık kümeler arası birleşim, " $\vee$ " işareti ile gösterilen

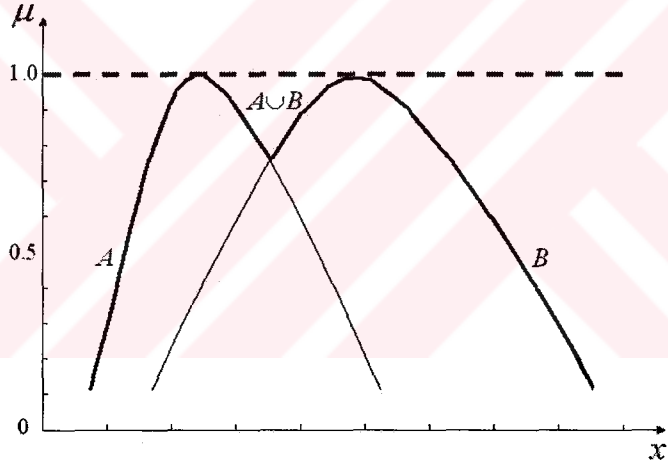
* Zimmermann, sayfa 15-16.

** Sakawa, sayfa 11.

“mantıksal veya” bağlacına karşılık gelmektedir.



Şekil 3.7 İki bulanık kümenin kesişimi.



Şekil 3.8 İki bulanık kümenin birleşimi.

3.3.4 Tümlen

A bulanık kümesinin tümlenini $\bar{A}$ ile gösterilir ve,

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Örnek 3.4.'te verilen $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ evrenselinde tanımlı olan $D = \{(3, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.4)\}$ bulanık kümesinin tümlenini

$\bar{D} = \{(1,1.0), (2,1.0), (3,0.6), (4,0.2), (6,0.2), (7,0.6), (8,1.0), (9,1.0)\}$ 'dir.

Örnek 3.5:

$A = "10'dan çok büyük reel sayılar."$

$B = "11'e yaklaşık sayılar."$

A ve B bulanık kümeleri

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 10 \\ (1 + (x-10)^{-2})^{-1} & , \quad x > 10 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = (1 + (x-11)^4)^{-1}.$$

üyelik fonksiyonlarıyla verilmiş olsun. Bu durumda iki bulanık kümenin kesişim ve birleşim kümelerinin üyelik fonksiyonları şu şekilde tanımlanır.

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \min \left[(1 + (x-10)^{-2})^{-1}, (1 + (x-11)^4)^{-1} \right] & , x > 10 \\ 0 & , x \leq 10 \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \left[(1 + (x-10)^{-2})^{-1}, (1 + (x-11)^4)^{-1} \right], \quad x \in X$$

olarak tanımlanacaktır. İki bulanık kümenin kesişiminin üyelik fonksiyonu Şekil 3.9 ile verilmiştir (Zimmermann, 1993)*.

3.4 Bulanık Kümelerin Özellikleri

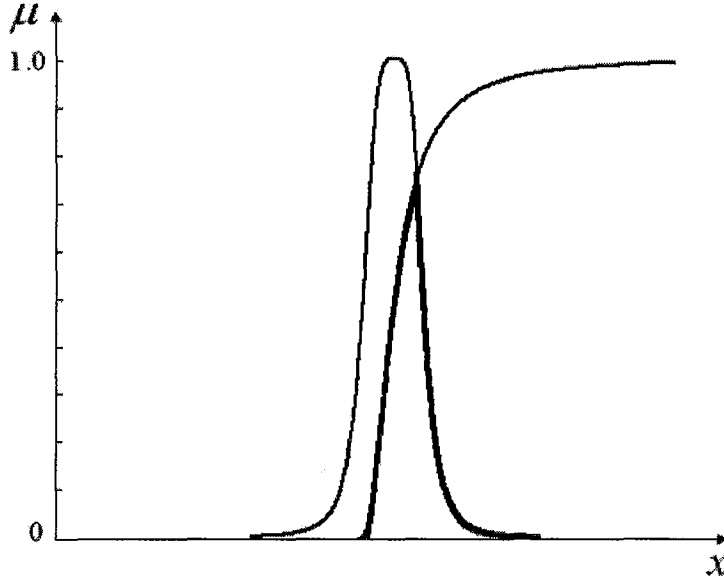
A ve B , X evrenselinde tanımlı iki bulanık küme olmak üzere bulanık kümelerin özellikleri şunlardır.

Değişme Özelliği: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

Birleşme Özelliği: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Dağılma Özelliği: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

* Zimmermann, sayfa 18.



Şekil 3.9 A ve B bulanık kümelerinin kesişimi (Örnek 3.5).

De Morgan Kuralı: $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Burada klasik küme teorisinden farklı olarak

$$\bar{A} \cup A \neq X \text{ ve } \bar{A} \cap A \neq \emptyset$$

özelliklerinin bulanık kümelerde geçerli olmadığı unutulmamalıdır.

3.5 Bulanık Kümelerde Cebirsel İşlemler

Teorik küme işlemlerine ek olarak, bulanık kümeler arası cebirsel işlemleri kullanmak da bazı durumlarda yararlı olabilir.

Cebirsel Çarpım: İki bulanık küme A ve B 'nin cebirsel çarpımı AB ile gösterilir ve

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Cebirsel Toplam: İki bulanık küme A ve B 'nin cebirsel toplamı $A \oplus B$ ile gösterilir ve

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Sınırlı Çarpım: İki bulanık küme A ve B 'nin sınırlı çarpımı $A \odot B$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\mu_{A \odot B}(x) &= \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \\ &= 0 \vee (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)\end{aligned}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Sınırlı Toplam: İki bulanık küme A ve B 'nin sınırlı toplamı $A \oplus B$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\mu_{A \oplus B}(x) &= \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) \\ &= 1 \wedge (\mu_A(x) + \mu_B(x))\end{aligned}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Sınırlı Fark: İki bulanık küme A ve B 'nin sınırlı farkı $A \ominus B$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\mu_{A \ominus B}(x) &= \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) \\ &= 0 \vee (\mu_A(x) - \mu_B(x))\end{aligned}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Örnek 3.6:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ evrenselinde tanımlı iki bulanık küme $A = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$ ve

$B = \frac{0.7}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.5}{6}$ olsun. Bu durumda iki küme arasında tanımlanabilecek bazı işlemlerin

sonuçları şu şekildedir.

$$A \cap B = \frac{0.7}{3} + \frac{0.5}{6}.$$

$$A \cup B = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}.$$

$$\bar{A} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.4}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}.$$

$$AB = \frac{0.56}{3} + \frac{0.3}{6}.$$

$$A+B=\frac{0.94}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.8}{6}.$$

$$A\odot B=\frac{0.5}{3}+\frac{0.1}{6}.$$

$$A\oplus B=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$$

$$A\ominus B=\frac{0.1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{0.1}{6}.$$

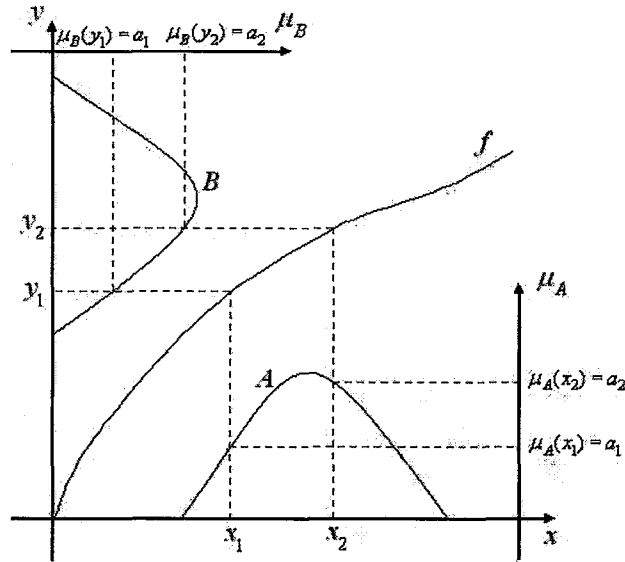
3.6 Genişleme Prensibi

f , X kümesinden Y kümesine bir tasvir olsun. $f: X \rightarrow Y$. Genişleme prensibi; X üzerindeki bulanık A kümesi ve f tasviri aracılığıyla Y kümesi üzerinde aşağıda belirtilen B bulanık kümesinin tanımlanmasına imkan sağlar (Şekil 3.10).

$$B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x), x \in X\}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \mu_A(x) & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Burada $f^{-1}(y)$, y 'nin ters görüntüsüdür.



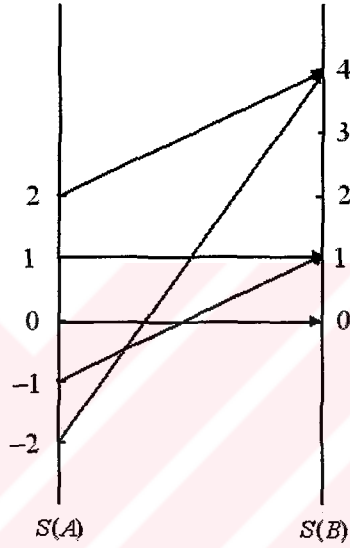
Şekil 3.10 Genişleme prensibinin genel gösterimi.

Örnek 3.7:

$A = \frac{0.3}{-2} + \frac{0.5}{-1} + \frac{0.8}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.4}{2}$ bulanık küme ve $f = x^2$ bir tasvir olmak üzere genişleme prensibi ile

$$B = \frac{0.8}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.4}{4}$$

bulanık kümesi tanımlanır. Örneğe uygulanan genişleme prensibi Şekil 3.11 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.11 Genişleme prensibinin gösterimi (Örnek 3.7).

3.7 Bulanık Sayılar

Üyelik fonksiyonu parçalı sürekli olan, R^1 reel ekseninde tanımlanmış, konveks ve normalize edilmiş bulanık kümeye bulanık sayı denir.

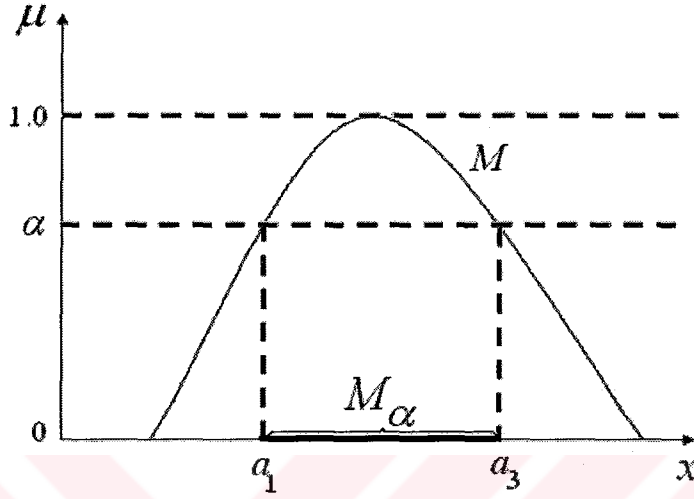
Bir M bulanık sayısı, tüm negatif (pozitif) x değerleri için sıfır üyelik değerini alıyorsa bu bulanık sayı pozitifdir (negatifdir) denir.

$$M \text{ bulanık sayısı pozitifdir(negatifdir).} \Leftrightarrow \forall x < 0 (\forall x > 0) \text{ için } \mu_M(x) = 0.$$

Bulanık sayının, tanımı gereği konveks olduğu göz önüne alınırsa, bir M bulanık sayısının α -keseni M_α , kapalı bir aralık ile gösterilebilir. Bu aralık α seviyesindeki güven aralığı olarak isimlendirilir ve böylece bulanık M sayısının α -keseni

$$M_\alpha = \{x \in R^1 \mid \mu_M(x) \geq \alpha\} = [a_1, a_3]$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada a_1 ve a_3 sırasıyla M_α α -kesen kümesinin sol ve sağ uç noktalarıdır. Bir bulanık M sayısının α -keseni M_α Şekil 3.12 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.12 Bulanık M sayısının α -keseni.

3.8 Bulanık Sayılarda Temel Aritmetik İşlemler

M ve N bulanık sayılarının üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_M(x)$ ve $\mu_N(x)$ olmak üzere bulanık sayılar arasında tanımlanan temel aritmetik işlemler şu şekildedir (Sakawa, 1993)*

Toplama İşlemi: $M \oplus N$

$$\begin{aligned} \mu_{M \oplus N}(z) &= \sup_{z=x+y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x \in R^1} \min(\mu_M(x), \mu_N(z-x)). \end{aligned}$$

* Sakawa, sayfa 24.

Çıkarma İşlemi: $M \ominus N$

$$\begin{aligned}\mu_{M \ominus N}(z) &= \sup_{z=x-y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x \in R^1} \min(\mu_M(x), \mu_N(x-z)).\end{aligned}$$

Çarpma İşlemi: $M \otimes N$

$$\begin{aligned}\mu_{M \otimes N}(z) &= \sup_{z=xy} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \begin{cases} \sup_{x \in R^1} \min(\mu_M(x), \mu_N(z/x)) & , z \neq 0 \\ \max\{\sup_{x \in R^1} \min(\mu_M(x), \mu_N(0)), \sup_{y \in R^1} \min(\mu_M(0), \mu_N(y))\} & , z = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Bölme İşlemi: $M \oslash N$

$$\begin{aligned}\mu_{M \oslash N}(z) &= \sup_{z=x/y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x \in R^1} \min(\mu_M(x), \mu_N(x/z)) \\ &= \sup_{\substack{y \in S(N) \\ 0 \notin S(N)}} \min(\mu_M(z \cdot y), \mu_N(y)).\end{aligned}$$

3.9 Üçgensel Bulanık Sayılar

$a_1, a_2, a_3 \in R$ ve $a_1 < a_2 < a_3$ olmak üzere (a_1, a_2, a_3) sıralı üçlüsü ile verilen ve

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & , a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & , a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & , x > a_3 \end{cases}$$

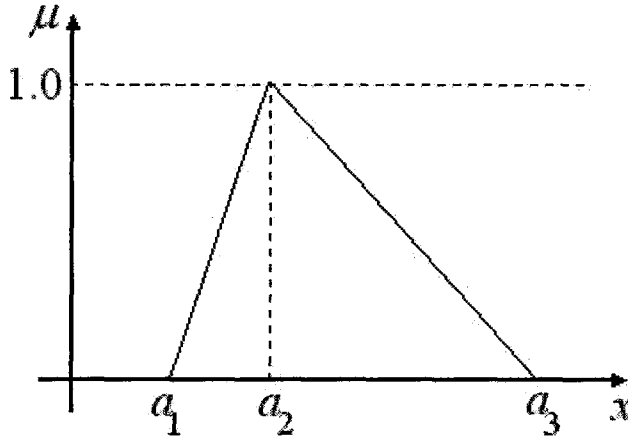
üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $A = (a_1, a_2, a_3)$ bulanık sayısına üçgensel bulanık sayı denir.

Üçgensel bulanık sayının üyelik fonksiyonu Şekil 3.13 ile gösterilmiştir.

α seviyesindeki güven aralığı tanımı yardımıyla bir üçgensel A bulanık sayısı,

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \quad (3.1)$$

şeklinde de tanımlanabilir.



Şekil 3.13 Üçgensel bulanık sayı.

3.9.1 Üçgensel Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler

Üçgensel bulanık sayılarda cebirsel işlemlerin bazı önemli özellikleri şunlardır:

- İki üçgensel bulanık sayının toplanması veya çıkarılması sonucu yine bir üçgensel bulanık sayı elde edilir.
- Üçgensel bulanık sayılarla yapılan çarpma, ters alma ve bölme işlemleri, her zaman bir üçgensel bulanık sayı sonucunu vermeyebilir.

İki üçgensel bulanık sayı $A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ arasında tanımlanan cebirsel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Toplama:

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3)(+)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \end{aligned}$$

Çıkarma:

$$\begin{aligned} A(-)B &= (a_1, a_2, a_3)(-)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1). \end{aligned}$$

Simetri:

$$-(A) = (-a_3, -a_2, -a_1).$$

Örnek 3.8: $A = (-3, 2, 4)$ ve $B = (-1, 0, 5)$ iki bulanık sayı olsun.

$$\begin{aligned} A + B &= (-3, 2, 4) + (-1, 0, 5) \\ &= (-4, 2, 9). \end{aligned}$$

Bulanık sayıların α seviyesindeki güven aralıkları

$\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \\ &= [5\alpha - 3, -2\alpha + 4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\alpha &= [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] = [(b_2 - b_1)\alpha + b_1, -(b_3 - b_2)\alpha + b_3] \\ &= [\alpha - 1, -5\alpha + 5] \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece güven aralıkları yardımıyla bulanık sayıların toplamı,

$$\begin{aligned} A_\alpha (+) B_\alpha &= [5\alpha - 3 + \alpha - 1, -2\alpha + 4 - 5\alpha + 5] \\ &= [6\alpha - 4, -7\alpha + 9] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\alpha = 0$ için $A_0 (+) B_0 = [-4, 9]$ ve $\alpha = 1$ için $A_1 (+) B_1 = [2, 2] = 2$ 'dir.

Aynı şekilde bulanık sayıların farkı

$$A(-)B = (-8, 2, 5)$$

$$A_\alpha (-) B_\alpha = [10\alpha - 8, -3\alpha + 5]$$

$\alpha = 0$ için $A_0 (-) B_0 = [-8, 5]$ ve $\alpha = 1$ için $A_1 (-) B_1 = [2, 2] = 2$ 'dir (Kaufmann ve Gupta, 1988)* .

Çarpma:

Sadece pozitif reel sayılar için tanımlı olan bu işlem, iki şekilde tanımlanır. A ve B pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı iki üçgensel bulanık sayı ve bunların güven aralıkları

* Kaufmann, A. ve Gupta, M.M, (1988), Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Elsevier Science Publishers B.V., Netherlands, sayfa 26-30.

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \text{ ve } B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}]$$

olsun. Bu iki bulanık sayının çarpımı, güven aralığı cinsinden,

$$A_\alpha(.)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} \cdot b_3^{(\alpha)}]$$

dır. Bu çarpımın açık şekli

$$\begin{aligned} A_\alpha(.)B_\alpha &= [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3][(b_2 - b_1)\alpha + b_1, -(b_3 - b_2)\alpha + b_3] \\ &= [((a_2 - a_1)\alpha + a_1) \cdot ((b_2 - b_1)\alpha + b_1), (-(a_3 - a_2)\alpha + a_3) \cdot (-(b_3 - b_2)\alpha + b_3)] \\ &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \end{aligned}$$

$$a_1^{(\alpha)} = a_1b_1 + \alpha(a_1b_2 - 2a_1b_1 + b_1a_2) + \alpha^2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

$$a_3^{(\alpha)} = a_3b_3 + \alpha(a_3b_2 - 2a_3b_3 + b_3a_2) + \alpha^2(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)$$

'dir.

$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ yapısındaki pozitif üçgensel sayıların doğrudan çarpımı

$$A.B = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$$

dır. İki çarpımın sonucunu karşılaştırmak amacıyla elde edilen AB 'nin α -keseni

$$(A.B)_\alpha = [(a_2b_2 - a_1b_1)\alpha + a_1b_1, -(a_3b_3 - a_2b_2)\alpha + a_3b_3]$$

dir. Görüldüğü gibi doğrudan çarpım, güven aralıklarıyla yapılan çarpımdan belli miktarda sapmaktadır. Bu sapma miktarı kabul edilebilir olduğunda işlemde kolaylık açısından doğrudan çarpım tercih edilmektedir.

Örnek 3.9:

$A = (2, 3, 5)$ ve $B = (1, 4, 8)$ iki üçgensel sayı olsun. Bunların güven aralıkları (3.1) ile

$$A_\alpha = [\alpha + 2, -2\alpha + 5]$$

$$B_\alpha = [3\alpha + 1, -4\alpha + 8]$$

olarak belirlenir. Buna göre

$$\begin{aligned}
A_\alpha(.)B_\alpha &= [\alpha + 2, -2\alpha + 5](.)[3\alpha + 1, -4\alpha + 8] \\
&= [(\alpha + 2)(3\alpha + 1), (-2\alpha + 5)(-4\alpha + 8)] \\
&= [3\alpha^2 + 7\alpha + 2, 8\alpha^2 - 36\alpha + 40].
\end{aligned}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow A_0(.)B_0 = [2, 40]$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow A_1(.)B_1 = [12, 12]$$

‘dir. İki bulanık sayının doğrudan çarpımı ise $A.B = (2, 12, 40)$ ’dır.

Bölme: Bulanık sayılarda bölme işlemi pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olup $b_1^\alpha > 0$ ve $b_3^\alpha > 0$ olmak üzere her $\alpha \in [0,1]$ için güven aralığı cinsinden

$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[\frac{a_1^\alpha}{b_3^\alpha}, \frac{a_3^\alpha}{b_1^\alpha} \right] = \left[\frac{a_1 + (a_2 - a_1)\alpha}{-(b_3 - b_2)\alpha + b_3}, \frac{-(a_3 - a_2)\alpha + a_3}{b_1 + (b_2 - b_1)\alpha} \right]$$

olarak tanımlanır (Aksoy vd., 2003)*.

$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ yapısındaki pozitif üçgensel sayılar için doğrudan bölme işlemi

$$\frac{A}{B} = \left[\frac{a_1}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_1} \right]$$

olarak tanımlanır. Çarpma işlemine benzer şekilde doğrudan ve güven aralıkları ile yapılan bölme işlemi sonuçları karşılaştırılabilir.

Örnek 3.9’da verilen A ve B bulanık sayıları için bölme işlemi sonuçları,

$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[\frac{\alpha + 2}{-4\alpha + 8}, \frac{-2\alpha + 5}{-4\alpha + 8} \right] \text{ ve } \frac{A}{B} = \left(\frac{2}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{1} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 5 \right)$$

şeklindedir.

* Aksoy vd, sayfa 41 ve 45.

Ters Alma: Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olan A üçgensel bulanık sayısının güven aralığı $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$ olmak üzere A 'nın tersi

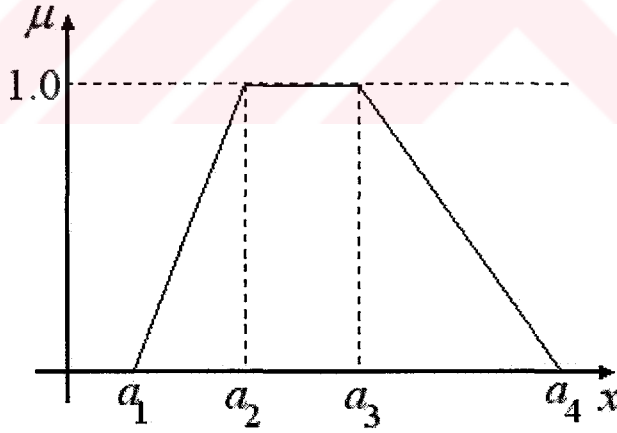
$$A_\alpha^{-1} = \left[\frac{1}{a_3^{(\alpha)}}, \frac{1}{a_1^{(\alpha)}} \right] \text{ 'dir.}$$

3.10 Yamuksal Bulanık Sayılar

$a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$ ve $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ olmak üzere (a_1, a_2, a_3, a_4) sıralı dördlüsü ile verilen ve

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & , a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & , a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & , x > a_4 \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ bulanık sayısına yamuksal bulanık sayı denir. Yamuksal bulanık sayının üyelik fonksiyonu Şekil 3.14 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.14 Yamuksal bulanık Sayı.

α seviyesindeki güven aralığı tanımı yardımıyla bir yamuksal A bulanık sayısı,

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4]$$

şeklinde de tanımlanabilir.

3.10.1 Yamuksal Bulanık Sayılarda Cebirsel İşlemler

Yamuksal bulanık sayılarda cebirsel işlemlerin bazı önemli özellikleri şunlardır:

- İki yamuksal bulanık sayının toplanması veya çıkarılması sonucu yine bir yamuksal bulanık sayı elde edilir.
- Yamuksal bulanık sayılarla yapılan çarpma, ters alma ve bölme işlemleri, her zaman bir yamuksal bulanık sayı sonucunu vermeyebilir.

İki yamuksal bulanık sayı $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ arasında tanımlanan cebirsel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Toplama:

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3, a_4)(+)(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4). \end{aligned}$$

Çıkarma:

$$\begin{aligned} A(-)B &= (a_1, a_2, a_3, a_4)(-)(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4). \end{aligned}$$

Simetri:

$$-(A) = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4).$$

Örnek 3.10: $A = (-3, -1, 2, 7)$ ve $B = (-1, 5, 6, 8)$ iki bulanık sayı olsun.

$$\begin{aligned} A(+)B &= (-3, -1, 2, 7) + (-1, 5, 6, 8) \\ &= (-4, 4, 8, 15). \end{aligned}$$

Bulanık sayıların α seviyesindeki güven aralıkları

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ için}$$

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}] = [2\alpha - 3, -5\alpha + 7],$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_4^{(\alpha)}] = [6\alpha - 1, -2\alpha + 8]$$

şeklindedir. Böylece güven aralıkları yardımıyla bulanık sayıların toplamı,

$$A_\alpha + B_\alpha = [8\alpha - 4, -7\alpha + 15]$$

şeklinde elde edilir. $\alpha=0$ için $A_0(+)B_0=[-4,15]$ ve $\alpha=1$ için $A_1(+)B_1=[4,18]$ 'dir (Kaufmann ve Gupta, 1988)*.

Çarpma:

Sadece pozitif reel sayılar için tanımlı olan çarpma işlemi, iki şekilde tanımlanır. A ve B pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı iki yamuksal bulanık sayı ve bunların güven aralıkları

$$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_4^{(\alpha)}] \text{ ve } B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},b_4^{(\alpha)}]$$

olsun. Bu iki bulanık sayının çarpımı, güven aralığı cinsinden,

$$A_\alpha(.)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}.b_1^{(\alpha)},a_4^{(\alpha)}.b_4^{(\alpha)}]$$

dır.

$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ ve $B=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ yapısındaki pozitif yamuksal bulanık sayıların doğrudan çarpımı

$$A.B=(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4)$$

dır.

Örnek 3.11:

$A=(4,6,9,12)$ ve $B=(1,3,7,10)$ pozitif yamuksal bulanık sayılarının güven aralıkları

$$A_\alpha=[2\alpha+4,-3\alpha+12]$$

$$B_\alpha=[2\alpha+1,-3\alpha+10]$$

dır. Buna göre

$$A_\alpha(.)B_\alpha=[(2\alpha+4).(2\alpha+1),(-3\alpha+12).(-3\alpha+10)]$$

$$=[4\alpha^2+10\alpha+4, 9\alpha^2-66\alpha+120]$$

* Kaufmann ve Gupta, sayfa 31-35.

$$\alpha = 0 \Rightarrow A_0(.)B_0 = [4, 120]$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow A_1(.)B_1 = [18, 63]$$

İki bulanık sayının doğrudan çarpımı ise $A.B = (4, 18, 63, 120)$ 'dır.

Bölme: Yamuksal bulanık sayılarda bölme işlemi pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olup $b_1^\alpha > 0$ ve $b_3^\alpha > 0$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için güven aralığı cinsinden

$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[\frac{a_1^\alpha}{b_4^\alpha}, \frac{a_4^\alpha}{b_1^\alpha} \right]$$

olarak tanımlanır (Aksoy vd., 2003)*.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ yapısındaki pozitif üçgensel bulanık sayılar için doğrudan bölme işlemi

$$\frac{A}{B} = \left[\frac{a_1}{b_4}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_2}, \frac{a_4}{b_1} \right]$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.11'da verilen A ve B bulanık sayıları için bölme işlemi sonuçları,

$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[\frac{2\alpha + 4}{-3\alpha + 10}, \frac{-3\alpha + 12}{2\alpha + 1} \right] \text{ ve } \frac{A}{B} = \left(\frac{4}{10}, \frac{6}{7}, \frac{9}{3}, \frac{12}{1} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{7}, 3, 12 \right)$$

şeklindedir.

Ters Alma: Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olan A yamuksal bulanık sayısının güven aralığı $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}]$ olmak üzere A 'nın tersi

$$A_\alpha^{-1} = \left[\frac{1}{a_4^{(\alpha)}}, \frac{1}{a_1^{(\alpha)}} \right] \text{ 'dir.}$$

* Aksoy vd, sayfa 41 ve 45.

$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yapısındaki pozitif yamuksal bulanık sayının doğrudan tersi ise

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right)$$

'dır.



4. BULANIK KARAR VERME

“ Karar “ terimi, bir avukat, bir iş adamı, bir general, bir psikolog veya bir istatistikçinin bu terimi kullanmasına bağlı olarak çok farklı anlamalara sahiptir. Bir durumda, yasal bir yapıyı, bir diğerinde matematiksel bir modeli, davranışsal bir eylemi, bilgi işlemede ise özel bir türü betimleyebilir. “ Karar “ın bazı anlamları yapısal bir karaktere sahipken bazıları gerçek karar vermeyi tanımlayabilir.

Klasik anlamda karar verme teorisinde bir karar; bir karar alternatifleri kümesi(karar uzayı) , durum uzayı kümesi, her ikiliye kararı ve sonucu atayan bir bağıntı, ve nihai olarak sonuçları arzu edilebilirliklerine göre sıralayan bir fayda fonksiyonu ile karakterize edilebilir. Belirlilik altında karar verirken Karar Verici (KV) hangi sonucu alacağını bilir ve geçerli durum uzayında en yüksek faydalı karar alternatifini seçer. Risk altında karar verirken ise hangi durumun gerçekleşeceği tam olarak bilinmez, sadece durumların olasılık fonksiyonları bilinir. Ve böylece karar vermek daha güç bir hale gelir(Zimmermann, 1993)*.

Matematiksel anlamda “karar verme”, mevcut tüm alternatifler arasından amaç veya amaçlara en uygun, mümkün bir veya birkaçını seçme sürecidir. İnsanın yaşamına başlaması ile çıkan bu olgu, bütün ömrü boyunca çok çeşitli şekillerde ve ortamlarda devam eder. Aynı şekilde aileler, şirketler, endüstri, hükümet ve benzeri kurumlar çeşitli ortamlarda zincirleme karar verme olgusunu daima yaşarlar (Evren ve Ülengin, 1992)**.

Gerçek dünya uygulamalarındaki birçok karar uzmanların sezgisel yargısı ile alınmakta ve dilsel olarak ifade edilmektedir. Ve ayrıca bu kararlar, oldukça karmaşık durumları ifade etmeleri sebebiyle de matematiksel olarak tam anlamıyla ifade edilememektedir. Böylece karar verme süreci bulanık hale gelmektedir.

Bellman ve Zadeh (1970) bulanıklık altında karar verme işlemine bulanık hedef (G) , bulanık kısıt (C) ve bulanık karar (D) temel kavramlarını getirmişler ve bunların uygulamaları ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır.

* Zimmermann, sayfa 241.

** Evren, R. Ve Ülengin, F., (1992), Yönetimde Çok Amaçlı Karar Verme, İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, Gümtüşsuyu, İstanbul, sayfa 1.

Alternatifler uzayı X kümesi üzerinde bir bulanık hedef;

$$\mu_G : X \rightarrow [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile; bir bulanık kısıt ise

$$\mu_C : X \rightarrow [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bir bulanık küme olsun.

Bellman ve Zadeh (1970) 'in önerdiği bulanık karar tanımında, bulanık hedef ile bulanık kısıtın aynı anda sağlanması istenir. Böylece Bellman ve Zadeh bulanık karar D 'yi; bulanık hedef G ve bulanık kısıt C 'nin kesişimi ile tanımlamaktadır. Daha açık bir şekilde X üzerinde tanımlı bulanık karar kümesi D ;

$$D = G \cap C$$

ile tanımlanır ve

$$\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x)) \quad (4.1)$$

üyelik fonksiyonu ile belirtilir. Bu tanım yardımıyla maksimize edici karar

$$\underset{x \in X}{\text{maximize}} \mu_D(x) = \underset{x \in X}{\text{maximize}} \min(\mu_G(x), \mu_C(x))$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1:

“ x , 10'dan yeteri kadar büyük olmalı ” amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & , x > 10 \end{cases}$$

“ x , 11 civarında olmalı ” kısıtının üyelik fonksiyonu ise

$$\mu_C(x) = (1 + (x - 11)^4)^{-1}$$

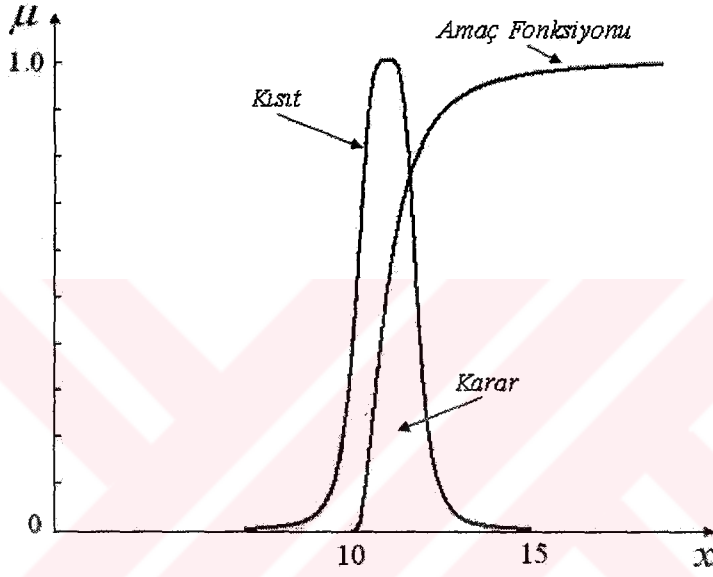
olmak üzere kararın üyelik fonksiyonu

$$\mu_D(x) = \min (\mu_G(x), \mu_C(x))$$

$$\Rightarrow \mu_D(x) = \begin{cases} \min \{(1+(x-10)^{-2})^{-1}, (1+(x-11)^4)^{-1}\} & , x > 10 \\ 0 & , x \leq 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_D(x) = \begin{cases} (1+(x-11)^4)^{-1} & , x > 11.75 \\ 0 & , x \leq 11.75 \end{cases}$$

şeklinde belirlenir. Bulanık karar Şekil 3.14 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.1 Bulanık bir karar.

Bellman ve Zadeh'in önerdiği bu tanımın daha genel hali şu şekilde verilmektedir:

$G_1, G_2, \dots, G_n$ n tane bulanık hedef, $C_1, C_2, \dots, C_m$ m tane bulanık kısıt olmak üzere, bulanık karar D ;

$$D = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$$

ile tanımlanır. Bulanık kararın üyelik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mu_D &= \min \{\mu_{G_1}, \mu_{G_2}, \dots, \mu_{G_n}, \mu_{C_1}, \mu_{C_2}, \dots, \mu_{C_m}\} \\ &= \min \{\mu_{G_i}, \mu_{C_j}\} \\ &= \min \{\mu_i\} \end{aligned}$$

şeklinde, maksimize edici karar ise

$$\underset{x \in X}{\text{maximize}} \mu_D(x) = \underset{x \in X}{\text{maximize}} \min(\mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), \dots, \mu_{C_l}(x))$$

şeklinde tanımlanır (Zimmermann, 1993)*.

Bu tanımda bulanık hedefler ve kısıtların, karara etkisi açısından, arasında bir fark olmadığı, her ikisinin de eşit önem ağırlıklarıyla karara katkıda bulunduğu unutulmamalıdır. Bazı durumlarda hedef ve kısıtları farklı ağırlıklarla bir araya getiren birleştirici modeller kullanılabilir. Bulanık hedef ve kısıtların eşit önem ağırlığına sahip olmadığı bu durumlar için Bellman ve Zadeh (1970) ayrıca konveks bulanık karar tanımını yapmışlardır. Bu tanıma göre bulanık karar D ,

$$\mu_D^{\text{co}}(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu_{C_j}(x),$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j = 1, \alpha_i, \beta_j \geq 0$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Burada α_i ve β_j sırasıyla hedeflerin ve kısıtların göreceli önemlerini yansıtan ağırlık katsayılarıdır (Sakawa, 1993)**.

4.1 Bulanık Lineer Programlama

Bulanık küme teorisi, ilk kez 1976 yılında H.-J. Zimmermann tarafından geleneksel LP problemlerine uygulanmıştır. Bu uygulama Bellman ve Zadeh'in bulanık karar tanımından yola çıkılarak lineer üyelik fonksiyonları sayesinde yapılmış ve ilgili bulanık LP problemine eşdeğer olan bir LP probleminin varlığı ispatlanmıştır. Bundan sonra bulanık LP, birçok yönde çeşitli başarılı uygulamalar ile geliştirilmiş ve bugünlerde de bulanıklık altında çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümü için önemli bir hale gelmiştir (Sakawa, 1993)***

LP modelleri karar modelinin özel bir şekli olarak düşünülebilir. Karar uzayı kısıtlarla, hedef (fayda fonksiyonu) ise amaç fonksiyonu ile tanımlanır. LP problemlerinin klasik modeli (4.2)

* Zimmermann, sayfa 243-246.

** Sakawa, sayfa 34.

*** Sakawa, sayfa 36.

ile gösterilmiştir.

$$\text{Amaç : } \max z(x) = c^T x$$

$$\text{Kısıtlar: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$c, x \in R^n, b \in R^m, A \in R^{m \times n} \quad (4.2)$$

BLP’da, klasik modeldeki tüm bileşenlerin kesin sayı olmaları, $\leq$ ’in kesin anlamda olması ve $\max$ ’ın zorunlu şart olması kabulleri daha esnek bir hale gelir. KV amaç fonksiyonunu maksimize veya minimize etmek yerine bazı istek seviyelerine ulaşmak ve böylece mevcut maliyet durumunu iyileştirmek isteyebilir. Kısıtlar, “ $\leq$ ” işaretinin kesin matematiksel anlam ifade etmeyip küçük bozulmaları (sapmaları) kabul edebilir olması şeklinde belirsiz olabilir. Veya kısıtların, duyulara ilişkin gereksinimleri temsil etmesi durumunda da belirsizlik oluşabilir. Ayrıca; b, c vektörlerinin ve A matrisinin bileşenlerinin bulanık yapıda olmaları sebebiyle de belirsizlik oluşabilir.

Sonuç olarak BLP, klasik LP’nin tersine tek bir şekilde model tipi olarak tanımlanmaz. Modellenecek gerçek durumun özelliklerine ve kabullerine bağlı olarak birçok varyasyonlar mümkündür (Zimmermann,1993)*.

4.1.1 Amaçta Hedef ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali

Problemin amaç fonksiyonuna bir hedef verilmesi ve problemin kısıtlarının bulanık olarak verilmesi halinde oluşan BLP problemidir. Problem için Zimmermann tarafından önerilen yaklaşım, “max-min” yaklaşım olarak isimlendirilmektedir.

Amaç fonksiyonuna z_0 değerinden büyük olma hedefi koyulduğunda, problemin matematiksel yapısı

$$\begin{aligned} c^T x &\geq z_0 \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

* Zimmermann, sayfa 248.

olarak yazılabilir. Burada “ $\leq$ ”, kesin matematiksel anlamda verilen “ $\leq$ ” nin, “ $\geq$ ” ise “ $\geq$ ” in

bulanık şeklidir. $\begin{pmatrix} -c \\ A \end{pmatrix} = B$ ve $\begin{pmatrix} -z_0 \\ b \end{pmatrix} = d$ dönüşümleri yapıldığında problem;

$$\begin{aligned} Bx &\leq d \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde gösterilir. $(m+1)$ tane satır denkleminde oluşan $Bx \leq d$, her bir satırına ait üyelik fonksiyonu $\mu_i(x)$ olan bulanık kümelerle ifade edilirse, (4.1) ile kararın üyelik fonksiyonu,

$$\mu_D(x) = \min_i \{\mu_i(x)\} \quad (4.5)$$

ile belirlenir. B_i , B 'nin i . satırını göstermek üzere; $\mu_i(x)$ üyelik değeri, x 'in $B_i(x) \leq d_i$ eşitsizliğini sağlama derecesi olarak yorumlanabilir. Bu durumda maksimize edici karar ;

$$\max_{x \geq 0} \min_i \{\mu_i(x)\} = \max_{x \geq 0} \mu_D(x) \quad (4.6)$$

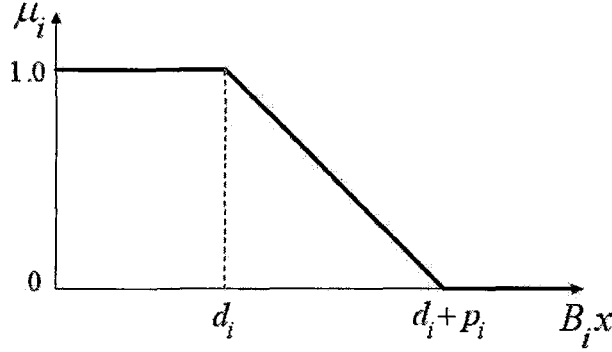
olası non-lineer programlama probleminin çözümü olarak belirlenir. Burada $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonları belirlenmelidir. Amaç fonksiyonuna ait kısıt da dahil olmak üzere kısıtlar kuvvetli olarak bozulmuşsa $\mu_i(x)$, 0 değerini almakta; kısıtlar kesin anlamda (çok iyi) sağlanmış ise 1 değerini almaktadır. p_i ($i = 1, 2, \dots, m+1$) kısıtların kabul edilebilir bozulma miktarları veya kısıtlarda yapılabilecek olası maksimum sapma miktarı olmak üzere, her bir satırın “tolerans aralığı”, $[d_i, d_i + p_i]$ olarak belirlenir. Bu durumda tolerans aralığında monoton azalan olan $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonu;

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & , B_i(x) \leq d_i \\ \in [0, 1] & , d_i < B_i(x) \leq d_i + p_i \\ 0 & , B_i(x) > d_i + p_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, m+1 \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Lineer üyelik fonksiyonları kullanılarak üyelik fonksiyonları (4.7);

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & , B_i(x) \leq d_i \\ 1 - \frac{B_i(x) - d_i}{p_i} & , d_i < B_i(x) \leq d_i + p_i \\ 0 & , B_i(x) > d_i + p_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, m+1 \quad (4.8)$$

şeklinde belirlenir. Üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 4.1 ile verilmiştir.



Şekil 4.2 “ $\leq$ ” yapısındaki kısıtlara ait üyelik fonksiyonu.

Elde edilen üyelik fonksiyonları, (4.6)’da yerine konulup gerekli düzenlemeler yapılırsa maksimize edici karar

$$\max_{x \geq 0} \min_i \left(1 - \frac{B_i(x) - d_i}{p_i} \right) \quad (4.9)$$

veya $\min_i \{\mu_i(x)\} = \lambda$ alınarak problem,

Amaç : $\max \lambda$

$$\text{Kısıtlar: } \lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i \quad i = 1, \dots, m+1 \quad (4.10)$$

$$x \geq 0$$

olarak belirlenir. Gerçekten;

$$\min_i \{\mu_i(x)\} = \lambda \Rightarrow \forall i \ (i = 1, 2, \dots, m+1) \text{ için } \mu_i(x) \geq \lambda$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{B_i(x) - d_i}{p_i} \geq \lambda$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda \geq \frac{B_i(x) - d_i}{p_i}$$

$$\Rightarrow p_i(1 - \lambda) \geq B_i(x) - d_i$$

$$\Rightarrow \lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i$$

olacaktır.

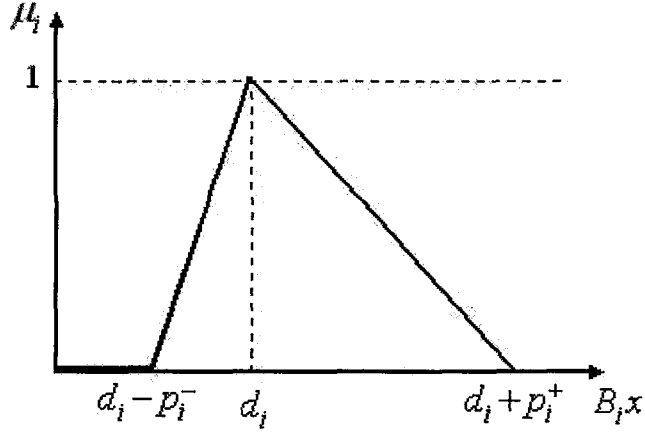
Burada maksimize edici kararın, (4.3) ile verilen modelden sadece bir tane fazla değişkene ve bir tane fazla kısıta sahip klasik LP çözülerek elde edildiğine dikkat edilmelidir (Zimmermann, 1993)*.

$B_i x \leq d_i$ bulanık yapısında olan ve p_i tolerans miktarına sahip kısıtlar, $[d_i, d_i + p_i]$ aralığında monoton azalan olup, Zimmermann'ın max-min yaklaşımıyla $\lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i$ yapısındaki kesin kısıta dönüşmektedir. Buna benzer şekilde $B_i x \geq d_i$ bulanık yapısında olan ve p_i tolerans miktarına sahip kısıtlar, $[d_i - p_i, d_i]$ aralığında monoton artan olup, Zimmermann'ın max-min yaklaşımıyla $B_i x - \lambda p_i \geq d_i - p_i$ yapısındaki kesin kısıta dönüşmektedir. Ayrıca $B_i x \equiv d_i$ yapısında olup p_i^- ve p_i^+ tolerans miktarlarına sahip kısıtlar, $[d_i - p_i^-, d_i]$ aralığında monoton artan, $[d_i, d_i + p_i^+]$ aralığında ise monoton azalandır. Buna göre kısıtların üyelik fonksiyonu,

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & , B_i(x) \leq d_i - p_i^- \\ 1 + \frac{B_i(x) - d_i}{p_i^-} & , d_i - p_i^- < B_i(x) \leq d_i \\ 1 - \frac{B_i(x) - d_i}{p_i^+} & , d_i < B_i(x) \leq d_i + p_i^+ \\ 0 & , B_i(x) > d_i + p_i^+ \end{cases}$$

şeklinde belirlenir. Üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 4.3 ile verilmiştir.

* Zimmermann, sayfa 250-252.



Şekil 4.3 “ $\cong$ ” yapısındaki kısıtın üyelik fonksiyonu.

Böylece Zimmermann’ın max-min yaklaşımıyla $B_i x \cong d_i$ yapısındaki bulanık kısıt $\lambda p_i^- + B_i x \leq d_i + p_i^-$ ve $B_i x - \lambda p_i^+ \geq d_i + p_i^+$ olarak iki kesin kısıta dönüşmektedir.

Örnek 4.2:

$$\min z(x) = 41,400x_1 + 44,300x_2 + 48,100x_3 + 49,100x_4$$

$$0.84x_1 + 1.44x_2 + 2.16x_3 + 2.4x_4 \geq 170$$

$$16x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 16x_4 \geq 1,300$$

$$x_1 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Klasik LP probleminde amaç fonksiyonu için verilen hedef $z(x) \leq 3,700,000$ ve amaç ve kısıtların tolerans miktarları sırasıyla

$$p_1 = 500,000 \quad p_2 = 10 \quad p_3 = 100 \quad p_4 = 6$$

olsun.

Problem (4.10) ‘a göre düzenlenir ve her bir kısıt λ değişkeninin katsayısına bölünürse, (4.11) LP problemi elde edilir. Verilen klasik LP probleminin ve (4.11) BLP probleminin çözümleri Tablo 4.1’de gösterilmiştir.

Amaç : $\max \lambda$

Kısıtlar: $0.083x_1 + 0.089x_2 + 0.096x_3 + 0.098x_4 + \lambda \leq 8.4$

$$0.084x_1 + 0.144x_2 + 0.216x_3 + 0.24x_4 - \lambda \geq 16$$

$$0.16x_1 + 0.16x_2 + 0.16x_3 + 0.16x_4 - \lambda \geq 12$$

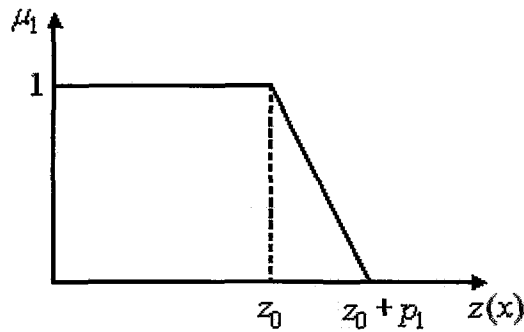
$$0.167x_1 - \lambda \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda \geq 0 \quad (4.11)$$

Tablo 4.1 Örnek 11 sonuç değerleri.

	Değişkenler				Amaç	Kısıtlar		
	x_1	x_2	x_3	x_4	z	1.	2.	3.
Klasik LP	6	16.29	0	58.96	3,864,975	170	1300	6
BLP	15.366	0	0	64.597	3,807,865.1	167.941	1279.41	4,765

Görüldüğü gibi kısıtlarda belli miktarda bozulmalara müsaade edilmesi durumunda klasik LP'deki amaç fonksiyon değerinden daha iyi bir çözüm elde edilmiştir. Amacın üyelik fonksiyonunun Şekil 4.4 yapısında olduğu göz önüne alınırsa amacın 0.7843 seviyesinde tatmin olduğu görülmektedir.



Şekil 4.4 Amacın üyelik fonksiyonu (Örnek 4.2).

4.1.2 Kesin Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlarda Bulanıklık Olması Hali

Kesin amaç fonksiyonuna ve bulanık kısıtlara sahip BLP problemidir. Problemin matematiksel yapısı şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

(4.11) ile verilen BLP'nın çözümünde karşılaşılan problem, kısıtların tanımladığı bulanık bölge üzerinde kesin amaç fonksiyonunun ekstremum noktasının bulunmasıdır. Bu problem için verilen bir yaklaşım “bulanık küme “karar”ın belirlenmesi” dir.

Orlovsky, 1977 yılındaki makalesinde, çözüm uzayının tüm α –kesen kümelerine karşılık gelen amaç fonksiyonunun optimal değerlerini hesaplamayı önermiştir. Orlovsky bu makalesinde bulanık küme kararını; amaç fonksiyonunun, çözüm uzayının ilgili α –seviyelerine eşit üyelik derecesine sahip optimal değerleri olarak düşünmüştür.

Tanım 4.1:

Werners'in önerdiği bulanık küme karar tanımı şu şekildedir.

Çözüm uzayının α –seviye kümeleri $R_\alpha = \{x | x \in X, \mu_R(x) \geq \alpha\}$, her α –seviyesinin optimal çözümlerinin kümesi ise $N(\alpha) = \left\{x \mid x \in R_\alpha, f(x) = \sup_{x' \in R_\alpha} f(x')\right\}$ olsun.

Bu durumda bulanık küme kararı,

$$\mu_{opt}(x) = \begin{cases} \sup_{x \in N(\alpha)} \alpha & , x \in \bigcup_{\alpha > 0} N(\alpha) \\ 0 & , x \notin \bigcup_{\alpha > 0} N(\alpha) \end{cases} \quad (4.12)$$

üyelik fonksiyonu ile, “Amaç fonksiyonunun optimal değerleri” bulanık kümesi ise,

$$\mu_f(r) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(r)} \mu_{opt}(x) & , r \in R \wedge f^{-1}(r) \neq \emptyset \\ 0 & , r \in R \wedge f^{-1}(r) = \emptyset \end{cases} \quad (4.13)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $f(x)$; r değerini alan bir fonksiyondur ($f(x) = r$).

r ve $\mu_{opt}(x)$ parametrik programlama yardımıyla elde edilebilir. Her α için aşağıdaki

formda olan LP çözülmelidir:

$$\text{Amaç : } \max f(x)$$

$$\text{Kısıtlar: } \alpha \leq \mu_i(x) \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in X. \quad (4.14)$$

Burada sonucun bulanık bir küme olmasına rağmen, KV' nin kesin bir optimal çözüm istemesi durumunda $(r, \mu_f f(r))$ ikililerinden seçim yapması ve böylece kesin bir çözüm elde edilebileceği de unutulmamalıdır.

Örnek 4.3:

Werners'in bulanık küme karar tanımı için verdiği örnek şu şekildedir (Zimmermann, 1963)*.

$$\text{Amaç : } \max r = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Kısıtlar : } x_1 \lesseqgtr 3$$

$$x_1 + x_2 \lesseqgtr 4$$

$$0.5x_1 + x_2 \lesseqgtr 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

LP modelinin kısıtları için verilen tolerans miktarları $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$ dir. Buna göre kısıtların üyelik fonksiyonları sırasıyla,

$$\mu_1(x) = 1 - \frac{x_1 - 3}{6} = \frac{-x_1 + 9}{6}, \quad \mu_2(x) = 1 - \frac{x_1 + x_2 - 4}{4} = \frac{-x_1 - x_2 + 8}{4}$$

$$\mu_3(x) = 1 - \frac{0.5x_1 + x_2 - 3}{2} = \frac{-0.5x_1 - x_2 + 5}{2}$$

'dır. (4.14) ile

* Zimmermann, sayfa 256.

$$\mu_1(x) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{-x_1 + 9}{6} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow -x_1 + 9 \geq 6\alpha$$

$$\Rightarrow -x_1 \geq 6\alpha - 9$$

$$\Rightarrow x_1 \leq 9 - 6\alpha$$

olarak yazılabilir. Diğer üyelik fonksiyonları için de benzer eşitsizlikler elde edilerek örnek problem için (4.14) 'e eşdeğer olan model

$$\text{Amaç : } \max r = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Kısıtlar: } x_1 \leq 9 - 6\alpha \quad (4.15)$$

$$x_1 + x_2 \leq 8 - 4\alpha$$

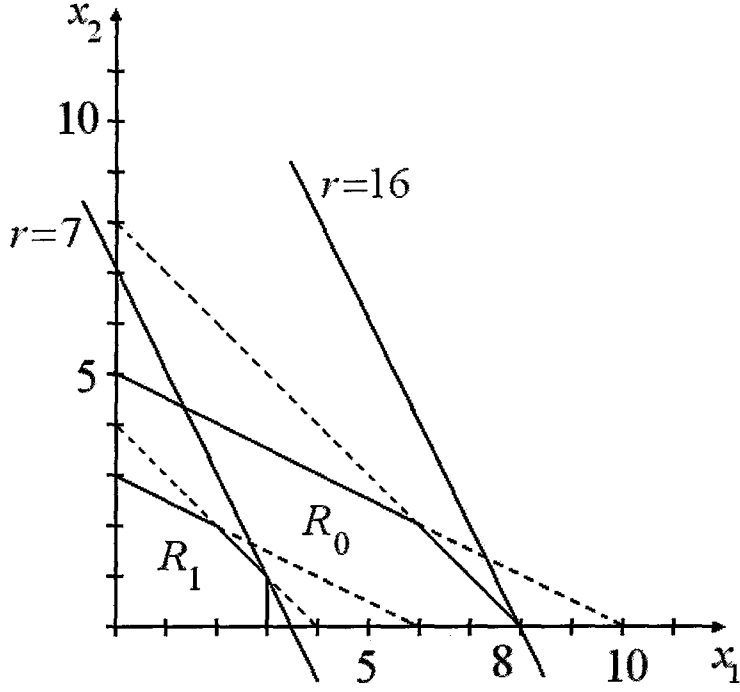
$$0.5x_1 + x_2 \leq 5 - 2\alpha$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

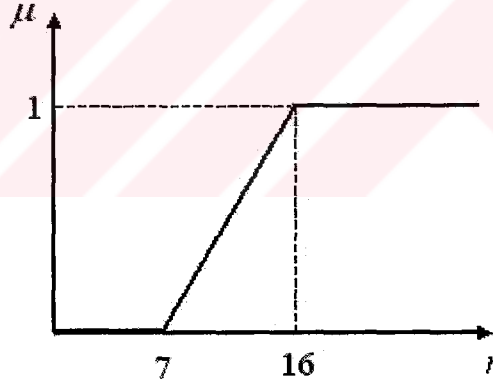
olarak bulunur. $\alpha = 1$ için uygun bölge R_1 ve $\alpha = 0$ için uygun bölge R_0 Şekil 4.5 ile gösterilmiştir. $\max_{R_0} r = 16$ ve $\max_{R_1} r = 7$ olup kararın üyelik fonksiyonu,

$$\mu_f(f(r)) = \begin{cases} 0 & , r < 7 \\ \frac{r-7}{9} & , 7 \leq r \leq 16 \\ 1 & , r > 16 \end{cases}$$

yapısında olup Şekil 4.6 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.5 $\alpha = 1$ ve $\alpha = 0$ seviyelerine karşılık gelen uygun bölgeler R_1 ve R_0 .



Şekil 4.6 Kararın üyelik fonksiyonu (Örnek 4.3).

KV'nin, $(r, \mu_f f(r))$ ikilerinden seçim yapması ile kesin çözüm elde edilir.

4.2 Bulanık Çok Kriterli Karar Verme

Son yıllarda, faaliyetlerin arzu edilebilirliklerine göre karşılaştırılmaları, ürünlerin uygunluğuna karar verilmesi veya karar problemlerinde optimal çözümlerin belirlenmesi, çoğu durumda tek kriter veya tek amaç fonksiyonu kullanılarak elde edilemez. Bu sebeple

Çok kriterli karar verme literatürde bir çok alana uygulanmıştır.

Literatürde çok kriterli karar verme konusunda, yoğunlaşılın iki ana dal gelişmiştir. Bunlar çok amaçlı karar verme ve çok nitelikli karar vermedir. Bu iki alan arasındaki temel fark karar uzaylarıdır. Çok amaçlı karar verme sürekli karar uzaylarındaki problemlere, Çok nitelikli karar verme ise ayırık karar uzaylarındaki problemlere odaklanmıştır. Bu ayrımında bazı istisnalar da mevcuttur (çok amaçlı tamsayılı programlama gibi).

Çok kriterli karar vermede literatür, son zamanlarda oldukça büyük gelişim göstermiştir ve bulanık küme teorisinin de bu alana oldukça önemli katkıları olmuştur (Zimmermann, 1993)*. Bu bölümde tez konusuna paralel olarak, literatürde sıklıkla “vektör-maksimizasyon” problemi olarak da isimlendirilen çok amaçlı karar verme probleminin özel bir hali olan Çok Amaçlı Bulanık Lineer Programlama (ÇABLP) problemi incelenecektir.

4.2.1 Çok Amaçlı Bulanık Lineer Programlama

Verilen lineer kısıtlar altında birden fazla lineer amacı optimize etmeye çalışan problem, Çok Amaçlı Lineer Programlama (ÇALP) problemi olarak isimlendirilir. Problemin matematiksel modeli şu şekildedir:

$$\text{Amaçlar: } \max z_1(x) = c_1 x$$

$$\max z_2(x) = c_2 x$$

.....

$$\max z_K(x) = c_K x$$

$$\text{Kısıtlar: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

(4.16)

$$\text{Burada } c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in}), i = 1, \dots, K; x = (x_1, \dots, x_n)^T; A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}; b = (b_1, \dots, b_n)^T$$

* Zimmermann, sayfa 265.

yapısındadır. Verilen ÇALP problemi $z(x) = (z_1(x), \dots, z_K(x))^T$ K – boyutlu vektör ve $C = (c_1, c_2, \dots, c_K)^T$ $K \times n$ lik bir matris olmak üzere vektör-maksimizasyon problemi olarak ifade edilebilir.

Tanım 4.2: (Vektör-Maksimizasyon Problemi)

$z(x) = (z_1(x), \dots, z_K(x))$; $x \in R^n$ 'den R^K 'ya tanımlı vektör değerli bir fonksiyon ve X çözüm uzayı olmak üzere;

$$\text{"max"} \{z(x) | x \in X\}$$

problemine vektör-maksimizasyon problemi denir. Benzer şekilde

$$\text{"min"} \{z(x) | x \in X\}$$

problemine de vektör-minimizasyon problemi denir.

Buna göre (4.16)

$$\text{Amaç : } \max z(x) = Cx$$

$$\text{Kısıtlar : } Ax \leq b, x \geq 0 \quad (4.17)$$

olarak ifade edilir.

Klasik LP probleminde verilen kısıtların oluşturduğu uygun çözümler bölgesinde amacın en iyi değerini aldığı nokta “optimal nokta” dır. Bir amaç fonksiyonu yerine k tane amaç fonksiyonu içeren ÇALP problemi için “optimal nokta” ise verilen kısıtlar altında tüm amaç fonksiyonlarının aynı anda en iyi değerini aldığı noktadır. Bu nokta ideal nokta olarak isimlendirilir.

Tanım 4.3: (İdeal Nokta)

$z_i^* = \max \{z_i(x) | Ax \leq b, x \geq 0\}$, $i = 1, \dots, K$ her bir amacın optimal değeri olmak üzere

$z_i^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_K^*)$ noktasına ideal nokta denir.

ÇALP problemlerinde, her bir amacın tatmin seviyesini maksimum yapmak, başka bir ifadeyle aynı anda tüm amaç fonksiyonlarını en iyi yapan ideal noktayı bulmak oldukça zordur. Çünkü genellikle göz önüne alınan amaçlar, birbiri ile çelişkili ve negatif yönde etkileşimlidir. Örneğin bir fabrikanın kalite kontrol kısmının temel problemi en genel haliyle,

kaliteyi arttırmak, kalite kontrol masraflarını azaltmak gibi amaçlar içerir. Aslında bu iki amaç birbirini ters yönde etkilemektedir. Bu halde ideal noktaya ulaşmak neredeyse imkansız olmakta, böylece her bir amaç için optimum olan çözümlerin belirli bir şekilde KV'nin tercihlerini de dikkate alarak uzlaştırılması en çıkar yol olarak gözükmektedir. Sonuçta ulaşılan çözüme de tek amaçlı karar problemlerindeki optimum çözüm yerine, optimal uzlaşık çözüm demek daha doğru olacaktır (Evren ve Ülengin, 1992)*.

Tanım 4.3: (Etkin Çözüm)

"max" $\{z(x)|x \in X\}$, tanım 4.2 ile verilen bir vektör-maksimizasyon problemi olmak üzere,

$$\forall i = 1, 2, \dots, K \text{ için } z_i(x) \geq z_i(\bar{x}) \text{ ve en az bir } i = 1, 2, \dots, K \text{ için } z_i(x) > z_i(\bar{x})$$

eşitsizliklerini sağlayan hiçbir $x \in X$ bulunamıyorsa, $\bar{x}$ çözümüne bir etkin çözüm denir. Tüm etkin çözümlerin kümesine genelde " tam çözüm " denir. Burada $z_i(\bar{x})$ değerleri ise basılamaz çözüm olarak isimlendirilir.

Tanım 4.6: (Uzlaşık Çözüm)

Bir vektör-maksimizasyonu probleminin optimal uzlaşık çözümü $x \in X$, vektör değerli amaç fonksiyonunun içerdiği tüm kriterler göz önüne alınarak KV'nin tüm diğer çözümlere tercih ettiği çözümdür.

Genel kabulden ayrılmamak üzere, optimal uzlaşık çözümün, aynı zamanda etkin bir çözüm olduğu varsayılacaktır.

ÇALP probleminde bulanıklık iki şekilde oluşmaktadır. Birinci durum, problemin tüm verilerinin kesin olup bulanık tekniklerle çözüm bulmak, ikinci durum ise amaç fonksiyon katsayılarının, sağ taraf sabitlerinin veya kısıtların bulanık yapıda olmasıdır. H.-J. Zimmermann'ın ÇABLP problemi için önerdiği yaklaşım şu şekildedir (Sakawa, 1993)**:

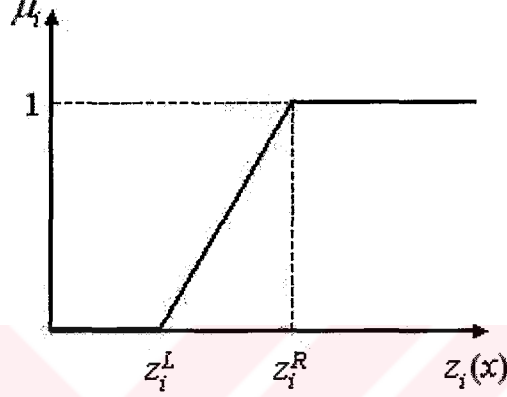
KV'nin her bir $\max z_i(x) = c_i x, (i = 1, 2, \dots, k)$ amacı için bir hedef ve tolerans miktarı verdiği varsayılın. Bu durumda her bir amacın üyelik fonksiyonu;

* Evren ve Ülengin, sayfa 3.

** Sakawa, sayfa 67.

$$\mu_i(z_i(x)) = \begin{cases} 0 & , z_i(x) < z_i^L \\ \frac{z_i(x) - z_i^L}{z_i^R - z_i^L} & , z_i^L \leq z_i(x) \leq z_i^R \\ 1 & , z_i(x) > z_i^R \end{cases} \quad i = 1, \dots, K \quad (4.18)$$

olarak tanımlanır. Burada z_i^L ve z_i^R sırasıyla $z_i(x)$ amacının üyelik fonksiyonunun 0 ve 1 olduğu değerleri göstermektedir. İlgili üyelik fonksiyonu ayrıca Şekil 4.7 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.7 Her bir amacın üyelik fonksiyonu.

Bu durumda ÇABLP problemi, Bellman ve Zadeh' in karar tanımından yola çıkılarak

$$\text{Amaç : } \max \min_{i=1, \dots, K} \{\mu_i(z_i(x))\}$$

$$\text{Kısıtlar: } Ax \leq b, x \geq 0 \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. $\min_i \{\mu_i(z_i(x))\} = \lambda$ alınarak problem,

$$\text{Amaç : } \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar: } \lambda \leq \mu_i(z_i(x)), \quad i = 1, \dots, k$$

$$Ax \leq b, x \geq 0 \quad (4.20)$$

olarak belirlenir ve problem tek amaçlı kesin LP problemine dönüştürülmüş olur.

Zimmermann, $\mu_i(z_i(x))$ üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi için bir yöntem daha önermiştir:

Her bir amaç verilen kısıtlar altında bireysel olarak optimum bir noktaya sahip olsun ve bu

optimal noktalar sırasıyla $x^1, x^2, \dots, x^K$ olarak belirlensin. Bu durumda k tane $z_i(x)$ amacı için $K \times K$ boyutunda bir ödemeler matrisi oluşturulur. Bu matris Tablo 4.2 ile verilmiştir.

Ödemeler matrisinden görüleceği gibi matrisin köşegenindeki elemanlar amaçların aldığı optimal değerleri, her bir sütunun en küçük değeri ise amaçların $x^1, x^2, \dots, x^K$ çözümleri içerisinde aldığı en kötü değerleri vermektedir.

Tablo 4.2 Ödemeler matrisi.

	$z_1(x)$	$z_2(x)$	...	$z_K(x)$	x
$\max z_1(x)$	z_1^*	$z_2(x^1)$	...	$z_K(x^1)$	x^1
$\max z_2(x)$	$z_1(x^2)$	z_2^*	...	$z_K(x^2)$	x^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\max z_K(x)$	$z_1(x^K)$	$z_2(x^K)$	...	z_K^*	x^K
	z_1'	z_2'	...	z_K'	

Bu durumda maksimum yapılmak istenen dolayısıyla en büyük değerinde 1 üyelik değerini ve en kötü değerinde 0 üyelik değerini alacak olan amaç fonksiyonları için z_i^L ve z_i^R değerleri,

$$z_i^L = \min z_i(x^j)$$

$$z_i^R = z_i^*$$

olarak belirlenerek üyelik fonksiyonları elde edilecektir (Lai, Y. ve Hwang, C., 1996)*.

Kısıtların da bulanık olarak verilmesi durumunda BLP'ye benzer şekilde kısıtların üyelik fonksiyonları yazılır ve bunlar max-min yaklaşımıyla kesin kısıtlara dönüştürülerek (4.20)

* Young-Jou Lai ve Ching-Lai Hwang, (1996), Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications, 2nd Corrected Printing, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, sayfa 41.

problemine dahil edilir.

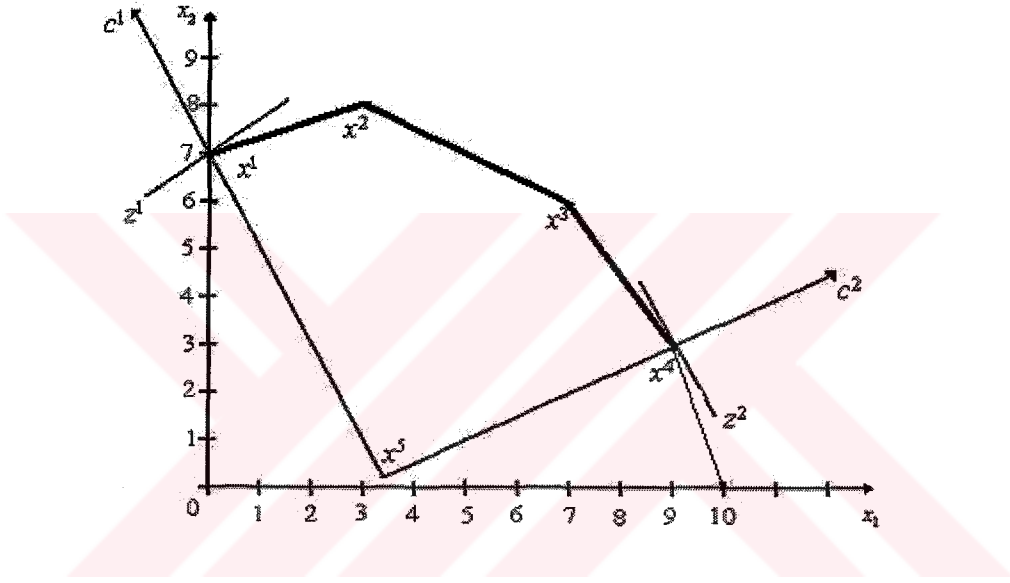
Örnek 4.4: (Zimmermann,1993)*

$$\text{Amaçlar : } \max z_1(x) = -x_1 + 2x_2, \quad \max z_2(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Kısıtlar : } -x_1 + 3x_2 \leq 21, \quad x_1 + 3x_2 \leq 27, \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 45$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

ÇALP problemi verilmiş olsun. Problemin çözüm uzayı Şekil 4.8 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.8 Çözüm uzayı (Örnek 4.4).

Problemin “tam çözümü”, başka bir deyişle etkin çözümler kümesi $x^1 - x^2 - x^3 - x^4$ kenarlarıdır. $z_1(x)$ amacı $x^1 = (0,7)$ noktasında, $z_2(x)$ amacı ise $x^4 = (9,3)$ noktasında optimal değerini almaktadır. $x^5 = (3.4;0.2)$ çözümü $z_1(x^5) = -3$ ve $z_2(x^5) = 7$ olarak amaçların kabul edilebilir en düşük değerlerini vermektedir. Bu durumda amaçların optimal noktaları için oluşturulan ödemeler matrisi Tablo 4.3 ile gösterilmiştir.

* Zimmermann, sayfa 267.

Tablo 4.3 Ödemeler matrisi (Örnek 4.4).

	$z_1(x)$	$z_2(x)$	x
$\max z_1(x)$	$z_1^* = 14$	$z_2(x^1) = 7$	$x^1 = (0, 7)$
$\max z_2(x)$	$z_1(x^4) = -3$	$z_2^* = 21$	$x^4 = (9, 3)$
	$z_1' = -3$	$z_2' = 7$	

Bu değerlere göre $z_1^L = -3$, $z_1^R = 14$, $z_2^L = 7$ ve $z_2^R = 21$ dir. Amaçların üyelik fonksiyonları ise

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0 & , z_1(x) < -3 \\ \frac{z_1(x) + 3}{17} & , -3 \leq z_1(x) \leq 14 \\ 1 & , z_1(x) > 14 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0 & , z_2(x) < 7 \\ \frac{z_2(x) - 7}{14} & , 7 \leq z_2(x) \leq 21 \\ 1 & , z_2(x) > 21 \end{cases}$$

olarak belirlenir. Buradan problemin (4.20)' a eşdeğer modeli

$$\text{Amaç : } \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar: } \frac{z_1(x) + 3}{17} \geq \lambda, \quad \frac{z_2(x) - 7}{14} \geq \lambda,$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 21, \quad x_1 + 3x_2 \leq 27,$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 45, \quad 3x_1 + x_2 \leq 30, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

olarak belirlenir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında modelin son hali,

Amaç : $\max \lambda$

Kısıtlar: $x_1 - 2x_2 + 17\lambda \leq 3, \quad 2x_1 + x_2 - 14\lambda \geq 7,$

$-x_1 + 3x_2 \leq 21, \quad x_1 + 3x_2 \leq 27,$

$4x_1 + 3x_2 \leq 45, \quad 3x_1 + x_2 \leq 30, \quad x_1, x_2 \geq 0$

olarak elde edilir ve problemin çözümü

$x_1 = 5.0323, \quad x_2 = 7.3226$ ve $\lambda = 0.7419$

olarak bulunur. $x^0 = (5.03; 7.32)$ uzlaşık çözümüne karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri

$z_1(x^0) = 9.61$ ve $z_2(x^0) = 17.38$ 'dir.



5. BULANIK TAŞIMA PROBLEMİ

5.1 Tek Amaçlı Bulanık Lineer Taşıma Problemi

Taşıma modeli, sadece TP'lerinde değil ayrıca üretim planlaması gibi bazı özel tip problemlerde de geniş bir uygulama alanına sahiptir. TP'nin parametreleri birim taşıma fiyatları ve arz-talep miktarlarıdır. Bu parametreler daima sabit değillerdir ve bunlar uygulamada, her zaman tam olarak bilinemez. Bu belirsizliğin nedeni verilerdeki bilgi eksikliği, değişen ekonomik koşullar olabileceği gibi, belirli bir esneklikte verilen yatırım ve kapasite miktarları da olabilir (Chanas ve Kuchta, 1998). Bu gibi sebeplerle kesin olarak belirlenemeyen parametrelerin varlığı ile TP bulanık bir hale gelmektedir.

(2.1)-(2.5) ile verilen tek amaçlı lineer taşıma probleminde bulanıklık, arz-talep miktarlarının veya fiyatların bulanık yapıda olması ile meydana gelir. Böylece Tek Amaçlı bir Bulanık Lineer Taşıma Problemi (TABLTP) 'nin matematiksel modeli

$$\begin{aligned}
 \text{Amaç} \quad & : \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij} \\
 \text{Kısıtlar} \quad & : \sum_{j=1}^n x_{ij} = \tilde{a}_i \quad (i=1,2,\dots,m), \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij} = \tilde{b}_j \quad (j=1,2,\dots,n), \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n),
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_j$ ve $\tilde{c}_{ij}$ birer bulanık sayıdır.

Fiyatların bulanık yapıda olması $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij}$ yapısındaki amacı non-lineer yapıya götürür. Bu durum, tezin amacı dışında olup burada verilmeyecektir. Sadece arz-talep miktarlarının bulanık yapıda olması durumu incelenecektir.

TABLTP çözümü için 1984'de Chanas, Kolodziejczyk ve Machaj tarafından geliştirilen

parametrik yaklaşım şu şekildedir (Zimmermann, 1993)*.

Bu yaklaşımda

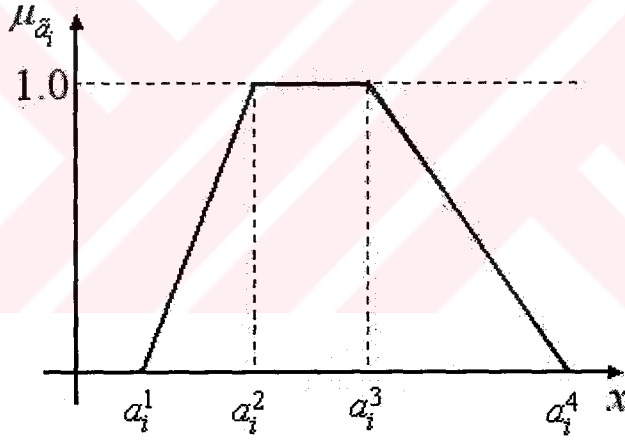
$$\text{Amaç} : \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Kısıtlar} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = \tilde{a}_i \quad (i=1,2,\dots,m),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \tilde{b}_j \quad (j=1,2,\dots,n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n) \quad (5.2)$$

yapısındaki TABLTP göz önüne alınmıştır. Burada $\tilde{a}_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4)$ ve $\tilde{b}_j = (b_j^1, b_j^2, b_j^3, b_j^4)$ pozitif yamuksal bulanık sayılardır.



Şekil 5.1 Bulanık arz miktarı.

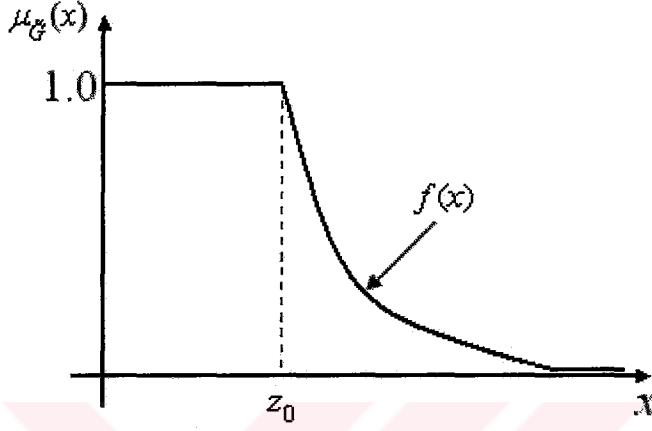
$\mu_{\tilde{a}_i}(\sum_j x_{ij})$ değeri, çözümün (5.2) modelindeki i . kısıtı sağlama derecesi olarak yorumlanabilir.

* Zimmermann, sayfa 286.

(5.2) modelinin amaç fonksiyonu için verilen bulanık hedef z_0 olmak üzere, $\tilde{G}$ hedefinin

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 1 & , x < z_0 \\ f(x) & , x \geq z_0 \end{cases}$$

yapısında olan üyelik fonksiyonu Şekil 5.2 ile gösterilmiştir.



Şekil 5.2 Bulanık hedef $\tilde{G}$ 'nin üyelik fonksiyonu.

Burada $f(x)$; $x = z_0$ noktasında 1 değerini alarak 0'a doğru azalan sürekli bir fonksiyondur. Özel olarak $f(x)$, lineer olarak seçilebilir. $\mu_{\tilde{G}}(x)$; elde edilen toplam taşıma maliyeti için KV'nin tatmin seviyesini verir. Kısıtların ve hedefin üyelik fonksiyonları ile model (5.2)

$$\max \lambda$$

$$\mu_{\tilde{G}}(c(x)) \geq \lambda$$

$$\mu_{\tilde{a}_i} \left(\sum_j x_{ij} \right) \geq \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_{\tilde{b}_j} \left(\sum_i x_{ij} \right) \geq \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda \geq 0, \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.3)$$

olarak parametrik programlama ile çözülecek model (5.3)'e dönüştürülebilir. Burada kısıtların

her bir $\lambda \in [0,1]$ seviyesi için en düşük maliyeti veren dağıtım planı bulunmalıdır. Ve bu plan ilgili λ seviyesi için $\tilde{G}$ hedefini de maksimum derecede sağlamalıdır. Bu aşamada $\mu_{\tilde{C}}(x)$ kısıtların üyelik fonksiyonu olmak üzere karar (4.1)'e benzer olarak

$$\max \{ \mu_{\tilde{G}}(x) \wedge \mu_{\tilde{C}}(x) \}$$

olarak belirlenir.

(5.3) modelinin parametresi $r \in [0,1]$ olmak üzere $\tilde{a}_i$ ve $\tilde{b}_j$ bulanık sayılarının $(1-r)$ -kesenleri

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i^{1-r} &= \left\{ x \mid \mu_{\tilde{a}_i}(x) \geq 1-r \right\} = [a_i^2 - r(a_i^2 - a_i^1), a_i^3 - r(a_i^3 - a_i^4)] \\ \tilde{b}_j^{1-r} &= \left\{ x \mid \mu_{\tilde{b}_j}(x) \geq 1-r \right\} = [b_j^2 - r(b_j^2 - b_j^1), b_j^3 - r(b_j^3 - b_j^4)] \end{aligned} \quad (5.4)$$

aralıkları şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda (5.3) problemi

$$\text{Amaç} \quad : \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Kısıtlar} \quad : \sum_{j=1}^n x_{ij} \in [a_i^2 - r(a_i^2 - a_i^1), a_i^3 - r(a_i^3 - a_i^4)], \quad (i=1,2,\dots,m),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \in [b_j^2 - r(b_j^2 - b_j^1), b_j^3 - r(b_j^3 - b_j^4)], \quad (j=1,2,\dots,n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$$

$$r \in [1-\bar{r}, 1], \quad \bar{r} = \sup_x \mu_{\tilde{a} \cap \tilde{b}}(x) \quad (5.5)$$

yapısına dönüşür. Burada $\bar{r}$, verilen bir r değeri için kısıtların üyelik fonksiyonunun alabileceği en büyük değerdir. (5.5) problemi parametrik LP olarak çözüldüğünde $r \in [1-\bar{r}, 1]$ için kısıtların üyelik fonksiyon değerleri elde edilir. Ve böylece elde edilen $\mu_{\tilde{C}}(x)$, kararın üyeliğini oluşturmak üzere, hedefin üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{G}}(x)$ ile bağlanabilir.

Örnek 5.1:

Arz miktarları : $\tilde{a}_1 = (5, 10, 10, 15)$, $\tilde{a}_2 = (11, 16, 16, 21)$.

Talep miktarları: $\tilde{b}_1 = (5, 10, 10, 15)$, $\tilde{b}_2 = (5, 9, 9, 13)$, $\tilde{b}_3 = (0, 1, 1, 2)$.

şeklinde yamuksal bulanık sayılar, fiyatlar

$$c_{11} = 10, \quad c_2 = 20, \quad c_{13} = 30, \quad c_{21} = 20, \quad c_{22} = 50, \quad c_{23} = 60,$$

ve hedefin üyelik fonksiyonu ise,

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 0 & , x > 800 \\ 1 & , x < 300 \\ \frac{800-x}{500} & , x \in [300, 800] \end{cases} \quad (5.6)$$

olarak lineer şekilde verilsin. Bulanık arz-talep miktarlarının $(1-r)$ -kesenleri (5.4)'e uygun olarak

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^{1-r} &= [10-5r, 10+5r], \quad \tilde{a}_2^{1-r} = [16-5r, 16+5r] \\ \tilde{b}_1^{1-r} &= [10-5r, 10+5r], \quad \tilde{b}_2^{1-r} = [9-4r, 9+4r], \quad \tilde{b}_3^{1-r} = [1-r, 1+r] \end{aligned} \quad (5.7)$$

aralıkları şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda örnek problem için (5.5) modeli

$$\text{Amaç} : \min z = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 50x_{22} + 60x_{23}$$

$$\text{Kısıtlar} : x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 10-5r, \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10+5r$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 16-5r, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 16+5r$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 10-5r, \quad x_{11} + x_{21} \leq 10+5r$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 9-4r, \quad x_{12} + x_{22} \leq 9+4r$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 1-r, \quad x_{13} + x_{23} \leq 1+r$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

şeklinde olacaktır.

TN talep noktalarını, AN arz noktalarını, TM talep miktarlarını, AM arz miktarlarını, YA yapay arz noktasını ve YT yapay talep noktasını göstermek üzere parametrik TP Tablo 5.1 ile verilmiştir. Tabloda yıldızsız satır ve sütunlar minimum seviyede miktarı bulunduran arz-talep noktalarını göstermektedir. Böylece ilgili satır-sütunların kapasiteleri, bulanık sayıların (5.7) ile verilen aralıklarının alt sınırlarına eşit olmaktadır.

Tablo 5.1 Parametrik TP

	TN	1	2	3	1*	2*	3*	YT	
AN									TM
1		10	20	30	10	20	30	M	10-5r
2		20	50	60	20	50	60	M	16-5r
1*		10	20	30	10	20	30	0	10r
2*		20	50	60	20	50	60	0	10r
YA		M	M	M	0	0	0	0	20r
AM		10-5r	9-4r	1-r	10r	8r	2r	6+20r	

Burada yapay arz-talep noktalarına atama yapılmasını önlemek amacıyla ilgili hücelere çok büyük bir sayı olan M taşıma maliyeti atanmıştır. Yıldızlı satır-sütunlar minimum miktarlara ek olarak gönderilebilecek maksimum artış miktarı bulunduran arz-talep noktalarını göstermektedir. Böylece ilgili satır-sütunların kapasiteleri, bulanık sayıların (5.7) ile verilen aralıklarının uzunluğuna eşit olmaktadır. Yıldızlı satır-sütunlardan yapay arz-talep noktalarına yapılan atamalar zorunlu olmadığı için ilgili hücrelerin fiyatları 0 olarak belirlenmiştir.

Problemde toplam arz miktarı iki bulanık arz miktarının toplamı olarak

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1(+)\tilde{a}_2 &= (5,10,10,15) + (11,16,16,21) \\ &= (16,26,26,36)\end{aligned}$$

ve toplam talep miktarı üç bulanık talep miktarının toplamı olarak

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1(+)\tilde{b}_2(+)\tilde{b}_3 &= (5,10,10,15) + (5,9,9,13) + (0,1,1,2) \\ &= (10,20,20,30)\end{aligned}$$

yamuksal bulanık sayılarına eşittir. Bu durumda tüm kısıtların sağladığı maksimum üyelik değeri $\bar{r} = \sup_x \mu_{\tilde{a} \cap \tilde{b}}(x) = 0.7$ dir. Böylece parametrik analiz için $r \in [0.3, 1]$ olarak belirlenmiş olur.

Tablo 5.2 Parametrik TP'nin çözüm tablosu.

	$0.3 \leq r \leq 1/3$	$1/3 \leq r \leq 0.6$	$0.6 \leq r \leq 1$
x_{12}	$3+14r$	$9-4r$	$9-4r$
x_{13}	$7-19r$	$1-r$	$1-r$
x_{21}	$10+5r$	$10+5r$	$16-5r$
x_{22}	$6-10r$	$6-10r$	

Problemin parametrik çözüm tablosu Tablo 5.2'ye göre amaç fonksiyonun $0.3 \leq r \leq 1/3$ aralığında r parametresine bağlı olarak aldığı değer

$$\begin{aligned}
 z &= 20(3+14r) + 30(7-19r) + 20(10+5r) + 50(6-10r) \\
 &= -690r + 770
 \end{aligned}$$

'dir. Benzer şekilde Tablo 5.2 de verilen diğer aralıklar için bulunan z değerleri

$$1/3 \leq r \leq 0.6 \text{ için } z = -510r + 710$$

$$0.6 \leq r \leq 1 \text{ için } z = -210r + 530$$

şeklindedir. Böylece (5.6) ile verilen hedefin üyelik fonksiyonunda bulunan z değerleri yerine konulursa hedefin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{G}}(r) = \begin{cases} 0.06 + 1.38r & , r \in [0.3; 1/3] \\ 0.18 + 1.02r & , r \in [1/3; 0.6] \\ 0.54 + 0.42r & , r \in [0.6; 1] \end{cases} \quad (5.8)$$

olarak elde edilir. Buna göre $r = 0.4059$ değerine karşılık gelen çözüm maksimize edici çözüm ve buna karşılık gelen hedefin üyelik fonksiyon değeri $\mu_{\tilde{G}}(0.4059) = 0.5941$ olarak bulunur.

5.2 Çok Amaçlı Bulanık Lineer Taşıma Problemi

Bir TP'nde c_{ij} amaç fonksiyon katsayıları taşıma maliyetini belirteceği gibi, dağıtım zamanı ve dağıtım güvenliği gibi nitelikleri de belirtebilir. Bu durumda gerçek yaşamda karşılaşılan tüm karar verme problemlerinde olduğu gibi TP'lerinde de çoğu zaman birden fazla çelişen amaçlar söz konusu olur. Ve KV için tüm amaç fonksiyonlarını tek bir fayda fonksiyonu olarak birleştirmek oldukça güç bir hale gelir (Das vd., 1999).

ÇALTP'nin matematiksel modeli,

$$\text{Amaçlar} : \min z^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad k=1,2,\dots,K$$

$$\text{Kısıtlar} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\dots,m),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1,2,\dots,n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n) \quad (5.9)$$

şeklindedir. Burada $z^k(x) = \{z^1(x), z^2(x), \dots, z^K(x)\}$, K tane amaç fonksiyonunu içeren bir vektördür. Burada $a_i > 0 \quad \forall i$, $b_j > 0 \quad \forall j$, $c_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j)$ ve $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ kabulleri geçerli olacaktır.

ÇALP problemine benzer olarak, ÇALTP' inde bulanıklık iki şekilde oluşmaktadır. Birinci durum, problemin tüm verilerinin kesin olup bulanık tekniklerle çözüm bulmak, ikinci durum ise amaç fonksiyon katsayılarının, arz-talep miktarlarının bulanık yapıda olmasıdır.

5.2.1 Çok Amaçlı Lineer Taşıma Problemine Bulanık Tekniklerle Çözüm Bulma

Bu bölümde (5.9) ile verilen ÇALTP' nin optimal uzlaşık çözümünü bulmak için Abd El-Wahed (2001) ve ayrıca Li ve Lai (2000) tarafından geliştirilen bulanık programlama yaklaşımları anlatılacak ve açıklayıcı örnekler verilecektir.

5.2.1.1 Birinci Yaklaşım

İlk yaklaşımda temel olarak (4.1) ile verilen Bellman ve Zadeh 'in karar tanımı kullanılmıştır. (4.1); kararın üyelikini, hedef ve kısıtların üyeliklerinin minimum tatminlerinin maksimumu olarak belirlemekte ve böylece çözüme klasik LP çözülerek ulaşılmaktadır.

Öncelikle her bir $z^k(x)$ amacının lineer üyelik fonksiyonunu tanımlamak için kullanılacak olan, alt ve üst sınırlar (L_k ve U_k) belirlenmesi gerekir. Bunun için verilen kısıtlar altında her bir amaç fonksiyonunun bireysel minimum değeri, klasik tek amaçlı TP çözüm yöntemi kullanılarak hesaplanır. Bu yolla hesaplanan K tane farklı amaç fonksiyonunun optimal değerleri $X^1, X^2, \dots, X^K$ olmak üzere her bir amaç fonksiyonunun bu K tane farklı noktada

aldığı değerler hesaplanır. Burada $X^i (i=1,2,\dots,K)$ çözümlerinden en az ikisi birbirinden farklıdır. Bu sebeple k . amaç fonksiyonu için elde edilmiş en az iki farklı değer vardır. Böylece her bir $z^k(x)$ amaç fonksiyonu için alt sınır değeri L_k (minimum değer) ve üst sınır değeri U_k (maksimum değer) bulunabilir.

L_k ve U_k değerlerinin bulunması Bölüm 4.2.1'de verilen ödemeler matrisiyle tamamen paralellik göstermektedir.

Böylece bulunan L_k ve U_k değerleri ile amaçların üyelik fonksiyonları,

$$\mu_k(z^k(x)) = \begin{cases} 1 & ; z^k(x) \leq L_k, \\ \frac{U_k - z^k(x)}{U_k - L_k} & ; L_k < z^k(x) < U_k \\ 0 & ; z^k(x) \geq U_k \end{cases} \quad (5.10)$$

olarak belirlenir. Burada $L_k \neq U_k$, $k=1,2,\dots,K$ dır. Eğer herhangi bir k değeri için $L_k = U_k$ ise $\mu_k(z^k(x)) = 1$ olarak alınacaktır.

(5.10) ile verilen üyelik fonksiyonları, Bellman ve Zadeh'in bulanık karar tanımı göz önüne alınırsa ÇALTP' nin bir bulanık optimizasyon modeli şu şekilde yazılabilir:

$$\text{Amaç} : \max \min_{k=1,2,\dots,K} \mu_k(z^k(x))$$

$$\text{Kısıtlar} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0, \quad i=1,2,\dots,m; \\ &j=1,2,\dots,n, \end{aligned} \quad (5.11)$$

Bir yardımcı β değişkeni kullanılarak, (5.11)

$$\text{Amaç} : \max \beta$$

$$\text{Kısıtlar} : \mu_k(z^k(x)) \geq \beta, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$0 \leq \beta \leq 1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (5.12)$$

eşdeğer olan LP problemine dönüştürülebilir. Buradaki $\mu_k(z^k(x)) \geq \beta$ kısıtları, üyelik fonksiyonları yerine yazılarak,

$$\mu_k(z^k(x)) \geq \beta$$

$$\Rightarrow \beta(U_k - L_k) \leq (U_k - z^k(x))$$

$$\Rightarrow \beta(U_k - L_k) + z^k(x) \leq U_k, \quad (U_k > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(U_k - L_k)}{U_k} + \left(\frac{1}{U_k} \right) z^k(x) \leq 1$$

olarak da modele dahil olabilir.

Buna göre ÇALTP' nin çözüm prosedürünün adımları özetle şu şekildedir:

Adım 1: İlk amaç fonksiyonunu (5.9) modelinin kısıtları altında tek amaçlı klasik TP olarak çöz. Bu işlemi K tane farklı amaç için tekrarla. Eğer elde edilen çözümler aynıysa yani $X^1 = X^2 = \dots = X^K = \{x_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ ise adım 6'ya, aksi takdirde adım 2'ye git.

Elde edilen çözümlerin aynı olması bu çözümün optimal uzlaşık çözüm(ideal çözüm) olması demektir.

Adım 2: K tane optimal çözüm noktasında her bir amaç fonksiyonunun aldığı değerleri hesapla. Ve her bir amaç fonksiyonu için elde edilen alt ve üst sınır (L_k ve U_k) değerlerini belirle.

Adım 3: Her bir amaç fonksiyonu için (5.10) ile verilen üyelik fonksiyonunu tanımla.

Adım 4: (5.10) bulanık programlama problemini ve ona eşdeğer olan (5.12) problemini oluştur.

Adım 5: Herhangi bir programlama tekniği kullanarak (5.10)'u çöz. Bulunan optimal uzlaşık çözümde K amaç fonksiyon değerini hesapla.

Adım 6: Dur.

Bu çözüm prosedüründe adım 3'te üyelik fonksiyonunu oluşturmak amacıyla adım 2'de her bir amaç fonksiyonunun alt ve üst sınırları belirlenir. Bundan sonra da herhangi bir programlama tekniği kullanılarak (5.12) problemi çözülerek uzlaşık çözüm elde edilir. Eğer KV tarafından tamsayı bir çözüm istenirse, (5.12) problemi tamsayı programlama teknikleri kullanılarak da çözülebilir.

Örnek 5.2:

Aşağıda bilgileri verilen ÇALTP göz önüne alınsın.

Arz miktarları : $a_1 = 8, a_2 = 19, a_3 = 17$

Talep miktarları: $b_1 = 11, b_2 = 3, b_3 = 14, b_4 = 16$

$$\text{Cezalar: } c^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 9 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}, c^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Her bir amacın optimal çözümleri ve diğer amaç fonksiyonlarının bu noktada aldığı değerler,

$$X^1 = (5, 3, 0, 0, 6, 0, 0, 13, 0, 0, 14, 3)$$

$$X^2 = (0, 0, 8, 0, 11, 2, 6, 00, 1, 0, 16)$$

$$z^1(X^1) = 143, z^1(X^2) = 208$$

$$z^2(X^1) = 265, z^2(X^2) = 167 \text{ 'dir.}$$

Bu bilgilere göre $143 \leq z^1 \leq 208$ ve $167 \leq z^2 \leq 265$ olarak yazılabilir. Böylece amaçlara ait üyelik fonksiyonları,

$$\mu_1(z^1(x)) = \begin{cases} 1 & ; z^1(x) \leq 143 \\ \frac{208 - z^1(x)}{208 - 143} & ; 143 < z^1(x) < 208 \\ 0 & ; z^1(x) \geq 208 \end{cases}$$

$$\mu_2(z^2(x)) = \begin{cases} 1 & ; z^2(x) \leq 167 \\ \frac{265 - z^2(x)}{265 - 167} & ; 167 < z^2(x) < 265 \\ 0 & ; z^2(x) \geq 265 \end{cases}$$

olarak bulunur. Problem (5.10)'a göre düzenlenirse,

Amaç : $\max \beta$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar: } & 0.0048x_{11} + 0.096x_{12} + 0.0337x_{13} + 0.0037x_{14} + 0.0048x_{21} + 0.0433x_{22} + \\ & + 0.01442x_{23} + 0.0192x_{24} + 0.0385x_{31} + 0.0433x_{32} + 0.0192x_{33} + \\ & 0.02881x_{34} + 0.3125\beta \leq 1 \\ & 0.0151x_{11} + 0.0151x_{12} + 0.01132x_{13} + 0.01509x_{14} + 0.01887x_{21} + 0.03019x_{22} + \\ & 0.03396x_{23} + 0.03774x_{24} + 0.02264x_{31} + 0.007547x_{32} + 0.01887x_{33} + \\ & 0.00377x_{34} + 0.3698\beta \leq 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{1j} = 8, \quad \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 19, \quad \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 17,$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} = 11, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 3, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 14, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 16$$

$$0 \leq \beta \leq 1, \quad x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \quad (5.13)$$

LP problemi elde edilir. WINQSB paketi kullanılarak elde edilen optimal uzlaşık çözüm,

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2.6123 & 2.3877 \\ 11 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3.3877 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca tatmin derecesi $\beta = 0.7967$ ve X^* çözümüne karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri,

$z^1(X^*) = 171.2246$ ve $z^2(X^*) = 186.9385$ ' dir. KV' den gelen isteğe bağlı olarak (5.13) LP problemi, tamsayılı programlama teknikleriyle de çözülebilir. WINQSB paketi kullanılarak elde edilen tamsayılı optimal uzlaşık çözüm,

$$X^{**} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 11 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca $\beta = 0.7654$ ve X^{**} çözümüne karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri,

$z^1(X^{**}) = 170$ ve $z^2(X^{**}) = 190$ dır.

Örnek 5.3:

Aşağıda bilgileri verilen ÇALTP göz önüne alınsın.

Arz miktarları : $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 9$.

Talep miktarları : $b_1 = 4$, $b_2 = 4$, $b_3 = 6$, $b_4 = 2$, $b_5 = 4$.

$$\text{Cezalar: } c^1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 7 & 7 & 5 \\ 6 & 5 & 9 & 11 & 3 \\ 6 & 8 & 11 & 2 & 2 \end{bmatrix}, c^2 = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 8 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 9 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 8 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}, c^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Her bir amacın optimal çözümleri ve diğer amaç fonksiyonlarının bu noktada aldığı değerler şu şekildedir.

z^1 amacı için: $X^1 = (0,0,5,0,0,0,4,0,0,0,1,0,1,0,0,3,0,0,2,4)$.

z^2 amacı için: $X^2 = (3,0,0,2,0,0,0,0,0,4,0,2,0,0,0,1,2,6,0,0)$.

z^3 amacı için: $X^3 = (3,2,0,0,0,0,4,0,0,0,2,0,0,0,1,0,2,2,4)$.

$$z^1(X^1) = 102, \quad z^1(X^2) = 157, \quad z^1(X^3) = 129.$$

$$z^2(X^1) = 148, \quad z^2(X^2) = 72, \quad z^2(X^3) = 126.$$

$$z^3(X^1) = 100, \quad z^3(X^2) = 86, \quad z^3(X^3) = 64.$$

Bu değerlere göre her bir amaç fonksiyonunun aralıkları:

$$102 \leq z^1 \leq 157, \quad 72 \leq z^2 \leq 148, \quad 64 \leq z^3 \leq 100.$$

Bu değerlerle amaçların üyelik fonksiyonları yazılıp, problem (5.12)'e göre düzenlenip WINQSB paketi kullanılarak çözüldüğünde; problemin optimal uzlaşık çözümü,

$$X^* = \begin{bmatrix} 2.3636 & 0 & 0.6364 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1.8327 & 0 & 0.1673 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6364 & 0 & 3.5309 & 0 & 3.8327 \end{bmatrix}$$

amaç fonksiyon değerleri,

$$z^1(X^*) = 132.4891, \quad z^2(X^*) = 106.7671, \quad z^3(X^*) = 82.0475$$

ve tatmin derecesi:

$$\beta = 0.582$$

olarak bulunur. Ayrıca WINQSB paketi kullanılarak elde edilen tamsayıli optimal uzlaşık çözüm,

$$X^{**} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

amaç fonksiyon değerleri,

$$z^1(X^*) = 122, \quad z^2(X^*) = 106, \quad z^3(X^*) = 80$$

ve tatmin derecesi:

$$\beta = 0.5526$$

olarak bulunur (Wahed, 2001).

5.2.1.2 İkinci Yaklaşım

ÇALTP'lerinin çözümünde hesaplama kolaylığı açısından, birleştirici operatör olarak çoğu zaman Zimmermann'ın “min” operatörü kullanılmıştır. Hesaplama kolaylığı olmasına rağmen “min” operatör amaç fonksiyonlarının en kötü üyelik değerlerini verdiği için, çok iyi olabilecek diğer üyelik değerlerini göz ardı eder. Bu bölümde (5.9) ile verilen ÇALTP'nin bir uzlaşık çözümünü bulmak için verilecek bulanık programlama yaklaşımıyla, her bir amaç için marjinal değerlendirmeler elde edilecek ve sonra bu marjinal değerlendirmeler, genel değerlendirme için bir araya getirilecektir. Yaklaşımı açıklamak üzere bir örnek de verilecektir.

Amaçların marjinal değerlendirmesini elde etmek için, her bir z^k amacı için alt ve üst sınır değerleri (L_k ve U_k) hesaplanır. Burada L_k ve U_k sırasıyla k . amaç fonksiyonunun ulaşılmak istenen başarı seviyesi ve kabul edilebilir en yüksek seviyesi olarak yorumlanabilir. Bunlar yardımıyla her bir z^k amacı için bir marjinal değerlendirme elde edilir. (5.9) probleminin uygun çözümler bölgesi X olmak üzere, marjinal değerlendirme ile $x \in X$ kararı için gerçekleşen z^k amacının, onun istek seviyesi L_k değerine yakınlık derecesini gösteren $\phi_k : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu tanımlanır. Başka bir deyişle, $\phi_k(x) \in [0,1]$; z^k amacı için gerçekleşen $z^k(x)$ değeri ile onun istek seviyesi L_k arasındaki yakınlık derecesidir. Bulanık küme tanımına göre ϕ_k , X çözüm uzayında z^k amacı için optimumun bulanık değerlendirmesini tanıtan bulanık bir altkümedir. $\phi_k(x) \in [0,1]$ ise $x \in X$ 'in sadece z^k amacı için optimal çözüme yakınlığını gösteren üyelik derecesidir.

Burada L_k ve U_k değerleri bir önceki yaklaşıma benzer şekilde ödemeler matrisi ile bulunabilir. Buna alternatif olarak bu değerler

$$U_k = \max_{x \in X} z^k(x), \quad L_k = \min_{x \in X} z^k(x), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.14)$$

olarak hesaplanabilir.

Her bir z^k ($k = 1, 2, \dots, K$) amacı için L_k ve U_k değerleri belirlendikten sonra $\phi_k : X \rightarrow [0,1]$ marjinal değerlendirme fonksiyonu,

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 1 & , z^k(x) \leq L_k \\ \frac{z^k(x) - U_k}{L_k - U_k} & , L_k < z^k(x) < U_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \\ 0 & , z^k(x) \geq U_k \end{cases} \quad (5.15)$$

olarak belirlenir.

Verilen $x \in X$ kararı için $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_K(x)$ marjinal değerlendirmeleri hesaplandıktan sonra problem, x 'in tüm amaçlara göre genel değerlendirmesini belirleme işlemine dönüşür. Bu sebeple, her bir $x \in X$ kararının tüm amaçları sağlama derecesini başka bir deyişle x kararının genel değerlendirme değerini verecek olan $\mu: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu (skor fonksiyonu) tanımlanacaktır. Burada $\mu: X \rightarrow [0,1]$, X uygun çözümler karar uzayında tüm amaçlar için “optimum” un bulanık kavramını tanımlayan bir bulanık altkümedir. $\mu \in [0,1]$ ise bütün amaçlar dikkate alınarak $x \in X$ 'in “optimal” çözüme yakınlığının üyelik derecesidir. Böylece optimal uzlaşık çözüm X karar uzayında genel değerlendirme değeri maksimum olan nokta olarak belirlenir.

Marjinal değerlendirmelerin hesaplanmasından sonra isteğe bağlı olarak KV'nin amaçlara atayacağı önemler (5.16) ile verilen normalize edilmiş ağırlıklar yardımıyla probleme dahil edilebilir.

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_K), \quad w_k \geq 0, \quad (k = 1, 2, \dots, K), \quad \sum_{k=1}^K w_k = 1 \quad (5.16)$$

$x \in X$ kararı için verilen ağırlıklar $w = (w_1, w_2, \dots, w_K)$, marjinal değerlendirmeler $\phi_k(x) (j = 1, 2, \dots, K)$ olmak üzere, K tane bileşeni bir araya getirecek uygun bir birleştirici operatör $\Phi: [0,1]^K \rightarrow [0,1]$ ve $\forall x \in X$ için bu operatörün üyelik fonksiyonu,

$$\mu(x) = \Phi(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_K(x)) \quad (5.17)$$

olsun. Burada (5.17) denklemiyle tanımlanan $\mu: X \rightarrow [0,1]$ tüm amaçlar için genel bir değerlendirmedir. $\mu(x)$ ise $x \in X$ 'in (5.9) probleminin ideal çözümüne $(x^{(1)*}, x^{(2)*}, \dots, x^{(K)*})$ uygunluğunun üyelik derecesidir.

Birleştirici operatörlerin önemli bir ailesi olarak ağırlıklı kök-kuvvet ortalama operatörü

$$M_w^{(\alpha)}(a_1, a_2, \dots, a_K) = \left(\sum_{i=1}^K w_i a_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad (0 < \alpha < \infty), \quad (5.18)$$

kullanılabilir. Çünkü bu operatör çok kriterli ve çok amaçlı karar verme alanlarında sıkça kullanılan birleştirici operatörlerinin çoğunu içerir. Örneğin,

(1) Ağırlıklı aritmetik ortalama ($\alpha = 1$):

$$M_w^{(1)}(a_1, a_2, \dots, a_K) = \sum_{i=1}^K w_i a_i$$

(2) Ağırlıklı kuadratik ortalama ($\alpha = 2$):

$$M_w^{(2)}(a_1, a_2, \dots, a_K) = \left(\sum_{i=1}^K w_i a_i^2 \right)^{1/2}$$

Ve üç limit durumu:

(3) $\alpha \rightarrow 0$:

$$M_w^{(0)}(a_1, a_2, \dots, a_K) = \prod_{i=1}^K a_i^{w_i}$$

(4) $\alpha \rightarrow \infty$:

$$M_w^{(\infty)}(a_1, a_2, \dots, a_K) = \max_{1 \leq i \leq K} a_i \quad (w_1 = w_2 = \dots = w_K = 1/K)$$

(5) $\alpha \rightarrow -\infty$:

$$M_w^{(-\infty)}(a_1, a_2, \dots, a_K) = \min_{1 \leq i \leq K} a_i, \quad (w_1 = w_2 = \dots = w_K = 1/K)$$

Burada $M_w^{(1)}$, hedef programlama problemlerinde kullanılan ağırlıklı toplam modelini, $M_w^{(-\infty)}$ ise Zimmermann'ın bulanık programlama problemlerinde ve bulanık çok kriterli karar vermede sıkça kullanılan "min" operatörünü üretir.

Uygun bir Φ birleştirici operatörü seçerek tüm amaçlar için $\mu: X \rightarrow [0,1]$ genel değerlendirmesi elde edildiğinde (5.9) ile verilen ÇALTP,

$$\text{Amaç} : \max \mu(x) = \Phi_w(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_K(x))$$

$$\text{Kısıtlar} : x \in X \quad (5.19)$$

tek amaçlı bulanık uzlaşık programlama problemine dönüşür. Bu problem sıradan bir optimizasyon tekniği kullanılarak çözülebilir. $x^* \in X$ elemanı (5.19) probleminin optimal çözümü ise,

$$\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) \quad (5.20)$$

olarak yazılır. (5.20) denkleminde elde edilen x^* çözümü, basılamaz uzlaşık bir çözümdür.

Buna göre ÇALTP' nin çözüm prosedürünün adımları özetle şu şekildedir:

Adım 1: Her bir z^k ($k = 1, 2, \dots, K$) amacı için

$$\text{Amaç} : \min z^k$$

$$\text{Kısıtlar} : x \in X$$

problemini bağımsız olarak çöz (Her birinde diğer amaçları dikkate alma) ve (5.9) probleminin uygun çözümler bölgesi X 'e ait $x^{(k)*} = \{x_{ij}^{(k)*}\} \in X$ optimal çözümünü elde et.

Adım 2: K tane amacın, elde edilen optimal noktalardaki değerlerini hesapla ve L_k , U_k sınır değerlerini belirle.

Adım 3: (5.15) ile $\phi_k(\{x_{ij}\})$ marjinal değerlendirmelerini tanımla.

Adım 4: $w = (w_1, w_2, \dots, w_K)$ ağırlıklarını belirle ve (5.19) problemini elde etmek için uygun bir $\Phi_w^{(\alpha)}$ ağırlıklı kök-kuvvet ortalaması seç.

Adım 5: ÇALTP'nin optimal uzlaşık çözümünü elde etmek için (5.20) problemini sıradan bir optimizasyon tekniği kullanarak çöz.

Tezin amacına uygun olarak anlatılan yaklaşımda birleştirici operatörde $\alpha = 1$ durumu

incelenecektir. $\alpha = 1$ olması durumunda,

$$\begin{aligned}\mu(\{x_{ij}\}) &= \sum_{k=1}^K w_k \frac{z^k(\{x_{ij}\}) - U_k}{L_k - U_k} \\ &= \sum_{k=1}^K w_k \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij} - U_k}{L_k - U_k} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^K \frac{w_k c_{ij}^k}{L_k - U_k} \right) x_{ij} - \sum_{k=1}^K \frac{w_k U_k}{L_k - U_k}\end{aligned}$$

'dır. Böylece (5.19) problemi toplamsal bulanık programlama modeline eşdeğer olur. Bu problem sıradan tek amaçlı lineer taşıma problemidir ve herhangi bir LP paketi kullanılarak çözülebilir.

Örnek 5.4:

Aşağıda bilgileri verilen ÇALTTP'i göz önüne alınsın.

Arz miktarları : $a_1 = 8, a_2 = 19, a_3 = 17$

Talep miktarları: $b_1 = 11, b_2 = 3, b_3 = 14, b_4 = 16$

$$\text{Cezalar: } c^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 9 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}, c^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(5.11) ile bulunan sınır değerleri şu şekildedir.

$$X^{1+} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \end{bmatrix}, \min z^1 = 143 = L_1$$

$$X^{1-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \\ 11 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \max z^1 = 265 = U_1,$$

$$X^{2+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 11 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad \min z^2 = 167 = L_2,$$

$$X^{2-} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}, \quad \max z^2 = 310 = U_2$$

Bu bilgilere göre $143 \leq z^1 \leq 265$ ve $167 \leq z^2 \leq 310$ olarak yazılabilir. Böylece amaçların marjinal değerlendirme fonksiyonları,

$$\phi_1(x) = \frac{265 - z^1(x)}{265 - 143},$$

$$\phi_2(x) = \frac{310 - z^2(x)}{310 - 167}$$

olarak bulunur. $\alpha = 1$ alındığında

$$\mu = w_1 \frac{265 - z^1(x)}{122} + w_2 \frac{310 - z^2(x)}{143}$$

olarak elde edilir ve böylece (5.21)'e eşdeğer problem

Amaç : $\max \mu$

$$\text{Kısıtlar: } \sum_{j=1}^4 x_{1j} = 8, \quad \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 19, \quad \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 17, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 11,$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i2} = 3, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 14, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 16$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

olarak elde edilir. 0.1 aralıklı olarak seçilen ağırlıklara karşılık gelen optimal uzlaşık çözüm değerleri Tablo 5.1 ile verilmiştir (Li ve Lai, 2002).

Tablo 5.3 Örnek 5.3 için optimal uzlaşık çözüm değerleri.

(w_1, w_2)	z^1	z^2
(0.0,1.0)	208	167
(0.1,0.9)	208	167
(0.2,0.8)	186	171
(0.3,0.7)	176	175
(0.4,0.6)	176	175
(0.5,0.5)	176	175
(0.6,0.4)	156	200
(0.7,0.3)	156	200
(0.8,0.2)	156	200
(0.9,0.1)	143	256
(1.0,0.0)	143	256

5.2.2 Bulanık Parametrelere Sahip Çok Amaçlı Lineer Taşıma Problemi

Literatürde bulanık parametrelere sahip TP'lerinin çözümü üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Sakawa vd. (2001), S. Liu (2003), S. Liu ve C. Kao (2004), E.E. Ammar ve E.A. Youness (2004) 'dir. Çok amaçlı durumda, gerek parametrelerdeki bulanıklık gerek amaçlar arası uzlaşmayı sağlayan çözüm yaklaşımları, problemi oldukça karmaşık hale getirmektedir.

Bu bölümde (5.9) ile verilen ÇALTP'nde arz-talep miktarlarının bulanık olması ile

$$\text{Amaçlar} : \min z^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad k=1,2,\dots,K$$

$$\text{Kısıtlar} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = \tilde{a}_i \quad (i=1,2,\dots,m),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \tilde{b}_j \quad (j=1,2,\dots,n),$$

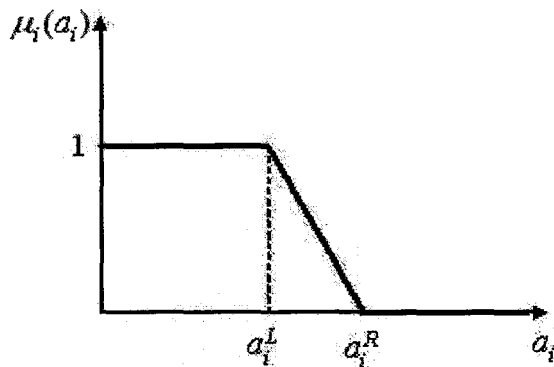
$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n) \quad (5.21)$$

şeklinde oluşan modelin çözümü için bir yaklaşım verilecektir. Burada bulanık arz-talep miktarları $\tilde{a}_i$ ve $\tilde{b}_j$ sırasıyla

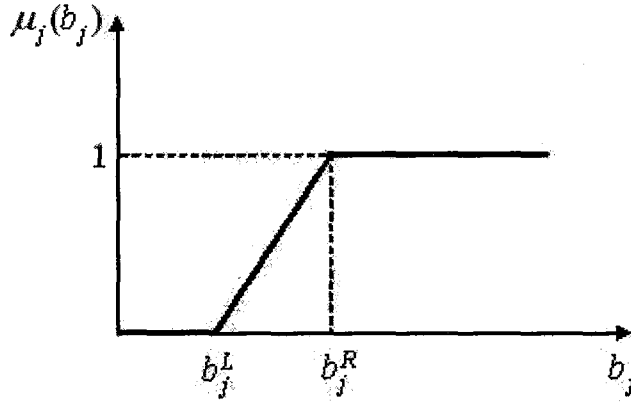
$$\mu_i(a_i) = \begin{cases} 1 & , a_i \leq a_i^L \\ \frac{a_i^R - a_i}{a_i^R - a_i^L} & , a_i^L \leq a_i \leq a_i^R \\ 0 & , a_i \geq a_i^R \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\mu_j(b_j) = \begin{cases} 0 & , b_j \leq b_j^L \\ \frac{b_j - b_j^L}{b_j^R - b_j^L} & , b_j^L \leq b_j \leq b_j^R \\ 1 & , b_j \geq b_j^R \end{cases} \quad (5.23)$$

üyelik fonksiyonlarıyla tanımlanan, $\tilde{a}_i = (-\infty, a_i^L, a_i^R)$ ve $\tilde{b}_j = (b_j^L, b_j^R, \infty)$ şeklinde verilen bulanık sayılardır. Bunların üyelik fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 ile gösterilmiştir (Ahlatcıoğlu vd, 2002).



Şekil 5.3 Bulanık arz miktarlarının üyelik fonksiyonu.



Şekil 5.4 Bulanık talep miktarlarının üyelik fonksiyonu.

Bu durumda arz-talep miktarlarını dengeyi de sağlayacak şekilde bulanıklıktan kurtarmak amacıyla,

$$\min \{\mu_1(a_1), \mu_2(a_2), \dots, \mu_m(a_m), \mu_1(b_1), \mu_2(b_2), \dots, \mu_n(b_n)\} = \alpha$$

alınır ve Zimmermann'ın max-min operatörü yardımıyla

$$\text{Amaç : } \max \alpha$$

$$\text{Kısıtlar : } \mu_i(a_i) \geq \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j(b_j) \geq \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 0, \quad a_i, b_j \geq 0; \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.24)$$

problemi oluşturulur. (5.24) probleminin çözümü ile maksimum $\bar{\alpha}$ tatmin düzeyindeki kesin arz-talep miktarları dengeyi de sağlayacak şekilde Zimmermann'ın max-min operatörüyle bulunmuş olur. Arz-talep miktarlarının üyelik fonksiyonlarının (5.22) ve (5.23) ile verilen tanımları göz önüne alınırsa (5.24)'in en son hali,

Amaç : $\max \alpha$

Kısıtlar : $a_i + (a_i^R - a_i^L)\alpha \leq a_i^R, i = 1, 2, \dots, m;$

$b_j - (b_j^R - b_j^L)\alpha \geq b_j^L, j = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 0;$$

$$a_i, b_j \geq 0; \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.25)$$

olacaktır. (5.25) probleminin çözümü ile bulunan $\bar{a}_i$ ve $\bar{b}_j$ bulanık arz-talep miktarlarının $\bar{\alpha}$ tatmin düzeyinde aldığı kesin değerler sırasıyla $\bar{a}_i$ ve $\bar{b}_j$ olmak üzere (5.21) problemi,

$$\text{Amaçlar} : \min z^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\text{Kısıtlar} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = \bar{a}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \bar{b}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.26)$$

olarak yazılır. Tüm parametreleri kesin sayılar olan (5.26) ÇALTP'nin çözümü için (5.14) yardımıyla elde edilen L_k ve U_k değerleri kullanılarak amaçların üyelik fonksiyonları

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 1 & , z^k(x) \leq L_k \\ \frac{U_k - z^k(x)}{L_k - U_k} & , L_k < z^k(x) < U_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \\ 0 & , z^k(x) \geq U_k \end{cases} \quad (5.27)$$

şeklinde belirlenir. $\min_k \{\mu_i\} = \lambda$ alındığında problemin son hali

Amaç : $\max \lambda$

Kısıtlar : $\mu_k(z^k(x)) \geq \lambda, k=1,2,\dots,K$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \bar{a}_i, \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \bar{b}_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j \quad (5.28)$$

olarak belirlenir. Bundan sonra herhangi bir LP tekniği kullanılarak (5.28) problemi çözülerek uzlaşık çözüm elde edilir. KV'den gelen isteğe bağlı olarak tamsayı bir çözüm elde etmek de mümkündür.

Örnek 5.5:

Aşağıda bilgileri verilen ÇALTP göz önüne alınsın.

$$\text{Cezalar: } c^1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 16 & 6 \end{bmatrix}, \quad c^2 = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 12 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 14 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kısıtlar : } \sum_{j=1}^4 x_{1j} = \tilde{a}_1, \sum_{j=1}^4 x_{2j} = \tilde{a}_2, \sum_{j=1}^4 x_{3j} = \tilde{a}_3 \quad (\text{Arz kısıtları})$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{i1} = \tilde{b}_1, \sum_{i=1}^4 x_{i2} = \tilde{b}_2, \sum_{i=1}^4 x_{i3} = \tilde{b}_3, \sum_{i=1}^4 x_{i4} = \tilde{b}_4 \quad (\text{Talep kısıtları})$$

$$\tilde{a}_1 = (-\infty, 40, 120), \quad \tilde{a}_2 = (-\infty, 150, 220), \quad \tilde{a}_3 = (-\infty, 100, 260),$$

$$\tilde{b}_1 = (60, 200, +\infty), \quad \tilde{b}_2 = (20, 80, +\infty), \quad \tilde{b}_3 = (100, 220, +\infty), \quad \tilde{b}_4 = (120, 240, +\infty),$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4.$$

Bulanık arz-talep miktarlarının üyelik fonksiyonları (5.22) ve (5.23) yardımıyla

$$\mu_1(a_1) = \begin{cases} 1 & , a_1 \leq 40 \\ \frac{120-a_1}{80} & , 40 \leq a_1 \leq 120, \\ 0 & , a_1 \geq 120 \end{cases}, \mu_2(a_2) = \begin{cases} 1 & , a_2 \leq 150 \\ \frac{220-a_2}{70} & , 150 \leq a_2 \leq 220, \\ 0 & , a_2 \geq 220 \end{cases}$$

$$\mu_3(a_3) = \begin{cases} 1 & , a_3 \leq 100 \\ \frac{260-a_3}{160} & , 100 \leq a_3 \leq 260, \\ 0 & , a_3 \geq 260 \end{cases}, \mu_1(b_1) = \begin{cases} 0 & , b_1 \leq 60 \\ \frac{b_1-60}{140} & , 60 \leq b_1 \leq 200, \\ 1 & , b_1 \geq 200 \end{cases}$$

$$\mu_2(b_2) = \begin{cases} 0 & , b_2 \leq 20 \\ \frac{b_2-20}{60} & , 20 \leq b_2 \leq 80, \\ 1 & , b_2 \geq 80 \end{cases}, \mu_3(b_3) = \begin{cases} 0 & , b_3 \leq 100 \\ \frac{b_3-100}{120} & , 100 \leq b_3 \leq 220, \\ 1 & , b_3 \geq 220 \end{cases}$$

$$\mu_4(b_4) = \begin{cases} 0 & , b_4 \leq 120 \\ \frac{b_4-120}{120} & , 120 \leq b_4 \leq 240 \\ 1 & , b_4 \geq 240 \end{cases}$$

olarak belirlenir. Buna göre (5.25) 'e eşdeğer problem

Amaç : $\max \alpha$

Kısıtlar : $a_1 + 80\alpha \leq 120$, $a_2 + 70\alpha \leq 220$, $a_3 + 160\alpha \leq 260$,

$b_1 - 140\alpha \geq 60$, $b_2 - 60\alpha \geq 20$, $b_3 - 120\alpha \geq 100$, $b_4 - 120\alpha \geq 120$,

$a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2 - b_3 - b_4 = 0$,

$\forall i, j \ a_i, b_j \geq 0; \ 0 \leq \alpha \leq 1$ (5.32)

şeklindedir. (5.32) probleminin WINQSB paketi kullanılarak çözümü,

$\bar{a}_1 = 88$, $\bar{a}_2 = 192$, $\bar{a}_3 = 196$, $\bar{b}_1 = 116$, $\bar{b}_2 = 44$, $\bar{b}_3 = 148$, $\bar{b}_4 = 168$

olarak bulunur. Ayrıca maksimum tatmin derecesi $\bar{\alpha} = 0.4$ 'dir. Böylece bulanık olarak verilen arz-talep miktarları kesinleştirilmiş ve ayrıca arz-talep dengesi de sağlanmış olur.

Artık eldeki problem

$$\text{Amaçlar} : \min z^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij}, \quad k=1,2.$$

$$\text{Kısıtlar} : \sum_{j=1}^4 x_{1j} = 88, \quad \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 192, \quad \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 196,$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} = 116, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 44, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 148, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 168,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3 ; j=1,2,3,4)$$

şeklinde bir ÇALTTP'dir. Amaçların üyelik fonksiyonlarını tanımlamak için (5.14) yardımıyla belirlenen L_k ve U_k değerleri

$$L_1 = 1632, \quad U_1 = 4036, \quad L_2 = 1848, \quad U_2 = 4752$$

şeklindedir. Buna göre amaçların üyelik fonksiyonları

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & , z^1(x) \leq 1632 \\ \frac{4036 - z^1(x)}{4036 - 1632} & , 1632 < z^1(x) < 4036, \\ 0 & , z^1(x) \geq 4036 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & , z^2(x) \leq 1848 \\ \frac{4752 - z^2(x)}{4752 - 1848} & , 1848 < z^2(x) < 4752 \\ 0 & , z^2(x) \geq 4752 \end{cases}$$

yapısındadır. Böylece (5.28)'e eşdeğer LP problemi

Amaç : $\max \lambda$

Kısıtlar : $5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 8x_{14} + 3x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} +$

$$+2x_{24} + x_{31} + 10x_{32} + 16x_{33} + 6x_{34} + 2404\lambda \leq 4036$$

$$8x_{11} + 9x_{12} + 12x_{13} + 4x_{14} + 5x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} +$$

$$+2x_{24} + x_{31} + 14x_{32} + 20x_{33} + x_{34} + 2904\lambda \leq 4752$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{1j} = 88, \quad \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 192, \quad \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 196,$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} = 116, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 44, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 148, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 168,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3 ; j=1,2,3,4), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (5.33)$$

olarak belirlenir. WINQSB paketi kullanılarak elde edilen optimal uzlaşık çözüm,

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 44 & 43 & 1 \\ 0 & 0 & 105 & 87 \\ 116 & 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca tatmin derecesi $\lambda = 0.9404$ 'dir. X^* çözümünde amaç fonksiyonları $\mu(z^1(X^*)) = 0.9405$, $\mu(z^2(X^*)) = 0.9404$ tatmin oranlarıyla $z^1(X^*) = 1775$ ve $z^2(X^*) = 2021$ değerlerini almıştır.

SONUÇ

Taşıma problemi stok kontrolü, işgücü programlama, personel atama, lojistikte tedarik zinciri yönetiminde oldukça önemli rol oynamaktadır. Maliyet minimizasyonu amacının yanı sıra müşterilere ortalama dağıtım zamanının minimizasyonu, belli bir proste yapılan üretimin maksimizasyonu, vs gibi birden fazla amacın probleme dahil edilmesi taşıma probleminin önemini arttırmaktadır.

Bu tezde, gerçek hayatta birçok uygulama alanı bulunan çok amaçlı bulanık taşıma probleminin lineer durumu göz önüne alınmıştır. Çok amaçlı taşıma problemine bulanık yaklaşımlar, parametrelerin bulanık ya da kesin olması durumlarına bağlı olarak iki şekilde incelenmiştir. Bu çalışmada ilk olarak, tek amaçlı taşıma problemi için bir parametrik yaklaşım, arz-talep miktarları ve fiyatları kesin olan çok amaçlı taşıma problemi için optimal uzlaşık çözüm üreten iki bulanık programlama yaklaşımı verilmiştir. Bulanık parametrelili çok amaçlı taşıma problemi ele alındığında ise parametrelerindeki bulanıklık giderilerek problem kesin parametrelili çok amaçlı taşıma problemine dönüştürülmüş ve bulanık programlama yaklaşımıyla çözülmüştür. Anlatılan problemler için verilen çözüm yaklaşımları örnekler üzerinde açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

- Abd El-Wahed, W.F., (2001), "A Multi-Objective Transportation Problem under Fuzziness", *Fuzzy Sets and Systems*, 117: 27-33.
- Ahlatcıoğlu, M., Sivri, M. ve Güzel, N., (2002), "Transportation of the fuzzy amounts using the fuzzy cost", *Journal of Marmara for Pure and Applied Sciences*, 18.
- Aksoy, Y., Özkan, E.M. ve Karanfil, S., (2003), *Bulanık Mantığa Giriş*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 4, İstanbul.
- Ammar, E.E. ve Youness, E.A., (2004), "Study on Multiobjective Transportation Problem with Fuzzy Numbers", *Applied Mathematics and Computation*, In Press, Corrected Proof.
- Chanas, S. ve Kuchta, D., (1998), "Fuzzy Integer Transportation Problem", *Fuzzy Sets and Systems*, 98:291-298.
- Civalek, Ö., (1999), "Dairesel Plakların Nöro-Fuzzy Tekniği ile Analizi", *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 1: (2) 13-31.
- Dantzig, G.B., (1974), *Linear Programming and Extensions*, Sixth Printing, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Das, S.K., Goswami, A. ve Alam, S.S., (1999), "Multiobjective Transportation Problem with Interval Cost, Source and Destination Parameters", *European Journal of Operational Research*, 117:100-112.
- Evren, R. Ve Ülengin, F., (1992), *Yönetimde Çok Amaçlı Karar Verme*, İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, Gümüşsuyu, İstanbul.
- Halaç, O., (1991), *Kantitatif Karar Verme Teknikleri*, Evrim Basım Yayım Dağıtım, 51, İstanbul.
- Hillier, F.S., ve Lieberman, G.J., (1990), *Introduction to Operations Research*, McGraw-Hill Publishing Company, United States of America.
- Kaufmann, A. ve Gupta, M.M., (1988), *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Elsevier Science Publishers B.V., Netherlands.
- Lai, Y.-J. ve Hwang, C.-L. (1996), *Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag Heidelberg.
- Li, L. ve Lai, K.K., (2000), "A Fuzzy Approach to the Multiobjective Transportation Problem", *Computers & Operations Research*, 27: 43-57.
- Liu, S.-T., (2003), "The Total Cost Bounds of the Transportation Problem with Varying Demand and Supply", *Omega*, 31: 247-251.
- Liu, S.-T. ve Kao, C., (2004), "Solving Fuzzy Transportation Problems Based on Extension Principle", *European Journal of Operational Research*, 153: 661-674.
- Öztürk, A., (2002), *Yöneylem Araştırması*, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa.
- Sakawa, M., (1993), *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, Newyork.

Sakawa, M., Nishizaki, I. ve Uemura, Y., (2001), “Fuzzy Programming and Profit and Cost Allocation for a Production Transportation Problem”, *European Journal of Operational Research*, 131: 1-15.

Sezginman, İ., (1993), *Lineer Programlama Teori ve Problemleri*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.

Taha, H.A., (2000), *Yöneylem Araştırması (6. Basımdan Çeviri)*, Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Tulunay, Y., (1980), *Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları*, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 2721, İstanbul.

Ülker, E. ve Çomak, E., (2004), “İki Boyutta Verilen 4 Kontrol Noktasına Göre Bulnaık Mantık Kullanılarak Eğri Uydurulması”, *IJSIT Lecture Notes of 1st International Conference on Informatics*, 1 (2).

Young-Jou Lai ve Ching-Lai Hwang, (1996), *Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, 2nd Corrected Printing, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Zimmermann H.-J., (1993), *Fuzzy Set Theory-and Its Applications*, Second, Revised Edition, Sixth Printing, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 28.07.1981

Doğum yeri İstanbul

Lise 1995-1999 Pertevniyal Lisesi

Lisans 1999-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2003- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

2005-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

